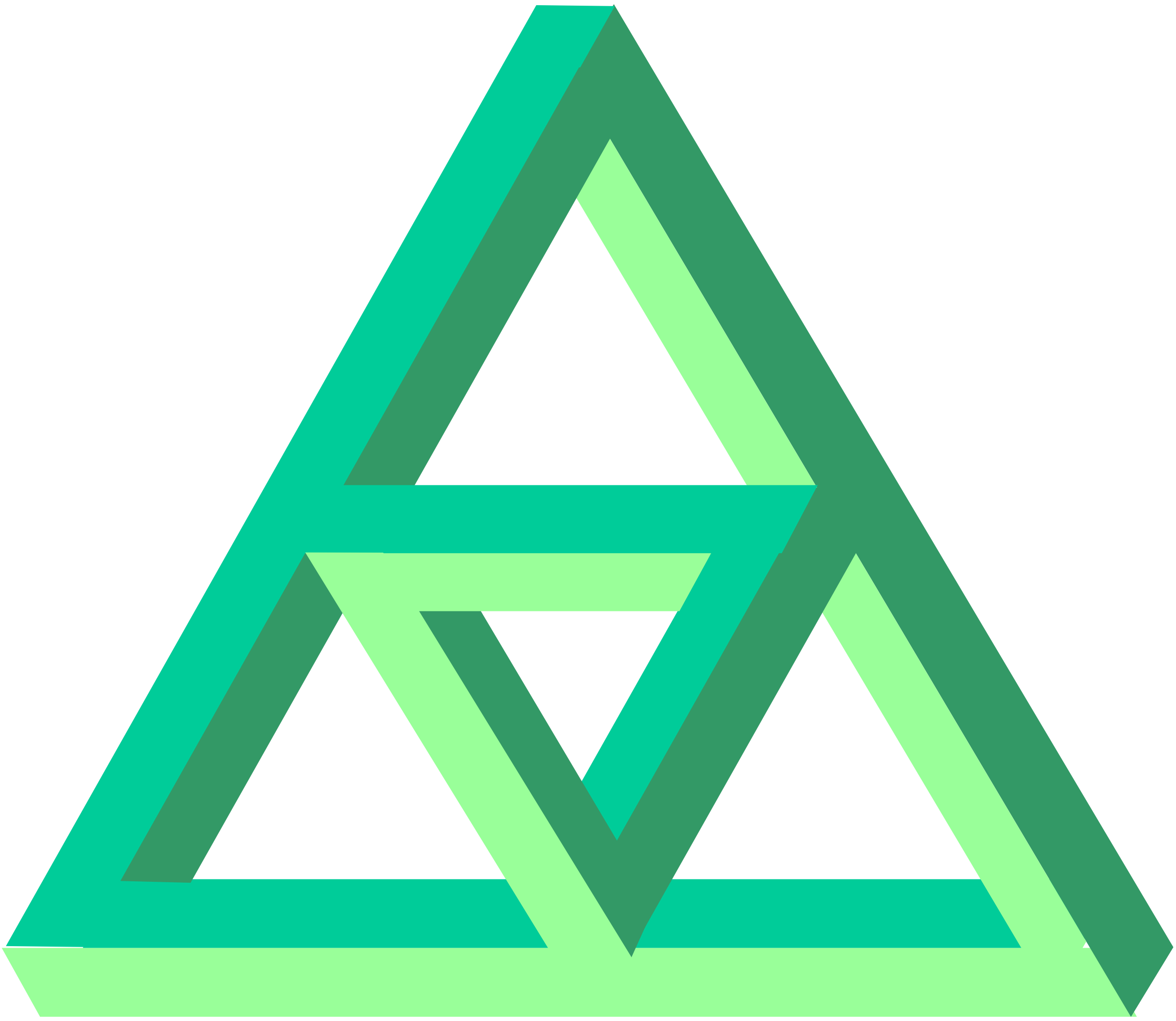
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06+07/2024 (Juni & Juli 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Zum Schuljahresabschluss blicken wir noch einmal die Aufgaben der diesjährigen Landesrunde der MO zurück und diskutieren zur Aufgabe **MO631031** im Thema 28 „Geometrie am Rechteck“. Bemerkenswert ist hierbei die Vielfalt der Lösungsansätze, die in den offiziellen Lösungshinweisen dargestellt werden. Dies greifen wir ebenfalls auf.

In Ergänzung zu den Lösungshinweisen erläutern wir den Südpolsatz und den Winkelhalbierendensatz für die eigene Lösungsdarstellung als zitierfähige „Aussagen mit eigenem Namen“. Für letzteren verweisen wir auf den Beweis aus dem sechsten Buch der Elemente von EUKLID.

Als Ferienkost untersuchen wir Fragestellungen, die auf PELLsche Gleichungen führen.

Wie schon im Heft 06/2023 zeigen wir mit **MO221013** eine weitere MO-Aufgabe in gereimter Form – als Kuriosum der MO-Geschichte.

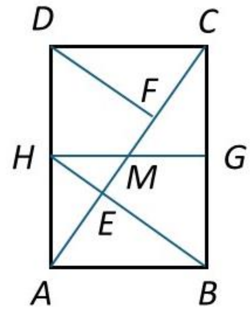
Bevor wir im Heft 08/2024 die Aufgaben der Bundesrunde analysieren werden, geben wir eine Auswertung zum Abschneiden des sächsischen Teams und gratulieren den erfolgreichen Teilnehmenden, die mit einem I. Preis, drei III. Preisen und vier Anerkennungsurkunden ausgezeichnet wurden.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 28 – Geometrie am Rechteck

Aufgabe 28.1 – MO631031. Zeigen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein Rechteck $ABCD$ mit $|\overline{AD}| = 1$ gibt, für welches die Fußpunkte E und F der Lote aus B und D auf die Diagonale $\overline{AC}$ diese Diagonale in drei gleich lange Teile $\overline{AE}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FC}$ teilen.

Bestimmen Sie die Länge $|\overline{AB}| = x$ dieses Rechtecks.



Vorbemerkung: Wir zeigen, dass genau für $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ das Rechteck $ABCD$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Hinweis: Diese Form des Rechtecks kennen wir aus den Papierformaten A0, A1, …

Lösungshinweise – Variante 1: Im Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 1$ und $|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = x > 0$ ergibt sich aus dem Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligem Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel $\angle CBA$ die Diagonalenlänge $|\overline{AC}| = \sqrt{1+x^2}$.

Mit $\angle DCA = \angle DCF$ sind die rechtwinkligen Dreiecke ΔCDA und ΔCDF ähnlich, und zwar mit

$$|\overline{FC}| : |\overline{DC}| = |\overline{DC}| : |\overline{AC}|,$$

woraus sich wegen $|\overline{DC}| = x$ sowie $|\overline{AC}| = \sqrt{1+x^2}$

$$|\overline{FC}| = \frac{|\overline{DC}|^2}{|\overline{AC}|} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

ergibt. Die Lotfußpunkte E und F müssen in der Reihenfolge wie in der Abbildung auf der Diagonalen $\overline{AC}$ liegen, denn läge F zwischen A und E, so wäre $|\overline{EF}| < |\overline{AE}|$.

Die geforderte Teilung $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}|$ gilt genau dann, wenn für jede Teilstrecke $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ erfüllt ist. Dafür ist $|\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ bereits ausreichend, da wegen der Symmetrie des Rechtecks dann auch $|\overline{AE}| = |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ und $|\overline{EF}| = |\overline{AC}| - |\overline{AE}| - |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ gilt.

Wir erkennen, dass $|\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ genau dann erfüllt ist, wenn

$$|\overline{FC}| = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+x^2}$$

gilt. Dies ist äquivalent zur Gleichung $1 + x^2 = 3x^2$ und wegen $x > 0$ zu $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lösungshinweise – Variante 2: Es ist $|\overline{AF}| : |\overline{FC}| = 2 : 1$ genau dann, wenn

$$2 = \frac{|\overline{AF}|}{|\overline{FC}|} = \frac{|\overline{AC}| - |\overline{FC}|}{|\overline{FC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{FC}|} - 1$$

gilt, was äquivalent ist zu $|\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$. Wegen der Punktsymmetrie des Rechtecks $ABCD$ ist dies aber äquivalent dazu, dass E und F die Diagonale $\overline{AC}$ wie gefordert teilen.

Die rechtwinkligen Dreiecke ΔAFD und ΔCDF haben die gemeinsame Höhe $\overline{DF}$ auf den Grundseiten $\overline{AF}$ und $\overline{FC}$. Damit gilt das Verhältnis $|\overline{AF}| : |\overline{FC}| = 2 : 1$ genau dann, wenn der Flächeninhalt A_{AFD} doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt A_{CDF}, wenn also $A_{AFD} : A_{CDF} = 2 : 1$ gilt.

Mit $|\angle FAD| = 90° - |\angle ADF| = |\angle FDC|$ sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔAFD und ΔCDF ähnlich. Ein Vergleich der Hypotenusenlängen dieser beiden Dreiecke ergibt den Ähnlichkeitsfaktor $|\overline{AD}| : |\overline{CD}| = 1 : x$.

Für das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{AFD} : A_{CDF} =$ ergibt sich damit

$$A_{AFD} : A_{CDF} = |\overline{AD}|^2 : |\overline{CD}|^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Damit ist A_{AFD} genau dann doppelt so groß wie A_{CDF}, wenn $\frac{1}{x^2} = 2$ gilt, was wegen $x > 0$ äquivalent zu $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

Lösungshinweise – Variante 3: Da die Lotfußpunkte E und F immer im Inneren der Diagonalen $\overline{AC}$ liegen, gilt $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}|$ genau dann, wenn die Punkte A, E, F und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen mit

$$|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|.$$

In diesem Fall gilt $|\overline{EC}| = |\overline{EF}| + |\overline{FC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$.

Gilt andererseits $|\overline{EC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$, so teilt der Punkt E die Diagonale $\overline{AC}$ im Verhältnis 1 : 2. Der Punkt F teilt dann die Diagonale $\overline{AC}$ wegen der Punktsymmetrie des Rechtecks $ABCD$ im Verhältnis 2 : 1, womit E und F die Diagonale $\overline{AC}$ wie gefordert teilen. Die Bedingung der Aufgabe ist damit äquivalent zu $|\overline{EC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$.

Mit dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AE}| \cdot |\overline{AC}|$ und $|\overline{BC}|^2 = |\overline{EC}| \cdot |\overline{AC}|$ und somit

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{EC}|} = \frac{|\overline{AE}| \cdot |\overline{AC}|}{|\overline{EC}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB}|^2}{|\overline{BC}|^2} = \frac{x^2}{1^2} = x^2$$

Damit ist jedoch $|\overline{EC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$ äquivalent zu $x^2 = \frac{1}{2}$, was wegen $x > 0$ äquivalent ist zu $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lösungshinweise – Variante 4: Wir halbieren das Rechteck $ABCD$ durch die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, die die Diagonale im Punkt M schneide. Bezeichnen wir die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten mit $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit G beziehungsweise mit H, so gilt wegen der Punktsymmetrie des Rechtecks um M die Gleichheit $|\overline{GM}| = |\overline{MH}|$. Gilt die geforderte Teilung $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}\,|$, dann gilt – wieder wegen der Symmetrien – im Rechteck $AGHD$ auch $|\overline{AE}| = 2 \cdot |\overline{EM}|$

Wir verlängern das Lot von B auf $\overline{AC}$ über E hinaus bis zum Schnittpunkt H' mit der Geraden durch G und H. Dann können wir für die von E ausgehenden Strahlen an den Parallelen AB und GH den Strahlensatz anwenden und finden die Verhältnisgleichung

$$2 : 1 = |\overline{AE}| : |\overline{EM}| = |\overline{AB}| : |\overline{MH'}|,$$

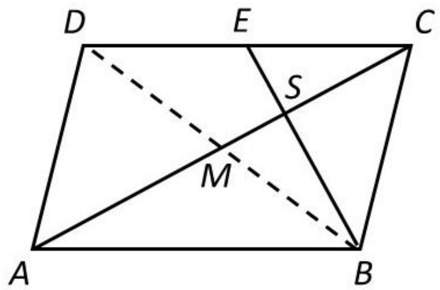
also $MH' = \frac{x}{2}$, d.h. es gilt $H' = H$. Aufgrund der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ΔABC und ΔABH (nach WWW mittels $|\angle HBA| = |\angle ACB|$) sind auch die Rechtecke $ABGH$ und $ABCD$ ähnlich. Insbesondere erhalten wir deshalb

$$|\overline{AH}| : |\overline{AB}| = |\overline{AB}| : |\overline{AD}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} : x = x : 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Somit erhalten wir abschließend $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. ❑

Die Lösungsvariante 4 zur Aufgabe **MO631031** wird durch folgende Aufgabenstellung motiviert.

Aufgabe 28,2 – WiFo[3] 14/89. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Punkt E als Halbierungspunkt der Seite $\overline{CD}$. In welchem Verhältnis teilt die Verbindungslinie BE die Diagonale $\overline{AC}$?



Lösungshinweise: Es sei M der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms. Wir betrachten das Dreieck ΔDBC. In ihm sind $\overline{CM}$ und $\overline{BE}$ Seitenhalbierende, weil sich im Parallelogramm die Diagonalen halbieren bzw. entsprechend der Definition des Punktes E. Ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt (nach dem bekannten Satz über das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden eines Dreiecks) $|\overline{CS}| : |\overline{SM}| = 2 : 1$. Damit gilt aber auch

[3] Populärwissenschaftliche Monatszeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt“, Akademieverlag Berlin, 1951 bis 1993.

$$|\overline{CS}| : |\overline{SA}| = 2 : (1+3) = 2 : 4 = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad |\overline{AS}| : |\overline{SC}| = 2 : 1.$$

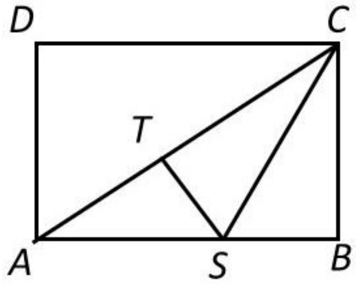
Das heißt aber, die Gerade BE drittelt die Diagonale $\overline{AC}$. ❑

Folgerung: Ist $ABCD$ ein Rechteck, so wird die Forderung aus Aufgabe **MO631031** zur Teilung der Diagonalen genau dann erfüllt, wenn die Lote aus den Eckpunkten B und D durch die Mittelpunkite der Seiten $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AB}$ verlaufen.

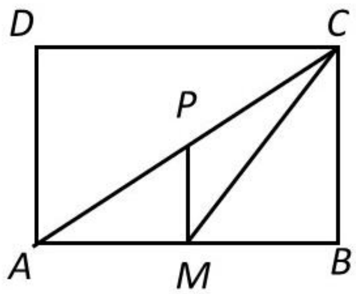
Aufgabe 28.3 – MO280935. Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck *ABCD* gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke *AB* geht!

Vorbemerkung: Es kann kein solches Rechteck geben.

Lösungshinweise – Variante 1: Die Winkelhalbierende[4] von $\angle ACB$ im Dreieck ΔABC teilt die gegenüberliegende Seite $\overline{AB}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so gilt also $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel in B ist. Somit ist die Hypotenuse $\overline{AC}$ länger als die Kathete $\overline{BC}$.



Lösungshinweise – Variante 2: Im Rechteck $ABCD$ sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle ACB$ mit der Seite $\overline{AB}$. Weiter sei T der Fußpunkt des Lotes von S auf die Diagonale $\overline{AC}$. Mit $\overline{CS} = \overline{CS}$, $|\angle TCS| = |\angle SCB|$ und $|\angle STC| = |\angle CBS| = 90°$ und damit nach Innenwinkelsummensatz auch $|\angle CST| = |\angle BSC|$ folgt, dass die Dreiecke ΔCTS und ΔSBC kongruent sind. Somit finden wir auch die Gleichheit der Streckenlängen $|\overline{SB}| = |\overline{ST}|$. Da das Dreieck ΔAST rechtwinklig mit dem rechten Winkel in T ist, folgt für die Hypotenuse $\overline{AS}$ und die Kathete $\overline{TS}$ die Relation $|\overline{AS}| > |\overline{TS}|$. Damit gilt auch $|\overline{AS}| > |\overline{SB}|$, d.h. S kann nicht der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ sein.



Lösungshinweise – Variante 3: Wir errichten in M die Mittelsenkrechte, die die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkt P schneide. Im Dreieck ΔCMP gilt $|\angle PCM| < |\angle CMP|$, weil der kürzeren Seite (die halbe Seitenlänge $\overline{MP}$ ist kleiner als die halbe Diagonalenlänge $\overline{CP}$) der kleinere Winkel gegenüberliegt. Nach dem Wechselwinkelsatz an den Parallelen MP und BC folgt $|\angle PCM| = |\angle MCB|$. Damit erhalten wir $|\angle PCM| = |\angle ACM| < |\angle MCB|$. Also kann CM nicht die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ sein.

[4] S. Bekannte Sätze der Mathematik – Winkelhalbierendensatz; in diesem Heft, S. 14

Lösungshinweise – Variante 4: Wir wenden auf das Dreieck ΔABC den Südpolsatz[5] an, der besagt, dass sich in einem Dreieck die Winkelhalbierende eines Winkels und die Mittelsenkrechte der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite auf dem Umkreis des Dreiecks schneiden. Da der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ nicht auf dem Umkreis des Dreiecks ΔABC liegen kann, kann die Winkelhalbierende des Winkels$A\Delta ACB$ nicht durch M verlaufen, da diese im rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel in B nicht mit der Mittelsenkrechten zusammenfällt. ❑

Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte[6]

Aufgabe MO221013. **Zehn kleine Zifferlein**

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
"Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen."
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
"Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen."
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!
Erstens sei sogleich gesagt,
dass nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei'n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da 's möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.
Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, dass zehn Ziffern man
für diesen Fall gut brauchen kann:
Die Ziffern sei'n 's von 0 bis 9,
die uns zu diesem Zweck erfreun!
Und jede Ziffer treffe man

[5] s. Bekannte Sätze der Mathematik – Südpolsatz; in diesem Heft S. 14.
[6] Siehe auch Aufgabe MO201014, Heft 07/2023

in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd’ vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)
Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?
Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen Endbeträge!
Dabei beweise man recht rege,
dass es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)
Nun frisch ans Werk und nicht verzagt!
Denn nicht alleine nur im Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen ...

Lösungshinweise:

In dem Ergebnis mit vier Stellen
wird jedem Löser gleich erhellen,
dass vorn stets nur die 1 kann sein:
Sie kommt vom Übertrag herein,
den man erhält in Spalte ”Hundert”
(Wenn’s anders wär’, wär’ man verwundert.)
Die 0, die kann in den Summanden
auf keinen Fall hier sein vorhanden,
da eine andre Ziffer man
ja niemals zweimal nehmen kann;
denn, wie soeben wurd’ verraten,
der Übertrag ist schon ”verbraten”.

Auch bei den Einern und bei Zehn
darf im Ergebnis 0 nicht stehn,
sonst gäb's den zweiten Übertrag,
den, wie wir wissen, keiner mag.
Nun ist die Lösung halb gewonnen,
es wird mit 1 und 0 begonnen.

		-	-	-
	+	-	-	-
=	1	0	-	-

Jetzt denkt man nach bei den Summanden,
was ist an Hunderten vorhanden?
Zunächst hat man vielleicht gedacht
so an die Ziffern 2 und 8
jedoch es geh'n auch 3 und 7;
und 4 und 6 sind noch geblieben.
Darum mach man sich "auf die Schnelle"
aus diesen eine Art Tabelle:

Verbrauchte Ziffern	Restliche Ziffern	Einzig brauchbare Summenbildungen
0, 1, 2, 8	3, 4, 5, 6, 7, 9	-
0, 1, 3, 7	2, 4, 5, 6, 8, 9	2 + 6 = 8, 4 + 5 = 9
0, 1, 4, 6	2, 3, 5, 7, 8, 9	2 + 7 = 9, 3 + 5 = 8

Nun muss man schließlich noch probieren,
so den Rest zu kombinieren,
dass kein Übertrag entsteht,
wenn man ans Addieren geht.
Überlegt man eine Weile,
sieht man bei der ersten Zeile,
dass es hier nicht funktioniert,
wie und was man auch probiert.
Zeile zwei und drei sodann
bieten je 'ne Lösung an:
Erstens 1, 0, 9 und 8.
Und, falls man es anders macht,
auch an 1, 0, 8 und 9.
kann man zweitens sich erfreu'n
Diese beiden Summen sind
einzig möglich. Jedes Kind
sieht, dass es nur so kann sein,
wenn man hält die Regeln ein. ❑

Gleichungspyramiden

Aufgabe. Gibt es unendlich viele Gleichungsbeispiele der folgenden Art?

$$1+\ 2=3$$
$$1+2+3+\ldots+14=15+16+\ldots+20$$

Lösungshinweise: Die Gleichung wird durch zwei Variablen charakterisiert ($m<n$):

$$1+2+\ldots+m=(m+1)+(m+2)+\ldots+n.$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen können wir dies zusammenfassen zu

$$\frac{m(m+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}$$

Lösen wir diese Gleichung nach n auf, finden wir

$$n=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8m(m+1)+1}.$$

Die Zahl n ist nur dann wie gefordert ganzzahlig, wenn der Radikant eine Quadratzahl ist, also wenn es eine ganze Zahl x mit $x^2=8m(m+1)+1$ gibt. Setzen wir nun noch $y=(2m+1)$, so gibt es offensichtlich unendlich viele Gleichung der geforderten Art, wenn es unendlich viele Lösungen $(x;y)$ der Gleichung

$$x^2-2y^2=8m^2+8m+1-2(4m^2+4m+1)=-1$$

gibt[7]. Mit $(1;1)$ finden wir eine erste Lösung, zu der aber die triviale (Pyramiden-) Gleichung 0 = 0 gehört. Auch $(7;5)$ erfüllt die Gleichung. Dieses Lösungspaar führt zur ersten Gleichung der Pyramide:

$$m=\frac{y-1}{2}\quad;\quad n=\frac{x-1}{2}$$

Das nächste, durch systematisches Probieren zu findende Lösungspaar $(41;29)$ passt zur 2. Gleichung. Da jedes solches Lösungspaar mit ungeraden Zahlen eine Gleichung der geforderten Art liefert, wäre die eingangs gestellte Frage bejahend zu beantworten, wenn die Gleichung $x^2-2y^2=-1$ unendlich viele Lösungen besitzt.

Kennen wir ein Paar $(p;q)$ mit $p^2-2q^2=1$ (zum Beispiel $p=3$ und $q=2$), finden wir ausgehend von einem Lösungspaar $(x_0;y_0)$ mit $x_0^2-2\cdot y_0^2=-1$ rekursiv weitere Lösungspaare $(x_n;y_n)$, mittels

[7] Die Gleichungen $x^2-N\cdot y^2=\pm1$ werden PELLsche Gleichungen genannt. Sie waren schon im 6. Jh. u.Z. bekannt. LEONHARD EULER (1707 – 1783) stieß auf Lösungen, veröffentlichte selbst dazu 1732 und benannte die Gleichung fälschlich nach JOHN PELL (1611 – 1685), der sich jedoch nicht mit dieser Problematik befasst hat.

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + 2 \cdot q \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = p \cdot y_n + q \cdot x_n.$$

Tatsächlich führt dieses Gleichungssystem mit $(p; q) = (3; 2)$ und $(x_0; y_0) = (7; 5)$ auf

$$x_1 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 41$$
$$y_1 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 29$$

mit $x_1^2 - 2 \cdot y_1^2 = 41^2 - 2 \cdot 29^2 = 1681 - 2 \cdot 841 = -1.$

Ohne auf theoretische Hintergründe einzugehen, prüfen wir die Rekursionsgleichungen bzgl. der Erfüllung der PELLschen Gleichung:

$$x_{n+1}^2 = p^2 \cdot x_n^2 + 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n + 4 \cdot q^2 \cdot y_n^2,$$
$$-2 \cdot y_{n+1}^2 = -2 \cdot p^2 \cdot y_n^2 - 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n - 2 \cdot q^2 \cdot x_n^2.$$

Addieren wir beide Gleichungen, erhalten wir für $n = 0,1,2 \ldots$

$$x_{n+1}^2 - 2 \cdot y_{n+1}^2 = p^2 \cdot \left(\underbrace{x_n^2 - 2 \cdot y_n^2}_{=-1}\right) + 2 \cdot q^2 \cdot \left(\underbrace{2 \cdot y_n^2 - x_n^2}_{=1}\right) = -p^2 + 2 \cdot q^2 = -1$$

Es gibt also unendlich viele Gleichungen der Gleichungspyramide.

Ein ähnliches Beispiel ergibt folgende Gleichungspyramide:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 3 \cdot 6$$
$$15 + 16 + \ldots + 34 + 35 = 15 \cdot 35$$

Die Gleichung wird ebenfalls durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$m + (m + 1) + \ldots + (n - 1) + n = m \cdot n$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen können wir dies zusammenfassen zu

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} - \frac{m \cdot (m + 1)}{2} = m \cdot n,$$

d.h.

$$m^2 + 2mn - m - n - n^2 = 0$$

also

$$m = -\frac{2n-1}{2} + \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4} + n^2 + n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-(2n - 1) + \sqrt{8n^2 + 1}\right).$$

Wieder gibt es nur dann ganzzahlige Lösungen, wenn der Radikand eine Quadratzahl ist, also wenn eine natürliche Zahl x mit $x^2 = 8 \cdot n^2 + 1$ existiert. Setzen wir nun $y = 2n$, so lässt sich die Frage nach der Existenz unendlich vieler Gleichungen der geforderten Art bejahend beantworten, wenn es unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen für die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ gibt.

Wir haben oben schon mit $(p; q) = (3\,; 2)$ eine Lösung dieser Gleichung mit $n = 1$ gefunden (sie führt zu der trivialen Gleichung $1=1\cdot 1$) und können daraus mittels Rekursion unendlich viele weitere Lösungen generieren, wobei wir als Startwert $(x_0; y_0) = (3; 2)$ verwenden:

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + 2 \cdot q \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = p \cdot y_n + q \cdot x_n.$$

Wir bestätigen wieder die Erfüllung der PELLschen Gleichung:

$$x_{n+1}^2 = p^2 \cdot x_n^2 + 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n + 4 \cdot q^2 \cdot y_n^2,$$
$$-2 \cdot y_{n+1}^2 = -2 \cdot p^2 \cdot y_n^2 - 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n - 2 \cdot q^2 \cdot x_n^2.$$

Addieren wir beide Gleichungen, erhalten wir für $n = 0,1,2 \ldots$

$$x_{n+1}^2 - 2 \cdot y_{n+1}^2 = p^2 \cdot \left(\underbrace{x_n^2 - 2 \cdot y_n^2}_{=1}\right) + 2 \cdot q^2 \cdot \left(\underbrace{2 \cdot y_n^2 - x_n^2}_{=-1}\right) = p^2 - 2 \cdot q^2 = 1$$

Somit haben wir die Existenz unendlich vieler Pyramidengleichungen der geforderten Art nachgewiesen und können insbesondere die Pyramide fortsetzen:

$x_1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 17, y_1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ mit $n = 6; m = 3$,
$x_2 = 3 \cdot 17 + 2 \cdot 2 \cdot 12 = 99, y_1 = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 17 = 70$ mit $n = 35; m = 15$,
$x_3 = 3 \cdot 99 + 2 \cdot 2 \cdot 70 = 577, y_1 = 3 \cdot 70 + 2 \cdot 99 = 408$ mit $n = 204; m = 85$,

also $85 + 86 + 87 + \cdots + 203 + 204 = 86 \cdot 204$.

Auch die folgende Fragestellung führt auf die PELLsche Gleichung: Es kann keine gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen geben, da nach Satz des PYTHAGORAS für gleiche Kathetenlängen $a = b$ aus der Gleichung $2 \cdot a^2 = c^2$ kein ganzzahliger Wert für die Länge der Hypotenuse c möglich ist ist. Man nennt rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen *fast gleichschenklig*, wenn sich zwei Seitenlängen nur um eine Längeneinheit (LE) unterscheiden (Beispiel: 3 ; 4 ; 5).

Wir können leicht zeigen, dass es unendlich viele fast gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke gibt, bei denen die Hypotenuse um eine Längeneinheit länger als eine Kathete ist (Beispiele: 3 ; 4 ; 5 oder 5 ; 12 ; 13). Setzen wir im Dreieck mit den Kathetenlängen a und b für die Hypotenusenlänge $c = b + 1$, so folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS $a^2 + b^2 = (b + 1)^2$, woraus wir $a^2 = 2b + 1$ schließen können. Für jede ungerade Seitenlänge a können wir also mit $b = \frac{a^2-1}{2}$ und $c = b + 1 = \frac{a^2+1}{2}$ ein pythagoräisches Tripel bilden, denn es gilt

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4}\cdot(a^4 - 2\cdot a^2 + 1) = \frac{1}{4}\cdot(a^4 + 2\cdot a^2 + 1) = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2.$$

Betrachten wir dagegen fast gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, bei denen eine Kathete um eine Längeneinheit länger als die andere Kathete ist (Beispiel: 3 ; 4 ; 5 oder 20 ; 21 ; 29), so soll also $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ gelten. Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Umformung $2\cdot a^2 + 2\cdot a + 1 = c^2$, woraus nach Multiplikation mit 2 und weiterer Umformung $(2a+1)^2 - 2\cdot c^2 = -1$ folgt. Wir können deshalb die Rekursion von oben mit $(p;q) = (3;2)$ und wegen des Dreiecks (3 ; 4 ; 5) mit $(x_0;y_0) = (2a+1;c) = (7;5)$ durchführen:

$$x_1 = 3\cdot 7 + 2\cdot 2\cdot 5 = 41 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{41-1}{2} = 20; b = 21,$$
$$y_1 = 3\cdot 5 + 2\cdot 7 = 29 \quad \Rightarrow \quad c = 29,$$

oder

$$x_2 = 3\cdot 41 + 2\cdot 2\cdot 29 = 239 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{239-1}{2} = 119; b = 120,$$
$$y_2 = 3\cdot 29 + 2\cdot 41 = 169 \quad \Rightarrow \quad c = 169.$$

Eine bestimmte Anzahl gleichartiger Münzen kann sowohl in Form eines Quadrats als auch in Form eines Dreiecks angeordnet werden. Trivialerweise ist dies für $n = 1$ richtig. Für welche anderen Anzahlen von Münzen ist das ebenfalls möglich?

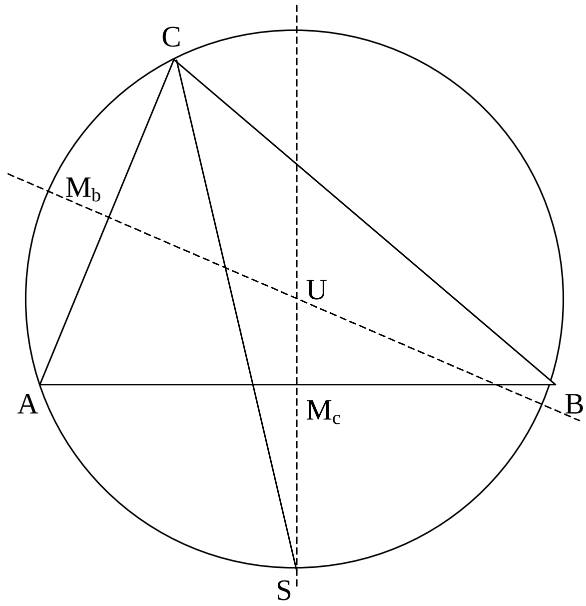
Die gesuchte Anzahl muss sowohl eine Dreieckszahl mit der Seitenlänge von n Münzen als auch eine Quadratzahl mit der Seitenlänge von m Münzen sein. Daraus erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = m^2$$
$$n^2 + n = 2\cdot m^2$$
$$(2n+1)^2 - 1 = 2\cdot(2\cdot m)^2$$

Die letzte Gleichung können wir nun mit den Substitutionen $x = 2n+1$ und $y = 2m$ als PELLsche Gleichung $x^2 - 2\cdot y^2 = 1$ schreiben und finden dafür unendlich viele Möglichkeiten für die Lösung des Problems.

Bekannte Sätze der Mathematik

Im Vorwort zu den MO-Aufgaben steht der Hinweis „Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“ Wird dieser Satz korrekt zitiert, ist dessen Verwendung in der eigenen Lösungsdarstellung möglich.

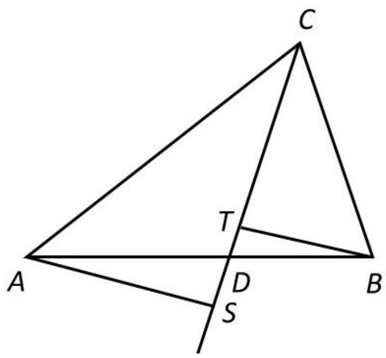


Südpolsatz. In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende durch die gegenüberliegende Ecke auf dem Umkreis[8].

Beweis: Wir betrachten o.B.d.A. die Mittelsenkrechte m_c auf der Seite $\overline{AB} = c$ und die Winkelhalbierende w_γ für den gegenüberliegenden Winkel $\angle ACB$. S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_c mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C. Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist über der Sehne $\overline{AS}$ der Peripheriewinkel $\angle ACS$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle AUS$. Entsprechend ist der Winkel $\angle SCB$ halb so groß wie der Winkel $\angle SUB$. Da die Winkel $\angle AUS$ und $\angle SUB$ aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich groß sein. Folglich liegt die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ auf CS, woraus die Behauptung des Satzes folgt. ❑

Winkelhalbierendensatz. In einem Dreieck ΔABC sei D ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{CD}$ teilt den Winkel $\angle ACB$ in die Winkel $\gamma_1 = \angle ACD$ und $\gamma_2 = \angle DCB$. Diese beiden Winkel sind genau dann gleich groß, das heißt $\overline{CD}$ ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$, wenn für die Streckenverhältnisse $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|}$ gilt.

Beweis – Variante 1 (Strahlensatz mit dem Zentrum D): Wir fällen von A und B die Lote auf $\overline{CD}$ und nennen die Fußpunkte S bzw. T. Die Gerade CD ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$, d.h. es gilt $\angle ACD = \angle DCB$ genau dann, wenn die rechtwinkligen Dreiecke ΔASC (mit dem rechten Winkel in S) und ΔTBC (mit dem rechten Winkel in T) ähnlich sind.

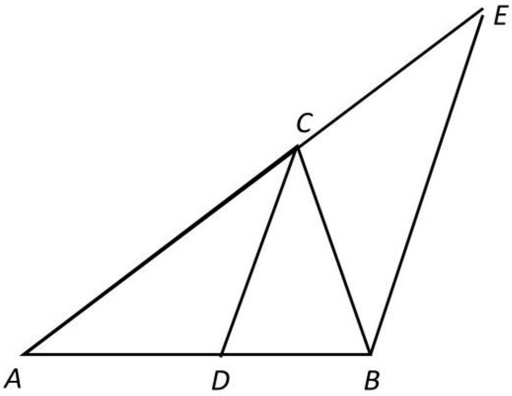


Somit erhalten wir die Verhältnisgleichung entsprechender Dreiecksgrößen $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BT}|}$ und folglich auch $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{BT}|}$.

Nun wenden wir für die von D ausgehenden Strahlen an den Parallelen AS und BT den Strahlensatz an und erhalten die Verhältnisgleichung $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|} = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{BT}|}$.

[8] Der Schnittpunkt wird Südpol genannt.

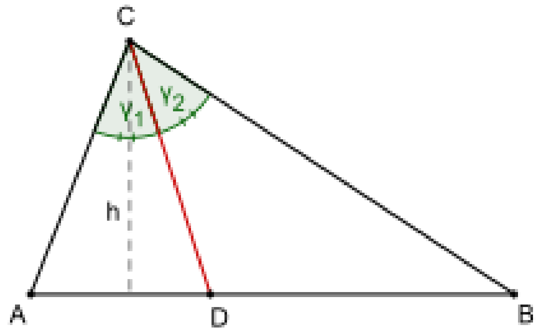
Aufgrund der Drittengleichheit ist die Behauptung bewiesen: Die Gerade CD ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ (d.h. es gilt $|\angle ACD| = |\angle DCB|$ genau dann), wenn die Verhältnisgleichung $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|}$ gilt.



Beweis – Variante 2 (Strahlensatz mit dem Zentrum A, nach E*UKLID):* Wie konstruieren durch den Punkt B die Parallel zu CD. Deren Schnittpunkt mit der Verlängerung der Seite $\overline{AC}$ bezeichnen wir mit E. Wir erkennen die Winkelgleichheit $|\angle ACD| = |\angle AEB|$ (Stufenwinkel an den Parallelen $CD \parallel BE$) und $|\angle DCB| = |\angle EBC|$ (Wechselwinkel). Daraus folgt: Das Dreieck ΔBEC ist genau dann gleichschenklig mit $|\overline{BC}| = |\overline{EC}|$, wenn die Gerade CD Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ mit $|\angle ACD| = |\angle DCB|$ ist.

Wenden wir nun den Strahlensatz für die von A ausgehenden Strahlen mit den Parallelen CD und BE an, so finden wir die behauptete Verhältnisgleichung:

$$|\overline{AC}| : |\overline{CE}| = |\overline{AD}| : |\overline{DB}| = |\overline{AC}| : |\overline{CB}|\,.$$



Beweis – Variante 3 (Flächenvergleiche): Wir berechnen die Flächeninhalte der Dreiecke ΔADC und ΔDBC: Verwenden wir zunächst die allgemeine Formel über die Grundseite und Höhe, erhalten wir:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h \text{ bzw. } A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DB}| \cdot h.$$

Ausgehend von den Innenwinkeln am Punkt C können wir aber auch formulieren:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{DC}| \cdot sin(\gamma_1) \quad \text{bzw.} \quad A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DC}| \cdot |\overline{BC}| \cdot sin(\gamma_2).$$

Betrachten wir jeweils die Verhältnisse der beiden Dreiecksflächen, führt dies einerseits zu $\frac{A_{ACD}}{A_{DBC}} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|}$ und andererseits zu $\frac{A_{ACD}}{A_{DBC}} = \frac{|\overline{AC}| \cdot sin(\gamma_1)}{|\overline{BC}| \cdot sin(\gamma_2)}$.

Damit gilt: Genau dann, wenn CD die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ ist, gilt mit $\gamma_1 = \gamma_2 < 90°$ auch $sin(\gamma_1) = sin(\gamma_2)$, womit die behauptete Verhältnisgleichung erfüllt ist. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids
Elemente[9]

Funfzehn Bücher
auf dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[10]

[Es werden zunächst die Textstellen aus dem ersten und fünften Buch zitiert, auf die im Beweis hingewiesen wird.]

Erſtes Buch. Der 6. Satz. Wenn in einem Triangel, ABC, zwey Winkel, ABC, ACB, einander gleich ſind: ſo ſind auch die Gegenſeiten ſolcher Winkel, AC, AB, einander gleich.

Erſtes Buch. Der 9. Satz. Gröſſen, A, B, welche zu Einer dritten, C, einerley Verhältniſ haben, oder zu denen Eine dritte, C, einerley Verhältniſ hat, ſind einander gleich.

Erſtes Buch. Der 29. Satz. Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel ſind: ſo macht eine dritte ſchneidende, EF, mit ihnen die Wechſelwinkel, AGH, GHD, einander; desgleichen den Auſſenwinkel, EGB, dem ihm an derſelben Seite gegenüberlegenden innern Winkel, GHD, ferner die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, EGH, GHD, zweyen rechten, gleich.

Erſtes Buch. Der 31. Satz. Durch einen gegebnen Punkt, A, eine gerade Linie einer gegebnen, BC, parallel zu ziehen.

Fünftes Buch. Der 7. Satz. Gleiche Gröſſen, A, B, haben zu Einer Gröſſe, C, auch eine Gröſſe, C, hat zu gleichen Gröſſen, A, B, einerley Verhältniſ.

Fünftes Buch. Der 11. Satz. Verhältniſſe, A : B, E : F, welcher Einer dritten, C : D, gleich; ſind ſelbſt einander gleich.

[S. 87ff]

Sechſtes Buch.
Der 2. Satz.

---

[9] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

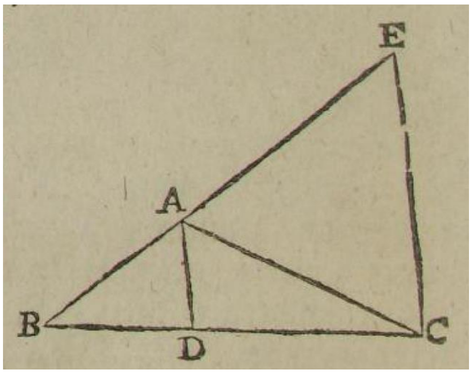
[10] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.

Wenn in einen Triangel, ABC, eine gerade Linie, DE, einer seiner Seiten, EC, parallel ist: so schneidet sie die beyden andern Seiten, AB, AC, proportionirt. Und wenn eine gerade Linie, DE, zwey Seiten eines Triangels, AB, AC, proportionirt schneidet: so ist sie der dritten Seite, BC, parallel.

Der 3. Satz

Wenn in einem Triangel, ABC, eine gerade Linie, AD, einen seiner Winkel, BAC, halbiert: so schneidet sie die Gegenseite solchen Winkels, BC, den beyden anderen Seiten, BA, AC, proportionirt. Und wenn sie die eine Seite, BC, den beyden übrigen Seiten, BA, AC, proportionirt schneidet, so halbirt sie den Gegenwinkel solcher Seite, BAC.

Erster Theil.



Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD die CE parallel, und verlängere BA bis E, so ist (1, 29. S.) ACE = CAD, und CEA = DAB. Nun ist angenommen CAD = DAB. Folglich ist (1, 6. S.) AE = AC. Nun ist, weil AD, CE, im ΔBEC, parallel, (6. 2. S,) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5. 7. S.) ED : DC = BA : AC.

Zweyter Theil.

Es sey ED : DC = BA : AC. Nun ist, weil AD, CE, im ΔBEC parallel, (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5, 12. S.) BA : AC = BA : AC. Folglich (5, 9.S.) AE = AC, folglich (1, 5. S.) AEC = ACE. Nun ist (1, 29. S.) AEC = BAD, und ACE = DAC. Folglich ist BAD = DAC.

Wettbewerbe: Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade fand vom 6. bis 9. Juni 2024 in Flensburg (Schleswig-Holstein) statt. Die Veranstaltung stand unter der Schirmherrschaft von Karin Prien, Ministerin für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein. Das Institut für Mathematik der Europa-Universität Flensburg (www.uni-flensburg.de/mathematik) organisierte den Wettbewerb mit rund 200 Teilnehmenden. Unter www.mo2024.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Alle Teilnehmenden wurden am Donnerstag, dem Anreisetag, im Audimax der Europa-Universität Flensburg (EUF) begrüßt. Für die Übernachtungen waren verschiedene Hotels der Stadt gebucht. Die beiden Klausuren wurden am Freitag und Samstag im Gebäude Oslo der EUF geschrieben. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in und um Flensburg sowie Möglichkeiten des kreativen Gestaltens. Am Samstag trafen sich alle zum Begegnungsabend in der Mensa der EUF.

Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand in der Campushalle statt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weitere vier Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 11 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 75 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 30 Anerkennungsurkunden[11]. Die sächsische Mannschaft konnte in der (inoffiziellen) Länderwertung eine mittlere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[12] belegte sie mit 14 Punkten lediglich den siebenten Platz. Bayern mit 38 Wertungspunkten und Niedersachsen mit 37 Wertungspunkten führen die Länderliste souverän an, gefolgt von Hessen (19), Nordrhein-Westfalen (18) und Berlin (17). Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen ein I. Preis und drei III. Preise den Platz 6 (insgesamt vier Preise). Auch hier führen Bayern (vier I. Preise, insgesamt zwölf Preise) und Niedersachsen (drei I. Preise, insgesamt 13 Preise) vor Hessen (ein I. Preis, insgesamt sieben Preise).

Den sächsischen Preisträgern gilt unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

I. Preis	Tilman Ferchland, Kl. 9, Ostwald-Gymn. Leipzig
III. Preise	Nora Louise Stoppel, Kl. 8, Nexö-Gymn. Dresden
	Tobias Pötzsch, Kl. 11, Geschw.-Scholl-Gymn. Taucha
	Melia Haase, Kl. 12, Gymn. Zschopau
Anerkennung:	Anton Schur, Kl. 8, Ostwald-Gymn. Leipzig
	Leopold Schuster, Kl. 9,Nexö-Gymn. Dresden
	Lilia Dieterlen, Kl. 10, Freies Gymn. Naunhof
	Amos Vogel, Kl. 10, Lessing-Gymn. Hohenstein-Ernstthal

Die Bundesrunde der 64 Mathematik-Olympiade wird vom 23. bis 26. Mai 2025 in Göttingen (Niedersachsen) stattfinden.

Termine

65. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), 11. bis 22. Juli 2024, Bath (Vereinigtes Königreich), Informationen unter www.imo2024.uk.

Start zur Runde 1 der 64. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde. August 2024, Informationen unter www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine.

18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 24. bis 30. August 2024, Szeged (Ungarn), Informationen unter https://memo2024.bolyai.hu.

[11] Die vollständige Liste ist unter www.mo2024.de verfügbar (Stand: 09.06.2024).

[12] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2024

Aufgabe T-1 (Teamwettbewerb), 13. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (Pardubice, Czech Republic, 2019)

Bestimme sowohl den größtmöglichen als auch den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)$$

für nichtnegative reelle Zahlen a, b und c mit $ab+bc+ca=1$ annehmen kann.

Lösungshinweise: Wir führen abkürzende Schreibweisen ein:

$$x=\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right) \quad ; \quad y=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

In x können wir die Nenner mittels der Voraussetzung umformen zu

$$\begin{aligned} a^2+1 &= a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c) \\ b^2+1 &= b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c) \\ c^2+1 &= c^2+ab+bc+ca=(c+b)(c+a) \end{aligned}$$

Damit finden wir einen Zusammenhang zwischen x und y:

$$x=\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1-\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1-y$$

Verwenden wir die Gleichungen

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{c^2+1}=1-\frac{c^2}{c^2+1}$$

so erhalten wir daraus weiter

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)=(3-x)x$$

Wegen $(3-x)x=(2+y)(1-y)=2-y-y^2$ können wir y abschätzen. Offensichtlich gilt $y \geq 0$, wobei die Gleichheit beispielsweise für $(a,b,c)=(0,1,1)$ gilt. Außerdem finden wir $y \leq \frac{1}{4}$, wie wir aus der Multiplikation der drei folgenden Gleichungen erkennen (die jeweils aus der Ungleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels resultieren)

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad ; \quad b+c \geq 2\sqrt{bc} \quad ; \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Die Gleichheit wird dabei für $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$ realisiert.

Abschließend berechnen wir

$$\frac{27}{16} = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \leq 2 - y - y^2 \leq 2$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{27}{16} \leq \left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1}\right) \leq 2$$

❑

Monatsaufgabe 06/2024[13]

Ein Landstück hat die Form eines 8×8 – Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd- beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus 64 kleineren quadratischen 1×1 – Grundstücken.

Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem 1×1 – Grundstück. Wir sagen, ein Haus *steht im Schatten*, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen.

Was ist die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht?

Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten.

Inhalt

[13] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.08.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[14]	Nr.	Thema	Aufgabe
06+07/2024 (Juni/Juli)	Thema 28	Geometrie am Rechteck	MO631031
05/2024 (Mai)	Thema 10.2	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO630936 MO631036
05/2024 (Mai)	Thema 26.2	Geometrischer Ort	MO630933 MO631033
04/2024 (April)	Thema 9.3	Differenzen von Quadraten	MO630931 KZM 4-2
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4-5A
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26.1	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044 MO621022 MO620944 MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041 MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar.

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.