Language: **German**

Day: **1**

Donnerstag, 12. April 2012

Aufgabe 1. Es sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Die Punkte D, E und F liegen jeweils im Innern der Seiten BC, CA und AB, so dass DE senkrecht zu CO ist, und DF senkrecht zu BO ist. (Unter *Innerm* verstehen wir, dass zum Beispiel der Punkt D auf der Geraden BC liegt, und dass D sich zwischen den Punkten B und C auf dieser Geraden befindet.)

Es sei K der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AFE. Man beweise, dass die Geraden DK und BC senkrecht zueinander sind.

Aufgabe 2. Es sei $n > 0$ eine positive ganze Zahl. Man bestimme die größte positive ganze Zahl m mit der folgenden Eigenschaft: eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten kann auf solche Art und Weise mit reellen Zahlen gefüllt werden, dass für jedes Paar zweier verschiedener Zeilen $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ und $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ gilt, dass

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Aufgabe 3. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4. Eine Menge A ganzer Zahlen heiße *summen-voll* wenn $A \subseteq A + A$, d. h. wenn ein jedes Element $a \in A$ die Summe zweier, nicht notwendigerweise verschiedener, Elemente $b, c \in A$ ist. Eine Menge A ganzer Zahlen heiße *null-summen-frei* wenn 0 die einzige ganze Zahl ist, die nicht als Summe der Elemente einer endlichen, nicht leeren Untermenge von A geschrieben werden kann.

Existiert eine summen-volle, null-summen-freie Menge ganzer Zahlen?

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden

Language: **German**

Day: 2

Freitag, 13. April 2012

Aufgabe 5. Die Zahlen p und q sind Primzahlen, und es gilt

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

für eine gewisse positive ganze Zahl n. Man bestimme alle möglichen Werte von $q - p$.

Aufgabe 6. Unendlich viele Menschen haben sich in das soziale Netzwerk *Fratzenbuch* eingeschrieben. Einige Paare (verschiedener) Benutzer sind als *Freunde* registriert, aber jeder Benutzer hat nur endlich viele Freunde. Jeder Benutzer hat mindestens einen Freund. (*Freundschaft ist symmetrisch, d. h. wenn A ein Freund von B ist, dann ist auch B ein Freund von A.*)

Jeder Benutzer muss einen seiner Freunde als seinen *besten Freund* angeben. Wenn A den Benutzer B als seinen besten Freund angibt, folgt es (leider) nicht, dass B notwendigerweise A als seinen besten Freund angibt. Jemand, der als bester Freund angegeben wurde, ist ein 1-*bester Freund*. Allgemeiner ist, für $n > 1$ eine positive ganze Zahl, ein Benutzer ein n-*bester Freund* wenn er als bester Freund eines $(n-1)$-besten Freundes angegeben wurde. Jemand, der ein k-bester Freund für jede positive ganze Zahl k ist, ist *beliebt*.

(a) Man beweise, dass jede beliebte Person der beste Freund einer beliebten Person ist.

(b) Man beweise, dass, wenn Benutzer unendlich viele Freunde haben könnten, es möglich wäre, dass eine beliebte Person der beste Freund keiner beliebten Person ist.

Aufgabe 7. Es sei ABC eine spitzwinkliges Dreieck mit Umkreis Γ und Höhenschnittpunkt H. Es sei K ein Punkt auf Γ, so dass K und A auf verschiedenen Seiten von BC liegen. Es sei L die Spiegelung von K an der Seite AB, und es sei M die Spiegelung von K an der Seite BC. Es sei E der zweite Schnittpunkt von Γ mit dem Umkreis des Dreiecks BLM. Man beweise, dass die Geraden KH, EM und BC sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 8. Ein *Wort* ist eine endliche Folge von Buchstaben aus einem Alphabet. Ein Wort ist *repetitiv*, wenn es die Aneinanderreihung mindestens zweier identischer Unterwörter ist. (So sind zum Beispiel *ababab* und *abcabc* repetitiv, aber *ababa* und *aabb* sind nicht repetitiv.) Man beweise dass, wenn ein Wort die Eigenschaft hat, dass das Vertauschen egal welcher zweier benachbarter Buchstaben das Wort zu einem repetitiven Wort macht, dann alle Buchstaben des Wortes identisch sind. (Es ist erlaubt, identische benachbarte Buchstaben zu vertauschen, so dass das Wort nicht verändert wird.)

Language: **German**

Day: **1**

EGMO 2013

European Girls' Mathematical Olympiad

Mittwoch, 10. April 2013

Aufgabe 1. Die Seite BC eines Dreiecks ABC wird über C hinaus bis zum Punkt D verlängert, so dass $CD = BC$ gilt. Die Seite CA wird über A hinaus bis zum Punkt E verlängert, so dass $AE = 2CA$ gilt.

Beweise, dass aus $AD = BE$ folgt, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Aufgabe 2. Bestimme alle ganzen Zahlen m, für die das $m \times m-$Quadrat in fünf Rechtecke zerteilt werden kann, deren Seitenlängen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 10$ in geeigneter Anordnung sind.

Aufgabe 3. Sei n eine positive ganze Zahl.

(a) Beweise, dass es eine $6n$-elementige Menge S paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen gibt, so dass das kleinste gemeinsame Vielfache beliebiger zwei Elemente jeweils nicht grösser als $32n^2$ ist.

(b) Beweise, dass jede $6n$-elementige Menge T paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen zwei Elemente enthält, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches grösser als $9n^2$ ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten

Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden

Language: **German**

Day: **2**

EGMO 2013

European Girls' Mathematical Olympiad

Donnerstag, 11. April 2013

Aufgabe 4. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen a und b, für die es drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen gibt, an denen das Polynom

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

ganzzahlige Werte annimmt.

Aufgabe 5. Sei Ω der Umkreis eines Dreiecks ABC. Der Kreis ω berührt die Seiten AC und BC und den Kreis Ω von innen im Punkt P. Eine Gerade, die parallel zu AB ist und das Innere des Dreiecks ABC schneidet, berührt ω im Punkt Q.

Beweise, dass $\angle ACP = \angle QCB$ gilt.

Aufgabe 6. Schneewittchen und die sieben Zwerge leben glücklich in ihrem Haus im Wald. An jedem von 16 aufeinanderfolgenden Tagen entschied sich jeder Zwerg dazu, entweder Beeren zu sammeln oder in die Diamantenmine zu gehen. An je zwei verschiedenen, nicht unbedingt aufeinanderfolgenden Tagen haben mindestens drei Zwerge jeweils beide Arbeiten verrichtet. Am ersten Tag haben alle sieben Zwerge in der Mine gearbeitet.

Beweise, dass an einem dieser 16 Tage alle Zwerge Beeren gesammelt haben.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden

Samstag, 12. April 2014

Aufgabe 1. Bestimme alle konstanten reellen Zahlen t, sodass für jedes Tripel a, b, c, welches die Seitenlängen eines Dreiecks bildet, auch das Tripel $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ die Seitenlängen eines Dreiecks bildet.

Aufgabe 2. Sei ABC ein Dreieck mit Punkten D und E im Innern der Seiten AB respektive AC, sodass $DB = BC = CE$ gilt. Sei F der Schnittpunkt der Geraden CD and BE. Sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks DEF und M der Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens BC auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, welcher A enthält. Zeige, dass I, H und M auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 3. Für eine positive ganze Zahl m bezeichne $d(m)$ die Anzahl positiver Teiler von m und $\omega(m)$ die Anzahl unterschiedlicher Primfaktoren von m. Sei k eine positive ganze Zahl. Zeige, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt, sodass (i) $\omega(n) = k$ und (ii) für jedes Paar positiver ganzer Zahlen a, b mit $a + b = n$ gilt: $d(n)$ ist kein Teiler von $d(a^2 + b^2)$.

Dauer: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

EGMO | 2014
European Girls' Mathematical Olympiad
Antalya · Turkey

Sonntag, 13. April 2014

Aufgabe 4. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 2$, für welche eine Folge ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ existiert, welche die folgende Bedingung erfüllt: Für alle ganzen Zahlen $i \neq j$ mit $0 < i < n, 0 < j < n$, für welche n ein Teiler von $2i + j$ ist, gilt $x_i < x_j$.

Aufgabe 5. Sei n eine positive ganze Zahl. Es gibt n Schachteln, welche je eine nicht-negative Anzahl Kieselsteine enthalten. In einem Zug dürfen wir folgendes tun: Wir wählen eine der Schachteln aus und entnehmen ihr zwei Kieselsteine, werfen einen davon weg und legen den anderen Kieselstein in eine beliebige andere Schachtel. Eine Ausgangsverteilung von Kieselsteinen nennen wir *lösbar*, falls es möglich ist, in endlich vielen (möglicherweise keinen) Zügen eine Verteilung zu erreichen, in welcher keine Schachtel leer ist. Bestimme alle möglichen Ausgangsverteilungen von Kieselsteinen, welche nicht lösbar sind, aber bei Hinzufügen eines einzelnen Kieselsteines lösbar werden, unabhängig davon in welche Schachtel er gelegt wird.

Aufgabe 6. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x, y die folgende Gleichung gilt:

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

.

Dauer: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

Donnerstag, 16. April 2015

Aufgabe 1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und D der Höhenfusspunkt der Höhe durch C. Sei E der Schnittpunkt der Geraden CD mit der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$. Diese Winkelhalbierende schneide den Umkreis ω des Dreiecks ADE in einem weiteren Punkt F.
Zeige: Falls $\angle ADF = 45°$, so ist die Gerade CF eine Tangente von ω.

Aufgabe 2. Ein *Domino* ist ein 2×1 oder ein 1×2 Stein. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau n^2 Dominos überlappungsfrei auf einem $2n \times 2n$ Schachbrett anzuordnen, sodass gilt: Jedes 2×2 Quadrat besitzt mindestens zwei unbedeckte Einheitsquadrate, welche in der gleichen Spalte oder Reihe liegen.

Aufgabe 3. Seien n, m ganze Zahlen grösser als 1 und seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ positive ganze Zahlen kleiner gleich n^m. Zeige, dass es positive ganze Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ kleiner gleich n gibt, sodass

$$\mathrm{ggT}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

wobei $\mathrm{ggT}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ den grössten gemeinsamen Teiler von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bezeichnet.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Freitag, 17. April 2015

Aufgabe 4. Bestimme, ob es eine unendlich lange Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiver ganzer Zahlen gibt, welche für jede positive ganze Zahl n die Gleichung

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

erfüllt.

Aufgabe 5. Seien m, n positive ganze Zahlen mit $m > 1$. Anastasia teilt die Zahlen $1, 2, \ldots, 2m$ in m Paare auf. Boris wählt dann aus jedem Paar eine Zahl und berechnet die Summe der gewählten Zahlen. Zeige: Anastasia kann die Paare so auswählen, dass Boris keine Summe bilden kann, welche den Wert n hat.

Aufgabe 6. Sei H der Höhenschnittpunkt und G der Schwerpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB \neq AC$. Die Gerade AG schneide den Umkreis des Dreiecks ABC in A und P. Sei P' die Spiegelung von P an der Geraden BC. Zeige, dass $\angle CAB = 60°$ genau dann wenn $HG = GP'$.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 12. April 2016

Aufgabe 1. Sei n eine ungerade natürliche Zahl, und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

wobei $x_{n+1} = x_1$.

Aufgabe 2. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und sei X der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Seien C_1, D_1 und M die Mittelpunkte der Strecken CX, DX respektive CD. Sei Y der Schnittpunkt der Geraden AD_1 und BC_1. Die Gerade MY schneide die Diagonalen AC und BD in zwei verschiedenen Punkten E respektive F. Zeige, dass die Gerade XY eine Tangente des Umkreises des Dreicks EFX ist.

Aufgabe 3. Sei m eine natürliche Zahl. Betrachte ein $4m \times 4m$ Spielbrett, dessen Felder Einheitsquadrate sind. Zwei verschiedene Felder sind *befreundet*, wenn sie entweder in derselben Zeile oder in derselben Spalte sind. Kein Feld ist mit sich selbst befreundet. Einige Felder sind blau angemalt, sodass jedes Feld mit mindestens zwei blauen Feldern befreundet ist. Bestimme die Mindestanzahl blauer Felder.
(*Ein Einheitsquadrat ist ein* 1×1 *Quadrat.*)

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Mittwoch, 13. April 2016

Aufgabe 4. Seien ω_1 und ω_2 zwei Kreise mit gleichem Radius, die sich in zwei verschiedenen Punkten X_1 und X_2 schneiden. Sei ω ein Kreis, der ω_1 von aussen im Punkt T_1 berührt und ω_2 von innen im Punkt T_2 berührt. Zeige, dass sich die Geraden X_1T_1 und X_2T_2 auf ω schneiden.

Aufgabe 5. Seien k und n natürliche Zahlen mit $k \geq 2$ und $k \leq n \leq 2k-1$. Lege einen $1 \times k$ oder $k \times 1$ Stein auf ein $n \times n$ Spielbrett, sodass dieser Stein genau k Einheitsquadrate bedeckt. Wiederhole dies, sodass keine Überlappungen entstehen, und bis keine weiteren Steine hinzugefügt werden können. Bestimme für jedes solche Paar (k, n) die Mindestanzahl von Steinen, die am Ende auf dem Spielbrett liegen.

Aufgabe 6. Sei S die Menge aller natürlicher Zahlen n, für welche n^4 einen Teiler in der Menge $\{n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n\}$ hat. Zeige, dass S von jeder der Formen $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ jeweils unendlich viele Elemente enthält, aber keine Elemente der Form $7m+3$ oder $7m+4$, wobei m eine ganze Zahl ist.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Samstag, 8. April 2017

Aufgabe 1. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ und $\angle ABC > \angle CDA$. Weiter seien Q respektive R Punkte auf den Strecken BC respektive CD, sodass die Gerade QR die Geraden AB respektive AD in den Punkten P respektive S schneidet. Zusätzlich soll $PQ = RS$ gelten. Sei M der Mittelpunkt der Strecke BD und N der Mittelpunkt der Strecke QR. Zeige, dass die Punkte M, N, A und C auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 2. Finde die kleinste positive ganze Zahl k für welche eine Färbung der positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{>0}$ mit k Farben und eine Funktion $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ mit den folgenden zwei Eigenschaften existieren:

(i) Für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit der gleichen Farbe gilt $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Es existieren positive ganze Zahlen m, n, sodass $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

In einer Färbung von $\mathbb{Z}_{>0}$ mit k Farben ist jede ganze Zahl mit genau einer der k Farben gefärbt. In (i) und (ii) sind die positiven ganzen Zahlen m, n nicht notwendigerweise verschieden.

Aufgabe 3. Es seien 2017 Geraden in der Ebene, sodass sich keine drei Geraden in einem Punkt schneiden. Die Schnecke Turbo sitzt auf einem Punkt, welcher auf genau einer der Geraden liegt, und beginnt auf folgende Art und Weise den Geraden entlang zu kriechen: sie bewegt sich entlang einer Geraden bis sie einen Schnittpunkt zweier Geraden erreicht. Bei diesem Schnittpunkt setzt sie ihre Reise auf der anderen Geraden fort und kriecht abwechslungsweise nach links oder nach rechts; sie wechselt also bei jedem Schnittpunkt ihre Richtungswahl. Sie kann die Richtung nur an Schnittpunkten wechseln. Kann es eine Strecke geben, entlang welcher sie während ihrer Reise in beiden Richtungen kriecht?

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Sonntag, 9. April 2017

Aufgabe 4. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und seien $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ positive ganze Zahlen. In einer Gruppe von $t_n + 1$ Personen werden einige Schachpartien gespielt. Zwei Personen können höchstens einmal gegeneinander spielen. Zeige, dass die folgenden zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein können:

(i) Für jede Person ist die Anzahl der von ihr gespielten Partien eine der Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gibt es eine Person, die genau t_i Schachpartien gespielt hat.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Ein n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nicht notwendigerweise verschiedener positiver ganzer Zahlen ist *teuer* falls eine positive ganze Zahl k existiert, sodass

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Finde alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ für welche ein teures n-Tupel existiert.

b) Zeige, dass für jede positive ungerade Zahl m eine ganze Zahl $n \geq 2$ existiert, sodass m in einem teuren n-Tupel vorkommt.

Das Produkt auf der linken Seite hat genau n Faktoren.

Aufgabe 6. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit paarweise verschieden langen Seiten. Die Spiegelungen des Schwerpunkts G respektive des Umkreismittelpunkts O des Dreiecks ABC an den Seiten BC, CA, AB seien G_1, G_2, G_3 respektive O_1, O_2, O_3. Zeige, dass die Umkreise der Dreiecke G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A und ABC einen gemeinsamen Punkt haben.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der drei Schwerelinien. Eine Schwerelinie ist eine Gerade, welche durch einen Eckpunkt des Dreiecks und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

EGMO 2018

Florence | April 9th-15th

Mittwoch, 11. April 2018

Aufgabe 1. Sei ABC ein Dreieck mit $CA = CB$ und $\measuredangle ACB = 120°$, und sei M der Mittelpunkt von AB. Sei P ein variabler Punkt auf dem Umkreis von ABC, und sei Q derjenige Punkt auf der Strecke CP, für den $QP = 2QC$ gilt. Die Senkrechte auf AB durch P schneide die Gerade MQ in einem eindeutigen Punkt N.

Zeige, dass ein fester Kreis existiert, sodass N für alle möglichen Positionen von P auf diesem Kreis liegt.

Aufgabe 2. Betrachte die Menge

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \;\middle|\; k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Zeige, dass jede natürliche Zahl $x \geq 2$ als Produkt von einem oder mehreren Elementen aus A, die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen, geschrieben werden kann.

(b) Für jede natürliche Zahl $x \geq 2$ bezeichne $f(x)$ die kleinste natürliche Zahl, sodass x als Produkt von $f(x)$ Elementen aus A, die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen, geschrieben werden kann.

Zeige, dass unendlich viele verschiedene Paare natürlicher Zahlen (x, y) mit $x \geq 2$, $y \geq 2$ und

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

existieren.

(Zwei Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind verschieden, wenn $x_1 \neq x_2$ oder $y_1 \neq y_2$.)

Aufgabe 3. Die n Teilnehmerinnen einer EGMO heißen (heissen) $C_1, \ldots, C_n$. Nach dem Wettbewerb stellen sie sich nach den folgenden Regeln vor dem Restaurant in einer Schlange an:

- Die Jury bestimmt die anfängliche Reihenfolge der Teilnehmerinnen in der Schlange.
- Jede Minute wählt die Jury eine natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq n$.
  - Falls Teilnehmerin C_i mindestens i andere Teilnehmerinnen vor sich hat, zahlt sie einen Euro an die Jury und bewegt sich in der Schlange um genau i Plätze nach vorne.
  - Falls dagegen Teilnehmerin C_i weniger als i andere Teilnehmerinnen vor sich hat, öffnet das Restaurant und der Prozess endet.

(a) Zeige, dass der Prozess nicht unendlich lange dauern kann, unabhängig von den Entscheidungen der Jury.

(b) Bestimme für jedes n die maximale Anzahl Euros, die die Jury durch geschicktes Wählen der anfänglichen Reihenfolge und der Abfolge der Zahlen kassieren kann.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

EGMO 2018

Florence | April 9th-15th

Donnerstag, 12. April 2018

Aufgabe 4. Ein *Domino* ist ein 1×2 oder 2×1 Stein.

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dominos werden auf einem $n \times n$ Brett so platziert, dass jeder Domino genau zwei Felder des Brettes überdeckt, und Dominos sich nicht überlappen.

Der *Wert* einer Zeile oder Spalte ist die Anzahl der Dominos, die mindestens ein Feld dieser Zeile oder Spalte überdecken. Eine Anordnung heißt (heisst) *ausbalanciert*, wenn ein $k \geq 1$ existiert, sodass jede Zeile und jede Spalte den Wert k hat.

Zeige, dass für jedes $n \geq 3$ eine ausbalancierte Anordnung existiert, und bestimme die kleinstmögliche Anzahl Dominos, die für eine solche Anordnung benötigt wird.

Aufgabe 5. Sei Γ der Umkreis des Dreiecks ABC. Ein Kreis Ω berühre die Strecke AB und berühre Γ in einem Punkt, der auf derselben Seite der Geraden AB wie C liege. Die Winkelhalbierende (Winkelsymmetrale) von $\measuredangle BCA$ schneide Ω in zwei verschiedenen Punkten P und Q.

Zeige, dass $\measuredangle ABP = \measuredangle QBC$.

Aufgabe 6.

(a) Zeige, dass für jede reelle Zahl t mit $0 < t < \frac{1}{2}$ eine positive ganze Zahl n mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für jede Menge S von n positiven ganzen Zahlen existieren zwei verschiedene Elemente x und y in S, und eine *nicht-negative* ganze Zahl m (d.h. $m \geq 0$), sodass

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bestimme, ob für jede reelle Zahl t mit $0 < t < \frac{1}{2}$ eine unendliche Menge S von positiven ganzen Zahlen existiert, sodass

$$|x - my| > ty$$

für jedes Paar verschiedener Elemente x und y in S und jede *positive* ganze Zahl m (d.h. $m > 0$) gilt.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

European
Girls'
Mathematical
Olympiad
Kyiv, Ukraine 2019

Language: **German**

Day: **1**

Dienstag, 9. April 2019

Aufgabe 1. Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, sodass $ab + bc + ca = 1$ und

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei n eine positive ganze Zahl. Auf einem $2n \times 2n$ Brett werden Dominos platziert. Dabei ist jedes Feld des Brettes zu genau einem Feld benachbart, welches durch ein Domino überdeckt ist. Bestimme für jedes n die größtmögliche (grösstmögliche) Anzahl Dominos, welche auf diese Weise platziert werden können.

(Ein *Domino* ist ein 2×1 oder 1×2 Stein. Die Dominos werden überlappungsfrei so auf dem Brett platziert, dass jedes Domino genau zwei Felder des Brettes überdeckt. Zwei Felder sind *benachbart*, wenn sie verschieden sind und eine gemeinsame Seite haben.)

Aufgabe 3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB > \angle ABC$ und Inkreismittelpunkt I. Sei D der Punkt auf der Strecke BC mit $\angle CAD = \angle ABC$. Sei ω der Kreis, welcher durch I verläuft und die Gerade AC in A berührt. Sei X der zweite Schnittpunkt von ω mit dem Umkreis von ABC. Zeige, dass sich die Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) von $\angle DAB$ und $\angle CXB$ auf der Geraden BC schneiden.

Language: Deutsch

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Mittwoch, 10. April 2019

Aufgabe 4. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Kreis, welcher durch B verläuft und die Gerade AI in I berührt, schneidet AB erneut in P. Der Kreis, welcher durch C verläuft und die Gerade AI in I berührt, schneidet AC erneut in Q. Zeige, dass PQ eine Tangente des Inkreises von ABC ist.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl, und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive ganze Zahlen. Zeige, dass positive ganze Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ existieren, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(A) $a_i \leq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) die Reste von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bei Division durch n sind paarweise verschieden; und

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte (grösste) ganze Zahl, welche kleinergleich x ist.)

Aufgabe 6. In einen Kreis zeichnet Alina 2019 Sehnen ein, deren Endpunkte alle unterschiedlich sind. Ein Punkt heißt (heisst) *markiert*, wenn er entweder

(i) einer der 4038 Endpunkte einer Sehne ist; oder

(ii) ein Schnittpunkt von mindestens zwei Sehnen ist.

Alina beschriftet jeden markierten Punkt wie folgt: Von den 4038 Punkten, welche Bedingung (i) erfüllen, beschriftet Alina 2019 Punkte mit einer 0 und die anderen 2019 Punkte mit einer 1. Jeden Punkt, welcher Bedingung (ii) erfüllt, beschriftet sie mit einer beliebigen ganzen Zahl (nicht notwendigerweise positiv).

Auf jeder Sehne betrachtet Alina die Streckenabschnitte, welche zwei aufeinanderfolgende markierte Punkte verbinden. (Eine Sehne mit k markierten Punkten hat $k-1$ solche Streckenabschnitte.) Alina beschriftet jeden solchen Streckenabschnitt in gelb mit der Summe der Beschriftungen seiner zwei Endpunkte und in blau mit dem Betrag ihrer Differenz.

Alina stellt fest, dass die $N+1$ gelben Beschriftungen jeden der Werte $0, 1, \ldots, N$ genau einmal annehmen. Zeige, dass mindestens eine der blauen Beschriftungen ein Vielfaches von 3 ist.

(Eine *Sehne* ist eine Strecke, welche zwei verschiedene Punkte eines Kreises verbindet.)

Language: **German**

Day: **1**

April 2020

Aufgabe 1. Die positiven ganzen Zahlen a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} erfüllen

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{für } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 3028.$$

Beweise, dass mindestens eine der Zahlen a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} durch 2^{2020} teilbar ist.

Aufgabe 2. Bestimme alle Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nicht-negativer reeller Zahlen, für die folgende drei Bedingungen alle erfüllt sind:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) es existiert eine Permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ von $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, für die

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

gilt.

Eine Permutation eines Tupels ist ein Tupel derselben Länge mit denselben Einträgen, wobei die Einträge in beliebiger Reihenfolge vorkommen dürfen. Zum Beispiel ist $(2, 1, 2)$ *eine Permutation von* $(1, 2, 2)$*, und beide sind Permutationen von* $(2, 2, 1)$*. Beachte, dass jedes Tupel eine Permutation von sich selbst ist.*

Aufgabe 3. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, sodass $\measuredangle A = \measuredangle C = \measuredangle E$ und $\measuredangle B = \measuredangle D = \measuredangle F$ gelten und die (inneren) Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) der Winkel $\measuredangle A$, $\measuredangle C$ und $\measuredangle E$ sich in einem Punkt schneiden.

Zeige, dass die (inneren) Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) der Winkel $\measuredangle B$, $\measuredangle D$ und $\measuredangle F$ sich ebenfalls in einem Punkt schneiden.

Hinweis: Wir schreiben $\measuredangle A = \measuredangle FAB$*. Die anderen Winkel des Sechsecks sind analog bezeichnet.*

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Um allen Teilnehmerinnen einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb zu ermöglichen, bitten wir alle, die Aufgaben bis Samstag, 18. April 2020, 23:59 keinesfalls im Internet oder in öffentlichen sozialen Medien weiterzuleiten oder zu besprechen.

EGMO VIRTUAL Netherlands | 2020
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **German**

Day: **2**

April 2020

Aufgabe 4. Eine Permutation der Zahlen 1, 2, $\ldots$, m wird als *frisch* bezeichnet, falls es keine positive ganze Zahl $k < m$ gibt, sodass die ersten k Zahlen dieser Permutation 1, 2, $\ldots$, k in einer beliebigen Reihenfolge sind. Sei f_m die Anzahl von frischen Permutationen der Zahlen 1, 2, $\ldots$, m.

Beweise, dass $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ für alle $n \geq 3$.

Zum Beispiel ist für $m = 4$ die Permutation $(3, 1, 4, 2)$ frisch, wogegen die Permutation $(2, 3, 1, 4)$ nicht frisch ist.

Aufgabe 5. Sei ABC ein Dreieck mit $\measuredangle BCA > 90°$, und sei Γ der Umkreis des Dreiecks ABC mit Radius R. Es gebe einen Punkt P im Inneren der Strecke AB, sodass $PB = PC$ gilt und die Strecke PA die Länge R hat. Die Mittelsenkrechte (Streckensymmetrale) der Strecke PB schneide Γ in den Punkten D und E.

Beweise, dass P der Inkreismittelpunkt des Dreiecks CDE ist.

Aufgabe 6. Sei $m > 1$ eine ganze Zahl. Eine Folge a_1, a_2, a_3, $\ldots$ ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, und

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$$

für alle $n \geq 4$.

Bestimme alle ganzen Zahlen m, für die jedes Folgenglied eine Quadratzahl ist.

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Um allen Teilnehmerinnen einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb zu ermöglichen, bitten wir alle, die Aufgaben bis Samstag, 18. April 2020, 23:59 keinesfalls im Internet oder in öffentlichen sozialen Medien weiterzuleiten oder zu besprechen.

EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Sonntag, 11. April 2021

Aufgabe 1. Die Zahl 2021 ist *fabelhaft*. Wenn für eine positive Zahl m mindestens ein Element der Menge $\{m, 2m+1, 3m\}$ fabelhaft ist, dann sind sie alle fabelhaft. Folgt daraus, dass die Zahl 2021^{2021} fabelhaft ist?

Aufgabe 2. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, sodass die Gleichung

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

für alle rationalen Zahlen x und y erfüllt ist.

$\mathbb{Q}$ *bezeichnet hier die Menge der rationalen Zahlen.*

Aufgabe 3. Sei ABC ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel bei A. Seien E bzw. F die Schnittpunkte der Außenwinkelhalbierende (Außenwinkelsymmetrale/Aussenwinkelhalbiernde) des Winkels bei A mit den Höhen von ABC durch B bzw. C. Seien M bzw. N diejenigen Punkte auf den Strecken EC bzw. FB, sodass $\angle EMA = \angle BCA$ und $\angle ANF = \angle ABC$. Beweise, dass die Punkte E, F, N, M auf einem Kreis liegen.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Um einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb für alle zu gewährleisten, dürfen diese Aufgaben nicht vor Dienstag, 13. April 14:00 mitteleuropäischer Sommerzeit im Internet oder in sozialen Netzwerken erwähnt oder diskutiert werden.

EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: **German**

Day: **2**

Montag, 12. April 2021

Aufgabe 4. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und sei D ein beliebiger Punkt auf der Seite BC. Die Senkrechte auf BI durch D schneide CI in E. Die Senkrechte auf CI durch D schneide BI in F. Zeige, dass die Spiegelung von A an der Geraden EF auf der Geraden BC liegt.

Aufgabe 5. Eine Ebene hat einen speziellen Punkt O namens Ursprung. Sei P eine Menge von 2021 Punkten in der Ebene, so dass

(i) keine drei Punkte aus P auf einer Geraden liegen und

(ii) keine zwei Punkte aus P auf einer Geraden durch den Ursprung liegen.

Ein Dreieck mit Ecken in P heiße (heisse) *fett*, falls O innerhalb des Dreiecks liegt. Bestimme die maximale Anzahl fetter Dreiecke.

Aufgabe 6. Existiert eine nicht-negative ganze Zahl a, für welche die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

mehr als eine Million verschiedene Lösungen (m, n) mit positiven ganzen Zahlen m und n hat?

Der Ausdruck $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte (grösste) ganze Zahl, welche nicht größer (grösser) als die reelle Zahl x ist. Das heißt (heisst) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ and $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Um einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb für alle zu gewährleisten, dürfen diese Aufgaben nicht vor Dienstag, 13. April 14:00 mitteleuropäischer Sommerzeit im Internet oder in sozialen Netzwerken erwähnt oder diskutiert werden.

Language: **German**

Day: **1**

Freitag, 8. April 2022

Aufgabe 1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, sodass $BC < AB$ und $BC < CA$. Sei P ein Punkt auf der Strecke AB und Q ein Punkt auf der Strecke AC, sodass $P \neq B$, $Q \neq C$ und $BQ = BC = CP$. Sei T der Umkreismittelpunkt des Dreiecks APQ, H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, und S der Schnittpunkt der Geraden BQ und CP. Zeige, dass T, H und S auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle positiven ganzen Zahlen a und b die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, und

(2) mindestens zwei der Zahlen $f(a)$, $f(b)$ und $f(a+b)$ sind gleich.

Aufgabe 3. Eine unendliche Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ positiver ganzer Zahlen heißt (heisst) *gut*, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) a_1 ist eine Quadratzahl, und

(2) für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ ist a_n die kleinste positive ganze Zahl, sodass

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

eine Quadratzahl ist.

Zeige, dass für alle guten Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ eine positive ganze Zahl k existiert, sodass $a_n = a_k$ für alle ganzen Zahlen $n \geq k$.

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Um einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb für alle zu gewährleisten, dürfen diese Aufgaben nicht vor Sonntag, 10. April 0:00 Uhr mitteleuropäischer Sommerzeit im Internet oder in sozialen Netzwerken erwähnt oder diskutiert werden.

Language: **German**

Day: **2**

Samstag, 9. April 2022

Aufgabe 4. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Bestimme die größte (grösste) positive ganze Zahl N, für die $N + 1$ reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_N$ existieren, sodass

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, und

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ für $1 \leq k \leq N - 1$.

Aufgabe 5. Für alle positiven ganzen Zahlen n und k sei $f(n, 2k)$ die Anzahl der Möglichkeiten, ein $n \times 2k$ Brett vollständig mit nk Dominosteinen der Größe (Grösse) 2×1 zu überdecken. (Zum Beispiel gilt $f(2, 2) = 2$ und $f(3, 2) = 3$.)
Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die für jede positive ganze Zahl k die Zahl $f(n, 2k)$ ungerade ist.

Aufgabe 6. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreismittelpunkt O. Sei X der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei A und B, Y der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei B und C, Z der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei C und D, und W der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei D und A. Sei außerdem (ausserdem) P der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Angenommen, die Punkte X, Y, Z, W, O und P sind paarweise verschieden.

Zeige, dass O, X, Y, Z und W genau dann auf einem Kreis liegen, wenn P, X, Y, Z und W auf einem Kreis liegen.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Um einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb für alle zu gewährleisten, dürfen diese Aufgaben nicht vor Sonntag, 10. April 0:00 Uhr mitteleuropäischer Sommerzeit im Internet oder in sozialen Netzwerken erwähnt oder diskutiert werden.

Language: **German**

Day: **1**

Samstag, 15. April 2023

Aufgabe 1. Sei $n \geq 3$ und seien $a_1, a_2 \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (wobei $a_0 = a_n$ und $a_{n+1} = a_1$). Man nehme an, für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, dass $a_i \leq a_j$ genau dann wenn $b_i \leq b_j$.

Zeige, dass $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Aufgabe 2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und D der Punkt auf seinem Umkreis, sodass AD ein Durchmesser ist. Seien K und L Punkte auf den Strecken AB bzw. AC, sodass DK und DL Tangenten des Umkreises von AKL sind.

Zeige, dass der Höhenschnittpunkt von ABC auf der Gerade KL liegt.

Aufgabe 3. Sei k eine positive ganze Zahl. Ein *Wort* ist eine Buchstabenfolge der Länge k, in der jeder Buchstabe entweder A oder B ist. Lexi hat ein Wörterbuch $\mathcal{D}$, in dem einige Wörter stehen. Sie möchte in jedes Feld eines $k \times k$ Gitters entweder den Buchstaben A oder den Buchstaben B schreiben, sodass in jeder Spalte von oben nach unten gelesen ein Wort aus $\mathcal{D}$ steht und in jeder Zeile von links nach rechts gelesen ein Wort aus $\mathcal{D}$ steht.

Was ist die kleinste ganze Zahl m, sodass wenn $\mathcal{D}$ mindestens m verschiedene Wörter enthält, Lexi das Gitter auf die beschriebene Weise füllen kann, unabhängig davon, welche Wörter in $\mathcal{D}$ sind?

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Die Aufgaben sind vertraulich zu behandeln bis Montag, den 17. April, 0:00 Uhr mitteleuropäischer Sommerzeit.

EGMO EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD 2023 SLOVENIA

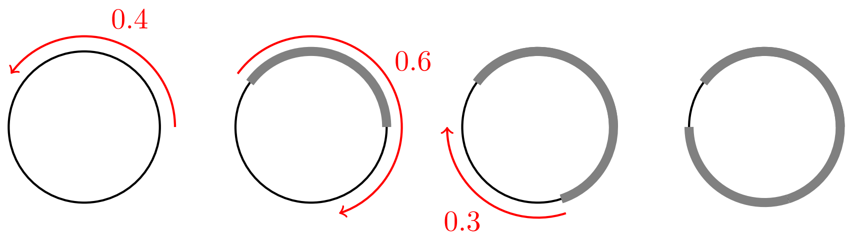
Language: **German**

Day: **2**

Sonntag, 16. April 2023

Aufgabe 4. Die Schnecke Turbo sitzt auf einem Punkt auf einem Kreis mit Umfang 1. Für eine unendliche Folge positiver reeller Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ kriecht Turbo nacheinender die Distanzen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ auf dem Kreis entlang, wobei er jedes Mal wählt, ob er im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn kriecht.

Wenn $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.6$, $c_3 = 0.3$, $\ldots$, fängt Turbo zum Beispiel folgendermassen an:
[deutsch: Wenn $c_1 = 0{,}4$; $c_2 = 0{,}6$; $c_3 = 0{,}3$; $\ldots$, fängt Turbo zum Beispiel folgendermaßen an:]



Bestimme die größte Konstante $C > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Folge von positiven reellen Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ mit $c_i < C$ für alle i kann Turbo (nachdem er sich die Folge angesehen hat) sicherstellen, dass es einen Punkt gibt, den er niemals erreicht und über den er niemals kriecht.

Aufgabe 5. Sei $s \geq 2$ eine positive ganze Zahl. Für jede positive ganze Zahl k sei der *Twist* k' wie folgt definiert: Schreibe k als $as + b$, wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen sind und $b < s$ ist. Dann ist der Twist $k' = bs + a$. Für eine positive ganze Zahl n, betrachte die Folge $d_1, d_2, \ldots$, wobei $d_1 = n$ ist und für alle positiven ganzen Zahlen i das Folgenglied d_{i+1} der Twist von d_i ist.

Zeige, dass 1 genau dann in der Folge enthalten ist, wenn der Rest von n bei Division durch $s^2 - 1$ entweder 1 oder s ist.

Aufgabe 6. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Ω. S_b and S_c seien die Mittelpunkte derjenigen Kreisbögen AC bzw. AB, die jeweils nicht den dritten Punkt enthalten. Sei N_a der Mittelpunkt des Kreisbogens BAC (der Kreisbogen BC, der A enthält). Sei I der Inkreismittelpunkt von Dreieck ABC. Sei ω_b der Kreis, der AB berührt und Ω von innen in Punkt S_b berührt, und sei ω_c der Kreis, der AC berührt und Ω von innen in Punkt S_c berührt. Zeige, dass sich Gerade IN_a und die Gerade durch die Schnittpunkte von ω_b und ω_c auf Ω schneiden.

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Die Aufgaben sind vertraulich zu behandeln bis Montag, den 17. April, 0:00 Uhr mitteleuropäischer Sommerzeit.

Samstag, 13. April 2024

Aufgabe 1. Zwei verschiedene ganze Zahlen u und v stehen an einer Tafel. Wir führen eine Reihe von Schritten durch. In jedem Schritt machen wir einen der folgenden beiden Züge:

(i) Wenn zwei verschiedene Zahlen a und b an der Tafel stehen, dann können wir die Zahl $a+b$ an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.

(ii) Wenn drei paarweise verschiedene Zahlen a, b und c an der Tafel stehen, und eine ganze Zahl x die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ erfüllt, dann können wir die Zahl x an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.

Bestimme alle Paare von Startzahlen (u, v), für die wir jede beliebige ganze Zahl nach einer endlichen Anzahl von Schritten irgendwann an die Tafel schreiben können.

Aufgabe 2. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Ω und Inkreismittelpunkt I, sodass $AC > AB$. Der Inkreis von ABC berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E und F. Sei X beziehungsweise Y ein Punkt auf dem kürzeren der beiden Bögen $\widehat{DF}$ beziehungsweise $\widehat{DE}$, sodass $\angle BXD = \angle DYC$. Die Gerade XY schneide die Gerade BC in K. Sei T der Punkt auf Ω, sodass KT den Kreis Ω berührt und T auf der selben Seite der Geraden BC liegt wie A. Zeige, dass sich die Geraden TD und AI auf Ω schneiden.

Aufgabe 3. Eine positive ganze Zahl n heiße (heisse) *eigenartig*, falls für jeden positiven Teiler d von n gilt, dass $d(d+1)$ ein Teiler von $n(n+1)$ ist. Zeige, dass für vier paarweise verschiedene eigenartige positive ganze Zahlen A, B, C und D gilt:

$$\operatorname{ggT}(A, B, C, D) = 1.$$

Anmerkung: $\operatorname{ggT}(A, B, C, D)$ *bezeichne die größte (grösste) positive ganze Zahl, die alle vier Zahlen* A, B, C *und* D *teilt.*

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Sonntag, 14. April 2024

Aufgabe 4. Für eine Folge $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ von ganzen Zahlen heiße (heisse) ein Paar (a_i, a_j) mit $1 \leq i < j \leq n$ *interessant*, falls es ein Paar (a_k, a_ℓ) mit $1 \leq k < \ell \leq n$ gibt, sodass

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Bestimme für jedes $n \geq 3$ die größtmögliche (grösstmögliche) Anzahl interessanter Paare in einer Folge der Länge n.

Aufgabe 5. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) x und $f(x)$ haben die gleiche Anzahl von positiven Teilern.

(ii) Falls y nicht durch x teilbar ist und x nicht durch y teilbar ist, dann gilt

$$\operatorname{ggT}(f(x), f(y)) > f(\operatorname{ggT}(x, y)).$$

Anmerkung: $\operatorname{ggT}(m, n)$ *bezeichne die größte (grösste) positive ganze Zahl, die m und n teilt.*

Aufgabe 6. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen d, für die es ein Polynom P von Grad d mit reellen Koeffizienten gibt, sodass unter $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ höchstens d verschiedene Werte sind.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert