H 11328 F

alpha 1

Mathematik als Hobby

Januar/Februar 1994
DM 3,90
28. Jahrgang

Eine Zeitschrift des Reinhardt Becker Verlages in Velten

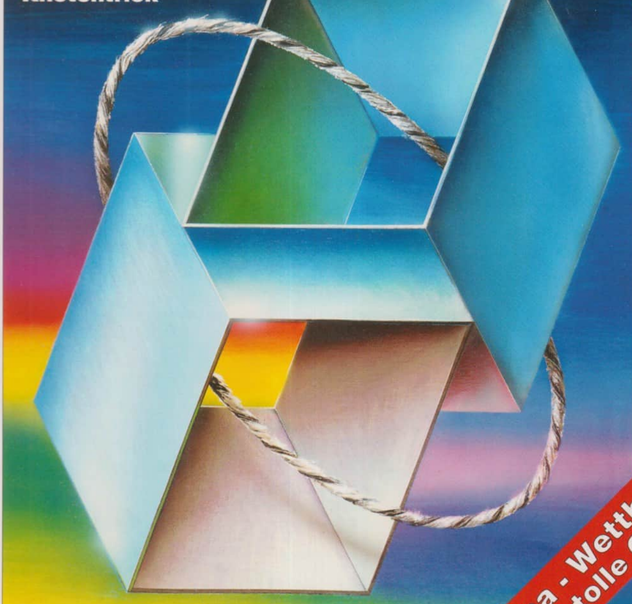
Schachlogik schlägt Computer

Hightech mit Platons Geometrie

Weltraummathematik im Fallturm

Mathematik am Südpol

Copperfields Knotentrick



alpha - Wettbewerb viele tolle Gewinne

Erläuterungen zur Heftrückseite

Die Doppelsonnenuhr mit zwei Schattenwerfern

Eine Sonnenuhr kann auf jeder ebenen oder gekrümmten Fläche und in beliebiger Ausrichtung angebracht werden. Mit der Einführung der Polstab-Sonnenuhr im 15. Jahrhundert war auch die Möglichkeit gegeben, verschiedene Sonnenuhrarten miteinander zu kombinieren. Am bekanntesten dürfte die Kombination von einer vertikalen Süduhr mit einer horizontalen Uhr sein, wobei ein durchgehender Schattenwerfer verwendet werden kann. Die besonders im 17. und 18. Jahrhundert gebräuchlichen Reisesonnenuhren (Klappsonnenuhren), bei denen der Schattenwerfer durch einen Faden dargestellt wird, wenden dieses Prinzip an.

Unsere Doppelsonnenuhr unterscheidet sich davon ein wenig, indem der Schattenwerfer nicht in der Mitte verläuft, sondern am Rande. Da bei einer vertikalen Süduhr der Schattenwerfer mit der Linie für 12 Uhr wahrer Ortszeit (WOZ) zusammenfällt, entsteht hier eine Zweiteilung des Zifferblattes in den Vor- und Nachmittag. Man sieht deutlich, wie die Stundenlinien der horizontalen Uhr mit denen der vertikalen zusammenlaufen. Diese „Harmonie der Stundenlinien" machen den Reiz dieser Sonnenuhr aus. Auch erkennt man, daß jeder Stundenlinie am Vormittag eine am Nachmittag entspricht, so z. B. zwischen 8 und 16, 7 und 17 Uhr usw. Um 12 Uhr wechseln sich die Schattenwerfer in ihrer Funktion ab.

Der Bau der Sonnenuhr ist denkbar einfach. Zuerst wird die Form ausgeschnitten. Danach werden die gestrichelten Linien geritzt, umgeklappt und entsprechend zusammengeklebt. Die Klebefalze bei den Schattenwerfern werden unter die horizontalen Zifferblätter geklebt.

Die Sonnenuhr wird in Nord-Süd-Richtung gestellt. Die Zeitanzeige erfolgt in wahrer Ortszeit (WOZ). Zu berücksichtigen ist, daß pro Längengrad die Uhr um 4 Minuten gegenüber der MEZ nachgeht. Im Osten sind die Ortszeitunterschiede mit 5 Minuten (Dresden) oder 16 Minuten (Erfurt) verhältnismäßig gering. Im Westen erreichen sie dagegen bereits 25 Minuten (Frankfurt/M.) und 36 Minuten (Aachen). Auf die Zeitgleichung, die ein Vor- oder Nachgehen der Sonnenuhren bis maximal 15 Minuten bewirkt, soll hier nicht eingegangen werden.

alpha **wünscht mit der Doppelsonnenuhr Freude und viel Sonnenschein!**

Arnold Zenkert

Editorial

Wieder daheim!

Die neue *alpha* mit neuem Gesicht und besserem Inhalt

Wir haben uns im vereinten Deutschland schon daran gewöhnt, daß Betriebe, Zeitschriften, Markenzeichen aus den neuen Bundesländern den Besitzer wechseln. Meist ist es ein Investor aus den alten Bundesländern, der da etwas „übernimmt". Daß es inzwischen gelegentlich auch schon anders geht, beweist die *alpha*: Ein Verlag im Bundesland Brandenburg hat sie dem Friedrich Verlag in Velber bei Hannover abgekauft. Damit kommt die *alpha* jetzt wieder aus jener Region des deutschen Sprachraums, in der Sie entwickelt wurde und zuerst erschienen war.

Als der Friedrich Verlag die *alpha* 1991 aus dem Pool der zum Verkauf stehenden DDR-Zeitschriften erwarb, da war das die Rettung für dieses Blatt. Doch der Versuch, die *alpha* mit westlichem Know-how zu einem auflagenstarken Blatt nicht nur für Mathe-Fans zu machen, zielte am Leserinteresse vorbei. Da halfen auch ein paar bunte Bilder und ein „ostgemäß" niedriger Verkaufspreis nicht. - Eine Mathezeitschrift liest eben nur, wer sich für Mathe interessiert; und reagiert sauer, wenn er sich unter Niveau behandelt fühlt.

Beinahe wäre so das Heft 6/93 das letzte geworden. Da lag der Gedanke nahe, es zur Abwechslung einmal mit Ost-know-how zu versuchen.

Aus den schlechten Erfahrungen der letzten Jahre wollen wir lernen, und meinen, daß wir gute Voraussetzungen haben, die *alpha* besser zu machen.

Mehr Einfluß soll im neuen Verlag die - seit den letzten Jahren weitgehend ehrenamtlich arbeitende - Redaktion in Leipzig haben. Auch der Rat des Redaktionskollegiums, das sich aus angesehenen und ideenreichen Matheexperten aus Ost und West zusammensetzt, wird wieder mehr gefragt sein. Vor allem aber wollen wir mehr Mathematik machen, diese schöne Wissenschaft in ihrem eigenen Glanz strahlen lassen. Ihre Anwendungen sollen zwar nicht zu kurz kommen, aber wir möchten sie nicht zu einer Hilfswissenschaft anderer Richtungen degradieren.

Außen hat die alpha ein neues Gesicht erhalten. Wir konnten dafür den Berliner Grafiker und Maler Norbert Schmidt gewinnen, der sich mit viel Enthusiasmus dieser Aufgabe widmet. Die Titelschlagzeilen sollen unsere Leser auf einen Blick über die "Knüller" im Heft informieren. Der feste Umschlag macht die *alpha* zu einem dauerhaften Nachschlagewerk und ermöglicht es, gelegentlich auch einmal etwas Geometrisches zum Ausschneiden in Farbe zu drucken.

Die Unterzeile „Mathematische Schülerzeitschrift" haben wir durch „Mathematik als Hobby" ersetzt. Damit tragen wir vor allem einer Realität Rechnung: Man braucht nur einen Blick auf die Seiten 30 und 31 dieses Heftes zu werfen, um zu sehen, daß unsere Leser nicht nur Schüler sein können. Es soll aber auch niemand mehr die *alpha* abbestellen, nur weil er keine Schülerzeitschrift mehr lesen möchte. Aus sicherer Quelle wissen wir, daß sogar viele Lehrer die *alpha* ganz gerne verwenden, weil sie dort eben etwas für ihre Schüler, für die konkrete Unterrichtsstunde finden.

Im Inhalt verzichten wir auf bunte Bilder zugunsten einer großzügigen Schwarzweißgestaltung, die dem Charakter einer Mathezeitschrift besser gerecht wird. Wenn es denn einmal für den Inhalt erforderlich ist, werden wir natürlich einige Farbseiten spendieren.

Die Matheolympiaden und andere Wettbewerbe werden künftig wieder mehr Aufmerksamkeit erhalten, bis hin zu Trainingshilfen für Teilnehmer.

Den Preis können wir leider nicht ganz halten; er war nie kostendeckend. Wir meinen aber, daß der Abopreis von 3,40 DM je Heft (jetzt *einschließlich* Versandkosten) ein gutes Angebot für unsere treuen Leser ist. Damit liegen wir immer noch recht niedrig in der Landschaft vergleichbarer Fachzeitschriften.

Wir haben uns viel vorgenommen und hoffen dabei auch auf den Rat unserer Leser: Jede (auch kritische) Zuschrift ist willkommen. Noch mehr würde es uns natürlich freuen, wenn unsere Leser rundum mit uns zufrieden sind.

Auf eine gute Zusammenarbeit!

Reinhardt Becker

Verleger

Leserbriefe

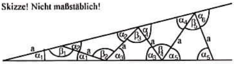
Diese Seite soll in Zukunft für Euch zur Verfügung stehen. Hier werden wir Eure Leserbriefe veröffentlichen, egal ob Ihr etwas zu ergänzen habt oder uns einfach toll findet. Dies ist unser erstes Heft, deshalb hoffen wir auf viele Leserbriefe, die wir dann an dieser Stelle im nächsten Heft veröffentlichen wollen. Außerdem freuen wir uns über jede Zusendung.

Der erste Brief bezieht sich auf den Artikel „Ein Gerät zur Winkeldreiteilung" in alpha 6/93 auf Seite 14. Herr Dieter Bauke aus Gera schreibt dazu:

Die n-Teilung eines Winkels

In der *alpha* 6/93, S.14 wurde ein Gerät zur Winkeldreiteilung vorgestellt. Die Geschichte solcher Geräte geht bis auf die griechische Antike zurück. Darauf aufbauend entwickelte der Mathematiker, Philosoph und Techniker Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708) während seines Pariser Studienaufenthaltes 1675 seinen Winkelteiler, wovon er in Briefen (und in der wissenschaftlichen Zeitschrift „Acta Eruditorum" 1695) seinen Freunden kund tat. Er konstruierte folgendes:

Skizze! Nicht maßstäblich!



Mit den Winkelsätzen ergibt sich:

1) $\alpha_1 = \alpha_1$
2) $2\alpha_1 = 180° - \beta_1$, $\beta_1 = 180° - \alpha_2$, also: $2\alpha_1 = \alpha_2$
3) $4\alpha_1 = 180° - \beta_2$, $\beta_2 = 180° - \alpha_1 - \alpha_2$, also: $3\alpha_1 = \alpha_3$
4) usw.

also: $n \cdot \alpha_1 = \alpha_n$ bzw. $\alpha_1 = \alpha_n : n$.

Mit so einem Gerät kann also theoretisch die n-Teilung eines beliebigen Winkels vollzogen werden. Praktisch brauchbar ist es aber nur für einen kleinen Winkelbereich. Größere Winkel müßten entsprechend zerlegt, dann geteilt und wieder zusammengesetzt werden, was rein konstruktiv keine Schwierigkeiten bereitet.

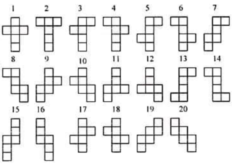
Die nächste Zuschrift ist ein Beitrag zum Nach- und Mitdenken. Er beschäftigt sich mit der Anzahl der möglichen Würfelnetze für den Standardwürfel mit den Zahlen 1 bis 6. Hier nun der Brief, eingesandt von Sebastian Trimolt aus Berlin:

Sehr geehrte *alpha*-Redaktion,

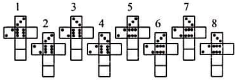
auch ich bin begeisterter Leser und Abonnent Ihrer Zeitschrift. Dabei ist Mathematik nur ein Hobby von mir. Zur Zeit studiere ich an der Berliner Musikhochschule. Für Knobeleien bleibt dabei leider oft nur wenig Zeit. Trotzdem habe ich mir einfach mal selbige genommen, um für die *„alpha"* einen Artikel zu schreiben. Einerseits wäre das vielleicht eine interessante Bereicherung für die Zeitschrift, und andererseits bin ich brennend neugierig darauf, wie andere Leser mit dem Problem umgehen, ob sie andere Lösungswege oder sogar andere Lösungen finden.

Mein Lösungsvorschlag:

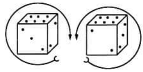
Zunächst seien alle Möglichkeiten in Erfahrung gebracht, wie jeweils sechs Quadrate anzuordnen sind, um einen Würfel daraus zu falten. Insgesamt sind das 20:



Betrachten wir nun die Augenzahl-Symbole. Die Zeichen ⚀, ⚃ und ⚄ sind „stabil", d. h. die Stellung des Würfels ist nicht von Bedeutung, da man nicht unterscheiden kann, ob die ⚄ beispielsweise auf dem Kopf steht. Anders ⚁, ⚂ und ⚅. Diese haben jeweils zwei verschiedene „Lagen". Sie können also zueinander verschiedene Stellungen haben, ohne ihren „Platz" zu wechseln. Genauer gesagt 2^3 = 8 Stellungen:

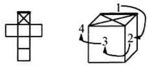


Jetzt sei noch beachtet, daß genau diese drei „unstabilen" Symbole immer in einer Ecke des Würfels liegen (aufgrund der Regel, daß sich gegenüberliegende Zahlen zu 7 ergänzen) und die Folge 2, 3, 6 einmal im Uhrzeigersinn und als zweite Variante entgegen dem Uhrzeigersinn geschrieben werden kann:



So besitzen wir bereits 2 · 8 = 16 verschiedene Grundmodelle von Würfeln, ohne diese überhaupt aufgeklappt zu haben.

Bleibt noch die Frage, wie viele Wege es gibt, zunächst unter Anwendung von nur einer Würfelnetzform, einen Würfel zu öffnen:



Egal, welches Würfelnetz wir gewählt haben, können wir irgendein Feld festlegen, welches der Seite entsprechen soll, die sich auf dem danebenliegenden Würfel oben befindet. Die stärker gedruckte Kante kann einmal um die Würfelseite herumwandern, womit schon vier Öffnungsmöglichkeiten beschrieben sind. Nun können bei einem Würfel sechs verschiedene Seiten oben liegen, mit denen ebenso verfahren werden kann. Fazit: 4 · 6 = 24 Aufklappvarianten.

Jetzt könnten wir annehmen, es gibt 20 Netzformen, 16 verschiedene Würfelaufdrucke und 24 Aufklappvarianten, daraus folgt: Es gibt 20 · 16 · 24 =7680 verschiedene Würfelnetze. FEHLER! Die Würfelnetzmodelle 13 bis 20 sind nämlich drehsymmetrisch und erzeugen bei unserer Aufklappmethode jede Lösung zweimal, jeweils einmal auf dem Kopf stehend. Also gilt nur für 12 Netze:

$12 \cdot 16 \cdot 24 = 4608$

und für die acht übrigen:

$8 \cdot 16 \cdot 12 = 1536$

Damit ergeben sich insgesamt nur 6144 verschiedene Würfelnetze, somit immerhin 25% weniger.

Sollten andere Leser weitere Vorschläge zur Lösung dieses Problems haben, schickt diese bitte an uns. Wir werden diese, wenn sie entsprechend zeitig eintreffen, im nächsten Heft veröffentlichen.

alpha wird herausgegeben vom Reinhardt Becker Verlag Velten in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
R. Becker, Tel. 0 33 04 / 39 74 30
Luisenstraße 45, 16727 Velten

Anzeigenleitung: R. Becker
Anzeigenabwicklung:
Telefon: 0 33 04 / 39 74 30
Anzeigenpreisliste Nr. 1 vom 1. 1. 1994

Verlag:
Reinhardt Becker Verlag
Luisenstraße 45, 16727 Velten
Tel.: 0 33 04 / 39 74 30
Fax : 0 33 04 / 39 74 32

Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Einzelpreis ist 3,90 DM. Im Abonnement beträgt der Heftpreis 3,40 DM incl. Versandkosten (Ausland: zuzüglich Versandkosten), also 20,40 DM /Jahr. Die Mindestbestelldauer eines Abonnements beträgt 1 Jahr. Eine Kündigung ist jeweils bis zu sechs Wochen vor Ende des Berechnungszeitraumes (=Kalenderjahr) möglich. Bei einem Umzug bitten wir um Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift, sowie der Abo-Nummer.

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Bildnachweis:
Seite 6: Bild 1: ZARM, Bild 2: BASF; *Seite 7:* Bild 3: Observatorium der Seestreitkräfte der USA; *Seite 8:* Norbert Schmidt; *Seite 9:* Abb. 2/3: Norbert Schmidt, Abb. 4: „Recreationts Mathematiques", 1782, Abb. 5: Roland Becker, nach Zöllners optischer Täuschung; *Seite 16:* Foto von Gerhard Schulze: Reinhardt Becker, „Vase mit zwei Blüten" aus dem Prospekt der Ausstellung „10 Jahre Herzberger Spiele"; *Seite 18:* „Alte Aufgabe": Originalillustration aus alpha 1/67; *Seite 29:* Zentrum für Foto und Film der Universität Leipzig; *Titelbild:* Norbert Schmidt; *4.Umschlagseite:* Manfred Tekla nach einer Skizze von Arnold Zenkert. Die Computergraphiken auf Seite 7, 10, 11, 13, 18, 19, 27, 28, 30 und 32 sowie die Köpfe der Artikel auf Seite 3, 12 und 29 wurden mit Corel Draw™ 3.0 unter Verwendung der zugehörigen Cliparts von Roland Becker gestaltet.

Vertrieb:
PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: be-Druck, Berlin
ISSN 0002 - 6395

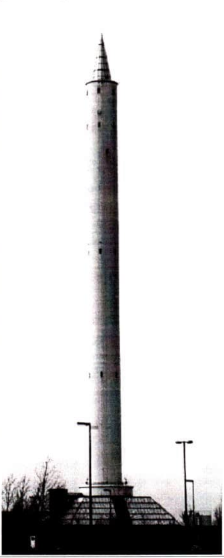
Inhaltsverzeichnis

Zeitungsschnipsel

Freier Fall im Bremer Turm

„Bremen: Die Versuchskapsel hat einen Durchmesser von 80 Zentimetern, ist hermetisch verschlossen und sieht aus wie eine Bombe. Der Behälter, ausgeklinkt an der Spitze des Fallturmes in Bremen, jagt mit hoher Geschwindigkeit in dem Vakuumschacht nach unten. Für die 110 Meter Distanz braucht das Geschoß ... Sekunden, dann wird es von einer dicken Schicht Styroporkugeln sanft aufgefangen. Selbst Teetassen bleiben bei dieser Art Bremsmechanismus heil. ..." (Döbelner Allgemeine Zeitung vom 18./19. September 1993)

Bild 1: Der Bremer Fallturm in seiner ganzen Länge. ***Foto: ZARM***



Aufgabe:

a) Die Fallzeit der Versuchskapsel im Bremer Fallturm ist zu berechnen!

b) Mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) trifft die Kapsel auf die Styroporkugeln?

Besuch beim eisigen Zwerg

„Die NASA will zwei Raumsonden zum Pluto, dem äußersten und kleinsten Planeten unseres Sonnensystems schicken. ... Auf dem vom amerikanischen Astronomen Clyde Tombaugh im Jahr 1930 entdeckten Planeten Pluto herrscht gegenwärtig und noch bis etwa ins Jahr 2020 Sommer, ein äußerst kühler aber mit Temperaturen um die 210 Grad unter Null an dem der Sonne zugewandten Südpol. Ein dünner Schleier von aufgetautem, im Plutowinter normalerweise auf der Oberfläche gefrorenem Methan (Erdgas), Stickstoff und Kohlenmonoxid wabbelt um den Planeten. Die Sonne, die rund sechs Milliarden Kilometer entfernt glüht, produziert auf dem Winzling - er hat einen Durchmesser von nur gerade 2300 Kilometern - lediglich eine fahle Dämmerung. ..." (Döbelner Anzeiger vom 21./22. August 1993)

Aufgabe:

In welcher Entfernung a beleuchtet eine elektrische 60 Wattglühlampe eine Wand ebenso stark wie die Sonne den Pluto, wenn in beiden Fällen das Licht senkrecht auffällt?

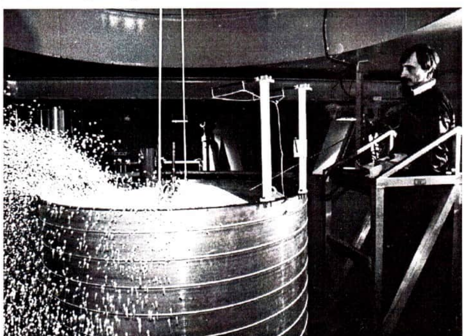
Anleitung:

- Die Beleuchtungsstärke I einer Fläche ist bei senkrechtem Lichteinfall dem Quadrat des Abstandes der Fläche von der Lichtquelle umgekehrt proportional.
- Hält man ein Blatt Papier mit einem Fettfleck (Fettfleckphotometer) zwischen eine elektrische 60 Wattglühbirne und die Sonne, so wird der Fettfleck unsichtbar, wenn das Blatt sich in etwa 8 cm Entfernung von der Glühlampe befindet. In dieser Lage wird das Papierblatt von Sonne und Glühbirne gleich stark beleuchtet.
- Die Entfernung Erde-Sonne beträgt rund 150 Millionen Kilometer.

Ein amerikanischer Wurm erobert die Ostsee

„Rostock. Ein amerikanischer ‚Eindringling' macht sich in den Küstengewässern der Ostsee breit: Er wird 10 cm lang, ist von rötlich-grüner Färbung und zählt zu den Borstenwürmern. Bis zu 10000 dieser Tiere haben Rostocker Wissenschaftler pro Quadratmeter Meeresboden in den Bodden

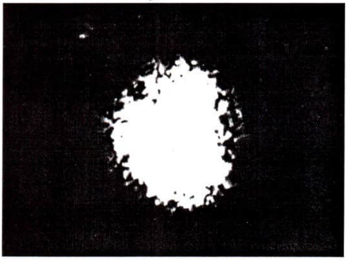
Bild 2: Der Bremsmechanismus besteht aus einem 10 Meter hohen Zylinder, der mit Schaumstoff-Kügelchen gefüllt ist. ***Foto: BASF***



und Haffs der Küste von Mecklenburg-Vorpommern schon geortet. Die höchstens drei Millimeter dicken Ringelwürmer mit dem wohlklingenden zoologischen Namen Marenzelleria viridis bohren röhrenförmige Schächte in den Meeresboden und stenwürmer Marenzelleria viridis zuordenbare Fläche?

b) Wieviel Prozent des Flächeninhaltes eines Quadratmeters Ostseebodens messen höchstens die dort befindlichen Öffnungen der Schächte dieser Ringelwürmer? Dabei

Bild 3: Bild des Planeten Pluto und seines Mondes Charon von der Erde aus (Durch die extreme Entfernung von der Erde sind die beiden Himmelskörper nicht getrennt zu erkennen).



leben in bis zu 30 Meter Wassertiefe. ..."

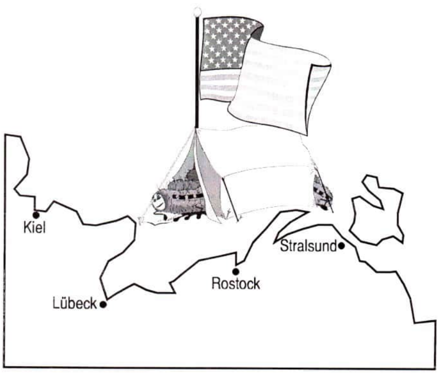
(Döbelner Allgemeine Zeitung vom 21./22. August 1993)

Aufgabe:

a) Wie groß ist im Mittel mindestens der Flächeninhalt der jedem der auf einem Quadratmeter Ostseeboden lebenden Bor- sei angenommen, daß jeder Wurm nur einen Schacht mit genau einer Öffnung anlegt, die während seiner Lebzeit erhalten bleibt und deren Flächeninhalt höchstens gleich dem einer Kreisscheibe mit dem Durchmesser d = 3 mm ist.

Dr. W. Träger

Ein amerikanischer Wurm erobert die Ostsee!



Zauberhafte Seiten der Mathematik:
Magische Schnurspiele

Der gesunde Menschenverstand sagt uns, daß die Zauberkunst im wesentlichen auf der geschickten Verwertung von Sinnestäuschungen beruht. Bei einem der berühmtesten Magier, dem amerikanischen Entfesselungskünstler, HARRY HOUDINI (1874-1926), kam jedoch zur Täuschung auch eine außerordentliche Körperbeherrschung hinzu. Moderne Zauberer, wie der Amerikaner DAVID COPPERFIELD, setzen wieder mehr auf die Illusion, und sie führen dazu für ihre Shows technische Apparaturen im Gewicht von einigen Tonnen mit sich, um mit Hilfe dieses Aufwandes den Zuschauer raffiniert zu täuschen. Auf der Europatour 1993 benötigten COPPERFIELDS Illusionshilfen ein eigenes Flugzeug. Allerdings, sagt COPPERFIELD, seien die Tricks im Prinzip ganz einfach. Vielleicht so simpel, wie in den Aufgaben, die wir uns heute ansehen wollen. Und im Gegensatz zu den Magiern verraten wir unsere Tricks.

In neueren einschlägigen Unterhaltungs- oder Rätselbüchern kann man folgende Geschichte finden. Ein Büroangestellter will gegenüber dem Lehrling seine Schere sichern und befestigt diese so an seinem Schreibtisch, wie es in Abbildung 1 gezeigt wird. Zu seinem Erstaunen findet er später die Schnur völlig unbeschädigt, aber die Schere ist verschwunden. Wie ist das möglich? (Wir gehen natürlich davon aus, daß der Scherengriff nicht zersägt wurde!)

So könnte Copperfields Knotentrick funktionieren:

1 die Schnur wird lose gehalten; 2 die Schlaufe wird in die Hand genommen; 3 der wichtigste Schritt: der Faden wird verdeckt durch die Schlaufe gezogen; 4 die vermeintliche Mitte wird mit der Schere durchgeschnitten - dabei sind die Schlaufen verdeckt zu halten; 5 die Schnur wird verknotet, so daß ein scheinbar zusammengeknotetes Band entsteht; 6 die Schnur wird in diesem Zustand gezeigt; 7 die Schnur wird unter den Augen der Zuschauer durch das Abziehen des Knotens repariert!

Nach ein bißchen Üben z.B. vor dem Spiegel wird der Trick sicherlich klappen. Probiert es aus!

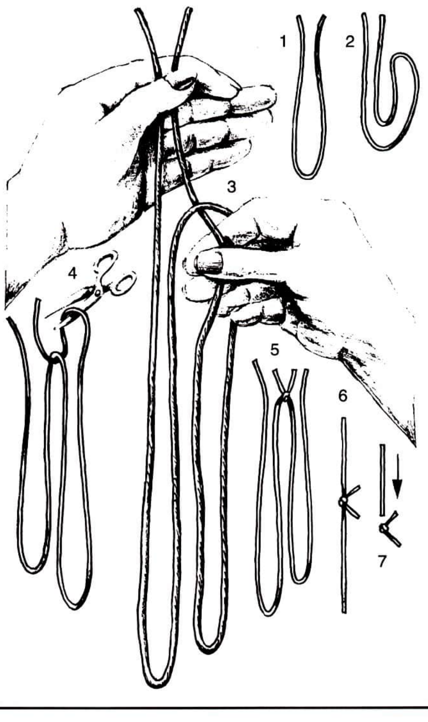
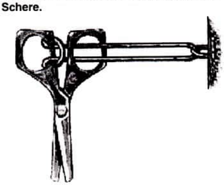


Abb. 1: Die scheinbar sicher gefesselte Schere.



Durch eine ähnliche Zauberei hat sich vor über 100 Jahren, genauer am Abend des 9. Mai 1876, der berühmte Leipziger Astronom ZÖLLNER (1834-1882) so verblüffen lassen, daß den Naturwissenschaftler ein amerikanischer Taschenspieler aufs Glatteis führen konnte. Damals hatten die Mathematiker in der Knotentheorie gerade gezeigt, daß sich bestimmte Knoten von selbst auflösen, wenn man sie in einen vierdimensionalen Raum bringt. Beim Verständnis dieser anschaulich nicht mehr vorstellbaren Aussage hilft uns vielleicht ein Vergleich, nämlich die Tatsache, daß sich in einem zweidimensionalen Raum (in einer Ebene) einfach keine Knoten knüpfen lassen. Eine solche mathematische Entdeckung hatte FELIX KLEIN (1849-1925), später ein berühmter Mathematiker, seinem Leipziger Kollegen ZÖLLNER mitgeteilt und diesen dadurch in große Erregung versetzt, denn ZÖLLNER sah darin die Möglichkeit, experimentell das Vorhandensein der vierten Dimension nachzuweisen.

Der vierdimensionale Raum, der in der Knotentheorie KLEINS eine Rolle spielte, ist eine reine mathematische Gedankenkonstruktion, die den dreidimensionalen Raum über unsere Vorstellung hinaus verallgemeinert. Die von uns erfahrbare Welt ist jedoch dreidimensional. Da der amerikanische Scharlatan SLADE durch irgendwelche faulen Tricks solche Knoten unter der (lediglich dreidimensionalen) Aufsicht von ZÖLLNER lösen konnte, glaubte ZÖLLNER fest, daß SLADE in Verbindung mit Geistern der vierten Dimension stehe.

Wir nennen einen einfachen Trick, um in einem geschlossenen Band (ohne dieses zu lösen und ohne dabei Hilfe aus dem Jenseits zu beanspruchen) einen Knoten zu erzeugen: Nehmt einen etwa 1m langen und ca. 4 cm breiten Papierstreifen (z.B. von einer Zeitungsseite), der vor dem Zusammenkleben an den kürzeren Enden dreimal in sich verdreht wurde (Abb. 2). Schneidet dann das erhaltene Band längs der Mittellinie auf. Das Ergebnis ist verblüffend. Es ergibt sich ein neues Band mit einem Knoten!

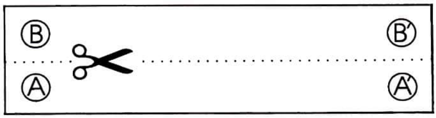
Auch unsere Aufgabe mit der Schere läßt sich ohne spiritistische Hilfe lösen. Sie ist übrigens älter, als es die moderne Einkleidung vermuten läßt - wir fanden das Problem schon in einem Zauberbuch aus dem 18. Jahrhundert (Abb. 4). Zerrt und zurrt einmal versuchsweise an den Schnüren! Es ist gar nicht so schwer. Wer keinen Erfolg hatte, kann die Lösung nachsehen.

Vom linken Griff (Abb. 1) wird die Schnur durch den rechten Griff nach unten bis zum Ende der Schere gezogen (Abb. 3) und dann über die Scherenblätter einfach nach oben gebracht. Wenn alles richtig gemacht wurde, löst sich die Schere von allein aus den Fesseln.

Konrad Haase
Rüdiger Thiele

Abb. 2: Ein dreifach in sich verschlungenes Band (sogenanntes MÖBIUS-Band). Haltet das Ende A'B' fest und verdreht das andere Ende AB dreimal um 180°. Dann die beiden Enden AB und A'B' verkleben, so daß A und B' sowie A' und B aufeinander zu liegen kommen. Längs der gestrichelten Mittellinie aufschneiden.

a) Das Band mit den Markierungen A, B, A', B' auf der Oberseite.



b) Das Band vor dem Verkleben; die Markierungen A' und B' sind jetzt auf der Unterseite.

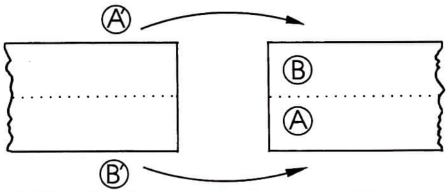


Abb. 3: Die durch den anderen Griff gezogene Schlaufe wird bis an das untere Ende der Schere gezogen und dann über die Scherenblätter nach oben gebracht. Die Schere ist frei!

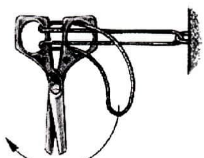


Abb. 5: ZÖLLNER, der von dem amerikanischen Spiritisten SLADE getäuscht wurde, hat selbst eine interessante optische Täuschung entdeckt, die diese Abbildung zeigt.

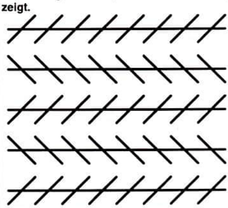
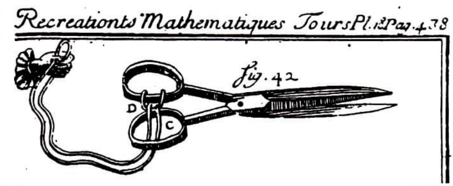


Abb. 4: Die Scherenbefreiung war bereits ein Thema in einem französischen Rätselbuch aus dem 18. Jahrhundert.



Mathematik auf dem Schulweg

Mathematik gibt's nicht nur im Unterricht - 45 Minuten am Tag - sondern man „stolpert" auch schon auf dem Weg zur Schule oder zur Arbeit über so manches mathematische Problem.

Rolf zählt die Häuser, an denen er jeweils in einer Straße vorbeikommt. Felix sagt: „Wenn kein Haus fehlt und keine Hausnummer doppelt vergeben wurde (etwa mit a,b,c...) reicht es mir, wenn ich die erste und die letzte Hausnummer kenne. Dann kann ich die Anzahl der Häuser berechnen."

(1) Wie viele Häuser stehen auf der Seite mit den ungeraden Nummern vom Haus Nr. 7 bis zum Haus Nr. 53 ?

(2) Wie viele Häuser stehen auf der Seite mit den geraden Nummern vom Haus Nr. 64 bis zum Haus Nr. 12 ?

Franziska will das Addieren im Kopf üben. Sie addiert deshalb auf dem Schulweg alle Hausnummern in einem Straßenabschnitt auf der Seite, auf der sie gerade läuft. Heute morgen ist sie auf der Seite mit den geraden Hausnummern gegangen und hat die Nummern von 12 bis 38 addiert. Katharina sagt: „Ich mache das einfacher. Ich merke mir nur die erste und die letzte Nummer. Die beiden addiere ich, multipliziere mit der Anzahl der Nummern und teile das Ergebnis durch 2."

(3) Überprüfe, ob beide Mädchen zu demselben Ergebnis kommen !

(4) Kannst Du Katharinas Vorgehen begründen ?

Auf dem Rückweg geht Franziska auf der Straßenseite mit den ungeraden Hausnummern, und zwar von der Nummer 57 bis zur Nummer 13. Sie probiert Katharinas Methode aus.

(5) Welche Summe errechnet sie ?

Nach einigen Tagen macht Franziska eine Entdeckung: Wenn sie auf der Seite mit den ungeraden Hausnummern vom Haus Nr. 1 bis zu einem Haus mit einer beliebigen Nummer geht, ist die von ihr errechnete Summe der Hausnummern eine Quadratzahl.

(6) Überprüfe dies für einige Hausnummern !

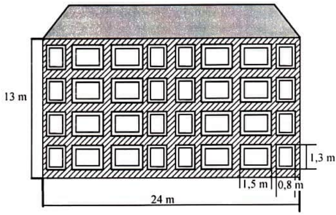
(7) Kannst Du Franziskas Entdeckung begründen ?

(8) Findest Du eine entsprechende Eigenschaft für die geraden Hausnummern ?

Carsten beobachtet, wie Wohnhäuser mit Schaumstoffplatten verkleidet werden. Die Gebäude sehen anschließend nicht nur schöner aus, sondern es wird auch vermieden, daß die Bewohner im Winter statt des eigenen Wohnzimmers die Luft rund um das Haus heizen.

(9) Wieviel Liter Heizöl können gespart werden, wenn eine Familie in ihrem Haus vor der Verkleidung pro Jahr etwa 3 000 Liter benötigte, danach je nach Außentemperatur bis zu 1/3 einspart. Für Warmwasserbereitung werden 20 l pro Monat benötigt. Von September bis November und zwischen März und Mai wurde die Hälfte des zum Heizen genutzten Öls verbraucht, in den Wintermonaten die andere Hälfte. Nun kann die Familie durch die Verkleidung im Winter 1/3 Heizöl sparen, in der restlichen kalten Jahreszeit den Verbrauch auf 4/5 drosseln.

Arndt und Carsten unterhalten sich angesichts großer Stapel, die fast den ganzen Fußweg blockieren, über die Zahl der nötigen Platten für die Verkleidung der Vorderfront des Hauses (s. Abbildung). Arndt schlägt vor, einfach den Flächeninhalt einer Platte, die 60 cm breit, 1,50 m lang und 4,5 cm dick ist, zu berechnen und das Resultat mit dem Flächeninhalt der zu verkleidenden Hauswand zu vergleichen.



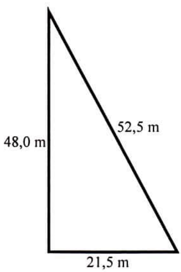
Der Quotient beider Werte liefere die benötigte Plattenzahl.

Carsten liebt Puzzles. Er versucht zu Hause, mit Papierschnipseln eine maßstäbliche Zeichnung der Frontansicht so auszulegen, daß recht wenige Platten zerschnitten werden müssen.

(10) Welcher Schüler wird der richtigen Anzahl näherkommen und warum? Gib selbst eine möglichst genaue Schätzung an!

An einer größeren dreiecksförmigen Baustelle beobachten die Freunde, daß offenbar jeder Punkt auf dem Gelände von einem der Kräne mit ihren langen Auslegern erreicht werden kann.

Sie wissen, daß ein Kran eine kreisförmige Fläche überstreicht, deren Inhalt gleich dem π-fachen Inhalt des Quadrates ist, das mit der Länge eines Auslegers als Seitenlänge gebildet werden könnte. Die Formel $A = \pi \cdot r^2$ haben sie von Carstens größerem Bruder erfahren.



Als sie diesen Wert mit der Dreiecksfläche vergleichen, meinen Sie, daß eigentlich ein Kran genügen müßte, denn die überstrichene Fläche beträgt bei einem Ausleger von 15 m Länge 700 m². Genügt für diese Baustelle wirklich nur ein Kran, wie man aus der Untersuchung der Flächeninhalte schlußfolgern könnte?

(11) Wie müssen derartige Kräne am Rand der 516 m² großen Baustelle aufgestellt werden, um mit möglichst wenig Großgeräten auszukommen?

Auf der einen Seite der Straße standen schon immer Bäume im Abstand von 18 m. Jetzt hat man auch auf der anderen Seite Bäume gesetzt, und zwar aus unerklärlichen Gründen im Abstand von je 15 m. Zwischen der zweiten und der dritten Querstraße stehen die beiden ersten und die beiden letzten Bäume sich jeweils gegenüber. Mittendrin gibt es genau ein Paar von Bäumen, die sich gegenüber stehen. Esmeralda sagt: „Ich kann die Entfernung vom ersten bis zum letzten Baum in diesem Straßenabschnitt berechnen, ohne die Bäume zu zählen."

(12) Kannst Du das auch ?

Carsten macht sich einen Spaß daraus, die Telefonnummern seiner Freunde nicht zu notieren, sondern sie durch mathematische „Eselsbrücken" im Kopf zu behalten. Unlängst verriet er seinen Freunden, die er auf dem Schulweg traf, ein Beispiel: Arndt hat die Nummer 51317. „Arndt hat 5 Buchstaben, dann folgen die Primzahlen Nr. 6 und Nr. 7".

(13) Fällt dir eine einfachere „Eselsbrücke" zu Arndt ein?

(14) Suche nach Möglichkeiten, dir die Nummern von Bernhard (85322), Dora (41664) und Emilia (691625) zu merken!

Seine eigene Nummer teilt Carsten seinen Freunden in einem Rätsel mit: „Nimm die Zahl der Buchstaben meines Vornamens, sieben. Die beiden folgenden Ziffern, als zweistellige Zahl betrachtet, sind nur der siebente Teil der beiden letzten Ziffern, ebenfalls als zweistellig Zahl betrachtet. Die ganze Nummer ist durch die Zahl der Buchstaben meines Namens teilbar."

(15) Bestimme Carstens Telephonnummer!

(16) Könnte Franziska (9 Buchstaben) eine Telephonnummer haben, die einer entsprechenden Regel genügt?

Die Eingangstreppe zur Schule hat sicher nicht mehr als 20 Stufen. Wenn Esmeralda zwei Stufen auf einmal nimmt, so bleibt zum Schluß eine Stufe übrig. Wenn Felix drei Stufen auf einmal nimmt, so bleibt auch eine Stufe übrig. Rolf sagt: „Wenn ich vier Stufen auf einmal nehmen könnte, so würde ebenfalls eine Stufe übrig bleiben."

Wieviel Stufen hat die Eingangstreppe?

(17) Kannst du sagen, wie viele Stufen die Schultreppe hat ?

Diese Beispiele zeigen, daß Mathematik nicht nur in der Schule einen festen Platz hat.

Entdeckst Du noch mehr Mathematik auf Deinem Schulweg?

Dr. Claus Peter Helmholz
Dr. Christian Werge

Die Problemecke

von

Paul Jainta

Lösungen der Aufgaben J1, J2, J3, J4, M1, M2, O1, O2

Ein untrügliches Merkmal für diese unruhigen Zeiten ist die Beobachtung, daß euch Schülern immer weniger Gelegenheit gegeben wird, sich die Welt auf eigene Faust zu erschließen. Unsere Freizeit wird oder ist zusehends verplant. In rascher Folge reiht sich da Erlebnisinsel an Erlebnisinsel - mal geht's ab ins Pizzarestaurant, mal in den Freizeitpark, mal in das Schwimmparadies. In der Zeit dazwischen sammelt ihr überwiegend Erfahrungen aus zweiter Hand. Video, Fernsehen und Computerspiele ersetzen das eigene Erleben. Ich befürchte fast, daß für eine wachsende Schar von Schülern der Umgang mit Elektronik an die Stelle von Bleistift und Papier treten wird. Henry Ford, der Erfinder der Fließbandfertigung hat ähnliches vor Jahrzehnten schon vorausgesehen, als er sagte: *„Viele Menschen setzen mehr Zeit und Kraft daran, um die Probleme herumzureden, anstatt sie anzupacken"*. *alpha* möchte kein Medium sein, das man nur konsumiert. Dort sollt ihr zupacken. Deshalb Die Problemecke. Immer wenn eine Ausgabe von *alpha* in Druck geht und mit der Post verschickt wird, ist es gerade so, als würde ein neuer Pfeil ins Blaue abgeschossen. Genau wie der Pfeil, landet alpha irgendwo. Einer der Pfeile ist *die Problemecke*. Das Ziel seid ihr! Wir freuen uns über jeden Volltreffer, den wir gesetzt haben, denken aber auch über gelegentliche Fehlschüsse nach. Einige Pfeile sind am Ziel angekommen. Die Probleme J1, J2, J3, J4, M1, M2, O1 und O2 sind gelöst. Besonders überrascht hat mich, daß die bisher eingegangenen Briefe ein getreues Abbild des Leserpublikums wiedergeben. Ich weiß aus Erzählungen reiferer Leser, daß sie selbst in Ruhepausen, bei einer Tasse Kaffee nicht von *alpha* lassen können. Sie wird demnach nicht nur von wißbegierigen Schülern studiert, auch Eltern und Lehrer und andere Mathe-Begeisterte schätzen diese Lektüre. So erreichte mich denn die erste Post zur *Problemecke* von Herrn **Wolfgang Färber** aus dem sächsischen Frankenberg, der sich seinen verdienten Vorruhestand als ehemaliger Mathelehrer nun mit *alpha* und Knobelei weiter versüßt. Nach längerer Vorlaufzeit - während der ich eure Zuschriften sammeln konnte - will ich heute mit den Lösungen der Probleme J1, J3 und J4 von Nikolaus Wolf, Klasse 6d des Franz-Ludwig-Gymnasiums Bamberg, beginnen. Er ist einer der beiden jüngsten Einsender und soll darum den Vortritt erhalten.

Lösungsvorschlag zu J1:

Unter den 1993 Zahlen sind

$\left[\frac{1993}{3}\right] = 664$ Zahlen teilbar durch 3 und

$\left[\frac{1993}{5}\right] = 398$ Zahlen teilbar durch 5.

[x] bedeutet dabei die sogenannte GAUSS-Klammer. Es ist [x] die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Unter den 1993 Zahlen sind somit:

1993 - (664 + 398) = 931 Zahlen durch 3 oder 5 <u>nicht</u> teilbar.

Unter diesen wurden aber alle durch 15 teilbaren Zahlen doppelt gezählt. Nun ist $\left[\frac{1993}{15}\right] = 132$.

Also gibt es 931+132 = 1063 Zahlen, die durch 3 oder 5 nicht teilbar sind.

Lösung von J3:

Nur die Folge d) (= 21 32 33 24 15) ist nicht selbstbeschreibend, denn sie enthält nur *eine* 4.

Lösung von J4:

Nikolaus hat das Viereck wie abgebildet in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt des Vierecks ergibt sich wie folgt aus den vier Dreiecksflächen:

$A = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}} + A_{\mathrm{IV}}$

$A = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 6$ FE

(<u>Red.:</u> Eine unerwartete Lösung des Problems erhält man übrigens mit dem *Theorem von Pick*. Es sei ein beliebiges Vieleck P (hier ein Viereck) gegeben, dessen Ecken alle Gitterpunkte sind. Gitterpunkte sind Punkte, deren Koordinaten ganzzahlig sind. Ist I die Anzahl der Punkte innerhalb des Vielecks und R die Anzahl der Gitterpunkte, die auf der Berandung des Vielecks liegen, dann gilt für den Flächeninhalt des Polygons P:

$A = I + \frac{1}{2}\cdot R - 1$

In unserem Fall erhält man:

$A = 5 + \frac{1}{2}\cdot 4 - 1 = 6$).

Sogar aus dem Ausland sind Lösungen eingegangen. **Vlad Terpu** aus Bukarest hat die Aufgaben J1, J2 und M2 bearbeitet. Hier ist seine **Lösung zu J2:**

Es ist T = $2x+3y$ ein Vielfaches von 11, nämlich $2x+3y = k_1\cdot 11$

Wir zerlegen T* = $7x+5y$ ebenfalls in ein Vielfaches von 11.

$$T^* = 11\underbrace{(x+y)}_{k_2} - 2\underbrace{(2x+3y)}_{k_1\cdot 11} = 11\cdot k_2 - 22\cdot k_1$$

$$T^* = 11\cdot\underbrace{(k_2 - 2\cdot k_1)}_{k_3} = 11\cdot k_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \in \mathrm{Z})$$

w.z.b.w.

Lösung von M2 (Diese Aufgabe erschien zur 2. Runde (=Distriktphase) der Rumänischen Mathematik Olympiade 1988, 7. Klassenstufe):

Wegen 1) und 3) kommen für die beiden letzten Ziffern der gesuchten Zahl $\overline{cd}$ nur folgende Möglichkeiten in Frage: {16, 25, 36, 49, 64, 81}. Da nach 2) a = b+c+d erfüllt sein muß, entfallen 49 und 64 (da sonst Ziffer a≥10).

Wir untersuchen die restlichen Fälle.

a) c = 1; d = 6 liefern a = 9 und $\overline{abcd}$ = 9216 = 96² ist Quadratzahl.

c = 1; d = 6 liefern b = c = 1, was wegen 1) nicht möglich ist.

c = 1; d = 6 liefern a = 7; b = 0; aber 7016 ist kein Quadrat.

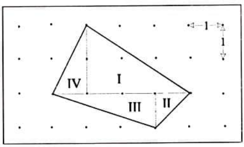
b) c = 2; d = 5 liefern a = 9; b = 2; dies ist wegen 1) mit b=c=2 nicht möglich

oder a = 8; b = 1; aber 8125 ist kein Quadrat.

oder a = 7; b = 0; die Zahl 7025 ist ebenfalls keine Quadratzahl.

c) c = 3; d = 6 liefern a = 9; b = 0; auch 9036 ist kein Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aus demselben Grund scheidet schließlich noch die Zahl 9081 aus. Somit erfüllt nur



die Zahl 9216 die Bedingungen der Aufgabe.

Auch Mädchen haben nicht unbedingt Berührungsängste mit der Mathematik. **Annemarie Roventa** aus Lahnau-Atzbach besucht die Klasse 10 S der Gesamtschule Ehringhausen; sie fand eine runde **Lösung zu M1:**

Es gelte:

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0 \qquad |\cdot abc$$
$$\Rightarrow bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)=0$$
$$\Rightarrow bc^2-b^2c+a^2c-ac^2+ab^2-a^2b=0$$
$$\Rightarrow bc(c-b)+a^2(c-b)+a(c^2-b^2)=0$$
$$\Rightarrow bc(c-b)+a^2(c-b)+a(c-b)(c+b)=0$$
$$\Rightarrow (c-b)(bc+a^2-ac-ab)=0$$
$$\Rightarrow (c-b)[a(a-c)-b(a-c)]=0$$
$$\Rightarrow (c-b)(a-c)(a-b)=0$$
$$c-b=0 \Rightarrow c=b$$
Wenn $a-c=0 \Rightarrow a=c$

$$a-b=0 \Rightarrow a=b$$

w.z.b.w.

Von **Robert Waldmüller**, der in eine 11. Klasse des Söderblom-Gymnasiums Espelkamp geht, kommt folgende (gekürzte) **Variante zu O1:**

Er nutzt die Bedingung 3) der Aufgabe mehrmals und rechnet f(19,93) so lange zurück, bis x und y erstmals gleich sind. Wir verwenden mehrfach Bedingung 3) und stellen dazu um:

$$f(x,x+y)=f(x,y)\cdot\frac{x+y}{2x+y}$$

Es ergibt sich der Reihe nach:

$$f(19,93)=\tfrac{93}{112}\cdot f(19,74)=\tfrac{93}{112}\cdot\tfrac{74}{93}\cdot f(19,55)$$
$$=\tfrac{74}{112}\cdot\tfrac{55}{74}\cdot f(19,36)=\tfrac{55}{112}\cdot\tfrac{36}{55}\cdot f(19,17)$$
$$=\tfrac{36}{112}\cdot f(17,19) \qquad \text{(wegen 1)}$$
$$=\tfrac{36}{112}\cdot\tfrac{19}{36}\cdot f(17,2)=\tfrac{19}{112}\cdot f(2,17)$$
$$=\tfrac{19}{112}\cdot\tfrac{17}{19}\cdot f(2,15)=\tfrac{17}{112}\cdot\tfrac{15}{17}\cdot f(2,13)$$
$$=\tfrac{15}{112}\cdot\tfrac{13}{15}\cdot f(2,11)=\tfrac{13}{112}\cdot\tfrac{11}{13}\cdot f(2,9)$$
$$=\tfrac{11}{112}\cdot\tfrac{9}{11}\cdot f(2,7)=\tfrac{9}{112}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot f(2,5)$$
$$=\tfrac{7}{112}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot f(2,3)=\tfrac{5}{112}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot f(1,2)$$
$$=\tfrac{3}{112}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\underbrace{f(1,1)}_{\substack{1\\ \text{nach (2)}}}=\underline{\underline{\frac{1}{56}}}$$

Zwei äußerst bemerkenswerte Lösungen zu den beiden offenen Problemen hat **David Reeb** aus Rainau-Schwabsberg geschickt. Sie sind deshalb so eindrucksvoll, weil David erst 12 Jahre alt ist und eine 6.Klasse des Peutinger-Gymnasiums in Ellwangen besucht. Verblüffend, wie selbstverständlich er schon mit den Begriffen der höheren Mathematik umgeht. Offensichtlich ist David auch ein aufmerksamer Leser von *alpha*, wie sein **Lösungsweg zu O2** verrät:

David multipliziert die ersten Glieder aus.

$$\left(1+\frac{1}{3^{2^0}}\right)=\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}$$
$$\left(1+\frac{1}{3^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2^1}}\right)=\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}$$
$$\left(1+\frac{1}{3^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2^1}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2^2}}\right)=\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\ldots+\frac{1}{3^7}$$

Er vermutet daher $\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{3^{2^i}}\right)=\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{3^k}$

In *alpha* 1/93, S. 23 findet er eine Formel für diese Summe. Mit der Summenformel für eine geometrische Reihe gilt also:

$$\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{3^{2^i}}\right)=\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{3^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$$

Diese Beziehung beweist er anschließend durch vollständige Induktion (!)

Alle Einsender haben diesen Weg beschritten. Eine andere Möglichkeit nutzt mehrmals die 3. binomische Formel, um das gegebene Produkt schrittweise zu verkürzen.

Es sei

$$x=\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{81}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\tfrac{1}{3^{2^n}}\right)$$

Dadurch erhält man durch Multiplikation mit $\frac{2}{3}$:

$$\tfrac{2}{3}\cdot x=\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdot x=\underbrace{\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{3}\right)}_{\left(1-\frac{1}{9}\right)}\cdot\left(1+\tfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{81}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\tfrac{1}{3^{2^n}}\right)$$
$$=\underbrace{\left(1-\tfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{9}\right)}_{\left(1-\frac{1}{81}\right)}\cdot\left(1+\tfrac{1}{81}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\tfrac{1}{3^{2^n}}\right)$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=\left(1-\tfrac{1}{3^{2^n}}\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{3^{2^n}}\right)$$
$$=\underline{\underline{1-\tfrac{1}{3^{2^{n+1}}}}}$$

Also gilt $x=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$

Weitere Lösungen haben eingereicht: **Peter Kosater** (17 J.), Klasse 11, Mitglied der 5. Mathe-AG am Osnabrücker Ratsgymnasium, (O1, O2), Herr **Wolfgang Färber** aus Frankenberg (O1, O2), **David Reeb**, Rainau-Schwabsberg (J1, O1).

Ihr seht also, *alpha* lebt von euren Einfällen, eurer Mitarbeit. Dies bedeutet, daß die Blattmacher eure (Mit-)Hilfe brauchen. *Die Problemecke* ist so ein Aktivspielplatz für verregnete Nachmittage, schlaflose Nächte oder langweilige Ferien. Ein altes spanisches Sprichwort sagt: „*Jede kleine Verrichtung tut wohler als großes Müßigsein*". In diesem Sinne freue ich mich auf jede eurer nächsten Bearbeitungen zur *Problemecke*. Schickt sie an folgende Adresse:

StR Paul Jainta
Werkvolkstr. 10
91126 Schwabach

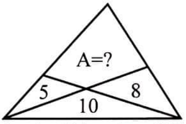
Schreibt Alter, Schule und Klasse dazu. Es gibt übrigens kein zeitliches Limit für Einsendungen.

Aufgaben J7, J8, M7, M8, O7, O8

J7 Paul besitzt ein quaderförmiges Aquarium. Es faßt 12 Liter Wasser. Wie kann Paul genau 9 Liter Flüssigkeit in sein (leeres) Behältnis einfüllen, wenn er *nur* ein Stück Kreide zur Markierung einer Kante hat?

J 8 Das Jahr 1991 war vorerst das letzte, dessen Jahreszahl mit genau zwei verschiedenen Ziffern geschrieben werden konnte. Wie viele Jahresangaben seit dem Jahr 1 n.u.Z. kommen bis heute ebenfalls mit genau zwei verschiedenen Ziffern aus?

M7 Zwei Transversalen zerlegen ein Dreieck wie abgebildet in drei Teildreiecke mit den Flächeninhalten A_1=5 FE, A_2=8 FE, A_3=10 FE sowie ein Viereck.



Berechne den Inhalt A des verbliebenen Vierecks.

M8 Es seien x und y natürliche Zahlen und es gelte $13x + 9y = 1994$. Bestimme mit Begründung den kleinsten Wert, den die Summe $S = x + y$ annehmen kann.

O7 In einem Dreieck ABC besteht zwischen den Seitenlängen a, b und c die Beziehung $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=c^2$. Bestimme für diesen Fall den Winkel $\gamma=\sphericalangle ACB$.

O8 Auf einer Party befinden sich 210 Gäste aus 5 verschiedenen Ländern. In jeder Gruppe von 6 Leuten sind *mindestens* zwei gleichaltrig. Es ist nachzuweisen, daß mindestens 5 Partygäste derselben Nationalität angehören, dasselbe Alter und Geschlecht haben.

Die Aufgaben sind in drei Altersstufen unterteilt: **J**unioren (bis Klasse 8), **M**ittel (bis Klasse 10) und **O**ffene Probleme. Jede Bearbeitung ist willkommen. Die elegantesten Lösungen werden veröffentlicht.

Die Gewinner im alpha-Wettbewerb 1993

Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch. Die Preise werden in Kürze mit der Post verschickt.

• Ein Casio Graphikrechner FX-7700 G von Casio Computer Co. GmbH, Hamburg. Der FX-7700 G ist ideal für die Darstellung von Funktionen, egal ob so einfache wie die Parabel oder Integrationskurven. Die umfangreichen wissenschaftlichen Funktionen machen ihn auch zu einem leistungsfähigen Rechner.

Andrea Striegnitz Laußig

• Vier Casio technisch-wissenschaftliche Rechner fx-95. Die einfache Bedienung und seine umfangreichen Funktionen machen ihn zum idealen Schulrechner und Begleiter während einer ganzen Schulzeit.

David Gärtner Zittau
Susanna Kube Hohen Neuendorf
Okka Zimmermann Hamburg
Ralf Herrmann Wernshausen

• Drei Softwareprogramme aus dem CoMet Verlag für Unterrichtssoftware, Duisburg. Die Programme laufen auf jedem PC mit MS-DOS ab Version 3.3 und 648 KB Hauptspeicher.

Robert Feik Herzberg
Henrik Bartko Blankenfelde
Bruno Korn Nandlstadt

• Fünf Bücher „Logischen Katastrophen auf der Spur“ von A. G. Konforowitsch aus dem Fachbuchverlag, Leipzig: Eine farbenfrohe Sammlung typischer Sophismen (Eine vollständige Rezension findet Ihr auf Seite 25 in der „Marktecke“).

Konstantin Papadopoulos Salzburg
Sigrun Deweß Leipzig
Amarendram Subramanian Gomaringen
Norman Hübner Magdeburg
Christiane Mühle Leipzig

• Zwei Kassetten „Sehen-Staunen-Wissen“ mit 10 großformatigen Sachbüchern vom Gerstenberg Verlag, Hildesheim: Eine Buchreihe über die Natur mit vielen farbigen Abbildungen und interessanten Informationen.

Volker Schloßhauer Greifswald
Stefan Wolff Linz

• Fünf Bücher aus der Reihe „Sehen-Staunen-Wissen“ vom Gerstenberg Verlag, Hildesheim: Die Bücher behandeln wichtige Themen aus der Natur in farbigen Bildern und Worten.

Sebastian Thäter Paderborn
Andreas Beil Lübbenau
Tanja Kirmaier Sasbachwalden
Stefan Schumann Schmalkalden
Steffen Eisenblätter Delitzsch

• Zehn Bücher „Bausteine des Chaos - Fraktale“ aus dem Klett-Cotta Verlag, Stuttgart: Das Buch macht den Leser mit der jüngsten wissenschaftlichen Revolution vertraut - der Chaostheorie.

Anne Milek Hohen Neuendorf
Nadine Coiffard Leverkusen
Ulrike Kümpel Werratal-Gymnasium
Mathe-Club 6 Straußberg
Bettina Recknagel Bad Salzungen
Steffen Hof Sao Paulo (Brasilien)
Jerome Landgräfe Göttingen
Sandra Timm Ritzerow
Hartmut Boettcher Weimar
Alexander Blacha Niederorschel

• Ein Softwareprogramm „Derive“ aus dem Klett Schulbuchverlag, Stuttgart: Der Mathematik-Assistent für den PC, mit umfangreichen Funktionen in der Arithmetik, bei Gleichungen, Vektoren, Matrizen, Funktionsgraphendarstellung und vielem mehr - 2000 Jahre Mathematikwissen auf Diskette.

Mathe-Club 7/8 Straußberg

• Drei Softwareprogramme „Ali 1000-undeins“ vom Klett Schulbuchverlag, Stuttgart: Das intelligente Algebraprogramm für den C 64/128 - Anschaffung für ein ganzes Schülerleben.

Stephan Deweß Leipzig
Sebastian Schiefer Leverkusen
Jaqueline Marz Werratal-Gymnasium

• Fünf PONS Schülerwörterbücher Englisch aus dem Klett Verlag für Wissen und Bildung, Stuttgart: Das Nachschlagewerk für Schule und Weiterbildung mit 100000 Stichwörtern aus Hoch-, Umgangs- und Fachsprache.

Holger Kunze Erlangen
Martina Schäfer Steinheim
Christian Ziener Blankenhain
Florian Schelz Osthofen
Martina Beilharz Sindelfingen

• Fünf PONS Schülerwörterbücher Französisch vom Klett Verlag für Wissen und Bildung, Stuttgart: Das Nachschlagewerk für Schule und Weiterbildung mit 100000 Stichwörtern aus dem modernsten gemein- und fachsprachlichen Wortschatz. Die beiden Bücher enthalten jetzt einen ausführlichen Anhang zur Übung bei der Wörterbuchbenutzung.

Andreas Heine Reinhardtsdorf
Annett Wienrich Holzthaleben
Tobias Geck Duisburg
Stephan Nopp Frankfurt/Oder
Rico Radeke Dresden

• Elf verschiedene Bücher aus dem Teubner Verlag, Leipzig. Die Rezension eines aktuellen „Teubner-Buches“ findet Ihr in der „Marktecke“ auf Seite 24.

Susanne Danz Schwallungen
Stephan Harloff Friedland
Michael Oster Wernshausen
Andreas Rost Erlabrunn
Eva Panzer Viersen
Melanie Göbel Rackwitz
Jens Baldamus Hoyerswerda
Olaf M. Schnürer Weingarten
Sven Aßmus Berlin
Jens Hasenjäger Leverkusen
Timm-Philip Müller Hamburg

• Zehn Taschenrechner unterschiedlicher Ausstattung für Schule und Freizeit von Texas Instruments, Freising.

Ursula Müller Fischheim
Tino Müller Sondershausen
Matthias Dinnis Fahrbinde
Susann Fellenberg Torgau
Karsten Zeising Otterwisch
Arne Bittig Cottbus
Katja Noch Torgau
Anett Schneider Neustadt
Markus Krentz Stralsund
Bettina Müller Erlangen

Wir bedanken uns bei allen Sponsoren für ihre Unterstützung. Besonders möchten wir dem Teubner-Verlag Leipzig und dem Fachbuchverlag ebenfalls aus Leipzig für die kurzfristige Bereitstellung von Preisen danken.

Freude am Schachwettbewerb

Obwohl der Druckfehlerteufel sein Unwesen im Schachwettbewerb trieb, - so wurden die Felder der Schachbrettdiagramme mit vertauschten Farben dargestellt und zu den Aufgaben Nr. 6 und 7 sollte die Forderung „Matt in drei Zügen" lauten -, konnte dennoch eine rege Beteiligung verzeichnet werden. Mehrere Teilnehmer erkannten, daß es sich bei den Aufgaben Nr. 6 und 7 um Dreizüger handelte und lösten sie korrekt.

Trotz dieses Mißgeschickes, um dessen Entschuldigung wir bitten, fanden die meisten Löser wiederum Freude und Gefallen am Wettbewerb, wie z.B. Ingeborg Kappler aus Görlitz: „Vielen Dank, es hat viel Freude gemacht".

Einige Schachfreunde, wie z.B. Helmut Büchel aus Zella-Mehlis, waren zum 10. Mal mit von der Partie. Die Altersspanne der Teilnehmer reichte von 8 (Martin Heinrich, Hörlitz) bis 86 (Erich König, Spitzkunnersdorf).

Lösungen:

1) 1. Lf7 Sc2, Sf3/Sc2, Se6/
S beliebig
2. Lb3/Lh5/Lh5 oder Lb3 matt

Eine leichte Aufgabe von T. Schönberger („Magyar Sakkvilag" 1925) bildete den Auftakt zur problemschachlichen Zeitreise.

2) 1. Ta8 K:a8/K:a6/Kc7/c5/
S beliebig
2. Dc8/D:c6/De7/T6a7/Dc8,D:c6 matt.

Nach dem Schlüsselzug, der dem schwarzen König auch den zweiten Turm zum Schlagen anbietet, hat er drei mit seinem Standfeld (b7) ein Y bildende Fluchtfelder (a6, a8, c7). Eine gefällige Miniatur des populären Autors, Dr. Werner Speckmann („Die Schwalbe", 1938), der vor einigen Monaten sein 80. Lebensjahr vollendete.

3) 1. Kf6 Sc8 beliebig/Sa7 beliebig
2. Th6/Ta2 matt.

In dieser Aufgabe von J. J. Burbach („Irene", 1948) ist Kf6 der einzige Wartezug, der die Zugpflicht unschädlich auf Schwarz abwälzt.

4) 1. Sa6 K:a6/Ka8/Kc8/Kc6
2. Lc4/Ld5/Le6/Le8 matt.

Die Fluchtfelder des schwarzen Königs (a6, a8, c8, c6) bilden symbolisch einen Stern. Daß die Sternflucht des Königs mit vier verschiedenen Matts durch den weißen Läufer endet, macht die Komposition von L.C. Willemsens („Tijdschrift v. d. NSB", 1954) zu einem kleinen problemschachlichen Kunstwerk.

5) 1. Sbd7 (droht 2. Dd3 matt)
1. ... Dg6/Da6/Da3/D:e5/D:d7
2. Sf6/Sb6/Sc5/S:e5/T:d7 matt.

In der Ausgangsposition ist die schwarze Dame durch den weißen Td8 gefesselt. Nach dem Schlüsselzug kann und muß sie zur Abwehr der Drohung ziehen, um dann in den ersten drei Abspielen von dem gleichen Springer für die Verteidigung gegen den Td8 ausgesperrt zu werden. Eine preisgekrönte Aufgabe von F. Chlubna („Schweiz. Arbeiter-Schachzeitung", 1966).

6) 1. Lh6 (droht 2. De8 nebst 3. Del matt)
1. ... L:d4/c5/Ld8
2. L:g7/De8/D:a7+ beliebig/c4/La5
3. L:c3 oder D:a7/Da4/D:a5 matt

Dieser mit einem Preis („Die Schwalbe", 1972) ausgezeichnete Dreizüger von einem weiteren Jubilar, Dr. Wolfgang Dittmann, - er vollendete vor einigen Monaten sein 60. Lebensjahr -, wartet mit einem überraschenden Schlüsselzug auf. Nach 1. ... L:d4, 2. L:g7 entsteht eine Zugzwangstellung für Schwarz, die mittels der weißen Verführungen 1. Lf4/g5 nicht erreicht werden kann. Der Versuch 1. De8 scheitert an 1. ...Sb5.

7) 1. Kh5 (droht 2. Dh4 + f4 3. D:f4 matt)
1. ... De2+/D:f2,S:f2/Sd3
2. f3+/S:c6+/Td4+ D:f3+,K:e3/Kf3/K:d4
3. S5g4,Dc5/Sd4/Sf3 matt.
1. ... f4/L:d8
2. Dh7+/Db4+
3. Sf3/D:c4 matt.

Jens Künzelmann und Manfred Zucker zeigen mit dieser ausgezeichneten Coproduktion („Schach", 1983) Problemkunst im Dreizüger der Extraklasse.

Mit den schachprovozierenden Schlüssel, Batteriespiel, Kreuzschach, Rückkehr, Fernblocks, Siers-Rössel und Königsfluchten sind eine Fülle von problemschachlicher Themen in der Aufgabe hervorragend zusammengefügt worden.

8) 1. Sf7 (droht 2. f5 matt)
1. ... Sc5/Sd2/Sg5
2. T:d6/L:d5/T:f6 matt

Der Zweizüger von Sven Trommler erzielte beim problemschachlichen Wettstreit zwischen Sachsen und Schweiz 1991/92 den 2. Platz. Er zeigt ein schönes Duell zwischen dem wSd5 und dem sSd4. In den Verführungen 1. Sd7? (2. f5 matt) Sc5!, 1. Sf3? Sd2! und 1. Sg6? Sg5! verstellt der weiße Springer drei eigene Linien, so daß der schwarze Springer ungestraft ebenfalls eigene Linien verstellen kann und das Matt abwehrt.

Zu den besten Lösungseinsendungen gehörten u.a. jene von Johannes Böhmer (Görlitz), Andreas Gude (Berlin), Stephan Kötzer (Aulendorf).

Als Gewinner wurden unter Ausschluß des Rechtsweges ausgelost:

Caroline Eickhoff (Berlin),
Henning Griethe (Rostock),
Björn Herrmann (Östringen),
Franziska Jaecke (Merseburg),
Florian Herzog (Regensburg),
Thomas Krause (Dresden),
Lars Nöbel (Klingenthal),
Kersten Schmidt (Ilmenau),
Martin Sigmund (Freiburg i.Brsg.) und
Lena Vimik (Berlin).

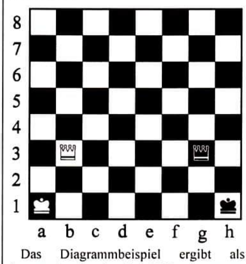
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

Schneller als der Computer

Viele Schachaufgaben können heutzutage von Schachcomputern und anderen Computern mit entsprechenden Programmen (Software) in kurzer Zeit gelöst werden. Doch es ist eine große Vielzahl von Aufgaben vorhanden, für die es keine Lösungsprogramme gibt. In diesen Fällen sind die menschliche Kombinationsgabe und das logische Denken weitaus schneller als die entsprechende Realisierung auf einem Computer.

In der diesmaligen Aufgabe (nach Peter Krystufek) soll eine Stellung auf dem Schachbrett konstruiert werden, in der Weiß und Schwarz über die gleichen Steine verfügen, und wenn sie am Zuge sein würden, mit 1 Zug pattsetzen.

Das Diagramm zeigt eine solche Schachstellung. Weiß würde mit D:g3 und Schwarz umgekehrt mit D:b3 pattsetzen. Als (mathematische) Zusatzbedingung wird verlangt, daß gemäß einer Materialbewertung Dame = 9, Turm = 6, Läufer = 4, Springer = 4, Bauer = 2 und König = 1 die Summe der Materialwerte ein Minimum bildet.



Das Diagrammbeispiel ergibt als Summe 1 + 9 + 1 + 9 = 20 Das ist zu unterbieten!

Bis zum nächsten Wettbewerb verbleibt Euer Schachfreund

Harald Rüdiger

10 Jahre „Herzberger Spiele“

Eine Ausstellung über mathematische Spiele in Unterricht und Freizeit

Als vor 10 Jahren die erste Ausstellung der „HERZBERGER SPIELE“ eröffnet wurde, dachte noch niemand an eine 10-jährige Tradition von mathematischen Spielen, die manche schon beim bloßen Klang des Namens in die Ecke stellen würden. Doch im Gegensatz zum Schulunterricht, der doch an manchen Ecken langweilt, bieten die Spiele eine andere interessante Möglichkeit der Beschäftigung mit der Mathematik. Hier eine kurze Chronologie der bisherigen Ausstellungen:

1983 die Gestaltung der Ausstellung „Herzberger Spiele“ wird begonnen.

1984 erste Ausstellung anläßlich der Bezirksolympiade in Cottbus.
Die namensgebende Ausstellung anläßlich der 800-Jahrfeier in Herzberg.

1984-1989 weitere Ausstellungen unter anderem in Dresden, Cottbus, Berlin, Potsdam, Frankfurt/Oder, Halle und Bautzen.

1990 Einrichtung einer Dauerausstellung am Max-Steenberg-Gymnasium in Cottbus.

1991 zu einer Tagung von Mathematik-Didaktikern der Universitäten und Hochschulen Deutschlands wird die Ausstellung vorgestellt.

1992 Einrichtung einer zweiten Dauerausstellung an der Gesamtschule Herzberg vom Februar bis Oktober 1992.

1994 Jubiläumsausstellung „10 Jahre 1984-1994 Herzberger Spiele - Mathematische Spiele im Unterricht und in der Freizeit“.

Mit der Ausstellung HERZBERGER SPIELE sollen Anregungen gegeben werden, in spielerischer Form mathematische Probleme zu behandeln. Es sind didaktische Spiele, geordnet in Spielgruppen. Die Ausstellung umfaßt mehr als 300 Spiele und Spielvarianten. Sie wendet sich an Kinder der ältesten Gruppen der Kindergärten, an Schüler aller Klassenstufen, auch an Jugendliche der oberen Klassen, an Lehrer, vor allem der Grundschule und des Faches Mathematik, an Hort- und Heimerzieher, an Kindergärtnerinnen, an Lehrerstudenten, an Mitarbeiter in allen Formen der Freizeitgestaltung, an Eltern und interessierte Erwachsene.

OStR Gerhard Schulze bei der Eröffnung der Ausstellung „10 Jahre Herzberger Spiele“

Auf mehr als 250 Graphiken werden in ansprechender Form Spielregeln und Spielvarianten mitgeteilt, spezielle Spielsituationen erläutert, Lösungen vorgestellt, Spielstrategien diskutiert, eine fachlich-mathematische Einordnung vorgenommen, fachliche und methodische Hinweise gegeben, der didaktische Spielwert eingeschätzt und Möglichkeiten für den Einsatz der Spiele vorgeschlagen.

In der Ausstellung werden folgende 16 Spielgruppen vorgestellt:

- Bunte Dreiecke
- Nimm-Spiele
- Rechenfertigkeiten
- Bunte Quadrate
- Tangram und Quadrata
- Legespiele
- Bunte Würfel
- Tangram-Varianten
- Vielecke
- HERZBERGER QUADER
- Schiebespiele
- Solo-Halma
- Flache Würfelfünflinge
- Magische Quadrate
- Parkettierungen
- Labyrinthe

Die Erkenntnis zu gewinnen und zu vertiefen, daß mit geeigneten Spielen sowohl im Unterricht als auch in der Freizeitgestaltung „ernste“ Mathematik betrieben und zur Entwicklung allgemeiner Persönlichkeitseigenschaften und mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten beigetragen werden kann, ist auch ein Ziel der Ausstellung.

In der Paarung Mathematik und Spiel scheint ein Widerspruch zu liegen. Eine der strengsten Wissenschaften, die Mathematik, verbindet sich mit der zufallsreichsten aller menschlichen Leidenschaften, dem Spiel. Kein Zweifel, daß der Zufall ein wesentliches Element des Spiels ist. Kein Zweifel aber auch, daß die Dichotomie, diese Zweiheit von Zufall und Gesetzmäßigkeit den besonderen Reiz eines Spiels ausmacht. Das Spiel ist ein Grundphänomen menschlichen Lebens. In unserer Welt gleicht alles Geschehen einem großen Spiel. Es hat von Anfang an den Lauf der Welt gelenkt, so die Gestaltung der Materie, ihre Organisation zu lebenden Strukturen, aber auch das soziale Verhalten der Menschen. Das Spiel ist weder mit dem Satz seiner Regeln noch mit der Kette von Zufällen, durch die sein Ablauf bestimmt wird, identisch. Es ist weder das eine noch das andere, es ist bei-

„Vase mit zwei Blüten“
zusammengesetzt aus den Spielsteinen und Figuren der Spielgruppe: „BUNTE DREIECKE“ der „HERZBERGER SPIELE“

des zugleich. Das Spiel ist die Dichotomie, die Zweiheit von Zufall und Notwendigkeit.

Wegen dieser grundsätzlichen Bedeutung des Spiels und da das Spiel für die Entwicklung des Kindes von maßgeblicher Bedeutung ist, ist es notwendig, sowohl im Unterricht als auch in der Freizeitgestaltung dem Spiel einen festen Platz zuzuweisen. Mit dieser Ausstellung werden dafür Anregungen und neue Impulse gegeben. Dabei wird auch der Wettbewerbsgedanke, der Spielen eigen ist, genutzt. Es sollen Anregungen gegeben werden, den Unterricht und die Freizeitgestaltung abwechslungsreicher und attraktiver zu gestalten. Da das Lernen beim Spiel eine unterbewußte Komponente ist, sollte das Spiel wegen seiner Unaufdringlichkeit viel häufiger im Lernprozeß, vor allem auch im Unterricht, genutzt werden, nicht nur im Vorschulalter und im frühen Schulalter, sondern auch in mittleren und oberen Klassen.

Nachdem Spiele - wie Tangram, das Zusammensetzen bunter Dreiecke und Würfel - im Mathematikunterricht der unteren Klassen aufgenommen worden sind (wozu auch diese Ausstellung beigetragen hat) ist es an der Zeit, geeignete Spiele auch in den mittleren und oberen Klassen im Unterricht einzusetzen. So können z.B. die Beweisnotwendigkeit und das Beweisbedürfnis mit dem Spiel: „Würfel" mit dem HERZBERGER QUADER sehr eindrucksvoll und auch leicht verständlich begründet werden. Da jeder Schüler mit den Bausteinen des HERZBERGER QUADERS selbst hantieren kann, ist dieser Nachweis im wahrsten Sinne des Wortes begreiflich. Es wird auch großer Wert darauf gelegt, mit geeigneten Spielen eine Einführung in die Kombinatorik vorzunehmen, die bekanntlich im Unterricht bisher etwas vernachlässigt wird. Es sollen auch Anregungen gegeben werden, die Qualität des Spielens in den Horten und Heimen zu verbessern. Die Ausstellung wird auch dazu beitragen, den Kindern eine sinnvolle Freizeitbeschäftigung gestalten zu helfen. Unsere Kinder müssen wieder spielen lernen. Durch zivilisatorische Fehlentwicklungen, z. B. das Fernsehen oder Spielkonsolen, ist vieles an sinnvoller Freizeitgestaltung verlorengegangen. Entsprechend müssen auch die Erwachsenen wieder lernen, den Kindern das Spielen zu lehren. Das schöpferische Denken, das auf solche mathematische „Spielereien" verwandt wird, hat vieles gemeinsam mit der Art des Denkens, das zu neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen führt. Deshalb sind mathematische Spiele besonders geeignet, Begabungen zu entdecken, zu entwickeln und zu fördern. Dabei kommt es nicht darauf an, einen Schüler frühzeitig auf die Entwicklung als Mathematiker festzulegen, sondern seine mathematische Begabung so zu entwickeln, daß später eine vielfältige Konkretisierung erfolgen kann.

Über die Zielstellung und Qualität der Ausstellung geben auch Eintragungen in das Gästebuch der Ausstellung Auskunft:

Prof. Dr. H. Bausch, Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg, Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR bis 1986:

„Es ist bewunderungswürdig, mit welchem Enthusiasmus die HERZBERGER SPIELE erarbeitet, aufbereitet und für die sehr gelungene Ausstellung zusammengestellt wurden. Die Ausstellung vermittelt wertvolle methodische, pädagogische und mathematische Anregungen. Herzlichen Dank dafür, daß sie während der XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR gezeigt wurde."

Prof. Dr. Gronau, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR ab 1986:

„Mir scheint es für die Bildung unserer Kinder und Jugendlichen sehr wichtig, daß schon frühzeitig Aspekte des mathematischen Denkens, wie räumliches Vorstellungsvermögen, algorithmisches Vorgehen und Kombinieren, herausgebildet werden. Dafür sind mathematisch gehaltvolle Spiele ein sehr gutes Hilfsmittel.

Die Fülle der Ideen und hergestellten Spiele in Ihrer Ausstellung beeindruckte mich stark! Es bleibt nur zu hoffen, daß vieles in Zukunft einem breiteren Kreis zugänglich sein wird. Dazu viel Erfolg!"

Prof. Dr. W. Engel, Universität Rostock, ehemaliger Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und der Mathematischen Gesellschaft der DDR:

„Ich wünsche Kollegen Schulze, daß die in der interessanten Ausstellung gezeigten mathematischen Spiele bald einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden können. Die Industrie sollte möglichst schnell die Ideen aufgreifen und eine Produktion der Würfel usw. sowie den Druck der Anleitungen aufnehmen."

Prof. Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische Hochschule Erfurt/Mühlhausen:

„Die Herzberger Spiele enthalten soviel Mathematik für jedes Lebensalter, daß ich nur wünschen kann, sie mögen sich schnell und dauerhaft verbreiten. Die Ausstellung hat mich zum Spielen angeregt. Herzlichen Dank!"

Prof. Dr. W. Walsch, Martin-Luther-Universität Halle:

„Die ‚Herzberger Spiele' beeindruckten mich in besonderer und mehrfacher Weise: a) durch ihre erstaunliche Vielfalt; b) durch die gelungene Verbindung von spielerischen und mathematischen Inhalten und Aspekten; c) durch ihre ansprechende ästhetische Gestaltung; d) durch ihre wohldurchdachte didaktische Aufbereitung. Es ist sehr zu wünschen, daß der Kollege Gerhard Schulze noch viele Pädagogen für dieses Material und für seine Ideen gewinnen und begeistern kann, damit die ‚Herzberger Spiele' in jenen Bereich weiter eindringen, für den sie gedacht sind: in die Tätigkeit unserer Kinder und Jugendlichen."

Bei den einzelnen Spielgruppen wird auch angestrebt, die Schwierigkeiten systematisch zu steigern. So wird meist von Problemen ausgegangen, die bereits von Kindern der ältesten Gruppe des Kindergartens bzw. der Grundschule gelöst werden können. Es geht von einfachen Nachlegespielen bis zu ungelösten Problemen. Gerade darin besteht aber die Vielfalt der Einsatzmöglichkeiten für die einzelnen Spiele.

Ein besonderes Merkmal der Ausstellung ist, daß unter den Graphiken die erforderlichen Spielmaterialien ausgelegt sind. Es kann also unmittelbar mit meist 12 Teilnehmern mit einem Spiel gespielt werden, wobei man sich der Anleitungen auf den Graphiken bedienen kann.

Zu den Spielen existieren auch noch eine Reihe von ungelösten Problemen. Sie stellen eine erhöhte Anforderung und sind nicht nur eine Herausforderung für Schüler der höheren Klassenstufen, sondern auch für Lehrer dar.

Gerhard Schulze

Anmerkung:

Dem Wunsch der Besucher folgend bereitet der Reinhardt Becker Verlag ein Buch mit den wichtigsten der „HERZBERGER SPIELE" vor. Interessenten für Vorbestellungen wenden sich bitte direkt an den Verlag, damit die benötigte Auflage korrekt eingeschätzt werden kann.

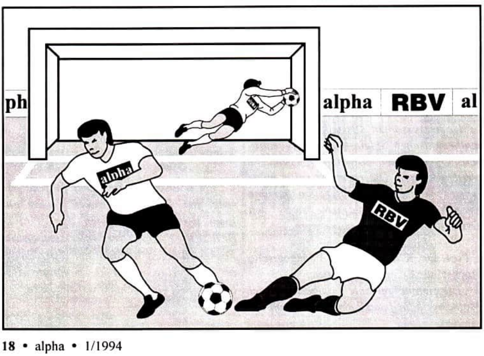
Komisches, Kniffliges, Knackiges

Verrückter Elfmeter

Der Fußball ist zur Zeit eine der populärsten Sportarten in Deutschland. Ein Element des Spiels ist das Schießen eines Elfmeters. Dabei hat ein Spieler nach einem Foul im Strafraum die Möglichkeit, ein Tor durch einen Schuß auf das Tor aus einer Entfernung von elf Metern zu erzielen. Der Torwart stellt sich meistens so, daß der freie Raum des Tores in zwei ungleiche Teile zerlegt wird. Um einen Torschuß zu verhindern, muß der Torwart in die richtige Richtung springen, und zwar genau im Moment des Schusses. Er hat keine Möglichkeit vorher zu sehen, in welche Ecke des Tores der Schütze den Ball setzen wird. Im Gegenzug weiß der Torschütze nicht, wohin der Torwart springen wird. Nun kann sich der Schütze denken, daß es wohl das sicherste ist, in das lange Eck zu spielen. Der Torwart könnte das voraussehen und in diese Richtung springen. Demnach könnte der Schütze auch davon ausgehen, daß der Torwart weiß, daß der Schütze wahrscheinlich in das lange Eck spielt und deshalb in diese Richtung springen wird, und in das kurze Eck spielen. Der Torwart seinerseits könnte ahnen, daß der Schütze weiß, daß der Torwart weiß, daß er in das lange Eck springt und deshalb in das kurze Eck spielt, weswegen er dorthin springen muß. Dabei könnte der Schütze denken, daß der Torwart weiß, daß . . . Nun könnte der Schütze auch einfach in die Mitte des Tores spielen, da der Torwart ja von dort wegspringt.

Wie groß ist denn nun die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Halten eines Torschusses, nachdem der Torwart in die richtige der drei Richtungen gesprungen ist, 90% beträgt, und die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim Schießen in die richtige Richtung ebenfalls 90%? In die Wahrscheinlichkeiten seien völlige Fehlschüsse schon eingerechnet.

Roland Becker

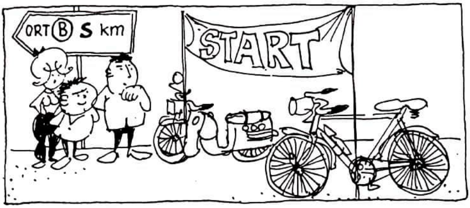


Eine alte Aufgabe

Nachstehend veröffentlichen wir eine Aufgabe aus dem allerersten *alpha*-Heft, 1/1967. Sie wurde von Prof. Dr. Udo Pirl geschrieben und erschien uns als passend für diese Rubrik:

Die drei Freunde F_1, F_2 und F_3 wollen möglichst schnell vom Ort A zu dem s km entfernten Ort B kommen. Dazu steht Ihnen ein Fahrrad und ein Moped zur Verfügung. Zur Präzisierung der Aufgabe werden noch folgende Angaben gemacht:

Illustration zur „Alten Aufgabe“ aus dem allerersten alpha-Heft 1/67



1. Die in km/h gemessenen „Reisegeschwindigkeiten“ von Fußgänger, Fahrrad und Moped, in dieser Reihenfolge mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet, sind unabhängig davon, welcher der drei Freunde das jeweilige Fortbewegungsmittel benutzt und stehen in den Größenbeziehungen $v_1 < v_2 \le v_3$.
2. Keines der Fahrzeuge darf gleichzeitig mehr als einer Person zur Fortbewegung dienen.
3. Keiner der Freunde darf gleichzeitig beide Fahrzeuge fortbewegen.
4. Jedes der Fahrzeuge darf (braucht aber nicht) von dem jeweiligen Benutzer unterwegs verlassen werden (evtl. auch mehrere Male) und darf (braucht aber nicht) von einem Nachkommenden der drei Freunde zur Weiterfahrt benutzt werden.
5. Die beim „Umsteigen“ verlorengegangene Zeit wird nicht berücksichtigt (sie wird gleich Null gesetzt).
6. Es darf gewartet, zurückgegangen oder auch zurückgefahren werden.
7. Es gibt keinen Weg von A nach B, der kürzer als s ist, und es werden keine

anderen Fortbewegungsmittel als die drei angegebenen benutzt.

Unter diesen Bedingungen soll die kürzeste Zeit ermittelt werden, in der es dem zuletzt (bzw. den zuletzt) in B ankommenden der gleichzeitig in A startenden Freunde möglich ist, B zu erreichen.

Eisiger Ausflug in die Mathematik

Wie viele Tierarten, so leben auch die Pinguine in Gruppen zusammen. Alphons war ein junges und immer aufsässiges Mitglied einer großen Pinguingruppe. Als den Alten die ständige Besserwisserei zuviel wurde, schickten sie ihn zusammen mit seinen aufmüpfigen Freunden weg: Sollte er doch seine eigene Gemeinschaft bilden.

Als die Pinguingruppe ein Stück weit gelaufen war, fiel Alphons ein, daß es wichtig wäre zu wissen, wie viele sie denn seien. Deshalb fragte er seinen besten Freund danach. Doch der sagte nur: „Unsere Gruppe ist kleiner als 20. Wir sind genausoviel männliche wie weibliche Pinguine. Die Anzahl ist weder durch 3 oder 4, noch durch 5 teilbar.

(1) Wie viele Pinguine waren es?

Da Alphons schon immer ein Freund kniffliger Matheaufgaben war, bekam er die Anzahl leicht heraus. Am nächsten Morgen fanden sie eine Stelle, die sowohl eine sanfte Anhöhe zum Brüten, Eisblöcke am Strand zum Schwimmen als auch genug Fische für alle bot. Sofort liefen die beglückten Pinguine ins Wasser, um dort zu spielen und zu essen. Als sie von der Planscherei genug hatten, ergab sich ein anderes Problem. Natürlich wollte keiner der Pinguine alleine leben. Alphons hatte es sich auch schon mit seiner Freundin an einer schönen Stelle des Abhangs gemütlich gemacht. Doch die anderen Pinguine schienen immer unzufrieden. So sehr sie sich auch bemühten, eine gerechte Aufteilung der Paare zu finden, am Ende blieb immer ein Paar übrig, das nicht miteinander leben wollte. Dabei hatte jeder Pinguin nur genau einen anderen, mit dem er nicht zusammenleben wollte. Diese Abneigung beruhte auch auf Gegenseitigkeit, d. h. der Pinguinmann, der eine Frau nicht mag, ist auch derjenige, den die Frau nicht mag.

(2) Wie viele glückliche Kombinationen von Paaren gibt es, wenn sich die Anzahl der Pinguine nicht verändert hat und Alphons schon mit einer Frau zusammenlebt?

Nachdem bald jeder Pinguin seinen idealen Partner gefunden hatte, kehrte langsam Alltag in das Leben der Pinguine ein. Sie aßen gemeinsam, schwammen gemeinsam und wenn sie mal besonders übermütig waren, rutschten sie von einem der drei Eisblöcke am Ufer ins Wasser. Dabei kam Alphons einmal folgende Frage:

(3) Wie weit kann man von jedem der Eisblöcke ins Wasser springen, wenn Absprunggeschwindigkeit v_i, Absprungwinkel α_i und Absprunghöhe h_i bekannt sind (siehe Skizze am Bild)?

Eisblock 1:
$v_1 = 10\ m/s,\ \alpha_1 = 0°,\ h_1 = 0{,}5\ m$

Eisblock 2:
$v_2 = 6\ m/s,\ \alpha_2 = 30°,\ h_2 = 2\ m$

Eisblock 3:
$v_3 = 8\ m/s,\ \alpha_3 = 60°,\ h_3 = 1\ m$

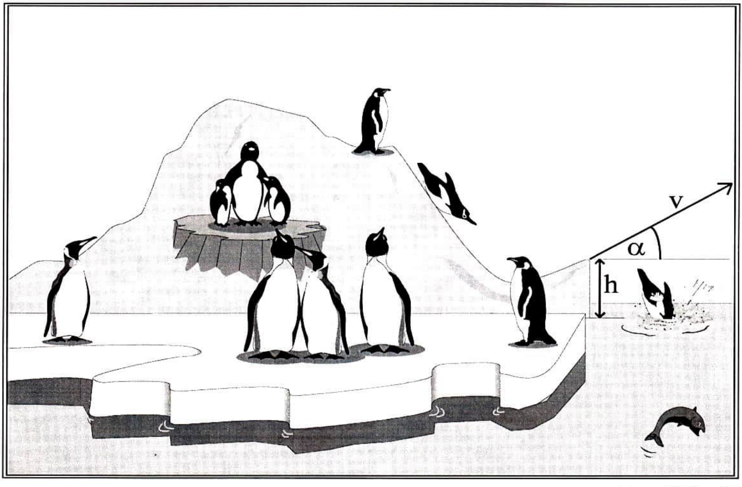
Gravitationskonstante: $g = 9{,}79\ m/s^2$

Als Alphons 20 Jahre nach der Gruppengründung auf dem Sterbebett lag, wollte er nur noch einmal wissen, wie groß die Gruppe nun war. Sein Freund antwortete mit einem Rätsel: „In den ersten sechs Jahren verdoppelte sich unsere Anzahl innerhalb von drei Jahren, die restliche Zeit nur innerhalb von sieben Jahren."

(4) Wie viele Mitglieder hatte die Gruppe zu diesem Zeitpunkt?

Als Alphons die Zahl im Kopf berechnet hatte, schlief er zufrieden ein.

Roland Becker



alpha-Wettbewerb

Mitlösen und gewinnen

Klasse 5:

5/8 Im Klubraum eines Seniorenheimes waren für eine Versammlung mehr als 20, aber weniger als 30 Stühle aufgestellt. Es kamen jedoch mehr Heimbewohner, als Stühle vorhanden waren, so daß deren Anzahl verdoppelt wurde. Der zwölfte Teil der Anzahl der nun vorhandenen Stühle blieb unbesetzt. Wieviel Personen nahmen an dieser Versammlung teil?

5/9 Welche natürlichen Zahlen, die kleiner als 500 sind, lassen bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 stets den Rest 1, sind aber ohne Rest durch 7 teilbar?

5/10 Zeichne ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a. Zeichne eine Strecke, deren Endpunkte auf dem Umfang des Quadrates liegen, derart, daß sie das Quadrat in ein Trapez und ein Dreieck zerlegt und daß man die ausgeschnittenen beiden Figuren zu einem Dreieck zusammensetzen kann.

5/11 Alle Schüler einer 5. Klasse waren anwesend, als im Fach Mathematik eine Klassenarbeit geschrieben wurde, die wie folgt ausfiel: Der siebente Teil der Anzahl der Schüler erhielt die Note 1, die Hälfte die Note 2, der vierte Teil die Note 3. Kein Schüler erhielt die Noten 5 oder 6. Wieviel Schüler erhielten die Note 4, wenn dieser Klasse mehr als 20, aber weniger als 30 Schüler angehören?

5/12 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 415. Die letzte Ziffer des größeren der beiden Summanden ist 8. Streicht man diese Ziffer 8, so erhält man den kleineren der beiden Summanden. Um welche zwei Summanden handelt es sich?

5/13 Gesucht ist die größte fünfstellige natürliche Zahl, für die folgendes gilt:

a) Die Tausenderziffer stellt eine doppelt so große Zahl dar wie die Zehnerziffer.

b) Die Einer- und Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne daß sich die fünfstellige Zahl ändert.

5/14 Wieviel Möglichkeiten gibt es für das Wechseln einer 10-Pfennig-Münze in Münzen mit kleineren Werten? Gib alle Möglichkeiten an!

Klasse 6:

6/8 Zwei Primzahlen p und p+2 heißen Primzahlzwillinge. So sind z. B. die Zahlen 11 und 13 Primzahlzwillinge. Weise nach, daß die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist, wenn beide Primzahlen größer als 3 sind!

6/9 Von drei Schülern einer Klasse ist uns folgendes bekannt:

(1) Sie haben die Vornamen Axel, Bodo und Dietmar.

(2) Ihre Familiennamen lauten Neumann, Siebert und Keller. Dabei braucht die Reihenfolge der Vornamen nicht der Reihenfolge der Familiennamen zu entsprechen.

(3) Axel heißt nicht Neumann.

(4) Der Schüler mit dem Familiennamen Keller ist älter als der Schüler mit dem Vornamen Bodo.

(5) Die Mutter des Schülers Neumann ist eine geborene Mittag.

(6) Die Mutter von Bodo trägt den Geburtsnamen Rößler.

Ermittle die Familiennamen, die den Vornamen der Schüler zugeordnet sind!

6/10 Die Geburtstage der 731 Schüler einer größeren Schule verteilen sich auf alle 12 Monate des Jahres. Wieviel Schüler gibt es mindestens, wieviel höchstens, die am gleichen Tag Geburtstag haben, wenn kein Schüler am 29. Februar geboren wurde?

6/11 Ersetze in dem nachfolgenden Schema die Sternchen so durch Ziffern, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält!

```
 ***.*2
 ------
*08
 *6*
 ------
 *12*
 ====
```

6/12 Es ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften zu bestimmen: Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4. Dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18. Wie lautet diese Zahl?

6/13 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit $b > a$ und ein Punkt S auf der Geraden AB so, daß B Mittelpunkt von AS ist. Es ist durch S eine Gerade zu konstruieren, die BC in einem inneren Punkt D und AC in einem inneren Punkt E so schneidet, daß das entstandene Dreieck EDC gleichschenklig ist und die Basis ED besitzt. Die Konstruktion ist zu begründen!

6/14 Welcher Celsiustemperatur entsprechen 77 Grad Fahrenheit (°F)?

Klasse 7:

7/8 Die Zahl 45 soll in vier Summanden zerlegt werden, die folgende Bedingungen erfüllen:

Wenn man zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten Summanden 2 subtrahiert, den dritten Summanden durch 2 dividiert, den vierten Summanden mit 2 multipliziert, soll jedesmal dasselbe Ergebnis herauskommen. Wie lauten diese vier Summanden?

7/9 Jemand geht zur Sparkasse und wechselt für 7 DM nur Fünf- und Zehn-Pfennig-Münzen ein. Er erhält insgesamt 111 Münzen. Wieviel Fünf- bzw. Zehn-Pfennig-Münzen waren es?

7/10 Marion wurde im Jahre 1980 geboren. In welchem Jahre n^2 wird Marion genau n Jahre alt sein?

7/11 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 177. Teilt man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, so erhält man 3 und den Rest 9. Wie heißen die beiden Zahlen?

7/12 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 4$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $e = 6$ cm hat. Im Kreis k ist eine Sehne AB der Länge 5 cm zu konstruieren, die zur Geraden g parallel ist. Die Konstruktion ist zu begründen!

7/13 Wieviel Gramm NaCl werden zur Herstellung von 10 l einer 10 %igen NaCl-Lösung benötigt? (Dichte der Lösung $d = 1{,}071\ g/cm^3$)

7/14 Ohne Gerät kann ein Taucher bis in eine Tiefe h von etwa 20 m vorstoßen. Welche Kraft F wirkt dort auf seinen Oberkörper (Fläche A = 600 cm^2)?

Klasse 8:

8/8 Konstruiere die Länge der Raumdiagonalen eines Würfels. Der Würfel habe eine Kantenlänge von 6 cm!

8/9 Konstruiere ein Dreieck aus folgenden Stücken:
Umkreisradius r = 3,0 cm
Seite c = 5,0 cm
Winkel $\alpha = 30°$

8/10 Aus den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 werden dreistellige Zahlen gebildet. Gib die Anzahl der so gebildeten dreistelligen Zahlen an, in denen mindestens eine Ziffer mehrfach auftritt!

8/11 Für eine Pralinenmischung sollen zwei Sorten Pralinen zum Preis von 2,30 DM bzw. 1,80 DM für 100 g verwendet werden. Der Verkaufspreis soll 2,00 DM pro 100 g betragen. Wieviel Gramm Pralinen der ersten Sorten muß man für eine Mischung von 10 kg nehmen?

8/12 Bei einem Würfel wird die Kantenlänge verdreifacht. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Würfel zueinander?

8/13 Technische Manometer, z.B. Luftdruckprüfer an der Tankstelle, zeigen den Überdruck über den Luftdruck an. Ein Autoreifen habe ein Volumen von 55 l. Wieviel l Luft muß der Kompressor fördern, wenn er auf einen Druck von 2,5 bar (Überdruck) aufgepumpt werden soll? Der äußere Luftdruck soll 1 bar betragen.

8/14 Welche Länge in mm muß ein Messingrohr bei 15°C haben, damit es bei 60°C eine Länge von 1,000 m hat (α von Messing = $18 \cdot 10^{-6}$ 1/K)?

Klasse 9:

9/8 Ein Würfel mit der Kantenlänge a = 3 cm wird in drei kongruente Pyramiden zerlegt. Zeichnen Sie das Netz einer solchen Pyramide!

9/9 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a = 7 cm soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß auf einer Dreieckseite zwei Eckpunkte des Quadrates und auf den anderen beiden Seiten je ein Eckpunkt des Quadrates liegen. Konstruieren Sie die Figur!

9/10 Das Quadrat der Summe zweier natürlicher Zahlen ist gleich dem vierfachen Produkt dieser beiden Zahlen. Geben Sie alle Lösungen an!

9/11 Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, ist bekannt, daß $f(x) = f(-x)$. Was kann über den Graphen einer solchen Funktion ausgesagt werden?

9/12 In einem Rechteck ist die eine Seite doppelt so lang wie die andere. Bei Rotation um eine Rechteckseite entsteht ein Zylinder. Vergleichen Sie die Volumina der beiden Zylinder, die durch Rotation um jeweils eine der beiden Seiten entstehen!

9/13 Welche Umlaufdauer T besitzt ein Satellit mit der Masse m = 10 t auf einer Höhe h = 350 km über der Erdoberfläche? (Erdradius $r_E = 6{,}37 \cdot 10^3$ km, Gravitationskonstante $\delta = 6{,}670 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ $m^2 \cdot kg^2$)

9/14 Ein Verfahren, die spezifische

Die Antwortkarte

Anstatt der eingehefteten Antwortkarte haben wir uns entschieden, die Antwortkarte im Innenteil zu drucken. Sollte Ihnen das Ausschneiden aus der *„alpha"* nicht gefallen, kopieren Sie die Vorlage einfach. Ansonsten ist diese Rückseite gleichzeitig Erläuterung und Platzhalter, damit kein wichtiger Inhalt verlorengeht. Die ausgeschnittene Karte oder eine Kopie davon kleben Sie bitte auf eine an Sie selbst adressierte und frankierte Postkarte, legen Sie den Lösungen bei und schicken alles an folgende Adresse:

Redaktion „alpha"
PSF 129
04001 Leipzig

Bitte beachten Sie: Einsendungen, denen keine frankierte Postkarte (oder bei Sammelbeteiligungen ein entsprechend frankierter Briefumschlag) beiliegen, können wir leider nicht bearbeiten.

Die Bestellkarte

Mit der umseitigen Bestellkarte können Sie *„alpha - Mathematik als Hobby"* abonnieren. Kleben Sie den Bestellschein auf eine Postkarte und dann ab zu uns:

Reinhardt Becker Verlag
Redaktion „alpha"
Luisenstraße 45
16727 Velten

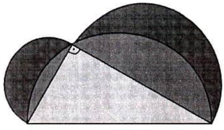
Sollte Ihnen die Zeitschrift gefallen, empfehlen Sie uns doch in Ihrer Bekanntschaft weiter. Wenn mehrere die *„alpha"* abonnieren wollen, oder Sie Ihr alpha-Heft nicht zerschneiden möchten, kopieren Sie bitte diesen Bestellschein. Außerdem haben Sie die Möglichkeit, sich vom Verlag einen Sammelbestellschein schicken zu lassen. Dabei erhalten Sie bei jeweils 10 Bestellungen ein gratis-Abo zusätzlich. Außerdem ist der Abonnementpreis von 3,40 DM incl. Versandkosten (Ausland: zuzüglich Versandkosten) deutlich günstiger als der Einzelverkaufspreis von 3,90 DM.

Wärmekapazität c eines festen Stoffes zu bestimmen, besteht darin, einen Körper aus diesem Stoff in siedendes Wasser zu tauchen, bis er dessen Temperatur angenommen hat. Dann taucht man ihn in ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter. Die Mischtemperatur des Wassers wird gemessen. Werte zur Rechnung: Masse des Aluminiumkalorimeters $m_K = 27$ g; Masse des Körpers m = 361 g; Masse des Wassers $m_W = 186$ g. Anfangstemperatur $t_1 = 21{,}2°C$; Mischtemperatur $t_m = 32{,}6°C$; Temperatur des siedenden Wassers $t_2 = 100°C$; Wärmekapazität des eingetauchten Teiles des Thermometers c = 0,3 J/K. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität c des verwendeten Stoffes?

Klasse 10:

10/8 Alle Eckpunkte eines Würfels liegen auf einer Kugel. Berechnen Sie den Radius dieser Kugel für einen Würfel mit der Kantenlänge a = 10 m!

10/9 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Möndchen für das rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen a = 3 cm und b = 4 cm!



Vergleichen Sie die Summe der Flächeninhalte der „Kathetenmöndchen“ mit dem Flächeninhalt des Dreieckes!

10/10 Aus einer Klasse mit 27 Schülern dürfen 3 Schüler an einer Sprachreise teilnehmen. Wieviel Möglichkeiten gibt es für die Zusammensetzung der Dreiergruppe?

10/11 Geben Sie eine Funktion an, die für alle reellen Zahlen definiert ist und für die gilt:

(1) Der Funktionswert jedes Produktes ist gleich dem Produkt der Funktionswerte der Faktoren.

(2) f (6) = 36

10/12 Übersetzen Sie die im Dezimalsystem gegebene Zahl 170 in das Dualsystem und addieren Sie zu dieser Zahl die im Dualsystem gegebene Zahl 1010110. Geben Sie das Ergebnis im Dualsystem an!

10/13 Wie groß ist die Schwingungsdauer eines Pendels auf dem Mond, das auf der Erde eine Schwingungsdauer von 1 s hat?

10/14 Die Wärmedurchgangskoeffizienten k der Wände, des Daches und der Kellerdecke eines Hauses mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge 12 m) und einer Wandhöhe von 3,20 m betragen (in W/m² · K): $k_{Dach} = 0{,}30$; $k_{Keller} = 0{,}41$; $k_{Fenster} = 1{,}9$ · 25 % der Wandfläche sind Fenster. Die Wände bestehen aus Kalksandstein (Wärmeleitfähigkeit 0,99 W/m · K) und sind 24 cm stark. Der Innenputz ist 1,5 cm stark, der Außenputz 1 cm (Wärmeleitfähigkeit 0,7 W/m · K). Zusätzlich wird eine Wärmeisolation (6 cm stark, Wärmeleitfähigkeit 0,04 W/m · K) angebracht. Der Wärmeübergangswiderstand 1/a wird für die Innen- und Außenwand mit insgesamt 0,17 m² · K / W angenommen. Welcher Wärmestrom tritt bei einer Innentemperatur von 20°C aus dem Inneren des Hauses aus, wenn die Temperatur im Keller 5°C und außen -10°C beträgt?

Antwortkarte alpha-Wettbewerb 93/94

Die Preise des diesjährigen Wettbewerbs werden im Heft 2/94 veröffentlicht.

Anzahl der mit „sehr gut“ gelösten Aufgaben ☐☐

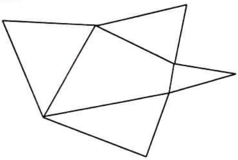
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐
5/	☐	6/	☐	7/	☐	8/	☐	9/	☐	10/	☐	E/	☐

Stufe E:

E/8 Geben Sie eine Funktion an, die für alle positiven reellen Zahlen definiert ist und für die gilt:

(1) $f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
(2) f ist streng monoton wachsend
(3) $f(1) = 2$

E/9 Die Abbildung zeigt das Netz einer vierseitigen Pyramide. Konstruieren Sie den Fußpunkt F der Höhe dieser Pyramide!



E/10 Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\sqrt{5}\,cm$.

E/11 Wegen Bauarbeiten kann ein Pkw-Fahrer die erste Hälfte der vor ihm liegenden Wegstrecke von 80 km nur mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h fahren. Wie schnell muß er im zweiten Abschnitt fahren, um die Gesamtstrecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h zurückzulegen?

E/12 Eine „Analog"-Uhr zeigt 8.00 Uhr an. Wieviel Minuten werden verstreichen, bis der große Zeiger den kleinen Zeiger eingeholt hat?

E/13 Welche Überhöhung h der äußeren Schiene über die innere Schiene ist für ein Eisenbahngleis (Spurweite s = 1435 mm) in einer Kurve vom Krümmungsradius r = 350 m vorzusehen, um bei einer Fahrgeschwindigkeit v = 55 km/h die seitliche Druckkraft zwischen Schiene und Spurkranz zu vermeiden?

E/14 Ein homogener, dünner Stab (Masse m = 1 kg, Länge l = 96 cm) schwingt mit einem kleinen Ausschlag um einen seiner Endpunkte. Wie lang muß ein Fadenpendel sein, das die gleiche Schwingungsdauer aufweist?

Die Aufgaben wurden zusammengestellt von:

Dr. Christine Riehl,
Dr. Werner Riehl und
OStR Theodor Scholl.

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1993/1994 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 6/93 und 1/94.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu schicken an:

alpha - Mathematik als Hobby
Kennwort alpha - Wettbewerb
Postfach 129
04001 Leipzig

Den Lösungen ist eine frankierte und an Euch adressierte Postkarte beizulegen. Klebt bitte auf die Rückseite die Antwortkarte (oder eine Kopie davon) auf. Diese Antwortkarte wird mit den Ergebnissen Eurer Lösungen („gut", „sehr gut" oder „nicht gelöst") an Euch zurückgeschickt. Schulen, die gesammelte Lösungen einsenden, legen bitte entsprechend frankierte Briefumschläge für die gesammelte Rücksendung bei.

3. Von den Teilnehmer sind nur Aufgaben der eigenen oder höherer Klassenstufen zu lösen. Schüler ab Klasse 10 und Erwachsene lösen die mit 10 oder E gekennzeichneten Aufgaben.

4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

5. Die Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig („gut" oder „sehr gut") gelöst haben, senden bis zum 10. September 1994 die Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten A5-Rückumschlag und

a) bei diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden (Ihr erhaltet dann ein Goldabzeichen siehe weiter hinten im Heft) bzw.

b) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde ein.

Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die Antwortkarten.

6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5-10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der „sehr gut" gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils 5 Teilnehmer ausgelost (außerdem prämieren wir 5 Frühstarter). Diesen Glücklichen winken attraktive Preise

Einsendungen ohne Rückporto können nicht bearbeitet werden!

Einsendeschluß ist der 31. April 1994.

Mitarbeiter des Verlages oder deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Marktecke

Neues vom Fachbuch- und Computermarkt

Einblicke in die Wissenschaft

Der Wissenschaftsverlag B.G. Teubner setzt mit dieser 1992 in Leipzig begründeten populärwissenschaftlichen Sammlung seine bis ins vorige Jahrhundert zurückreichenden Traditionen im Veröffentlichen populärwissenschaftlicher Literatur fort.

Erstauflage: „Der Goldene Schnitt“ Hans Walzer

Der Goldene Schnitt tritt seit der Antike in vielen Bereichen der Geometrie, Architektur, Musik, Kunst sowie der Philosophie auf, aber er erscheint auch in neueren Gebieten der Technik und der Fraktale.

Dabei ist der Goldene Schnitt kein isoliertes Phänomen, sondern in vielen Fällen das erste und somit einfachste nichttriviale Beispiel im Rahmen weiterführender Verallgemeinerungen.

Ziel dieses Buches ist es, einerseits Beispiele des Goldenen Schnittes zu besprechen, andererseits weiterführende Wege aufzuzeigen.

ISBN 3-8154-2070-9
Kart. DM 16,80

Gabriele Liebau

Der alte Fritz setzte den Weltmeister matt

Bis vor kurzem hatten die Computer gegen Schachweltmeister Garry Kasparov nicht die Spur einer Chance. Als der Weltmeister vor einigen Jahren in Hamburg im Simultanspiel gegen 32 der besten Programme der Welt antrat, gewann er souverän mit 32:0 Punkten. Auch der IBM-Forschungsrechner Deep Thought schaffte bisher nicht einmal ein Remis gegen die Nummer eins des Schachs.

Um so überraschter war der Weltmeister, als er kürzlich anläßlich eines Deutschlandbesuches gegen das PC-Programm „Fritz2“ etliche Niederlagen hinnehmen mußte. Ursprünglich wollte Kasparov nur einige Partien spielen, aber das Elektronenhirn gewann mehrere Partien, so daß des Weltmeisters Interesse geweckt war. Resümee: Im Blitzmatch über 37 Partien kassierte Kasparov neun Niederlagen, seine ersten gegen einen Computer. Vier Partien endeten Remis.

Mittlerweile stehen die Computer bei vielen Turnieren ihren „Mensch“, so bei der letzten deutschen Schnellschachmeisterschaft oder auch bei großen Openturnieren. Herausragend ist dabei das traditionelle AEGON-Turnier Mensch gegen Computer. Bei der diesjährigen 8. Auflage zwischen den jeweils 32 Spielern beider Mannschaften siegten erstmals die Chips gegen den Grips, wenngleich nur knapp mit 98,5 : 93,5. Fritz2 steuerte 4 Punkte aus sechs Partien bei und vollbrachte damit eine Leistung, die 2317 ELO-Punkten entsprach. Einen Beitrag zu deren Berechnung ist in alpha 4/93 erschienen.

Aber auch die elektronische Konkurrenz zeigte sich von Fritz2 beeindruckt. Bei der letzten Computerweltmeisterschaft in Madrid landete das Programm auf dem fünften Platz und wurde damit zum stärksten kommerziellen Schachprogramm für PCs. Schlechter abgeschnitten haben einige Großrechnerprogramme, die pro Minute mehr für Rechenzeit Kosten, als der Kauf von Fritz2.

Auch in einem Blitzschachvergleich mit dem Rezensent, selbst Oberligaspieler, überzeugte Fritz2 besonders im taktischen Bereich. Schwach spielte das Programm einzig in einem Doppelturmendspiel, das Fritz2 trotz anfänglicher Vorteile noch verlor.

Aufgrund der Spielstärke stellt sich die Frage, ob Fritz2 nur ein Programm für Profis ist? Schon anhand des Inhaltsverzeichnisses der übersichtlichen Bedienungsanleitung wird jeder Vereinsspieler feststellen, daß Fritz2 außer als Spielpartner auch zu Trainingszwecken hervorragend geeignet ist. Unter anderem kann man mit Fritz2 auf Datenbanken des „großen Bruders Chessbase“ zurückgreifen, Partien kommentieren und analysieren, Drucken, Schachprobleme lösen, bzw. überprüfen und Trainingsdisketten nutzen.

Und der Hobbyspieler? Für ihn ist Fritz2 wohl auch in der schwächsten Stufe kaum zu schlagen. Durch einige Lehrfunktionen kann sich der Lernwillige z. B. mit Farbsignalen vor Drohungen warnen lassen oder einen Zugvorschlag vom Computer anfordern. Das Programm analysiert nachträglich die Partien und zeigt seinem „Schüler“, wo er die Fehler gemacht hat. Und damit auch die große Zahl der Schachlaien eine Chance auf Erfolgserlebnisse hat, gibt es besondere Handicap-Stufen, auf denen der Computer die Spielweise von absoluten „Patzern“ nachahmt.

Nun noch eine Kostprobe aus o. g. Blitzmatch:

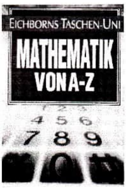
Weiß: Fritz2 ; **Schwarz:** Kasparov
Holländisch
1. Sf3 d5 2. d4 e6 3. c4 c6 4. e3 f5 5. Ld3 Ld6 6. c5 Lc7 7. Sc3 Df6 8. h3 Sh6 9. Ld2 Sd7 10 0-0 g5 11. b3 g4 12. hg4: Sg4: 13. Dc2 Tg6 14. Lc1 Sf8 15. Lb2 Dg6 16. g3 Dh6 17. Se2 Sg6 18. Kg2 Dg7 19. Th1 e5 20. de5: S6e5: 21.Lf5: Df7 22. Lg4: Lg4: 23. Sfd4 h5 24. Sf4 0-0-0 25. f3 Ld7 26. Sh5: Tdf8 27. Sf4 Sf3: 28. Kf3: Tg3:+ 29. Kg3: Lf4:+ 30. Kf2 Le5+ 31. Ke1 Lg4 32. Dg2 Tg8 33. Sb5 De7 34. Sa7:+ Kb8 35. Le5:+ De5: 36. Sc6:+ bc6: 37. Dh2 Dh2: und Kasparov gab gleichzeitig auf.

Fritz2 läuft auf IBM-kompatiblen PCs und kostet DM 178. Es ist im Schachversandhandel und beim Hersteller, der ChessBase GmbH, Überseering 25, 22297 Hamburg, zu beziehen.

Richard Brömel

EICHBORNS TASCHEN-UNI

Vom außen macht das gerade mal 8,2 x 11,6 cm große Buch mit dem Titel „Mathematik von A-Z“ eigentlich nicht den Eindruck eines umfangreichen Mathematiknachschlagewerkes. Doch schon beim ersten Blättern merkt man: Dieses Buch hat es in sich. Und das ist wörtlich zu nehmen. Denn was da auf knapp 300 Seiten zusammengefaßt ist, umfaßt das gesamte Grundwissen an Mathematik - und noch etwas mehr.



Dabei ist dies nur eines aus einer größeren Reihe. Die Idee dafür stammt aus England. Schon 1908 gründete der Verlag Collins die Reihe der Collins Gems, der Collins „Diamanten“, wie sie in Ihrem Herkunftsland heißen. Alleine der Band „Vögel“ verkaufte sich in 13 Jahren über 650.000 mal. 1979 erhielt die Reihe ihr jetziges ansprechend handliches Format - inzwischen waren einige Bände schon Millionenseller. Die handlichen Bücher gibt es außer in England noch in zehn anderen Ländern, darunter auch Japan, Polen und Litauen.

Das Buch „Mathematik von A-Z“ liefert ein zugleich umfangreiches und übersichtliches Handbuch über alle Bereiche der Mathematik. Übersichtlich gemacht durch die alphabetische Anordnung bietet das Buch schnell die gewünschte Information. Wichtige Wörter sind hervorgehoben und zu den Stichwörtern gibt es Beispiele oder erklärende Skizzen. Beschrieben werden sowohl die Grundregeln der Mathematik als auch etwas umfangreicher die Begriffe der höheren Mathematik. So findet sich auf den ersten Seiten eine komplette Beschreibung mathematischer Symbole - angefangen von gleich, plus und minus bis zur Grundmenge, Teilmenge und leeren Menge. Dabei beschreibt das Buch auch Randbegriffe wie Abakus (Rechenmaschine) und Meridiane. Die Erklärungen sind allgemeinverständlich und trotz ihrer Kürze sehr inhaltsreich.

Insgesamt ist das Buch ein umfangreiches Nachschlagewerk mit ausgezeichnetem Preis-Leistungsverhältnis.

Das Buch kostet 12,80 DM, enthält im Format 8,2x11,6 cm 290 Seiten und erschien im Eichborn Verlag Frankfurt/M.

ISBN 3-8218-0623-0

Aufschlußreiche Katastrophen

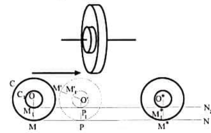
Hinter dem Titel „Logischen Katastrophen auf der Spur“ verbirgt sich eine Sammlung typischer Sophismen in Algebra, Arithmetik, Geometrie und Logik. Dabei werden so typische Sophismen wie der „Beweis“ von 1=2 genauso aufgeführt und erklärt wie das Problem von Achilles und der Schildkröte. Dabei sollen - nach dem Motto: „Die Menschen, die den richtigen Weg gehen wollen, müssen auch von Irrwegen wissen.“ - dem Leser typische Fehlschlüsse erklärt werden, auf das er diese selbst nicht tut. Dies wird auf äußerst anschauliche und amüsante Art dargelegt.

Ein paar Kostproben gefällig? Bitte sehr:

Ein Logiker versprach seinem Gesprächspartner, daß er ihm unwahrscheinliche Situationen demonstrieren werde. Beim Spaziergang trafen die beiden den Wahrheitsliebenden W. Der Logiker stellte ihm zweimal ein und dieselbe Frage, auf die er die gegensätzlichen Antworten „Nein“ und „Ja“ erhielt. Die drei setzten den Spaziergang fort und trafen L., von dem man nie ein wahres Wort zu hören bekam. Der Logiker stellte dem Wahrheitsliebenden und dem Lügner ein und dieselbe Frage, und beide antworteten darauf „Ja“. Danach stellte er ihnen wieder ein und dieselbe Frage und erhielt von beiden die Antwort „Nein“. Welche Fragen stellte der Logiker?

Alle Kreise haben den gleichen Umfang („Das Rad des Aristoteles“)

Wir betrachten zwei verbundene konzentrische Kreise C und C_1 mit verschiedenen Radien. Das physikalische Modell dieser Figur könnten zwei Scheiben sein, die an einer horizontalen Achse untrennbar aneinander gekoppelt sind.



An die Kreise C und C_1 legen wir in den Punkten M und M_1, die sich auf dem Radius $\overline{OM}$ befinden, die Tangenten $\overline{MN}$ und $\overline{M_1N_1}$. Die Kreise sind fest verbunden und werden sich deshalb wie ein Ganzes bewegen (zum Beispiel in die Richtung, die mit einem Pfeil gekennzeichnet ist), der Kreis C auf der Geraden $\overline{MN}$, der Kreis C_1 auf der Geraden $\overline{M_1N_1}$. Gestrichelt ist eine Zwischenlage der Kreise dargestellt (die Punkte M' und M_1' sind die entsprechenden Lagen der Punkte M und M_1).

Das physikalische Modell eines solchen Prozesses kann die Bewegung des Rades eines Eisenbahnwagens sein, wenn unter dem Vorsprung des äußeren Randes des Rades eine Ebene parallel zu den Gleisen gelegt ist.

Nach einer ganzen Umdrehung des Kreises C nimmt der Punkt M die Lage M^* ein. Dabei vollführt der Kreis C_1 ebenfalls eine ganze Umdrehung, und der Punkt M_1 geht in den Punkt M_1^*, der auf dem zum Radius $\overline{OM}$ parallelen Radius $\overline{O^*M^*}$ liegt, über. Die Parallelität der beiden Radien ist dadurch gewährleistet, daß sie senkrecht auf der Geraden $\overline{MN}$ stehen. Hieraus folgt, daß $|MM^*| = |M_1M_1^*|$ ist, und das bedeutet, daß zwei beliebige Kreise nach einer Umdrehung die gleiche Strecke zurückgelegt haben. Also haben die beiden Kreise den gleichen Umfang.

Wer die Auflösung der beiden Probleme wissen möchte, der sollte so schnell wie möglich zur nächsten Buchhandlung gehen und das Buch kaufen. Wem das noch nicht ganz als Beweggrund ausreichen sollte: das Buch ist mit Grafiken von M. C. Escher geschmückt. Sie stellen jede Menge unmöglicher Gebilde und optischer Täuschungen dar. Das Buch ist erschienen im Fachbuchverlag Leipzig unter der ISBN - Nummer 3-343-00831-1 und kostet 16,80 DM.

Roland Becker

Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb Rheinland-Pfalz

„Gute Idee. BHW"! Der griffige Werbespruch einer großen norddeutschen Bausparkasse beschreibt in einem gewissen Sinn auch einen Sonderfall unter den deutschen Mathewettbewerben: den Landeswettbewerb Mathematik Rheinland-Pfalz. Entsprechend der Doppelbotschaft des knappen Einzeilers unterscheidet sich diese Wettbewerbsform in zweifacher Hinsicht von anderen Unternehmungen zur Förderung mathematischer Interessen und Begabungen in der Schule. So beginnt der mehrstufige Zyklus jeweils in den 8. Klassen und endet erst nach drei Jahren in der 10. Jahrgangsstufe. Zur Finanzierung dieses Mammutwettbewerbes gelang den Mannen um den umtriebigen Wettbewerbsleiter, **Martin Mettler**, ein für die Bundesrepublik wohl einmaliges Kunststück: die Organisatoren sicherten sich klugerweise die Dienste eines zahlungskräftigen Partners, des BHW Rheinland-Pfalz. Dies ist angesichts chronisch leerer Kassen der öffentlichen Hand eine wegweisende Tat. Nun, schließlich stellt ja die Mathematik auch nicht unerheblich die Geschäftsgrundlage eines großen Versicherungsunternehmens dar! Im Weltmaßstab gilt längst die nützliche Regel, sich aufwendige Mathematik-Talentwettbewerbe von finanzstarken Wirtschaftskonzernen bezahlen zu lassen. Nur zum Vergleich: In Südafrika sponsert ein Lebensversicherer die dortige Mathematikolympiade. In Australien halten Banken und der Shell-Konzern die Wettbewerbsszene flüssig.

Die Idee zu dem Landeswettbewerb Rheinland-Pfalz reifte während einer Lehrerfortbildungsveranstaltung im Herbst 1986 in Mainz. Nach umfangreichen Vorarbeiten erfolgte genau drei Jahre später der Startschuß zur 1. Landesolympiade. Den Anfang machen nun regelmäßig Schüler aus den 8. Klassen der Gymnasien und Gesamtschulen des Landes, die, laut Plakataufruf „Spaß am Denken und/oder Knobeln haben und sich in Mathematik etwas zutrauen" (Zugelassen sind auch sogenannte Frühstarter aus den 7. bzw. 6. Klassen). In einer zweistündigen Klausur (an allen Schulen zum gleichen Zeitpunkt im November) werden fünf Knobel- und Denkaufgaben vorgelegt. Der Schwierigkeitsgrad dieser Testaufgaben ist jedoch so niedrig, daß etwa 20-30 % der Starter aus Jahrgangsstufe 8 mit guten Erfolgsaussichten das erste Etappenziel erreichen können. Schon nach der ersten Runde trifft dann zu, was der Wettbewerbssponsor in einer anderen Werbeaussage verspricht: „Es zahlt sich aus!" Auf die Punktbesten warten demzufolge viele Sachpreise.

Mathematik - ein Hit

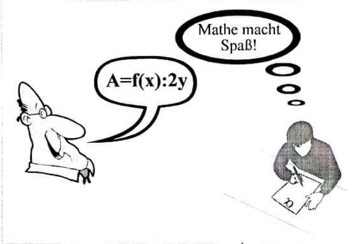
Die zweite Runde ist den Preisträgern des 1. Durchgangs vorbehalten. Hier müssen die Vorjahressieger, die mittlerweile eine 9. Klasse besuchen, in einem Zeitraum von 7 Wochen in Hausarbeit viel umfangreichere Aufgaben bewältigen. Erneut werden die Jahrgangsbesten in fünf über das ganze Land verteilten Veranstaltungen feierlich ausgezeichnet und können wieder mit einem Präsent rechnen. „Der Lohn dafür ist ehrlich erarbeitet, denn die Aufgaben waren doch anspruchsvoll", meinte etwa auf einer dieser Feiern in Koblenz, Dietrich Lissautzki, von der Aufgabenkommission zur 2. Runde. Aber Mathematik bestehe nicht nur aus trockenen Zahlen, sondern könne durchaus auch einmal unterhaltsam sein. Man müsse, um in der Rheinland-Pfalz Olympiade zu bestehen, zwar nicht gleich „über sieben Brücken gehen", wie noch Peter Maffay im Schlagerlied vorschlug. Dennoch ist es ganz amüsant, sich einmal in gerader Linie von der EULER-Geraden bis zum Königsberger Brückenproblem vorzutasten.

In einem späteren fachlichen Gespräch mit Mitgliedern der Wettbewerbskommission werden aus den Siegern der 2. Runde die Kandidaten für die Finalrunde ausgewählt. Diese 3. Runde besitzt jedoch keinen weiteren Auslesecharakter mehr. Sind die ersten beiden Durchgänge mit Klausuren und Hausarbeiten noch ausschließlich auf Einzelkämpfertum abgestellt, sollen die Kandidaten in der Schlußrunde durch Hochschulmathematiker und Studierende, mit den Arbeits- und Denkweisen in der Höheren Mathematik vertrautgemacht werden. Problemlösefähigkeiten und das Arbeiten im Team können dort ebenfalls unter Anleitung trainiert werden. Die beiden bisher durchgeführten Finalrunden verliefen naturgemäß sehr lebendig. Die 25 Teilnehmer (darunter auch 5 Mädchen), die zuletzt im dreistufigen „Sieb des Landeswettbewerbs als Primschüler" übriggeblieben sind, brüteten in insgesamt vier Seminarsitzungen im April 1993 in gelöster Atmosphäre mit Hochschullehrern des Fachbereiches Mathematik der Johannes Gutenberg Universität Mainz, mitunter behutsam unterstützt von zwei Studentinnen, über Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, über rekursiv definierte Funktionen und reguläre Polygone und Polyeder. Wie bereits in der ersten Begegnung dieser Art im Frühjahr 1992, verblüfften die mathematischen Anfänger die anwesenden Experten durch ihre Unbekümmertheit und Diskutierlust. Die Uni-Professoren waren überrascht, mit welchem Scharfsinn die Nachwuchsmathematiker an die schwierige Materie der platonischen Körper, der Winkeldrittelung oder gar der Chaostheorie herangegangen sind.

Mit Mathe auf Achse

Damit auch die Erholung nicht zu kurz kam, waren die anstrengenden mathematischen Erörterungen in ein Rahmenprogramm verschiedenster Freizeitaktivitäten eingebettet: nachmittags suchte man Ablenkung im Rüdesheimer Musikautomatenmuseum mit anschließendem Rundblick vom Niederwald-Denkmal auf das Rheintal. Anderntags gaben sich Landespolitiker im Mainzer Unterhaus die Ehre. Zum Tagesausklang brannten einige ein Feuerwerk guter Ideen beim Knobelabend ab. Spaß an dieser Art von fröhlichem Studium müssen auch die Hochschullehrer gefunden haben. Völlig überraschend machte nämlich die Mainzer Uni von sich aus das Angebot, ähnliche Seminare an 4 bis 5 unterrichtsfreien Samstagen im Jahr für interessierte Schüler anzubieten.

Die glücklichen Teilnehmer der nächsten Finalrunde 1994 erwartet ein ganz besonderes Schmankerl. Sie dürfen vermutlich Gäste der Universität im rumänischen



Timišoara sein. Ermöglichen will dies Landeswettbewerbsleiter, Martin Mettler, der vor Jahren aus Rumänien nach Deutschland übergesiedelt ist. Nützlich erweisen sich nun seine alten Kontakte aus der Zeit, da er noch als Delegationsmitglied mit rumänischen Mannschaften an der Internationalen Mathematik Olympiade teilgenommen hatte. Alles in allem läßt sich sagen: Der Landeswettbewerb Mathematik Rheinland-Pfalz ist eine runde Sache. Ein Sponsor sichert über einen längeren Zeitraum die Bereitstellung der nötigen Geldmittel zu. Die Kultusbehörde beäugt aufmerksam den glatten Lauf der Dinge. Lehrerinnen und Lehrer opfern kostbare Freizeit und geben auch einmal fachliche Hilfestellung für ratlose Aufgabenlöser. Unter den Schulleitungen findet der Wettbewerb eine erstaunlich positive Aufnahme und er kommt auch bei den Schülern immer besser an. Zahlen belegen dies: Gingen zum Auftakt 1989 schon beachtlich viele mathehungrige Schüler an den Start (1680 Teilnehmer aus 94 von ca. 150 Schulen in Rheinland-Pfalz), waren es diesmal stattliche 2311 (aus 114 Schulen).

Möglicherweise haben die Organisatoren ein glückliches Händchen bei der Aufgabenauswahl gehabt. Überzeugt Euch selbst davon. Nachfolgend stelle ich die 5 Aufgaben der 1. Runde 1992 sowie die 4 Probleme der 2. Runde 1993 zur Bearbeitung vor. Viel Spaß!

1. Runde - 8. Klasse - 1992

Aufgabe 1:

Ein Würfel mit der Kantenlänge 12 cm steht auf der Tischplatte. Auf der Deckfläche des Würfels steht ein kleinerer, ohne über die Fläche hinauszuragen. Wie groß ist die Kantenlänge des kleineren Würfels, wenn die sichtbaren Oberflächenteile der beiden Würfel flächengleich zur Gesamtoberfläche des großen Würfels sind?

Aufgabe 2:

Ute sortiert eine Anzahl von Münzen in Dreier-Reihen, dabei behält sie eine Münze übrig. Versucht sie es mit Zweier-Reihen, so bleibt ebenfalls eine Münze übrig. Auch wenn sie Vierer-Reihen bildet, hat sie eine Münze übrig. Erst wenn Ute Fünfer-Reihen legt, behält sie keine der Münzen übrig. Wieviele Münzen könnte Ute haben, wenn es weniger als 100 sind?

Aufgabe 3:

Zeichne zwei sich schneidende Geraden g und h, die nicht senkrecht zueinander sind. Bezeichne den Schnittpunkt von g und h mit S. Markiere einen beliebigen Punkt A auf g mit A $\neq$ S.

Es sei nun B der Bildpunkt der Spiegelung von A an h, C sei der Bildpunkt der Spiegelung von B an g, und D sei der Bildpunkt der Spiegelung von C an h.

Zeichne die Punkte B, C und D und begründe, daß A, B, C und D auf einem Kreis liegen. Zeichne diesen Kreis ein!

Aufgabe 4:

Zwei Züge fuhren aneinander in entgegengesetzter Richtung vorbei, der eine mit der Geschwindigkeit von 36 km/h, der andere mit der von 45 km/h. Ein Fahrgast, der im 2. Zug saß, stellte fest, daß der 1. Zug zur Vorbeifahrt an ihm 6 Sekunden brauchte. Wie lang war der Zug?

Aufgabe 5:

Frisch geerntete Pilze enthalten 95 % Wasser. Durch Lufttrocknung verringert sich der Wassergehalt auf 80 %. 120 kg frische Pilze werden luftgetrocknet. Wieviel Kilogramm wiegen diese Pilze nach der Trocknung?

2. Runde - 9. Klasse - 1993

Aufgabe 1:

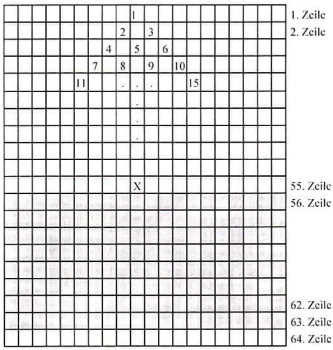
Die natürlichen Zahlen seien in einem „Dreieck-Schema" wie in der Abb. angeordnet. Durch das Schema ist ein Streifen der Breite von 8 Zeilen gezeichnet (schraffiert in der Abb.).

a) Befindet sich bei x eine Zahl? Wenn ja, welche?

b) Befindet sich die Zahl 1993 in dem Streifen, über oder unter ihm?

c) In welcher „Parallelzeile" zur „Kantenzeile" 1; 2; 4; 7; 11..... befindet sich die Zahl 1993? Gib deren Anfangszahl an!

(Zu jeder der drei Antworten muß eine Begründung gegeben werden!)



Aufgabe 2:

In einem gleichschenkligen Trapez ABCD mit den Grundlinien der Längen $|AB| = a$ und $|CD| = c$ und der Höhe mit der Länge h, sei s die Symmetrieachse.

a) Begründe: Auf s gibt es höchstens zwei Punkte, von denen aus der Schenkel BC jeweils unter einem rechten Winkel erscheint.

b) Gib eine Beziehung zwischen a, c und h dafür an, daß genau ein solcher Punkt auf s existiert.

Aufgabe 3:

Drei Spieler A, B, C spielen folgendes Spiel: Auf genau drei Spielkarten ist jeweils eine ganze Zahl geschrieben. Für diese Zahlen p, q, r gilt: $0<p<q<r$.

Diese drei Karten werden gemischt und so verteilt, daß jeder der drei Spieler eine Karte erhält und ihm dann genau so viele Punkte zugeteilt werden, wie die Zahl auf der Karte angibt.

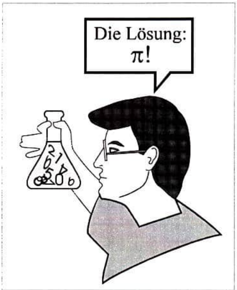
Danach werden die Karten wieder eingesammelt, gemischt, erneut verteilt und Punkte vergeben.

Dieser Spielverlauf wird mindestens zweimal durchgeführt.

Nach der letzten Runde hat A 20 Punkte, B hat 10 Punkte und C hat 9 Punkte. B weiß noch, daß er beim letzten Mal r Punkte bekommen hat.

a) Wieviel Runden wurden gespielt?

b) Wie waren die Karten in den einzelnen Runden verteilt und welche Werte hatten p, q, r?



Aufgabe 4:

In der Gleichung:
$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 95$ sind die $a_i > 0$ natürliche Zahlen.

Bilde die Summe S ihrer Quadrate, also $S = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2$.

a) Zeige an drei Beispielen, daß S um so kleiner ist, je weniger sich die a_i voneinander unterscheiden.

b) Zeige: wenn sich bereits zwei der zehn Zahlen, etwa a_1 und a_2, um mehr als 1 unterscheiden, dann kann S nicht minimal sein.

c) Begründe: S ist minimal, wenn fünf der Zahlen a_i den Wert 9 und die restlichen fünf den Wert 10 haben. Wie groß ist das minimale S?

Pail Jainta

Alphons logische Abenteuer

Alphons machte zusammen mit seinen Eltern und seiner Schwester einen Ausflug. Die Autofahrt ging zunächst durch eine Alphons bekannte Landschaft; langsam schlief er ein, trotz oder vielleicht auch gerade wegen des ununterbrochenen Geplappers seiner Schwester.

Als er wieder aufwachte, sah er vor dem Auto eine senkrecht stehende, leicht vibrierende Schranke. „Ging sie auf oder wird sie geschlossen?", dachte Alphons und beruhigte sich bei dem Gedanken, er werde nach einer kurzen Zeitspanne ja schon sehen, was der Fall ist. Schon wollte er fragen, wo sie sich befänden, da schoß ihm ein anderer Gedanke durch den Kopf. Wenn ich nun ein Wesen wäre, das nicht in Ruhe warten könnte, in welchen Zustand die Schranke übergeht, sondern sofort eine Entscheidung treffen müßte, die im Falle eines Irrtums sogar negative Folgen für meine Existenz hätte? Die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums ist ebenso groß wie die, das Richtige zu treffen. Nur ein unverbesserlicher Optimist könnte das als eine günstige Überlebenschance ansehen. „Da muß ich doch einmal zu Hause in mein Logikbuch schauen", beendete Alphons seine Gedanken.

Eine Weile brauchte er schon, um sein Problem unter die richtige Fragestellung zu bringen. Am Ende sah er sich in seinen Bemühungen so belohnt, daß er Berti eine ausführliche Darstellung gab. Der Sache nach gehe es um eine Frage, bei deren Beantwortung eine andere als die zweiwertige Logik von Nutzen sein könne. Berti, anfangs gar nicht begeistert von Alphons' Belehrungseifer, wurde hellhörig. „Gibt es neben unserer Schullogik noch eine andere Logik?", fragte er verblüfft. Alphons bestätigte das und fuhr in seiner Darstellung fort. Sehen wir die Schranke als ein System an, von dem drei Zustände für uns wichtig sind: Die Schranke schließt sich (mit dem Grenzfall der geschlossenen Schranke), die Schranke öffnet sich (die offene Schranke als Grenzfall eingeschlossen) und es ist unentschieden, ob sich die Schranke öffnet oder schließt. Ein ähnliches Beispiel liefert ein fahrendes Auto bezüglich der Änderung seiner Fahrtrichtung. Im folgenden wolle er aber bei der Schranke als Systembeispiel bleiben. Behauptet man, die Schranke schließt sich (p), so ist p wahr, wenn sich die Schranke schließt. Falsch ist p, wenn sich die Schranke definitiv nicht schließt, das ist aber genau dann der Fall, wenn sich die Schranke öffnet. Es bleibt aber noch ein Fall zu betrachten, nämlich der unentschiedene Zustand. Wenn man nun mit 1 die Wahrheit von p, mit 0 die Falschheit von p und mit ½ den unentschiedenen Zustand beschreibt, so hat man genau drei Werte, die auch die Rede von einer Dreiwertigkeit rechtfertigen. Wie nun so eine Logik funktionieren kann, sieht man schon am Beispiel der Negation: N soll abkürzend für „die Negation von" stehen, Np steht also für die Negation von p. Dann ist in unserem Beispiel offensichtlich Np falsch, wenn p wahr ist, Np wahr, wenn p falsch ist und Np unentschieden, wenn auch p unentschieden ist. In einer Tabelle zusammengefaßt:

p	Np
1	0
0	1
½	½

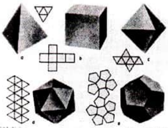
Das ist nun keine zwei-, sondern eine dreiwertige Verneinung. Eine Logik über Systeme und deren Zustände kann also dreiwertig sein. In ihr gilt nicht, daß Aussagen entweder wahr oder falsch sind, anstelle des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten tritt ein Gesetz vom ausgeschlossenen Vierten: Neben 1, 0, ½ gibt es keinen weiteren Wahrheitswert. Wenn wir aber den Spezialfall betrachten, daß der Wert ½ nicht vorkommt, so erhalten wir wieder die übliche Negation der zweiwertigen Logik. Da Berti Alphons immer noch fragend ansah, fügte dieser hinzu: „Ich habe auch etwas über vierwertige Logik gelesen, aber das schien mir im Moment nicht so wichtig zu sein." „Eigentlich wollte ich Dich fragen, welche Logik denn nun die richtige ist", entgegnete Berti, „aber ich glaube, wir sollten erst einmal Fußball spielen gehen, die anderen warten schon". „Das ist eine gute Idee!", stimmte Alphons erleichtert zu.

Prof. Dr. L. Kreiser

Einblicke in die Geschichte

Platon und kein Ende

Im Buch XIII der „Elemente“ des Euklid (um 365 - um 300 v.u.Z.) wurde der Nachweis geführt, daß es genau fünf reguläre Polyeder gibt: Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. (siehe Abb.)



Diese Körper werden auch als platonische Körper bezeichnet, weil Platon (427-348 v.u.Z.) ihnen eine philosophische Bedeutung beilegte: dem Würfel entspricht die Erde, dem Oktaeder die Luft, dem Tetraeder das Feuer und dem Ikosaeder das Wasser. Die gesamte Welt habe die Form eines Dodekaeders. Diese Idee griff Johannes Kepler (1571-1630) in seinem „Weltgeheimnis“ von 1596 auf (Abb.). Die relativen Entfernungen der Planeten von der Sonne lassen sich durch die Verhältnisse der Radien der um die fünf platonischen Körper ein- und umbeschriebenen Kugeln darstellen. Spielen diese regulären Polyeder in der Naturwissenschaft, ohne zu spekulativen Behauptungen zu greifen, aber wirklich eine Rolle? Es bietet sich sofort als Beispiel die Kristallographie an. Es wird vermutet, daß auch die Pythagoreer - ein Orden, der bis um 450 in Süditalien existierte - die fünf regulären Polyeder kannten und bemerkt hatten, daß Schwefelkies als Dodekaeder kristallisiert. Auch Würfel (z.B. Steinsalz), Tetraeder (z.B. Fahlerz) und Oktaeder (z.B. Magnetit) treten in natürlichen Mineralien auf. Nur das Ikosaeder kommt nicht als natürliche Kristallform vor. In der Kristallographie wird als Ikosaeder aber auch ein Körper bezeichnet, der zwar von 20 Dreiecken begrenzt wird, aber von diesen Dreiecken sind acht gleichseitig und zwölf „nur“ gleichschenklig. Ein Mineral mit dieser Struktur ist z.B. Lenzit. Kann man auch organische Verbindungen, also Kohlenstoffverbindungen, mit der Struktur regulärer Polyeder herstellen? Seit 1874 J. H. van't Hoff (1852-1911) und J. A. Le Bel (1847-1930) das Tetraedermodell des Kohlenstoffs in Vorschlag brachten, weiß man, daß z.B. Tetrachlorkohlenstoff Tetraederform hat oder die neue Gruppe der Tetrahedrane. Auch organische Verbindungen von Phosphor und Arsen können in Tetraederform auftreten. Als Ikosaeder tritt das Buckminsterfulleren auf, ein Molekül aus 60 Kohlenstoffatomen. Es ist die dritte Zustandsform des Kohlenstoffs neben Diamant und Graphit. Diese Substanz wurde 1966 als existierend vorausgesagt und 1990 in größeren Mengen hergestellt. Erst 1993 ist es nun in München gelungen, eine siliziumorganische Verbindung herzustellen, die polyedrisch ist. Die Siliziumatome bilden ein Tetraeder und an den Ecken dieses Körpers befindet sich jeweils eine bestimmte siliziumorganische Verbindung.

1494 es erscheint in Venedig die „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita“ von Luca Pacioli (1445-1514). Das Werk enthielt u.a. erste, sehr einfache Vorüberlegungen zu den Logarithmen, die Zeichen p (von piu) für plus und m (von meno) für minus, R (von radix) für die Quadratwurzel. Insgesamt war die „Summa ...“ eine Zusammenfassung der Mathematik seiner Zeit.

1594 Druck der arabischen Euklid-Ausgabe von at-Tusi (1201-1274). In dieser Schrift versuchte at-Tusi, wie in anderen Schriften auch, einen einwandfreien Aufbau der Parallelenlehre. Diese Schrift gab dem Engländer John Wallis (1616-1703) wesentliche Anregungen für seine Parallelentheorie.

1619 es erscheint Johannes Keplers Werk „Harmonice mundi“ (Weltharmonie). In diesem Werk findet sich erstmals das dritte Keplersche Gesetz.

1694 Gründung der Universität Halle. Von dieser Universität gehen starke Impulse für eine Neugestaltung des mathematischen Hochschulunterrichtes aus. Diese Neugestaltung war vor allem Christian Wolff (1679-1754) zu danken. Wolff trat für die ausschließliche Verwendung der deduktiven Methode und für die Freiheit von Lehre und Forschung ein.

1719 Johann Bernoulli (1667-1748) behandelt die Grundeigenschaften der ballistischen Kurve.

1844 es erscheint die „Lineale Ausdehnungslehre“ des Stettiner Gymnasialprofessors Hermann Graßmann (1809-1877). Diese Arbeit ist eine der begründenden Studien der Vektorrechnung gewesen.

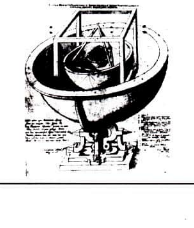
1869 am 9. April Elie Cartan geboren (siehe Text).

1964 am 18. März starb in Stockholm der Begründer der Kybernetik, Norbert Wiener.

1992 am 19. Februar entdeckt der amerikanische Astronom Peter Collins die Nova Cygni 1992. Diese Entdeckung wurde mit dem Weltraumteleskop Hubble gemacht. Die expandierende Gashülle hat eine Geschwindigkeit von etwa 1260 km/sec.

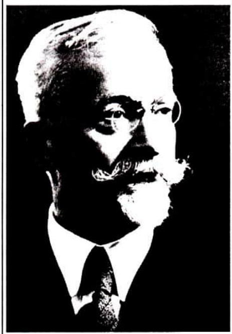
1993 in München werden siliziumorganische Verbindungen mit Tetraederstruktur hergestellt. (siehe Text)

Keplers „Weltgeheimnis“



Später Ruhm - Elie Cartan

Elie Cartan war der Sohn eines Schmieds aus Dolomieu im Departement Isere in den französischen Alpen. Er wurde am 9. April 1869, also vor 125 Jahren, geboren. Die soziale Herkunft und auch die Gegend, in der Cartan aufwuchs, sprachen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gegen eine bedeutende wissenschaftliche Laufbahn.



Aber wie über 100 Jahre vorher bei Carl Friedrich Gauß (1755-1833) spielten sein Lehrer und die Schulinspektion Schicksal. Der Schulinspektor Antonin Dubost - er wurde viel später Präsident des französischen Senats - bemerkte Cartans Begabung und besorgte Geldmittel für Studien an den Universitäten von Lyon und Paris.

Nach seinem Studium war Cartan an den Universitäten von Montpellier, Lyon und Nancy tätig. Von 1912 bis 1940 war er Professor in Paris. Weitreichende Anerkennung fand Cartan mit seinen Arbeiten erst nach 1930. Das lag vor allem daran, daß Cartan den beherrschenden mathematischen Vorstellungen der sehr berühmten Gelehrten, Henri Poincare (1854-1912) und Hermann Weyl (1885-1955), nicht folgen mochte und, statt deren Ideen wenig originell auszuarbeiten, eigene Wege ging.

Er beschäftigte sich vorwiegend mit Gruppentheorie („Lie-Gruppen“), der Topologie (ab 1925), der Theorie der äußeren Differentialformen und der Differentialgeometrie. In der Differentialgeometrie, also der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf geometrische Probleme, wurden die Cartanschen Arbeiten nach 1917 benutzt, um ein Modell für die allgemeine Relativitätstheorie Albert Einsteins (1879-1955) zu finden. Hochberühmt starb Elie Cartan am 6. Mai 1951 in Paris. Sein Sohn, Henri Cartan (geb. 1904), Professor in Paris, wurde ebenfalls ein weltbekannter Mathematiker.

alpha-Wettbewerb 92/93

Die Abzeichen in Gold und Teambeteiligungen

Wer beim alpha-Wettbewerb (siehe Seite 20) erfolgreich teilgenommen hat, bekommt von uns eine Urkunde. Nach dreimaliger Teilnahme am Wettbewerb schickt Ihr die drei Urkunden zusammen mit den Antwortkarten an uns, und bekommt dafür ein Goldabzeichen. Außerdem werdet Ihr hier in dieser Rubrik unter der entsprechenden Anzahl der teilgenommenen Jahre veröffentlicht. Wie Ihr seht gibt es sowohl „alte Hasen", die dem Wettbewerb schon 25 Jahre treu sind, aber auch junge Leser, die erst seit drei Jahren mitmachen. Wollt Ihr auch teilnehmen, dann öffnet die Seite 23 und lest die Teilnahmebedingungen. Und danach macht Euch an die Lösung der Aufgaben. Übrigens: auch in diesem Jahr gibt es wieder viele Preise zu gewinnen. **Macht mit!**

Für 3jährige Teilnahme

Silvio Baier	Dresden
Hendrik Bartko	Blankenfelde
Silvia Birnbaum	Spitzkunnersdorf
Arne Bittig	Cottbus
Susanne Deblitz	Berlin
Bianca Dönicke	Glienicke
Cornelia Gleichmann	Eilenburg
Katy Goldschmidt	Halle
Ina Graetsch	Nimritz
Matthias Groch	Cottbus
Berit Gschwender	Brohm
Holger Heidrich	Bergen
Sven Helm	Iden
Danielle Hoja	Dresden
Silvio Klahn	Ivenack
Bruno Korn	Nandlstadt
Susanna Kube	Hohen Neuendorf
Christian Licht	Vacha
Anja Mann	Bautzen
Mendi Möller	Kremmen
Eric Neuber	Gerbitz
Bettina Recknagel	Bad Salzungen
Andre Röthig	Sömmerda
Manuela Schlamm	Burow
Claudia Schreiber	Leipzig
Martin Trini	Fürth

Für 4jährige Teilnahme

Alexander Albrecht	Berlin
Heike Aßmus	Berlin
Linda Baier	Dresden
Wolfgang Barthel	Halle
Andrea Beil	Lübbenau
Sigrun Deweß	Leipzig
Lars Dornheim	Magdeburg
Andrea Englisch	Leipzig
Lydia Franck	Potsdam
Franka Graetsch	Nimritz
Ulrich Hertel	Chemnitz
Rico Jänicke	Prenzlau
Regine Kerber	Saal
Doreen Köhler	Cottbus
Thomas Müller	Klaffenbach
Nicole Neumann	Möser
Christine Poerschke	Dömitz
Marika Schartow	Anklam
Stefan Schumann	Niederschmalkalden
Christian Schuster	Grünhain
Ines Spenke	Berlin
Nancy Storch	Fambach
Anke Wolf	Mittweida

Für 5jährige Teilnahme:

Sarah Bardy	Netphen
Katharina Bräutigam	Görlitz
Stefanie Danz	Schweina
Kristian Debrabant	Eisleben
Susann Fellenberg	Torgau
Carsten Ficker	Leubetha
Anja Friederichs	Bergfelde
Martin Friederichs	Bergfelde
Matthias Hamm	Suhl
Ina Hänsgen	Glashütte
Bert Häßler	Dresden
Peter Heinke	Karlsburg
Erik Herrmann	Rothemühl
Stefan Herrmann	Wegefarth
Florian Hoffmann	Zerbst
Andreas Jacob	Kyritz
Christina Jurke	Cottbus
Birgit Kenner	Blumenhagen
Diemo Klingenberg	Hammelspring
Martin Kragl	Erfurt
Siegfried Kulka	Sondershausen
Holger Kunze	Erlangen
Yvonne Langer	Eisenach
Christian Loos	Gschwenda
Thomas Mann	Bautzen
Christian Martin	Unterpörlitz
Lars-Peter Müller	Leipzig
Astrid Neidhardt	Brotterode
Thomas Rathmann	Meura
Christiane Reiß	Langewiesen
Ulrike Richter	Piesteritz-Wittenbg.
Christina Rübsam	Vacha
Christina Sänger	Greifswald
Christiane Schmack	Dresden
Bodo Schmidt	Naumburg
Silva Schröder	Wolgast
Marika Schubert	Calau
Andreas Schütze	Beelitz
Enrico Stoll	Herzberg
Antje Vogt	Worbis
Michael Zieger	Jena

Für 6jährige Teilnahme:

Michael Beier	Görlitz
Antje Braun	Torgau
Thomas Braune	Bernburg
Dietrich Clauß	Possendorf
Christiane Czech	Magdeburg
Susanne Dräbenstedt	Aderstedt
Andreas Glaser	Großdeuben
Franziska Hambsch	Zerbst
Falk Hänel	Freiberg
Kersten Harborth	Sondershausen

Jan Kasper	Herzberg
Kornelia Kitte	Weißwasser
Christoph König	Greifswald
Jana Krauß	Bautzen
Jens Krubert	Templin
Kathleen Leuenberg	Iden
Hartmut Melzig	Greifswald
Thomas Morchel	Finsterwalde
Christiane Mühle	Leipzig
Frank Müller	Berlin
Heike Müller	Gutow
Ulrike Müller	Fischheim
Frank Neumann	Bad Salzungen
Thomas Nopp	Frankfurt/Oder
Kathrin Ola	Harzgerode
Isabella Reiß	Langewiesen
Juliane Scholz	Dudweiler
Ralf Schubert	Vacha
Bernd Schwarzer	Guben
Anja Sippel	Erfurt
Andreas Stolle	Wittenberg
Sebastian Vogt	Ilmenau
Mario Wagner	Aschersleben
Pia Weißenberg	Zschortau
Andreas Willnow	Lindenthal

Für 7jährige Teilnahme:

Antje Berndt	Chemnitz
Heike Bernsee	Sallgast
Antje Brämer	Rathenow
Sandra Engelke	Magdeburg
Ronny Ficker	Leubetha
Lars Freitag	Schwarzheide
Jens Gärtner	Leipzig
Michael Gronau	Greifswald
Mattias Hirschfeld	Eilenburg
Lutz Kratzsch	Sömmerda
Matthias Loesdau	Landshut
Ingo Maas	Berlin
Ulrich Müller	Fischheim
Ingolf Näther	Wilschdorf
Holger Reinitz	Sommerfeld
Silke Rudolph	Großröhrsdorf
Jörg Schreiber	Leipzig
Susanne Schulz	Grimma
Klaus Ullmann	Spremberg
Daniel Wolf	Mittweida

Für 8jährige Teilnahme:

Alexander Blacha	Niederorschel
Sebastian Clauß	Possendorf
Birgit Elßner	Werneuchen
Andre Gärtner	Leipzig
Anja Goldschmidt	Halle
Anett Gschwender	Brohm
Andreas Hamm	Suhl
Wilhelm Jacobs	Saurasen
Thomas Lotze	Suhl
Peggy Marx	Clausthal-Zellerfeld
Beate Pohler	Brand-Erbisdorf
Torsten Schreiber	Leipzig
Norbert Schröder	Bernau
Mirko Stolle	Wittenberg
Jan Strischek	Berlin
Jana Strischek	Berlin
Lothar Tischer	Kamenz
Silvia Wachholz	Görlitz
Angela Wiesjahn	Holzendorf

Für 9jährige Teilnahme:

Sylke Ahrend	Rakow
Cornelia Bär	Greifendorf
Alois Belter	Hagenow
Rigo Hinkelmann	Neuenbeuthen
Mario Menger	Lauterbach
Ronald Peters	Wismar
Martin Schreiter	Dortmund
Christian Tiedt	Leipzig
Andreas Winter	Schmalkalden

Für 10jährige Teilnahme:

Uwe Danz	Floh
Stefan Erb	Schwallungen
Lothar Fischer	Bad Köstritz
Thomas Freier	Creuzburg
Göran Glockmann	Jena
Elke Heidemann	Halberstadt
Peter Hörnich	Schwedt
Kilian Kindelberger	Potsdam
Kay Pfennighaus	Neubrandenburg
Jürgen Rietz	Pirna
Kerstin Schuster	Taubenheim
Sven Völker	Bad Salzungen

Für 11jährige Teilnahme:

Detlef Bartmuß	Burow
Claudia Heret	Zwickau
Beate Schreiber	Elsterwerda
Giselher Schütze	Weimar
Markus Spindler	Berlin
Andrea Thiele	Rackwitz
Andreas Vogt	Worbis

Für 12jährige Teilnahme:

Sven Aßmus	Berlin
Bertram Bracher	Schwarzheide
Steffen Eisenblätter	Delitzsch
Eva Faßmann	Dessau
Andre Kratzert	Dürröhrsdorf
Angela Schmidt	Bürgel
Stefan Warnest	Neuruppin

Für 13jährige Teilnahme:

Frauke Apel	Berlin
Birgit Bremer	Kaarst
Jens Haufe	Dresden
Petra Heiliger	Leuna
Dirk Jahn	Rostock
Karsten Kattner	Pasewalk
Alice Kraneis	Bernburg
Frank Müller	Klaffenbach
Hanka Pruditsch	Geithain
Ulrike Rößner	Erfurt
Sven Rudolph	Großröhrsdorf

Für 14jährige Teilnahme:

Henrik Hodam	Clausthal-Zellerfeld
Achim Kröber	Schönbach
Annegret Schädlich	Auerbach
Steffen Scheithauer	Parey
Hellmut Schenk	Pirna
Evelin Schott	Thalheim
Matthias Tittel	Berlin
Bert Winkler	Wilkau-Haßlau
Ulf Winkler	Frankenberg

Für 15jährige Teilnahme:

Ralf Heidenreich	Sömmerda
Andreas Israel	Chemnitz
Ronald Kaiser	Eisenach
Carsten Leibnitz	Hohenstein-Ernstthal
Uwe Martin	Crossen
Bert Minske	Berlin
Heike Morgner	Falkenstein
Carsten Schreiber	Dresden
Helmut Schreiber	Dresden
Ingolf Thurm	Dresden
Katja Uhlemann	Prausitz
Delia Wolfert	Fürth

Für 16jährige Teilnahme:

Jens Grundmann	Gevelsberg
Irene Michallik	Waren
Kerstin Müller	Dresden
Erika Schreiber	Zella-Mehlis
Erhard Zilinski	Stralsund

Für 17jährige Teilnahme:

Hartmut Boettcher	Weimar
Karl-Heinz Gora	Lohsa
Uwe Schütze	Camin

Für 18jährige Teilnahme:

Jörg Butter	Freiberg
Thorsten Eidner	Jena
Volker Georgy	Erfurt
Manfred Hille	Riesa
Karsten Milek	Hohen Neuendorf
Matthias Schreiber	Elsterwerda
Susanne Schreiber	Aachen bei Darroch
Gudrun Thäter	Paderborn
Tilman Völzke	Böhlen

Für 19jährige Teilnahme:

Hans Creutzburg	Thal
Rüdiger Düsing	Magdeburg
Horst Fliegner	Jarmen
Harry Höfer	Dorndorf
Uwe Maaz	Konstanz
Jens Pönisch	Chemnitz
Rene Schüppel	Hoyerswerda
Heidrun Tiedt	Teterow
Claudia Trochold	Reichenbach
Guntram Türke	Auerbach
Eva-Maria Wabbel	Wolfen

Für 20jährige Teilnahme:

Ina Büttner	Berlin
Uwe Ebert	Dippoldiswalde
Rolf Kamieth	Leipzig
Siegrid Kretschmann	Schlagsdorf
Udo Kretzschmann	Markneukirchen

Matthias Weser	Großenhain

Für 21jährige Teilnahme:

Eberhard Georgy	Erfurt
Lothar Gruber	Wien
Andreas Gude	Berlin

Für 22jährige Teilnahme:

Hans-Dietrich Schwabe	Sondershausen
Gerald Werner	Meiningen

Für 23jährige Teilnahme:

Dr. Frank Aßmus	Oranienburg

Für 25jährige Teilnahme:

Dr. Guido Bloßfeld	Halle

Beteiligung im Team am Wettbewerb 1992/93:

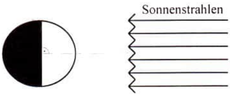
- Gymnasium Achern;
- Albert-Schweitzer-Schule Alsfeld;
- Landkreisgymnasium Annaberg;
- Gymnasium Bad Aibling;

3. Staatliche Regelschule Bad Salzungen;

- Ganztagsgymnasium Barsinghausen;
- Grundschule „Karl Liebknecht" Belzig;
- Gymnasium Bernau;
- Mathe-AG Realschule Blumenhagen;
- Gottfried-Wilhelm-Leibniz Gymnasium Chemnitz;
- Bertolt-Brecht-Gymnasium Dresden;
- Grundschule Mitte Eberswalde-Finow;
- Allertal-Gymnasium Eilsleben;
- Helene-Lange-Gymnasium Fürth;
- Staatl. Gymnasium „Gustav Freytag" Gotha;
- Schloßgymnasium Gützkow;
- Lessing-Gymnasium Hohenstein-Ernsttal;
- Matheclub Sekundarschule Iden;
- Realschule Ivenack;
- Gesamtschule Langerwehe;
- 4. Gymnasium Leipzig;
- Wilhelm-Ostwald-Gymnasium Leipzig;
- Landrat-Lucas-Schule Leverkusen;
- Realschule Linz;
- Curie-Gymnasium Neubrandenburg;
- Götzinger-Gymnasium Neustadt;
- Gymnasium Nossen;
- Gymnasium Rackwitz;
- Goethe-Gymnasium Reichenbach;
- Weinholdschule Reichenbach;
- Colegio Humboldt Sao Paulo/Brasilien;
- Staatl. Regelschule Schmalkalden;
- Werratal-Gymnasium Schwallungen;
- Staatl. Gymnasium Prof. Dr. Irmisch Sondershausen;
- Freizeitzentrum Strausberg;
- Realschule Amrum Süddorf;
- Staatliches Gymnasium Vacha;
- Städtisches Gymnasium Dülken Viersen;
- Gymnasium „Alexander von Humboldt" Werdau;
- Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler

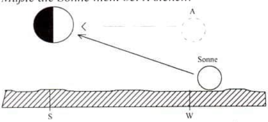
Steht die Sonne an der richtigen Stelle?

Da der Mond die Erde in 27,3 Tagen umläuft, sehen wir ihn in verschiedenen Beleuchtungsphasen oder Lichtgestalten. Die Sonne beleuchtet jeweils die Hälfte der Mondkugel, so daß die Lichtgrenze auf dem Mond beständig wechselt. Beim Anblick des Mondes können wir uns gut vorstellen, aus welcher Richtung das Sonnenlicht kommt.



Die Skizze 1 verdeutlicht den Einfall des Sonnenlichtes auf die Mondkugel; an der Lichtgrenze ist zu erkennen, in welcher Richtung sich die Sonne befinden muß.

Müßte die Sonne nicht bei A stehen?



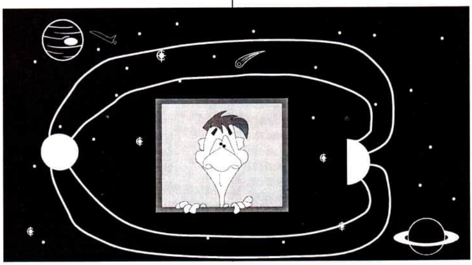
Wer schon einmal am Abend die zunehmende Sichelgestalt oder das erste Viertel aufmerksam beobachtet hat, wird das jedoch nicht bestätigt finden. Mit dem Einfall des Sonnenlichtes scheint da etwas nicht zu stimmen (Skizze 2).

Sinngemäß gilt das auch für den abnehmenden Mond am Morgenhimmel. Beim Sonnenuntergang steht der Halbmond etwa in südlicher Richtung, die Lichtgrenze auf dem Mond verläuft ungefähr senkrecht. So gesehen, müßte die Sonne aber höher stehen, während dessen sie sich bereits in Horizontnähe befindet. Wie ist dieser Widerspruch zu erklären?

Der Himmel über uns als Sphäre

Wir vergessen bei der Betrachtung des Himmels, daß er ein Raum mit 3 Dimensionen ist. Wir befinden uns gleichsam unter einer gedachten Halbkugel. Wir dürfen uns den Sternenhimmel nicht auf einer ebenen Fläche mit Geraden vorstellen, sondern wie auf einem Globus mit gekrümmten Linien. Sonne, Mond und sämtliche Gestirne bewegen sich auf Bögen über die Himmelssphäre, die in östlicher Richtung aufsteigen, im Südmeridian ihre höchste Stellung erreichen und in westlicher Richtung untergehen. Das Sonnenlicht fällt zwar geradlinig auf den Mond, an der Sphäre des Himmels ist dies aber eine gekrümmte Linie. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist hier nicht die Gerade!

Arnold Zenkert



Lösungen
Die Ergebnisse der Aufgaben im Heft

Zeitungsschnipsel:

Bremer Fallturm:

An der Erdoberfläche in unseren Breiten gelten die Formeln

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

und $v = gt$ für den freien Fall im Vakuum mit

$$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}.$$

a) $$t = \frac{2s}{g} = \frac{2 \cdot 110m}{9{,}82 \frac{m}{s^2}} \approx 4{,}74s$$

b)

$$v = gt = 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 4{,}74s \approx 46{,}5 \frac{m}{s} \approx 167 \frac{km}{h}$$

Im angegebenen Zeitungsbericht heißt es weiter:

„... Der Turmbau wird immer mehr zur Konkurrenz der Raumfahrt. Denn in ihm kann Schwerelosigkeit - wenn auch nur kurzzeitig - relativ kostengünstig erzeugt werden. Für viele Versuchsanordnungen reicht die Sekundenspanne aus, um die gewünschten Meßdaten zu erhalten. ... Die Daten, die während des Sturzfluges gesammelt werden, kommen per Laser-Telemetrie zu den Auswerterechnern, denn Kabel als Informationsüberträger würden den Abwurf behindern und Funksignale durch die Stahlhülle des Schachtes gestört...."

Amerikanischer Wurm:

a) Wegen 1 m² = 10000 cm² und weil bis zu 10000 dieser Würmer auf einem Quadratmeter Ostseeboden leben, ist im Mittel jedem dieser Würmer mindestens 1 cm² Meeresboden zuordenbar.

b) Gemäß Teilaufgabe a) gilt für den gesuchten Prozentsatz p:

$$p\% \leq 100\% \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \div 1cm^2 \approx 7\%$$

In der zitierten Zeitungsmeldung wird noch berichtet:

„Welche Folgen die ‚amerikanische Invasion', die wahrscheinlich mit dem Ballastwasser von Schiffen aus Übersee kam, für die Lebensgemeinschaft der Ostsee haben wird, ist noch nicht klar. ... So schreiben die Fischer im Nordosten Deutschlands den Würmern sogar die in jüngster Zeit erstaunlich wachsenden Aalfänge zu. Ob die borstigen Verwandten des Regenwurms jedoch auf Dauer in der neuen Region Nutzen bringen oder doch eher schaden, kann aus wissenschaftlicher Sicht derzeit offenbar niemand zweifelsfrei beantworten. ..."

Pluto:

Ist I* die Beleuchtungsstärke der Plutooberfläche durch die Sonne bei senkrechtem Lichteinfall und damit auch die Beleuchtungsstärke einer Wand in der Entfernung a von der 60-Wattlampe bei senkrechtem Lichteinfall und ist weiterhin I die Beleuchtungsstärke auf der Erdoberfläche durch die Sonne bei senkrechtem Lichteinfall und damit auch die des Papierblattes durch die Glühbirne in 8 cm Abstand bei senkrechtem Lichteinfall, so gelten

$I : I_* = (6 \cdot 10^9 \text{km})^2 : (150 \cdot 10^6 \text{km})^2$ *und*
$I : I_* = a^2 \cdot (8cm)^2$

Aus beiden Proportionen folgt

$$a^2 : (8cm)^2 = \left(\frac{10^3}{25}\right)^2 \quad \textit{und}$$

$$a = \frac{10^3}{25} \cdot 8cm \approx 3m$$

Mathematik auf dem Schulweg

(1) $[(53 - 7) : 2] + 1 = \mathbf{24}$

(2) $[(64 - 12) : 2] + 1 = \mathbf{27}$

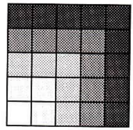
Felix bildet die Differenz aus der ersten und der letzten Hausnummer, dividiert diese durch 2 (da ja nur jede zweite Hausnummer vergeben wurde) und addiert zum Ergebnis 1 (da sonst das erste oder das letzte Haus nicht mitgezählt würde).

(3) Franziska:
$12 + 14 + 16 + \ldots + 34 + 36 + 38 = \mathbf{350}$
Katharina:
$12 + 38 = 50 \qquad [(38 - 12) : 2] + 1 = 14$
$(50 \cdot 14) : 2 = \mathbf{350}$

(4)
$$\begin{array}{rl} 12 + 14 + 16 + \ldots + 34 + 36 + 38 & = s \\ 38 + 34 + 36 + \ldots + 16 + 14 + 12 & = s \\ \hline 50 + 50 + 50 + \ldots + 50 + 50 + 50 & = 2 \cdot s \\ 14 \cdot 50 & = 2 \cdot s \\ 7 \cdot 50 & = 2 \cdot s \end{array}$$

(5) $57 + 13 = 70 \quad [(57 - 13) : 2] + 1 = 23$
$(70 \cdot 23) : 2 = \mathbf{805}$

(6)
$$\begin{array}{ll} 1 + 3 & = 4 \\ 1 + 3 + 5 & = 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = 16 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = 25 \end{array}$$



(7)
$$\begin{array}{rl} 1 + 3 + \ldots + (2(k-1) - 1) + (2k - 1) & = s \\ (2k - 1) + (2(k-1) - 1) + \ldots + 3 + 1 & = s \\ \hline 2k \; + \; 2k \; + \; \ldots \; + \; 2k \; + \; 2k & = 2 \cdot s \\ k \cdot 2k & = 2 \cdot s \\ k^2 & = s \end{array}$$

(8) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k-1) + 2k = \mathbf{k(k+1)}$
Begründung analog zu (7)

(9) Der Ölverbrauch betrug 2760 l , und zwar 1380 l in den eigentlichen Wintermonaten und 1380 l in den übrigen der Heizperiode. Gespart werden $1380 \cdot \frac{1}{3} =$ 460 l von Dezember bis Februar und 1380 $l \cdot \frac{1}{5} = 276$ l , insgesamt also **736 l** Heizöl.

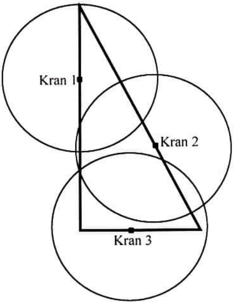
Das ist ein **Anteil von** $\mathbf{\frac{4}{15} \approx 0{,}27}$.

(10) Der Flächeninhalt der Vorderfront beträgt 13 m · 24 m = 312 m², abzüglich der Fensteröffnungen von 16 · 1,3 m · (1,5 m + 0,8 m) = 47,8 m². Damit ist eine Fläche mit einem Inhalt von 264,2 m² mit Platten von je 0,60 m · 1,5 m = 0,9 m² zu verkleiden. Es werden also mindestens 294 Platten (264,2 : 0,9 = 293,6) benötigt.

Selbst wenn es gelänge, eine im Sinne eines Puzzles optimale Lösung zu finden, blieben wichtige Überlegungen unberücksichtigt, beispielsweise wie tief die Fensteröffnungen sind und wie sie verkleidet werden, wie der Anschluß an die anderen Außenwände erfolgt und wie Platten aus bautechnischen Gründen aneinandergefügt werden müssen. Die Zahl 294 ist daher zu niedrig angesetzt. Man wird etwas weniger als 350 Platten planen.

(11) Nur wenn an der kürzesten Dreiecksseite ein Kran steht, kann diese mit nur einem Gerät überdeckt werden. Mindestens ein Kran muß auch auf der läng-

sten Dreiecksseite stehen. Eine mögliche Lösung gibt die Abbildung an.



(12) Zwei Bäume stehen genau dann gegenüber, wenn ihre Entfernung zum 1. Baum ein gemeinsames Vielfaches von 15 m und 18 m ist.
kgV (15;18) = 90 $\quad 2 \cdot 90 = 180$
gesuchte Entfernung: **180 m**

(13) Arndt: $51 = 3 \cdot 17$

(14) *Bernhard*: Die Differenzen der Ziffern verringern sich jeweils um 1, nämlich:
$3 = 8 - 5,\ 2 = 5 - 3,\ 1 = 3 - 2,\ 0 = 2 - 2.$
Dora: Die ersten Potenzen von 4 sind
$4^1 = 4,\ 4^2 = 16,\ 4^3 = 64.$
Emilia: Die kleinsten Quadratzahlen größer 6 sind 9, 16 und 25.

(15) Carsten könnte die Nummern 7 10 70, 7 11 77, 7 12 84, 7 13 91 und **7 14 98** haben, von denen nur die letzte durch 7 teilbar ist.

(16) Bei Franziska kämen 9 10 90 und 9 11 99 in Frage, von denen aber keine durch 9 teilbar ist. (Wenn man Zahlen wie 03 als zweistellig betrachtet, könnte Carsten auch die **7 07 49** und Franziska die **9 09 81** haben.)

(17) Genau die natürlichen Zahlen 1, 5, 9, 13, 17 sind kleiner als 20 und lassen bei Division durch 4 den Rest 1. Von diesen Zahlen lassen nur 1 und 13 bei Division durch 3 den Rest 1. 1 und 13 lassen auch bei Division durch 2 den Rest 1. Da man eine einzige Stufe sicher noch nicht als Treppe bezeichnet, muß die Schultreppe **13 Stufen** haben.

Schachwettbewerb

Weiß: Ka8, Ba4, a7, c7.
Schwarz: Kb6, Ba5, a6, b7.
1. c8T/D bzw. 1. ... K:c7 patt.
$1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 14$

Komisches, Kniffliges, Knackiges

Verrückter Elfmeter

Zur Lösung stellen wir die Wahrscheinlichkeit eines Treffers in einer Tabelle auf, in der oben die möglichen Sprungrichtungen des Torwarts und links die Schußrichtungen des Elfmeterschützen eingetragen sind:

	links	mitte	rechts
links	10 %	90 %	90 %
mitte	90 %	10 %	90 %
rechts	90 %	90 %	10 %

Damit ergibt sich für die Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$P_{Gesamt} = \frac{\textit{Summe der Teilwahrscheinlichkeiten}}{\textit{Anzahl der Teilwahrscheinlichkeiten}}$$

$$P_{Gesamt} = \frac{3 \cdot 10\% + 6 \cdot 90\%}{9} = \frac{570}{9}\% = \underline{\underline{63{,}\bar{3}\%}}$$

Dieser Wert ist natürlich von der Form der Spieler abhängig. So kann z. B. im Einzelfall die Wahrscheinlichkeit für das Schießen in die linke Ecke wegen besonderer Spielerfähigkeiten höher sein als in die rechte. Andererseits kann auch der Torwart in besserer oder schlechterer Form sein, so daß auch seine Werte variieren.

Eine alte Aufgabe

Zur damaligen Zeit war es üblich, daß die Aufgaben selbständig von den Schülern gelöst und die Lösungen an die *„alpha"* geschickt wurden. In diesem Sinne bitten wir um eine Zusendung der Lösungen an folgende Adresse:

Reinhardt Becker Verlag
Redaktion „alpha"
Kennwort: Alte Aufgabe
Luisenstraße 45
16727 Velten

Wir sind gespannt auf eure Lösungen und werden diese dann baldmöglichst unter dieser Rubrik veröffentlichen.

Eisiger Ausflug in die Mathematik

(1) Da die Anzahl der männlichen und weiblichen Mitglieder in der Gruppe gleich groß ist scheiden alle ungeraden Anzahlen aus. Durch die Teilbarkeit scheiden die Zahlen 6, 12, 18 (teilbar durch 3), 4, 8, 16 (teilbar durch 4) und 10 (teilbar durch 5) aus. Übrig sind noch die Zahlen 2 und 14. Da mit Alphons und seinem Freund die Gruppe mindestens zwei männliche Mitglieder hat, kann die Gesamtzahl nicht kleiner als 4 sein.

$\Rightarrow$ Die Gruppe hatte 14 Mitglieder.

(2) Die Anzahl der „paarbildenden" Pinguine ist 12 (Gesamtzahl ist 14, abzüglich Alphons und seiner Freundin). Damit ergeben sich 6 zu bildende Paare. Die Gesamtzahl der Verteilungsmöglichkeiten ergibt sich nach folgendem Schema: Der erste Pinguin hat noch 6 zur Auswahl, der zweite nur noch 5, der dritte 4 usw. Damit ergibt sich für die Zahl der Verteilungsmöglichkeiten:

$A = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Darunter sind aber auch die Möglichkeiten mit unglücklichen Paaren. Per Computer haben wir alle durchgerechnet und kamen auf 265 glückliche Möglichkeiten.

(3) Der zurückgelegte Weg s ist das Produkt aus Geschwindigkeit parallel zur Wasseroberfläche (v_x) und der Zeit t bis zum Auftreffen auf der Wasseroberfläche.

$$s = v_x \cdot t$$

Die Zeit bis zum Auftreffen auf die Wasseroberfläche läßt sich durch nachfolgende Beziehung zwischen der Zeit t, der Höhe h, der Erdbeschleunigung g und der Geschwindigkeit v_y (senkrecht zur Wasseroberfläche herleiten):

$$0 = h - \frac{g}{2}t^2 + v_y \cdot t$$

Diese Beziehung sagt aus, daß sich der Pinguin zum Zeitpunkt t genau in der Höhe 0, also Höhe der Wasseroberfläche, befindet. Dies ist eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen von denen die positive die richtige ist:

$$0 = h - \frac{g}{2}t^2 + v_y \cdot t \qquad \left| : \left(-\frac{g}{2}\right)\right.$$

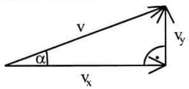
$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot v_y}{g}t - \frac{2h}{g}$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_y}{g} \pm \sqrt{\frac{v_y^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2hg}}{g} \qquad da \sqrt{v_y^2 + 2hg} > v_y$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2hg}}{g}$$

Die Geschwindigkeiten v_x und v_y stehen senkrecht aufeinander:



Damit gilt für die Geschwindigkeiten:
$v_x = v \cdot \cos \alpha$
$v_y = v \cdot \sin \alpha$

Die folgende Tabelle zeigt die berechneten Werte t und s für die drei Eisblöcke:

	1	2	3
t	0,32 s	1,01 s	1,55 s
s	3,2 m	5,2 m	6,2 m

$\Rightarrow$ Vom dritten Eisblock kann man am weitesten springen.

(4) In den ersten sechs Jahren hat sich die Anzahl zweimal verdoppelt, in den übrigen 14 Jahren noch mal. Damit hat sich die Anzahl genau viermal verdoppelt.

$\Rightarrow A = 14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 224$

Die Pinguinanzahl war auf 224 gestiegen.

Olympiadeecke

1. Runde - 8. Klasse 1992 - Lösungen

Aufgabe 1:

Es sei x die Kante des kleinen Würfels; dann ist die sichtbare Oberfläche des kleinen Würfels $5x^2$. Die sichtbare Oberfläche des großen Würfels ist $5 \cdot 12^2 - x^2$. Zusammen ist das $5 \cdot 144 + 4x^2$. Diese Fläche soll aber gleich mit der Oberfläche des großen Würfels $6 \cdot 12^2 = 6 \cdot 144$ sein.

$\Rightarrow 4x^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$

Aufgabe 2:

kgV(2, 3, 4) = 12. Es sind also Zahlen zu suchen, die bei Division durch 12 den Rest 1 und bei Division durch 5 den Rest 0 haben, also Zahlen, die gleichzeitig zu den folgenden Mengen gehören und < 100 sind:

A = {13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97}

B = {5, 10, 15, 20, 25, 30,..., 85, 90, 95}

Antwort: Sabine hat 25 oder 85 Münzen.

Aufgabe 3:

Zeichnung der Geraden g und h und der Punkte A, B, C und D. Begründung: Da Streckenlängen bei Achsenspiegelungen invariant sind, und S sich bei jeder Spiegelung auf sich selbst abbildet, folgt:

$|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = \varrho$.

Daher liegen A, B, C und D auf einem Kreis um S mit dem Radius ϱ.

Aufgabe 4:

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Fahrgast im 2. Zug gegenüber dem fahrenden 1. Zug fortbewegt ist:

45 km/h + 36 km/h = 81 km/h

= 81000m : (60 · 60s) = 22,5 m/s

Folglich ist die Länge des Zuges 22,5 m/s · 6s = 135 m.

Aufgabe 5:

Trockenmasse von 120 kg frischen Pilzen:

	Wasser	Trockenmasse
Frisch geerntete Pilze	95 %	5 %
Luftgetrocknete Pilze	80 %	20 %

5 % von 120 kg = 6 kg. Die Trockenmasse der luftgetrockneten Pilze: 6 kg entspricht 20 %. Demnach entsprechen 100 % 5·6 kg = 30 kg.

2. Runde - 9. Klasse 1993 - Lösungen

Lösung zu 1.:

a) Nur Zeilen ungerader Nummer enthalten eine Mittelzahl (MZ). Also befindet sich bei x eine Zahl und zwar als die 27. MZ von 1 aus gezählt.

Bildungsregel für x

$1 \xrightarrow{+1\cdot4} 5 \xrightarrow{+2\cdot4} 13 \xrightarrow{+3\cdot4} 25\ldots$

Also ist

$$x = 1 + 1\cdot4 + 2\cdot4 + \ldots + 27\cdot4$$
$$= 1 + 4\cdot\frac{28\cdot27}{2} = 1513$$

b) Bildungsregel für die linken Zeilenanfänge (ZA):

$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7\ldots$

Also gilt

55.ZA ist $1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 54 =$
$$1 + \frac{54\cdot55}{2} = 1486$$

56.ZA ist $1486 + 55 = 1541$

63.ZA ist $1 + (1 + 2 + \ldots + 62) = 1954$

64.ZA ist $1954 + 63 = 2017$

63. ZA ist 1954; 1993 ist daher die 40. Zahl der 63. Zeile.

c) Nach b) liegt 1993 in der 40. „Kantenparallelen", die 1. Kantenzeile mitgezählt. Die Bildungsregel für die Anfangszahlen (AZ) dieser Kantenparallelen lautet

$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10\ldots$

40. AZ ist somit 1+2+3+...+40 = 820

Lösung zu 2.:

a) Es sei G ein Punkt von dem aus BC unter einem rechten Winkel erscheint. In der Skizze ist $\Delta GBE \sim \Delta CGF$.

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{y} \quad \Leftrightarrow \quad xy = \frac{ac}{4}$$

Außerdem ist $x + y = h$

$\Rightarrow x(h - x) = \frac{ac}{4}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - ac}}{2}$

$\Rightarrow$ *Behauptung*

b) Es gibt genau eine Lösung, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich Null ist, d.h.:

$$h^2 - ac = 0 \Leftrightarrow h^2 = ac.$$

Lösung zu 3.:

a) Sei n die durchgeführte Anzahl der Runden $\Rightarrow n(p + q + r) = 20 + 10 + 9 = 1 \cdot 39 = 3 \cdot 13$.

Wegen $n \geq 2$ und $p + q + r \geq 6 \Rightarrow n = 3$ und $p + q + r = 13$

b) Da B beim letzten Mal r Punkte erhielt, insgesamt aber weniger als 13, muß er in den beiden ersten Runden jeweils p Punkte erhalten haben $\Rightarrow p + p + r = 10$. Da C insgesamt weniger als 10 Punkte erhalten hat, kann er in keiner Runde r Punkte erhalten haben. Da B in der 1. Runde bereits p Punkte bekam, muß C in der 1. und 2. Runde q Punkte bekommen haben.

Es ergeben sich nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

	1.Möglichkeit			2.Möglichkeit		
	A	B	C	A	B	C
1.Runde	r	p	q	r	p	q
2.Runde	r	p	q	r	p	q
3.Runde	q	r	p	p	r	q

Die 2. Möglichkeit führt zum Widerspruch.

Aus der 1. $\Rightarrow q = 4, P = 1, r = 8$.

Lösung zu 4.:

a) Beispiele:

$5^2 + 10^2 + 10^2 + \ldots + 10^2 = 925$

$1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 + 86^2 = 7405$

$1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 + 43^2 + 44^2 = 3793$

b) Angenommen, wir haben 10 solcher Zahlen so gewählt, daß $a_1 - a_2 = d > 1$ ist.

Man kann nun zwei Quadratsummen vergleichen.

$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_9^2 + a_{10}^2$

und

$S' = (a_1 - 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + a_3^2 + \ldots + a_9^2 + a_{10}^2$

indem man das Vorzeichen ihrer Differenz feststellt:

$$S - S' = a_1^2 + a_2^2 - \left((a_1 - 1)^2 + (a_2 + 1)^2\right)$$
$$= 2a_1 - 1 - 2a_2 - 1$$
$$= 2(a_1 - a_2 - 1)$$
$$= 2(d - 1) > 0, \text{ weil } d > 1 \text{ ist.}$$

Demnach ist S > S', also ist S nicht minimal.

c) Aus b) folgt, daß für eine minimale Summe der Quadrate die a_i sich höchstens um 1 unterscheiden dürfen; die a_i sind also gleich oder sie unterscheiden sich durch 1.

Angenommen, n dieser Zahlen sind gleich z, so müssen die restlichen 10 - n Zahlen gleich z + 1 (oder z - 1) sein.

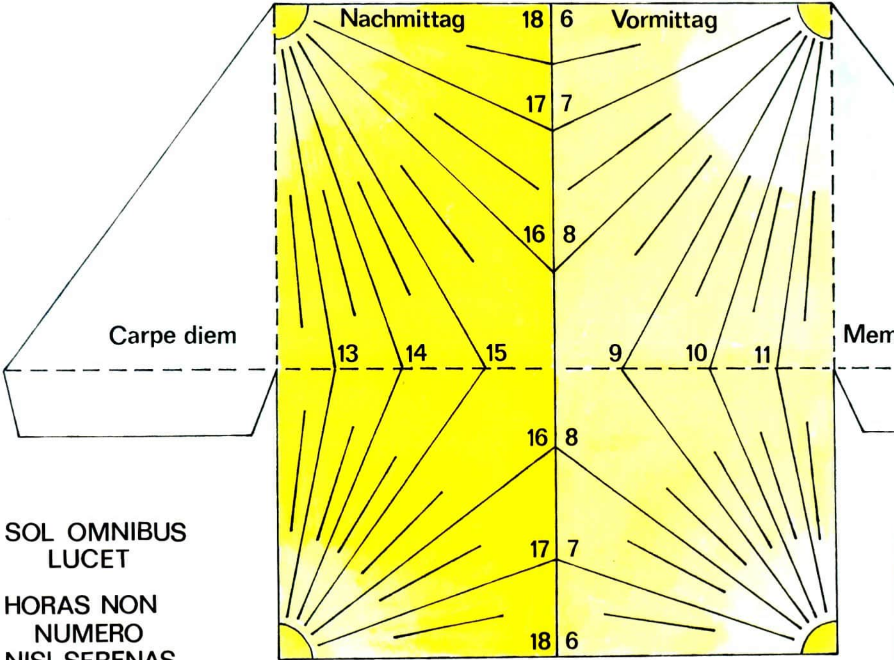
Es muß also $nz + (10 - n)(z + 1) = 95$ sein. $\Rightarrow 10z = 85 + n$, mit $0 \leq n \leq 10$.

$\Rightarrow n = 5$ und $z = 9$.

Damit hat S den Wert $S = 5 \cdot 9^2 + 5 \cdot 10^2 = 905$.

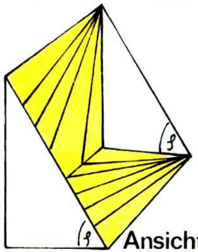
Doppelsonnenuhr

mit zwei Schattenwerfern



SOL OMNIBUS
LUCET

HORAS NON
NUMERO
NISI SERENAS



Ansicht