Lösungsheft Mathematik zum Lehrbuch Klasse 10

Nur für Lehrer

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Loesungsh. Mathe 10
ISBN 3-06-002224-0

Lösungsheft

Mathematik

Zum Lehrbuch Mathematik, Klasse 10

(Titel-Nr. 00 10 04; Ausgabe 1988)

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1988

An der Ausarbeitung der Lösungen waren Udo Bellack, Dr. Renate Blachowiak, Walter Blaurock, Dr. Dieter Götze, Prof. Dr. Werner Jungk, Klaus Meier, Ingrid Schneider, Dr. Werner Stoye, Prof. Dr. Werner Walsch und Dr. Wilfried Zappe beteiligt.

Lösungsheft Mathematik: zum Lehrbuch Mathematik, Klasse 10, Ausg. 1988. Nur für Lehrer. - 1. Aufl. - Berlin: Volk u. Wissen, 1988. - 80 Seiten

ISBN 3-06-002224-0

1. Auflage

Lizenz-Nr. 203/1000/88 (E 00 22 24-1)
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Graphischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Redaktionsschluß: 15. Februar 1988
LSV 0645
Bestell-Nr. 709 388 1
00400

Vorbemerkungen

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Schüleraufträge und Aufgaben des Lehrbuches

Mathematik, Klasse 10 (Titel-Nr. 00 10 04 - Ausgabe 1988)

Dabei wurden Konstruktionsaufgaben nicht und Beweisaufgaben nicht in jedem Fall berücksichtigt. Bei Anwendungsaufgaben wurden Zwischenschritte und häufig auch wichtige Informationen aufgenommen. Es wurde jedoch aus Gründen der Platzersparnis nicht durchgängig auf das Formulieren von Antwortsätzen wert gelegt, obwohl man dies von den Schülern stets verlangen sollte.
Für Aufgaben, die eine größere Anzahl von Zahlen als Ergebnis zulassen, wurden häufig Lösungsvorschläge unterbreitet, die mit der Zeile eingeleitet werden: "Die folgenden Zahlen entsprechen der Aufgabenstellung." Auf diese Weise wird dem Lehrer die Möglichkeit gegeben, bei der Besprechung derartiger Aufgaben in der Klasse schnell auf einige Lösungen zurückgreifen zu können.

Nicht lösbare Aufgaben treten im Lehrbuch hin und wieder mit voller Absicht auf. Im Lösungsheft wurde in solchen Fällen eine diesbezügliche Erklärung abgegeben.

Mitunter treten im Lösungsheft auch Hinweise zum Einsatz des Schulrechners SR 1 auf. Bei Ablaufplänen wie auch bei der Angabe von Lösungen, die mit Hilfe des Taschenrechners ermittelt wurden und auf eine sinnvolle Anzahl von Stellen zu runden sind, wurde die jeweilige Rechneranzeige in eckigen Klammern angegeben. Auch die Rechneranzeige von Zwischenergebnissen, die für die Kontrolle des vom Schüler eingeschlagenen Rechenweges von Interesse sein könnte, wurde im Lösungsheft mitunter erfaßt. (Dabei sollte man bedenken, daß mitunter durch unterschiedliche Rechenwege wie auch durch Rundungen der Zwischenergebnisse bei der Rechneranzeige geringfügige Abweichungen auftreten können. Diese Unterschiede beeinflussen jedoch nicht das sinnvoll gerundete Endergebnis.)

Die Rundungen, die beim Auftreten von Meßwerten oder von Näherungen im Zusammenhang mit unendlichen Dezimalbrüchen vorgenommen wurden, basieren auf den Festlegungen im Aufgabentext oder auf den Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten, die auf der 2. Umschlagseite des Lehrbuchs Mathematik, Klasse 10, aufgeführt wurden.

Die Redaktion

Kapitel A: Winkelfunktionen

Lerneinheit A 1: Erweiterung des Winkelbegriffs

o 1 a)

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°
y	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5

α	240°	270°	300°	330°	360°
y	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

c) Die Lage der Punkte deutet den typischen Verlauf einer Wechselspannung gut an. Allerdings werden wichtige Merkmale einer Wechselspannung noch nicht erfaßt:
- die periodische Wiederholung des Spannungsverlaufs,
- die Einteilung der Abszissenachse durch reelle Zahlen (Zeitmessung),
- die Darstellung der Wechselspannung mit beliebig großen Maximalwerten der Spannung.

o 3 325° bzw. -35°

o 4 a) Z. B. 395°; $1\,835^\circ$; $2\,195^\circ$; -325° b) nein

2. -180°; -90°; 0°; 90°; 180°; 270°; 360°
Äquivalente Winkel sind: -180° und 180°, -90° und 270°, 0° und 360°.

3. a) -270°; $\underline{90^\circ}$; 450°; 810° b) -360°; 0°; 360°; $\underline{720^\circ}$; $1\,080^\circ$
c) $\underline{-180^\circ}$; 180°; 540°; 900° d) -260°; $\underline{100^\circ}$; 460°; 820°
e) -330°; $\underline{30^\circ}$; 390°; 750° f) -243°; $\underline{117^\circ}$; 477°; 837°

4. a) $-1\,030^\circ$; -670°; -310°; $\boxed{50^\circ}$; 410°; 770°; $1\,130^\circ$
b) -905°; -545°; -185°; $\boxed{175^\circ}$; 535°; 895°; $1\,255^\circ$
c) $-856{,}6^\circ$; $-496{,}6^\circ$; $-136{,}6^\circ$; $\boxed{223{,}4^\circ}$; $583{,}4^\circ$; $943{,}4^\circ$; $1\,303{,}4^\circ$
d) $-1\,113^\circ$; -753°; -393°; $\boxed{-33^\circ}$; 327°; 687°; $1\,047^\circ$

Lerneinheit A 2: Das Bogenmaß von Winkeln

o 5

30°	90°	360°	57°
$\frac{\pi}{6}$ cm $\approx 0{,}52$ cm	$\frac{\pi}{2}$ cm $\approx 1{,}57$ cm	2π cm $\approx 6{,}28$ cm	0,99 cm

o 6 b)

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	-90°	720°
arc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	4π

o 7 $\alpha = 57{,}29578^\circ \approx 57{,}30^\circ$

1. a) π b) $\frac{2}{3}\pi$ c) $-\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{5}{6}\pi$ e) $\frac{5}{3}\pi$ f) -4π g) 6π
2. a) 45° b) -60° c) 225° d) -180° e) 330° f) 540° g) 420°
3. Man kann die Konstantenautomatik des Taschenrechners folgendermaßen nutzen (für den Typ SR 1):
   Grad in Radiant

   $\boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ 180\ \boxed{=}\ \boxed{x{\to}M}\ \alpha_1\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}\ \boxed{=}\ \alpha_2\ \boxed{=}\ \ldots$

   Radiant in Grad

   $180\ \boxed{\div}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}\ \boxed{x{\to}M}\ \text{arc}\,\alpha_1\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}\ \boxed{=}\ \text{arc}\,\alpha_2\ \boxed{=}\ \ldots$

4. a) 0,76 b) 3,92 c) 0,24 d) 2,71 e) $-1{,}26$
   f) 7,54 g) $-8{,}73$ h) 0,0005
5. a) $215{,}7^\circ$ b) $84{,}2^\circ$ c) $-179{,}9^\circ$ d) $-114{,}6^\circ$ e) $28{,}6^\circ$
   f) $322{,}6^\circ$ g) $86{,}5^\circ$ h) $99{,}2^\circ$ i) $73{,}5^\circ$ k) $131{,}8^\circ$
6. Winkel heißen zueinander äquivalent, wenn sich ihre Winkelgrößen um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden.
7. a) $-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi$ b) $-\frac{5}{3}\pi$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7}{3}\pi$
   c) $-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$ d) -3π, $-\pi$, π, 3π
8. $-\pi$; $-\frac{5}{6}\pi$; $-\frac{2}{3}\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$;
   $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$; π; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$; 2π

Äquivalente Winkel: $-\pi$ und π ; $-\frac{5}{6}\pi$ und $\frac{7}{6}\pi$; $-\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$;
$-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{\pi}{3}$ und $\frac{5}{3}\pi$; $-\frac{\pi}{6}$ und $\frac{11}{6}\pi$; 0 und 2π

Lerneinheit A 3: Die Sinusfunktion

o 8 a) Nur im Falle der ersten Wertetabelle liegt eine eindeutige Zuordnung vor; es handelt sich um eine Funktion.

b) Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

Wertebereich: $-4 \leq y < \infty$; $y \in R$

monoton fallend für $x \leq 1$; monoton steigend für $x \geq 1$

o 9 Man erhält der Reihe nach die Werte 0; 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0.

o 10 a) 0,17 b) 0,5 c) $-0{,}77$ d) 0,5 e) $-0{,}87$ f) 0,17

o 11 a) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (↗ Bild A 10 im Lehrbuch)

P und P' liegen axialsymmetrisch zur u-Achse. Daraus folgt $\sphericalangle QOP' = \sphericalangle POQ = 30^\circ$.

Das Dreieck POP' erweist sich wegen $\overline{OP} = \overline{OP'} = 1$ als gleichschenklig. Wegen $\sphericalangle POP' = 60^\circ$ folgt für die Basiswinkel: $\sphericalangle OP'Q = \sphericalangle QPO = 60^\circ$. Das heißt aber: Das Dreieck POP' ist sogar gleichseitig.

Die Strecke $\overline{PP'}$ hat damit ebenfalls die Länge 1, und die Strecke $\overline{PQ}$ hat die Länge 0,5.

Damit gilt: $\sin 30^\circ = 0{,}5$, w.z.b.w.

b) $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (↗ Bild A 11 im Lehrbuch)

Das Dreieck OPR ist wegen $\overline{OP} = \overline{OR} = 1$ gleichschenklig.
Wegen $\sphericalangle POR = 60^\circ$ gilt auch
$\sphericalangle RPO = \sphericalangle ORP = 60^\circ$,
d. h., das Dreieck POR ist gleichseitig. Die Strecke $\overline{PQ}$ ist die Höhe in diesem gleichseitigen Dreieck. Für ihre Länge gilt:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \frac{1}{4}\,\overline{OR}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Damit gilt $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, w.z.b.w.

o 14 Der Wertevorrat der Sinusfunktion umfaßt nur das Intervall $-1 \leq y \leq 1$.

1. a) 0,98; 0,34; 0,5; 0,64; 0,77; 0,87; 0,94
   b) 0,5; 0,87; - 0,5; - 0,87; - 0,87; 0,87; 0,5
   c) 0; 0,5; - 0,34; 0,87; 0; 0,98; 0,82

2. a) 12° und 168° b) 24° und 156° c) 30° und 150°
   d) 224° und 316° e) 197° und 343° f) 210° und 330°
   g) keine Lösung h) keine Lösung

3. a) -360°; -180°; 0°; 180°; 360°; 540°; 720°; 900°; $1\,080^\circ$
   b) -270°; 90°; 450°; 810° c) -90°; 270°; 630°; 990°

5. a)* sin x ist definiert als die Ordinate v des zum Winkel x gehörenden Punktes P(u;v) auf dem Einheitskreis. Diese Ordinate v nimmt demzufolge nur Werte im Intervall
$-1 \leqq v \leqq 1$ an; es gilt also
$(*)\quad -1 \leqq \sin x \leqq 1.$
Die Ungleichung $|\sin x| \leqq 1$ ist nur eine andere Schreibweise für diesen Sachverhalt. Wegen der Definition des Betrages einer reellen Zahl nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:
<u>Fall 1: $\sin x \geqq 0$</u>. Dann ist $|\sin x| = \sin x$, und wegen (*) ist dann auch $|\sin x| \leqq 1$.
<u>Fall 2: $\sin x < 0$</u>. In diesem Fall ist
$(**)\quad |\sin x| = -\sin x.$
Aus (*) folgt
$\sin x \geqq -1 \quad | \cdot (-1)$
$-\sin x \leqq 1.$
Wegen (**) ist auch in diesem Falle $|\sin x| \leqq 1$.
Die Ungleichung $|\sin x| \leqq 1$ gilt also für alle reellen Zahlen x.

   b) Einander äquivalente Winkel unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von 360°, bei der Drehung des freien Schenkels des Winkels x um den Punkt O(0;0) erhalten wir dadurch stets die gleiche Endlage des Punktes P auf dem Einheitskreis. Demzufolge wird einander äquivalenten Winkeln stets die gleiche Ordinate zugeordnet, also haben sie gleiche Sinuswerte.

7. a) 0,4067 b) 0,5577 c) 0,8695 d) 0,00873
   e) 0,3074 f) 0,0889 g) 0,9107 h) 0,7096

8. a) $29,8^\circ$ b) $8,8^\circ$ c) $81,9^\circ$ d) $53,1^\circ$

9.

x	sin x		Fehler		
	Tafel	ETR (SR 1)	absolut	relativ	prozentual
14°	0,2419	0,2419219	-0,0000219	$9,05 \cdot 10^{-5}$	0,009 %
$0,1^\circ$	0,00175	0,0017453	$4,6716 \cdot 10^{-6}$	$2,68 \cdot 10^{-3}$	0,268 %
$77,2^\circ$	0,9751	0,97514	$-4,936 \cdot 10^{-5}$	$5,06 \cdot 10^{-5}$	0,005 %
$89,5^\circ$	1,000	0,9999619	$3,808 \cdot 10^{-5}$	$3,81 \cdot 10^{-5}$	0,004 %

10. a) 0,14112; (DEG) ändern in (RAD)
    b) 0,61566 c) 0,98702; Wurzeltaste nach der 3
    d) 0,38268; Gleichheitstaste vor Sinustaste e) 0,34202

11. a) 0,30 b) 0,66 c) 0,83 d) 0,90 e) 0,98 f) -0,89 g) -1,00

12. a) $19,88^\circ$ b) 0,49 rad c) n.l. ($\sin x \approx 1,8612$)
    d) $-45,23^\circ$ e) -0,80 rad f) n.l. ($-5,74^\circ$ liegt nicht im Intervall)

13.*a) $x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$ bzw. $x = 0 + k\pi \quad (k \in Z)$
    b) $x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ bzw. $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z)$
    c) $x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ bzw. $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z)$

Lerneinheit A 4: Graphische Darstellung und Eigenschaften der Sinusfunktion

o 15

x°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
x rad	0	0,26	0,52	0,79	1,05	1,31	1,57	1,83
sin x	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1	0,97

x°	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°
x rad	2,09	2,36	2,62	2,88	3,14	3,40	3,67	3,93	4,19
sin x	0,87	0,71	0,50	0,26	0	-0,26	-0,50	-0,71	-0,87

x°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
x rad	4,45	4,71	4,97	5,24	5,50	5,76	6,02	6,28
sin x	-0,97	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,50	-0,26	0

o 17 Zu begründen: "Einander äquivalenten Winkeln ist der gleiche Sinuswert zugeordnet: $\sin x = \sin (x + k \cdot 2\pi)$.

Einander äquivalente Winkel

- unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von 2π und
- ihnen wird bei der Anordnung im Bild A 8 des Lehrbuches (Definitionsfigur von "Sinus eines Winkels") die gleiche Ordinate zugeordnet.

Daraus folgt $\sin x = \sin (x + k \cdot 2\pi)$ mit $k \in Z$ und $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

o 18 a) $y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}70710$ b) $x = \frac{\pi}{2}$

o 20 Zentralsymmetrie bezüglich $P(\pi;\ 0)$

Axialsymmetrie im Intervall $\langle 0;\pi \rangle$ (bzw. im Intervall $\langle \pi;2\pi \rangle$) bezüglich der zur y-Achse parallelen Geraden durch den Punkt $(\frac{\pi}{2};0)$ (bzw. durch $(\frac{3}{2}\pi;0)$).

o 21

90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
90°	80° 1)	70° 2)	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°

1) mit SR 1: $80{,}000002^\circ$ 2) mit SR 1: $70{,}000001^\circ$

Vermutung: $\sin (180^\circ - x) = \sin x$

o 22 Zu zeigen (Bild 1):

(1) $\sin (180^\circ + x) = -\sin x$ für $0^\circ < x < 90^\circ$.

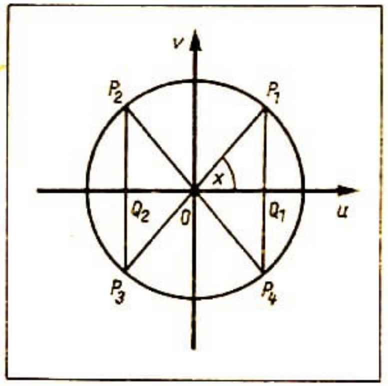

Bild 1

$\overline{OP_1} = \overline{OP_3}$		(Radien)
$\sphericalangle Q_1OP_1 = \sphericalangle Q_2OP_3$	$= x$	(Vorauss.)
$\sphericalangle OQ_1P_1 = \sphericalangle OQ_2P_3$	$= 90^\circ$	(Ordinate)

Daraus folgt:

$\triangle OQ_1P_1 \cong \triangle OQ_2P_3$ (sww)

Also ist auch $\overline{Q_1P_1} = \overline{Q_2P_3}$, und es gilt

$\sin (180^\circ + x) = -\sin x$, w.z.b.w.

Zu zeigen:

(2) $\sin (-x) = -\sin x$ für $0^\circ < x < 90^\circ$.

Der Beweis wird analog zum Beweis (1) geführt.

Man zeigt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle OQ_1P_1$ und $\triangle OQ_1P_4$; daraus folgt $\overline{Q_1P_1} = \overline{Q_1P_4}$.

Aus der Definition ▶ 2 folgt dann die Behauptung.

Zu zeigen:

(3) $\sin (-180^\circ - x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \sin (-180^\circ - x) &= \sin (-(180^\circ + x)) \\ &= -\sin (180^\circ + x) \quad &\text{(wegen (2))} \\ &= -(-\sin x) \quad &\text{(wegen (1))} \\ &= \sin x, \text{ w.z.b.w.} \end{aligned}$$

2. a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ g) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ h) $-\frac{1}{2}$

3. a) -210°; -330° b) -30°; -150° c) -225°; -315° d) -60°; -120°
e) -45°; -135° f) -240°; -300° g) 0°; -180°; -360° h) -270°

5. Nullstellen $x = k \cdot \pi$, $k \in Z$
größtmöglicher Wertebereich: $-1 \leqq y \leqq 1$, $y \in R$

7. a) $x_1 = 0{,}38$; $x_2 = 2{,}76$ b) nicht lösbar
c) keine Lösung im angegebenen Intervall
d) $x = \frac{\pi}{2}$ e) $x_1 = 0{,}37$; $x_2 = 2{,}77$
f) $x_1 = 0{,}85$ $x_2 = 2{,}29$

8. a) $x_1 = 43{,}6^\circ$; $x_2 = 136{,}4^\circ$ b) nicht lösbar
c) im angegebenen Intervall nicht lösbar
d) $x_1 = 11{,}7^\circ$; $x_2 = 168{,}3^\circ$ e) $x_1 = 16{,}1^\circ$; $x_2 = 163{,}9^\circ$

9. a) -150°, -30°, 210°, 330°, 570°, 690°
b) 33,8; 146,1; $393{,}6^\circ$; $506{,}5^\circ$

10.* a) $x_1 = 5{,}7^\circ$; $x_2 = 174{,}3^\circ$; $x_3 = 224{,}4^\circ$; $x_4 = 315{,}6^\circ$
b) $x_1 = -18{,}5^\circ$ ist aber keine Lösung im angegebenen Intervall; einzige Lösung ist $x_2 = 138{,}5^\circ$

12. a) Durch Anwenden der Beziehungen
$\sin(180^\circ - x) = \sin x$ und $\sin(180^\circ + x) = -\sin x$, ferner
$\sin(-x) = -\sin x$ sowie durch Ausnutzen der Periodizität der Sinusfunktion läßt sich der Sinuswert eines beliebigen Winkels zurückführen auf den Sinuswert eines Winkels im Intervall $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$.

b)

24°	72,5°	126°	201°	728°
0,4067	0,9537	0,8090	- 0,3584	0,1392

13. a) $x_1 = 40^\circ$; $x_2 = 140^\circ$

b) $x_1 = 36{,}9^\circ$

Umrechnung mit Hilfe der Gleichung $\operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$

$\operatorname{arc} 36{,}9^\circ = 36{,}9 \cdot 0{,}01745 \text{ rad} = 0{,}6439 \text{ rad}$

oder mit Hilfe der Tafel auf Seite 20 des Tafelwerks:

$\operatorname{arc} 36{,}9^\circ = 0{,}6283 \text{ rad} + 0{,}0157 \text{ rad} = 0{,}6440 \text{ rad}.$

$\boxed{x_1 \approx 0{,}64 \text{ rad}}$

$x_2 = 180^\circ - 36{,}9^\circ = 143{,}1^\circ$

Umrechnung mit Hilfe der Gleichung:

$\operatorname{arc} 143{,}1^\circ = 143{,}1 \cdot 0{,}01745 \text{ rad} = 2{,}4971 \text{ rad}$

oder mit Hilfe der Tafel

$\operatorname{arc} 143{,}1^\circ = 2{,}4435 \text{ rad} + 0{,}0524 \text{ rad} + 0{,}0018 \text{ rad}$
$= 2{,}4977 \text{ rad}$

$\boxed{x_2 \approx 2{,}50 \text{ rad}}$

c) $x_1 = 200{,}8^\circ$; $x_2 = 339{,}2^\circ$

Lerneinheit A 5: Die Funktion $y = a \cdot \sin x$ und $y = \sin(bx)$

o 24 a) Schrittweite 0,2 ‖ 0 ... 1,4

2 sin x	0; 0,40; 0,78; 1,13; 1,43; 1,68; 1,86; 1,97;
0,5 sin x	0; 0,10; 0,19; 0,28; 0,36; 0,42; 0,47; 0,49;
3,7 sin x	0; 0,74; 1,44; 2,09; 2,65; 3,11; 3,45; 3,65;

1,6 ... 3,0

2,00; 1,95; 1,82; 1,62; 1,35; 1,03; 0,67; 0,38;
0,50; 0,49; 0,45; 0,40; 0,34; 0,26; 0,17; 0,07;
3,70; 3,60; 3,36; 2,99; 2,50; 1,91; 1,24; 0,52;

3,2 ... 4,6

-0,12; -0,51; -0,89; -1,22; -1,51; -1,74; -1,90; -1,99
-0,03; -0,13; -0,22; -0,30; -0,38; -0,44; -0,48; -0,50
-0,22; -0,95; -1,64; -2,26; -2,80; -3,22; -3,52; -3,68

4,8 ... 6,2

-1,99; -1,92; -1,77; -1,55; -1,26; -0,93; -0,56; -0,17
-0,50; -0,48; -0,44; -0,39; -0,32; -0,23; -0,14; 0,04
-3,69; -3,55; -3,27; -2,86; -2,34; -1,72; -1,03; -0,31

c) Wertebereiche:
$-2 \leqq f_1(x) \leqq 2$; $-0{,}5 \leqq f_2(x) \leqq 0{,}5$; $-3{,}7 \leqq f_3(x) \leqq 3{,}7$
Nullstellen für alle 3 Funktionen: 0; π; 2π
Kleinste Periode für alle 3 Funktionen: 2π

o 25 a) Der Faktor a in $f(x) = a \cdot \sin x$ bewirkt eine Streckung (bzw. Stauchung) der Kurve in Richtung der y-Achse. Dadurch werden die Nullstellen nicht betroffen, was darüber hinaus auch keinen Einfluß auf die kleinste Periode der Funktion $y = a \cdot \sin x$ im Vergleich zu $y = \sin x$ hat.

o 27 a) $y = f_1(x) = \sin(2x)$; Schrittweite: 0,1
$y = f_2(x) = \sin(0{,}25x)$; Schrittweite: 0,8

f_1: 0 ... 0,6 und f_2: 0 ... 4,8
f(x) ‖ 0 0,20 0,39 0,56 0,72 0,84 0,93

f_1: 0,7 ... 1,4 und f_2: 5,6 ... 11,2
0,99 1,00 0,97 0,90 0,81 0,68 0,52 0,33

f_1: 1,5 ... 2,1 und f_2: 12,0 ... 16,8
0,14 -0,06 -0,26 -0,44 -0,61 -0,76 -0,87

f_1: 2,2 ... 2,8 und f_2: 17,6 ... 22,4
-0,95 -0,99 -1,00 -0,96 -0,88 -0,77 -0,63

f_1: 2,9 ... 3,2 und f_2: 23,2 ... 25,6
-0,46 -0,28 -0,08 0,12

c) Wertebereich für beide Funktionen: $-1 \leqq y \leqq 1$

Nullstellen von $f_1(x)$: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ und von $f_2(x)$: $0, 4\pi, 8\pi$

kleinste Periode von $f_1(x)$ ist π, von $f_2(x)$ ist 8π.

o 28 Es gilt:

$\sin(z + k \cdot 2\pi) = \sin z$ für $z \in R$ und $k \in Z$.

Für $z = bx$ ist

$\sin(bx + k \cdot 2\pi) = \sin(bx)$.

Durch Ausklammern folgt:

$\sin\left[b\left(x + \frac{k \cdot 2\pi}{b}\right)\right] = \sin(bx)$,

und weiterhin, daß $\frac{2\pi}{b}$ der kleinste positive Wert (also die kleinste Periode) ist, für den

$y = f(x) = \sin(bx)$

periodisch ist.

Es gilt $-1 \leqq y \leqq 1$ für alle reellen Zahlen $y = \sin z$, also auch für $z = bx$

1.	Wertebereich	Nullstellen	kleinste Periode
a)	$-4 \leqq y \leqq 4$	$\pm 2\pi$; $\pm\pi$; 0	2π
b)	$-1 \leqq y \leqq 1$	0; 3π; 6π	6π
c)	$-1 \leqq y \leqq 1$	0; 1; 2; ...; 6	2
d)	$-1{,}8 \leqq y \leqq 1{,}8$	-2π; $-\pi$; 0	2π
e)	$-1 \leqq y \leqq 1$	0; $1{,}25\pi$; $2{,}5\pi$	$2{,}5\pi$
f)	$-0{,}7 \leqq y \leqq 0{,}7$	0; π; 2π	2π

2. $y = f_1(x) = \frac{1}{2}\sin x$; $y = f_2(x) = 3\sin x$; $y = f_3(x) = -1{,}5\sin x$

3. $y = f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$; $y = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$

4.*	Wertebereich	Nullstellen	kleinste Periode
a)	$-3 \leqq y \leqq 3$	$k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$	π
b)	$-0{,}5 \leqq y \leqq 0{,}5$	$k \cdot 2\pi$, $k \in Z$	4π
c)	$-2 \leqq y \leqq 2$	$k \cdot \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$	$\frac{2}{3}\pi$

Lerneinheit A 6: Die Kosinusfunktion

o 29 Man erhält der Reihe nach die Werte:

$u = -1$ (0; 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1)

o 30 a) 0 b) -1 c) -1 d) 0 e) 0

o 31 a) 0,94 b) 0,94 c) 0,94 d) 0,77 e) 0,77 f) 0,77

o 32 Der Beweis für $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ kann (wie im Fall des Auftrags A 11 a, ↗ LB-Bild A 10) über den Nachweis der Kongruenz der im Bild A 20 a mit OPQ und OQR gekennzeichneten Dreiecke geführt werden ($\triangle OPQ \cong \triangle OQR$, denn $\overline{OQ} \cong \overline{OQ}$, $\sphericalangle OQP \cong \sphericalangle OQR = 90^\circ$, $\overline{OP} \cong \overline{OR} = 1$). Das Dreieck ORP ist gleichseitig; in ihm ist die Höhe $\overline{OQ} = u = \cos 30^\circ$.

Es gilt:

$\overline{OQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PQ}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(Während bei diesem Beweis davon ausgegangen wurde, daß $\overline{PQ} \cong \overline{QR} = \frac{1}{2}$ ist, kann der Beweis unter Nutzung von $\overline{PQ} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ auch abgekürzt werden.)

Der Beweis für $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (↗ Bild A 20 b) wird mit Hilfe des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks OQP geführt.

Es gilt:

$\overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{OP}^2$ und wegen $\overline{OQ} = \overline{PQ} = u$ und $\overline{OP} = 1$

$2u^2 = 1$

$u = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Der Beweis für $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (↗ Bild A 20 c) erfolgt über den Nachweis der Kongruenz der Dreiecke OQP und ORP. Q ist Fußpunkt der Höhe auf die Seite OR des gleichseitigen Dreiecks ORP. Es ist dann $\overline{OQ} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

o 33 $\cos 45^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 45^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 60^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

o 34 Es ist $(\sin k \cdot 90^\circ)^2 = \begin{cases} 0, \text{ wenn } k \text{ gerade ist} \\ 1, \text{ wenn } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$

andererseits

$$(\cos k \cdot 90^\circ)^2 = \begin{cases} 1, \text{ wenn } k \text{ gerade ist} \\ 0, \text{ wenn } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Also gilt $(\sin k\cdot 90^\circ)^2+(\cos k\cdot 90^\circ)^2 = 1$ für alle $k \in Z$.

1. a) 0,71 b) − 0,50 c) − 0,82 d) 0,87
e) 0,87 f) 0,50 g) 0,50 h) − 1,00

2. Folgende Winkel erfüllen die Aufgabenstellung:

$x_1 = 30^\circ$; $x_2 = 390^\circ$; $x_3 = -330^\circ$
$z_1 = 60^\circ$; $z_2 = 420^\circ$; $z_3 = -300^\circ$
$y_1 = 45^\circ$; $y_2 = 405^\circ$; $y_3 = -315^\circ$
$t_1 = 180^\circ$; $t_2 = 540^\circ$; $t_3 = 900^\circ$
$p_1 = 0^\circ$; $p_2 = 360^\circ$; $p_3 = 720^\circ$

3. Nein, die Funktion $y = \cos x$ hat den Wertebereich $-1 \leq y \leq 1$, denn die Abszisse im Einheitskreis und damit $\cos x$ nimmt bei $0^\circ + k \cdot 360^\circ$ den größtmöglichen Wert 1 an.

4. a) $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}\pi$ b) $x_1 = 0$; $x_2 = -2\pi$ c) $x = 540^\circ$

d) $x = 104{,}47751^\circ \approx 104{,}5^\circ$ e) Es existiert kein y.

5. Die Gleichungen a), b) und c) gelten für alle $x \in R$, denn sie gehen durch äquivalente Umformungen aus der Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $(x \in R)$ hervor.

6. a) $\cos x = \frac{1}{4}\sqrt{15} = 0{,}96824$ b) $\cos x = \sqrt{0{,}96} = 0{,}9797959$

b) $\sin x = \frac{1}{8}\sqrt{63} = 0{,}99215$ d) $\cos x = \frac{1}{4}\sqrt{7} = 0{,}66143$

e) $\cos x = \sqrt{0{,}91} = 0{,}9539392$ f) $\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{15} = 0{,}96824$

7. a) 0,956; 0,998; − 0,798; − 0,143; 0,174
b) 0,916; −0,227; 0,483; 0,965; −0,990
c) 0,309; −0,707; 0,588; − 0,161; 0,223
d) 0,408; 0,940; − 0,921; 0,584; 0,383

8. a) 0,999 847 7 b) 0,540 302 3

9. a) Umschalter steht falsch; richtig: DEG
b) Wurzeltaste zu spät gedrückt; richtig: vor der Betätigung der Kosinus-Taste
c) Umschalter steht falsch; richtig: RAD
d) Nach der Betätigung der Taste $\boxed{\pi}$ muß die Gleich-Taste gedrückt werden.

Lerneinheit A 7: Graphische Darstellung und Eigenschaften der Kosinusfunktion

o 38 a) Aus der Definition der Kosinusfunktion geht hervor, daß äquivalente Winkel den gleichen Kosinuswert besitzen. 2π ist daher die kleinste Periode, und es gilt $\cos(x + k\cdot 2\pi) = \cos x$.

b) Der Wertebereich wird durch die Kosinuswerte von beliebigen Winkeln gebildet. Der Kosinus eines Winkels wurde als Abszisse eines Punktes auf dem Einheitskreis definiert. Diese Abszissen liegen im Intervall −1 bis 1.

o 39 Die Vermutung wird durch den Vergleich entsprechender Werte bestätigt.

$$\cos 0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 0 = 0$$
$$\cos\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi\right) = \sin(-\pi) = 0$$
$$\cos 2\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1$$

o 40 Voraussetzungen: (1) $\sphericalangle OQ_1P_1 = \sphericalangle OQ_2P_2 = 90^\circ$,
(2) $\sphericalangle P_1OQ_1 = \sphericalangle OP_2Q_2$, (3) $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = 1$

Nach Definition gilt: $\overline{P_1Q_1} = \sin x$ und $\overline{OQ_2} = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Man weist die Kongruenz der Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2 mit Hilfe (wsw) nach und schließt weiter:

$\overline{P_1Q_1} = \overline{OQ_2}$, also $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

o 41 a) Nullstellen ergeben sich für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, d. h. für alle ungeradzahligen Vielfache von $\frac{\pi}{2}$: $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

b) Die Kosinusfunktion steigt monoton in den Intervallen $(2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi$. Sie fällt monoton in den Intervallen $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$ $(k \in Z)$.

o 42 Zum Winkel x gehört ein Punkt P_1 auf dem Einheitskreis um 0. Nach Definition ist $\overline{OQ} = u$, die Abszisse des Punktes P_1, der Kosinuswert des Winkels x.
Spiegelt man das Dreieck $\Delta\, OQP_1$ an der Abszissenachse, erhält man das Bilddreieck $\Delta\, OQP_2$. Zum Winkel $-x$ gehört der Punkt P_2. Nach Definition A 4 ist $\overline{OQ} = u = \cos(-x)$.

1. a) Nullstellen: $x_1 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi \approx 4{,}71$.

Monoton steigend in den Intervallen
$-1 \leqq x \leqq 0$ und $\pi \leqq x \leqq 5$.
Monoton fallend im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$.

b) Nullstellen: $x_1 = -90^\circ$; $x_2 = 90^\circ$; $x_3 = 270^\circ$; $x_4 = 450^\circ$.

Monoton steigend in den Intervallen $-90^\circ \leqq x \leqq 0^\circ$ und $180^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$.
Monoton fallend in den Intervallen $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ und $360^\circ \leqq x \leqq 450^\circ$.

2. a) $x_1 = 1{,}823\,476\,6 + k \cdot 2\pi$; $x_2 = 4{,}459\,708\,7 + k \cdot 2\pi$

b) keine Lösung

c) $x_1 = 0{,}749\,946 + k \cdot 2\pi$; $x_2 = 5{,}533\,716\,4 + k \cdot 2\pi$

d) keine Lösung

Die Lösungen werden in der Aufgabenstellung nicht verlangt; sie wurden hier nur angegeben, falls die Aufgaben später noch einmal gestellt werden sollten.

3. a) Fall 1: $\cos x = 0{,}7$

$x_1 = 0{,}795\,398\,8 + k \cdot 2\pi$

$x_2 = 5{,}487\,786\,5 + k \cdot 2\pi$

Fall 2: $\cos x = -0{,}7$

$x_3 = 2{,}346\,193\,8 + k \cdot 2\pi$

$x_4 = 3{,}936\,991\,5 + k \cdot 2\pi$

b) keine Lösung

c) $x_1 = 1{,}287\,002\,2 + k \cdot 4\pi$

$x_2 = 11{,}279\,368 + k \cdot 4\pi$

d) keine Lösung

Die Lösungen werden in der Aufgabenstellung nicht verlangt und können wegen der Form cos (bx) im Fall c auch nicht erwartet werden – es sei denn als Aufgabe mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad.

4. a) $x = 2k\pi$ $(k \in Z)$ b) $x = (2k+1)\pi$ $(k \in Z)$

c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

5. Nullstellen:

a) $-\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{2}\pi$; $\frac{7}{2}\pi$

b) -90°; 90°; 270°

c) $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{2}\pi$

6. Folgende Werte erfüllen die Aufgabenstellung:

a) $x = \frac{\pi}{4}$ $(-\frac{15}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi;\ \frac{17}{4}\pi)$

b) $x = 70^\circ$ $(-650^\circ;\ -290^\circ;\ 430^\circ;\ 790^\circ)$

c) $x = \frac{\pi}{5}$ $(-\frac{19}{5}\pi;\ -\frac{9}{5}\pi;\ \frac{11}{5}\pi;\ \frac{21}{5}\pi)$

d) $x = \frac{\pi}{3}$ $(-\frac{11}{3}\pi;\ -\frac{5}{3}\pi;\ \frac{7}{3}\pi;\ \frac{13}{3}\pi)$

e) $x = 1$ $(-11{,}566;\ -5{,}283;\ 7{,}283;\ 13{,}566)$

7. a) $x_1 = 76{,}3^\circ$; $x_2 = 283{,}7^\circ$ b) $x_1 = 2{,}30$; $x_2 = 4{,}00$

c) $x = 42{,}3^\circ$ d) $x_1 = 66{,}4^\circ$; $x_2 = -66{,}4^\circ$

e) $x_1 = 5{,}51$; $x_2 = 7{,}06$ f) $x = 264{,}3^\circ$

8. a) $x_1 = 2{,}18$; $x_2 = -2{,}18$; $x_3 = 4{,}10$

b) keine Lösung

c) $x_1 = 405^\circ$; $x_2 = 675^\circ$

9. a) $x_1 = 1{,}82$; $x_2 = -1{,}82$ b) $x_1 = 38{,}9^\circ$; $x_2 = 321{,}1^\circ$

c) $x_1 = 1{,}75$; $x_2 = 4{,}53$

Lerneinheit A 8: Zusammenfassung: Sinus und Kosinus am Kreis mit dem Radius r

keine Aufgaben

Lerneinheit A 9: Die Tangensfunktion

o 45 a) Definitionsbereich: $-\infty < x < 3$; $3 < x < \infty$

b) Nullstelle: $x = 0$

c) $\frac{x+3}{\sqrt{x}}$ ist nicht definiert für $x \leqq 0$.

$\frac{x-4}{2^x}$ ist uneingeschränkt definiert.

$\frac{x}{\sin x}$ ist nicht definiert für $x = k\pi$ $(k \in Z)$.

$\frac{2}{\cos x}$ ist nicht definiert für $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

o 46 a) $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$;

b) $\tan \frac{\pi}{4} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$; $\tan 45^\circ = 1$

c) $\tan \frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

d) $\tan \frac{\pi}{3} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

o 47 a) 0,466 30   b) 1,557 407 8   c) − 5,671 281 9

d) − 0,374 58 e) 1,732 050 8

o 48 b) $90^\circ + k \cdot 180^\circ$ $(k \in Z)$

c) Gemäß Definition A 7 sind alle die Argumente auszuschließen, für die $\cos x = 0$ ist; das sind die Werte $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ bzw. $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $(k \in Z)$.

1. a) 0,364;   11,430;   − 2,747;   1,086;   0,989

b) − 0,973;   − 0,727;   − 10,983;   − 0,767;   − 11,430

c) − 1;   114,589;   − 114,589;   0,176;   − 28,241

2. a) (RAD) 3 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\tan}$

b) (RAD) 5 $\boxed{-}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\tan}$

c) (RAD) 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\tan}$

3. a) $27{,}2^\circ$ b) $-27{,}2^\circ$

Lerneinheit A 10: Graphische Darstellung und Eigenschaften der Tangensfunktion

o 49 a) Die Tangensfunktion ist im Intervall $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$ an den Stellen $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3}{2}\pi$ nicht definiert.

b) Nullstellen liegen vor an den Stellen $x = -\pi$; $x = 0$; $x = \pi$; $x = 2\pi$.

c) An Hand des Bildes A 27 liest man ab:

$\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \cos(-\frac{3}{4}\pi)$, d. h. $\tan(-\frac{3}{4}\pi) = 1$

$\sin(-\frac{1}{4}\pi) = -\cos(-\frac{1}{4}\pi)$, d. h. $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$, d. h. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

$\sin \frac{3}{4}\pi = -\cos \frac{3}{4}\pi$; d. h. $\tan \frac{3}{4}\pi = -1$

$\sin \frac{5}{4}\pi = \cos \frac{5}{4}\pi$; d. h. $\tan \frac{5}{4}\pi = 1$

$\sin \frac{7}{4}\pi = -\cos \frac{7}{4}\pi$; d. h. $\tan \frac{7}{4}\pi = -1$

d) Die Funktionswerte der Tangensfunktion sind positiv in den Intervallen $-\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$; sie sind negativ in den Intervallen $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$, $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$.

o 50 a) (RAD) $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{x \leftrightarrow M}$ $\boxed{-}$ 0,1 $\boxed{=}$ $\boxed{\tan}$ [9.966641]

$\boxed{MR}$ $\boxed{-}$ 0,01 $\boxed{=}$ $\boxed{\tan}$ [99.996283]

Weiter erhält man 999,926 03, und bei der Annäherung an $\frac{\pi}{2}$ von rechts

-9,966 641; -99,996 283; -999,926 03.

b) Für die Annäherung an die Stelle $x = -\frac{\pi}{2}$ erhält man:

$x = -\frac{\pi}{2} \mp 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$

$\pm 9{,}966\,641;\quad \pm 99{,}996\,283;\quad \pm 999{,}926\,03.$

Für die Annäherung an die Stelle $x = \frac{3}{2}\pi$ entsprechend.

2. a) $-2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi$

b) $360^\circ;\ 540^\circ;\ 720^\circ;\ 900^\circ;\ 1\,080^\circ$

c) $-540^\circ;\ -360^\circ;\ -180^\circ;\ 0^\circ;\ 180^\circ$

3. a) $45^\circ;\ 225^\circ;\ 405^\circ$ bzw. $-45^\circ;\ -225^\circ$

b) $-30^\circ;\ 150^\circ;\ 330^\circ;\ 510^\circ$

c) $\frac{3}{8}\pi;\ \frac{11}{8}\pi;\ -\frac{5}{8}\pi$ bzw. $\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{5}{4}\pi$

4. Folgende Werte erfüllen die Aufgabenstellung:

a) $x = 45^\circ;\ 225^\circ;\ 405^\circ;\ -135^\circ;\ -315^\circ$

b) $x = -35^\circ;\ 145^\circ;\ 325^\circ;\ -215^\circ;\ -395^\circ$

c) $x = 2;\ 5{,}14;\ 8{,}28;\ -1{,}14;\ -4{,}28$

d) $x = \frac{2}{3}\pi;\ 1\frac{2}{3}\pi;\ 2\frac{2}{3}\pi;\ -\frac{1}{3}\pi;\ -1\frac{1}{3}\pi$

Lerneinheit A 11: Goniometrische Gleichungen

1. a) $-675^\circ;\ -495^\circ;\ -315^\circ;\ -135^\circ;\ 45^\circ;\ 225^\circ;\ 405^\circ;\ 585^\circ$

bzw.

$-\frac{15}{4}\pi;\ -\frac{11}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{3}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{5}{4}\pi;\ 2\frac{1}{4}\pi;\ 3\frac{1}{4}\pi$

b) $-585^\circ;\ -405^\circ;\ -225^\circ;\ -45^\circ;\ 135^\circ;\ 315^\circ;\ 495^\circ;\ 675^\circ$

bzw.

$-3\frac{1}{4}\pi;\ -2\frac{1}{4}\pi;\ -1\frac{1}{4}\pi;\ -\frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ 1\frac{3}{4}\pi;\ 2\frac{3}{4}\pi;\ 3\frac{3}{4}\pi$

c) $-640^\circ;\ -480^\circ;\ -300^\circ;\ -120^\circ;\ 60^\circ;\ 240^\circ;\ 420^\circ;\ 600^\circ$

bzw.

$-3\frac{2}{3}\pi;\ -2\frac{2}{3}\pi;\ -1\frac{2}{3}\pi;\ -\frac{2}{3}\pi;\ \frac{1}{3}\pi;\ 1\frac{1}{3}\pi;\ 2\frac{1}{3}\pi;\ 3\frac{1}{3}\pi$

d) $-690^\circ;\ -510^\circ;\ -330^\circ;\ -150^\circ;\ 30^\circ;\ 210^\circ;\ 390^\circ;\ 570^\circ$

bzw.

$-3\frac{5}{6}\pi;\ -2\frac{5}{6}\pi;\ -1\frac{5}{6}\pi;\ -\frac{5}{6}\pi;\ \frac{1}{6}\pi;\ 1\frac{1}{6}\pi;\ 2\frac{1}{6}\pi;\ 3\frac{1}{6}\pi$

2. a) $104{,}0^\circ$ b) $x_1 = 70{,}9^\circ;\ x_2 = -109{,}1^\circ;\ x_3 = 250{,}9^\circ$

c) $x_1 = -1{,}39$ rad; $x_2 = 1{,}75$ rad; $x_3 = 4{,}90$ rad; $x_4 = 8{,}04$ rad

d) 1,30 rad e) $76{,}4^\circ$

3. a) $x_1 = 74{,}171\,383^\circ;\quad x_2 = 254{,}171\,38^\circ$

b) $x_1 = 86{,}732\,032^\circ;\quad x_2 = 266{,}732\,03^\circ$

c) nicht lösbar

d) $x_1 = 165{,}917\,99^\circ;\quad x_2 = 194{,}082\,01^\circ$

e) $x_1 = 19{,}683\,177^\circ;\quad x_2 = 160{,}316\,82^\circ$

f) $x_1 = 48{,}189\,684^\circ;\quad x_2 = 131{,}810\,32^\circ$

4. a) $x_1 = 0^\circ;\ x_2 = 41{,}4^\circ;\ x_3 = 180^\circ;\ x_4 = 318{,}6^\circ;\ x_5 = 360^\circ$

b) $x_1 = 1{,}11;\ x_2 = -2{,}03$

c)* $x = 60^\circ$

d)* $x_1 = 0^\circ;\ x_2 = 71{,}8^\circ;\ x_3 = -71{,}8^\circ;\ x_4 = -180^\circ;\ x_5 = 180^\circ$

e) $x_1 = \frac{\pi}{4};\ x_2 = \frac{3}{4}\pi;\ x_3 = -\frac{\pi}{4};\ x_4 = -\frac{3}{4}\pi$

f)* $x_1 = 0^\circ;\ x_2 = 180^\circ;\ x_3 = -180^\circ$

Kapitel B: Anwendung der Winkelfunktionen

Lerneinheit B 1: Wiederholung

o 1 b) Axialsymmetrische Dreiecke: gleichschenklige Dreiecke (ferner Drachenvierecke, gleichschenklige Trapeze, Rhomben - als spezielle Drachenvierecke, Rechtecke - als spezielle gleichschenklige Trapeze, Quadrate, Kreise, regelmäßige n-Ecke)

o 2 a) Zu diesem Zeitpunkt kennen die Schüler zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken nur die Formel

$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g.$

c) Höhen: Scheitelpunkt des rechten Winkels
Mittelsenkrechten: Mittelpunkt der Hypotenuse

o 3 a) Parallelogramm und Drachenviereck sowie alle speziellen Vierecke dieser beiden Arten wie Rhombus, Rechteck, Quadrat.

b) Rhombus und Quadrat

o 5 a) $d^2 = e \cdot f$ (Höhensatz)

$-c^2 = -a^2 - b^2$ (Satz des Pythagoras)

b) $c \cdot e = a^2$ | $b^2 = c \cdot f$ | $b^2 + a^2 = c^2$

$-e^2 - d^2 = -a^2$ | $\frac{d^2}{e} = f$ |

o 6 a) Voraussetzung: $A = A_1 + 4 A_2;\quad A = (a + b)^2$

Behauptung: $a^2 + b^2 = A_1$

Beweis:

$(a + b)^2 = A_1 + 4 A_2$

Da $A_2 = \frac{1}{2} ab$, gilt auch

$a^2 + 2 ab + b^2 = A_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab \quad | - 2 ab$

$a^2 + b^2 = A_1$, w.z.b.w.

b) Es gilt

$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + (a - b)^2,$

$c^2 = a^2 + b^2.$

o 7 b) Würfel: $e = a\sqrt{3} = 2{,}6\sqrt{3}$ cm $\approx 4{,}5$ cm [4.5033321]

Quader: $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \approx 6{,}8$ dm [6.7631354]

1. $\sphericalangle ACE \cong \sphericalangle CED$ (Stufenwinkel gleich groß)
   Daraus folgt: $AC \parallel ED$.
   Die Dreiecke ADE, BDE, CDE stimmen in $\overline{ED}$ sowie in der zugehörigen Höhe und damit auch im Flächeninhalt überein.

2. b) Aus $c - (a + b) < 0$ folgt
   $c - (a + b) + (a + b) < a + b.$

3. Im Falle der Winkel 61° und 57° liegt nicht dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

4. 1. Fall: Zwei Schenkel zu 10 cm; die Basis zu 16 cm.
   Diese Möglichkeit entfällt als Lösung, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist.
   2. Fall: Zwei Schenkel zu 13 cm; die Basis zu 10 cm.

5. a) Basis 2 cm (Dreiecksungleichung)
   b) Sowohl $a = 3$ cm als auch $b = 4$ cm kann Basis sein.
   c) $a = 0{,}1$ cm ist Basis.

6. Wenn $\overline{DE} \cong \overline{BE}$, so $\triangle EDC \cong \triangle EBA$ (wsw; da beide Dreiecke rechtwinklig sind und $\sphericalangle CED \cong \sphericalangle AEB$ gilt; Scheitelwinkel). Also gilt auch $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

7. a) $\alpha + \beta = 35^\circ + 125^\circ = 160^\circ < 180^\circ$.
   b) und c) Durch jede Diagonale im Parallelogramm entstehen je 2 kongruente Dreiecke. Dabei können nicht verschieden langen Seiten (10 cm und 7 cm) gleich große Winkel gegenüberliegen.

8. a) Es ist konstruierbar (aber sehr flach).
   b) Nicht konstruierbar, da $a + b = c$.

9. Das Quadrat über der Diagonalen des gegebenen Quadrats liefert den doppelten Flächeninhalt, das Quadrat über der halben Diagonalen des gegebenen Quadrats den halben Flächeninhalt.

10. Das Quadrat liefert den größten Flächeninhalt mit rund $56\ m^2$ [56.25].

11. Möglichkeit: $0{,}75 \cdot 3\ m = 2{,}25\ m$; $0{,}75 \cdot 4\ m = 3\ m$;
$0{,}75 \cdot 5\ m = 3{,}75\ m$ (9 m)

12. Werden die Kathetenlängen verdoppelt, so bestimmen sie ein zum ersten Dreieck ähnliches Dreieck, das den vierfachen Flächeninhalt hat.

13. Der Flächeninhalt verkleinert sich in jedem Fall.

14. a) $x = 5$ cm
b) n. l. (Begründung: Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für die Länge der Kathete 13 mm. Das würde bedeuten, daß der längeren Seite (13 mm) der kleinere Winkel (45°) gegenüberliegt - entgegen dem bekannten Satz)

15. $s \approx 13{,}8$ cm [13.804075]

16. Bild B 11: $360\ mm^2$; Bild B 12: $509\ mm^2$

17. Über $a = 27{,}55$ cm erhält man $u = 110{,}2$ cm und $A = 746{,}2\ cm^2$.

18. a) $x = \sqrt{51}$ cm $\approx 7{,}1$ cm [7.1414284]
b) $\overline{MP} = \sqrt{325}$ cm $\approx 18{,}0$ cm [18.027756]

19. Falsche Aussagen: a, c (bzgl. Rhombus), e, f*

Lerneinheit B 2: Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

o 9 Die Schüler sollten durch einfaches Überlegen auf folgenden Weg kommen:
Man ermittelt mit Hilfe des Tangens einen spitzen Winkel und nutzt ihn, um mit Hilfe des Sinus dieses Winkels eine der Katheten zu berechnen. Zum Beispiel:
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \ldots$; $\alpha = \ldots$; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = a \cdot \sin\alpha$.
Die zweite Kathete kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras errechnet werden.

Eine weitere Möglichkeit ergibt sich dadurch, daß der zweite spitze Winkel als Komplementwinkel des ersten ermittelt wird, und dann der erste Weg nochmals beschritten wird.

o 10 $A = a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ \approx 5{,}4\ cm^2$ [5.4126588]
Wenn c Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC ist, so eröffnen sich folgende Möglichkeiten:
- zwei Katheten: $A = \frac{1}{2} a \cdot b$,
- die Hypotenuse und eine Kathete (z. B. a),
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $A = \frac{1}{2} a \sqrt{c^2 - a^2}$,
- die Hypotenuse und ein spitzer Winkel (z. B. β):
$a = c \cdot \cos\beta$; $b = c \cdot \sin\beta$
$A = \frac{1}{2} c^2 \sin\beta \cdot \cos\beta$,
- eine Kathete und ein spitzer Winkel (z. B. a und α):
$b = \frac{a}{\tan\alpha}$; $A = \frac{a^2}{2 \cdot \tan\alpha}$.

o 13 Andere Möglichkeit der Konstruktion:
(1) Zeichnen der Kathete $a = \overline{CB}$,
(2) Rechten Winkel in C an $\overline{CB}$ antragen,
(3) Kreis mit c um B,
(4) Schnittpunkt mit dem freien Schenkel ist der Punkt A.

o 15 Die Größe der Winkel bleibt konstant.

Bei dieser und den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß die letzte Stelle mitunter davon abhängt, ob beim Rechnen mit dem Taschenrechner ein später wieder benötigtes Zwischenergebnis gerundet in die Rechnung eingeht oder durch Verwendung des Speichers mit 8 Stellen eingesetzt wird. Für die Ermittlung der folgenden Ergebnisse wird nach Möglichkeit der Speicher genutzt.

1. a) $c = 13{,}6$ cm; $\alpha = 68{,}9^\circ$; $\beta = 21{,}1^\circ$; $A = 31{,}12\ cm^2$
b) $b = 489{,}5$ m; $\alpha = 40{,}6^\circ$; $\beta = 49{,}4^\circ$; $A = 1{,}03 \cdot 10^5\ m^2$
c) $\beta = 54{,}5^\circ$; $b = 175$ m; $c = 215$ m; $A = 1{,}10 \cdot 10^4\ m^2$
d) $\beta = 47{,}8^\circ$; $b = 69$ mm; $c = 94$ mm; $A = 21{,}9\ cm^2$

e) $\alpha = 24{,}6^\circ$; $\beta = 65{,}4^\circ$; c = 37,9 m; A = 273 m^2

f) $\alpha = 30{,}0^\circ$; $\beta = 60{,}0^\circ$; b = 25,1 cm; A = 182 cm^2

g) $\alpha = 49{,}7^\circ$; b = 6,8 cm; a = 8,0 cm; A = 27,2 cm^2

h) $\alpha = 27{,}6^\circ$; c = 91,1 m; a = 42,2 m; A = 1 702 m^2

2. a) q = 14,3 m; a = 8,8 m [8.8147603]; b = 16,3 m [16.264993];
$\alpha = 28{,}5^\circ$; $\beta = 61{,}5^\circ$; A = 71,7 m^2

b) $\alpha = \beta = 45^\circ$; a = b = 4,9 cm, c = 7,0 cm; p = 3,5 cm; A=12,3 cm^2

c) $\alpha = 62{,}3^\circ$; $\beta = 27{,}7^\circ$; q = 11,8 m; p = 42,7 m;
c = 54,4 m; a = 48,2 m; b = 25,3 m; A = 609,5 m^2

d) c = 21,9 cm; h_c = 8,3 cm [8.2933708]; a = 19,9 cm;
b = 9,1 cm; $\alpha = 65{,}4^\circ$; $\beta = 24{,}6^\circ$; A = 90,8 cm^2

e) $\beta = 52{,}5^\circ$; a = 16,8 cm; c = 27,5 cm; b = 21,8 cm; A=182,9 cm^2

f) p = 16,1 cm; $\alpha = 75{,}7^\circ$; $\beta = 14{,}3^\circ$; b = 4,2 m;
q = 1,05 m [1.0450277]; c = 17,1 m; A = 35,1 m^2

g) q = 17,0 m; h_c = 11,8 m; a = 14,4 m; b = 20,7 m;
$\alpha = 34{,}8^\circ$; $\beta = 55{,}2^\circ$; A = 148,8 m^2

h) $\alpha = 54{,}5^\circ$; a = 15,2 cm; p = 12,3 cm; c = 18,6 cm;
b = 10,8 cm; q = 6,3 cm; A = 81,9 cm^2

3. a) Achtung! Wegen $\alpha = 90^\circ$ gilt: $A = \frac{1}{2}\, c \cdot b$.
b = 10,3 cm; a = 14,7 cm; $\alpha = 44{,}4^\circ$; $\gamma = 45{,}6^\circ$;

b) c = 1,17 m; a = 2,36 m; $\beta = 60{,}3^\circ$; $\gamma = 29{,}7^\circ$

c) $\gamma = 51{,}5^\circ$, c = 1,23 dm; b = 0,98 dm; a = 1,57 dm

d) $\beta = 44{,}9^\circ$; $\gamma = 45{,}1^\circ$; a = 16,3 m; c = 11,5 m [11.547826]

e) $\beta = 37{,}3^\circ$; $\gamma = 52{,}7^\circ$; a = 18,2 cm; b = 11,0 cm [11.034483]

f) $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 45^\circ$; b = c = 27,1 cm; a = 38,4 cm

4.* rund $54{,}7^\circ$ 5. h = 2,3 cm

Lerneinheit B 3: Das rechtwinklige Dreieck in der Praxis

o 18 a) x = 3 m; y = 4,24 m b) a = 4 m; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$
$\gamma = 30^\circ$; b = 8,66 m

o 23 Der dargestellte Ablaufplan entspricht der Berechnung des
Terms $\frac{600}{16} \cdot \tan 32^\circ$.

1. Neigung: $\alpha = 4{,}3^\circ$ [4.2568845]
Länge : x = 620 m [619.70961]

2. h = 31 m [30.974586] 3. $33{,}7^\circ$ [33.690068]

4. Die Neigung in Prozent entspricht dem Tangens des Neigungswinkels. Für die Neigung von 6 % ergibt sich als Tangens
$\tan\alpha = \frac{6}{100}$, also ein Winkel von $3{,}4^\circ$. Die Länge der Rampe ergibt sich nach dem Sinus zu
$\sin 3{,}4^\circ = \frac{2{,}20\text{ m}}{x}$, d.h. $x = \frac{2{,}20\text{ m}}{\sin 3{,}4^\circ} = 37$ m [36.732607]

5.* $\sin\alpha = F_H : F_G = 178$ N : 850 N; $\alpha = 12{,}1^\circ$ [12.087882]

6. Waagerechte Entfernung: 532 m [531.57784]
$\frac{95}{531} = \frac{a}{100}$; a = 17,871 $\approx$ 17,9, also 17,9 % Gefälle

Lerneinheit B 4: Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

o 26 a) Drachenviereck (gleichschenkl. Dreieck)
b) Rhombus (Drachenviereck)
c) Quadrat (rechtw.-gleichschenkl. Dreieck)
d) Rhombus

o 29 $h^2 = c^2 - (\frac{c}{2})^2$ $\quad \sin 60^\circ = \frac{h}{c}$ $\quad \tan 60^\circ = \frac{h}{0{,}5\,c}$

$h^2 = \frac{3}{4}c^2$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{h}{c}$ $\quad \sqrt{3} = \frac{h}{0{,}5\,c}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ $\quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ $\quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

1. a) $b = 25{,}1\ m$; $\alpha = \beta = 73{,}4^\circ$; $\gamma = 33{,}1^\circ$; $A = 172\ m^2$

   b) $a = b = 105{,}5\ m$; $\alpha = \beta = 53{,}7^\circ$; $\gamma = 72{,}6^\circ$; $A = 5\,313\ m^2$

   c) $\alpha = \beta = 62{,}3^\circ$; $a = b = 21{,}0\ m$; $A = 182{,}5\ m^2$

   d) $c = 5{,}8\ cm$; $b = 5{,}6\ cm$; $\alpha = \beta = 59{,}0^\circ$; $\gamma = 62{,}0^\circ$; $A = 13{,}8\ cm^2$

2. a) $b = 3{,}75\ m$; $\alpha = \beta = 71{,}7^\circ$; $\gamma = 36{,}5^\circ$; $A = 4{,}18\ m^2$

   b) $\alpha = \beta = 74^\circ$; $a = b = 4{,}95\ m$; $c = 2{,}74\ m$; $A = 6{,}52\ m^2$

   c) $\beta = 53{,}2^\circ$; $\gamma = 73{,}6^\circ$; $a = b = 63{,}1\ m$; $A = 1\,910\ m^2$

   d) $b = 18{,}8\ cm$; $\alpha = \beta = 16{,}8^\circ$; $c = 36{,}0\ cm$; $A = 97{,}8\ cm^2$

3. a) wahr b) wahr c) falsch; Umkehrung
   d) falsch; Umkehrung e) falsch; Umkehrung

4. Winkel zwischen Diagonalen und Rechteckseiten:
   $37{,}4^\circ$ und $52{,}6^\circ$
   Winkel zwischen den Diagonalen: $74{,}7^\circ$ [74.73334]

5. Winkel zwischen Diagonalen und Rechteckseiten:
   $62{,}5^\circ$ und $27{,}5^\circ$. Weiter ergibt sich:

   $\cos 27{,}5^\circ = \frac{a}{6{,}50\ m}$ $\sin 27{,}5^\circ = \frac{b}{6{,}50\ m}$

   $a = 5{,}77\ m$ $b = 3{,}00\ m$

6. $f = 5{,}0\ cm$; $e = 12{,}0\ cm$; $A = 30\ cm^2$

7. (Sätze in beliebigen Dreiecken sind noch nicht bekannt.)
   Wenn $\sphericalangle BAD = 56{,}6^\circ$ und $A = 100\ cm^2$, so ergibt sich:
   $\sphericalangle ABD = 61{,}7^\circ$ und weiter

   $$\left.\begin{array}{l}(1)\ \tan 61{,}7^\circ = \frac{e}{f}\\ (2)\ \frac{1}{2}\, e \cdot f = 100\ cm^2\end{array}\right\} \quad f = \sqrt{\frac{200\ cm^2}{\tan 61{,}7^\circ}} \approx 10{,}4\ cm$$

   $e = 19{,}3\ cm$; $a = 10{,}9\ cm$

8. (Es soll sich annähernd um eine Finnhütte handeln, bei der das Dach bis in Bodennähe heruntergezogen ist. Deshalb empfehlen wir auch eine starke Rundung des Resultats.)
   $\alpha = 60^\circ$ [60.255118]

9. Wenn man eine Nord-Süd-Ausdehnung von 500 km zugrundelegt, so erhält man $h = 350$ km.

10. $A_{ABF} = 320{,}780\,3\ mm^2 \approx 3{,}21\ cm^2$
    $\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = 72{,}7^\circ$; $\sphericalangle AFB = 34{,}6^\circ$

Lerneinheit B 5: Gleichschenklige Dreiecke als Bausteine regelmäßiger Vierecke

o 31 Es entsteht ein regelmäßiges Sechseck.

o 32 Beim Durchmesser von 8 cm ergibt sich für die n-Eckseite a des unbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks die Gleichung

$$a = 8 \cdot \tan \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

Damit erhält man für den Flächeninhalt des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks:

$$A_n = 16 \cdot n \cdot \tan \left(\frac{180}{n}\right)^\circ.$$

Von $n = 27$ an ergibt sich für den auf Quadratzentimeter gerundeten Flächeninhalt der Wert $50\ cm^2$.

$n = 20$	$A = 50{,}68\ cm^2$
$n = 25$	$A = 50{,}53\ cm^2$
$n = 26$	$A = 50{,}51\ cm^2$
$n = 27$	$A = 50{,}49\ cm^2$

o 33 $A = 11{,}7\ cm^2$ [11.657274]

2. a) $r_i = 13{,}7\ cm$; $r_u = 15{,}2\ cm$; $A = 633{,}2\ cm^2$

   b) $a = 14{,}5\ cm$; $r_i = 22{,}349\,828\ cm \approx 22{,}3\ cm$; $1\,623\ cm^2$

   c) $a = 25{,}3\ dm$; $r_u = 21{,}5\ dm$; $A = 1\,100\ dm^2$

   d) $a = 2{,}20\ m$ [2.201431]
   ($h = \frac{2 \cdot 2{,}925\ m^2}{a}$; $h = \frac{a}{2 \cdot \tan 22{,}5^\circ}$; $a^2 = 4 \cdot 2{,}925 \cdot \tan 22{,}5^\circ\ m^2$)
   $h = r_i = 2{,}657\,36\ m \approx 2{,}66\ m$; $r_u = 2{,}88\ m$ [2.8763083]

3.

n	a	u		
3	17,3 cm	52,0 cm	[17.320508],	[51.961524]
4	14,1 cm	56,6 cm	[14.142136],	[56.568542]
5	11,8 cm	58,8 cm	[11.755705],	[58.778525]
6	10 cm	60 cm		

4.

n	a	u		
3	34,6 cm	103,9 cm	[34.641016],	[103.92305]
4	20 cm	80 cm		
5	14,5 cm	72,7 cm	[14.530851],	[72.654253]
6	11,5 cm	69,3 cm	[11.547005],	[69.282032]

5. Insgesamt 9 Diagonalen, davon
3 Diagonalen mit der Länge 5,0 cm und
6 Diagonalen mit der Länge 4,3 cm [4.330127].

6. $A = 688\ mm^2 \approx 6{,}9 \cdot 10^2\ mm^2$; 24,3 %

7. Jede Dreiecksseite wird in 3 gleich große Teile geteilt. Dann werden Teilpunkte benachbarter Seiten so verbunden, daß die Länge der Seiten des regelmäßigen Sechsecks je $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks beträgt.

8. Bestimmungsstücke von regelmäßigen n-Ecken sind gleichschenklige Dreiecke. Für n = 6 beträgt der Winkel an der Spitze eines Bestimmungsdreiecks 60° $(\frac{360^\circ}{6})$. Somit sind alle Winkel kongruent und damit auch alle Seiten.

9. Man kann sich die genannten Vielecke als durch zentrische Streckung auseinander hervorgegangene Vielecke vorstellen.

Lerneinheit B 6: Der Sinussatz

o 34 Im Dreieck ABC gilt bezüglich h_a
$h_a = c \cdot \sin\beta$ und $h_a = b \cdot \sin\gamma$.
Daraus folgt
$c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$ und weiter
$\sin\beta : \sin\gamma = b : c$.

o 35 Bild B 37: Aus $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ und $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta = \frac{h_c}{a}$
folgt
$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ und weiter
$\sin\alpha : \sin\beta = a : b$.
Bild B 38: Aus $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ und $h_c = a$ folgt
$b \cdot \sin\alpha = a$.
Da ferner $\sin\beta = \sin 90^\circ = 1$ ist, kann man die Gleichung weiter umformen:
$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$.
Daraus folgt
$\sin\alpha : \sin\beta = a : b$.

o 36 Weil der Winkel BAC = α nicht bekannt war.

o 37 (Beide Aufgaben können noch nicht mit Hilfe des Sinussatzes gelöst werden.)
a) c = 36,6 m; $\alpha = 19{,}4^\circ$; $\beta = 130{,}6^\circ$
b) $\alpha = 101{,}3^\circ$; $\beta = 27{,}4^\circ$; $\gamma = 51{,}3^\circ$

1. a) $\gamma = 52^\circ$; b = 7,3 cm [7.3222942]; c = 7,0 cm [6.9599338]
b) $\beta = 69{,}8^\circ$; a = 12,7 m [12.665639]; c = 16,9 m [16.943164]
c) $\gamma = 85{,}3^\circ$; a = 0,5 km [0.50237]; b = 1,4 km [1.4019785]
d) $\beta = 22{,}6^\circ$; a = 10,9 m [10.860375]; b = 5,9 m [5.9023492]

2. a) $\alpha = 24{,}5^\circ$; $\gamma = 46{,}9^\circ$; c = 42,9 m [42.855055]
b) $\beta = 40{,}0^\circ$; $\gamma = 96{,}8^\circ$; c = 193 m [192.93979]
c) $\alpha = 64{,}4^\circ$; $\gamma = 43{,}2^\circ$; c = 18,6 cm [18.608035]
d) $\alpha = 140^\circ$; $\gamma = 19{,}5^\circ$; a = 8,36 km [8.3644022]

3. a) $\alpha = 83{,}6^\circ$; $\beta = 42{,}8^\circ$; a = 5,6 cm [5.5557474]
b) $\beta = 34{,}9^\circ$; $\gamma = 101{,}4^\circ$; c = 9,9 cm [9.9328092]
c) $\beta = 38{,}8^\circ$; $\gamma = 47{,}6^\circ$; b = 22,4 m [22.431288]
d) $\alpha = 77{,}5^\circ$; $\beta = 46{,}8^\circ$; a = 43,3 cm [43.253415]

4. $\overline{AP}$ = 92,4 m [92.379231]

5.* $\sphericalangle$ ADB = $64,1^\circ$; $\overline{BD}$ = 306,505 13 m

h_1 = 247,9 m; $A_{\triangle ABD}$ = 37 992 m^2

h_2 = 118,8 m; $A_{\triangle BCD}$ = 18 209 m^2

A_{ABCD} = 5,62 ha

6.* $\overline{AL}$ = 7,518 sm $\approx$ 13,9 km $\overline{BL}$ = 1,953 sm $\approx$ 2,5 km

Lerneinheit B 7: Der Kosinussatz

o 39 2 häufige Fehler:

a) Es wurde vergessen, das Gleichheitszeichen zu drücken (großer Bruchstrich).

b) Multiplikationszeichen im Nenner wird formal übertragen und nicht durch Divisionszeichen ersetzt.

1. a) c = 13,1 m; $\alpha = 67,7^\circ$; $\beta = 52,3^\circ$

b) a = 19,1 cm; $\beta = 59,7^\circ$; $\gamma = 46,1^\circ$

c) b = 29,1 cm; $\alpha = 45,4^\circ$; $\gamma = 76,8^\circ$

d) c = 200 m; $\alpha = 37,3^\circ$; $\beta = 40,6^\circ$

2. a) $\alpha = 57,4^\circ$; $\beta = 72,4^\circ$; $\gamma = 50,1^\circ$

b) $\alpha = 57,5^\circ$; $\beta = 54,85^\circ$; $\gamma = 67,65^\circ$

c) $\alpha = 53,3^\circ$; $\beta = 95,2^\circ$; $\gamma = 31,5^\circ$

d) $\alpha = 12,3^\circ$; $\beta = 160,8^\circ$; $\gamma = 6,9^\circ$

3. $h = \sqrt{18,75}$ cm $\approx$ 4,3 cm; V = 10,2 cm^3

4. Der Verbindungsweg wird 1 110 m lang; er bildet Winkel von 45° bzw. 63° mit den Schneisen.

Lerneinheit B 8: Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks

o 40 a) 1 cm^2 b) 9,2 cm^2

o 41 a) $A = \frac{1}{2}ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab$ (da $\sin 90^\circ = 1$)

b) $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \sin (180^\circ - \gamma)$

$= \frac{1}{2}ab \sin \gamma'$ $(0 < \gamma' < 90^\circ)$

1. a) A = 22 cm^2 [21.685997]

b) $\alpha = 41,3^\circ$; b = 45,16 m; A = 770 m^2 [770.41181]

c) A = 1 670 m^2 [1665.3178]

d) c = 3,4385 km; $\alpha = 79,5^\circ$; A = 7,56 km^2 [7.564746]

2. a) A = 890 m^2 [889.62518]

b) c = 68,67 mm; $\alpha = 17,6^\circ$; A = 649 mm^2 [648.86184]

c) $\beta = 45^\circ$; $\alpha = 90^\circ$; c = 21,21 m; A = 225 m^2

d) a = 10,2 cm; A = 32,0 cm^2 [32.040142]

4. Der Flächeninhalt A_1 eines Bestimmungsdreiecks läßt sich wie folgt berechnen:

$A_1 = \frac{1}{2} r_u \cdot r_u \cdot \sin \varphi$

$A = n \cdot A_1$

$A = \frac{n}{2} (r_u^2 \cdot \sin \varphi)$

5. Aus $A = \frac{1}{2}ab$, $a = c \cdot \sin\alpha$ und $b = c \cdot \cos\alpha$ folgt

$A = \frac{1}{2} c \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Lerneinheit B 9: Vertiefende und zusammenfassende Betrachtungen zu Dreiecksberechnungen

o 42 AB ist Tangente an diesen Kreis; a ist der Berührungsradius.

1. a) $\beta = 52^\circ$; b = 7,3 cm [7.3222942]; c = 7,0 cm [6.9599338]

b) $\beta = 90,7^\circ$; b = 45,2 m; c = 41,6 m

c) $\gamma = 90^\circ$; a = 0,377 km; b = 1,40 km

d) $\beta = 22,6^\circ$; b = 5,90 m; a = 10,9 m

2. a) $\alpha = 25,1^\circ$; $\gamma = 45,7^\circ$; c = 21,09 m

b) $\alpha = 72,9^\circ$; $\beta = 63,9^\circ$; c = 95,3 m

c) $\alpha = 64,4^\circ$; $\gamma = 43,2^\circ$; c = 18,6 cm

d) $\alpha = 19,5^\circ$; $\gamma = 140^\circ$; c = 8,37 km

3. a) $\beta = 53{,}6^\circ$; $\gamma = 72{,}8^\circ$; $a = 3{,}8$ cm
   b) $\beta = 49{,}8^\circ$; $\gamma = 17{,}4^\circ$; $c = 2{,}3$ cm
   c) $\beta = 38{,}8^\circ$; $\gamma = 47{,}6^\circ$; $b = 22{,}4$ m
   d) $\alpha = 47{,}0^\circ$; $\beta = 77{,}3^\circ$; $b = 43{,}1$ cm

4. a) $a = 11{,}1$ cm; $\beta = 60{,}7^\circ$; $\gamma = 48{,}9^\circ$; $A = 43{,}2\ \text{cm}^2$
   b) $c = 19$ m; $\alpha = 93{,}8^\circ$; $\beta = 47{,}8^\circ$; $A = 220\ \text{m}^2$ [221.43918]
   c) $b = 9{,}8$ km; $\alpha = 40{,}7^\circ$; $\gamma = 20{,}4^\circ$; $A = 13\ \text{km}^2$ [12.462238]
   d) $b = 2{,}8$ cm; $c = 3{,}3$ cm; $\alpha = 82^\circ$; $A = 4{,}5\ \text{cm}^2$

5. a) $\alpha = 65{,}28^\circ$; $a = 112{,}58$ m; $b = 28{,}870$ m; $A = 1\,593{,}9\ \text{m}^2$
   b) $\alpha = 83{,}6^\circ$; $\beta = 42{,}8^\circ$; $a = 5{,}6$ cm; $A = 8{,}5\ \text{cm}^2$
   c) Dreieck nicht eindeutig bestimmt
   d) $\alpha = 97{,}7^\circ$; $\beta = 21{,}3^\circ$; $\gamma = 61{,}0^\circ$; $A = 4{,}64\ \text{m}^2$

6. a) keine Lösung, da $a + c < b$
   b) eindeutig bestimmt
   c) eindeutig bestimmt
   d) keine Lösung, da $a + b = c$

7. b) Keine Lösung: $\alpha = 90^\circ$ ist größter Winkel im Dreieck, müßte also der größten Seite gegenüberliegen.
   c) Keine Lösung: γ ist größter Winkel, aber c nicht größte Seite
   d) β ist größter Winkel, aber b nicht größte Seite.

8. b) Die Innenwinkelsumme beträgt nicht 180°.

Lerneinheit B 10: Die Anwendung trigonometrischer Beziehungen bei Sachaufgaben

1. a) $\sphericalangle ACB = 62{,}3^\circ$; $\overline{AC} = 168$ m; $\overline{BC} = 240$ m
   b) $\sphericalangle ACB = 34{,}0^\circ$; $\overline{AC} = 188$ m; $\overline{BC} = 349$ m
   c) $\sphericalangle ACB = 77{,}8^\circ$; $\overline{AC} = 140$ m; $\overline{BC} = 86$ m
   d) $\sphericalangle ACB = 21{,}9^\circ$; $\overline{AC} = 171$ m; $\overline{BC} = 98$ m

2. $\overline{AC} = 99$ m [99.00656]   3. F (27,3; 349,9)

Komplexe Übungen

1. Falsche Aussagen: a, b

2. $a = 8{,}70$ m; $b = 2{,}52$ m; $A = 20\ \text{m}^2$

3. Zentriwinkel der Grundfläche: 60° (↗ Bild 2)
   Innenwinkel der Grundfläche: 120°
   Neigung einer Seitenkante: 45°
   Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenkanten:
   $41{,}409626^\circ \approx 41{,}4^\circ$
   Neigung einer Seitenfläche gegen die Grundfläche:
   $49{,}106605^\circ \approx 49{,}1^\circ$
   Winkel, den zwei gegenüberliegende Seitenkanten bilden: 90°
   Winkel, den eine Seitenkante mit der übernächsten Seitenkante bildet: $75{,}522488^\circ \approx 75{,}5^\circ$
   Winkel zwischen Seitenkante und Grundkante:
   $69{,}295187^\circ \approx 69{,}3^\circ$

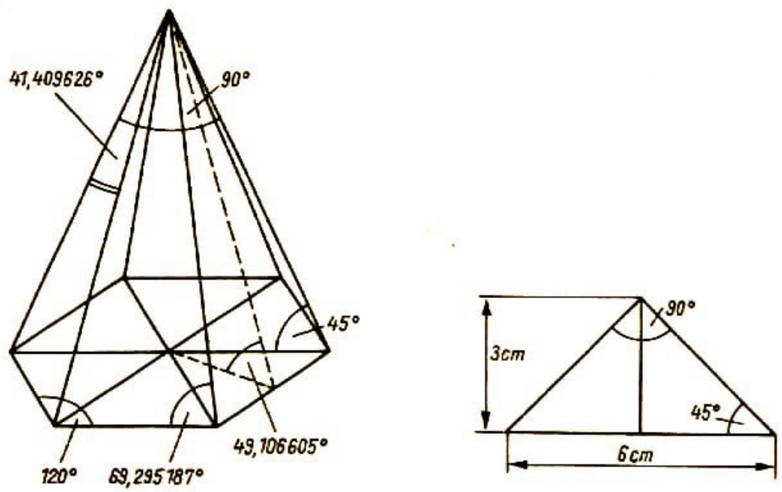

Bild 2

4. Für $d = 3$; $h = 5$ erhält man $V_{Zyl} = 35{,}34\ \text{cm}^3$;
   für $d = 4$; $h = 3$ erhält man $V_{Zyl} = 37{,}70\ \text{cm}^3$;
   für $d = 3$; $h = 4$ erhält man $V_{Zyl} = 28{,}27\ \text{cm}^3$.
   Diese 3 Fälle sind möglich.

5. $\dfrac{6{,}15^2 \cdot 3{,}81 \cdot \pi}{3}$ $\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h\right]$; Kegel

6.* a) Aus $6a^2 = 4\pi r^2$ folgt $a = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

$V_{Wü} : V_{Ku} = a^3 : \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{2\pi r^3 \sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} : \dfrac{4\pi r^3}{3} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} : 1$

Daraus folgt für den Fall $V_{Ku} = 1$ die Proportion:

$V_{Wü} : V_{Ku} \approx 0{,}7236 : 1$

oder, falls man das Würfelvolumen 1 setzen möchte:

$V_{Wü} : V_{Ku} = 1 : \frac{1}{\pi}\sqrt{6\pi}$

$\approx 1 : 1{,}3819766$

b) Aus $a^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ folgt $a = r\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$.

$A_{O,Wü} : A_{O,Ku} = 6a^2 : 4\pi r^2$

$= 6 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} : 4\pi r^2 = \frac{3}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}}$

Daraus folgt:

$A_{O,Wü} : A_{O,Ku} \approx 1{,}2407 : 1$

bzw.

$A_{O,Wü} : A_{O,Ku} \approx 1 : 0{,}80599$

7. a) Das Volumen ist viermal so groß: $V_2 = 4 \cdot V_1$.

b) $V_2 = 3 \cdot V_1$ c) $V_2 = \frac{1}{2} V_1$ d) $V_2 = \frac{1}{8} V_1$

e) Wenn der Flächeninhalt des Kreises verdreifacht wird, so muß die Länge des ursprünglichen Radius mit dem Faktor $\sqrt{3}$ multipliziert werden: $r_2 = \sqrt{3}\, r$.

8. $\sphericalangle$ ACH = 60,0° (Kosinussatz)

$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{41} \cdot \sin 60{,}0° = 13{,}9\ cm^2$ [13.865425]

10. Trigonometrisch: Das Dreieck muß die Gleichung

$A = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin\gamma$, also

$22 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \sin\gamma$.

erfüllen. Bei der Berechnung von $\sin\gamma$ ergibt sich 1,1, also ein Wert außerhalb des Wertebereichs der Sinusfunktion. Ohne trigonometrische Mittel: Der Flächeninhalt ist im Falle von $\gamma = 90°$ maximal, nämlich $20\ cm^2 < 22\ cm^2$.

11.* $a \cdot b = 545\ cm$ $a = 35{,}8\ cm$

$b = a \cdot \tan 23°$ $b = 15{,}2\ cm$

12. a) 1,2 m [1.1529711]

b) Dichte von Gold: $19{,}3\ gcm^{-3}$

Fläche insgesamt: $6\,873\,600\ cm^2$

Dicke: 0,00012 mm

Mit 1 650 g Blattgold können etwa $687\ m^2$ belegt werden.

13. 26,4° [26.3878]

16. 480 m

17. rund 20 s

18 rund 4,5 km

19. $\gamma = 78°$; $h = 81{,}9$ m [81.868049]

20. a) $\alpha = 1{,}4°$ [1.4320962] b) $h = 20{,}7$ m [20.743519]

21. a) $\overline{BL} = 12$ m b) $\overline{AC} = 47{,}8$ m [47.759816]

22.* $112\,900\ km^2$; 4,4 %

23. $\overline{AB} = 2{,}180$ km [2.1796036]

$\sphericalangle$ BAC = 98,2°; $\sphericalangle$ CBA = 43,1°

24. $A_1 = 50\,580\ m^2$ [50576.402]

$A_2 = 69\,640\ m^2$ [69640.05]

$A_3 = 24\,720\ m^2$ [24719.615]

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 145\,000\ m^2$

25. 20 Quadratruten; 100 Quadratruten

28. Für den Flächeninhalt A des Parallelogramms ABCD gilt

$A = 2 \cdot (\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\beta)$

$A = a \cdot b \cdot \sin\beta$.

Da $\beta = \delta$ und $\alpha = \gamma$ sowie $\sin\beta = \sin\alpha$ gilt, ist die Frage zu bejahen $(\sin\beta = \sin(180^\circ - \beta);\ \alpha = 180^\circ - \beta)$.

Formulierung der Frage als Beweisauftrag:

Beweisen Sie, daß sich der Flächeninhalt eines Parallelogramms ergibt aus dem Produkt der Längen seiner Seiten und dem Sinus der Größe eines Innenwinkels!

29. Ein Winkel muß 90° betragen.

30. $A_o = \sqrt{3}\, a^2;\quad V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$

31. Erste Möglichkeit:

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$h_c = a \cdot \sin\beta\ ;\qquad c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot a \cdot \sin\beta = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$

Zweite Möglichkeit:

$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$

$A = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$

32. $A = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cos\alpha$ oder $A = \frac{c^2 \tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

33. $A = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ$

$A = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$

$a^2 = \frac{4}{3} h^2$

$A = \frac{1}{3} h^2 \sqrt{3}$

36.* $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$ Flächeninhaltsformel aus dem Tafelwerk

$\tan\alpha = \frac{h}{x}$

$h = x \cdot \tan\alpha$ h ersetzen, da nicht in Behauptung – dabei Definition des Tangens anwenden

$h = (a-c) \cdot \tan\alpha$

$A = \frac{a + c}{2} \cdot (a-c) \cdot \tan\alpha$ Umformen, so daß sich der Term dem Term in der Behauptung immer mehr "annähert" – dabei binomische Formeln anwenden

$A = \frac{(a+c) \cdot (a-c)}{2} \cdot \tan\alpha$

$A = \frac{a^2 - c^2}{2} \cdot \tan\alpha$

w.z.b.w.

38. a)

(1)	(2)	(3)
Berechne Länge der dritten Seite! (Kosinussatz)	Berechne Größe des Winkels, der der kleineren Seite gegenüberliegt! (Sinussatz)	Berechne Größe des dritten Winkels! (Innenwinkelsumme)
Berechne Größe des kleineren gesuchten Winkels! (Sinussatz)	Berechne Größe des dritten Winkels! (Innenwinkelsumme)	Berechne Länge einer weiteren Seite! (Sinussatz)
Berechne Größe des dritten Winkels! (Innenwinkelsumme)	Berechne Länge der dritten Seite! (Sinussatz)	Berechne Länge der dritten Seite! (Sinussatz)

b)

- Ein möglicher Algorithmus ist auf S. 21 des Lehrbuches der Klasse 9 zu finden (Bild A 8).
- Wenn die Vorgabe "wsw" vorliegt, kann nicht unmittelbar nach Sinussatz oder Kosinussatz gearbeitet werden. Es muß erst der dritte Winkel bestimmt werden (Innenwinkelsumme).

c)

Berechne Größe des Winkels,
der der größeren Seite
gegenüberliegt.
(Sinussatz):
2 Lösungen
(α ; $180^\circ - \alpha$)

Berechne jeweils (zweimal)
die Größe des dritten
Winkels.
(Innenwinkelsumme)

Berechne jeweils (zweimal)
die Länge der dritten
Seite.
(Sinussatz)

39. Das Programm könnte vollständig übernommen werden. Es wird nur noch ein Programmteil angehängt.
Es ist auch möglich, mit Unterprogrammen zu arbeiten.
Ebenso könnte ein neues Programm aufgestellt werden, wobei die Folge der Entscheidungsfragen (s. Abb. B 79) benutzt werden könnte.

40. Die Summe der beiden vorgegebenen Winkelgrößen beträgt 190°.
Trotz dieses Widerspruchs zeigt der Taschenrechner ein reales Ergebnis an.

Lerneinheit C 1: Reelle Zahlen

o 1 $1{,}8$; $0{,}31$; $-0{,}8\overline{3}$; $0{,}\overline{571428}$; -8

o 2 $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{2}{5}$; $\frac{79}{20}$; $\frac{1}{3}$

o 3 Rational sind: $-\sqrt{169} = -13$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$; $-0{,}\overline{12345}$ (periodischer Dezimalbruch); $\frac{7}{6}$;

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Irrational sind:

$\sqrt{8}$ (weil 8 keine Quadratzahl ist);

$\sqrt[3]{100}$ (weil 100 keine Kubikzahl ist);

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (da $\sqrt{2}$ irrational ist, muß auch $\frac{1}{\sqrt{2}}$ irrational sein, wäre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gleich einer rationalen Zahl z, dann müßte $\frac{1}{z} = \sqrt{2}$ sein – der Quotient zweier rationaler Zahlen ist aber eine rationale Zahl);

1,234567891011... (falls der Dezimalbruch so fortgesetzt wird – "Hintereinanderschreiben" der natürlichen Zahlen – ist er unendlich und nicht periodisch, also eine irrationale Zahl);

$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Begründung analog zu $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

o 5 Variante 1:

$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}$ (weil $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2}$)

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$ (weil $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2}$)

Variante 2:

$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2}$ (weil für $x \geq 0$ gilt $x = \sqrt{x^2}$)

$$\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{8} + 8}$$
$$= \sqrt{10 + 2\sqrt{16}}$$
$$= \sqrt{18}$$

1. a) 14,6064 b) 17,2175 c) 60,0000 d) 2,9759
   e) 2,0000 f) 0,0000 g) 0,8182 h) 4,3301

2.* Mit Sicherheit irrational sind die genauen Ergebnisse von a) und h).
Bei b) und d) kann man nicht ohne weiteres entscheiden, ob das Ergebnis irrational ist, denn die Summe bzw. das Produkt irrationaler Zahlen können auch rational sein.

3. a) $-0,73 < 0,19$, denn eine negative Zahl ist stets kleiner als eine positive.
   b) $1,\overline{37} > 1,373737$, denn $1,\overline{37}$ enthält ab der 7. Stelle nach dem Komma weitere von 0 verschiedene Ziffern.
   c) $\frac{2}{3} > 0,66$, denn $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ und $0,\overline{6} > 0,66$.
   d) $\sqrt{7} \approx 2,6457513 > 2,64575$
   e) $\sqrt[3]{30} \approx 3,10723 < \pi \approx 3,14159$
   f) $0,\overline{123} \approx 0,123123 > 0,\overline{1231} \approx 0,123112$

4. Mögliche Lösungen:
   a) $7,35 < \underline{8},35$ b) $4,2\underline{8} > 4,27$ c) $0,\overline{82} < 0,\overline{829}$
   d) $-0,724 < -0,7\underline{1}4$ e) keine Lösung f) $1,\overline{244} > 1,\overline{231}$

5.* a) Falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt{4} = 2$
   b) Wahr. Beispiel: $\sqrt{36} = 6$ und $\sqrt{36} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$
   c) Falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt[3]{4}$ ist irrational, $(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{16}$ ebenfalls.
   d) Falsch. $\sqrt[n]{b}$ ist für nichtnegative b definiert. Wenn $x < 0$, dann ist x^2 positiv, dagegen x^3 negativ. Somit gilt zwar $\sqrt{x^2} = -x$, nicht aber $\sqrt[3]{x^3} = x$.
   e) Falsch. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ gilt nur, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Stets gilt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

7. a) $\frac{27}{8}$ b) -24 c) 0,34 d) 0,9
   e) 20 f) $\frac{3}{2}$ g) $\frac{3}{10}$ h) 0,5

Lerneinheit C 2: Rationale Zahlen und gebrochene Zahlen

o 8 a) -6 b) $\frac{1}{3}$ c) -2 d) 8
   e) -7 f) -6 g) -21 h) -4

o 10 Sowohl in Q als auch in Q_+ gelten die Aussagen a, c, f.
Nur in Q gelten die Aussagen b, e.
Nur in Q_+ gilt die Aussage d.
Begründungen:
Für a) kann zum Beispiel in beiden Bereichen mit $\frac{a + b}{2}$ ein solcher Zwischenwert gefunden werden.
Für b) kann nur in Q die entgegengesetzte Zahl $b = -a$ gebildet werden, so daß $a + b = a + (-a) = 0$ ist.
Für c) kann in beiden Bereichen mit $b = \frac{1}{a}$ das Reziproke zur Zahl a gebildet werden, so daß $a \cdot b = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ist.
Für d) kann nur im Bereich der gebrochenen Zahlen mit $a = 0$ eine solche Zahl gefunden werden, die in der Ordnung kleinste gebrochene Zahl ist.
Für e) kann man nur im Bereich der rationalen Zahlen mit negativen Zahlen b die Ungleichung $a + b < a$ realisieren.
Für f) gibt es wegen $a \neq 0$ in beiden Zahlenbereichen Zahlen b, die $a \cdot b < a$ realisieren.

o 11 a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{9}{7}$ d) 0,72 e) 55,1

o 12 a) Falsch. Es muß gerechnet werden $\frac{2}{5} + \frac{7}{4} = \frac{8 + 35}{20} = \frac{43}{20}$.
   b) Richtig.
   c) Falsch. Das richtige Ergebnis ist 0,9.
   d) Falsch. Es muß heißen: $11,5 : 0,5 = 115 : 5 = 23$.
   e) Richtig.
   f) Falsch. Man kann nicht kürzen, das richtige Ergebnis ist $\frac{41}{12}$.

1. Folgende Zahlen erfüllen die Aufgabenstellung:
   a) $\frac{3}{9}$ b) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : 2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ c) $\frac{7}{10}$ d) 0,785
   e) 0,5 f) n.l., da $\frac{1}{5} = 0,2$ g) 0,6 h) n.l., da $0,\overline{27} = \frac{3}{11}$

2. a) 0,4 b) 3,25 c) $\frac{2}{3}$ d) -9 e) 0
   f) 30 g) 0 h) $\frac{3}{4}$ i) $\frac{3}{4}$ k) 30

3. a) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ c $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$

b) a $\boxed{-}$ b $\boxed{\times}$ c $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$

c) richtig

Lerneinheit C 3: Natürliche Zahlen und ganze Zahlen

o 14 Wir betrachten die Zahl $z = 7a + 3$ ($a \in N$) und bilden das Quadrat

$$\begin{aligned}(7a + 3)^2 &= 49a^2 + 42a + 9\\ &= 49a^2 + 42a + 7 + 2\\ &= 7 \cdot (7a^2 + 6a + 1) + 2\\ &= 7 \cdot b + 2, \text{ wobei } 7a^2 + 6a + 1 = b \text{ gesetzt wurde.}\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $z^2 = 7 \cdot b + 2$ bei Division durch 7 den Rest 2 läßt.

o 15 a) 163, 167, 173, 179

b) $819 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$; $748 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 17$; 541 (Primzahl)

1.

Zahl	Teiler
46	1, 2, 23, 46
64	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
78	1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78
121	1, 11, 121
131	1, 131

2. Folgende Zahlen erfüllen die Aufgabenstellung

a) 14; 28; 42 b) 60; 120; 180 c) 24; 48; 72 d) 9; 18; 27

3. a) Falsch; zwischen einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger liegt keine weitere natürliche Zahl.

b) Wahr; die Menge der ganzen Zahlen enthält keine kleinste Zahl.

c) Wahr; -1 ist die größte negative ganze Zahl

4. a) Wahr. Beweis: $n \cdot (n + 1) = n^2 + n$ (nach d. Distributivgesetz)

b) Falsch. Z. B. die Summe $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ ist <u>nicht</u> durch 10 teilbar.

c)* Wahr. Die beiden Zahlen seien a und b. Falls sie nicht gleich sind, soll die größere der beiden mit a bezeichnet sein; es soll also $a \geqq b$ gelten. Es ist zu zeigen, daß

$3 \mid (a + b)$ oder $3 \mid (a - b)$ oder $3 \mid a \cdot b$

gilt.

<u>Beweis</u>: Für jede der beiden Zahlen gibt es hinsichtlich ihrer Teilbarkeit durch 3 drei Möglichkeiten:

1. Die Zahl ist durch 3 teilbar (d. h. bei Division durch 3 bleibt der Rest 0).
2. Bei Division der Zahl durch 3 bleibt der Rest 1.
3. Bei Division der Zahl durch 3 bleibt der Rest 2.

- Ist wenigstens eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, dann ist ihr Produkt durch 3 teilbar (↗ Satz über die Teilbarkeit eines Produktes)
- Sind die bei Division der beiden Zahlen durch 3 auftretenden Reste gleich, dann ist die Differenz der beiden Zahlen a und b durch 3 teilbar.

  Es gilt dann:

  $a = 3u + r$; $b = 3v + r$ (mit $u, v \in N$, $r = 0$ oder $r = 1$ oder $r = 2$)

  Somit folgt:

  $a - b = 3u + r - 3v - r = 3(u + v) = 3z$ ($z \in N$).
- Sind die bei Division durch 3 auftretenden Reste verschieden (und nicht gleich Null), dann ist die Summe der beiden Zahlen a und b durch 3 teilbar.

  Es gilt dann:

  $a = 3u + 1$; $b = 3v + 2$ <u>oder</u> $a = 3u + 2$; $b = 3v + 1$.

  In beiden Fällen ist

  $a + b = 3u + 3v + 3 = 3 \cdot (u + v + 1) = 3z$ ($z \in N$).

d) Falsch. Wenn $c < 0$ ist, folgt aus $a < b$ <u>nicht</u> $a \cdot c < b \cdot c$, sondern $a \cdot c > b \cdot c$.

Lerneinheit C 4: Lösen von Gleichungen

o 17 a) $L = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ b) $L = \{0; -5\}$

c) Alle angegebenen Zahlen sind Lösungen.

$L = \left\{0; 1; 3; 5; -3; -5; 0{,}5; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$

d) $L = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ e) $L = \emptyset$ f) $L = \{3\}$

o 19 $L = \{5\}$ o 20 $L = \{2;\ -5\}$ o 21 $x = 3;\ y = -5$

1. a) $L = \{6\}$ b) $L = \{8;\ 2\}$ c) $L = \{7;\ -7\}$ d) $L = \{-\frac{1}{2}\}$

2. a) $L = \{\frac{4}{3}\}$ b) $L = \{2;\ \frac{5}{2}\}$ c) Aufgabe: $x^2-18x+90=0$; $L = \emptyset$ d) $L=R$

3. a) $L = \{-\frac{41}{35}\}$ b) $L = \{-\frac{7}{6}\}$ c) $L = \{3;\ -\frac{1}{3}\}$

   d) $L = \left\{\frac{3-\sqrt{53}}{2};\ \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right\}$ oder $x_1 \approx -2{,}1400549$;
   $x_2 \approx 5{,}1400549$

4. a) $y_1 = 0;\ y_2 = 1$ b) $a_1 = \sqrt{5};\ a_2 = -\sqrt{5}$
   c) $x_1 = 3;\ x_2 = \frac{1}{3}$ d) $x_1 = 0{,}8;\ x_2 = -1{,}2$

5. a) $x = -2$ b) $z = 2$ c) $L = \emptyset$ d) $x = -17$

6. a) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ b) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ c) $s = \frac{A_o - \pi r^2}{\pi r}$

   d) $c = \frac{2A - ah}{h}$ e) $A = \frac{\varrho}{R}$

7. a) $x = \frac{83}{110} \approx 0{,}75454$; $y = -\frac{26}{110} \approx -0{,}23636$
   b) $L = \emptyset$; Gleichungen widersprechen einander
   c) $x = -\frac{38}{951} \approx -0{,}03995$; $y = \frac{38\ 041}{4\ 755} \approx 8{,}0002103$
   d) Unendlich viele Zahlenpaare erfüllen das Gleichungssystem, denn die Gleichungen sind identisch. Zu jedem $x \in R$ gibt es ein $y \in R$.

Lerneinheit C 5: Lösen von Ungleichungen

1. a) $x < 7$ b) $z > 20$ c) $x > 4$ d) $z < 1$

2. a) $x < -9$ b) $x > 2$ oder $x < 0$ c) $L = Z$ d) $x > -2$

3. a) $L = \emptyset$ b) $-8 < x < 8$ c) $x < 4$

4. Richtiger Lösungsweg:

$$\begin{array}{rcl|l} 2 \cdot (x+3) & < & 4x - 8 & \text{Klammer auflösen} \\ 2x + 6 & < & 4x - 8 & -6 \\ 2x & < & 4x - 14 & -4x \\ -2x & < & -14 & :(-2) \\ x & > & 7 & \end{array}$$

Lerneinheit C 6: Lösen von Sachaufgaben

o 26 a) Die Aufkaufstelle zahlt für Äpfel der Sorte A 2,40 M je Kilogramm, für Äpfel der Sorte B 1,50 M je Kilogramm.
b) Nein! Die Preise für die Sorten A und B wurden verwechselt. Es wurde mit
$30 \cdot 1{,}50\ M + 28 \cdot 2{,}40\ M = 112{,}20\ M$
anstelle mit
$30 \cdot 2{,}40\ M + 28 \cdot 1{,}50\ M = \underline{\underline{114\ M}}$
gerechnet.

o 27 390 Plätze; in der ersten Vorstellung 156 Zuschauer

o 28 Wenn mit x die Anzahl der Plätze im Kino gemeint ist, so gibt f die richtige Gleichung an.
Wenn mit x die Anzahl der Zuschauer in der 1. Vorstellung gemeint ist, so entsprechen die Gleichungen unter a und c der Aufgabenstellung.

1. $u = 24$ cm

2. Es sei a die Anzahl der Busse vom Typ A, b die Anzahl der Busse vom Typ B. Es muß gelten:
(I) $43a + 26b \geqq 800$
(II) $a + b \leqq 24$

Man erhält: $b \leqq 13{,}64 \ldots$, d. h., es kommen $b = 13$ und $a = 11$ als Lösung in Frage. Für diese beiden Werte erhält man insgesamt 811 Plätze in den Bussen.

Übersicht:

Busse A	11	11	10	9
Busse B	13	14	15	16
Plätze in A	473	473	430	387
Plätze in B	338	364	390	416
Σ Plätze	811	837	820	803
Σ Busse	24	25	25	25

3. a) $A_o = 40\ cm \cdot a + 2a^2 = 1\ 500\ cm^2$
$a = (-10 \pm \sqrt{850})$ cm
$a \approx 19{,}15$ cm

b) $V = a^2 \cdot 10\ cm = 3\ 669\ cm^3 \approx 3{,}67\ l$

4. $s_{LKW} = t \cdot 55\ \text{km} \cdot h^{-1}$

$\underline{s_{PKW} = (t - 0,5) \cdot 75\ \text{km} \cdot h^{-1}}$

$55\ t = 75\ (t - 0,5)$

$t = \frac{15}{8}$ Std. = 112,5 min; s_{Lkw} = 103,125 km

Der LKW wird um 8.53 Uhr rund 27 km vor dem Ziel sein.

[26,875 km]

Lerneinheit C 7: Wiederholung und Systematisierung von Grundbegriffen zum Arbeiten mit Funktionen

o 30 $\quad 4,3 = 0,5\ m + n$

$\underline{-0,7 = -2\ m + n}$ $\qquad m = 2;\ \ n = 3,3$

o 31 a) $x_s = 1,6$; $\quad y_s = -1,06$

c) $x_1 = 0,570\ 43$; $\quad x_2 = 2,629\ 563$

o 34 a) $20 \leqq f(x_1) \leqq 25$; $\quad 0,099\ 502 \leqq f(x_2) \leqq 0,099\ 601$

b) $20 \leqq f(x) \leqq 25$; $\quad -1,397\ 94 \leqq g(x) \leqq -1,301\ 03$

1. a) $x_0 \approx \frac{4}{3}$ $\qquad$ b) $x_0 \approx 0,4$ $\qquad$ c) $x_0 \approx 5$

2. a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$ $\qquad S_x\ (\frac{11}{3};\ 0)$ $\qquad S_y\ (0;\ \frac{11}{2})$

b) $f(x) = \frac{3}{7}x - \frac{5}{7}$ $\qquad S_x\ (\frac{5}{3};\ 0)$ $\qquad S_y\ (0;\ -\frac{5}{7})$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x + 6$ $\qquad S_x\ (-9;\ 0)$ $\qquad S_y\ (0;\ 6)$

d) $f(x) = -\frac{10}{11}x + \frac{16}{11}$ $\qquad S_x\ (\frac{8}{5};\ 0)$ $\qquad S_y\ (0;\ \frac{16}{11})$

3. a) Zu zeigen ist: $f(-x) = g(x)$

Es gilt $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 = g(x)$

(↗ Bild 3)

b) $f(-x) = g(x)$

$f(-x) = m(-x) + n$

$= -mx + n$

$= g(x)$

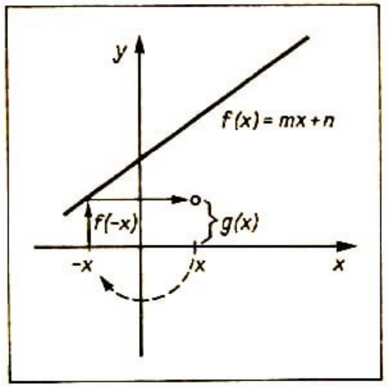

Bild 3

4. Fallunterscheidung: (1) $x \geqq 0$ und (2) $x < 0$.

Aus (1) folgt
$x = -1,5x + 3$;
mithin erhält
man $P_S\ (\frac{6}{5};\ \frac{6}{5})$.

Aus (2) folgt
$-x = -1,5x + 3$.
Der sich aus (2) ergebende Ansatz
$x = 6$ erweist sich nicht als Lösung,
da die Bedingung $x < 0$ verlassen wird.

5.* b) Unendlich viele Schnittpunkte:

..., (-1,5; -2), (-0,5; -1), (0,5; 0), (1,5; 1), (2,5; 2), (3,5; 3), ...

c) Nullstellen sind alle $x \in R$ im Intervall $0 \leqq x < 1$

6. a) S(0; 1,5) $\quad$ b) S(0; -3,2) $\quad$ c) S(4; 0)

d) S (-5,5; 0) $\quad$ e) S(2;1) $\quad$ f) S(-2; 3)

g) S(-1,5; -3) $\quad$ h) S(1,5; -2,5) $\quad$ i) S(1; -2) $\quad$ k) S(-3; -5)

7. a) D = -1,5 $\quad$ b) D = 3,2 $\quad$ c) D = 0

d) D = 0 $\quad$ e) D = -1 $\quad$ f) D = -3

g) D = 3 $\quad$ h) D = 2,5 $\quad$ i) D = 2 $\quad$ k) D = 5

2 Nullstellen: b, g, h, i, k

1 Nullstelle: c, d

keine Nullstelle: a, e, f

8. a) $d = 0,\ e > 0$ $\quad$ b) $d = 0,\ e < 0$ $\quad$ c) $d > 0,\ e = 0$

d) $d < 0,\ e = 0$ $\quad$ e) $d < 0,\ e > 0$ $\quad$ f) $d < 0,\ e < 0$

9. a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
y	0,53	-0,57	-1,35	-1,81	-1,95	-1,77	-1,27	-0,45	0,69

c) Scheitelpunkt:
abgelesen: S(-1; -2)
[berechnet: S(-1,031 25; -1,950 625)]
Nullstellen:
abgelesen: x_1 = -2,8; x_2 = 0,7
[berechnet: x_1 = -2,777 059 7; x_2 = 0,714 55]

10. a)

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$\sqrt{x}$	0	0,45	0,63	0,77	0,89	1	1,10	1,18
$\sqrt[3]{x}$	0	0,58	0,74	0,84	0,93	1	1,06	1,12

x	1,6	1,8	2,0
$\sqrt{x}$	1,26	1,34	1,41
$\sqrt[3]{x}$	1,17	1,22	1,26

Konstantenautomatik für $\sqrt[3]{x}$ einsetzbar; z. B.:

0,2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ [0.5848...

0,4 $\boxed{=}$ [0.7368...

11. a)

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
f(x)	5	2,5	1,67	1,25	1	0,83	0,71	0,63	0,56	0,5
g(x)	25	6,25	2,78	1,56	1	0,69	0,51	0,39	0,31	0,25

12. a) a = 3 b) a = 1,728 c) a = 3 d) a = 6
(Aufg. 12 d durch Probieren aus 1,30766 = $\sqrt[a]{5}$)

13. a) Nullstellen von f: x_1 = 4; x_2 = 2
Nullstelle von g: x = 2,5

b) Schnittpunkte: $S_1(3; -1)$; $S_2(1; 3)$

c) 8 ist in 9 zu verändern:
$y = x^2 - 6x + 9$ hat eine Nullstelle: $x_0 = 3$.
Falls q > 9 hat y = f(x) keine Nullstelle.

d) 6 ist in $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ zu verändern.
$y = x^2 - 2\sqrt{8}x + 8$ hat eine Nullstelle.
Falls p > $-2\sqrt{8}$ hat y = f(x) keine Nullstelle.

14. a) Ist in $f(x) = x^n$ ($n \in N$) der Exponent geradzahlig, so stellt die Potenz x^n ein Produkt mit einer geradzahligen Anzahl von Faktoren x dar. In diesem Fall ist
$y = x^n = (-x)^n$.

b) Aus $x_1 < x_2$ folgt $x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_1$
wie auch $x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_2$.
Daraus erhält man
$x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_2$, also $x_1^2 < x_2^2$.

c)* Indirekt: (1) $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ oder (2) $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$
Aus (1) folgt $x_1 = x_2$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Aus (2) folgt $(\sqrt{x_1})^2 > (\sqrt{x_2})^2$ (↗ Beweis zu b)
und weiter $x_1 > x_2$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lerneinheit C 8: Systematisierung linearer, quadratischer und Potenzfunktionen

o 37 a) Preis je Brötchen a; Anzahl n; Preis P: $P = n \cdot a$
b) Zeit t; konstante Geschwindigkeit v; Weg s: $s = v \cdot t$
c) Umfang u; Seitenlänge a: $u = 4a$
d) Spannung U; Stromfluß I; Widerstand R: $I = \frac{1}{R} \cdot U$

o 38

Eigenschaft	$y = x^3$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt[3]{x}$
(1)	R	R(x≠0)	R(x≠0)	$x \geqq 0$	$x \geqq 0$
(2)	R	R(y≠0)	$y > 0$	$y \geqq 0$	$y \geqq 0$
(3)	(0; 0)	-	-	(0; 0)	(0; 0)
(4)	(-∞; ∞)	-	(-∞; 0)	⟨0; ∞)	⟨0; ∞)
(5)	-	(-∞; 0) (0; ∞)	(0; ∞)	-	-
(7)	→ ∞	→ 0	→ 0	→ ∞	→ ∞
(8)	→ -∞	→ 0	→ 0	0	0

Zur Eigenschaft (6): $y = x^3$ und $y = \frac{1}{x}$ sind punktsymmetrisch mit dem Zentrum (0; 0).
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist achsensymmetrisch mit x = 0 als Spiegelgerade.

o 39 b) Definitionsbereich für beide Funktionen: $x \geq 0$.
Wertebereich für beide Funktionen: $y \geq -1$.

Nullstellen: $x_o = \frac{1}{2}$ bzw. $x_o = 1$.
Beide Funktionen sind monoton wachsend.
Beide Funktionen schneiden die y-Achse im Punkt P(0; -1).

c) $\frac{x_1^2 - 1 - (x_2^2 - 1)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - 1 - x_2^2 + 1}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$

o 41 a) $y = 0,5\,x$ b) $y = 0,5\,x^2$ c) $y = 0,5 \cdot \sin x$
d) $y = 0,5x - 1$ e) $y = 0,5x^2 - 1$ f) $y = 0,5 \cdot \sin x - 1$

4. a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = -x^3$

5. a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = 0,5x$ c) $f(x) = 3x + 1$
d) $f(x) = 0,5x - 1$ e) $f(x) = x^2$ f) $f(x) = x^3$
g) $f(x) = \frac{1}{x}$ h) $f(x) = x^2 + 2$.

8.* Die folgenden Funktionen erfüllen die Aufgabenstellung:
a) $f(x) = 2x + 1$ und $f(x) = 0,5x^3 + 1$
b) $f(x) = |x| - 1$ und $f(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{3}{2}x + 2$

Lerneinheit C 9: Außermathematische Anwendungen von Funktionen

o 42 $A = 3\ mm^2$ ergibt $R = 3\,\Omega$; $A = 6\ mm^2$ ergibt $1,5\,\Omega$

o 43 $a = -0,0483$; $y_S = 7,27$
Die Kugel erreichte bei dem Weltrekordstoß eine Höhe von reichlich 7 Metern.

1. b) $y = 0,0065x + 20,25$ c) $\vartheta = -42,15\,°C \approx -42\,°C$
d) $h = 3\,115\ m \approx 3\,000\ m$

2. a)

x	20	25	30	35	40	45	50	55	60
y	1800	1738	1720	1748	1820	1938	2100	2308	2560

c) Minimum bei dieser Stufung bei $30\ km \cdot h^{-1}$.

3.

v in $m \cdot s^{-1}$	0	1	2	3	4	5	6
E_{kin} in $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

4. a) v in $km \cdot h^{-1}$; bei trockener Fahrbahn ist der Bremsweg s_1, bei nasser Fahrbahn (↗ Aufgabe 4 d) ist der Bremsweg s_2 in m

v	20	30	40	50	60	70	80	90	100
s_1	8,1	14,1	21,4	30,0	39,8	51,0	63,4	77,1	92,1
s_2	9,4	17,0	26,5	38,0	51,4	66,7	84,0	103	124

b) Möglicher Rechenablaufplan

v $\boxed{\div}$ 3,6 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{+}$ v $\boxed{\div}$ 3,6 $\boxed{=}$ *oder*

kürzer:

v $\boxed{\div}$ 3,6 $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{=}$

c)* $\boxed{\text{Reaktionszeit: } s_o = v \cdot t_o}$

s_o Weg in Meter während der Reaktionszeit
$t_o = 1\ s$ (Reaktionszeit)
v Geschwindigkeit des PKW in $m \cdot s^{-1}$

Wird v in $km \cdot h^{-1}$ angegeben, so ist der Weg in m wegen

$1\ \frac{km}{h} = \frac{1\,000}{3\,600}\ \frac{m}{s} = \frac{1}{3,6}\ \frac{m}{s}$

bei $t_o = 1\ s$

$s_o = \frac{v}{3,6} \cdot 1\ s.$

$\boxed{\text{Bremsvorgang: } s_1 = \frac{a}{2}\,t_1^2}$

s_1 Weg in Meter während der Abbremsung
t_1 Zeit in Sek. für die Abbremsung
a Verzögerung in $m \cdot s^{-2}$

Da $t = \frac{v}{a}$, erhält man:

$s_1 = \frac{a}{2} \cdot t_1^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2\,a}$,

und wenn v in $km \cdot h^{-1}$ in die Rechnung eingehen soll, folgt für $a = 12\ m \cdot s^{-2}$

$$s_1 = \frac{v^2}{3{,}6^2 \cdot 12}\,.$$

Für den gesamten Bremsweg ergibt sich

$$s = s_o + s_1 = \frac{v}{3{,}6} + \frac{v^2}{3{,}6^2 \cdot 12}.$$

5. a) $F = 0{,}338\ \mathrm{N} - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{0{,}011}{1000}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^3}$ (r in cm)

$= 0{,}338\ \mathrm{N} - 4{,}6076 \cdot 10^{-5}\ r^3\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$

c) $r \approx 19{,}4$ cm

6. a) $0\ \mathrm{N} \leqq F \leqq 7\ \mathrm{N}$ b) $y = 5x + 15$

7. Linear im Bereich einer Konzentration von etwa 40 % bis 90 %.
$f(x) = -0{,}0024\,x + 1{,}035$

8. b) $v \approx 55\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ c) $v \approx 23\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ ($v \approx 42\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$)

d)

$0\mathrm{s} \leqq t \leqq 5\mathrm{s}$	$v = a \cdot t$ mit $a \approx 8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ $s = \frac{a}{2}t^2 \approx 100$ m
$5\mathrm{s} \leqq t \leqq 8\mathrm{s}$	$v = a \cdot t + v_o$ mit $a \approx 4\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ $v_o = 42\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ $s = \frac{a}{2}t^2 + v_o t \approx 144$ m
$8\mathrm{s} \leqq t \leqq 10\mathrm{s}$	$v_o = 55\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $s \approx 110$ m

Fallstrecke insgesamt ca. 350 m
Der Fallschirm wurde in einer Höhe von ca. 900 m geöffnet.

9. a) Lithium: $l \approx \frac{24\ 000}{v}\ \mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{h}^{-1}$

Blei: $l \approx \frac{8\ 000}{v}\ \mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{h}^{-1}$

b) $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \leqq v \leqq 90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ bzw. $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \leqq v \leqq 90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

c) $l \approx 480$ km bzw. $l \approx 160$ km

Lerneinheit C 10: Potenzen mit reellen Exponenten

o 44 $2^5 = 32$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $3^3 = 27$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $4^{\frac{1}{2}} = 2$;

$9^{0,5} = 3$; $5^0 = 1$; $7^{-1} = \frac{1}{7}$; $27^{\frac{1}{3}} = 3$; $(2^2)^2 = 16$;

$0{,}25^{-0,5} = 2$; $2^2 \cdot 4^2 = 64$; $(6^3)^{\frac{1}{3}} = 6$;

$(11^{\frac{1}{2}})^4 = 121$; $\sqrt[4]{2^4} = 2$; $\sqrt[6]{7^{12}} = 49$; $\sqrt[9]{1} = 1$;

$\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{64 \cdot 64} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{64} = 4 \cdot 4 = 16$

o 47 wahr: a, d, e, f, h

o 50 a) [22,7812] b) [6650,52] c) [0,888888]

$m \approx 23$ mg $m \approx 6{,}65$ g $m \approx 0{,}89$ mg

1. a) $2^6 = 64$; $2^8 = 256$; $3^4 = 81$; $2^3 \cdot 4^3 = 8^3 = 512$;

$2^{-4} = \frac{1}{16}$; $3^{-3} = \frac{1}{27}$; $5^2 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{4}$;

$8 \cdot 2^{-4} = 2^3 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2}$

b) $6^2 \cdot 8{,}12^0 = 36$; $1{,}71^2 \cdot 1{,}71^{-1} = 1{,}71$; $6^4 \cdot 3^{-4} = (\frac{6}{3})^4 = 16$;

$54^3 \cdot 18^{-3} \cdot 3^{-2} = 3$; $59{,}2^1 \cdot 16{,}8^0 = 59{,}2$

c) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = 6$; $\sqrt[4]{25 \cdot 5^2} = 5$; $\sqrt{24 \cdot 6} = \sqrt{2^2 \cdot 6^2} = 12$;

$\sqrt[5]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 6^1} = \sqrt[5]{6^5} = 6$; $\sqrt[10]{1\ 024} = 2$

d) $(7^3)^{\frac{1}{3}} = 7$; $(4^6)^{\frac{1}{12}} = 2$; $0{,}5^{-2} = 4$; $(64^4)^{\frac{1}{8}} = 8$;

$(0{,}49^3)^{\frac{1}{6}} = 0{,}7$; $(8 \cdot 3^3)^{\frac{1}{3}} = 6$

e) $\sqrt[5]{3^{10}} = 9$; $(\sqrt[3]{2})^{12} = 16$; $(\sqrt[7]{1})^{16} = 1$;

$(\sqrt[4]{5})^8 = 25$; $(\sqrt[6]{16})^3 = 4$; $(\sqrt[12]{8})^4 = 2$

2. a) 1,515 72; 1,643 75; 3; 2,623 16; 2,054 23
b) 1,258 93; 1,584 89; 1,861 65; 1,995 26; 1
c) 4,728 8; 29,090 6; 0,003 862 5

4. a) $1 \cdot 10^{-4}$ mm b) $6,644\,79 \cdot 10^{-24}$ g

c) $6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ kg^{-2} d) $6,96 \cdot 10^5$ km

e) $6,24 \cdot 10^{18}$ eV f) $3,9 \cdot 10^{14}$ bis $4,7 \cdot 10^{14}$ Hz

5. a) 621 850 000 b) 4 530 969 400

c) -0,000 000 480 69 d) 173 092 000 000 000 000

6.* a) $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} \approx 1,822\,63 < 2,174\,58 \approx \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$

b) $\pi^{-2} \approx 0,101\,321 < 0,113\,315 \approx 2^{-\pi}$

c) $\sqrt[10]{2} \approx 1,071\,77 < 3,162\,277\,7 \approx \sqrt{10}$

7.* Beim Arbeiten mit dem Rechner beginnt man mit der Berechnung des Exponenten, gibt ihn in den Speicher, berechnet dann die Basis der Potenz (bzw. tastet sie ein) und potenziert. Für Aufgabe b kann man folgendermaßen verfahren:

3 $\boxed{y^x}$ 4 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ 4 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

a) 5,169 68 b) 1,837 03 c) 0,113 964 d) 20,385

8. a) 1 013 $\boxed{\times}$ 0,88 $\boxed{y^x}$ x $\boxed{=}$

b)

x	0	1	2	2,5	3	4	4,5	5
f(x)	1 013	891	784	736	690	607	570	535

d) 650 hPa (830 hPa)

9. a)

Zeit in Jahren	1	2	3	4	5	6
Vol. in m^3	61 500	63 038	64 613	66 229	67884	69582

b) $f(x) = 60\,000 \cdot 1,025^x$

d) 57 108,84 m^3 $\approx$ 57 000 m^3

10. a)

nach	1 Jahr	2 J.	3 J.	4 J.	5 J.	6 J.
Mark	103,25	106,60	110,07	113,65	117,34	121,15

nach	7 J.	8 J.	9 J.	10 J.
Mark	125,09	129,16	133,36	137,69

c) $G_n = 100 \cdot 1,032\,5^n$

d) nach 22 Jahren (202,11 M) e)* nach 25 Jahren

Lerneinheit C 11: Exponentialfunktionen

o 54

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

o 55 Es sei $0 < a < 1$.

Für $x = 0$ ist $a^x = 1$.

Ist $x < 0$, so ist $a^x > 1 > 0$, weil die Funktion monoton fallend ist.

Ist $x > 0$, so ist $-x < 0$, also $a^{-x} > 0$. Daraus ergibt sich wegen $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, daß $\frac{1}{a^x} > 0$, also auch $a^x > 0$.

o 59 $10^{1,5} \approx 31,622\,776$; $10^{3,5} \approx 3\,162,277\,6$; $10^{-1,7} \approx 0,019\,952$

1. a) $f(2) = f(0,5+1,5) = f(0,5) \cdot f(1,5) = 8,996$

$f(2,3) = f(0,5+1,8) = 12,490\,6$

$f(3,3) = f(1,8+1,5) = 37,544$

$f(2,5) = f(2,0+0,5) = 15,563\,08$

$f(3,0) = f(1,5+1,5) = 27,04$

$f(4,5) = [f(1,5)]^3 = 140,608$

b) $2,992\,9 \approx 3$ Schüler ermitteln aus $1,73 = a^{0,5}$ den Wert von a durch Quadrieren der Gleichung $1,73 = \sqrt{a}$.

Ein anderer Weg ist

$f(1) = a^1 = f(0,5 + 0,5) = f(0,5) \cdot f(0,5)$

$= 1,73 \cdot 1,73$

2. a) $x = 5$ b) $x = 4$ c) $x = 10$ d)* $x = 0,5$

e)* $x \approx 1,6$ f)* $x \approx 2,8$

g) $x = \lg 2 \approx 0,301\,03$ h) $x \approx 1,301\,03$

3. a) ja, $f(x) = 1,2^x$ b) nein

c) ja, $f(x) = (\sqrt[4]{3})^x$ d)* ja, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

4. a) Nach

(*) $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

gilt

$a^{x_1} = a^{x_1} \cdot a^0$,

und da $a^{x_1} \neq 0$, schließlich $a^0 = 1$.

b) Entsprechend dem Hinweis im Lehrbuch gilt:

$$a^{x + (-x)} = a^x \cdot a^{-x}$$

$$a^0 = a^x \cdot a^{-x}$$

$$1 = a^x \cdot a^{-x}$$

und weiter

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

6\. a) 0,30103; 1,30103; 2,30103; 3,30103; − 0,69897

(lg 0,2 = − 0,69897 = 0,30103 − 1)

b) 0,47712; 1,47712; 2,47712; 3,47712; − 0,52287

(lg 0,3 = − 0,52287 = 0,47712 − 1)

c) 0,77815; 1,77815; 2,5563025; 1; 0

7\. a) a = 1,070 c) 1,14fach (1,23fach; 1,31fach)

d) Nach 10 Jahren hat sie sich verdoppelt − genauer: nach 10,24 Jahren.

8\. a)

t in s	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
m in g	1	0,89	0,79	0,71	0,63	0,56	0,50	0,44	0,39	0,35	0,31

c) $0,977^x = 0,5$; $x \approx 29,8$ Jahre

Kapitel D: Lösen komplexer Aufgaben

Lerneinheit D 1: Mehrere Aufgaben in einer

O 1 a) $\alpha = 60^\circ$

$V = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{3} \approx 122\ m^3$ [121.78482]

$A_M = 2a^2 = 112,5\ m^2$

Material:

$112,5\ m^2 + 112,5 \cdot 0,05\ m^2 = 118,125\ m^2 \approx 119\ m^2$

(Es wurde hier zur Bedarfssicherung aufgerundet.)

o 2 Kleinstmöglicher Wert für das Volumen:

$V = \frac{1}{6} a^3 \cdot \tan\alpha$

$= \frac{1}{6} \cdot 7,495^3 \cdot \tan 49,5^\circ\ m^3 \approx 82,16\ m^3$ [82.160858]

Größtmöglicher Wert für das Volumen:

$V = \frac{1}{6} \cdot 7,505^3 \cdot \tan 50,5^\circ\ m^3 \approx 85,47\ m^3$ [85.466525]

Es ist sinnvoll, auf zwei Ziffern zu runden, denn der gerundete Wert liegt innerhalb der Wertschranken.

$82,160858\ m^3 \leqq 84\ m^3 \leqq 85,4665525\ m^3$

o 3 a) Breite des Flusses an der Wasseroberfläche:

$c \approx 10,98\ m$ [10.978947]

Querschnitt $A \approx 25,17\ m^2$ [25.170526]

Durchfluß je min $V_1 \approx 453\ m^3$

Durchfluß je Tag $V_2 \approx 6,5 \cdot 10^5\ m^3$ [652420.04]

b) Bei einer Wassertiefe von 3,5 m (anstatt 2,8 m) würde sich die Wassermenge pro Tag auf $8,6 \cdot 10^5\ m^3$ erhöhen.

Das entspricht einer Erhöhung um rund 32 %, obwohl sich die Wassertiefe nur um 25 % verändert.

Lerneinheit D 2: Aus einem Aufgabentext wird eine Gleichung

o 5 Die erste Pumpe füllt das Becken allein in 84 min; die zweite Pumpe benötigt allein 60 min.

o 6 $x\ \text{kg} \cdot 0{,}12 + y\ \text{kg} \cdot 0{,}3 = (x + y)\ \text{kg} \cdot 0{,}25$

$x\ \text{kg} + y\ \text{kg} = 180\ \text{kg}$

50 kg Stahl mit 12 % und 130 kg mit 30 % Nickelgehalt.

Lerneinheit D 3: Wir beweisen mathematische Aussagen

o 7 a) $k = 2n + 1 \quad (n \in N)$ b) $m = (2k)^2 \cdot (2l)^2 \quad (k, l \in N)$

c) $s = (2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) \quad (n \in N\ ;\ n \geq 1)$

o 8 Der Schüler hat als kleinste ungerade Zahl $a = 2n - 1$ gesetzt mit der Bedingung $n \in N$ und $n \geq 1$. Dann ergibt sich als nachfolgende ungerade Zahl $b = 2n + 1$ und als Summe $a + b = 4n$. Damit ist gezeigt, daß $a + b$ durch 4 teilbar ist.

o 9 c) Die Aussage ist falsch, was folgendes Gegenbeispiel zeigt: $2 + 4 = 6;\ 4 \nmid 6$

d) Diese Aussage ist wahr.

Beweis: Vor.: $a = 2m;\ b = 2n \quad (m, n \in N;\ n \leq m)$

Beh.: $4 \mid (a^2 - b^2)$

Bew.: $a^2 - b^2 = 4m^2 - 4n^2 = 4(m^2 - n^2)$

Wegen $m, n \in N$ und $n \leq m$ ist $m^2 - n^2$ eine natürliche Zahl, und $4(m^2 - n^2)$ ist ein Vielfaches von 4; demnach 4 ein Teiler von $a^2 - b^2$.

o 11 $\overline{AS} = \overline{BS} \approx 8{,}578\ \text{cm} \approx 8{,}6\ \text{cm}$

o 12 Es gilt: $\overline{DC} < \overline{CA} = \overline{CB}$. Die Kongruenzüberlegung erfolgt nach dem Kongruenzsatz (sSW); jedoch liegt der gegebene Winkel nicht der größeren Seite von beiden gegenüber. Damit ist die Kongruenz nicht zwingend.

o 13 Vor.: (1) ABCD ist ein Sehnenviereck.

(2) $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind Diagonalen.

Beh.: $\triangle BCS \sim \triangle ASD$

Bew.: $\sphericalangle BSC = \sphericalangle DSA$ (Scheitelwinkel)

$\sphericalangle SCB = \sphericalangle ADS$ (Peripheriewinkel über demselben Bogen)

$\triangle BCS \sim \triangle ASD$ (Hauptähnlichkeitssatz), w. z. b. w.

Lerneinheit D 4: Geometrische Figuren werden konstruiert

o 18 $\overline{AB} \approx 3{,}9$ cm [3.8622127]; $\overline{AD} \approx 2{,}6$ cm [2.5748085]

o 19 c) Höhe des Spinells : $h \approx 20$ mm [19.79899]

Masse des Spinells: $m \approx 5{,}3$ g [5.3034894]

Neigungswinkel : $\alpha = 54{,}7^\circ$ [54.73561]

Aufgaben

1. $a = 25{,}820966$ cm; $b = 9{,}4619091$ cm

$A \approx 244\ \text{cm}^2$ [244.31563]

2. a) $x^2 = 4x;\ x = 4$ b) $x^2 < 4x;\ 0 < x < 4$ c) $x > 4$

3.* Die Aufgabe hat je nach Festlegung der Teilwinkel von γ ($\sphericalangle ACB = \frac{2}{3}\gamma;\ \frac{1}{3}\gamma$ und $\sphericalangle DCA = \frac{1}{3}\gamma;\ \frac{2}{3}\gamma$) zwei verschiedene Lösungen.

a) (1) $\alpha = \beta = 72^\circ$ bzw. (2) $\alpha = \beta = 102\frac{6}{7}{}^\circ \approx 102{,}9^\circ$

$\gamma = \delta = 108^\circ$ $\gamma = \delta = 77\frac{1}{7}{}^\circ \approx 77{,}1^\circ$

4.* a) A, B und C liegen auf dem Kreis um M mit dem Durchmesser $\overline{AB} = c = 25$ cm.

b) Nach dem Thalessatz gilt $\sphericalangle ACB = 90^\circ$; demzufolge ist $\triangle ABC$ rechtwinklig.

c) $a = 20$ cm; $b = 15$ cm d) $A = 150\ \text{cm}^2$

5. Die Höhe bezüglich der Basis des einbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks zerlegt das Dreieck in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke.

Basis $a = \overline{BC}$: $a = 2 \cdot r \cdot \cos 20^\circ = 11{,}276311\ cm \approx 11{,}3\ cm$

Schenkel $c = \overline{AB}$: $c = \dfrac{a}{2 \cdot \sin 35^\circ} = 9{,}8298246\ cm \approx 9{,}8\ cm$

6. a) A(5;0), B(0;2) c)* A'(15;0), B'(0;6)

d) $y = f(x) = -\frac{2}{5}x + 6$

e) Aus $A_2 : A_1 = 9 : 1$ folgt $h_2 : h_1 = 1 : 9$

7. $r_1 \approx 21\ cm$ [21.005031]

$r_2 \approx 28\ cm$

$V_1 = 38\ 792{,}386\ cm^3 \approx 38\ 800\ cm^3 = 3{,}88 \cdot 10^4\ cm^3$

$V_2 = 91\ 952{,}322\ cm^3 \approx 92\ 000\ cm^3 = 9{,}20 \cdot 10^4\ cm^3$

8.

	e)
a) $\delta = 120^\circ$	beliebiges Viereck
b) $\gamma = \delta = 80^\circ$	gleichschenkliges Trapez
c) $\beta = \delta = 130^\circ$	Parallelogramm
d) $\alpha = \gamma = 135^\circ$; $\delta = 45^\circ$	Parallelogramm

9. g_2: $y = f(x) = 3x + 7$

Wegen $3 \cdot (-1) + 7 = 4$ liegt Q(-1;4) auf g_2.

10. b) $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle CBA = 90^\circ$ (Thalessatz)

c) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (Durchmesser des Kreises)

$\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle CBA$ (90° nach Thalessatz)

$\overline{AB} \cong \overline{BA}$ (gemeinsame Seite)

Kongruenzsatz sSW erfüllt, also $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

(Auch der Peripheriewinkelsatz kann angewendet werden; dann folgt: sww.)

11. Es handelt sich um eine Scherzaufgabe: Man denkt an einen Würfel mit $V \approx 74\ 000\ cm^3$, der "viereckige" Kasten erweist sich jedoch als Tetraeder.

$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2} \approx 8\ 700\ cm^3$ [8731.3545]

14. $A_o = a^2 + 2a \cdot h$ mit $h = \sqrt{s^2 - (\frac{a}{2})^2}$; $s = 1{,}5a$

und $2s + a = 16\ cm$

$a = 4\ cm$; $s = 6\ cm$; $h = \sqrt{32}$

$A_o \approx 61\ cm^2$ [61.254834]

15. $S_1(0;7)$, $S_2(2;3)$

17. c) $\overline{EC} \approx 11{,}4\ cm$ [11.390347]

18. Die drei aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen die erste eine gerade Zahl ist, seien $2a$, $2a + 1$, $2a + 2$. Dann soll gelten:

$4 \mid 2a\,(2a + 1)\,(2a + 2)$.

Die Multiplikation der Zahlen führt auf

$4\,(2a^3 + 3a^2 + a)$, eine Zahl, die durch 4 teilbar ist.

19. Für $f(x) = (x - 1)^2 - 9$ gilt:

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

Wertebereich: $-9 \leqq y < \infty$

Nullstellen: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$

Der Graph hat bei S(1; -9) einen Scheitelpunkt, und er schneidet bei P(0; -8) die Ordinatenachse.

Im Intervall $-\infty < x \leqq 1$ ist die Funktion streng monoton fallend und im Intervall $1 \leqq x < \infty$ streng monoton wachsend.

20.* Vor.: $a \in Q$; $a > 2$ und $b \in Q$; $b > 2$

Beh.: $a \cdot b > a + b$

<u>Mehrere Beweise</u> sind denkbar:

(1) $a = 2 + k$; $b = 2 + l$ $(k, l \in Q;\ k, l > 0)$

$p = a \cdot b = (2 + k)(2 + l)$

$= 4 + 2k + 2l + kl$

$s = a + b = (2 + k) + (2 + l)$

$= 4 + k + l$

Da $p > s$, folgt
$a \cdot b > a + b$, w. z. b. w.

(2) Da $a > 2$, folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$.
Entsprechend gilt wegen $b > 2$ auch $\frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.
Wir bilden die Summe und erhalten:
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Weiter folgt
$\frac{b + a}{ab} < 1$
$a + b < ab$.

21. Die Diagonalen e und f zerlegen das Viereck in 4 Teildreiecke, auf die die Formel
$A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$
angewendet wird:

$$A_{ges.} = \frac{1}{2} e_1 f_1 \sin \varepsilon + \frac{1}{2} e_2 f_2 \sin \varepsilon + \frac{1}{2} e_1 f_2 \sin (180^\circ - \varepsilon) + \frac{1}{2} e_2 f_1 \sin (180^\circ - \varepsilon)$$

$$A_{ges.} = \frac{1}{2} \sin \varepsilon \cdot (e_1 f_1 + e_1 f_2 + e_2 f_1 + e_2 f_2)$$
$$= \frac{1}{2} \sin \varepsilon \cdot [e_1 (f_1 + f_2) + e_2 (f_1 + f_2)]$$
$$= \frac{1}{2} (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) \cdot \sin \varepsilon = \frac{1}{2} ef \cdot \sin \varepsilon$$

22.* ↗ Bild D 15 im Lehrbuch
(1) $\triangle$ EFC ist rechtwinklig-gleichschenklig:

∢ CEF = 90° (EF ist Tangente an den Viertelkreis)
∢ ECF = 45° (AC ist Symmetrieachse im Quadrat)
Daraus folgt: ∢ EFC = 45°.

Dann sind $\overline{CE}$ und $\overline{EF}$ die Schenkel im gleichschenkligen Dreieck EFC, und es gilt: $\overline{CE} = \overline{EF}$.

(2) Das Viereck ABFE erweist sich als Drachenviereck

$\overline{AE} = \overline{AB}$ (gleich lange Radien)
∢ AEF = ∢ ABF = 90° (Tangente am Viertelkreis bzw. Winkel im Quadrat)

Dann bilden $\overline{EF}$ und $\overline{FB}$ das zweite Paar gleich langer Nachbarseiten im Drachenviereck, und es gilt $\overline{EF} = \overline{FB}$.

Aus beiden Beziehungen (1) und (2) folgt:
$\overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FB}$, w. z. b. w.

23. a) Kreis um gegebenen Punkt
b) zwei Parallelen zur gegebenen Geraden
c) Winkelhalbierende des gegebenen Winkels
d) Mittelsenkrechte zur gegebenen Strecke
e) Mittelparallele zu zwei gegebenen Parallelen

24. Die Gleichung der gegebenen Parabel kann auf die Form
$f(x) = (x - 3)^2 + 1$
gebracht werden, so daß der Scheitelpunkt mit S(3;+1) abgelesen werden kann. Die Verschiebung bildet S auf den Punkt S'(-2;-4) ab. Das Bild der Parabel bei der Verschiebung entspricht also der Gleichung
$g(x) = (x + 2)^2 - 4$.
Diese Funktion hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$.

25.* Nach Voraussetzung ist Viereck FEDC ein Parallelogramm. Dann gilt $\overline{CF} \cong \overline{ED}$. Weil ∢ CAD und ∢ ADE Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind und AD Winkelhalbierende von ∢ BAC ist, folgt ∢ DAE ≅ ∢ ADE. Dann ist Dreieck AED aber gleichschenklig, und es gilt $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, und demzufolge auch $\overline{AE} \cong \overline{CF}$.

26. a) Die Dreiecke FBD und EDC sind einander kongruent nach (wsw); ihre Flächeninhalte stimmen überein.
b) Die Dreiecke ABC, FBD und EDC sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz einander ähnlich.

27.* a) (1) Alle Punkte, die von zwei Parallelen g_1 und g_2 gleichen Abstand haben, liegen auf ihrer Mittelparallelen m.
(2) Alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der Mittelsenkrechten s zu $\overline{AB}$.
(3) Punkte, die sowohl auf der Mittelparallelen m als auch auf der Mittelsenkrechten s liegen, erfüllen die gestellten Bedingungen.

b) Keine Lösung: A und B liegen auf einer gemeinsamen Senkrechten zu den gegebenen Parallelen, aber mit unterschiedlichen Abständen zu diesen (↗ Bild 4a). Es gilt $m \parallel s$, aber $m \neq s$.

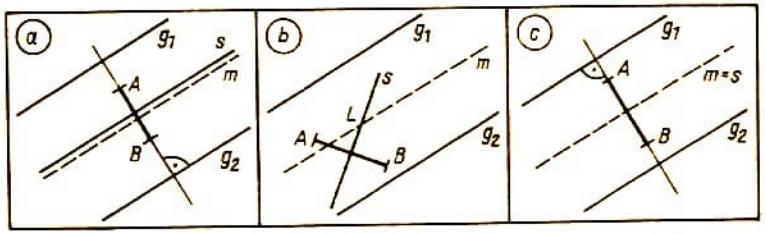

Bild 4

Genau eine Lösung: A und B liegen beliebig zwischen den gegebenen Parallelen, jedoch nicht auf einer gemeinsamen Senkrechten (↗ Bild 4b); m und s schneiden einander.
Unendlich viele Lösungen: A und B liegen auf einer gemeinsamen Senkrechten zu den gegebenen Parallelen, aber mit gleichen Abständen zu diesen. Es gilt m = s (↗ Bild 4c).

28.* a) Für die Dreiecke AEP und BPD gilt (↗ LB-Bild D 18):
$\sphericalangle EPA \cong \sphericalangle BPD$
$\underline{\sphericalangle PAE \cong \sphericalangle PBD}$ (Peripheriewinkel über derselben Sehne)
Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz
$\triangle AEP \sim \triangle BPD$.
Somit gilt auch
$\frac{\overline{PE}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ und weiter
$\overline{AP} \cdot \overline{DP} = \overline{BP} \cdot \overline{EP}$, w. z. b. w.

b) $\left.\begin{array}{l} \overline{PA} = 7\text{ cm (↗ LB-Bild D 18)} \\ \overline{PA} - \overline{PB} = \overline{PD} \\ \overline{PD} = \overline{PE} - 0{,}8\text{ cm} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \overline{AP} \cdot \overline{DP} = \overline{BP} \cdot \overline{EP} \\ \hline \overline{PB}^2 - 14{,}8\,\overline{PB} + 49 = 0 \end{array}$

Ergebnis: $\overline{PA} = 7$ cm; $\overline{PB} = 5$ cm ($\overline{PB} = 9{,}8$ cm ist nicht Lösung)
$\overline{PD} = 2$ cm; $\overline{PE} = 2{,}8$ cm

29. $\overline{AC} = 12 \cdot \sin 40^\circ$; $\overline{BC} = 6 \cdot \cos 40^\circ$
$u \approx 21$ cm $[21{,}288749]$; $A \approx 18\text{ cm}^2$ $[17{,}72654]$

30. a) Nach dem Thalessatz gilt $\sphericalangle AEB = 90^\circ$ und demzufolge ist das Dreieck ABE rechtwinklig.
b) Die Ähnlichkeit der Dreiecke ABE und AMF kann mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes gezeigt werden.

31.* b) $\alpha = \beta = 30^\circ$

32. a) $\triangle M_1AM_2 \cong \triangle M_1BM_2$ (sss)
b) Wegen a) gilt: $\sphericalangle M_2AM_1 \cong \sphericalangle M_1BM_2$.
Das Viereck AM_2BM_1 ist ein Drachenviereck.

33.* a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Nullstellen: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$
Scheitel: $S(-1; -4)$
b) monoton fallend für alle $x \in R$ mit $x \leqq -1$;
monoton steigend für alle $x \in R$ mit $x \geqq -1$.
c) P(7;64) ist kein Punkt dieser Parabel.

34.* b) $A(r) = r^2 \cos 40^\circ (\sin 40^\circ + \sqrt{15} \cdot \cos 40^\circ)$

35.* Im Bild 5 gilt:
(1) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EAB$ (Scheitelwinkel)
(2) $\sphericalangle DCA = 90^\circ - \sphericalangle CAD$ ($\triangle$ DAC ist rechtwinklig)
(3) $\sphericalangle ABE = 90^\circ - \sphericalangle EAB = 90^\circ - \sphericalangle CAD$
(4) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$ (Außenwinkelsatz)
Im Dreieck HBC gilt:
$\sphericalangle BHC + (\sphericalangle ABE + \sphericalangle ABC) + (\sphericalangle BCA + \sphericalangle DCA) = 180^\circ$
$\sphericalangle BHC = 2 \cdot \sphericalangle CAD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA$
$\sphericalangle BHC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$, w. z. b. w. (Bild 5 s. S. 70)

36. b) $d' = 4{,}0$ cm c) $A = 6{,}4\text{ cm}^2$

40. $A = \frac{1}{2} a \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{6} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$ (↗ Bild 6)

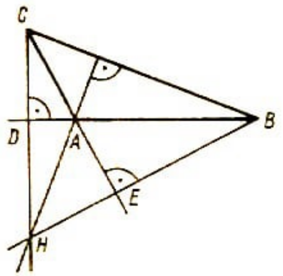

Bild 5

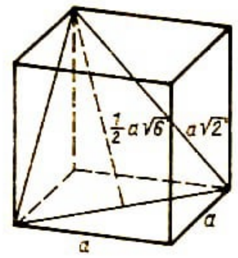

Bild 6

41. $(n-1)(n+1) + 1 = n^2 - 1 + 1 = n^2$, w. z. b. w.

42. a) 782 Teile b) Senkung auf etwa 80,2 %

43. In 1 min fallen 108 l Wasser auf rund 1 256,6 m^2 Fläche. Es werden 5 · 1 256,6 l Wasser benötigt. Diese Menge wird in rund 58 min versprüht.

$\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 20 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{\div}$ 108 $\boxed{=}$ [58.177642]

44. b) $a \approx 3{,}1$ km c) $A_N \approx 3{,}3$ km d) $a_N - a = 0{,}2$ km

45. Insgesamt 6 Fahrten

46. a) 8,61 m [8.6095877] b) 78,5 m^2 [78.533139]
c) 540 m^3 d) 74° [74.291362]

47. $\varrho_{Stahl} = 7{,}85 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $m \approx 3{,}79 \cdot 10^5$ t [378893.15]

48. a) $\overline{AB} = c = 76{,}5$ m [76.491573] b) $\overline{c} = 75{,}7$ m
c) Abweichung: −0,8 m

49. Variante 1: Quadrat; unter Nutzung der Mauerecke werden je 10 Gitter rechtwinklig zueinander und rechtwinklig zu einer Mauer aufgestellt.
$A = 400 \text{ m}^2$

Variante 2: Gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck; Hypotenuse 40 m; Katheten je $\sqrt{800}$ m
$A = 400 \text{ m}^2$

Variante 3: Es wäre auch $\frac{1}{4}$ eines regelmäßigen 80Ecks denkbar ($A = 509 \text{ m}^2$), was allerdings einen ungeheuren Aufwand erfordert.

50. a) NK: 50 NW: 375 K: 50 R: 25
b) 3 Jahre
Nach einem Jahr hat man 50 Bohnen (falls die Bohne gekeimt hat).
Nach zwei Jahren hat man $50 \cdot \frac{90}{100} \cdot 50 = 2\,250$ Bohnen.
Nach drei Jahren hat man $2\,250 \cdot \frac{90}{100} \cdot 50 = 101\,250$ B.
c) 12,5 m^2 d) 5 Bohnen; eine Garantie besteht nicht.

51. Aus $\frac{h}{l} \leqq \sin 1^\circ$ folgt $l \geqq 487$ m [487,03886]

52. Der erste Absetzer benötigt allein 6 h 32 min [6.5272952], der zweite Absetzer allein 8 h 2 min [8.0272952]

53. a) 131,8 % b) 4,9 ha; 68,6 dt

54. 2 % Glukose ≙ 3 000 kg

3 000 kg		m		
$C_6H_{12}O_6$	→	$2\ C_2H_5OH$	+	$2\ CO_2$
$180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$		$92 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$		

(↗ Wissensspeicher Chemie, 14. Auflage 03 17 17, VWV Berlin 1985, S. 191)
$m \approx 1\,530$ kg [1533.3333]

55. Seitenlängen: 130 m und 80 m
Es können höchstens 860 Bäume auf dieser Plantage stehen (20 Reihen in Längsrichtung − 126 m − mit je 43 Bäumen).

56. Die Kantenlänge des Würfels beträgt etwa 40 m (rund 40 m [40.548] bis 44 m [43.679]; [66666.66] $\leqq V \leqq$ [83333.333] m^3)

57. Beide Maschinen benötigen beim gemeinsamen Einsatz x Tage mit
$x = \frac{a \cdot (a - b)}{2a - b}$; $a > b > 0$

58. Entfernung Sardes − Susa: 2 300 km [2330.58].
(Sardes: Antike Stadt auf dem Gebiet der heutigen Türkei unweit von Izmir; Susa: Antike Stadt auf dem Gebiet des heutigen Iran südlich von Dezful)

59. Personenzug: $v_1 = 30\ \mathrm{km\ h^{-1}}$; $t_1 = 7{,}5\ \mathrm{h}$

Eilzug: $v_1 = 56{,}25\ \mathrm{km\ h^{-1}}$; $t_2 = 4\ \mathrm{h}$

60. $\overline{S_1S_2} = y = \sqrt{16^2 + 27^2 - 2 \cdot 16 \cdot 27 \cdot \cos 120^\circ}\ \mathrm{sm}$

$y \approx 37{,}6\ \mathrm{sm}$ [37.64306] (↗ Bild 7)

$v_1t_1 + v_2t_1 = y$; $t_1 \approx 2\ \mathrm{h}\ 54\ \mathrm{min}$ [2.89562]

$\overline{KT} = x = \sqrt{27^2 + 14{,}4781^2 - 2 \cdot 27 \cdot 14{,}4781 \cdot \cos 21{,}6^\circ}\ \mathrm{sm}$

$x \approx 14{,}6\ \mathrm{sm}$ [14.54965]

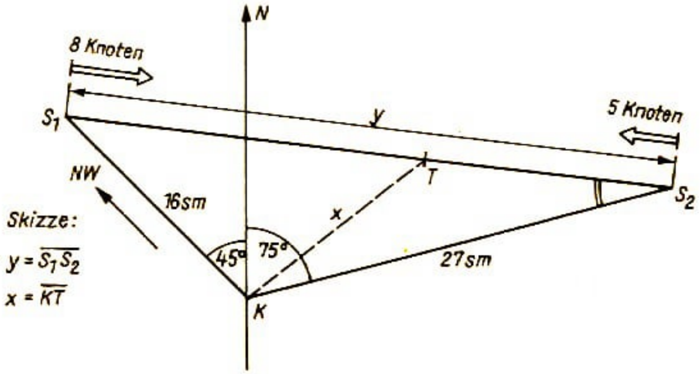

Bild 7

61. Entfernung vom Kirchturm zur Zeit der zweiten Peilung: rund 10 km [10.562257] (Sinussatz)

62. Alter des Fahrers: 37 Jahre; Anzahl der Insassen: 3.
Man rechnet mit 4 Rädern (denn bei 4 Rädern und einem Ersatzrad kann das Produkt aus 3 natürlichen Zahlen nicht 444 sein). Das Produkt aus dem Alter des Fahrers und der Anzahl der Personen ist dann 111. Somit kommt als Zahl der Insassen nur die 3 in Betracht.
Es gibt noch zwei weitere Lösungen, wenn man für die Anzahl der Räder scherzhafterweise n = 6 (4 Räder und z. B. 1 Ersatzrad, 1 Lenkrad) zuläßt. Dann sind im Wagen entweder 2 Personen im Alter von 37 Jahren oder ein 74jähriger Fahrer.

63. Entfernung rund 900 km [900.94043] (Kosinussatz)

64. Wir gehen davon aus, daß m jeweils gleich ist.
$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Ansatz: $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2$; $v = v_1 + v_2$

a) $v_1 = 20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 5{,}\overline{5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$v_2 = 40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 11{,}\overline{1}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$v = 16{,}\overline{6}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$h = \frac{v^2}{2g} \approx 14\ \mathrm{m}$ [14.157889]

b) $h \approx 39\ \mathrm{m}$ [39.327469]

c) $h \approx 100\ \mathrm{m}$ [100.67832]

65. Im $\triangle$ LST (↗ Bild 8) gilt:
$\overline{LT} = 18{,}3\ \mathrm{sm}$; $\sphericalangle\ LST = 81{,}2^\circ$

$\sphericalangle\ SLT = 180^\circ - (82{,}1^\circ + 48{,}2^\circ) = 49{,}7^\circ$

$\sphericalangle\ LTS = 49{,}1^\circ$

Sinussatz: Das Schiff ist rund 14 sm [13.996885] vom Leuchtturm entfernt.

$\sin \beta = \frac{6{,}5}{x}\ \mathrm{sm}$; $\beta = 27{,}67^\circ$

Kurs: N 75,9° W (27,67° + 48,2°)

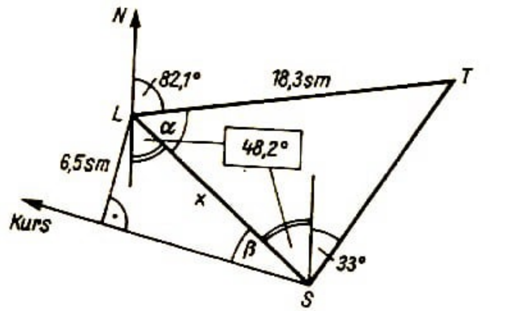

Bild 8

66. Höhenunterschied
Bahnhof Suhl-Friedberg/Bahnhof Suhl: 144 m
Durchschnittliche Geschwindigkeit des Zuges:
$27\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ bis $30\ \mathrm{km\ h^{-1}}$
Länge der Fußlinie: rund 5 km

Neigungswinkel des steilsten Abschnitts: rund $3{,}7^{\circ}$
mittlerer Steigungswinkel der Gesamtstrecke rund $1{,}7^{\circ}$
Höhenunterschied auf dem steilsten Abschnitt etwa 88 m
Durchschnittliche Steigung auf dem gesamten Streckenabschnitt etwa 29 ‰.

67.* Infolge des Westwindes wird P' angesteuert.
Lösungsschritte (↗ Bild 9):
(1) Satz über die Winkelsumme im Dreieck: $\sphericalangle$ RTB = $73{,}2^{\circ}$
(2) Sinussatz auf $\triangle$ BST anwenden und $\sphericalangle$ SBT = $4{,}6^{\circ}$ errechnen.
<u>Kurs: N $167{,}8^{\circ}$ O</u>
(3) Kosinussatz auf $\triangle$ BST anwenden und $\overline{BT}$ = 612,5 km ermitteln. <u>Reisegeschwindigkeit: 610 km $\cdot$ h^{-1}</u> [612.59542]
(4) Mittels einer Proportion die Zeit t zum Durchfliegen der Entfernung $\overline{BP}$ errechnen. <u>Flugzeit: 29 min</u> [28.622952]

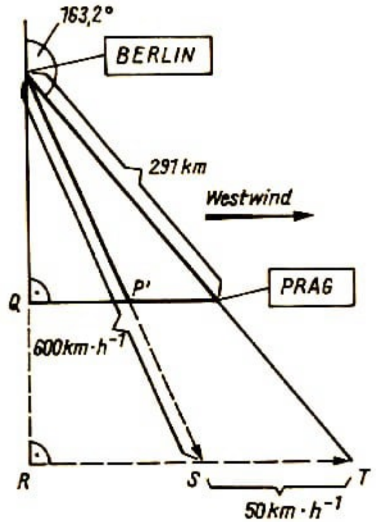

Bild 9

69. Der Anhalteweg beträgt etwa 83 m [82.716049]
(Reaktionsweg - gleichförmige Bewegung: [33.333333] m;
Bremsweg - gleichmäßig verzögerte Bewegung: [49.382716])

70. $\overline{AC} \approx 7$ km [7.4707976] ; $\overline{BC} \approx 6$ km [5.8469807]

71. Die Schwebebahn überwindet einen Höhenunterschied von 250 m.

72. Durchschnittlicher Anstiegswinkel $\alpha = 5{,}3^{\circ}$ [5.3323749];
durchschnittliche Steigung etwa 9,3 % [9.3337 - 02]
(Die Steigung in % gibt die Höhendifferenz je 100 m Fahrbahnstrecke an.)

73. Zentriwinkel des Kreissektors [106.2602],
Flächeninhalt des Kreissektors [144.88987],
Flächeninhalt der gesamten Hochsprunganlage: 154 m^2.

74. a) Die Entfernung bis zur Elbe beträgt etwa 466 m [465.61092]
(Sinussatz)
b) h $\approx$ 245 m [245.35637]

75. a) Entfernung rund 39,4 km b) Höhe mindestens 70,6 m

76. 0,54 m^3 Schlamm
Das zu berechnende Prisma besteht aus einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten [24.463542] und [120.24215] (jeweils in cm) sowie der Höhe 366 cm.

77. b) $\overline{AH}$ = 120 m

78. Die Angaben sind miteinander verträglich, denn
78 m + 1 250 m $\cdot$ tan $11{,}3^{\circ} \approx$ 330 m [327.77465]

79. Die Aufgabe ist nicht lösbar.
Der Fahrer hat die Hälfte der Strecke mit einer halb so großen Geschwindigkeit zurückgelegt. Das bedeutet, er hat die Zeit benötigt, die für die ganze Strecke geplant war, so daß kein Aufholen mehr möglich ist.
Beim Versuch der rechnerischen Lösung stößt man auf einen Widerspruch:
Aus $t_1 + t_2 = t$ und $t_1 = \frac{0{,}5\ s}{30}$ sowie $t_2 = \frac{0{,}5\ s}{v_2}$ folgt
$\frac{0{,}5\ s}{30} + \frac{0{,}5\ s}{v_2} = \frac{s}{60}$.
Diese Gleichung führt auf v + 30 = v.

80. a) Kupferanteil: rund 8 900 kg [8931]
Zinnanteil: rund 2 500 kg [2519]
b) Die Masse der Glocke wurde um etwa 0,72 % [7.2489 - 03] zu niedrig angegeben.

81. Der Ähnlichkeitsfaktor verhält sich im Fall der Massen wie im Fall der Volumina zweier Körper. Man ermittelt also $k^3 = m_2 : m_1$ und erhält $k = 0{,}004\ 688\ 89$.
Für die Höhe des Modells ergibt sich $h_2 \approx 1{,}40$ m [1.429194]

82. Die Berechnung erfolgt unter Nutzung der Gleichung
$v = \sqrt{2\,as}$,
wobei a mit Hilfe des Grundgesetzes der Dynamik für Translationen ermittelt werden kann:
$a = \frac{F}{m} = 49\ \frac{kg \cdot m}{g \cdot s^2}$.
Man erhält: $v \approx 240\ m \cdot s^{-1}$ [242.48711]

83. a) Sinussatz: $\overline{AC} \approx 330$ m [327.88304]
b) $\overline{FC} \approx 250$ m [247.07759]

84. Aus $F = p \cdot A$ und $A = d^2\pi$ folgt $F = d^2\,p\,\pi$.
Unter der Voraussetzung, daß der Luftdruck 1 000 h Pa beträgt und ein vollständiges Vakuum erreicht wird, drückt die Luft mit 104 kN [103868.91] auf die Kugel.

85.* Entfernung von Kap Arkona 7 sm [6.6612494]
Entfernung von Kloster 11 sm [10.876114]

86. Die Aufgabe enthält viele unwesentliche Angaben. Es ist das Volumen eines Prismas mit trapezförmiger Grundfläche zu berechnen.
$300\ m^3$ [298.125] $\leq V \leq 1\ 400\ m^3$ [1402.5]

87. Kongruenzbeweis nach (wsw)

88. Die beiden Kreiskegel - volles bzw. halbvolles Sektglas - mit dem Volumen V bzw. V_1 sind nach dem Strahlensatz einander ähnliche Körper.
(1) $\frac{1}{2} V = V_1$
$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12} d_1{}^2 h_1\right) = \frac{\pi}{12} d_2{}^2 h_2$
(2) $h_1 : h_2 = d_1 : d_2$

$h_2 = \sqrt[3]{4{,}4 \cdot 8{,}8^2}$ cm ≈ 7 cm [6.98456]

89. Nicht lösbar, denn die sich ergebenden Werte $\overline{AB} = 85$ km; $\overline{AC} = 37$ km; $\overline{BC} = 45$ km erfüllen nicht die Dreiecksungleichung.

90. Um 7,58 Uhr trifft der Melder 138 km von Brandleben entfernt auf die Kolonne.

91. a) 14 000 m b) 0,22 % [0.2198529]

92. 30 Ω und 6 Ω

93. Auf dem Breitenkreis beträgt die Entfernung Naumburg (N) - Görlitz (G) rund 220 km. [221.7726].
(Für den Radius ϱ des Breitenkreises N - G gilt (↗ Bild 10)
$\varrho = 6\ 370\ km \cdot 51{,}15^\circ$, $\varrho =$ [3995.797] km. Die Bogenlänge $\widehat{NG}$ auf dem Breitenkreis N - G erhält man aus
$\widehat{NG} = \varrho \cdot \pi \cdot \frac{\delta}{180^\circ}$.)

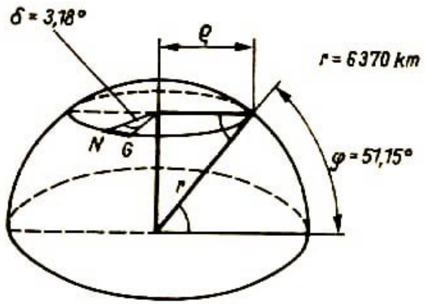

Bild 10

94. a) 162 mm b) 82,9 mm; 35,2 mm; 19,2 mm

95. 1 kg kostet $\frac{ac + bd}{c + d}$ Mark.

96. Der Tank soll mit rund $9{,}72\ m^3$ 46,3 %iger Schwefelsäure gefüllt werden. Es folgt für die Massen:
$1{,}810\ \frac{t}{m^3} \cdot V_1 + 1{,}285\ \frac{t}{m^3}\,(9{,}72\ m^3 - V_1) = 1{,}360 \cdot 9{,}72$ t.
Zu mischen sind
2,51 t der 89,2 %igen Schwefelsäure mit
10,71 t der 38 %igen Schwefelsäure.
[2.5131336] bzw. [10.705117]

97. Der Gewichtsanteil von Kupfer sei F_{Cu}. Dann gilt:

$\frac{1}{9} F_{Cu} + \frac{1}{7} (2\,160 \text{ N} - F_{Cu}) = 260 \text{ N}; \quad F_{Cu} = 1\,530 \text{ N}.$

Kupferanteil (Gewicht): rund 71 % [7.0833 - 01]

Zinkanteil (Gewicht): rund 29 % [2.9166 - 01]

98. $h \approx 600$ m $(340 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 595)$

99. a) $1{,}49 \cdot 10^8$ km^2 b) $3{,}67 \cdot 10^{16}$ t

100. Die Spinne kann die Fliege auf insgesamt fünf verschiedenen Wegen erreichen, die kürzer als 42 Fuß sind und die auf den Begrenzungsflächen verlaufen. Vier dieser Wege haben die gleiche Länge von ungefähr 41 Fuß

$\overline{SF} = \sqrt{(1 + 30 + 6)^2 + (11 + 6)^2}$ ft [40.718546] (↗ Bild 11)

Dieser Weg führt die Spinne zunächst abwärts zum Boden, und sie erreicht die Fliege schräg von unten.

Der Weg im Bild 12 ist etwas kürzer:

$\overline{SF} = \sqrt{(1 + 30 + 1)^2 + (6 + 12 + 6)^2}$ ft = 40 ft.

Die Spinne bewegt sich ebenfalls zuerst zum Boden, nimmt ihren Weg dann aber so, daß sie über die Decke die Fliege schräg von oben erreicht.

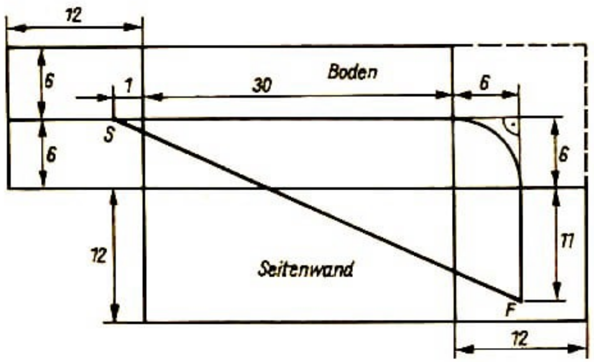

Bild 11

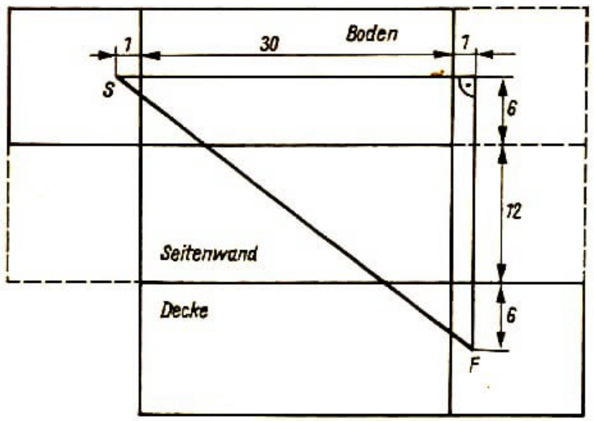

Bild 12

Inhalt

Seite