LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM DES
MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

MATHEMATIK FÜR ÖKONOMEN
ÜBUNGSMETHODISCHE LEHRBRIEFE

3. LEHRBRIEF

Analysis (Fortsetzung)
Wahrscheinlichkeitsrechnung

02 4027 03 0

MATHEMATIK FÜR ÖKONOMEN
ÜBUNGSMETHODISCHE LEHRBRIEFE

3. LEHRBRIEF

Analysis (Fortsetzung)
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Verfaßt von
Doz. Dr. sc. Gernot Z e l l m e r
Dr. Vera V i e l i t z
Hochschule für Ökonomie "Bruno Leuschner" Berlin
Sektion Leitung, Informationsverarbeitung und Statistik

02 4027 03 0

Redaktionsschluß: Oktober 1984

1. Ausgabe 2. Auflage

Best.-Nr. 02 4027 03 0 • Aufl.1250 • Veröffentlicht unter Ag 628/515/87 DDR

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden. Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen.

Gesamtherstellung: Polygrafischer Bereich des Wissenschaftlichen Informationszentrums der Bergakademie Freiberg

Inhaltsverzeichnis

3. Analysis (Fortsetzung)

3.7. Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

3.7.1. Beispiele

B 20: Für den jährlichen absoluten Zuwachs Δy_t einer ökonomischen Größe $y(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, sei bekannt, daß sie der folgenden Differenzengleichung genügt:

$$y(t+1) - y(t) = \frac{1}{10}y(t) + 50 .$$

Zum Zeitpunkt $t_o = 0$ sei $y_o = 500$.

1. Geben Sie die allgemeine Lösung $y_k^{(1)}$ der Differenzengleichung an!
2. Geben Sie eine spezielle Lösung $y_k^{(s)}$ an!
3. Auf welchen Wert wird die Größe $y(t)$ nach 4 Jahren angewachsen sein?

Lösung

1. $y(t+1) = y(t) + \frac{1}{10}y(t) + 50$ $\qquad t = k$

$$y_{k+1} = 1{,}1y_k + 50$$

Allgemeine Lösung: $y_k^{(1)} = a^k y_o + b\,\frac{1-a^k}{1-a}$

$a = 1{,}1$; $\quad b = 50$

$$y_k^{(1)} = 1{,}1^k y_o + 50\,\frac{1-1{,}1^k}{1-1{,}1}$$

$$y_k^{(1)} = 1{,}1^k y_o - 500\,(1-1{,}1^k)$$

$$y_k^{(1)} = 1{,}1^k\,(y_o + 500) - 500$$

2. $y_o = 500$; $\quad y_k^{(s)} = 1000 \cdot 1{,}1^k - 500$

3. $k = 4$; $\quad y(4) = y_4 = 1000 \cdot 1{,}1^4 - 500$, $\quad y_4 = 964{,}1$

Nach 4 Jahren erreicht y den Wert $y(4) = 964{,}1$.

B 21: 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+2} - 8\,y_{k+1} + 16\,y_k = 0 \;!$$

2. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung dieser Differenzengleichung, wenn $y_o = 2$ und $y_1 = 10$ ist!

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 16y_k = 3^k \ !$$

Lösung

1. Der Ansatz $y_k = m^k$ führt auf die charakteristische Gleichung

$$m^2 - 8m + 16 = 0$$

mit $m_1 = m_2 = 4$.

Somit würde folgen: $y_k^{(1)} = y_k^{(2)} = 4^k$.

Die beiden Lösungen sind linear abhängig (sie sind gleich) und bilden daher kein Fundamentalsystem.

Für $y_k^{(2)}$ wird daher angesetzt: $y_k^{(2)} = k \cdot 4^k$.

$y_k^{(1)} = 4^k$ und $y_k^{(2)} = k \cdot 4^k$ sind linear unabhängig.

Für $k = 0$: $y_0^{(1)} = 4^0 = 1$, $y_0^{(2)} = 0 \cdot 4^0 = 0$

$k = 1$: $y_1^{(1)} = 4^1 = 4$, $y_1^{(2)} = 1 \cdot 4^1 = 4$

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ sind Lösungen der Differenzengleichung. Durch Einsetzen in die Differenzengleichung ist dies zu bestätigen.

Allgemeine Lösung: $y_k^{(H)} = c_1 4^k + c_2 k \cdot 4^k$

2. Bestimmung einer speziellen Lösung $y_k^{(s)}$ für $y_0 = 2$ und $y_1 = 10$

$k = 0 \quad 2 = c_1$

$k = 1 \quad 10 = 4 \cdot c_1 + 4c_2 : \quad 10 = 8 + 4c_2 , \quad c_2 = \frac{1}{2}$

$$y_k^{(s)} = 2 \cdot 4^k + \tfrac{1}{2} k \cdot 4^k$$

3. $y_{k+2} - 8y_{k+1} + 16y_k = 3^k$ ist inhomogen.

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung:

$$y_k^{(1)} = y_k^{(H)} + y_k^{*}$$

$y_k^{(H)}$: allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung

y_k^*: eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzengleichung,

$$y_k^{(H)} = c_1\, 4^k + c_2\, k4^k$$

Ansatz: $y_k^* = B \cdot 3^k$, da $m = 3$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

$$y_k^* = B \cdot 3^k, \quad y_{k+1}^* = B \cdot 3^{k+1}, \quad y_{k+2}^* = B \cdot 3^{k+2}$$

Einsetzen in die Differenzengleichung:

$$\begin{aligned}
B \cdot 3^{k+2} - 8 \cdot B \cdot 3^{k+1} + 16 \cdot B \cdot 3^k &= 3^k \qquad \Big| : 3^k \neq 0 \\
B \cdot 3^2 - 8 \cdot B \cdot 3 + 16 \cdot B &= 1 \\
9\,B - 24\,B + 16\,B &= 1 \\
B &= 1\,; \qquad y_k^* = 3^k
\end{aligned}$$

$$y_k^{(1)} = c_1\, 4^k + c_2 k \cdot 4^k + 3^k\,.$$

3.7.2. Übungsaufgaben

57. Es sei $y(x) = 2x^3 + 3x^2$, $x \in N$. Es ist die zweite Differenz $\Delta^2 y(x)$ mit $h = 1$ zu bilden.

58. Bringen Sie die Differenzengleichung

    $$3\,\Delta^3 y(x) + 2\,\Delta^2 y(x) - 4\,\Delta y(x) = 0\,, \qquad x \in N,$$

    auf die Form

    $$y_{k+n} + a_{n-1}\, y_{k+n-1} + \dots + a_1\, y_{k+1} + a_o\, y_k = 0$$

    mit $x = k$, $k \in N$; $y(k) = y_k$!

59. Von den folgenden Differenzengleichungen ist die Ordnung anzugeben und festzustellen, ob sie homogen oder inhomogen sind!

    1. $2\,\Delta^4 y(x) - 3\,\Delta^3 y(x) - 2\,\Delta y(x) = 0$
    2. $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 3y_k - 2^k = 0$
    3. $y_{k+3} + 3y_{k+2} - y_{k+1} = 4^k$
    4. $y(t) = a\, y(t)$

60. Zu Beginn eines Jahres werden 1000,- M auf ein Konto bei einem Geldinstitut eingezahlt und jährlich mit 3 % verzinst. Am Ende eines jeden Monats werden regelmäßig 200,- M auf das Konto eingezahlt.

1. Stellen Sie die entsprechende Differenzengleichung auf!
2. Auf welchen Betrag wächst das Guthaben nach zwei Jahren an?
3. Nach welcher Zeit ist der Betrag auf 11000,- M angewachsen?

61. Das Nationaleinkommen der DDR betrug 1967 ($t_o = 0$) annähernd 100 Mrd. Mark. Das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo wird mit 5 % angegeben.

1. Stellen Sie die zugehörige Differenzengleichung auf, wobei $y = y(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ das Nationaleinkommen nach t Jahren angibt!
2. Bestimmen Sie den Wert $y(3)$!
3. Wie groß wird das Nationaleinkommen nach 5 Jahren sein (in Mrd. Mark), wenn gleichbleibende Entwicklung angenommen wird?
4. In welchem Jahr t kann sich das Nationaleinkommen im Vergleich zum Anfangswert verdoppelt haben bei gleichbleibender Entwicklung?

62. Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{k+2} - 7y_{k+1} + 12y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Geben Sie die allgemeine Lösung an!
2. Oberprüfen Sie die lineare Unabhängigkeit von $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$!
3. Geben Sie eine spezielle Lösung an, wenn $y_o = 2$ und $y_1 = 5$ bekannt sind!
4. Bestimmen Sie den Wert von $y(k)$ für $k = 3$!

63. Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{k+2} - 10y_{k+1} + 25y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an sowie eine spezielle Lösung, wenn $y_o = 3$ und $y_1 = 20$ sind!

64. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 12y_k = 6^k \text{ !}$$

65. Ein Betrieb hat zu einem bestimmten Jahr t den Ausbau seiner Anlagen und die Einführung neuer Technologien abgeschlossen. Für die Produktion ist jährlich ein Zuwachs von

40 % des Produktionsvolumens des Jahres t und von 15 % des Produktionsumfanges des vorangegangenen Jahres (t - 1) vorgesehen. Im Jahr t wurden vom Betrieb 440 ME hergestellt, im vorangegangenen Jahr wurden 400 ME produziert.

1. Stellen Sie die entsprechende Differenzengleichung auf!
2. Geben Sie die allgemeine Lösung an!
3. Welche Produktionsgröße kann nach 4 Jahren erreicht werden?

66. Der jährliche Zuwachs der Produktion eines Betriebes beträgt 4 %. Zum Zeitpunkt t = 0 werden 1500 ME produziert. 20 % des Erzeugnisses haben eine Lebensdauer von einem Jahr, die restlichen 80 % von etwa 2 Jahren. Mit welchem Produktionsumfang muß der Betrieb jährlich produzieren, um den Bedarf und den Ersatzbedarf zu decken?

1. Stellen Sie die Differenzengleichung auf!
2. Geben Sie die allgemeine Lösung an!
3. Wie groß ist die Produktion nach 3 Jahren?

Lösungen zu Abschnitt 3.

Wiederholen Sie die Grundbegriffe der Mengenlehre, Relationen und Operationen für Mengen!

1. $N = M_1 \cup M_2 = \{x \in R / -2 \leqq x \leqq 8\}$
   $T = M_1 \cap M_2 = \{x \in R / \ 1 < x < 6\}$
   $S = M_1 \setminus M_2 = \{x \in R / -2 \leqq x \leqq 1\}$

   Bemerkung:

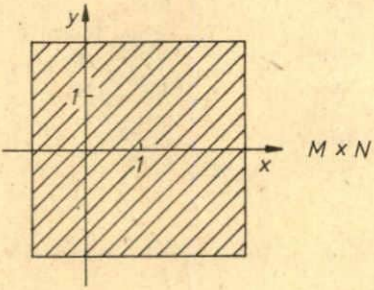
   R: Bereich der reellen Zahlen. Die reellen Zahlen werden auf der Zahlengeraden veranschaulicht. Sie können sich daher die Mengen M_1, M_2, N, T, S auf der Zahlengeraden darstellen.

   Mengen reeller Zahlen können auf der Zahlengeraden als Intervalle angegeben werden.

   M_1: $x \in [-2, 6)$; M_2: $x \in (1, 8]$; N: $x \in [-2, 8]$;

   T: $x \in (1, 6)$; S: $x \in [-2, 1]$.

2. $M_1 = M_3$; $M_2 \subset M_1$; $M_2 \subset M_3$

3. 

4. Wiederholen Sie die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen! Beachten Sie insbesondere die Multiplikation einer Ungleichung mit einem negativen Faktor ($c < 0$)!
   Wiederholen Sie die Definition des absoluten Betrages!

4.1. Die Ungleichung wird mit dem Nenner $x + 1$ multipliziert. Dabei ist zu beachten, daß $x + 1 > 0$ oder $x + 1 < 0$ gelten kann. Dies erfordert bei der Lösung eine Fallunterscheidung.

   1. Fall: $x + 1 > 0$, so folgt $x - 1 \geqq 2(x + 1)$

   A_1: $x > -1$, A_2: $x \leqq -3$

   $L_1 = A_1 \cap A_2$, $L_1 = \emptyset$, $\emptyset$: leere Menge.

2. Fall: $x + 1 < 0$, so folgt $x - 1 \leq 2(x + 1)$

B_1: $x < -1$, B_2: $x \geq -3$

$L_2 = B_1 \cap B_2$, L_2: $x \in [-3, -1)$

$L = L_1 \cup L_2$, $L = \{x \in R / -3 \leq x < -1\}$

Veranschaulichen Sie sich die Mengen A_1, A_2 sowie B_1, B_2 auf der Zahlengeraden! Zur Lösungsmenge des ersten Falles gehören alle reellen Zahlen x, die sowohl zu A_1 als auch zur Menge A_2 gehören (Durchschnitt). Zur Lösungsmenge des zweiten Falles gehören alle reellen Zahlen x, die sowohl zu B_1 als auch zu B_2 gehören. Die Lösungsmenge L ergibt sich aus allen reellen Zahlen x, die zu L_1 oder zu L_2 gehören (Vereinigung von L_1 mit L_2).

4.2. $-x^2 - 4x + 5 > 0 \mid \cdot (-1)$ $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -5$

$x^2 + 4x - 5 < 0$ $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$

$(x - 1)(x + 5) < 0$ Fallunterscheidung

1. Fall: $x - 1 > 0$ und $x + 5 < 0$ L_1: $\emptyset$

2. Fall: $x - 1 < 0$ und $x + 5 > 0$ L_2: $x \in (-5, 1)$

$L = \{x \in R / -5 < x < 1\}$

4.3. Es kann $x + 6 \geq 0$ oder $x + 6 < 0$ gelten laut Definition des absoluten Betrages. Es muß also eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

1. Fall: $x + 6 \geq 0$, $|x + 6| = x + 6$, $x + 6 < 3$

$x \geq -6$, $x < -3$, L_1: $x \in [-6, -3)$

2. Fall: $x + 6 < 0$, $|x + 6| = -(x + 6)$, $-(x + 6) < 3$

L_2: $x \in (-9, -6)$

$L = L_1 \cup L_2$, $L = \{x \in R / -9 < x < -3\}$.

4.4. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{(x + 1)^2} > 8$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{(x + 1)^2} > 4$

$\sqrt{a^2} = |a|$ nach Definition, also $|x + 1| > 2$;

Fallunterscheidung: L_1: $x \in (1, \infty)$; L_2: $x \in (-\infty, -3)$

$L = \{x \in R / -\infty < x < -3\} \cup \{x \in R / 1 < x < \infty\}$

5.1. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, Kettenregel, mittelbare Funktion

2. $f'(x) = 3x^2 \cos x^3$, Kettenregel

3. $f'(x) = \dfrac{-4x}{1 - x^4}$, Kettenregel, Quotientenregel

4. $f'(x) = \dfrac{-10x}{\left(x^2 - 2\right)^2}$, Quotientenregel

5. $f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$, Produktregel

6. $f'(x) = \ln x^2 + 2$ Produktregel, Kettenregel

7. $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right)$

6.1. $\left\{a_n\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right\}$

nicht monoton;

nach oben beschränkt: $K = 1$, nach unten beschränkt: $k = -\frac{1}{2}$,

daher beschränkt: $C = \max\left\{|k|, |K|\right\}$, $C = 1$,

C: Schranke.

$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right| \leqq C$; $\dfrac{1}{n} \leqq 1$, $n \geqq 1$ für alle n.

6.2. $\left\{(-1)^n \dfrac{n+3}{2n}\right\} = \left\{-2, \frac{5}{4}, -1; \frac{7}{8}, -\frac{8}{10}, \frac{9}{12}, \dots\right\}$

nicht monoton, beschränkt: $C = 2$

6.3. $\left\{\dfrac{2n^2 - 1}{3n + 1}\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{7}{7}, \frac{17}{10}, \frac{31}{13}, \frac{49}{16}, \frac{71}{19}, \dots\right\}$

nach unten beschränkt: $k = 0$ $\left(k_1 = \frac{1}{4}\right.$, usw.)

$0 \leqq \dfrac{2n^2 - 1}{3n + 1}$, $0 \leqq 2n^2 - 1$, $2n^2 > 1$ für $n = 1, 2, \dots$

nach oben unbeschränkt;

monoton wachsend: $a_n \leqq a_{n+1}$; $\dfrac{2n^2 - 1}{3n + 1} \leqq \dfrac{2(n+1)^2 - 1}{3(n+1) + 1}$

für alle n: $0 \leqq 6n^2 + 10n + 5$

7.1. Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent. (Konvergenzkriterium)

$\left\{a_n\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots\right\}$

1. Monotonie: $a_n \leqq a_{n+1}$ monoton wachsend

$$\frac{2n - 1}{n} \leqq \frac{2(n+1) - 1}{n + 1}, \quad n > 0, \quad n + 1 > 0$$

$$(2n - 1)(n + 1) \leqq (2n + 1) \cdot n$$

$$2n^2 - n + 2n - 1 \leqq 2n^2 + n$$

$$-1 \leqq 0 \quad \text{für alle } n = 1, 2, \dots$$

2. beschränkt: $k = 1$, $K = 2$, $C = 2$

$$\left|\frac{2n-1}{n}\right| \leqq 2 \; ; \quad 2n - 1 \leqq 2n$$

$$-1 \leqq 0$$

Da die Zahlenfolge monoton und beschränkt ist, so ist sie konvergent.

7.2. $\{a_n\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \frac{8}{7}, \frac{11}{9}, \ldots\right\}$

1. monoton wachsend

2. beschränkt, $C = 2$ oder $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = 3$;

die Zahlenfolge ist konvergent.

8.1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$; 8.2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

8.3. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}} = \infty$$

denn: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = \infty$

8.4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

9.1. Für $p = 0$, $q \in R$, $r \in R$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{qn - 4}{rn^3 - 2n^2 + 5} = 0$;

für $p = 0$, $r = 0$, $q \in R$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

für $p = 0$, $r = 0$, $q = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ gilt für: $p = 0$, $q \in R$, $r \in R$ mit $r \neq 0$

$p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

9.2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$ mit $\frac{p}{r} = 6$, $r \neq 0$, $p \neq 0$;

$p = 6r$, $q \in R$; z. B. $p = 6$, $r = 1$, $q \in R$;

$p = 12$, $r = 2$, $q \in R$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 4$ für $p = 0$, $r = 0$, $\frac{q}{-2} = 4$, $q = -8$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

$$\lim_{n\to\infty}(2b_n - 3a_n) = 5$$

$$2\lim_{n\to\infty} b_n - 3\lim_{n\to\infty} a_n = 5$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 7$$

11. $b = a_{12} = 1\,601\,030\ m^3$

12. Schnittpunkte mit der x-Achse: $\sqrt{\frac{1}{12}}\,(x^2 - 4x - 5) = 0$

$x_1 = 5, \quad x_2 = -1; \quad x \in (0, \infty)$

$f'(x) = \sqrt{\frac{1}{12}}\,(2x - 4) \;; \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$f'(5) = \sqrt{3}\,, \quad \tan\alpha = \sqrt{3}\,, \quad \alpha = 60^\circ$

13. $D(f)\colon x \in (-\infty, \infty) \;; \quad (x_0, y_0) = 0, -1)$

$f'(x) = 4 - e^x\,(2x + 3)\,, \quad f'(0) = 1$

Gleichung der Tangente: $y = x - 1$

14. $D(f)\colon x \in (-\infty, \infty)\,,$ $f(x)$ stetig in $D(f)$;

$f(x) > 0$ für $x \in D(f)$; $f(x)$ besitzt keine Nullstellen,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$f(x)$ ist monoton wachsend in $(-\infty, 0]$,

$f(x)$ ist monoton fallend in $[0, \infty)$.

Extremwert: $P_e = (0, 1)$ Maximum;

Wendepunkte: $P_{1w} = (-1;\ 0{,}6065)$, $P_{2w} = (1;\ 0{,}6065)$

$f(x)$ ist in $(-\infty, -1)$ konvex,

in $(-1, +1)$ konkav,

in $(1, \infty)$ konvex.

15. $y(t) = 10^3 e^{0{,}01t} \qquad 0 \leqq t \leqq 10$

15.1. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(10) - y(0)}{10 - 0} = \frac{10^3 e^{0{,}1} - 10^3 e^0}{10 - 0}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10{,}517$

15.2. $y'(t) = 10e^{0{,}01t}$, $y'(1) = 10{,}1$, $y'(5) = 10{,}513$

$y'(10) = 11{,}0517$

15.3. $y(t)$ ist monoton wachsend und konvex.

15.4. $w(t, y) = \frac{y'(t)}{y(t)}$, $w(t, y) = 0{,}01$

Die Exponentialfunktion besitzt ein konstantes Wachstumstempo.

16. $y(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$ mit $a = 1;\ b = 0{,}48;\ c = 0{,}34$

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = a$, die Funktion strebt dem Sättigungswert

$a = 1$ zu; der Sättigungswert entspricht einem Ausstattungsgrad an Kühlschränken von 100 %.

$$y'(t) = \frac{abce^{-ct}}{\left(1 + be^{-ct}\right)^2}$$; $y(t)$ ist monoton wachsend, besitzt keinen Extremwert.

$$y''(t) = \frac{abc^2e^{-ct}\,(be^{-ct} - 1)}{\left(1 + be^{-ct}\right)^3}, \quad abc^2e^{-ct} > 0$$

$y(t)$ ist in $\left[t_o, t_w\right]$ konvex, in $\left[t_w, t_{14}\right]$ konkav.

$y(t)$ besitzt im Punkt $P_w = (t_w, y_w) = \left(\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2}\right)$ einen Wendepunkt.

Zur Berechnung des Wendepunktes: $y''(t) = 0$ für

$be^{-ct} - 1 = 0$; $e^{-ct} = \frac{1}{b}$, $\frac{1}{e^{ct}} = \frac{1}{b}$, $e^{ct} = b$;

damit folgt: $ct \cdot \ln e = \ln b$, $t = \frac{\ln b}{c}$, $\ln e = 1$.

$P_w = (\frac{\ln 0{,}48}{0{,}34})$; $0{,}5)$, $P_w = (-2{,}16\ ;\ 0{,}5)$

$t = -2{,}16$ entspricht etwa dem Jahr 1969, in diesem Jahr entsprach der Ausstattungsgrad an Kühlschränken je 100 Haushalte ca. 50 %.

Eine Funktion des Typs $y(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$; $a, b, c > 0$ mit dem angegebenen Wendepunkt bei $t_w = \frac{a}{2}$ wird als logistische Funktion bezeichnet.

17.1. $n = 3$ ($n = 3{,}2$, jedoch nur sinnvoll für n ganzzahlig)

17.2. zu 83,1 %

18. Durchschnittskosten pro Jahr (in 1000 M)

$K(x) = \frac{50 + R(x)}{x}$; $K(x) = \frac{5}{20}x + \frac{9}{20} + 1004 \cdot \frac{1}{20x}$; $x > 0$

$K'(x) = \frac{5}{20} - \frac{1004}{20} \cdot \frac{1}{x^2}$; $x^2 = 200{,}8$; $x \approx 14{,}2$

$K''(x) = \frac{502}{5x^3}$; $K''(14{,}2) > 0$, $x = 14{,}2$ Min.

$K(x)$ für $x > 0$ differenzierbar, für $x > 0$ ist $x = 14{,}2$ auch absolutes Minimum.

Nutzungsdauer: 14,2 Jahre,

minimale Durchschnittskosten pro Jahr: 7520 M.

19. $y = f(x) = 0{,}15 + \frac{9}{x}$, $x \in N$, Darstellung in $[1, \infty)$

$(x_o, y_o) = (1;\ 9{,}15)$

$y = f(x)$ monoton fallend, konvex; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0{,}15$

20. $V = 250\ \text{cm}^3$; $V = \pi r^2 h$; $O = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$; $h = \dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

21.1. $k(x) = \dfrac{y(x)}{x}$; $k(x) = 0{,}02x^2 - 0{,}8x + 200$, $x > 0$

$x_e = 20$

21.2. Vorgegebenes Intervall für die zu produzierende Menge x:

$x \in [30,\ 40]$.

$k'(x) = 0{,}04x - 0{,}8$

$k(x)$ ist monoton fallend in $(0,\ 20]$.

$k(x)$ ist monoton wachsend in $[20,\ 40]$.

Für das vorgegebene Intervall liegen die minimalen Stückkosten bei $x_o = 30$ ME. x_o ist für $x \in [20,\ 40]$ absolutes Minimum.

21.3. Minimale Kosten: $k(30) = 194$ WE

22.1. $y(t) = \dfrac{2t}{t + 1}$, $t > 0$; $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 2$

Sättigungswert: $y_s = 2$

22.2. $y'(t) = \dfrac{2}{(t + 1)^2}$, $\dfrac{2}{(t + 1)^2} > 0$ für alle $t > 0$,

also $y'(t) \geqq 0$, $y(t)$ ist monoton wachsend.

$y''(t) = \dfrac{-4}{(t + 1)^3}$, $y''(t) < 0$ für alle $t > 0$

$y(t)$ ist für $t > 0$ konkav,

$y(t)$ ist für $t > 0$ gebremst wachsend und strebt dem Sättigungswert $y_s = 2$ zu.

22.3. $w(t,\ y) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$, $w(t,\ y) = \dfrac{1}{t\ (t + 1)}$

22.4. $w'(t,\ y) = -\dfrac{2t + 1}{(t^2 + t)^2}$

Für $t > 0$ gilt: $2t + 1 > 0$, $t^2 + t > 0$, $w'(t,\ y) < 0$.

$w(t,\ y)$ ist für $t > 0$ monoton fallend.

Die Kennziffer $y(t)$ ist für $t > 0$ degressiv wachsend.

23. $R = 30\ 000$ ME $\qquad q_e = \sqrt{\dfrac{2 \cdot k_s \cdot R}{k_L \cdot T}}$

$T = 6$ Monate

$k_L = 0{,}3\ \dfrac{\text{WE}}{\text{ME} \cdot \text{Monat}}$ $\qquad q_e = 2000$ ME

$k_s = 120$ WE $\qquad K_{min} = \sqrt{2 \cdot k_s \cdot k_L \cdot R \cdot T}$

$n = 15$ $\qquad K_{min} = 3600$ WE

$t_s = 12$ Tage (1 Monat $\hat{=}$ 30 Tage)

24. $T = 1$ Jahr $= 12$ Monate $\qquad k_s = \dfrac{q_e^2 \cdot T \cdot k_L}{2 \cdot R}$

$R = 24\,000$ ME

$k_L = 0{,}05 \dfrac{\text{WE}}{\text{ME} \cdot \text{Monat}}$ $\qquad k_s = 450$ WE

$q_e = 6000$ ME $\qquad K_{min} = 3600$ WE

$q = 5000$; $K(q) = \dfrac{R \cdot k_s}{q} + \dfrac{q}{2} \cdot k_L \cdot T$; $\quad K(q) = 3660$ WE

Die Kosteneinsparungen betragen 60 WE.

25. $y'(x) = \dfrac{40{,}04e^{-0{,}00616x}}{\left(1 + 65e^{-0{,}00616x}\right)^2}$ $\qquad 830 \leq x \leq 1006$

$\varepsilon(y, x) = \dfrac{0{,}4004\, x \cdot e^{-0{,}00616x}}{1 + 65e^{-0{,}00616x}}$

$\left.\begin{array}{l} \text{für } x_0 = 830,\ \varepsilon(y, x_0) \approx 1{,}438 > 1 \\ \text{für } x_0 = 920,\ \varepsilon(y, x_0) \approx 1{,}04 > 1 \end{array}\right\}$ Entwicklung ist überproportional

$\left.\begin{array}{l} \text{für } x_0 = 950,\ \varepsilon(y, x_0) \approx 0{,}921 < 1 \\ \text{für } x_0 = 1000,\ \varepsilon(y, x_0) \approx 0{,}744 < 1 \end{array}\right\}$ Entwicklung ist unterproportional

Die Funktion $y = f(x)$ strebt dem angenommenen Sättigungswert $a = 100$ zu.

26.1. $D(f) = \{(x_1, x_2)/x_1 \in R \wedge x_2 \in R\}$: $\quad (x_1, x_2) \in R^2$

$W(f)$: $0 \leq y < \infty$

2. $D(f) = \{(x_1, x_2)/x_1 \in R \wedge x_2 \leq 1\}$; $\quad W(f)$: $0 < y < \infty$

3. $D(f) = \{(x_1, x_2)/x_1 \in R \wedge x_2 \in R \wedge x_1 \neq x_2\}$,
das sind alle Punkte der x_1, x_2-Ebene, die <u>nicht</u> auf der Geraden $x_1 = x_2$ liegen.

4. $x^2 - y^2 - 1 > 0$, $\quad x^2 - y^2 > 1$
$D(f) = \{(x, y)/x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 - y^2 > 1\}$

5. $(x - y)^2 > 0$, $\quad x \neq y$
$D(f) = \{(x, y)/x \in R \wedge y \in R \wedge y \neq x\}$.

27.1. $z = f(x, y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2 \quad (x, y) \in R^2; -\infty < z < \infty$

$z = 0 \quad -\frac{1}{2}x - 2y + 2 = 0$

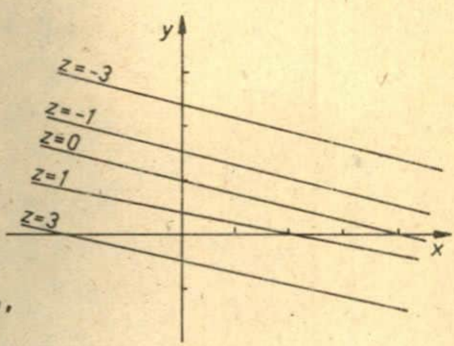
$y = -\frac{1}{4}x + 1$

$z = 1 \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$z = 3 \quad y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

$z = -1 \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$z = -3 \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$



$z = f(x, y)$ ist eine Ebene, die in Richtung des Koordinatenursprungs ansteigt.

27.2. $z = f(x, y) = 3x + 2y \qquad D(f): (x, y) \in R^2$

$W(f): -\infty < z < \infty$

parallel verlaufende Geraden:

für $z = 0 \quad y = -\frac{3}{2}x$; für $z = -1 \quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$;

$z = 1 \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $z = -2 \quad y = -\frac{3}{2}x - 1$;

$z = 2 \quad y = -\frac{3}{2}x + 1$; Die Fläche ist eine Ebene.

27.3. $D(f) = \{(x, y)/x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 \leqq 1\}$

$W(f): \quad 0 \leqq z \leqq 1$

Kreise um den Koordinatenursprung

für $z = 0$ mit $r = 1$, für $z = \frac{1}{4}$ mit $r \approx 0{,}97$,

$z = 1$ mit $r = 0$, $z = \frac{3}{4}$ mit $r \approx 0{,}66$,

$z = \frac{1}{2}$ mit $r \approx 0{,}87$, $z = \frac{5}{6}$ mit $r \approx 0{,}55$.

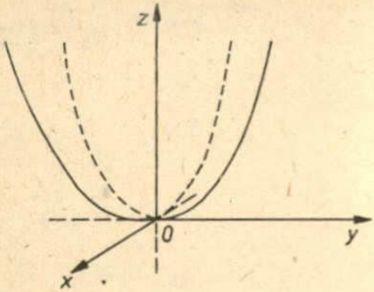
Oberfläche einer Halbkugel mit $r = 1$ um den Koordinatenursprung.

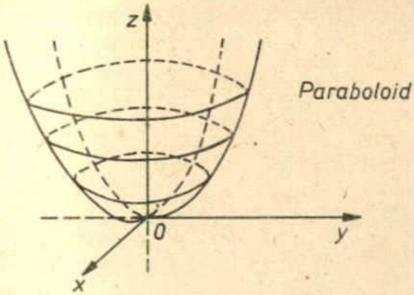
28.1. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y) \in R^2$

$0 \leqq z < \infty$

1. x, y-Ebene: $z = 0 \quad x^2 + y^2 = 0 \quad P_0(0, 0)$
2. y, z-Ebene: $x = 0 \qquad z = y^2$ Parabel
3. x, z-Ebene: $y = 0 \qquad z = x^2$ Parabel

mit Höhenlinien:





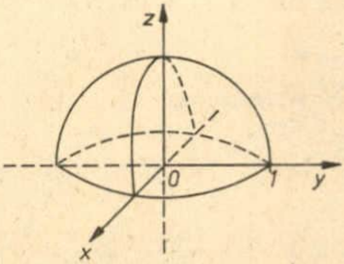
(s. Beispiel B 10)

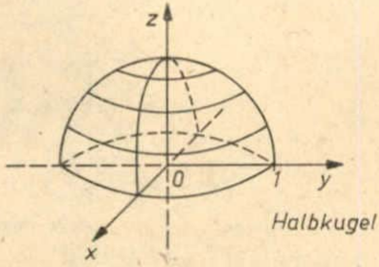
28.2. $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\qquad x^2 + y^2 \leqq 1$

$z \leqq 0 \leqq 1$

1. x, y-Ebene: $z = 0 \quad x^2 + y^2 = 1$
2. y, z-Ebene: $x = 0 \quad y^2 + z^2 = 1$
3. x, z-Ebene: $y = 0 \quad x^2 + z^2 = 1$

mit Höhenlinien s. Aufg. 27.3.





29.1. $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = 9x^2 - 10xy + 7y^2$ $\qquad y = \text{const.}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = -5x^2 + 14xy - 3$ $\qquad x = \text{const.}$

29.2. $\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1} = 4x_1 \sin 2x_2$ $\qquad x_2 = \text{const.}$

$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_{x_2} = 4x_1^2 \cos 2x_2$ $\qquad x_1 = \text{const.}$

29.3. Anwendung der Quotientenregel:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^2\, x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \; ; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = f_{x_2} = \frac{x_1^3 + x_1\, x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}$$

29.4. $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \frac{2y^2 - 3x^2 + 6x}{(1 - x)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = \frac{4xy}{1 - x}$

30.1. $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = 6x + y - 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = x - 2y - 5$

$f_x(2, -3) = 5$ $f_y(2, -3) = 3$

30.2. $f_{x_1}(1, \frac{\pi}{4}) = 4$; $f_{x_2}(1, \frac{\pi}{4}) = 0$

30.3. $f_{x_3} = \frac{8x_3}{x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2}$; $f_{x_3}(2, 0, 3) = \frac{3}{5}$

30.4. $f_{x_2} = (5x_1 - 2x_2)\, e^{x_1^2+5x_1x_2-x_2^2}$; $f_{x_2}(1, 0) = 5e$

31.1. $\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1} = 5x_1^4 + 6x_1^2\, x_2^2$; $f_{x_2} = 4x_1^3 + 10x_2^4$

$f_{x_1x_1} = 20x_1^3 + 12x_1\, x_2^2$; $f_{x_2x_2} = 4x_1^3 + 40x_2^3$

$f_{x_1x_2} = 12x_1^2\, x_2$ $f_{x_2x_1} = 12x_1^3\, x_2$

Nach dem Satz von Schwarz: $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$

31.2. $f_x = \frac{2y}{(1 - xy)^2}$ $f_y = \frac{2x}{(1 - xy)^2}$

$f_{xx} = \frac{4y^2}{(1 - xy)^3}$ $f_{yy} = \frac{4x^2}{(1 - xy)^3}$

$f_{xy} = \frac{2xy + 2}{(1 - xy)^3}$

31.3. $f_x = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$ $f_y = \frac{2x}{x^2 - y^2}$

$f_{xx} = \frac{4xy}{\left(x^2 - y^2\right)^2}$ $f_{yy} = \frac{4xy}{\left(x^2 - y^2\right)^2}$

$f_{xy} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2}$

32. $\Delta z = (x_o + \Delta x)\,(y_o + \Delta y) - y_o x_o$ $P_o = (2, 3)$

$\Delta z = 0{,}38$ $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta y = -0{,}1$

$f_x = y$; $f_y = x$; $dz = 0{,}4$; $z - dz = -0{,}02$

33. $z = f(x,y) = \frac{x}{y}$ $(x_o, y_o) = (10, 20)$

$f_x = \frac{1}{y} \qquad f_y = -\frac{x}{y^2}, \qquad \text{grad } f = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$

$\text{grad } f(x_o, y_o) = (\frac{1}{10}, -\frac{1}{40})$

34.1. $(x_e, y_e) = (2, -1)$ ist ein Minimum, $z_e = f(x_e, y_e) = 1$

34.2. Stationärer Punkt: $P_o = (4, -3)$, $D < 0$, es liegt kein Extremwert vor.

34.3. $f_x = 6x^2 + 4_y$; $\qquad f_y = 4x - 6y^2$

Stationäre Punkte: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

$f_{xx} = 12x, \quad f_{yy} = -12y, \quad f_{xy} = 4$

P_1: $f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -16$, $D < 0$

P_1 ist kein Extremwert.

P_2: $f_{xx}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \cdot f_{yy}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) - f_{xy}^2(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 64 - 16 > 0$

$D > 0$; $f_{xx}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 8 > 0$

In $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ liegt ein Minimum vor.

$z_e = f(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{119}{27}$

34.4. $f_{x_1} = 3x_1^2 + 20x_1 - 4x_2 - 9$; $\qquad f_{x_2} = -4x_1 + 2x_2 - 3$

$f_{x_1} = 0$, $f_{x_2} = 0$; aus $f_{x_2} = 0$ folgt $2x_2 = 4x_1 + 3$;

einsetzen in $f_{x_1} = 0$; $x_1^2 + 4x_1 - 5 = 0$,

$x_{11} = 1$, $x_{12} = -5$; $x_{21} = \frac{7}{2}$, $x_{22} = -\frac{17}{2}$.

Stationäre Punkte: $P_1 = (1, \frac{7}{2})$; $P_2 = (-5, -\frac{17}{2})$

$f_{x_1x_1} = 6x_1 + 20$; $\quad f_{x_2x_2} = 2$; $\quad f_{x_1x_2} = -4$

Für P_1: $f_{x_1x_1}(1, \frac{7}{2}) = 26$; $f_{x_2x_2}(1, \frac{7}{2}) = 2$; $f_{x_1x_2}(1, \frac{7}{2}) = -4$

$D = 52 - 16$, $D > 0$ relativer Extremwert liegt vor.

$f_{x_1x_1}(1, \frac{7}{2}) = 26 > 0$ Minimum

Für P_2: $f_{x_1x_1}(-5, -\frac{17}{2}) = -10$; $f_{x_2x_2}(-5, -\frac{17}{2}) = 2$,

$f_{x_1x_2}(-5, -\frac{17}{2}) = -4 \qquad D = -20 - 16 < 0$

kein Extremwert.

In $P_1 = (1, \frac{7}{2})$ liegt ein relatives Minimum vor.

$y_e = f(1, \frac{7}{2}) = -\frac{41}{4}$

34.5. $f_x = 1 - \frac{c}{x^2\,y}$; $f_y = 1 - \frac{c}{x\,y^2}$ $f_x = 0$, $f_y = 0$, so folgt aus $f_y = 0$ $x = \frac{c}{y^2}$, einsetzen in $f_x = 0$ ergibt $y_o = \sqrt[3]{c}$ und damit $x_o = \sqrt[3]{c}$.

Stationärer Punkt: $P_o = \left(\sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{c}\right)$

$f_{xx} = \frac{2c}{x^3\,y}$; $f_{yy} = \frac{2c}{x\,y^3}$; $f_{xy} = \frac{c}{x^2\,y^2}$

$f_{xx}(x_o, y_o) = \frac{2}{\sqrt[3]{c}}$; $f_{yy}(x_o, y_o) = \frac{2}{\sqrt[3]{c}}$;

$f_{xy}(x_o, y_o) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$

$D = \frac{2}{\sqrt[3]{c}} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{c}} - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^2$, $D = \sqrt[3]{c^2}\,(4 - 1)$

$D = 3 \cdot \sqrt[3]{c^2} > 0$

$f_{xx}(x_o, y_o) = \frac{2}{\sqrt[3]{c}} > 0$ für $c > 0$

In $P_o = \left(\sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{c}\right)$ liegt ein relatives Minimum vor.

$z_o = 3 \cdot \sqrt[3]{c}$.

35.1. $G(x_1, x_2) = 27x_1 + 27x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - 2 - x_2^3 + 15x_2^2 - 90x_2$

$G(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \qquad x_1, x_2 \geqq 0$

$f_{x_1} = 27 - x_1$, $\quad f_{x_2} = 27 - 3x_2^2 + 30x_2 - 90$

$x_1 = 27 \qquad x_2^2 - 10x_2 + 21 = 0$

$x_{21} = 3, \quad x_{22} = 7$

Stationäre Punkte: $P_1 = (27, 3)$, $P_2 = (27, 7)$

35.2. $f_{x_1x_1} = -1$, $\quad f_{x_2x_2} = -6x_2 + 30$, $\quad f_{x_1x_2} = 0$

P_1: $D_1 = -12 < 0$ kein Extremwert

P_2: $D_2 = 12 > 0$, $f_{x_1x_1}(x_1, x_{22}) < 0$ Maximum

In $P_2 = (27, 7)$ liegt ein relatives Maximum vor.

35.3. Gesamtgewinn: $G(27, 7) = 313{,}5$

36. $f_{x_1} = 2ax_1 + 3x_2 - 5$; $f_{x_1}(2, -1) = 0$, $a = 2$

$f_{x_2} = 3x_1 + 2bx_2 - 2$; $f_{x_2}(2, -1) = 0$, $b = 2$

$f_{x_1x_1} = 4$, $f_{x_2x_2} = 4$; $f_{x_1x_2} = 3$,

für $(x_1, x_2) = (2, -1)$ ist $D = 16 - 9 > 0$, $f_{x_1x_1} > 0$

$(2, -1)$ ist relatives Minimum für $f(x_1, x_2)$.

37. $f_x = 3x^2 - 3ay$, $f_y = -3ax + 3y^2$

$3x^2 - 3ay = 0$

$-3ax + 3y^2 = 0$; $x = \frac{y^2}{a}$, einsetzen in 1. Gleichung:

$3y^4 - 3a^3y = 0$, $y \cdot (3y^3 - 3a^3) = 0$

Es folgt: $P_1 = (x_1, y_1) = (0, 0)$.

Aus $3y^3 - 3a^3 = 0$ folgt $y = \sqrt[3]{a}$,

für $a > 0$ folgt $y_1 = a$, $P_2 = (a, a)$,

für $a < 0$ folgt $y_2 = -a$, $P_3 = (a, -a)$.

Stationäre Punkte: $P_1 = (0, 0)$; $P_2 = (a, a)$; $P_3 = (a, -a)$

$f_{xx} = 6x$; $f_{yy} = 6y$; $f_{xy} = -3a$

Für $P_1 = (0, 0)$ folgt:

$D_1 = 0 - 9a^2 < 0$ kein Extremwert

Für $P_2 = (a, a)$ folgt:

$D_2 = 36a^2 - 9a^2 > 0$, $f_{yy}(a, a) = 6a > 0$

Für $P_3 = (a, -a)$ folgt:

$D_3 = 36a^2 - 9a^2 > 0$, $f_{yy}(a, -a) = -6a < 0$

In $P_2 = (a, a)$ liegt ein relatives Minimum vor, in $P_3 = (a, -a)$ ein relatives Maximum.

38. $z = f(x, y)$ ist als lineare Funktion in zwei unabhängigen Variablen eine Ebene im R^3 und kann daher keine relativen Extremwerte besitzen. Durch $0 \leqq x \leqq 4$ und $0 \leqq y \leqq 1$ ist der Definitionsbereich in der Ebene auf ein Rechteck eingeschränkt. Absolute Extremwerte können daher für $f(x, y)$ nur auf dem Rand des Definitionsbereiches (dem Rechteck) liegen. Die Untersuchung auf dem Rand ergibt:

für $(x_1, y_1) = (0, 0)$ mit $z = 2$ ein Maximum,

für $(x_2, y_2) = (4, 1)$ mit $z = -2$ ein Minimum.

39.1. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 \qquad g(x, y) = x^2 - y - 1$

$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - y - 1)$, $F_x = 2x + 2\lambda x$;

$F_y = 4y - \lambda$; $F_\lambda = x^2 - y - 1$; $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_\lambda = 0$

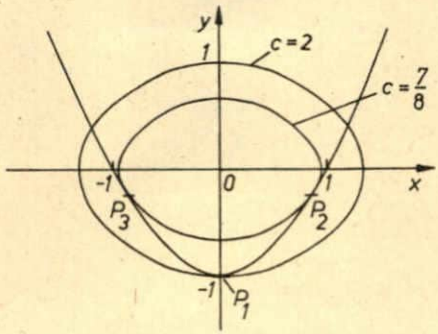
Dann folgt: stationäre Punkte: $P_1(0, -1)$, $P_2(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$

$P_3(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$ mit $z_1 = 2$, $z_2 = z_3 = \frac{7}{8}$.

Wird für eine hinreichend kleine Umgebung der stationären Punkte jeweils $\Delta z = f(x_e + \Delta x, y_e + \Delta y) - f(x_e, y_e)$ untersucht, so ergibt sich, $(x_1, y_1) = (0, -1)$ mit $z_1 = 2$ ist ein relatives Maximum, $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$ sowie $(x_3, y_3) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$ mit $z_2 = z_3 = \frac{7}{8}$ sind relative Minima.

Es werden die Höhenlinien $z = c = \text{const.}$ mit $c = 2$ und $c = \frac{7}{8}$ gezeichnet. Es sind Ellipsen um den Koordinatenursprung. Für $c = 2$ ist $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ (a große Halbachse, b kleine Halbachse).

Für $c = \frac{7}{8}$ ist $a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$, $a \approx 0{,}94$; $b = \frac{1}{4}\sqrt{7}$, $b \approx 0{,}66$.



39.2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$g(x, y) = 0$, Auflösen der Nebenbedingung:

a) $y = x^2 - 1 \qquad z = f(x) = x^2 + 2(x^2 - 1)^2$

$z = f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$

relative Extremwerte: $P_1(0, -1)$, $z_1 = 2$, rel. Maximum

$P_2(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$, $P_3(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$ rel. Minima

$z_2 = z_3 = \frac{7}{8}$

b) $g(x, y) = 0, \quad x^2 = y + 1, \quad z = f(y) = y + 1 + 2y^2$,

als relative Extremwerte ergeben sich:

$P_2 = (+\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$ rel. Minimum,

$P_3 = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{4})$ rel. Minimum.

Bei der zweiten Lösungsmethode werden die Variablen nicht symmetrisch, gleichwertig, behandelt. Im Fall b) wird dadurch das relative Maximum $P_1(0, -1)$ nicht erfaßt.

40. $y = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$

$2x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \quad g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 - x_3 + 1$

$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda(2x_1 - x_2 - x_3 + 1)$

$F_{x_1} = 4x_1 + 2\lambda; \quad F_{x_2} = 4x_2 - \lambda; \quad F_{x_3} = 4x_3 - \lambda$,

$F_\lambda = 2x_1 - x_2 - x_3 + 1$

Aus $F_{x_1} = 0, \quad F_{x_2} = 0, \quad F_{x_3} = 0, \quad F_\lambda = 0$ folgt:

$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{6}, \quad x_3 = \frac{1}{6}$.

Stationärer Punkt: $P_0(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}), \quad y_0 = \frac{3}{9}$.

Untersuchung von Δz in der Umgebung des stationären Punktes ergibt, daß die Funktionswerte größer werden. In P_0 liegt ein relatives Minimum vor. Δz kann durch das vollständige Differential $dz = f_{x_1}\Delta x_1 + f_{x_2}\Delta x_2 + f_{x_3}\Delta x_3$ angenähert werden.

41. $a = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3; \qquad x_1, x_2, x_3 > 0$

$S = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \longrightarrow \min$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - a = 0, \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - a$

$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \lambda(x_1 x_2 x_3 - a)$

$F_{x_1} = -\frac{1}{x_1^2} + \lambda x_2 x_3; \quad F_{x_2} = -\frac{1}{x_2^2} + \lambda x_1 x_3;$

$F_{x_3} = -\frac{1}{x_3^2} + \lambda x_1 x_2$

$F_\lambda = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - a$

$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{a}$; stationärer Punkt: $P_0\left(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}\right)$

Überprüfung von $S = S(x_1, x_2, x_3)$ ergibt ein Minimum in P_0.

42. $V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$ $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 90$

x_1: Länge; $\quad x_2$: Breite; $\quad x_3$: Höhe

$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \lambda (x_1 + x_2 + x_3 - 90)$

Stationärer Punkt: $P_0(30, 30, 30)$, Nachweis ergibt Maximum für das Volumen.

43. $z = f(x, y) = x^2 \cdot y$ mit $1 - x - y = 0$, $g(x, y) = 1 - x - y$

$F(x, y, \lambda) = x^2 \cdot y + \lambda (1 - x - y)$

$F_x = 2xy - \lambda, \quad F_y = x^2 - \lambda, \quad F_\lambda = 1 - x - y$

Stationäre Punkte: $P_1(0, 1)$ mit $z_1 = 0$

$P_2(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ mit $z_2 = \frac{4}{27}$

Oberprüfung von Δz unter Beachtung der Nebenbedingung $x + y = 1$ ergibt: P_1 ist rel. Minimum, P_2 ist rel. Maximum.

44. Paraboloid: $z = x^2 + 4y^2$, Ebene: $z = 4x - 8y + 24$

Schnittkurve: $x^2 + 4y^2 = 4x - 8y + 24$

$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 24$

$F(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 + \lambda (x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 24)$

$F_x = 2x + 2\lambda x - 4\lambda, \quad F_\lambda = x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 24$

$F_y = 8y + 8\lambda y + 8\lambda$

$F_x = 0, \quad x + \lambda x - 2\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{-x}{x - 2}, \quad x \neq 2$

$F_y = 0, \quad y + \lambda y + \lambda = 0, \quad y + \lambda (y + 1) = 0$

$y - \frac{x}{x - 2}(y + 1) = 0, \quad xy - 2y - xy - x = 0$

$x = -2y$

$F_\lambda = 0$ mit $x = -2y$: $4y^2 + 4y^2 + 8y + 8y - 24 = 0$

$y^2 + 2y - 3 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -3$

aus $x = -2y$ folgt: $x_1 = -2, \quad x_2 = 6$

$P_1(-2, 1)$ mit $z = 8$, $\quad P_2(6, -3)$ mit $z = 72$

$P_1(-2, 1, 8)$ ist tiefster Punkt auf der Schnittkurve,

$P_2(6, -3, 72)$ ist höchster Punkt auf der Schnittkurve.

45. $n = 7 \quad \Delta x_1 = 1, \quad y = a_0 + a_1 x \quad [x] = 0$

$x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 2,$

$x_7 = 3$

$[s] = 68{,}794; \quad [x^2] = 28; \quad [xs] = 9{,}117$

Damit folgt: $a_0 = 9{,}828$, $a_1 = 0{,}326$, $y = 9{,}828 + 0{,}326x$

Prognosewert für 1984: $i = 9$, $x_9 = 5$, $y_9 = 11{,}458$
Die Ausgaben für das Bildungswesen werden 1984 annähernd 11,458 Mrd. Mark betragen.

$$S = \sum_i (y_i - s_i)^2 = 0{,}255$$

Die Anpassung an die Meßwerte durch eine lineare Trendfunktion ist brauchbar. Die Werte streuen um die durch $y = f(x)$ berechnete Gerade. Bei weiteren Untersuchungen würde sich eine quadratische Funktion als geeigneter erweisen.

46. $y = a_o + a_1x + a_2x^2$; $n = 6$, $\Delta x_i = 2$, $[x] = 0$

$x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$

$[sx^2] = 1226{,}14$

$[s] = 104{,}94$, $[x^2] = 70$, $[x^4] = 1414$, $[xs] = 11{,}16$

$a_o = 17{,}454$, $a_1 = 0{,}159$, $a_2 = 0{,}00308$,

$y = 17{,}454 + 0{,}159x + 0{,}00308x^2$

$$S = \sum_i (y_i - s_i)^2 = 0{,}047$$

Prognosewert für 1983: $i = 7$, $x_7 = 7$, $y_{83} = 18{,}72$

Voraussichtlich beträgt 1983 die Produktion von PKW 187 200 Stück.

47.1. $y = a \cdot e^{bx}$, $n = 7$, $\Delta x_i = 1$ $[x] = 0$

Linearisierung: $Y = A_o + A_1x$ mit

$Y = \ln y$, $A_o = \ln a$, $A_1 = b$, $S = \ln s_i$

	i	x_i	s_i	$\ln s_i$	x_i^2	$x_i \ln s_i$	$x_i s_i$
1976	1	-3	2,146	0,7636	9	-2,2908	-6,438
1977	2	-2	2,192	0,7848	4	-1,5696	-4,384
1978	3	-1	2,244	0,8082	1	-0,8082	-2,244
1979	4	0	2,292	0,8294	0	0,0000	0,000
1980	5	1	2,334	0,8476	1	0,8476	2,334
1981	6	2	2,388	0,8704	4	1,7408	4,776
1982	7	3	2,436	0,8904	9	2,6712	7,308
			16,032	5,7944	28	0,5910	1,352

$A_o = \frac{[S]}{n}$, $\quad A_o = \frac{5,7944}{7}$, $\quad A_o = 0,8278$

$\ln a = 0,8278$, $\quad \underline{a = 2,288}$

$A_1 = \frac{[xS]}{[x^2]}$, $\quad A_1 = \frac{0,591}{28}$, $\quad A_1 = 0,0211$, $\quad \underline{b = 0,0211}$

$$\underline{\underline{y = 2,288e^{0,0211x}}}$$

47.2. $y = a_o + a_1 x$; $a_o = \frac{[s]}{n}$, $a_o = 2,29$; $a_1 = \frac{[xs]}{[x^2]}$, $a_1 = 0,0483$

$\underline{y = 2,29 + 0,0483x}$ $\quad S = \sum_i (y_i - s_i)^2$, $\quad S = 0,0000337$

Für $y = 2,288e^{0,0211x}$ gilt $S = \sum_i (y_i - s_i)^2 = 0,00003284$

48.1. $y = ab^x$, $\quad \lg y = \lg a + x \cdot \lg b$

$Y = A_o + A_1 \cdot x$ mit $Y = \lg y$, $A_o = \lg a$, $A_1 = \lg b$,

$S = \lg s$

$A_o = \frac{[S]}{n}$ $\quad [S] = \sum_i \lg s_i$

$A_1 = \frac{[xS]}{[x^2]}$, $[xS] = \sum_i x_i \lg s_i$, $\quad n = 7$, $\Delta x_i = 1$, $[x] = 0$

$[S] = 1,9537$; $[x^2] = 28$; $[xS] = 0,8754$

$A_o = 0,2791$; $\quad A_1 = 0,03126$

$\lg a = 0,2791$, $\quad a = 1,9015$; $\quad \lg b = 0,03126$, $\quad b = 1,0746$

$$\underline{\underline{y = 1,9015 \cdot 1,0746^x}}$$

48.2. $x = \frac{\lg y - \lg a}{\lg b}$ $\qquad x \approx 5$, im Jahr 1984

49.1. $y = ab^x$, $n = 6$, $\Delta x_i = 2$, $[x] = 0$ $\quad y = 1,0316 \cdot 1,0494^x$

49.2. $x = 3$, $\quad y = 1,192$, $\quad d = 1,192 - 1,191$; $d = 0,001$

49.3. Für 1983: $y_{83} = 1,446$ Mrd. Mark

50. $n = 5$, $\Delta x_i = 1$, $[x] = 0$, $[x^3] = 0$

$$y = 88,44 + 0,76x - 0,0714x^2$$

51. $n = 5$, $\Delta x_i = 1$, $[x] = 0$, $[x^3] = 0$

$$y = 120,46 + 12,05x + 0,15x^2$$
$$y = 120,76 + 12,05x$$

Für quadratische Funktion: $S_1 = \sum_i (y_i - s_i)^2$, $S_1 = 0,54$

Für lineare Funktion: $S_2 = \sum_i (y_i - s_i)^2$, $S_2 = 0,567$

52. $y = 9699,3 + 1028,9x - 43,5x^2$

$n = 7$, 1965: $x = 0$, $\Delta x_i = 1$ entspricht 5 Jahre

Für 1979 annähernd $12239 \cdot 10^3 t$,

für 1981 annähernd $12546 \cdot 10^3 t$.

53. $n = 6$, $\Delta x_i = 2$, $[x] = 0$, $y = a \cdot e^{bx}$

$Y = A_o + A_1 x$ mit $Y = \ln y$, $A_o = \ln a$, $A_1 = b$, $S = \ln s$

$A_o = \frac{[S]}{n}$, $A_1 = \frac{[xS]}{[x^2]}$, $[S] = \sum_i \ln s_i$

$[xS] = \sum_i x_i \ln s_i$

$[x^2] = 70$, $[S] = 31,2622$; $[xS] = 1,3888$

$A_1 = b = 0,0198$; $A_o = 5,2104$; $\ln a = 5,2104$;

$a = 183,1612$

$y = 183,16e^{0,0198x}$

Prognosewert für 1984: 218,89 Mrd. Mark

54.1.

Jahr	1975		1976		1977		1978		1979		1980		1981
s_i	2,69		3,46		4,45		5,71		7,33		9,41		12,08
Δs_i		0,77		0,99		1,26		1,62		2,08		2,67	
$\Delta^2 s_i$			0,22		0,27		0,36		0,46		0,59		
r_t		1,29		1,29		1,35		1,28		1,28		1,28	

Bei annähernd gleicher Wachstumsrate ist eine Exponentialfunktion zu empfehlen:

$y = ae^{bx}$ oder $y = ab^x$.

54.2

Jahr	1970		1972		1974		1976		1978		1980		1982		1984
s_i	1,45		2,65		3,17		3,46		3,65		3,78		3,87		3,95
Δs_i		1,2		0,52		0,29		0,19		0,13		0,09		0,08	
$\Delta^2 s_i$			-0,68		-0,23		-0,1		-0,06		-0,04		-0,01		
r_t		1,83		1,2		1,09		1,05		1,04		1,02		1,02	

Der absolute Zuwachs der Meßwerte Δs_i nimmt ab, die Wachstumsrate wird kleiner; es kann erwartet werden, daß die Meßwerte einem Sättigungswert zustreben. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften wäre z. B.

$$y = \frac{ax}{x + b}, \qquad x \neq -b$$

55. $y = f(x) = \frac{ax}{x + b}, \quad a > 0, \qquad x \neq -b,$

Annäherung der Funktion $y = f(x)$ durch Transformation in eine lineare Funktion:

$$\frac{1}{y} = \frac{x + b}{ax}; \qquad \frac{1}{y} = \frac{x}{ax} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x};$$

$Y = A_o + A_1X$ mit $Y = \frac{1}{y}$, $A_o = \frac{1}{a}$, $A_1 = \frac{b}{a}$, $X = \frac{1}{x}$, $S = \frac{1}{s}$.

Normalgleichungen:

$$[x] = \sum_i \frac{1}{x_i}; \qquad [s] = \sum_i \frac{1}{s_i}$$

$n \cdot A_o + A_1 \cdot [x] = [s]$

$A_o \cdot [x] + A_1 \cdot [x^2] = [xs]$; $[x^2] = \sum_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^2$;

$[xs] = \sum_i \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{s_i}$

$$A_o = \frac{[s]\,[x^2] - [x]\,[xs]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}; \qquad A_1 = \frac{n \cdot [xs] - [x]\,[s]}{n \cdot [x^2] - [x]^2}$$

Jahr	i	x_i	$X_i = \frac{1}{x_i}$	s_i	$S_i = \frac{1}{s_i}$	X_i^2	$X_i \cdot S_i$
1963	1	1	1	94,2	0,010615	1,0000	0,010615
1964	2	2	0,5	95,5	0,010471	0,2500	0,005236
1665	3	3	0,333	96,6	0,010351	0,1110	0,003447
1966	4	4	0,250	97,5	0,010256	0,0625	0,002564
1967	5	5	0,200	98,1	0,010193	0,0400	0,002039
1968	6	6	0,167	98,5	0,010152	0,0279	0,001695
1969	7	7	0,143	98,9	0,010111	0,0204	0,001446
1970	8	8	0,125	99,1	0,010090	0,0156	0,001261
1971	9	9	0,111	99,1	0,010090	0,0123	0,001120
			2,829		0,092329	1,5397	0,029423

$A_0 = 0{,}01\,0063$, $\quad a = 99{,}3679$
$A_1 = 0{,}0006179$, $\quad b = a \cdot A_1$, $\quad b = 0{,}061399$

$$y = \frac{99{,}37x}{x + 0{,}0614}$$

56. $y = \dfrac{a}{1 + be^{-cx}}$; $\quad \dfrac{1}{y} = \dfrac{1 + be^{-cx}}{a}$, $\quad \dfrac{a}{y} = 1 + b \cdot e^{-cx}$

$\dfrac{a}{y} - 1 = b \cdot e^{-cx}$, $\quad \dfrac{a - y}{y} = b \cdot e^{-cx}$, $\quad \ln \dfrac{a - y}{y} = \ln b - cx$

weil $\ln e = 1$

$Y = A_0 + A_1 x$ mit $Y = \ln \dfrac{a - y}{y}$, $\quad A_0 = \ln b$, $\quad A_1 = -c$

$S = \ln \dfrac{a - s}{s}$

$a = 100$, $\quad n = 9$, $\quad \Delta x_i = 1$

Normalgleichungen: $\quad A_0 = \dfrac{[S]}{n}$, $\quad A_1 = \dfrac{[xS]}{[x^2]}$

$$S = \sum_i \ln \frac{100 - s_i}{s_i} , \qquad [xS] = \sum_i x_i \ln \frac{100 - s_i}{s_i}$$

i	x_i	s_i	$S_i = \ln \frac{100 - s_i}{s_i}$	$x_i \cdot S_i$	x_i^2	y_i
1	-4	70,0	- 0,8473	3,3892	16	68,29
2	-3	73,0	- 0,9946	2,9838	9	
3	-2	75,7	- 1,1363	2,2726	4	
4	-1	77,6	- 1,2425	1,2425	1	77,96
5	0	78,8	- 1,3129	0,0000	0	80,66
6	1	79,9	- 1,3801	-1,3801	1	83,11
7	2	84,4	- 1,6883	-3,3766	4	
8	3	87,7	- 1,9643	-5,8929	9	
9	4	90,8	- 2,2895	-9,1580	16	88,99
			- 12,8558	-9,9195	60	

$A_0 = -\,1{,}42842$, $\quad \ln b = -\,1{,}42842$, $\quad b = 0{,}2397$
$A_1 = -\,0{,}1653$, $\quad c = \;0{,}1653$

$$y = \frac{100}{1 + 0{,}2397e^{-0{,}1653x}}$$

Wachstumsraten:

$$r_1 = \frac{s_2}{s_1} = 1{,}043\ ,\quad r_2 = 1{,}036\ ,\quad r_3 = 1{,}025\ ,\quad r_4 = 1{,}015\ ,$$

$$r_5 = 1{,}014\ ,\quad r_6 = 1{,}056\ ,\quad r_7 = 1{,}039\ ,\quad r_8 = 1{,}035$$

57. $y(x) = 2x^3 + 3x^2\ ;\quad y(x) = 2x^3\ ,\quad k(x) = 3x^2$

$\Delta y(x) = \Delta g(x) + \Delta k(x)\ ,\qquad h = 1$

$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)\ ,$

$\Delta g(x) = 2(x+1)^3 - 2x^3\ ;\qquad \Delta g(x) = 6x^2 + 6x + 2$

$$\Delta^2 g(x) = \Delta g(x+1) - \Delta g(x)$$

$$= \left[6\,(x+1)^2 + 6\,(x+1) + 2\right] - \left[6x^2 + 6x + 2\right]$$

$$\Delta^2 g(x) = 12x + 12$$

$\Delta k(x) = k(x+1) - k(x)\ ;\quad \Delta k(x) = 3\,(x+1)^2 - 3x^2$

$\Delta k(x) = 6x + 3$

$\Delta^2 k(x) = \left[6\,(x+1) + 3\right] - \left[6x + 3\right]\ ;\quad \Delta^2 k(x) = 6$

$\Delta^2 y(x) = \Delta^2 g(x) + \Delta^2 k(x)\ ;\qquad \underline{\underline{\Delta^2 y(x) = 12x + 18}}$

58. $y(x) = y(k) = y_k$

$$3\left[y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k\right] + 2\left[y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k\right] - 4\left[y_{k+1} - y_k\right] = 0$$

$$3y_{k+3} - 7y_{k+2} + y_{k+1} + 3y_k = 0$$

59.1. 4. Ordnung, homogen

59.2. 2. Ordnung, inhomogen

59.3. 2. Ordnung, inhomogen

59.4. 1. Ordnung, homogen

60. Zeitpunkt $t_o = 0$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$

Anfangswert: $y_o = 1000$; $b = 200$

Monatliche Verzinsung: $\frac{3}{12}\,\%$, $p = 0{,}0025$

Betrag am Ende des ersten Monats: $y_1 = y_o + p\,y_o + b$

$$y_1 - y_o = p\,y_o + b$$

60.1. Differenzengleichung:

$$\Delta y(t) = p\,y(t) + b\ ,\quad t = 0, 1, 2, \ldots, T$$

$$y(t+1) - y(t) = p\,y(t) + b$$

$$y_{t+1} = (1 + p)\,y_t + b$$

$1 + p = a\ ,\quad a = 1{,}0025$

$$y_t = a^t y_o + b\,\frac{1 - a^t}{1 - a}\ ,\quad \text{mit } t = k$$

$$y_k = a^k y_o + b\,\frac{1 - a^k}{1 - a} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ K$$

60.2. 2 Jahre sind 24 Monate, $\qquad k = 24$

$$y_{24} = 1{,}0025^{24} \cdot 1000 + 200\,\frac{1 - 1{,}0025^{24}}{1 - 1{,}0025}$$

$$y_{24} = 6002{,}56$$

Nach zwei Jahren wächst der Betrag auf 6002,56 M an.

60.3. $y_k = 11000\ ;\qquad y_k = a^k \cdot y_o + \frac{b}{1 - a}(1 - a^k)$

$$y_k - \frac{b}{1 - a} = a^k \cdot \left(y_o - \frac{b}{1 - a}\right)$$

$1{,}1235 = 1{,}0025^k\ ;\qquad k = \frac{\lg 1{,}1235}{\lg 1{,}0025}$

$k = 46{,}64 \approx 47\ ;$ nach annähernd 3 Jahren und 11 Monaten ist der Betrag auf 11000,- M angewachsen.

61.1. $\frac{y(t + 1) - y(t)}{y(t)} = 0{,}05\ , \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\Delta y(t) = 0{,}05y(t)$$

$$y(t + 1) = 1{,}05y(t)$$

61.2. $y(3) = 1{,}05^3 \cdot y_o\ , \qquad y_o = 100$

$y(3) = 115{,}76$

1970: NE 115,76 Mrd. Mark

(laut statistischem Jahrbuch 117,43 Mrd. Mark)

61.3. $y_5 = 1{,}05^5 \cdot y_o\ ; \qquad y_5 = 127{,}63$ Mrd. Mark

61.4. $200 = 1{,}05^t y_o\ ; \qquad t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05}\ , \qquad t \approx 14{,}2$

Nach etwa 14 Jahren, das entspricht 1981, wird sich das Nationaleinkommen verdoppelt haben.

(Laut statistischem Jahrbuch für 1981: etwa 196 Mrd. Mark)

62. $\quad y_{k+2} - 7y_{k+1} + 12y_k = 0$

62.1. Charakteristische Gleichung: $m^2 - 7m + 12 = 0$

$m_1 = 3\,, \quad m_2 = 4\,; \quad y_k^{(1)} = 3^k\,, \quad y_k^{(2)} = 4^k$

$y_k^{(H)} = c_1 3^k + c_2 4^k$

62.2. $k = 0{:} \quad y_o^{(1)} = 1\,, \quad y_o^{(2)} = 1$

$k = 1{:} \quad y_1^{(1)} = 3\,, \quad y_1^{(2)} = 4$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad y_k^{(1)},\ y_k^{(2)}$ sind linear unabhängig.

62.3. $y_o = 2\,, \quad y_1 = 5$

$k = 0{:} \quad 2 = c_1 + c_2 \qquad c_1 = 3$

$k = 1{:} \quad \underline{5 = 3c_1 + 4c_2} \qquad c_2 = -1$

$y_k^{(s)} = 3 \cdot 3^k - 4^k\,; \qquad y_k^{(s)} = 3^{k+1} - 4^k$

62.4. $k = 3 \qquad y(3) = y_3 = 17$

63. $y_k^{(H)} = c_1 5^k + c_2 k 5^k\,;$

für $y_o = 3,\ y_1 = 20{:} \qquad y_k^{(s)} = 3 \cdot 5^k + k \cdot 5^k$

64. - Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung $y_{k+2} - 8y_{k+1} + 12y_k = 0$:

$y_k^{(H)} = c_1 2^k + c_2 6^k$

- Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzengleichung:

$q(k) = 6^k$, 6^k ist im Fundamentalsystem enthalten:

$$y_k^{(1)} = 2^k\,, \quad y_k^{(2)} = 6^k\,.$$

Lösungsansatz: $y_k^{*} = k \cdot B6^k$

$y_{k+1}^{*} = B\,(k+1)\,6^{k+1}\,; \quad y_{k+2}^{*} = B\,(k+2)\,6^{k+2}$

Einsetzen des Lösungsansatzes $y_k^{*} = k \cdot B6^k$ in die Differenzengleichung ergibt:

$B\,(k+2)\,6^{k+2} - 8B\,(k+1)\,6^{k+1} + 12Bk6^k = 6^k \mid : 6^k \neq 0$

$B\,(k+2)\,6^2 - 8B\,(k+1) \cdot 6 + 12Bk = 1$

$$B = \frac{1}{24}$$

$y_k^* = \frac{1}{24} k6^k$

- Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung:

$y_k^{(1)} = y_k^{(H)} + y_k^*$

$y_k^{(1)} = c_1 2^k + c_2 6^k + \frac{1}{24} k \cdot 6^k$

65.1. $\Delta y(t) = 0{,}4y(t) + 0{,}15y(t-1)$

$y(t+1) - y(t) = 0{,}4y(t) + 0{,}15y(t-1)$

$y(t+1) - 1{,}4y(t) - 0{,}15y(t-1) = 0 \;;\quad t - 1 = k$

$t = k + 1$

$y_{k+2} - 1{,}4y_{k+1} - 0{,}15y_k = 0$

65.2. $m^2 - 1{,}4m - 0{,}15 = 0 ,\quad m_1 = 1{,}5 ,\quad m_2 = -0{,}1$

$y_k^{(H)} = c_1 1{,}5^k + c_2 (-0{,}1)^k$

65.3. $k = 0 ,\quad y_o = 400 ,\qquad 400 = c_1 + c_2$

$k = 1 ,\quad y_1 = 440 ,\qquad \underline{440 = 1{,}5c_1 - 0{,}1c_2}$

$c_1 = 300 ,\quad c_2 = 100$

$y_k^{(s)} = 300 \cdot 1{,}5^k + 100(-0{,}1)^k$

$k = 4$: $y(4) = y_4 = 1518{,}76$

Nach 4 Jahren beträgt die Produktionsgröße $y_4 = 1518{,}76$ ME.

66.1. $y_1 - y_o = 0{,}04y_o + 0{,}2y_o \qquad y_o = 1500$

$y_1 = 1{,}04y_o + 0{,}2y_o \qquad y_1 = 1860$

$y_2 = 1{,}04^2 y_o + 0{,}2y_1 + 0{,}8y_o$

$y_{k+2} - 0{,}2y_{k+1} - 0{,}8y_k = 1{,}04^{k+2} y_o$

66.2. $y_{k+2} - 0{,}2y_{k+1} - 0{,}8y_k = 0 \;;\quad y_k^{(H)} = c_1 + c_2 (-0{,}8)^k$

- Ansatz $y_k^* = B \cdot 1{,}04^{k+2}$, $\qquad B \approx 20380$

- $y_k^{(1)} = c_1 + c_2 (-0{,}8)^k + 20380 \cdot 1{,}04^{k+2}$

$y_k^{(1)} = c_1 + c_2 (-0{,}8)^k + 22043 \cdot 1{,}04^k$

66.3. $k = 0 \qquad y_0 = 1500 \qquad c_1 + c_2 + 20380 = 1500$

$k = 1 \qquad y_1 = 1860 \qquad c_1 - 0{,}8c_2 + 21195 = 1860$

$c_1 = -19132{,}8; \quad c_2 = 252{,}8$

$$y_k = -19132{,}8 + 252{,}8\,(-0{,}8)^k + 22043 \cdot 1{,}04^k$$

$k = 3$: $y_3 = 5533$ ME

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1. Zufällige Ereignisse

4.1.1. Beispiele

B 1: Ein Versuch bestehe im einmaligen Werfen eines Würfels. Es werden folgende zufällige Ereignisse (Versuchsausgänge) betrachtet:

A: höchstens eine "2" wird gewürfelt,
B: mindestens eine "3" wird gewürfelt,
C: eine gerade Zahl wird gewürfelt,
D: eine "3" oder eine "5" wird gewürfelt,
E: eine "1" wird gewürfelt.

a) Welches Ereignis ist zum Ereignis B komplementär?
b) Welche Ereignisse sind mit dem Ereignis C unverträglich?
c) Welches Ereignis bildet mit den Ereignissen C und D ein vollständiges System von Ereignissen?

Lösung

a) Das zu B komplementäre Ereignis $\overline{B}$ ist ein Ereignis, das immer dann eintritt, wenn B nicht eingetreten ist. B tritt nicht ein, wenn eine "1" oder eine "2" gewürfelt wurde. Dieser Versuchsausgang wird gerade durch das Ereignis A beschrieben, so daß $\overline{B} = A$ gilt.

b) Gesucht sind jene Ereignisse, die nicht gleichzeitig mit C eintreten können. Das sind die Ereignisse D und E.

c) Das gesuchte Ereignis muß zwei Bedingungen genügen:
1. es ist mit den Ereignissen C und D paarweise unverträglich;
2. die Summe mit den Ereignissen C und D ergibt das sichere Ereignis.

Die 1. Bedingung ist für das Ereignis E erfüllt, da es weder mit C noch mit D gleichzeitig eintreten kann. Die Summe der Ereignisse C, D und E ergibt das sichere Ereignis, da im Ereignis des Versuches eines dieser Ereignisse eintreten wird. Folglich ist auch die 2. Bedingung erfüllt. E ist das gesuchte Ereignis.

B 2: Ein Produktionsbetrieb verfügt über drei Fertigungsabteilungen F_1, F_2 und F_3. Es sei E_i, $i = 1(1)3$, das Ereignis, daß in der Abteilung F_i während eines Monats keine Störung im Produktionsablauf auftritt.

Stellen Sie durch Verknüpfung der Ereignisse E_i und ihrer Komplementärereignisse folgende Ereignisse dar:

A: in allen drei Abteilungen tritt mindestens eine Störung auf;

B: nur in der Abteilung F_1 tritt mindestens eine Störung auf;

C: mindestens eine Abteilung arbeitet störungsfrei.

<u>Lösung</u>

Das Ereignis A bedeutet, daß <u>gleichzeitig</u> die drei Ereignisse $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ und $\overline{E}_3$ eintreten ($\overline{E}_i$: in der Abteilung F_i tritt mindestens eine Störung auf). A ist also das <u>Produkt</u> dieser drei Ereignisse: $A = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3$.

Das Ereignis B bedeutet, daß in der Abteilung F_1 mindestens eine Störung auftritt (Ereignis $\overline{E}_1$) und <u>gleichzeitig</u> die Abteilungen F_2 und F_3 störungsfrei arbeiten (Ereignis E_2 bzw. E_3). Folglich gilt: $B = \overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Das Ereignis C bedeutet, daß <u>mindestens</u> eines der drei Ereignisse E_1, E_2, E_3 eintritt. Folglich handelt es sich um die <u>Summe</u> dieser Ereignisse: $B = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

4.1.2. <u>Übungsaufgaben</u>

1. Aus einem Skatspiel wird willkürlich eine Karte entnommen. Wir betrachten folgende zufällige Ereignisse:
   A: eine Dame wird gezogen,
   B: eine Pik-Karte wird gezogen.
   Beschreiben Sie die Ereignisse $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ mit Worten!

2. Sind die für die folgenden Versuche angegebenen zufälligen Ereignisse unverträglich?
   a) Versuch: einmaliges Werfen einer Münze.
      Ergebnisse: A_1: die Zahl liegt oben,
      A_2: das Wappen liegt oben.

   b) Versuch: einmaliges Werfen von zwei Münzen.

Ereignisse: B_1: auf der ersten Münze liegt die Zahl oben,
B_2: auf der zweiten Münze liegt das Wappen oben.

c) Versuch: zweimaliges Schießen auf eine Zielscheibe.
Ereignisse: C_0: kein Treffer,
C_1: genau ein Treffer,
C_2: zwei Treffer.

3. In einer Abteilung arbeiten vier gleichartige Maschinen. Jede dieser Maschinen kann während einer Schicht ausfallen. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:
A: genau eine der vier Maschinen fällt aus,
B: mindestens eine der vier Maschinen fällt aus,
C: nicht weniger als zwei Maschinen fallen aus,
D: genau zwei Maschinen fallen aus.
Ermitteln Sie, zu welchen der angegebenen Ereignisse die folgenden Operationen führen!

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $B \cup C$; d) $B \cap D$.

4. Betrachtet man die tägliche Planerfüllung zweier Brigaden, können unter anderem folgende zufällige Ereignisse eintreten:
A: die 1. Brigade erfüllt den Plan nicht,
B: die 2. Brigade erfüllt den Plan nicht,
C: mindestens eine Brigade erfüllt den Plan nicht,
D: mindestens eine Brigade erfüllt den Plan,
E: genau eine Brigade erfüllt den Plan.
Ermitteln Sie, zu welchen der angegebenen Ereignisse die folgenden Operationen führen!

a) $\overline{A} \cup \overline{B}$; b) $C \cap D$; c) $C \cup E$; d) $C \cap E$.

5. Gegeben seien die drei zufälligen Ereignisse A, B und C, wobei $B = \overline{A \cup D}$ und $C = \overline{A} \cap D$ gelte.
a) Zeigen Sie, daß die Ereignisse A und B unverträglich sind!
b) Zeigen Sie, daß die Ereignisse A, B und C ein vollständiges System von Ereignissen bilden!

6. Ein technisches System bestehe aus zwei Dampferzeugern, einer Antriebsmaschine und drei Arbeitsmaschinen. Für ein endliche Zeitintervall $(0, T]$ werden folgende zufällige Ereignisse betrachtet:

A_i: der i-te Kessel arbeitet ausfallfrei ($i = 1, 2$),
B: die Antriebsmaschine arbeitet ausfallfrei,
C_j: die j-te Arbeitsmaschine arbeitet ausfallfrei ($j = 1, 2, 3$).

Das gesamte System funktioniert (Ereignis D), wenn mindestens ein Kessel, die Antriebsmaschine und mindestens zwei Arbeitsmaschinen ohne Ausfall arbeiten.

Stellen Sie das Ereignis D durch Verknüpfung der genannten Ereignisse (bzw. der Komplementärereignisse) dar!

4.2. Ermittlung der Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse

4.2.1. Beispiele

B 3: In einem Betrieb sind von je 2 000 Fertigerzeugnissen, die alle unter gleichen technologischen Bedingungen hergestellt werden, im Durchschnitt 32 unbrauchbar.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in diesem Betrieb produziertes Fertigerzeugnis unbrauchbar ist (Ereignis A)?

Lösung

Da die Fertigerzeugnisse unter gleichen Bedingungen hergestellt werden, haben wir es mit einer Massenerscheinung zu tun. Folglich kann die relative Häufigkeit als Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit verwendet werden. Auf Grund der statistischen Angaben gilt:

$$h_{2000}(A) = \frac{32}{2000} = 0{,}016 = P(A).$$

B 4: In einer Urne befinden sich 5 schwarze, 12 weiße, 23 rote und 20 grüne Kugeln. Willkürlich wird eine Kugel entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie rot (Ereignis A) oder grün (Ereignis B) ist?

Lösung

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit der Summe $C = A \cup B$ (A oder B). Da eine Kugel nicht gleichzeitig rot und grün sein kann, sind die Ereignisse A und B unverträglich.

Folglich gilt: $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
$P(A)$ und $P(B)$ lassen sich nach der klassischen Definition berechnen, da es bei dem betrachteten Versuch 60 gleichwahrscheinliche Elementarereignisse (Gesamtzahl der Kugeln) gibt.
Man erhält $P(A) = \frac{23}{60}$, $P(B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ und somit $P(C) = \frac{43}{60} = 0{,}717$.

4.2.2. Übungsaufgaben

7. Aus der Geburtenstatistik einer Stadt geht hervor, daß

   im Januar 145 Jungen und 135 Mädchen,
   im Februar 142 Jungen und 136 Mädchen,
   im März 152 Jungen und 140 Mädchen

   geboren wurden. Bestimmen Sie die relative Häufigkeit der Geburt eines Jungen!

8. Aus der Menge der zweistelligen Zahlen wird willkürlich eine Zahl ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

   A: die Zahl ist durch 2 teilbar,
   B: die Zahl ist durch 5 teilbar,
   C: die Zahl ist durch 2 oder 5 teilbar!

9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man beim einmaligen Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel eine Zehn (Ereignis A) oder eine Herz-Karte (Ereignis B) erhält?

10. Beim einmaligen Werfen eines Würfels werden folgende Ereignisse betrachtet:

    A: es wird höchstens eine "3" gewürfelt;
    B: es wird eine ungerade Zahl gewürfelt.
    Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Summe $C = A \cup B$!

11. A und B seien zwei zufällige Ereignisse, über deren Wahrscheinlichkeit folgende Angaben vorliegen:

    $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}3$.
    Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender zufälliger Ereignisse:
    a) $\overline{A}$; b) $A \cup B$; c) $\overline{A} \cap \overline{B}$; d) $\overline{A} \cup \overline{B}$; e) $A \cup \overline{B}$!

4.3. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

4.3.1. Beispiele

B 5: Nach der allgemeinen Sterbetafel der DDR beträgt die Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit) dafür, daß ein neugeborener Junge 5 Jahre alt wird (Ereignis A) 0,940, und daß er 50 Jahre alt wird (Ereignis B) 0,858.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fünfjähriger Junge 50 Jahre alt wird?

Lösung

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$.
Es gilt $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$. Wegen $B \subset A$ ist $A \cap B = B$, so daß sich $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ ergibt.
Damit erhält man $P(B|A) = \frac{0{,}858}{0{,}940} = 0{,}913$.

B 6: In einem Betrieb wurden zum Antrieb der Werkzeugmaschinen zwei Elektromotoren installiert. Statistische Untersuchungen ergaben, daß die Motoren unabhängig voneinander in Betrieb sind und daß im Laufe eines Tages der erste Motor zu 80 % und der zweite zu 85 % ausgelastet ist, wobei die Arbeitsperioden der Motoren willkürlich auf den Tag verteilt sind.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß zu einem beliebigen Zeitpunkt beide Motoren laufen (Ereignis A), genau ein Motor läuft (Ereignis B), mindestens ein Motor läuft (Ereignis C)!

Lösung

Wir betrachten die Ereignisse M_1 (der erste Motor läuft) und M_2 (der zweite Motor läuft). Dann gilt:

$A = M_1 \cap M_2$; $B = (M_1 \cap \overline{M}_2) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2)$; $C = M_1 \cup M_2$.

Auf Grund der statistischen Angaben ist $P(M_1) = 0{,}80$ und $P(M_2) = 0{,}85$. Wegen der Unabhängigkeit von M_1 und M_2 erhält man $P(A) = P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2) = 0{,}68$.
Da die Ereignisse $(M_1 \cap \overline{M}_2)$ und $(\overline{M}_1 \cap M_2)$ unverträglich sind, gilt $P(B) = P(M_1 \cap \overline{M}_2) + P(\overline{M}_1 \cap M_2)$. Aus der Unabhängigkeit des

Paares (M_1, M_2) folgt die Unabhängigkeit der Paare $(M_1, \overline{M}_2)$ und $(\overline{M}_1, M_2)$, so daß sich $P(B) = P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) + P(\overline{M}_1) \cdot P(M_2)$ ergibt. Wegen $P(\overline{M}_1) = 0{,}2$ und $P(\overline{M}_2) = 0{,}15$ erhält man schließlich $P(B) = 0{,}29$.

Auf Grund der Verträglichkeit der Ereignisse M_1 und M_2 gilt

$$P(C) = P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2)$$
$$= 0{,}8 + 0{,}85 - 0{,}68 = 0{,}97\,.$$

B 7: Zur Erhöhung seiner Zuverlässigkeit wird ein Gerät durch n gleichartige Geräte dubliert, wobei die parallel geschalteten Reservegeräte genau wie das ursprüngliche Gerät belastet werden (heiße Reserve) und unabhängig voneinander ausfallen. Die Zuverlässigkeit (Wahrscheinlichkeit des ausfallfreien Funktionierens) jedes Gerätes beträgt 0,8.

1. Berechnen Sie die Zuverlässigkeit des erhaltenen Gerätesystems!
2. Wie groß muß die Zahl n der doublierenden Geräte sein, damit die Zuverlässigkeit des Gerätesystems mindestens 0,99 beträgt?

Lösung

1. Es werden folgende zufällige Ereignisse betrachtet:
   A_i: das i-te Gerät arbeitet ausfallfrei, $i = 1(1)\,(n+1)$;
   A: das Gerätesystem funktioniert.
   Aus diesen Angaben ergibt sich $Z_i = P(A_i) = 0{,}8$.
   Gesucht ist $Z = P(A)$.
   Wegen $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A_i$ und der Unabhängigkeit der Ereignisse A_i gilt der Satz (Mathematik für Ökonomen, Bd. 2, S. 50)
   $$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n+1} \left[1 - P(A_i)\right].$$
   Folglich erhält man $P(A) = 1 - (1 - 0{,}8)^{n+1} = 1 - 0{,}2^{n+1}$.
2. Die gesuchte Anzahl n ist aus der Ungleichung
   $$1 - 0{,}2^{n+1} \geqq 0{,}99$$
   zu ermitteln. Durch Umformung erhält man
   $$(n + 1) \log 0{,}2 \leqq \log 0{,}01\;,$$
   so daß
   $$n \geqq \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}2} - 1$$

sein muß. Daraus ergibt sich $n \geqq 1{,}86$, d. h., es werden zwei Reservegeräte benötigt.

B 8: Ein Industrieladen bezieht Glühlampen einer bestimmten Sorte von zwei Werken, wobei das Werk I 60 % und das Werk II 40 % des Gesamtbedarfs liefert. Im Durchschnitt sind von 100 Lampen des Werkes I 82 und von 100 Lampen des Werkes II 69 normgerecht.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine im Industrieladen willkürlich erworbene Lampe normgerecht ist (Ereignis B)?
2. Die erworbene Lampe möge normgerecht sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus dem Werk I stammt (Ereignis A)?

Lösung

1. Da das Herstellerwerk der erworbenen Glühlampe unbekannt ist, muß P(A) mit Hilfe der Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit ermittelt werden. Zunächst ist zu überlegen, welche alternativen "Hypothesen" bezüglich des Herstellerwerkes denkbar sind. Offensichtlich sind das die Ereignisse
$A_1 = A$: die Lampe wurde im Werk I hergestellt;
$A_2 = \overline{A}$: die Lampe wurde im Werk II hergestellt.
Dann gilt
$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)$$
$$= 0{,}82 \cdot 0{,}6 + 0{,}69 \cdot 0{,}4 = 0{,}768.$$

2. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_1|B)$, die sich nach der Formel von Bayes aus
$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} \qquad \text{ergibt.}$$
Mit $P(B) = 0{,}768$ erhält man dann
$$P(A_1|B) = \frac{0{,}82 \cdot 0{,}6}{0{,}768} = 0{,}641.$$

Beachten Sie: Die zusätzliche Information, daß die erworbene Lampe normgerecht ist, hat dazu geführt, daß sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A (die Lampe ist aus dem Werk I) von 0,6 (a-priori-Wahrscheinlichkeit) auf 0,641 (a-posteriori-Wahrscheinlichkeit) erhöhte.

4.3.2. Übungsaufgaben

12. Nacheinander werden zwei Münzen geworfen und folgende zufällige Versuchsergebnisse betrachtet:
    A: auf der 1. Münze liegt das Wappen oben,
    B: mindestens ein Wappen liegt oben,
    C: mindestens eine Zahl liegt oben,
    D: auf der 2. Münze liegt das Wappen oben.
    Überprüfen Sie, ob die Ereignispaare
    a) (A, D), b) (C, A), c) (B, C), d) (B, D)
    abhängig oder unabhängig sind!

13. Die Ereignisse A und B seien unverträglich, und es gelte $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$. Sind die beiden Ereignisse voneinander unabhängig?

14. Zeigen Sie, daß aus der Unabhängigkeit des Ereignispaares (A, B) die Unabhängigkeit der Ereignispaare $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$ und $(\overline{A}, \overline{B})$ folgt!

15. In einer Schuhfabrik werden in Abteilung I die Schuhsohlen, in Abteilung II die Absätze und in Abteilung III das Oberleder hergestellt. Statistische Beobachtungen weisen aus, daß die Ausschußquote in Abteilung I 2 %, in Abteilung II 4 % und in Abteilung III 3 % beträgt. Ohne vorherige Gütekontrolle werden in Abteilung IV aus den Zulieferungen der anderen drei Abteilungen die Schuhe zusammengenäht. Wieviel Prozent der hergestellten Schuhpaare werden im Durchschnitt Ausschuß sein, wenn angenommen wird, daß die Abteilung IV faktisch fehlerfrei arbeitet?

16. In einem Eisenbahnknotenpunkt kreuzen sich drei Strecken. Für die Wahrscheinlichkeit, daß es auf der Strecke i, $i = 1(1)3$, in 24 Stunden zu Verspätungen kommt (Ereignis A_i), wurden anhand statistischer Untersuchungen folgende Werte ermittelt:

    $$P(A_1) = 0{,}05, \quad P(A_2) = 0{,}02, \quad P(A_3) = 0{,}12 .$$

    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in 24 Stunden auf keiner Strecke eine Verspätung eintritt?
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es mindestens auf einer Strecke zu Verspätungen kommt?

17. Bei der Qualitätsprüfung eines Erzeugnisses wird ein eventuell vorhandener Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 gefunden. Gefordert wird jedoch eine Wahrscheinlichkeit von 0,99. Dazu bieten sich zwei Vorgehensweisen an:
   a) Jedes Erzeugnis wird mehrmals geprüft.
   b) Nach der ersten Prüfung werden die als fehlerhaft erkannten Erzeugnisse ausgesondert und die restlichen einer erneuten Prüfung unterzogen.

   Welches Prüfverfahren ist effektiver?

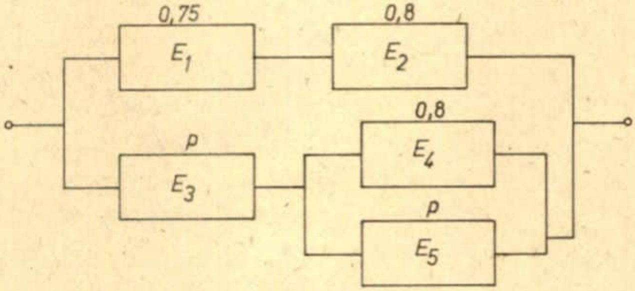
18. Wir betrachten das in der Aufgabe 6 beschriebene technische System. Über die Zuverlässigkeit der einzelnen Elemente mögen folgende Informationen vorliegen:

   $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}9$;

   $P(C_1) = 0{,}8$; $P(C_2) = 0{,}9$; $P(C_3) = 0{,}6$.

   Berechnen Sie die Zuverlässigkeit des Systems!

19. Gegeben sei das folgende technische System:



   Die Zahlen geben die Zuverlässigkeit der einzelnen Elemente an, die unabhängig voneinander ausfallen.
   a) Ermitteln Sie die Zuverlässigkeit Z des Systems als Funktion von p! Welches Monotonieverhalten weist diese Funktion auf?
   b) Wie groß ist die Zuverlässigkeit des Systems, wenn $p = 0{,}8$ ist?
   c) Wie groß muß die Zuverlässigkeit p der Elemente E_3 und E_5 mindestens sein, wenn die Zuverlässigkeit des Systems nicht kleiner als 0,92 sein soll?

20. Aus einer Urne mit 3 weißen, 2 roten und 5 schwarzen Kugeln werden nacheinander willkürlich und ohne Zurücklegen drei Kugeln entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Kugel rot, die zweite weiß und die dritte wiederum rot (Ereignis A) ist?

21. Aus statistischen Untersuchungen geht hervor, daß 96 % der in einem Betrieb hergestellten Erzeugnisse normgerecht sind (Ereignis B). Von jeweils 100 normgerechten Erzeugnissen entsprechen im Durchschnitt 75 der Güteklasse 1.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein aus der Produktion des Betriebes willkürlich ausgewähltes Erzeugnis der Güteklasse 1 entspricht (Ereignis A)?

22. Aus einem Skatspiel werden nacheinander willkürlich ohne Zurücklegen zwei Karten gezogen.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Karte ein As ist (Ereignis B), wenn bekannt ist, daß
      - die erste Karte ein As war (Ereignis A),
      - die erste Karte eine Zehn war (Ereignis C)?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Karte ein As ist, wenn die erste Karte unbekannt ist?

23. Eine Urne enthält N Lose, von denen M einen Gewinn bringen. Zwei Personen ziehen nacheinander ein Los.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Person gewinnt (Ereignis B), wenn
   a) bekannt ist, daß die erste Person nicht gewonnen hat (Ereignis A_1),
   b) unbekannt ist, ob die erste Person gewonnen hat oder nicht?

24. Für ein Exporterzeugnis gibt es im Land L_1 vier potentielle Kunden, im Land L_2 - zwei und im Land L_3 - sechs.
Die Wahrscheinlichkeit, daß mit einem potentiellen Kunden ein Liefervertrag abgeschlossen wird (Ereignis B), hängt vom jeweiligen Land ab: In L_1 beträgt die Wahrscheinlichkeit 0,7, in L_2 - 0,5 und in L_3 - 0,65.
Bei der Befragung eines willkürlich ausgewanlten Käufers wird festgestellt, daß er einen Vertrag abgeschlossen hat. Welche Hypothese bezüglich des Herkunftslandes dieses Käufers ist am wahrscheinlichsten?

25. In einer Großstadt kann man den Punkt Q von einem Ausgangspunkt R unter Benutzung dreier verschiedener Verkehrsmittel V_1, V_2 und V_3 erreichen.
Die Wahrscheinlichkeit, daß man in weniger als 20 Minuten ans Ziel gelangt (Ereignis B), beträgt für das Verkehrsmittel V_1 0,75, für V_2 0,6 und für V_3 0,85. Es sei bekannt, daß mit einem willkürlich ausgewählten Verkehrsmittel das Ziel (Punkt Q) in weniger als 20 Minuten erreicht wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Verkehrsmittel V_2 gewählt wurde?

26. Im Bereich einer Bezirksdirektion der Staatlichen Versicherung wurden insgesamt 100 000 Kraftfahrzeugversicherungen abgeschlossen, davon sind 60 % Pkw, 25 % Kräder und 15 % Lkw. Die Wahrscheinlichkeit, daß im Laufe eines Jahres ein Versicherungsfall auftritt (Ereignis B), beträgt für Pkw 0,005, für Kräder 0,01 und für Lkw 0,002.
   a) Wieviel Versicherungsfälle sind durchschnittlich in einem Jahr zu bearbeiten?
   b) Wie groß sind die Anteile der oben genannten drei Kraftfahrzeuggruppen an der Gesamtzahl der zu bearbeitenden Fälle?

27. Eine Anlage besteht aus drei Geräten G_1, G_2 und G_3, von denen zu jedem Zeitpunkt jeweils genau eines in Betrieb ist. Für die Wahrscheinlichkeit, daß das Gerät G_i in Betrieb ist (Ereignis A_i, $i = 1(1)3$), gilt: $P(A_1) = 0{,}4$; $P(A_2) = 0{,}1$; $P(A_3) = 0{,}5$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß das in Betrieb befindliche Gerät ausfällt (Ereignis B), beträgt beim Gerät G_1 0,2, bei G_2 0,3, bei G_3 0,1.
Bei Ausfall der Anlage nimmt die Fehlersuche eine beträchtliche Zeit in Anspruch. In welcher Reihenfolge sollen die einzelnen Baugruppen zweckmäßigerweise geprüft werden?

4.4. Zufallsvariablen und ihr Verteilungsgesetz

4.4.1. Beispiele

B 9: Im Ergebnis eines Versuches kann genau eines der fünf Ereignisse A_i, $i = 1(1)5$, eintreten. Für die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse gilt:

$P(A_1) = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{12}$, $P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{6}$.

Auf der Menge dieser Ereignisse sei eine diskrete Zufallsvariable X definiert, die den Wert (Realisation) $x_i = 2i - 1$, $i = 1(1)5$, annimmt, wenn das Ereignis A_i eingetreten ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X, und stellen Sie diese Funktionen graphisch dar!

Lösung

Die Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsfunktion impliziert eine Aussage über die möglichen Werte der Zufallsvariablen X und über die Wahrscheinlichkeit, mit der diese Werte angenommen werden. Im vorliegenden Fall kann X die Werte 1, 3, 5, 7 und 9 annehmen. Weiterhin gilt:

$p_1 = P(X = 1) = P(A_1) = \frac{1}{3}$; $p_2 = P(X = 3) = P(A_2) = \frac{1}{12}$;

$p_3 = P(X = 5) = P(A_3) = \frac{1}{6}$; $p_5 = P(X = 9) = P(A_5) = \frac{1}{6}$.

Besondere Überlegungen verlangt die Berechnung von $p_4 = P(X = 7) = P(A_4)$, da diese Wahrscheinlichkeit nicht angegeben ist.

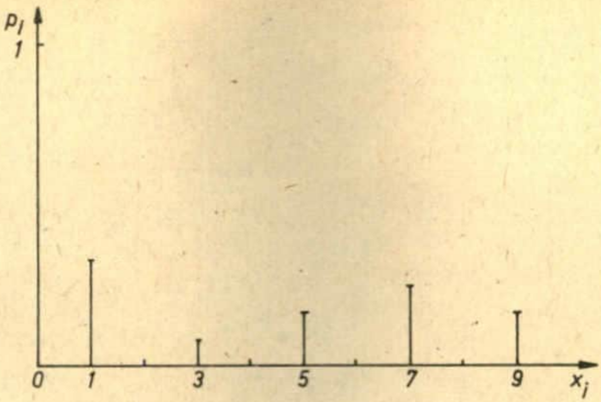
Da die Ereignisse A_i, $i = 1(1)5$, ein vollständiges System von Ereignissen bilden, ist ihre Summe das sichere Ereignis. Damit gilt:

$$p_4 = P(A_4) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) - P(A_5) = \frac{1}{4}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion kann in Form folgender Verteilungstabelle angegeben werden:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Graphisch ergibt sich folgendes Bild:



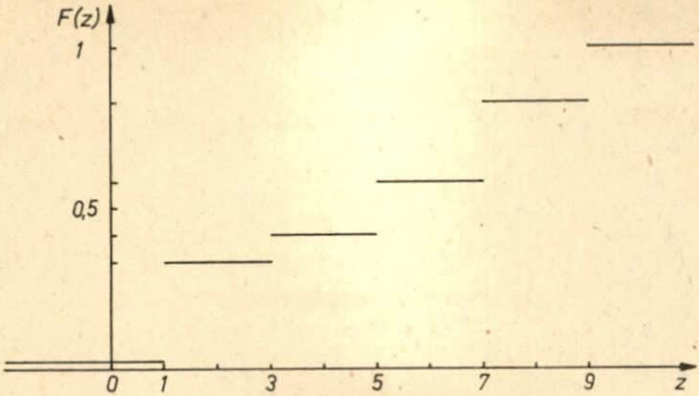
Für die Berechnung der Verteilungsfunktion F(z) der diskreten Zufallsvariablen X gilt die Beziehung

$$F(z) = P(X < z) = \begin{cases} 0\,, & z \leqq x_1\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i\,, & x_k < z \leqq x_{k+1},\ k = 2(1)4 \\ 1\,, & x_5 < z\,. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$F(z) = \begin{cases} 0\,, & z \leqq 1\,, \\ \frac{1}{3}\,, & 1 < z \leqq 3\,, \\ \frac{5}{12}\,, & 3 < z \leqq 5\,, \\ \frac{7}{12}\,, & 5 < z \leqq 7\,, \\ \frac{10}{12}\,, & 7 < z \leqq 9\,, \\ 1\,, & 9 < z\,. \end{cases}$$

Als graphisches Bild der Verteilungsfunktion erhält man:



B 10: Die Verteilungsfunktion F(z) einer stetigen Zufallsvariablen X habe die Gestalt (c = const.)

$$F(z) = \begin{cases} 0\,, & z \leqq 0\,, \\ \frac{3}{2c}\,z^2\,, & 0 < z \leqq c\,, \\ 1\,, & c < z\,. \end{cases}$$

a) Ermitteln Sie die zugehörige Dichtefunktion f(x)!

b) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c!

Lösung

a) Die Dichtefunktion erhält man durch Differentiation der Verteilungsfunktion. Da die angegebene Funktion F(z) nur an der Stelle z = c nicht differenzierbar ist, ergibt sich

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leqq 0\,, \\ \frac{3}{c}\,x\,, & 0 < x < c\,, \\ 0\,, & c < x\,. \end{cases}$$

An der Stelle x = c hat f(x) eine Unstetigkeitsstelle.

b) Zur Bestimmung des gesuchten Wertes von c werden die Eigenschaften einer Dichtefunktion genutzt.
Zunächst ergibt sich aus der Forderung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

die Beziehung $\int_0^c \frac{3}{c}x\,dx = 1$. Nach der Berechnung des bestimm-

ten Integrals erhält man die Gleichung
$\frac{3}{2}c = 1$, so daß $c = \frac{2}{3}$ ist.

B 11: Zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y nehmen entsprechend die Werte x_i, $i = 1(1)3$, und y_j, $j = 1(1)4$ an. Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) habe folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{ij} = P\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right]$:

x_i \ y_j	-2	-1	0	2
1	0,05	0,05	0,15	0,10
2	0,15	0,05	0,00	0,05
3	0,05	0,20	0,10	0,05

a) Sind die Zufallsvariablen X und Y voneinander unabhängig?

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen $Z = X + Y$!

Lösung

a) Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, wenn für jedes Indexpaar (i, j) die Beziehung $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ gilt, wobei $p_i = P(X = x_i)$ und $q_j = P(Y = y_j)$ ist.
Die Werte für p_i (bzw. q_j) erhält man durch Addition der Wahrscheinlichkeiten p_{ij} in der entsprechenden Zeile (bzw. Spalte) der zweidimensionalen Verteilungstabelle. Folglich gilt

$p_1 = 0,35$; $p_2 = 0,25$; $p_3 = 0,40$;

$q_1 = 0,25$; $q_2 = 0,30$; $q_3 = 0,25$; $q_4 = 0,20$.

Da $p_{11} = 0,05 \neq p_1 q_1 = 0,35 \cdot 0,25 = 0,0875$ ist, handelt es sich um abhängige Zufallsvariablen.

b) Zunächst sind die Realisationen der Zufallsvariablen Z zu bestimmen, die sich aus der Addition der einem möglichen Indexpaar (i, j) entsprechenden Werte x_i, y_j ergeben. Offensichtlich kann die Summe aus X und Y folgende Werte annehmen: -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Nun ist noch die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, mit der diese Werte angenommen werden. Für die Wahrscheinlichkeit $r_1 = P(Z = -1)$ gilt $r_1 = P(Z = -1) = P\left[(X = 1) \cap (Y = -2)\right] = 0,05$,

wobei der Zahlenwert aus der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitstabelle abzulesen ist. Analog gilt:

$$r_2 = P(Z = 0) = P\{[(X = 1) \cap (Y = -1)] \cup [(X = 2) \cap (Y = -2)]\}$$
$$= P[(X = 1) \cap (Y = -1)] + P[(X = 2) \cap (Y = -2)]$$
$$= 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}20\,,$$

wobei die Unverträglichkeit der Wertepaare (1, -1) und (2, -2) genutzt wurde.

Ermittelt man in ähnlicher Weise die übrigen Wahrscheinlichkeiten r_k, $k = 3(1)7$, erhält man für Z die Wahrscheinlichkeitsfunktion

z_k	-1	0	1	2	3	4	5
r_k	0,05	0,20	0,25	0,20	0,20	0,05	0,05 .

4.4.2. Übungsaufgaben

28. Ein Gerät enthält vier störanfällige Elemente E_i, $i = 1(1)4$. Die Wahrscheinlichkeit p_i für den Ausfall des Elementes E_i in einem bestimmten Zeitintervall betrage:
    $p_1 = 0{,}2;\quad p_2 = p_3 = 0{,}1;\quad p_4 = 0{,}3.$
    Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der in diesem Zeitintervall ausfallenden Elemente.
    a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X!
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens zwei Elemente ausfallen?
    c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X!

29. In einer Werkstatt arbeiten unabhängig voneinander zwei gleichartige Maschinen. Jede dieser Maschinen kann in einem Zeitintervall (0, T] mit der Wahrscheinlichkeit p ausfallen. Die Zufallsvariable X sei die Differenz zwischen der Anzahl der arbeitenden und ausfallenden Maschinen.
    a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X!
    b) Stellen Sie die Verteilungsfunktion von X für p = 0,3 graphisch dar!

30. Ein Gerät besteht aus drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3. Die Zuverlässigkeit p_i der Baugruppen betrage:

$$p_1 = 0{,}75\,, \quad p_2 = p_3 = q\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens eine Baugruppe im betrachteten Zeitintervall ausfällt, sei 0,625.

a) Berechnen Sie die Zuverlässigkeit q der Baugruppen E_2 bzw. E_3!

b) Es sei X die Anzahl der ausfallenden Baugruppen. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen!

31. Die Dichtefunktion f(x) einer stetigen Zufallsvariablen X hat die Gestalt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x\,, & 0 < x \leqq 3\,, \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{9}x\,, & 3 < x \leqq 6\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Stellen Sie f(x) graphisch dar!

b) Es sei F(z) die Verteilungsfunktion von X.
Berechnen Sie F(4), und interpretieren Sie das Ergebnis anhand der angefertigten Skizze!

32. Die stetige Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion

$$F(z) = \begin{cases} 0\,, & z \leqq -1\,, \\ \frac{3}{4}z + \frac{3}{4}\,, & -1 < z \leqq \frac{1}{3}\,, \\ 1\,, & \frac{1}{3} < z\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß X einen Wert aus dem Intervall $(0, \frac{1}{3})$ annimmt!

33. Es sei f(x) die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X. Wie verändert sich ihre graphische Darstellung, wenn

a) zur Zufallsvariablen der Wert 1 addiert,

b) von der Zufallsvariablen der Wert 2 subtrahiert,

c) die Zufallsvariable mit 2 multipliziert,

d) das Vorzeichen der Zufallsvariablen verändert wird?

34. Die Zufallsvariablen X und Y seien durch die funktionale Beziehung $Y = \frac{1}{X}$ verknüpft. Die stetige Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(z) = \begin{cases} 0 , & z \leqq 0 , \\ \frac{1}{4}z , & 0 < z \leqq 4 , \\ 1 , & 4 < z . \end{cases}$$

a) Stellen Sie die Verteilungsfunktion $F_1(z) = P(Y < z)$ der Zufallsvariablen Y in allgemeiner Form mittels F(z) dar!

b) Berechnen Sie $F_1(\frac{1}{3})$!

35. Eine diskrete zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) habe folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$x_i \backslash y_j$	0	1	2	3
0	0,3721	0,1830	0,0488	0,0061
1	0,1830	0,0900	0,0240	0,0030
2	0,0488	0,0240	0,0064	0,0008
3	0,0061	0,0030	0,0008	0,0001

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen Z = X + Y !

b) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

36. Die Vornote und die Prüfungsnote im Fach "Mathematik für Ökonomen" eines willkürlich ausgewählten Studenten sind Zufallsvariable, die mit X bzw. Y bezeichnet werden sollen. X kann die Werte $x_i = 1, 2, 3, 4$, Y die Werte $y_j = 1, 2, 3, 4, 5$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) habe folgendes Aussehen:

$x_i \backslash y_j$	1	2	3	4	5
1	0,0461	0,0496	0,0035	0	0
2	0,0390	0,1418	0,1064	0,0106	0,0035
3	0,0177	0,0887	0,2199	0,1099	0,0036
4	0	0,0285	0,0568	0,0567	0,0177

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X und Y!

b) Prüfen Sie, ob zwischen den Vor- und Prüfungsnoten eine Abhängigkeit besteht!

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der aus Vor- und Prüfungsnote ermittelten Endnote (Zufallsvariable Z), wenn dabei folgendermaßen verfahren wird:

- Ist die Prüfungsnote gleich der Vornote, gilt diese auch als Endnote.
- Unterscheiden sich Vor- und Prüfungsnote um eins, gilt die Vornote als Endnote.
- Unterscheiden sich Vor- und Prüfungsnote um zwei, ergibt sich die Endnote als Mittelwert beider Noten.
- Ist die Prüfungsnote "5", gilt diese unabhängig von der Vornote als Endnote.

4.5. Parameter der Verteilung

4.5.1. Beispiele

B 12: Die stetige Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & a - n < x \leqq a + n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie Erwartungswert E(X) und Varianz $\sigma^2(X)$ von X!

Lösung

Für den Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen gilt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx .$$

Unter Beachtung der konkreten Gestalt von f(x) ergibt sich daraus

$$E(X) = \int_{a-n}^{a+n} x \cdot \frac{1}{2n}\, dx = \frac{1}{4n}\left[(a+n)^2 - (a-n)^2\right] = a .$$

Für die Varianz gilt die Beziehung

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f(x)\, dx .$$

Auf Grund der konkreten Gestalt von f(x) erhält man mit E(X) = a

$$\sigma^2(X) = \int_{a-n}^{a+n} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{2n}\, dx = \frac{n^2}{3} .$$

B 13: Bei einem Kraftfahrzeug-Hilfsdienst können zu einem beliebigen Zeitpunkt reparaturbedürftige Fahrzeuge eintreffen.

Wird der Bereitschaftsdienst von n Arbeitern nach der Methode A organisiert, können in jeder Stunde durchschnittlich $n \cdot p$ Fahrzeuge repariert werden. Erfolgt die Arbeitsorganisation nach der Methode B, so können im Durchschnitt zwischen 6 und 18 Uhr stündlich $n \cdot \left[1 - (1 - p)^2\right]$ Fahrzeuge, zwischen 18 und 24 Uhr stündlich np Fahrzeuge und zwischen 0 und 6 Uhr stündlich $\frac{1}{2}np$ Fahrzeuge repariert werden.
Für welche Werte von p ist die Arbeitsorganisation nach Methode B günstiger?

Lösung

Die Methode B ist günstiger, wenn die durchschnittliche Anzahl der innerhalb von 24 Stunden reparierten Fahrzeuge größer ist als bei der Methode A. Bezeichnet die Zufallsvariable X die Anzahl der in 24 Stunden reparierten Fahrzeuge, so gilt bei Methode A:

$$E_A(X) = 24\ np\,.$$

Bei Methode B gilt entsprechend

$$E_B(X) = 12n\left[1 - (1 - p)^2\right] + 6np + 6 \cdot \frac{1}{2}np\,.$$

Löst man die entsprechende Ungleichung, so ergibt sich, daß für alle $p < \frac{3}{4}$ die Beziehung $E_A(X) < E_B(X)$ erfüllt ist.

B 14: Die tägliche Nachfrage X (gemessen in Mengeneinheiten ME) nach einer leicht verderblichen Ware in einer Verkaufsstelle sei eine Zufallsvariable und genüge folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	30 ME	40 ME	50 ME	60 ME
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Die Ware wird täglich geliefert. Für jede am gleichen Tag verkaufte ME erzielt die Verkaufsstelle einen Gewinn von 2 Werteinheiten (WE). Von der am gleichen Tag nicht verkauften Ware können am nächsten Tag noch 20 % mit einem Gewinn von 1 WE je ME verkauft werden. Die übrige Menge kann nicht verkauft werden, so daß die Verkaufsstelle hier einen Verlust von 2 WE je ME erleidet. Ist die von den Käufern gewünschte Menge an einem Tag größer als die gelieferte Menge, erleidet die Verkaufsstelle einen Verlust,

der auf 2 WE je nicht vorhandener ME geschätzt wird.
Der Verkaufsstellenleiter hat zu entscheiden, ob täglich 40 ME oder 50 ME zu bestellen sind.
Welche Menge ist zu bestellen, wenn als Kriterium
a) der Erwartungswert,
b) die Standardabweichung,
c) der Variationskoeffizient
des Gewinns gewählt wird?

Lösung

Die Zufallsvariable G_1 (G_2) bezeichne den Gewinn, der bei einer Bestellmenge von 40 ME (50 ME) erzielt wird. Die Realisationen dieser diskreten Zufallsvariablen hängen von der tatsächlich eingetretenen Nachfrage ab. Ist $X = 30$ ME, so ergibt sich bei einer Bestellmenge von 40 ME ein Gewinn von 46 WE;
30 ME können am gleichen Tag mit einem Gewinn von $2 \cdot 30 = 60$ WE verkauft werden; von den verbleibenden 10 ME können am nächsten Tag 20 % (= 2 ME) mit einem Gewinn von $1 \cdot 2 = 2$ WE verkauft werden; die übrigen 8 ME können nicht verkauft werden, so daß ein Verlust von $2 \cdot 8 = 16$ WE entsteht. Der erzielte Gewinn beträgt folglich $60 + 2 - 16 = 46$ WE.
Ist $X = 40$ ME, stimmen Nachfrage und Bestellmenge überein. Für jede ME wird ein Gewinn von 2 WE erzielt, so daß G_1 in diesem Fall den Wert $2 \cdot 40 = 80$ WE annimmt. Bei $X = 50$ ME reicht die bestellte Menge von 40 ME zur Bedarfsdeckung nicht aus: 40 ME können mit einem Gewinn von 80 WE abgesetzt werden, aber wegen der fehlenden 10 ME erleidet die Verkaufsstelle einen Verlust von $2 \cdot 10 = 20$ WE, so daß sich der Gewinn auf $80 - 20 = 60$ WE beläuft.
Auf diese Weise erhält man für die Zufallsvariable G_1 und G_2 folgende Wahrscheinlichkeitsfunktionen:

G_{1i}	46	80	60	40
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

G_{2i}	32	66	100	80
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

(Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die verschiedenen Realisationen des Gewinns eintreten, sind gleich den Wahrscheinlichkeiten für die Nachfragewerte, die der Berechnung der Gewinngrößen zugrunde lagen.)

a) Aus

$E(G_1) = 46 \cdot 0{,}2 + 80 \cdot 0{,}4 + 60 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}1 = 63{,}2$ WE,

$E(G_2) = 32 \cdot 0{,}2 + 66 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}3 + 80 \cdot 0{,}1 = 70{,}8$ WE

folgt, daß bei einer Bestellmenge von 50 ME im Durchschnitt ein höherer Gewinn erzielt wird.

b) Berechnet man zunächst die Varianz

$$\sigma^2(G_1) = (46 - 63{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (80 - 63{,}2)^2 \cdot 0{,}4$$
$$+ (60 - 63{,}2)^2 \cdot 0{,}3 + (40 - 63{,}1)^2 \cdot 0{,}1 = 228{,}96 \,,$$

so erhält man

$$\sigma(G_1) = \sqrt{\sigma^2(G_1)} = 15{,}1 \,.$$

Auf analoge Weise ergibt sich $\sigma(G_2) = 24{,}0$, so daß wegen der geringen Standardabweichung eine Bestellmenge von 40 ME vorzuziehen ist.

c) Für den Variationskoeffizienten erhält man

$$v(G_1) = \frac{\sigma(G_1)}{E(G_1)} = \frac{15{,}1}{63{,}2} = 0{,}24 \,,$$

$$v(G_2) = \frac{\sigma(G_2)}{E(G_2)} = \frac{24{,}0}{70{,}8} = 0{,}34 \,,$$

so daß sich nach diesem Kriterium eine Bestellmenge von 40 ME als günstiger erweist.

B 15: In einem Betrieb werden die Fertigerzeugnisse maschinell verpackt. Der Verpackungsautomat ist so beschaffen, daß die Anzahl X der Erzeugnisse pro Packung eine Zufallsvariable ist. Anhand statistischer Unterlagen wurde festgestellt, daß

$$E(X) = 10000 \text{ und } \sigma^2(X) = 100 \text{ ist.}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Erzeugnisse in einer willkürlich ausgewählten Packung um weniger als 50 vom Sollwert (Erwartungswert) abweicht? Geben Sie mit Hilfe der Tschebyschewschen Ungleichung einen Näherungswert an!

Lösung

Auf Grund der Tschebyschewschen Ungleichung gilt:

$$P(|X - 10\,000| < 50) \geqq 1 - \frac{100}{2500} = \frac{24}{25} = 0{,}96\,,$$

d. h., die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nicht kleiner als 0,96.

4.5.2. Übungsaufgaben

37. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der in den Beispielen B 9 und B 10 betrachteten Zufallsvariablen X!

38. Eine diskrete Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsfunktion

x_i	0	1
p_i	1-p	p

Berechnen Sie E(X) und $\sigma^2(X)$!

39. Ein Betrieb stellt Röhren für Fernsehapparate her. Der Verkaufspreis pro Röhre beträgt 10 Werteinheiten (WE). Der Betrieb beabsichtigt, auf jede Röhre eine Garantie von 18 Monaten mit der Maßgabe zu gewähren, daß
   - bei erstmaligem Ausfall im 1. Halbjahr 100 % des Kaufpreises,
   - bei erstmaligem Ausfall im 2. Halbjahr 66 % des Kaufpreises,
   - bei erstmaligem Ausfall im 3. Halbjahr 33 % des Kaufpreises

   zurückerstattet werden.
   Statistische Untersuchungen lassen bezüglich der Ausfallwahrscheinlichkeit folgende Aussagen zu:

Halbjahr	1.	2.	3.
Ausfallwahrscheinlichkeit	0,10	0,05	0,15

   Welche Kosteneinsparungen müssen erzielt werden, so daß durch die zu erwartenden Garantieleistungen der Gewinn pro Röhre nicht geschmälert wird?

40. An einem Fußgängerüberweg steht eine automatische Verkehrsampel, die für die Kraftfahrer im ständigen Wechsel eine Mi-

nute grünes und eine halbe Minute rotes Licht zeigt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein sich der Ampel zufällig nähernder Kraftfahrer den Oberweg ohne anzuhalten passieren kann?
b) Es sei X die Wartezeit eines beliebigen Fahrzeugs am Oberweg. Berechnen Sie $E(X)$ und $\sigma^2(X)$!

41. Ein Materiallager bestellt zu Beginn jedes Monats 20 Stück einer bestimmten Ersatzteilart. Die monatliche Nachfrage (in Stück) nach diesem Ersatzteil ist eine diskrete Zufallsvariable X mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	17	18	19	20	21	22
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Für jedes im laufenden Monat nicht benötigte Ersatzteil entstehen Lagerhaltungskosten von 2 Werteinheiten je Stück. Ist die Nachfrage größer als die vorhandene Ersatzteilmenge, müssen die fehlenden Teile zusätzlich beschafft werden, was Kosten von 5 WE je Stück verursacht.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Kosten, die dem Lager bei dieser Ersatzteilart entstehen!
b) Wie ändert sich der Erwartungswert, wenn statt 20 Stück 19 Stück (bzw. 21 Stück) bestellt werden?

42. Wie verändern sich Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen X, wenn man

a) zur Zufallsvariablen eine konstante Zahl c addiert,
b) die Zufallsvariable mit einer konstanten Zahl c multipliziert?

43. Die Zufallsvariablen X und Y haben den Erwartungswert $E(X) = 2$ bzw. $E(Y) = 6$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z = 3X + 4Y$!

44. X und Y seien unabhängige Zufallsvariablen mit $\sigma^2(X) = 5$ und $\sigma^2(Y) = 6$. Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen $Z = 3X + 2Y$!

45. Eine stetige Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Werte der Zufallsvariablen X um mehr als $\frac{4}{3}$ vom Erwartungswert E(X) abweichen?

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Tschebyschewschen Ungleichung einen Näherungswert für die unter a) ermittelte Wahrscheinlichkeit! Interpretieren Sie das Ergebnis!

4.6. Spezielle diskrete Verteilungen

4.6.1. Beispiele

B 16: Aus einer Sendung von 90 in Kartons verpackten Fernsehgeräten, von denen 60 ein dunkles und 30 ein helles Gehäuse haben, wurden willkürlich 10 Kartons ausgewählt. Es zeigte sich, daß sie alle Fernsehgeräte mit hellem Gehäuse enthielten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den nächsten drei willkürlich (und ohne Zurücklegen) ausgewählten Kartons mindestens zwei Geräte mit hellem Gehäuse enthalten sind (Ereignis A)?

Lösung

Zunächst gilt es, die für die Aufgabenlösung relevante Zufallsvariable zu beschreiben. Das ist offentsichtlich die Anzahl X der Geräte mit hellem Gehäuse in den drei nachfolgend ausgewählten Kartons. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(A) ergibt sich folglich aus der Beziehung

$$P(A) = P(X \geqq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) .$$

Die Zufallsvariable X genügt einer hypergeometrischen Verteilung (Auswahlschema ohne Zurücklegen), wobei gilt:

$N = 90 - 10 = 80$; $M = 30 - 10 = 20$; $n = 3$. Somit ist

$$P(X = 2) = \frac{\binom{20}{2}\binom{60}{1}}{\binom{80}{3}} = 0{,}4309 ,$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{20}{3}\binom{60}{0}}{\binom{80}{3}} = 0{,}4165 .$$

Man erhält $P(A) = 0{,}4309 + 0{,}4165 = 0{,}8474$.

B 17: Aus einem Lieferposten automatisch hergestellter Buchsen werden 80 Erzeugnisse willkürlich herausgegriffen und auf ihren Durchmesser geprüft. Eine Buchse gilt als Ausschuß, wenn ihr Durchmesser nicht in vorgeschriebenen Toleranzgrenzen liegt. Aus statistischen Analysen ist bekannt, daß durchschnittlich 7 % der hergestellten Buchsen Ausschuß sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den ausgewählten 80 Buchsen

a) genau 4 Buchsen Ausschuß sind,
b) höchstens 2 Buchsen Ausschuß sind?

Lösung

Die für die Aufgabenlösung relevante Zufallsvariable ist die Anzahl X der Ausschußbuchsen unter den ausgewählten 80 Buchsen. Da es sich um ein Auswahlschema ohne Zurücklegen handelt, genügt X einer hypergeometrischen Verteilung. Aus den vorhandenen Angaben läßt sich kein Wert für den Parameter N ermitteln. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten lassen sich aber näherungsweise mit Hilfe einer Binomialverteilung berechnen, wenn man von der offensichtlich sinnvollen Annahme ausgeht, daß die "Faustregel" $N > 10 \cdot n = 800$ erfüllt ist. Diese Binomialverteilung ist durch die Parameter $n = 80$ und $p = 0{,}07$ charakterisiert. Dann gilt

a) $P(X = 4) = \binom{80}{4}(0{,}07)^4\ (0{,}93)^{76} = 0{,}1528$,

b) $$P(X \leqq 2) = \binom{80}{0}(0{,}07)^0\ (0{,}93)^{80} + \binom{80}{1}\ (0{,}07)^1\ (0{,}93)^{79}$$
$$+\binom{80}{2}(0{,}07)^2\ (0{,}93)^{78} =$$
$$= 0{,}0003 + 0{,}0181 + 0{,}0539 = 0{,}0723\ .$$

B 18: In einem Textilbetrieb beaufsichtigt eine Arbeiterin 6 Spinnmaschinen, die unabhängig voneinander arbeiten. Für jede dieser Maschinen betrage die Wahrscheinlichkeit, daß sie innerhalb einer Stunde bedient werden muß, 0,15.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Stunde

a) genau zwei Maschinen bedient werden müssen,
b) mindestens zwei Maschinen bedient werden müssen?

Lösung

Die für die Aufgabenlösung relevante Zufallsvariable ist die Anzahl X der innerhalb einer Stunde zu bedienenden Maschinen. Da die sechs Maschinen unabhängig voneinander arbeiten und die Bedienwahrscheinlichkeit für alle gleich ist, liegt ein Bernoullisches Versuchsschema vor, so daß X einer Binomialverteilung genügt. Dabei ist $n = 6$ und $p = 0{,}15$. Folglich erhält man:

a) $P(X = 2) = \binom{6}{2} (0{,}15)^2 (0{,}85)^4 = 0{,}176$.

b) $P(X \geqq 2) = \sum_{i=2}^{6} \binom{6}{i} (0{,}15)^i (0{,}85)^{6-i}$.

Eine Berechnung nach dieser Formel wäre sehr aufwendig. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man von der Beziehung

$$P(X \geqq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

ausgeht. Wegen

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} (0{,}15)^0 (0{,}85)^6 = 0{,}3771 ,$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} (0{,}15)^1 (0{,}85)^5 = 0{,}3993$$

erhält man dann $P(X \geqq 2) = 0{,}2236$.

B 19: An einem Fließband sind 100 Arbeitskräfte eingesetzt. Für jede dieser Arbeitskräfte betrage die Wahrscheinlichkeit, daß sie an einem beliebigen Tage in einer bestimmten Jahreszeit krankheitsbedingt ausfällt, 0,04. Sinkt die Arbeitskräftezahl am Fließband unter 90, müssen zusätzliche Kräfte eingesetzt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das der Fall?

Lösung

Die für die Aufgabenlösung relevante Zufallsvariable ist die Anzahl X der täglich krankheitsbedingt ausfallenden Arbeitskräfte. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Arbeitskräfte unabhängig voneinander erkranken, genügt X einer Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}04$. Folglich läßt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X > 10)$ aus der Beziehung

$$P(X > 10) = \sum_{i=11}^{100} \binom{100}{i} (0{,}04)^i (0{,}96)^{100-i}$$

berechnen. Da aber

$$n \cdot p = 100 \cdot 0{,}04 = 4 \leqq 10\ ,$$
$$1500 \cdot p = 1500 \cdot 0{,}04 = 60 \leqq n = 100$$

gilt, ist gemäß "Faustregel" eine näherungsweise Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = n \cdot p = 4$ möglich.

Aus der Tabelle der Poisson-Verteilung ergibt sich

$$P(X > 10) = 0{,}0019 + 0{,}0006 + 0{,}0002 + 0{,}0001$$
$$= 0{,}0028\,.$$

B 20: Der Bunkerinhalt eines Mähdreschers werde während acht Betriebsstunden durchschnittlich 48mal entleert. Die Anzahl X der Bunkerentleerungen je Zeiteinheit sei eine poissonverteilte Zufallsvariable, wobei als Zeiteinheit eine halbe Stunde gewählt wurde.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß während einer Zeiteinheit

a) genau drei Bunkerentleerungen,
b) nicht mehr als zwei Bunkerentleerungen stattfinden?

Lösung

Den Parameter λ der poissonverteilten Zufallsvariablen X erhält man aus der Überlegung, daß in einer Zeiteinheit (halbe Stunde) durchschnittlich 3 Entleerungen stattfinden, wenn in 8 Stunden durchschnittlich 48 Entleerungen erfolgen. Folglich ist $\lambda = 3$.

a) $P(X = 3) = 0{,}2240$ (Tafelwert).
b) $P(X \leqq 2) = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232\,.$

4.6.2. Übungsaufgaben

46. Ein Betrieb erhält des öfteren Lieferungen von 100 Einzelteilen. Zur Qualitätskontrolle werden willkürlich 10 Teile ohne Zurücklegen ausgewählt. Enthält diese Stichprobe mehr als zwei defekte Teile, wird die gesamte Lieferung zuürckgeschickt, andernfalls wird sie angenommen. Mit den beiden möglichen Entscheidungen (Annahme oder Ablehnung) sind folgende Kosten verbunden:
Bei Annahme der Lieferung verursacht jedes defekte Teil 9 Mark Kosten für Nacharbeiten. Bei Ablehnung und Zurücksen-

dung einer Lieferung, die nicht mehr als sechs defekte Teile enthält, werden dem Betrieb die Transportkosten in Höhe von 2000 Mark in Rechnung gestellt.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Kosten, die dem Betrieb bei Anwendung des obigen Prüfverfahrens für den Fall entstehen, daß die Lieferungen genau 6 defekte Teile enthalten!

47. Einem Posten von 800 Antriebswellen werden willkürlich und ohne Zurücklegen 30 Stück entnommen und auf ihren Durchmesser geprüft. Eine Welle ist verwendbar, wenn ihr Durchmesser in vorgegebenen Toleranzgrenzen liegt. Es sei X die Anzahl der in der Stichprobe enthaltenen verwendbaren Wellen. Aus statistischen Untersuchungen ist bekannt, daß 9 % aller produzierten Wellen nicht verwendbar sind.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die 30 entnommenen Antriebswellen sämtlich verwendbar sind (Ereignis A)? Wie kann diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnet werden?
   b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen X!

48. Aus statistischen Angaben geht hervor, daß in einem bestimmten Gebiet von den Familien mit Kindern 50 % ein Kind, 41 % zwei Kinder, 7 % drei Kinder und 2 % 4 Kinder haben. Es sei X die Anzahl der Jungen in einer Familie mit Kindern.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X!
   b) Berechnen Sie $E(X)$ und $\sigma^2(X)$!

49. Ein Versuch gelingt in 8 % aller Fälle. Wieviele Einzelversuche müssen durchgeführt werden, so daß mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit (0,99) mindestens ein Versuch gelingt?

50. An einer Oberschule lernen 400 Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat keiner dieser Schüler am 24. Dezember Geburtstag (Ereignis A)?

51. Von 8 Arbeitern einer Abteilung benötigt jeder in der Stunde durchschnittlich während 15 Minuten Elektroenergie. Dabei kann angenommen werden, daß zu einem beliebigen Zeitpunkt jeder Arbeiter mit gleicher Wahrscheinlichkeit Elektroenergie benötigt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zu einem willkürlich ausgewählten Zeitpunkt keiner der Arbeiter Elektroenergie benötigt?

b) Welche Anzahl von Arbeitern, die zu einem beliebigen Zeitpunkt gleichzeitig Elektroenergie benötigen, ist am wahrscheinlichsten?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als zwei Arbeiter gleichzeitig Elektroenergie benötigen?

52. Eine Großhandelsgesellschaft für Obst und Gemüse hat in der Saison im Betreuungsbereich 100 zusätzliche Verkaufsstände eingerichtet, die in Abhängigkeit von der Nachfrage sofort beliefert werden sollen. Es hat sich gezeigt, daß jeder dieser Verkaufsstände mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 im Laufe des Tages eine Zusatzbestellung aufgibt. Zum Transport stehen Lastkraftwagen zur Verfügung, von denen jeder die Menge von 3 Zusatzbestellungen transportieren kann. Wieviele LKW sind einzuplanen, wenn die Kosten (unabhängig vom erfolgten Einsatz) 300 Mark pro LKW und Tag und die Verluste für jede nicht realisierte Bestellung 400 Mark betragen (minimaler Erwartungswert der Kosten)?

53. Ein Arbeiter verarbeitet in einer Schicht 150 Halbfabrikate zu entsprechenden Finalprodukten. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Finalprodukt Ausschuß ist, beträgt für alle Produkte 0,04. Es sei X die Anzahl der Ausschußstücke, die der Arbeiter während einer Schicht herstellt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Arbeiter nicht mehr als ein Ausschußstück produziert (Ereignis A)! Wie läßt sich diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen?

54. In einem Kreis genüge der jährliche Bedarf pro Haushalt an einem Massenartikel einer Poisson-Verteilung. In den letzten Jahren betrug der durchschnittliche Bedarf pro Haushalt 16 Stück. Der für die Versorgung des Kreises zuständige Handelsbetrieb hat seinen Sicherheitsbestand so angelegt, daß ein über den Durchschnitt hinausgehender Mehrbedarf pro Haushalt in Höhe der halben Standardabweichung noch befriedigt werden kann.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Teil des Bedarfes nicht gedeckt?

55. Die zentrale Werkzeugausleihe eines Betriebes verfügt über drei Exemplare eines bestimmten Spezialwerkzeuges, die am Tag der Ausleihe zurückgegeben werden müssen. Durchschnittlich werden pro Tag zwei dieser Spezialwerkzeuge benötigt. Die Nachfrage genüge einer Poisson-Verteilung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß an einem beliebigen Tag

a) kein Exemplar ausgeliehen wird,

b) die Nachfrage nicht befriedigt werden kann?

4.7. Spezielle stetige Verteilungen

4.7.1. Beispiele

B 21: Die Dicke X der auf einer Metallhobelmaschine hergestellten Platten ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $\mu = E(X) = 10$ mm und $\sigma = \sigma(X) = 0{,}02$ mm.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürlich ausgewählte Platte Ausschuß ist, wenn
   a) die Dicke mindestens 9,97 mm betragen soll,
   b) die Dicke höchstens 10,05 mm betragen darf,
   c) die Dicke um maximal 0,03 mm vom Sollwert (10 mm) abweichen darf?

2. Wie groß muß die Grenze c des Toleranzintervalls $[10 - c,\ 10 + c]$ mindestens sein, damit man nicht mehr als 5 % Ausschußplatten erhält?

Lösung

1. a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X < 9{,}97)$.
Wegen $X = N\ (10;\ 0{,}0004)$ gilt

$$P(X < 9{,}97) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{9{,}97 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X - 10}{0{,}02} < -1{,}5\right)$$

$$= P(N\ (0{,}1) < -1{,}5) = \Phi\ (-1{,}5)\ ,$$

wobei $\Phi(z)$ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung $N(0{,}1)$ ist, die in Tabellenform vorliegt. Mit $\Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332$ erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0,0668.

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 10{,}05)$.
Wiederum gilt

$$P(X > 10{,}05) = P\left(\frac{X - 10}{0{,}02} > 2{,}5\right) = P(N(0,1) > 2{,}5)$$
$$= 1 - P(N(0,1) < 2{,}5) \overset{(+)}{=} 1 - \Phi(2{,}5)$$
$$= 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062.$$

(Anmerkung zu (+): Entsprechend den Eigenschaften stetiger Zufallsgrößen ist $P(N(0,1) \leqq 2{,}5) = P(N(0,1) < 2{,}5)$ $= \Phi(2{,}5)$.)

c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 10| > 0{,}03)$. Auf Grund des Satzes 4.3.15 (vgl. Mathematik für Ökonomen, Bd. 2, S. 113) erhält man zunächst

$$P(|X - 10| \leqq 0{,}03) = 2\,\Phi\left(\frac{0{,}03}{0{,}02}\right) - 1 = 2\,\Phi(1{,}5) - 1$$
$$= 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664.$$

Dann ist $P(|X - 10| > 0{,}03) = 1 - 0{,}8664 = 0{,}1336$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

2. Die gesuchte Toleranzgrenze ist aus der Beziehung

$$P(|X - 10| \geqq c) \leqq 0{,}05$$

zu bestimmen. Dabei gilt

$$P(|X - 10| \geqq c) = 1 - P(|X - 10| < c)$$
$$= 1 - \left[2\,\Phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right) - 1\right] = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right)\right].$$

Folglich ergibt sich die Ungleichung

$$2\left[1 - \Phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right)\right] \leqq 0{,}05,$$

deren Umformung zu

$$\Phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right) \geqq 0{,}975$$

führt. Aus der Tabelle der standardisierten Normalverteilung erhält man, daß diese Ungleichung für $\frac{c}{0{,}02} \geqq 1{,}96$ erfüllt ist, so daß $c \geqq 0{,}0392$ sein muß.

<u>B 22</u>: Auf Grund einer Marktanalyse wird geschätzt, daß im Planzeitraum der Bedarf X an einem Artikel normalverteilt mit dem Parameter $\mu = 50$ Mengeneinheiten [ME] und $\sigma = 3$ ME ist.

a) Zu Beginn der Planperiode ist ein Lagerbestand von 53 ME vorhanden. Eine Auffüllung des Lagers in der Planperiode ist nicht vorgesehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann der Bedarf in der Planperiode aus dem Lager gedeckt werden?

b) Eine Leitungsentscheidung legt fest, daß die Wahrscheinlichkeit der Bedarfsdeckung mindestens 0,99 betragen muß. Wie groß muß dann der Lagerbestand zu Beginn der Planperiode sein?

Lösung

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq 53)$. Wegen $X = N(50,9)$ gilt

$$P(X \leqq 53) = P(\frac{X - 50}{3} \leqq 1) = P(N(0,1) \leqq 1)$$
$$= \Phi(1) = 0{,}8413.$$

b) G bezeichne den gesuchten Lagerbestand, der sich aus der Beziehung $P(X \leqq G) \geqq 0{,}99$ ergibt. Es gilt

$$P(X \leqq G) = P(\frac{X - 50}{3} \leqq \frac{G - 50}{3}) = \Phi(\frac{G - 50}{3}) \geqq 0{,}99 .$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, wenn

$$\frac{G - 50}{3} \geqq 2{,}323 \qquad \text{ist.}$$

Folglich muß $G \geqq 56{,}97$ sein.

B 23: In einer Werkhalle stehen 60 Maschinen, die unabhängig voneinander arbeiten. Während eines Monats fällt jede dieser Maschinen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 aus. Es sei X die Anzahl der in einem Monat ausfallenden Maschinen.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Zufallsgröße X!
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau fünf Maschinen ausfallen?
c) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(15 \leqq X \leqq 25)$!

Lösung

a) Aus den gemachten Angaben folgt, daß die Arbeit der 60 Maschinen den Bedingungen eines Bernoullischen Versuchsschemas genügt, so daß die Zufallsvariable X binomialverteilt mit $n = 60$ und $p = 0{,}3$ ist. Folglich gilt

$$E(X) = np = 60 \cdot 0{,}3 = 18$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np\,(1 - p)} = \sqrt{12{,}6} = 3{,}55.$$

b) $P(X = 5) = \binom{60}{5} (0{,}3)^5 (0{,}7)^{55} = 4{,}0115 \cdot 10^{-5}$.

c) Da $np\,(1 - p) = 12{,}6 > 9$ gilt, kann gemäß "Faustregel" die gesuchte Wahrscheinlichkeit näherungsweise mit Hilfe einer Normalverteilung berechnet werden, wobei

$\mu = np = 18$ und $\sigma^2 = np\,(1 - p) = 12{,}6$ ist. Daraus ergibt sich

$$P(15 \leqq X \leqq 25) = P\left(\frac{15 - 18}{3{,}55} \leqq \frac{X - 18}{3{,}55} \leqq \frac{25 - 18}{3{,}55}\right)$$

$$= P(-\,0{,}84 \leqq N(0{,}1) \leqq 1{,}97) = \Phi(1{,}97) - \Phi(-\,0{,}84)$$

$$= \Phi(1{,}97) - [1 - \Phi(0{,}84)] \doteq 0{,}9756 - 0{,}2005 = 0{,}7751\,.$$

B 24: Die Dauer von Telefongesprächen im Selbstwählverkehr sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $E(X) = 2$ Minuten. Bei starker Überlastung der Leitung wird ein Gespräch automatisch nach 3 Minuten getrennt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das der Fall?

Lösung

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqq 3)$. Wegen $E(X) = 2$ gilt für den Parameter a der Exponentialverteilung

$a = \frac{1}{E(X)} = 0{,}5$. Damit ergibt sich

$$P(X \geqq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-0{,}5\cdot 3})$$

$$= e^{-1{,}5} = 0{,}2231.$$

4.7.2. Übungsaufgaben

56. Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $\mu = 0$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable einen Wert im Intervall $(-a, a)$ annimmt, betrage 0,5.
Berechnen Sie σ^2, und geben Sie die Dichtefunktion $f(x)$ der Zufallsvariablen X an!

57. Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $E(X) = 0$.
Für welchen Wert von σ erreicht die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leqq X \leqq 5)$ ihr Maximum?

58. Ein Betrieb stellt Kugeln für Kugellager her. Der Nenndurchmesser der Kugeln beträgt 5 mm. Auf Grund des technologischen Prozesses ist der tatsächliche Durchmesser eine nor-

malverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 5$ mm und $\sigma = 0{,}05$ mm. Alle Kugeln, deren Durchmesser vom Nennwert (5 mm) um mehr als 0,1 mm abweicht, sind Ausschuß. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Ausschußanteil!

59. Die Zahl der Reisenden, die täglich in Berlin den Schnellzug D 507 besteigen, ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 640$ und $\sigma = 80$. Der Zug verfügt über 684 Sitzplätze.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle in Berlin einsteigenden Reisenden einen Sitzplatz finden?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben höchstens 100 Sitzplätze frei?
c) Die Deutsche Reichsbahn erwirtschaftet beim D 507 einen Gewinn, wenn mindestens an 90 von 100 Tagen mehr als 530 Personen in Berlin einsteigen. Ist das der Fall?
d) Für welchen Wert c liegt an 99 von 100 Tagen die Zahl der in Berlin einsteigenden Reisenden im Intervall $[\mu - c; \mu + c]$?

60. Der Durchmesser der in einer Abteilung hergestellten Schrauben gleicher Art genüge einer Normalverteilung mit $\mu = 4$ mm und $\sigma = 0{,}06$ mm.

a) Eine Schraube ist normgerecht, wenn der Durchmesser zwischen 3,88 mm und 4,09 mm liegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürlich ausgewählte Schraube normgerecht ist?
b) Stündlich werden 200 Schrauben produziert. Wieviele von ihnen haben im Durchschnitt einen Durchmesser größer als 4,08 mm?
c) Wie groß muß die Konstante c mindestens sein, so daß höchstens 4 % der Schrauben einen Durchmesser haben, der nicht innerhalb des Intervalls $[4 - c; 4 + c]$ liegt?
d) Im Durchschnitt gehören 60 % der stündlich hergestellten Schrauben zur Güteklasse Q. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von vier aus der Stundenproduktion willkürlich ausgewählten Schrauben genau zwei die Güteklasse Q aufweisen?

61. Die Lebensdauer von Radioröhren eines bestimmten Typs ist eine normalverteilte Zufallsvariable X mit $E(X) = 160$ Stunden und $\sigma(X) = 20$ Stunden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürlich ausgewählte Radioröhre länger als 180 Stunden funktioniert?

b) Die Radioröhren werden in Schachteln verpackt, wobei jede Schachtel vier willkürlich ausgewählte Röhren enthält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle in einer beliebigen Schachtel enthaltenen Röhren länger als 180 Stunden funktionieren?

62. In einem großen Forschungsinstitut arbeiten 40 Ingenieure, denen für ihre Untersuchungen ein Physiklabor zur Verfügung steht. Jeder der Ingenieure meldet sich unabhängig von den übrigen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 für die Arbeit im Physiklabor an. Es sei X die Zahl der täglichen Anmeldungen für das Physiklabor.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau drei Anmeldungen vorliegen?

b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(10 \leqq X \leqq 20)$!

63. Die auf einer automatischen Anlage hergestellten Erzeugnisse werden sofort automatisch geprüft. Auf diese Weise wurde festgestellt, daß die Zeit zwischen dem Ausstoß von zwei Ausschußerzeugnissen exponentialverteilt mit dem Erwartungswert $E(X) = 10$ Minuten ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß im Verlaufe einer Minute kein Ausschußerzeugnis produziert wird!

64. Die Zeit der störungsfreien Arbeit eines bestimmten Gerätes ist eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(z) = 1 - e^{-\frac{z}{T}}, \qquad z > 0.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die störungsfreie Arbeitszeit größer als T ist?

4.8. Mathematische Statistik

4.8.1. Beispiele

B 25: Gegeben seien die Resultate von acht unabhängigen Messungen einer Strecke mit einem Gerät ohne systematischen Fehler [m]:

369; 378; 315; 420; 385; 401; 372; 383.

Ermitteln Sie einen erwartungstreuen Schätzwert für die Varianz der Meßfehler, wenn

a) die Länge der zu messenden Strecke bekannt und gleich 375 m ist,

b) die Länge der zu messenden Strecke unbekannt ist!

Lösung

a) Da die Länge der vermessenen Strecke bekannt ist, liefert

$$\hat{\theta} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 375)^2$$

einen erwartungstreuen Schätzwert für den unbekannten Parameter $\theta = \sigma^2$, wobei x_i die beobachteten Meßwerte sind. Setzt man letztere in die angegebene Formel ein, erhält man $\hat{\theta} = 814{,}875\ m^2$.

b) Da die Länge der zu vermessenden Strecke unbekannt ist, liefert die empirische Varianz

$$s^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2$$

einen erwartungstreuen Schätzwert für den unbekannten Parameter $\theta = \sigma^2$, wobei

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{8} x_i$$

das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte bezeichnet. Da $\overline{x} = 377{,}875$ m ist, erhält man $s^2 = 921{,}839\ m^2$.

B 26: Eine konkrete Stichprobe vom Umfang 100 stamme aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem Parameter $\sigma^2 = 4$. Die Stichprobe hat den Mittelwert $\overline{x} = 6{,}4$.

a) Bestimmen Sie zu dem Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$ ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter μ!

b) Wie groß muß der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit man zum Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$ ein konkretes Konfidenzintervall mit der Länge 0,5 erhält?

c) Welche konkreten Konfidenzintervalle ergäben sich, wenn n = 400 bzw. n = 10 wäre? Interpretieren Sie die Ergebnisse!

Lösung

a) Bei bekannter Varianz der Grundgesamtheit gilt für das gesuchte Konfidenzintervall die Formel

$$\left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \ \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Die Werte $\bar{x} = 6{,}4$, $n = 100$, $\sigma = 2$ sind aus der Aufgabenstellung bereits bekannt. Für die Irrtumswahrscheinlichkeit α gilt $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, wobei γ das Konfidenzniveau bezeichnet. Wegen $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ findet man $\Phi(z_\alpha) = 0{,}975$, woraus sich anhand der Tabelle der standardisierten Normalverteilung $z_\alpha = 1{,}96$ ergibt. Damit erhält man das Konfidenzintervall

$$\left(6{,}4 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} ; \ 6{,}4 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}}\right) = (6{,}008 ; \ 6{,}792).$$

b) Die Länge des Konfidenzintervalles beträgt

$$L = 2 \, z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Im vorliegenden Fall gilt also

$$L = 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{7{,}84}{\sqrt{n}} = 0{,}5 .$$

Daraus ergibt sich, daß $n = 245{,}9 \approx 246$ sein muß, um ein Konfidenzintervall der Länge 0,5 zu erhalten.

c) Gegenüber der Aufgabe a) ändert sich nur der Wert für n. Bei $n = 400$ erhält man das Konfidenzintervall $(6{,}204 ; \ 6{,}596)$, bei $n = 10$ hingegen $(5{,}160 ; \ 7{,}640)$.

Es zeigt sich, daß mit wachsendem Stichprobenumfang n das Intervall, in dem der unbekannte Parameter μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt, kleiner wird, d. h., die Schätzung wird genauer.

B 27: An $n = 10$ Schrägrädern wurde ein bestimmtes Merkmal, dessen Sollwert 90,018 mm beträgt, gemessen, wobei folgende Werte ermittelt wurden [mm]:

90,010	90,012	90,012	90,024	90,020
90,012	90,014	90,012	90,022	90,022.

Überprüfen Sie, ob die zur Herstellung der Schrägräder verwendete Maschine den Sollwert einhält ($\alpha = 0{,}05$), wenn für die Grundgesamtheit Normalverteilung vorausgesetzt wird!

Lösung

Gemäß der Aufgabenstellung soll die Nullhypothese $H_0 : E(X) = \mu_0 = 90{,}018$ mm für eine Irtumswahrscheinlichkeit von 0,05 getestet werden. Da die Varianz der Grundgesamtheit unbekannt ist, ergibt sich als Testgröße

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}.$$

Wegen $n = 10$, $\overline{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i = 90{,}016$ und

$$s = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 90{,}016)^2 = 0{,}0053$$

erhält man $u = -1{,}19$. u ist die Realisation einer t-verteilten Zufallsvariablen mit $m = n - 1 = 9$ Freiheitsgraden. Wegen $\alpha = 0{,}05$ erhält man aus der Tabelle der t-Verteilung als kritischen Wert

$$t_{\frac{\alpha}{2},m} = t_{0{,}0025;\,9} = 2{,}26.$$

Folglich ist $|u| = |-1{,}19| = 1{,}19 < 2{,}26$, so daß die Nullhypothese nicht abgelehnt werden muß.

4.8.2. Übungsaufgaben

65. Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leqq 0\,, \\ \alpha e^{-\alpha x}\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Ermitteln Sie eine Schätzfunktion für den unbekannten Parameter α mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode!

66. Bei der Auswertung der Ergebnisse von 15 Versuchsflügen eines Sportflugzeuges ergaben sich folgende Werte für dessen Maximalgeschwindigkeit [m/s]:

422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5;
428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 420,0.

Ermitteln Sie erwartungstreue Schätzwerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Maximalgeschwindigkeit des Flugzeuges!

67. Die Untersuchung des Fettgehaltes der Milch ergab bei 25 Kühen folgende Beobachtungswerte:

3,7	4,6	4,3	5,6	3,5
3,3	4,1	4,4	3,4	4,5
4,2	3,6	4,1	4,0	3,7
3,8	3,4	4,4	3,9	3,2
3,6	5,1	4,8	3,6	3,9.

a) Ermitteln Sie anhand der Stichprobe erwartungstreue Schätzwerte für den Erwartungswert und die Varianz des Fettgehaltes der Milch!

b) Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, daß die Grundgesamtheit normalverteilt ist, ein konkretes Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert zum Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}99$.

68. Zur Bestimmung des Abstandes vom Punkt O bis zu einem gegebenen Orientierungspunkt wurden 10 unabhängige Messungen durchgeführt, die folgende Werte ergaben [m]:

25025	24970	24780	25315	24907
24647	24717	25354	24911	25374.

Die Meßfehler seien eine normalverteilte Zufallsgröße. Berechnen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Abstandes zum Orientierungspunkt bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,1!

69. Der Tagesproduktion von Achsen wurde eine Stichprobe von 250 Stück Achsen entnommen und deren Durchmesser geprüft. Die Abweichungen des Durchmessers vom Sollwert sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Abweichung vom Sollwert [µm]	Zahl der Achsen, die eine solche Abweichung aufweisen
0 - 5	15
5 - 10	75
10 - 15	90
15 - 20	50
20 - 25	20

Überprüfen Sie, ob die Grundgesamtheit X (Abweichung des Durchmessers vom Sollwert) einer Normalverteilung genügt! Wählen Sie dabei als Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ und $\alpha = 0{,}01$!

70. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 40$ wurden die Schätzwerte $\overline{x} = 17{,}15$ µm und $S = 4{,}54$ µm für Erwartungswert und Standardabweichung einer normalverteilten Grundgesamtheit ermittelt. Oberprüfen Sie, ob die Hypothese $H_0 : \mu_0 = 20$ µm mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$ angenommen werden kann!

71. Anhand einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit $\sigma = 2{,}6$ wurde als Schätzwert $\overline{x}$ für den unbekannten Erwartungswert μ die Größe $\overline{x} = 26{,}23$ berechnet. Oberprüfen Sie bei einer gegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$

a) die Hypothese $H_0 : \mu_0 = 27$,
b) die Hypothese $H_0 : \mu_0 = 28$.

<u>Lösungen zu Abschnitt 4.</u>

2. a) ja, b) nein, c) ja
3. a) B, b) A, c) B, d) D
4. a) C, b) E, c) C, d) E
6. $D = (A_1 \cap A_2) \cap B \cap [(C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)]$
7. 0,516
8. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}2$; $P(C) = 0{,}6$
9. $P(A) = 0{,}125$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A \cup B) = \frac{11}{32}$
10. $P(C) = \frac{2}{3}$
11. a) 0,6; b) 0,7; c) 0,3; d) 0,7; e) 0,7
12. a) unabhängig $(P(A) = 0{,}5 = P(A \mid D))$;
b) abhängig $(P(C) = 0{,}75 \neq P(C \mid A) = 0{,}5)$;
c) abhängig $(P(B) = 0{,}75 \neq P(B \mid C) = 0{,}67)$;
d) abhängig $(P(B) = 0{,}75 \neq P(B \mid D) = 1)$.
15. A - ein Schuhpaar ist Ausschuß;
A_1 - der linke Schuh ist Ausschuß;
A_2 - der rechte Schuh ist Ausschuß;
$P(A_1) = P(A_2) = 0{,}087$;
$P(A) = 0{,}166$;
16,6 % der Schuhpaare werden im Durchschnitt Ausschuß sein.
16. a) 0,819; b) 0,181

17. A - Fehler wird gefunden.

a) $n = 2$: $P(A) = 0{,}9975$

b) $P(A) = 0{,}9975$

18. $Z = 0{,}94 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}876 = 0{,}741096$

19. a) $Z = 0{,}08\, p^2 + 0{,}32\, p + 0{,}6$,

Z ist monoton wachsend für $p \in [0, 1]$.

b) $Z = 0{,}9072$; c) $p \geqq 0{,}83$

20. $P(A) = 0{,}00833$

21. $P(A) = 0{,}72$

22. a) $P(B \mid A) = \frac{3}{31}$; $P(B \mid C) = \frac{4}{31}$

b) $P(B) = 0{,}125$

23. a) $P(B \mid A_1) = \frac{M}{N - 1}$; b) $P(B) = \frac{M}{N}$

24. A_i - der Käufer ist aus dem Land i, $i = 1\,(1)3$;

$P(B \mid A_1) = 0{,}364$; $P(B \mid A_2) = 0{,}130$; $P(B \mid A_3) = 0{,}506$

25. $P(B) = 0{,}273$

26. a) $P(B) = 0{,}0058$, d. h., durchschnittlich sind 580 Versicherungsfälle zu bearbeiten.

b) PKW: 300; Kräder: 250; LKW: 30

27. $P(A_1 \mid B) = 0{,}5$; $P(A_2 \mid B) = 0{,}1875$;

$P(A_3 \mid B) = 0{,}3125$

28. a)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,4536	0,4086	0,1226	0,0146	0,0006

b) 0,9848

c)
$$F(z) = \begin{cases} 0\,, & z \leqq 0 \\ 0{,}4536, & 0 < z \leqq 1 \\ 0{,}8622, & 1 < z \leqq 2 \\ 0{,}9848, & 2 < z \leqq 3 \\ 0{,}9994, & 3 < z \leqq 4 \\ 1\,, & 4 < z \end{cases}$$

29. a)

x_i	-2	0	2
p_i	p^2	$2p\,(1 - p)$	$(1 - p)^2$

b)
$$F(z) = \begin{cases} 0\,, & z \leqq -2 \\ 0{,}09, & -2 < z \leqq 0 \\ 0{,}51, & 0 < z \leqq 2 \\ 1\,, & 2 < z \end{cases}$$

30. a) $q = 0,5$ b) $F(z) = \begin{cases} 0 , & z \leqq 0 \\ 0,1875, & 0 < z \leqq 1 \\ 0,6250, & 1 < z \leqq 2 \\ 0,9375, & 2 < z \leqq 3 \\ 1 , & 3 < z \end{cases}$

31. b) $F(4) = \frac{7}{9} = 0,778$

32. $\frac{5}{8}$

34. a) $F_1(z) = \begin{cases} 0 , & z \leqq \frac{1}{4} \\ 1 - \frac{1}{4z}, & \frac{1}{4} < z \leqq \infty \end{cases}$

b) $F_1(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$

35. a)

z_k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	0,3721	0,3660	0,1876	0,0602	0,0124	0,0016	0,0001

b) ja

36. a)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,0992	0,3013	0,4398	0,1597

y_j	1	2	3	4	5
q_j	0,1028	0,3086	0,3866	0,1772	0,0248

b) ja

c)

z_k	1	2	3	4	5
r_k	0,0957	0,3084	0,4576	0,1135	0,0248

37. B 9: $E(X) = \frac{29}{6} = 4,833$; $\sigma^2(X) = 9,25$

B 10: $E(X) = \frac{4}{9}$; $\sigma^2(X) = \frac{2}{81}$

38. $E(X) = p$; $\sigma^2(X) = p\,(1 - p)$

39. Zu erwartende Garantieleistungen (in WE): 1,825.
In dieser Höhe sind Kosten pro Röhre einzusparen.

40. a) $\frac{2}{3}$; b) $E(X) = \frac{1}{12}$; $\sigma^2(X) = \frac{1}{48}$

41. a) $E(K) = 3,5$ WE

b) 19 Stück: $E(K) = 4,3$ WE, 21 Stück: $E(K) = 4,1$ WE

43. $E(Z) = 30$

44. $\sigma^2(Z) = 69$

45. a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{2}$

46. $E(K) = 53{,}33 + 25{,}00 = 78{,}33$ Mark

47. a) $P(A) = \dfrac{\binom{728}{30}\binom{72}{0}}{\binom{800}{30}}$

Näherungsweise Berechnung (Binomialverteilung):

$P(A) = 0{,}059$

b) $E(X) = 2{,}7$;

$\sigma^2(X) = 0{,}2368$ (Näherungswert: 0,2457)

48. a)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,343	0,495	0,145	0,015	0,001

b) $E(X) = 0{,}834$; $\sigma^2(X) = 0{,}5297$

49. $n \geqq 56$

50. $P(A) = 0{,}3337$

51. a) 0,1001; b) 2; c) 0,3671

52. 1 LKW: $E(K) = 300 + 880 = 1180$ Mark,

2 LKW: $E(K) = 600 + 196 = 796$ Mark,

3 LKW: $E(K) = 900 + 16 = 916$ Mark

53. $P(A) = 0{,}015886$

Näherungsweise Berechnung (Poisson-Verteilung):

$P(A) = 0{,}0174$

54. 0,2575

55. a) 0,1353; b) 0,1428

56. $\sigma^2 = \dfrac{a^2}{0{,}456}$

57. $\sigma = 3{,}367$

58. 4,54 %

59. a) 0,7088; b) 0,7580; c) ja; d) $c = 206$

60. a) 0,9104; b) 18; c) $c = 0{,}1232$; d) 0,3488

61. a) 0,1587; b) $6{,}343 \cdot 10^{-4}$

62. a) $3{,}9132 \cdot 10^{-6}$; b) $= 0{,}8753$

63. 0,9048

64. 0,3679

65. $\hat{\alpha} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$

66. $\bar{x} = 424{,}73$ m/s; $S = 8{,}68$ m/s

67. a) $\bar{x} = 4{,}028$;

$S^2 = 0{,}345$

b) $[3{,}699;\ 4{,}357]$

68. $[24846{,}212;\ 25153{,}788]$

69. H_0 nicht ablehnen.

70. H_0 ablehnen.

71. a) H_0 nicht ablehnen.

b) H_0 ablehnen.