

H 11328 F

alpha
2

März/April 1994

DM 3,90

28. Jahrgang



Mathematik
als Hobby



Eine Zeitschrift des
Reinhardt Becker Verlages
in Veltien

**Leonardo da Vinci
als Mathematiker**

**Mathe-Turnier aus
Übersee**

**Rätselhaftes
Möbiusband**

**Schach ohne
König**

**Zahlen, die
keine sind**



**NEU! Mit zwei Seiten
über PC Logo**

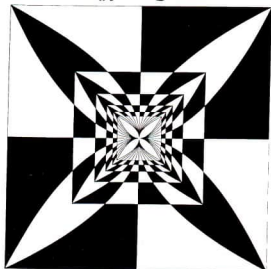
Interessante Grafiken mit dem Computer

Der Computer ist in der letzten Zeit zum wahrscheinlich vielseitigsten Arbeitsgerät aller Zeiten geworden. Er eroberte im Handumdrehen die Mathematik und stürmte mit seiner unglaublichen Rechenfertigkeit fast alle Wissenschaften. Auch das Leben des einzelnen hat er direkt oder indirekt ziemlich durcheinandergewirbelt. So ist es mit dem Computer fast jedem möglich, Zeitungen herzustellen oder sich in simulierten Welten zu bewegen. Der Computer hat sich mit Riesenschritten in unser Leben hineinbewegt.

In der letzten Zeit hat er nun auch die letzte der menschlichen Hochburgen erobert - die Kunst. Mit ihm ist es wie mit keinem anderen Zeichengerät möglich, perfekte Grafiken zu zeichnen oder berechnen zu lassen. In der Beziehung Computer und Kunst spiegelt sich auch deutlich die Beziehung zwischen Mathematik und Kunst wieder; denn einige der Computerkunstwerke sind nichts weiter als das Ergebnisse des Rechnens mit mathematischen Funktionen. Auch die Grafiken auf dieser Seite sind durch Berechnung entstanden.

Herr Georg Schierscher hat die Grafiken mit dem Computer erstellt. Dabei wurde eine Seite der Schulmathematik berührt - die Spiegelung am Kreis. Durch entsprechende Auswahl der gespiegelten Objekte entstehen Bilder, die durchaus den ästhetischen Wert

Bild eines am Quadrat gespiegelten schachbrettartig gefärbten Quadrates.



Georg Schierscher

Bild eines am Dreieck gespiegelten schachbrettartig gefärbten Quadrates



Georg Schierscher

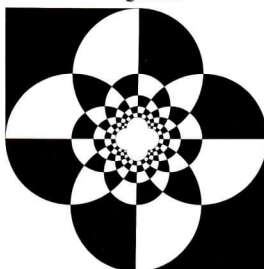
der Mathematik erkennen lassen. Die Grafiken sind Turtle-Grafiken (englische Bezeichnung für Igelgrafik, siehe Beschreibung PC-Logo auf Seite 10/11), die von Herrn Schierscher mit einem ziemlich umfangreichen Befehlsspaket in Borland Pascal 7.0 geschrieben wurden.

Die Grafik auf dem Rücktitel wurde mit den gleichen Prozeduren in Farbe gezeichnet. Sie zeigt ein Fraktal aus geradlinig begrenzten, regulären Fünfecken, die am Inkreis des mittleren Pentagons gespiegelt (invertiert) sind. Die äußeren Fünfecke sind von Schachtelungstiefe zu Schachtelungstiefe mit dem Quadrat des Kehrwertes der Goldenen Schnittzahl verkleinert, damit sie sich im Limes berühren.

Solltet Ihr mit PC-Logo auch schöne Grafiken erstellt haben und wollt diese den anderen Lesern nicht vorenthalten, schickt sie bitte an uns in den Verlag. Schön wäre es, wenn Ihr bei der Einsendung auch das Programm (in schriftlicher Form oder auf Disketten), mit dem Ihr die Grafik erstellt habt, mitliefern könntet.

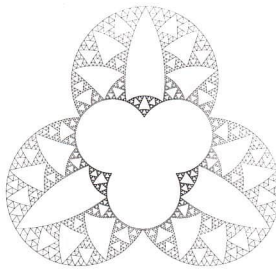
Die Redaktion

Bild eines am Kreis gespiegelten schachbrettartig gefärbten Quadrates



Georg Schierscher

Bild eines am Kreis gespiegeltes Sierpinski-Dreieck



Georg Schierscher



alpha mit LOGO

Eigentlich hängt ja alles, was Computer machen, irgendwie mit Mathematik zusammen. Ohne Mathematik gebe es die großen „Elektronenrechner“ - wie sie einmal hießen - überhaupt nicht. Und doch war es für die alpha-Redaktion schwer, auf der CeBIT in Hannover Bezüge zwischen Computertechnik und Mathematik zu finden. Fast konnte man den Eindruck gewinnen, der „Rechner“ - selbst ein Kind des Rechnens - habe das Rechnen überflüssig gemacht und abgeschafft. Erst eine genaue Analyse durch den auf der Messe aufgestellten Informationscomputer machte uns fündig: Es gibt doch eine ganze Menge Software, die speziell zum Lösen mathematischer Probleme entwickelt wurde oder geeignet ist. Sie geht eben bloß in der Fülle anderer Angebote unter, weil es für so etwas „exotisches“ keinen speziellen Ausstellungsbereich gibt.

Gerade die Software, die uns dann für alpha-Leser am interessantesten erschien, hatte uns nicht einmal der Informationscomputer verraten. - Wegen ihrer Vielseitigkeit hatten sie die Aussteller nicht als für mathematische Anwendungen geeignet ausgewiesen. Doch unseren spähenden Adleraugen entging sie trotzdem nicht: Es ist PC-Logo, eine intelligente Computersprache, mit der man sich selbst die Lösungswege für Matheaufgaben schaffen kann. Auf den Seiten 10 und 11 stellen wir unseren Lesern die schnuckelige Software vor, dazu gleich drei einfache mathematische Anwendungsbeispiele zum Einstieg.

Damit recht viele alpha-Leser sich das Softwarepaket leisten können, bieten wir es unseren Lesern für begrenzte Zeit zu einem Sonderpreis an: 100,- DM unter dem normalen Verkaufspreis! In Zukunft werden wir dann regelmäßig darüber berichten, wie sich mathematische Probleme mit PC LOGO lösen lassen. Dabei warten wir auch gespannt auf Ideen und Anregungen unserer Leser. Vielleicht können wir so auch mathematisch interessierte LOGO-Nutzer, die noch nicht zu unseren Lesern gehören, für die „alpha-Gemeinde“ gewinnen.

Überhaupt sollen mathematische Anwendungen des Computers in Zukunft ihren angemessenen Platz in unserer Zeitschrift erhalten. Aber keine Angst! - Eine Computerzeitschrift werden wir deswegen nicht, verprochen.

Ein Wort noch zum leidigen Geld: Wir haben den Preis der alpha trotz der sichtbaren Qualitätsverbesserung sehr knapp kalkuliert. Alle Mitarbeiter, die den Inhalt mit viel Einsatz zusammenstellen, arbeiten praktisch ehrenamtlich. Da ist selbst das Versenden von Zahlungserinnerungen ein finanzielles Problem. Darum: Bitte, bitte, liebe Leser, schaut doch noch einmal nach, ob Ihr die Rechnung, die mit dem Heft 1/94 verschickt wurde, auch bezahlt habt. Eine Rechnung haben ausnahmsweise auch die Leser bekommen, die bisher beim Friedrich Verlag per Einzugsermächtigung bezahlt haben. Das liegt daran, daß dieser Auftrag nicht übertragbar ist. Im Heft 3 werden wir ein Formular für die Einzugsermächtigung abdrucken und hoffen, daß recht viele Leser von dieser bequemen Zahlungsform für die nächsten Male Gebrauch machen.

Vereinzelte gab es immer noch Probleme mit der Belieferung; bitte teilen Sie uns diese umgehend mit. Eine Ursache kann aber - besonders in den neuen Bundesländern - der gleichzeitige Wechsel von Postleitzahl und Straßennamen sein. Es ist dann für den Vertrieb - für den wir die bewährten Dienste der moderner Computertechnik arbeitenden Pädagogika Zentrale in Velber weiterhin nutzen - fast unmöglich, die richtige Adresse zu ermitteln. Hier hilft wirklich nur die Mitteilung des Lesers selbst.

Den Erscheinungstermin der Zeitschrift, die wir bekanntlich im letzten Moment mit erheblicher Verspätung übernommen haben, konnten wir leider nicht so schnell wieder vorverlegen, wie wir das gehofft hatten. Dafür bitten wir um Verständnis und werden an dem Problem dran bleiben, um möglichst schon mit dem übernächsten Heft wieder den regulären Erscheinungstermin zu erreichen. Schließlich wissen wir, was wir unseren Lesern, die gespannt auf das nächste Heft warten, schuldig sind.

In diesem Sinne:

alpha! - Rechnen Sie mit uns!

Reinhardt Becker

Leserbriefe

Unser erstes Heft ist veröffentlicht und natürlich steht es im Mittelpunkt unserer Leserbriefe. Als erstes möchten wir all denen danken, die uns mit Ihren aufmunternden Briefen den Mut geben, mit der *alpha* immer weiter zu machen, und die Hoffnung, daß die *alpha* Ihre einstige Größe wiedererlangt. Ein solcher Brief kam von Volker Pöschel, der den Mathe-Club Gotha leitet. Wir möchten Ihn auf diesem Wege viel Erfolg bei seiner Arbeit wünschen. Hier nun sein Brief:

Vielen Dank für die neue, alte *alpha*.

Ich hätte beinahe meine Abbestellung geschrieben, als das Heft 1/94 eintraf. Da ich anlässlich der Landesolympiade Mathematik mit anderen Kollegen gesprochen habe, kann ich sagen, daß auch andere nicht mehr mit dem Inhalt zufrieden waren.

Ich hoffe, daß der *alpha* noch ein langes und erfolgreiches Leben beschieden ist (ich bin vom 2.Jahrgang an dabei). Vor allem Wünsche ich mir mehr echte Knobeleien mit einem Aha-Effekt und Beiträge zu bestimmten Themen, die ein Problem erschöpfend behandeln. . .

Wir hoffen mit dem Beitrag „Ungleichungen“ auf Seite 16 einen ersten Schritt in diese Richtung getan zu haben. Ein weiterer ermutigender Brief kam von Herrn Rainer Werner aus Chemnitz:

Sehr geehrter Herr Becker, herzlichen Glückwunsch und vielen Dank für die Fortführung der „*alpha*“. Ihre Ausführungen im Heft 1/94 haben mir sehr gefallen. Als Mathematiklehrer an einem Chemnitzger Gymnasium habe ich schon viele Anregungen der „*alpha*“ entnehmen können und möchte sie als Quelle nicht mehr missen. Vielleicht gelingt es mir, auch einige Schüler für die Zeitschrift zu interessieren. . .

Zur inhaltlichen Gestaltung hätte ich den Vorschlag, alte Prüfungsaufgaben aller Bundesländer mit zentralen Prüfungen zu veröffentlichen. Vielen Schülern wären sie eine preiswerte Hilfe für ihre eigene Vorbereitung auf Prüfungen.

Ich wünsche Ihnen für Ihre Arbeit viel Erfolg.

Wir möchten uns als erstes für Ihr Engagement für die *alpha* bedanken. Auch

für Ihren Verbesserungsvorschlag vielen Dank. Zum Training der mathematischen Fähigkeiten sei folgendes bemerkt: Die *alpha* wird sich in Zukunft mehr für die Mathematikolympiade engagieren. So werden wir in Zukunft alle Aufgaben der 1. bis zur 3. Stufe veröffentlichen. Außerdem ausgewählte Aufgaben der Deutschlandolympiade. Dies sollte ein ausreichendes Training für alle Mathematikinteressierten sein.

Ein Beispiel, daß *alpha* auch seinen Lesern eine Chance gibt, die *alpha* zu bereichern zeigt folgende Umschrift von Herrn Karl-Hermann Waid aus Bad Wildungen:

Sehr geehrter Herr Becker

Nachdem ich heute als Bezieher „Ihrer“ Zeitschrift „*alpha*“ etliche Buchrezensionen gelesen habe, kam mir die Idee, Ihnen weitere von mir einzusenden, um die Zeitschrift auch für die Nichtschüler unter den Lesern attraktiv zu machen. . .

In diesem Heft veröffentlichen wir zwei seiner Rezensionen in der Rubrik „Marktecke“ auf Seite 25. Sollten Sie sich für fähig halten, selber Rezensionen für Bücher oder auch Computerprogramme aus der Mathematik oder den verwandten Wissenschaften zu schreiben, zögern Sie nicht und schicken Sie uns das Ergebnis zu. Es ist im Interesse aller Leser über den gesamten Markt der Mathematik informiert zu sein. Wir als Redaktion können leider nicht alle Veröffentlichungen im Auge behalten. Natürlich ist mit einer Veröffentlichung auch ein Honorar verbunden. Sollten Sie noch weitere Fragen haben, wenden Sie sich an uns.

Der nächste Brief ist der Kategorie Probleme von Lesern für Leser gewidmet. Herr Willy Thönnessen aus Darmstadt schreibt uns:

Sehr geehrte α -Redaktion,

ich bin schon längere Zeit Abonnent von „*alpha*“. Nun freue ich mich, daß die Zeitschrift mit Nr. 1/1994 wieder heim gefunden hat. Es ist schon was dran an der Aussage: „Zu Hause ist es doch am besten!“

Ich hatte schon Befürchtungen, daß nach den pupertären publizistischen Eskapaden der Jahre 1990-1993 aus dem „*alpha*“ ein

„*omega*“ werden könnte, denn dieser „aufgezwungene West-Style“ nebst Inhalt war einfach lächerlich.

Bleiben Sie eine anregende Mathematik-Zeitschrift für Schüler, Hobbyisten und Matheinteressenten!

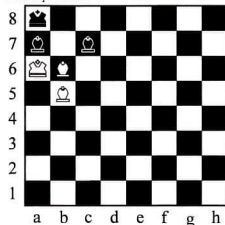
Dazu wünsche ich den besten Erfolg.

Ein Problemchen habe ich noch anzubieten:

-Aus der experimentellen Mathematik mit dem Computer ist die Mandelbrotmenge als „Apfelmännchen“ satssam bekannt. Wie groß ist die Fläche des „Apfelmännchens“, wenn man zugrunde legt, daß seine Form aus einem Kreis und einer Herzkurve besteht (Näherungswert)?

Ein Problem führte zu Leserbriefen und auch Anrufen, wie wir sie uns eigentlich nicht wünschen. Der frühere Verlag der *alpha* hat offenbar nicht alle Kündigungen des Jahres 1993 berücksichtigt. So bekamen wir einige böse Briefe und Anrufe von Leuten, die äußerst verwundert waren, die *alpha* weiterhin zu bekommen. Wir möchten uns auf diesem Wege bei allen entschuldigen denen dies widerfahren ist. Natürlich können auch wir eigene Fehler nicht ausschließen, aber so etwas darf eigentlich nicht vorkommen. Vielleicht schien der Untergang der *alpha* für den Friedrich-Verlag auch so feststehend, daß man es nicht für nötig sah, Abbestellungen noch einzutragen. Wir hoffen, daß unserem neuen, „alten“ Konzept mehr Erfolg beschieden sein wird.

Fast in letzter Sekunde kam noch eine Zuschrift von Oliver Fischer aus Köln. Er hat für das im letzten Heft erschienene Schachproblem eine Lösung mit nur 10 Gesamtpunkten:



1. be; Patt; 1. . . cb; 2. Patt
Punkte: $1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 10$

Diese Lösung liegt 4 Punkte unter der im Heft angegebenen. Wir möchten ihm auf diesem Wege für seine Lösung danken.

Sollten Sie noch Ideen haben, wie wir die *alpha* besser machen können oder bestimmte Stellen besonders gut finden, schreiben Sie uns. Wir freuen uns über jeden Brief!

Die Redaktion

alpha wird herausgegeben vom Reinhardt Becker Verlag Velten in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholz und Herbert Kästner.

Redaktion:

R. Becker, Tel. 0 33 04 / 39 74 30
Luisenstraße 45, 16727 Velten

Redaktionskollegium:

StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), Ol. Dr. W. Fregin (Naunhof), Dr. J. Grotz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pfeidhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OstR J. Lehmann (Leipzig), Ol. Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritzt), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Prof. Dr. P. Schreiber (Greifswald), Prof. Dr. W. Schmidt (Greifswald), OstR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: R. Becker

Anzeigenabwicklung:

Telefon: 0 33 04 / 39 74 30

Anzeigenpreisliste Nr. 2 vom 1. 3. 1994

Verlag:

Reinhardt Becker Verlag
Luisenstraße 45, 16727 Velten
Tel.: 0 33 04 / 39 74 30
Fax: 0 33 04 / 39 74 32

Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Einzelpreis ist 3,90 DM. Im Abonnement beträgt der Heftpreis 3,40 DM incl. Versandkosten (Ausland: zuzüglich Versandkosten), also 20,40 DM pro Jahr. Die Mindestbestelldauer eines Abonnements beträgt 1 Jahr. Eine Kündigung ist jeweils bis zu sechs Wochen vor Ende des Berechnungszeitraumes (=Kalenderjahr) möglich. Bei einem Umzug bitten wir um Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift, sowie der Kundennummer (steht auf der Rechnung). Gerne verschicken wir an Interessierte auch ein Probeheft.

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Alle Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt.

Bildnachweis:

Seite 6: Archiv; Seite 7: Reisebericht „Willkommen in den Highlands“; Seite 8, 13, 29: Zentrum für Foto und Film der Universität Leipzig; Seite 9: Autor; Seite 12: Autor; Seite 26, 27: Autorenschicht. Das Diagramm auf Seite 6 wurde mit Microsoft™ Graph erstellt. Mit Corel Draw™ wurden die Computergrafiken auf den Seiten 7 (unter Zuhilfenahme von Microsoft™ Graph), 9, 14, 15, 17 (unter Zuhilfenahme des Microsoft™ Formeditors) und die Kopfe auf den Seiten 3, 19 und 29 erstellt. Alle weiteren Skizzen wurden nach Autorenschichten mit Microsoft™ Draw und Corel Draw™ gestaltet. Die Grafiken der 2. und 4. Umrangseite wurden von Georg Schierscher aus Schaun mit Borland Paskal 7.0 erstellt. Die Computergrafik auf Seite 10 wurde mit Corel Draw™ unter Verwendung der Cliparts aus Taskforce 4.0 gestaltet.

Das Titelbild wurde von unserem Graphiker Norbert Schmid nach den Skizzen Leonardo da Vincis gezeichnet. Dabei bezieht er sich besonders auf das Jahr 1501, in welchem sich Leonardo vor allem mit der verschiedenartigen Gestaltung der Platonischen Körper und ihrer Bedeutungen als Feuer, Erde, Luft, Wasser und Weltall beschäftigte. Gleichzeitig drückt das Bild den Inhalt des Beitrages „Mathematik und Kunst“ aus, indem die mathematisch exakt berechneten Platonischen Körper künstlerisch gestaltet werden. Mehr zu Leonardo auf Seite 29, über die Platonischen Körper haben wir auf derselben Seite in Heft 1/94 schon berichtet.

Vertrieb:

PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: be Druck, Berlin
ISSN 0002-6395

Inhaltsverzeichnis

Editorial	3
Leserbriefe	4
Eure Meinung ist gefragt!	
•Ein Wort zur neuen <i>alpha</i>	
•Mitmachen ist erwünscht	
Zeitungsschnipsel	6
•Höllenhitze vor Sonnensterben	
•Mathematische Impressionen einer Schottlandreise	
•Weihnachtsbaumkugeln	
Mathematik und Kunst	8
•Leonardo da Vinci als Mathematiker	
PC LOGO-Seiten	10
•Vorstellung dieser Programmiersprache mit deutschen Befehlen	
•Mathematische Anwendungen	
Experimentalmathematik	12
•Spiele mit Schere und Papier	
•Rätselhaftes Möbiusband	
Alphons logische Abenteuer	14
•Wieviel sind „einige“?	
Freude am Schach	15
•Das neue <i>alpha</i> -Schachbrett stellt sich vor	
•Schach ohne König - Populäre Abart des Schachs	
Ungleichungen Teil 1	16
•Zahlenmittel	
Komisches, Kniffliges, Knackiges	18
•Balanceakt mit Zahlen	
•Gleichwinklige Sechsecke	
•Alte Aufgaben für junge Löser	
Problemecke	19
•die neuen Aufgaben J9, J10, M9, M10, O9 und O10	
Matheolympiade	20
3. Stufe - der Landeswettbewerb - dieses Jahr schon ab Klasse 6	
Marktecke	25
Neues vom Fachbuch- und Computermarkt:	
•Chaos als Wissenschaft	
•Formeln ohne Schrecken	
•Blick ins Schachbuch	
Olympiade Ecke	26
•Mathe-Turnier aus Übersee - der Mandelbrot Wettbewerb	
Historische Seite	29
•Eine Chronologie von 1519 bis 1984	
•Zahlen, die keine sind	
•Biographie des am 2. Mai 1519 verstorbenen Leonardo da Vinci	
Die Sonnenfinsternis 1994	30
•Zur Beobachtung der Sonnenfinsternis am 10. Mai	
•Eine halbe Sonne - ein mathematisches Problem	
Lösungen	31
unter anderem die Lösungen des <i>alpha</i> -Wettbewerbs aus Heft 6/93	
Interessante Computergrafiken	2. Umschlagseite
Kunst mit Hilfe eines Computers und der Mathematik	
Bestellkarten	3. Umschlagseite
Bild eines am Kreis gespiegelten fraktalen Pentagons	4. Umschlagseite
Erklärungen findet Ihr auf der 2. Umschlagseite.	

Zeitungsschnipsel

Höllenhitze vor dem Sonnensterben

Unter dieser Überschrift berichtet H. Bälsemann in einem Zeitungsbeitrag (Journal der Döbelner Allgemeinen - 37. Woche/September 93): „Das Ende ist vor-

Aufgabe:

Wie lang ist die Seite eines ebenen quadratischen Stückes der Erdoberfläche, auf das bei senkrechtem Lichteinfall die Leistung der dieses Flächenstück treffenden Sonnenstrahlung gleich der eines mittleren Kernkraftwerkes ist? Dabei soll sich ein-

Sonne-Erde: 152,1 Millionen Kilometer) befinden. Die witterungsbedingte Absorption von Sonnenenergie in der Atmosphäre soll unberücksichtigt bleiben.

Weihnachtsbaumkugeln

„teleprisma“ (Nr. 46 / *Stadtappen von Lauscha* 93) berichtete über die Glasbläserstadt Lauscha im Thüringer Wald: „Lauscha und Glas - das gehört zusammen. Besonders seit etwa vor 150 Jahren fin-

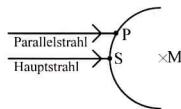


dige Glasbläser jene bunten Kugeln erfunden haben und herzustellen begannen, die seither in aller Welt die Weihnachtsbäume schmücken. In Lauscha, das über lange Zeit das Monopol für Christbaumkugeln besaß, findet am ersten Adventwochenende 27. u. 28. November) der Kugelmarkt statt. Gezeigt wird die Herstellung von Christbaumkugeln.“

Für einen sphärischen Spiegel gilt: An der spiegelnden Oberfläche einer Kugel wird ein auffälliger Lichtstrahl so reflektiert, als werde er an der am Einfallspunkt P an den Spiegel gelegten Tangentialebene reflektiert: Einfallender und reflektierter Strahl bilden mit dem Einfallslot, dem verlängerten Kugelradius $\overline{MP}$, gleiche Winkel und beide Strahlen liegen mit dem Einfallslot in einer Ebene.

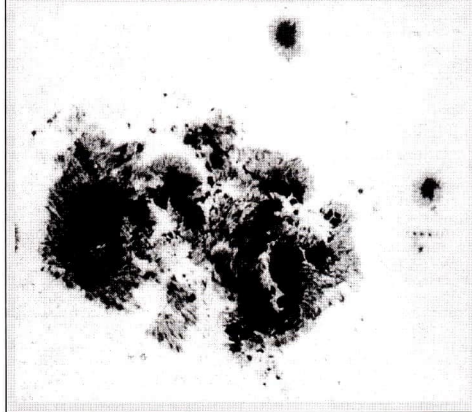
Aufgabe:

Auf eine Kugel mit spiegelnder Oberfläche (Wölb- oder Konvexspiegel) fallen zwei Lichtstrahlen, ein Hauptstrahl und ein Parallelstrahl. Der eine heißt Hauptstrahl, weil seine Verlängerung durch den Kugelmittelpunkt M verläuft. Der andere heißt Parallelstrahl, weil er zum erstgenannten parallel ist.



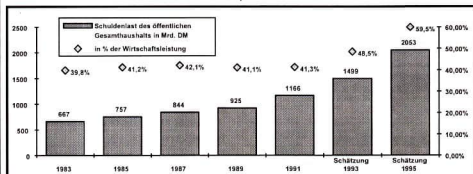
In der Ebene, in der Hauptstrahl und Parallelstrahl liegen, liegen auch ihre bei-

Vergrößerte Abbildung der Sonnenflecken. Wissenschaftler können mit Ihrer Hilfe das Verlöschen der Sonne berechnen.



hersehbar, sein Ablauf für die Wissenden kein Geheimnis. In fünf Milliarden Jahren wird die Kraft der Sonne erschöpft haben und ihr Planetensystem mit ihr untergehen: Gegenwärtig steht sie als kleiner Stern unserer Galaxie in der Mitte ihres Lebens, denn seit ebenfalls fünf Milliarden Jahren verströmt sie ihre gewaltige Energie, so viel wie 390 Milliarden (eine Zahl mit 15 Nullen) mittlere Atomkraftwerke. Diese Energie strahlt sie in alle Richtungen des Alls. Der blaue Planet Erde empfängt gerade zwei Milliardstel, immerhin noch die Leistung von 178 Millionen Kernkraftwerken.“

mal die Erde in Sonnennähe, in ihrem Perihel (Entfernung Sonne-Erde: 147,1 Millionen Kilometer) und zum anderen in Sonnenferne, in ihrem Aphel (Entfernung



den Einfallswinkel $\vec{MS}$ und $\vec{MP}$. Mithin liegen auch die zugehörigen reflektierten Strahlen in dieser Ebene, die zweckmäßig als Zeichenebene gewählt wurde. Die beiden reflektierten Strahlen sind zu zeichnen. Weiterhin sind beide über ihren Reflexionspunkt S bzw. P hinaus zu verlängern. Der Schnittpunkt beider Verlängerungen ist mit Q zu bezeichnen. Schließlich ist der Punkt F zu ermitteln, gegen den der Punkt Q strebt, wenn der Abstand d von Parallel- und Hauptstrahl immer kleiner wird und sich der Null nähert.

Über die Schuldenlast unseres Staates

Aufgabe zum untenstehenden Diagramm auf der linken Seite:

- Wie hoch war 1991 in unserem Land die Staatsverschuldung pro Kopf der Bevölkerung? (Einwohnerzahl: 80'000'000)
- Wieviel Prozent der Wirtschaftsleistung des Jahres 1991 hätten bei einem jährlichen Zinssatz von 5 % die 1992 fälligen Zinsen für die bis 1991 entstandenen Staatsschulden betragen? (Die Inflationsrate kann und soll dabei unberücksichtigt bleiben.)

NAFTA - Nordamerikanischer Wirtschaftsblock

Aufgabe zur untenstehenden Grafik auf dieser Seite:

Welches der drei zur NAFTA gehörenden Länder ...

- hat die größte Wirtschaftsleistung pro Kopf der Bevölkerung,
- hat den größten Export pro Einwohner und
- exportiert den kleinsten Prozentsatz

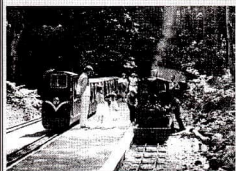
seiner Wirtschaftsleistung?

Mathematische Impressionen einer Schottlandreise

Aus einem Werbeprospekt für Schottland:

Mit der Mull Railway nach Torosay Castle & Gardens

Fahren Sie mit dieser einmaligen Insel-eisenbahn von Craignure, Isle of Mull, zu dem freundlichen Baronschloß mit 12 Acre terrassenförmig angelegten und informellen Parkanlagen und Waldwegen. Dampf- und dieselbetriebene Züge mit 10 1/2" Spurweite fahren Sie auf diesem 20 Minuten langen szenischen Ausflug an Ostern und von Mai bis Mitte Oktober.



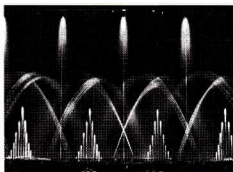
In England werden neben den heute international gebräuchlichen Maßeinheiten auch noch ältere verwandt. Zwei dieser sind:

- 1 inch (abgekürzt 1") = 2,54 cm
- 1 acre = 0,40467 ha

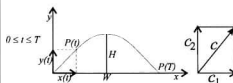
Aufgabe:

- Die Spurweite der Schmalspurbahn auf der Insel Mull ist in Zentimeter anzugeben!
- Wieviel Quadratmeter messen die Parkanlagen von Torosay Castle?

Waltzing Waters - Ein Spektakel aus Wasser, Licht und Musik



Ein unter Druck aus einem Rohr ausströmender Wasserstrahl bewegt sich auf einem Parabelbogen oder einer lotrechten Strecke, wobei bei den Wasserspielen von Newtonmore Anfangs- und Endpunkt in einer waagerechten Ebene liegen. Bei geeignet gewählten aufeinander senkrecht stehenden x - und y -Achsen bewegt sich jeder Wassertropfen P eines Strahles in der x - y -Ebene, und seine Bewegung wird durch die Gleichungen $x = x(t) = c_1 t$ und $y = y(t) = c_2 t - \frac{g}{2} t^2$ beschrieben. Dabei ist x der Abstand des Tropfens zur Zeit t von der y -Achse und y zur gleichen Zeit sein Abstand von der x -Achse. Zur Zeit $t = 0$ verläßt der betrachtete Tropfen gerade das Ausströmröhr, zur Zeit T ist sein Flug beendet.



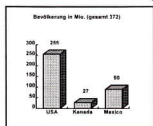
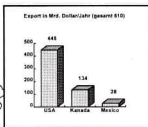
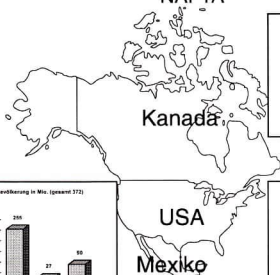
Es sei noch vermerkt: Die Tropfenbewegung ist eine Überlagerung (Superposition) der durch $x = c_1 t$ und $y = c_2 t - \frac{g}{2} t^2$ beschriebenen geradlinig gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ (Ausströmgeschwindigkeit des Wassers aus dem Rohr), die in die waagerechte Komponente c_1 und die lotrechte Komponente c_2 zerlegt ist, mit dem durch $x = 0$ und $y = -\frac{g}{2} t^2$ erfaßten freien Fall mit der Erdbeschleunigung g ; Die Luftreibung blieb unberücksichtigt.

1. Aufgabe: Beim Flug eines Wasserstrahles in Newtonmore sei die Flugweite W ebenso groß wie die Flughöhe H : $W = H$. Für diesen Fall ist das Verhältnis $c_2 : c_1$ zu ermitteln!

2. Aufgabe: Die Höhe H einer der bei diesen Wasserspielen erzeugten lotrechten Wassersäule sei doppelt so groß wie die einer anderen. Das Verhältnis $c : c_1$ ihrer Ausströmgeschwindigkeiten c und c_1 ist zu berechnen.

Dr. W. Träger

Nordamerikanisches Freihandelsabkommen - NAFTA -



Mathematik und Kunst

Leonardo da Vinci als Mathematiker

Unter diesem Titel veranstalten Prof. Jürgen Flachsmeyer und Prof. Peter Schreiber gemeinsam im laufenden Studienjahr an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald eine vielbesuchte Vorlesung und ein dazugehöriges Seminar.

Obwohl auch die Beziehungen der Mathematik zur Musik und zur Literatur vielfältig und sehr interessant sind, wird hier nur die bildende Kunst (einschließlich Architektur und Bauwesen) betrachtet, so daß die dazu in Beziehung stehende Mathematik meist (aber nicht ausschließlich) Geometrie ist. Wie überall, wo die Mathematik zu einem Bereich menschlicher Kultur, Wissenschaft oder Technik in Beziehung tritt, sind die Beziehungen wechselseitig und kompliziert: Die Mathematik liefert Begriffe, Objekte, Methoden, Erkenntnisse, Klassifikationen und empfängt dafür Aufgaben und Anregungen, oft solche, deren innermathematische Bedeutung und spätere Anwendung weit über den Anlaß der ursprünglichen Frage hinausreichen. Im Fall der Kunst tritt hinzu, daß sie mit den für sie typischen Mitteln seit mehr als 3000 Jahren die Existenz und gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik im Guten wie im Bösen widerspiegelt, d. h. von der Verherrlichung bis zur bissigen Verspottung. Manchmal haben Künstler auch wirkliche schöpferische Beiträge zur Mathematik geleistet, während umgekehrt viele Mathematiker sich gern künstlerisch betätigen. Wir beginnen in diesem Heft eine Serie kleiner Artikel, in denen etwas von den Erträgen der oben genannten Lehrveranstaltungen einer

breiteren Öffentlichkeit vorgestellt werden soll, so daß dabei möglichst viele Aspekte des Verhältnisses zwischen Kunst und Mathematik berührt werden.

Bild von LEONARDO, dem berühmten Künstler und Denker der Renaissance. - Er beschäftigte sich mit Bildern, Skulpturen und Flugmaschinen; aber auch die Mathematik zählte zu seinen Forschungsgebieten.



LEONARDO DA VINCI als Mathematiker

Für die Zeit der europäischen Renaissance war eine große, in dieser Weise nie wieder erreichte Vielseitigkeit der Interessen und Tätigkeiten der Künstler charakteristisch, die oft zugleich Maler, Bildhauer, Baumeister, Dichter, aber auch In-

genieure und Naturforscher waren. Am ausgeprägtesten ist dies bei LEONARDO DA VINCI (1452 - 1519), der sich in seinen späteren Lebensjahren auch viel mit Mathematik beschäftigte. Da er jedoch nichts „veröffentlicht“ hat und seine Hinterlassenschaft nur in einer großen Zahl von meist zur Selbstverständigung angefertigten Skizzen mit wenigen, in Spiegelschrift beigelegten bruchstückhaften Bemerkungen besteht, da obendrein diese Hinterlassenschaft zunächst in alle Winde zerstreut und manches erst in unserem Jahrhundert wieder aufgefunden und öffentlich zugänglich wurde, ist es selbst für den Fachmann sehr schwer (viel schwerer als z. B. bei ALBRECHT DÜRER), konkrete mathematische Ergebnisse LEONARDO's zu benennen.

Bei all dem vielen, was mittlerweile über LEONARDO's mathematische Studien bekannt wurde, bleibt der Eindruck, er habe zwar intensiv um das Verständnis vieler Dinge gerungen, auch viele Ideen gehabt, aber so etwas wie einen „Satz“ oder eine „Aufgabe mit Lösung“ von LEONARDO scheint es nicht zu geben.

Zu den bevorzugten Interessen LEONARDO's im Bereich der Mathematik gehörte die Bestimmung des Schwerpunktes von ebenen Flächen wie auch von Körpern. Eine diesbezügliche Schrift des ARCHIMEDES (ca. 287 bis 212 v. u. Z.) scheint er studiert zu haben, und es ist ihm wohl bewußt geworden, daß man prinzipiell die Lage des Schwerpunktes jeder geradlinig begrenzten Figur mittels folgender beiden Regeln konstruieren kann:

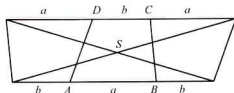
A) Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt seiner drei Seitenhalbierenden.

B) Haben die beiden in derselben Ebene liegenden Figuren F_1 , F_2 keinen Punkt gemeinsam und sind S_1 , S_2 ihre Schwerpunkte, so liegt der Schwerpunkt S der Gesamtfigur auf der Strecke S_1S_2 und zwar so, daß die Produkte aus den Flächeninhalten $F(F_1)$ und den zugehörigen „Hebelarmen“ SS_2 sich an dem in S drehbar gelagerten Hebel mit den End-

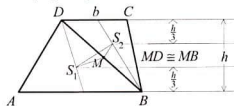
punkten S_1, S_2 im Gleichgewicht befinden, d. h. es ist $F(F_1) \cdot SS_1 = F(F_2) \cdot SS_2$.

Wendet man diese beiden Regeln auf ein beliebiges Trapez $ABCD$ an, so ergibt sich folgende einfache Konstruktion (Bild 1), die schon Archimedes bekannt war:

Verlängere die Seite $AB = a$ des Trapezes rechts und links jeweils um die Länge b der zu AB parallelen Seite CD und umgekehrt die Seite CD rechts und links jeweils um a . Dann schneiden sich die Diagonalen des so vergrößerten Trapezes im Schwerpunkt S des Trapezes $ABCD$.

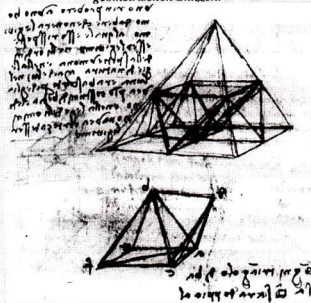


Zum Beweis denke man sich das gegebene Trapez wie in Bild 2 in zwei Dreiecke ABD und DCB mit den Grundseiten a bzw. b , der gemeinsamen Höhe h und den wie üblich konstruierten Teilschwerpunkten S_1, S_2 zerlegt:



Der gesuchte Schwerpunkt S muß dann auf der Strecke S_1S_2 in einer solchen

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus LEONARDO's Manuskripten. Beeindruckend ist hierbei die genaue Beherrschung der Perspektive in seinen geometrischen Skizzen.



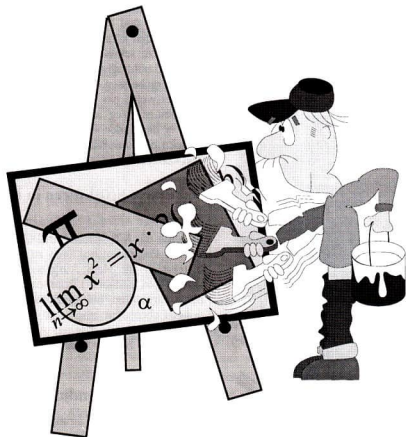
Weise liegen, daß sich seine Abstände zu S_1 bzw. S_2 umgekehrt wie die Flächen der entsprechenden Dreiecke, d. h. wie $b : a$ verhalten. Setzen wir den unbekannten Abstand von S zur Grundlinie AB in der Form $(1+x) \cdot h / 3$ an, so ist sein Abstand von der dazu parallelen Geraden CD gleich $(2-x) \cdot h / 3$ und für x gilt $x : (1-x) = b : a$. Daraus ergibt sich

$$1+x = \frac{a+2b}{a+b}, \quad 2-x = \frac{2a+b}{a+b}, \quad \text{d. h., die}$$

Abstände von S zu den beiden parallelen Geraden verhalten sich wie $a+2b : b+2a$. Daher hat der von uns in Bild 1 konstruierte Punkt S nach dem Strahlensatz die richtigen Abstände zu AB bzw. CD . Andererseits ist klar, daß er auf der Verbindung der Mitten von AB und CD liegen muß, wo sich auch der konstruierte Punkt befindet. Man begründe letztere Behauptung. Außerdem überlege man, wie der Punkt S auf der Strecke S_1S_2 in Abhängigkeit vom Längenverhältnis der Strecken a, b hin- und herwandert und daß in den Spezialfällen $a=0$ bzw. $b=0$, in denen das Trapez zum Dreieck entartet, die ursprüngliche Regel für Dreiecke herauskommt.

Die vorgestellte Betrachtung ist keine „Erfindung“ LEONARDO's, er hat sie - wie auch vieles andere - nur nachvollzogen. Dennoch liefert sie einen guten Zugang zum Verhältnis LEONARDO's zur Mathematik. Einerseits hatte er einen ausgeprägten Sinn für das Praktische, und in unserem Beispiel ist die im Prinzip in den Regeln A), B) enthaltene Lösung für einen konkreten Fall bis zur wirklichen Praxisreife, d. h. bis zu einer einfach durchzuführenden und leicht zu merkenden Konstruktionsvorschrift, durchgearbeitet. Andererseits offenbart der Weg zu dieser Vorschrift etwas von dem ästhetischen Reiz, der manchen (keineswegs allen!) mathematischen Gedanken eigen ist und worin die Mathematik sich der Kunst auf eine solche Weise nähert, daß sie selbst zur Kunst wird.

Prof. Dr. P. Schreiber



PC LOGO für alpha-Leser

Mathe mit einer Programmiersprache

Auf der CeBIT in Hannover lernte die alpha-Redaktion die Programmiersprache PC-Logo kennen und war begeistert. Wir haben gleich mit den LOGO-Leuten eine Zusammenarbeit vereinbart und freuen uns, unseren Lesern diese Sprache zu einem sehr günstigen Sonderpreis anbieten zu können. Denn für mathematische Anwendungen von PC-Logo gab es bisher kein richtiges Forum, obwohl schon an vielen Schulen damit gearbeitet wird. Dieser Seite wollen wir uns jetzt und in den kommenden Heften annehmen und rufen auch unsere Leser zur Mitarbeit auf.

Die Programmiersprache LOGO wurde bereits in den 60er Jahren im Institut für künstliche Intelligenz am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge, USA durch S. Papert und seine Mitarbeiter entwickelt. Über sein Buch „Mindstorm - Kinder und Computer“ erlangte der LOGO-VATER Papert mit seinen pädagogischen Vorstellungen weltweite Anerkennung. Das Softwareprodukt PC-Logo hat als Lernumgebung eine grundlegende Besonderheit. Im Gegensatz zu den üblichen Programmiersprachen verwendet PC-Logo ausschließlich deutsche Worte als

Befehle. Somit wurde für die Verbreitung von LOGO eine neue Tür aufgestoßen. Jetzt ist sogar eine Windows-Version in Arbeit.

Als Grundlage für mathematische Anwendungen verfügt die Software über umfangreiche arithmetische und mathematische Funktionen, von den Grundrechenarten über trigonometrische Funktionen bis zu Logarithmen.

Mit diesen Möglichkeiten erzeugt die Programmiersprache eine intelligente „Lernumgebung“, die selbst Kindern ab 7 Jahren den Zugang zum Computer und zur Programmierung spielerisch erschließt, dabei jedoch, ohne Begrenzung nach oben, „erwachsenen“ Anforderungen gerecht wird.

Ein wesentlicher Bestandteil dieses Konzepts ist die „Igelgrafik“. Mit leicht erlernbaren Anweisungen werden die „Igel“ über den Bildschirm bewegt. Den zurückgelegten Weg können die Igel mit Linien in verschiedenen Farben markieren. Man gibt dem Igel den Befehl VORWARTS 10 - und er geht 10 „Schritte“ (10 Punkte auf dem Bildschirm) nach vorn. So einfach ist das. So lassen sich geometrische Figuren und auch kom-

plexe grafische Darstellungen erzeugen und sogar über einen Drucker ausgeben.

Als Programmiersprache kombiniert PC-Logo Elemente der strukturierten Compilersprachen (z. B. PASCAL) mit der einfachen interaktiven Bedienung der Interpretersprachen (wie BASIC). Die Möglichkeit, Anweisungen über die Tastatur einzugeben und sofort ein Ergebnis oder eine Fehlermeldung zu erhalten, fördert das experimentelle Lernen (learning by doing) und das Lernen durch Fehler und Erfolgsbestätigung (try and error).

Programme werden durch die Definition von Prozeduren erstellt. Prozeduren sind einzelne aufeinander Bezug nehmende Programmmodule. Diese Prozeduren können „Grundworte“ aus dem mitgelieferten PC-Logo-Wortschatz sein und andere durch den Anwender selbst definierte Prozeduren aufrufen. Durch das Definieren eigener Prozeduren kann der Anwender den Wortschatz von PC-Logo nach seinen Vorstellungen erweitern. Zum Erstellen von Prozeduren verfügt PC-Logo über einen sehr komfortablen Texteditor, der sich auch zum Erstellen anderer Texte gut eignet.

Die wichtigste und vielseitigste Datenstruktur in PC-Logo ist die Liste. Hierin ist die Herkunft von LISP, der klassischen Sprache der künstlichen Intelligenz, nicht zu verleugnen. Diese Listen sind zu betrachten wie „Sätze“ in natürlichen Sprachen. Sie setzen sich beliebig zusammen aus Elementen unterschiedlicher Datentypen oder auch beliebigen anderen Listen.

Da definierte Prozeduren in Listen übertragen und Inhalte von Listen ausgeführt werden können, ist es möglich, Programme zu schreiben, die sich selbst ändern und abhängig von Eingaben oder anderen Ergebnissen erweitern. Entwirft man beispielsweise ein Labyrinth, in dem der Igel seinen Weg alleine suchen soll, so wird er ihn finden - und dabei lernen, wie er beim nächsten Mal am schnellsten zum Ziel kommt.

Rekursive Strukturen in PC-Logo

Durch die Möglichkeit, in PC-Logo rekursive Programmstrukturen zu definieren bietet sich für viele Aufgabenstellungen verblüffend einfache Lösungen an, wobei diese Strukturen bei grafischen Anwendungen ebenso eingesetzt werden können, wie bei numerischen Aufgabenstellungen oder bei der Bearbeitung von Listen.

Grafische Anwendung

Als einfache Hinführung zu einer rekursiven grafischen Anwendung soll das folgende Beispiel dienen:



Als erste Aufgabenstellung soll am Bildschirm ein „V“ mit variabler Schenkellänge gezeichnet werden. Hierzu dient folgende Prozedur

```
PR V :SCHENKEL
  RECHTS 45
  VORWÄRTS :SCHENKEL
  RÜCKWÄRTS :SCHENKEL
  LINKS 90
  VORWÄRTS :SCHENKEL
  RÜCKWÄRTS :SCHENKEL
  RECHTS 45
ENDE
```

Beim Aufruf von V mit

V 50

erhält man diese Darstellung:



Als Erweiterung dieser Prozedur sollen nun an die Schenkellenden des „V“ weitere „V“s gezeichnet werden, deren Schenkellängen jedoch kleiner sind. An die so entstandenen „V“s sollen erneut „V“s mit noch kleineren Schenkellängen gezeichnet werden, und so fort. Als Ergebnis wird ein sich verästelnder Baum erhalten.

Wenn man in der oben dargestellten Prozedur „V“ verfolgt, an welcher Stelle ein weiteres „V“ gezeichnet werden soll, erkennt man, daß dies jeweils nach Ausführung der Anweisung

```
VORWÄRTS :SCHENKEL
```

der Fall ist. Somit ergibt sich folgende erweiterte Version der Prozedur „V“:

```
PR V :SCHENKEL
  RECHTS 45
  VORWÄRTS :SCHENKEL
  V :SCHENKEL / 1.5
  RÜCKWÄRTS :SCHENKEL
  LINKS 90
  VORWÄRTS :SCHENKEL
  V :SCHENKEL / 1.5
  RÜCKWÄRTS :SCHENKEL
  RECHTS 45
ENDE
```

Läßt man diese Prozedur ausführen, stellt man fest, daß der Igel sich in rechter Richtung auf den immer kleiner werdenden Schenkeln bewegt und schließlich scheinbar in eine Drehbewegung übergeht. Dieser Vorgang dauert so lange, bis Logo die Programmausführung mit einer Fehlermeldung abbricht.

Die Ursache hierfür ist, daß ein wesentliches Element rekursiver Programmstrukturen noch nicht eingeführt wurde, nämlich eine Abbruchbedingung. In der obigen Version von „V“ wird der zuerst erreichte rekursive Aufruf bei jeder Ausführung von „V“ erneut ausgeführt und zwar theoretisch unendlich oft. Bedingt durch die in-

terne Speicherstruktur wird dem jedoch eine Grenze gesetzt.

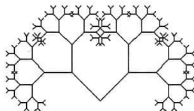
In der folgenden Version von „V“ ist eine Abbruchbedingung ergänzt:

```
PR V :SCHENKEL
  WENN :SCHENKEL < 3 DANN
    RÜCKKEHR
  RECHTS 45
  VORWÄRTS :SCHENKEL
  V :SCHENKEL / 1.5
  RÜCKWÄRTS :SCHENKEL
  LINKS 90
  VORWÄRTS :SCHENKEL
  V :SCHENKEL / 1.5
  RÜCKWÄRTS :SCHENKEL
  RECHTS 45
ENDE
```

ENDE

Ruft man diese Prozedur auf, erhält man das erwartete Ergebnis:

V 50



Numerische Anwendung

Ein weiteres Beispiel demonstriert eine numerische Anwendung, bei der eine rekursive Struktur vorteilhaft eingesetzt werden kann.

Es ist eine allgemeine Prozedur zur Berechnung einer Fakultät zu entwickeln. Als Beispiel gilt:

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$

es gilt auch:

$$4! = 4 * 3 * 2 * 1$$

damit gilt auch:

$$5! = 5 * 4!$$

oder allgemein:

$$n! = n * (n - 1)!$$

Dieser Lösungsansatz zeigt den Schluß auf den nächst einfacheren Fall, der eine wichtige Voraussetzung zum Entwurf einer rekursiven Struktur ist. Wie bereits erwähnt, ist das zweite wichtige Element die Abbruchbedingung. Bei der Berechnung von Fakultäten ist dies die Definition

$$1! = 1$$

Mit diesen Grundlagen kann die Prozedur „FAKT“ leicht entwickelt werden:

```
PR FAKT :N
  WENN :N < 2 DANN RÜCKGABE 1 SONST RÜCKGABE :N * FAKT (:N - 1)
ENDE
```

Durch die Prüfung „:N < 2“ als Abbruchbedingung wird auch der Sonderfall

$$0! = 1$$

richtig behandelt.

Anwendung mit Listen

Als letztes Beispiel wird eine rekursive Prozedur zur Bearbeitung einer Liste vorgestellt:

Hier sollen die Elemente einer Liste einzeln jeweils in einer Bildschirmzeile ausgegeben werden.

Mit dem Grundwort ERSTES kann das erste Element einer Liste isoliert werden und das Grundwort OHNERSTES gibt die eingegebene Liste ohne das erste Element zurück.

Als Abbruchbedingung dient hier der Fall, daß die leere Liste übergeben wird, aus der natürlich keine weiteren Elemente mehr isoliert werden können.

```
PR WORTWEISE :L
  WENN LEER? :L DANN
    RÜCKKEHR
  DRUCKEZEILE ERSTES :L
  WORTWEISE OHNERSTES :L
ENDE
```

Ruft man die Prozedur z. B. mit

```
WORTWEISE [DAS IST EINE LISTE]
```

auf, erhält man als Ergebnis:

```
DAS
IST
EINE
LISTE
```

In diesem Beispiel erfolgt der rekursive Aufruf als letzte Anweisung in der Prozedur. Man bezeichnet dies als „End-Rekursion“. PC-Logo erkennt diesen Sonderfall und speichert die verschiedenen Aufruf-Ebenen der Prozedur nicht im internen Stapelspeicher, da es nicht erforderlich ist, die Aufruf-Ebenen rückwärts zu durchlaufen. Somit ist die Anzahl der möglichen Aufruf-Ebenen hier nicht durch die Größe des internen Stapelspeichers begrenzt.

End-Rekursionen verwendet man in PC-Logo häufig dazu, unendliche Schleifenkonstrukte zu bilden, wie z. B. in

```
PR UNENDLICH
  DZ "UNENDLICH
  UNENDLICH
ENDE
```

Die Ausführung dieser Prozedur kann nur „gewaltsam“ durch Drücken von Strg-G abgebrochen werden.

Haben Sie Interesse an der intelligenten Programmiersprache PC-Logo? Für alpha-Leser haben wir einen Sonderservice. Auf der 3. Umschlagseite befindet sich eine Bestellkarte zum Ausschneiden. Wenn Sie diese ausgefüllt an uns zuschicken, erhalten Sie eine Version von PC-Logo zum Sonderpreis von 198,- DM (incl. MwSt.) Sie sparen 100,- DM!

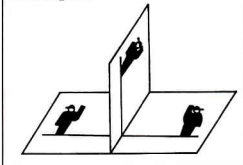
Experimentalmathematik

Spiele mit Schere und Papier

H. G. WELLS (1866-1946), einer der Begründer der Science fiction, läßt in der im Jahre 1897 geschriebenen Geschichte „The Plattner Story“ (Plattners Geschichte)¹ einen Lehrer aus unserer dreidimensionalen Welt in eine vierdimensionale gelangen. Der Lehrer kehrt zwar in die alte Umgebung zurück, aber in spiegelbildlicher Form. Er hat also jetzt das Herz am „rechten“ Fleck.

Dieses Versehen, das Plattner widerfahren ist, können wir uns an einem Vorgang in geringeren Dimensionen veranschaulichen, etwa indem wir einen ebenen (d. h. zweidimensionalen) Plattner im Raum (d. h. im Dreidimensionalen) wie eine

Abb. 1: Wie Mr. Plattner in einem zweidimensionalen Raum gespiegelt werden kann, wenn er in die dritte Dimension gerät.

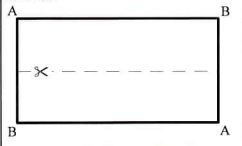


Buchseite „herumklappen“ (Abb. 1). Aber diese Prozedur des Spiegelns gelingt bereits in einem zweidimensionalen Raum, also auf einer Fläche. Diese Fläche muß zwar zuvor im dreidimensionalen Raum verdreht werden, aber das würden ihre Bewohner natürlich gar nicht bemerken; wie sie auch die Merkwürdigkeiten dieser Fläche als völlig normal hinnehmen würden.

¹Zu finden ist diese Geschichte z. B. in dem Reclam-Bändchen „Das Kristallei“, das Kurzgeschichten von Wells enthält. Einige Jahre zuvor hatte EDWIN A. ABBOT (1838-1926) eine phantastische Geschichte „Flatland“ (Flachland bzw. Flächenland) geschrieben, die sich ganz in einer ebenen Welt abspielt.

Diese bemerkenswerte Fläche heißt Möbiussches Band nach dem Leipziger Mathematiker A. F. MÖBIUS (1790-1868), der sie 1858 entdeckt hatte. Die gleiche Fläche war allerdings im gleichen Jahr auch durch J. B. LISTING (1808-1882) beschrieben worden, der wie MÖBIUS bei C. F. GAUSS (1777-1855) in Göttingen promoviert hatte.

Abb. 2: Streifen, der zum Möbiusschen Band verklebt wird. Die rechten und linken Enden werden um 180 Grad gegeneinander verdreht, so daß die gleichen Buchstaben aufeinander zu liegen kommen.



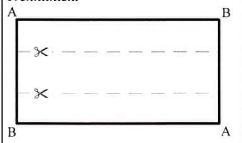
Ein Möbiussches Band läßt sich leicht herstellen, am besten aus einem etwa 1 m langen und mindestens 5 cm breiten Streifen. Zeitungspapier eignet sich gut für unsere Experimente mit Möbiusschen Bändern. Das in Abbildung 2 gezeigte Band wird an den schmalen Enden zusammengeklebt, wobei zuvor die Enden gegeneinander verdreht worden sind. Zunächst betrachten wir nur den Fall, daß die Verdrehung 180 Grad beträgt (womit die rechts bzw. links mit A und B markierten Stellen genau übereinander liegen).

Rundreisen auf diesem Band haben überraschende Ergebnisse: Denken wir uns einen ebenen Mr. Plattner, der dabei ist, das Band zu umrunden. Er soll dabei dessen Rand nicht überschreiten, denn diese Verrenkung wollen wir ihm nicht zumuten. Da das ideale bzw. gedachte Möbiussche Band natürlich dickelos ist, gilt eine Rundreise als beendet, wenn Plattner wieder am Startpunkt eintrifft. Bei unserer realen bzw. materiellen Version des Ban-

des ist das dann der Fall, wenn Plattner auf der „anderen“ Seite des Bandes den Startpunkt erreicht. Genauer: wir behalten einen Finger am Startpunkt und schieben mit einem zweiten Finger der anderen Hand Plattner am Band so lange herum, bis die Finger sich wieder berühren würden, wenn das Band nicht zwischen ihnen wäre. Das Band sollte ja dickelos (d. h. zweidimensional) sein, daran müssen wir uns bei unserem Modell erinnern.

Das einmalige Verdrehen des Bandes bewirkt, daß Plattner und alles, was er bei

Abb. 3: Möbiussches Band mit zwei Trennlinien.



sich hat, einmal um 180 Grad verdreht wird bzw. gespiegelt im Ausgangspunkt erscheint. Verfolgt das anhand einer bewegten eingezeichneten asymmetrischen Figur auf dem Band! Insbesondere geht eine mitgeführte Uhr jetzt anders herum, also entgegen dem Uhrzeigersinn. Auf dem Band kann man also zwischen Rechts- und Linksherum nicht entscheiden.² Mathematiker sagen hierzu, daß das Möbiussche Band eine nicht orientierbare Fläche ist. In der Regel sind die uns vertrauten Flächen jedoch orientierbar, daher wird das Möbiussche Band einige Eigenschaften haben, die zu unseren Alltagserfahrungen nicht immer passen werden.

Zerschneidet ein um 180 Grad gedrehtes Band längs der Mittellinie (Abb. 2)! Welches Ergebnis erwartet ihr und welches ergibt sich?

Wenn man einen Luftballon innen und außen mit verschiedenen Farben anstreichen will, so benötigt man zwei Farben. Wie sieht das beim Möbiusschen Band aus?

Ist es möglich, aus diesem Band eine Tasche anzufertigen, mit der man etwas transportieren kann?

²ERNST JANDL, der zeitgenössische österreichische Lyriker hat das (vermutlich ohne es zu wissen), in seinem Gedicht von 1982 beschrieben:

Manche meinen
lechts und links
kann man nicht verwelchtern.
Werch ein Illtum!

Abb. 6: August Ferdinand Möbius, geb. 17. 11. 1790 in Schupfota, gest. 26. 09. 1868 in Leipzig.



Einige Vorschläge zum Experimentieren:

1. Verdreht das Band vor dem Verkleben um 180 Grad, 360 Grad, 540 Grad, ... und zerschneidet dann das Band längs der Mittellinie (Abb. 2)! Was geschieht?

2. Zerschneidet Möbiussche Bänder der eben genannten Art nicht längs einer Mittellinie, sondern längs zwei Linien wie in Abbildung 3 eingezeichnet.

3. Legt zwei Streifen übereinander, verdreht sie und verklebt sie dann (Abb. 4). Wie wirkt sich das Zerschneiden längs einer oder zwei Linien aus?

4. Kombiniert zwei Bänder, wie es Abbildung 5 zeigt. Der Teil des einen Bandes, der eingerahmt ist, soll verdreht werden oder auch nicht. Wie unterscheiden sich die Bänder nach dem Zerschneiden längs der eingezeichneten Mittellinien?

Rüdiger Thiele

Abb. 4: Möbiussches Band aus zwei Streifen.

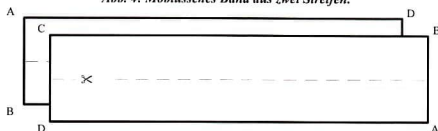
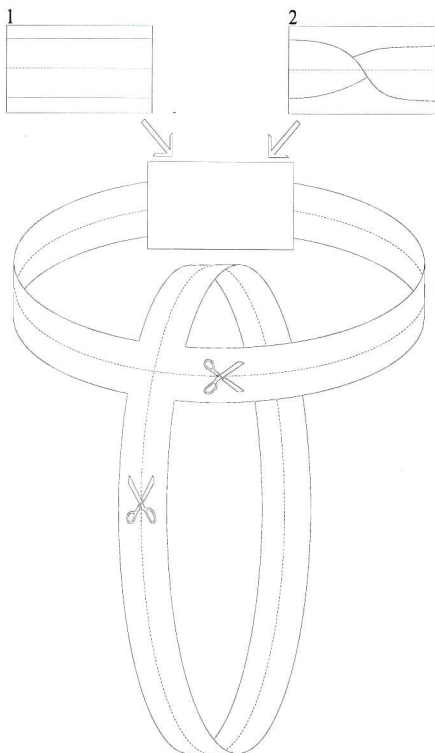


Abb. 5: Zwei zusammenhängende Bänder. Die umrahmte Stelle soll einmal einen normal durchgehenden Streifen und ein andermal einen um 180 Grad verdrehten Streifen symbolisieren.



Alphons logische Abenteuer

Alphons' Klasse hatte im Fach Mathematik eine Arbeit geschrieben. Am nächsten Tag fragte ein Schüler der Klasse den Lehrer vorsichtig, ob auch Arbeiten nicht gut ausgefallen wären. „Nun“, antwortete dieser, „einige Arbeiten sind nicht gut, mehr will ich jetzt aber noch nicht sagen.“ Diese Antwort löste eine aufgeregt verlaufende Diskussion in der Klasse aus. Wieviel sind „einige“? Muß sogar befürchtet werden, daß alle keine gute Arbeit geschrieben haben? Bei welcher Auslegung stehen die Chancen am besten, bei welcher am schlechtesten?

Alphons hörte eine Weile zu und kam dabei immer mehr zu der Überzeugung, weniger auf die von banger Hoffnung getragenen Spekulationen als vielmehr auf die Auskünfte des logischen Verstandes zu hören.

In der Tat, das „einige Arbeiten“ in der Antwort des Lehrers läßt verschiedene Verstehensweisen zu. Es kann damit nach der einen Seite entweder mehr als eine oder mindestens eine Arbeit gemeint sein, nach der anderen Seite den Fall aller Arbeiten entweder ausschließen oder

gerade einschließen. Aufgelistet kann also: „Einige Arbeiten sind nicht gut“ behaupten:

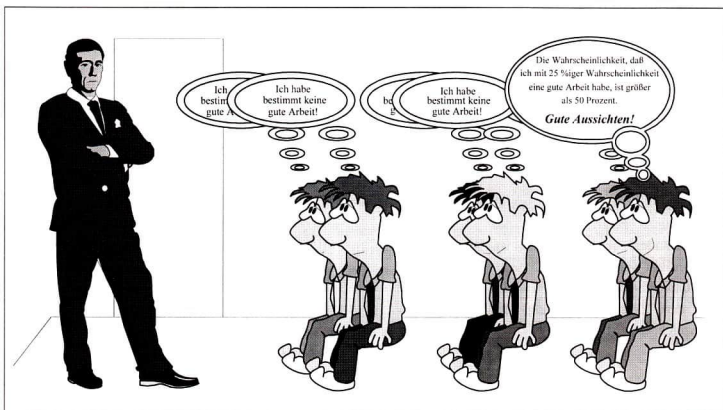
- (1) Mindestens eine Arbeit ist nicht gut und eventuell sind sogar alle Arbeiten nicht gut.
- (2) Mindestens eine Arbeit ist nicht gut und mindestens eine Arbeit ist gut.
- (3) Mehr als eine Arbeit ist nicht gut und eventuell sind sogar alle Arbeiten nicht gut.
- (4) Mehr als eine Arbeit ist nicht gut und mehr als eine Arbeit ist gut.

Im Fall (1) ist die Aussage: Alle Arbeiten sind gut, falsch. Da nicht ausgeschlossen ist, daß auch eine Arbeit gut ist, kann auch die Aussage: Alle Arbeiten sind nicht gut, falsch sein. Zwei allgemeine Aussagen, von denen die eine bejaht, was die andere verneint, können zugleich falsch sein. Was bei (1) nur eine Möglichkeit darstellt, ist im Fall (2) tatsächlich so: Neben mindestens einer nicht guten Arbeit gibt es mindestens eine gute Arbeit. Zwei partikuläre Aussagen,

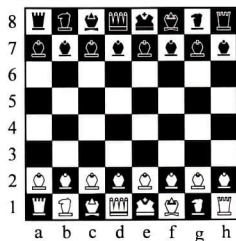
von denen die eine bejaht, was die andere verneint, können zugleich wahr sein. Im Fall (3) ist die Anzahl der nicht guten Arbeiten mehr als 1. Die Anzahl kann auch größer als 2 sein. (3) läßt offen, ob es neben den Arbeiten, die nicht gut sind, auch solche gibt, die gut sind. Daß alle Arbeiten nicht gut sind, ist ja nur eine unter den offengelassenen Möglichkeiten. Der Fall (4) hingegen behauptet, daß es neben Arbeiten, die nicht gut sind, mit der gleichen Untergrenze auch solche gibt, die gut sind. Bei endlichen geraden Anzahlen ist somit bei (4) die Hälfte dieser Anzahl die größte Untergrenze. „Einige Arbeiten“ besagt dann dasselbe wie „die Hälfte der Arbeiten“.

Welche Auslegung der Antwort des Lehrers ist die für unsere Klasse günstigste, wenn wir als Maßstab dafür die höchstmögliche Anzahl guter Arbeiten ansehen? Offensichtlich gibt (2) schon die Gewißheit, daß es auch gute Arbeiten gibt, aber die Anzahl möglicher guter Arbeiten ist hier nicht größer als im Fall (1). Trotzdem ist (2) wohl die für die ganze Klasse hoffnungsvollste Verstehensweise, dagegen (4) die pessimistischste. Was er da so vor sich hinräume, fragte sein Freund Berti. „Ich überlege, ob der Wunsch auf die für uns beste Version auch gleich die Arbeiten entsprechend gut macht“, antwortete Alphons, fügte aber gleich hinzu: „Schön wäre es zwar, aber dann können wir die gesamte Schulzeit gleich zur Ferienzeit machen.“

Prof. Dr. L. Kreiser



Sicher haben Sie alle die großen Veränderungen an der *alpha* bemerkt, die mit dem Verlagswechsel in Erscheinung traten. Wir meinen, daß alle diese Veränderungen notwendig und sinnvoll waren. Eine weitere Veränderung ist die Einführung des *alpha*-Schachbrettes. Der wichtigste Überlegungsgrund war die Vereinfachung, damit wir in der Redaktion die *alpha* noch schneller fertigstellen können. Außerdem finden wir, daß eine Zeitschrift wie die *alpha* es verdient hat, ein eigenes Schachbrett zu besitzen. Deshalb haben wir uns ein Schachbrett in Corel Draw™ einfallen lassen. Die Urform wurde dabei mehrfach überarbeitet. Auch unsere Leser sollen die Chance bekommen, das *alpha*-Schachbrett zu verbessern. Sollten Sie Vorschläge zur Verbesserung sehen, teilen Sie uns diese bitte mit, damit wir das *alpha*-Schachbrett noch besser und deutlicher gestalten können. Wenn Sie dazu die Inspiration des jetzigen Schachbretts brauchen, schicken wir Ihnen dieses als Corel Draw™ 3.0 Datei. Voraussetzung hierfür ist, daß Sie uns eine DOS-formatierte Diskette und eine entsprechend frankierte und adressierte Diskettenversandtasche zusenden. Doch nun wollen wir unsere neuen *alpha*-Figuren vorstellen.



Auf dem Schachbrett stehend erkennt man die meisten Figuren am leichtesten. Auffällig ist die ungewöhnliche Form des Läufers. Er sieht wohl eher wie ein Speerwerfer aus mit seinen muskulösen Armen. Deutlich unterschieden ist er vom Bauern durch seinen dreieckigen Kopf und die Form des Standfußes. Der Turm wirkt etwas grazioser als normal. Die Dame mit ihrer fünfzackigen Krone erinnert ein wenig an einen König, der jedoch als Zeichen seiner Würde ein Kreuz auf dem Haupt trägt. Einzig der Springer wirkt etwas schwächig. Aber in einer Überflußgesellschaft wie der unseren ist dieses Prädikat wohl eher eine Tugend.

Die Redaktion

Populäre Abart des Schachspieles

Das Schlagschach ist eine interessante und geistreiche Abart des Schachspieles, das jederzeit mit dem üblichen Spielmaterial gespielt werden kann. Es gelten hierbei die gleichen Regeln des Schachspieles, jedoch hat der König keine besondere Bedeutung im Spielverlauf. Ein Schachgebot oder Matt braucht nicht beachtet zu werden und wird der König geschlagen, so geht die Schlagschachpartie unverändert weiter. Der Grundgedanke des Spieles ist der Schlagzwang, d. h., wer eine Figur oder einen Bauern schlagen kann, muß diesen Zug ausführen. Hat der am Zug befindliche Spieler mehrere Möglichkeiten zum Schlagen, so steht ihm die Auswahl frei. Wird eine Schlagmöglichkeit übersehen, so hat der Gegner zu reklamieren und der ausgeführte (schlagfreie) Zug muß zurückgenommen werden.

Gewinner einer Partie im Schlagschach ist, wer alle seine Steine verloren hat oder wessen verbliebenen Steine (zumeist blockierte Bauern) nicht mehr ziehen können!

Die Auswahl an brauchbaren Eröffnungen ist nicht groß. Nach wenigen Zügen läßt sich oft schon der Gewinn der Partie erzwingen. Besonders wirkungsvoll sind die Läufer. Wenn man einen Läufer zum Schlagen veranlassen kann und selbst nicht zu schlagen braucht, wird man durch eine klug berechnete Schlagserie meistens alle Steine los.

Der Schlagzwang und der Zwang zur Bauernumwandlung in König, Dame, Turm, Läufer oder Springer geben die Möglichkeit, zahlreiche Züge im Voraus zu berechnen. Dadurch ist das Gebiet der Endspiele im Schlagschach recht mannigfaltig.

Das Diagramm 1 (T. R. DAWSON, „Deut. Wochenschach“, 1925) zeigt, wie Weiß am Zuge die Schlagkraft des schwarzen Läufers geschickt ausnutzt.

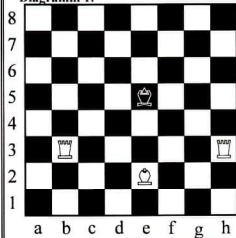
1. Tb2 L:h2
2. Th8 L:h8
3. e4 L. beliebig außer e5

4. e5 L:e5 und Weiß hat gewonnen oder 3. ... Le5 und Weiß kann nicht mehr ziehen und die Partie gewonnen.

Falsch dagegen wäre

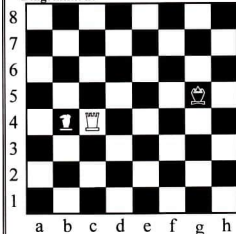
1. Th2 L:h2
2. Tb8 L:b8
3. e4 La7!
4. e5 L:b6
5. e6 La5
6. e7 Ld8
7. e:d8 und Schwarz hat gewonnen.

Diagramm 1:



Als kleine Anregung zum Lösen soll Diagramm 2 (J. NIEMANN, „Schach-matt“, 1948) dienen. Weiß ist am Zuge und gewinnt. Wie?

Diagramm 2:



H. Rüdiger

Ungleichungen - Teil 1

Zahlenmittel

Wenn wir uns n nichtnegative Zahlen $x_1, \dots, x_n$ vorgeben, so lassen sich daraus andere Zahlen berechnen, die wir als arithmetisches, geometrisches, harmonisches und quadratisches Mittel bezeichnen wollen. Dazu definieren wir

arithmetisches Mittel:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

geometrisches Mittel:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

quadratisches Mittel:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

und für positive Zahlen $x_1, \dots, x_n$

harmonisches Mittel:

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Die Zahlenmittel A, G, Q und H hängen von den Eingangsgrößen $x_1, \dots, x_n$ ab; sie sind Funktionen von $x_1, \dots, x_n$. Wir wollen noch einen weiteren Mittelwert einführen. Dazu sei α eine reelle Zahl, $\alpha \neq 0$. Wir definieren

$$W(x_1, \dots, x_n; \alpha) = \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und nennen es das **gewichtete Mittel** der Zahlen $x_1, \dots, x_n$ mit dem Gewicht α . Offenbar ist $H(x_1, \dots, x_n) = W(x_1, \dots, x_n; -1)$; $A(x_1, \dots, x_n) = W(x_1, \dots, x_n; 1)$ und $Q(x_1, \dots, x_n) = W(x_1, \dots, x_n; 2)$.

Wir zeigen zuerst eine wichtige Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

Satz 1: Es gilt stets $G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$. Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ist.

Wir beweisen durch vollständige Induktion die gleichwertige Ungleichung $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq [A(x_1, \dots, x_n)]^n$.

Als Induktionsanfang betrachten wir die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.

Natürlich ist $A(x_1) = G(x_1)$ und

$$\begin{aligned} [A(x_1, x_2)]^2 &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

$$\geq x_1 x_2 = G(x_1, x_2)^2$$

das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $(x_1 - x_2)^2 = 0$, also wenn $x_1 = x_2$ ist.

Sei die Aussage bereits für $n = k \geq 2$ nachgewiesen (Induktionsvoraussetzung), also bestehe für je k nichtnegative Zahlen $x_1, \dots, x_k$ die Ungleichung $x_1 \cdot \dots \cdot x_k \leq [A(x_1, \dots, x_k)]^k$.

Induktionsbehauptung: Auch für je $(k+1)$ nichtnegative Zahlen $x_1, \dots, x_{k+1}$ gilt $x_1 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} \leq [A(x_1, \dots, x_{k+1})]^{k+1}$, und „ $\Leftarrow$ “ gilt genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_{k+1}$ ist.

Beweis: Zur Abkürzung schreiben wir A für $A(x_1, \dots, x_{k+1})$. Wenn $x_1 = \dots = x_{k+1}$ ist, so ist $x_1 \cdot \dots \cdot x_{k+1} = x_1^{k+1}$.

Wenn aber nicht alle Zahlen $x_1, \dots, x_{k+1}$ übereinstimmen, so ist garantiert $A > 0$, und wir werden $x_1 \cdot \dots \cdot x_k < A^{k+1}$ zeigen.

Unter den Zahlen $x_1, \dots, x_{k+1}$ muß es in diesem Fall nämlich mindestens eine geben, die kleiner als A und eine, die größer als A ist. Weil die Numerierung der Zahlen willkürlich erfolgt, können wir $x_1 < A < x_{k+1}$ zur Vereinfachung annehmen.

Wir definieren nun $z_1 = x_1 + x_{k+1} - A$. Wegen $0 > (x_1 - A)(x_{k+1} - A)$ ist $0 > x_1 x_{k+1} - A[x_1 + x_{k+1} - A]$, also $x_1 x_{k+1} < A z_1$.

Weil aber $z_1 + x_2 + \dots + x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} - A = (k+1)A - A = kA$ ist, folgt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k}(z_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ &= A(z_1, x_2, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich für das arithmetische Mittel der k nichtnegativen Zahlen $z_1, x_2, \dots, x_k$ die Beziehung

$$A(z_1, x_2, \dots, x_k) \geq G(z_1, x_2, \dots, x_k),$$

also

$$A \cdot A^k \geq z_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_k > x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k+1}$$

und damit die Induktionsbehauptung.

Folgerung 1: Wenn $x_1, \dots, x_n$ nichtnegative Zahlen mit $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ sind, so gilt $x_1 + \dots + x_n \geq n$. Das „ $\Leftarrow$ “ Zeichen gilt dann und nur dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$ ist.

Beweis: Wegen $G(x_1, \dots, x_n) = 1$ folgt aus Satz 1 die Ungleichung $A(x_1, \dots, x_n) \geq 1$, also $x_1 + \dots + x_n \geq n$. Auch der zweite Teil der Behauptung ergibt sich direkt aus diesem Satz.

Aufgabe 1:

Mit einem Taschenrechner bestätige man, daß

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 > 5 \sqrt[5]{120} \text{ ist!}$$

Man benutze Satz 1 und zeige, daß für alle $n \geq 2$ gilt

$$1 + 2 + \dots + n > n \sqrt[n]{n!}.$$

$$\text{Weil bekanntlich } 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ist, erhält man $n+1 > 2 \cdot \sqrt[n]{n!}$.

Aufgabe 2:

Aus der Folgerung 1 leite man für n beliebige positive Zahlen $x_1, \dots, x_n$ die Ungleichung $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ her!

Die Gleichheit besteht genau, wenn alle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ übereinstimmen.

Folgerung 2: Die Ungleichung

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

ist für alle reellen Zahlen x gültig, die Gleichheit tritt nur für $x = 0$ ein.

Beweis: Das kann auch direkt gezeigt werden, denn wegen $x^2 \geq 0$ ist $x^4 + 4x^2 + 4 \geq 4x^2 + 4$ und daher $(x^2 + 2)^2 \geq 2^2(x^2 + 1)$.

Die obige Ungleichung erhält man wegen

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

auch aus Folgerung 1.

Folgerung 3: Für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}$$

Beweis: Wegen $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ erhält man $x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$ und daraus die gewünschte Ungleichung. Sie ergibt sich aber auch aus

Folgerung 1, denn aus $\frac{x^2}{1 + x^4} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$

und $x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1$ ergibt sich $\frac{1}{x^2 + x^2} \geq 2$.

Die Gleichheit tritt nur für $x = 1$ ein.

Ungleichungen lassen sich oft benutzen, um Extremalaufgaben zu lösen:

Aufgabe 3:

Unter allen Rechtecken mit vorgegebenem Umfang U bestimme man dasjenige mit dem größten Flächeninhalt F . Und unter allen Quadraten mit vorgegebener Kantensumme K bestimme man den mit dem größten Volumen V .

Lösung: Es bezeichnen a und b die Längen der Rechteckseiten, dann gilt $F = ab$ und $U = 2a + 2b$.

Nach Satz 1 ist $ab \leq \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 = \frac{U^2}{16}$ und

„ $\leq$ “ steht dann und nur dann, wenn $a = b$ ist. Folglich ist das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ein Quadrat.

Analog ist für Quader mit den Kantenlängen a, b, c : $V = abc$ und $K = a + b + c$.

$$\text{Aus } V = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 = \left(\frac{K}{3} \right)^3$$

folgt, daß der gesuchte Quader ein Würfel ist.

Aufgabe 4:

Für die Zahlen $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 8$ berechne man arithmetisches, geometrisches, harmonisches und quadratisches Mittel und ordne diese Werte der Größe nach!

$$\text{Lösung: } A(2, 4, 8) = \frac{14}{3}, G(2, 4, 8) = 4;$$

$$H(2, 4, 8) = \frac{24}{7}, Q(2, 4, 8) = 2\sqrt{7}$$

$$H < G < A < Q$$

Für das harmonische Mittel $H(x_1, \dots, x_n)$ von positiven Zahlen $x_1, \dots, x_n$ und das arithmetische Mittel der Zahlen $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$

gilt nach Definition die Identität:

$$H(x_1, \dots, x_n) \cdot A\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = 1.$$

Daher ergibt sich aus Satz 1 die Ungleichung

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{1}{A\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)} =$$

$$G(x_1, \dots, x_n).$$

Mithin haben wir bewiesen:

Satz 2: Wenn $x_1, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen sind, bestehen die Ungleichungen

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n).$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$ ist.

Satz 3: Wenn α, β reelle Zahlen mit $\alpha < 0 < \beta$ und $x_1, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen sind, so bestehen die Ungleichungen

$$W(x_1, \dots, x_n; \alpha) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq W(x_1, \dots, x_n; \beta).$$

„ $\leq$ “ gilt dann und nur dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$ ist.

Beweis: Nach Satz 1 ist

$$G(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \leq A(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha).$$

Wir berücksichtigen $\frac{1}{\alpha} < 0$ und erhalten

durch Potenzieren

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \left[G(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\geq \left[\frac{1}{n} (x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= W(x_1, \dots, x_n; \alpha) \end{aligned}$$

Weil $\frac{1}{\beta} > 0$ ist, erhalten wir aus

$$G(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta) \leq A(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$$

die andere gewünschte Ungleichung:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \left[G(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta) \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq \left[\frac{1}{n} (x_1^\beta + \dots + x_n^\beta) \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ &= W(x_1, \dots, x_n; \beta). \end{aligned}$$

Die „ $\leq$ “ Zeichen stehen nach Satz 1 genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$ ist.

Folgerung 4: Für je n positive Zahlen $x_1, \dots, x_n$ gilt die Ungleichung

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Beweis: Aus Satz 2 (bzw. aus Satz 3 mit $\alpha = -1, \beta = 1$) erhalten wir

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{bzw. } W(x_1, \dots, x_n; -1) \leq W(x_1, \dots, x_n; 1).$$

Das bedeutet aber

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

woraus

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

folgt. „ $\leq$ “ steht genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$ ist.

Aufgabe 5:

Man zeige, daß für beliebige nichtnegative Zahlen $x_1, \dots, x_n$ die Ungleichung

$$nx_1 \dots x_n \leq x_1^n + \dots + x_n^n$$

gültig ist. Dabei tritt die Gleichheit nur für $x_1 = \dots = x_n$ ein. Zum Beweis benutze man Satz 1 für die Zahlen $x_1^n, \dots, x_n^n$. Man bestätige die Ungleichung für $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, n = 3$ und für selbst gewählte Zahlenbeispiele!

Aufgabe 6:

Untersuche durch Computorexperimente (ein Taschenrechner macht es auch), welche Werte die gewichteten Mittel

$$W(2, 3, \alpha), W(2, 3, \beta), W(2, 3, 4, \alpha), W(2, 3, 4, \beta)$$

für $\beta = 10^{-k}, \alpha = -\beta, k = 0, 1, 2, 3, 4$ annehmen.

Läßt sich eine Vermutung formulieren, wie sich diese Zahlen verhalten, wenn sich α und β immer mehr der Zahl 0 annähern?

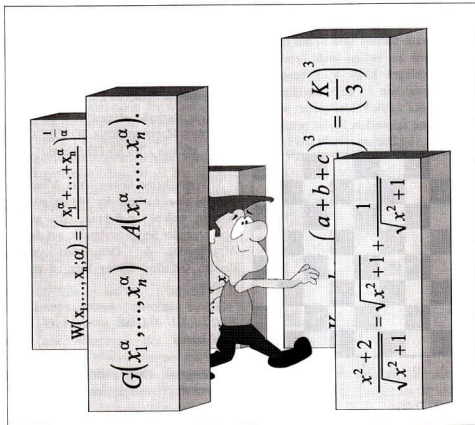
(Mit den Mitteln der Schulmathematik können wir es nicht exakt beweisen, daß die Zahlen $W(x_1, \dots, x_n; \alpha)$ gegen $G(x_1, \dots, x_n)$ streben, wenn α sich der Zahl 0 nähert, hier darf α auch negativ sein. Wir schreiben dafür auch:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} W(x_1, \dots, x_n; \alpha) = G(x_1, \dots, x_n)$$

Literatur:

1. P. P. Korowkin. Ungleichungen. Verlag Nauka. Moskau 1974 (in russisch).
2. W. Schmidt. Lösen von Extremwertaufgaben mit elementaren Mitteln. *alpha* 23 (1989) 1, 3-6

Prof. Dr. Werner Schmidt



Komisches, Kniffliges, Knackiges

*Ich weiß nicht wie ich der Welt
erscheine, aber mir selbst komme
ich vor wie ein Knabe, der
am Meeresufer spielt und der
sich daran belustigt, daß er dann
und wann einen glatteren Kiesel
oder eine schönere Muschel als
gewöhnlich findet, während der
große Ozean der Wahrheit uner-
forscht vor ihm liegt.*

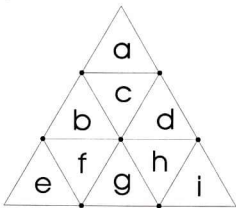
Isaac Newton

Balanceakt mit Zahlen

Anstelle jedes Buchstaben ist eine der sieben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 so auf die Flächen der neun kongruenten gleichseitigen Dreiecke zu schreiben, daß gilt:

Jede dieser Zahlen ist mindestens in einer der Dreiecksflächen einzutragen.

Die sieben Summen der drei bzw. sechs Zahlen, deren Dreiecke jeweils einen gemeinsamen Eckpunkt haben, sind gleich groß.



Dr. W. Träger

Die Tätigkeiten der Kinder

Als zu Müllers Besuch kommt, fragt dieser: „Womit beschäftigen sich jetzt Eure drei Söhne?“

Frau Müller antwortet: „Einer macht Schularbeiten, ein anderer liest ein Buch und der dritte macht eine Radtour.“ (I)

Herr Müller ergänzt: „Wenn Alfons Schularbeiten macht, so liest Bernd in einem Buch.“ (II)

Er fügt noch hinzu: „Entweder Bernd macht Schularbeiten oder Christian liest ein Buch.“ (III)

Müllers Besuch weiß nun Bescheid. Wie beschäftigen sich Müllers Söhne?

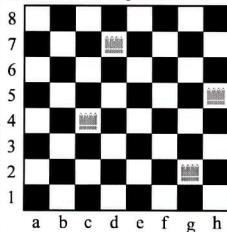
Dr. W. Träger

Acht verträgliche Damen

Beim Schachspiel kann nur die schwarze Dame die weiße und umgekehrt die weiße die schwarze schlagen. Bei der folgenden Aufgabe werden nur graue Damen benutzt, die sowohl als weiße als auch als schwarze aufgefaßt werden können, die dieselben Züge wie ihre Namensvettern beim Schachspiel ausführen können und von denen bei entsprechender Konstellation wie beim Schachspiel die eine stets die andere schlagen kann.

Aufgabe:

Acht graue Damen sind so auf das 8x8 Schachbrett zu stellen, daß keine eine andere schlagen kann. Vier dieser acht sind bereits, wie in der Abbildung angegeben, auf weiße Felder gesetzt worden. Auf welche schwarzen Felder müssen die restlichen vier Damen gestellt werden?

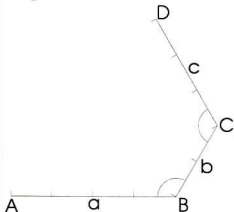


Dr. W. Träger

Gleichwinklige Sechsecke

Welche Sechsecke ABCDEF erfüllen die folgenden Bedingungen?

- Alle Innenwinkel sind kongruent.
 - Die Längen aller Sechseckseiten haben in der Maßeinheit Zentimeter ganzzahlige Maßzahlen.
 - Für die Seitenlängen a, b und c gilt $a = 4$ cm; $b = 2$ cm und $c = 3$ cm.
- Wie groß sind ihre Flächeninhalte?



Dr. W. Träger

Alte Aufgaben für junge Löser

- Eine Kuh wirft jährlich ein weibliches Kalb, eine Färse. Beginnend mit dem 4. Lebensjahr wirft auch jede Färse zu Jahresanfang wieder eine Färse. Wieviele Kühe und Färsen werden es nach 20 Jahren sein, wenn alle Tiere am Leben bleiben?

(Diese Aufgabe stammt von dem indischen Mathematiker NARAYANA, der im 14. Jahrhundert lebte.)

- Ist es richtig, daß $a^4 + 4$ für $a > 1$ eine zusammengesetzte Zahl ist?

(Diese Aufgabe stammt von der französischen Mathematikerin SOPHIE GERMAIN, die von 1776 bis 1831 lebte.)

- Wenn keine Seiten eines Vierecks parallel sind, so liegt der Mittelpunkt der Strecke, welche die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten verbindet, auf der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Geraden. Dieser Satz ist zu beweisen.

(Diese Aufgabe stammt von CARL FRIEDRICH GAUSS, der von 1777 bis 1855 lebte.)

Gesammelt von Hermann-Dietrich Hornschuh

Die Problemecke



von
Paul Jainta



Eure *alpha* hat nun wieder eine Heimat gefunden. Sie kommt auch beinahe schon wieder wie früher daher. Die *Problem Ecke* hat jetzt einen festen Stamplatz erhalten, und ihr könnt sie an ihrem flotten Signum leicht wiedererkennen. Vielleicht habt Ihr auch gleich bemerkt, daß künftig in der neuen „alten“ *alpha* dem Problemlösen eine Menge Platz eingeräumt wird. Wir halten es darin ähnlich wie die Gründerväter des American Mathematical Monthly, dem inzwischen wohl dicksten Mathe-Journal in englischer Sprache. Sie haben in ihrer Erstausgabe 1893 also vor über 100 Jahren, schon die Marschroute festgelegt: „... die Lösung mathematischer Probleme besitzt einen bildenden Wert, der nicht unterschätzt werden darf. Sie ist die Leiter, mit der der Geist die höchsten Stockwerke mathematischer Forschung erklimmen kann. Manch schlummerndes Talent ist über ein gemeistertes Problem zu eigener Tätigkeit angeregt worden...“

So, ich hoffe nun, die heutigen Probleme aus der mathematischen Zeitschrift QUANTUM werden in diesem Sinne die eine oder andere verborgene Fähigkeit in Euch hervorkitzeln. QUANTUM ist übrigens ein Schülermagazin für Mathematik und Wissenschaften und erscheint zweimonatlich im Springer-Verlag USA. Das ebenso blendend geschriebene wie graphisch gestaltete Magazin ist die autorisierte englischsprachige Ausgabe der Moskauer *kvant*. Diese Zeitschrift für Physik und Mathematik ist das seit Jahrzehnten wohl beste Lesevergnügen für naturwissenschaftliche interessierte Schüler, das auf dem Markt ist. An QUANTUM wirken Wissenschaftler, Mathematiker und Lehrer vom Amerikanischen Verband der Physik- und Mathematiklehrer sowie angesehene Mitglieder der Russischen Akademie der Wissenschaften mit. Sie schreiben regelmäßig leicht verständliche Artikel zu grundlegenden Themen aus Mathematik und ihr nahestehenden Berei-

chen. Die Probleme aus *kvant* erscheinen vereinzelt im Original auch an anderer Stelle in *alpha*. Sie gehören stets zum Besten, was Monat für Monat tausende von Problemseiten überall auf der Welt so hervorbringen.

Viel Vergnügen nun bei der Lösung der Probleme J9, J10, M9, M10, O9, O10 aus QUANTUM.

J 9

Ein volles Wasserfaß wird in gleichen Teilen durch drei verschiedene große Eimer entleert. Der erste Eimer ist dann zur Hälfte voll, der zweite zu $\frac{2}{3}$ und der dritte zu $\frac{3}{4}$ gefüllt. Die Maßzahlen der Inhalte von Wassertank und der drei Eimer, sollen vier verschiedene ganze Zahlen sein. Wie groß ist dann das kleinstmögliche Faßvolumen?

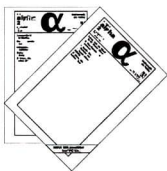
J 10

Löse das folgende Zahlenrätsel. Gleiche Buchstaben stehen dabei für gleiche Ziffern aus $\{0, 1, \dots, 9\}$.

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline \end{array}$$

M 9

Zwei Zeitschriften liegen wie in der folgenden Graphik aufeinander.



Begründe, ob der sichtbare Teil des unteren Hefes kleiner oder größer ist, als der abgedeckte.

M 10

Prinz Iwan will einen dreiköpfigen, dreischwänzigen Drachen besiegen. Er besitzt ein Zauberschwert, das mit einem Streich entweder einen Kopf, zwei Köpfe, einen Schwanz oder zwei Schwänze abschlagen kann. Eine Fee hat ihm das Drachengeheimnis verraten: wenn ein Kopf abgehauen wird, wächst sofort ein neuer nach. Wird dagegen ein Schwanz abgetrennt, wachsen zwei Schwänze nach; für zwei abgeschlagene Schwänze wächst ein neuer Kopf nach. Fallen sogar zwei Köpfe, wächst jedoch nichts nach.

Bestimme die kleinste Zahl von Schwerthieben, mit denen Prinz Iwan alle Köpfe und Schwänze des Drachen abschlagen kann.

O 9

Die drei Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks besitzen nur ganzzahlige Koordinaten.

Man weise nach, daß das Quadrat (der Länge) der Grundseite eine gerade Zahl ist.

O 10

Zwei Boote (1 und 2) fahren gleichzeitig von zwei Anlegestellen A und B eines kreisrunden Sees los. Würden sie auf gerader Linie die Häfen C und D ansteuern, wären Sie auf Kollisionskurs.

Begründe: Wenn Boot 1 Kurs auf D hält und Boot 2 nach C steuert, dann kommen beide Boote gleichzeitig an.

Die Aufgaben der *Problem Ecke* sind in drei Altersstufen unterteilt: Junior (für Löser bis einschließlich Klasse 8), Mittel (für Tüfler bis Klassenstufe 10) und Offene Probleme für alle Altersstufen. Es sind alle Leser eingeladen, zu einem oder mehreren Aufgaben Lösungen einzureichen. Es dürfen sich auch Frühstarter an der jeweils höheren Stufe versuchen. Jede Bearbeitung ist willkommen! Die elegantesten Auflösungen sollen nun regelmäßig in dieser Rubrik erscheinen. Künftige Lösungen zur *Problem Ecke* richtet bitte an folgende Adresse:

StR Paul Jainta
Werkvolkstraße 10
91126 Schwabach

Vergeßt nicht, Name, Schule, sowie Alter und Klasse anzugeben.

33. Mathematik-Olympiade

3. Stufe - Landeswettbewerb

05. - 06. 02. 1994

Ab diesem Wettbewerb begann die 3. Stufe mit der Klasse 6. Dem Umfang und Schwierigkeitsgrad nach sind die Aufgaben für zwei Klausuren zu je 4 Stunden Bearbeitungszeit konzipiert. Die 3. Stufe ist zwar nicht notwendige Bedingung für eine Entsendung von Schülern zur vom 01. bis 04. Mai in Magdeburg stattfindenden Deutschland-Olympiade, aber eine gute Vorbereitung darauf.

Olympiadeklasse 6 - 1. Tag

330631

Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenzustellen, daß $a + b + c = 12$ und $c - b = 3$ gilt!

Hinweise:

- 1.) Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
- 2.) Es wird auch zugelassen, daß sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

330632

Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, daß sie beide genau eine Seite gemeinsam haben:



oder



(dagegen nicht und auch nicht

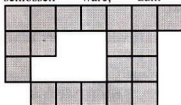


Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, daß es ebenfalls genau eine

Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.

Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

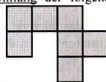
- (1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:



- (2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.

- (3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben.

(Beispiel: Der Umfang der folgenden

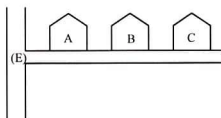


Figur beträgt 16 cm.

Zeichne eine solche Figur F !

330633

In einer Sackgasse, die an einer Ecke (E) beginnt, stehen drei Häuser A, B, C in einer Reihe:



Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke (E) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke (E) zurückkehrt, kann dies z. B. in der Reihenfolge $(E) \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow (E)$ tun. Er kann es aber z. B. auch in der Reihenfolge

$(E) \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow (E)$ tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen A und B öfter als nötig durchläuft.

(a) Wieviele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!

(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen. Wieviele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!

(c) Wieviele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen? (Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.)

2. Tag

330634

Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen. Erika meint dennoch: Wenn man weiß, daß alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt.

Die drei Aussagen von Dieter lauten:

- (1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.
- (2) Annette bekam genau zwei Kugeln.
- (3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

330635

Ein 4×4 -Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:

a	b	c	d
e	d	d	c
d	f	c	c
a	a	f	d

In jedem so gefüllten Feld kann man „Wörter“ lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die „Wörter“ liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten. (Als Beispiele sind die „Wörter“ ae, cd, ed, de, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche „Wörter“ zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und de mit cf.)

„Wörter“, die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.

Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem „Wort“ dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im „Wort“ aa).

(2) Kein „Wort“ darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das „Wort“ cd).

a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!

b), c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und

b) nur 6 Buchstaben,

c) nur 5 Buchstaben

verwendet? Begründe Deine Antworten!

330736

Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln: Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern:

--	--	--	--	--	--	--

Zunächst wird eine natürliche Zahl n vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je

ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten.

Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch n teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt: Ist diese Zahl als n vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!

b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.

c) Untersuche, ob im Fall, daß $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag

330731

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z , die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.

(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

330732

In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5 % dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75 % nicht verheiratet. Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet. Weitere Änderungen gab es nicht. Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.

Wieviele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

330733

Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α , β bzw. γ die

Größen der Innenwinkel $\angle BAC$, $\angle CBA$ bzw. $\angle ACB$ bezeichnet.

a) Wie groß sind die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ in einem Dreieck ABC , in dem $\alpha = 42^\circ$ und $\beta = 98^\circ$ gilt?

b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC , in dem $\angle ASB$ die Größe 140° hat!

c) Beweise, daß jedes Dreieck ABC , in dem $\angle ASB$ und $\angle BSC$ einander gleichgroß sind, gleichschenkelig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleichlang sind!

2. Tag

330734

Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit 60 km/h fährt. Sie beobachtet, daß an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorbeifährt. Außerdem weiß sie, daß dieser Gegenzug 120 m lang ist.

Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in km/h an!

330735

Die Klassen 7a, 7b, 7c trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse Torverhältnis Punkterhältnis

7b	3 : 2	3 : 1
7a	3 : 1	2 : 2
7c	2 : 5	1 : 3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wieviele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat! Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, daß sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen mußte. Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punkterhältnis $c : d$,

da die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

330736

a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB ! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C ! Zeichne dann die Strecken AP und BP !

Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P , ob eines der beiden Dreiecke ACP , BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Innern genau einen Punkt Q , mit dem die Bedingung erfüllt wird, daß die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ , BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.)

Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, daß die genannte Bedingung stets mit diesem - nach Deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag

330831

In der Sprachfix-Schule zu Lernhausen sind 120 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein, Französisch. Der Reporter Schreibklug erfährt folgende Tatsachen:

(1) Für genau 102 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 102 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein.

(2) Für genau 75 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 75 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Latein, Französisch.

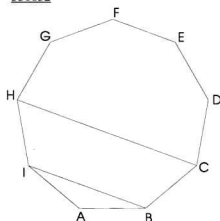
(3) Genau 18 der 120 Schüler lernen nur Latein.

(4) Die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Englisch und Latein lernen, ist um 9 größer als die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Latein und Französisch lernen.

(5) Keiner der 120 Schüler lernt sowohl Englisch als auch Französisch.

Schreibklug möchte berichten, wieviele der Schüler je genau eine der drei Sprachen und wieviele der Schüler je genau zwei der drei Sprachen lernen. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!

330832



Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck ABCDEFGHI, d. h. ein Neuneck, bei dem alle Seiten dieselbe Länge und alle Innenwinkel dieselbe Größe haben.

a) Beweise, daß die Diagonalen BI und CH zueinander parallel sind!

b) Beweise, daß $CH - BI = BC$ gilt!

330833

Zu jedem Dreieck ABC seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Gerade durch A und B sei u ,
die Gerade durch B und C sei v ,
die Gerade durch C und A sei w ,
bei der Spiegelung an v gehe u in die Gerade p über,
bei der Spiegelung an w gehe u in die Gerade q über.

Wie üblich seien die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ mit α bzw. β bezeichnet. Für die folgenden Aufgaben werde stets $\alpha = 55^\circ$ vorausgesetzt.

a) Unter welchem Winkel schneiden die Geraden p und q einander, wenn $\beta = 75^\circ$ ist?

b) Wie groß muß β sein, damit p und q aufeinander senkrecht stehen?

c) Gib einen Wert β so an, daß sich p und q als zueinander parallel nachweisen lassen!

d), e) Stelle je eine Zeichnung her, in der p und q einander in einem Punkt schneiden, der auf derselben Seite der Geraden u liegt wie c ; wähle dabei das Dreieck ABC

d) mit spitzem Innenwinkel bei B ,

e) mit stumpfem Innenwinkel bei B .

(Zu d) und e) wird keine Begründung verlangt.)

2. Tag

330834

Auf einer Strecke AB fährt ein Radfahrer X von A nach B , ein zweiter Radfahrer Y von B nach A . Beide sind zur gleichen Zeit gestartet. In B bzw. A angekommen, kehren sie sofort um, fahren dieselbe Strecke bis A bzw. B zurück und beenden dann ihre Fahrt. Es werde angenommen, daß jeder der beiden Fahrer seine Geschwindigkeit konstant beibehält und daß die zum Wenden gebrauchte Zeit vernachlässigt werden kann.

Auf der Hinfahrt begegneten sie sich 30 Minuten nach dem Start an einer Stelle, die 7,5 km von A entfernt ist. Nochmals 30 Minuten später waren die Radfahrer wieder beide zusammen an einer Stelle zwischen A und B .

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, wie groß nach dieser Beschreibung

a) die Länge der Strecke AB ,

b) die Geschwindigkeiten der Radfahrer X und Y sein können!

330835

Eine sechsstellige natürliche Zahl heiße genau dann eine „Spiegelzahl“, wenn ihre erste Ziffer gleich ihrer sechsten Ziffer, ihre zweite Ziffer gleich ihrer fünften Ziffer und ihre dritte Ziffer gleich ihrer vierten Ziffer ist.

a) Ermittle alle diejenigen „Spiegelzahlen“, die zwei Ziffern 2, zwei Ziffern 5 und zwei Ziffern 7 enthalten! Ermittle die Summe s aller dieser „Spiegelzahlen“! Welches ist der größte echte Teiler von s ?

b) Beweise, daß für je drei Ziffern a, b, c , von denen keine zwei einander gleich sind, folgende Aussage gilt!

Die Summe aller derjenigen „Spiegelzahlen“, die zwei Ziffern a , zwei Ziffern b und zwei Ziffern c enthalten, ist durch 11111 teilbar.

Hinweis: Als echte Teiler von s bezeichnet man alle diejenigen Teiler von s , die (positiv und) kleiner als s sind.

330836

a) Berechne die Seitenlänge $b = \overline{AC}$ eines Dreiecks ABC , von dem die Seitenlänge $c = \overline{AB} = 6$ cm, die Länge $h_c = \overline{CH_c} = 5$ cm der auf $\overline{AB}$ senkrechten Höhe und die Länge $h_b = \overline{BH_b} = 2$ cm der auf $\overline{AB}$ senkrechten Höhe gegeben sind!

b) Beweise, daß es kein Dreieck ABC gibt, in dem die drei Höhenlängen $h_a = 4$ cm (Länge der auf $\overline{BC}$ senkrechten Höhe), $h_b = 2$ cm und $h_c = 5$ cm vorkommen!

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag

330931

Beweisen Sie, daß es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

330932

Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:

Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung.

Untersuchen Sie, ob es eine durch 7 teilbare Zahl n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

330933

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s . Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von $\overline{AB}$ und verlängere die Strecke $\overline{DC}$ über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_1, M_2, M_3, \dots$ bezeichnet. Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n -Ecks der Seitenlänge s_n .

Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau. Beweisen Sie diese Behauptung!

2. Tag

330934

Z W E I
+ D R E I

= F Ü N F

Das obenstehende „Kryptogramm“ stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

330935

Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß die drei Zahlen $n + 1$, $n + 10$ und $n + 55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

330936

Man beweise, daß für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:

Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen $\overline{AC}, \overline{BD}$, so gehen die drei Strecken $\overline{M_1M_3}, \overline{M_2M_4}$ und $\overline{M_5M_6}$ durch einen gemeinsamen Punkt.

Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

331031

Beweisen Sie, daß sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen läßt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

331032

Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:

Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. (Bei dieser Zifferndarstellung von n' wird auch die Möglichkeit einer Anfangsziffer Null zugelassen, wenn nämlich die zweite Ziffer von n eine Null war.)

Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt! Ermitteln Sie, wenn es solche Zahlen gibt, die kleinste unter ihnen!

330933

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s . Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von $\overline{AB}$ und verlängere die Strecke $\overline{DC}$ über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage

man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab.

Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7, M_8, M_9, \dots$ bezeichnet. Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n -Ecks der Seitenlänge s_n .

Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau. Beweisen Sie diese Behauptung!

2. Tag

331034

E I N S
+ E I N S
+ E I N S
+ E I N S
+ E I N S
= F Ü N F

Das obenstehende „Kryptogramm“ stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Additionsausgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!

Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht jeder Buchstabe in einer dieser Lösungen durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

331035

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen m, n , für die $\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$ eine ganze Zahl ist.

331036

Es sei K ein gerader Kreiskegel. Die Grundfläche von K habe den Mittelpunkt M und den Radius r , die Spitze von K sei S , die Höhe $h = \overline{MS}$ von K betrage $h =$

$r \cdot \sqrt{3}$. Auf dem Rand der Grundfläche seien zwei Punkte A, B so gelegen, daß der Winkel $\angle AMB$ die Größe 120° hat. Eine Ameise, die sich im Punkt A befindet, will zu einem Punkt C der Mantellinie BS gelangen und diesen Zielpunkt C so wählen, daß sie, ohne die Mantelfläche zu verlassen, einen möglichst kurzen Weg zurückzulegen hat.

Ermitteln Sie die Länge eines solchen Weges, ausgedrückt in Abhängigkeit von r !

Olympiadeklasse 11 bis 13 -

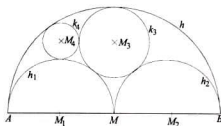
1. Tag

331331

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d} \quad (1)$$

331332



Über eine Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert. Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.

Man beweise, daß M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechtecks sind.

Von den nachstehenden Aufgaben 331333 A und 331333 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

331333 A

Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n=0, 1, 2, \dots}$ durch die Festsetzungen definiert, daß $x_0 = 0, x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils

x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m läßt.

Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl $m \geq 2$ eine natürliche Zahl $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k, x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

331333 B

Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3) \cdot x^2 + 2n \cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen $n \geq 0$, für die gilt: Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

2. Tag

331334

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y , für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$ gilt.

331335

Zwei kongruente regelmäßige $2n$ -Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt. Von einem der beiden $2n$ -Ecke werde vorausgesetzt, daß es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.

Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden $2n$ -Ecke so aufeinanderzulegen, daß in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

331336

Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4 + \sqrt{18})^n \right]$ ist.

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g , für die $g \leq r < g+1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Die Lösungen können Sie bei Einsendung eines frankierten (3,00 DM) und adressierten Rückumschlages von uns erhalten.

Marktecke

Neues vom Fachbuch- und Computermarkt

Die folgenden beiden Beiträge zur Marktecke stammen von einem Leser der *alpha* (s. auch Leserbrief S. 4):

Chaos als Wissenschaft

Die Neuerscheinung von Georg Heinrichs „Chaos“ aus der „Praxis Schriftenreihe Physik“ des Aulis-Verlages, Köln führt auf einem den Kenntnissen von Oberstufenschülern adäquaten Niveau in die grundlegenden Sachverhalte der modernen Chaosforschung ein. Galt es nämlich bisher unter Physikern als selbstverständlich, daß sich alle physikalischen Erscheinungen im Prinzip durch mathematische Formulierungen erfassen ließen, so daß auch damit Voraussagen über das künftige Verhalten physikalischer Systeme möglich waren, so zeigten sich in den vergangenen Jahrzehnten immer größere Zweifel daran: auch Systeme mit wenigen relevanten Parametern verhielten sich chaotisch! Das naturwissenschaftliche Weltbild erfuhre eine Änderung.

Warum verhalten sich einige Systeme chaotisch, andere aber nicht? Existieren charakteristische Verhaltensmuster dafür? Lassen sich daraus chaotische Verhaltensweisen voraussagen? Diese und weitere sich daraus ergebende Fragestellungen und Aspekte sowie alle benötigten Grundlagen werden auf einem leicht verständlichen Niveau beschrieben und aufbereitet, erfordern allerdings vom Leser zum Teil entsprechende Vorkenntnisse der mathematischen Zusammenhänge. Den Ausgangspunkt bilden meist schulgemäße Beispiele und Experimente sowie Computersimulationen, wobei geeignete Parameter und verwendete Rechenverfahren eingehend beschrieben werden. Ergänzend finden sich stets entsprechende Ausführungen zu dem mathematischen Hintergrund. Diese und Aufgaben mit Lösungen am jeweiligen Kapitelende sollen zu eigenen Forschungen anregen. Somit ist mit diesem preiswerten Buch eine Lücke zwischen hoch- und populärwissenschaftlicher Literatur zu diesem Themengebiet geschlossen worden.

Georg Heinrichs: „Chaos“, Aulis Verlag, Köln 1992, DM 28,00

Karl-Hermann Waid

Formeln ohne Schrecken

Das Programm MATHCAD der amerikanischen Firma Mathsoft ist nun auch unter Windows 3.1 verfügbar. Es ist eine gelungene Symbiose aus einem mathematischen Editor und einem Programm zur Lösung und Berechnung mathematischer und ingenieurwissenschaftlicher Probleme. So reichen die vielfältigen Möglichkeiten vom Verfassen wissenschaftlicher Texte über den Einsatz als exklusiver Taschenrechner mit zahlreichen implementierten Funktionen und die Auswertung von Versuchen bis hin zum Erstellen mathematischer Texte mit integrierten graphischen Darstellungen. Einer der wichtigsten Vorteile liegt zweifellos in der leichten Handhabung, denn Formeln werden genauso geschrieben wie man es gewohnt ist, und ein erläuternder Text kann ohne zusätzlichen Aufwand einfach und problemlos hinzugefügt werden.

Alle Ergebnisse mathematischer Thematik, Funktionen und Formeln lassen sich sofort berechnen und graphisch (2- oder 3-dim) anzeigen sowie mit der Windows-Technik leicht an eine andere Stelle positionieren. Neu gegenüber den Vorversionen sind u. a. die elektronischen Handbücher, die es erlauben, häufig vorkommende Formeln, Diagramme und Konstanten direkt in ein vorhandenes Dokument einzufügen. Im weiteren ist es per Mausclick möglich, Terme zu vereinfachen oder zu faktorisieren, symbolisch zu integrieren und zu differenzieren, Reihenentwicklungen zu erzeugen oder Matrixoperationen durchzuführen.

Durch ein integriertes Lernprogramm und eine intuitive Benutzerführung läßt sich dieses vielseitige Programm schnell erlernen. Zusätzlich wird noch ein detailliertes und verständliches deutsches Handbuch, sowie eine übersichtliche „Quick-Referenz“ geliefert. MATHCAD bewältigt einfache mathematische Aufgaben ebenso wie komplexe technische und wissenschaftliche Berechnungen. Gerade in der Schule können die Schüler interaktiv einbezogen werden in die Visualisierung von mathematischen Formeln und Problemstellungen. Aber auch dem Lehrer kann es eine sehr große Hilfe sein bei der Kon-

zeption von Haus- und Klausuraufgaben, egal ob es sich um so einfache Probleme der Algebra, das Lösen größerer Gleichungssysteme oder Aufgabenstellungen der Analysis handelt. Da bekanntlich nobody perfect ist, gibt es eine automatische Kontrolle hinsichtlich der inhaltlichen Richtigkeit eingegebener Formeln mit entsprechender Fehlermeldung.

Als Resümee ist festzustellen, daß es sich um eine außerordentlich leistungsstarke mathematische Software handelt, die unkompliziert und leicht erlernbar ist. Durch die Integration in die Windows-Oberfläche hat die Anwenderfreundlichkeit gegenüber den früheren Versionen merklich zugenommen. MATHCAD ist somit ein hervorragendes und preisgünstiges Werkzeug für Anwender und Lehrer, die in der täglichen Arbeit mit Mathematik und den Nachbarwissenschaften in jeder Form zu tun haben.

MATHCAD 3.1 deutsch für Windows, Softline GmbH, Oberkirch, Preis ca. DM 400.

Karl-Hermann Waid

Blick ins Schachbuch

Die neueste Auflage des schon in mehr als hunderttausend Exemplaren verbreiteten Schachkurses von Rudolf Teschner präsentiert sich neu in hervorragendem Layout. Die 40 Lektionen, geeignet für Selbststudium oder Lehre, sind gut gegliedert und damit ein Leitfaden für den Einstieg in's königliche Spiel. Beginnend bei den Schachfiguren und Grundregeln wird der Lernende mit Problemen der Eröffnung, der Taktik und der Strategie bis zu den Regeln der Endspielbehandlung geführt.

Im Gegensatz zu der ansonsten ausgezeichneten Qualität des Bandes steht die hohe Anzahl von Druckfehlern und Versen, die dem Leser schon im Inhaltsverzeichnis rücksichtsvoll durch das lateinische *Errata* angekündigt werden. Nachdem der Käufer die empfohlenen 33 Korrekturen durchgeführt hat, ist der vorliegende Schachkurs hervorragend für alle, die sich mit der Schachausbildung beschäftigen, geeignet. Auch der geübte Vereinsspieler wird viel Freude bei der Lektüre und einen Trainingseffekt verspüren. In zahlreichen Diagrammen, die aufgrund der Kursgestaltung thematisch geordnet sind, kann der Leser die geeignete Fortsetzung suchen und so seine taktischen und strategischen Fertigkeiten in allen Spielphasen gezielt schulen.

Rudolf Teschner: „Eine Schule des Schachs in 40 Stunden“, Georg Olms Verlag, Zürich, 144 Seiten, DM 19,80.

Richard Brömel

Die Olympiade Ecke

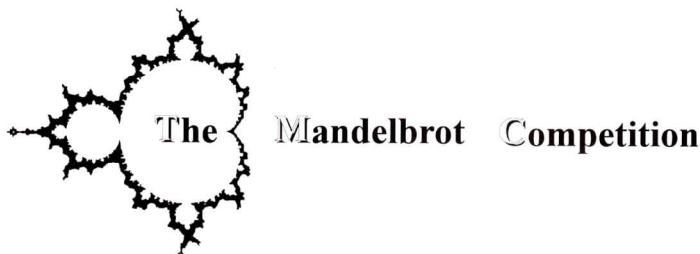
The Mandelbrot Competition

Angefangen hat es, wie so oft, ganz harmlos. RICHARD RUSCZYK, Mathematikstudent an der kalifornischen Stan-

ford Universität, und ehemaliges Mitglied des US-Teams zur Internationalen Mathematik Olympiade (IMO) 1989, ärgerte sich wieder einmal über einen nicht gerade lehrreichen Mathewettbewerb auf dem amerikanischen Kontinent. Neben vielem anderen, gibt es auch in den USA jede Menge Mathe-Tests: einige wenige nützliche, dafür um so mehr mit geringerem Tiefgang. Mit den drei vorzüglichen und bestens ausgestatteten alten Klassikern (der American High School Mathematics Examination (AHSME), der American Invitational Mathematics Examination (AIME) und der USAMO, unserem Bundeswettbewerb vergleichbar), welche jährlich die Zusammensetzung des US-Teams zur IMO bestimmen, wetteifern unzählige lokale und bundesstaatliche Wettbewerbe um die Gunst von Geldgebern. Für die Mehrzahl dieser kleineren Tests genügt es schon, auswendig gelernte Formeln richtig anzuwenden. Man lernt nur wenig über

das Grundgerüst eines neuartigen Wettbewerbstyps auszuklügeln: **den Schulwettbewerb auf Bestellung.** Ihr Geschöpf, *The Mandelbrot Competition*, will nun erreichen, daß jeder Teilnehmer, in der Regel Schüler ab der Klasse 8, im Gegensatz zu den üblichen schlichten Ankreuzverfahren, aus den Aufgaben für sich selbst einigen mathematischen Nutzen ziehen kann. Die drei testerproben College-Boys picken vor jeder Einzelrunde ein Thema heraus, das gewöhnlich nicht im Mathematik-Unterricht behandelt wird. Sie ge-

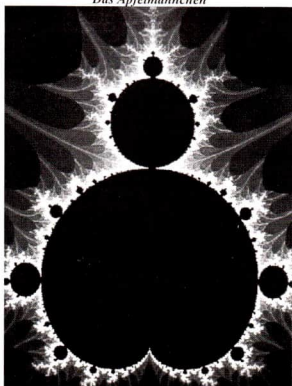
Das Logo des Mandelbrot-Wettbewerbs. Es besteht aus dem bekannten Apfelmännchen und dem Schriftzug des Wettbewerbsnamens.



ford Universität, und ehemaliges Mitglied des US-Teams zur Internationalen Mathematik Olympiade (IMO) 1989, ärgerte sich wieder einmal über einen nicht gerade lehrreichen Mathewettbewerb auf dem amerikanischen Kontinent. Neben vielem anderen, gibt es auch in den USA jede Menge Mathe-Tests: einige wenige nützliche, dafür um so mehr mit geringerem Tiefgang. Mit den drei vorzüglichen und bestens ausgestatteten alten Klassikern (der American High School Mathematics Examination (AHSME), der American Invitational Mathematics Examination (AIME) und der USAMO, unserem Bundeswettbewerb vergleichbar), welche jährlich die Zusammensetzung des US-Teams zur IMO bestimmen, wetteifern unzählige lokale und bundesstaatliche Wettbewerbe um die Gunst von Geldgebern. Für die Mehrzahl dieser kleineren Tests genügt es schon, auswendig gelernte Formeln richtig anzuwenden. Man lernt nur wenig über

Preisausschreiben. Eine Antwort auf diese formel- und gewinnorientierten Veranstaltungen stellt nun der *Mandelbrot Wettbewerb* dar. Unser Student aus dem sonnigen Stanford erhielt im Sommer 1990, als er für einen Freund gerade Musterlösungen zu einem anderen Test auf Fehler durchsah, urplötzlich die Gelegenheit, selbst einmal einen Wettbewerb auf die Beine zu stellen. Zwei Mitstudenten und Mitkämpfer aus früheren Wettbewerbsjahren, SAMUEL VANDERVELDE und SANDOR LEHOCZKY, haben Richard in zäher Kleinarbeit geholfen,

*Der Superstar des deterministischen Chaos:
Das Apfelmännchen*



ben darin knapp Auskunft über das gewählte Randgebiet, zu dem später Fragen gestellt werden: z.B. Ungleichungen, das Pfannkuchen Theorem, der Satz von Sylvester etc.

So sollen die Teilnehmer einzeln oder im Team in die Kunst der Darstellung von Mathematik und deren Beweisführung eingewiesen werden.

Mathe per Luftpost

Nach den unvermeidlichen Schwierigkeiten in der Aufbauphase des Wettbewerbs präsentiert sich *The Mandelbrot Competition* nun seit November 1993 in einer abgespeckten, aber wohl endgültigen Form. Ein voller Durchlauf besteht aus 5 Runden, an vorher festgesetzten Tagen eines Schuljahres. Der Startschuß erfolgt jeweils im November. Rechtzeitig vor Beginn erhalten alle teilnehmenden Schulen in getrennten Umschlägen die Unterlagen zu den Einzelrunden (zusammen mit Anweisungen und Listen zur Protokollierung der Ergebnisse). Nach jeder Runde werden an die Teamleiter vollständige Lösungen der Aufgaben verschickt (mit den ausgewerteten Ergebnissen je Schule). Im Einzelwettbewerb müssen die Schüler in 40 Minuten 7 kurze Aufgaben mit leicht ansteigendem Schwierigkeitsgrad lösen. Die Tests werden anschließend vom Teamchef, einem Lehrer der jeweiligen Schule, bewertet. Vier Schüler, die vor jeder Runde bestimmt werden, bilden eine Gruppe, die gemeinsam in 50 Minuten einen Team-Test bestreitet. In dieser Zeit beschäftigen sie sich mit einer etwas umfangreicheren Aufgabe aus einem schulischen Randgebiet. Die Themenbereiche werden zu Anfang des Schuljahres bekanntgegeben (s. o.), damit sich interessierte Schüler gründlich einlesen können. Auch so etwas wie eine Vereinszeitung gibt es schon. Alle teilnehmenden Schulen erhalten in unregelmäßigen Abständen *The Mandelbrot Memo*. Am Ende des Jahres winken Geldpreise für eine duftige Schulparty!

Der Erfinder des Apfelmännchens und Namensgeber des Wettbewerbs: BENOÎT MANDELBROT.



Die beste (deutsche) Schule darf im nächsten Wettbewerbsjahr kostenlos mitmachen.

So originell wie der Wettbewerb, war auch die Geschichte seiner Namensfindung und ist in dieser Weise wohl nur in Amerika möglich! SAMUEL VANDERVELDE hatte die Idee, den Wettbewerb auf BENOÎT MANDELBROT zu taufen, dem Erfinder des *Apfelmännchens*. Die Welt verdankt diesem, aus Polen stammenden und für IBM forschenden Computewissenschaftler, eine ganz neue Spielart der Mathematik, die *fraktale Geometrie der Natur*. Der Bildermacher Mandelbrot, der sich laut eigener Einschätzung mit Algebra stets schwergetan hat, hat mit seiner *Chaos-Theorie* dem Computer eine formenreiche Geometrie verfügbar gemacht.

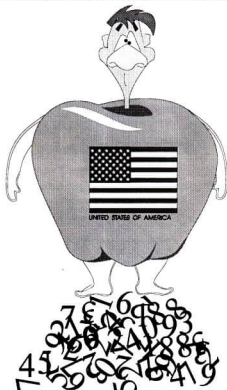
Nun, diesen *Vater der Fraktale*, den RICHARD RUSCZYK damals selbst (noch) nicht kannte, hat er aus einer Telefonzelle vor einer Tankstelle angerufen, und darum gebeten, seinen Namen für einen neuen Mathewettbewerb herzugeben. Der völlig überraschte, aber ebenso geschmeichelte Professor gab schon bald sein schriftliches OK. Der Brief hängt nun gerahmt im Büro des frechen Anrufers!

Ein Mathe-Sprung über den Großen Teich

Trotz des berühmten Namens saß bald nach dem glänzenden Start (87 teilnehmende Schulen) der Wurm im Wettbewerb drin. Vermutlich waren die Aufgaben für unerfahrene Problemlöser zu anspruchsvoll. Da hatte SANDOR LEHOCZKY den rettenden Einfall. Ab dem Jahr 1992/93 werden nun zwei Paralleldurchgänge angeboten: Kategorie A für erfahrene Wettkämpfer, Kategorie B für Anfänger. Die Erfolgskurve weist jetzt wieder langsam nach oben. Im laufenden Jahrgang nehmen über 110 Schulmannschaften aus den USA und je eine aus Thailand und von den Philippinen teil. Dadurch ermutigt, wagen die drei wackeren Amerikaner nun den Sprung über den Atlantik: Sie möchten Gymnasien im gesamten Bundesgebiet

über alpha einladen, sich erstmals im Wettbewerbsjahr 1994/95 am Mandelbrot Wettbewerb zu beteiligen. Die nächsten Rundentermine stehen schon fest. Es sind der 9./10. November, 7./8. Dezember, 25./26. Januar, 1./2. März und 19./20. April. Die Termine sind flexibel in dem Sinne, daß die Schulen frei sind, auf einen anderen Tag der Woche auszuweichen. Die Teilnahmegebühr beträgt 65 \$ für Materialkosten bzw. Luftposttarife und sollte, möglichst im voraus, per Scheck an folgende Adresse geleitet werden: **Greater Testing Concepts, P.O. Box A-D, Stanford, CA 94309**. Bitte geben Sie, bei Interesse, Name und genaue Anschrift Ihrer Schule, sowie den jeweiligen Ansprechpartner bis spätestens, **Freitag, 30. September 1994**, an mich weiter (Paul Jainta, Werkvolkstr. 10, 91126 Schwabach). Ich werde Ihre Angaben sammeln und sie den Veranstaltern, zur weiteren Planung, nach Übersee melden, damit Sie rechtzeitig sämtliche Unterlagen für Ihre Schule erhalten. Es wird gebeten, alle Arbeiten der Einzeltestklassen A und B an der Schule in eigener Verantwortung selbst zu korrigieren. Die Punktzahlen dieser Einzeltests schicken Sie bitte zusammen-

Amerikanisches Apfelmännchen erobert die deutsche Schulmathematik!



men mit den Lösungen aus der Teamarbeit an mich. Die Gruppenlösungen sollen nämlich, aus Gründen der Vergleichbarkeit, zentral ausgewertet werden. Dies hat zusätzlich den Vorteil, daß die Schüler in deutsch schreiben können.

Vielleicht erwächst aus der Teilnahme an diesem Wettbewerb die eine oder andere Schulpartnerschaft mit einer High School in den USA. Das große Interesse bundesdeutscher Schulen an Partnerschaften mit Schulen im Ausland ist ja weiterhin ungebrochen. Der Mandelbrot Wettbewerb kann dazu mit dreierlei Besonderheiten aufwarten. Er bietet eine fächerübergreifende Bereicherung und Belebung des mathematischen Unterrichtes durch gleichzeitige Pflege einer Fremdsprache. Zum anderen begegnen Schüler hier Ideen aus einer nahezu unbekannten mathematischen Denkschule. Schließlich dient dieser Gedankenfluß in ebenfalls ungewohnter Weise der Völkerverständigung: neben Coke, Jeans oder Mickey Mouse, dürfen diesmal amerikanische Denkgewohnheiten angenommen werden. Als Schnupperprobe folgen nun die sieben Aufgaben aus der

1. Runde des Einzelwettbewerbes 1993 für Anfänger. Viel Spaß beim Lösen!

1. Quarks sind elementare Bausteine der Materie. Es gibt fünf Quark-Arten, ein sechstes wird vermutet. Die Ladung eines Teilchens setzt sich zusammen aus der Summe aller Quark-Ladungen. Jedes Up-Quark trägt dieselbe Ladung; desgleichen gilt für die Down-Quarks.

Zwei Up-Quarks und ein Down-Quark bilden ein Proton (Wasserstoffkern) mit Ladung 1.

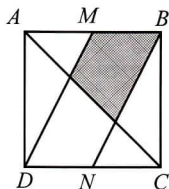
Zwei Downs und ein Up dagegen ergeben ein Neutron mit Ladung 0.

Welche Ladung trägt demnach ein Up-Quark?

2. Es bedeutet # die Verknüpfung $a \# b = \frac{4^a}{2^b}$.

Bestimme x so, daß gilt: $x \# 2 = 4$.

3. Die Abbildung zeigt ein Quadrat $ABCD$ der Länge 1. M und N sind die Mittelpunkte der Seiten AB und CD .

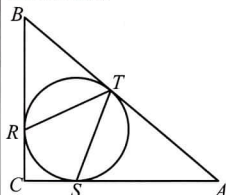


Welchen Inhalt A besitzt die schraffierte Fläche?

4. Jayne schreibt alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 2000 einschließlich auf ein Blatt Papier. Sie streicht nacheinander alle Vielfachen der ungeraden Primzahlen (3, 5, 7, ...).

Wie viele Zahlen bleiben übrig?

5. Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt $\angle A = 36^\circ$. Der Inkreis berührt die jeweiligen Seiten in den Punkten R , S und T (siehe Abbildung).



Wie groß ist der Winkel $\angle RTS$?

6. Die Menge A besteht aus 12 Punkten unseres Anschauungsraumes $\mathbb{R}^3$. Eine Teilmenge B von A enthält 7 Punkte einer (räumlichen) Ebene. Weiter gelte: Alle Mengen mit genau 4 Punkten aus A , die in einer Ebene liegen, sind Teilmengen von B .

Wieviele verschiedene Ebenen gibt es, die 3 oder mehr Punkte aus A enthalten?

7. Bestimme den größten Primteiler von $3^{15} + 1$.

Paul Jainta



1844: Die ersten transzendenten Zahlen werden bekannt

Zahlen, die nicht algebraisch sind, nennt man „transzendente Zahlen“. Eine algebraische Zahl ist eine Lösung einer algebraischen Gleichung mit „einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind“ (A. - M. LEGENDRE (1752 - 1833) im Jahre 1806). Eine algebraische Gleichung in x ist ein Polynom in x , also allgemein die Gleichung $A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$, für die nach LEGENDRE noch gelten soll: $A_0, A_1, \dots, A_n$ sind rationale Zahlen, also natürliche oder ganze Zahlen oder Brüche. Sinnvollerweise wird man bei der Gleichung noch verlangen: $A_0 \neq 0$ und $n \geq 1$ und n : natürliche Zahl. Die sehr einfache Gleichung $\sqrt{x} - 1 = 0$ ist also keine algebraische Gleichung, aber die daraus durch Quadrieren hervorgehende $x^2 - 1 = 0$ ist es. Man kann nun die Frage stellen, welche Zahlen als Lösungen konkreter algebraischer Gleichungen auftreten können. An Beispielen erkennt man:

$$x^2 - 4 = 0, x_{1,2} = \pm 2 \text{ (Lösungen: ganze Z.)}$$

$$x^2 - 1/4 = 0, x_{1,2} = \pm 1/2 \text{ (Lösungen: ration. Z.)}$$

$$x^2 - 3 = 0, x_{1,2} = \pm \sqrt{3} \text{ (Lösungen: irration. Z.)}$$

$$x^2 + 4 = 0, x_{1,2} = \pm 2i \text{ (Lösungen: komplexe Z.)}$$

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als wären alle Zahlen als Lösungen algebraischer Gleichungen möglich. Es war eine große Leistung des französischen Mathematikers JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) im Jahre 1844, als er zeigte, daß es Zahlen gibt, die nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung auflösen können, also transzendent sind. Eine solche Liouvillesche Zahl ist z. B.

$$z = 10^{-11} + 10^{-27} + 10^{-31} + \dots (m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m)$$

$$z = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + \dots = 0,1100010000 \dots$$

Die hinten stehende 1 kommt an der 24. Stelle nach dem Komma.

1874 zeigte dann der berühmte Begründer der Mengenlehre, GEORG CANTOR (1845-1918), sensationell, daß es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt, aber überabzählbar viele transzendente Zahlen. Man kann also alle denkbaren Liouvilleschen Gleichungen so in eine Reihe bringen, daß jeder dieser Zahlen genau eine bestimmte Stelle in dieser Reihe zukommt. Die transzendenten Zahlen lassen sich nicht mehr so ordnen, es gibt also mehr transzendente Zahlen als algebraische. Es ist sehr schwierig nachzuweisen, ob eine bestimmte irrationale Zahl transzendent ist. 1873 bewies CHARLES HERMITE (1822-1901) die Transzendenz von $e = 2,718\dots$ (Basis der natürlichen Logarithmen) und 1882 FERDINAND VON LINDEMANN (1852-1939) die Transzendenz von π . Bis heute weiß man aber z. B. nicht ob $e + \pi$ auch transzendent ist. Mit dem Beweis von LINDEMANN war auch die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal als unmöglich nachgewiesen, denn mit beiden Instrumenten lassen sich nur algebraische Zahlen konstruieren.

Einblicke in die Geschichte

1519 am 2. Mai starb auf Schloß Cloux in Frankreich LEONARDO DA VINCI (siehe Text).

1644 seit diesem Jahr trafen sich im Gresham-College in London, benannt nach dem Kaufmann THOMAS GRESHAM (1519-1579), eine Gruppe von Naturforschern und Mathematikern zu regelmäßigen Besprechungen. Diese Gruppe wurde das „unsichtbare Kollegium“ genannt. Aus dieser Gruppe entstand 1662 die „Royal Society“, die britische Akademie der Wissenschaften.

1694 der französische Mathematiker JACQUES OZANAM (1640-1717) veröffentlicht sein bedeutendes Werk „Récitations ...“. Mit diesem Werk wurde die neuere Unterhaltungsmathematik begründet.

1769 am 6. Mai wurde in Mézières der französischen Mathematiker JEAN NICOLAS PIERRE HACHETTE geboren. HACHETTE, der vorwiegend in Paris tätig war, hatte große Verdienste um die Entwicklung der theoretischen Maschinenlehre, der darstellenden Geometrie und der mathematischen Physik. HACHETTE starb 1834.

1844 der französische Mathematiker JOSEPH LIOUVILLE konstruierte transzendente Zahlen (siehe Text).

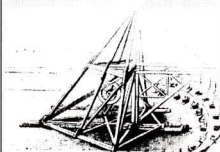
1919 am 13. Mai starb in Gießen der deutsche Mathematiker EUGEN NETTO (geb. 1846). Bekannt wurde er besonders durch seine Arbeiten zur Algebra und zur Kombinatorik.

1984 auch am 13. Mai starb in Santa Fé (New Mexico, USA) der polnisch-amerikanische Mathematiker STANISLAW ULAM (geb. 1909). Er hat grundlegende Beiträge zur Mathematik, zur Statistik und zur statistischen Mechanik geliefert.

Bild der Stadt Florenz, einem der großen Wirkungsorte LEONARDOS:



Bild von Leonardos Rechenmaschine:



Leonardo da Vinci

Am 2. Mai 1519, also vor 475 Jahren, starb auf Schloß Cloux bei Amboise LEONARDO DA VINCI. LEONARDO gilt als die Verkörperung des Renaissanceemenschen. Geboren am 15. April 1452 in Vinci bei Florenz, lebte und arbeitete LEONARDO in Mailand, Mantua, Venedig, Florenz und Rom. Auf Einladung des französischen Königs siedelte er 1516 nach Frankreich über. Als Maler (z. B. „Mona Lisa“, 1503-1506) hat er den allergrößten Einfluß auf die Entwicklung dieser Kunst genommen. Von seinen bildnerischen und architektonischen Arbeiten ist wahrscheinlich nichts mehr erhalten.



Für die Beschreibung des Standes der Naturwissenschaft und Technik im 15. und 16. Jahrhundert sind seine Zeichnungen von hervorragender Bedeutung.

Leonardo war kein Mathematiker - in schwierigen mathematischen Fragen ließ er sich von seinem Freund LUCA PACIOLI (um 1445-1517) beraten. Für PACIOLI illustrierte er dessen Werk über Proportionen (erschienen 1509). Als Maler war LEONARDO selbstverständlich sehr an der richtigen Anwendung und Lehre der geometrischen Perspektive interessiert („Abhandlung über die Malerei“, veröffentlicht 1651). In diesem Werk empfahl er den Künstlern, sich mit Wissenschaft zu beschäftigen, denn der „in die Praxis Verliebte gleicht einem Steuermann, der das Schiff ohne Steuer oder Kompaß betreibt; denn er könne nie sicher sein, wohin er fahre“.

In seinen Notizbüchern wurde die Mathematik durch Aufgaben und Rechnungen repräsentiert. Meist sind es praktische Probleme, die ihn zu mathematischen Aufgaben führen. Er untersuchte z. B. reguläre Vielecke, Schwerpunkte, flächengleiche Figuren und volumengleiche Körper.

LEONARDO erfand einige einfache mathematische Geräte, z. B. den Proportionalzirkel und ein Parabelzeichengerät. 1967 entdeckte man in seinen Manuskripten sogar den Entwurf einer Rechenmaschine. LEONARDO war ein (theoretischer) Gegner „unendlich kleiner Größen“, arbeitete aber praktisch mit ihnen. Er begründete ihre Anwendung mit der „Freiheit, die ich mit den Mathematikern gemeinsam habe“, nämlich die Freiheit, aus kontinuierlichen Größen diskrete Größen zu machen und mit diesen diskreten Größen dann zu arbeiten.

D. S. MERESCHKOWSKI (1865-1941) hat 1896, 1903 das Leben LEONARDOS im Roman „Leonardo da Vinci“ dargestellt.

Zur Beobachtung der Sonnenfinsternis am 10. Mai 1994

Verfinsterungen von Sonne und Mond sind infolge der um 5 Grad geneigten Mondbahn gegenüber der scheinbaren Sonnenbahn (Ekliptik) verhältnismäßig selten. Es sind eigentlich Licht-Schatten-Spiele, wobei Sonne, Erde und Mond die Schauspieler darstellen. Bei einer Mondfinsternis durchquert der Vollmond den Schattenkegel unserer Erde. Bei einer Sonnenfinsternis schiebt sich der Neumond vor die Sonne, streng genommen handelt es sich um eine Sternbedeckung. Sonne und Mond haben mit ungefähr 0,5 Grad (30 Bogenminuten) den gleichen scheinbaren Durchmesser (Scheibendurchmesser), doch schwankt dieser infolge der unterschiedlichen Entfernungen zwischen Erde und Sonne sowie zwischen Erde und Mond. Vereinfacht ausgedrückt, können wir einmal von einer großen und kleinen Sonne sowie von einem großen und kleinen Mond sprechen. In Erdnähe bei 356740 km erscheint der Mond unter einem Winkel von 33'32"; in Erdferne bei 406700 km unter 29'14". Immerhin beträgt die Schwankung des scheinbaren Monddurchmessers 13 %. Befindet sich der Mond in Erdferne, reicht sein Kernschatten nicht mehr bis zur Erdoberfläche - und genau dieser Fall tritt bei der Sonnenfinsternis am 10. Mai ein. An diesem Tag erscheint der Mond um fast 3' kleiner als die Sonne, es kann daher zu keiner totalen Sonnenfinsternis, sondern nur zu einer ringförmigen kommen. Für kurze Zeit umgibt ein schmaler, leuchtender Ring den dunklen Mond. Dieses gewiß beeindruckende Naturschauspiel werden wir in Europa nicht erleben und wir werden uns mit einer teilweisen (partiellen) Sonnenfinsternis begnügen müssen. Die Zone der ringförmigen Verfinsterung erstreckt sich vom östlichen Pazifik quer über die USA und über den Atlantik bis Marokko, wo sie endet.

Die Finsternis beginnt um 18.38 Uhr MESZ auf der Linie Ruhrgebiet-Braunschweig-Berlin, in Norddeutschland um 2 Minuten früher, in Süddeutschland 2 Minuten später. Da der Sonnenuntergang in Berlin bei 20.48 Uhr MESZ liegt und die Finsternis noch nicht beendet ist, werden wir erleben können, wie die teilweise verfinsterte Sonne untergeht - gewiß ein seltsamer

Anblick, den man sich nicht entgehen lassen sollte. Die nachstehende Übersicht gibt an, wie groß der Bedeckungsgrad bei Sonnenuntergang ist, d. h. wieviel Prozent der Sonnenscheibfläche vom Mond bedeckt werden:

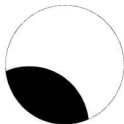
Berlin	25 %
Frankfurt/M.	27 %
Mannheim	30 %
Chemnitz	33 %
Hamburg	11 %
München	41 %
Dortmund	15 %
Hannover	16 %
Nürnberg	36 %
Dresden	32 %
Köln	17 %
Stuttgart	36 %
Essen	13 %
Leipzig	30 %

(Aus: Das Kosmos-Himmelsjahr 1994, Stuttgart 1993)

Um schwere Augenschäden zu vermeiden, ist wie bei jeder Sonnenbeobachtung größte Vorsicht geboten! Die Sonne darf nur mit einem Blendglas beobachtet werden. Dazu eignen sich beruhte Glasscheiben oder dunkle Negative von Filmen. Beobachtungen mit Ferngläsern oder Fernrohren erfordern vorschriftsmäßige Filter.

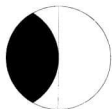
Arnold Zenkert

Anblick der teilweise verfinsterten Sonne am 10. 05. 1994 zum Zeitpunkt des Unterganges.



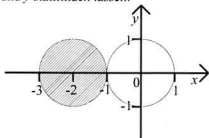
Eine halbe Sonne

Eine wichtige mathematische Frage stellt sich bei der Betrachtung einer totalen Sonnenfinsternis. Zu welchem Zeitpunkt der Sonnenfinsternis ist genau die Hälfte der Sonne zu sehen? Die spontane Antwort ist sicher: „Nach der Hälfte der Zeit.“ Doch diese Antwort ist falsch, wie folgende Graphik zeigt:



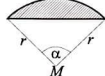
Die gestrichelte Linie stellt die Mitte der Sonnenfläche dar. Man sieht deutlich, daß noch mehr als die Hälfte der Fläche sichtbar ist. In der gleichen Weise stellt sich die Frage, wieviel Prozent der Fläche zur Hälfte der Zeit zu sehen sind. Versucht einmal, diese Fragen unter der Zuhilfenahme der folgenden Ansätze zu lösen:

Natürlich müssen wir zur Berechnung ein vereinfachendes Modell aufstellen. Zuerst sei angenommen, daß die beiden sich überlagernden Flächen gleichgroße ideale Kreise mit dem Radius 1 sind, von denen die Mittelpunkt bei den Koordinaten (0,0) und (-2,0) in der Ausgangsstellung liegen. Damit ist auch schon die zweite Vereinfachung verbunden, daß wir den Vorgang mit ebenen Kreisflächen in einem Koordinatensystem mit den Bestimmungsgrößen x und y stattfinden lassen:



Als drittes sollen sich die Kreisflächen nicht auf ellipsoiden Bahnen überlagern, sondern durch die lineare Bewegung des linken Kreises zum rechten hin.

Mit diesem Modell entsteht ein durchaus berechenbarer Vorgang. Folgende Gleichung zur Berechnung eines Kreissegments sei noch bemerkt:



Die schraffierte Fläche berechnet man nach der Formel:
$$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi - \alpha}{180} - \sin \alpha \right)$$

Roland Becker

Lösungen

Lösungen alpha-Wettbewerb Heft 6/93

5/1 Es wurden 21 – 5 = 16 Partien gewonnen bzw. verloren. Wegen $3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 16$ gewann Axel zwölf und somit Bernd vier Partien.

5/2 Vor vier Jahren waren beide zusammen $80 - 4 \cdot 2 = 72$ Jahre alt. Wegen $72 : 9 = 8$ war der Neffe vor vier Jahren 8 Jahre alt, der Onkel 64 Jahre alt. Gegenwärtig ist der Neffe 12, der Onkel 68 Jahre alt.

5/3 Da alle Tiere zusammen 20 Köpfe haben, sind in dem Stall 20 Tiere. Wenn es alles Kaninchen wären, so müßten $20 \cdot 4 = 80$ Füße vorhanden sein. Es sind jedoch 8 Füße weniger, nämlich 72 Füße. Eine Gans hat 2 Füße weniger als ein Kaninchen. Wegen $8 : 2 = 4$ sind es 4 Gänse und somit 16 Kaninchen.

5/4 Es seien k, r, l, p, h die Maßzahlen der Körpergröße (gemessen in cm) der Schüler Karl, Rolf, Lutz, Peter, Hans. Dann gilt nach (1) $k < r$, nach (2) $r < l$. Daraus gilt $k < r < l$. Wegen (3) gilt deshalb $p < k < r < l < h$. Beginnend mit dem Kleinsten stellt die Reihenfolge Peter, Karl, Rolf, Lutz, Hans.

5/5 Wegen $209 = 1 \cdot 11 \cdot 19$ hat dieser Mathematiklehrer am 19. 11. Geburtstag. Der 11.19. ist nicht möglich, da es keinen 19. Monat gibt.

5/6 Die letzte Ziffer des kleineren Summanden muß 6 sein, da der größere Summand auf die Ziffer 0 endet. Dann ist 6 aber auch die mittlere Ziffer des größeren Summanden. Wegen der Summe 836 lauten die beiden Summanden 76 und 760.

5/7 Wegen $3 \cdot 4 \text{ km} = 12 \text{ km}$ treffen die Fußgänger im Ziel um 11 Uhr ein. Die Radler schaffen in 15 Minuten 4 km, in 45 Minuten 12 km. Sie müßten um 10.15 Uhr aufbrechen.

6/1 Das k. g. v. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ist 2520. Wegen $2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = \dots = 9 - 8 = 10 - 9 = 1$ erfüllt die Zahl 2519 die gestellten Bedingungen. Sie ist zugleich die einzige Zahl mit diesen Eigenschaften, die kleiner als 3000 ist.

6/2 Die Zahl 3535 besitzt genau zwei einstellige Teiler, nämlich 5 und 7. Wegen $3535 : 5 = 707$ und $3535 = 505$ könnte der erste Faktor 707, aber auch 505 lauten. Der zweite Faktor könnte $*5*$, aber auch $*7*$

lauten. Da $2 \cdot 707 = 1414$ und $2 \cdot 505 = 1010$, beide eine vierstellige Zahl ergeben, sind die beiden Sternchen des zweiten Faktors in beiden Fällen durch die Ziffer 1 zu ersetzen. Da $505 \cdot 171 = 86355$ nur eine fünfstelligen Zahl ergibt, das Ergebnis aber sechsstellig ist, entfällt dieser Fall. Die Lösung lautet:

$$\begin{array}{r} 207 \cdot 151 \\ 707 \\ \hline 3535 \\ 707 \\ \hline 106757 \end{array}$$

6/3

H	Z	E	Quersumme
1	2	6	$9 < 15$
2	3	7	$12 < 15$
3	4	8	15
4	5	9	$18 > 15$

Es handelt sich um die Zahl 348.

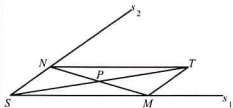
6/4 Die folgende Tabelle zeigt, wie vorzugehen ist.

Gefäße zu		
12	7	5 Liter
12	-	-
5	7	-
5	2	5
10	2	-
10	-	2
3	7	2
3	4	5
8	4	-
8	-	4
1	7	4
1	6	5
6	6	-

6/5 Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich durch $z = 10a + b$ mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ darstellen. Nun gilt $a \cdot b = 2 \cdot (a + b)$, $a \cdot b = 2a + 2b$, $a \cdot b - 2a = 2b$, $a \cdot (b - 2) = 2b$, $a = \frac{2b}{b-2}$. Für b gleich 3, 4 oder 6 erhalten wir die natürlichen Zahlen a gleich 6, 4 oder 3. Die gesuchten Zahlen sind 63, 44 und 36.

6/6 Wir zeichnen die Gerade PS und tragen auf dieser Geraden die Strecke $\overline{PS}$ über P hinaus von P bis T nochmals ab. Wir zeichnen die Parallele zu s_1 bzw. die Parallele zu s_2 durch T , die s_2 in N bzw. s_1 in M schneiden möge. Dann ist das Viereck $SMTN$ aufgrund der Konstruktion ein Parallelogramm mit der Diagonalen ST , deren Mittelpunkt P ist. Folglich halbiert P

auch die Strecke $\overline{MN}$, und es gilt $PM = PN$.



6/7 Die Person bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 3,6 km/h entgegen der Bewegungsrichtung des Zuges. Die Geschwindigkeit der Person gegenüber des Bahndammes beträgt somit $(10 \text{ km/h} - 3,6 \text{ km/h}) = 6,4 \text{ km/h}$.

7/1 Die zu ermittelnden Primzahlen lassen sich darstellen durch $p = 100a + 10b + a = 101a + 10b$. Für deren Quersumme gilt $q = a + b + a = 2a + b = 22$, also $b = 22 - 2a = 2 \cdot (11 - a)$. Daraus folgt, daß b eine gerade natürliche Zahl sein muß.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) Es sei $b = 0$, also $a = 11$. Das ist wegen $1 \leq a \leq 9$ nicht möglich.

(2) Es sei $b = 2$, also $a = 10$, was ebenfalls nicht möglich ist.

(3) Es sei $b = 4$, also $a = 9$. Die Zahl 949 = $13 \cdot 73$ ist keine Primzahl.

(4) Es sei $b = 6$, also $a = 8$. Die Zahl 868 ist durch 2 teilbar, also ebenfalls keine Primzahl.

(5) Es sei $b = 8$, also $a = 7$. Die Zahl 787 ist Primzahl; es existiert somit genau eine Lösung.

7/2 Angenommen, die Sparbüchse enthält x 10-DM-Scheine, y 5-DM-Stücke und z 1-DM-Stücke; dann gilt $10x + 5y + z = 100$ und $x + y + z = 50$. Subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, dann erhalten wir $9x + 4y = 50$. Nur für $x = 2$ und $y = 8$ erhalten wir eine positive ganzzahlige Lösung. Wegen $50 - 2 - 8 = 40$ enthält die Sparbüchse 40 Ein-DM-Stücke.

7/3 Es sei n die gedachte Zahl und z das Ergebnis; dann gilt $z = n \cdot 54 \cdot 37 = 1998 \cdot n = 2 \cdot 1000n - 2n$. Da $2n < 1000$ ist, fehlt bei der Nennung des Ergebnisses z am nächsten vollen Tausender gerade $2n$. Heinz braucht nur das Ergebnis z auf den nächsten vollen Tausender aufzurunden, drei Nullen abzustreichen und zu halbieren. So ergibt sich die von Gerd gedachte Zahl n .

Beispiel: $n = 217$, $z = 217 \cdot 54 \cdot 37 = 433566$, gerundet 434000, $434 : 2 = 217$.

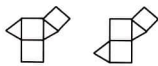
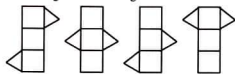
7/4 Angenommen, es waren x Frauen, also $3x$ Männer anwesend; dann gilt $4 \cdot (x - 4) = 3x - 4$, also $x = 12$. Auf der Versammlung waren 12 Frauen und 36 Männer, also 48 Personen anwesend.

7/5 Aus $a : b : c = 9 : 10 : 15$ folgt $a : c = 9 : 15 = 3 : 5$. Wegen $c = a + 12$ gilt $a : (a + 12) = 3 : 5$, also $a = 18$ und $c = 30$. Aus $b : c = 10 : 15 = 2 : 3$ und $c = 30$ folgt $b = 20$. Die Seitenlängen dieses Dreiecks betragen 18 cm, 20 cm und 30 cm.

7/6 Die Volumenausdehnung ΔV ergibt sich aus $\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta t$ (Δt Temperaturänderung, V Anfangsvolumen). Mit $V = 40\,000\text{ cm}^3$, $\Delta t = 40\text{ K}$ ergibt sich $\Delta V = 1600\text{ cm}^3 = 1,6\text{ l}$.

7/7 Richtig ist d).

8/1 Es gibt 7 nichtkongruente Netze:



8/2

- 1 Scheibe 2,6 cm x 2,6 cm
- 2 Scheiben 2,6 cm x 2,0 cm
- 2 Scheiben 2,0 cm x 2,0 cm
- oder
- 1 Scheibe 2,6 cm x 2,6 cm
- 4 Scheiben 2,3 cm x 2,0 cm
- oder
- 1 Scheibe 2,6 cm x 2,6 cm
- 1 Scheibe 2,6 cm x 2,0 cm
- 1 Scheibe 2,0 cm x 2,0 cm
- 2 Scheiben 2,3 cm x 2,0 cm

8/3 Für die erste Kugel gibt es 3 Möglichkeiten, für die zweite ebenfalls, das sind 9 mögliche Zusammenstellungen. Wenn es dem Eisgenießer allerdings egal ist, an welcher Kugel er zuerst leckt, so gibt es 6 Varianten.

8/4 Das Guthaben beträgt 6342,12 DM.

8/5 Die Zahl 4755 kommt in der Zahlenfolge vor. Die Glieder der Folge haben die Struktur $3 + 9n$. Wenn eine Zahl zur Folge gehört, so muß die zu prüfende Zahl vermindert um 3 durch 9 teilbar sein. $4755 - 3 = 4752$. Die Quersumme beträgt 18, d. h. die Bedingung ist erfüllt.

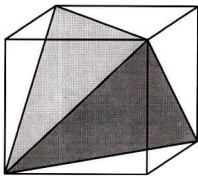
8/6

a) Leistung P beim Heben: $P = m \cdot g \cdot h / t$ (m Masse, $g = 9,81\text{ N/kg}$, h Hubhöhe, t Hubzeit). Mit $m = 130\text{ kg}$, $h = 2,20\text{ m}$ und $t = 1\text{ s}$ erhält man $P = 2806\text{ W} = 3,8\text{ PS}$.

b) Mit $m = 185\text{ kg}$, $h = 0,60\text{ m}$ und $t = 8\text{ s}$ erhält man $P = 136\text{ W} = 0,19\text{ PS}$. (Die sportliche Leistung ist aber im 2. Fall größer!)

8/7 Die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit muß gleich der Auftriebskraft sein. Da der Körper schwimmt, muß Auftriebskraft = Gewichtskraft des Körpers sein. Aus $V \cdot \rho \cdot g = 6\text{ N}$ ergibt sich $V = 0,75\text{ dm}^3$.

9/1 Die vier Eckpunkte des Tetraeders fallen mit 4 Eckpunkten des Würfels zusammen. Die Kante des Tetraeders ist gleich der Länge der Flächendiagonalen des Würfels. $S = 28,3\text{ cm}$.



9/2 216 Einstellungen: An erster Stelle können 6 Ziffern stehen, an zweiter Stelle eine, an dritter Stelle 6 und vierter wiederum 6. Insgesamt ergeben sich damit $6 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten.

9/3 $T_1 = 2$; $T_2 = 4$; $T_3 = 6$; $T_4 = 8$; $T_5 = 10$; $T_n = 2n$

9/4 Den Preis von 1 Pfennig und 3 Pfennig kann er nicht in dieser Weise bezahlen, alle anderen Preise lassen sich aus den angegebenen Münzen zusammenstellen. Mathematisch formuliert heißt das Problem: Läßt sich jede natürliche Zahl n als Summe aus einem Vielfachen von 2 und einem Vielfachen von 5 darstellen.

$$9/5 a(x+1) - bx = 0$$

$$(a-b)x = -a$$

Fallunterscheidung:

für $a \neq b$ erhält man $x = -a / (a-b)$

für $a = b$ und $a \neq 0$ gibt es keine Lösung

für $a = b$ und $a = 0$ gibt es unendlich viele Lösungen.

9/6 Aus $a = \Delta v / \Delta t$ ergibt sich $\Delta t = 7,5\text{ s}$.

9/7 Der Widerstand des Heizdrahtes beträgt nun 0,95 R . Mit $P = U^2 / R$ ergibt sich $R = U^2 / 500$ und $P_2 = U^2 / 0,95 R$ d. h. $P_2 = 526\text{ W}$.

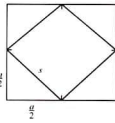
10/1 $s = 14,1\text{ cm}$. Die Lösung findet man, indem man den Würfel parallel zu einer Seitenfläche halbiert und die Berechnungen in der entstandenen Schnittebene durchführt. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse der gesuchten Kante entspricht.

$$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{(10\text{ mm})^2 + (10\text{ mm})^2}$$

$$= \sqrt{200\text{ mm}^2}$$

$$= 10 \cdot \sqrt{2}\text{ cm}$$



10/2

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

10/3 1. Spiel: 3 Möglichkeiten; 2. Spiel: 3 Möglichkeiten, ...; das sind insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{11} = 177147$ verschiedene Tips.

$$10/4 A = 43,3\text{ cm}^2$$

Die Diagonale des Rechtecks ist zugleich Durchmesser des Kreises und Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Rechteckseiten als Katheten. Die fehlende Rechteckseite wird nach dem Satz des Pythagoras berechnet.

10/5 Lisa erhält 44 320 DM; Maria 27 700 DM; Anna 22 160 DM und Katja 88 640 DM.

10/6 Es gilt

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\infty \cdot L - \frac{1}{\infty \cdot C}\right)^2} \text{ und}$$

$$\tan \varphi = \frac{\infty \cdot L - \frac{1}{\infty \cdot C}}{R}$$

$$W_{eff} = U_{eff}^2 \cdot \cos(\varphi \cdot t / Z).$$

$$Z = 58,9\Omega$$

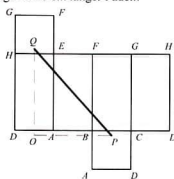
$$\varphi = +85^\circ$$

Zeit für 1 kWh = 13 h 37 min.

$$10/7 s = \frac{a}{2} r^2.$$

E/1 5 Begrenzungsflächen. Man kann sich durch Basteln von Modellen „überzeugen“, daß es sich bei dem zusammengesetzten Körper um ein schiefes dreiseitiges Prisma handelt.

E/2 Wählt man den Weg so, daß er über 5 Begrenzungsflächen führt (s. Abb.), dann genügt ein 20 cm langer Faden!



$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2} \\ &= \sqrt{(12\text{ cm})^2 + (16\text{ cm})^2} \\ &= 20\text{ cm} \end{aligned}$$

E/3 Für die Reihenfolge beim Einlauf gibt es 504 Möglichkeiten. Für den ersten Platz 9, den zweiten dann noch 8 und den dritten Platz noch 7 mögliche Belegungen, das sind insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ Varianten.

E/4 Der Bauherr beteiligt sich mit 100 000 DM. x sei der Bruchteil, mit dem B sich beteiligt. Die gesamte Baumsomme setzt sich aus den einzelnen Bruchteilen zusammen, die somit 1 ergeben:

$$2/7 + 3/10 + x + 1/5 = 1$$

$$x = 70/70 - 20/70 - 21/70 - 14/70$$

$$x = 15/70$$

$x = 3/14$
 3/14 entsprechen 75 000 DM. Die Gesamtsumme beträgt 350 000 DM. Der Bauherr zahlt davon 2/7, das sind 100 000 DM.

E/5 Bei 2 Scheiben sind 3 Züge erforderlich,
 bei 3 Scheiben 7 Züge,
 bei 4 Scheiben 15 Züge,
 bei 5 Scheiben 31 Züge,
 bei n Scheiben sind mindestens $2^n - 1$ Züge nötig.

E/6 Für ein Teilchen folgt $p = \Delta I / A \cdot \Delta t$ aus $\Delta I = F \cdot \Delta t$ und $p = F/A$ (I Impuls, p Druck, F Kraft, t Zeit).

Für N Teilchen, wobei $N = n \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \cdot A$,
 $p = N \cdot \Delta I / A \cdot \Delta t = n \cdot \bar{v} \cdot \Delta I$.

E/7 a)

$$\text{Aus } \frac{1}{2} \cdot m \cdot \bar{v}^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \text{ folgt}$$

$$\bar{v} = 0,92 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} = 4,4 \cdot 10^{-23} \text{Ns}$$

b)

$$\Delta I = 2 \cdot h \cdot f / c = 2h / \lambda$$

$$\Delta I = 2,2 \cdot 10^{-27} \text{Ns}$$

Zeitungsschnipsel

Höllenhitze vor Sonnensterben

Die je Zeiteinheit ausgestrahlte Sonnenenergie (diese Leistung ist ebenso groß wie die von $390 \cdot 10^{15}$ mittleren Atomkraftwerken) verteilt sich gleichmäßig auf die gedachte Kugeloberfläche mit Radius $r = 147,1 \cdot 10^6$ km, in deren Zentrum sich die Sonne befindet und in der das zu betrachtende quadratische Flächenstück mit der Seitenlänge a und dem Flächeninhalt a^2 als leicht angenehmen werden kann. Mithin gilt: $4\pi r^2 : a^2 = 390 \cdot 10^{15} : 1$. Hieraus folgt

$$a^2 = \frac{4\pi r^2}{390 \cdot 10^{15}} = \frac{4\pi \cdot 147,1^2 \cdot 10^{12} \text{ km}^2}{390 \cdot 10^{15}}$$

$$= 0,697 \text{ km}^2 \text{ und } a = 0,835 \text{ km}$$

Erde im Aphel: Analog ergibt sich mit $r = 152,1 \cdot 10^6$ km $a = 0,863$ km.

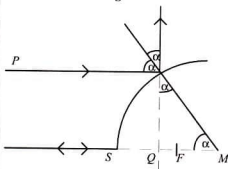
Bemerkungen:

1. Wer, wie im zitierten Zeitungsbericht angegeben, ermitteln will, mit welcher Leistung die Sonne die Erde bestrahlt, sollte statt der beleuchteten Erdhalbkugel als senkrecht bestrahlte Ersatzfläche die eines Kreises mit Erdradius $R = 6371$ km betrachten, die von der Sonne den gleichen Abstand wie die Erde hat.

2. Im zitierten Zeitungsbericht heißt es weiter: "... Wenn in fünf Milliarden Jahren der Wasserstoff als Hauptbrennstoff verbraucht ist, dann bläht sich die Sonne zu einem Roten Riesen auf - ein Stern, so groß, daß er die inneren Planeten Merkur und Venus, aber auch die Erde verschlingt. Die wabernde Oberfläche der Sonne wird dann bis zur Bahn des Mars - heute 228 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt - reichen,

der wahrscheinlich schnell in den Glutofen absterben wird."

Weihnachtsbaumkugeln



Laut Scheitelwinkel- und Stufenwinkelsatz ist ΔPQM gleichschenkelig. Die Basis PM dieses Dreiecks ist ein Kugelradius, die Basiswinkel sind ebenso groß wie der Einfallswinkel α des Parallelstrahles. Wenn d gegen 0 strebt, wandert P auf S zu und der Einfallswinkel α wird zu einem Nullwinkel. Da stets $PQ = QM$ gilt, strebt Q gegen den Mittelpunkt F der Strecke SM .

Schuldenlast

- a) 14 600 DM
- b) $41,3\% \cdot 0,05 = 2\%$

NAFTA

a) Wegen

$$\frac{5880 \cdot 10^9}{255 \cdot 10^6} = 23000 > \frac{560 \cdot 10^9}{27 \cdot 10^6}$$

$$\approx 21000 > \frac{330 \cdot 10^9}{90 \cdot 10^6} = 3700$$

sind dies die USA.

b) Kanada exportiert jährlich pro Einwohner Waren für 5 000, die USA nur für 1 800 und Mexiko sogar nur für 310 Dollar.

c) Die USA exportieren nur 7,6 %, Kanada exportiert 24 % und Mexiko 8,5 % der Wirtschaftsleistung.

Schottlandreise

- a) $10 \frac{1}{4}'' = 10,25 \cdot 2,54 \text{ cm} = 26,0 \text{ cm}$
- b) $12 \text{ acre} = 12 \cdot 0,40467 \text{ ha} = 48600 \text{ m}^2$

Waltzing Waters

Zunächst wird die Flugzeit T eines Wassertropfens bestimmt. Für diese gilt 0

$$= y(T) = c_2 T - \frac{g}{2} T^2 = T \cdot \left(c_2 - \frac{g}{2} T \right). \text{ Da } T >$$

0 ist, ergibt sich $0 = c_2 - \frac{g}{2} T$ und damit $T =$

$2c_2 : g$ Nunmehr läßt sich die Flugweite bestimmen:

$$W = x(T) = c_1 T = \frac{2c_1 c_2}{g}$$

Zeichnung und Foto lassen vermuten, daß die Flughöhe gerade nach der halben Flugzeit von einem Wassertropfen erreicht wird. Deshalb wird zunächst $y\left(\frac{T}{2}\right)$ ermittelt, um dann später nachzuweisen, daß

$y\left(\frac{T}{2}\right)$ tatsächlich die Flughöhe ist:

$$y\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2} \left(c_2 - \frac{g}{2} \frac{T}{2} \right) = \frac{c_2}{g} \left(c_2 - \frac{g}{2} \frac{c_2}{g} \right) = \frac{c_2^2}{2g}$$

Um die Vermutung zu bestätigen, wird nunmehr $y(t)$ unter Benutzung einer binomischen Formel umgeformt:

$$y(t) = \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} + y(t) = \frac{c_2^2}{2g} \left(\frac{c_2^2}{2g} - c_2 t + \frac{g}{2} t^2 \right) = \frac{c_2^2}{2g} \left(\frac{c_2}{\sqrt{2g}} - \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2$$

Aus der erhaltenen Darstellung für $y(t)$ ist abzulesen: Es gilt für alle t : $y(t) \leq \frac{c_2^2}{2g}$. Und

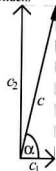
in dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für

$$\frac{c_2}{\sqrt{2g}} - \sqrt{\frac{g}{2}} t = 0, \text{ also für } t = \frac{c_2}{g} T = \frac{T}{2}$$

Damit ist die Vermutung bestätigt und es gilt

$$H = \frac{c_2^2}{2g}. \text{ Die Gleichung } W = H \text{ ist also}$$

äquivalent mit $c_2^2 : (2g) = 2c_1 c_2 : g$ und damit auch mit $c_2 : c_1 = 4$. Wie die angegebene Zeichnung zeigt, muß für $W = H$ die Austragsgeschwindigkeit c mit der Waagerechten einen Winkel α von rund 76° bilden.



$$\tan \alpha = \frac{c_2}{c_1} = 4$$

2.) Die Bewegung eines Wassertropfens wird jetzt wegen $c_1 = 0$ und $c = c_2$ durch $x =$

$$x(t) = 0 \text{ und } y = y(t) = ct - \frac{g}{2} t^2 =$$

$$\frac{c^2}{2g} - \left(\frac{c}{\sqrt{2g}} - \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2 \text{ beschrieben. Für die}$$

Flughöhe H gilt dann $H = c^2 : (2g)$. Für eine zweite senkrechte Wassersäule mit $c_1 = 0$ und $c_2 = c$ gilt $H = c^2 : (2g)$. Aus $H = 2H$ folgt $c^2 : (2g) = 2c^2 : (2g)$, $(c : c)^2 = 2$ und $c : c = \sqrt{2} = 1,414$.

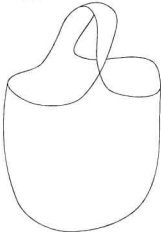
Experimentalmathematik

a) Ein zerschnittenes Möbiussches Band zerfällt nicht, sondern ergibt zwei ineinander hängende Bänder. Versucht diese Bänder weiter längs einer Mittellinie zu zerschneiden.

b) Bei einem Möbiusschen Band kann man zwischen Unter- und Oberseite nicht unterscheiden. Man kann also nur eine Farbe

auftragen. Trotzdem ist es möglich, daraus eine Tasche anzufertigen:

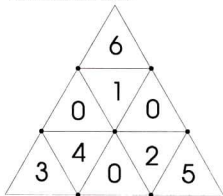
Die Tasche ist wie üblich, aber der Tragegurt ist in sich verdreht.



Schachhecke

1. Tc1 L:c1
2. Sa2 Lb2/La3/Ld2-Ld6
3. Sc1, Sc3/ Sb4, Sc1/ Sc1 L:c1,La3/Lb4,Lc1/L:c1

Komisches, Kniffliges, Knackiges Balanceakt mit Zahlen



Die Tätigkeiten der Kinder

Nach der III. Auskunft, einer wahren Entweder-Oder-Aussage, bestehen zwei Möglichkeiten:

1. Fall: Bernd macht Schularbeiten und Christian liest kein Buch.
2. Fall: Bernd macht keine Schularbeiten und Christian liest ein Buch. Im ersten Fall müßte nach der I. Auskunft, einer wahren Und-Aussage (Konjunktion) Christian eine Radtour machen und Alfons ein Buch lesen. Im zweiten Fall müßte nach der I. Auskunft Bernd eine Radtour machen und Alfons Schularbeiten.

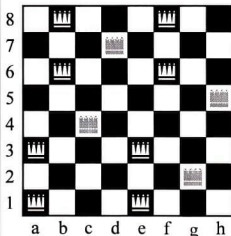
Laut II. Auskunft, einer wahren Wenn-So-Aussage (Implikation), scheidet der zweite Fall aus. Also liest Alfons ein Buch, Bernd macht Schularbeiten und Christian eine Radtour.

Bemerkung: Die Implikation II ist logisch äquivalent (gleichwertig) mit der Oder-Aussage (Disjunktion) „Alfons macht keine Schularbeiten oder Bernd liest ein Buch“.

Acht verträgliche Damen

Da bei der gesuchten Lösung in jeder Zeile und jeder Spalte nur eine Dame stehen

darf, kommen für das Aufstellen der vier restlichen Damen nur die schwarzen Felder in Betracht, die mit keinem der bereits besetzten weißen Felder in einer Zeile oder Spalte liegen. Dies sind a1, e1, a3, e3, b6, f6, b8 und f8 (siehe Abbildung). Bei der gesuchten Lösung steht also entweder auf Feld a1 (1. Fall) oder e1 (2. Fall) eine Dame.

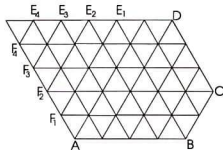


1. Fall: Ist a1 mit einer Dame besetzt, so müssen e1, a3 und f6 unbesetzt sein. Da auf f6 keine Dame steht, muß eine auf b6 stehen. Doch e3 und b6 dürfen nicht gleichzeitig besetzt sein. Somit scheidet der 1. Fall aus und der zweite muß zutreffend sein.
2. Fall: Auf e1 steht eine fünfte Dame. Dann sind a1 und e3 unbesetzt. Da a1 unbesetzt ist, muß auf a3 eine sechste Dame stehen. Weil a3 besetzt ist, kann f8 nicht besetzt sein. Da f8 nicht besetzt ist, muß auf f6 eine siebente und auf b8 die achte Dame stehen. Und diese acht Damen bedrohen sich nicht gegenseitig.

Gleichwinklige Sechsecke

Jeder Innenwinkel beträgt $720^\circ : 6 = 120^\circ$. Für die Seitenlängen d , e und f der vier die gestellten Forderungen erfüllenden Sechsecke gilt:

Möglichkeit	d	e	f
1.	2 cm	4 cm	1 cm
2.	3 cm	3 cm	2 cm
3.	4 cm	2 cm	3 cm
4.	5 cm	1 cm	4 cm



Da ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 1 cm den Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ hat, sind die Flächeninhalte dieser Sechsecke gleich $\frac{40}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\frac{47}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\frac{52}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 13\sqrt{3} \text{ cm}^2$ und $\frac{55}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

NÄRÄYANA

Im ersten Jahr waren es eine Kuh und eine Färse, die zu Jahresbeginn geboren wurde, d. h., zwei Tiere. Zu Beginn des zweiten Jahres wurden es 3, zu Beginn des dritten 4, und zu Beginn des vierten Jahres vermehrte sich der Viehbestand um 2 Tiere, da die Kuh und die im ersten Jahr geborene Färse je eine Färse warfen, d. h., insgesamt waren es nun $4 + 2 = 6$ Tiere. Zu Beginn des fünften Jahres vermehrte sich der Viehbestand um 3 Tiere, und insgesamt wurden es $6 + 3 = 9$. Beginnend mit dem vierten Jahr wird der Viehbestand durch ein und dieselbe Rekursionsformel bestimmt: $x_4 = x_3 + x_1$, $x_5 = x_4 + x_2$, ..., $x_n = x_{n-1} + x_{n-3}$, da man, um die Zahl der Kühe und Färsen addieren muß, welche zu Beginn dieses Jahres geboren wurden; dies sind genau sovielle, wie es Tiere vor drei Jahren waren.

Zu Beginn des zwanzigsten Jahres sind es 2745 Tiere.

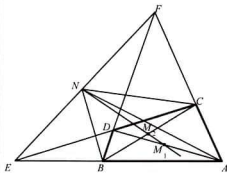
GERMAIN

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a), \text{ wobei } a^2 + 2 + 2a \neq 1;$$

$a^2 + 2 - 2a = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$. Folglich besitzt $a^4 + 4$ zwei verschiedene Teiler, die von der Zahl selbst und von eins verschieden sind. Also ist die Zahl zusammengesetzt.

GAUSS

Wenn M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Diagonalen des Viereckes $ABCD$ sind, so gilt $S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMD}$ und $S_{\triangle M_1AB} + S_{\triangle M_2CD} = S_{\triangle M_1BC} + S_{\triangle M_2DA}$. Wenn N der Mittelpunkt von EF ist, wobei E und F die Schnittpunkte gegenüberliegender Viereckseiten sind, so gilt $S_{\triangle NAB} = \frac{1}{2} S_{\triangle FAB}$, $S_{\triangle NCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle FCD}$, $S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BEC}$, $S_{\triangle NDA} = \frac{1}{2} S_{\triangle DEA}$.



Hieraus folgt $S_{\triangle NAD} - S_{\triangle NCD} = \frac{1}{2} (S_{\triangle MED} - S_{\triangle FCD}) = \frac{1}{2} S_{\triangle ABCD}$ und $S_{\triangle NDA} - S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2} (S_{\triangle MEDA} - S_{\triangle BEC}) = \frac{1}{2} S_{\triangle ABCD}$, d. h., $S_{\triangle NAB} - S_{\triangle NCD} = S_{\triangle NDA} - S_{\triangle NBC}$.

Daraus folgt, daß $N \in (M_1, M_2)$.

Die Bestellkarte

Mit der untenstehenden Bestellkarte können Sie „*alpha - Mathematik als Hobby*“ abonnieren. Kleben Sie den Bestellschein auf eine Postkarte und dann ab zu uns: **Reinhardt Becker Verlag; Redaktion „alpha“, Luisenstraße 45; 16727 Velten**. Sollte Ihnen die Zeitschrift gefallen, empfehlen Sie uns doch in Ihrer Bekanntschaft weiter. Wenn mehrere die „*alpha*“ abonnieren wollen, oder Sie Ihr *alpha*-Heft nicht zerschneiden möchten, kopieren Sie bitte diesen Bestellschein. Außerdem haben Sie die Möglichkeit, sich vom Verlag einen Sammelbestellschein schicken zu lassen. Dabei erhalten Sie bei jeweils 10 Bestellungen ein gratis-Abo zusätzlich. Außerdem ist der Abonnementpreis von 3,40 DM incl. Versandkosten (Ausland: zuzüglich Versandkosten) deutlich günstiger als der Einzelverkaufspreis von 3,90 DM.

ABO-ANGEBOT!

Ja, ich möchte die

alpha

lesen!

Senden Sie mir bitte die jetzt im Reinhardt Becker Verlag erscheinende Zeitschrift zum günstigen Abo-Preis von nur 3,40 DM je Heft incl. Versandkosten (statt 3,90 DM bei Einzelbezug). Die sechs Hefte jährlich kosten mich also nur 20,40 DM.

Eine Kündigung ist jeweils bis zu sechs Wochen vor Ende des Berechnungszeitraumes (=Kalenderjahr) möglich.

Name (Schule)

Vorname

Straße

PLZ/Ort

Datum

Unterschrift

Ich weiß, ich kann diese Bestellung binnen einer Woche gegenüber dem Verlag widerrufen. Zur Fristbewahrung genügt die Absendung innerhalb dieser Frist (Poststempel).

Datum

2. Unterschrift

PC-Logo ist die Programmiersprache für *alpha*-Leser. Sie wird für den fächerübergreifenden Unterricht in der Schule empfohlen, besonders für die Fächer Mathematik und Informatik an Haupt/Realschulen und den gymnasialen Sekundarstufen I und II. Aber auch Autodidakten haben ihre Freude an der cleveren Computersprache für Einsteiger und Aufsteiger. PC-Logo erzeugt eine Lernumgebung, die den Zugang zum Computer und zur Programmierung spielerisch erschließt. Sie fördert die Fähigkeit zum logischen Denken, weckt Verständnis für mathematische Aufgabenstellungen und trainiert das Gliedern komplexer Probleme in überschaubare Bausteine.

Nebenbei kann man mit dieser Software auch eigene originelle Computerspiele entwickeln. Am eigenen Computer läßt sich nachvollziehen, was Künstliche Intelligenz ist: Der Computer fängt plötzlich an zu lernen und trifft eigene Entscheidungen! **Das Software-Paket, das wir unseren Lesern zum Sonderpreis anbieten, enthält eine ausführliche deutsche Bedienungsanleitung mit vielen Beispielen, so eine Anleitung zum Programmieren des Computerspiels „Rakete“. Die Dokumentation ermöglicht auch Autodidakten, ihren Computer zu Hause sinnvoll-kreativ zu nutzen. Die *alpha* wird regelmäßig über mathematische Anwendungen von PC-Logo berichten.**

Ich bestelle hiermit verbindlich eine Einzelplatzlizenz für das Softwareprogramm **PC-Logo 4.0 für DOS** - deutsch für 1 PC incl. deutscher Dokumentation zum *alpha* - Sonderpreis von DM 198,- (Listenpreis ist DM 298,-) incl. Mwst. Ich spare also DM 100,-! Zuzüglich berechnen wir DM 10,- für den Versand per Nachnahme.

Liefen Sie bitte das oben genannte Angebot an folgende Adresse:

Name

Straße

PLZ/Ort

Unterschrift

(bei Kindern unter 18 Jahren Unterschrift des Erziehungsberechtigten)

bitte
ausreichend
frankieren

Reinhardt Becker Verlag

Redaktion „alpha“

Luisenstraße 45

16727 Velten

Systemvoraussetzung ist ein PC mit MS DOS ab Version 3.0, 640 KB Hauptspeicher und 2,5MB freier Festplatte. Das Programm befindet sich auf einer Diskette, die zusammen mit den Handbüchern geliefert wird.

