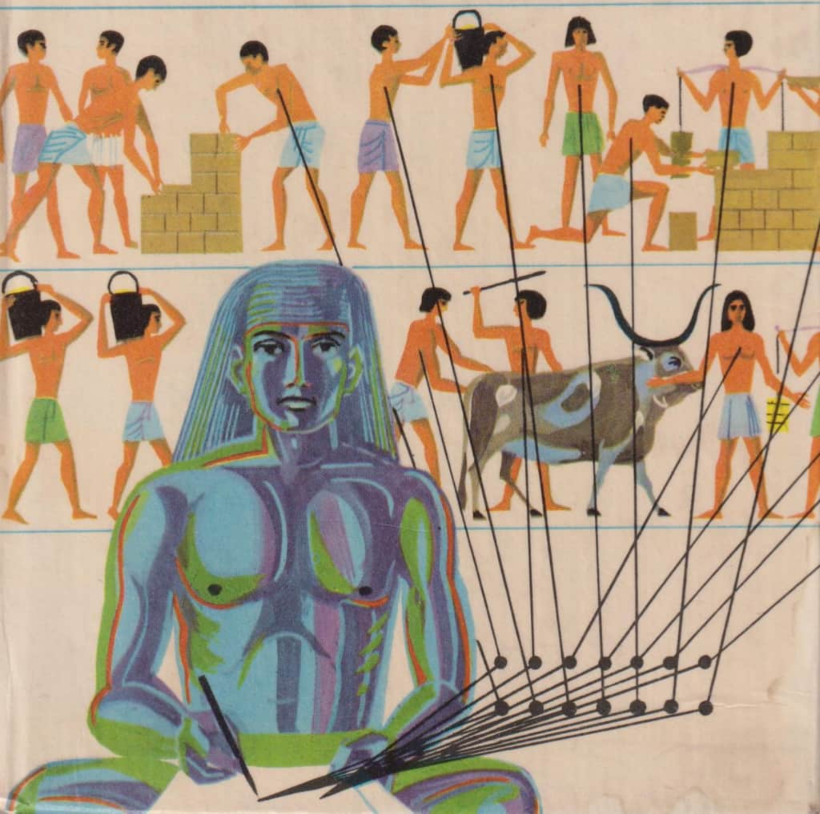
Christian Heermann

Von der Zahl zum Gesetz

REGEN
BOGEN
REIHE



Christian Heermann

Von der Zahl zum Gesetz
– Mathematik in unserem Leben

Illustrationen von Erhard Schreier

Der Kinderbuchverlag Berlin

Es begann mit der Statistik

– Limonade als Medizin? –

Herr A hatte sich erkältet. Er litt an einer leichten Grippe und suchte deshalb den Arzt auf. „Muß ich", fragte der Patient nach der Untersuchung, „besondere Vorschriften beim Essen und Trinken beachten?"

„Keinesfalls. Alles, was Ihnen schmeckt, dürfen Sie essen und trinken", lautete die Antwort.

Vier Tage später saß Herr A erneut im Sprechzimmer des Arztes. Er berichtete, daß es ihm schon wesentlich besser gehe, daß er regelmäßig die Medizin genommen und außerdem täglich zwei Flaschen Limonade getrunken habe.

Am Abend schrieb der Arzt eine wissenschaftliche Abhandlung unter der Überschrift: „Limonade hilft bei Grippe."

Noch in der gleichen Woche kam Herr B in die Sprechstunde des Arztes. „Ich bin ein Nachbar von Herrn A", stellte er sich vor. „Offenbar bin ich von ihm angesteckt worden. Ich glaube, daß ich die Grippe habe. Mir geht es schon seit drei Tagen nicht gut. Obwohl ich täglich zwei Flaschen Limonade getrunken habe, wurde es nicht besser."

Nachdem Herr B ein Rezept erhalten hatte und gegangen war, nahm sich der Arzt seine Abhandlung noch mal vor, um eine Korrektur anzubringen: „Limonade hilft bei Grippe in 50 Prozent aller Fälle."

Diese Geschichte ist natürlich erfunden; so etwas hat es nie gegeben. Weshalb haben wir diesen Unsinn trotzdem aufgeschrieben?

Es ist ein Beispiel für eine falsche Verallgemeinerung. Limonade und Grippe haben nichts miteinander zu tun. Ob jemand Limonade trinkt oder nicht, die Heilung einer Grippe wird dadurch in keiner Weise beeinflußt. Aus einer einzigen Tatsache kann man niemals ein Gesetz ableiten.

Was ist eigentlich ein Gesetz?

Es beschreibt einen allgemeinen und notwendigen Zusammenhang zwischen den Dingen und Erscheinungen in der Natur und in der Gesellschaft.

Ein solches Gesetz aus der Natur besagt: Bei Erwärmung dehnen sich die Körper aus. Täglich kann man dieses Gesetz am Thermometer beobachten. Je höher die Temperatur liegt, desto mehr dehnt sich das Quecksilber im Thermometer aus, desto höher steigt die Quecksilbersäule.

Aus dem Bereich der Gesellschaft besagt beispielsweise ein Gesetz: Die kapitalistische Gesellschaftsordnung wird durch die sozialistische abgelöst. Die geschichtliche Entwicklung bestätigt dieses Gesetz. Vor über einem halben Jahrhundert gab es nur einen einzigen sozialistischen Staat – die Sowjetunion. Heute existiert das mächtige sozialistische Weltsystem, das bereits ein Drittel der Menschheit umfaßt.

Um Gesetze in Natur und Gesellschaft zu finden, müssen alle Zusammenhänge gründlich untersucht werden, damit man nicht zu falschen Aussagen gelangt. Auch der folgende angenommene Fall zeigt uns das:

Im Verlaufe eines Schultages werden drei Klassenarbeiten zurückgegeben, die einige Zeit zuvor geschrieben wurden, und zwar in den Fächern Mathematik, Physik und Russisch. Hans erzielte dabei ganz unterschiedliche Zensuren: in Mathematik eine 1, in Physik eine 5 und in Russisch eine 3. Läßt sich daraus etwa ein Gesetz ableiten? Vielleicht


+30
-18

so: Wer in Mathematik sehr gut ist, versteht nichts von Physik und vollbringt in Russisch nur mittelmäßige Leistungen! Daß ein solches Gesetz nicht existiert, leuchtet sofort ein.

Dennoch bestehen zwischen den Leistungen in einzelnen Fächern bestimmte Zusammenhänge. Wie lassen sich solche Gesetzmäßigkeiten bestimmen?

Wie kommt man zu Gesetzen in der Medizin? Wie wird exakt der Einfluß bestimmter Medikamente oder neuentwickelter Verfahren auf die Heilung von Krankheiten festgestellt?

Ohne Mathematik gibt es keine klaren Antworten auf solche Fragen. Vielleicht eine Feststellung, die verwundert, deshalb werden wir auf den folgenden Seiten zeigen, daß man ohne Mathematik bei derartigen Problemen keinen Schritt weiterkommt. Allerdings arbeitet die Mathematik hier im Bündnis mit einer anderen Wissenschaft, mit der Statistik.

Womit befaßt sich dieses Gebiet? Mit wenigen Worten läßt sich das nicht erklären, denn die Aufgaben der Statistik sind vielseitig.

Wir werfen zuerst einen kurzen Blick in die Geschichte, um zu zeigen, wie diese Disziplin entstanden ist.

– Wann war die erste Volkszählung? –

Selten waren die Verbindungen zwischen Wissenschaft und Praxis von Anfang an so eng wie bei der Entwicklung der Statistik. Ganz konkrete Bedürfnisse des Lebens der menschlichen Gesellschaft führten zu ihrem Entstehen, und das begann bei den ersten Volkszählungen in grauer Vorzeit.

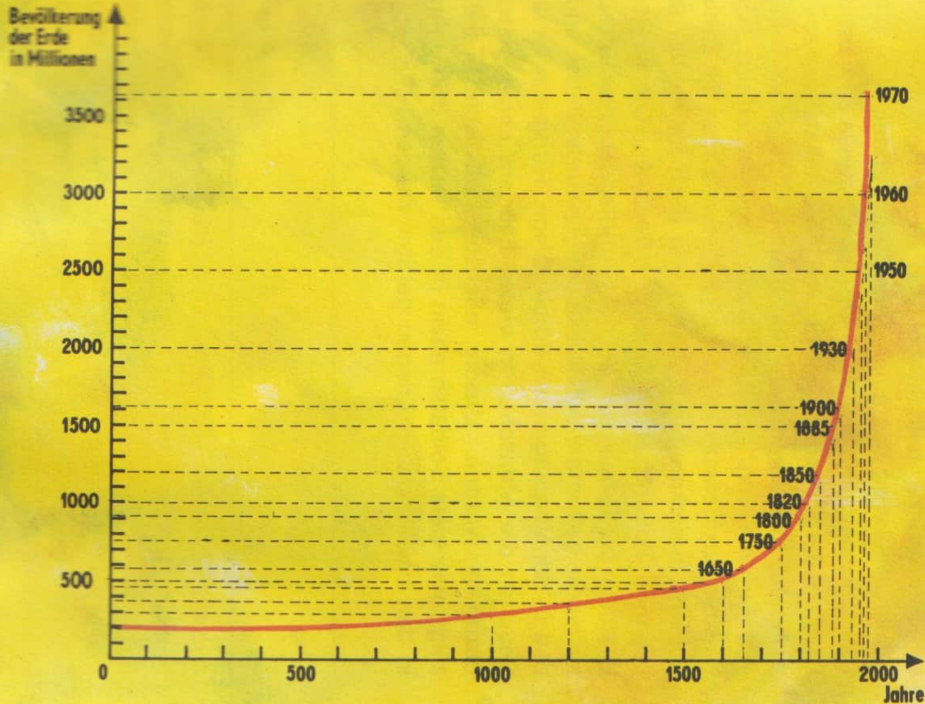
Die überlieferten Zahlen sind interessant, denn sie geben uns beispielsweise Einblick in die Zunahme der auf der Erde lebenden Menschen.

Jahr	Bevölkerungszahl der Erde in Millionen
8000 v. u. Z.	10
0	200
1000 u. Z.	275
1200	350
1500	450
1600	500
1650	545
1750	728
1800	906
1820	1 000
1850	1 171
1885	1 500
1900	1 608
1930	2 070
1950	2 500
1960	3 005
1970	3 632

Fand also die erste Volkszählung schon vor rund 10 000 Jahren – um 8 000 vor unserer Zeitrechnung statt?
Keinesfalls! Niemand kennt genau das Datum der ersten Volkszählung, vielleicht war sie vor mehr als 4000 Jahren?

Aber auch das ist nicht genau bewiesen. Alte Berichte besagen jedenfalls, daß China im Jahre 2255 vor unserer Zeitrechnung (wir schreiben dafür die Abkürzung v. u. Z.) von einer fürchterlichen Überschwemmung heimgesucht wurde. Danach habe man die überlebenden Familien gezählt. Resultate davon sind uns nicht bekannt, und selbst wenn wir solche Zahlen kennen würden, wäre uns nicht viel geholfen. Wie sah es denn in den anderen Teilen der Welt aus, als in China eine Volkszählung stattfand? Denn andernorts wurde zu dieser Zeit nicht gezählt.
So sind die meisten Zahlen in unserer Tabelle durch Schätzungen und Berechnungen zustande gekommen. Eine Zählung am selben Tag in allen Ländern der Welt hat es bis heute noch nicht gegeben. Die einzelnen Staaten organisierten die Ermittlungen für ihr Gebiet. Den Anfang im Altertum machten die alten Kulturreiche. China haben wir genannt. Ähnliches ist aus Babylonien überliefert. Vor fast vier Jahrtausenden umfaßte dieser Staat weite Gebiete zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris.
Um 500 v. u. Z. führte König Amasis eine Volkszählung in Ägypten durch. Wenige Jahrzehnte später begann man im alten Rom, alle fünf Jahre die Einwohner zu zählen.
An der Spitze des Römischen Reiches stand um das Jahr 50 unserer Zeitrechnung Kaiser Claudius. Sein Herrschaftsgebiet war riesengroß. Es umfaßte weite Gebiete Europas und des Raumes um das Mittelmeer. In einem Roman wird berichtet, was Kaiser Claudius nach einer Volkszählung gesagt haben soll: „Die ganze Bevölkerung des Römischen

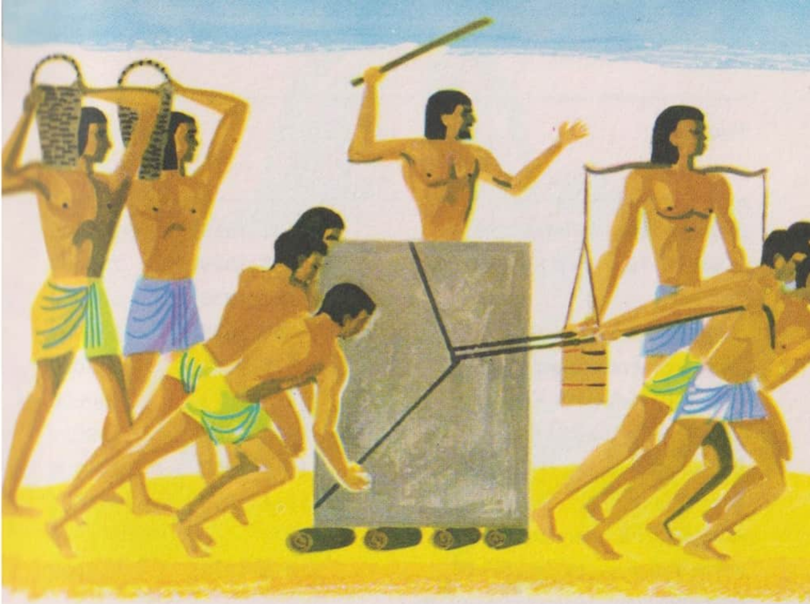
Graphische Darstellungen veranschaulichen statistische Zahlen. Das Bild zeigt, wie seit dem Jahre 0 die Bevölkerung der Erde anwuchs

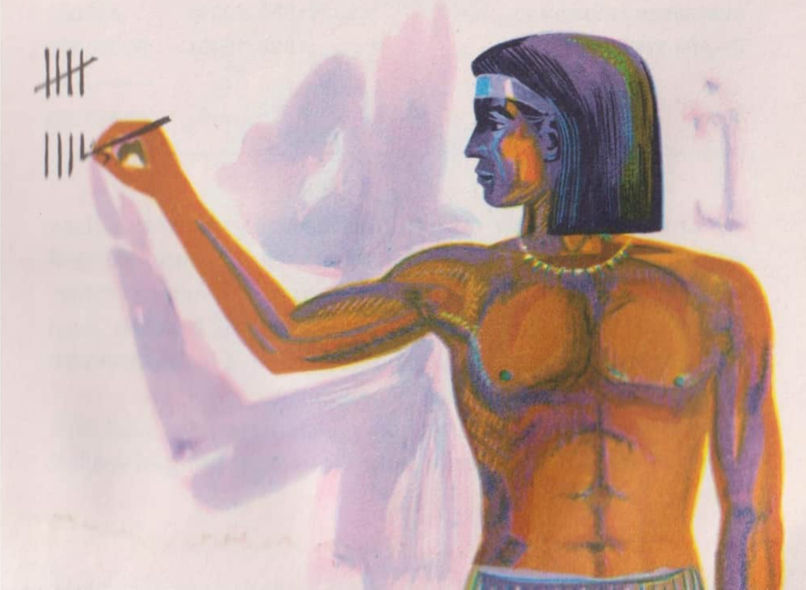

Bevölkerung
der Erde
in Millionen
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
500
1000
1500
2000
Jahre
1970
1960
1950
1930
1900
1885
1850
1820
1800
1750
1650

Reiches, von Britannien bis Palästina, beträgt über 70 Millionen Menschen. Als Romulus die Stadt Rom gründete und sein erstes großes Schafhirtenfest feierte, an dem alle seine Mitbürger teilnahmen, gab es in Rom nur 3300 Seelen. Wo wird das eines Tages noch enden?"

Dieser Ausspruch zeigt es, und unsere Tabelle beweist es: Die Zahl der Menschen auf unserer Erde hat ständig zugenommen. Das Wachstum geht heute schneller als früher. Die Entwicklung der Bevölkerungszahlen erfolgt nach bestimmten Gesetzen. Mit ihrer Hilfe kann man die Zahlen für weit zurückgreifende Zeiten und auch für die vor uns liegende Zukunft schätzen und berechnen. Die meisten Zahlen in der Tabelle sind auf der Grundlage solcher Gesetze zustande gekommen. Berücksichtigt wurde dabei auch, daß in der Vergangenheit durch Kriege, Hungersnöte und Seuchen die Menschen in vielen Ländern immer wieder dezimiert wurden. Unsere nächste statistische Tabelle zeigt, wie viele Soldaten allein in den letzten 350 Jahren in den bekanntesten Kriegen getötet wurden.

Krieg		getötete Soldaten
Dreißigjähriger Krieg	(1618–1648)	600000
Spanischer Erbfolgekrieg	(1701–1714)	700000
Nordischer Krieg	(1700–1721)	300000
Österreichischer Erbfolgekrieg	(1740–1748)	450000
Siebenjähriger Krieg	(1756–1763)	550000
Französische Revolutionskriege	(1792–1794)	1100000
Russisch-Türkischer Krieg	(1806–1812)	225000

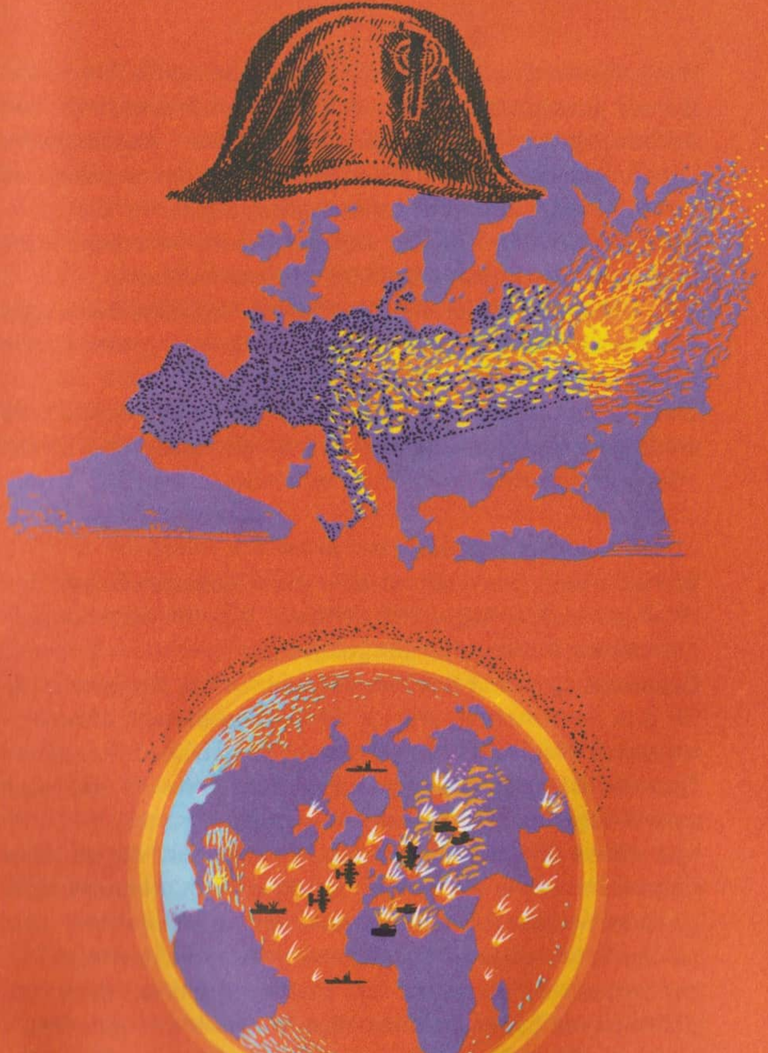




Krieg		getötete Soldaten
Napoleonische Kriege	(1796–1813)	3105000
Russisch-Türkischer Krieg	(1828–1829)	205000
Krimkrieg	(1853–1856)	309000
Bürgerkrieg in den USA	(1861–1865)	538000
Preußisch-Französischer Krieg	(1870–1871)	188000
Russisch-Türkischer Krieg	(1877–1878)	190000
Russisch-Japanischer Krieg	(1904–1905)	139000
Balkankrieg	(1912–1913)	224000
Erster Weltkrieg	(1914–1918)	9442000
Ausländische Intervention und Bürgerkrieg in der UdSSR	(1918–1920)	800000
Freiheitskampf gegen faschistische Putschisten und deutsch-italienische Interventen in Spanien	(1936–1939)	450000
Zweiter Weltkrieg	(1939–1945)	50000000
	Summe:	69515000

19 Kriege haben wir aufgeführt. Sie forderten das Leben von über 69,5 Millionen Menschen. Durch eine Vielzahl weiterer Kriege liegt die Zahl der Toten noch weitaus höher. Auch zur Darstellung solcher Sachverhalte braucht man die Statistik, denn nur durch übersichtliches Anordnen von Zahlen lassen sich Vergleiche anstellen.

Über drei Millionen Menschen mußten sterben, weil Napoleon I. ganz Europa unter seine Herrschaft bringen wollte.



Nach der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution konnten die Sowjetvölker nicht in Ruhe und Frieden mit dem Aufbau eines neuen Lebens beginnen. Ausländische imperialistische Mächte fielen in das Land ein, wurden von reaktionären Kräften im Inneren unterstützt, um die revolutionäre Sowjetmacht zu stürzen. Dieses Verbrechen des Imperialismus kostete 800000 Menschenleben.
Und der furchtbarste aller Kriege, der von den deutschen Faschisten verursachte zweite Weltkrieg, forderte das Leben von 50 Millionen Menschen.
Eine solche statistische Übersicht mahnt uns auch, an die wichtigste Aufgabe unserer Zeit zu denken: Wir müssen alles tun, um den Frieden zu erhalten.

– Herr Süßmilch schreibt ein Buch –
Wenden wir uns jetzt wieder den Volkszählungen zu. Weshalb wurden eigentlich schon in früheren Jahrhunderten solche Aktionen durchgeführt?
Bestimmt nicht mit der Absicht, um für die Nachwelt, um für uns festzuhalten, wieviel Menschen damals beispielsweise im Römischen Reich lebten. Es gab dafür handfeste Gründe: Die Herrscher wollten wissen, wieviel Rekruten zum Kriegsdienst eingezogen werden konnten und von wie vielen Menschen Steuern einzutreiben waren. Dies galt nicht nur für Zählungen im alten Rom, sondern auch für andere Staaten im Altertum und im Mittelalter, und solche Ermittlungen erfreuten sich verständlicherweise keiner Beliebtheit. Das steht fest. Weitaus weniger wissen wir darüber, wie früher eine derartige Volkszählung vorbereitet wurde, welche Fragen man stellte und wie man die Ergebnisse auswertete. Auch eine Zählung im Reich der Inkas –

auf dem Gebiet des heutigen Peru vor der Eroberung des Indianerstaates durch den Abenteurer Francisco de Pizarro in den Jahren 1531 bis 1533 – hat darüber keine Auskünfte hinterlassen.
Die ersten exakten Unterlagen über eine Volkszählung stammen aus dem Jahre 1666. Große Teile des heutigen Kanada waren damals französische Kronkolonie. Von Haus zu Haus liefen Beauftragte des „Hohen Rates" – so hieß die Verwaltung der Kolonie –, um alle Einwohner mit Namen, Anschrift, Altersangabe, Beruf, Familienstand und weiteren Einzelheiten in große Listen einzutragen. Noch heute sind diese Papiere erhalten, sie lagern in einem Archiv in Paris.
Einige Jahrzehnte später, 1740, sitzt in einer Studierstube in Berlin ein Mann und schreibt ein Buch. Beide, der Mann und das Buch, tragen sonderbare Namen. Johann Peter Süßmilch heißt der Schriftsteller, und „Die göttliche Ordnung in der Veränderung des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung erwiesen" lautet der Titel des Werkes.
Johann Peter Süßmilch war ein bedeutender Gelehrter jener Zeit. Er hatte unter anderem Rechtswissenschaft und Medizin studiert und gehörte der Akademie der Wissenschaften an. Wenn uns heute auch der Titel seines Buches seltsam anmutet, so sind dennoch große Teile des Inhalts schon recht modern, besonders wegen der vielen Hinweise für Organisation und Auswertung einer Volkszählung.
Schon in der Vergangenheit wurde von den herrschenden reaktionären Klassen immer wieder versucht, die Notwendigkeit von Kriegen zu begründen. Die Menschheit wachse zu rasch an, hieß es da, und bald komme ein

Zeitpunkt, von dem an die Nahrungsmittel auf der Erde nicht mehr ausreichen würden. Kriege seien deshalb ein „göttliches Geschenk": Sie forderten zwar viele Menschenleben, aber gerade dadurch brauchten die Überlebenden nicht zu hungern. Für sie reichten dann die Nahrungsmittel aus.
Mit solchen unsinnigen Behauptungen hat sich Johann Peter Süßmilch auseinandergesetzt. Zu seiner Zeit lebten über 700 Millionen Menschen auf der Erde, und er berechnete, daß allein der damalige Stand der Landwirtschaft ausreichte, um über 3000 Millionen Menschen zu ernähren. Technik und Wissenschaft haben sich seither enorm weiterentwickelt und Möglichkeiten für die Ernährung von weitaus mehr Menschen geschaffen.
Im Jahre 1775 erschien von dem Buch Johann Peter Süßmilchs schon die vierte Auflage. Verwunderlich war das Interesse an diesem Werk keinesfalls, denn zu jener Zeit begannen Volkszählungen in verschiedenen Ländern, die sich häufig im Abstand von einigen Jahren wiederholten: zum Beispiel in Irland ab 1703, in Schweden ab 1748, in Teilen von Italien ab 1770, in Dänemark und Spanien ab 1787, in den USA ab 1790. Im 19. Jahrhundert folgten weitere Staaten: England und Frankreich ab 1801, der ehemalige Staat Preußen ab 1816, die Niederlande ab 1819, die Schweiz ab 1841, Belgien ab 1846, und so ging es weiter.
Im Zusammenhang mit den Volkszählungen entstand eine neue Wissenschaft: die Statistik. Ihre Anfänge reichen über Jahrtausende zurück, als selbständige wissenschaftliche Disziplin entwickelte sie sich jedoch erst in den letzten 200 Jahren. Oft wird das Buch des Berliner Gelehrten

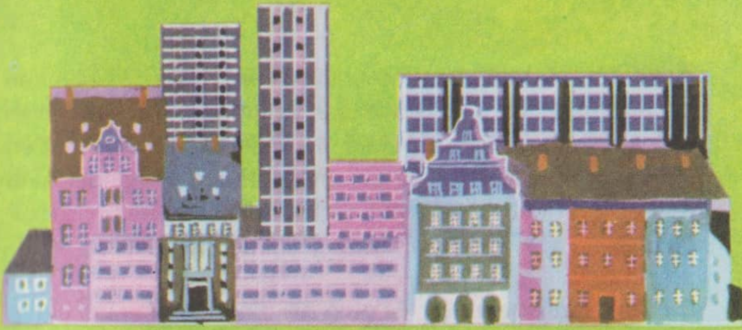
Süßmilch als der Anfang der Bevölkerungsstatistik bezeichnet. In diesem Begriff kommt zum Ausdruck, daß sich die Statistik zuerst mit der zahlenmäßigen Untersuchung der Bevölkerung befaßte. Die Volkszählungen wurden ausgewertet und führten beispielsweise zu Angaben über die altersmäßige Zusammensetzung der Bevölkerung, über den Anteil von Männern und Frauen in den einzelnen Jahrgängen, über die pro Jahr geborenen und gestorbenen Menschen, über die Häufigkeit einzelner Berufe und vieles andere mehr. Bald befaßte sich die Statistik auch mit der Erfassung von Angaben über die Ernteerträge in verschiedenen Jahren, über die Entwicklung der Preise im Handel, über die Ausgaben des Staates für bestimmte Zwecke in aufeinanderfolgenden Jahren und mit ähnlichen Fragen.

Alle Angaben dieser Art lassen sich auf einen gemeinsamen Nenner bringen: Sie beschreiben Merkmale, die den Zustand eines Staates veranschaulichen. Aus dem lateinischen Wort für Zustand – status – ist der Name Statistik entstanden.

Statistische Angaben sind heute noch wichtiger als je zuvor. Die Statistik hilft, unsere Umwelt sachgemäß zu beschreiben, um sie besser und tiefgründiger zu erkennen. Neben der sogenannten „beschreibenden Statistik", von der wir bisher gesprochen haben, entwickelten sich in den letzten Jahrzehnten noch andere Teilgebiete der Statistik.

Bevor wir uns aber diesen Neuentwicklungen zuwenden, wollen wir noch einiges zu den heutigen Aufgaben und Zielen der „beschreibenden Statistik" erfahren.

Der 1. Januar 1971 war Stichtag für die bisher umfangreichste statistische Untersuchung in unserer Republik: für die „Volks-, Berufs-, Wohnraum- und Gebäudezählung".



Auf etwa 6,6 Millionen Haushaltslisten, rund 6,2 Millionen Wohnungslisten und etwa 2,2 Millionen Gebäudelisten wurden insgesamt ungefähr 1 Milliarde Einzelangaben erfaßt, um sie danach in einem Zeitraum von anderthalb Jahren gründlich auszuwerten. Worum ging es bei dieser großen Aktion, in der unsere gesamte Bevölkerung mitarbeitete?

Die Antwort ist einfach: Es ging bei dieser Aktion um einen Nutzen für unsere gesamte Bevölkerung, für jeden einzelnen Bürger unserer Republik. Aus allen Angaben auf den Zähllisten werden wichtige Grundlagen für die Planung in unserer Volkswirtschaft berechnet. Zum Beispiel: Durch die Volkszählung weiß man, wieviel Kinder in jedem der folgenden Jahre neu in unsere Schulen aufgenommen werden. Daraus ergibt sich dann auch die Anzahl der Klassen für jedes Schuljahr in der ganzen DDR. Der Lehrplan legt für alle Fächer die wöchentlichen Stundenzahlen fest. Heute schon kann somit bestimmt werden, wieviel Mathematiklehrer beispielsweise im Jahre 1980 tatsächlich noch gebraucht werden.

Von den heute tätigen Mathematiklehrern werden die meisten zu jener Zeit noch unterrichten, eine ganze Anzahl wird aber bis dahin auch das Rentenalter erreicht haben. Andererseits kommen jährlich neue Lehrer hinzu, die ihr Studium abgeschlossen haben. Damit 1980 und in allen anderen Jahren „die Rechnung aufgeht", damit für jedes Fach immer die richtige Anzahl an Lehrern zur Verfügung steht, wird ermittelt, wieviel Studienplätze für Fachlehrer in jedem Studienjahr an unseren Universitäten und Hochschulen vorhanden sein müssen.

Für solche und zahlreiche andere Aufgaben lieferte die große Volkszählung wertvolle Aufschlüsse, unter anderem auch für den Bau von Kinderkrippen, Kindergärten, Schulen, von Feierabend- und Pflegeheimen und von anderen Einrichtungen des Gesundheits- und Sozialwesens, für weitere Schritte in der Aus- und Weiterbildung unserer Werktätigen, für die Planung der Arbeitskräfte und für viele andere Anliegen.

– Aufregung am Freitagmorgen –

Am Morgen des 28. April 1972 gab es allerorts in der DDR freudige Aufregung. Alle sprachen nur über ein Thema. Zeitungen wanderten von Hand zu Hand, und alle wollten es selbst lesen.

Was war geschehen?

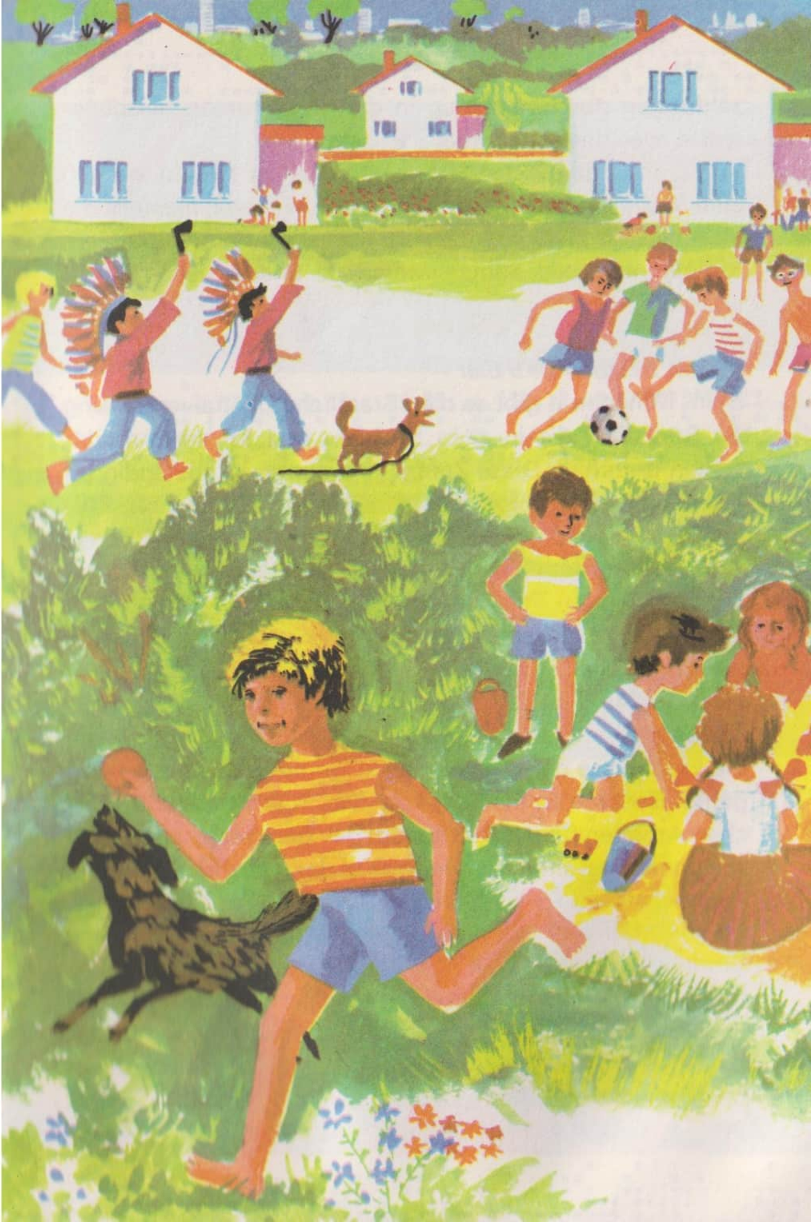
Am Vortag hatten das Zentralkomitee der SED, der Bundesvorstand des FDGB und der Ministerrat der DDR einen gemeinsamen Beschluß gefaßt. Ein großartiges sozialpolitisches Programm wurde verkündet, und darüber berichteten die Zeitungen: für 3,4 Millionen Bürger unserer Republik höhere Renten, mehr Urlaub für berufstätige Mütter, Kredite zur Einrichtung der Wohnung und zum Bau eines eigenen Hauses für junge Eheleute, Fahrpreisermäßigungen bei der Reichsbahn für Familien mit drei und mehr Kindern, Herabsetzung von Mieten – das sind nur einige der Maßnahmen, die an jenem Freitagmorgen überall freudig begrüßt wurden.

Natürlich war dieses großzügige sozialpolitische Programm kein Geschenk, sondern vielmehr ein sichtbares Ergebnis des Fleißes der Arbeiter, der Bauern und aller anderen Werktätigen. Das Ausmaß jeder einzelnen Maßnahme wurde zuvor exakt berechnet, und auch dazu lieferte die große Volkszählung vom 1. Januar 1971 wichtige Grundlagen.

Erstmalig war eine solche Zählung mit der Erfassung von Angaben über Wohnungen und Gebäude verbunden: Fragen gab es unter anderem zur Größe der Wohnungen, zu ihrer Nutzung und Ausstattung. So erhielten wir Aufschluß über die nächsten Schritte, um für alle Bürger schöne und zufriedenstellende Wohnverhältnisse zu schaffen, durch Wohnungsneubau, durch gründliche Modernisierung älterer Wohnungen, durch Instandhaltung der Gebäude, durch die bestmögliche Nutzung der uns zur Verfügung stehenden Mittel.

Die Maßnahmen des sozialpolitischen Programms für das Wohnungswesen – beispielsweise die Kredite zur Einrichtung der Wohnungen und zum Eigenheimbau – stützen sich auch auf die Ergebnisse der Zählung vom 1. Januar 1971.

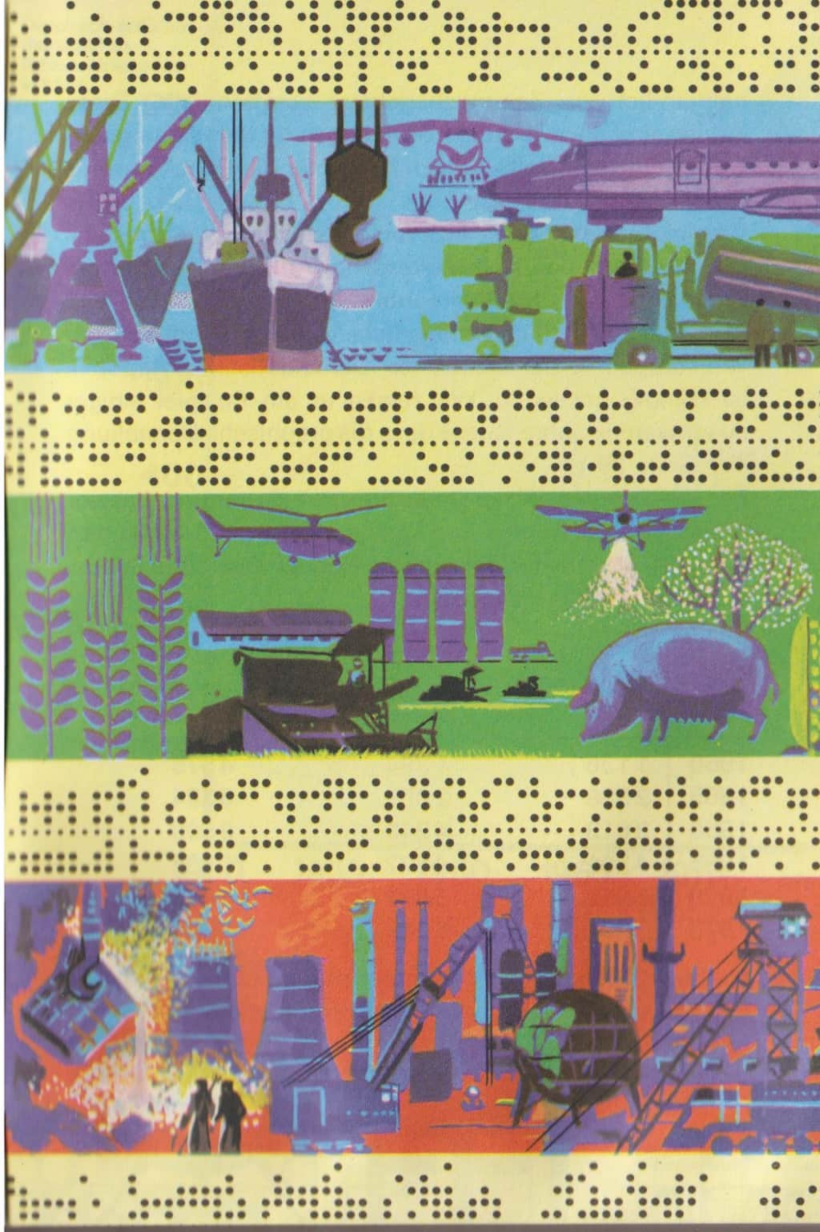
Wenn alle berechneten Ergebnisse zuallererst den Bürgern unserer Republik zugute kommen, so reicht die Bedeutung dieser Volkszählung dennoch weit über die DDR hinaus. Die Organisation der Vereinten Nationen hatte vorgeschlagen, „um das Jahr 1970" in allen Ländern der Welt Volkszählungen durchzuführen, um zu einem einheitlichen Zeitpunkt die Gesamtbevölkerung der Erde genau zu berechnen, Vergleiche zwischen den einzelnen Staaten zu ermöglichen und um Voraussagen über die zahlenmäßige Entwicklung der Menschheit bis zum Jahr 2000 vorzunehmen. Beim Rat für Gegenseitige Wirtschaftshilfe arbeitet eine „Ständige Kommission für Statistik". Dieses Gremium stimmte dem Vorschlag der Vereinten Nationen zu, und die sozialistischen Staaten führten „um das Jahr 1970" Volks-



zählungen durch. Stichtag in der Sowjetunion beispielsweise war der 15. Januar 1970.
Volkszählungen in der DDR fanden bereits 1964 und 1950 statt. Solche großen Aktionen sind nun aber keinesfalls die einzigen Möglichkeiten, um statistische Angaben über die Bevölkerung und andere Merkmale unserer Republik zu erfassen.

– Zum Beispiel 249 Eier –

Beim Ministerrat gibt es die „Staatliche Zentralverwaltung für Statistik", die in allen Bezirken und Kreisen Arbeitsstellen unterhält. Diese Zentralverwaltung ist zuständig für alle statistischen Informationen über Volkswirtschaft, Kultur, Gesundheitswesen, Bevölkerung und andere Bereiche unserer Republik. Zu festgelegten und sich laufend wiederholenden Terminen und nach genau angegebenen Vorschriften werden beispielsweise aus den Betrieben an die Kreisstellen statistische Angaben über Planerfüllung, Zahl der Arbeitskräfte und anderes berichtet. Die Kreisstellen werten diese Angaben für ihr Territorium aus, fassen die Ergebnisse der verschiedenen Betriebe zusammen und geben Berichte an die Bezirksstellen. Hier werden die gleichen Arbeiten für das Territorium des Bezirkes erledigt, und zusammenfassende Berichte gehen dann an die „Staatliche Zentralverwaltung für Statistik".
Solche statistischen Erfassungen betreffen nicht nur die Betriebe, sondern auch die Verwaltungsorgane, Einrichtungen des Gesundheitswesens und andere Bereiche.
Die bei der Zentralverwaltung gesammelten und berechneten Ergebnisse werden alljährlich im „Statistischen Jahrbuch der Deutschen Demokratischen Republik" und



halbjährlich in Zeitungsberichten veröffentlicht. Diese Zahlen sind ganz wichtige Grundlagen für die Planung und Leitung unserer Volkswirtschaft und für die Politik unseres Staates.

Vergleicht man Zahlen aus verschiedenen Jahren miteinander, so ergeben sich interessante Aufschlüsse über die Entwicklung in unserer Republik.

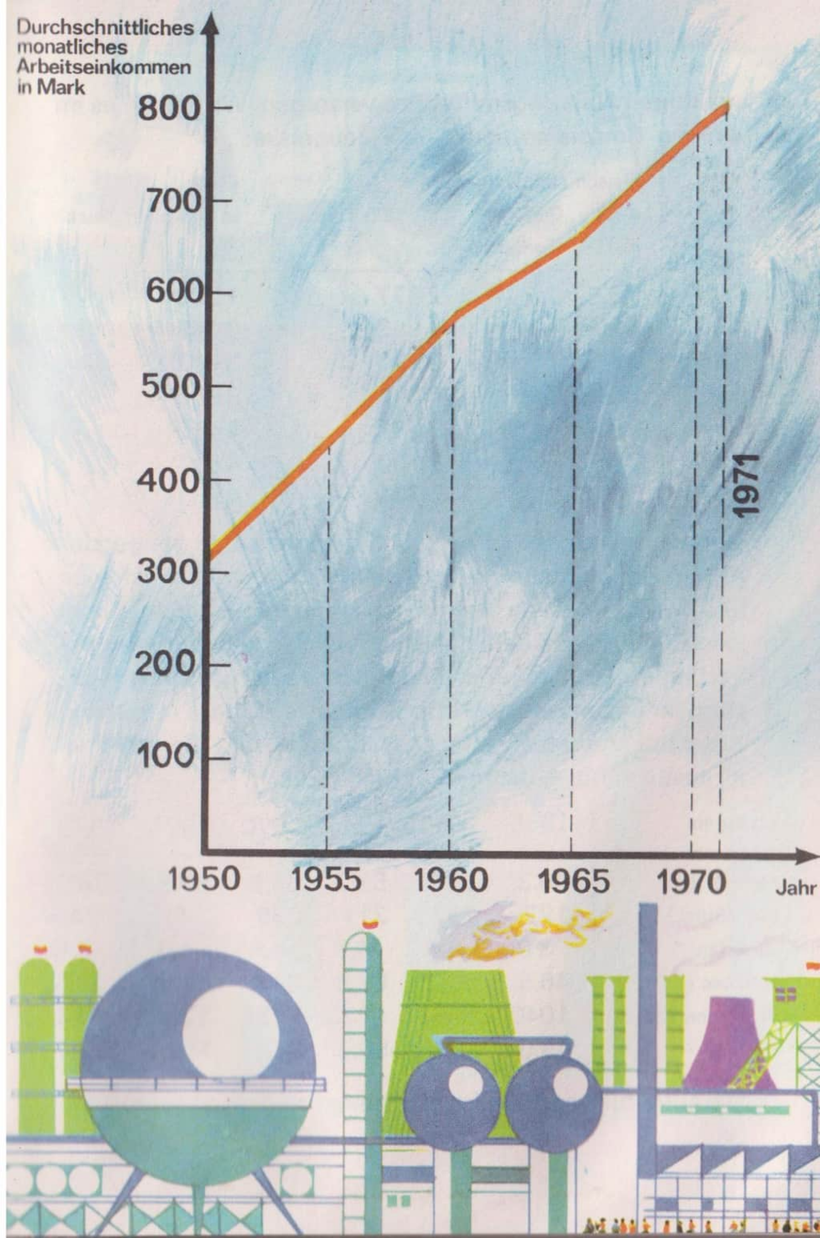
Das durchschnittliche monatliche Arbeitseinkommen der Werktätigen in der Deutschen Demokratischen Republik ist ständig gestiegen. Wir zeigen es am Beispiel einiger ausgewählter Jahre. (Siehe dazu die graphische Darstellung von Seite 29.)

Für die Schulen, für die medizinische Betreuung unserer Menschen, für Renten und viele andere gute Zwecke gibt unser Staat Jahr für Jahr immer höhere Geldbeträge aus. Auch dafür einige Beispiele:

Jahr	Ausgaben unseres Staates in Millionen Mark für Bildungswesen	Gesundheits- u. Sozialwesen	Sozialversicherung und Renten
1950	1136	1394	4575
1955	2388	2059	6334
1960	3613	4240	9600
1965	4351	4877	11802
1970	5812	5877	14976
1973	7321	6988	19891

Große Anstrengungen unternehmen die Bauern in unserer Landwirtschaft, um unsere Bevölkerung immer besser mit

Graphische Darstellung der Zunahme des durchschnittlichen monatlichen Arbeitseinkommens der Werktätigen der DDR


Durchschnittliches
monatliches
Arbeitseinkommen
in Mark
800
700
600
500
400
300
200
100
1971
1950
1955
1960
1965
1970
Jahr

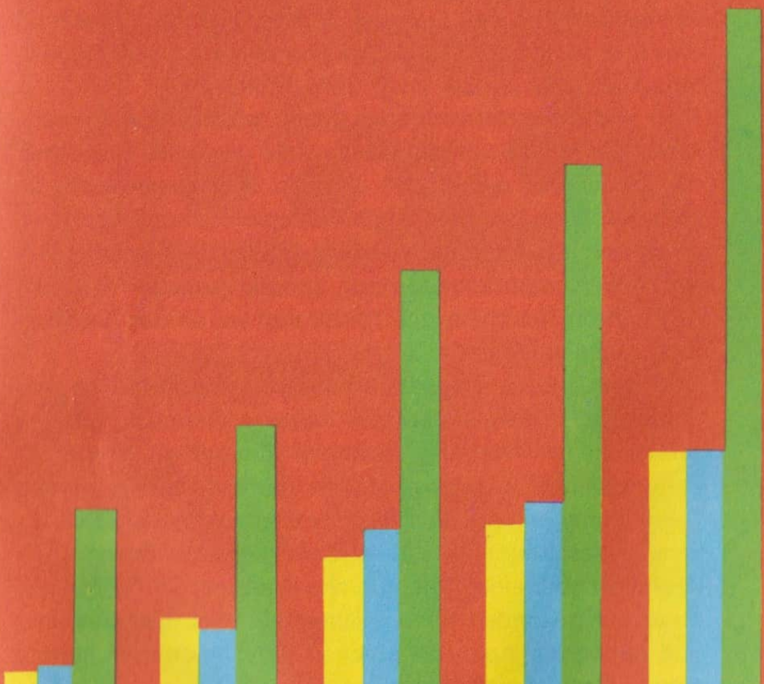
wichtigen Nahrungsmitteln zu versorgen. Wir zeigen es an einigen Beispielen tierischer Erzeugnisse:

Jahr	Fleisch (Schwein, Rind u. Geflügel) in 1 000 Tonnen	Milch in 1 000 Tonnen	Eier in Millionen Stück
1950	625	2 877	1 209
1955	1 202	4 962	2 043
1960	1 363	5 730	3 512
1965	1 578	6 371	3 935
1970	1 800	7 091	4 442
1971	1 867	7 150	4 504
1973	2 093	7 745	4 553

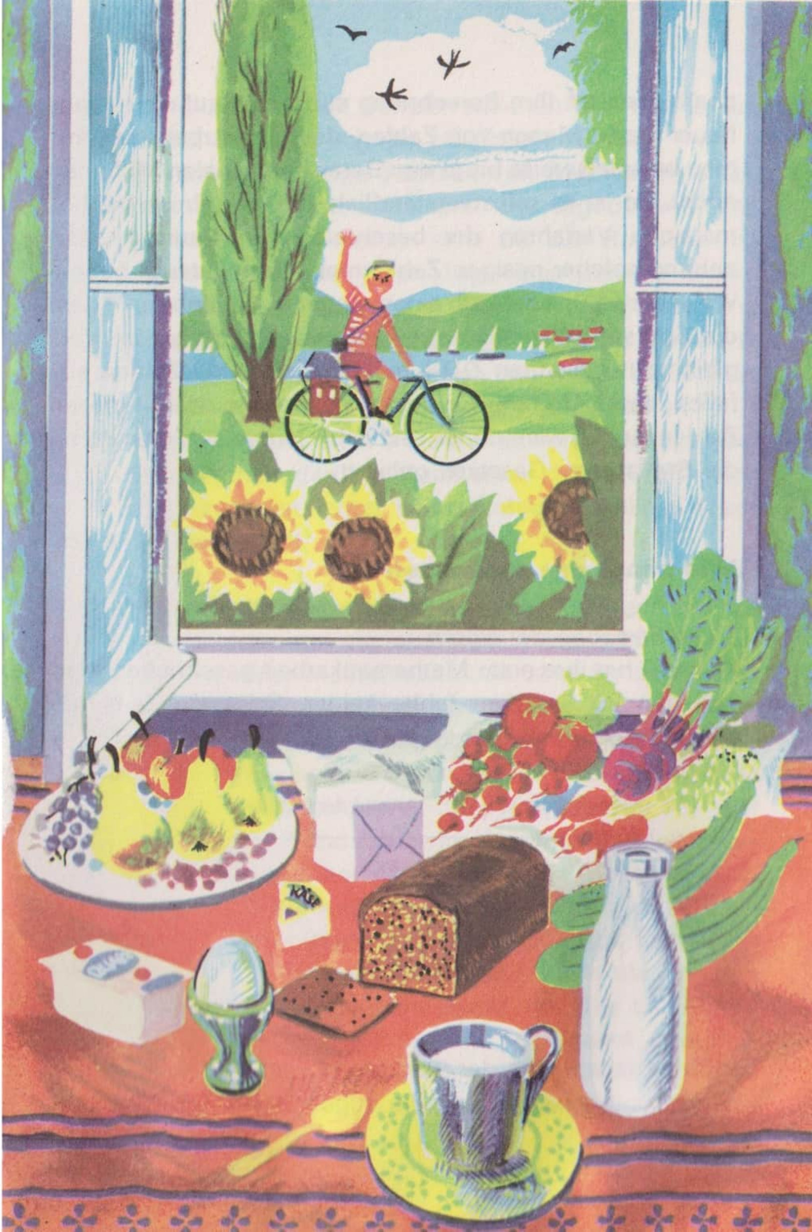
Höhere Leistungen in der Landwirtschaft und steigendes Arbeitseinkommen widerspiegeln sich auch im Ansteigen des Verbrauches an Nahrungs- und Genußmitteln. Nicht jede Zunahme ist dabei aber erfreulich, denn ein erhöhter Verbrauch von Zigaretten und Bier ist Ausdruck einer ungesunden Lebensweise. Unsere nächste Tabelle zeigt den Pro-Kopf-Verbrauch einiger Nahrungs- und Genußmittel in ausgewählten Jahren.

Erzeugnis	1955	1960	1965	1970	1971	1973
Fleisch (kg)	46,3	55,0	58,7	66,1	67,8	74,0
Eier (Stück)	122	197	211	239	244	249
Käse (kg)	3,0	3,6	4,3	4,6	4,6	4,8
Gemüse (kg)	46,5	60,7	68,8	84,8	82,0	99,5
Zigaretten (Stück)	1040	1069	1123	1257	1310	1354
Bier (l)	69,0	79,5	80,6	95,7	102,2	112,7

Die aufgeführten Tabellen sind einige wenige, aber typische


1950
1955
1960
1965
1970

Beispiele aus der beschreibenden Statistik, und sie geben nur einen ganz kleinen Einblick, wie unsere Republik durch Zahlen beschrieben werden kann.
Viele Millionen von Daten werden Jahr für Jahr erfaßt und zu solchen aussagefähigen Angaben verarbeitet. Natürlich ist es sehr interessant, derartige Zahlen zu betrachten: jeder Werktätige der DDR verdiente 1973 im Durchschnitt monatlich 835 Mark, und jeder Bürger unserer Republik verspeiste 1973 249 Eier und 74,0 kg Fleisch, aß 99,5 kg Gemüse, trank 112,7 Liter Bier und rauchte 1 354 Zigaretten. Auch hier wieder im Durchschnitt.
Bier- und Zigarettenverbrauch gehen zu Lasten der Erwachsenen. Zieht man von der Gesamtzahl der DDR-Bewohner die Zahlen für die Kinder und die Nichtraucher ab, so kommen noch erschreckendere Angaben zum Zigarettenverbrauch durch die Raucher ans Tageslicht. Aber das läßt sich leider nicht feststellen, da genaue Angaben über die Anteile von Rauchern und Nichtrauchern an der Bevölkerung nicht vorliegen.
Der ansteigende Zigarettenverbrauch führte schon vor Jahren zu einem Verbot: In unserer Republik gibt es seither keine Werbung mehr für Zigaretten. Weder in Zeitungen noch im Fernsehen oder irgendwo anders werden Tabakwaren angepriesen; statt dessen wird auf die Schädlichkeit des Rauchens aufmerksam gemacht. Demgegenüber läuft aber eine umfangreiche Werbung für Nahrungsmittel zur gesunden Lebensweise: für Obst, Gemüse, Eier und ähnliches. Auch bei solchen Entscheidungen stützte man sich auf Ergebnisse der Statistik.
Die eben genannten Zahlen sind durch Vermerke von der Art „pro Kopf der Bevölkerung" oder „im Durchschnitt"



charakterisiert. Ihre Berechnung stützt sich auf eine ungeheuer große Menge von Zahlen, die beim Arbeitseinkommen beispielsweise bis in den Bereich von vielen Millionen reicht. So ist es selbstverständlich, daß wir einige mathematische Verfahren der beschreibenden Statistik nicht anhand solcher riesigen Zahlenmengen erläutern können. Wir wenden uns deshalb einem anderen Bereich zu, in dem die Statistik ebenfalls angewandt wird, wo aber im Vergleich zur gesamten DDR nur relativ wenige Zahlen anfallen, deren Umfang für uns überschaubar ist. Mit diesen Zahlen wollen wir rechnen und dabei lernen, wie man durch die Statistik zu Gesetzen gelangt.

Wie hängt das zusammen?

– Die Streuung der Noten –

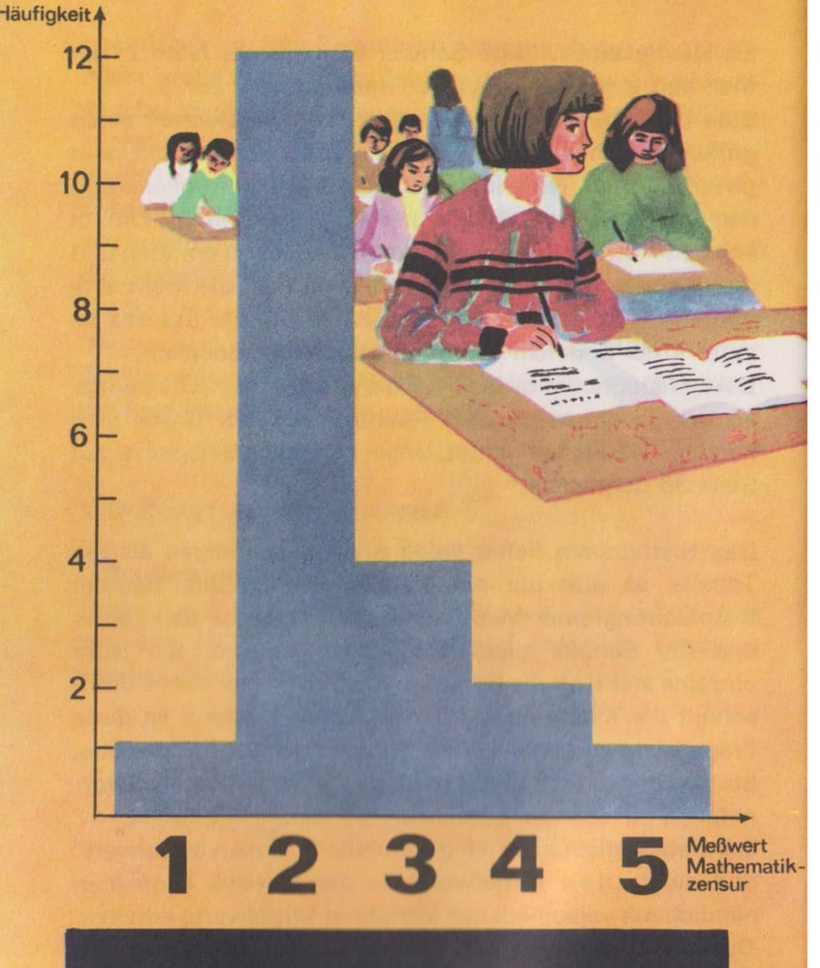
Klasse 6 hat ihre erste Mathematikarbeit geschrieben, und von den 20 Schülern fehlte keiner. Folgende Zensuren wurden dabei erreicht:

Zensur	Anzahl der Schüler
1	1
2	12
3	4
4	2
5	1

In der Fachsprache der Statistik bezeichnen wir die Zensuren als Meßwerte und die zugehörigen Schülerzahlen

als Häufigkeiten. Zwölf Schüler erhielten die Note 2; der Meßwert 2 liegt also mit der Häufigkeit 12 vor.
Sehr oft haben derartige Tabellen von Meßwerten einen größeren Umfang, zum Beispiel bei Ergebnissen von physikalischen Experimenten oder bei der Registrierung der Regenmengen für jeden Tag eines Jahres. Um in solchen Fällen rasch einen guten Überblick zu erhalten und um Besonderheiten zu erkennen, stellt man die Meßwerte und ihre Häufigkeiten zeichnerisch dar. In der Statistik ist dafür unter anderem das Histogramm gebräuchlich.
Beim Histogramm ordnen wir die Meßwerte nacheinander an und zeichnen darüber Rechtecke, deren Größe sich nach der Häufigkeit richtet. Unser einfaches Beispiel ist auf Seite 36 dargestellt.

Das Histogramm liefert keine anderen Aussagen als die Tabelle, es gibt nur ein einprägsameres Bild. Bei der Besprechung einer Mathematikarbeit ist es für den Lehrer und die Schüler gleichermaßen interessant, wo jeder einzelne steht, ob die Leistung über oder unter dem Durchschnitt der Klasse liegt. Bei den Noten 1 oder 5 ist diese Frage leicht zu beantworten. Schwieriger scheint das aber bei den Zensuren 2 und 3 zu sein. Um einen Vergleich vornehmen zu können, berechnen wir einen Mittelwert.
Ganz absichtlich habe ich geschrieben „e i n e n Mittelwert" und nicht „d e n Mittelwert". In der Statistik kann man nämlich mit verschiedenen Verfahren Mittelwerte erhalten. Da gibt es zunächst den Mittelwert, der den tatsächlich „mittelsten Wert" oder wie man ihn auch nennt „Medianwert" darstellt: in unserem Beispiel die Note 3. Dann existiert ein Modalwert, das ist der „häufigste Wert": für



Histogramm für die Zensuren der 1. Mathematikarbeit
in einer sechsten Klasse

unsere Mathematikarbeit die Note 2. Beides sind „Mittelwerte", die aber für jeden einzelnen Schüler noch keinen echten Vergleich ergeben. Am häufigsten arbeitet man in der Statistik mit dem arithmetischen Mittel, das wir auch hier berechnen.

Wir bezeichnen die Meßwerte der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5. In unserem Beispiel heißt das:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

Für die Häufigkeiten verwenden wir die Symbole h_1, h_2, h_3, h_4 und h_5:

$$h_1 = 1,\ h_2 = 12,\ h_3 = 4,\ h_4 = 2,\ h_5 = 1$$

Die Zahl der Schüler, welche die Arbeit geschrieben haben, betrug $n = 20$.

Für das arithmetische Mittel wählen wir das Zeichen $\bar{x}$. Die allgemeine Formel heißt dann:

$$\bar{x} = \frac{h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 + h_3 \cdot x_3 + h_4 \cdot x_4 + h_5 \cdot x_5}{n}$$

Wir setzen die Zahlenwerte ein und erhalten

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{20}$$

$$= \frac{1 + 24 + 12 + 8 + 5}{20} = \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Der Durchschnitt der Klassenarbeit betrug, berechnet mit dem arithmetischen Mittel, also 2,5. Jene 13 Schüler mit den Noten 1 und 2 schrieben eine überdurchschnittliche Arbeit. Wer eine 3, 4 oder 5 als Zensur erhalten hatte, er-

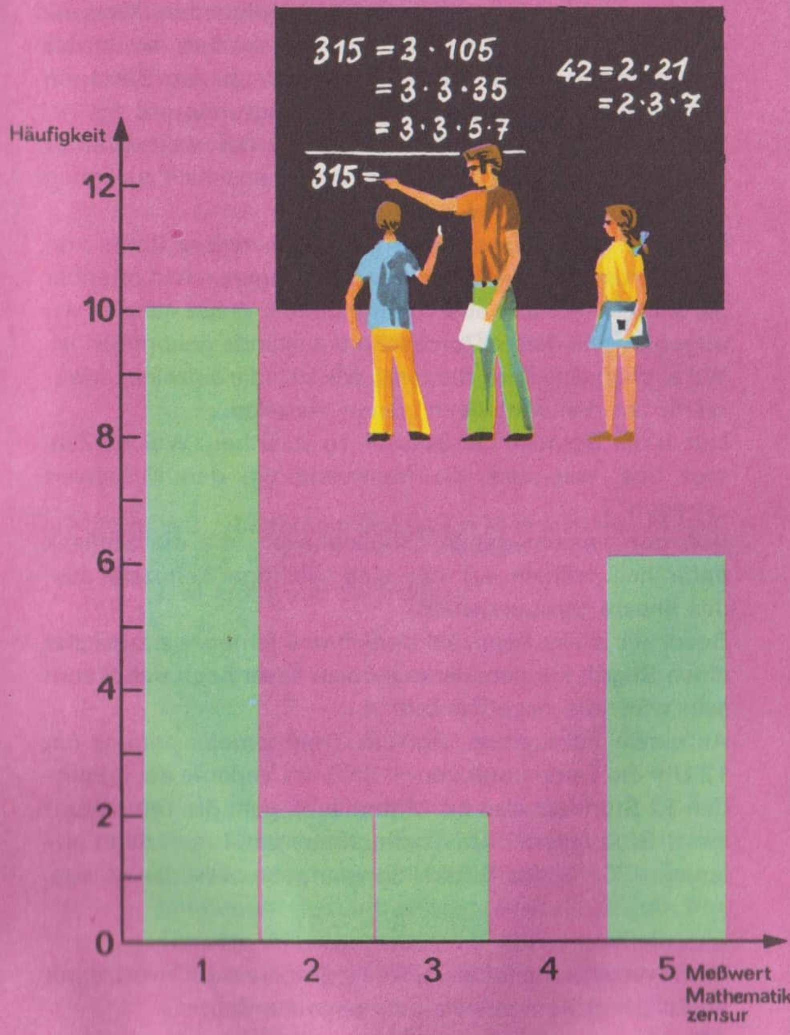
reichte nur eine unter dem Durchschnitt liegende Leistung.
Außer Medianwert, Modalwert und arithmetischem Mittel gibt es in der Statistik noch einige weitere Mittelwerte. Für die meisten Aufgaben liefert aber das arithmetische Mittel die beste Aussage. Deshalb – und nicht etwa nur, weil es leicht zu berechnen ist – beschränken wir uns im weiteren auf diesen Mittelwert. Wenn wir jetzt vom Mittelwert sprechen, meinen wir damit immer das arithmetische Mittel.
Genau ein Monat war seit der ersten Mathematikarbeit in Klasse 6 vergangen, als die zweite Arbeit geschrieben wurde. Wieder waren alle 20 Schüler anwesend. Dieses Mal sahen die Ergebnisse etwas anders aus.

Zensur	Anzahl der Schüler
1	10
2	2
3	2
4	–
5	6

Die Hälfte der Schüler bekam die Note 1, sechs Schüler mußten sich aber mit einer 5 begnügen. Welche Arbeit war besser ausgefallen, die erste oder die zweite?
Wir berechnen wieder den Durchschnitt mit dem arithmetischen Mittel und erhalten:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 6 \cdot 5}{20} = \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Genau der gleiche Wert hatte sich schon im ersten Fall



Histogramm für die Zensuren der 2. Mathematikarbeit in einer sechsten Klasse

ergeben. Wenn in zwei aufeinanderfolgenden Klassenarbeiten derselbe Mittelwert zustande kommt, so ist das sicherlich ein Zufall. Beide Male lagen ja den Zensuren ganz unterschiedliche Häufigkeiten zugrunde.

Betrachten wir nun das Histogramm für die zweite Mathematikarbeit auf Seite 39, so wird der Unterschied zur ersten Arbeit recht deutlich.

Um über eine Klassenarbeit oder eine andere Reihe von Meßwerten etwas Allgemeines auszusagen, reicht offenbar der Mittelwert nicht aus. Auf irgendeine Weise müssen wir angeben, wie dieser Durchschnitt zustande gekommen ist. Wir suchen eine Zahl, die zeigt, wie sich die einzelnen Meßwerte um den Mittelwert herum verteilen.

Um in der Sprache der Statistik zu sprechen: Welche Zahl sagt uns, wie stark die Meßwerte um den Mittelwert „streuen"?

Von den verschiedenen Möglichkeiten, die die Statistik dafür hat, wählen wir nur eine wichtige Kennzahl aus: das lineare Streuungsmaß.

Bevor wir diese Kennzahl berechnen, lernen wir zunächst einen Begriff kennen, der manchem Leser noch unbekannt sein wird: die negative Zahl.

An einem Februartag zeigt das Thermometer mittags um 12 Uhr die Temperatur von + 3° C. Im Verlaufe der folgenden 12 Stunden, also bis Mitternacht, geht die Temperatur um 8 Grad zurück. Am Thermometer kann man dann ablesen: – 5° C. Als Subtraktionsaufgabe sieht das so aus:

$$3 - 8 = -5$$

Wird von einer kleineren Zahl eine größere subtrahiert, dann ergibt die Differenz stets eine negative Zahl.

Mit solchen negativen Zahlen arbeiten wir jetzt auch beim Berechnen des linearen Streuungsmaßes.
Wir teilen uns den Weg in fünf Schritte ein und erläutern ihn am Beispiel der ersten Klassenarbeit, die bekanntlich die folgenden Ergebnisse brachte:

Zensur = Meßwert	Anzahl der Schüler = Häufigkeit
$x_1 = 1$	$h_1 = 1$
$x_2 = 2$	$h_2 = 12$
$x_3 = 3$	$h_3 = 4$
$x_4 = 4$	$h_4 = 2$
$x_5 = 5$	$h_5 = 1$

1. Schritt: Wir subtrahieren von jedem Meßwert den Mittelwert $\bar{x} = 2{,}5$.
Das ergibt die Differenzen

$$x_1 - \bar{x} = 1 - 2{,}5 = -1{,}5$$
$$x_2 - \bar{x} = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$$
$$x_3 - \bar{x} = 3 - 2{,}5 = +0{,}5$$
$$x_4 - \bar{x} = 4 - 2{,}5 = +1{,}5$$
$$x_5 - \bar{x} = 5 - 2{,}5 = +2{,}5$$

Das Vorzeichen dieser Differenzen ist teils positiv, teils negativ. Wenn wir die Streuung betrachten, so interessiert uns nicht, ob der einzelne Meßwert oberhalb oder unterhalb des Mittelwertes liegt. Wir suchen nach einer allgemeinen Aussage für alle Meßwerte, und deshalb beseitigen wir die Vorzeichen der berechneten Differenzen.

2. Schritt: Wir bilden von den Differenzen die absoluten Beträge.

Zur Erläuterung: Unter dem absoluten Betrag einer Zahl verstehen wir ihren Betrag ohne Vorzeichen; das mathematische Symbol dafür besteht aus zwei senkrechten Strichen. So ist der absolute Betrag von -4 gleich 4; symbolmäßig $|-4| = 4$. Und für $+4$ heißt der absolute Betrag ebenfalls 4: $|4| = 4$. Zwei Zahlen, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, haben also den gleichen absoluten Betrag. Zum Beispiel: $|-3| = |+3| = 3$. $|-3|$ wird gelesen als „absoluter Betrag von minus 3". Mit den absoluten Beträgen rechnen wir wie mit positiven Zahlen.

Für unser Beispiel erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|x_1 - \bar{x}| &= |-1{,}5| = 1{,}5\\
|x_2 - \bar{x}| &= |-0{,}5| = 0{,}5\\
|x_3 - \bar{x}| &= |+0{,}5| = 0{,}5\\
|x_4 - \bar{x}| &= |+1{,}5| = 1{,}5\\
|x_5 - \bar{x}| &= |+2{,}5| = 2{,}5
\end{aligned}
$$

3. Schritt: Wir multiplizieren die absoluten Beträge mit den Häufigkeiten der einzelnen Meßwerte.

$$
\begin{aligned}
h_1 \cdot |x_1 - \bar{x}| &= 1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5\\
h_2 \cdot |x_2 - \bar{x}| &= 12 \cdot 0{,}5 = 6{,}0\\
h_3 \cdot |x_3 - \bar{x}| &= 4 \cdot 0{,}5 = 2{,}0\\
h_4 \cdot |x_4 - \bar{x}| &= 2 \cdot 1{,}5 = 3{,}0\\
h_5 \cdot |x_5 - \bar{x}| &= 1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5
\end{aligned}
$$

4. Schritt: Wir addieren die im 3. Schritt berechneten Produkte.

$1{,}5 + 6{,}0 + 2{,}0 + 3{,}0 + 2{,}5 = 15{,}0$

5. Schritt: Wir dividieren die erhaltene Summe durch die Anzahl $n = 20$ der teilnehmenden Schüler und erhalten das lineare Streuungsmaß s.

$$s = \frac{15{,}0}{20{,}0} = 0{,}75$$

Um uns in diesen Rechenschritten zu üben, ermitteln wir gleich noch das lineare Streuungsmaß für die Ergebnisse der zweiten Mathematikarbeit. Wir kürzen jetzt den Schreibaufwand etwas ab, indem wir die einzelnen Schritte in einer Tabelle zusammenfassen. Der Mittelwert hieß auch hier $\bar{x} = 2{,}5$.

Meß-wert	Häufig-keit	1. Schritt	2. Schritt	3. Schritt
$x_1 = 1$	$h_1 = 10$	$x_1 - \bar{x} = -1{,}5$	$\lvert x_1 - \bar{x}\rvert = 1{,}5$	$h_1 \cdot \lvert x_1 - \bar{x}\rvert = 10 \cdot 1{,}5 = 15{,}0$
$x_2 = 2$	$h_2 = 2$	$x_2 - \bar{x} = -0{,}5$	$\lvert x_2 - \bar{x}\rvert = 0{,}5$	$h_2 \cdot \lvert x_2 - \bar{x}\rvert = 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}0$
$x_3 = 3$	$h_3 = 2$	$x_3 - \bar{x} = +0{,}5$	$\lvert x_3 - \bar{x}\rvert = 0{,}5$	$h_3 \cdot \lvert x_3 - \bar{x}\rvert = 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}0$
$x_4 = 4$	$h_4 = 0$	$x_4 - \bar{x} = +1{,}5$	$\lvert x_4 - \bar{x}\rvert = 1{,}5$	$h_4 \cdot \lvert x_4 - \bar{x}\rvert = 0 \cdot 1{,}5 = 0{,}0$
$x_5 = 5$	$h_5 = 6$	$x_5 - \bar{x} = +2{,}5$	$\lvert x_5 - \bar{x}\rvert = 2{,}5$	$h_5 \cdot \lvert x_5 - \bar{x}\rvert = 6 \cdot 2{,}5 = 15{,}0$

4. Schritt: Summe = 32,0

5. Schritt: $s = \frac{32{,}0}{20} = 1{,}6$

Das lineare Streuungsmaß gibt an, um welche Größe jeder Meßwert durchschnittlich vom Mittelwert abweicht. Die Betonung bei diesem Satz liegt auf dem Wort „durchschnittlich". Kein einziger Meßwert braucht dabei um genau den Betrag des Streuungsmaßes vom Mittelwert entfernt zu

liegen, denn das Streuungsmaß ist eben eine für alle Meßwerte allgemeingültige Größe.
Für unsere beiden Mathematikarbeiten heißt das: Die einzelnen Zensuren streuen bei der ersten Arbeit durchschnittlich mit $s = 0{,}75$, bei der zweiten mit $s = 1{,}6$ um den gleichen Mittelwert $\bar{x} = 2{,}5$. Ein großes Streuungsmaß zeigt, daß es bei den einzelnen Meßwerten große Unterschiede gibt – so wie bei der zweiten Arbeit: Von 20 Schülern erhielten zehn eine 1 und sechs eine 5.
Welches Ergebnis wünscht sich jeder Lehrer für eine Klassenarbeit? Mittelwert natürlich möglichst nahe bei 1 und ein sehr kleines Streuungsmaß, nicht größer als 1.
Ein solches kleines Streuungsmaß drückt aus, daß die Leistungen der einzelnen Schüler nicht allzuviel voneinander abweichen.
Unsere Beispiele zeigen: Ohne mathematisch-statistische Berechnungen, ohne Untersuchung von Mittelwert und Streuungsmaß lassen sich die Noten einer Klassenarbeit nicht exakt deuten und auswerten.
Die folgende Aufgabe sollt ihr versuchen, selbständig zu lösen, um zu überprüfen, wie weit ihr in der Lage seid, kleinere statistische Betrachtungen anzustellen.

● – Arbeitskräfte im Kaufhaus –
Ein Kaufhaus hat insgesamt 150 Mitarbeiter. Bedingt durch Urlaub, Krankheit, Haushalttage für Frauen, Freistellung zum Fernstudium und andere Gründe sind fast immer einige Arbeitskräfte abwesend. So betrug für den Verlauf einer Woche der tägliche Arbeitskräftebestand:

Montag	143	Mitarbeiter
Dienstag	138	Mitarbeiter

Mittwoch	147	Mitarbeiter
Donnerstag	142	Mitarbeiter
Freitag	136	Mitarbeiter
Sonnabend	140	Mitarbeiter

Berechne den durchschnittlichen Arbeitskräftebestand je Tag und das lineare Streuungsmaß!

– Ein Zusammenhang von Russisch und Mathematik –

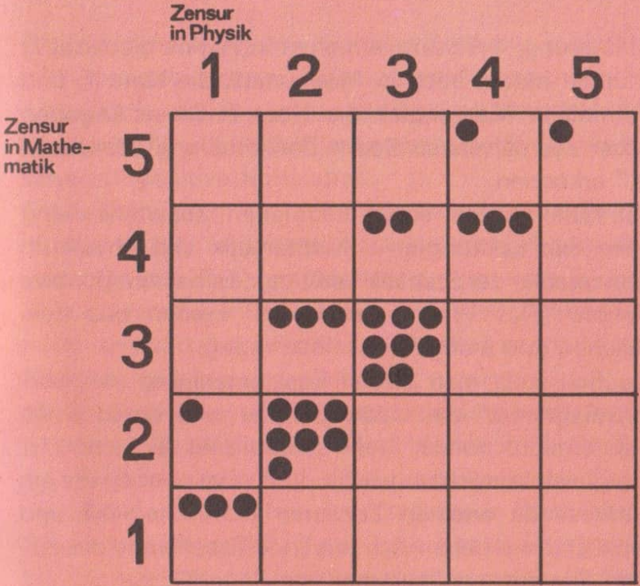
Hans weiß genau, was er will. Jetzt besucht er die 8. Klasse, und noch zwei weitere Schuljahre liegen vor ihm. Dann lernt er einen Beruf im VEB Werkzeugmaschinenbau, und anschließend steht ein Ingenieurstudium auf seinem Programm. Daß dazu gute Leistungen in Mathematik und Physik erforderlich sind, ist für Hans selbstverständlich.
An einem Dienstag im Mai hat er ein ungutes Gefühl. 1. Stunde: Mathematik. 2. Stunde: Physik. So steht es auf dem Stundenplan. In beiden Fächern sollen Klassenarbeiten zurückgegeben werden. Der Mathematikstunde sieht Hans gelassen entgegen, seine Erwartung trifft auch zu: Note 1 in der Arbeit. Aber dann kommt das Verhängnis.
Vor der Physikarbeit, die eine Woche zuvor geschrieben wurde, hatte er fast nichts gelernt. Er fühlte sich sicher; glaubte, alles Notwendige zu wissen. Als er schließlich die Fragen und Aufgaben hörte, erkannte er seinen Irrtum. Hans schwitzte, kam immer mehr durcheinander, und zuletzt schrieb er sogar das Ohmsche Gesetz falsch auf. Jetzt erhält er die Quittung für seine oberflächliche Vorbereitung: eine 5 in der Physikarbeit. Daß ihm so etwas nicht noch einmal passiert, dafür wird er in Zukunft sorgen: Jede Arbeit wird gründlich vorbereitet.
Kann man aus diesem Beispiel den Schluß „Wer in

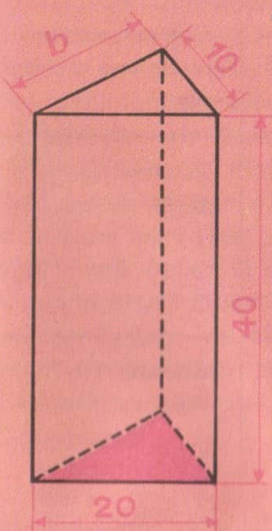
Mathematik gut ist, der ist in Physik schlecht" ziehen? Natürlich nicht! Eine Einzelerscheinung darf man niemals vorschnell verallgemeinern. In allen anderen Klassenarbeiten in Mathematik und Physik hat Hans auch gezeigt, daß ein solcher Schluß falsch ist.

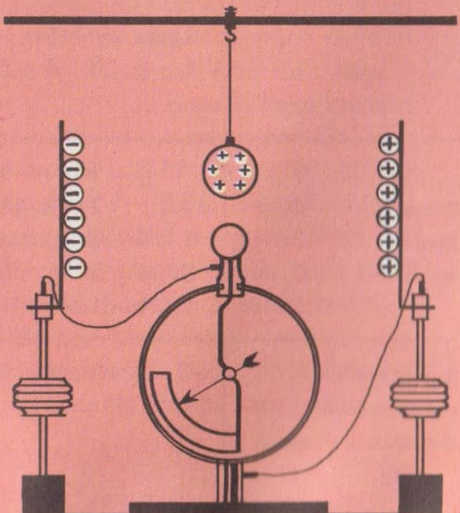
Über die wirklichen Zusammenhänge zwischen den Leistungen in Mathematik und Physik erhält man genaueren Aufschluß, wenn für eine ganze Klasse die Zensuren in beiden Fächern am Schuljahresende verglichen werden. Aber auch dieser Vergleich liefert noch kein allgemeingültiges Gesetz. Die Untersuchung in einer einzigen Schulklasse reicht dafür nicht aus. Je größer die Anzahl der Schüler ist, für die man die Noten in beiden Fächern vergleicht, desto genauer wird die Aussage. Wir erläutern einen Zusammenhang am Beispiel einer 8. Klasse mit 30 Schülern. Die Zensuren in Mathematik und Physik am Schuljahresende stellen wir in einer Tabelle zusammen:

		Zensur in Physik 1	2	3	4	5	Anzahl der verschiedenen Zensuren in Mathematik
Zensur in Mathematik	5				1	1	2
	4			2	3		5
	3		3	8			11
	2	1	7	1			9
	1	3					3
Anzahl der verschiedenen Zensuren in Physik		4	10	11	4	1	30 Schüler

Korrelationsdiagramm für die Zensuren in Mathematik und Physik am Ende eines achten Schuljahres


Zensur in Physik
1
2
3
4
5
Zensur in Mathematik
5
4
3
2
1


b
10
40
20



Zur Erläuterung: 4 Schüler erhielten in Physik die Note 1; 3 von ihnen hatten auch in Mathematik die Note 1, und einer erhielt in Mathematik die Note 2. Diese Angaben kann man aus der ersten Spalte der Abteilung „Zensur in Physik" erkennen.

Unsere Tabelle zeigt einen deutlichen Zusammenhang zwischen den Leistungen in Mathematik und Physik. In der Fachsprache der Statistik heißt das: Es besteht positive Korrelation. (Das Wort „Korrelation" kommt aus dem Lateinischen und heißt Wechselbeziehung.)

Anschaulich stellt man diesen Zusammenhang im „Korrelationsdiagramm" dar. Jeder Schüler wird durch einen Punkt an entsprechender Stelle symbolisiert (s. Seite 47).

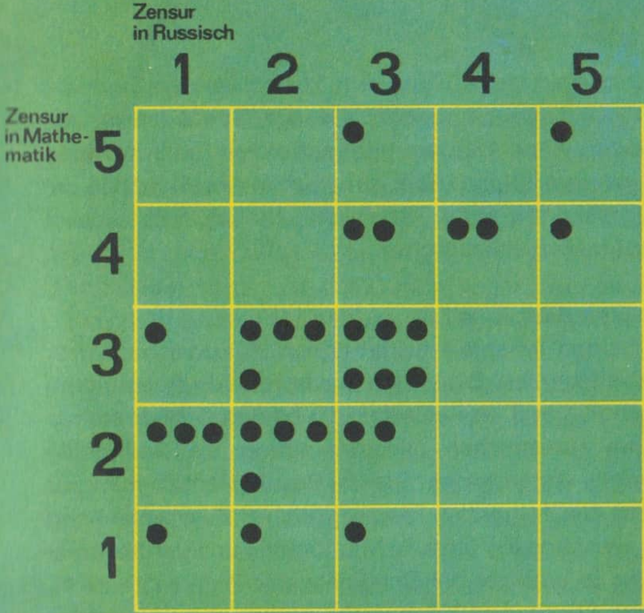
Zum Vergleich betrachten wir für die 8. Klasse noch die am Schuljahresende erteilten Zensuren in Mathematik und Russisch. Dabei ergeben sich folgende Tabelle und das zugehörige Korrelationsdiagramm von Seite 51:

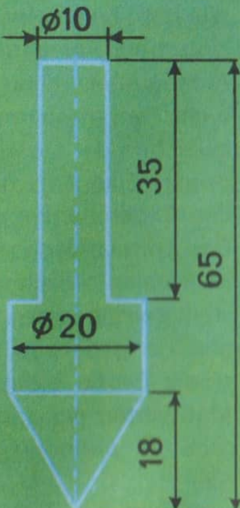
		Zensur in Russisch 1	2	3	4	5	Anzahl der verschiedenen Zensuren in Mathematik
Zensur in Mathematik	5			1		1	2
	4			2	2	1	5
	3	1	4	6			11
	2	3	4	2			9
	1	1	1	1			3
Anzahl der verschiedenen Zensuren in Russisch		5	9	12	2	2	30 Schüler

Ein Zusammenhang zwischen den Zensuren in Mathematik und Russisch ist ohne Zweifel ebenfalls vorhanden, jedoch wesentlich schwächer ausgeprägt als zwischen Mathematik und Physik. In der Fachsprache heißt das: Es besteht schwach positive Korrelation.
Diese Korrelation läßt sich exakt berechnen. Das ist allerdings eine sehr umfangreiche Angelegenheit und erfordert verschiedene Rechenoperationen, die erst in späteren Schuljahren behandelt werden. Wir wollen diese Berechnung deshalb hier nicht vornehmen, sondern nur das Resultat mitteilen und erklären.
Als Ergebnis einer solchen Untersuchung erhält man einen Korrelationskoeffizienten r. Das ist eine Zahl, die den Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen – beispielsweise zwischen den Zensuren in Mathematik und Physik – exakt angibt. Diese Zahl liegt im Bereich von -1 bis $+1$, hat also ein positives oder negatives Vorzeichen. Ein positiver Korrelationskoeffizient r drückt einen direkten Zusammenhang zwischen den zu vergleichenden Größen aus, der um so stärker ist, je höher der Wert für r liegt.
Der größtmögliche Wert ist $r = 1$. In diesem Falle besteht ein ganz strenger Zusammenhang zwischen den Größen. Für die Zensuren in Mathematik und Physik ergibt sich der Grad des Zusammenhanges mit $r = 0{,}96$. Diese Zahl liegt recht nahe bei 1. Das besagt: Schüler mit guten Noten in Mathematik haben in den allermeisten Fällen auch gute Noten in Physik. Beide Fächer besitzen ja zahlreiche Gemeinsamkeiten. Mit Hilfe der Mathematik werden alle physikalischen Gesetze dargestellt. Neue physikalische Erkenntnisse gewinnt man häufig durch mathematische Operationen.

Zwischen Mathematik und Russisch gibt es enge Beziehungen von dieser Art nicht. Deshalb liegt der Korrelationskoeffizient auch „nur" bei r = 0,65. Das Wörtchen „nur" steht in Anführungsstrichen, denn die Zahl r = 0,65 deutet eben doch einen gewissen Grad des Zusammenhangs zwischen diesen beiden Fächern an. Sowohl in Mathematik als auch in Russisch geht es nicht ohne logisches Denken: Gesetze der Mathematik und Gesetze der russischen Grammatik sind gleichermaßen logische Gesetze. Und in beiden Fächern macht sich eine gehörige Portion Fleiß erforderlich, will man gute Leistungen erreichen.
Solche Zusammenhänge werden durch mathematisch-statistische Berechnungen aufgedeckt. Erst nach derart gründlichen Untersuchungen dürfen Gesetze formuliert werden. Voreilige Verallgemeinerungen führen hingegen meist zu falschen Aussagen: solche Tatsachen wie die Noten 1 in Mathematik und 5 in Physik in den beiden Klassenarbeiten von Hans oder gar die vermeintliche Heilwirkung von Limonade bei Grippe, von der wir am Anfang des Buches erzählten, sind reine Zufälligkeiten, aus denen nicht auf eine Gesetzmäßigkeit geschlossen werden kann.
Zu den beiden Korrelationskoeffizienten ist noch zu bemerken: sie gelten nur für die eine Klasse mit den 30 Schülern, nicht aber allgemein für den Grad des Zusammenhangs zwischen Mathematik und Physik beziehungsweise Mathematik und Russisch. Bei einer anderen Schulklasse erhält man wieder andere Zahlen, die von unseren berechneten Werten aber nicht viel abweichen. Sucht man ein allgemeingültiges Gesetz für den Grad des Zusammen-

Korrelationsdiagramm für die Zensuren in Mathematik und Russisch am Ende eines achten Schuljahres


Zensur
in Russisch
1
2
3
4
5
Zensur
in Mathematik
5
4
3
2
1


ø10
35
65
ø 20
18

hangs zwischen den Zensuren in den einzelnen Fächern, müssen die Untersuchungen auf alle Schulklassen der DDR ausgedehnt werden und außerdem über mehrere Jahre hinweg erfolgen. Aber dabei ist zu erwarten, daß die Korrelationskoeffizienten doch so ähnlich wie unsere errechneten Zahlen aussehen.

– Fernsehen oder Kino? –

Unsere beiden Beispiele waren typisch für positive Korrelationskoeffizienten. Ergibt sich nun bei einer Untersuchung das Ergebnis $r = 0$, so heißt das: die beiden Größen stehen in keinem statistischen Zusammenhang, sie sind völlig unabhängig voneinander. Dieses Resultat erhält man mit Sicherheit bei folgender Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Note in Mathematik und der Nummer der Etage, in welcher der Schüler wohnt?

Allerdings liegen die Dinge nicht immer so offen zutage wie hier; beispielsweise bei Tierexperimenten in der medizinischen Forschung. Vor der Erprobung eines neuen Arzneimittels kann man häufig manche Wirkung noch nicht voraussagen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Dosis des neuen Präparates und dem Blutdruck? Eine Antwort auf diese Frage ergibt sich erst nach den Experimenten und ihrer statistischen Auswertung.

Der Korrelationskoeffizient r kann auch negativ sein, also im Bereich zwischen 0 und -1 liegen. In diesem Falle besteht zwischen den beiden zu vergleichenden Erscheinungen ein gegensätzliches Verhältnis. Hohe Meßwerte der einen Größe stehen im Zusammenhang mit niedrigen Meßwerten der anderen Größe. Dieser Gegensatz ist am größten, wenn $r = -1$ gilt.

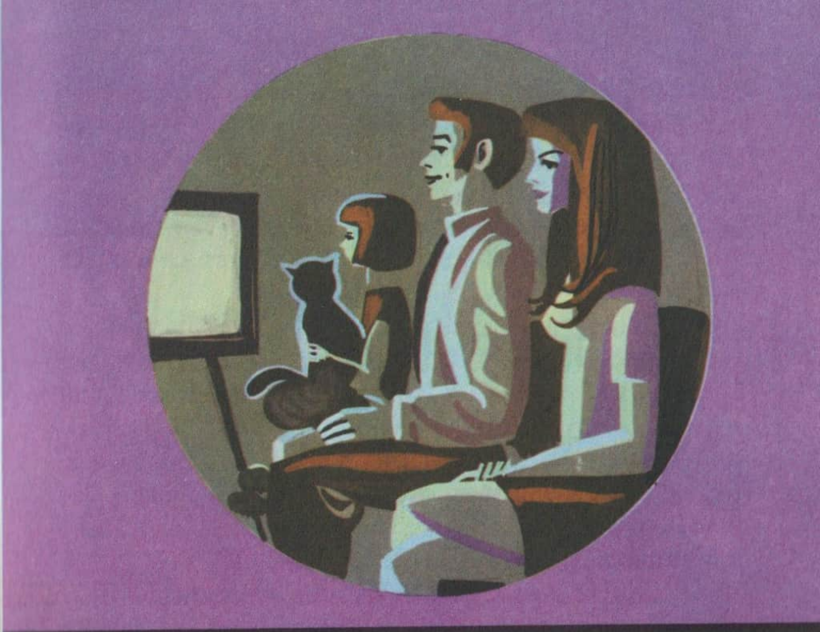
Auch dafür ein Beispiel! In unserer Republik stieg die Zahl der Familien, die ein Fernsehgerät besitzen, Jahr für Jahr an. Und es ist verständlich, daß im Zusammenhang damit die Besucherzahlen in den Kinos zurückgingen. Das Fernsehen bietet Bequemlichkeiten, man hat es täglich im Haus, braucht seine Wohnung nicht zu verlassen und kann dabei sogar auf der Couch liegen. Außerdem kann man bei unserem Fernsehfunk zwischen zwei interessanten Programmen wählen. Das Kino verliert dadurch natürlich nicht seine Existenzberechtigung. Breitwand- oder Panoramafilme wirken eben nur im Lichtspieltheater. Vom gewaltigen Eindruck hervorragender Szenen des mehrteiligen sowjetischen Filmwerkes „Befreiung" geht viel verloren, wenn das auf Bildschirmformat verkleinert wird. Für solche Darbietungen ist das Kino nicht zu ersetzen. Aber es ist eben nicht mehr die einzige Möglichkeit, sich durch Ton und Bild zu unterhalten und weiterzubilden. Aus dem „Statistischen Jahrbuch der DDR" gehen folgende aufschlußreiche Zahlen über die Entwicklung von Fernsehen und Kino in einigen zurückliegenden Jahren hervor:

Jahr	Anzahl der Fernsehapparate pro 100 Haushalte	Anzahl der Kinobesucher in Millionen
1960	16,7	237,91
1965	48,5	118,95
1967	60,0	99,21
1968	63,6	100,56
1969	66,3	93,30
1970	69,1	91,36
1971	71,7	82,27
1973	77,6	84,47

Sicherlich wird in kommenden Jahren die Ausstattung der Familien mit Fernsehapparaten noch weiter steigen, und diese Zahlenreihe kann sogar bis etwas über 100 hinaus klettern, wenn manche Familien – wie das schon bei Rundfunkgeräten der Fall ist – auch zwei Fernsehgeräte besitzen, beispielsweise außer dem „normalen" Apparat noch einen Kofferfernseher.
Die Besucherzahlen in den Kinos gingen von 1960 bis 1965 stark zurück, fast genau um die Hälfte. In den letzten Jahren ist die Abnahme geringer geworden. Das zeigt, daß das Kino seinen festen Platz behalten wird.
Berechnet man für die acht ausgewählten Jahre den Korrelationskoeffizienten für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Fernsehapparate pro 100 Haushalte und der Anzahl der Kinobesucher, so ergibt sich eine negative Größe: $r = -0{,}94$.
Diese Zahl gilt aber, das sei besonders hervorgehoben, nur für die sieben betrachteten Jahre.

– Die Sache mit dem Klapperstorch –

Ein Schwede war es – sein Name ist uns leider nicht bekannt –, der es mit der Mathematik bewies: Es ist doch der Klapperstorch, der die kleinen Kinder auf die Erde bringt, zumindest in Schweden. Dieser Mann betrachtete zwei Tabellen, eine für die Geburtenraten und eine für die Anzahl der Storchennester im Lande. „Donnerwetter", sagte er daraufhin, „jetzt rechne ich das genau aus." Sein Stift eilte über das Papier, Zahlenkolonnen häuften sich, er addierte, multiplizierte, zog Wurzeln und dividierte, und dann stand es schwarz auf weiß: Der Korrelationskoeffizient für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der




FILMTHEATER

Storchennester und der Anzahl der Geburten in Schweden ist positiv, er liegt sogar über 0,9. Also steht die Geburtenzahl in direktem Zusammenhang mit den Störchen!,

Mathematisch war die Berechnung einwandfrei. Kein Fehler hatte sich eingeschlichen. Was aber verheimlichte der schwedische Witzbold bei seiner Untersuchung, die übrigens schon einige Zeit zurückliegt?

In den Jahren, für die die Berechnung erfolgte, ging in Schweden die Anzahl der Storchennester und auch der Geburten zurück; der Zusammenhang war also scheinbar gegeben. Beide Entwicklungen hatten aber eine gemeinsame Ursache: In Schweden breitete sich die Industrie aus, und die Städte wuchsen. In ehemals rein ländlichen Gegenden entstanden Fabriken, Schornsteine stießen Abgase in Mengen aus, und das verpestete die Luft.

Für die Störche war das anscheinend wirklich nicht erfreulich, sie zogen andere Gegenden vor. Und gleichzeitig brachte die Industrialisierung in Schweden – wie auch in vielen anderen Ländern – einen Rückgang der Geburten mit sich.

Sinnvoll ist ein Korrelationskoeffizient nur für solche Erscheinungen, die tatsächlich miteinander zusammenhängen: in diesem Falle also für Industrialisierung und Geburtenraten oder für Industrialisierung und Nachteile in der Natur – wie hier beispielsweise die sinkende Anzahl der Störche. Sonst kommt man zu grotesken Aussagen.

Bedingt durch die gesellschaftliche Entwicklung in unserer Republik ist beispielsweise die Kriminalität immer weiter zurückgegangen, in den letzten 20 Jahren um mehr als die Hälfte. In einer Tabelle auf Seite 30 zeigten wir unter anderem, wie der Gemüseverbrauch seit 1955 angestiegen

ist. Natürlich ist es unsinnig, daraus zu folgern: Das Sinken der Kriminalität hängt ganz eng mit dem Steigen des Gemüseverbrauchs zusammen.

– Nicht nur beim Wetterbericht –

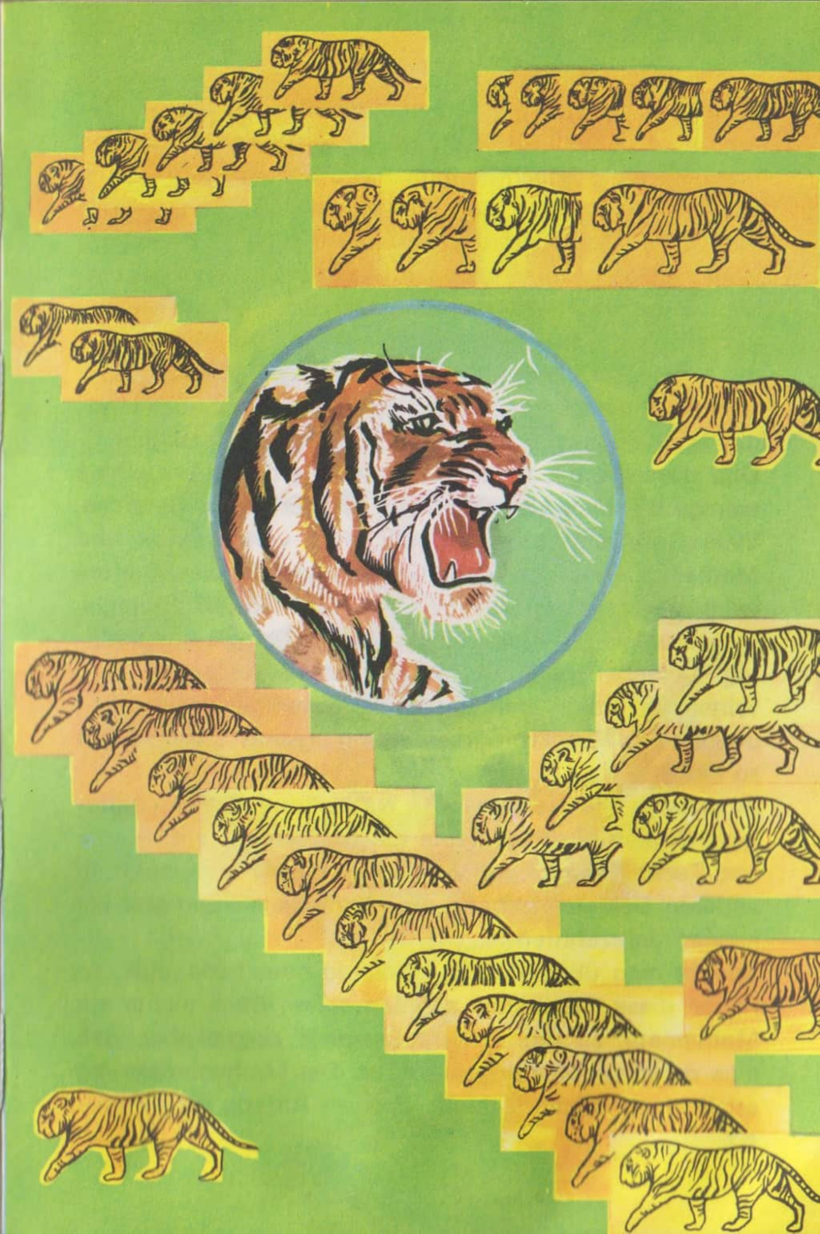
Statistische Untersuchungen sind keine Zahlenspielereien, sondern ganz wichtige Hilfsmittel zum Aufdecken von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten in fast allen Bereichen unseres Lebens und in vielen Natur- und Gesellschaftswissenschaften. Einige wenige Beispiele lernten wir kennen, und verschiedene andere Gebiete wollen wir nur noch nennen.

Teilbereiche der Statistik sind nach den Anwendungsmöglichkeiten benannt. So befaßt sich die technische Statistik unter anderem mit Gesetzen und Zusammenhängen bei technischen Problemen in der Industrie. Beispielsweise werden die Zugfestigkeit und Bruchdehnung von Stahlstäben gleicher Länge und gleichen Querschnitts, aber unterschiedlichen Kohlenstoffgehaltes in vielen Versuchen ermittelt. Aus den Tabellen der Meßwerte berechnet man mit Hilfe der Statistik die Gesetzmäßigkeiten. Als weitere derartige Probleme seien genannt: Einfluß der Luftfeuchtigkeit auf den Wassergehalt bestimmter Faserstoffe und die davon abhängige Zerreißfestigkeit, Abhängigkeit der Lebensdauer von Glühlampen, Röhren oder elektronischen Bauelementen von der Benutzungszeit, Vergleiche der Eigenschaften zweier Werkstoffe, Abhängigkeit des Kraftstoffverbrauches von der Fahrgeschwindigkeit bei Personenkraftwagen und so weiter.

Gerade das letzte Beispiel zeigt auf einfache Weise die Notwendigkeit, viele statistische Zahlen zu sammeln, bevor man ein Gesetz formuliert. Allgemein bekannt ist die Tatsache, daß der Kraftstoffverbrauch (bezogen auf eine Fahrstrecke von 100 Kilometern) bei zahlreichen PKW-Typen bei einer Geschwindigkeit von 100 Kilometer pro Stunde höher liegt als bei 80 Kilometer pro Stunde. Um exakt zu ermitteln, wieviel ein Wagen bei dieser oder jener Geschwindigkeit „frißt", genügt es nicht, den Verbrauch bei einer einmaligen Autobahnfahrt mit konstanter Durchschnittsgeschwindigkeit zu messen. Der Kraftverbrauch hängt außer von der Geschwindigkeit noch von anderen Größen ab, beispielsweise von der Belastung des Fahrzeuges, von der Struktur des Geländes, durch das die Strecke führt, von der Außentemperatur und auch von der Art, wie die Durchschnittsgeschwindigkeit zustande kam: Konnte man das betreffende Tempo durchweg konstant fahren, oder mußte man häufig bremsen und beschleunigen? Erst nach mehreren genauen Beobachtungen lassen sich aus den Meßwerten Mittelwerte bilden.

Medizinische Statistik steht als besonderes Lehrfach auf den Ausbildungsplänen für Ärzte an den Universitäten. Dieses Teilgebiet ist äußerst vielseitig. Die einfachsten Probleme befassen sich mit der statistischen Beschreibung des Gesundheitswesens, unter anderem mit Zahlenangaben zu den Krankenhäusern, den dort vorhandenen Krankenbetten, den Ärzten, Zahnärzten, Apothekern und Krankenschwestern, den Einrichtungen für Mutter und Kind, den Ausgaben des Staates für das Gesundheitswesen und ähnlichen Dingen in den einzelnen Jahren. Aus Statistiken zu den Todesursachen ergeben sich Aufschlüsse zu jenen Krankheiten, die besonders bekämpft werden müssen. Die erste derartige Übersicht untersuchte Johann Peter

Süßmilch in der Stadt Berlin für die Jahre 1727 bis 1733.
Für die medizinische Forschung sind statistische Methoden unentbehrlich. Aus der riesengroßen Vielfalt nennen wir nur einige wenige Beispiele, bei denen mit der Statistik Gesetzmäßigkeiten aufgedeckt wurden: Zusammenhänge zwischen Körpergröße und Gewicht, Körpergewicht und Sauerstoffverbrauch, Zigarettenverbrauch und verschiedenen Krankheiten von Herz, Lunge und Kreislauf, Beziehungen zwischen vielen Arzneimitteln und Blutdruck, Körpertemperatur beziehungsweise Pulsfrequenz, zwischen Alter und Blutdruck, zwischen der Dosis von bestimmten Medikamenten und der Absterbegeschwindigkeit von krankheitsverursachenden Bakterienstämmen und so weiter.
Jenen Teil der Biologie, der mit mathematischen und statistischen Methoden die zahlenmäßig erfaßbaren Merkmale von Lebewesen erfaßt, bezeichnet man als Biometrie. Auch hier geht es um das Feststellen von Abhängigkeiten verschiedener biologischer Merkmale, beispielsweise um Zusammenhänge von Höhe und Durchmesser bei verschiedenen Baumarten.
Das Durchschnittsgewicht der Zuckerrüben auf einem Feld hängt davon ab, wie dicht die Pflanzen stehen. Mit Hilfe der Biometrie ermittelte man für Zuckerrüben und andere landwirtschaftliche Anbauprodukte eine optimale Pflanzdichte, welche den höchsten Hektarertrag garantiert.
Will ein Biologe allgemeine Merkmale für das Leben eines Tieres oder einer Pflanze feststellen, so untersucht er viele Vertreter des betreffenden Lebewesens, er beobachtet und experimentiert. Aus den Meßwerten aller Versuche ermittelt er mit der Statistik die Gesetzmäßigkeiten.
Mit einem weiteren Anwendungsgebiet mathematisch-



statistischer Methoden kommen wir alle jeden Tag in Berührung: mit der Wettervorhersage. An vielen Stellen der Erde werden täglich mehrmals zu festgelegten Zeiten statistische Angaben zum Wetter gemessen, unter anderem Luftdruck, Luftströmungsgeschwindigkeit, Temperatur, Niederschlagsmenge und Luftfeuchtigkeit. Aus solchen Meßwerten und bekannten Gesetzen ermitteln die Meteorologen den Wetterbericht. Wenn wir uns auch ab und zu darüber ärgern, daß ein nicht angekündigter Regenschauer einen Ausflug stört, so wissen wir dennoch: Ohne Statistik und Mathematik gibt es überhaupt keinen Wetterbericht.
Und dasselbe gilt für die Gebiete, aus denen wir einige wenige Beispiele kennenlernten, und für andere Bereiche. Viele Gesetze wurden nur mit Hilfe von Statistik und Mathematik gefunden. Ohne diese beiden Wissenschaften wäre der Umfang des Wissens in Medizin, Biologie, Meteorologie, Technik, Geographie, Pädagogik und anderen Gebieten geringer, wären unsere Aussagen über Wirtschaft, Politik und Gesellschaft weniger anschaulich und die Grundlagen für die Leitung unseres Staates nicht so exakt.
In nahezu alle Bereiche der Natur- und Gesellschaftswissenschaften dringt heute die Mathematik ein. Physik und Technik waren von Anfang an mit ihr verbunden, in anderen Gebieten begann die Mathematisierung erst vor einigen Jahrzehnten.
Spricht man über Medizin, Biologie oder Pädagogik, so haben diese Disziplinen auf den ersten Blick nichts mit Mathematik zu tun. Unsere Beispiele zeigen aber, daß eine derartige Meinung falsch ist. Die Mathematisierung erfaßt auch solche Gebiete, und am Anfang dieses Pro-


СССР

zesses steht meist die Statistik. Man sucht nach exakten Aussagen und quantitativen Gesetzmäßigkeiten, das heißt nach meßbaren, zahlenmäßig darstellbaren Zusammenhängen.
Unsere Beispiele beleuchten von diesem Prozeß bisher nur eine Seite. Wir zeigten, wie man mit Hilfe der Statistik bestimmte Tatsachen und Vorgänge exakt beschreibt und Zusammenhänge aufdeckt. Das ist das Anliegen der beschreibenden Statistik.
In den folgenden Abschnitten wenden wir uns einem anderen Teilgebiet, der Prüfstatistik, und einem eng damit zusammenhängendem Bereich der Mathematik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu.

Jetzt wird alles wahrscheinlich

– Der Irrtum des Meisters –
Peter und Klaus haben einen gemeinsamen Schulweg. Das heißt, genaugenommen ist das so: Peter verläßt die Wohnung, und vier Minuten später klingelt er an Klaus' Tür. Beide marschieren dann die restliche Strecke gemeinsam. Das dauert normalerweise elf Minuten. Rechtzeitig vor Unterrichtsbeginn, fünf Minuten vor acht Uhr, betreten die zwei Freunde das Klassenzimmer.
An einem Donnerstag hatte Klaus verschlafen. Bisher war das noch nie vorgekommen. Als Peter klingelt, schlingt Klaus in aller Hast die ersten Bissen seines Frühstücks hinunter. Zu allem Unglück hat er noch am Vorabend vergessen, seine Schulmappe zu packen. Aufgeregt rennt er durch die Wohnung und sucht nach seinem Zirkelkasten.

Und wie das so bei großer Hast ist: Er kann ihn nirgends finden. Jedenfalls sind acht Minuten verstrichen, bis sich Peter und Klaus auf den Weg machen. Trotz der Eile führen sie folgendes Gespräch:

Peter: „Wahrscheinlich kommen wir heute zu spät zum Unterricht."

Klaus: „Ich habe den Wecker nicht gehört. Wahrscheinlich ist er defekt."

Peter: „Mir ist das schon einerlei, denn ich fühle mich heute ganz mies. Wahrscheinlich habe ich mich in den letzten Tagen erkältet."

Klaus: „Dann kommst du wohl heute nachmittag auch nicht zu unserem Fußballspiel?"

Peter: „Wahrscheinlich nicht."

Klaus: „Das wäre schade. – Ach verflixt, jetzt fällt mir gerade ein, wo mein Zirkelkasten liegen kann. Wahrscheinlich auf dem Tisch meiner Schwester. Gestern hatte ich ihr das Ding geborgt."

Peter: „Wahrscheinlich brauchen wir ihn heute gar nicht. Herr Müller wollte doch unsere Mathe-Arbeit zurückgeben. Da müssen wir wahrscheinlich wieder große Verbesserungen schreiben."

So ging das die ganze Zeit über, bis die beiden die Schule erreichten. Keine Feststellung konnte an diesem Morgen mit Sicherheit getroffen werden, immer blieb es bei „wahrscheinlich".

Tatsächlich spielt das Wort „wahrscheinlich" bei unseren Unterhaltungen oft eine große Rolle. Wir schätzen damit bestimmte Chancen für ein Ereignis ein, drücken Vermutungen aus oder legen Annahmen dar. Alles bleibt aber recht ungewiß, denn unsere Aussagen zur Wahrscheinlichkeit hängen von mancherlei Faktoren ab: zum Beispiel von uns vorliegenden Informationen, die sehr lückenhaft sein können und die wir deshalb durch Spekulationen ergänzen. Weitere solche Faktoren sind unsere derzeitige Laune und Stimmung, unsere Wünsche, unser Charakter, unsere Fähigkeiten zum kritischen Denken und – nicht zuletzt – der sogenannte „gesunde Menschenverstand".

Über viele Mängel und Gebrechen klagen die Menschen, über mangelhafte Informationen, angegriffene Gesundheit, schwindendes Gedächtnis, nicht abreißende Pechsträhnen, schlechte Laune, gedrückte Stimmung, bedauerliche Irrtümer, aber ich habe noch niemand getroffen, der über seinen unzureichenden Verstand gesprochen hat. Aber gerade mit diesem Verstand werden die Chancen für ein bestimmtes Ereignis ganz unterschiedlich eingeschätzt. Besonders drastisch ist das beim Fußball.

Ostsee-Stadion in Rostock: In wenigen Minuten beginnt das Spiel FC Hansa Rostock gegen 1. FC Magdeburg.

Zuschauer A: „Heute gewinnt Rostock. Die Chancen sind eindeutig. Sonst will ich einen Besen fressen."

Zuschauer B: „Klarer Fall für Magdeburg. Ich will im Erdboden versinken, wenn die Elbestädter nicht gewinnen."

Zuschauer C: „Ich habe genau abgewogen. Nach dem gesunden Menschenverstand kann nur ein Unentschieden herauskommen."

Nur einer der drei wird recht behalten. Zwei haben die Chancen falsch eingeschätzt, obwohl sie vor dem Spiel von ihrer Vorhersage überzeugt waren.

Oder beim Zahlenlotto: Frau Tipschnell spielt seit fünf Jahren. Jede Woche drei Scheine. Einige Zweier, einmal ein Dreier, manchmal eine Prämie, größer war die Ausbeute bisher nicht. „Vorigen Sonntag hätte es fast geklappt", sagt Frau Tipschnell. „Ich hatte alle 5 Zahlen, nur auf verschiedenen Scheinen. Jetzt weiß ich, wie ich es machen muß. Meine 15 Zahlen von den drei Scheinen spiele ich in zehn verschiedenen Tips. Noch in diesem Monat wird das mindestens ein Vierer, das sagt mir mein gesunder Menschenverstand!"

Frau Tipschnell hatte sich geirrt. In dem betreffenden Monat blieb sie sogar ohne jeden Gewinn.

Ein volkseigener Betrieb produziert eine bestimmte Sorte von Fotoblitzlampen. Mit ihnen kann man eine Aufnahme machen. Dann muß in das Blitzgerät eine neue Lampe eingesetzt werden. Man kann natürlich vorher nicht überprüfen, ob die Lampen einwandfrei sind. Der Betrieb liefert diese Lampen in Zehnerpackungen aus und will garantieren, daß davon mindestens 9 Stück funktionieren. 100 000 solcher „Einmalblitzer" sind produziert worden. Jetzt steht die Frage, ob der Betrieb das einwandfreie Funktionieren von 90 Prozent dieser Serie garantieren kann.

Ein neuer Begriff – Prozent – taucht hier auf, den wir kurz erklären:

Im Jahre 1973 gab es in jeweils 100 Haushalten der DDR 75 Kühlschränke und 77,6 Fernsehgeräte. Diesen Sachverhalt drückt man auch so aus: 75 Prozent aller Haushalte besaßen einen Kühlschrank, und in 77,6 Prozent aller Haushalte stand ein Fernsehgerät. Prozent ist eine Zahlenangabe, die sich immer auf je 100 einer Menge bezieht. Zur Abkürzung schreibt man das Zeichen %. Die Hälfte einer Gesamtheit sind also genau 50%.

Besteht eine Klasse aus 20 Schülern, dann stellt jeder

Schüler 5% dieser Klasse dar; denn 100 : 20 = 5. Erhalten in einer Klassenarbeit 12 Schüler die Note 2, so sind das 12 · 5% = 60%. Wenn nun in einer Packung von 10 Fotoblitzlampen 9 Stück funktionieren, dann sagt man: 90% der Lampen sind einwandfrei. In dem volkseigenen Betrieb wird über eine Garantie von 90% beraten.
Der Meister schlägt vor: „Wir nehmen 10 Lampen aus unserer Serie und probieren diese Stichprobe aus. Sind alle 10 oder zumindest 9 Stück einwandfrei, dann können wir die Garantie übernehmen."
Der Vorschlag klingt logisch und wird ausgeführt: Alle 10 Lampen blitzen auf, keine versagt. Man ist zufrieden. Die Serie von 100000 Stück wird mit der 90-Prozent-Garantie ausgeliefert.
Doch bald ist der Betrieb unangenehm überrascht. Reklamationen treffen ein. Aus zahlreichen Packungen funktionieren nur 7 oder gar nur 6 Lampen. Wo liegen die Ursachen?

– Fußball ohne Stabilität –

Bei allen drei Beispielen – Fußballspiel, Zahlenlotto, Stichprobe – findet man richtige Antworten mit Hilfe der Mathematik. Genauer gesagt: Mit Hilfe eines Teilgebietes dieser Wissenschaft, dessen Wurzeln zwar schon mehr als drei Jahrhunderte zurückreichen, das aber erst in den letzten Jahrzehnten zu großer Bedeutung und breiter Anwendung gelangte – die Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Ihr Entstehen fällt mit den Anfängen der Bevölkerungsstatistik zusammen. Ein wichtiges Arbeitsmittel dieser Statistik sind die Sterbetafeln. Was versteht man darunter? Fast jeder Mensch stellt sich irgendwann einmal die Frage, welches Alter er erreichen wird. Eine genau zutreffende

Antwort fand noch niemand. Die Sterbetafel nun gibt Auskunft über Zahlen, die wahrscheinlich sind, beispielsweise über die „wahrscheinliche Lebensdauer": Man versteht darunter jenes Alter, das die Hälfte von 100000 lebend Geborenen erreicht. Oder über die „mittlere Lebenserwartung". Das ist die Zahl der Jahre, die ein Mensch in einem bestimmten Alter durchschnittlich noch leben wird. In unserer Republik betrug sie im Untersuchungszeitraum 1955 bis 1958 für einen männlichen Neugeborenen 66,1 Jahre, für einen 20jährigen 51, für einen 50jährigen 23,7 und für einen 80jährigen 5,2 Jahre. Vor etwa 100 Jahren (1870) lag beispielsweise die Lebenserwartung eines Neugeborenen bei 35,2 Jahren. Auch die mittlere Lebenserwartung verdoppelte sich nahezu in dem gleichen Zeitraum – Ausdruck großer Fortschritte in der Hygiene und in den medizinischen Wissenschaften.
Was versteht man unter der „Wahrscheinlichkeit" im Sinne der Mathematik? Auf alle Fälle etwas anderes als in unserer Umgangssprache. Besonders deutlich wird uns dieser Begriff, wenn wir uns dem zweiten Problem zuwenden, das als Pate an der Wiege dieses Gebietes der Mathematik stand. Über lange Zeit hinweg befaßte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung nämlich in erster Linie mit der Untersuchung von Glücksspielen. Hier herrscht der Zufall, und diese Disziplin sucht nach Gesetzmäßigkeiten im Bereich des Zufälligen.
Zum Beispiel beim Würfelspiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine „6" zu werfen?
Bei einem Wurf – allgemein sprechen wir von einem Versuch – können sechs Ereignisse eintreten, die den sechs verschiedenen Augenzahlen entsprechen. Wir bezeichnen

das als sechs „mögliche Chancen". Für die Augenzahl „6" gibt es dabei nur eine „günstige Chance".
Die Wahrscheinlichkeit p für ein bestimmtes Ereignis bei einem bestimmten Versuch ist erklärt als

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Chancen}}{\text{Anzahl der möglichen Chancen}} = \frac{m}{n}$$

Somit gilt für das Ereignis, eine „6" zu werfen,

$$p = \frac{1}{6}$$

Diese gleiche Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ liegt auch für die anderen Augenzahlen 1, 2, 3, 4, oder 5 vor.
Die Wahrscheinlichkeit ist immer eine Zahl aus dem Bereich von 0 bis 1. $p = 0$ besagt, daß das betreffende Ereignis bei dem Versuch nicht eintreten kann, daß es sich um ein unmögliches Ereignis handelt. Unmöglich ist es beispielsweise, mit einem normalen Spielwürfel bei einem Wurf eine „7" zu werfen. Dafür gibt es keine günstige Chance.
Tritt ein Ereignis bei einem Versuch bestimmt ein – man spricht dann von einem sicheren Ereignis –, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür $p = 1$. Zum Beispiel: Mit dem Würfel eine „1" oder eine „2" oder eine „3" oder eine „4" oder eine „5" oder eine „6" zu werfen, das ist sicher, hier gilt $p = 1$.
Recht anschaulich stellt sich die Wahrscheinlichkeit dar, wenn wir sie in Prozenten ausdrücken. Die Zahl p wird dazu mit dem Faktor 100 multipliziert. Für das Werfen der

Augenzahl „6" mit dem Würfel gilt dann

$$p = \frac{1}{6} = 0{,}16\bar{6} \triangleq 16{,}\bar{6}\ \%$$

($\triangleq$ bedeutet „entspricht")

Wie sieht es mit der Wahrscheinlichkeit bei unseren drei Beispielen aus, die wir am Anfang dieses Kapitels schilderten? Zuerst zum Fußball:

Beim Spiel FC Hansa Rostock gegen 1. FC Magdeburg sind 3 Ereignisse denkbar: Sieg für Rostock, Sieg für Magdeburg oder Unentschieden. Dennoch kann man nicht sagen, daß die Wahrscheinlichkeit für jedes der drei Ereignisse etwa $\frac{1}{3}$ beträgt.

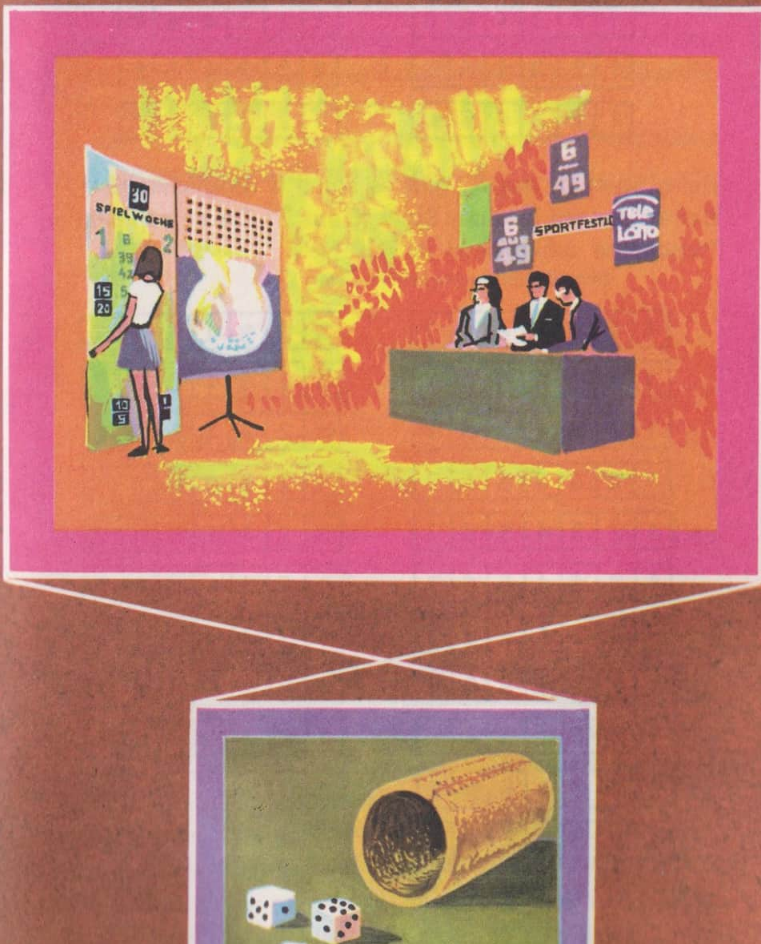
Welcher Unterschied besteht zwischen den Versuchen Würfeln und Fußballspiel?

Der Versuch „Werfen mit einem Würfel" läßt sich beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholen, und für Ereignisse solcher Versuche kann man die Wahrscheinlichkeit bestimmen. Anders beim Fußball. Das ist stets ein einmaliger Versuch, nicht wiederholbar. Treffen dieselben Mannschaften erneut aufeinander, so sind dennoch die Bedingungen nicht mehr die gleichen, selbst wenn beide Klubs mit gleicher Aufstellung spielen. Kondition, Tagesform und vielleicht auch die taktische Einstellung einzelner Spieler änderten sich, man lernte aus den möglichen Fehlern der ersten Begegnung, es läuft ein anderes Spiel. Wir sagen, solchen Versuchen wie Fußballspielen fehlt die statistische Stabilität. Wenn auch der Zufall eine große Rolle spielt – denn wer kann schon mit Sicherheit das Ergebnis eines Oberligaspiels voraussagen –, so läßt sich dennoch keine Wahrscheinlichkeit für Sieg oder Nieder-

lage der einen Mannschaft beziehungsweise für ein Unentschieden angeben.
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt sich nur mit solchen zufälligen Erscheinungen, die Massencharakter tragen, also beliebig oft wiederholbar sind; sie beschäftigt sich mit statistisch stabilen Ereignissen.

– *Wie gewinne ich im Lotto*? –

Die Bedingung des statistisch stabilen Ereignisses ist beim Zahlenlotto erfüllt. Der Versuch, mit einem Tipschein zu gewinnen, läßt sich immer wieder durchführen – solange das Geld für den Spieleinsatz ausreicht.
Suchen wir jetzt eine Antwort auf folgende Fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_5, mit einem Tipschein 5 Richtige im Zahlenlotto zu erzielen? Und wie hoch liegen die Wahrscheinlichkeiten p_4, p_3 und p_2 für den Gewinn eines Vierers, Dreiers oder Zweiers?
Zuerst berechnen wir die Anzahl n der verschiedenen möglichen Chancen für das Ziehen der 5 Gewinnzahlen aus dem Bereich von 1 bis 90. Damit beantworten wir zugleich die Frage „Wieviel Tipscheine muß man ankreuzen, um dabei genau einmal die 5 Richtigen zu haben?"
Stellen wir uns einmal ein Lottospiel vor, das nicht 90, sondern wesentlich weniger Zahlen zum Auswählen vorgibt, zum Beispiel nur 5. Ein Spiel „5 aus 5" also. Dann streicht man diese 5 Zahlen an und hat todsicher 5 Richtige. Es gibt hier nur eine Möglichkeit!
Wie sieht es bei 6 vorgegebenen Zahlen aus? Man spielt 6 Tipscheine, auf denen der Reihe nach jeweils eine der Zahlen von 1 bis 6 fehlt. Auf einem der folgenden Scheine stehen dann mit Sicherheit die 5 Gewinnzahlen.


30
SPIELWOCHE
6 aus 49
SPORTFESTLO
Tele Lotto

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~
~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~

~~1~~	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~
~~1~~	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~
1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~

Beim Spiel „5 aus 6" gibt es somit 6 Möglichkeiten! Betrachten wir jetzt das Spiel „5 aus 7". Die verschiedenen Tipscheine sehen dann so aus:

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	7
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	7
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	6	~~7~~
~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	7
~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	6	~~7~~
~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	5	~~6~~	~~7~~
~~1~~	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7
~~1~~	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	6	~~7~~
~~1~~	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~
~~1~~	~~2~~	3	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~
~~1~~	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7

~~1~~	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	~~7~~
~~1~~	2	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~
~~1~~	2	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~
~~1~~	2	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~
1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7
1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	~~7~~
1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~
1	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~
1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~

Man kann hier probieren, wie man will, eine weitere Möglichkeit gibt es nicht. Es bleibt bei diesen 21 Tips. Wenn wir alle Tipscheine für das Spiel „5 aus 8" aufschreiben, so sind das schon 56 Stück. Bei den weiteren

denkbaren Spielen, bei denen sich die Menge der zur Auswahl vorgegebenen Zahlen immer wieder um eine vergrößert, steigt dann die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten für Tipscheine rasch an.
Wir stellen die bisherigen Ergebnisse zusammen und fügen noch einige weitere Spiele hinzu:

Spielart	Anzahl n der verschiedenen Möglichkeiten für Tips
5 aus 5	1
5 aus 6	6
5 aus 7	21
5 aus 8	56
5 aus 9	126
5 aus 10	252
5 aus 11	462
5 aus 12	864

Wir wollen diese Reihe nicht bis zum Spiel „5 aus 90" fortsetzen. Wir suchen vielmehr nach einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit, die für die Anzahl der verschiedenen Tips gilt. Dazu lernen wir einen neuen mathematischen Ausdruck kennen, den Binomialkoeffizienten.
Die Zahlen aus unserer Tabelle lassen sich folgendermaßen als Brüche darstellen, für die wir neue Symbole einführen:

$$1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{5}{5}$$

(gelesen „5 über 5")

$$6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{6}{5}$$

(gelesen „6 über 5")

$$21 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{7}{5}$$

$$56 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{8}{5}$$

$$126 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{9}{5}$$

$$252 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{10}{5}$$

$$462 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{11}{5}$$

$$\cancel{864}\ 792 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{12}{5}$$

(gelesen „12 über 5")

Diese rechts stehenden Symbole sind die Binomialkoeffizienten.

Da sie von dem berühmten Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) eingeführt wurden, tragen sie auch den Namen „Eulersche Symbole".

Es sind Brüche mit der gleichen Anzahl von Faktoren in Zähler und Nenner. Im Nenner steht das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu jener Größe, die im unteren Teil des Binomialkoeffizienten angegeben ist. Der Zähler beginnt mit der oberen Zahl des Eulerschen Symbols, und die folgenden Faktoren sind dann nacheinander um 1 kleiner.

Damit können wir die Anzahl der verschiedenen Tips für das Zahlenlotto, also für das Spiel „5 aus 90", ausrechnen:

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268$$

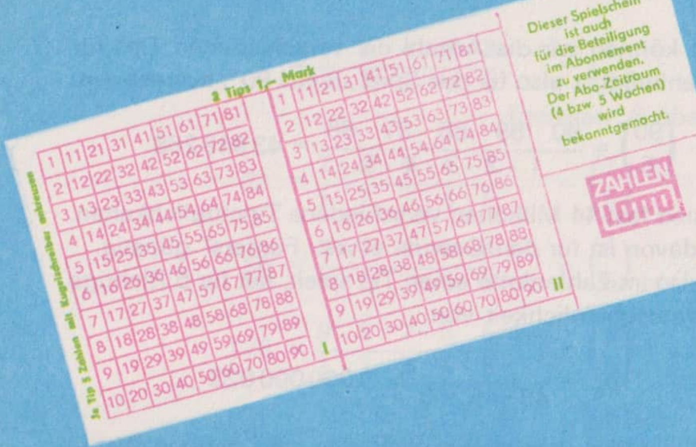
Das sind fast 44 Millionen verschiedene Tipmöglichkeiten. Eine davon ist für den Gewinn eines „Fünfers" günstig. Wer also im Zahlenlotto einen Tip spielt, hat für 5 Richtige die Wahrscheinlichkeit von

$$p_5 = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 0{,}000\,000\,023$$

23 Milliardstel, das ist natürlich eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit. Und wenn ihr die jeden Mittwoch in den Zeitungen veröffentlichten Gewinnquoten vergleicht, so kommt ein Gewinn mit 5 Richtigen nicht häufig vor.
Günstiger sind die Aussichten, 4, 3 oder 2 Richtige oder eine Prämie zu gewinnen.
Beim Zahlenlotto werden zwei Prämien zu 10,– und zu 25,– M (2 günstige Chancen) auf 2 dreizahlige Endnummern zwischen 000 und 999 (das sind 1 000 mögliche Chancen) ausgelost. Die Wahrscheinlichkeit, eine der beiden Prämien zu gewinnen, beträgt somit

$$p = \frac{2}{1\,000} \approx 0{,}002$$

Im Vergleich zum „Fünfer" liegen die Gewinnchancen hier bedeutend höher.
Ohne mathematische Begründung wollen wir die Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn eines Vierers, Dreiers oder Zweiers nur nennen.



$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 43.949.268$$

Beim Zahlenlotto befinden sich unter den 43 949 268 möglichen Tips außer einem Fünfer noch 425 Vierer, 35 700 Dreier und 987 700 Zweier. Damit betragen die Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn

$$\text{eines Viererers } p_4 = \frac{425}{43\,949\,268} \approx 0{,}00001$$

$$\text{eines Dreiers } p_3 = \frac{35\,700}{43\,949\,268} \approx 0{,}0008 \quad \text{und}$$

$$\text{eines Zweiers } p_2 = \frac{987\,700}{43\,949\,268} \approx 0{,}02$$

Betrachten wir noch zwei andere Spielarten.
Das Lotto-Toto ist das Spiel „5 aus 45". Aus 45 Zahlen sind 5 Richtige auszuwählen. Dafür gibt es

$$\binom{45}{5} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1\,222\,759$$

verschiedene Möglichkeiten. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Hauptgewinn

$$p_5 = \frac{1}{1\,222\,759} \approx 0{,}000\,000\,8$$

Beim Tele-Lotto müssen von 35 Zahlen 5 Richtige vorausgesagt werden. Dieses Spiel „5 aus 35" kennt also

$$\binom{35}{5} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 324\,632$$

verschiedene Tips. Mit einem Tipschein hat man für den Hauptgewinn die Wahrscheinlichkeit von

$$p_5 = \frac{1}{324\,632} \approx 0{,}000\,003$$

Das Tele-Lotto ist gegenüber dem Zahlenlotto und dem Lotto-Toto bedeutend chancenreicher. Das gilt natürlich nicht nur für den Fünfer, sondern auch für Vierer und Dreier.
Wer Spaß gewonnen hat an dem „Spiel mit der Wahrscheinlichkeit", wagt sich an die Lösung der folgenden Aufgabe.

● – Ein Vergleich der Chancen –
Berechnet für das Sportfest-Toto „6 aus 49" die Anzahl der verschiedenen Tipmöglichkeiten und die Wahrscheinlichkeit p_6 für 6 Richtige! Vergleicht die Ergebnisse mit dem Zahlenlotto, Lotto-Toto und Tele-Lotto!

– Wie zuverlässig ist eine Stichprobe? –
Im ersten Kapitel betrachteten wir einige statistische Tabellen über die Entwicklung auf verschiedenen Gebieten in unserer Republik: über die Zunahme des Arbeitseinkommens, der staatlichen Ausgaben für Bildungs- und Gesundheitswesen, der Produktion in unserer Landwirtschaft und des Verbrauchs einiger Nahrungs- und Genußmittel. Diese Angaben beruhen auf sogenannten Totalerhebungen. Um beispielsweise das durchschnittliche monatliche Arbeitseinkommen im Jahre 1971 zu bestimmen, wurden die Löhne und Gehälter aller Werktätigen der DDR in den letzten 12 Monaten des betreffenden Jahres festgestellt, um daraus den Mittelwert zu bilden. Eine Rechnung mit ungeheuer vielen Zahlen.

Vielfach sind solche Totalerhebungen nicht möglich. Beispielsweise in der Medizin. Für eine bestimmte Krankheit entwickelten die Ärzte ein neues Heilverfahren. Bevor es angewandt wird, muß es erprobt werden. Das geschieht in Krankenhäusern. Nach einer gewissen Zeit wird ein Urteil über das Verfahren gefällt. Das kann so aussehen: „Die neue Methode wurde an 1148 Patienten erprobt, und sie führte gegenüber dem alten Verfahren in wesentlich kürzerer Zeit zur Heilung."

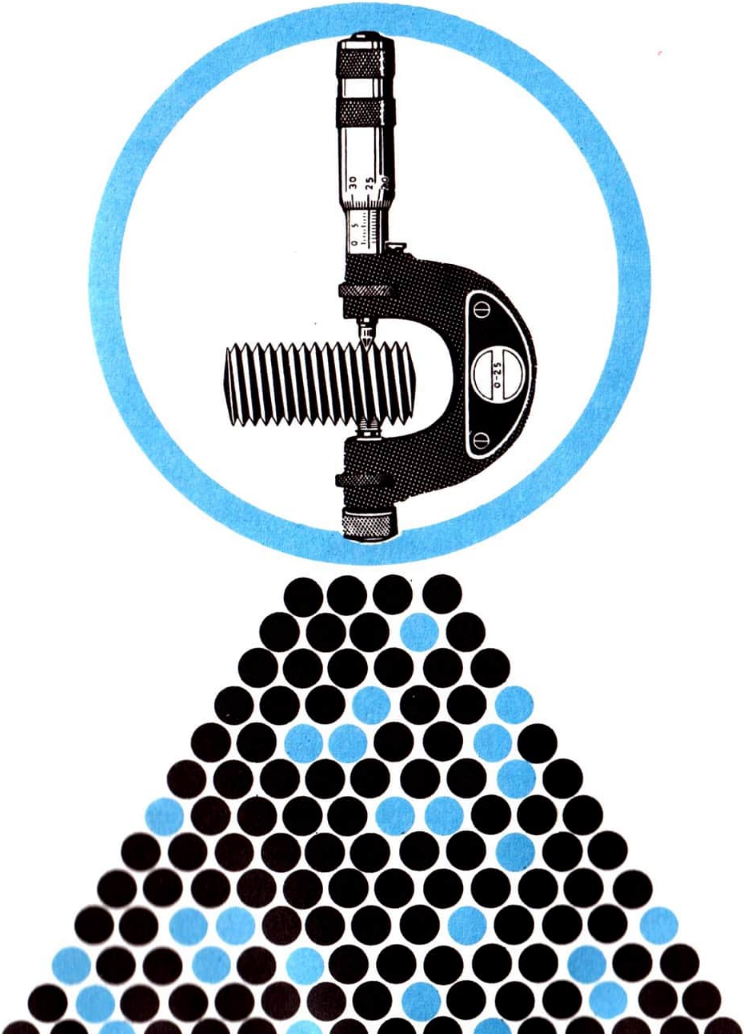
Irgendwann muß jede Erprobung abgeschlossen werden, die Anzahl der einbezogenen Patienten ist auf jeden Fall begrenzt. Die in der Vergangenheit schon nach dem alten Verfahren geheilten Menschen scheiden davon aus; meist erfolgt eine derartige Erprobung in einem einzigen Krankenhaus, und häufig wendet man eine neue Methode nur auf einen Teil der Patienten an, um die alte und die neue Therapie miteinander zu vergleichen.

In der Sprache der Statistik formulieren wir: Von der „Grundgesamtheit" wurde eine „Stichprobe" ausgewählt, um einen Sachverhalt zu überprüfen.

Stichproben begegnen uns häufig, manchmal aus Zeitnot. Zu Beginn einer Unterrichtsstunde sagt beispielsweise der Lehrer: „Heute ist die Zeit zu knapp, um von allen Schülern die Hausaufgaben anzuschauen. Ich begnüge mich deshalb mit einer Stichprobe. Petra, Werner und Brigitte, bitte eure Hefte zur Kontrolle!"

Ein Verlag hat die Absicht, die Meinung der Leser zu einem Buch kennenzulernen. Der gesamten Auflage von 20000 Exemplaren (Grundgesamtheit) liegen Karten mit bestimmten Fragen bei. Nur 1824 Leser (Stichprobe) schreiben Antworten und senden die Karten an den

Verlag zurück. Die Bequemlichkeit von 18176 Lesern zwingt den Verlag, sich mit der Stichprobe zu begnügen.
In anderen Fällen wiederum muß man sich ganz einfach auf die Stichprobe beschränken. Wir erwähnten die Sache mit den Fotoblitzlampen. Jede Lampe ist nur einmal zu verwenden, und die Qualitätskontrolle kann sich nur auf eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit stützen.
Alle genannten Beispiele laufen auf eine Frage hinaus: Welche Schlußfolgerungen kann man aus der Stichprobe für die Grundgesamtheit ziehen?
Grundlagen für die Antworten liefert ein Gebiet, das sich in den letzten Jahrzehnten neben der beschreibenden Statistik entwickelte: die Prüfstatistik.
Durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ähnlicher mathematischer Gebiete entstanden Methoden, die den Menschen beim Fällen von Entscheidungen helfen. Jede Entscheidung kann das Risiko haben, falsch zu sein. Die Methoden der Prüfstatistik ermöglichen es, dieses Risiko vor einer Entscheidung abzuschätzen.
Wir wollen dieses Risiko noch an einem Beispiel erläutern:
Ein Betrieb erhält für seine Produktion von einem anderen Betrieb ein bestimmtes Werkstück in größerer Menge geliefert. Es ist unmöglich, die gesamte Sendung sofort dahingehend zu prüfen, ob alle Teile einwandfrei funktionieren. Man beschränkt sich auf eine Stichprobe: Eine kleinere Anzahl der Teile wird der Sendung entnommen und geprüft. Sind alle Stücke einwandfrei oder gibt es in der Stichprobe nur ganz wenige fehlerhafte Teile, dann wird die gesamte Sendung abgenommen. Überschreitet aber in der entnommenen Probe die Zahl der schadhaften



Werkstücke eine bestimmte Grenze, dann wird die ganze Sendung abgelehnt.
Je größer man die Stichprobe wählt, desto sicherer ist natürlich der Rückschluß auf die Qualität der Gesamtheit. Die Untersuchung umfangreicher Stichproben ist aber zugleich auch kostspielig. Durch die Prüfstatistik wurden Stichprobenpläne entwickelt, die Auskunft über einen vernünftigen und aussagekräftigen Umfang einer Stichprobe liefern und auch die zulässige Anzahl der fehlerhaften Stücke in der Probe angeben. Das Risiko, eine Sendung mit zu vielen schadhaften Stücken anzunehmen oder aber auch eine sehr gute Lieferung nur aufgrund einer zufällig schlecht ausfallenden Stichprobe abzulehnen, wird durch diese mathematisch begründeten Prüfverfahren stark herabgesetzt. Die Stichprobentheorie ist somit ein wichtiger Bestandteil der Prüfstatistik und zugleich ein entscheidendes Mittel der Qualitätskontrolle.

– Der Mathematiker rechnet –

Untersuchen wir nunmehr die Geschichte mit den Fotoblitzlampen etwas näher. Der Herstellerbetrieb gewährleistet für den Posten von 100000 „Einmalblitzen" eine Garantie. Auf den Zehnerpackungen steht der Satz: „Wir übernehmen eine Garantie von 90 Prozent." Also 90000 Lampen sollen ordnungsgemäß funktionieren.
Man stützte sich dabei auf die Erfahrung, daß bei ähnlichen Erzeugnissen durchschnittlich 10 Prozent, ein Zehntel, Ausschuß anfallen.
Die vom Meister vorgeschlagene Stichprobe deutete wohl sogar auf eine noch bessere Qualität hin: Alle 10 kontrollierten Lampen funktionierten ja.

Die 90-Prozent-Garantie erwies sich für den Betrieb jedoch als ein großer Reinfall: Mehr als ein Viertel aller Kunden meldete Reklamationen an. Wie kam es dazu?
Mit den 10 Prozent Ausschuß hatte man sich nicht geirrt, in dem Posten wiesen tatsächlich etwa 10000 Lampen einen Fehler auf. Nun ist es aber nicht so, daß die Lampen mit Defekt ganz gleichmäßig über alle Zehner-Packungen verteilt sind. Keinesfalls jede Schachtel enthält genau 9 funktionierende Blitzer und ein fehlerhaftes Exemplar.
Mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung läßt sich folgendes ermitteln: Von 100 Zehner-Packungen enthalten durchschnittlich
35 Packungen nur fehlerfreie Lampen,
39 Packungen jeweils eine fehlerhafte Lampe,
19 Packungen jeweils zwei fehlerhafte Lampen,
6 Packungen jeweils drei fehlerhafte Lampen,
1 Packung jeweils vier fehlerhafte Lampen.
Wir überprüfen, ob diese Zahlen stimmen. In diesen 100 Packungen befinden sich insgesamt 1000 Lampen; bei 10 Prozent Ausschuß also durchschnittlich 100 fehlerhafte Stücke. Bei der oben aufgeführten Verteilung der Versager erhalten wir

$$35 \cdot 0 + 39 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4$$
$$= 0 + 39 + 38 + 18 + 4$$

= 99 Lampen mit Defekt.
Die geringfügige Abweichung zu 100 erklärt sich mit der Rundung der berechneten Zahlen auf ganze Werte. Exakt erhält man statt 35 das Ergebnis 34,9, statt 39 das Resultat 38,7 und so weiter.
Setzt man die Berechnungen fort, so ergibt sich beispielsweise noch folgende Tatsache: Unter 1000 Packungen ist

im Durchschnitt sogar eine mit fünf fehlerhaften Lampen! Der Käufer, dem diese Schachtel in die Hände fällt, ist natürlich sehr empört. 90 Prozent der Blitzer sollen funktionieren, das verspricht ihm der Garantieaufdruck auf der Schachtel, und dann versagt jeder zweite!

Von 100 Kunden, die je eine Packung erwerben, sind

$$35 + 39 = 74$$

Käufer zufrieden. Für sie trifft die Garantie von 90 Prozent zu. Aber 19 + 6 + 1 = 26 Kunden entdecken in ihrer Schachtel mehr als eine Lampe, die nicht funktioniert. Mit vollem Recht reklamieren sie und verlangen Ersatz.

Betrachtet man diese Zahlen, so zeigt sich auch der Unsinn mit der überprüften Stichprobe. Das Experiment galt als gelungen, wenn von 10 Lampen höchstens eine fehlerhaft war. Dieses Resultat tritt in 35 + 39 = 74 von 100 Fällen auf. Mit der relativ hohen Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}74$ sind in einer zufällig herausgegriffenen Stichprobe entweder kein oder nur ein einziger Versager enthalten. Eine solche Stichprobe erweist sich für die beabsichtigte Garantie als praktisch wertlos. Man erkennt leicht, daß bei einer 90-Prozent-Garantie die Ausschußquote wesentlich unterhalb von 10 Prozent liegen muß.

Bei 5 beziehungsweise nur 2 Prozent Ausschuß sieht die durchschnittliche Verteilung der fehlerhaften Stücke auf 100 Packungen wie folgt aus:

	bei 5 % Ausschuß	bei 2 % Ausschuß
0 Versager in	60 Packungen	82 Packungen
1 Versager in	31 Packungen	17 Packungen
2 Versager in	8 Packungen	1 Packung
3 Versager in	1 Packung	

Wie viele Beanstandungen pro 100 Packungen gibt es jetzt, wenn nach wie vor die Garantie für 90 Prozent geleistet wird?

8 + 1 = 9 Kunden reklamieren, wenn die Ausschußquote bei 5 Prozent liegt, und lediglich ein Käufer fordert Ersatz, wenn 2 Prozent Ausschuß vorhanden sind.

Im volkseigenen Betrieb fand nach dem Reinfall mit den 100000 Blitzern, bei denen 26 Prozent der Kunden reklamierten, ein Gespräch statt.

Der Meister: „Ich sehe ein, daß mein Vorschlag falsch war. Aus einer solchen kleinen Stichprobe lassen sich keine Verallgemeinerungen ziehen."

Der Direktor: „Für die neue Serie unserer Fotoblitzlampen behalten wir die 90-Prozent-Garantie unbedingt bei. Jetzt kommt es darauf an, die bisherige Ausschußquote von 10 Prozent zu senken. Gibt es dafür nicht doch Möglichkeiten?"

Der Ingenieur: „Durchaus, das haben wir schon überlegt. Wir haben einen sehr guten Neuerervorschlag ausgearbeitet, der sich leicht verwirklichen läßt. Wir hoffen, daß die Ausschußquote auf etwa 2 Prozent zurückgeht. Aber genau wissen wir das noch nicht."

Der Direktor: „Mit unserer neuen Serie darf es keinen Ärger mehr geben, weder hier noch bei unseren Kunden. Auf welche Weise erfahren wir, ob unser Garantieversprechen real ist?"

Der Mathematiker: „Hier helfen nur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Wir berechnen exakt den notwendigen Umfang der Stichprobe. Mit ihr überprüfen wir, ob tatsächlich nur noch 2 Prozent Ausschuß vorhanden sind. Hundertprozentig gültige Aussagen erhalten wir

allerdings nicht. Aber wir können beispielsweise für unsere Resultate eine Sicherheit von 95 Prozent fordern.
Außerdem gibt es bei solchen Untersuchungen immer eine geringfügige Abweichung jener Ausschußquote, die wir dann in der Stichprobe ermitteln, von der Ausschußquote, die in dem gesamten Posten wirklich vorliegt. Den Umfang der Stichprobe berechnen wir so, daß das höchstens 1 Prozent ist."
Der Direktor: „Mit diesen Vorschlägen sind wir wohl alle einverstanden."
Danach begann der Mathematiker mit seiner Arbeit, die wir hier nicht weiter verfolgen wollen, nur soviel sei gesagt: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergab, daß der Betrieb von der neuen Serie der Fotoblitzlampen 753 Stück, statt vorher 10 Stück, zu überprüfen hatte. Gegenüber 10 überprüften Exemplaren erscheint die Zahl von 753 beträchtlich groß. Vergleicht man aber diese Zahl mit der Grundgesamtheit von 100000 fertiggestellten Blitzlampen, so macht die Stichprobe noch nicht einmal den hundertsten Teil, nämlich 0,753 Prozent des ganzen Postens aus.
Von der neuen Serie der Fotoblitzlampen wurden in diesem Betrieb nun tatsächlich 753 Stück geprüft. Dabei ergaben sich genau 15 Versager, also knapp 2 Prozent. Aufgrund der festgelegten höchstzulässigen Abweichung von 1 Prozent zur Gesamtheit kann die Ausschußquote im gesamten Posten maximal 3 Prozent betragen. Wahrscheinlich liegt sie etwas darunter, denn jene 3 Prozent stellen ja den Höchstwert dar. Unter diesen Voraussetzungen erwartet man durchschnittlich für 100 Zehnerpackungen:
74 Packungen enthalten nur fehlerfreie Lampen,

23 Packungen enthalten jeweils eine fehlerhafte Lampe,
3 Packungen enthalten jeweils zwei fehlerhafte Lampen.
Von 100 Kunden reklamieren also lediglich jene drei, die in ihren Packungen zwei Versager entdecken.

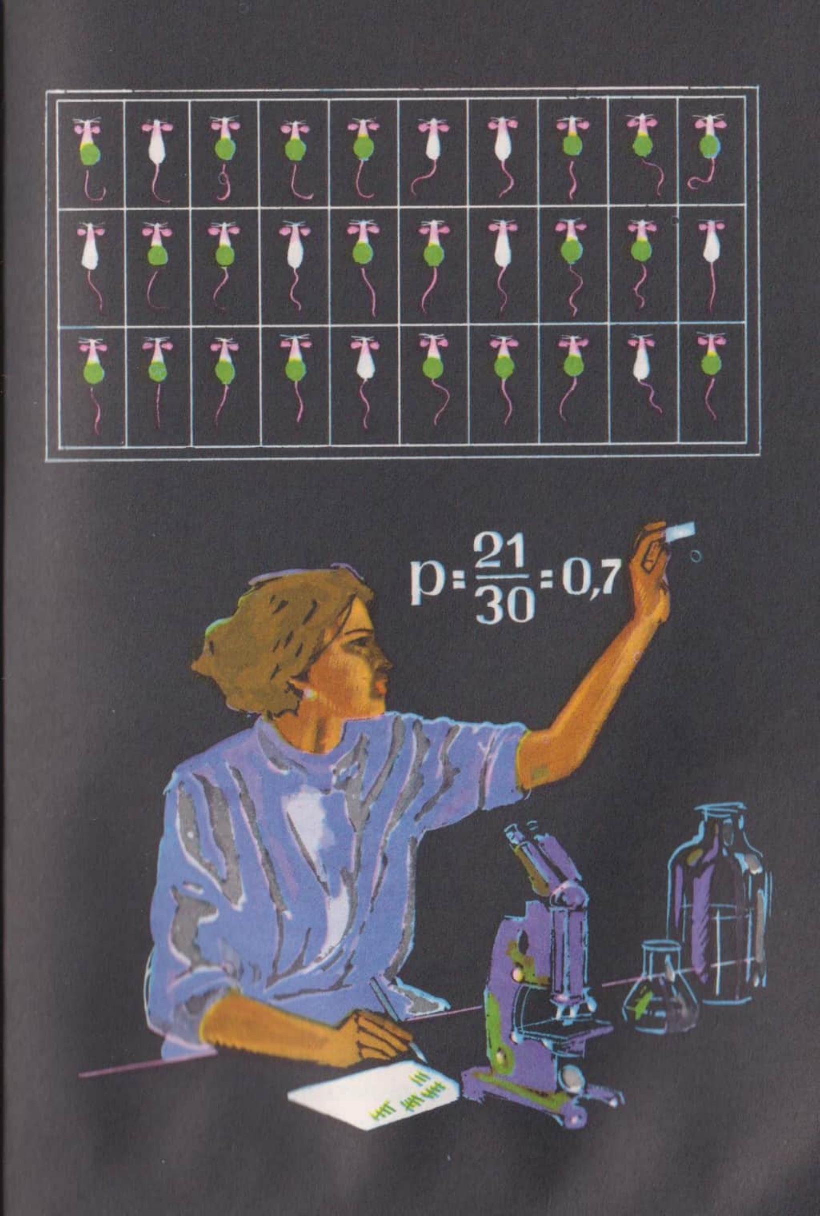
– Von Mäusen und Gesetzen –

Unsere Beispiele zeigen bei weitem nicht alles, was sich mit Stichproben anfangen läßt. Sogar die am häufigsten vorkommende Aufgabe rechneten wir nicht, weil das mathematisch sehr kompliziert ist. Man benötigt dafür spezielle Kenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und wir lernten ja nur einige Grundbegriffe dieses Gebietes kennen.

Dieses vielfach auftretende Problem sieht allgemein so aus: In einer Stichprobe vom Umfang n ermittelte man den Anteil p jener Einheiten mit einem besonderen Merkmal. Wie häufig kommt dieses besondere Merkmal nun in der Grundgesamtheit vor? Und wie sicher ist diese Schlußfolgerung?

Eine derartige Aufgabe ergibt sich beispielsweise in der medizinischen Forschung: Von einer Bakterienart wird vermutet, daß sie eine bestimmte Krankheit verursacht. Um diesen Sachverhalt näher zu erkunden, führen Forscher Experimente mit Mäusen durch. 30 Versuchstiere erhalten eine Flüssigkeit mit diesen Bakterien injiziert. Nach Tagen zeigen 21 Mäuse Symptome der Krankheit. Wie wertet man dieses Ergebnis aus?

Der Umfang der Stichprobe beträgt $n = 30$. Die Häufigkeit der Einheiten mit einem besonderen Merkmal – hier der erkrankten Mäuse – liegt bei $p = \frac{21}{30} = 0{,}7$.



p = 21/30 = 0,7

Da die Stichprobe mit n = 30 relativ klein ist, läßt sich daraus nicht etwa der Schluß ziehen, daß die untersuchte Bakterienart mit der Wahrscheinlichkeit von p = 0,7 (oder 70 Prozent) die Krankheit verursacht. Genauere Berechnungen führen vielmehr zu dem Ergebnis, daß die betreffende Bakterienart durchschnittlich in 54 bis 82 Prozent aller Fälle die Krankheit auslöst. Zur Sicherheit dieser Aussage ergibt sich, daß der Bereich zwischen 54 und 82 Prozent um jeweils 5 Prozent nach unten oder nach oben überschritten werden kann.
Fragen solcher Art kommen in vielen Gebieten der Praxis vor. Sehr wichtig sind sie im Bereich der Qualitätskontrolle. Hier entscheiden häufig Ergebnisse von Stichproben über die Einstufung der Qualität von großen Grundgesamtheiten. Die Verantwortung der Mathematiker, welche die Schlußfolgerungen aus einer Stichprobe und die damit verbundene Zuverlässigkeit der Aussagen berechnen, wird dadurch besonders deutlich. In der DDR gibt es deshalb sogar gesetzliche Bestimmungen über die Arbeit mit Stichproben. Sie legen unter anderem den Umfang der Stichprobe bei der Untersuchung einer Grundgesamtheit fest und geben Richtlinien über die Einschätzung von Sicherheit und Risiko.

Gedichte und Gesundheit

– Die Ketten des Herrn Markow –

WIR UEBERDIES UND HABEN ROLOC

Was sagt dieser Satz? Worüber informiert er uns?

Die Antwort auf diese Fragen geben wir erst einige Seiten später. Nur soviel sei vorweggenommen, daß dieser Satz etwas mit dem Zusammenhang von Dichtkunst und Mathematik zu tun hat.

Dichtkunst und Mathematik? An ein Gedicht über die Mathematik oder den Mathematiklehrer denken wir dabei nicht, denn in jüngster Zeit bildeten sich noch andere Beziehungen zwischen diesen beiden so sehr verschiedenen Gebieten heraus.

Um die Sache verständlich zu machen, kehren wir nochmals zu den Zensuren in der Schule zurück. Nur ganz kurz, denn darüber steht auf den vorangehenden Seiten schon genug.

Wer in irgendeinem Fach in einer Klassenarbeit die Note 1 erhielt, ist damit nicht gegen eine „5" in der nächsten Arbeit gefeit. Ein guter Schüler schreibt nach einer „1" natürlich mit größerer Wahrscheinlichkeit erneut eine „1" oder eine „2" statt einer „5".

Wissenschaftlich formuliert sagen wir zu einem solchen Zusammenhang: Der nachfolgende Zustand hängt vom vorangehenden Zustand ab.

Und die Mathematik ergänzt diese Aussage: Für den Übergang vom vorangehenden in einen nachfolgenden Zustand gelten ganz bestimmte Wahrscheinlichkeiten, die entsprechenden Werte lassen sich direkt berechnen oder – wie im Falle der Zensuren in zwei aufeinanderfolgenden

Klassenarbeiten – durch umfangreiche statistische Untersuchungen ermitteln. Wir stellen die Ergebnisse in einer Tabelle dar.

Übergangswahrscheinlichkeiten für die Zensuren eines Schülers in zwei aufeinanderfolgenden Arbeiten

Vorangehende Zustände	Nachfolgende Zustände 1	2	3	4	5
1	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
2	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
3	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
4	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2
5	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5

Betrachten wir beispielsweise die 1. Zeile: Wer in der ersten Arbeit die Note 1 erhielt, schreibt mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,4 (das sind 40%) wieder eine „1". Die Wahrscheinlichkeit für eine „2" beträgt p = 0,3, und mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils p = 0,1 kann er in der zweiten Arbeit aber auch die Zensuren 3, 4 oder 5 erhalten.

Diese Art der Darstellung ist allerdings stark vereinfacht, denn die Noten in einer nachfolgenden Klassenarbeit hängen nicht nur vom vorangehenden Ergebnis ab. In Wirklichkeit beeinflußt doch die gesamte vorherige Entwicklung das Leistungsvermögen eines Schülers, und das drückt sich unter anderem in den Noten aller zurückliegenden Arbeiten und nicht zuletzt auch in der Vorjahrszensur aus.

Solche Zusammenhänge lassen sich aber nur sehr kom-

pliziert darstellen, und wir beschränken uns deshalb auf diese einfachen Übergänge.
Für die mathematische Bearbeitung schreibt man solche Übergangswahrscheinlichkeiten nicht in einer derartigen Tabelle, wie wir sie eben aufgestellt haben, sondern in der Form einer Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & \mathbf{0{,}2} \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{Vmatrix}$$

Allgemein verstehen wir unter einer Matrix ganz einfach ein rechteckiges Schema von Elementen, die in Zeilen und Spalten angeordnet sind. Hier liegt der Sonderfall einer quadratischen Matrix vor.
Die Elemente dieser Matrix bestehen aus Übergangswahrscheinlichkeiten, und die Matrix selbst heißt deshalb Übergangsmatrix.
Mathematiker bevorzugen diese Schreibweise, weil sie weniger umfangreich als eine Tabelle ist, aber trotzdem die gleichen Aussagen liefert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, von der Zensur 4 zur Note 5 überzugehen? Für die Antwort genügt ein Blick auf das Element im Schnittpunkt der 4. Zeile mit der 5. Spalte: $p = 0{,}2$. (Diese Zahl ist fett gedruckt.)
Im Gegensatz zu den Tabellen haben die Matrizen noch einen Vorteil: man kann mit ihnen rechnen. Ein ganzes Gebiet der Mathematik befaßt sich damit: die Matrizenrechnung. Aber darüber wollen wir hier nicht berichten. Wer sich dafür interessiert, erfährt das in dem Buch „Das

Einmaleins genügt nicht mehr", das auch in der Regenbogenreihe erschienen ist.
Es gibt Schüler mit recht sprunghaften Leistungen. Bei 8 Klassenarbeiten in einem Jahr erreichen sie jedesmal eine andere Note, beispielsweise so:

$$2 - 3 - 5 - 1 - 4 - 2 - 5 - 3$$

Wir haben 5 verschiedene Zensuren oder 5 verschiedene Zustände Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 und Z_5, zwischen denen solche Schüler ganz willkürlich hin und her pendeln. Für die 8 genannten Noten lassen sich die aufeinanderfolgenden Zustände als eine Kette darstellen:

$$Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_3$$

Aus der Übergangsmatrix sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen jeweils 2 Zuständen bekannt.
Der russische Mathematiker Andrej Andrejewitsch Markow (1856–1922) untersuchte die Ketten solcher Übergänge eines Systems (in unserem Beispiel heißt das System „Schüler") von einem Zustand in einen anderen. Wir sprechen deshalb von Markowschen Ketten.
Für einen guten Schüler mit ausgeglichenen Leistungen sieht nach 8 Klassenarbeiten die Markowsche Kette beispielsweise so aus:

$$Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_1$$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Überganges aus einem Zustand in einen anderen nur vom direkt vorangehenden Zustand bestimmt, sprechen wir von einer Markowschen Kette 1. Ordnung. Unsere Beispiele gehören zu dieser Gruppe. Bezieht man dagegen außer dem direkt voran-

gehenden auch noch den vorletzten Zustand mit ein, dann liegt eine Kette 2. Ordnung vor. Das ist beispielsweise der Fall, wenn die Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen einer bestimmten Zensur in Abhängigkeit von den Ergebnissen der beiden vorangehenden Klassenarbeiten betrachtet wird.
Setzt man solche Überlegungen fort und macht die Übergangswahrscheinlichkeiten von n vorangehenden Zuständen abhängig, so ergibt das eine Markowsche Kette n-ter Ordnung. Zum Beispiel: Am Schuljahresende erfolgt der Übergang zur Note auf dem Zeugnis unter Berücksichtigung aller Zensuren – aller vorangehenden Zustände – während des gesamten Jahres in diesem Fach.
Was läßt sich außer der Beschreibung der Zensuren mit den Markowschen Ketten anfangen? Zum Beispiel kann man mit ihnen dichten! Wie man das macht, erzählen wir jetzt.

In unserer Sprache treten die einzelnen Buchstaben mit unterschiedlicher Häufigkeit auf. Die Frage nach dem meistgebrauchten Buchstaben kann jeder leicht beantworten: es ist das e, das uns beinahe in jedem Wort begegnet. An zweiter Stelle liegt das n, und die rote Laterne hängt am Buchstaben y. Er kommt in der deutschen Sprache am seltensten vor.
Auf der Seite 99 stellen wir in einer Tabelle die Reihenfolge der einzelnen Buchstaben nach ihrer Häufigkeit zusammen. Bevor ihr umblättert, machen wir noch ein Experiment: Schreibt einmal diese Reihenfolge auf, wie sie eurer Meinung nach aussieht. Der Vergleich mit der tatsächlichen Reihenfolge ist dann sehr interessant.
In unserer Tabelle verzichten wir auf die Buchstaben ä, ö,

ü und ß, denn sie lassen sich ja durch die Zusammenstellungen ae, oe, ue und sz ausdrücken. Dafür beziehen wir etwas anderes ein, und zwar den freien Platz, der zwischen zwei Wörtern steht. Symbolisch schreiben wir dafür einen Strich –. Auch diese freien Stellen treten ja mit einer bestimmten Häufigkeit auf. Wo ist eurer Meinung nach der Strich einzuordnen?
Jetzt also nicht weiterlesen, sondern Papier und Bleistift nehmen und die vermutliche Reihenfolge der Buchstaben notieren! Kein Buchstabe darf vergessen werden. Als Hilfe der Hinweis: Auf eurem Zettel müssen 26 Buchstaben und der Strich, insgesamt also 27 Zeichen stehen.

Seid ihr nach dem Vergleich mit eurem Ergebnis zufrieden? Die vollkommen richtige Reihenfolge hat bestimmt niemand gefunden, aber am Anfang und am Ende wird die Sache wohl doch so einigermaßen stimmen.
Durch bloße Überlegungen läßt sich die richtige Anordnung natürlich nicht ermitteln. Wie sind die Angaben in unserer Tabelle zustande gekommen?
Vor einer Antwort auf diese Frage ist noch zu klären, um welche Sprache es sich eigentlich handelt: nicht um die deutsche Sprache schlechthin, sondern um die deutsche Schriftsprache. Zur gesprochenen Sprache, mit der wir uns unterhalten, gibt es einige – wenn auch nur geringe – Unterschiede.
Um eine solche Tabelle zu erhalten, nehme man Goethes „Faust" oder Grimms Märchen oder den Roman von Anna Seghers „Das siebte Kreuz" oder „Die Aula" von Hermann Kant, am besten jedoch alle 4 Werke und noch ein paar weitere dazu, und dann beginnt das Zählen, Buch-

Rang	Buchstabe	Relative Häufigkeit
1.	–	0,1442
2.	e	0,1440
3.	n	0,0865
4.	s	0,0646
5.	i	0,0628
6.	r	0,0622
7.	a	0,0594
8.	d	0,0546
9.	t	0,0536
10.	u	0,0422
11.	h	0,0361
12.	l	0,0345
13.	c	0,0255
14.	g	0,0236
15.	o	0,0211
16.	m	0,0172
17.	b	0,0138
18.	w	0,0113
19.	z	0,0092
20.	v	0,0079
21.	f	0,0078
22.	k	0,0071
23.	p	0,0067
24.	j	0,0028
25.	x	0,0008
26.	q	0,0005
27.	y	0,0000

stabe für Buchstabe einschließlich der freien Plätze zwischen den Wörtern. Man erhält so die Gesamtzahl aller vorkommenden Buchstaben und freien Plätze und die Zahlen für jeden einzelnen Buchstaben. Dann wird die Anzahl des Buchstabens e durch die Gesamtzahl dividiert, und schon ist die Häufigkeit des e bekannt. Eine ganz einfache Sache also, nur etwas zeitaufwendig. Vielleicht braucht man einige Wochen dazu. Schneller und auch genauer (ohne sich zu verzählen) gehen diese Ermittlungen, wenn das Abzählen nicht ein Mensch, sondern ein Computer vornimmt.

Mit einem Elektronenrechner wurde diese Tabelle auch ermittelt.

Was zeigt uns die aufgeführte Reihenfolge? An der Spitze und damit noch vor dem e rangiert der Strich –, die freie Stelle zwischen zwei Wörtern. Meist wird in der deutschen Sprache also gar nichts gesagt, am häufigsten kommen Pausen zwischen zwei Wörtern vor. Der Unterschied zum e ist allerdings nur gering.

Für die Häufigkeit des y am Schluß der Aufzählung steht die Häufigkeit 0,0000. Das heißt natürlich nicht, daß das y überhaupt nicht existiert. Die Werte der Häufigkeiten wurden auf 4 Stellen genau nach dem Komma gerundet. Für das y lag die Häufigkeit vielleicht bei 0,00003. Will man sich auf 4 Stellen beschränken, bleibt 0,0000 übrig.

Diese Zahl besagt: Sucht man in einem Text nach einem y, so muß er weit mehr als 10000 Buchstaben umfassen. Natürlich darf dieser Text nicht aus einem Mathematik-Lehrbuch stammen, in dem auf jeder Seite ein paarmal Ausdrücke von der Art $x + y = 10$ vorkommen. Hier steht ja y nicht als Buchstabe, sondern als Symbol einer

allgemeinen Zahl, und das ist von unserer Untersuchung ausgeschlossen.
Die Häufigkeit von 0,1440 für das e besagt, daß es unter 10000 Buchstaben durchschnittlich 1440 mal auftritt.
Für die Angaben in der Tabelle ist auch folgende Lesart möglich: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Buchstaben e beträgt p = 0,1440 (oder 14,40%). Ob ein Mensch wochenlang zählt oder ob das ein Computer in ganz kurzer Zeit erledigt, das ist vollkommen gleichgültig. Das Aufstellen einer solchen Tabelle liefert ein ganz typisches Beispiel für eine statistisch-rechnerische Aufgabe als Vorstufe oder als Beginn für das aktive Eindringen der Mathematik in neue Wissensgebiete. Es begann mit der Statistik, dieser Satz steht auch am Anfang des Bündnisses von Sprachwissenschaft und Mathematik.

– Der Hieroglyphen-Detektiv –

Die Tabelle der Häufigkeiten für die Buchstaben mag interessant erscheinen, doch was kann man mit ihr anfangen? Diese Frage ist berechtigt.
Wir basteln uns jetzt einen mathematischen Dichter. (Zumindest stellen wir uns vor, wie das zu machen ist.) Dazu fertigen wir 10000 gleichgroße Kärtchen an (schon das ist uns zuviel Arbeit, deshalb beschränken wir uns auf ein Gedankenexperiment) und beschriften sie; 1440 Kärtchen mit e, 865 Stück mit n, 646 Exemplare mit s usw. 1442 Karten bleiben leer. Nach dem Mischen ziehen wir – ohne Hinsehen – Kärtchen aus dem großen Berg heraus. So kann das Resultat aussehen: EI – EMNK – INR – FUETEDBG – E – LAI – Das Ergebnis einer mathematischen Dichtung!

Da die Sache mit den Kärtchen viel Arbeit erfordert, überträgt man eine solche Aufgabe einem Computer. Unser elektronischer Poet kannte in diesem Falle die Häufigkeit der Buchstaben. Was fehlte ihm aber noch?
In jeder Sprache gelten bestimmte Beziehungen zwischen benachbarten Buchstaben. Im Deutschen treten beispielsweise die Kombinationen ER und IS sehr häufig auf, die Aufeinanderfolge von QQ oder QX gibt es hingegen praktisch nicht.
Für den Übergang von einem Buchstaben zu einem anderen lassen sich Wahrscheinlichkeiten angeben. Die entsprechende Übergangsmatrix enthält 27 Zeilen und 27 Spalten. Rüsten wir unseren automatischen Dichter damit aus, so fabriziert er eine Markowsche Kette 1. Ordnung der deutschen Sprache. Zum Beispiel:
ANORE – SOMELE – ES – DORFE – RASIN –
Eine gewisse Ähnlichkeit mit unserer Sprache ist zweifelsohne schon erkennbar.
Die Übereinstimmung mit sinnvollen Worten und sogar Sätzen tritt nun immer deutlicher hervor, je mehr Buchstaben in ihrer Abhängigkeit voneinander betrachtet werden. Erfolgt der Übergang zu einem Buchstaben unter Berücksichtigung der drei vorangehenden Schriftzeichen, so ergibt das ein Modell der deutschen Sprache in der Gestalt einer Markowschen Kette 3. Ordnung. Der Satz am Anfang des Kapitels entstand auf diese Weise:
WIR – UEBERDIES – UND – HABEN – ROLOC –
Einen Sinn kann man noch nicht erkennen. Zunächst aber liest man den Satz doch zweimal, denn die Ähnlichkeit mit einer sinnvollen Aussage ist schon beträchtlich groß.
Markowsche Ketten noch höherer Ordnung liefern dann

vollkommen sinnvolle Sätze. Das bedeutet: Mit Hilfe der Markowschen Ketten läßt sich ein mathematisches Modell der Sprache aufstellen. Gesetze der Sprache werden mathematisch beschrieben.

Natürlich muß man jetzt die Frage stellen: Welchen Sinn sollen derartige Dinge überhaupt haben? Wollen wir etwa einen Computer mit diesen statistischen Angaben und mit den Gesetzen der Markowschen Ketten füttern und ihn beauftragen, uns solche Sätze zu liefern, vielleicht sogar in einem Umfang, daß ein ganzer Roman daraus wird?

Keinesfalls! Das Schreiben der Romane überlassen wir unseren Schriftstellern. Sie verstehen das noch tausendmal besser als jeder Automat. Ein Computer bringt keine Sätze zustande, die eine Handlung mit Poesie und Gefühl beschreiben; er berücksichtigt lediglich – und das aber ganz einwandfrei – die Struktur unserer Sprache. Er stützt sich auf Gesetzmäßigkeiten, die mathematisch exakt faßbar sind, und eine ganz bedeutsame Rolle spielt dabei das Modell der deutschen Sprache, das sich mit Hilfe der Markowschen Ketten aufstellen läßt.

Auf das Modell kommt es an. In der Sprachwissenschaft entstand ein Teilgebiet, das sich mit solchen Fragen befaßt: die statistische Linguistik. Linguistik ist der aus dem Lateinischen abgeleitete Begriff für Sprachwissenschaft.

Häufigkeitsuntersuchungen betrachteten wir am Beispiel der Buchstaben. Auf ähnliche Weise kann man die Häufigkeiten der verschiedenen Wörter der deutschen Sprache ermitteln. Aber hierbei ergibt sich ein unvergleichlich großer Arbeitsaufwand. Den 26 Buchstaben stehen jetzt vergleichsweise etwa 100 000 verschiedene Wörter gegen-

über. Die Häufigkeitstabelle nimmt unvorstellbare Ausmaße an. Exakte Ermittlungen sind nur möglich, wenn dabei ein Computer hilft.
Durch solche Untersuchungen kann man beispielsweise feststellen, welche 500 Wörter in der deutschen Sprache am häufigsten vorkommen. Sie bilden ein sogenanntes Wortschatzminimum, das ein Ausländer im Sprachunterricht zuerst lernt. Ob in dem Minimum die Wortanzahl bei 500 oder noch darunter beziehungsweise höher liegt, hängt vom Zweck des Erlernens der Sprache ab. Ein Tourist kommt mit einem geringeren Wortschatz aus als ein Wissenschaftler, der Fachtexte in deutscher Sprache lesen will. Mit Hilfe von Mathematik und Statistik lassen sich somit für jeden speziellen Sprachunterricht konkrete und genaue Angaben berechnen.
Ein anderes Beispiel: In einem alten Archiv entdeckten Wissenschaftler eine bisher unbekannte Erzählung. Wer hat sie geschrieben? Schriftsteller A oder Schriftsteller B? Einer von beiden war es; darauf deuten Stil und Anlage der Geschichte hin. A und B leben seit langem nicht mehr. Wie stellt man die Autorschaft fest?
Jeder Schriftsteller hat bestimmte Eigenarten. Manche Wörter benützt er beispielsweise häufiger als ein anderer Verfasser. Mit Statistik und Mathematik lassen sich die typischen Besonderheiten in den Werken eines Autors ermitteln. Entsprechende Vergleiche klären mit ziemlicher Sicherheit, wer bei strittigen Autorschaften als Urheber in Frage kommt.
Mit ähnlichen Methoden erzielten Sprachforscher sogar schon Erfolge, wenn es um die Entzifferung von unbekannten Sprachen ging. Lange Zeit rätselten die Wissen-

schaftler beispielsweise um die Schrift der Maya, einer Überlieferung jenes Volkes, das vor Jahrhunderten auf dem heutigen Gebiet von Mexiko eine hochstehende Kultur entwickelte. Die Hieroglyphen der Maya widersetzten sich jeder Deutung durch die Sprachforscher. 1961 gelang es dem sowjetischen Gelehrten Sergej Petrowitsch Sobolew mit Hilfe eines Computers etwas Licht in das Dunkel der Mayahandschriften zu bringen.

– Was ist ein Computer? –

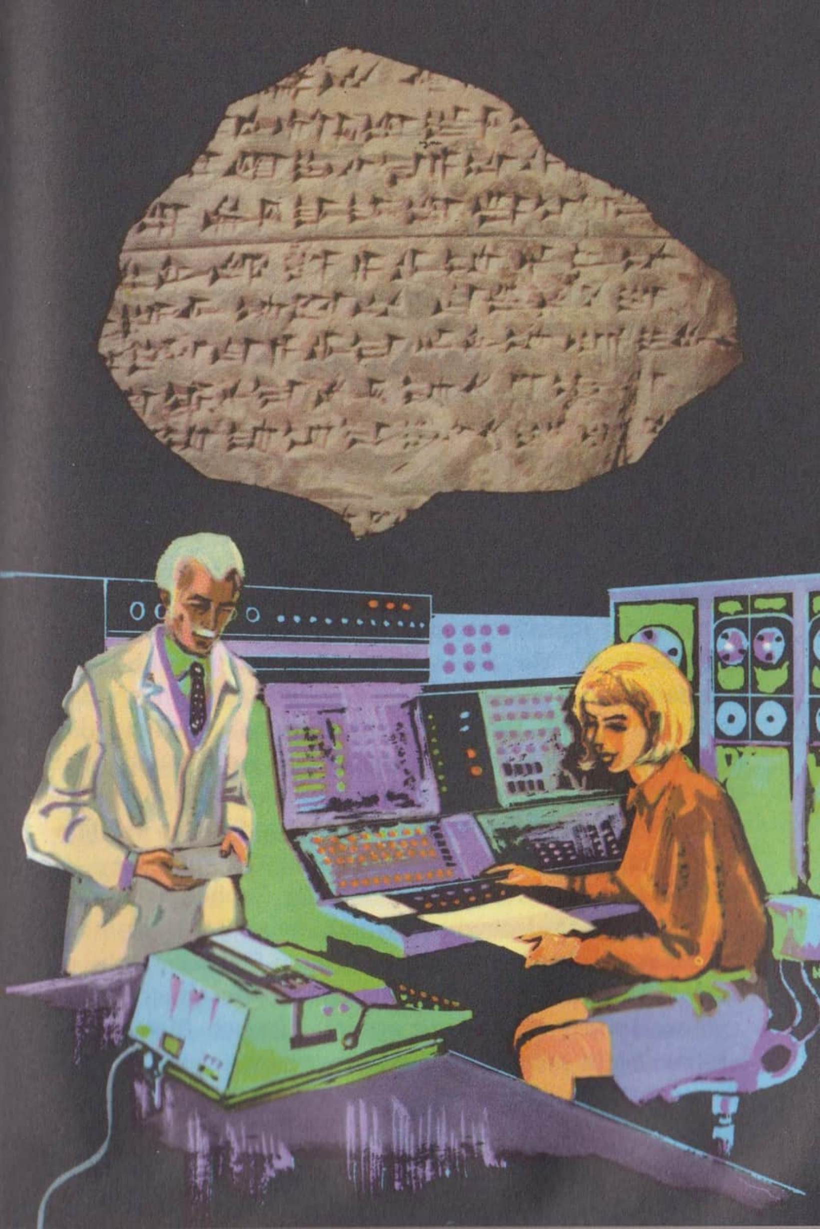
Die Beziehungen zwischen Sprachwissenschaft und Mathematik sind in mancherlei Hinsicht recht aufschlußreich für das Eindringen der Mathematik in eine andere, in eine „nichtmathematische" Wissenschaft.

Es beginnt mit statistischen Arbeiten. Buchstaben werden gezählt, Häufigkeiten berechnet, Vergleiche angestellt. Zahlen also sind es, die zu neuen, zu weiteren Erkenntnissen führen.

Durch die Analyse des Zahlenmaterials gelangt man zu bisher unbekannten Gesetzmäßigkeiten.

Für diesen Zweck wird mit den Zahlen gerechnet, zuerst nur mit ganz einfachen Operationen: Addition, Division, Auf- und Abrunden usw. Als unangenehm erweist sich allerdings der große Zeitaufwand, denn es handelt sich meist um Riesenkolonnen von Zahlen, die zu verarbeiten sind.

Schon sehr zeitig überlegten Mathematiker, wie sich solche Arbeiten erleichtern lassen. Bereits im Jahre 1642 baute der Franzose Blaise Pascal (1623–1662) eine erste mechanische Rechenmaschine. Mit ihr konnte man sechsstellige Zahlen addieren. Der Erfinder, damals erst 18 Jahre



alt, gelangte später noch zu großem Ruhm durch weitere bedeutende Leistungen auf mathematischem Gebiet.
Nur drei Jahrzehnte später konstruierte der deutsche Mathematiker und Philosoph Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) eine Rechenmaschine für das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren.
Die Geschichte der Rechenmaschine füllt ein ganzes Buch. Immer erstaunlicher waren die genialen Einfälle kluger Erfinder. Der Amerikaner Hermann Hollerith (1860 bis 1929) verwendete in der von ihm entwickelten Maschine erstmals gelochte Karten. Die Anordnung der Löcher auf jeder Karte entsprach den statistischen Angaben, die für jeden Bürger der USA im Rahmen einer Volkszählung zwischen 1880 und 1882 ermittelt wurden, so daß eine Maschine auf mechanische Weise in der Lage war, beispielsweise alle Menschen gleichen Alters, gleichen Berufs oder irgendeiner anderen gleichen Eigenheit herauszusuchen. Mit den umständlichen, zeitraubenden Handarbeiten zur Auswertung von Volkszählungen war es damit vorbei. Die „Hollerithmaschine" erledigte das in viel kürzerer Zeit. Diese Rechenanlage wurde auch unter dem Namen „Lochkartenmaschine" und „Statistikmaschine" bekannt: Statistische Zahlen und Daten wertete man fortan meist maschinell aus.
Seit 1930 nahm die Entwicklung der Rechenautomaten einen steilen Aufschwung. Durch neue Bauelemente – zuerst elektromechanische Relais, dann Elektronenröhren, später Transistoren – stieg die Rechengeschwindigkeit enorm an und die Bedienung vereinfachte sich. Man sprach deshalb nicht mehr von Rechenmaschinen, sondern von Rechenautomaten.

Die Begriffe Elektronenrechner oder elektronischer Rechenautomat entstanden im Zusammenhang mit dem Einsatz von Elektronenröhren als Bauelemente. Diese Anlagen waren allerdings recht störanfällig, da die Röhren nur eine begrenzte Lebensdauer haben. Die Zuverlässigkeit verbesserte sich mit dem Übergang zu den Transistoren. Außerdem wurden dadurch auch die Ausmaße der Elektronenrechner bedeutend kleiner.
In dieser Richtung ging die Entwicklung weiter. Neue Techniken entstanden, und für sie bürgerte sich der Sammelbegriff Mikroelektronik ein. Dieser Name deutete auf noch kleinere Abmessungen hin. Wichtiger als diese Größenverhältnisse ist jedoch die weiter gestiegene Zuverlässigkeit solcher Bauelemente und der aus ihnen konstruierten Elektronenrechner.
Ein viel benutztes Wort heißt Computer. Dieser Begriff stammt aus der englischen Sprache und bedeutet nichts anderes als „Rechner". Die Aufgaben, die ihnen der Mensch überträgt, lassen sich – vereinfacht dargestellt – in zwei Gruppen einteilen.
1. Geht es darum, große Mengen von Zahlen und Daten zu bearbeiten, zu ordnen, miteinander zu vergleichen, so braucht der Computer ein gutes Gedächtnis. In der Fachsprache: einen großen Speicher.
Die mathematischen Operationen bei solchen Aufgaben sind meist recht einfach, häufig werden nur Additionen und Subtraktionen gefordert. Es genügt also ein einfaches Rechenwerk.
Computer mit großem Speicher, einfachem Rechenwerk und elektronischen Bauelementen bezeichnen wir als elektronische Datenverarbeitungsanlagen (EDVA).

Die Auswertung von Volkszählungen, die Ermittlung aussagekräftiger statistischer Zahlen (wie zum Beispiel in unseren Tabellen auf den Seiten 28, 30 und 53) aus Tausenden oder sogar Millionen von Einzelwerten, die Bewältigung statistischer Aufgaben in vielen Bereichen und die Unterstützung der Sprachwissenschaftler bei der Aufstellung mathematischer Modelle der Sprache und bei der Anwendung dieser Modelle sind einige Beispiele für Einsatzmöglichkeiten von Datenverarbeitungsanlagen. Unsere Aufzählung stellt nur eine ganz kleine Auswahl dar.

2. In Wissenschaft und Technik gibt es viele Aufgaben, bei denen mit wenigen Zahlen äußerst komplizierte Berechnungen angestellt werden. Die für solche Zwecke eingesetzten Anlagen benötigen nur einen kleinen Speicher, dafür aber ein den Aufgaben entsprechendes kompliziertes Rechenwerk. Speicher und Rechenwerk bestehen natürlich auch hier aus elektronischen Bauelementen, und solche Computer heißen elektronische Rechenautomaten.
Wenn im Rahmen der Lösung einer Aufgabe Multiplizieren, Quadrieren, Subtrahieren, Radizieren, Dividieren und noch eine Anzahl weiterer und schwierigerer Rechenoperationen auftreten, dann ist das eine Sache für einen elektronischen Rechenautomaten.

Das ist aber, wie schon gesagt, eine sehr vereinfachte Darstellung. Schon in der Vergangenheit führten elektronische Rechenautomaten unter bestimmten Bedingungen auch Datenverarbeitungen aus, während EDVA auch für wissenschaftliche und technische Berechnungen genutzt wurden. Jetzt geht die Entwicklung dahin, daß sich die neuen Computer für beide Aufgaben eignen.

Was ist das auffallendste Merkmal der Computer? Zweifelsohne ihre enorme Rechengeschwindigkeit. Eine Million Rechenoperationen pro Sekunde gilt schon nicht mehr als eine Besonderheit, und die automatischen Kontrollen garantieren, daß das Ergebnis stimmt – wenn das vorgegebene Rechenprogramm in Ordnung war.
Mathematiker, natürlich unterstützt von Physikern, Technikern, Ingenieuren und anderen Wissenschaftlern, entwickelten diese phantastischen Automaten. Die Elektronenrechner sind gewissermaßen Symbole für den hohen Entwicklungsstand in der Mathematik. In zweierlei Hinsicht! Um die Computer zu konstruieren, waren große Fortschritte in der Mathematik erforderlich. Ihr komplizierter Aufbau wurde ja genau berechnet. Und andererseits helfen diese Automaten bei der Lösung der aufwendigsten und schwierigsten Probleme der Mathematik.
Unsere Beispiele zur Sprachwissenschaft zeigten, was die Mathematik in einem anderen Gebiet leistet. Am Anfang stand die einfachste mathematische Operation: das Zählen. Aus Berechnungen folgten erste Gesetze, und einen Höhepunkt bildeten die mathematischen Methoden und Modelle. Sie unterstützten beispielsweise den Sprachunterricht und klärten strittige Fragen der Forschung. Bei allen Aufgaben wirkten Computer mit, aber es zeigte sich, daß diese Automaten tatsächlich nichts weiter als Gehilfen waren. Die höchste Vollendung im Gebrauch der Sprache bleibt ihnen verschlossen. Obwohl sie sogar Sätze bildeten, sind sie zu phantasievollen Werken der Dichtkunst nicht in der Lage. Diese Grenze zur menschlichen Leistung können sie nicht überschreiten. Eine ähnliche Situation gibt es auch auf dem Gebiet der Medizin, dem wir uns jetzt zuwenden.

– Der Gesundheitsautomat –

Für das Eindringen der Mathematik in die Medizin gilt wiederum der Satz: Es begann mit der Statistik. Diese Entwicklung setzte schon sehr zeitig ein, verlief aber zunächst außerordentlich langsam. Schon im 16. Jahrhundert gab es erste einfachste Versuche, mit quantitativen Methoden zu arbeiten. Das klingt reichlich hochtrabend, denn weiter als bis zu Messungen und Wägungen des menschlichen Körpers ging man noch nicht. Wir erwähnten bereits die erstmals von Johann Peter Süßmilch im 18. Jahrhundert untersuchte Statistik der Todesursachen. Über lange Zeiten hinweg blieb es bei solchen vereinzelten Ansätzen, die medizinische Wissenschaft durch zahlenmäßig exakt fundierte Aussagen zu unterstützen.

Das heute bekannteste Verfahren zur Ermittlung statistischer Zahlen auf medizinischem Gebiet ist die Fiebermessung. Fühlt sich ein Mensch nicht wohl, vermutet er, daß sich erste Vorboten einer Krankheit ankündigen, dann greift er zum Fieberthermometer. Jedermann weiß, wie man die gemessene Körpertemperatur deutet. Liegt sie über 37 °C, dann ist mit dem Organismus irgend etwas nicht in Ordnung. Eine Erkrankung gilt im allgemeinen als um so gefährlicher, je höher die Quecksilbersäule steigt. Zur Überwachung eines Krankheitsverlaufes wird eine Fieberstatistik geführt: Eine Tabelle enthält die Meßergebnisse vom Morgen, vom Mittag und vom Abend.

Diese Praxis ist ein ganz wichtiges und doch sehr einfaches statistisches Verfahren in der Medizin. Um so erstaunlicher erscheint daher die Tatsache, daß die Fiebermessung erst im Jahre 1851 eingeführt wurde.

Im Mai 1859 hielt in Berlin ein Professor von der Charité einen Vortrag, es war Rudolf Virchow (1821–1902). Er gehört zu den bedeutendsten Ärzten seiner Zeit. Durch die Anwendung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse schuf er für die medizinischen Wissenschaften festere Grundlagen. Er erkannte auch den engen Zusammenhang zwischen der Krankheit und der sozialen Lage eines Patienten. Dadurch erwarb er sich bleibende Verdienste.

In seinem Vortrag sagte Virchow, daß das Wettergeschehen exakt verfolgt wird, daß es die Wissenschaftler peinlich genau mit Zahl und Maß registrieren. Nichts Vergleichbares aber, so setzte er fort, gibt es in der Medizin. Das Krankheitsgeschehen eines einzelnen Menschen beziehungsweise ganzer Bevölkerungsgruppen wird mit viel geringerer Genauigkeit als das Wetter beobachtet. Als unbedingt notwendig, erklärte Virchow, erweist sich die Einführung exakter Statistiken in der Medizin. Nur so lassen sich die krankheitsverursachenden Faktoren genau ermitteln.

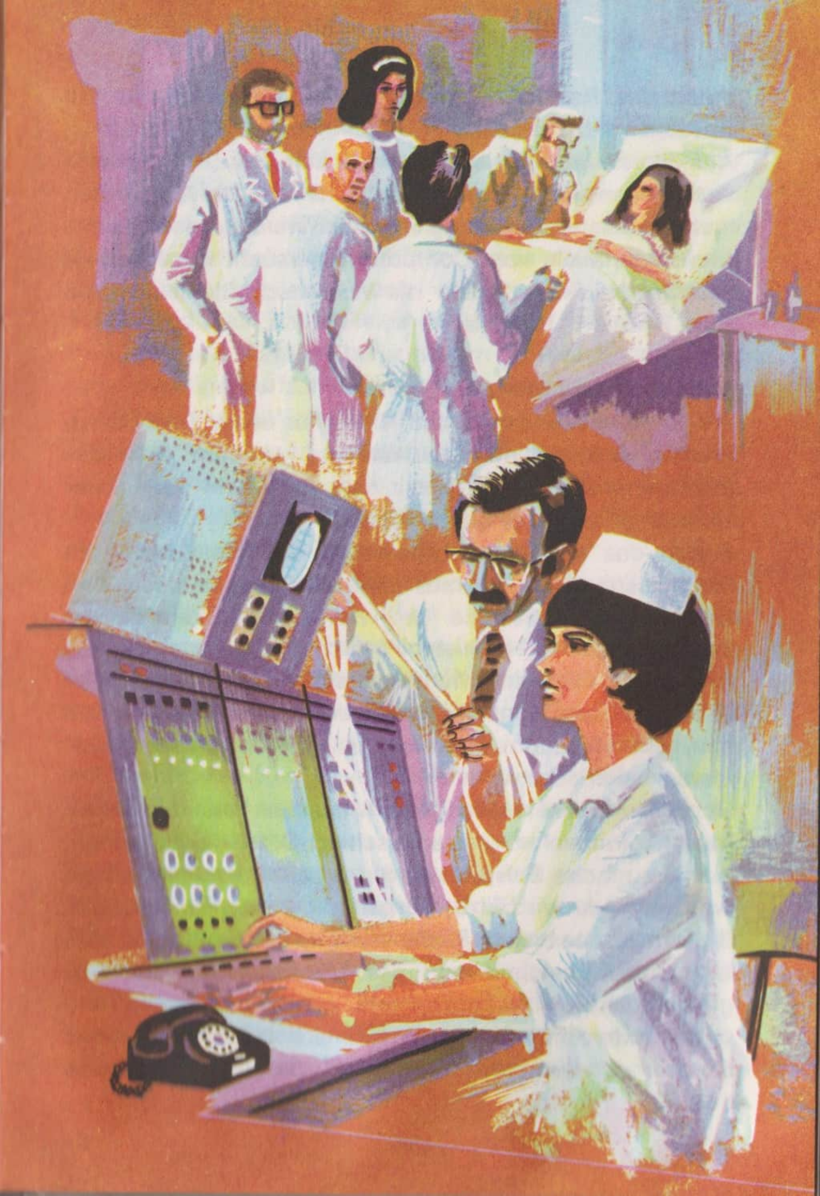
Im Verlaufe der letzten 100 Jahre breitete sich in der Medizin die Arbeit mit statistischen Methoden immer weiter aus. Erkenntnisse aus der Mathematik wurden herangezogen, um die Meßwerte zu aussagekräftigen Feststellungen und Gesetzen zu verarbeiten. Mathematisch-statistische Verfahren lassen sich heute aus der Medizin nicht mehr wegdenken.

Über das weitere Eindringen der Mathematik in diesen Bereich der Wissenschaft gab es in jüngster Zeit phantastisch klingende Meldungen. „Sprechstunde beim Computer", „Werden Automaten den Arzt ersetzen?", „Dr. med. Computer: Der nächste bitte!", „Mathematik heilt Krankheiten", „Computer am Krankenbett", „Gesundheit aus

dem Automaten", „Rezepte vom Elektronengehirn" – so und ähnlich lauteten die Schlagzeilen der Zeitungen.
Was verbirgt sich hinter solchen Meldungen? Wie kann die Mathematik bei der Heilung von Krankheiten helfen? Und welche Rolle spielen dabei die Computer?
Ungefähr 40000 verschiedene Krankheiten gibt es, von denen Menschen befallen werden können. Ein großer Teil davon tritt natürlich selten auf. Aber immerhin bleiben etwa 800 Leiden übrig, die immer und immer wieder von den Ärzten behandelt werden.
Vorbeugen ist besser als heilen. Nach dieser Weisheit lebt jeder vernünftige Mensch, um von Krankheiten verschont zu bleiben. Aber das gibt noch keine hundertprozentige Sicherheit für die Gesundheit. Deuten sich Anzeichen einer Krankheit an, dann führt der Weg zum Arzt. Seine erste Aufgabe heißt Diagnose: feststellen, an welcher Krankheit der Patient leidet.
Der Arzt fragt nach den Beschwerden, läßt sich erzählen, welche Körperteile von Schmerzen befallen sind, fühlt den Puls, greift eventuell zum Stethoskop, um den Brustkorb „abzuhören", schaut möglicherweise in Mund und Rachenraum, entnimmt gegebenenfalls aus Ohrläppchen oder Armvene eine Blutprobe, um diese näher zu untersuchen, mißt Blutdruck und Körpertemperatur und so weiter. Die Aufzählung der verschiedenen Untersuchungsmöglichkeiten läßt sich noch fortsetzen. Wir nannten nur einige wenige und dazu ganz einfache Beispiele.
Für die Diagnose trifft der Arzt zwei Arten von Entscheidungen. Erstens: Welche Untersuchungen stelle ich an? Zweitens: Welche Krankheit liegt aufgrund der Ergebnisse vor?

Danach folgt die Therapie. Darunter versteht man alle Maßnahmen zur Heilung der festgestellten Krankheit. Auch hier gibt es eine riesengroße Palette von Möglichkeiten. Der Arzt entscheidet, wie die betreffende Krankheit bei diesem Patienten am wirkungsvollsten bekämpft wird. Aus der Vielfalt der Maßnahmen zur Therapie nennen wir wiederum nur einige wenige Beispiele: Verordnung bestimmter Medikamente, Bäder, Massagen, Bettruhe, Schwitzpackungen, Umschläge, Spritzen, stationäre Behandlung im Krankenhaus, Operation und so weiter. Der Arzt berücksichtigt natürlich auch den allgemeinen Zustand des Erkrankten. Ein Medikament, das dem einen Menschen hilft, kann beispielsweise einem anderen bei gleicher Krankheit nicht verordnet werden, weil er vielleicht außerdem noch magenleidend ist und deshalb diese Arznei nicht verträgt.
Das also ist die Lage: 40000 verschiedene Krankheiten, davon 800 häufig auftretend. Jedes Leiden führt zu mehreren Veränderungen in den Funktionen von Organen und Körperteilen, und jede Krankheit wird auf andere Weise behandelt. Das sind insgesamt viele Tausende Zusammenhänge, die kein Arzt der Welt in diesem Umfang alle kennen und beherrschen kann. Aus diesem Grunde kommt es ab und zu vor, daß ein Arzt eine falsche Diagnose stellt und einen Patienten auf eine Krankheit hin behandelt, an der dieser gar nicht leidet. Mit manchen seltenen Krankheiten rechnet man ganz einfach nicht.
„Irren ist menschlich", sagte schon Seneca, ein Philosoph aus dem alten Rom. Kein Mensch ist sicher vor der Gefahr, nicht doch einmal eine falsche Entscheidung zu treffen. Irrtümer bei der Behandlung kranker Menschen aber

wiegen schwer, denn sie können sich gefährlich auswirken.
Wie werden solche Irrtümer vermieden?
Wird ein schwerkranker Mensch in eine Klinik eingeliefert, bemüht sich ein Kollektiv von Ärzten um ihn. Die Gefahr der falschen Entscheidung, die beim einzelnen besteht, wird durch das Wissen des gesamten Kollektivs herabgesetzt.
Aber nicht für jeden Kranken läßt sich ein Ärztekollektiv bereitstellen. In der Sprechstunde sitzt der Patient nur einem Arzt gegenüber. Um in allen Fällen rasch und ohne Fehler die Diagnose zu stellen, schlugen Wissenschaftler ein neues Bündnis zwischen Medizin und Mathematik vor, das weit über das bisherige Zusammenwirken hinausgeht.
„Alle notwendigen Angaben zu den Krankheiten speichern wir in einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage", sagten sie, „und dieser Computer stellt dann die Diagnose."
So geht die Diagnose dann vor sich: Viele Informationen und statistische Daten, unter anderem über Alter, Geschlecht und frühere Krankheiten des Patienten, über seine jetzigen Beschwerden, über Laborbefunde und Meßwerte zum gegenwärtigen Zustand und über anderes mehr werden in den Computer eingegeben. Der Rechner vergleicht diese Angaben mit seinem gespeicherten Wissen und ermittelt aus der Kombination der ihm zugeleiteten Daten die Krankheit, an welcher der Patient leidet.
Kann sich der Computer nicht sofort entscheiden, weil vielleicht bestimmte Angaben fehlen, dann fordert er diese noch an. Der Automat tickt beispielsweise: . . . erforderlich ist chemische Blutuntersuchung nach Gesamteiweiß und Reststickstoff . . .
Im Labor wird entsprechend untersucht, der Computer



erhält das Resultat, und unmittelbar darauf gibt er die Aussagen zur Diagnose.
Auf alle Fälle klingt das phantastisch. Wird irgendwann vielleicht sogar die Situation eintreten, daß die Ärzte durch mathematische Maschinen ersetzt werden, daß kranke Menschen allein vom Computer untersucht werden? Auf eine solche Frage geben die Wissenschaftler eine ganz klare Antwort: Niemals.

– Ein Professor und sein Gehilfe –

Ein kranker Mensch sucht Hilfe. Für seine Gesundung braucht er nicht nur Medikamente, sondern auch das vertrauensvolle Gespräch mit dem Arzt. Kein seelenloser Computer kann das übernehmen.
Schon das einfachste Lebewesen ist immer noch ein komplizierterer Organismus als die leistungsfähigste und erstaunlichste Maschine. Um wieviel höher steht da erst der Mensch über dem geistvoll erdachten Computer, erdacht zudem noch von den Menschen selbst! Undenkbar ist es daher, daß ein Mensch – oder auch nur ein Bereich von ihm, seine Gesundheit – von einem mathematischen Automaten beherrscht wird.
Den Gesundheitszustand eines Menschen kann man durch Riesenkolonnen von statistischen Daten beschreiben. Einige einfache Beispiele sind uns schon bekannt, einige weitere fügen wir hinzu: Körpertemperatur, Pulsfrequenz, Blutdruck, chemische Zusammensetzung des Blutes, des Urins, des Speichels und des Magensaftes, Zahlenangaben zur Funktionstüchtigkeit der Sinnesorgane und vieles andere mehr. Aber ein Mensch läßt sich in seiner Gesamtheit eben nicht in einem System von Zahlen und

Formeln auflösen. Solche Zahlen helfen nur, seinen Zustand näher zu beschreiben, niemals jedoch reichen sie aus, um das Gesamtbild eines Menschen darzustellen.
Ein Arzt stützt sich bei der Behandlung eines Patienten keinesfalls nur auf Meßdaten und Laborbefunde. Er will den Kranken sehen und hören, einen Gesamteindruck gewinnen und dabei noch viele bedeutsame Einzelheiten und auch Kleinigkeiten registrieren, die meist nicht mit Maß und Zahl faßbar sind. Im Gespräch erhält der Arzt wichtige Aufschlüsse beispielsweise über Arbeits-, Familien- und Wohnverhältnisse des Patienten, über Faktoren, die dessen Lebensgewohnheiten und Gesundheitszustand positiv oder negativ beeinflussen, über Probleme, die zur Wiederherstellung der Gesundheit verändert werden müssen.
Kein Computer kann beispielsweise erfassen, daß sich das Magenleiden des Herrn A unter anderem auch durch den täglichen Ärger über einen Mitbewohner des gleichen Hauses verschlimmerte; vielleicht durch das rücksichtslose Verhalten von Herrn B, der in der Etage über Herrn A wohnt und der bis weit in die Nacht hinein solchen Lärm verursacht, daß Herr A an fortwährenden Schlafstörungen leidet. Das aber kann gerade die wesentliche Ursache für die Verschlimmerung eines Magenleidens sein. So nützt es Herrn A überhaupt nichts, wenn ihm auf Grund einer Computer-Diagnose eine weitere Rollkur verordnet wird.
Der Mensch lebt in der Gesellschaft und ist durch Tausende von sichtbaren und unsichtbaren Fäden mit ihr verbunden. Die vielschichtigen sozialen und gesellschaftlichen Bezüge jedes einzelnen Menschen, der erkrankt ist, lassen sich nicht durch einen mathematischen Automaten

erfassen. Nur der erfahrene Arzt kann die tieferen Ursachen einer Krankheit analysieren, und nur er als Mensch kann Wege zur Überwindung aufzeigen.
Und wie steht es mit den Irrtümern, die ein Arzt begehen kann? Ein Blick in die Vergangenheit zeigt, daß kranke Menschen häufiger auf dem Lande als in der Stadt falsch behandelt wurden. War ein praktischer Arzt in der Stadt seiner Sache nicht ganz sicher, weil seine technischen Möglichkeiten zur Untersuchung nicht ausreichten, wurde der Patient zum Facharzt überwiesen. Und von dort führte dann oft der Weg weiter zu einer Universitätsklinik, die über moderne Einrichtungen verfügte.
Vom Lande aus war dieses Vorgehen schon schwieriger. Vieles änderte sich zum Guten durch die Einrichtung der Landambulatorien, an denen ebenfalls Fachärzte arbeiten. Die weitere Umgestaltung des Gesundheitswesens führt dazu, daß die Unterschiede zwischen Stadt und Land immer mehr verschwinden, daß jeder Patient dort behandelt wird, wo ihm am besten und schnellsten geholfen werden kann, so daß Irrtümer praktisch kaum noch vorkommen.
Sind somit die Berichte über den Einsatz komplizierter mathematischer Automaten in der Medizin reine Phantasieprodukte?
Auch das stimmt wiederum nicht.
Elektronische Datenverarbeitungsanlagen, welche Diagnosen stellen, sind schon im Einsatz. Zum Beispiel in einem chirurgischen Zentrum der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Der bekannte sowjetische Mediziner, Leninpreisträger Prof. Dr. A. Wischnewski, leistete bahnbrechende Arbeiten auf diesem Gebiet. In der Welt

wurde seine Wirkungsstätte deshalb auch unter dem Namen „Wischnewski-Institut" bekannt.
In dieser berühmten Klinik werden unter anderem Menschen behandelt, die an angeborenen Herzfehlern oder an Leber- und Gallenkrankheiten leiden. Zur Vorbereitung der Operation benötigen die Ärzte eine sehr genaue Diagnose, und dabei hilft ihnen ein Computer. Dieser Rechner liefert aber keinesfalls die fertige Diagnose, der Prof. Dr. A. Wischnewski und seine Mitarbeiter blindlings vertrauen. Der mathematische Automat teilt vielmehr verschiedene Varianten von Krankheiten mit, die aufgrund der eingegebenen Daten möglich und wahrscheinlich sind. Durch weitere Untersuchungen des Patienten läßt sich die Auswahl der zuerst denkbaren Varianten verringern. Die endgültige Diagnose vor der Operation stellen dann die Ärzte. Menschen entscheiden letztendlich also über die Behandlung des Patienten. Der Diagnose-Computer hilft ihnen nur bei dieser Entscheidung. Durch sein Angebot von mehreren Varianten trägt er dazu bei, daß keine Möglichkeit außer acht gelassen wird.
Vergleicht man diese Arbeit in der Klinik von Professor Wischnewski mit der Vorstellung, daß ein kranker Mensch durch einen Rechenautomaten untersucht und vielleicht sogar nach seinen ausgeworfenen Vorschriften geheilt werden soll, so zeigt sich der gewaltige Unterschied. Die Computer werden die Menschen nicht beherrschen, sie sind und bleiben ihre Gehilfen. Durch die schnelle und präzise Arbeit unterstützen die Elektronenrechner die Menschen bei ihren Entscheidungen; sie helfen beim Finden der richtigen Entscheidung.

– Wir halten Rückschau –

In dem Buch „Das Einmaleins genügt nicht mehr" zeigten wir, wie die Mathematik in der Wirtschaft hilft. Das Anliegen dieses Buches ist es, darzustellen, daß man auch in vielen anderen Bereichen der Tätigkeit des Menschen nicht mehr ohne Mathematik auskommt.

Und noch ein anderes Ziel verfolgten wir. Es ging nicht nur darum zu erzählen, was man in einer anderen Wissenschaft oder in einem Gebiet aus der Praxis mit mathematischen Methoden anfangen kann. Wir lernten auch den Weg kennen, den die Mathematik häufig nimmt, wenn sie dort als Hilfsmittel benötigt wird. Von meist einfachen statistischen Aufgaben führt die Entwicklung zu mathematisch-statistischen Methoden, mit denen Gesetze und Zusammenhänge aufgedeckt werden, welche einen tieferen und genaueren Einblick in die betreffenden Gebiete ermöglichen.

Gute Beispiele für diesen Weg fanden wir in dem großen Bereich der Planung und Leitung für unseren Staat, für unsere sozialistische Gesellschaftsordnung. Volkszählungen und vielfältige andere statistische Ermittlungen schaffen eine solide Grundlage für wichtige Entscheidungen. Weitere Beispiele fanden wir in den Gebieten des Schulwesens, der Sprachwissenschaft und der Medizin, und wir warfen auch einen kurzen Blick auf Technik, Biologie und Meteorologie. Überall ging es darum, aus einer Vielzahl statistischer Zahlen Gesetzmäßigkeiten abzuleiten.

Häufig kann man nicht die Gesamtheit der Erscheinungen betrachten und beschränkt sich deshalb auf eine Stichprobe. Dabei begegnete uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung als das Gebiet der Mathematik, welches uns half, die Zuverlässigkeit einer solchen Stichprobe einzuschätzen. Das war nur ein Beispiel für die Anwendung dieses Gebietes, mit dem man noch viele andere interessante Dinge berechnen kann. Die Untersuchung der Gewinnchancen beim Zahlenlotto und bei ähnlichen Spielen zeigte es uns.

Etwas Arbeit und Zeit verlangten jene Aufgaben, die wir bis zum Endergebnis durchrechneten. Wir lernten dabei auch, daß man niemals voreilig eine Einzelerscheinung verallgemeinern darf, sondern daß eine endgültige Aussage oft erst nach sehr gründlichen mathematischen Untersuchungen möglich ist.

Diese konkreten Rechenaufgaben waren nur einfache Beispiele. Viele Probleme aus der Praxis sind noch wesentlich umfangreicher und lassen sich in einer vernünftigen Zeit nur mit einem Rechenautomaten bewältigen. Diese mathematischen Maschinen leisten erstaunliche Dinge, bleiben dabei aber immer nur Gehilfe des Menschen.

Sehr bekannt ist der Ausspruch von Karl Marx: „Eine Wissenschaft ist erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können."

Es geht also darum, in allen Gebieten der Wissenschaft solche Probleme, bei denen es notwendig und möglich ist, mit Hilfe der Mathematik zu lösen. Keinesfalls aber besteht das Ziel darin, die gesamte Wissenschaft in Zahlen und Formeln aufzulösen und alle wissenschaftliche Aussagen mathematisch auszudrücken.

Die Mathematik und die Computer bieten große Möglichkeiten – der sich die Menschen bedienen –, sie haben aber auch ihre Grenzen.

Ohne Mathematik kommt man in keinem Gebiet mehr aus. Um große Leistungen zu vollbringen, muß man überall über gute mathematische Kenntnisse verfügen. Nur so sieht man die enormen Möglichkeiten der Mathematik und auch die Grenzen ihrer Anwendung.

Lösungen zu den Aufgaben

Seite 44: Arbeitskräfte im Kaufhaus

In der Aufgabe waren folgende Meßwerte genannt:

Montag	x_1	$= 143$
Dienstag	x_2	$= 138$
Mittwoch	x_3	$= 147$
Donnerstag	x_4	$= 142$
Freitag	x_5	$= 136$
Sonnabend	x_6	$= 140$

Da alle Häufigkeiten den Wert 1 haben, berechnen wir den Mittelwert nach der Formel

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_6}{6}$$

und erhalten

$$\bar{x} = \frac{846}{6} = 141$$

für den durchschnittlichen Arbeitskräftebestand je Tag. Für das lineare Streuungsmaß schreiben wir eine kleine Tabelle auf:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
143	+2	2
138	−3	3
147	+6	6
142	+1	1
136	−5	5
140	−1	1
		Summe: 18

Das lineare Streuungsmaß beträgt

$$s = \frac{18}{6} = 3$$

Um durchschnittlich 3 Arbeitskräfte weicht der tägliche Arbeitskräftebestand vom Wochendurchschnitt $\bar{x} = 141$ ab.
In der betrachteten Woche waren durchschnittlich

$$141 : \frac{150}{100} = \frac{141}{1{,}5} = 94\ \%$$

vom gesamten Arbeitskräftebestand (150) anwesend.

Seite 80: *Ein Vergleich der Chancen*

Beim Sportfest-Toto „6 aus 49" gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

verschiedene Tipmöglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige beträgt

$$p_6 = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,000\,07$$

Die Chancen, im Sportfest-Toto einen Hauptgewinn zu erzielen, liegen etwa dreimal höher als beim Zahlenlotto, aber etwa elfmal niedriger als beim Lotto-Toto und gar rund 43mal niedriger als beim Tele-Lotto.

Inhalt

Printed in the German Democratic Republic
Издано в Германской Демократической Республике
Lizenz-Nr. 304–270/100/74–(40)
Gesamtherstellung: Interdruck, Leipzig
1. Auflage
LSV 7840
Best.-Nr. 629 293 4 (für Verlagsausgabe) – 629 455 0 (für BK-Ausgabe)
EVP 3,–

Wie kommt man zu Gesetzen in der Medizin? Wann sind Garantieversicherungen real? Welche Möglichkeiten gibt es für Gewinne im Lotto? Auf solche Fragen gibt die Mathematik im Bündnis mit der Statistik exakte Antwort, sie ebnet den Weg von der Zahl zum Gesetz.

EVP 3.– M