

MATHEMATIK

für Ingenieur-
und Fachschulen

II

Mathematik

für Ingenieur- und Fachschulen

Band II

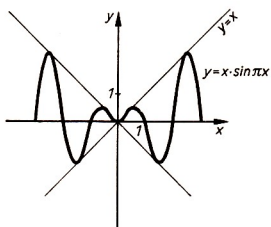
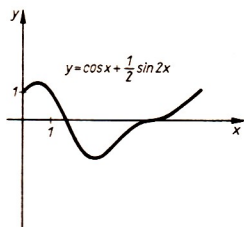
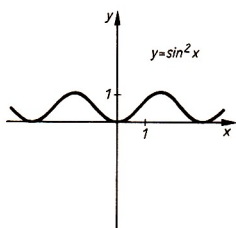
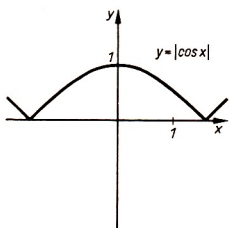
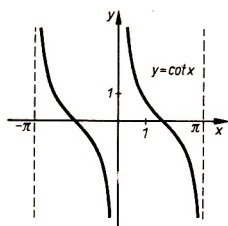
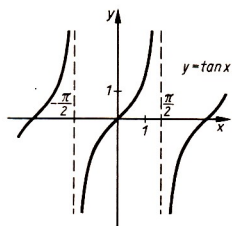
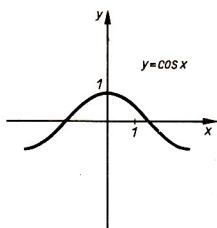
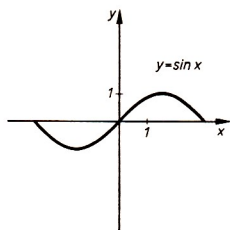
von Dr. H. Nickel, R. Conrad, Dr. S. Völkel, Dr. W. Leupold, Dr. G. Herfurth

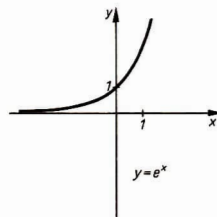
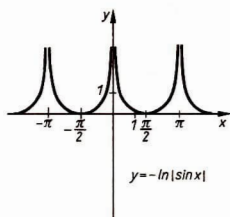
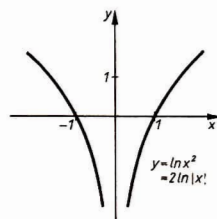
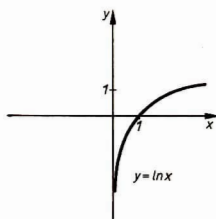
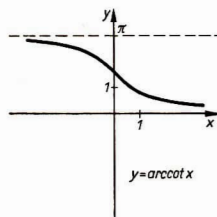
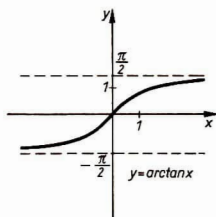
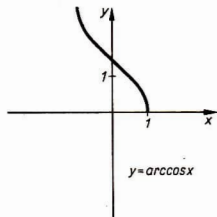
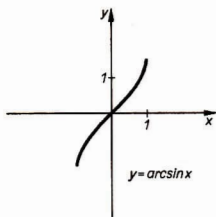
10. Auflage

Mit 236 Bildern, 467 Aufgaben mit Lösungen und einer Integraltafel



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG





Lehrbücher der Mathematik

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen

von H. Birnbaum, Dr.-Ing. H. Götzke, Prof. Dr.-Ing. H. Kreul, Dr.-Ing. W. Leupold,

Dr. F. Müller, Prof. Dr. P. H. Müller, Dr. H. Nickel, Prof. Dr. H. Sachs

AUTOREN

Federführung:

Studiendirektor Dr. Heinz Nickel
Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie Dresden

Autoren der einzelnen Abschnitte:

Fachschuldozent Rudolf Conrad (12. bis 14.)
Betriebsakademie des VEB Druckmaschinenwerk Planeta Radebeul

Studiendirektor Dr. Heinz Nickel (15., 18., 21. bis 23.)
Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie Dresden

Studiendirektor Reichsbahnrat Dr. Siegfried Völkel (16., 17.)
Ingenieurschule für Verkehrstechnik „Erwin Kramer“ Dresden

Dr.-Ing. Wilhelm Leupold (19., 20., 24.)
Technische Universität Dresden

Fachschuldozent Postrat Dr. Günter Herfurth (22., 25.)
Ingenieurschule der Deutschen Post „Rosa Luxemburg“ Leipzig

Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. – Leipzig:
Fachbuchverl.,
(Lehrbücher der Mathematik)
Bd. 2 Von H. Nickel u. a. – 10. Aufl. – 1989. – 432 S. : 236 Bild. u. 467 Aufg. und Lösgn.
NE: Nickel, Heinz [Mitarb.]: GT

Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen
ISBN 3-343-00052-3
Bd. 1 ISBN 3-343-00053-1
Bd. 2 ISBN 3-343-00055-8

ISBN 3-343-00055-8

© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1989

10. Auflage

Lizenznummer 114-210/10/89

LSV 1003

Verlagslektor: Dipl.-Ing. Christine Fritsch

Printed in GDR

Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“ Altenburg

Fotomechanischer Nachdruck: Nationales Druckhaus Berlin

Redaktionsschluß: 15. 1. 1989

Bestellnummer: 546 914 4

01230

Inhaltsverzeichnis

12. Zahlenfolgen, Grenzwerte, Stetigkeit	
12.0. Vorbemerkung	9
12.1. Zahlenfolgen	9
12.1.1. Der Begriff einer Zahlenfolge	9
12.1.2. Arithmetische Zahlenfolgen	12
12.1.3. Geometrische Zahlenfolgen	15
12.2. Der Grenzwert einer Zahlenfolge	19
12.3. Anwendungen	27
12.4. Grenzwerte von Funktionen	30
12.4.1. Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$	30
12.4.2. Die Stetigkeit einer Funktion	37
12.4.3. Der Grenzwert des Funktionswertes für $x \rightarrow \pm \infty$	38
12.5. Aufgaben	40
13. Einführung in die Differentialrechnung	
13.0. Vorbemerkung	46
13.1. Die Ableitung einer Funktion	46
13.2. Die Ableitung der Potenzfunktion	50
13.3. Einfache Ableitungsregeln	52
13.4. Das Differential einer Funktion	54
13.5. Aufgaben	58
14. Die Ableitung der elementaren Funktionen	
14.0. Vorbemerkung	63
14.1. Weitere Ableitungsregeln	63
14.1.1. Die Ableitung des Produktes mehrerer Funktionen	63
14.1.2. Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen	64
14.1.3. Die Ableitung der mittelbaren Funktion	65
14.1.4. Die Ableitung der Umkehrfunktion	68
14.2. Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen	70
14.3. Die Ableitung der logarithmischen und der Exponentialfunktion	72
14.3.1. Die Ableitung der logarithmischen Funktion	72
14.3.2. Die Ableitung der Exponentialfunktion	73
14.3.3. Differenzieren nach Logarithmieren	74
14.4. Die Ableitung der zyklometrischen Funktionen	74
14.5. Aufgaben	75
15. Höhere Ableitungen und Untersuchung von Funktionen	
15.1. Höhere Ableitungen	81
15.2. Untersuchung von Funktionen	86
15.2.1. Extremwerte	86
15.2.2. Wendepunkte	90
15.2.3. Kurvendiskussionen	94
15.3. Angewandte Extremwertaufgaben	100
15.4. Aufgaben	106
16. Einführung in die Integralrechnung	
16.1. Unbestimmtes und bestimmtes Integral	112
16.2. Grundintegrale, Grundregeln	117
16.3. Das bestimmte Integral als Grenzwert	121
16.4. Anwendungen	125
16.4.1. Flächeninhalte ebener Flächen	125
16.4.2. Rauminhalte	137
16.5. Aufgaben	141
17. Integration weiterer Funktionen	
17.0. Vorbemerkung	145
17.1. Grundintegrale	145
17.2. Integration durch Substitution	148

17.2.1.	Integranden der Form $f(ax + b)$ (Lineare Substitution)	148
17.2.2.	Andere Formen von Integran- den	152
17.3.	Die Integraltafel	156
17.4.	Aufgaben	160
18.	Geometrische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung	
18.1.	Kurvengleichungen in recht- winkligen Koordinaten. Para- meterdarstellung	164
18.2.	Kurvengleichungen in Polar- koordinaten	166
18.3.	Kurventangenten und -nor- malen	170
18.4.	Die Bogenlänge	177
18.5.	Die Krümmung	180
18.6.	Flächen	184
18.7.	Aufgaben	187
19.	Physikalisch-technische Anwendungen	
19.1.	Differentiation und Integration zeitlich veränderlicher Größen	190
19.1.1.	Berechnung von Weg, Ge- schwindigkeit und Beschleuni- gung	190
19.1.2.	Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen	193
19.2.	Berechnung von Mittelwerten	197
19.3.	Arbeitsintegral	200
19.3.1.	Allgemeines	200
19.3.2.	Dehnungsarbeit einer Schrau- benfeder	201
19.3.3.	Ausdehnungsarbeit eines Gases	201
19.3.4.	Arbeit eines Wechselstromes	202
19.4.	Statisches Moment und Schwerpunkt	203
19.4.1.	Allgemeines	203
19.4.2.	Statische Momente und Schwer- punkte von ebenen Flächen . .	204
19.5.	Aufgaben	209
20.	Grafische und numerische Verfahren	
20.0.	Vorbemerkung	212
20.1.	Grafische Differentiation und Integration	212
20.1.1.	Grafische Differentiation . .	212
20.1.2.	Grafische Integration	214
20.2.	Numerische Integration . . .	218
20.2.1.	Allgemeines	218
20.2.2.	Keplersche Faßregel, Simpson- sche Regel	219
20.3.	Aufgaben	222
21.	Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen	
21.1.	Definition und geometrische Veranschaulichung	225
21.2.	Partielle Ableitungen	231
21.3.	Das totale Differential . . .	235
21.4.	Die Ableitung von Funktionen mit impliziter Darstellung . .	239
21.5.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer unab- hängiger Variabler	241
21.6.	Aufgaben	246
22.	Fehlerrechnung	
22.0.	Vorbemerkung	249
22.1.	Maximalfehler und ihre Fort- pflanzung	249
22.2.	Kleinste Quadratsumme . . .	254
22.3.	Arithmetisches Mittel und Standardabweichung	255
22.4.	Fehlerfortpflanzung	258
22.5.	Lineare Regression	260
22.6.	Trend	263
22.7.	Aufgaben	265
23.	Potenzreihen	
23.1.	Allgemeines über Reihen . . .	269
23.2.	Die unendliche geometrische Reihe	271
23.3.	Das Restglied	273
23.4.	Potenzreihen	276
23.5.	Entwicklung gegebener Funk- tionen in Potenzreihen . . .	279
23.5.1.	Die 1. Form der Taylorschen Reihe	279
23.5.2.	Entwicklung einiger spezieller Funktionen	282
23.5.3.	Die 2. Form der Taylorschen Reihe	289
23.5.4.	Einige Anwendungen	291
23.6.	Aufgaben	296
24.	Differentialgleichungen	
24.1.	Einführende Betrachtungen, Grundbegriffe	299
24.2.	Differentialgleichungen 1. Ord- nung	304
24.2.1.	Die Differentialgleichung 1. Ordnung	304

24.2.2.	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	304	25.1.0.	Vorbemerkung	331
24.2.3.	Geometrische Deutung der Differentialgleichung 1. Ordnung	306	25.1.1.	Zufälliges Ereignis und Wahrscheinlichkeit	331
24.2.4.	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	307	25.1.2.	Zusammengesetzte Ereignisse	334
24.2.5.	Auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführbare Differentialgleichungen 2. Ordnung	313	25.1.3.	Additionsregel	335
24.3.	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	317	25.1.4.	Multiplikationsregel	336
24.3.0.	Vorbemerkung	317	25.1.5.	Bedingte Wahrscheinlichkeit	337
24.3.1.	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	317	25.1.6.	Bernoullische Formel	338
24.3.2.	Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	317	25.1.7.	Kombinatorik	340
24.3.3.	Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	322	25.2.	Zufallsgrößen	345
24.4.	Aufgaben	327	25.2.0.	Vorbemerkung	345
25.	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik		25.2.1.	Beschreibende Statistik	346
25.1.	Klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung	331	25.2.2.	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	350
			25.2.3.	Binomialverteilung	351
			25.2.4.	Normalverteilung	355
			25.2.5.	Weitere Verteilungen	360
			25.3.	Mathematische Statistik	362
			25.3.0.	Vorbemerkung	362
			25.3.1.	Prüfverteilung	363
			25.3.2.	Sicherheitsgrenze	365
			25.3.3.	Prüfhypothese	366
			25.3.4.	Prüfung von Mittelwerten	368
			25.3.5.	Konfidenzintervall	370
			25.4.	Aufgaben	373
			Lösungen		379
			Sachwortverzeichnis		426
			Integraltafel		429

12. Zahlenfolgen, Grenzwerte, Stetigkeit

12.0. Vorbemerkung

Gegenstand dieses Abschnittes sind Begriffe und Fragestellungen, die für den Aufbau der Analysis grundlegend sind. Bei den Zahlenfolgen werden zunächst elementare Eigenschaften betrachtet. Es folgt die Behandlung arithmetischer und geometrischer Zahlenfolgen mit einigen Anwendungen. Mit der Einführung des Grenzwertes beginnt die höhere Mathematik. Auf seiner Grundlage wird die Stetigkeit einer Funktion definiert und das Verhalten einer Funktion im Unendlichen untersucht.

12.1. Zahlenfolgen

12.1.1. Der Begriff einer Zahlenfolge

Bei einer Menge wird bekanntlich von einer Anordnung der Elemente abgesehen. Häufig spielt jedoch die Anordnung der Elemente einer Menge eine wesentliche Rolle. So ist es geläufig, die Menge der natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung $1, 2, 3, \dots$ anzugeben, in der jedes Element genau einen Nachfolger und — mit Ausnahme des ersten — genau einen Vorgänger hat.

Jede Menge, in der eine den natürlichen Zahlen entsprechende Ordnung so festgelegt ist, daß es ein erstes, ein zweites, ein drittes usw. Element gibt, heißt eine Folge. Im Falle einer so geordneten Zahlenmenge spricht man von einer **Zahlenfolge**, oft auch kurz Folge genannt.

Das Zeichen für eine Zahlenfolge ist $\{x_k\}$. Der Index durchläuft, mit einem Anfangswert beginnend, aufsteigend die natürlichen Zahlen und heißt **Laufindex**. Häufig wird $k = 1, 2, 3, \dots$ gewählt. Die Glieder lauten dann

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots,$$

so daß der Index die Gliednummer angibt. Im folgenden wird bei endlichen Zahlenfolgen fast ausschließlich so verfahren. Für die eindeutige Fortsetzung einer Zahlenfolge wird — wenn möglich — das **allgemeine Glied** x_k angegeben.

BEISPIELE

12.1. $\{x_k\} = 2, 4, 6, \dots, 2k, \dots$

12.2. $\{a_k\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{k^2}, \dots$

12.3. $\{x_k\} = 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$

12.4. $\{x_i\} = 2, -4, 6, \dots, (-1)^{i+1} \cdot 2i, \dots$

12.5. $\{b_k\} = 12, 7, -2, 5, 3, \dots$

Die ersten vier Beispiele sind **unendliche** Zahlenfolgen, das letzte ist eine **endliche** Zahlenfolge.

Wird der Anfangswert des Laufindex geändert, dann nimmt das allgemeine Glied eine andere Form an. So bezeichnen

$$\{x_k\} = \{2k - 1\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\{x_n\} = \{2n + 1\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\{x_\nu\} = \{2\nu - 5\}, \quad \nu = 3, 4, 5, \dots$$

alle dieselbe Folge

$$\{x_k\} = 1, 3, 5, \dots, 2k - 1, \dots$$

Durch die Numerierung der Glieder einer Zahlenfolge ist jedes Glied einer natürlichen Zahl zugeordnet.

Definition

Eine **reelle Zahlenfolge** ist eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich die Menge (oder eine endliche Teilmenge) der natürlichen Zahlen ist.

Die Zuordnung $k \rightarrow x_k$ kann in vielen Fällen wie bei den Funktionen durch eine Gleichung gegeben sein:

$$x_k = f(k), \quad k \in \{1; 2; 3; \dots; n\} \quad (\text{endliche Zahlenfolge})$$

$$x_k = f(k), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (\text{unendliche Zahlenfolge})$$

Sie gibt an, wie das Glied x_k (der Funktionswert) aus der Gliednummer (dem Argument) zu berechnen ist.

BEISPIEL

12.6. Die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge $\left\{\frac{k}{k+1}\right\}$ heißen

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}.$$

Das 20. Glied lautet

$$x_{20} = \frac{20}{21}.$$

Nicht von jeder Folge läßt sich das allgemeine Glied angeben. Ein Beispiel dafür ist die Folge der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Im Rahmen dieses Buches werden aber nur die formelmäßig angebbaren Folgen interessieren.

Ähnlich wie die Funktionen können Zahlenfolgen Besonderheiten aufweisen, die ihre Eigenschaften charakterisieren.

Definition

Eine Zahlenfolge heißt

(eigentlich) monoton **wachsend**

(eigentlich) monoton **fallend**

alternierend

konstant

wenn für alle k gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k < x_{k+1}, \\ x_k > x_{k+1}, \\ x_k \cdot x_{k+1} < 0, \\ x_k = x_{k+1}. \end{array} \right.$$

BEISPIEL

12.7. a) Die Zahlenfolge

$$\left\{ \frac{2}{k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ist monoton fallend (vgl. Bilder 12.1 und 12.2).

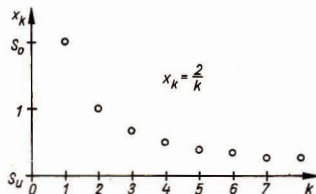


Bild 12.1

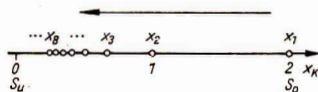


Bild 12.2

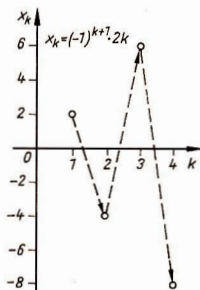


Bild 12.3

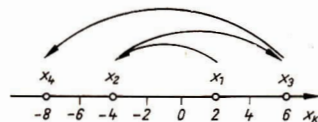


Bild 12.4

b) Die Zahlenfolge

$$\{x_k\} = \{(-1)^{k+1} \cdot 2k\}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ist alternierend (vgl. Bilder 12.3 und 12.4).

Kontrollfragen

12.1. Was wird unter einer reellen Zahlenfolge verstanden? Wie lautet ihre Definition?

12.2. Welche Eigenschaften einer reellen Zahlenfolge werden hinsichtlich ihrer Monotonie unterschieden?

Aufgaben: 12.1. und 12.2.

12.1.2. Arithmetische Zahlenfolgen

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_k\}$ mit konstanter Differenz $d = x_{k+1} - x_k$ heißt **arithmetische Zahlenfolge**.

Eine konstante Folge kann als arithmetische Folge mit $d = 0$ angesehen werden. Es sollen nur endliche arithmetische Folgen betrachtet werden. Das letzte Glied x_n heißt **Endglied**.

Eine endliche arithmetische Zahlenfolge mit Anfangsglied x_1 und Differenz d besteht nach der Definition aus den Gliedern

$$x_1, x_1 + d, x_1 + 2d, \dots, x_1 + (k-1)d, \dots, x_1 + (n-1)d.$$

Danach lautet das allgemeine Glied einer arithmetischen Zahlenfolge

$$x_k = x_1 + (k-1)d \quad (12.1)$$

Für das Endglied ist in (12.1) $k = n$ zu setzen.

BEISPIELE

12.8. Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$x_3 = 0,6, \quad x_n = 7,8, \quad d = 1,2.$$

Es ist das allgemeine Glied anzugeben.

Lösung: Mit x_3 ist auch $k = 3$ gegeben. Nach (12.1) folgt

$$\text{für } k = 3: 0,6 = x_1 + 2 \cdot 1,2, \text{ also } x_1 = -1,8$$

$$\text{für } k = n: 7,8 = -1,8 + (n-1) \cdot 1,2, \text{ also } n = 9.$$

Somit:

$$\underline{x_k = -1,8 + (k-1) \cdot 1,2 \text{ mit } k \in \{1; 2; \dots; 9\}.$$

12.9. Zwischen je zwei Glieder der arithmetischen Folge

$$x_1, x_1 + d, x_1 + 2d, \dots$$

sind m Glieder so zwischenzuschalten, daß wieder eine arithmetische Folge entsteht.

Lösung: Die Differenz der neuen Folge sei d^* . Da zwischen zwei Nachbarglieder jeweils m neue Glieder einzufügen sind, ist d^* der $(m+1)$ -te Teil von d :

$$\underline{d^* = \frac{d}{m+1}.$$

Das Zwischenschalten von Gliedern findet bei der linearen Interpolation Anwendung. Sind z_1 und z_2 zwei benachbarte Tafelwerte mit der Differenz $z_2 - z_1 = d$, so fordert die lineare Interpolation das Zwischenschalten von m gleichabständigen Werten mit der Differenz $d^* = d/(m+1)$.

BEISPIEL

- 12.10. Einer Zahlentafel sind nebenstehende Werte zu entnehmen. Durch lineare Interpolation ist $f(1,23)$ zu ermitteln.

x	$f(x)$
1,20	3,32
1,25	3,49

Lösung: Die Argumente 1,20, 1,21, ..., 1,25 bilden eine arithmetische Folge von 6 Gliedern. Zwischen den Tafelwerten 3,32 und 3,49 sind dementsprechend $m = 4$ gleichabständige Werte mit der Differenz

$$d^* = \frac{17 \cdot 10^{-2}}{5} = 3,4 \cdot 10^{-2}$$

zwischenzuschalten. Dem Argument 1,23 ist dann das Glied

$$3,32 + 3 \cdot 3,4 \cdot 10^{-2} = 3,42$$

zugeordnet. Es ist also

$$\underline{f(1,23) = 3,42.}$$

Die arithmetische Zahlenfolge verdankt ihren Namen dem Umstand, daß das Glied x_k das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist. Nach der Definition der arithmetischen Folge gilt nämlich

$$x_k - d = x_{k-1} \quad \text{und} \quad x_k + d = x_{k+1}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\boxed{x_k = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}} \quad (12.2)$$

Mitunter ist die Summe

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + \cdots + x_n$$

der n Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge zu berechnen. Das bei großem n mühevolle Addieren der Glieder ist vermeidbar. Jede arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz d ergibt, rückwärts gelesen, eine arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz $-d$. Das k -te Glied lautet jeweils $x_k = x_1 + (k-1)d$ bzw. $x_k = x_n - (k-1)d$. Diese Gesetzmäßigkeit wird zur Herleitung einer Summenformel benutzt. Die Addition von

$$s_n = x_1 + (x_1 + d) + \cdots + [x_1 + (k-1)d] + \cdots + [x_1 + (n-1)d]$$

und

$$s_n = x_n + (x_n - d) + \cdots + [x_n - (k-1)d] + \cdots + [x_n - (n-1)d]$$

ergibt

$$2s_n = (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + \cdots + (x_1 + x_n) + \cdots + (x_1 + x_n),$$

$$2s_n = n(x_1 + x_n).$$

Wird noch $x_n = x_1 + (n-1)d$ eingesetzt, so folgt als Summenformel

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} (x_1 + x_n) = \frac{n}{2} [2x_1 + (n-1)d]} \quad (12.3)$$

BEISPIELE

12.11. Es ist die Summe der natürlichen Zahlen 1, 2, ..., n zu berechnen.

Lösung: Die Folge hat n Glieder. Mit $x_1 = 1$ und $x_n = n$ ist

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

12.12. Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$x_1 = 1,4, d = 1,2, s_n = 35,0.$$

Es sind die Anzahl der Glieder und das Endglied zu berechnen.

Lösung: Das Einsetzen der gegebenen Werte in Gl. (12.3)

$$35,0 = \frac{n}{2} [2,8 + (n-1) \cdot 1,2]$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$n^2 + \frac{4}{3}n - \frac{175}{3} = 0 \quad \text{mit} \quad n_1 = 7, \quad n_2 = -\frac{25}{3}.$$

Da die Zahl der Glieder weder gebrochen noch negativ sein kann, scheidet n_2 aus. Somit ist die Anzahl der Glieder: $n = 7$.

Das Endglied ergibt sich aus (12.1) zu

$$x_7 = 1,4 + 6 \cdot 1,2 = \underline{\underline{8,6}}.$$

12.13. Papier für den Zeitungsdruck wird an die Druckerei in Form von Rollen geliefert. Eine Papierrolle habe einen äußeren Durchmesser von 60 cm und einen inneren von 8 cm. Wie lang ist die aufgewickelte Papierbahn, wenn die Papierdicke 0,08 mm beträgt?

Lösung: Eine Papierlage kann in guter Näherung als Zylinder angesehen werden. Die Innendurchmesser der Papierlagen bilden eine arithmetische Zahlenfolge mit

$$x_1 = 8 \text{ cm}, \quad x_n = 59,984 \text{ cm} \approx 60,0 \text{ cm}, \quad d = 0,016 \text{ cm},$$

$$n = \frac{52 \text{ cm}}{0,016 \text{ cm}} = 3250.$$

Ebenso bilden die Umfänge eine arithmetische Zahlenfolge mit

$$u_1 = \pi x_1, \quad u_n = \pi x_n, \quad n = 3250.$$

Die Gesamtlänge der Papierbahn beträgt demnach

$$s_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) = 1625(8\pi + 60\pi) \text{ cm} = \underline{\underline{3471 \text{ m}}}.$$

Kontrollfragen

12.3. Was ist das Kennzeichen einer arithmetischen Zahlenfolge?

12.4. In welchem Zusammenhang steht das lineare Interpolieren mit den arithmetischen Zahlenfolgen?

Aufgaben: 12.3. bis 12.10.

12.1.3. Geometrische Zahlenfolgen

Die Zahlenfolge

$$\{x_k\} = 3, 6, 12, \dots, 3 \cdot 2^{k-1}, \dots$$

zeichnet sich dadurch aus, daß der Quotient x_{k+1}/x_k zweier benachbarter Glieder konstant ist.

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_k\}$, bei der der Quotient x_{k+1}/x_k zweier benachbarter Glieder für alle k denselben Wert q hat, heißt **geometrische Zahlenfolge**.

Sind von einer geometrischen Zahlenfolge x_1 und q gegeben, so heißt ihr 1., 2., 3., ..., k -tes, ... Glied

$$x_1, x_1 q, x_1 q^2, \dots, x_1 q^{k-1}, \dots$$

Das allgemeine Glied der geometrischen Zahlenfolge lautet somit

$$x_k = x_1 q^{k-1} \quad (12.4)$$

Ist $q < 0$, so alterniert die Folge, für $0 < q < 1$ ist die Folge monoton fallend, für $q > 1$ monoton wachsend.

Mit $k = n$ ist (12.4) die Formel für das Endglied.

Nach der Definition der geometrischen Zahlenfolge ist

$$x_{k+1} : x_k = q \quad \text{und} \quad x_k : x_{k-1} = q.$$

Es ergibt sich

$$x_{k+1} : x_k = x_k : x_{k-1} \quad (12.5)$$

oder

$$x_k^2 = x_{k-1} \cdot x_{k+1}.$$

Jedes Glied x_k ($k \neq 1$) der geometrischen Zahlenfolge ist geometrisches Mittel seiner Nachbarglieder. Diesem Umstand verdankt die geometrische Zahlenfolge ihren Namen.

BEISPIELE

12.14. Von einer geometrischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$x_4 = 72, \quad x_n = 128/9, \quad q = 2/3.$$

Wie lautet das allgemeine Glied und wie viele Glieder hat die Zahlenfolge?

Lösung: Für $k = 4$ gilt nach (12.4)

$$72 = x_1 \cdot (2/3)^3, \quad x_1 = 243.$$

Für $k = n$ folgt

$$128/9 = 243 \cdot (2/3)^{n-1},$$

$$n - 1 = \frac{\lg \frac{128}{9 \cdot 243}}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg \frac{2^7}{3^7}}{\lg \frac{2}{3}} = 7,$$

$$\underline{n = 8.}$$

Das allgemeine Glied lautet

$$\underline{x_k = 243 \cdot (2/3)^{k-1}.$$

12.15. Zwischen je zwei Glieder der geometrischen Zahlenfolge

$$x_1, x_1q, x_1q^2, \dots$$

mit $q > 0$ sind m Glieder so einzuschalten, daß wieder eine geometrische Zahlenfolge entsteht. Wie lautet der neue Quotient q^* ?

Lösung: Da zwischen benachbarten Gliedern m Glieder einzufügen sind, gilt

$$q^{m+1} = q,$$

$$\underline{q^* = \sqrt[m+1]{q}.$$

12.16. Für die industrielle Großproduktion ist die Standardisierung der Erzeugnisse eine wesentliche Voraussetzung. Der Abstufung von maßgeblichen technischen Größen wie Durchmesser, Leistung, Drehzahl oder Masse liegen sogenannte Vorzugszahlen zugrunde. Sie sind dem Dezimalsystem angepaßte geometrische Zahlenfolgen.

a) Die Glieder der Vorzugszahlenfolge 5 ($a_0 = 1, a_5 = 10$) sind auf zwei Dezimalstellen zu berechnen.

b) Für die Vorzugszahlenfolge R 20 ($a_0 = 1, a_{20} = 10$) ist der Quotient q zu ermitteln.

Lösung:

a) R 5 besteht aus den sechs Gliedern

$$1, q, q^2, q^3, q^4, q^5 = 10.$$

Aus

$$q^5 = 10$$

folgt

$$q = \sqrt[5]{10} = 1,585.$$

R 5: 1, 1,58, 2,51, 3,98, 6,31, 10,00

Bemerkung: In TGL 27786 sind aus Gründen der Zweckmäßigkeit die Werte 1, 1,60, 2,50, 4,00, 6,30, 10,00 vorgeschrieben. Eine Folge dieses Standards ist z. B., daß eine bestimmte Krangruppe eine maximal zulässige Masse von 6,3 t heben kann.

b) Zwischen $a_0 = 1$ und $a_{20} = 10$ sind $m = 19$ Glieder zwischenzuschalten:

$$\underline{q = \sqrt[20]{10} = 1,122.}$$

12.17. Ein Guthaben b wird zu $p\%$ verzinst. Wie groß ist das Guthaben nach n Jahren?

Lösung: Nach Ablauf eines Jahres betragen die Zinsen

$$z = b \frac{p}{100}.$$

Sie werden am Jahresende dem Guthaben zugeschlagen.

Das im folgenden Jahr zu verzinsende Guthaben beträgt dann

$$b_1 = b + b \frac{p}{100} = b \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Das neue Guthaben ergibt am Ende des 2. Jahres ein Guthaben

$$b_2 = b_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = b \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Am Ende des n -ten Jahres wächst das Guthaben auf den Betrag

$$\underline{b_n = b \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n}.$$

Die Beträge $b, b_1, b_2, \dots, b_n$ bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = 1 + \frac{p}{100},$$

der Zinsfaktor genannt wird.

- 12.18. Die Produktion eines Betriebes erhöhte sich in 5 Jahren von 18,0 Mill. M auf 23,4 Mill. M. Wie groß war das mittlere Wachstumstempo?

Lösung: Die Produktion wächst jährlich im Mittel um den Faktor q und erreicht in 5 Jahren den Wert

$$x_5 = x_1 \cdot q^4.$$

Daraus folgt

$$q = \sqrt[4]{\frac{x_5}{x_1}},$$

$$q = \sqrt[4]{1,300} = 1,068.$$

Das mittlere jährliche Wachstumstempo beträgt 106,8%.

- 12.19. Das Hubvolumen einer Vakuumpumpe beträgt $V_h = 150 \text{ cm}^3$, der Rezipient hat ein Volumen von $V_o = 2000 \text{ cm}^3$. Nach wieviel Hügen hat sich der Druck im Rezipienten bei Annahme konstanter Temperatur auf 10^{-3} des Ausgangsdruckes p_o verringert?

Lösung: Beträgt der Druck im Rezipienten zu Beginn des $(k+1)$ -ten Hubes p_k , so gilt nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE

$$p_k \cdot V_o = p_{k+1} \cdot (V_o + V_h), \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{V_o}{V_o + V_h}.$$

Die Drücke einer Hubfolge bilden eine geometrische Zahlenfolge mit

$$q = \frac{V_o}{V_o + V_h} = 0,930.$$

Aus $q^n = 10^{-3}$ folgt

$$n = \frac{\lg 10^{-3}}{\lg 0,93} = \underline{\underline{95,2}}.$$

Der Druck im Rezipienten erreicht nach etwa 95 Hügen 10^{-3} des Ausgangsdruckes.

Auch für die geometrische Zahlenfolge läßt sich eine Formel für die Summe von n Gliedern herleiten. Wird von der Summe

$$s_n = x_1 + x_1q + x_1q^2 + \dots + x_1q^{n-1} \quad (\text{I})$$

das q -fache gebildet:

$$s_nq = x_1q + x_1q^2 + \dots + x_1q^{n-1} + x_1q^n$$

und subtrahiert, so ergibt sich

$$s_n(1 - q) = x_1 - x_1q^n.$$

Es folgt

$$s_n = x_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1 \quad (12.6)$$

Für $q = 1$ liefert (I) sofort $s_n = nx_1$.

(12.6) läßt sich noch umformen:

$$s_n = \frac{x_1 - x_1q^n}{1 - q} = \frac{x_1 - x_1q^{n-1} \cdot q}{1 - q}, \quad s_n = \frac{x_1 - x_nq}{1 - q} \quad (12.7)$$

BEISPIELE

12.20. Von der geometrischen Folge

$$24, -12, 6, \dots, x_9$$

sind Endglied x_9 und die Summe der Glieder zu berechnen.

Lösung: $x_1 = 24$, $q = -1/2$, $n = 9$ führen mit (12.4) auf

$$x_9 = 24 \cdot (-1/2)^8 = \underline{\underline{3/32}},$$

$$s_9 = 24 \cdot \frac{1 - (-1/2)^9}{1 - (-1/2)} = \underline{\underline{513/32}}.$$

12.21. Die Summe

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

ist zu berechnen.

Lösung: Die Summanden bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = b/a$. Da der Exponent von b die Folge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-1$ durchläuft, ist die Anzahl der Glieder gleich n . Es folgt mit $x_1 = a^{n-1}$, $q = b/a$:

$$s_n = a^{n-1} \cdot \frac{1 - (b/a)^n}{1 - b/a} = \frac{a^n}{a} \cdot \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} = \underline{\underline{\frac{a^n - b^n}{a - b}}}.$$

Folgerung: Der Term $a^n - b^n$ ist durch $a - b$ ohne Rest teilbar. So ist

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$$

$$(1 - x^4) : (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Bekannt ist schon der Fall

$$(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$$

in der Form

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Kontrollfragen

12.5. Was ist das Kennzeichen einer geometrischen Zahlenfolge?

12.6. Wovon hängt das Monotonieverhalten einer geometrischen Zahlenfolge ab?

Aufgaben: 12.11. bis 12.15.

12.2. Der Grenzwert einer Zahlenfolge

Wichtige Probleme der Praxis lassen sich mit den Mitteln der Elementarmathematik nicht lösen. Der Begriff, der über ihre Grenzen hinausführt und die Grundlage für weitergehende Mittel und Methoden der Mathematik bildet, ist der Begriff des Grenzwertes.

Ein elementares Verfahren, den Wert $\sqrt{2}$ zu berechnen, führt schrittweise auf eine Folge rationaler Zahlen:

$$1,4; 1,41; 1,414; \dots$$

deren Quadrat jedesmal kleiner als 2 ist, sich aber dem Wert 2 immer mehr nähert:

$$1,96; 1,9881; 1,999396; \dots$$

Die erstgenannten Zahlen sind daher Näherungswerte für $\sqrt{2}$.



Bild 12.5

Zur Bestimmung des Kreisumfanges kann der Umfang regelmäßiger n -Ecke, die dem Kreis ein- bzw. umbeschrieben sind, berechnet werden. Wird vom einbeschriebenen 6-Eck ausgegangen und die Eckenzahl schrittweise verdoppelt, so schmiegt sich der Umfang des n -Ecks mit wachsender Eckenzahl immer mehr der Kreishinie an (Bild 12.5). Für das einbeschriebene 6-, 12-, 24-, 48-, 96-Eck ... ergibt sich so, wenn der Kreisdurchmesser den Wert 1 hat, eine Folge von Näherungswerten für die Zahl π :

$$3,0000; 3,1058; 3,1326; 3,1394; 3,1410; \dots$$

Den genannten Beispielen ist gemeinsam, daß ein Schritt mehrfach wiederholt wird. Dabei erhebt sich die Frage, ob ein Fortsetzen der Schritte zu noch besseren Werten führt, und ob das Verfahren bei einem Wiederholen der Schritte ohne Ende ein bestimmtes Endergebnis — hier $\sqrt{2}$ bzw. π — liefert. Die Beantwortung fordert die

Betrachtung unendlicher Zahlenfolgen, wobei ausschließlich deren Eigenschaften bei unbeschränkt wachsender Gliednummer von Interesse sind. Im Mittelpunkt steht dabei der Begriff des Grenzwertes. Er ist grundlegend für die höhere Mathematik und unumgänglich, um der Differential- und Integralrechnung ein sicheres Fundament zu geben.

Die Eigenschaften der Zahlenfolgen sind in der strengen Aufeinanderfolge der Glieder begründet. Betrachtet man bei den beiden unendlichen Zahlenfolgen ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\{x_n\} = 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

und

$$\{x_n\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

nur endlich viele Glieder, so ist beiden Folgen gemeinsam, daß sie monoton wachsen. Wird aber das Verhalten beider Zahlenfolgen bei unbeschränkt wachsender Gliednummer verfolgt, so zeigt sich ein wesentlicher Unterschied: Während die erste Folge unbeschränkt wächst und ihre Glieder schließlich jede noch so große feste Zahl überschreiten, ist das Wachstum der zweiten Folge beschränkt. Kein Glied — und sei die Gliednummer noch so groß — ist größer als 1, da der Zähler stets kleiner als der Nenner ist. Auf das unbeschränkte Wachsen der ersten bzw. auf die Beschränktheit der zweiten Folge hat die Beschaffenheit der ersten tausend oder zehntausend Glieder gar keinen Einfluß. Solche Eigenschaften, die wesentlich durch die Glieder mit hoher Gliednummer — gewissermaßen die „fernen“ Glieder — bedingt sind und die das Verhalten einer Zahlenfolge bei unbeschränkt wachsender Gliednummer beschreiben, werden infinitäre¹⁾ Eigenschaften genannt.

Definition

Eine Zahlenfolge heißt **nach unten beschränkt**, wenn sich eine Zahl S_u angeben läßt, so daß gilt:

$$S_u \leq x_k \quad \text{für alle } k.$$

Eine Zahlenfolge heißt **nach oben beschränkt**, wenn sich eine Zahl S_o angeben läßt, so daß gilt:

$$x_k \leq S_o \quad \text{für alle } k.$$

Die Zahl S_u (S_o) heißt **untere (obere) Schranke** der Zahlenfolge. Auf die Zahlengerade bezogen sind auch die Sprechweisen „nach links (rechts) beschränkt“ bzw. „linke (rechte) Schranke“ gebräuchlich.

BEISPIELE

12.22. Die Zahlenfolge

$$\{x_k\} = 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{2}{k}, \dots$$

fällt monoton. Das größte Glied ist $x_1 = 2$, somit ist $S_o = 2$ eine obere Schranke. Mit wachsendem k werden die Glieder immer kleiner. Die Null wird aber nie unterschritten. Deshalb ist $S_u = 0$ eine untere Schranke (vgl. Bilder 12.1 und 12.2). Für alle Glieder gilt somit $0 < x_n \leq 2$.

¹⁾ infinitum (lat.) das Unendliche

12.23. Die Zahlenfolge

$$\{x_k\} = 2, -4, 6, -8, \dots, (-1)^{k+1} \cdot 2k, \dots$$

ist alternierend. Der Betrag der Glieder wächst mit k unbeschränkt. Die Zahlenfolge hat weder eine obere noch eine untere Schranke (vgl. Bilder 12.3 und 12.4).

Für $\{x_k\} = \left\{\frac{2}{k}\right\}$ ist auch die Zahl 3 eine obere Schranke. $S_0 = 2$ ist die kleinste obere Schranke. $S_n = 0$ ist selbst kein Glied der Zahlenfolge. Es läßt sich aber keine größere Schranke angeben. $S_n = 0$ ist größte untere Schranke.

Unendliche Zahlenfolgen, die (nach beiden Seiten) beschränkt sind, deren Glieder also auf der Zahlengeraden einen beschränkten Abschnitt belegen, verdienen besonderes Interesse und sollen genauer untersucht werden.

Bei der schon erwähnten Zahlenfolge

$$\{x_n\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

ist jedes Glied größer als das vorangehende. Trotzdem wird wegen $n-1 < n$ der Wert 1 nie überschritten. Die nähere Umgebung von 1 soll auf diese Besonderheit hin genauer betrachtet werden.

Definition

Unter der ε -Umgebung einer Zahl a versteht man das offene Intervall $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, wobei ε eine positive reelle Zahl ist.

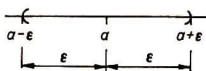


Bild 12.6

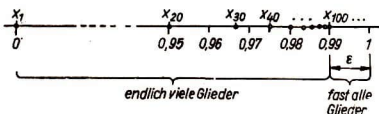


Bild 12.7

In Bild 12.6 ist die ε -Umgebung einer Zahl a dargestellt. Beim vorliegenden Beispiel genügt es, die linksseitige Umgebung $(1 - \varepsilon; 1)$ der Zahl 1 zu betrachten, da rechts von 1 keine Glieder der Folge existieren.

Wird das allgemeine Glied umgeformt:

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

so ist zu erkennen, daß der Abstand eines Gliedes zum Wert 1 beliebig klein wird, wenn n unbeschränkt wächst. Das Glied $x_{100} = 0,99$ hat von 1 den Abstand $1 - x_{100} = 0,01$. Jedes Glied mit größerer Gliednummer ist größer als x_{100} , aber kleiner als 1 und liegt somit in dem Intervall $(0,99; 1)$. Während nur endlich viele Glieder — nämlich $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ — kleiner oder gleich 0,99 sind, liegen **fast alle Glieder** — das heißt, alle von der Gliednummer $n = 101$ an — in der (linksseitigen) ε -Umgebung $(0,99; 1)$ der Zahl 1 (vgl. Bild 12.7). Das gilt für jede beliebig gewählte ε -Umgebung.

So hat $x_{10000} = 0,9999$ nur noch den Abstand 10^{-4} von 1, und fast alle Glieder, nämlich alle Glieder mit einer Gliednummer $n > 10000$, gehören der ε -Umgebung $(1 - \varepsilon; 1)$ mit $\varepsilon = 10^{-4}$ an. Da dieser Sachverhalt bestehen bleibt, wie klein die ε -Umgebung auch gewählt wird, kommen die Glieder der Zahlenfolge dem Wert 1 beliebig nahe.

Die Zahl 1 heißt Grenzwert der Zahlenfolge $\{x_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$.

Definition

Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ hat den Grenzwert g , wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ fast alle Glieder der Folge in der ε -Umgebung $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$ liegen.

Die Definition besagt: So klein auch $\varepsilon > 0$ gewählt wird, von einer bestimmten Gliednummer an liegen alle Folgenglieder in der ε -Umgebung von g . Das sind, da nur endlich viele Glieder außerhalb dieser ε -Umgebung liegen, fast alle Glieder der Folge.

Zahlenfolgen, die einen Grenzwert g haben, heißen **konvergent**¹⁾.

Zahlenfolgen, die keinen Grenzwert haben, heißen **divergent**¹⁾.

Sprech- und Schreibweisen für konvergente Zahlenfolgen sind:

Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ strebt (konvergiert) mit wachsendem n gegen g , geschrieben:

$$x_n \rightarrow g \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

(lies: x_n gegen g für n gegen unendlich) oder

die Zahlenfolge hat für $n \rightarrow \infty$ den Grenzwert g , geschrieben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$$

(lies: limes²⁾ x_n für n gegen unendlich gleich g).

Das unbeschränkte Wachsen der Gliednummer wird durch $n \rightarrow \infty$ angegeben. Das Zeichen ∞ ist keine Zahl. Es drückt aus, daß das Wachsen der Gliednummer ohne Ende ist. Weiter besagt das Gleichheitszeichen in $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$ nicht, daß der Grenzwert schließlich erreicht wird. Bei der Folge $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ ist stets $x_n \neq 1$. Es wird nur festgestellt, daß der Grenzwert $g = 1$ ist.

Laut Definition ist jede konstante Zahlenfolge $\{x_n\} = c$ konvergent mit dem Grenzwert $g = c$, denn in jeder beliebigen ε -Umgebung $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ der Zahl c liegen fast alle (nämlich alle) Glieder der konstanten Folge.

Eine sehr einfache Zahlenfolge ist $\{x_n\} = \{1/n\}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Da der Zähler konstant ist, ist jedes Glied $x_n \neq 0$. Mit wachsendem n werden aber die Glieder immer kleiner und nähern sich immer mehr dem Wert 0. Das Glied x_{1000} ist nur noch um 0,001 von Null entfernt. Dennoch liegen alle Glieder mit $n > 1000$, also fast alle Glieder, in dem Intervall $(0; 0,001)$. Es gilt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Eine Zahlenfolge mit dem Grenzwert $g = 0$ heißt **Nullfolge**. Auch $\{c/n\}$ mit $c \in \mathbb{P}$ und $c = \text{const}$ ist eine Nullfolge, denn sobald $n > |c|$ ist, ist $|c/n| < 1$ und wird mit

¹⁾ vergere (lat.), sich neigen; convergere, zusammenstreben; divergere, auseinanderstreben

²⁾ limes (lat.), die Grenze

unbeschränkt wachsendem n beliebig klein:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0, \quad c \in \mathbb{P} \quad (12.8)$$

Schließlich ist auch $\{1/n^p\}$ mit $p > 0$ eine Nullfolge, denn jede Potenz n^p wächst mit wachsender Basis n unbeschränkt, z. B.

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \dots$$

$$10^1 = 1, 20^1 = 1,072, 30^1 = 1,116, \dots$$

Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \quad p > 0 \quad (12.9)$$

Die Zahlenfolge $\{x_n\} = \{2n\}$ strebt für $n \rightarrow \infty$ keinem bestimmten Zahlenwert g zu. Das unbeschränkte Wachsen der Glieder wird durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

ausgedrückt. Allgemein werden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

uneigentliche Grenzwerte genannt. Obwohl auch hier der Begriff Grenzwert benutzt wird, sind solche Zahlenfolgen natürlich divergent zu nennen. Mit Grenzwert schlechthin ist stets der bestimmte Grenzwert g einer konvergenten Zahlenfolge gemeint. Auch die Zahlenfolge

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

ist divergent, denn für $\varepsilon = 0,5$ enthält weder die ε -Umgebung von 1 noch die von -1 ab einer bestimmten Gliednummer fast alle Glieder der Zahlenfolge. Eine solche Zahlenfolge heißt **unbestimmt divergent**. Divergente Folgen mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞ (bzw. $-\infty$) heißen **bestimmt divergent**.

BEISPIELE

- 12.24. Es ist zu zeigen, daß alle Glieder der Folge $(1/n^2)$ für $n > 100$ im Intervall $(0; 0,0001)$ liegen.

Lösung: Alle Glieder der Folge sind positiv, liegen also auf dem Zahlenstrahl rechts von 0. Andererseits liegen alle Glieder x_n mit $n > 100$ links von 0,0001, denn für $k = 1, 2, 3, \dots$ ist

$$100 + k > 100,$$

$$(100 + k)^2 > 100^2,$$

$$\frac{1}{(100 + k)^2} < \frac{1}{100^2},$$

$$x_{100+k} < x_{100} = 0,0001.$$

Folglich gilt

$$x_n \in (0; 0,0001) \text{ für } n > 100.$$

12.25. Das Verhalten der Folge $\left\{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\right\}$ ist für $n \rightarrow \infty$ zu untersuchen.

Lösung: Die ersten 5 Glieder der Folge lauten

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Die Glieder wechseln ständig das Vorzeichen und liegen auf dem Zahlenstrahl auf beiden Seiten der Zahl Null. Dem Betrage nach werden sie mit wachsendem n immer kleiner, so daß sich die Glieder der Folge von beiden Seiten der Null nähern. Aus

$$x_{100} = -\frac{1}{100} \quad \text{und} \quad x_{101} = \frac{1}{101}$$

folgt z. B., daß alle Glieder mit $n > 101$ — das sind fast alle Glieder der Folge — im Intervall $(-0,01; 0,01)$ liegen (vgl. Bild 12.8). Allgemein liegt ein Glied x_n in der ε -Umgebung $(-\varepsilon; \varepsilon)$ von 0, wenn $|x_n| = 1/n < \varepsilon$, also $n > 1/\varepsilon$ ist. Daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right] = 0.$$

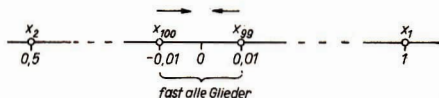


Bild 12.8

12.26. Welchen Grenzwert hat die Zahlenfolge $\left\{\frac{n-1}{2n}\right\}$?

Lösung: Da der Nenner doppelt so schnell wächst wie der Zähler, könnte man annehmen, daß der Grenzwert Null sei. Diese Annahme ist aber falsch, wie schon eine Betrachtung von Gliedern mit hoher Gliednummer zeigt:

$$x_{100} = \frac{99}{200} = 0,495, \quad x_{1000} = \frac{999}{2000} = 0,4995.$$

Daraus ist $g = 1/2$ zu schließen. Das wird durch Bilden des Abstandes von g

$$|x_n - g| = |g - x_n| = \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

bestätigt. Ein Glied x_n liegt in der ε -Umgebung von g , wenn sein Abstand $1/(2n) < \varepsilon$ ist. Diese Bedingung erfüllt jedes Glied mit einer Gliednummer $n > 1/(2\varepsilon)$. Deshalb gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

12.27. Für welche Werte von q ist die Folge $\{q^n\}$ konvergent, für welche divergent?

Lösung:

$|q| > 1$: Wird $|q|$ zerlegt in $|q| = 1 + c$ mit $c > 0$, so folgt $|q|^n = (1 + c)^n = 1 + nc + \dots + c^n > 1 + nc$. Mit wachsendem n wächst $1 + nc$ unbeschränkt und damit erst recht $|q|^n$. Es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty.$$

Für $q > 1$ wird $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ (bestimmt divergent). Für $q < -1$ existiert keine Gliednummer, von der ab alle Glieder in der ε -Umgebung einer bestimmten Zahl g liegen. Da die Glieder abwechselnd positiv oder negativ sind, ist die Folge unbestimmt divergent.

$q = 1$: Es ist $1^n = 1$ für alle n , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1 \text{ (konvergent).}$$

$q = -1$: Es ist $(-1)^{2n} = +1$, $(-1)^{2n+1} = -1$. Es liegt die Folge $1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ vor, die unbestimmt divergent ist.

$|q| < 1$: Wird $|q| = \frac{1}{p}$ mit $p > 1$ gesetzt, so ist $\{|q|^n\} = \left\{\frac{1}{p^n}\right\}$ eine Nullfolge, da p^n mit n unbeschränkt wächst (s. o.). Somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ (konvergent).}$$

Der Grenzwert einer Zahlenfolge läßt sich nicht immer mit elementaren Mitteln berechnen. Ein Beispiel dafür ist die Zahlenfolge

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = (1 + \frac{1}{1})^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Sie soll etwas näher betrachtet werden. Auf Beweise muß dabei im Rahmen dieses Lehrbuches verzichtet werden.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,000
2	2,250
3	2,370
4	2,441
5	2,488
6	2,522
7	2,546
8	2,566
9	2,581
10	2,594
100	2,705
1000	2,717
10000	2,718

Die nebenstehende Tabelle läßt vermuten, daß die Zahlenfolge monoton wächst. Zum Beweis wäre zu zeigen, daß die Ungleichung $x_n < x_{n+1}$, also

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

für jedes n richtig ist. Dieser Beweis läßt sich tatsächlich führen.

Mit wachsender Gliednummer nehmen die Glieder immer weniger zu. Das gibt zu der Vermutung Anlaß, daß die Folge beschränkt ist. Es läßt sich beweisen, daß z. B. die Schranke $S = 3$ nicht überschritten wird. Nun gilt folgender

Satz

■ Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

Nach diesem Satz konvergiert die Folge. Ihr Grenzwert ist eine transzendente Zahl, die nach dem Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707 bis 1783) mit e bezeichnet wird.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828 \dots \quad (12.10)$$

Die Zahl e spielt eine wesentliche Rolle in der höheren Mathematik, z. B. als Basis des natürlichen Logarithmus $\log_e x = \ln x$ und als Basis der Exponentialfunktion $y = e^x$. In der Praxis ist die Funktion $y = ae^{bx}$ von Bedeutung, die Prozesse des Wachstums und des Abklingens beschreibt.

Für das Rechnen mit Grenzwerten sind einige Regeln von Nutzen, die im folgenden Satz zusammengefaßt sind.

Satz

Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ konvergente Zahlenfolgen und konvergiert $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, so konvergiert

$$(x_n + y_n) \rightarrow x + y,$$

$$(x_n - y_n) \rightarrow x - y,$$

$$(x_n y_n) \rightarrow xy$$

und im Falle $y \neq 0$

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \rightarrow \frac{x}{y}.$$

Das bedeutet: Bei konvergenten Zahlenfolgen können die rationalen Rechenoperationen mit dem Grenzübergang vertauscht werden.

Diese auch Grenzwertsätze genannten Regeln für das Rechnen mit konvergenten Zahlenfolgen erleichtern in vielen Fällen das Bestimmen von Grenzwerten. Oft sind vor ihrer Anwendung noch geeignete Umformungen notwendig.

BEISPIELE

12.28. Die Folge $\left\{c + \frac{1}{n}\right\}$ hat den Grenzwert c , denn es ist

$$x_n = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c,$$

$$y_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[c + \frac{1}{n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} c + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = c + 0 = c.$$

12.29. Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3n^2}{2n^2 + 5}$ zu berechnen.

Lösung: Für $n \neq 0$ kann so umgeformt werden, daß in Zähler und Nenner Nullfolgen und konstante Folgen auftreten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3n^2}{2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 3}{2 + \frac{5}{n^2}}.$$

Jetzt werden die Grenzwertsätze angewendet:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 3}{2 + \frac{5}{n^2}} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{0 - 3}{2 + 0} = -\frac{3}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3n^2}{2n^2 + 5} &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

12.30. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n^3 + 1}$ ist zu bestimmen.

Lösung: Kürzen mit n^3 und Anwenden der Grenzwertsätze führt auf Folgen mit bekanntem Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n^3 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n}{1 + 0}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n^3 + 1} &= \infty. \end{aligned}$$

Kontrollfragen

- 12.7. Was wird unter der ε -Umgebung einer Zahl a verstanden?
- 12.8. Wie ist der Grenzwert einer Zahlenfolge definiert?
- 12.9. Wie ist das Zeichen ∞ zu interpretieren?
- 12.10. Welche Folgen werden als Nullfolgen bezeichnet?
- 12.11. Es sind Beispiele zu nennen, in denen der Grenzwert g ein Glied der Zahlenfolge bzw. kein Glied der Zahlenfolge ist.

Aufgaben: 12.16. bis 12.19.

12.3. Anwendungen

Bei der Verzinsung wird dem Grundbetrag b nach einem festgesetzten Zeitabschnitt ein Anteil zugeschlagen, dessen Höhe proportional dem Grundbetrag ist. Der Proportionalitätsfaktor ist durch den vereinbarten Prozentsatz p gegeben. Der Grundbetrag wächst so am Ende des Zeitabschnittes auf den neuen Wert

$$w_1 = b + b \cdot \frac{p}{100} = b \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Beim natürlichen Wachstum liegt insofern ein ähnlicher Sachverhalt vor, als die Größe des Zuwachses proportional der jeweiligen Grundsubstanz ist. Nur erfolgt

der Zuwachs nicht am Ende eines Zeitabschnittes, sondern kontinuierlich — gewissermaßen zu jedem Zeitpunkt. Zum kontinuierlichen Wachstum führt die folgende Überlegung.

Wird der Zeitabschnitt in k gleiche Zeitintervalle mit k Zinsterminen zerlegt, so ist der anteilige Zinssatz p/k anzusetzen. Der Grundbetrag wächst dann durch Zinseszins auf

$$w_k = b \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100} \right)^k.$$

Mit wachsendem k werden die Zeitintervalle immer kürzer. Die Formel für das kontinuierliche Wachstum während einer Zeiteinheit liefert deshalb der Grenzwert

$$w = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100} \right)^k.$$

Zur Ermittlung dieses Grenzwertes soll $\frac{p}{k \cdot 100} = \frac{1}{n}$ gesetzt werden. Dann ist $k = n \cdot \frac{p}{100}$. Mit $k \rightarrow \infty$ geht auch $n \rightarrow \infty$, und es folgt

$$w = \lim_{k \rightarrow \infty} b \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} b \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n \cdot \frac{p}{100}},$$

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} b \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{p}{100}} = b e^{\frac{p}{100}}.$$

Dabei wurde Formel (12.10) verwendet.
Der auf die Zeiteinheit bezogene Wert

$$\alpha = \frac{p}{100} / \text{Zeiteinheit}$$

wird **Wachstumsintensität** genannt. Mit dieser Festsetzung lautet die Formel für das kontinuierliche Wachstum im Zeitraum t

$$w = b e^{\alpha t} \quad (12.11)$$

Auch Prozesse des Abklingens, wie die Abkühlung eines Körpers, die Entladung eines Kondensators oder der radioaktive Zerfall, werden durch dieses Gesetz beschrieben. In diesen Fällen ist α negativ.

Beim **radioaktiven Zerfall** wird $\alpha = -\lambda$ gesetzt:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (12.12)$$

Die Größe λ heißt **Zerfallskonstante**; N_0 ist die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ noch nicht zerfallenen Atomkerne, N die Anzahl der nach dem Verstreichen der Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne.

Als anschauliche Größe wird häufig die **Halbwertszeit** $T_{1/2}$ angegeben. Das ist die Zeit, in der die Anzahl der aktiven Atomkerne eines Radionuklids auf die Hälfte absinkt.

Die Entladung eines Kondensators erfolgt nach dem Gesetz

$$U_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (12.13)$$

Die Konstante $\tau = RC$ wird Zeitkonstante genannt. τ ist die Zeit, in der die Spannung auf den e -ten Teil des Anfangswertes abklingt (vgl. Bild 12.9).

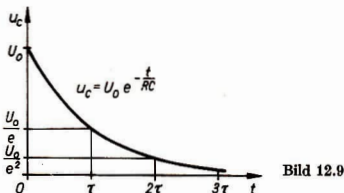


Bild 12.9

BEISPIELE

- 12.31. Die Zerfallskonstante des Radionuklids Ra 226 beträgt $\lambda = 4,28 \cdot 10^{-4} \text{ a}^{-1}$ ($1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$). Wie groß ist die Halbwertszeit $T_{1/2}$?

Lösung:

Aus

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

folgt

$$\lambda T_{1/2} = \ln 2$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \underline{\underline{1620 \text{ a}}}.$$

- 12.32. Ein Kondensator wird über einen Widerstand R entladen. In welcher Zeit ist seine Spannung auf den zehnten Teil ihres Anfangswertes abgeklungen ($R = 800 \text{ k}\Omega$, $C = 2 \text{ }\mu\text{F}$)?

Lösung:

$$\frac{U_C}{U_0} = e^{-\frac{t}{RC}} = 0,1,$$

$$e^{\frac{t}{RC}} = 10,$$

$$\frac{t}{RC} = \ln 10,$$

$$t = RC \cdot \ln 10,$$

$$\underline{\underline{t = 3,7 \text{ s}}}.$$

Aufgaben: 12.20. und 12.21.

12.4. Grenzwerte von Funktionen

12.4.1. Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$

In der Praxis treten nicht selten unstetige Funktionen auf. Ein Beispiel aus der Mechanik ist das plötzliche Auftreten einer Zentralbeschleunigung, wenn ein Schienenfahrzeug aus der Geraden in eine Kreisbahn einbiegt (vgl. Bild 12.10). Ein anderes Beispiel ist das Auftreten von Spannungs- oder Stromstößen bei Schaltvorgängen oder in der Impulstechnik.

In der grafischen Darstellung ist eine Unstetigkeit daran zu erkennen, daß der Graph an einer Stelle $x = a$ unterbrochen ist. Es gibt viele Arten von Unstetigkeiten. Die Bilder 12.11 bis 12.13 zeigen Beispiele von Funktionen, die bei $x = 0$, $x = 1$ bzw. $x = 2$ eine Unstetigkeitsstelle haben. Solche Stellen müssen genauer untersucht werden. Um über das Verhalten einer Funktion an einer Unstetigkeitsstelle a und deren Umgebung Aufschluß zu erhalten, wird für das Argument eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ eingesetzt, die die Unstetigkeitsstelle a als Grenzwert hat. Jedem Wert x_n der Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist ein Funktionswert $y_n = f(x_n)$ zugeordnet. Durchläuft das Argument x die Zahlenfolge $\{x_n\}$, so durchläuft der Funktionswert y die zugeordnete Zahlenfolge $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ (vgl. Bild 12.14). Durch dieses Verfahren ist es möglich, sich der betrachteten Stelle beliebig zu nähern und das Verhalten der Funktion in der Umgebung der Unstetigkeitsstelle zu untersuchen. Dabei ist es notwendig, sich von links und von rechts der betrachteten Stelle zu nähern. Das Vorgehen soll zunächst am Beispiel der Funktion $y = f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ erläutert werden.

An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion keinen Funktionswert, da $f(1) = 0/0$ nicht definiert ist. Mit Ausnahme dieser Stelle ist die Funktion für jedes reelle Argument x definiert (vgl. Bild 12.12). Zur Untersuchung der Unstetigkeitsstelle wird für das Argument x eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit $x_n \rightarrow 1$ eingesetzt. Durch diese Maßnahme nähert man sich „behutsam“ dem kritischen Wert $x = 1$, ohne diesen Wert selbst — für den die Funktion ja nicht definiert ist — als Argument der Funktion zu benutzen.

Eine Zahlenfolge, die sich dem Grenzwert 1 von rechts nähert, ist $\{1 + 10^{-n}\}$. Mit den Gliedern dieser Zahlenfolge als Argument ergibt sich folgende Wertetabelle:

x_n	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y_n	2,1	2,01	2,001	2,0001	...

Je mehr sich x von rechts dem Wert 1 nähert, desto mehr nähert sich der Funktionswert dem Wert 2.

Für eine linksseitige Annäherung an die Unstetigkeitsstelle soll die Folge $\{x_n\} = \{1 - 10^{-n}\}$ gewählt werden. Mit dieser Folge lautet die Wertetabelle

x_n	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y_n	1,9	1,99	1,999	1,9999	...

Für $x_n \rightarrow 1$ nähert sich der Funktionswert wiederum dem Wert 2. In Bild 12.15 ist die Annäherung an die Unstetigkeitsstelle mit den Folgen $\{1 + 1/n\}$ und $\{1 - 1/n\}$ dargestellt.

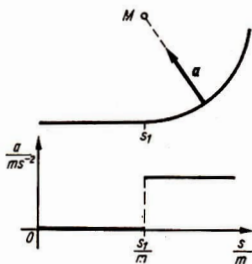


Bild 12.10

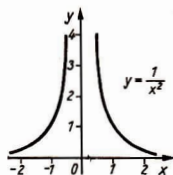


Bild 12.11

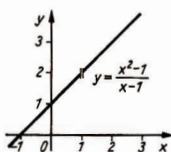


Bild 12.12

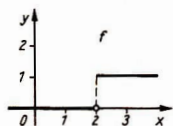


Bild 12.13

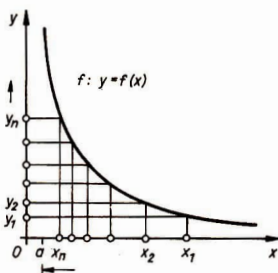


Bild 12.14

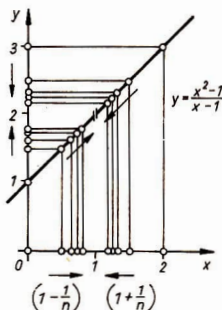


Bild 12.15

Die Untersuchung wurde mit konkreten Zahlenfolgen geführt. Sicher ist das Ergebnis aber nur, wenn für jede beliebige Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \rightarrow 1$ die Folge der zugeordneten Funktionswerte gegen 2 strebt. Ist $\{h_n\}$ mit $h_n > 0$ eine Nullfolge — etwa $\{10^{-n}\}$, $\{1/n\}$ oder eine andere —, so hat $\{x_n\} = \{1 + h_n\}$ den Grenzwert 1. Werden die Glieder dieser Folge in den Term $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{(1 + h_n)^2 - 1}{(1 + h_n) - 1} = \frac{1 + 2h_n + h_n^2 - 1}{h_n} = \frac{2h_n + h_n^2}{h_n} = 2 + h_n.$$

Der Folge $\{x_n\} = \{1 + h_n\}$ ist also die Folge der Funktionswerte

$$\{y_n\} = \{2 + h_n\}$$

zugeordnet, die für $h_n \rightarrow 0$ den Grenzwert 2 hat.

Bei linksseitiger Annäherung mit der Folge $\{x_n\} = \{1 - h_n\}$ wird

$$\frac{(1 - h_n)^2 - 1}{1 - h_n - 1} = \frac{1 - 2h_n + h_n^2 - 1}{-h_n} = \frac{-2h_n + h_n^2}{-h_n} = 2 - h_n.$$

Die Folge $\{y_n\} = \{2 - h_n\}$ hat ebenfalls den Grenzwert 2.

Das Ergebnis, daß für jede beliebige Folge $x_n \rightarrow 1$ der Funktionswert $y_n \rightarrow 2$ strebt, kann in der Form $\lim_{x_n \rightarrow 1} f(x_n) = 2$ geschrieben werden. Der Index n wird schließlich noch fortgelassen, und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Als weiteres Beispiel soll die Funktion $y = f(x) = \frac{x}{|x|}$ untersucht werden. Sie ist an der Stelle $x = 0$ wegen $f(0) = 0/0$ nicht definiert. Zur Annäherung von rechts und links an die Stelle $x = 0$ werden die Nullfolgen $\{x_n\} = \{10^{-n}\}$ und $\{x_n\} = \{-10^{-n}\}$ verwendet:

$x_n = 10^{-n}$	0,1	0,01	0,001	...
y_n	1	1	1	...
$x_n = (-10^{-n})$	-0,1	-0,01	-0,001	...
y_n	-1	-1	-1	...

Je nachdem, von welcher Seite man sich der Stelle $x = 0$ nähert, ergeben sich zwei verschiedene Grenzwerte (vgl. auch Bild 12.16). Die rechts- bzw. linksseitige Annähe-

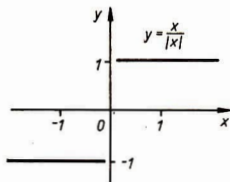


Bild 12.16

rung an eine Unstetigkeitsstelle a wird durch die Schreibweise

$$x \rightarrow a + 0 \quad \text{bzw.} \quad x \rightarrow a - 0$$

unterschieden.

Bei der Funktion $y = f(x) = x/|x|$ ergeben sich zwei verschiedene Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1.$$

Definition

Es sei f eine Funktion, deren Definitionsbereich X mindestens eine rechtsseitige Umgebung von a enthält. Hat die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ den Grenzwert g^+ für jede beliebige von rechts gegen a konvergierende Folge $\{x_n\}$, so heißt g^+ **rechtsseitiger Grenzwert der Funktion f an der Stelle a** , geschrieben:

$$f(x) \rightarrow g^+ \quad \text{für} \quad x \rightarrow a + 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = g^+.$$

Dementsprechend ist der **linksseitige Grenzwert der Funktion f erklärt**, geschrieben:

$$f(x) \rightarrow g^- \quad \text{für} \quad x \rightarrow a - 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) = g^-.$$

Gilt $f(x) \rightarrow g$ für jede beliebige Folge $x \rightarrow a$, so heißt g **schlechthin Grenzwert der Funktion f** , geschrieben:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g.$$

Es gilt der

Satz

Ist $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) = g$, so gilt auch $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$.

Für den Grenzwert einer Funktion gelten folgende Grenzwertsätze:

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

BEISPIELE

12.33. Die Unstetigkeitsstelle der Funktion $y = f(x) = 1/x^2$ ist zu untersuchen.

Lösung: Für $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert. Sie hat dort eine Polstelle. Werden als Nullfolgen $\{x_n\} = \{10^{-n}\}$ mit $x_n \rightarrow +0$ und $\{x_n\} = \{-10^{-n}\}$ mit $x_n \rightarrow -0$ benutzt, so lautet die Wertetabelle

x_n	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...	x_n	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	...
y_n	10^2	10^4	10^6	...	y_n	10^2	10^4	10^6	...

y_n wächst in beiden Fällen unbegrenzt. Das wird durch Einsetzen in $f(x) = 1/x^2$ bestätigt:

$$\begin{aligned} f(10^{-n}) &= \frac{1}{(10^{-n})^2} & f(-10^{-n}) &= \frac{1}{(-10^{-n})^2} \\ &= 10^{2n} & &= 10^{2n} \end{aligned}$$

Es folgen somit bei links- bzw. rechtsseitiger Annäherung an 0 die uneigentlichen Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

- 12.34. Die Funktion $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$ ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert. Ihr Verhalten in der Umgebung von $x = 2$ ist zu untersuchen.

Lösung:

Wird für x die Folge $x = 2 + h$ eingesetzt, so ergibt sich

$$y = f(2 + h) = 2^{\frac{1}{(2+h)-2}} = 2^{\frac{1}{h}}.$$

Zur Bildung des rechtsseitigen Grenzwertes sei die Nullfolge $\{h_n\} = \{1/n\}$ mit $n \rightarrow \infty$ gewählt. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{h \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

Der linksseitige Grenzwert ergibt sich für eine Nullfolge $h \rightarrow -0$, z. B. $\{h_n\} = \{-1/n\}$ mit $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{h \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0.$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert sind verschieden (vgl. Bild 12.17).

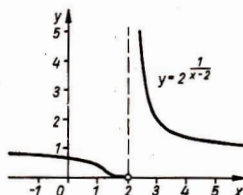


Bild 12.17

Eine gebrochenrationale Funktion $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist überall dort nicht definiert, wo der Nenner $h(x)$ verschwindet. Haben $g(x)$ und $h(x)$ dieselbe Nullstelle $x = a$, so kann wegen $\frac{g(a)}{h(a)} = \frac{0}{0}$ über das Verhalten der Funktion an dieser Stelle zunächst nichts ausgesagt werden. Eine solche Stelle wird **Lücke** der gebrochen-

rationalen Funktion genannt. Im Fall einer Lücke an der Stelle $x = a$ kann das Verhalten der Funktion auch auf folgendem Wege untersucht werden. Wegen $g(a) = 0$ und $h(a) = 0$ läßt sich in Zähler und Nenner der Faktor $(x - a)$ abspalten:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x - a) g_1(x)}{(x - a) h_1(x)}.$$

Wird nun zur Grenzwertbildung eine Folge $x \rightarrow a$ mit $x \neq a$ eingesetzt, so kann mit $(x - a) \neq 0$ gekürzt werden:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) g_1(x)}{(x - a) h_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{h_1(x)}.$$

Der letzte Grenzwert ist dann weiter zu untersuchen.

Bei einer gebrochenrationalen Funktion $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ sind somit folgende Fälle zu unterscheiden:

$$g(a) = 0, \quad h(a) \neq 0 \quad \text{Nullstelle}$$

$$g(a) \neq 0, \quad h(a) = 0 \quad \text{Pol}$$

$$g(a) = 0, \quad h(a) = 0 \quad \text{Lücke}$$

BEISPIELE

12.35. Der Term

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

kann für $x \neq 1$ gekürzt werden. Deshalb ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

12.36. Die Unstetigkeitsstelle der Funktion

$$y = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

ist zu untersuchen.

Lösung: Die Funktion ist für $x = 2$ nicht definiert, da $h(2) = 0$ ist. Ebenso ist $g(2) = 0$. Der Nenner läßt sich in ein Produkt umformen; der Quotient kann für $x \neq 2$ mit $(x - 2)$ gekürzt werden:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}.$$

$x = 2$ ist weiterhin Unstetigkeitsstelle, wobei

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x - 2} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x - 2} = -\infty.$$

Oft ist zur Ermittlung des Grenzwertes eine besondere Beweisführung notwendig. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$, die für $x = 0$ nicht definiert ist. Es genügt hier, sich auf den rechtsseitigen Grenzwert zu beschränken. Da es sich

um eine gerade Funktion handelt:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x),$$

sind rechts- und linksseitiger Grenzwert gleich. Nach Bild 12.18 ist

Dreieck $OAD < \text{Sektor } OBD < \text{Dreieck } OBC$,

also

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}.$$

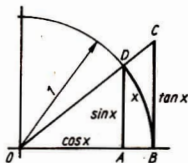


Bild 12.18

Für $x > 0$ kann durch $\frac{\sin x}{2}$ dividiert und der Kehrwert gebildet werden:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Für $x \rightarrow 0$ ist $\frac{\sin x}{x}$ zwischen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ eingeschlossen. Daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(12.14)

x	$\sin x$
$0^\circ = 0,00000$	0,00000
$1^\circ = 0,01745$	0,01745
$2^\circ = 0,03491$	0,03490
$3^\circ = 0,05236$	0,05234
$4^\circ = 0,06981$	0,06976
$5^\circ = 0,08727$	0,08716

Für x -Werte nahe Null gilt demnach

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1, \text{ also } \sin x \approx x.$$

Für kleine x -Werte kann daher $\sin x$ durch x (im Bogenmaß) ersetzt werden. Das zeigt auch nebenstehende Tabelle.

BEISPIEL

12.37. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x)$ ist zu berechnen.

Lösung: Für $x = 0$ ist $\cot x$ nicht definiert. Eine Umformung führt auf bekannte Grenzwerte:

$$x \cdot \cot x = \frac{x \cdot \cos x}{\sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x.$$

Auf Grund der Grenzwertsätze ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$$

Somit folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x) = 1.$$

Kontrollfragen

- 12.12. Durch welches Vorgehen wird das Verhalten einer Funktion an einer Stelle $x = a$ untersucht?
- 12.13. Was bedeuten die Schreibweisen $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a + 0$ und $x \rightarrow a - 0$?
- 12.14. Welche Bedeutung hat die Formel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ für das Rechnen in der Praxis?

Aufgabe: 12.22.

12.4.2. Die Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion ist in einem zusammenhängenden Intervall I stetig, wenn ihr Graph in diesem Intervall eine ununterbrochene Kurve ist. Dazu ist notwendig, daß die Funktion an jeder Stelle dieses Intervalls I definiert ist und daß an jeder Stelle des Intervalls rechts- und linksseitiger Grenzwert gleich sind und mit dem Funktionswert übereinstimmen.

Definition

Eine Funktion f , deren Definitionsbereich eine Umgebung der Stelle a enthält, ist an der Stelle $x = a$ genau dann **stetig**, wenn

1. die Funktion an der Stelle $x = a$ definiert ist,
2. der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ existiert,
3. $f(a) = g$ gilt.

Ist auch nur eine der in dieser Definition genannten Forderungen nicht erfüllt, dann ist die Funktion an der Stelle $x = a$ unstetig.

Definition

Eine Funktion heißt in einem Intervall stetig, wenn sie in jedem Punkt dieses Intervalls stetig ist.

Überall stetig sind z. B. alle ganzrationalen Funktionen, alle gebrochenrationalen Funktionen, deren Nenner nirgends verschwindet, die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ und die Exponentialfunktion $y = c \cdot a^x$.

BEISPIELE

12.38. $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist bei $x = 1$ unstetig, da die Funktion für $x = 1$ nicht definiert ist.

12.39. $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$ ist bei $x = 2$ unstetig. Zwar ist dort die Funktion definiert: $f(2) = 1$; jedoch existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nicht, weil rechts- und linksseitiger Grenzwert voneinander verschieden sind.

12.40. $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ ist bei $x = 1$ unstetig. Zwar ist die Funktion überall definiert und rechts- und linksseitiger Grenzwert stimmen überein:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1.$$

Es fehlt aber die Übereinstimmung von Grenzwert und Funktionswert:

$$f(1) = 0 \neq 1$$

(vgl. Bild 12.19).

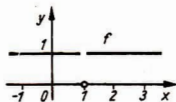


Bild 12.19

Die in Beispiel 12.38. betrachtete Funktion ist bei $x = 1$ unstetig, weil $f(1)$ nicht definiert ist. Da rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und einander gleich sind, liegt es nahe, den fehlenden Funktionswert durch die Definition $f(1) = g = 2$ zu ergänzen. Mit dieser Festsetzung läßt sich die Unstetigkeit bei $x = 1$ beseitigen. Eine solche Unstetigkeit wird **hebbare Unstetigkeit** genannt. Bei $y = f(x) = 1/x^2$ liegt keine hebbare Unstetigkeit vor, weil $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ein uneigentlicher Grenzwert ist.

Kontrollfragen

12.15. Welche Forderungen muß eine Funktion erfüllen, wenn sie stetig sein soll?

12.16. Wann liegt eine hebbare Unstetigkeit vor?

Aufgabe: 12.23.

12.4.3. Der Grenzwert des Funktionswertes für $x \rightarrow \pm \infty$

Häufig interessiert das „Verhalten einer Funktion im Unendlichen“. Gemeint ist damit der Grenzwert, dem der Funktionswert $f(x)$ zustrebt, wenn x unbeschränkt wächst bzw. fällt. Für eine solche Untersuchung wird für x eine unbeschränkt wach-

sende bzw. unbeschränkt fallende Zahlenfolge eingesetzt und die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = h$$

gebildet. In vielen Fällen erweist sich dabei eine Umformung des Terms $f(x)$ als zweckmäßig.

BEISPIELE

12.41. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (-2x^3 + 5x - 12) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left(-2 + \frac{5}{x^2} - \frac{12}{x^3} \right) = \mp \infty$. In dieser Rechnung sind zwei Grenzwerte – für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ – berechnet.

12.42. Für $y = f(x) = \frac{1}{x^k}$ ($k > 0$, $k \in \mathbb{N}$) ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Das bedeutet, die Gerade $y = 0$, also die x -Achse, ist Asymptote der Funktion.

$$12.43. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3 - \frac{6}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

Hier wurden zwei Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ berechnet.

Die Funktion $y = f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 + 1}$ hat die Gerade $y = 1,5$ zur Asymptoten (vgl. Bild 12.20).

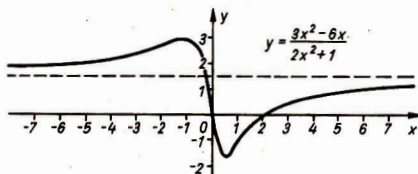


Bild 12.20

Kontrollfragen

- 12.17. Was wird unter dem Verhalten einer Funktion im Unendlichen verstanden?
- 12.18. Wie wird das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen untersucht? Welche Fälle sind zu unterscheiden?
- 12.19. Welches Verhalten zeigt eine echt gebrochene rationale Funktion im Unendlichen?

Aufgabe: 12.24.

12.5. Aufgaben

- 12.1. Von den nachstehend genannten Zahlenfolgen sind die ersten fünf Glieder anzugeben ($k = 1, 2, 3, \dots$).

a) $\{3k\}$ b) $\{2 - 3k\}$ c) $\{2^{k-1}\}$ d) $\{10^{-k}\}$
 e) $\left\{\frac{k}{k+1}\right\}$ f) $\{(-1)^{k+1} \cdot 2^k\}$

- 12.2. Die Folgen der Aufgabe 12.1. sind hinsichtlich Monotonie und Vorzeichenwechsel zu charakterisieren.

- 12.3. Für die nachstehenden arithmetischen Folgen sind das allgemeine Glied und n anzugeben.

a) $-8, -5, \dots, 13$ b) $17, 13, \dots, -19$
 c) $2,4, 2,9, \dots, 12,4$

- 12.4. Wie lautet das allgemeine Glied der arithmetischen Folge?

a) $x_3 = 10, x_{12} = 55$ b) $x_7 = 5,4, x_{11} = 2,4$
 c) $x_2 = 4, x_7 = 6$

- 12.5. Aus den angegebenen Werten der arithmetischen Folge $\{x_k\}$, $k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$ sind x_9 und s_{15} zu berechnen.

a) $x_5 = 5, d = 2$ b) $x_3 = 7,2, x_7 = 2,4$
 c) $x_6 = 5,5, s_8 = 74$

- 12.6. a) Wie lautet die Summe der ersten n ungeraden Zahlen?

- b) Die Summe aller durch 11 teilbaren Zahlen zwischen 100 und 1000 ist zu berechnen.

- 12.7. Durch lineare Interpolation sind aus nachstehender Tabelle die Funktionswerte für $x = 4,00$ (0,02) 4,10 zu berechnen.

x	4,0	4,1	4,2
$f(x)$	1,3863	1,4110	1,4351

- 12.8. Aus der Tabelle der Aufgabe 12.7. sind die x -Werte für die Funktionswerte 1,3950, 1,4083, 1,4242 durch lineare Interpolation zu ermitteln.

- 12.9. Es sind die fehlenden Größen der arithmetischen Folge zu berechnen.

	x_1	d	n	x_n	s_n
a)	-2	-	11	-	143
b)	2	3	-	50	-
c)	10	-3,5	-	-	-143
d)	-	-2	-	-22	-102

- 12.10. Es sind 68 Rohre so zu stapeln, daß jede Schicht auf Lücke mit der darunterliegenden Schicht liegt. Die oberste Schicht soll aus 5 Rohren bestehen. Wieviel Rohre müssen in die unterste Schicht gelegt werden, und wieviel Schichten umfaßt der ganze Stapel?

- 12.11. Für die geometrische Folge $\{x_k\}$ ist q zu bestimmen.

a) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, \dots$ b) $16, -8, 4, \dots$ c) $\sqrt[3]{6}, 3\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{6}, \dots$

12.12. Für die endliche geometrische Folge ist n zu bestimmen.

a) $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \dots, 96$ b) $16, -24, \dots, -121,5$

12.13. Für die geometrische Folge $\{x_k\}$ sind x_3 und s_3 zu berechnen.

a) $x_1 = 80, q = 0,5$ b) $x_1 = 0,25, q = -2$

12.14. An einem Regelwiderstand lassen sich 10 verschiedene Widerstände abgreifen. Der erste beträgt $10 \text{ k}\Omega$, der zehnte 750Ω . Jeder Widerstand fällt gegenüber dem vorangehenden um den gleichen Prozentsatz ab.

- a) Wie groß ist der prozentuale Abfall von Widerstand zu Widerstand?
b) Wie groß ist der vierte Widerstand?

12.15. Der Anschaffungswert einer Maschine betrug 65000 M. Durch jährliche Abschreibung von $8,5\%$ hat sie noch einen Buchwert von 32000 M. Nach wieviel Jahren ist das der Fall?

12.16. Welche der angegebenen Zahlenfolgen sind beschränkt? Im gegebenen Falle sind die engsten Schranken anzugeben ($n = 0, 1, 2, \dots$).

a) $\{(1/2)^n\}$ b) $\{10^n\}$ c) $\{10^{-n}\}$ d) $\{(n+1)^2\}$

12.17. Von den nachstehenden Folgen ($n = 1, 2, \dots$) ist zu zeigen, daß sie Nullfolgen sind. Wie groß ist das Intervall, in dem alle Glieder mit $n > 100$ liegen?

a) $\left\{ \frac{10}{n+2} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ c) $\{10^{-n}\}$

12.18. Die nachstehenden Grenzwerte sind zu berechnen.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+5}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+1}$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 10n + 1}{5n^2 - 1}$

12.19. Das Konvergenzverhalten der Folgen der Aufgabe 12.16. ist festzustellen. Gegebenenfalls ist der Grenzwert anzugeben.

12.20. Nach welcher Zeit verdoppelt sich der Holzbestand eines Waldes, wenn die Wachstumsintensität $\alpha = 0,028 \text{ a}^{-1}$ ($1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$) beträgt?

12.21. Die Halbwertszeit von Plutonium 237 ist zu bestimmen ($\lambda = 3,85 \text{ s}^{-1}$).

12.22. Der Grenzwert ist durch Kürzen vor dem Grenzübergang zu bestimmen.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x^2-2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x-10}{x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{x-2}$

12.23. Die Stetigkeit der Funktion $y = f(x)$ ist zu untersuchen.

a) $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ b) $y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ c) $y = f(x) = \frac{x}{x}$

12.24. Das Verhalten der Funktion $y = f(x)$ im Unendlichen ist zu untersuchen.

a) $y = f(x) = x^3 - 10x$ b) $y = f(x) = -x^3 + 12x^2 + 9$
c) $y = f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2}$

12.25. Von den nachstehend genannten Zahlenfolgen sind die ersten fünf Glieder anzugeben ($k = 1, 2, 3, \dots$).

- a) $\{k^2 - 1\}$ b) $\{2 - 10^{-k}\}$ c) $\left\{k - \frac{1}{k}\right\}$
 d) $\left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right\}$ e) $\left\{\frac{1}{k!}\right\}$ f) $\left\{\frac{1 + (-1)^k}{2}\right\}$

12.26. Die Folgen der Aufgabe 12.25. sind hinsichtlich Monotonie und Vorzeichenwechsel zu charakterisieren.

12.27. Für die nachstehenden arithmetischen Folgen sind das allgemeine Glied und n anzugeben.

- a) $-3, -2, 2, \dots, 9$ b) $18, 2, 16, 7, \dots, 1, 7$
 c) $2, 4, 2, \dots, 28, 4$

12.28. Wie lautet das allgemeine Glied der arithmetischen Folge?

- a) $x_5 = 2, x_9 = -8$ b) $x_6 = 4, 9, x_{11} = 3, 1$
 c) $x_3 = -20, x_6 = -16$

12.29. Aus den angegebenen Werten der arithmetischen Folge $\{x_k\}$, $k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$, sind x_9 und s_{15} zu berechnen.

- a) $x_{12} = -12, d = -3$ b) $x_6 = 4, d = 0, 4$
 c) $x_4 = 8/3, x_{11} = 8$ d) $x_5 = 3, s_6 = 0$
 e) $s_3 = 33, s_5 = 70$

12.30. Wie groß ist die Summe aller dreiziffrigen natürlichen Zahlen?

12.31. Gegeben ist eine arithmetische Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$. Es ist zu zeigen, daß auch a) $x_1, x_3, x_5, \dots$, b) $x_2, x_7, x_{11}, \dots$ eine arithmetische Folge ist. Wie groß ist die Differenz d^* der neuen Folge?

12.32. Setzt man in die Funktionsgleichung $y = mx + b$ für x die Glieder einer Folge $\{x_k\}$ ein, so bilden die Funktionswerte eine Folge $\{y_k\}$. Wie lautet das allgemeine Glied dieser Folge, wenn $\{x_k\}$ eine arithmetische Folge mit $x_k = x_1 + (k - 1)d$ ist? Es sind y_1 und d^* anzugeben.

12.33. Es ist zu zeigen, daß $\{y_k\} = \{mk + b\}$ eine arithmetische Folge ist.

12.34. Es sind die fehlenden Größen der arithmetischen Folge zu berechnen.

	x_1	d	n	x_n	s_n
a)	—	4	22	—	110
b)	—	-2,5	25	-40	—
c)	—	1,5	29	32	—
d)	4,7	—	—	21,5	563,3

12.35. Für die geometrische Folge $\{x_k\}$ ist q zu bestimmen.

- a) $18, 12, 8, \dots$ b) $25, 30, 36, \dots$
 c) $4, -2\sqrt{2}, 2, \dots$ d) $1, -x^2, x^4, \dots$
 e) $27x^3, 18x^2y, 12xy^2, \dots$

12.36. Aus der geometrischen Folge der Zehnerpotenzen $\{x_k\} = 1, 10, 100, 1000, \dots$ ist die Folge $\{y_k\}$ mit $y_k = \lg x_k$ zu bilden. Was für eine Folge ergibt sich?

- 12.37. Aus der geometrischen Folge $\{x_k\} = x_1, x_1q, x_1q^2, \dots$ ist die Folge $\{y_k\}$ mit $y_k = \lg x_k$ zu bilden.
- 12.38. Für die endliche geometrische Folge ist n zu bestimmen.
- a) $-\frac{27}{8}, -\frac{9}{4}, \dots, -\frac{8}{27}$ b) $64, 32, \dots, \frac{1}{2}$
- 12.39. Für die geometrische Folge $\{x_k\}$ sind x_5 und s_5 zu berechnen.
- a) $x_1 = 218,7, q = 2/3$ b) $x_1 = -48, q = -1,5$
- 12.40. Die Stärke der Schallempfindung ist nach dem WEBER-FRECHNERSCHEN Gesetz annähernd dem Logarithmus der Schallintensität J proportional. Man definiert deshalb den Lautstärkepegel durch
- $$L = \left(10 \lg \frac{J}{J_0}\right) \text{ phon}$$
- mit $J_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Ein Ton von 1000 Hz mit der Schallintensität J_0 liegt an der unteren Hörschwelle und hat laut Definition die Lautstärke $L_0 = 0$ phon.
- a) Welche Folge bildet $\{L_k\}$, wenn $\{J_k\}$ eine geometrische Folge ist?
 b) Wie groß ist die Lautstärke bei einer Schallintensität von $5 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$?
 c) Wie groß ist die Lautstärke bei der 2fachen (4fachen) in b) angegebenen Schallintensität?
 d) Welchen Wert muß die Schallintensität haben, damit die doppelte Lautstärke der Aufgabe b) empfunden wird?
- 12.41. Eine Rotationspumpe führt einem Kompressor mit jeder Umdrehung des Antriebsmotors eine Gasmenge von 100 cm^3 zu. Der Anfangsdruck im Kompressor beträgt 1 bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N/m}^2$), sein Volumen 5000 cm^3 .
- a) Wie groß ist der Druck im Kompressor nach 25 Umdrehungen des Antriebsmotors, wenn die Kompressionswärme abgeführt wird?
 Hinweis: Man geht vom Gasvolumen im unkomprimierten Zustand aus.
 b) Wie groß ist der Druckanstieg nach einer Umdrehung?
 c) Wie groß ist der Druck p_k nach k Umdrehungen?
- 12.42. Die Papierformate sind nach TGL 0-476 standardisiert. Das Ausgangsformat der Hauptreihe A ist ein rechteckiger Bogen mit einem Flächeninhalt von 1 m^2 . Die Seitenlängen des Bogens stehen im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$. Jedes kleinere Format entsteht aus dem vorangehenden durch Halbieren der längeren Rechteckseite.
- a) Wie lang sind die Abmessungen (in mm) des Ausgangsformates A0?
 b) Was für eine Folge bilden die großen (die kleinen) Rechteckseiten a_k (b_k) der Hauptreihe A?
 c) Wie lauten die Abmessungen des Formates A10?
- 12.43. Die Mikrorillen einer Langspielplatte bilden einen Kreislring mit einem Innendurchmesser von 138 mm und einem Außendurchmesser von 290 mm. Die Spieldauer bei einer Umlauffrequenz von 33 min^{-1} beträgt 1420 s.
- a) Welchen Weg legt der Saphir beim Abspülen der Platte zurück?
 b) Wie groß ist der Rillenabstand?
- 12.44. Eine Drehmaschine soll 11 Drehzahlstufen mit konstantem Stufensprung erhalten. Wie lauten die Drehzahlen, wenn die niedrigste 120 min^{-1} , die höchste 1200 min^{-1} beträgt?
- 12.45. Mit einem Draht von 0,2 mm Durchmesser soll eine Spule von 2400 Windungen gewickelt werden. Wie lang ist der Wickeldraht, wenn die Spule bei einem lichten Durchmesser von 0,8 cm eine Länge von 2 cm hat ($\pi \approx 3,14$)?

- 12.46. Das Produktionsvolumen eines großen Industriebetriebes soll innerhalb von vier Jahren auf 128% anwachsen. Wie groß muß der auf den jeweiligen Jahresanfang bezogene jährliche Produktionszuwachs sein, wenn ein gleichmäßiges Anwachsen der Produktion angenommen wird?
- 12.47. Auf welchen Betrag wächst ein Grundbetrag von 5200 Mark bei 4% Zinseszins a) in 5 Jahren, b) in 10 Jahren an? c) In welcher Zeit hat sich ein Grundbetrag bei 3,5% Zinseszins verdoppelt?
- 12.48. Die Produktion eines Betriebes soll in 5 Jahren von 12,5 Mio M auf 17 Mio M gesteigert werden.
- Welches jährliche Wachstumstempo ist zu planen?
 - Wie groß ist die jährlich zu planende Zuwachsrate?
 - Um wieviel Mio M ist die Produktion im 1., 2., 3., 4., 5. Jahr zu steigern?
- 12.49. Welche der angegebenen Zahlenfolgen sind beschränkt? Im gegebenen Falle sind die engsten Schranken anzugeben ($n = 0, 1, 2, \dots$).
- $\{(-2)^{n+1}\}$
 - $\{(-2)^{-n}\}$
 - $\left\{\frac{n}{10n+10}\right\}$
 - $\{\sqrt{n+1}\}$
 - $\{\ln(n+1)\}$
 - $\left\{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\right\}$
- 12.50. Von den nachstehenden Folgen ($n = 1, 2, \dots$) ist zu zeigen, daß sie Nullfolgen sind. Wie groß ist das Intervall, in dem alle Glieder mit $n > 100$ liegen?
- $\left\{\frac{(-1)^n \cdot 10}{n^2}\right\}$
 - $\left\{\sqrt[3]{2} - 1\right\}$
- 12.51. Für welche Werte von c sind die angegebenen Folgen Nullfolgen?
- $\{n^c\}$
 - $\{c^n\}$
- 12.52. Die nachstehenden Grenzwerte sind zu berechnen.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+20}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{2^n}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n^2+1}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3+1}{10n^3+2n^2}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+c^n}, |c| < 1$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n-1)}{n^2+1}$
- 12.53. Das Konvergenzverhalten der Folgen der Aufgabe 12.25. ist festzustellen. Gegebenenfalls ist der Grenzwert anzugeben.
- 12.54. Ein Wald hat einen Holzbestand von 110000 m³. Der Holzbestand wurde 15 Jahre zuvor auf 80000 m³ geschätzt. Wie groß ist die auf das Jahr bezogene Wachstumsintensität?
- 12.55. Die Flüssigkeit in einem Gefäß kühlt sich innerhalb von 15 Minuten von 90°C auf 70°C ab. Es sei vorausgesetzt, daß die Abkühlung nach dem NEWTON'schen Abkühlungsgesetz erfolgt. Wie lange muß man warten, bis die Temperatur von 70°C auf 50°C gesunken ist, wenn die Umgebungstemperatur $T_U = 20^\circ\text{C}$ beträgt? [$T = (T_A - T_U)e^{-kt} + T_U$, T_A Anfangstemperatur, T_U Umgebungstemperatur.]
- 12.56. Ein Kondensator wird über einem Widerstand entladen ($C = 47 \mu\text{F}$, $R = 270 \text{ k}\Omega$).
- Wann ist seine Spannung auf den e -ten Teil abgeklungen?
 - In welcher Zeit ist die Anfangsspannung von $U_0 = 150 \text{ V}$ auf 10 V gesunken?

- 12.57. Beim Einschalten eines Stromkreises mit der Induktivität L erfolgt das Ansteigen der Stromstärke nach dem Gesetz

$$I = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

- a) Welchem Wert nähert sich die Stromstärke mit zunehmender Zeit (Begründung)?
 b) Wann ist die Stromstärke den e -ten Teil von der theoretischen Endstromstärke entfernt (Zeitkonstante τ)?

- 12.58. Der Grenzwert ist durch Einsetzen einer geeigneten Folge zu bestimmen.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$

- 12.59. Die Stetigkeit der Funktion $y = f(x)$ ist zu untersuchen.

a) $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

b) $y = f(x) = \frac{x}{x} + \frac{1}{x - 2}$

c) $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

d) $y = f(x) = 2^{\frac{1}{(x-1)^4}}$

e) $y = f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

- 12.60. Das Verhalten der Funktion $y = f(x)$ im Unendlichen ist zu untersuchen.

a) $y = f(x) = -4x^4 + 10x^3 + 3$

b) $y = f(x) = \frac{1}{1 + x}$

c) $y = f(x) = \frac{x}{1 + x}$

d) $y = f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$

e) $y = f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$

f) $y = f(x) = \frac{2x^3 + 1}{10x^2 + 5x}$

g) $y = f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - 10x}$

h) $y = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

13. Einführung in die Differentialrechnung

13.0. Vorbemerkung

Kurventangente, Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Temperaturgefälle sind Begriffe, deren mathematischer Inhalt gemeinsam durch den Begriff der Ableitung erfaßt wird. Die Ableitung ist der zentrale und grundlegende Begriff der Differentialrechnung. Nach ihrer Definition als Grenzwert und anschaulichen Erklärung wird die Ableitung der Potenzfunktion hergeleitet. Da auf Grundlage der Ableitung viele Probleme der Praxis gelöst werden, gilt es, das Bilden der Ableitung zu formalisieren und mit Hilfe einiger Grundregeln zu einer leicht durchführbaren Operation zu gestalten. Es folgt die Erklärung des Differentials mit einfachen Anwendungen in der Fehlerrechnung.

13.1. Die Ableitung einer Funktion

Eine Reihe wichtiger naturwissenschaftlicher und technischer Fragestellungen führt auf eine Problematik, die von grundlegender Art ist und der sich mit elementaren Mitteln nicht beikommen läßt. Ein Beispiel ist die Ermittlung der Geschwindigkeit v_0 eines ungleichförmig bewegten Körpers zu einem Zeitpunkt t_0 .

Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit gleichbleibend und durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\text{Wegdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

gegeben (vgl. Bild 13.1).

Bei der ungleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt eine andere. Der Differenzenquotient $\Delta s / \Delta t$ liefert deshalb nur eine mittlere Geschwindigkeit für das Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ (vgl. Bild 13.2). Da sich die Geschwindigkeiten am Anfang und am Ende der Meßstrecke um so weniger unterscheiden, je kürzer das Zeitintervall Δt und damit die Meßstrecke Δs ist, liegt es nahe, die Augenblicksgeschwindigkeit als Grenzwert

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{I})$$

zu definieren.

Auf dasselbe mathematische Problem führt die Aufgabe, an eine Kurve im Punkte P_0 die Tangente t zu legen. Die Lage einer Geraden ist durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und die Richtung der Geraden gegeben. Das Tangentenproblem läuft deshalb darauf hinaus, die Richtung der Tangente in einem Punkte P_0 zu bestimmen.

Gegeben sei die Kurve der Funktion $y = f(x)$. Durch P_0 wird eine Sekante $P_0P = s$ gelegt. Wandert P , wie in Bild 13.3 angedeutet, auf der Kurve in Richtung P_0 , so dreht sich die Sekante und strebt für $P_0 \rightarrow P$ einer Grenzlage zu. Diese Grenzlage wird als Tangente t der Kurve im Punkte P_0 definiert. Die hier gegebene Definition der Tangente erfaßt auch Sonderfälle. So kann, wie Bild 13.4 zeigt, die Tangente die Kurve auch durchdringen.

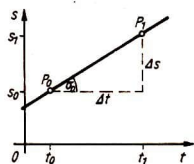


Bild 13.1

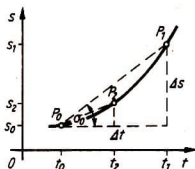


Bild 13.2

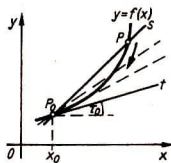


Bild 13.3

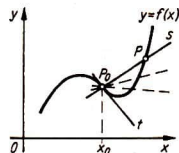


Bild 13.4

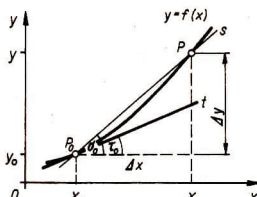


Bild 13.5

Nach dieser Vorbereitung kann das Tangentenproblem rechnerisch erfaßt werden. Um zum Tangentenanstieg zu gelangen, wird vom Sekantenanstieg ausgegangen, der durch den **Differenzenquotienten**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan \sigma_0 \quad (\text{II})$$

gegeben ist (vgl. Bild 13.5). Für $\Delta x \rightarrow 0$ wandert $P \rightarrow P_0$; die Sekante dreht sich in die Tangentenlage. Der Tangentenanstieg ist somit der Grenzwert des Sekantenanstieges für $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan \tau_0. \quad (\text{III})$$

Für den Differenzenquotienten (II) einer Funktion ist noch eine andere Schreibweise üblich. Wird $x = x_0 + \Delta x$ gesetzt, so lautet der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Zwei verschiedene Aufgabenstellungen führten auf die Grenzwerte (I) und (III). Beide haben den gleichen mathematischen Inhalt und bilden das Fundament der Differentialrechnung.

LEIBNIZ (1646 bis 1716) und NEWTON (1643 bis 1727) gelangten unabhängig voneinander zur Differentialrechnung. LEIBNIZ vom Tangentenproblem und NEWTON vom Geschwindigkeitsproblem ausgehend.

Definition

Ist f eine in der Umgebung von x_0 definierte Funktion und existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

so heißt die Funktion **differenzierbar** an der Stelle x_0 . Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und **1. Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 genannt.

Das Bilden des Grenzwertes wird Differenzieren oder Ableiten genannt. Der Vorgang heißt Differentiation.

Im Zusammenhang mit der grafischen Darstellung der Funktion f ist $f'(x_0)$ der Anstieg der Tangente an die Kurve von f im Punkte $P_0(x_0; y_0)$:

$$\boxed{f'(x_0) = \tan \tau_0} \quad (13.1)$$

Der **Tangentenanstieg** wird auch **Kurvenanstieg** in P_0 genannt.

BEISPIEL

13.1. Für die Kurve der Funktion $f: y = f(x) = 0,2x^2$ ist der Kurvenanstieg an der Stelle $x_0 = 2$ zu ermitteln.

Lösung:

Zunächst ist der Differenzenquotient zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)} &= \frac{0,2(x_0 + \Delta x)^2}{0,2x_0^2} \\ \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} &= \frac{0,2[(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2]}{0,2[2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2]} \end{aligned}$$

Der Differenzenquotient lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{0,2[2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x} \\ &= 0,2(2x_0 + \Delta x). \end{aligned}$$

Der Kurvenanstieg ergibt sich daraus für $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \tan \tau_0 &= f'(x_0) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0,2(2x_0 + \Delta x) \\ &= 0,4x_0. \end{aligned}$$

Mit $x_0 = 2$ wird

$$\underline{\underline{\tan \tau_0 = 0,8.}}$$

Unter Verwendung der Definition des Tangens:

$$\tan \tau_0 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{0,8}{1},$$

läßt sich die Tangente in P_0 leicht zeichnen (Bild 13.6).

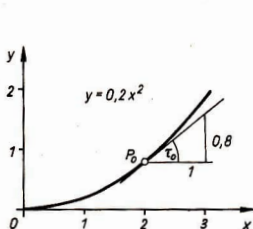


Bild 13.6

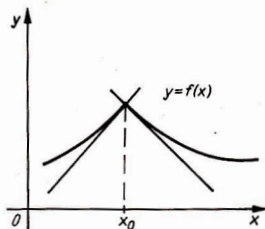


Bild 13.7

Wie Beispiel 13.1. zeigt, kann eine Funktion an jeder Stelle eines Argumentbereiches differenzierbar sein. So ist für das Beispiel

$$f'(3) = 0,4 \cdot 3 = 1,2 \quad \text{und} \quad f'(-2) = 0,4 \cdot (-2) = -0,8.$$

Definition

Eine Funktion f heißt im Intervall I differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls differenzierbar ist.

Die Funktion $y = f(x) = 0,2x^2$ ist überall differenzierbar, weil der Grenzwert $f'(x_0) = 0,4x_0$ für jedes endliche x_0 existiert und endlich ist. Da viele Funktionen zumindest in einem Intervall differenzierbar sind, wird bei x_0 der Index fortgelassen und die Ableitung in der Form $f'(x)$ geschrieben. Die Wertepaare $\{x; f'(x)\}$ bilden wieder eine Funktion, die **Ableitungsfunktion** $f' = \{x; f'(x)\}$.

Für die Differenzierbarkeit gilt folgender

Satz

Ist eine Funktion an der Stelle x_0 unstetig, so ist sie dort nicht differenzierbar.

Die Funktion $y = 1/x$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, weil sie bei x_0 unstetig ist. Aus der Stetigkeit folgt aber nicht die Differenzierbarkeit. So ist die in Bild 13.7 dargestellte Funktion an der Stelle x_0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Die Kurve der Funktion hat im Punkte $P_0(x_0; y_0)$ zwei Tangenten, also an der Stelle x_0 zwei verschiedene Ableitungen. Sie ergeben sich, wenn die Ableitung als links- und als rechtsseitiger Grenzwert gebildet wird.

Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit einer Funktion.

Satz

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Für die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ist nämlich notwendig, daß der Zähler des Differenzenquotienten für $\Delta x \rightarrow 0$ eine Nullfolge ist. Damit jedoch

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$$

ist, muß

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

sein. Das ist aber nach 12.4.2. die Voraussetzung der Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x .

Kontrollfragen

13.1. Wie wird die 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle definiert?

13.2. Wie ist der Differenzenquotient und wie ist die 1. Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 geometrisch zu deuten?

Aufgabe: 13.1.

13.2. Die Ableitung der Potenzfunktion

Es wäre mühsam, die Ableitung einer Funktion stets vom Differenzenquotienten ausgehend zu bilden. Es genügt, die Ableitungen von einigen einfachen Funktionen zu kennen, um mit Hilfe von Ableitungsregeln eine Vielzahl von Funktionen differenzieren zu können.

Für die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ (n positiv, ganzzahlig) lautet der Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Für $x \neq x_0$ ergibt die Division

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \dots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}.$$

Der Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ liefert die Ableitung an der Stelle x_0 :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}) \\ &= n \cdot x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Da $y = f(x) = x^n$ überall stetig ist und der eben berechnete Grenzwert an jeder Stelle x_0 des Definitionsbereiches existiert, folgt

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(13.2)

d. h., $y = f(x) = x^n$ hat die Ableitungsfunktion $y' = f'(x) = nx^{n-1}$. Das für $n \in \mathbb{N}$ gewonnene Ergebnis gilt auch für jeden reellen Exponenten n . Bei $n \notin \mathbb{N}$ ist jedoch der jeweilige Definitionsbereich zu beachten.

BEISPIELE

13.2. a) $y = f(x) = x^5$

$$y' = f'(x) = 5x^{5-1} = \underline{5x^4}$$

b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \underline{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$$

Die Ableitungsfunktion ist nur für $x > 0$ definiert. Für $x < 0$ lautet sie

$$\underline{y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}}$$

c) $y = f(x) = 1/x^3$.

$$y = f(x) = x^{-3}$$

$$y' = f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \underline{-\frac{3}{x^4}}$$

d) $y = f(x) = x$

$$y' = f'(x) = 1x^{1-1} = x^0$$

$$y' = f'(x) = \underline{1}$$

- 13.3. Für die Kurve der Funktion $y = f(x) = x^3$ sind der Kurvenanstieg an der Stelle $x_0 = -2$ und der Tangentenwinkel in P_0 zu bestimmen.

Lösung:

Die Ableitungsfunktion lautet

$$y' = f'(x) = 3x^2.$$

Für $x_0 = -2$ ergibt sich

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12.$$

Die Tangente an die Kurve der Funktion hat im Punkte $P_0(-2; -8)$ den Anstieg $\tan \tau_0 = 12$. Der Tangentenwinkel beträgt $\underline{\tau_0 = 85,24^\circ}$.

- 13.4. In welchem Punkt hat die Tangente an die Kurve von $y = f(x) = 1/x$ eine Neigung von 135° gegen die x -Achse?

Lösung:

Für die Ableitungsfunktion ergibt sich

$$y' = f'(x) = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = \underline{-\frac{1}{x^2}}.$$

Das Argument x ist so zu wählen, daß $\tan \tau = y' = -1$ wird. Die Gleichung

$$\underline{-\frac{1}{x^2} = -1}$$

hat die Lösungen

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +1.$$

Die Tangente hat in den Punkten $P_1(-1; -1)$ und $P_2(1; 1)$ eine Neigung von 135° gegen die x -Achse.

Aufgaben: 13.2. bis 13.4.

13.3. Einfache Ableitungsregeln

Zur Bildung der Ableitung einer ganzrationalen Funktion ist die Kenntnis von einigen Ableitungsregeln notwendig.

Satz

Die Ableitung einer Konstanten ist gleich Null:

$$(c)' = 0 \quad (13.3)$$

Die Funktion $y = f(x) = c$ ist eine Parallele zur x -Achse im Abstand c . Daher ist der Differenzenquotient unabhängig von Δx stets gleich Null:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

Die Ableitung als dessen Grenzwert ist ebenfalls 0.

Satz

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x) \quad (13.4)$$

Es sei vorausgesetzt, daß die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ existiert und bekannt ist. Für die Funktion $y = a \cdot f(x)$ lautet der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a f(x + \Delta x) - a f(x)}{\Delta x} = a \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Unter Anwendung des Grenzwertsatzes (vgl. 12.4.1.) folgt

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= a \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Satz

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen der Summanden:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x) \quad (13.5)$$

Für die Funktion $y = f(x) = u(x) + v(x)$ lautet der Differenzenquotient

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Existieren die Ableitungen der Summanden, so folgt nach dem Grenzwertsatz von 12.4.1.

$$y' = f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Regel (13.5) gilt auch für endlich viele Summanden sowie Differenzen.

BEISPIELE

13.5. Die Funktion $y = f(x) = x^2 - \frac{3}{x} + \sqrt{x} + 2$ hat die Ableitung

$$\underline{\underline{y' = f'(x) = 2x + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.}}$$

13.6. An welchen Stellen hat die Kurve der Funktion $y = f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 12$ waagerechte Tangenten?

Lösung:

Bei waagerechter Tangente ist $\tau = 0^\circ$ und damit $f'(x) = \tan \tau = 0$. Somit ist die Forderung

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 0$$

zu erfüllen. Die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Die Kurve der Funktion hat bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ waagerechte Tangenten (vgl. Bild 13.8).

Aufgaben: 13.5. bis 13.13.

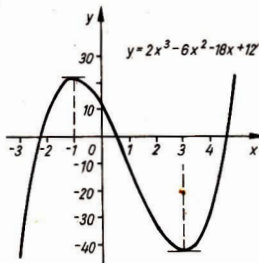


Bild 13.8

13.4. Das Differential einer Funktion

In der Praxis wird oft die Funktionswertänderung Δy einer Funktion f bei Änderung des Argumentes x um Δx benötigt. So interessiert bei der Berechnung einer Größe aus einem Meßwert der Einfluß eines Meßfehlers auf das Ergebnis.

Der Zusammenhang zwischen Δy und Δx ist — von linearen Funktionen abgesehen — kompliziert:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Als Näherung für y ergibt sich eine einfachere Beziehung, wenn — geometrisch gesprochen — der Graph der Funktion im Intervall $(x; x + \Delta x)$ durch die Tangente an der Stelle x ersetzt wird (vgl. Bild 13.9). In Analogie zur Bezeichnung des Sekantendreiecks PQP_1 werden die Katheten im Tangentendreieck PQT mit dx bzw. dy bezeichnet. Bei Änderung des Arguments um Δx ändert sich der Funktionswert um Δy , während die Tangentenordinate eine Änderung dy erfährt. Es leuchtet anschaulich ein, daß Δy näherungsweise durch dy ersetzt werden kann, wenn $\Delta x = dx$ hinreichend klein ist.

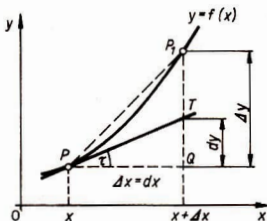


Bild 13.9

Die Änderung dy der Tangentenordinate wird **Differential** der Funktion $y = f(x)$ genannt. Das Differential dy läßt sich aus dem Tangentendreieck PQT berechnen:

$$dy = \tan \tau \cdot dx$$

oder, mit $\tan \tau = f'(x)$:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

(13.6)

Wegen $y = f(x)$ ist auch die Schreibweise $df(x) = f'(x) \cdot dx$ üblich. Es ist dx das Differential der Funktion $y = f(x) = x$: $dy = df(x) = (x)' \cdot dx = dx$.

BEISPIELE

13.7. a) Das Differential der Funktion $y = f(x) = 3x^2 - 5x$ lautet

$$dy = df(x) = d(3x^2 - 5x) = (3x^2 - 5x)' \cdot dx = \underline{\underline{(6x - 5) dx}}.$$

- b) Eine additive Konstante in der Funktionsgleichung ändert das Differential der Funktion nicht:

$$d(3x^3 - 5x + 8) = (3x^3 - 5x + 8)' \cdot dx = (6x - 5) dx.$$

$$13.8. d(3\sqrt{x} - 4) = (3x^{\frac{1}{2}} - 4)' \cdot dx = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{3}{2\sqrt{x}} dx.$$

Während stets $\Delta x = dx$ gilt, ist im allgemeinen $dy \neq \Delta y$; denn geometrisch ist Δy die Änderung des Funktionswertes und dy die Änderung der Tangentenordinate. Nur bei der Geraden fallen Kurve und Tangente zusammen, so daß einzig für die lineare Funktion $dy = \Delta y$ gilt. Es ist aber bei hinreichend kleinem $\Delta x = dx$

$$\Delta y \approx dy$$

(13.7)

Entscheidend für die Näherung $\Delta y \approx dy$ ist, daß sie mit kleiner werdendem Δx an Güte zunimmt. Genauer heißt das: Die Differenz $\Delta y - dy$ wird nicht nur absolut kleiner, sondern auch die relative Abweichung

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}$$

geht mit verschwindendem Δx gegen Null. Von diesem Sachverhalt gibt Bild 13.10 eine anschauliche Vorstellung. Er soll noch an dem konkreten Beispiel der Funktion $y = f(x) = x^3$ demonstriert werden.

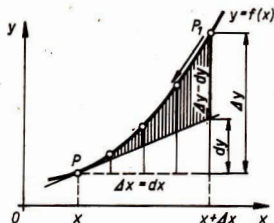


Bild 13.10

Für $y = f(x) = x^3$ ist

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3, \quad \Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$dy = (x^3)' \Delta x, \quad dy = 3x^2 \Delta x.$$

An der Stelle $x = 1$ gilt z. B.

$$\Delta y = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$dy = 3\Delta x.$$

Gegenüber der exakten Funktionswertdifferenz sind beim Differential die Glieder mit höheren Potenzen der Argumentsänderung Δx vernachlässigt. Nachstehende

Tabelle zeigt, wie mit kleiner werdendem Δx die Güte der Näherung $\Delta y \approx dy$ zunimmt.

x	Δx	Δy	dy	$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}$
1	0,1	0,331	0,3	9,4%
1	0,01	0,030301	0,03	0,99%
1	0,001	0,003003001	0,003	0,10%

BEISPIELE

13.9. Mit welchem Fehler ist das Kugelvolumen behaftet, wenn der Kugeldurchmesser mit $d = (3,00 \pm 0,01)$ cm gemessen wird?

Lösung:

$$V = \frac{\pi}{6} d^3,$$

$$dV = \frac{\pi}{6} \cdot 3d^2 \cdot \Delta d,$$

$$\Delta V \approx dV.$$

Mit $\Delta d = 0,01$ cm folgt

$$\underline{\underline{\Delta V \approx \pm 0,141 \text{ cm}^3.}}$$

13.10. Näherungsweise ist $\sqrt{1,06}$ zu berechnen.

Lösung:

$$\text{Aus } y = \sqrt{x} \text{ und } dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x \text{ folgt mit } y + \Delta y \approx y + dy$$

$$y + \Delta y \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x.$$

Mit $x = 1$ wird daraus die Näherungsformel

$$y + \Delta y \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x,$$

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x$$

gewonnen. Für $\Delta x = 0,06$ ergibt sich

$$\underline{\underline{\sqrt{1,06} \approx 1,03.}}$$

Die relative Abweichung vom genaueren Wert $\sqrt{1,06} = 1,02956$ beträgt 0,04%.

Eine wichtige Folgerung von (13.6) ist, daß sich die Ableitung einer Funktion als Quotient der beiden Differentiale dy und dx schreiben läßt:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

(13.8)

Die Ableitung einer Funktion wird wegen dieses Zusammenhanges auch als **Differentialquotient** bezeichnet. Er wird „dy nach dx“ gelesen.

Wegen $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gilt auch

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad (13.9)$$

Das ist die einprägsame Definitionsgleichung von LEIBNIZ für den Differentialquotienten, der — wie in (13.8) festgestellt — gleich der Ableitung der Funktion an der Stelle x ist. Formel (13.9) ist besonders für Anwendungen nützlich.

Bei der ungleichförmigen Bewegung ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Die Augenblicksgeschwindigkeit ist der Grenzwert

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (13.10)$$

Für den freien Fall ergibt sich damit aus

$$s = f(t) = \frac{g}{2} t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) = gt.$$

Aus dem Mittelwert für die Beschleunigung $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ folgt die Beschleunigung zum Zeitpunkt t

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (13.11)$$

Für den freien Fall ist $v = gt$, also

$$a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = g.$$

BEISPIEL

13.11. Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/s. Zur Zeit $t = 0$ wird das Fahrzeug mit einer Verzögerung von $a = 4$ m/s² gebremst.

- Welche Geschwindigkeit hat das Fahrzeug 3 s nach dem Einleiten des Bremsvorganges?
- Wie groß ist die Bremsstrecke bis zum Stillstand des Fahrzeuges?

Lösung:

- Die Bewegung verläuft nach der Gleichung

$$s(t) = v_0 t - \frac{a}{2} t^2.$$

Die Augenblicksgeschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 - at.$$

Für $t = 3$ s ergibt sich $v = 8$ m/s.

b) Aus $v(t) = 0$ folgt $t = v_0/a$ und

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{a}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Der Bremsweg beträgt 50 m.

Kontrollfragen

13.3. Wie ist das Differential definiert, und wie ist es am Graph der Funktion zu deuten?

13.4. Welche Anwendung findet das Differential in der Praxis?

Aufgaben: 13.14. bis 13.16.

13.5. Aufgaben

13.1. Es ist der Differenzenquotient aufzustellen und davon ausgehend die Ableitung zu bilden.

a) $y = f(x) = x$

b) $y = f(x) = x^2$

c) $y = f(x) = 0,2x^3 - 2x + 1,8$

13.2. Es ist die 1. Ableitung zu bilden.

a) $y = f(x) = x^3$

b) $y = f(x) = x^5$

c) $a = f(s) = s^{12}$

d) $y = f(x) = 1/x^4$

e) $k = f(r) = 1/r^5$

f) $w = f(u) = 1/u^5$

g) $v = f(u) = \sqrt{u}$

h) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

i) $s = f(r) = \frac{1}{\sqrt[3]{r}}$

13.3. Wie groß ist der Anstieg der Kurve der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = 1$?

a) $y = f(x) = x^2$

b) $y = f(x) = x^n$

c) $y = f(x) = x^{-2}$

d) $y = f(x) = x^{-n}$

13.4. Unter welchem Winkel schneiden die Kurven der Funktionen $y = f(x) = x^2$ und $y = g(x) = x$ einander?

Es ist der spitze Schnittwinkel anzugeben.

Hinweis: Als Schnittwinkel zweier Kurven wird der Schnittwinkel der Tangenten im Schnittpunkt definiert.

13.5. Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren.

a) $y = 2x^4 - 3x + 6$

b) $y = 12x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 2$

c) $y = ax^3 + 3a^2x^2 + a^3x + c$

d) $y = (x + a)^3(x - a)$

13.6. Desgl.

$$a) y = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \quad b) y = a\sqrt{x} - \sqrt{bx} \quad c) y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

13.7. Welchen Winkel bildet die Tangente an die Kurve der Funktion $y = f(x) = 0,1x^2 + 0,4x - 2$ an der Stelle $x_1 = -4,5$ mit der x -Achse?

13.8. An welchen Stellen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = 0,2x^3 + 1,2x^2 + 0,8x - 2$ bildet die Tangente mit der x -Achse einen Winkel von 135° ?

13.9. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = -x^3 + 3x - 18$ die x -Achse?

13.10. Wo hat die Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = 2x^3 - 6,6x^2 + 2,4x - 1,8$ waagerechte Tangenten?

13.11. Im Scheitelpunkt der Normalparabel liegt die Tangente waagrecht. Die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel $y = x^2 + px + q$ sind zu bestimmen.

13.12. Wie heißt die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Kurve die folgenden Bedingungen erfüllt?

Die Kurve hat im Punkt $P(2; -4)$ den Anstieg -3 und schneidet die Koordinatenachsen in $x = 4$ und $y = 4$.

$$\text{Ansatz: } y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

13.13. Für welche ganzrationale Funktion 2. Grades geht die Kurve durch die Punkte $P_1(-2; 0,2)$ und $P_2(1; 7,4)$ und hat in P_1 den Anstieg $4,2$?

13.14. Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15 \text{ m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. Seine Bewegung verläuft dann nach der Gleichung

$$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

a) Seine Geschwindigkeit nach $t = 1 \text{ s}$, 2 s , 3 s ist zu berechnen ($g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$).

b) Die Ergebnisse von a) sind zu deuten.

c) Wie groß ist die maximale erreichte Höhe?

d) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Körpers beim Wiederauftreffen auf dem Boden?

13.15. Es ist das Differential der Funktion zu bilden.

$$a) y = f(x) = -2x^3 + 6x - 5$$

$$b) w = w(u) = \sqrt{u}$$

$$c) r = r(t) = at^2 - 2$$

$$d) s = s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

$$e) W = W(v) = \frac{1}{2} mv^2$$

$$f) A(h) = \frac{1}{2} gh$$

13.16. a) Ein Kreis hat einen Durchmesser von $1,98 \text{ m}$. Welcher Fehler tritt bei der Flächenberechnung auf, wenn $d \approx 2 \text{ m}$ gesetzt wird?

b) Ein Wolframdraht hat einen Widerstand von 2000Ω . Durch Temperaturerhöhung erhöht sich sein Widerstand um 15Ω . Um wieviel Ampere verringert sich die Stromstärke bei einer Spannung von 220 Volt ?

13.17. Es ist der Differenzenquotient aufzustellen und davon ausgehend die Ableitung zu bilden.

$$a) y = f(x) = x^3$$

$$b) y = f(x) = 3x^2$$

$$c) y = f(x) = -2x^3 + 5x$$

$$d) s = s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

$$e) v = v(t) = g \cdot t$$

$$f) r = r(u) = 1,2u^2 + 3$$

13.18. Desgl.

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$

b) $r = r(t) = t\sqrt{t}$

Hinweis: Im Differenzenquotienten ist der Zähler rational zu machen.

13.19. Unter welchem Winkel schneiden die Kurven der Funktionen $y = f(x) = x^3$ und $y = g(x) = x$ einander?

Es ist der spitze Schnittwinkel anzugeben.

Hinweis: Als Schnittwinkel zweier Kurven wird der Schnittwinkel der Tangenten im Schnittpunkt definiert.

13.20. Die Gleichung der Tangente in P_0

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ist aufzustellen.

a) $y = x^3, x_0 = 2$

b) $y = \frac{1}{x}, x_0 = -2$

c) $y = x^3, x_0 = -0,5$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 2,25$

13.21. Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren.

a) $y = -0,4x^3 + \sqrt{2}x^2 + 1,2x - 8$

b) $y = f(t) = (3t - 1)^2$

c) $y = \frac{3x + 2}{3x^3}$

d) $y = \frac{2x^3 - x + 1}{x^2}$

e) $y = \frac{-6x^4 + 3x^3 + x - 2}{4x^2}$

f) $y = x^4 \sqrt[4]{x^3}$

g) $y = \frac{2x - 3}{\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{1 - x}{x + \sqrt{x}}$

13.22. Die Kurve mit der Gleichung $y = 0,2x^2 - 1,8x^3 + 3x + 2,4$ ist mit Hilfe von Punkten und Tangenten für $x = 0, 1, \dots, 6$ zu zeichnen.13.23. Welchen Winkel bildet die Tangente an die Kurve der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_1 mit der x -Achse?

a) $y = \frac{2x^3 - 1}{x}, x_1 = 2/3$

b) $y = \sqrt[3]{x^2}, x_1 = 1,5$

13.24. An welchen Stellen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = -0,3x^4 - 0,4x^3 + 0,6x^2 + 0,2x$ bildet die Tangente mit der x -Achse einen Winkel von 135° ?13.25. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ die x -Achse?

a) $y = 0,1x^4 - 0,2x^2 - 0,3$

b) $y = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})^2$

c) $y = 0,2(x^3 - 3x)$

13.26. Die Kurve $y = kx^3 - 0,4x$ hat an der Stelle $x = 2$ den Anstieg $m = -1,6$. Welchen Wert hat k ?

13.27. Wo und unter welchem Winkel schneiden die Kurven einander?

a) $y = x^3$ und $y = \sqrt[3]{x}$

b) $y = 0,5x^3 + 1$ und $y = -0,5x + 2$

c) $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ und $y = 2x - 1$

- 13.28. Wo hat die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ waagerechte Tangenten?
- $y = 0,75x^4 + 2x^3 - 4,5x^2 - 18x + 15$
 - $y = x^5 - x^3 + 0,25x - 3$
- 13.29. Die Tangentengleichung in P_0 ist aufzustellen.
- $y = 2x^2 - 3x - 1, x_0 = 0,5$
 - $y = -4x^3 - x + 2, x_0 = -0,5$
- 13.30. Für die Parabel $y = Ax^2 + Bx + C$ sind die Scheitelpunktskoordinaten zu bestimmen.
- 13.31. Unter welcher Bedingung hat die Kurve der Funktion $y = ax^3 + bx$ keine waagerechten Tangenten?
- 13.32. Wie heißt die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Kurve die folgenden Bedingungen erfüllt?
Die Kurve schneidet die x -Achse bei $x = -2$ unter einem Winkel von 45° und die y -Achse in $y = 2$ unter einem Winkel von 90° .
Ansatz: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- 13.33. Die Kurve einer Funktion 3. Grades geht durch die Punkte $P_1(-1; 0)$, $P_2(0; 2)$, $P_3(1; 0)$ und schneidet die x -Achse in P_1 unter dem Winkel von 45° .
- Wie heißt die Funktionsgleichung?
 - Wie lautet die 3. Nullstelle?
- 13.34. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die die Kurve mit der Gleichung $w = u^2 - 1,5u + 4$ berührt und die Gerade mit der Gleichung $w = 2u - 3$ unter einem rechten Winkel schneidet?
- 13.35. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten der Funktion $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ genügen, damit ihre Kurve nirgends eine waagerechte Tangente hat?
- 13.36. a) Die Kante eines Kupferwürfels von 1 cm Kantenlänge verlängert sich durch Erwärmen um $3,2 \cdot 10^{-3}$ cm. Wie groß ist die Volumenzunahme des Würfels?
b) Von $\sqrt[3]{1000}$ ausgehend ist ein Näherungswert für $\sqrt[3]{1030}$ zu bestimmen.
Hinweis: Es kann $x = 1000$, $\Delta x = 30$ gewählt werden, da die Kurve von $y = \sqrt[3]{x}$ in der Umgebung von $x = 1000$ nur eine geringe Krümmung ausweist.
- 13.37. Ein PKW fährt mit der Geschwindigkeit v_0 . Er wird mit einer Verzögerung von $a = 4 \text{ m/s}^2$ gebremst und kommt nach einer Bremsstrecke von 25 m zum Stehen.
Wie groß war seine Geschwindigkeit, und welche Zeit wurde für den Bremsvorgang benötigt?
- 13.38. Ein Geschoß wird unter dem Winkel α gegen die Horizontalebene abgeschossen (Bild 13.11). Seine Bewegungskomponenten in horizontaler und vertikaler Richtung sind dann (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes):

$$x = x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y = y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

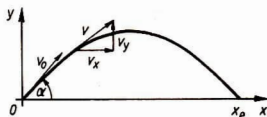


Bild 13.11

- a) Wie groß sind die Komponenten v_x und v_y seiner Geschwindigkeit zur Zeit t ?
- b) Wie groß ist seine Bahngeschwindigkeit v zur Zeit t ?
- c) Wie groß ist seine Aufschlaggeschwindigkeit v_s an der Stelle x_s ?
- d) Wie groß ist die Gipfelhöhe?

13.39. Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 18 \text{ m/s}$. Er wird gebremst und bewegt sich bis zum Stillstand nach dem Weg-Zeit-Gesetz:

$$s = 18 \text{ m/s} \cdot t - 2,4 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 + 0,04 \text{ m/s}^3 \cdot t^3.$$

Wie lang ist der Bremsweg?

14. Die Ableitung der elementaren Funktionen

14.0. Vorbemerkung

Mit der Bereitstellung weiterer Ableitungsregeln wird der Kreis der Funktionen, die abgeleitet werden können, beträchtlich erweitert. Es werden Regeln zur Ableitung des Produktes mehrerer Funktionen, des Quotienten zweier Funktionen, der mittelbaren Funktion sowie der Umkehrfunktion hergeleitet. Die Ableitungen der transzendenten Funktionen beschließen diesen Abschnitt. Damit ist die Möglichkeit gegeben, alle vorkommenden Funktionen abzuleiten.

14.1. Weitere Ableitungsregeln

14.1.1. Die Ableitung des Produktes mehrerer Funktionen

Es soll die Ableitung der Funktion $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gebildet werden unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen der Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ existieren und bekannt sind. Der Differenzenquotient lautet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Vor dem Grenzübergang soll der Differenzenquotient so umgeformt werden, daß die Differenzenquotienten $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}$ auftreten. Wird im Zähler $-u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) (= 0)$ addiert, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} u(x) \\ &= \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} u(x).\end{aligned}$$

Wird jetzt der Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ gebildet, so ergibt sich für die Ableitung

$$f'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x).$$

Diese Ableitungsregel wird **Produktregel** genannt:

$(uv)' = u'v + uv'$

(14.1)

Aus Formel (14.1) läßt sich leicht die Formel für das Produkt $y = uv$ herleiten, wenn uv zunächst als ein Faktor aufgefaßt wird:

$$\begin{aligned}y &= (uv) w, \\y' &= (uv)' w + (uv) w', \\y' &= (u'v + uv') w + uvw', \\y' &= u'vw + uv'w + uvw'.\end{aligned}$$

Nach diesem Vorgehen kann auch die Produktregel für n Faktoren gewonnen werden. Sie lautet

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \underbrace{u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'}_{n \text{ Summanden}}.$$

BEISPIEL

14.1. Bei der Funktion $y = (3x^2 - 1) \sqrt[3]{x}$ ist

$$\begin{aligned}u &= (3x^2 - 1), & v &= x^{\frac{1}{3}}, \\u' &= 6x, & v' &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$y' = 6x \sqrt[3]{x} + \frac{3x^2 - 1}{3 \sqrt[3]{x^2}}.$$

Das Ergebnis kann im vorliegenden Fall auch ohne Produktregel durch vorheriges Ausmultiplizieren von $(3x^2 - 1) \sqrt[3]{x}$ gewonnen werden.

14.1.2. Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen

Es soll die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen gebildet werden, deren Ableitungen existieren und bekannt sind.

Der Differenzenquotient der Funktion $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ lautet

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right] \\&= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}.\end{aligned}$$

Nach der Addition von $-u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)$ im Zähler folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \\&\quad \times \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{\Delta x} \\&= \frac{1}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) - \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} u(x) \right].\end{aligned}$$

Der Grenzübergang führt auf die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (14.2)$$

BEISPIELE

14.2. Für $y = f(x) = \frac{2x-1}{3x^2-2x}$ ist

$$u = 2x - 1, \quad v = 3x^2 - 2x,$$

$$u' = 2, \quad v' = 6x - 2.$$

Einsetzen in Formel (14.2) liefert

$$y' = \frac{2(3x^2 - 2x) - (2x - 1)(6x - 2)}{(3x^2 - 2x)^2},$$

$$y' = \frac{-6x^2 + 6x - 2}{(3x^2 - 2x)^2}.$$

14.3. Für die sogenannte reziproke Funktion $y = \frac{1}{f(x)}$ folgt

$$y' = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}, \quad y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

14.1.3. Die Ableitung der mittelbaren Funktion

Für mittelbare Funktionen — wie $y = f(x) = \sqrt{3x-1}$ — ist eine weitere Ableitungsregel erforderlich.

Im angeführten Beispiel sind zwei Funktionen:

$$u = g(x) = 3x - 1 \quad \text{und} \quad y = h(u) = \sqrt{u}$$

miteinander verkettet (vgl. Bd. I, 10.6.2.). Innere und äußere Funktion sind einfache Funktionen mit bekannten Ableitungen. Mit Kenntnis dieser Ableitungen kann eine mittelbare Funktion differenziert werden.

Ist die mittelbare Funktion $y = f(x) = h[g(x)]$ gegeben und existieren die Ableitungen der Funktionen $u = g(x)$ und $y = h(u)$, so existiert auch die Ableitung der Funktion $y = f(x)$. Ihr Differenzenquotient kann in der Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

geschrieben werden. Wegen der Differenzierbarkeit von g und h geht mit $\Delta x \rightarrow 0$ auch $\Delta u \rightarrow 0$, und mit $\Delta u \rightarrow 0$ geht wiederum $\Delta y \rightarrow 0$. Da die Ableitungen von g und h existieren, kann der Grenzwertsatz aus (12.4.1.) angewendet werden. Es ergibt sich die **Kettenregel**

$$f'(x) = h'(u) \cdot g'(x) \quad (14.3)$$

In der von LEIBNIZ eingeführten differentiellen Schreibweise ist die Kettenregel besonders einprägsam:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \quad (14.4)$$

Zu beachten ist, daß u im ersten Faktor unabhängige, im zweiten Faktor abhängige Variable ist. Die Kettenregel ist auch auf den Fall von zwei und mehr inneren Funktionen anwendbar. Für $y = f(x) = w\{v\{u(x)\}\}$ gilt z. B.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = w'(v) \cdot v'(u) \cdot u'(x).$$

BEISPIEL

14.4. $y = f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$ hat mit

$$u = 3x - 1, \quad y = u^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{du}{dx} = 3, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}$$

die Ableitung

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{u}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{3x-1}}.$$

Die Kettenregel ist auch bei der Ableitung von Funktionen anzusetzen, die in impliziter Form dargestellt sind. Ist z. B. eine Funktion durch $f: y^3 - x^2y + x = 0$, $x \in X$, $y \in Y$ gegeben, so ist $y = f(x)$, und bei der Ableitung von

$$[f(x)]^3 - x^2f(x) + x = 0$$

muß die Kettenregel angewendet werden:

$$3[f(x)]^2 \cdot f'(x) - 2x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) + 1 = 0.$$

Das kann auch unter Beibehaltung der gegebenen Schreibweise geschehen:

$$3y^2 \cdot y' - 2xy' - x^2y' + 1 = 0,$$

$$y' = \frac{2xy - 1}{3y^2 - x^2}.$$

BEISPIELE

14.5. Die Ableitung von $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ kann auch aus der impliziten Darstellung gewonnen werden:

$$y^3 - x^2 = 0,$$

$$3y^2y' - 2x = 0,$$

$$y' = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Das Ergebnis bestätigt für den vorliegenden Fall die Anwendbarkeit der Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$ bei rationalem n .

- 14.6. Es soll die Tangentengleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ für den Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ aufgestellt werden.

Lösung:

Differenzieren der Kreisgleichung ergibt

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Der Tangentenanstieg in P_0 ist somit $y'_0 = -\frac{x_0}{y_0}$. Die Tangente in P_0 hat die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{x_0}{y_0},$$

$$y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{x_0^2}{y_0} + y_0,$$

$$y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{r^2}{y_0}.$$

- 14.7. Ein Körper K wird an zwei über zwei Rollen laufenden Seilen herabgelassen (vgl. Bild 14.1). Jedes Seil läuft mit der Geschwindigkeit v_0 über die Rollen. Zur Zeit $t = 0$ ist $\overline{AK} = r_0$.

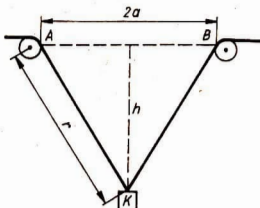


Bild 14.1

- a) Welche Senkgeschwindigkeit hat K zur Zeit t ?
 b) Für $a = 1,5$ m, $r_0 = 2,1$ m, $v_0 = 0,9$ m/min ist die Senkgeschwindigkeit zur Zeit $t_1 = 2$ min zu berechnen.

Lösung:

- a) Es ist

$$h = h(t) = \sqrt{r^2 - a^2} \quad \text{mit} \quad r = r(t) = r_0 + v_0 t$$

Die Senkgeschwindigkeit ist durch die Ableitung dh/dt gegeben:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dr} \cdot \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{dh}{dt} = 2r \cdot \frac{1}{2\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot v_0.$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{v_0 r}{\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{v_0(r_0 + v_0 t)}{\sqrt{(r_0 + v_0 t)^2 - a^2}}.$$

$$b) r(t_1) = 2,1 \text{ m} + 0,9 \text{ m/min} \cdot 2 \text{ min} = 3,9 \text{ m}$$

$$h(t_1) = \sqrt{3,9^2 - 1,5^2} \text{ m} = 3,6 \text{ m}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0,9 \text{ m/min} \cdot 3,9 \text{ m}}{3,6 \text{ m}}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0,975 \text{ m/min.}$$

14.1.4. Die Ableitung der Umkehrfunktion

Bei Umkehrung der Zuordnung ergibt sich aus der Funktion $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ (vgl. 10.3.). Die Gleichung $x = f^{-1}(y)$ entsteht durch formales Umstellen der Gleichung $y = f(x)$ nach x .

Die Funktion $y = f(x)$ sei eine im Intervall X umkehrbare und differenzierbare Funktion. Außerdem soll die Ableitung $y' = f'(x)$ in X nirgends verschwinden. Unter diesen Voraussetzungen ist auch die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ im Bildintervall Y differenzierbar.

Der Differenzenquotient der Umkehrfunktion lautet $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Da f die Umkehrfunktion von f^{-1} ist, gilt $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ und somit

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f und nach dem Grenzwertsatz aus 12.4.1. folgt

$$[f^{-1}(y)]' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

$$\boxed{[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}} \quad (14.5)$$

In differentieller Schreibweise lautet die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}} \quad (14.6)$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch geometrisch deuten. Wird bei f und f^{-1} die Bezeichnung der Variablen beibehalten, so sind die Graphen von f und f^{-1} identisch (vgl. Bild 14.2). In einem Punkte $P = \bar{P}$ des gemeinsamen Graphen gelten folgende Zusammenhänge:

	Funktion f	Umkehrfunktion f^{-1}
Argument	x	y
Funktionswert	y	x
Argumentsänderung	dx	dy
Differential	dy	dx
Anstieg	$\tan \tau$	$\tan \bar{\tau}$

Wegen $\bar{\tau} = 90^\circ - \tau$ gilt

$$\tan \bar{\tau} = \tan (90^\circ - \tau) = \frac{1}{\tan \tau},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Hier zeigt sich besonders deutlich, wie zweckmäßig die LEIBNIZsche Symbolik ist, die die Ableitung als Quotient zweier Differentiale schreibt.

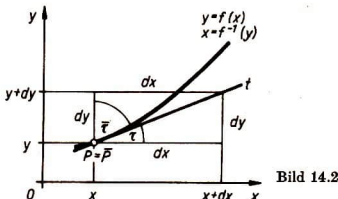


Bild 14.2

BEISPIELE

14.8. $y = f(x) = x^2 \quad (x > 0),$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x,$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (y > 0),$$

$$\frac{dx}{dy} = [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{2x},$$

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Wird die Bezeichnung der Variablen vertauscht, so folgt für $y = \sqrt{x}$ die schon bekannte Ableitung $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

14.9. Für die durch die Kurvengleichung $x - y^3 + y^3 = 0$ gegebene Kurve soll der Anstieg im Punkte $P_0(0; 1)$ bestimmt werden.

Lösung:

$$x = f^{-1}(y) = y^2 - y^3 \quad (y \text{ unabhängig!}),$$

$$[f^{-1}(y)]' = 2y - 3y^2,$$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} = \frac{1}{2y - 3y^2},$$

$$\tan \tau = f'(0) = \frac{1}{[f^{-1}(1)]'} = -1, \quad \underline{\underline{\tau = 135^\circ.}}$$

Kontrollfragen

14.1. Wie lauten Produkt- und Quotientenregel?

14.2. Wie wird eine mittelbare Funktion differenziert?

14.3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ableitungen von Funktion und Umkehrfunktion?

Wie spiegelt sich dieser Zusammenhang geometrisch wider?

Aufgaben: 14.1. bis 14.8.

14.2. Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Der Differenzenquotient der Sinusfunktion $y = \sin x$ hat den Wert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Die Umformung mit $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}$ liefert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Beim Grenzübergang sind der Grenzwertsatz aus 12.4.1. und Formel (12.14) — nachdem $\frac{\Delta x}{2} = z$ gesetzt wurde — anzuwenden.

Wegen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

folgt als Ableitung für die Sinusfunktion

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \quad (14.7)$$

Wegen $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ kann die Ableitung der Funktion $y = \cos x$ durch Ableiten von $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ unter Anwendung der Kettenregel gewonnen werden:

$$y = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad u = x + \frac{\pi}{2}, \quad y = \sin u,$$

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{du} = \cos u.$$

Nach der Kettenregel folgt

$$y' = (\cos x)' = \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]' = 1 \cdot \cos u,$$

$$y' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \quad (14.8)$$

Die Ableitungen der Tangens- und der Cotangensfunktion können nach Umformung mit Hilfe der eben gefundenen Ergebnisse gebildet werden. Zu beachten ist, daß die Funktionen überall dort nicht differenzierbar sind, wo sie nicht definiert sind.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y' = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (14.9)$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \quad (14.10)$$

BEISPIELE

14.10. $y = \sin 2x$

1. Weg: $y = 2 \sin x \cos x$

$$y' = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

$$y' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \underline{2 \cos 2x}$$

2. Weg: $u = 2x,$

$$y = \sin u$$

$$\frac{du}{dx} = 2;$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u$$

$$y' = 2 \cos u = \underline{2 \cos 2x}$$

14.11. $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$

$$u = 2x$$

$$v = 1 - \sin u$$

$$y = \sqrt{v}$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dv}{du} = -\cos u$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$y' = 2 \cdot (-\cos 2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin 2x}}$$

$$y' = -\frac{\cos 2x}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$$

$$y' = \underline{\underline{-\sqrt{1 + \sin 2x}}}$$

Aufgaben: 14.9. bis 14.11.

14.3. Die Ableitung der logarithmischen und der Exponentialfunktion**14.3.1. Die Ableitung der logarithmischen Funktion**

Es soll die Funktion des natürlichen Logarithmus $y = \ln x$ abgeleitet werden. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

wird zunächst umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}. \end{aligned}$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ geht $\frac{x}{\Delta x} \rightarrow \infty$. Der Numerus des Logarithmus hat nach Formel (12.10) den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Folglich ist

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e.$$

Wegen $\ln e = 1$ gilt

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad (14.11)$$

Die Logarithmusfunktion mit der Basis a lässt sich umformen:

$$y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Ihre Ableitung lautet also

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}} \quad (14.12)$$

Die Einfachheit von Formel (14.11) ist ein Grund, warum der natürliche Logarithmus in der höheren Mathematik bevorzugt wird.

BEISPIELE

14.12. $y = \ln(1 - x)$;

$u = 1 - x$

$y = \ln u$

$$\frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\underline{\underline{y' = -\frac{1}{1-x}}}$$

14.13. Das Anwenden arithmetischer Umformungen erleichtert oft das Differenzieren. Auf Äquivalenz der Umformung ist aber stets zu achten.

a) $y = \ln \frac{x}{1+x}$

b) $y = \ln \sqrt{1-x^2}$

c) $y = \ln f(x)$

$y = \ln x - \ln(1+x)$

$y = \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$

$y' = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$

$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{f'(x)}{f(x)}}}$$

$$\underline{\underline{y' = -\frac{x}{1-x^2}}}$$

14.3.2. Die Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion

$$y = f(x) = a^x, \quad a > 0$$

hat die Logarithmusfunktion zur Umkehrfunktion:

$$x = f^{-1}(y) = \log_a y, \quad y > 0.$$

Deren Ableitung lautet nach Formel (14.12)

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{y \ln a}.$$

Daraus folgt mit Formel (14.5)

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} = y \ln a.$$

Also ist

$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$

(14.13)

Im besonderen wird für $a = e$

$(e^x)' = e^x$

(14.14)

BEISPIEL

14.14. a) $y = a e^{bx}, \quad \underline{\underline{y' = ab e^{bx}}}$

b) $y = e^x \cos x$

$y' = e^x \cos x + e^x \cdot (-\sin x)$

$$\underline{\underline{y' = e^x (\cos x - \sin x)}}$$

Formel (14.14) ist bemerkenswert: Die Exponentialfunktion $y = e^x$ ist identisch mit ihrer Ableitungsfunktion. Anschaulich bedeutet das: An jeder Stelle x des Definitionsbereiches haben Ordinate und Anstieg den gleichen Wert. Diese Eigenschaft und Gl. (14.11) verschaffen der Zahl e ihre besondere Stellung in Theorie und Praxis.

14.3.3. Differenzieren nach Logarithmieren

Die Kettenregel erlaubt die Differentiation einer weiteren Klasse von Funktionen der Form

$$y = f(x) = u(x)^{v(x)}.$$

Wird logarithmiert:

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x),$$

so folgt unter Anwendung von Kettenregel und Produktregel

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Mit $y = u(x)^{v(x)}$ lautet die Ableitung

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Auch bei Funktionen, die nach schon bekannten Ableitungsregeln differenziert werden können, ist das Verfahren selbstverständlich anwendbar. Unter anderem kann die Potenzregel $(x^n)' = nx^{n-1}$ wie folgt für jedes reelle n bestätigt werden:

$$y = x^n,$$

$$\ln y = n \ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = n \frac{1}{x},$$

$$y' = n \frac{y}{x} = n \frac{x^n}{x},$$

$$y' = nx^{n-1}.$$

Da n keinen Voraussetzungen unterworfen wurde, gilt die Potenzregel für jede reelle Zahl n .

BEISPIEL

$$14.15. y = x^{\sin x}, \quad x > 0$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + (\sin x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right), \quad x > 0$$

14.4. Die Ableitung der zyklometrischen Funktionen

Für die in 10.5.3. behandelten zyklometrischen Funktionen ergibt sich die Ableitung unter Verwendung ihrer Umkehrfunktionen. Aus

$$y = \arcsin x = f(x)$$

folgt

$$x = \sin y = f^{-1}(y)$$

und nach (14.5)

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad (14.15)$$

Entsprechend ist

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad (14.16)$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}} \quad (14.17)$$

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}} \quad (14.18)$$

Aufgaben: 14.12. bis 14.16.

14.5. Aufgaben

Die nachstehenden Funktionen sind unter Anwendung von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel zu differenzieren.

14.1. a) $y = (3x^3 - 2x)(2x + 1)$

b) $y = (2x^5 + 3x)(1 - x^2)$

c) $y = (a - x - x^3)(1 + bx)$

d) $y = x(x^2 - 1)(1 - 2x)$

14.2. Am Beispiel $x^5 = x^3 \cdot x^2$ ist zu zeigen, daß

$$(u \cdot v)' \neq u' \cdot v'.$$

14.3. a) $y = \frac{x}{1 + x}$

b) $y = \frac{x^2}{1 + x}$

c) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

d) $y = \frac{2x^2}{1 + x^2}$

14.4. a) $y = (3x + 1)^{10}$

b) $y = (a - x)^8$

c) $y = (2x^4 - 3x^2 + 1)^5$

14.5. a) $y = \sqrt{3x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

c) $y = \sqrt{\frac{2x}{1 + x^2}}$

14.6. a) $w = \sqrt{1-u}$

b) $s = \frac{t}{(1-t)^2}$

c) $z = (1-s^2)^{-4}$

14.7. Kurvenanstieg und Anstiegswinkel der Kurve von $y = f(x)$ im Punkte P_0 sind zu bestimmen.

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$, $P_0(1; y_0)$

b) $y = \sqrt{1+x^2}$, $P_0(-2; y_0)$

14.8. Nachstehende Funktionen sind zu differenzieren ($y = f(x)$).

a) $y^2 - x = 0$, $y \geq 0$

b) $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$

Nachstehende Funktionen sind zu differenzieren.

14.9. a) $y = x \sin x$

b) $u = 2 \sin(2t - 1)$

c) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

14.10. a) $y = x \tan x$

b) $y = \cot^2 x$

c) $y = \sqrt{1 + \tan x}$

14.11. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve von $y = f(x)$ die x -Achse?

a) $y = \sin x$

b) $y = \tan x$

Nachstehende Funktionen sind zu differenzieren.

14.12. a) $y = x \ln x$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = \ln(1 - x^2)$

d) $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$

e) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$

14.13. a) $y = x e^x$

b) $y = e^{1-t^2}$

c) $y = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t})$

d) $y = e^{\cos t}$

e) $y = \ln \sin x$

14.14. An welchen Stellen hat die Kurve von $y = e^{-x}(1 - x^2)$ waagerechte Tangenten?

14.15. Nachstehende Funktionen sind zu differenzieren.

a) $y = x^x$, $x > 0$

b) $y^x = 2e^x$

14.16. Desgl.

a) $y = (1 + x^2) \arctan x$

b) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

Die nachstehenden Funktionen sind unter Anwendung von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel zu differenzieren.

14.17. a) $y = (2x^3 - 3x + 4)(x^2 - 1)$

b) $y = (2 - x^2)(1 - x^2)$

c) $y = (a - x^2)(b - x^3)$

d) $y = x^2(1 + ax)(1 - bx)$

14.18. a) $y = (1 + x)^3$

b) $y = (x^2 - 1)\sqrt{x}$

c) $y = (1 - 2x^2)\sqrt[3]{x}$

d) $y = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$

14.19. a) $y = \frac{2x-1}{1-x^2}$

c) $y = \frac{1}{x^3+1}$

e) $y = \frac{1}{(x+1)^3}$

g) $y = \frac{-2x^3}{(x^2+1)(1-x^2)}$

b) $y = \frac{2x^2+5}{1-2x}$

d) $y = \frac{1}{1-2x^4}$

f) $y = \frac{(x^2+1)(1-x)}{x^2+2}$

h) $y = \frac{a-bx}{a+bx^2}$

14.20. a) $y = \frac{x}{(1-x)^2}$

c) $y = \frac{3x-2}{(1+x^2)^2}$

e) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

b) $y = \frac{x}{(1-2x)^3}$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

14.21. a) $r = t \sqrt{1-t^2}$

c) $v = \frac{u^3-1}{u^3+1}$

b) $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+u}}$

14.22. An die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll die Tangente mit dem Anstieg m gelegt werden. Wie lauten die Koordinaten des Berührungspunktes?

a) $y = \frac{x}{1-x}, \quad m = 0,25$

b) $y = \frac{x}{1-x^2}, \quad m = 1$

c) $y = \sqrt{1-x^2}, \quad m = \frac{1}{3} \sqrt{3}$

14.23. Die Tangentengleichung im Punkte P_0 ist aufzustellen.

a) $y = \frac{x^2}{1-x}, \quad x_0 = 3$

b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x_0 = -2$

c) $y = \sqrt{x^2+1}, \quad x_0 = 0,75$

d) $y = \sqrt{9-4x^2}, \quad x_0 = 1,2$

14.24. Die Abszissen der Schnittpunkte und die Schnittwinkel der durch die Gleichungen gegebenen Kurven sind zu berechnen.

a) $y^3 = x, \quad x > 0$ und $xy = 16$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ und $y = 2x^2 - x + 2$

14.25. Nachstehende Funktionen sind zu differenzieren ($y = f(x)$).

a) $y^2 - x = 0, \quad y \leq 0$

b) $y^2 x = 1, \quad y > 0$

c) $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \quad y \geq 0$

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad y \geq 0$

14.26. Die Funktion $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ kann auch in der impliziten Form $f(x) \cdot v(x) = u(x)$ dargestellt werden. Die Quotientenregel ist durch Ableiten dieser impliziten Form herzu-leiten.

- 14.27. Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt[5]{x^9}$ ist aus der impliziten Form der Funktionsgleichung $y^5 = x^9$ zu gewinnen.
- 14.28. Kurvenanstieg und Anstiegswinkel der Kurve von $y = f(x)$ im Punkte P_0 sind zu bestimmen.
- $x^3 - y^2 = 0$, $P_0(1, 2; y_0 > 0)$
 - $x^2 - 2y^2 = 1$, $P_0(1, 6; y_0 < 0)$
- 14.29. Es ist die Tangentengleichung der Kurve K aufzustellen, die die gegebene Bedingung erfüllt ($P_0 \in K$).
- $y^2 - 3x - 4y = 0$, $P_0(-1; 1)$
 - $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 100$, $P_0(-2, y_0 < 0)$
 - $y^2 + x = 1$; Tangente parallel $2y + x = 10$
 - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$; Tangenten in den Schnittpunkten mit der x -Achse
- 14.30. Der Radius eines Kreises wächst mit der Geschwindigkeit v_r . Mit welcher Geschwindigkeit wächst
- der Umfang
 - die Fläche
- des Kreises?
- 14.31. Der Umfang eines expandierenden Kreises wächst mit 1,5 cm/s. Wie schnell wächst die Fläche zu dem Zeitpunkt, an dem der Radius 6 cm beträgt?
- 14.32. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks wächst mit 2,6 cm/s, während die andere Kathete die konstante Länge von 5 cm beibehält. Mit welcher Geschwindigkeit wächst die Hypotenuse c zu dem Zeitpunkt, an dem die Länge der Hypotenuse 13 cm beträgt?
- 14.33. Eine Stange von der Länge $l = 30$ cm gleitet mit ihren Endpunkten A und B in den Führungen eines rechten Winkels (vgl. Bild 14.3). Der Punkt A bewegt sich mit 2 cm/s in x -Richtung. Welche Geschwindigkeit hat B zu dem Zeitpunkt, an dem $\overline{OB} = 24$ cm ist?

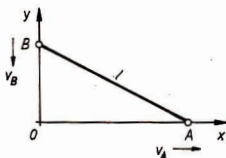


Bild 14.3

- 14.34. In ein leeres kegelförmiges Gefäß mit 12 cm Durchmesser und 18 cm Höhe wird Wasser mit einer Geschwindigkeit (Volumenstrom) von $12 \text{ cm}^3/\text{s}$ gefüllt.
- Wie schnell steigt der Flüssigkeitsspiegel zu dem Zeitpunkt, an dem das Gefäß zu $1/8$ gefüllt ist?
 - Wie schnell steigt der Flüssigkeitsspiegel zur Zeit $t = 8 \text{ s}$?

Nachstehende Funktionen sind zu differenzieren.

14.35. a) $y = (1 - \sin x) \cos x$

b) $s = 3t^2 \cos t$

c) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

d) $y = \frac{\sin t}{t}$

e) $y = \frac{2x}{1 + \tan x}$

f) $y = \frac{1}{\cos t} + \tan t$

14.36. a) $y = 2^x$

b) $y = \frac{x}{1 + e^x}$

c) $u = 2t e^{t-1}$

14.37. a) $y = e^{x \sin x}$

b) $u = 2 e^{-t} \cos t$

c) $y = \ln \ln x$

d) $y = x e^{-\frac{1}{x^2}}$

14.38. a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

c) $y = x^{1-\cos x}$

d) $y = \sqrt{x}$

14.39. Unter welchem Winkel schneidet der Graph von $y = \ln x$ die x -Achse?

14.40. An die Kurve der Funktion $y = \ln \frac{4x}{x^2 + 3}$ ist im Schnittpunkt mit der x -Achse die Tangente zu legen. Wie lautet die Tangentengleichung?

14.41. Im Punkt P_0 der Kurve der Funktion $y = \ln x$ ist die Tangente gezeichnet. Sie schneidet die x -Achse an der Stelle x_T . Wie groß ist der Abschnitt $x_0 - x_T$ unter der Tangente (Subtangente)?

14.42. Unter welchem Winkel schneiden die Kurven einander?

a) $y = \cos x, y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$)

b) $y = e^{x^2}, y = e^{-x}$

Es ist der spitze Schnittwinkel anzugeben.

14.43. An die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll die Tangente mit dem Anstieg m gelegt werden. Wie lauten die Koordinaten des Berührungspunktes?

a) $y = \sin x \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$), $m = -0,5$

b) $y = \sqrt{1 + \sin x}$ ($0 \leq x \leq \pi/2$), $m = 0,3$

c) $y = e^x$, $m = 2$

d) $y = x e^x$, $m = 0$

e) $y = 2e^{\sin x}$ ($0 \leq x \leq \pi$), $m = 0$

f) $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x < \pi/2$), $m = -1$

g) $y = \ln \frac{1}{1+x^2}$ ($x \geq 0$), $m = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$

14.44. Die Schnittpunkte und Schnittwinkel der Kurven im I. Quadranten sind zu ermitteln.

a) $x^3 + y^3 = 17$ und $x^2 - y^2 = 15$

b) $x^3 + y^3 = 13$ und $2y^2 = 9x$

14.45. Ein Punkt P bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r (Bild 14.4).

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit (die Beschleunigung) der Projektionspunkte Q und R auf den Koordinatenachsen?

- b) Zu welchen Zeiten ist die Geschwindigkeit (die Beschleunigung) der Projektionspunkte gleich Null?
- c) Es ist zu zeigen, daß aus den Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y die Kreisbahngeschwindigkeit $v = \omega r$ des Punktes P folgt.
- d) Wie groß ist die Bahnbeschleunigung, und welche Richtung hat sie?

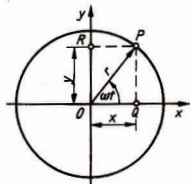


Bild 14.4

14.46. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{2} e^{0,4x}$.

- a) Für welche Änderung des Abszissenwertes wächst der Funktionswert auf das 2^{fache} von $f(0)$?
- b) Die Funktion ist grafisch darzustellen.
- c) Im Punkte $P_0(4; y_0)$ ist die Tangente zu zeichnen. Sie schneidet die x -Achse an der Stelle x_T . Wie groß ist der Abschnitt $x_0 - x_T$ unter der Tangente?
- d) Wie groß ist $x_0 - x_T$ für $y = a e^{bx}$?

14.47. Ein Kondensator wird über einen Widerstand entladen. Die Zeitfunktion für die Kondensatorspannung lautet

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(U_0 Anfangsspannung, $\tau = C \cdot R$ Zeitkonstante).

- a) In welcher Zeit fällt die Spannung auf das 2ⁿ-fache des Anfangswertes?
- b) Die Zeitfunktion ist für $U_0 = 200$ V, $\tau = 4$ s grafisch darzustellen.
- c) Im Punkte $P_0(t_0 = 2$ s) ist die Tangente zu zeichnen. Sie schneidet die Zeitachse in x_N . Wie groß ist der Wert $x_N - x_0$ ($x = t/s$)?

14.48. Es sind die ersten Ableitungen zu bilden.

a) $y = x \arcsin 4x$

b) $y = \arcsin(1 - x)$

c) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $y = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$

15. Höhere Ableitungen und Untersuchung von Funktionen

15.1. Höhere Ableitungen

Der Begriff der Ableitung einer Funktion wird dahingehend erweitert, daß auch höhere Ableitungen der Funktion gebildet werden. Es wird die geometrische Bedeutung der zweiten und höheren Ableitungen untersucht und gezeigt, wie aus dem Vorzeichen der 1. bzw. 2. Ableitung Eigenschaften der Funktion an der betrachteten Stelle bzw. der geometrische Verlauf des Graphen der Funktion erkannt werden. Für die Beschreibung vieler physikalischer und technischer Vorgänge wird neben der 1. Ableitung der auftretenden Funktionen zumindest noch die 2. Ableitung gebraucht.

Von einer differenzierbaren Funktion $f: y = f(x)$ kann nach den Regeln des vorigen Abschnitts die Ableitungsfunktion $f': y' = f'(x)$ gebildet werden. Ist diese selbst wieder differenzierbar, dann läßt sich von ihr nach den gleichen Regeln ebenfalls die Ableitungsfunktion bilden, die mit $f'': y'' = f''(x)$ bezeichnet wird und 2. Ableitungsfunktion oder kurz 2. Ableitung heißt. Entsprechend wird die 3. Ableitung $y''' = f'''(x)$ erhalten usw.

Die zweite und alle folgenden Ableitungen heißen **Ableitungen höherer Ordnung**. Von der 4. Ableitung an wird $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$, $y^{(5)} = f^{(5)}(x)$, ... und allgemein für die n -te Ableitung $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ geschrieben. In der differentiellen Schreibweise folgt mit

$y' = \frac{dy}{dx}$ für die 2. Ableitung

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

wofür kürzer formal

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{gelesen: } d \text{ zwei } y \text{ nach } d \times \text{ Quadrat})$$

geschrieben wird. Entsprechend wird die n -te Ableitung mit

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

bezeichnet.

BEISPIELE

15.1. Die erste und die höheren Ableitungen der Funktion $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ lauten:

$$\begin{array}{ll} y' = 3x^2 - 12x + 2 & y''' = 6 \\ y'' = 6x - 12 & y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = 0 \end{array}$$

d. h., von der 4. Ableitung ab sind sämtliche Ableitungen identisch gleich Null.

Das Ergebnis läßt sich für ganzrationale Funktionen n -ten Grades verallgemeinern: Der Grad dieser Funktion erniedrigt sich bei jeder Differentiation um 1. Deshalb ist die n -te Ableitung vom 0-ten Grad, d. h. konstant, und alle folgenden Ableitungen sind identisch gleich Null.

- 15.2. Für die Ableitungen der Funktion $y = x^4$ ergibt sich: $y' = 4x^3$, $y'' = 3 \cdot 4x^2$, $y''' = 2 \cdot 3 \cdot 4x$, $y^{(4)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 4!$ Die folgenden höheren Ableitungen sind wieder gleich Null. Allgemein lautet die n -te Ableitung der Funktion $y = x^n$: $y^{(n)} = n!$
- 15.3. Die ersten 4 Ableitungen der Funktion $y = \sin x$ lauten $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$. Da bei den folgenden Ableitungen die Funktionen in der gleichen Reihenfolge periodisch wiederkehren, lassen sich alle Ableitungen kurz darstellen durch $y^{(4k)} = \sin x$, $y^{(4k+1)} = \cos x$, $y^{(4k+2)} = -\sin x$, $y^{(4k+3)} = -\cos x$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$ (Für $k = 0$ ist unter $y^{(0)} = y = \sin x$ die gegebene Funktion zu verstehen.)

Im folgenden soll die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung $y'' = f''(x)$ untersucht werden.

Vorher wird noch einmal auf die geometrische Bedeutung des Vorzeichens der 1. Ableitung eingegangen. Die 1. Ableitung einer Funktion gibt den Anstieg der Tangente in einem Punkt, z. B. P_0 , der zur Funktion gehörenden Kurve an:

$$f'(x_0) = \tan \tau_0.$$

Für $f'(x_0) \geq 0$ folgt $\tau_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, d. h., die Funktion wächst in der Umgebung von P_0 .

Für $f'(x_0) \leq 0$ folgt $\tau_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, d. h., die Funktion fällt in der Umgebung von P_0 .

Diese Aussagen können auf die x -Werte eines Intervalles I erweitert werden.

Definition:

Eine Funktion f , die in dem Intervall I differenzierbar ist, ist genau dann in I **monoton** $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$, wenn für alle $x \in I$ $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}$ ist. Der zugehörige Kurvenbogen heißt $\begin{cases} \text{wachsender} \\ \text{fallender} \end{cases}$ **Monotoniebogen**.

Weiterhin wird anschaulich der Zusammenhang zwischen den beiden Kurven dargestellt, die zu der ursprünglichen Funktion

$$f: y = f(x),$$

die auch **Stammfunktion** heißt, und der ersten abgeleiteten Funktion

$$f': y' = f'(x)$$

gehören. Die Kurven werden entsprechend **Stammkurve** und **erste abgeleitete Kurve** genannt.

Im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ ist an die Stammkurve die Tangente gelegt, und es ist: $f'(x_0) = \tan \tau_0$ (Bild 15.1a). In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Achsen x, y' wird nun in x_0 die Ordinate

$$f'(x_0) = \tan \tau_0$$

gezeichnet und der Punkt $P_0'(x_0; f'(x_0))$ erhalten (Bild 15.1b). Wird diese Konstruktion für alle x_0 aus einem Intervall $I = [a, b]$ durchgeführt, dann ergibt die Menge der erhaltenen Punkte P_0' die abgeleitete Kurve als Bild der 1. Ableitungsfunktion $f': y' = f'(x)$.

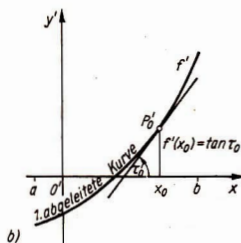
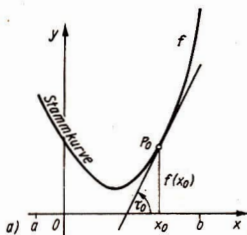


Bild 15.1

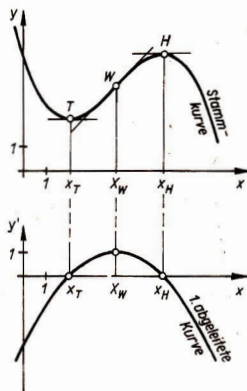


Bild 15.2

So ergibt sich z. B. für die in Bild 15.2 gezeigte Parabel 3. Grades mit der Gleichung

$$y = -\frac{x^3}{12} + x^2 - 3x + 5$$

als erste abgeleitete Kurve eine Parabel 2. Grades mit der Gleichung

$$y' = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3.$$

Man erkennt unter anderem, daß in den Punkten H und T der Stammkurve die Tangenten jeweils waagerecht sind. Folglich ist in diesen Punkten $\tan \tau = 0$. Deshalb schneidet die 1. abgeleitete Kurve in x_H und x_T die x -Achse. Der links von T liegende Bogen der Stammkurve fällt monoton, deshalb ist für $x < x_T$ die 1. Ableitung $f'(x) = \tan \tau < 0$, und der zugehörige Bogen der 1. abgeleiteten Kurve liegt unter der x -Achse. Der Bogen der Stammkurve zwischen T und H ist monoton steigend, so daß wegen

$f'(x) = \tan \tau > 0$ der zugehörige Bogen der 1. abgeleiteten Kurve über der x -Achse verläuft usw. Im Punkt W hat die Tangente an die Stammkurve den größten Anstieg bezüglich des Intervalls $[x_T, x_H]$, so daß die 1. abgeleitete Kurve in x_W die größte Ordinate in diesem Intervall hat. Die hier skizzierten Zusammenhänge werden in den folgenden Abschnitten genauer untersucht.

Analog zur geometrischen Deutung der 1. Ableitung gibt die 2. Ableitung $f''(x_0)$ den Anstieg der Tangente an, die im Punkt $P_0'(x_0; f'(x_0))$ an die 1. abgeleitete Kurve gelegt ist: $f''(x_0) = \tan \tau_0'$ (Bild 15.1 b).

Mit Hilfe dieser anschaulichen Deutung läßt sich nun die Bedeutung des Vorzeichens der 2. Ableitung für die Stammfunktion bzw. Stammkurve erklären.

Kurvenbogen unterscheiden sich neben ihrer Monotonieeigenschaft noch durch die Art ihrer Krümmung. Das Bild 15.3 zeigt zwei wachsende und zwei fallende Monotoniebogen. Es ist zu erkennen, daß ein wachsender Monotoniebogen auf zwei Arten gekrümmt sein kann, ebenso ein fallender. In den Bildern 15.3 b und 15.3 c liegen alle Kurvenpunkte oberhalb einer an die Kurve gelegten Tangente, in den Bildern 15.3 a und 15.3 d unterhalb der Tangente.

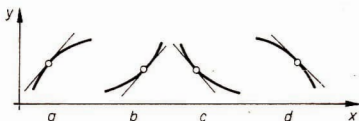


Bild 15.3

Definition:

Eine Funktion f , die in einem Intervall I differenzierbar ist, heißt genau dann von unten $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{cases}$ in I , wenn für eine in I an die Kurve gelegte Tangente alle Kurvenpunkte aus I $\begin{cases} \text{oberhalb} \\ \text{unterhalb} \end{cases}$ der Tangente liegen. Die entsprechenden Kurvenbogen heißen $\begin{cases} \text{Konvexbogen} \\ \text{Konkavbogen} \end{cases}$ und gemeinsam Krümmungsbogen.

In den Bildern 15.4 a bis 15.4 d sind noch einmal die in Bild 15.3 gezeigten Möglichkeiten zusammengestellt. Zu jedem der vier Monotoniebogen wurde die erste abgeleitete Kurve konstruiert. So sind z. B. im Bild 15.4 a die Punkte P_1, P_2 zwei beliebige Punkte der von unten konkaven Stammkurve mit $x_1 < x_2$. Für die in P_1, P_2 angelegten Tangenten gilt $\tau_1 \geq \tau_2$ und folglich $\tan \tau_1 = f'(x_1) \geq \tan \tau_2 = f'(x_2)$. Deshalb ist die abgeleitete Kurve ein fallender Monotoniebogen. Nach der Definition der Monotoniebogen muß (wenn man $f''(x) = [f'(x)]'$ berücksichtigt) $f''(x) \leq 0$ sein. Geometrisch bedeutet es, daß im betrachteten Intervall für eine an die abgeleitete Kurve gelegte Tangente $\tau' \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, also $\tan \tau' = f''(x) \leq 0$ ist. Auch in Bild 15.4 b

ist die Stammkurve von unten konkav, und die abgeleitete Kurve stellt einen fallenden Monotoniebogen dar. In den Bildern 15.4 c und 15.4 d sind die Stammkurven von

unten konvex, die abgeleiteten Kurven sind steigende Monotoniebogen; deshalb ist $f''(x) \geq 0$. Aus diesen Überlegungen folgt der

Satz

Eine Funktion f , die in dem Intervall I zweimal differenzierbar ist, ist in I genau dann von unten $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{cases}$, wenn für alle $x \in I$ $\begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$ wird.

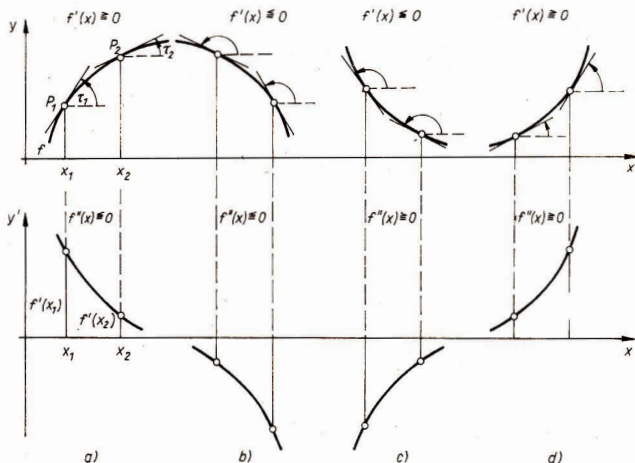


Bild 15.4

BEISPIEL

15.4. Bild 15.5 gibt für die zur Funktion $f: y = \sin x$ und $x \in [0; 2\pi]$ gehörigen Sinuskurve die Monotonie- und Krümmungsbogen an. In $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ z. B. ist die 1. Ableitung $f'(x) = \cos x \geq 0$, d. h. der zugehörige Kurvenbogen der Stammfunktion wachsend und in $I = [0, \pi]$ die 2. Ableitung $f''(x) = -\sin x \leq 0$, also der entsprechende Kurvenbogen der Stammfunktion von unten konkav. (Auf die Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ usw., an denen entweder $f'(x) = 0$ oder $f''(x) = 0$ ist, wird in 15.2. eingegangen.)

Kontrollfragen

15.1. Welche geometrische Bedeutung hat das Vorzeichen der 1. bzw. der 2. Ableitung einer Funktion für ihr Bild?

15.2. Welche Bedeutung haben die Ordinaten von Punkten der 1. abgeleiteten Kurve?

15.3. Wie ist der Verlauf der 1. abgeleiteten Kurve, wenn die Stammkurve einen Konvexbogen bzw. Konkavbogen beschreibt?

Aufgaben: 15.1. bis 15.4.

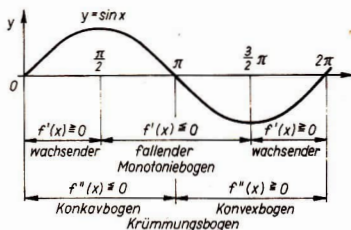


Bild 15.5

15.2. Untersuchung von Funktionen

15.2.1. Extremwerte

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden charakteristische Stellen der Funktion und damit charakteristische Punkte der zugehörigen Kurve betrachtet.

Definition:

Der Punkt E einer Kurve heißt (relativer) **Extrempunkt**, wenn er zwei verschiedenartige Monotoniebögen trennt.

Der Punkt heißt speziell (relativer) **Maximumpunkt oder Hochpunkt H** , wenn in Richtung wachsender x -Werte auf einen $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{wachsenden} \\ \text{fallenden} \end{smallmatrix} \right\}$ ein $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{fallender} \\ \text{wachsender} \end{smallmatrix} \right\}$ Monotoniebogen folgt.

Bild 15.6 zeigt anschaulich, daß ein $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Maximumpunkt } H \text{ höher} \\ \text{Minimumpunkt } T \text{ tiefer} \end{smallmatrix} \right\}$ liegt als alle Punkte eines gewissen $\left\{ \begin{smallmatrix} H \\ T \end{smallmatrix} \right\}$ enthaltenen Kurvenstücks.

Die Beschränkung der Extremaleigenschaft auf ein derartiges Kurvenstück wird durch die Bezeichnung „relativ“ zum Ausdruck gebracht. In Bild 15.6 gibt es z. B. auch Kurvenpunkte, die höher liegen als der Maximumpunkt H . Da absolute Extremwerte hier nicht behandelt werden, kann der Zusatz „relativ“ meist weggelassen.

Als Umgebung U von x_H wird ein beliebig klein zu denkendes, den Wert x_H im Inneren enthaltendes Intervall $[a, b]$ definiert. Links von H liegt ein wachsender Monotoniebogen vor, also gilt (vgl. 10.3.): $f(x) \leq f(x_H)$ für alle $x \in [a, x_H]$. Für den rechts von H liegenden fallenden Monotoniebogen wird $f(x_H) \geq f(x)$ für alle $x \in [x_H, b]$. Beide Ergebnisse zusammengefaßt liefern $f(x) \leq f(x_H)$ für alle $x \in [a, x_H] \cup [x_H, b] = U$. Analoge Betrachtungen lassen sich für einen Minimumpunkt T anstellen.

Definition:

Die Funktion f besitzt in $\begin{Bmatrix} x_H \\ x_T \end{Bmatrix}$ eine (relative) $\begin{Bmatrix} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{Bmatrix}$, wenn es eine Umgebung U von $\begin{Bmatrix} x_H \\ x_T \end{Bmatrix}$ gibt, so daß für alle $x \in U$ $\begin{Bmatrix} f(x) \leq f(x_H) \\ f(x) \geq f(x_T) \end{Bmatrix}$ ist. Der Funktionswert $\begin{Bmatrix} y_H = f(x_H) \\ y_T = f(x_T) \end{Bmatrix}$ heißt (relatives) $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ von f .

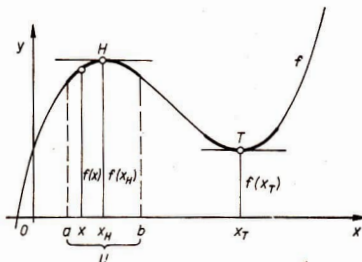


Bild 15.6

Gemeinsam wird von **Extremstellen** bzw. **Extremwerten** gesprochen. Nach 15.1. gilt für die im Maximumpunkt H zusammenstoßenden Monotoniebogen: $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, x_H]$, $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [x_H, b]$. Daraus folgt sofort $f'(x_H) = 0$. Anschaulich bedeutet es, daß in H die Tangente waagrecht liegt, also $\tau_H = 0$, $\tan \tau_H = f'(x_H) = 0$ ist. Mit einer entsprechenden Überlegung für den Minimumpunkt ergibt sich folgende **notwendige Bedingung** für die Existenz eines Extremwertes:

Satz

Hat eine Funktion f in x_E eine Extremstelle und ist f in einer Umgebung U von x_E differenzierbar, dann ist

$$f'(x_E) = 0.$$

Daß diese Bedingung nicht auch hinreichend für die Existenz eines Extremwertes ist, zeigt z. B. Bild 15.10. Obgleich in W die Tangente waagrecht liegt, also $f'(x_W) = 0$ wird, ist W kein Extrempunkt.

Wird beachtet, daß die Funktion in der Umgebung einer Extremstelle x_E bei einem Maximum von unten konkav, d. h. $f''(x_E) < 0$ ist, und bei einem Minimum von unten konvex, d. h. $f''(x_E) > 0$ ist (der Fall $f''(x_E) = 0$ wird zunächst außer acht gelassen), dann ergeben sich **hinreichende Bedingungen** für die Existenz eines Extremwertes.

Satz

Ist eine Funktion f in U zweimal differenzierbar und ist

$$f'(x_E) = 0 \begin{Bmatrix} f''(x_E) < 0 \\ f''(x_E) > 0 \end{Bmatrix}, \text{ dann ist } x_E \text{ eine } \begin{Bmatrix} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{Bmatrix}.$$

Nach diesem Satz können praktisch die Extremstellen berechnet werden. Die 1. Ableitung wird gleich Null gesetzt, und es werden die Lösungen $x_{E1}, x_{E2}, \dots, x_{En}$ der entstandenen Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmt. Diese Lösungen werden in die 2. Ableitung eingesetzt: $f''(x_{E1}), \dots, f''(x_{En})$. Das Vorzeichen der jeweiligen 2. Ableitung gibt dann an, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.

BEISPIELE

- 15.5. Es sind die Extremstellen und Extremwerte der Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \text{ zu berechnen.}$$

Lösung:

Die ersten zwei Ableitungsfunktionen sind

$$f': y' = x^2 - 4x + 3 \quad f'': y'' = 2x - 4$$

Die Gleichung $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ hat die Lösungen $x_{E1} = 1, x_{E2} = 3$.

Wegen $f''(x_{E1}) = f''(1) = 2 - 4 = -2 < 0$ ist $x_{E1} = x_H$ eine Maximumstelle. Wegen $f''(x_{E2}) = f''(3) = 6 - 4 = 2 > 0$ ist $x_{E2} = x_T$ eine Minimumstelle.

Das Maximum ist $y_H = f(1) = \frac{7}{3}$, das Minimum ist $y_T = f(3) = 1$. Die Kurve ist in Bild 15.6 angegeben.

- 15.6. Die freie gedämpfte Schwingung eines Federschwingers wird im aperiodischen Grenzfall, d. h. im Fall des raschesten Abklingens der Schwingung, durch die Funktion

$$u = v_0 t e^{-\delta t} = u(t)$$

beschrieben. Dabei ist $u(t)$ die Auslenkung des schwingenden Körpers aus der Ruhelage zur Zeit t , v_0 die Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ und δ die von der Masse des schwingenden Körpers und der Federkraft abhängige Dämpfungskonstante. Gesucht wird die maximale Auslenkung.

Lösung: Aus

$$\frac{du}{dt} = v_0(e^{-\delta t} - \delta t e^{-\delta t}) = 0$$

folgt

$$e^{-\delta t}(1 - \delta t) = 0$$

und wegen

$$e^{-\delta t} \neq 0$$

wird

$$t_H = \frac{1}{\delta}.$$

Für die zweite Ableitung folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= v_0(-\delta e^{-\delta t} - (1 - \delta t)\delta e^{-\delta t}) \\ &= -v_0\delta(2 - \delta t)e^{-\delta t} \end{aligned}$$

und für $t = t_H = \frac{1}{\delta}$

$$\left[\frac{d^2u}{dt^2} \right]_{t=\frac{1}{\delta}} = -v_0\delta e^{-\delta t} < 0.$$

Für t_H liegt also ein Maximum vor. Die maximale Auslenkung ist

$$u_H = u(t_H) = v_0 \frac{1}{\delta e}.$$

Bild 15.7 zeigt den Verlauf der Schwingung für $v_0 = 8 \text{ m/s}$, $\delta = 0,7 \text{ s}^{-1}$.

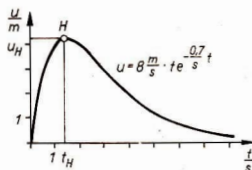


Bild 15.7

Die Bedingungen $f'(x) = 0$, $f''(x) \geq 0$ sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz eines Extremwertes. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann an einer Extremstelle auch $f''(x) = 0$ sein. Zur Entscheidung über die Art des Extremwertes müssen dann die nächst höheren Ableitungen herangezogen werden.

BEISPIEL

15.7. Gesucht werden die Extremstellen der Funktion $f: y = (x - 2)^4 + 1$

Lösung:

Es ist $f'(x) = 4(x - 2)^3$, $f''(x) = 12(x - 2)^2$. Aus $f'(x) = 4(x - 2)^3 = 0$ folgt $x_E = 2$ als mögliche Extremstelle. Wegen $f''(2) = 0$ versagen aber die im obigen Satz genannten Bedingungen, obwohl die Funktion für $x_E = 2$ ein Minimum besitzt (Bild 15.8). Die nächsthöheren Ableitungen ergeben

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 24(x - 2) & f'''(2) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(2) &= 24 > 0. \end{aligned}$$

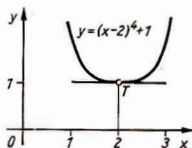


Bild 15.8

Es gilt: Ist außer $f'(x_E) = 0$ auch $f''(x_E) = 0$, dann werden höhere Ableitungen gebildet. Ist die erste von Null verschiedene Ableitung von gerader Ordnung: $f^{(2k)}(x_E) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, dann liegt eine Extremstelle vor, und zwar für $f^{(2k)}(x_E) < 0$ ein Maximum und für $f^{(2k)}(x_E) > 0$ ein Minimum.

Die Punkte heißen nach dem Kurvenverlauf in der Umgebung des jeweiligen Punktes auch Flachpunkte.

Kontrollfragen

- 15.4. Wie wird der relative Extremwert einer Funktion $f: y = f(x)$ an der Stelle x_E definiert?
- 15.5. Welche Bedingungen sind a) notwendig, b) hinreichend für die Existenz des Extremwertes einer Funktion $f: y = f(x)$?
- 15.6. Es sind einige Funktionen zu nennen, für die relative und absolute Extremwerte zusammenfallen.

Aufgaben: 15.5. und 15.6.**15.2.2. Wendepunkte****Definition:**

Der Punkt W einer Kurve heißt **Wendepunkt**, wenn er einen Konvex- und einen Konkavbogen trennt.

In Bild 15.9a ist W ein Wendepunkt. Ist $f: y = f(x)$ die zur Kurve gehörende Funktion, dann gilt, da W beiden Krümmungsbogen angehört: $f''(x_W) \geq 0$ und $f''(x_W) \leq 0$. Daraus folgt $f''(x_W) = 0$.

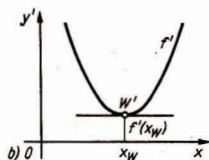
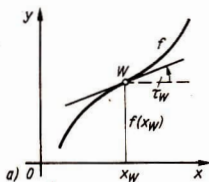


Bild 15.9

Bild 15.9b zeigt anschaulich, daß die abgeleitete Kurve in W' einen Extrempunkt besitzt, also die Tangente in W' waagrecht ist: $\tau'_W = 0$, $\tan \tau'_W = f''(x_W) = 0$.

Satz

Ist die Funktion f in einer Umgebung U von x_W zweimal differenzierbar und ist W ein Wendepunkt der zu f gehörigen Kurve, dann ist $f''(x_W) = 0$.

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend. In Bild 15.8 ist z. B. die Kurve auf beiden Seiten von T konvex gekrümmt, also $f''(x) \geq 0$. Bei Annäherung an T von links wird $f''(x)$ kleiner, nimmt in T den Wert 0 an (vgl. Beispiel 15.7.) und wird dann wieder größer. Entscheidend für die Existenz eines Wendepunktes W ist aber, daß $f''(x)$ unterschiedliche Vorzeichen links und rechts von x_W hat.

Da für die abgeleitete Funktion (Bild 15.9b) x_W eine Extremstelle ist, muß im allgemeinen nach der hinreichenden Bedingung über Extremwerte die übernächste Ableitung, also $f'''(x_W) \neq 0$ sein. Daraus folgt eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes.

Satz

Ist die Funktion f in einer Umgebung U von x_W dreimal differenzierbar und ist

$$f''(x_W) = 0, \quad f'''(x_W) \neq 0,$$

dann ist W ein Wendepunkt der zugehörigen Kurve.

Die Tangente im Wendepunkt heißt Wendetangente. Sie liegt auf einer Seite von W oberhalb, auf der anderen Seite unterhalb der Kurve. Die Wendetangente durchsetzt also die Kurve. Ein Wendepunkt mit waagerechter Wendetangente heißt **Stufen- oder Terrassenpunkt** (Bild 15.10). Für ihn lautet die notwendige Bedingung $f'(x_W) = 0, f''(x_W) = 0$.

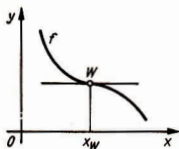


Bild 15.10

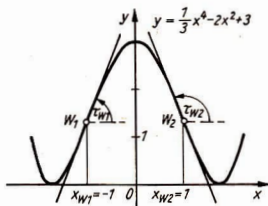


Bild 15.11

BEISPIELE

- 15.8. Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3$. Für die zugehörige Kurve werden die Koordinaten der Wendepunkte und die Anstiegswinkel der Wendetangenten gesucht.

Lösung: Es ist

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x \quad f''(x) = 4x^2 - 4 \quad f'''(x) = 8x.$$

Die Gleichung $f''(x) = 4x^2 - 4 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -1, x_2 = 1$. Wegen $f'''(-1) = -8 \neq 0, f'''(1) = 8 \neq 0$ sind x_1, x_2 die Abszissen von Wendepunkten: $x_1 = x_{W1}, x_2 = x_{W2}$. Die Ordinaten sind $y_{W1} = f(-1) = \frac{4}{3}, y_{W2} = f(1) = \frac{4}{3}$. Für die Anstiege der Wendetangenten folgt $f'(-1) = \frac{8}{3} = \tan \tau_{W1}, f'(1) = -\frac{8}{3} = \tan \tau_{W2}$.

Die Kurve hat die Wendepunkte $W_1\left(-1; \frac{4}{3}\right), W_2\left(1; \frac{4}{3}\right)$.

Die Anstiegswinkel der Wendetangenten sind

$$\tau_{W1} = 69,4^\circ, \tau_{W2} = 110,6^\circ. \quad (\text{Bild 15.11})$$

- 15.9. Die geradlinige Bewegung eines Körpers werde durch die Funktion

$$s = -\frac{1}{90}t^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} + \frac{1}{5}t^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad 0 \leq t \leq 12 \text{ s}$$

beschrieben. Gesucht wird der Zeitpunkt t , für den das Weg-Zeit-Diagramm einen Wendepunkt besitzt. Wie groß ist der Anstieg der Wendetangente? Es ist das s, t -, v, t - und a, t -Diagramm zu zeichnen. Welche physikalische Bedeutung haben der Wendepunkt und der Anstieg der Wendetangente?

Lösung: Allgemein ergibt die erste Ableitung der Funktion $s = f(t)$ die Geschwindigkeit v und die zweite Ableitung die Beschleunigung a (vgl. 19.1.). Für die angegebene Funktion folgt

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{30} t^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} + \frac{2}{5} t \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = v \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{15} t \frac{\text{m}}{\text{s}^3} + \frac{2}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = a \quad (\text{II})$$

Für den Wendepunkt gilt $a = 0$, so daß aus (II) folgt

$$t_W = 6 \text{ s.}$$

Der Anstieg der Wendetangente ist

$$\left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=6\text{s}} = -\frac{6}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{12}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_W.$$

Bild 15.12 zeigt den Kurvenverlauf im s, t -, v, t - und a, t -Diagramm. Die Beschleunigung nimmt von positiven Werten ausgehend linear ab, erreicht zum Zeitpunkt $t_W = 6 \text{ s}$, also im Wendepunkt, den Wert $a = 0$ und geht dann in eine negative Beschleunigung (Bremsbewegung) über. Zu den Zeitpunkten $t = 0 \text{ s}$ und $t = 12 \text{ s}$ ist die Geschwindigkeit v gleich Null, das ist also Anfang und Ende der Bewegung. Der Anstieg der Wendetangente gibt die größte Geschwindigkeit v_W im genannten Zeitintervall an.

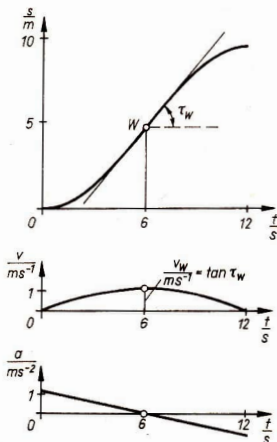


Bild 15.12

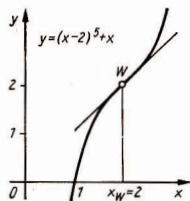


Bild 15.13

Es gilt: Ist außer $f''(x_W) = 0$ auch $f'''(x_W) = 0$, dann werden höhere Ableitungen gebildet. Ist die erste von Null verschiedene Ableitung von ungerader Ordnung: $f^{(2k+1)}(x_W) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, dann liegt ein Wendepunkt vor.

Ist aber die erste von Null verschiedene Ableitung von gerader Ordnung, dann hat die Kurve in x_W keinen Wendepunkt (Dieser Kurvenpunkt heißt in der Literatur auch „uneigentlicher Wendepunkt“). Die in den Abschnitten 15.2.1. und 15.2.2. gewonnenen Ergebnisse sind im Bild 15.14 übersichtlich zusammengestellt. Die häufiger vorkommenden Fälle sind stärker umrahmt.

Kontrollfragen

- 15.7. Wie wird der Wendepunkt einer Kurve definiert?
- 15.8. Wie verhält sich die abgeleitete Kurve an der Stelle x_W , wenn die Stammkurve an der Stelle x_W einen Wendepunkt hat?
- 15.9. Welche Bedingungen sind a) notwendig, b) hinreichend für die Existenz eines Wendepunktes?
- 15.10. Wieviel Extrempunkte und wieviel Wendepunkte hat im Höchstfall eine Parabel n -ten Grades?

Aufgaben: 15.7. bis 15.9.

15.2.3. Kurvendiskussionen

Es wird gezeigt, wie durch zusammenfassende Anwendung der bisherigen Ergebnisse rationell mit Hilfe charakteristischer Punkte sowie wichtiger geometrischer Eigenschaften ein Überblick über das Bild einer Funktion gewonnen wird.

Eine Funktion f sei gegeben, und es soll der Verlauf der zugehörigen Kurve untersucht werden. Eine erste Möglichkeit besteht in der Aufstellung einer Wertetabelle, d. h. der Berechnung von Funktionswerten $y = f(x)$ für beliebig gewählte, meist ganzzahlige x -Werte, z. B. $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Die zugehörigen Kurvenpunkte $P(x; y)$ werden im Koordinatensystem aufgetragen und ergeben miteinander verbunden annähernd den Kurvenverlauf. Nachteilig ist, daß charakteristische Punkte wie z. B. Extrempunkte dann nicht erfaßt werden, wenn ihre Abszissen nicht in der Wertetabelle vorkommen. Besser ist deshalb die Berechnung der Koordinaten aller charakteristischen Kurvenpunkte sowie die Untersuchung besonderer Kurvenigenschaften. Diese Aufgabe wird Kurvendiskussion genannt. Zweckmäßig ist die Reihenfolge:

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Untersuchung auf Symmetrie und Periodizität
3. Untersuchung auf Verhalten im Unendlichen
4. Achsenschnittpunkte bestimmen
5. Unstetigkeitsstellen bestimmen
6. Extrempunkte und Art der Extremwerte bestimmen
7. Wendepunkte und Anstieg der Wendetangenten bestimmen
8. Skizze anfertigen
9. Wertebereich angeben

BEISPIELE

15.11. Die zur Funktion $f: y = \frac{1}{5}x^5 - x^3$ gehörige Kurve ist zu diskutieren.

Lösung:

1. Definitionsbereich: f ist ganzrational, daher $X = P$
2. Symmetrie: Die vorkommenden Exponenten sind sämtlich ungerade, daher ist $f(-x) = -f(x)$, d. h., die Funktion ist ungerade und die Kurve zentralsymmetrisch zum Ursprung.
3. Verhalten im Unendlichen: Für $x \rightarrow +\infty$ folgt $y \rightarrow +\infty$, für $x \rightarrow -\infty$ folgt $y \rightarrow -\infty$
4. Achsenschnittpunkte:

Schnitt mit der x -Achse: $y = \frac{1}{5}x^5 - x^3 = 0$. Daraus folgt $x^3 \left(\frac{1}{5}x^2 - 1 \right) = 0$,
 $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{5} = -2,24$, $x_3 = \sqrt{5} = 2,24$. Die Schnittpunkte sind $X_1(0; 0)$,
 $X_2(-2,24; 0)$, $X_3(2,24; 0)$.

Schnitt mit der y -Achse: $x = 0 \Rightarrow y_1 = 0$. Der Schnittpunkt $Y_1(0; 0)$ fällt mit X_1 zusammen.

5. Unstetigkeitsstellen: Da f ganzrational, ist die Kurve überall stetig.

6. Extrempunkte: Es ist

$$f'(x) = x^4 - 3x^2, \quad f''(x) = 4x^3 - 6x$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x^2(x^2 - 3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3} = -1,73$, $x_3 = \sqrt{3} = 1,73$.
 Die Ordinaten sind $y_1 = 0$, $y_2 = 2,08$, $y_3 = -2,08$. Wegen $f'(0) = 0$, $f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$, $f''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$ ist $x_2 = -1,73$ Maximumstelle, $x_3 = 1,73$ Minimumstelle: $H(-1,73; 2,08)$, $T(1,73; -2,08)$.

Für x_1 ist noch keine Aussage möglich. Wegen

$$f'''(x) = 12x^2 - 6, \quad f'''(0) = -6 \neq 0$$

ist $x_1 = 0$ Abszisse eines Stufenpunktes: $S(0; 0)$.

7. Wendepunkte, Anstieg der Wendetangenten:

$f''(x) = 4x^3 - 6x = 0$ ergibt $2x(2x^2 - 3) = 0$, $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -1,23$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,23$, $x_3 = 0$. Die Ordinaten sind $y_1 = 1,29$, $y_2 = -1,29$, $y_3 = 0$.

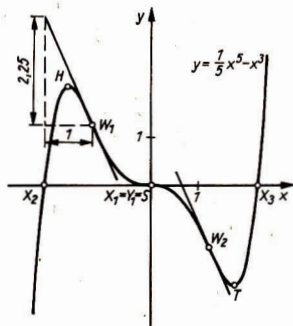


Bild 15.15

Der Stufenpunkt S in $x_3 = 0$ wurde bereits in 6. bestimmt. Wegen $f'''(-1,23) = f'''(1,23) = 12 \neq 0$ existieren die Wendepunkte $W_1(-1,23; 1,29)$, $W_2 = (1,23; -1,29)$. Der Anstieg der Wendetangente ist in

$$x_1 = -1,23: f'(-1,23) = -2,25$$

$$x_2 = 1,23: f'(1,23) = -2,25$$

$$x_3 = 0: f'(0) = 0$$

8. Skizze: siehe Bild 15.15. Die Wendetangenten wurden mit Hilfe der Anstiegsdreiecke gezeichnet.

9. Wertebereich: $Y = P$.

15.12. Es ist die Kurve der Funktion $y = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$ zu diskutieren.

Lösung:

1. Definitionsbereich: $X = P \setminus \{-1\}$

2. Symmetrie: $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x+1)^2} = \frac{2x^2}{(-x+1)^2} \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$, keine Symmetrie

3. Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = 2$. Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ ist eine Asymptote der Kurve.

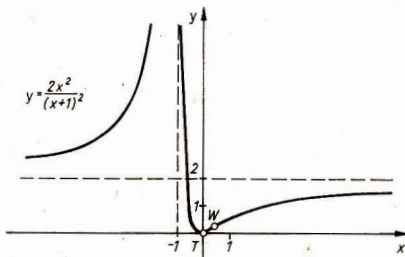


Bild 15.16

4. Achsenschnittpunkte:

$$\text{Schnitt mit der } x\text{-Achse: } 0 = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow x_1 = 0, X_1(0; 0)$$

$$\text{Schnitt mit der } y\text{-Achse: } x = 0 \Rightarrow y_1 = 0, Y_1(0; 0)$$

5. Unstetigkeiten: An der Stelle $x = -1$ ist die Funktion unstetig. Wegen $f(-1) = \frac{2}{0}$ ist $x = -1$ eine Polstelle. Es ist $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = +\infty$, daher ist die Gerade $x = -1$ eine weitere Asymptote.

6. Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{4x(x+1)^2 - 2x^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{4(x+1)^3 - 4x \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimumpunkt $T_1(0; 0)$

7. Wendepunkte, Anstieg der Wendetangenten:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0, x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{2}{9}, f'''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^5},$$

$$f''' \left(\frac{1}{2} \right) = 1,58 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt } W_1(0,5; 0,222)$$

Anstieg der Wendetangente: $f'(0,5) = 0,593$

8. Skizze: siehe Bild 15.16. Die Asymptoten sind gestrichelt gezeichnet.

9. Wertebereich: $Y = [0; \infty)$

15.13. Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{x^3 + 16}{4x}$. Die zugehörige Kurve ist zu diskutieren.

Lösung:

1. Definitionsbereich: $X = P \setminus \{0\}$

2. Symmetrie: Mit $f(x) = \frac{x^3 + 16}{4x}$ folgt $f(-x) = \frac{(-x)^3 + 16}{4(-x)} = \frac{-x^3 + 16}{-4x} = \frac{x^3 - 16}{4x}$, d. h., es ist weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$. Daher liegt keine Symmetrie vor.

3. Verhalten im Unendlichen: Die Zerlegung $y = \frac{x^3 + 16}{4x} = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x}$ in die Summe eines ganzrationalen und eines echt gebrochenen rationalen Terms läßt erkennen, daß sich die Ordinaten $y = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x}$ und $y = \frac{x^2}{4}$ für wachsendes $|x|$ immer mehr nähern, da $\frac{4}{x}$ gegen Null strebt. Die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{x^2}{4}$ ist deshalb Asymptotenkurve. Ihr nähert sich die gesuchte Kurve für $x \rightarrow \pm\infty$.

4. Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkte mit der x -Achse: $0 = \frac{x^3 + 16}{4x} \Rightarrow x^3 = -16, x_1 = -\sqrt[3]{16} = -2,52, X_1(-2,52; 0)$.

Schnittpunkt mit der y -Achse: existiert nicht, da $x = 0$ nicht zum Definitionsbereich gehört.

5. Unstetigkeiten: An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion unstetig. Wegen $f(0) = \frac{16}{0}$

ist $x = 0$ Polstelle, die y -Achse ist Asymptote der Kurve. Es ist $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$.

Für kleiner werdendes $|x|$ nähern sich die Ordinaten $y = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x}$ und $y = \frac{4}{x}$ einander, da $\frac{x^2}{4}$ gegen Null strebt. Die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{4}{x}$ ist daher Asymptotenkurve für $x \rightarrow 0$.

6. Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{4}{x^2}, f''(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 3, f''(2) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{Minimumpunkt } T_1(2; 3).$$

7. Wendepunkte, Anstieg der Wendetangenten:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 = -16, x_1 = -\sqrt[3]{16} = -2,52, y_1 = 0,$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^4}, f'''(-2,52) = -0,60 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt } W_1(-2,52; 0).$$

Der Anstieg der Wendetangente ist $f'(-2,52) = -1,89$.

8. Skizze: siehe Bild 15.17. Die beiden Asymptotenkurven sowie die Wendetangente sind gestrichelt gezeichnet.

9. Wertebereich: $Y = P$.

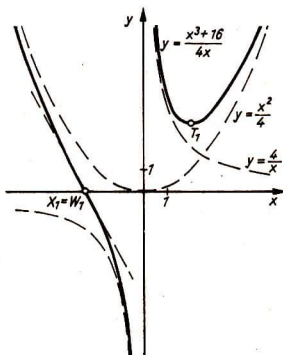


Bild 15.17

15.14. Die Kurve der Funktion $y = x^2 \ln x$ ist zu diskutieren.

Lösung:

1. Definitionsbereich: Da x Argument der Logarithmusfunktion ist, wird $X = (0, \infty)$.
2. Symmetrie, Periodizität: liegt nicht vor, da $\ln x$ diese Eigenschaften nicht hat.
3. Verhalten im Unendlichen: für $x \rightarrow \infty$ folgt $x^2 \ln x \rightarrow \infty$
4. Achsenschnittpunkte:
Schnittpunkt mit der x -Achse: Aus $f(x) = 0$ und $x \neq 0$ folgt $\ln x = 0$, $x_1 = 1$: $X(1; 0)$
Kein Schnittpunkt mit der y -Achse wegen $x \neq 0$
5. Unstetigkeiten: keine

6. Extrempunkte:

$$f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{2x}{x} = 2 \ln x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}, x_1 = 0,607 \left(= \frac{1}{\sqrt{e}} \right), y_1 = -0,184 \left(= -\frac{1}{2e} \right)$$

$$f''(0,607) = 2 > 0, \text{ Minimumpunkt } T(0,607; -0,184)$$

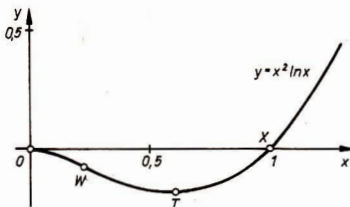


Bild 15.18

7. Wendepunkte, Anstieg der Wendetangente:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1,5, x_1 = 0,223, y_1 = -0,075$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \neq 0, \text{ Wendepunkt } W(0,223; -0,075)$$

$$\text{Der Anstieg der Wendetangente ist } f'(0,223) = -0,446$$

8. Skizze: siehe Bild 15.18

$$9. \text{ Wertebereich: } Y = \left[-\frac{1}{2e}, \infty \right)$$

15.15: Die zur Funktion $y = 5e^{-0,2x} \sin x$, $X = [0; \infty)$ gehörige Kurve ist zu diskutieren.

Lösung:

1. Definitionsbereich: Der Definitionsbereich $X = P$ wurde durch die Aufgabenstellung eingeschränkt.

2. Symmetrie, Periodizität: liegt nicht vor, da $e^{-0,2x}$ diese Eigenschaften nicht besitzt.

3. Verhalten im Unendlichen: Wegen $|\sin x| \leq 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} 5e^{-0,2x} \sin x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \sin x}{e^{0,2x}} = 0$, d. h., die x -Achse ist Asymptote.

4. Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkte mit der x -Achse: Aus $f(x) = 0$ folgt wegen $e^{-0,2x} \neq 0$ sofort $\sin x = 0$, $x_k = (k-1)\pi$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$: $X_1(0; 0)$, $X_2(3,14; 0)$, $X_3(6,28; 0)$, $X_4(9,42; 0)$, ..
Schnittpunkt mit der y -Achse: $Y_1(0; 0) = X_1$.

5. Unstetigkeiten: keine.

6. Extrempunkte: Für die ersten beiden Ableitungen ergibt sich nach Vereinfachung:

$$f'(x) = 5e^{-0,2x}(-0,2 \sin x + \cos x), f''(x) = 5e^{-0,2x}(-0,06 \sin x - 0,4 \cos x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -0,2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 5$$

$$x_k = 78,7^\circ + (k-1) 180^\circ = 1,373 + (k-1)\pi, k \in \{1, 2, 3, \dots\}; x_1 = 1,37, x_2 = 4,52, \\ x_3 = 7,66, x_4 = 10,80, \dots$$

$$f''(x_1) = -3,87 < 0, f''(x_2) = 2,07 > 0, f''(x_3) = -1,10 < 0, f''(x_4) = 0,59 > 0, \dots$$

Maximumpunkte: $H_1(1,37; 3,73), H_2(7,66; 1,06), \dots$

Minimumpunkte: $T_1(4,52; -1,99), T_2(10,80; -0,57), \dots$

7. Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -0,96 \sin x - 0,4 \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{5}{12} = -0,417$$

$$x_k = 157,4^\circ + (k-1) 180^\circ = 2,75 + (k-1)\pi, k \in \{1, 2, 3, \dots\}; W_1(2,75; 1,11), \\ W_2(5,89; -0,59), W_3(9,03; 0,32), \dots \text{ (Die Untersuchung } f'''(x_k) \neq 0 \text{ wird weggelassen.)}$$

Die Anstiege der Wendetangenten sind: $f'(x_1) = -2,88, f'(x_2) = 1,54, f'(x_3) = 0,82, \dots$

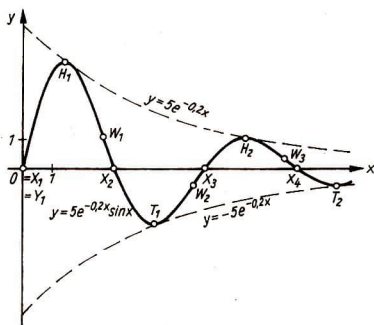


Bild 15.19

8. Skizze: Bild 15.19. Für $|\sin x| = 1$, d. h., $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$, stimmen die Ordinaten

der Kurve mit den Ordinaten der durch $y = 5e^{-0,2x}$ bzw. $y = -5e^{-0,2x}$ gegebenen Exponentialkurven überein. Für die übrigen x -Werte ist $|\sin x| < 1$, d. h., die Kurve liegt zwischen den beiden Exponentialkurven. Die Berührungspunkte zwischen der Kurve und den Exponentialkurven fallen nicht mit den Extrempunkten der Kurve zusammen. Der Abszissenunterschied zwischen Extrempunkt und jeweiligem Berührungspunkt beträgt stets $\Delta x = \frac{\pi}{2} - \arctan 5 = 0,20$. Die Funktion stellt eine gedämpfte Sinusschwingung dar.

9. Wertebereich: $Y = [-1,99; 3,73]$.

Aufgaben: 15.10. bis 15.13.

15.3. Angewandte Extremwertaufgaben

Bei vielen Aufgaben in der Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft usw. sind Bestwerte zu berechnen, z. B. minimaler Materialverbrauch, minimale Kosten, maximale Leistungen, Volumen, Belastbarkeiten usw. Diese Aufgaben heißen **Extremwertaufgaben**. Zur Einführung dient das folgende einfache geometrische Beispiel:

BEISPIEL

15.16. Von einem Dreieck sind die Grundlinie c und die Höhe h gegeben. Dem Dreieck ist ein Rechteck so einzubeschreiben, daß eine Rechteckseite auf c liegt und die Rechteckfläche maximal wird. Zu berechnen sind die Seiten und die Fläche des Rechtecks.

Lösung: Die Rechteckfläche A soll ein Maximum sein. Die Bilder 15.20a bis c zeigen, daß bei Vergrößerung der Rechteckseite x die andere Seite y kleiner wird und umgekehrt. Für $y \rightarrow c$ folgt $x \rightarrow 0$ und damit $A \rightarrow 0$, und für $y \rightarrow 0$ folgt $x \rightarrow h$ und $A \rightarrow 0$. Zwischen beiden Grenzlagen muß A einen maximalen Wert annehmen. Es ist

$$A = x \cdot y = f(x; y). \quad (\text{I})$$

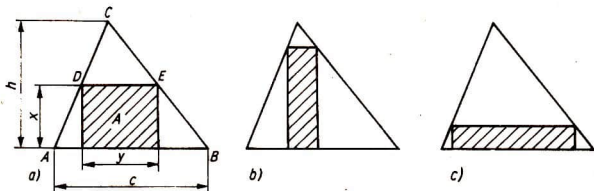


Bild 15.20

Wie die Betrachtungen zeigten, sind x und y nicht unabhängig voneinander. Die zwischen ihnen bestehende Bedingung folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEC :

$$c : h = y : (h - x) \Rightarrow y = \frac{c}{h} (h - x). \quad (\text{II})$$

(II) wird in (I) eingesetzt und ergibt mit

$$A = x \cdot \frac{c}{h} (h - x) = \frac{c}{h} (hx - x^2) = f(x) \quad (\text{III})$$

die Rechteckfläche in Abhängigkeit von nur noch einer Variablen. x hat nach der Aufgabenstellung den Definitionsbereich $D = [0; h]$.

Die erste Ableitung der Funktion $A = f(x)$ wird gleich Null gesetzt:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{c}{h} (h - 2x) = 0.$$

Mit $\frac{c}{h} \neq 0$ folgt

$$h - 2x = 0 \Rightarrow x_E = \frac{h}{2}.$$

Wegen $\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{2c}{h} < 0$ ist x_E Maximumstelle.

Aus (II) folgt: $y_E = \frac{c}{h} (h - x_E) = \frac{c}{2}$.

Die maximale Rechteckfläche ist $A_E = f(x_E; y_E) = x_E \cdot y_E = \frac{ch}{4}$.

Die Rechteckfläche nimmt also den maximalen Wert $A_E = \frac{ch}{4}$ an, wenn die Seiten die Längen $x_E = \frac{h}{2}$, $y_E = \frac{c}{2}$ haben.

Anmerkung: Da bei angewandten Extremwertaufgaben im Gegensatz zu Kurvendiskussionen im allgemeinen der absolute Extremwert gesucht wird und dieser auch am Rand des Definitionsbereiches auftreten kann, ist das Verhalten der Funktion in den Randstellen zu prüfen. Für $x = 0$ und $x = h$ folgt aber $A = 0$, d. h., es liegt kein Maximum vor. Absoluter und relativer Extremwert fallen, wie bei den meisten Extremwertaufgaben, zusammen (Bild 15.21).

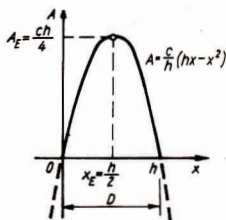


Bild 15.21

Wie aus Beispiel 15.16. ersichtlich, gliedert sich die Lösung einer Extremwertaufgabe in folgende Schritte:

1. Der naturwissenschaftliche, technische oder sonstige Sachverhalt ist klar zu erfassen. Die Betrachtung einiger ausgewählter Fälle, z. B. durch Skizzen, erleichtert die Unterscheidung von Konstanten und Variablen.
2. Die Größe, die einen Extremwert annehmen soll, ist in einer Funktionsgleichung als abhängige Variable darzustellen. Diese Funktion heißt **Zielfunktion**. Sie enthält im allgemeinen mehr als eine unabhängige Variable.
3. Die Zahl der unabhängigen Variablen in der Zielfunktion ist auf eins zu reduzieren. Hierzu sind **Nebenbedingungen** aufzusuchen, die zwischen den unabhängigen Variablen und gegebenen Größen bestehen. Durch jede Nebenbedingung kann die Zahl der Variablen um eins reduziert werden. Der Definitionsbereich der Zielfunktion ist zu ermitteln.
Läßt sich die Zahl der unabhängigen Variablen in der Zielfunktion nicht auf eins reduzieren, dann sind die Methoden aus 21.5. anzuwenden.
4. Für die Zielfunktion sind die Extremstelle, der Extremwert und die Art des Extremwertes nach 15.2.1. zu berechnen. Die Funktionswerte in den Randpunkten des Definitionsbereiches sind auf Extremaleigenschaft zu untersuchen.
5. Das Ergebnis ist zu formulieren.

BEISPIELE

- 15.17. Es soll eine zylinderförmige Konservendose mit dem gegebenen Volumen V hergestellt werden. Wie sind Radius r und Höhe h des Zylinders zu wählen, damit der Materialverbrauch, d. h. die Oberfläche des Zylinders, ein Minimum wird?

Lösung: Die Bilder 15.22a bis c zeigen einige Zylinder gleichen Volumens. r und h sind variabel, V ist konstant. Die Zielfunktion ist

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(rh + r^2) = f(r; h). \quad (\text{IV})$$

Die Volumenformel $V = \pi r^2 h$ ergibt die Nebenbedingung und wird, um eine Wurzel zu vermeiden, nach h aufgelöst:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}. \quad (\text{V})$$

Mit (V) folgt aus (IV) die Zielfunktion als Funktion mit einer unabhängigen Variablen:

$$O = 2\pi \left(\frac{V}{\pi r} + r^2 \right) = f(r).$$

Der aus der Aufgabenstellung folgende Definitionsbereich ist $D = (0; \infty)$.

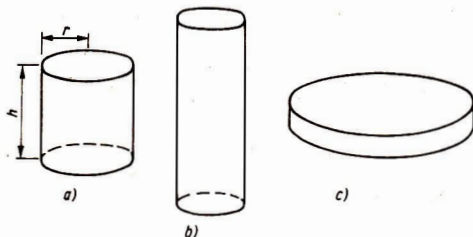


Bild 15.22

Die weitere Rechnung ergibt

$$\frac{dO}{dr} = 2\pi \left(-\frac{V}{\pi r^2} + 2r \right)$$

$$\frac{d^2O}{dr^2} = 2\pi \left(\frac{2V}{\pi r^3} + 2 \right)$$

$$\frac{dO}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{V}{\pi r^2} + 2r = 0 \Rightarrow r_E = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

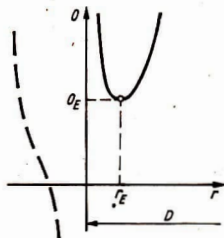


Bild 15.23

Wegen $\left[\frac{d^2O}{dr^2} \right]_{r=r_E} > 0$ ist r_E eine Minimumstelle. Bild 15.23 zeigt das Bild der Zielfunktion (vgl. auch Bild 15.17). Im betrachteten Intervall (das als offenes Intervall keine Randpunkte besitzt) fallen wieder relatives und absolutes Minimum zusammen. Die zu r_E gehörige Höhe ist nach (V)

$$h_E = \frac{V}{\pi r_E^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi}}} = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_E.$$

Die Oberfläche eines Zylinders mit gegebenem Volumen ist ein Minimum, wenn Höhe und Durchmesser des Zylinders gleich groß gewählt werden.

- 15.18. An eine Spannungsquelle mit der Ursprungung U und dem inneren Widerstand R_i ist ein äußerer Widerstand R_a angeschlossen. Wie groß ist R_a zu wählen, damit die in ihm verbrauchte Leistung $P = I^2 R_a$ möglichst groß ist?

Lösung: Mit der Stromstärke

$$I = \frac{U}{R_i + R_a}$$

folgt aus $P = I^2 R_a$ die Zielfunktion

$$P = U^2 \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} = f(R_a).$$

Ihre ersten beiden Ableitungen lauten

$$\frac{dP}{dR_a} = U^2 \frac{(R_i + R_a)^2 - R_a^2(R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} = U^2 \frac{R_i - R_a}{(R_i + R_a)^3}$$

$$\frac{d^2P}{dR_a^2} = U^2 \frac{-(R_i + R_a)^3 - (R_i - R_a) 3(R_i + R_a)^2}{(R_i + R_a)^6} = -2U^2 \frac{2R_i - R_a}{(R_i + R_a)^4}.$$

Aus $\frac{dP}{dR_a} = 0$ folgt $R_{aE} = R_i$ und damit

$$\left[\frac{d^2P}{dR_a^2} \right]_{R_a=R_i} = -2U^2 \frac{R_i}{(R_i + R_a)^4} < 0,$$

d. h., R_{aE} ist eine Maximumstelle.

Für $R_a = R_i$ ist die im Widerstand R_a verbrauchte Leistung ein Maximum (Anpassungsfall).

- 15.19. Gegeben sind die Punkte $A(0; y_A)$ und $B(x_B; y_B)$ entsprechend Bild 15.24. Ein Punkt $P(x; 0)$ ist auf der x -Achse so zu wählen, daß der Weg $s = \overline{AP} + \overline{BP} = s_1 + s_2$ ein Minimum wird.

Lösung: Aus Bild 15.24 läßt sich sofort die Zielfunktion ablesen:

$$s = \sqrt{x^2 + y_A^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} = f(x).$$

Die notwendige Bedingung für einen minimalen Weg s lautet:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0 \quad (\text{VI})$$

Aus dieser Gleichung könnte die Extremstelle x_E berechnet und damit der gesuchte Punkt P bestimmt werden.

Darauf soll hier verzichtet werden. Zu einer interessanten physikalischen Aussage führt jedoch die geometrische Deutung der Gleichung (VI). Die Wurzeln im Nenner stellen die Strecken s_1 bzw. s_2 dar, so daß (VI) übergeht in

$$\frac{x}{s_1} = \frac{x_B - x}{s_2}. \quad (\text{VII})$$

Sind α und β die Winkel zwischen AP bzw. BP und der Senkrechten zur x -Achse durch P , dann läßt sich (VII) unter Beachtung der Beziehungen für Wechselwinkel in der Form schreiben

$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

Da α und β spitze Winkel sind, folgt daraus

$$\alpha = \beta.$$

Der Weg $s = s_1 + s_2$ ist dann ein Minimum, wenn P so gewählt wird, daß der „Einfallswinkel“ α gleich dem „Ausfallswinkel“ β ist.

Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung wird verzichtet, da von der geometrischen Überlegung her nur ein Minimum vorliegen kann.

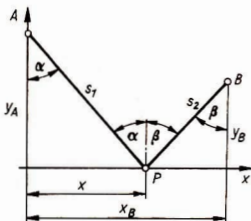


Bild 15.24

Nach dem FERMATSchen Prinzip legt ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten unter allen verschiedensten denkbaren Verbindungen den kürzesten Weg zurück. Wird die x -Achse als Grenze zwischen zwei verschiedenen Medien (z. B. Luft und Glas) angesehen, so läßt sich entsprechend obiger Rechnung mit dem FERMATSchen Prinzip das Reflexionsgesetz der geometrischen Optik herleiten.

- 15.20. Ein Körper, auf den die Gewichtskraft G wirkt, soll auf einer horizontalen Ebene mit der Reibungszahl $\mu = 0,12$ von der Zugkraft F gleichförmig bewegt werden. Welchen Winkel α muß die Kraft F mit der Horizontalen bilden, damit der Reibungsverlust und damit die bewegende Kraft F möglichst klein werden?

Lösung: In Bild 15.25 sind F_H und F_V die Horizontal- bzw. Vertikalkomponente der Zugkraft F . Nach physikalischen Überlegungen gilt für die Reibungskraft

$$F_R = (G - F_V) \mu.$$

Um sie zu überwinden, muß $F_H = F_R$ sein:

$$F_H = (G - F_V) \mu.$$

Mit den Bezeichnungen des Bildes 15.25 folgt daraus

$$F \cos \alpha = (G - F \sin \alpha) \mu,$$

und durch Auflösen nach F ergibt sich die Zielfunktion

$$F = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = f(\alpha). \quad (\text{VIII})$$

Der Zähler in (VIII) ist konstant. Deshalb ist F genau dann minimal, wenn der Nenner maximal ist. Daher wird der Nenner als neue Zielfunktion

$$z = \cos \alpha + \mu \sin \alpha = g(\alpha)$$

betrachtet, und es wird ihr Maximum bestimmt.

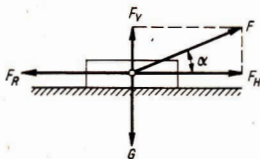


Bild 15.25

Die 1. Ableitung lautet

$$\frac{dz}{d\alpha} = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha.$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum $\frac{dz}{d\alpha} = 0$ ergibt

$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$\tan \alpha = \mu = 0,12,$$

woraus $\alpha_g = 6,8^\circ \approx 7^\circ$ folgt.

Die 2. Ableitung

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = -\cos \alpha - \mu \sin \alpha$$

ist wegen $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ stets kleiner als Null, so daß α_g eine Maximumstelle ist.

Die bewegende Kraft F muß mit der Horizontalen den Winkel $\alpha_g \approx 7^\circ$ bilden, damit F und somit der Reibungsverlust ein Minimum werden.

Kontrollfrage

15.11. In welche Schritte zerfällt die Lösung einer angewandten Extremwertaufgabe?

Aufgaben: 15.14. bis 15.25.

15.4. Aufgaben

15.1. Es sind die ersten zwei Ableitungen der folgenden Funktionen zu bilden:

$$\text{a) } y = 8x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - 11 \quad \text{b) } y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{c) } y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } y = \sqrt{1-x^2} & \text{e) } y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{f) } y = \cos^2 x \\ \text{g) } y = \cot \frac{x}{2} & \text{h) } y = \ln(1+x^2) & \text{i) } y = x^4 \ln x \\ \text{k) } y = e^x \cos x & \text{l) } y = e^{\sin x} & \text{m) } y = a^{x^2} \end{array}$$

15.2. Zu berechnen sind die ersten vier Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^4 + 2x^2 + 5 & \text{b) } y = \sin \frac{x}{2} \\ \text{c) } y = \ln x & \text{d) } y = x \cos 2x \end{array}$$

15.3. Wie lautet die n -te Ableitung der folgenden Funktionen?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = ax^n & \text{b) } y = x e^x \\ \text{c) } y = \frac{x}{x+1} & \text{d) } y = e^{2x} \end{array}$$

15.4. Für welche ganzrationale Funktion 3. Grades ist

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(-1) = 0, & f(2) = 0, & f'(1) = 6, \quad f''(-2) = -12 \\ \text{b) } f(0) = 0, & f'(2) = 9, & f''(3) = 8, \quad f'''(1) = -4 \\ \text{c) } f(1) = \frac{1}{4}, & f'(0) = -\frac{1}{3}, & f''(2) = 5, \quad f'''(1) = \frac{1}{2} ? \end{array}$$

(Mit dem Ansatz $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sind Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten a bis d aufzustellen.)

15.5. Gesucht werden die Extremstellen, Extremwerte und die Art der Extremwerte für folgende Funktionen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = 3x^2 - 12x + 18 & \text{b) } y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \\ \text{c) } y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 2 & \text{d) } y = \frac{2x}{(1+x)^2} \\ \text{e) } y = \frac{1+x}{1-x} & \text{f) } y = x^3 \cdot e^x & \text{g) } y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad x \in [0; 2\pi) \end{array}$$

15.6. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung, hat bei $x = -2$ und $x = 4$ je eine Extremstelle und in $x = 2$ den Anstieg -48 ?

15.7. Gesucht werden die Wendepunkte der folgenden Funktionen.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^3 - 15x^2 + 6x + 210 & \text{b) } y = \frac{1}{12} (x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 14x + 27) \\ \text{c) } y = \frac{6x}{(x-1)^2} & \text{d) } y = \frac{2x^2 + 5}{x} \\ \text{e) } y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x, \quad x \in [0; 2\pi) & \text{f) } y = e^{-x^2} \end{array}$$

15.8. Wie heißen die Gleichungen der Wendetangenten der Funktion $y = \frac{4x}{1+x^2}$?

15.9. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat eine Kurve, die durch $P_1\left(0; \frac{5}{6}\right)$ geht und in $P_2(1; 1)$ einen Stufenpunkt hat?

In den Aufgaben 15.10. bis 15.13. sind die zu den angegebenen Funktionen gehörigen Kurven zu diskutieren.

15.10. a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

c) $y = (x^2 - 1)^2$

d) $y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

e) $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

f) $y = x^5 - 2x^3 - 3x$

15.11. a) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

b) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

c) $y = \frac{2x^2}{4 + x^2}$

d) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

f) $y = \frac{2x}{(1+x)^2}$

15.12. a) $y = \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$

b) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

c) $y = x - 4\sqrt{x}$

15.13. a) $y = x e^x$

b) $y = x^2 e^x$

c) $y = \frac{e^x}{x^2}$

d) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

e) $y = \frac{\ln x}{x}$

f) $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$

g) $u = ct e^{-at}$ für $T = (0, \infty)$

15.14. Wie sind die Seiten eines Rechtecks zu wählen, damit bei

a) gegebener Fläche A der Umfang U ein Minimum

b) gegebenem Umfang U die Fläche A ein Maximum wird?

15.15. In einen Kreis mit dem Radius r soll ein Rechteck gezeichnet werden, dessen

a) Umfang U

b) Fläche A

ein Maximum ist. Wie groß sind die Rechteckseiten a, b ?

15.16. In einen Kreis mit dem Radius r ist das gleichschenklige Dreieck mit maximaler Fläche einzubeschreiben. Wie groß ist diese Fläche?

15.17. Von einem Dreieck sind die Summe $s = b + c$ und der Winkel α gegeben. Wie groß müssen b und c sein, damit die Dreiecksfläche ein Maximum wird?

15.18. Ein zu errichtender Schuppen soll nach dem vorhandenen Material Seitenwände der Höhe $h = 2$ m und Dächer der Länge $l = 3$ m (Bild 15.26) erhalten. Wie ist der Winkel 2α zu wählen, damit die Fläche der Giebelwand und damit das Volumen des Schuppens ein Maximum werden?

15.19. Welchen Radius und welchen Zentriwinkel hat ein Kreissektor, der bei gegebenem Umfang U die größte Fläche hat?

15.20. Der Querschnitt einer Schleuse bzw. eines Kanals soll den Wert A haben. Wegen des Materialaufwandes und des Reibungswiderstandes soll der benetzte Umfang möglichst klein werden. Wie lang sind jeweils die Abmessungen des Querschnitts, wenn er

a) ein oben offenes Rechteck ist;

- b) ein oben offenes symmetrisches Trapez mit dem konstanten Böschungswinkel $\alpha = 30^\circ$ an der Grundlinie ist;
 c) ein oben offenes, auf der Spitze stehendes gleichschenkliges Dreieck ist (als Variable ist der Winkel an der Spitze einzuführen);
 d) ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis ist?

15.21. In eine Kugel mit dem Radius R ist

- a) ein Zylinder mit maximalem Volumen,
 b) ein Zylinder mit maximaler Mantelfläche,
 c) ein Kegel mit maximalem Volumen,
 d) ein Kegel mit maximaler Mantelfläche

einzubeschreiben. Wie groß sind Radius r und Höhe h des Zylinders bzw. Kegels?

15.22. In einen Kegel mit dem Radius R und der Höhe H ist ein Zylinder mit maximalem Volumen einzubeschreiben. Zu berechnen sind Radius r und Höhe h des Zylinders.

15.23. Eine rechteckige Tafel aus Blech hat die Länge $a = 16$ dm und die Breite $b = 6$ dm. An den Ecken sind Quadrate mit den Seitenlängen x auszuscheiden (Bild 15.27) und der Rest zu einem offenen Kasten zusammenzubiegen. Wie groß ist x zu wählen, damit das Kastenvolumen ein Maximum wird? Wie groß ist das maximale Volumen?

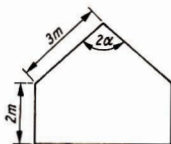


Bild 15.26

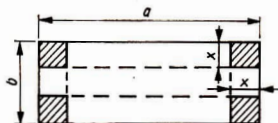


Bild 15.27

- 15.24. In die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ soll ein maximales Rechteck eingezeichnet werden (dessen Seiten parallel zu den Ellipsenachsen sind). Wie groß sind die Seite c , d und die Fläche des Rechtecks?
- 15.25. Eine Größe wurde n -mal gemessen. Die Meßwerte sind $l_1, l_2, \dots, l_n$. $\bar{x}$ sei ein Mittelwert und $v_i = x - l_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) die Differenz zwischen Mittelwert und Meßwert. Wie ist der Mittelwert $\bar{x}$ zu wählen, damit die Summe der Quadrate der v_i ein Minimum wird?

15.26. Gegeben ist die Gleichung einer geradlinigen Bewegung: $s = f(t)$. Gesucht werden Geschwindigkeit v_0 und Beschleunigung a_0 zum Zeitpunkt t_0 .

- a) $s = 4t^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} - 2t \frac{\text{m}}{\text{s}}, t_0 = \frac{1}{2} \text{ s};$
 b) $s = 3t^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1 \text{ m}, t_0 = 2 \text{ s};$
 c) $s = 2 \text{ m} \cdot e^{-\frac{t}{2} \frac{1}{\text{s}}} \sin\left(2t \frac{1}{\text{s}}\right), t_0 = 1 \text{ s}$

15.27. Welchen Zentriwinkel muß ein Kreisausschnitt mit dem Radius s haben, damit der Kegel mit diesem Ausschnitt als Mantel ein maximales Volumen hat?

- 15.28. Auf einem Schenkel des Winkels α sind zwei feste Punkte A und B gegeben (Bild 15.28). Auf dem anderen Schenkel ist ein Punkt C so zu bestimmen, daß der Winkel φ maximal wird. Wie groß ist x ?

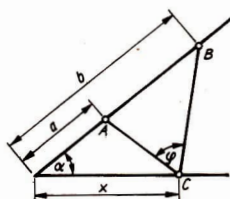


Bild 15.28

- 15.29. Für welche positive reelle Zahl x ist $x^{\frac{1}{x}}$ ein Maximum?
- 15.30. Gegeben sind die Punkte $A(0; y_A)$ und $B(x_B; y_B)$ (Bild 15.29), $P(x; 0)$ ist ein Punkt der x -Achse. Die Strecke $\overline{AP}$ werde mit der Geschwindigkeit v_1 , die Strecke $\overline{PB}$ mit der Geschwindigkeit v_2 durchlaufen. P ist so zu wählen, daß die Zeit t zum Durchlaufen von $s = \overline{AP} + \overline{PB}$ ein Minimum ist. Welche Beziehungen bestehen zwischen α und β ? (Die Berechnung von x_B entfällt. Man vergleiche mit Beispiel 15.19.)

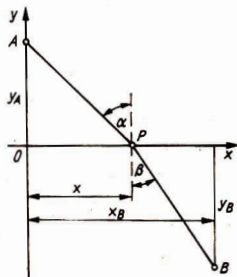


Bild 15.29

- 15.31. Welchen Neigungswinkel α muß ein Brett von der Länge l erhalten, damit eine auf ihm herabrollende Kugel auf der Horizontalebene möglichst weit gelangt?
- 15.32. Für eine symmetrische Linse mit bekannter Brennweite f ist mit Hilfe der Abbildungs-gleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ (g ist die Gegenstands-, b ist die Bildweite) die kürzeste Ent-fernung s von Bild und Gegenstand zu bestimmen.
- 15.33. Aus einem Baumstamm mit annähernd kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser d soll ein rechteckiger Balken von möglichst großer Tragkraft, d. h. maximalem Wider-standsmoment $W = \frac{1}{6}bh^3$, herausgeschnitten werden. Wie lang sind die Rechteck-seiten b und h ?
- 15.34. Ein Balken auf zwei Stützen mit der Stützweite l hat bei folgenden Belastungen im Abstand x vom linken Auflager das Biegemoment

a) $M_x = \frac{qx(l-x)}{2}$, $x \in [0; l]$ bei gleichmäßig verteilter Last q ;

b) $M_x = \frac{ql}{6}x - \frac{q}{6l}x^3$, $x \in [0; l]$ bei einseitiger Dreieckslast, die von 0 bis zum Wert q linear ansteigt;

- c) $M_x = \frac{2F}{l} x \left(l - x - \frac{a}{2} \right)$, $x \in [0; l - a]$ bei zwei gleich großen wandernden Lasten F mit konstantem Abstand $a < \frac{l}{2}$, wobei x der Abstand der linken Last vom linken Auflager ist.

Zu bestimmen sind das größte Biegemoment sowie die Stelle, an der es auftritt (gefährdeter Querschnitt).

- 15.35. Zwei Punkte P_1 und P_2 bewegen sich auf den beiden Koordinatenachsen gleichförmig mit $v_1 = 0,3$ m/s und $v_2 = 0,4$ m/s in Richtung auf den Ursprung O hin. Am Anfang der Bewegung sind sie vom Ursprung 12 m bzw. 9 m entfernt. Nach wieviel Sekunden ist ihre Entfernung am kleinsten?
- 15.36. Es sind $N = m \cdot n$ galvanische Elemente, von denen jedes die Urspannung E und den inneren Widerstand R_i hat, in m parallele Reihen von je n Elementen so zu schalten, daß die Batterie eine möglichst große Stromstärke liefert, wenn sie mit einem äußeren Widerstand R_a in Reihe geschaltet wird. Wie sind m und n zu wählen?
- 15.37. Der stationäre Anteil einer gedämpften erzwungenen Schwingung ist $K \cos(\omega t + \varphi)$. Für die Amplitude gilt

$$K = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = f(\omega);$$

K_0 , ω_0 und δ sind konstant. Für welche Kreisfrequenz $\omega = \omega_r$ ergibt sich die maximale Amplitude (Resonanzfrequenz)?

- 15.38. Eine Spule mit einem kreisförmigen Querschnitt enthält einen Eisenkern mit kreuzförmigem Querschnitt Q . Wie sind die Abmessungen a und b zu wählen, damit die Spule maximal ausgefüllt wird (Bild 15.30)?

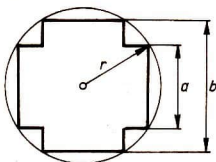


Bild 15.30

- 15.39. In einem Stromkreis sind der Widerstand R , die Induktivität L und die Kapazität C in Reihe geschaltet. U ist die Klemmenspannung des an den Stromkreis gelegten Wechselstromes. Die Stromstärke I ergibt sich dann aus

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Für welche Frequenz ω nimmt die Stromstärke I ihr Maximum an?

16. Einführung in die Integralrechnung

16.1. Unbestimmtes und bestimmtes Integral

Das Problem, den Inhalt einer ebenen Fläche zu berechnen, führt zur Definition des bestimmten Integrals. Für dieses wird eine Formel hergeleitet, nach der es mit Hilfe des unbestimmten Integrals berechnet werden kann.

Wenn die Fläche geradlinig begrenzt ist, läßt sich der Inhalt leicht berechnen. Sie wird in Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte addiert werden: $A = \sum_{i=1}^n A_i$. In Bild 16.1 ist $n = 3$.

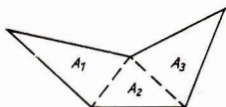


Bild 16.1

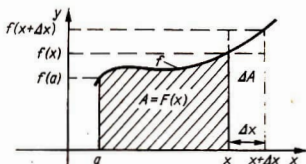


Bild 16.2

Für eine krummlinig begrenzte Fläche ist das Problem auf diesem elementaren Weg nicht lösbar. In Bild 16.2 ist eine nur auf einer Seite krummlinig begrenzte Fläche dargestellt, deren Inhalt A berechnet werden soll. Sie ist von der Kurve einer Funktion f , der x -Achse und den Parallelen zur y -Achse an den Stellen a und x begrenzt und soll als „Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis x “ bezeichnet werden. Vorausgesetzt wird, daß f stetig ist und die Funktionswerte von f nichtnegativ sind: $f(x) \geq 0$. Da die rechte Grenze x variabel sein soll, ist auch A variabel: $A = F(x)$. Wenn sich x der linken Grenze a nähert, wird A kleiner, und für $x = a$ ist der Inhalt A Null: $F(a) = 0$. Wenn sich x um Δx ändert, so ändert sich die Fläche um den Streifen mit der Breite Δx . Sein Inhalt ist $\Delta A = F(x + \Delta x) - F(x)$, d. h. gleich dem Inhalt der Fläche von a bis $x + \Delta x$, vermindert um den Inhalt der Fläche von a bis x . Bei steigender Kurve gilt (vgl. Bild 16.2)

$$f(x) \Delta x < \Delta A < f(x + \Delta x) \Delta x.$$

$f(x) \Delta x$ und $f(x + \Delta x) \Delta x$ sind die Inhalte der Rechtecke mit der Breite Δx und den Höhen $f(x)$ und $f(x + \Delta x)$. In der Ungleichung wird ΔA ersetzt: $f(x) \Delta x < F(x + \Delta x) - F(x) < f(x + \Delta x) \Delta x$.

Division durch $\Delta x \neq 0$ ergibt $f(x) < \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$, dabei ist

der mittlere Ausdruck der Differenzenquotient von F . Da f nach Voraussetzung stetig ist, geht für $\Delta x \rightarrow 0$ der rechte Ausdruck $f(x + \Delta x)$ gegen $f(x)$, also $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ gegen $f(x)$. Der Grenzwert des Differenzenquotienten (die Ableitung) von F ist demnach $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$.

Bei fallender Kurve gilt $f(x) \Delta x > \Delta A > f(x + \Delta x) \Delta x$, und bei konstanter Kurve sind Gleichheitszeichen zu schreiben. Beim Bilden des Grenzwertes entsteht aber stets dieselbe Gleichung.

Es ergibt sich:

Wenn f eine stetige Funktion mit nichtnegativen Funktionswerten ist und F eine Funktion ist, deren Wert gleich dem Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis x ist, so gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad (16.1)$$

$$F(a) = 0 \quad (16.2)$$

Aus Gl. (16.1) folgt $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, $dF(x) = f(x) dx$.

Um diese Gleichung formal nach $F(x)$ auflösen zu können, wird ein neues Symbol, das Integralzeichen, eingeführt:

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

gelesen „Integral über $f(x) dx$ “. Das Integral wird berechnet, indem alle Funktionen F (**Integralfunktionen**, **Stammfunktionen**) ermittelt werden, die die gleiche bekannte Ableitung haben: $F'(x) = f(x)$. Es gibt unendlich viele Stammfunktionen. Sie unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante C (**Integrationskonstante**), denn die Ableitung einer additiven Konstanten ist Null:

$$\int f(x) dx = F_0(x) + C \quad (16.3)$$

Das Integral heißt **unbestimmtes Integral**, $f(x)$ **Integrand** und x **Integrationsvariable**. Aus der Definition folgt, daß das Berechnen des unbestimmten Integrals die Umkehrung des Differenzierens ist.

Da das unbestimmte Integral als die Menge aller Stammfunktionen definiert ist, müßte Gl. (16.3) mit Mengensymbolik geschrieben werden. Diese umständliche Schreibweise wird vermieden, und wie in Gl. (16.3) wird nur ein Element (Repräsentant) dieser Menge angegeben. (Das Zeichen F_0 bedeutet die Stammfunktion, für die $C = 0$ ist.)

Die grafische Darstellung des unbestimmten Integrals ist eine Menge von Kurven, von denen eine aus der anderen durch Parallelverschiebung in y -Richtung hervorgeht. Damit ist gewährleistet, daß alle Kurven an gleichen Stellen x den gleichen Anstieg haben (denn alle Stammfunktionen haben die gleiche Ableitung).

BEISPIEL

16.1. Es ist das unbestimmte Integral über die Funktion $f: y = 3x^2 + 2$ zu berechnen, und es sind die Stammfunktionen für $C = 0$, $C = 10$ und $C = -3$ anzugeben.

Lösung: Es ist $\int (3x^2 + 2) dx = x^3 + 2x + C$,

denn $(x^3 + 2x + C)' = 3x^2 + 2$.

Die Gleichungen der geforderten Stammfunktionen sind

$$y = F_0(x) = x^3 + 2x \quad \text{für } C = 0,$$

$$y = F_0(x) + 10 = x^3 + 2x + 10 \quad \text{für } C = 10,$$

$$y = F_0(x) - 3 = x^3 + 2x - 3 \quad \text{für } C = -3.$$

In Bild 16.3 sind diese drei Stammfunktionen grafisch dargestellt.

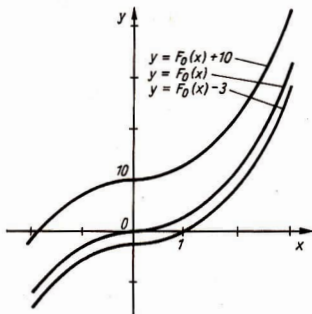


Bild 16.3

Der nächste Schritt zur Berechnung des Flächeninhalts ist, aus der Menge aller Stammfunktionen diejenige auszuwählen, für die nach Gl. (16.2) $F(a) = 0$ ist, die also bei $x = a$ eine Nullstelle hat. Aus

$$F(x) = F_0(x) + C \tag{I}$$

folgt für $x = a$

$$F(a) = F_0(a) + C,$$

nach Gl. (16.2)

$$0 = F_0(a) + C,$$

also

$$C = -F_0(a). \tag{II}$$

Wenn (II) in (I) eingesetzt wird, ergibt die rechte Seite von (I)

$$F_0(x) - F_0(a).$$

Diese Differenz wird symbolisch durch eckige Klammern mit angeschriebenen Grenzen bezeichnet:

$$[F(x)]_a^x = F_0(x) - F_0(a),$$

gelesen „ $F(x)$ (in den Grenzen) von a bis x “.

BEISPIEL

16.2. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $f: y = 3x^2 + 2$ und der x -Achse in den Grenzen von $a = 1$ bis x zu berechnen.

Lösung: Nach Beispiel 16.1. ist

$$F_0(x) = x^3 + 2x, \text{ also } F_0(1) = 3,$$

$$\text{und } [F_0(x)]_1^x = F_0(x) - F_0(1) = x^3 + 2x - 3.$$

$y = F_0(x) - 3 = x^3 + 2x - 3$ hat für $x = 1$ eine Nullstelle (vgl. Bild 16.3); Gl. (16.2) ist erfüllt.

Wenn statt mit F_0 mit einer beliebigen anderen Stammfunktion $F: y = F(x) = F_0(x) + C_1$ gerechnet wird, entsteht das gleiche Ergebnis, weil C_1 beim Subtrahieren wegfällt:

$$[F(x)]_a^x = F(x) - F(a) = [F_0(x) + C_1] - [F_0(a) + C_1] = F_0(x) - F_0(a).$$

Der Index 0 darf also weggelassen werden.

Die Grenzen werden an das Integralzeichen geschrieben. Die am Zeichen unten stehende Grenze heißt **untere Grenze**, die oben stehende Grenze **obere Grenze**. Als Symbol ergibt sich

$$\int_a^x f(x) dx = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a), \quad (16.4)$$

gelesen „Integral von a bis x über $f(x) dx$ “.

Mit diesem Integral wird der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis x definiert (wenn $x \geq a$ und $f(x) \geq 0$ im Intervall $[a; x]$, vgl. Bild 16.2).

Für das Symbol $[F(x)]_a^x$ ist auch das Symbol $F(x)|_a^x$ gebräuchlich.

Gl. (16.4) ist die Gleichung einer Funktion, die von der oberen Grenze x abhängig ist. Ihr Funktionswert an der Stelle $x = b$ ist

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (16.5)$$

Er heißt **bestimmtes Integral** über die Funktion f in den Grenzen von a bis b . Das Intervall $[a; b]$ heißt Integrationsintervall. Nach Gl. (16.5) gilt:

Das bestimmte Integral über eine Funktion f in den Grenzen von a bis b wird berechnet, indem f unbestimmt integriert wird und für eine beliebige Stammfunktion der Funktionswert für die untere Grenze vom Funktionswert für die obere Grenze subtrahiert wird.

In 16.3. wird untersucht, welche Bedingung f erfüllen muß, um das bestimmte Integral berechnen zu können.

Wenn $b \geq a$ und $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$ sind, so wird der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis b als der konstante Wert definiert, der sich nach Gl. (16.5) ergibt. (Genauer: Die Maßzahl dieser Fläche wird damit definiert.)

BEISPIEL

- 16.3. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $f: y = 3x^2 + 2$ und der x -Achse in den Grenzen von $a = 1$ bis $b = 3$ zu berechnen.

Lösung:

$$\int_1^3 (3x^2 + 2) dx = [x^3 + 2x]_1^3 = (3^3 + 6) - (1^3 + 2) = 33 - 3 = 30$$

In Bild 16.4 ist diese Fläche schraffiert dargestellt. Ihre Maßzahl ist gleich der Differenz zweier Ordinaten der Stammfunktion.

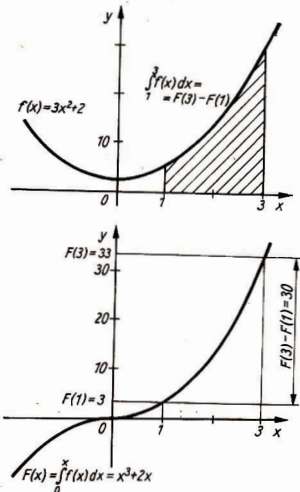


Bild 16.4

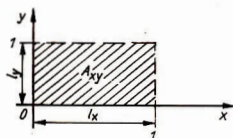


Bild 16.5

Das Ergebnis gibt die Anzahl der Flächeneinheiten $A_{xy} = l_x l_y$ an, wobei l_x und l_y die Einheitslängen auf den beiden Achsen sind (Bild 16.5). Sind zum Beispiel $l_x = 3$ cm und $l_y = 2$ cm, so ist $A_{xy} = 6$ cm², und der Flächeninhalt in Beispiel 16.3. ist $A = 30 A_{xy} = 180$ cm².

Kontrollfragen

- 16.1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Berechnen des unbestimmten Integrals und dem Differenzieren?
 16.2. Welche Beziehung besteht zwischen den grafischen Darstellungen der Stammfunktionen eines unbestimmten Integrals?

Aufgabe: 16.1.

16.2. Grundintegrale, Grundregeln

Für die Konstante 1 und die Potenz x^n werden die Grundintegrale hergeleitet und anschließend wichtige Regeln für das Rechnen mit unbestimmten und bestimmten Integralen bewiesen. Der zweite Teil dieses Abschnitts enthält weitere Untersuchungen zu dem in 16.1. formulierten Problem der Flächeninhaltsberechnung.

Nach den Gl. (16.3) und (16.1) ist

$$[F_0(x)]' = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F_0(x) + C.$$

Aus den in der Differentialrechnung hergeleiteten Ableitungen ergeben sich damit für die Konstante 1 und die Potenzfunktion die **Grundintegrale**:

$$(x)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int 1 dx = \int dx = x + C \quad (16.6)$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \Leftrightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad (16.7)$$

Beim Integrieren erhöht sich also der Potenzexponent um eine Einheit, während er beim Differenzieren um eine Einheit niedriger wird. Gl. (16.7) gilt für beliebige reelle Exponenten außer $n = -1$, denn für diesen ist der Nenner des Bruches 0; also läßt sich $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx$ nicht mit Gl. (16.7) berechnen. Weitere Grundintegrale werden in 17.1. hergeleitet.

BEISPIELE

$$16.4. \int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C, \text{ denn } \left(\frac{x^8}{8} + C\right)' = \frac{8x^7}{8} = x^7$$

$$16.5. \int x dx = \int x^1 dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$16.6. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$16.7. \int \frac{dx}{x^6} = \int x^{-6} dx = \frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$$

$$16.8. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \sqrt[3]{x} + C$$

Differenzieren der Gl. (16.3) ergibt wegen Gl. (16.1)

$$[\int f(x) dx]' = [F_0(x) + C]' = f(x).$$

Wenn die Ableitung als Differentialquotient geschrieben wird, $\frac{d[\int f(x) dx]}{dx} = f(x)$, ergibt sich $d[\int f(x) dx] = f(x) dx$.

Andererseits ist $\int F'(x) dx = \int \frac{dF(x)}{dx} dx = \int dF(x) = F(x) + C$. Also

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x); \quad d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx \quad (16.8)$$

$$\int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C \quad (16.9)$$

Differenzieren und unbestimmtes Integrieren heben einander auf, wenn zuerst integriert und dann differenziert wird. Wenn zuerst differenziert und dann integriert wird, ist noch eine Integrationskonstante C zu addieren.

Für die folgenden zwei Regeln existieren in der Differentialrechnung entsprechende Regeln:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (16.10)$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \neq 0 \quad (16.11)$$

Das Integral einer algebraischen Summe ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Summanden.

Ein konstanter Faktor des Integranden darf vor das Integralzeichen geschrieben werden.

Beweise:

1. Es sei $\int f(x) dx = F(x) + C_1$ und $\int g(x) dx = G(x) + C_2$,

also $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$.

Dann ist nach der Summenregel der Differentialrechnung

$$f(x) + g(x) = F'(x) + G'(x) = [F(x) + G(x)]'$$

und nach Gl. (16.9)

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int [F(x) + G(x)]' dx = [F(x) + G(x)] + C.$$

Mit $C = C_1 + C_2$ ergibt sich

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2. Es sei $\int f(x) dx = F(x) + C$, also $F'(x) = f(x)$.

Dann ist $af(x) = aF'(x) = [aF(x)]'$ nach der Regel für einen konstanten Faktor in der Differentialrechnung und nach Gl. (16.9)

$$\int af(x) dx = \int [aF(x)]' dx = aF(x) + C_1$$

$$\int af(x) dx = a \left[F(x) + \frac{C_1}{a} \right] = a[F(x) + C] = a \int f(x) dx.$$

Dabei ist $C = \frac{C_1}{a}$, also muß $a \neq 0$ sein.

Gl. (16.10) läßt sich auf mehr als zwei Summanden erweitern. Die Gln. (16.10) und (16.11) gelten auch für bestimmte Integrale, wenn alle in der Gleichung auftretenden Integrale gleiche untere Grenzen und gleiche obere Grenzen haben.

Für bestimmte Integrale gelten die Regeln:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad (16.12)$$

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \quad (16.13)$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen eines bestimmten Integrals ändert sein Vorzeichen.

Die Addition zweier bestimmter Integrale mit gleichen Integranden ist ausführbar, wenn die obere Grenze des einen Integrals gleich der unteren Grenze des anderen ist.

Beweise:

1. Aus Gl. (16.4) folgt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = - \int_b^a f(x) \, dx$$

2. Aus Gl. (16.4) folgt gleichfalls

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx$$

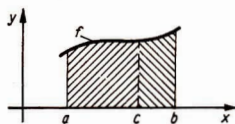


Bild 16.6

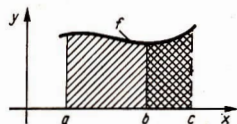


Bild 16.7

Gl. (16.13) ist für $c \in [a; b]$ unmittelbar aus Bild 16.6 ablesbar, denn jeder Summand ist gleich dem Inhalt einer schraffierten Teilfläche. Für $c \notin [a; b]$ (vgl. Bild 16.7) ergibt sich die Fläche von a bis b durch Subtraktion zweier Teilflächen; mit Gl. (16.12) folgt

$$\int_a^c f(x) \, dx - \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Gl. (16.13) läßt sich auf mehr als zwei Summanden erweitern. Das bestimmte Integral ist nur von der Funktion f und den Grenzen abhängig, aber nicht von der Bezeichnung der Integrationsvariablen:

Aus

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

und

$$\int_a^b f(t) \, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

folgt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

BEISPIELE

$$16.9. \int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x} \right) dx = \int \left(x^{-2} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int x^{-2} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \left(\frac{x^{-1}}{-1} + C_1 \right) + \left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C_2 \right) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C,$$

wobei $C_1 + C_2 = C$ ist

$$16.10. \int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) = x^3 + C, \text{ wobei } 3C_1 = C \text{ ist}$$

$$16.11. \int (x^2 - 6x + 8) dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + C$$

Nach dem Integrieren aller Summanden wird eine gemeinsame Integrationskonstante addiert.

$$16.12. \int x^2 u^3 dx = u^3 \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 u^3 + C$$

$$\int x^2 u^3 du = x^2 \int u^3 du = \frac{1}{4} x^2 u^4 + C$$

$$\int x^2 u^3 dt = x^2 u^3 \int dt = x^2 u^3 t + C$$

Durch das Differential wird die Integrationsvariable festgelegt. Potenzen mit einer anderen Basis sind als konstante Faktoren aufzufassen.

$$16.13. \int \sqrt{2uv} dv = \sqrt{2u} \int v^{\frac{1}{2}} dv = \sqrt{2u} \frac{2v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{2u} v \sqrt{v} + C = \frac{2}{3} v \sqrt{2uv} + C$$

$$\begin{aligned} 16.14. \int_3^5 \left(x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x \right) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_3^5 \\ &= \left(\frac{625}{4} - \frac{125}{6} + \frac{75}{2} \right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{27}{6} + \frac{27}{2} \right) \\ &= \left(156 + \frac{1}{4} - 20 - \frac{5}{6} + 37 + \frac{1}{2} \right) - \left(20 + \frac{1}{4} - 4 - \frac{3}{6} + 13 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(173 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \right) - \left(29 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 144 - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = 144 - \frac{1}{3} = 143 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Summen mit unechten Brüchen lassen sich am einfachsten berechnen, wenn diese in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einen echten Bruch zerlegt werden.

$$16.15. \int_{-2}^x (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^x = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \left(\frac{-8}{3} - (-2) \right) = \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{2}{3}$$

$$\int_{-2}^x (u^2 - 1) du = \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_{-2}^x = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \left(\frac{-8}{3} - (-2) \right) = \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{2}{3}$$

Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze hängt nicht von der Bezeichnung der Integrationsvariablen ab.

$$16.16. \int_1^8 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}} = \int_1^8 x^{-\frac{7}{2}} dx = \left[-\frac{3}{4} x^{-\frac{4}{2}} \right]_1^8 = -\frac{3}{4} \left[\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right]_1^8$$

$$= -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{8 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 1} \right) = -\frac{3}{4} \left(-\frac{15}{16} \right) = \frac{45}{64}$$

$$16.17. \int_0^4 x^2 dx + \int_{-2}^{-3} x^2 dx + \int_4^{-2} x^2 dx + \int_{-3}^1 x^2 dx$$

$$= \int_0^4 x^2 dx + \int_4^{-2} x^2 dx + \int_{-2}^{-3} x^2 dx + \int_{-3}^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Die Grundintegrale und -regeln ermöglichen die Berechnung bestimmter Integrale, deren Integranden eine Linearkombination der in den Grundintegralen (16.6) und (16.7) als Integranden auftretenden Terme sind. Dazu gehören ganzrationale Terme sowie einfache gebrochenrationale und Wurzelterme.

Kontrollfragen

- 16.3. Für welchen Exponenten ist das Grundintegral der Potenzfunktion nicht definiert?
 16.4. Wie ändert sich der Wert eines bestimmten Integrals, wenn die Grenzen vertauscht werden?

Aufgaben: 16.2. bis 16.4.

16.3. Das bestimmte Integral als Grenzwert

Der bisher erläuterte Begriff des bestimmten Integrals wird präzisiert. Es wird eine Definition erarbeitet, deren Anwendung die Lösung verschiedenartiger Probleme aus dem Bereich der Naturwissenschaften und Technik gestattet.

Mit Hilfe des bestimmten Integrals lassen sich nicht nur Flächeninhalte berechnen, sondern auch viele andere Probleme lösen. Beispiele aus der Geometrie sind die Berechnung des Volumens und der Oberfläche eines Körpers, Beispiele aus der Physik sind die Berechnung der Arbeit, des Schwerpunktes und des Trägheitsmoments einer Fläche.

Um diese verschiedenartigen Probleme lösen zu können, ist es zweckmäßig, das bestimmte Integral unabhängig von der Differentialrechnung zu erklären, und zwar als Grenzwert einer Summe.

Es sei f eine in $[a; b]$ stetige Funktion, und für alle $x \in [a; b]$ sei $f(x) \geq 0$. Der Inhalt zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis b ist zu berechnen (Bild 16.8). Die Fläche wird zunächst in n Streifen geteilt, indem $[a; b]$ in n Teil-

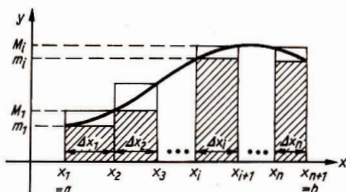


Bild 16.8

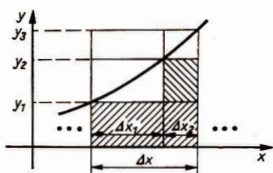


Bild 16.9

intervalle der Länge Δx_i beliebig zerlegt wird und in den Teilpunkten Parallelen zur y -Achse gezeichnet werden. Für jedes Teilintervall wird die kleinste (m_i) und die größte (M_i) Ordinate bestimmt. Der Inhalt eines jeden Streifens ist nicht kleiner als der Rechteckinhalt $m_i \Delta x_i$ und nicht größer als $M_i \Delta x_i$, folglich ist der Inhalt der gesamten Fläche nicht kleiner als $s_n = \sum m_i \Delta x_i$ und nicht größer als $S_n = \sum M_i \Delta x_i$. Die Summen heißen Untersumme s_n und Obersumme S_n . In Bild 16.8 ist s_n die Summe des Inhalts aller schraffierten Rechtecke. Bei Verfeinerung der Zerlegung, z. B. durch weiteres Teilen der Teilintervalle, kann die Untersumme nur wachsen und die Obersumme nur abnehmen. In Bild 16.9 ist z. B. ein Teilintervall der Länge Δx in zwei Teilintervalle der Längen Δx_1 und Δx_2 zerlegt worden. Der Beitrag zur Untersumme erhöht sich von $y_1 \Delta x$ auf $y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2$, d. h., er erhöht sich um den Inhalt des Rechtecks, das von links oben nach rechts unten schraffiert ist. Der Beitrag zur Obersumme verringert sich von $y_3 \Delta x$ auf $y_2 \Delta x_1 + y_3 \Delta x_2$. Obwohl die Untersumme wächst, kann sie nicht größer als der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x -Achse werden, und die Obersumme nimmt zwar ab, kann aber nicht kleiner als der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x -Achse werden. Wenn die Zerlegung von $[a; b]$ beliebig verfeinert wird, d. h., wenn mit Vergrößerung der Anzahl der Streifen ($n \rightarrow \infty$) das längste Teilintervall und damit auch alle anderen Teilintervalle beliebig klein werden ($\Delta x_i \rightarrow 0$), bilden die Untersummen eine monoton wachsende Folge $\{s_n\}$ und die Obersummen eine monoton fallende Folge $\{S_n\}$. Beide Folgen sind beschränkt, monotone beschränkte Folgen sind aber konvergent. $\{s_n\}$ und $\{S_n\}$ haben demnach einen Grenzwert. Für den Fall, daß beide Grenzwerte gleich sind, wird durch diesen gemeinsamen Grenzwert das bestimmte Integral definiert:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{I})$$

Wenn in jedem Teilintervall eine beliebige Stelle ξ_i gewählt wird (Bild 16.10), so liegt

$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ zwischen Unter- und Obersumme: $s_n \leq I_n \leq S_n$. Also ist wegen (I)

auch $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} I_n = \int_a^b f(x) dx$. Durch Verallgemeinerung dieser Überlegungen folgt die

Definition:

Eine Funktion f heißt genau dann im Intervall $[a; b]$ **integrierbar**, wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$ der Summe $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ existiert und für jede Folge beliebig fein werdender Zerlegungen von $[a; b]$ sowie für beliebige Wahl der Stellen ξ_i den gleichen Wert hat.

Der Grenzwert I heißt **bestimmtes Integral** der Funktion f im Intervall $[a; b]$:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (16.14)$$

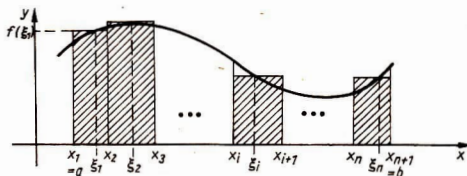


Bild 16.10

Geschichtliches:

Das Problem, den Inhalt einer ebenen Fläche zu berechnen, wurde schon von ARCHIMEDES (287 bis 212 v. u. Z.) untersucht. Mit seiner „Exhaustionsmethode“ (lat. „exhauro“, ausschöpfen) berechnete er den Inhalt eines Parabelsegments, indem er die Fläche durch eine Folge von Flächen bekannten Inhalts mit immer größerer Genauigkeit annäherte. Er fand z. B. einen guten Näherungswert für den Kreisinhalt, indem er dem Kreis eine Folge regelmäßiger Vielecke mit wachsender Anzahl der Ecken einbeschrieb und damit den Inhalt des Vielecks immer besser dem Inhalt des Kreises annäherte. KEPLER (1571 bis 1630) berechnete den Inhalt von Flächen und Körpern, z. B. von Fässern, durch Zerlegen in viele kleine Teile. LEIBNIZ (1646 bis 1716) und NEWTON (1643 bis 1727) erkannten als erste den Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration. Von LEIBNIZ wurde das Integralzeichen eingeführt. Es ist der stilisierte Buchstabe S und soll daran erinnern, daß das bestimmte Integral der Grenzwert einer Summe ist. Das Wort „Integral“ (lat. „integer“, ganz) weist darauf hin, daß aus den Teilen das Ganze ermittelt werden soll.

In den folgenden Jahrhunderten wurde der Integralbegriff exakt erarbeitet. RIEMANN (1826 bis 1866) leistete einen wesentlichen Beitrag. Der in diesem Abschnitt erarbeitete Integralbegriff (s. Gl. (16.14)) geht auf ihn zurück. Das Integral wird deshalb genauer „RIEMANNsches bestimmtes Integral“ genannt, und die Funktion f heißt „integrierbar im RIEMANNschen Sinne im Intervall $[a; b]$ “. Es gibt Erweiterungen dieses Integralbegriffs (z. B. von STIELTJES und LEBESGUE), die in diesem Buch nicht behandelt werden.

Hinweise:

1. Nach Gl. (16.14) ist das bestimmte Integral der Grenzwert einer Summe von Produkten, bei der die Anzahl der Summanden gegen unendlich und jeweils ein Faktor (Δx_i) eines jeden Produktes gegen Null strebt. Jeder Begriff, der auf diese Art erklärt werden kann, läßt sich als bestimmtes Integral darstellen (vgl. Beispiel 16.18.).

2. Die Funktion f darf in $[a; b]$ auch negative Werte annehmen ($f(\xi_i) < 0$). Dann sind auch die Produkte $f(\xi_i) \Delta x_i$ negativ, denn für den in der Praxis am häufigsten auftretenden Fall $a < b$ ist $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$. (Beim Vertauschen der Grenzen wird $a > b$ und $\Delta x_i < 0$, denn die Zerlegung des Integrationsintervalls beginnt an der oberen (rechten) Grenze mit $x_1 = a$ und endet an der unteren (linken) Grenze mit $x_{n+1} = b$, so daß $x_1 > x_2 > \dots > x_i > x_{i+1} > \dots > x_{n+1}$, vgl. Gl. (16.12).)
3. Es gilt: Eine Funktion f ist in $[a; b]$ integrierbar, wenn sie in $[a; b]$ beschränkt ist und sie in $[a; b]$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat. (Dieser Satz wird nicht bewiesen, denn der Beweis übersteigt den Rahmen dieses Lehrbuchs.) Eine integrierbare Funktion braucht also nicht stetig zu sein, während eine stetige Funktion (d. h. eine Funktion ohne Unstetigkeitsstellen) stets integrierbar ist: Die Stetigkeit von f ist hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit von f .
4. Ein wichtiger Sonderfall der Gl. (16.14) entsteht für $\xi_i = x_i$, $\Delta x_i = dx_i$ (Bild 16.11), d. h., für die Höhe eines jeden Rechtecks wird die zur linken Grenze des Teilintervalls gehörende Ordinate gewählt. Der Inhalt eines Rechteckstreifens ist damit $f(x_i) dx_i = F'(x_i) dx_i$, und das ist das Differential $dF(x_i)$ von F an der Stelle x_i (vgl. 13.4.). Das bestimmte Integral wird damit als Grenzwert einer Summe von Differentialen dargestellt. (Die Differentiale $dF(x)$ werden auch als Elemente bezeichnet.)
Aus Gl. (16.14) wird

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n dF(x_i) = \int_a^b dF(x) \quad (16.15)$$

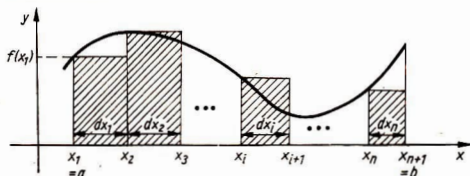


Bild 16.11

BEISPIEL

- 16.18. Mit Hilfe des bestimmten Integrals ist eine Formel für die Berechnung der mechanischen Arbeit für den Fall herzuleiten, daß die Kraft in Richtung des Weges wirkt und eine wegbabhängige Größe ist.

Lösung: Wenn die Kraft F konstant ist und in Richtung des Weges wirkt, so ist die Arbeit im Wegintervall $[s_1; s_2]$ durch $W = F \Delta s = F(s_2 - s_1)$ definiert.

Wenn F wegbabhängig ist, $F = F(s)$, so wird das Intervall $[s_1; s_2]$ in Wegelemente ds_i zerlegt, in denen die Kraft $F(s_i)$ als konstant betrachtet wird. Die Arbeit im Wegelement ds_i ist dann näherungsweise gleich dem Arbeitselement $dW(s_i) = F(s_i) ds_i$ (vgl. Bild 16.11, in dem x durch s und y durch F zu ersetzen ist). Durch Integration folgt nach Gl. (16.15)

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds.$$

Da jedes bestimmte Integral als Flächeninhalt deutbar ist, folgt aus dem Ergebnis, daß die mechanische Arbeit grafisch in einem (F, s) -Diagramm als Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von F und der s -Achse in den Grenzen von s_1 bis s_2 dargestellt werden kann. (Anwendungsbeispiele s. 19.3.)

Es läßt sich nachweisen, daß für eine stetige Funktion f das durch Gl. (16.14) definierte bestimmte Integral mit dem Integralbegriff übereinstimmt, der durch Gl. (16.5) mit Hilfe einer Stammfunktion F erklärt wurde. Für stetige Integranden braucht deshalb das bestimmte Integral nicht als Grenzwert einer Summe nach Gl. (16.14) berechnet zu werden, sondern es kann das leichter handhabbare Verfahren nach Gl. (16.5) über das Ermitteln einer Stammfunktion benutzt werden.

Kontrollfragen

- 16.5. Wie ist das bestimmte Integral als Grenzwert definiert (s. Hinweis 1.)?
- 16.6. Welche Bedingung muß eine Funktion erfüllen, um in $[a; b]$ integrierbar zu sein?
- 16.7. Welche Ordinaten werden als Höhen der Rechteckstreifen gewählt, wenn das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Differentialen dargestellt wird?

16.4. Anwendungen

Der in 16.3. erarbeitete Begriff des bestimmten Integrals wird auf verschiedene Probleme der Geometrie (Flächen-, Rauminhalte) angewendet.

16.4.1. Flächeninhalte ebener Flächen

Inhalt einer Fläche zwischen einer Kurve und der x -Achse

Eine Funktion f sei in $[a; b]$ stetig, und es sei $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$. Die Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse wird in Streifen der Breite dx zerlegt. Der Inhalt ΔA eines Streifens (Bild 16.12) ist annähernd gleich dem Inhalt dA des rechteckigen Streifens: $\Delta A \approx dA = f(x) dx$. Nach Gl. (16.15) ist

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx.$$

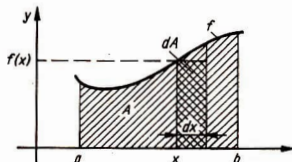


Bild 16.12

Das Differential dA wird **Flächenelement** genannt. Der Flächeninhalt ergibt sich somit durch Integration über alle Flächenelemente. Das an das erste Integralzeichen gesetzte A bedeutet: Die Grenzen für das zur Berechnung dienende rechts daneben stehende Integral sind so zu wählen, daß die gesamte Fläche A erfaßt wird.

Für $f(x) < 0$ in $[a; b]$ ist der Wert des bestimmten Integrals negativ. Da der Flächeninhalt A nichtnegativ sein soll, wird festgelegt: Wenn der Wert des bestimmten Integrals mit I bezeichnet wird,

$$I = \int_a^b f(x) \, dx,$$

so ist für $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$ auch $I \geq 0$ und $A = I$ (Bild 16.13), und für $f(x) \leq 0$ in $[a; b]$ ist $I \leq 0$ und $A = -I = |I|$ (Bild 16.14). Das folgende Beispiel veranschaulicht diese Behauptung.

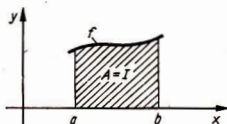


Bild 16.13

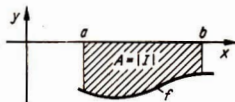


Bild 16.14

BEISPIEL

16.19. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $f: y = x^2 - 6x + 8$ und der x -Achse mit den Nullstellen als Grenzen zu berechnen.

Lösung: Zunächst Berechnung der Nullstellen.

$$f(x) = 0: x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}, x_1 = 2, x_2 = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Folglich } I &= \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{64}{3} - 48 + 32 \right) - \left(\frac{8}{3} - 12 + 16 \right) = -1 \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

und der Flächeninhalt ist $A = |I| = 1 \frac{1}{3}$ (Bild 16.15)

Wenn die Kurve von f in $[a; b]$ die x -Achse schneidet, so wird der Inhalt der Gesamtfläche als Summe der Inhalte der Teilflächen berechnet. Die Rechnung wird nach folgendem Schema durchgeführt:

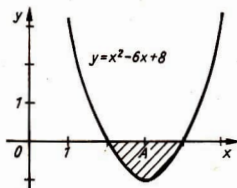


Bild 16.15

Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis b (vgl. Bild 16.16):

1. Nullstellen von f berechnen: $f(x) = 0$ ergibt x_1, x_2, x_3 .
2. In $[a; b]$ liegende Nullstellen auswählen: x_1, x_2 .

3. Teilintegrale berechnen: $I_1 = \int_a^{x_1} f(x) dx$,

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad I_3 = \int_{x_2}^b f(x) dx.$$

4. $A = |I_1| + |I_2| + |I_3|$.

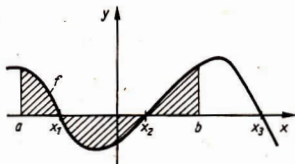


Bild 16.16

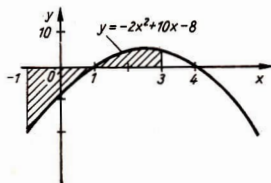


Bild 16.17

BEISPIEL

- 16.20. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $f: y = -2x^2 + 10x - 8$ und der x -Achse in den Grenzen von -1 bis 3 zu berechnen (Bild 16.17).

Lösung:

$$1. \quad -2x^2 + 10x - 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0; \quad x_1 = 1, x_2 = 4$$

2. Im Integrationsintervall $[-1; 3]$ liegt nur $x_1 = 1$.

$$\begin{aligned} 3. \quad I_1 &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 10x - 8) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{2}{3} + 5 - 8 \right) - \left(\frac{2}{3} + 5 + 8 \right) = \left(-3 - \frac{2}{3} \right) - \left(13 + \frac{2}{3} \right) \\ &= -16 - \frac{4}{3} = -17 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^3 (-2x^2 + 10x - 8) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x \right]_1^3 \\ &= (-18 + 45 - 24) - \left(-3 - \frac{2}{3} \right) = (3) - \left(-3 \frac{2}{3} \right) = 6 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der Wert der Stammfunktion für die Grenze 1 wurde schon beim Berechnen von I_1 ermittelt und kann übernommen werden.

$$4. A = \left| -17 \frac{1}{3} \right| + \left| 6 \frac{2}{3} \right| = 24$$

Das Beispiel zeigt, daß die grafische Darstellung zur Berechnung des Flächeninhaltes nicht erforderlich ist.

wenn die Funktion f Unstetigkeitsstellen in $[a; b]$ hat oder in Teilintervallen von $[a; b]$ durch verschiedene Gleichungen definiert ist, wird der Flächeninhalt gleichfalls durch Zerlegen in Teilflächen berechnet.

BEISPIEL

16.21. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von

$$f: y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{für } x < 0 \\ 6 - x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und der x -Achse mit den Nullstellen als Grenzen zu berechnen.

Lösung: Berechnung der Nullstellen:

$$-x^2 + 4 = 0 \wedge x < 0$$

$$6 - x = 0 \wedge x \geq 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 6$$

$$x = \pm 2$$

$$x_1 = -2 \text{ (wegen } x < 0)$$

$$x_2 = 6$$

An der Stelle $x = 0$ ist f unstetig, denn nach Bild 16.18 ist

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = 4;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = 6$$

Für die Teilintegrale ergibt sich

$$I_1 = \int_{-2}^0 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^0 = (0) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = 5 \frac{1}{3},$$

$$I_2 = \int_0^6 (6 - x) dx = \left[6x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^6 = (36 - 18) - (0) = 18;$$

$$\text{folglich } A = \left| 5 \frac{1}{3} \right| + |18| = 23 \frac{1}{3}$$

Das Vorzeichen des Integralwertes I wird einerseits durch die Lage der Kurve bezüglich der x -Achse und andererseits durch die Grenzen bestimmt: für $a < b$ und über der x -Achse liegende Flächen ist I positiv (Bild 16.19), für unter ihr liegende Flächen ist I negativ (Bild 16.20); beim Vertauschen der Grenzen ändert sich nach Gl. (16.12) in beiden Fällen das Vorzeichen (Bilder 16.21, 16.22).

Wenn für die Fläche zwischen Kurve und x -Achse eine Orientierung (ein Umlaufsinn) dadurch festgelegt wird, daß beim Umlaufen des Flächenrandes das Integrationsintervall $[a; b]$ (als Teil dieses Randes) stets in der Richtung von a nach b durch-

laufen werden soll, so ergibt sich, daß Orientierung und Integralwert I vorzeichen- gleich sind, d. h., bei mathematisch positiver Orientierung (entgegengesetzt zum Uhr- zeigersinn) ist I positiv, und bei mathematisch negativer Orientierung (im Uhrzeiger- sinn) ist I negativ (Bilder 16.19 bis 16.22). Deshalb kann I als Inhalt der orientierten Fläche gedeutet werden:

Wenn f eine in $[a; b]$ stetige Funktion ist, so ist der **Inhalt der orientierten Fläche** zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis b gleich dem Wert des bestimmten Integrals $I = \int_a^b f(x) dx$. Die Orientierung wird dadurch festgelegt, daß $[a; b]$ von der unteren zur oberen Grenze durchlaufen wird.

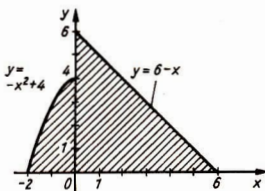


Bild 16.18

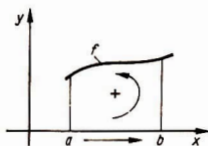


Bild 16.19

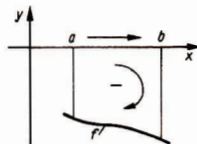


Bild 16.20

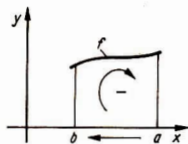


Bild 16.21

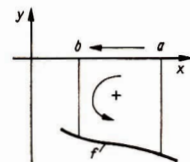


Bild 16.22

BEISPIELE

- 16.22. Es ist der Inhalt der orientierten Fläche zwischen der Kurve von $f: y = -2x^2 + 10x - 8$ und der x -Achse in den Grenzen von -1 bis 3 zu berechnen.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^3 (-2x^2 + 10x - 8) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x \right]_{-1}^3 \\
 &= (-18 + 45 - 24) - \left(\frac{2}{3} + 5 + 8 \right) = -10 \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Zum Unterschied von Beispiel 16.20, ist eine Zerlegung in Teilintegrale nicht nötig. Das Ergebnis besagt, daß bei der in Bild 16.17 schraffiert dargestellten Fläche der Inhalt des unter der x -Achse liegenden Flächenteils um $10 \frac{2}{3}$ Flächeneinheiten größer ist als der

Inhalt des über der x -Achse liegenden Flächenteils. Integral I ergibt sich auch durch Addition der Teilintegrale (mit ihren Vorzeichen). Nach Beispiel 16.20, ist $I = I_1 + I_2 = -17 \frac{1}{3} + 6 \frac{2}{3} = -10 \frac{2}{3}$. (Die Addition der Beträge ergibt dagegen den Inhalt A .)

- 16.23. Es ist der Inhalt der orientierten Fläche zwischen der Kurve von $f: y = \frac{3}{2}x - 3$ und der x -Achse in den Grenzen von 0 bis 4 zu berechnen.

$$\text{Lösung: } I = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x - 3 \right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - 3x \right]_0^4 = (12 - 12) - (0) = 0$$

$I = 0$ bedeutet, daß die unter und über der x -Achse liegenden Flächenteile gleichen Inhalt haben (Bild 16.23).

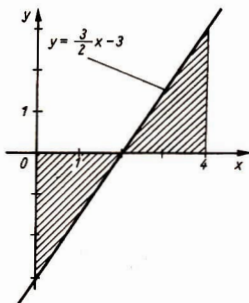


Bild 16.23

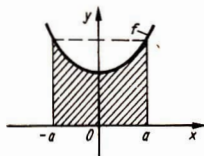


Bild 16.24

Die **Symmetrie von Kurven** kann benutzt werden, um Rechnungen zu vereinfachen.

1. f sei eine gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$. Die Kurve liegt symmetrisch zur y -Achse (Bild 16.24). Für symmetrisch zur Null liegende Grenzen gilt

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad A = |I|.$$

2. f sei eine ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$. Die Kurve liegt symmetrisch zum Ursprung (Bild 16.25). Für symmetrisch zur Null liegende Grenzen gilt

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 0, A = 2 \left| \int_0^a f(x) dx \right|.$$

3. Die Kurve liege symmetrisch zur x -Achse. Die Fläche wird von den Stücken zweier Kurven mit den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = -f(x)$ begrenzt (Bild 16.26). Es gilt $A = 2 \int_a^b f(x) dx$.

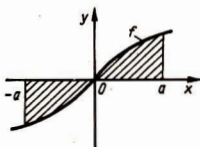


Bild 16.25

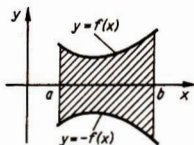


Bild 16.26

BEISPIELE

- 16.24. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $f: y = -\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$ und der x -Achse mit den Nullstellen als Grenzen zu berechnen.

Lösung: Berechnung der Nullstellen:

$$-\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 = 0;$$

$$\frac{x^2}{4} - 1 = 0; x_{1,2} = \pm 2$$

Die Funktion f ist gerade (Bild 16.27), folglich

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^2 \left[-\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 \right] dx = -2 \int_0^2 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx \\ &= -2 \left[\frac{1}{80} x^5 - \frac{1}{6} x^3 + x \right]_0^2 = -2 \left(\frac{32}{80} - \frac{8}{6} + 2 \right) - (0) = -2 \frac{2}{15} \\ A &= \left| -2 \frac{2}{15} \right| = 2 \frac{2}{15} \end{aligned}$$

- 16.25. Es ist der Inhalt des in Bild 16.28 dargestellten Parabelsegments zu berechnen.

Lösung: Aus $y^2 = 2px$ folgt $y = \pm \sqrt{2px}$. Die Kurve liegt symmetrisch zur x -Achse, folglich

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^h \sqrt{2px} dx = 2 \sqrt{2p} \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^h \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2p} h \sqrt{h} = \frac{4}{3} h \sqrt{2ph} \end{aligned}$$

(I)

Nach Bild 16.28 liegt der Punkt $P\left(h; \frac{s}{2}\right)$ auf der Parabel, also $\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2ph$ und $\frac{s}{2} = \sqrt{2ph}$.

Durch Einsetzen in (I) entsteht $A = \frac{4}{3} h \cdot \frac{s}{2} = \frac{2}{3} sh$.

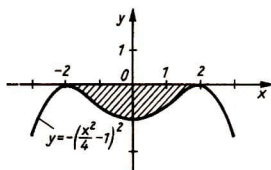


Bild 16.27

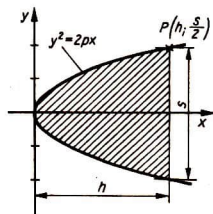


Bild 16.28

Inhalt einer Fläche zwischen zwei Kurven

Es seien f und g zwei in $[a; b]$ stetige Funktionen, und es sei $f(x) \geq g(x)$ in $[a; b]$ (Bild 16.29). Der Inhalt A der Fläche zwischen beiden Kurven ist gleich dem Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse, vermindert um den Inhalt der

Fläche zwischen der Kurve von g und der x -Achse: $A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$, und nach Gl. (16.10)

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx; \quad f(x) \geq g(x) \quad \text{in } [a; b] \quad (16.16)$$

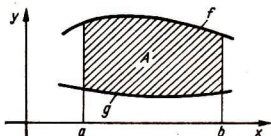


Bild 16.29

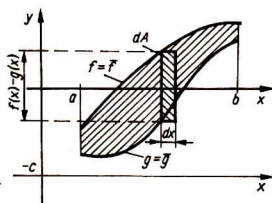


Bild 16.30

Diese Formel gilt auch, wenn die Fläche auf beiden Seiten oder ganz unter der x -Achse liegt. Die x -Achse braucht nur so weit nach unten verschoben zu werden, bis die Fläche ganz über der x -Achse liegt. Der Flächeninhalt ändert sich dabei nicht. In Bild 16.30 wird die x -Achse um c Einheiten nach unten verschoben. Dabei ändern sich die Gleichungen der Begrenzungskurven: Aus $y = f(x)$ wird $y = \bar{f}(x) = f(x) + c$

und aus $y = g(x)$ wird $y = \bar{g}(x) = g(x) + c$. Nach Gl. (16.16) ist

$$A = \int_a^b [\bar{f}(x) - \bar{g}(x)] dx = \int_a^b [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx,$$

$$\text{also } A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Gl. (16.16) ergibt sich auch durch Integration über alle Flächenelemente dA . Nach Bild 16.30 ist $dA = [f(x) - g(x)] dx$. Für $f(x) \geq g(x)$ ist $f(x) - g(x) \geq 0$, unabhängig davon, welche Vorzeichen $f(x)$ und $g(x)$ haben. Da $dx > 0$, ist stets auch $dA \geq 0$.

Durch Integration folgt $A = \int_A dA = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Wenn sich die Kurven von f und g in $[a; b]$ schneiden, ist die Gesamtfläche in Teilflächen zu zerlegen, denn für $f(x) < g(x)$ ist $[f(x) - g(x)] dx < 0$. Bei der in Bild 16.31 dargestellten Fläche würde beim Integrieren von a bis b der Inhalt der Fläche zwischen x_1 und b vom Inhalt der Fläche zwischen a und x_1 subtrahiert. Die Berechnung wird nach folgendem Schema durchgeführt:

Inhalt der Fläche zwischen den Kurven von f und g in den Grenzen von a bis b (vgl. Bild 16.31):

1. Schnittstellen von f und g berechnen: $f(x) = g(x)$ ergibt x_1, x_2 .
2. In $[a; b]$ liegende Schnittstellen auswählen: x_1 .
3. Teilintegrale berechnen:

$$I_1 = \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx, \quad I_2 = \int_{x_1}^b [f(x) - g(x)] dx.$$

4. $A = |I_1| + |I_2|$.

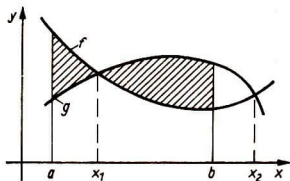


Bild 16.31

Ein Vergleich mit dem Schema, das für die Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse aufgestellt wurde, zeigt, daß das erste Problem ein Sonderfall des zweiten ist, denn die zweite Begrenzungskurve ist die x -Achse mit der Gleichung $g(x) = 0$.

BEISPIELE

16.26. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven mit den Gleichungen $y = x^2 - 2$ und $y = -x^2 + 2x + 2$ in den Grenzen von 0 bis 3 zu berechnen (Bild 16.32).

Lösung:

$$1. \quad x^2 - 2 = -x^2 + 2x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

2. Im Integrationsintervall $[0; 3]$ liegt $x_2 = 2$

$$3. I_1 = \int_0^2 [(x^3 - 2) - (-x^3 + 2x + 2)] dx = \int_0^2 (2x^3 - 2x - 4) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 - x^2 - 4x \right]_0^2 = \left(\frac{16}{3} - 4 - 8 \right) - (0) = \left(-6 \frac{2}{3} \right) - (0) = -6 \frac{2}{3},$$

$$I_2 = \int_2^3 (2x^3 - 2x - 4) dx = (18 - 9 - 12) - \left(-6 \frac{2}{3} \right) = (-3) - \left(-6 \frac{2}{3} \right) = 3 \frac{2}{3}$$

$$4. A = \left| -6 \frac{2}{3} \right| + \left| 3 \frac{2}{3} \right| = 10 \frac{1}{3}$$

Eine grafische Darstellung ist zur Berechnung nicht erforderlich. Es braucht auch nicht ermittelt zu werden, welche Kurve die Fläche von oben begrenzt. Ein Vertauschen von f und g ergäbe den Ansatz $I_1 = \int_0^2 [(-x^3 + 2x + 2) - (x^3 - 2)] dx$ mit $I_1 = 6 \frac{2}{3}$ und entsprechend $I_2 = -3 \frac{2}{3}$, also ebenfalls $A = 10 \frac{1}{3}$.

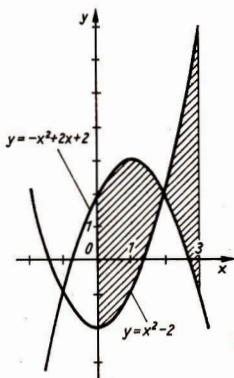


Bild 16.32

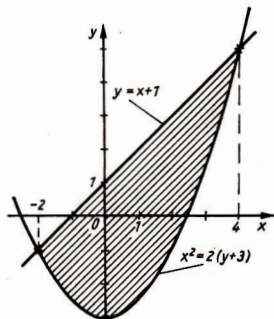


Bild 16.33

16.27. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven mit den Gleichungen $x^2 = 2(y + 3)$ und $y = x + 1$ zu berechnen.

Lösung: Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen beider Kurven (Bild 16.33).

Die explizite Form der ersten Gleichung ist $y = \frac{1}{2} x^2 - 3$.

Berechnung der Schnittstellen:

$$\frac{1}{2} x^2 - 3 = x + 1$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0; x_1 = -2, x_2 = 4$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^4 \left[(x+1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3 \right) \right] dx = \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \right) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^4 = \left(-10\frac{2}{3} + 8 + 16 \right) - \left(1\frac{1}{3} + 2 - 8 \right) \\
 &= \left(13\frac{1}{3} \right) - \left(-4\frac{2}{3} \right) = 18; A = 18
 \end{aligned}$$

Inhalt einer Fläche zwischen einer Kurve und der y -Achse

Die Fläche wird in parallel zur x -Achse liegende Streifen mit der Breite dy zerlegt (Bild 16.34). Wenn $x \geq 0$ in $[y_1; y_2]$, so ist ein Flächenelement $dA = x dy$. Um A berechnen zu können, muß sich die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen lassen:

$$x = f^{-1}(y) = \varphi(y). \quad \text{Dann ist} \quad A = \int_A dA = \int_{y_1}^{y_2} x dy = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y) dy.$$

Wenn die Kurve die y -Achse schneidet, wird der Inhalt durch Zerlegen in Teilflächen berechnet. Für die Berechnung einer Fläche zwischen zwei Kurven im Integrationsintervall $[y_1; y_2]$ läßt sich eine zur Gl. (16.16) analoge Formel herleiten.

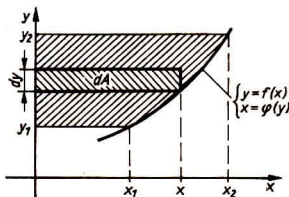


Bild 16.34

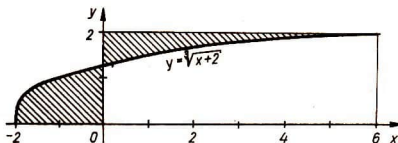


Bild 16.35

BEISPIELE

16.28. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt[3]{x+2}$ und der y -Achse in den Grenzen von $y = 0$ bis $y = 2$ zu berechnen (Bild 16.35).

Lösung: Auflösen nach x ergibt $x = y^3 - 2$.

Berechnung des Schnittpunktes mit der y -Achse ($x = 0$): $y = \sqrt[3]{2}$.

$$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{2}} (y^3 - 2) dy = \left[\frac{1}{4} y^4 - 2y \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \left(\frac{1}{4} \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} \right) - (0) \approx -1,89,$$

$$I_2 = \int_{\sqrt[3]{2}}^2 (y^3 - 2) dy = \left[\frac{1}{4} y^4 - 2y \right]_{\sqrt[3]{2}}^2 \approx (4 - 4) - (-1,89) = 1,89;$$

$$A = 3,78$$

16.29. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven mit den Gleichungen $y^3 = 2x$ und $y = x - 4$ zu berechnen (Bild 16.36).

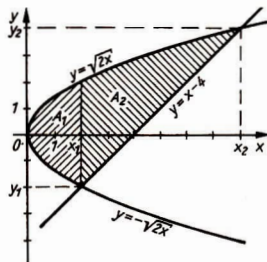


Bild 16.36

Lösung:

1. Möglichkeit: Zerlegung in senkrechte, d. h. parallel zur y -Achse liegende Flächenelemente. Da die untere Begrenzung der Fläche aus zwei Kurvenstücken besteht, muß die Fläche in zwei Teile zerlegt werden: $A = A_1 + A_2$, wobei sich A_1 durch Integration von 0 bis x_1 und A_2 durch Integration von x_1 bis x_2 ergibt.

2. Möglichkeit: Zerlegung in waagerechte, d. h. parallel zur x -Achse liegende Flächenelemente. In diesem Falle bestehen die linke und die rechte Begrenzungskurve nur aus je einem Kurvenstück. Es ist nur eine Integration nötig, d. h., die zweite Möglichkeit ist die einfachere.

Auflösen beider Funktionsgleichungen nach x :

$$x = \frac{1}{2} y^3; x = y + 4.$$

Berechnung der Integrationsgrenzen: $\frac{1}{2} y^3 = y + 4$

$$y^3 - 2y - 8 = 0; y_1 = -2, y_2 = 4$$

$$\text{Entsprechend Gl. (16.16) ist } I = \int_{-2}^4 \left[(y + 4) - \left(\frac{1}{2} y^3 \right) \right] dy = \left[\frac{1}{2} y^2 + 4y - \frac{1}{6} y^3 \right]_{-2}^4$$

$$= \left(8 + 16 - 10 \frac{2}{3} \right) - \left(2 - 8 + 1 \frac{1}{3} \right) = \left(13 \frac{1}{3} \right) - \left(-4 \frac{2}{3} \right) = 18; \quad A = 18$$

Kontrollfragen

- 16.8. Mit welcher Rechnung ist stets zu beginnen, wenn der Inhalt einer Fläche zwischen einer Kurve und der x -Achse berechnet werden soll?
- 16.9. Welche geometrische Deutung kann dem bestimmten Integral I gegeben werden?
- 16.10. Welche Vereinfachungen sind für das bestimmte Integral über geraden bzw. ungeraden Funktionen möglich, wenn das Integrationsintervall $[-a; a]$ symmetrisch zur Null liegt?
- 16.11. Inwiefern ist die Berechnung des Inhalts einer Fläche zwischen einer Kurve und der x -Achse ein Sonderfall der Berechnung des Inhalts einer Fläche zwischen zwei Kurven?
- 16.12. Mit welcher Rechnung ist stets zu beginnen, wenn der Inhalt einer Fläche zwischen zwei Kurven berechnet werden soll?
- 16.13. In welche Flächenelemente dA wird eine Fläche zerlegt, wenn ihr Inhalt zwischen der Kurve und der x - bzw. y -Achse berechnet werden soll?

Aufgaben: 16.5. bis 16.8.**16.4.2. Rauminhalte**

Ein Körper, der in einem räumlichen Koordinatensystem liegt (Bild 16.37), wird durch parallel zur y,z -Ebene geführte Schnitte in n Scheiben mit der Breite dx zerlegt. Ihr Volumen ΔV läßt sich schwer berechnen, da die Querschnittsfläche Q im Intervall mit der Länge dx nicht konstant ist. Ein Näherungswert für ΔV ist das **Volumenelement** $dV = Q dx$, wobei der Querschnitt Q am linken Rand der Scheibe als konstant für die gesamte Scheibe angenommen wird. Die Summe aller n Volumenelemente ist ein Näherungswert für das Volumen V . Der Fehler des Näherungswertes wird um so kleiner, je feiner die Zerlegung ist:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ dx \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n dV_i.$$

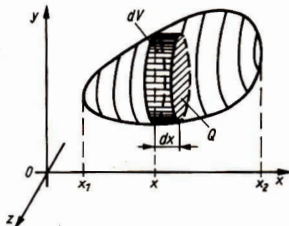


Bild 16.37

Das Volumen V läßt sich also als Grenzwert einer Summe von Differentialen (Volumenelementen) und damit als bestimmtes Integral erklären (vgl. Gl. (16.15)).

Das Volumen eines Körpers ist definiert durch

$$V = \int_V dV = \int_{x_1}^{x_2} Q dx$$

(16.17)

$Q = f(x)$ ist der Inhalt des parallel zur y,z -Ebene im Abstand x von ihr liegenden Querschnitts ($x \in [x_1; x_2]$), wobei vorausgesetzt wird, daß f eine in $[x_1; x_2]$ stetige Funktion ist.

Das Ergebnis gibt die Anzahl der Volumeneinheiten $V_{xyz} = l_x \cdot l_y \cdot l_z$ an, dabei sind l_x , l_y und l_z die Einheitslängen auf den Achsen. Ist z. B. $l_x = 2$ cm, $l_y = 1,5$ cm, $l_z = 3$ cm, so ist $V_{xyz} = 9$ cm³. Die Volumenelemente müssen nicht unbedingt parallel zur y,z -Ebene liegen. Sie können auch parallel zur x,z -Ebene oder zur x,y -Ebene sein. Die Überlegungen sind dann entsprechend.

BEISPIEL

16.30. Es ist das Volumen eines Körpers zu berechnen, der von zwei parallelen ebenen Flächen begrenzt wird (die auch den Inhalt Null haben können) und bei dem der Inhalt Q eines beliebigen Querschnittes im Abstand x von der Grundfläche (oder einer zur Grundfläche parallelen Ebene) sich als ganze rationale Funktion höchstens dritten Grades von x darstellen läßt:

$$Q = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3) \subset P.$$

Die Höhe des Körpers (der Abstand der beiden Endflächen) sei h .

Lösung: Wenn x der Abstand von der Grundfläche ist, so ist nach Gl. (16.17)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h Q \, dx = \int_0^h (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \, dx \\ &= \left[a_0x + \frac{1}{2} a_1x^2 + \frac{1}{3} a_2x^3 + \frac{1}{4} a_3x^4 \right]_0^h = a_0h + \frac{1}{2} a_1h^2 + \frac{1}{3} a_2h^3 + \frac{1}{4} a_3h^4. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Das Ergebnis kann in einen einfacheren Ausdruck umgeformt werden: Es seien A_1 und A_2 die Inhalte der beiden Endflächen, und A_m sei der Inhalt des Mittelschnitts, d. h. des im Abstand $\frac{h}{2}$ zu den Endflächen geführten Parallelschnitts. Dann ist

$$A_1 = f(0) = a_0$$

$$A_2 = f(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3$$

$$A_m = f\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1 \frac{h}{2} + a_2 \frac{h^2}{4} + a_3 \frac{h^3}{8}.$$

Der Ausdruck (I) entsteht, indem

$$A_1 + 4A_m + A_2 = 6a_0 + 3a_1h + 2a_2h^2 + \frac{3}{2} a_3h^3$$

gebildet und dieser Ausdruck mit $\frac{h}{6}$ multipliziert wird:

$$\frac{h}{6} (A_1 + 4A_m + A_2) = a_0h + \frac{1}{2} a_1h^2 + \frac{1}{3} a_2h^3 + \frac{1}{4} a_3h^4.$$

Also ist

$$V = \frac{h}{6} (A_1 + 4A_m + A_2). \quad (\text{II})$$

Die Formeln für das Volumen der meisten aus der Stereometrie bekannten Körper sind Sonderfälle der Gl. (II). Wenn ein Körper die in der Aufgabenstellung genannten Voraussetzungen nicht erfüllt, so ergibt Gl. (II) einen guten Näherungswert für V .

Anwendungsbeispiele:

1. Halbkugel (Bild 16.38): $A_1 = \pi r^2$, $A_2 = 0$, $h = r$. $Q = \pi \varrho^2$ mit $\varrho^2 = r^2 - x^2$, folglich $Q = \pi r^2 - \pi x^2$. (Q ist eine Funktion 2. Grades von x , die Voraussetzung ist erfüllt.) Es ist $A_m = Q\left(\frac{1}{2}r\right) = \pi r^2 - \pi \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}\pi r^2$. Gl. (II) ergibt $V = \frac{r}{6}\left(\pi r^2 + 4 \times \frac{3}{4}\pi r^2 + 0\right) = \frac{2}{3}\pi r^2$. Das Volumen der Kugel ist demnach $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$.

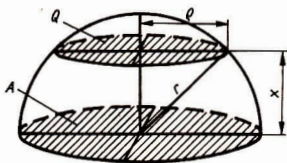


Bild 16.38

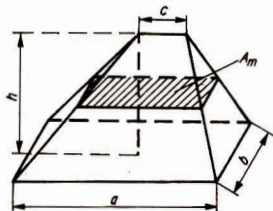


Bild 16.39

2. Die Gl. (II) gilt auch exakt für jedes Prismatoid, d. h. für jeden Körper, dessen Endflächen beliebige, zueinander parallele n -Ecke und dessen Seitenflächen Dreiecke oder Trapeze sind. Deshalb wird diese Gleichung auch als Prismatoidformel bezeichnet. Beispiele für Prismatoide sind Pyramidenstumpf, Ponton, Keil, Rampe usw. Auch der dachförmige Körper in Bild 16.39 ist ein Prismatoid. Bei rechteckiger Grundfläche und den Maßen $a = 10$ m, $b = 4$ m, $c = 6$ m und $h = 5$ m ist

$$A_1 = ab = 40 \text{ m}^2, A_2 = 0, A_m = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b}{2} = 8 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 16 \text{ m}^2.$$

(Der Inhalt des Mittelschnitts unterscheidet sich also vom Mittelwert $\frac{A_1 + A_2}{2}$.)

$$\text{Nach Gl. (II) ist } V = \frac{5 \text{ m}}{6} (40 \text{ m}^2 + 4 \cdot 16 \text{ m}^2 + 0) = 86,7 \text{ m}^3.$$

Für das Volumen von Rotationskörpern lassen sich spezielle Formeln herleiten. Es sei f eine in $[x_1; x_2]$ stetige Funktion. Durch Drehung (Rotation) der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von x_1 bis x_2 (auch erzeugende Fläche genannt) um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper (Bild 16.40). Die zur y,z -Ebene parallelen Querschnittsflächen sind Kreise mit dem Radius $y = f(x)$. Der Querschnittsinhalt ist $Q = \pi y^2$, das Volumenelement $dV_x = \pi y^2 dx$. Nach Voraussetzung ist f stetig in $[x_1; x_2]$, also auch $\pi y^2 = \pi [f(x)]^2$, Gl. (16.17) ist anwendbar. Volumen eines Rotationskörpers (x -Achse als Rotationsachse):

$$V_x = \int_V dV_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \quad (16.18)$$

Wenn die y -Achse die Rotationsachse ist, so liegt die erzeugende Fläche zwischen der Kurve von f und der y -Achse (Bild 16.34). Die parallel zur x,z -Ebene liegenden Querschnittsflächen sind Kreise mit dem Radius x . Der Querschnittsinhalt ist $Q = \pi x^2$, das Volumenelement $dV_y = \pi x^2 dy$, also ist das

Volumen eines Rotationskörpers (y -Achse ist Rotationsachse):

$$V_y = \int_V dV_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi(y)]^2 dy \quad (16.19)$$

Vorausgesetzt wird, daß sich $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen läßt: $x = \varphi(y)$.

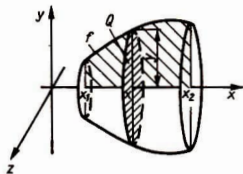


Bild 16.40

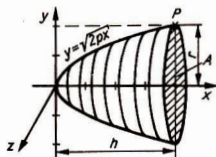


Bild 16.41

BEISPIELE

- 16.31. Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der bei Rotation der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ um die x -Achse (Rotationsparaboloid) entsteht (Bild 16.41).

Lösung: Aus $y^2 = 2px$ folgt nach Gl. (16.18)

$$V_x = \pi \int_0^h 2px dx = \pi 2p \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h = \pi p h^2.$$

Da der Punkt $P(h; r)$ auf der Parabel liegt, gilt $r^2 = 2ph$, also

$$V_x = \frac{1}{2} \pi \cdot 2ph \cdot h = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi A h.$$

- 16.32. Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{x-2}$ um die y -Achse in den Grenzen von $y_1 = 0$ bis $y_2 = 3$ entsteht.

Lösung: Gleichung nach x auflösen $x = y^2 + 2$.

Nach Gl. (16.19) ergibt sich

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^3 (y^2 + 2)^2 dy = \pi \int_0^3 (y^4 + 4y^2 + 4) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} y^5 + \frac{4}{3} y^3 + 4y \right]_0^3 = \pi \left[\left(48 \frac{3}{5} + 36 + 12 \right) - (0) \right] \\ &= 96,6\pi \approx 303,5 \end{aligned}$$

- 16.33. Es ist das Volumen eines Kugelabschnitts zu berechnen, wenn r der Radius der Kugel und h_1 die Höhe des Abschnitts ist (Bild 16.42).

Lösung: Erzeugende Fläche ist die Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und der x -Achse (die Kurvengleichung ist die explizite Form der Mittel-

punktsleichung des Kreises: $x^2 + y^2 = r^2$; wegen $\sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$ aber nur die Gleichung des über der x -Achse liegenden Halbkreises.).

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{r-h_1}^r y^2 dx = \pi \int_{r-h_1}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{r-h_1}^r \\ &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 (r - h_1) - \frac{1}{3} (r - h_1)^3 \right) \right] \\ &= \pi \left[\frac{2}{3} r^3 - r^3 + r^2 h_1 + \frac{1}{3} r^3 - r^2 h_1 + r h_1^2 - \frac{1}{3} h_1^3 \right] \\ &= \pi \left(r h_1^2 - \frac{1}{3} h_1^3 \right) = \frac{\pi h_1^2}{3} (3r - h_1) \end{aligned}$$

Wie leicht nachgeprüft werden kann, ergibt sich für $h_1 = 2r$ die Formel für das Kugelvolumen.

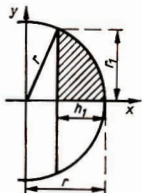


Bild 16.42

Kontrollfragen

- 16.14. In welche Volumenelemente dV wird ein Körper zerlegt, wenn sein Volumen berechnet werden soll?
- 16.15. Welche besondere Form haben die Volumenelemente bei der Berechnung des Volumens V_x bzw. V_y eines Rotationskörpers?

Aufgaben: 16.9. bis 16.12.

16.5. Aufgaben

- 16.1. Es sind $f: y = \frac{1}{2}x$, $F_1: y = \int_0^x \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2$ und $F_2: y = \int_5^x \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{4}$

für $x \in [0; 5]$ grafisch darzustellen. An Hand dieser grafischen Darstellungen ist zu zeigen, daß die Maßzahl der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von 3 bis 4 gleich den Differenzen $F_1(4) - F_1(3)$ und $F_2(4) - F_2(3)$ ist.

- 16.2. Es sind zu integrieren:

a) $\int x^{12} dx$	b) $\int t^2 dt$	c) $\int \frac{dx}{x^2}$
d) $\int \frac{ds}{s^{10}}$	e) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$	f) $\int \sqrt[4]{x^7} dx$
g) $\int x^2 \sqrt{x} dx$	h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	i) $\int \frac{du}{\sqrt[4]{u^3}}$

16.3. Es sind zu integrieren:

a) $\int dx^3$

b) $\int d\sqrt[3]{t}$

c) $\int (\sqrt[3]{a})' da$

d) $\int \left(2x^2 - \frac{3}{x^2}\right)^2 dx$

e) $\int \frac{u^2}{v^2} du$

f) $\int \frac{u^2}{v^2} dv$

16.4. Es sind zu integrieren:

a) $\int_{-2}^5 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$

b) $\int_{-2}^2 \left(2u^3 - \frac{u}{2}\right) du$

c) $\int_{-3}^3 (r^4 + 3r^2) dr$

d) $\int_1^3 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

e) $\int_1^8 \sqrt[3]{t^2} dt$

f) $\int_4^8 3\sqrt{x} dx$

g) $\int_1^9 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}}$

h) $\int_3^5 \sqrt[3]{t} dt + \int_5^3 \sqrt[3]{t} dt$

i) $\int_0^{\pi} (3t^2 - 4) dt$

j) $\int_0^x (3x^2 + 6x + 8) dx$

k) $\int_1^v v^6 dv$

16.5. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von x_1 bis x_2 zu berechnen.

a) $f: y = -x^2 + 6x - 5; x_1 = 0, x_2 = 4$

b) $f: y = 3x^2 - 18x + 15; x_1 = -2, x_2 = 7$

c) $f: y = x^3 - 6x^2 + 8x; x_1 = -1, x_2 = 3$

d) $f: y = \frac{1}{x^4} - 81; x_1$ ist die positive Nullstelle von $f, x_2 = 1$

e) $f: y = 2 - \sqrt{x}; x_1 = 0, x_2 = 9$

$$f) f: y = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2 & x \in [4; 6] \\ -(x-6)^2 + 6 & x \in [6; 8] \end{cases} \quad x_1 = 4, x_2 = 8$$

16.6. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven von f und g in den Grenzen von x_1 bis x_2 zu berechnen.

a) $f: y = x^2 - 5 \quad g: y = 2x + 3; x_1 = 0, x_2 = 6$

b) $f: y = 3x^2 + x - 25 \quad g: y = 4x + 11; x_1 = 2, x_2 = 4$

16.7. Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die von den Kurven von $f: y = 3x^3 + x + 1$ und $g: y = x^3 + 3x + 5$ eingeschlossen wird.

16.8. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der y -Achse in den Grenzen von y_1 bis y_2 zu berechnen.

a) $f: y = \frac{1}{2}x - 2; y_1 = -1, y_2 = 1$

b) $f: y = \sqrt[3]{x^2}; y_1 = 0, y_2 = 4$

- 16.9. Es ist das Volumen V_x des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der Kurve von f in den Grenzen von x_1 bis x_2 um die x -Achse entsteht (Skizze anfertigen!).

a) $f: y = 3x - x^2$; x_1, x_2 sind die Nullstellen von f

b) $f: y = \sqrt{4-x}$; $x_1 = 0, x_2 = 4$

c) $f: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; x_1, x_2 sind die Nullstellen von f (Rotationsellipsoid)

- 16.10. Es ist das Volumen V_y des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der Kurve von f in den Grenzen von y_1 bis y_2 um die y -Achse entsteht (Skizze anfertigen!).

a) $f: y = \sqrt{4-x}$; $y_1 = 0, y_2 = 2$ (vgl. Aufgabe 16.9. b))

b) $f: y = \frac{1}{x^4}$; $y_1 = 1, y_2 = 3$

- 16.11. Es ist das Volumen V_x des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der von den Kurven von $f: y = 2\sqrt{x}$ und $g: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ eingeschlossenen Fläche um die x -Achse entsteht (Skizze anfertigen!).

- 16.12. Es ist das Volumen V_y des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der im 1. Quadranten liegenden, von den Kurven von $f: y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $g: y = 3-x$ und der y -Achse eingeschlossenen Fläche um die y -Achse entsteht (Skizze anfertigen!).

- 16.13. Es sind zu integrieren:

a) $\int x^\pi dx$

b) $\int \frac{dm}{m\sqrt{2}}$

c) $\int a \sqrt[3]{a} da$

d) $\int \frac{\sqrt[3]{v}}{v^2} dv$

- 16.14. Es sind zu integrieren:

a) $\int_{-1}^2 (x^2 - 2)^2 dx$

b) $\int_1^4 \left(\frac{6}{u^4} + \sqrt[4]{u} \right) du$

c) $\int_u^v (2t - 3) dt$

d) $\int_3^5 m^8 dm + \int_1^3 m^8 dm + \int_5^1 m^8 dm$

- 16.15. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse zu berechnen.

a) $f: y = (x^2 - 9)^2$

b) $f: y = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

- 16.16. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von x_1 bis x_2 zu berechnen.

a) $f: y = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 - x$; $x_1 = 0, x_2 = 9$

b) $f: y = x^3 - 4x$; $x_1 = -2, x_2 = 2$

- 16.17. Die Fläche zwischen der Kurve von $f: y = x^3 - 4x$ und der x -Achse in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$ ist durch eine senkrechte Gerade $x = x_3$ zu halbieren. Es ist x_3 zu berechnen.

- 16.18. Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, der von den Kurven von $f: y = \sqrt[3]{3x}$ und $g: y = \frac{1}{3}x + 2$ eingeschlossen wird.

- 16.19. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $y = \sqrt[3]{8x+8}$ und der y -Achse in den Grenzen von $y_1 = f(-1)$ bis $y_2 = f(7)$ zu berechnen.
- 16.20. Der Querschnitt eines Wasserstollens ist das Segment einer quadratischen Parabel mit 4 m Sohlenbreite und 2 m Höhe (Bild 16.43). Wieviel Kubikmeter Wasser fließen bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 4 m/s in jeder Minute durch den Stollen, wenn er bis 60% seiner Höhe gefüllt ist?

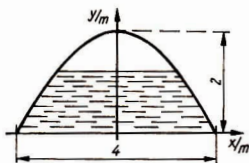


Bild 16.43

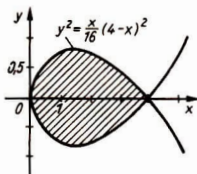


Bild 16.44

- 16.21. Die zwischen der Kurve von $f: y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ und der x -Achse zwischen den beiden Nullstellen liegende Fläche soll durch die Gerade $x = a$ im Verhältnis 1 : 3 geteilt werden. Es ist a zu berechnen.
- 16.22. Für das „parabolische Blatt“ mit der Gleichung $y^2 = \frac{x}{16}(4-x)^2$ (Bild 16.44) sind zu berechnen:
- Flächeninhalt der Schleife
 - Volumen V_x des Rotationskörpers, der bei Rotation der Schleife um die x -Achse entsteht.
- 16.23. Es ist das Volumen V_x des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der von den Kurven von $f: (x-5)^2 + y^2 = 25$ und $g: y^2 = 2x$ eingeschlossenen Fläche um die x -Achse entsteht (2 Möglichkeiten; Skizze anfertigen!).
- 16.24. Für die Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{16}{x}$, $y = \sqrt{x-4}$, $x = 1$ und der x -Achse begrenzt ist (Skizze anfertigen!), sind zu berechnen:
- Volumen V_x bei Rotation der Fläche um die x -Achse
 - Volumen V_y bei Rotation der Fläche um die y -Achse.

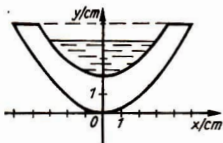


Bild 16.45

- 16.25. Eine 5 cm hohe Glasschale ($\rho_G = 2,6 \text{ g/cm}^3$) hat als Begrenzungen zwei Rotationsparaboloide, die durch Rotation der Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{1}{5}x^2$ und $y = \frac{1}{5}(x^2 + 10)$ um die y -Achse entstehen. Sie ist 2 cm hoch mit Quecksilber ($\rho_{Hg} = 13,5 \text{ g/cm}^3$) gefüllt (Bild 16.45). Es ist die Masse der gefüllten Schale zu berechnen.

17. Integration weiterer Funktionen

17.0. Vorbemerkung

Die in 16.2. hergeleiteten Grundintegrale werden durch weitere ergänzt, und ihre Anwendung wird in Beispielen geübt. Für Integranden, die sich nicht mit Hilfe von Grundintegralen integrieren lassen, werden die wichtigsten Integrationsverfahren erklärt: Integration durch Substitution (mit dem besonders wichtigen Spezialfall der linearen Substitution) und Integration mit Hilfe einer Tafel.

17.1. Grundintegrale

Aus den in der Differentialrechnung hergeleiteten Ableitungen ergeben sich die **Grundintegrale** (vgl. die Gln. (16.5) bis (16.7)):

$\int 0 \, dx = C$ $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\int e^x \, dx = e^x + C$ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$	$\int 1 \, dx = \int dx = x + C$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
---	---

(17.1)

Zum Grundintegral $\int \frac{dx}{x}$: Wegen $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ist zunächst $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

mit $x > 0$; da $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0, \end{cases}$ also $|x|' = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$ folgt

mit Hilfe der Kettenregel $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} |x|' = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ -\frac{1}{x} & \text{für } x < 0, \end{cases}$ d. h.,

$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, also $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$. (Hinweis: $y = |x|$ ist für $x = 0$ nicht differenzierbar, denn die Kurve hat an dieser Stelle einen Knick; deshalb ist $|x|' = 1$ nur für $x > 0$.)

Zu den beiden letzten Grundintegralen: Wegen $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ und $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$ ist $\bar{C} = C + \frac{\pi}{2}$.

BEISPIELE

$$\begin{aligned}
 17.1. \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin x - \cos x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx &= [-\cos x - \sin x + \cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
 &= (-\cos 135^\circ - \sin 135^\circ + \cot 135^\circ) \\
 &\quad - (-\cos 45^\circ - \sin 45^\circ + \cot 45^\circ) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1 \right) = \sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.2. \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos x) dx &= [-\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= [-\cos 30^\circ + \sin 30^\circ] - [-\cos(-30^\circ) + \sin(-30^\circ)] \\
 &= (-\cos 30^\circ + \sin 30^\circ) - (-\cos 30^\circ - \sin 30^\circ) \\
 &= 2 \sin 30^\circ = 1
 \end{aligned}$$

(Für negative Argumente gilt: $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$)

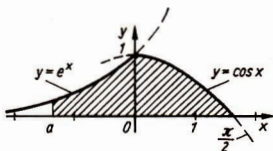


Bild 17.1

$$\begin{aligned}
 17.3. \quad \int_{-0.2}^{2.4} \sin x \, dx &= [-\cos x]_{-0.2}^{2.4} = [-\cos 2.4] - [-\cos(-0.2)] \\
 &= (-\cos 2.4) - (-\cos 0.2) \approx -\cos 137,5^\circ + \cos 11,5^\circ \\
 &= 0,7374 + 0,9801 = 1,7175
 \end{aligned}$$

(Die Winkleinheit Radiant wurde in Grad umgerechnet: $x \text{ rad} \approx x \cdot 57,3^\circ$)

$$\begin{aligned}
 17.4. \quad \int \frac{\sin x}{t} dt &= \sin x \int \frac{dt}{t} = \sin x \ln |t| + C \\
 \int_1^4 \sin x \, du &= \sin x \int_1^4 du = \sin x [u]_1^4 = \sin x (4 - 1) = 3 \sin x
 \end{aligned}$$

- 17.5. Es ist der Inhalt der in Bild 17.1 dargestellten Fläche zu berechnen und der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow -\infty} A$ zu bestimmen.

$a \rightarrow -\infty$

Lösung:

$$I_1 = \int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a, \quad a < 0$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$A = (1 - e^a) + 1 = 2 - e^a, \quad a < 0$$

$$\text{Der Grenzwert ist } \lim_{a \rightarrow -\infty} A = \lim_{a \rightarrow -\infty} (2 - e^a) = 2 - 0 = 2$$

(Aus I_1 wird für $a \rightarrow -\infty$ ein Integral mit der unteren Grenze $-\infty$. Integrale mit den Integrationsintervallen $(-\infty; b]$, $[a; \infty)$ oder $(-\infty; \infty)$ heißen uneigentliche Integrale.)

17.6.
$$\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{0,5}$$

$$= \arcsin 0,5 - \arcsin \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \arcsin 0,5 + \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \approx 1,309 \text{ rad} = 1,309$$

$$\int_{-0,3}^{1,4} \frac{dv}{1+v^2} = [\arctan v]_{-0,3}^{1,4} = \arctan 1,4 - \arctan (-0,3)$$

$$= \arctan 1,4 + \arctan 0,3 \approx 54,5^\circ + 16,7^\circ = 71,2^\circ \approx 1,242$$

(Für negative Argumente gilt: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\arctan(-x) = -\arctan x$)

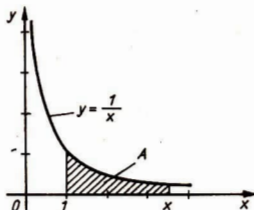


Bild 17.2

- 17.7. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse in den Grenzen von 1 bis x ($x > 0$) zu berechnen (Bild 17.2).

Lösung:

$$A = \int_1^x \frac{dx}{x} = [\ln |x|]_1^x = \ln |x| - \ln 1 = \ln x - 0 = \ln x; \quad \ln |x| = \ln x \text{ wegen } x > 0.$$

Der natürliche Logarithmus $\ln x$ läßt sich also als Inhalt (genauer: als Maßzahl) der Fläche zwischen der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ und der x -Achse in den Grenzen von 1 bis x deuten.

Kontrollfrage

17.1. Für welchen Exponenten ist das Potenzintegral $\int x^n dx$ nicht definiert? Welche Stammfunktionen hat das Integral mit diesem Exponenten?

Aufgaben: 17.1. bis 17.3.

17.2. Integration durch Substitution

17.2.1. Integranden der Form $f(ax + b)$ (Lineare Substitution)

Ein Integral läßt sich sofort integrieren, wenn es die Form eines Grundintegrals hat. Anderenfalls läßt es sich entweder auf einen Ausdruck umformen, der ein Grundintegral ist oder eins enthält, oder es läßt sich nicht auf einen solchen Ausdruck umformen. Es ist dann auch nicht durch die bekannten elementaren reellen Funktionen „in geschlossener Form“ darstellbar, sondern es definiert eine neue, nicht elementare,

höhere Funktion. Ein Beispiel ist der Integralsinus, der durch $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

definiert ist. Integrale, die durch elementare reelle Funktionen nicht in geschlossener Form darstellbar sind, können durch grafische oder numerische Verfahren oder durch Entwicklung in eine Potenzreihe ausgewertet werden (s. Abschnitte 20., 23.). Wenn der Integrand der Term einer mittelbaren Funktion ist, läßt sich das Integral mitunter durch Substitution auf ein Grundintegral umformen. Das ist besonders dann möglich, wenn die innere Funktion linear ist.

BEISPIELE

17.8. $\int \sqrt{2x} dx$

Lösung:

1. Möglichkeit: Der Integrand wird in zwei Faktoren zerlegt.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x} dx &= \sqrt{2} \int \sqrt{x} dx = \sqrt{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{2} x \sqrt{x} + C \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{2x} + C \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Im Integranden wird $z = 2x$ substituiert. Da die Variable x auch im Differential dx substituiert werden muß, wird die Substitutionsgleichung differenziert und umgeformt: $z = 2x$; $\frac{dz}{dx} = 2$, $dx = \frac{1}{2} dz$.

$$\begin{aligned} \text{Also } \int \sqrt{2x} dx &= \int \sqrt{z} \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} z \sqrt{z} + C, \text{ wegen} \\ z = 2x \text{ ist } \int \sqrt{2x} dx &= \frac{1}{3} (2x) \sqrt{2x} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{2x} + C \end{aligned}$$

$$17.9. \int \sqrt[3]{\frac{1}{8}x + 2} \, dx$$

Lösung: Eine Integration ohne Substitution ist nicht möglich, denn der Wurzelterm ist nicht zerlegbar, da der Radikand eine Summe ist.

$$\text{Aus } z = \frac{1}{8}x + 2, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{8}, \quad dx = 8 \, dz$$

$$\begin{aligned} \text{folgt } \int \sqrt[3]{\frac{1}{8}x + 2} \, dx &= 8 \int \sqrt[3]{z} \, dz = 8 \cdot \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} + C = 6z \sqrt[3]{z} + C \\ &= 6 \left(\frac{1}{8}x + 2 \right) \sqrt[3]{\frac{1}{8}x + 2} + C \end{aligned}$$

$$17.10. \int \cos(5x - 3) \, dx$$

$$\text{Lösung: } z = 5x - 3, \quad \frac{dz}{dx} = 5, \quad dx = \frac{1}{5} \, dz,$$

$$\int \cos(5x - 3) \, dx = \frac{1}{5} \int \cos z \, dz = \frac{1}{5} \sin(5x - 3) + C$$

Für die Integration durch lineare Substitution läßt sich eine Regel herleiten.

$$\text{Aus } \int f(ax + b) \, dx \text{ folgt mit } z = ax + b, \quad \frac{dz}{dx} = a, \quad dx = \frac{1}{a} \, dz:$$

$$\int f(ax + b) \, dx = \int f(z) \cdot \frac{1}{a} \, dz = \frac{1}{a} \int f(z) \, dz = \frac{1}{a} F(z) + C = \frac{1}{a} F(ax + b) + C;$$

dabei ist F eine Stammfunktion von f , d. h., es ist $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$.

$$\boxed{\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C; \quad \frac{dF(z)}{dz} = f(z)} \quad (17.2)$$

Beim Integrieren bleibt $ax + b$ unverändert, und $F(ax + b)$ wird mit dem reziproken Wert des Koeffizienten von x multipliziert.

BEISPIELE

$$17.11. \int \cos(5x - 3) \, dx = \frac{1}{5} \sin(5x - 3) + C,$$

$$\text{denn } ax + b = 5x - 3, \text{ also } a = 5, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{5} \text{ (vgl. Beispiel 17.10.)}$$

$$17.12. \int e^{-\frac{1}{3}u} \, du = -3e^{-\frac{1}{3}u} + C, \text{ denn } a = -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{a} = -3.$$

$$17.13. \int \sin(-t) \, dt = -[-\cos(-t)] + C = \cos(-t) + C = \cos t + C,$$

$$\text{denn } a = -1, \quad \frac{1}{a} = -1.$$

$$17.14. \int \sin(\omega t + \varphi) \, dt = \frac{1}{\omega} [-\cos(\omega t + \varphi)] + C = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + C$$

17.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Lösung: Das Integral läßt sich in das Grundintegral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ umformen. Der Minuend 1 des Radikanden ergibt sich durch Ausklammern des Faktors 9.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9} \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

Die Substitution $z = \frac{x}{3}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3}$, $dx = 3 dz$ ergibt $\frac{1}{3} \cdot 3 \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C$
 $= \arcsin \frac{x}{3} + C$

17.16. $\int e^{x^2+4} dx$

Dieses Integral ist nach Gl. (17.2) nicht integrierbar, denn $z = x^2 + 4$ ist nicht linear.

Die Substitution ergibt $z = x^2 + 4$, $\frac{dz}{dx} = 2x$, $dx = \frac{dz}{2x}$,

$$\int e^{x^2+4} dx = \int e^z \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{e^z}{x} dz.$$

Der Integrand enthält nach der Substitution noch die Variable x . Weil sie eine Variable ist, darf sie auch nicht vor das Integralzeichen geschrieben werden. Die Variable x läßt sich also nicht vollständig substituieren.

Bei bestimmten Integralen ist darauf zu achten, daß bei Substitution der Integrationsvariablen auch die Integrationsgrenzen zu substituieren sind.

BEISPIELE

17.17. $\int_6^8 \frac{ds}{2s-5}$

Lösung:

1. Möglichkeit: Substitution $z = 2s - 5$, $\frac{dz}{ds} = 2$, $ds = \frac{1}{2} dz$

Grenzen: $s_1 = 6$ ergibt $z_1 = 2 \cdot 6 - 5 = 7$,

$s_2 = 8$ ergibt $z_2 = 11$

$$\int_{s_1=6}^{s_2=8} \frac{ds}{2s-5} = \frac{1}{2} \int_{z_1=7}^{z_2=11} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} [\ln |z|]_7^{11} = \frac{1}{2} (\ln 11 - \ln 7) \approx 0,226$$

2. Möglichkeit: Anwenden der Gl. (17.2). Die Integrationsvariable und damit auch die Grenzen werden nicht geändert. Es ist $a = 2$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$:

$$\int_6^8 \frac{ds}{2s-5} = \frac{1}{2} [\ln |2s-5|]_6^8 = \frac{1}{2} (\ln 11 - \ln 7) \approx 0,226$$

- 17.18. Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, der von der Kurve mit der Gleichung $y^3 = x^3(4-x)$ eingeschlossen wird (Bild 17.3).

Lösung: Die Nullstellen berechnen sich aus

$$x^3(4-x) = 0, x^3 = 0 \vee 4-x = 0; x_1 = 0, x_2 = 4.$$

$$\text{Also } A = 2 \int_0^4 x \sqrt[3]{4-x} \, dx;$$

$$\text{Substitution: } z = 4-x, \frac{dz}{dx} = -1, dz = -dx;$$

$$x = 4-z,$$

$$\text{Substitution der Grenzen: } x_1 = 0 \text{ ergibt } z_1 = 4, \\ x_2 = 4 \text{ ergibt } z_2 = 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_4^0 (4-z) \sqrt[3]{z} (-dz) = -2 \int_4^0 \left(4z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{4}{3}} \right) dz \\ &= -2 \left[\frac{8}{3} z^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{5} z^{\frac{7}{3}} \right]_4^0 = -2 \left[(0) - \left(\frac{8}{3} (\sqrt[3]{4})^3 - \frac{2}{5} (\sqrt[3]{4})^4 \right) \right] \\ &= 2 \left(\frac{8}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 32 \right) = 2 \cdot 64 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{256}{15} = 17 \frac{1}{15} \end{aligned}$$

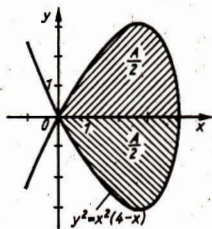


Bild 17.3

- 17.19. Die Fläche zwischen der Kurve von $f: y = (2x-6)^3$ und der x -Achse rotiere um die x -Achse. Es ist V_x im Intervall $[0; 3]$ zu berechnen.

Lösung: Nach Gln. (16.18) und (17.2) mit $a = 2, \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ ist

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^3 y^2 \, dx = \pi \int_0^3 (2x-6)^4 \, dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2x-6)^5}{5} \right]_0^3 \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{0^5}{5} - \frac{(-6)^5}{5} \right] = \pi \frac{7776}{10} \approx 2,44 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Kontrollfrage

- 17.2. Mit welchem Faktor ist die Stammfunktion F zu multiplizieren, wenn der Integrand des Integrals, das integriert werden soll, die Form $f(ax + b)$ hat? Wie heißt dieser Faktor speziell, wenn der Integrand die Form $f(-x)$ hat?

Aufgaben: 17.4. bis 17.6.

17.2.2. Andere Formen von Integranden

Aus der Kettenregel der Differentialrechnung folgt eine Verallgemeinerung der Gl. (17.2). Es sei F eine mittelbare Funktion mit der inneren Funktion φ , und es sei $F' = f$:

$$y = F[\varphi(x)], \quad y' = \frac{dF[\varphi(x)]}{dx} = F'[\varphi(x)] \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

Aus $dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ folgt nach Gl. (16.9)

$$\int dF[\varphi(x)] = \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Durch die Substitution $z = \varphi(x)$, $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, $dz = \varphi'(x) dx$ vereinfacht sich der Integrand:

$$\boxed{\begin{aligned} \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx &= \int f(z) dz = F(z) + C = F[\varphi(x)] + C \\ z &= \varphi(x), \quad dz = \varphi'(x) dx; \quad \frac{dF(z)}{dz} = f(z) \end{aligned}} \quad (17.3)$$

Wenn der Integrand ein Produkt zweier Terme ist, von denen der eine der Term $f[\varphi(x)]$ einer mittelbaren Funktion und der andere dessen innere Ableitung $\varphi'(x)$ ist, so läßt sich das Integral durch die Substitution $z = \varphi(x)$ ermitteln.

Aus Gl. (17.3) folgt, daß nur die äußere Funktion f integriert wird, während $\varphi(x)$ unverändert bleibt.

BEISPIELE

17.20. $\int \sin^3 x \cos x dx$

Lösung: Der zweite Faktor $\cos x$ ist die innere Ableitung des ersten: $(\sin x)' = \cos x$. Der Integrand erfüllt die geforderte Voraussetzung.

Substitution der inneren Funktion: $z = \sin x$, $dz = \cos x dx$;

$$\int \sin^3 x \underbrace{\cos x dx}_{dz} = \int z^3 dz = \frac{1}{4} z^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

17.21. $\int x e^{x^2+4} dx$

Lösung: $z = x^2 + 4$, $dz = 2x dx$.

Der Integrand enthält statt der Ableitung $2x$ nur den Faktor x . Der fehlende konstante Faktor 2 wird durch Erweitern ergänzt:

$$\int x e^{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+4} 2x dx = \frac{1}{2} \int e^z dz = \frac{1}{2} e^z + C = \frac{1}{2} e^{x^2+4} + C$$

Das Integral in Beispiel 17.16. hat fast den gleichen Integranden. Es läßt sich aber nicht durch Erweitern auf die Form des Integrals in Gl. (17.3) bringen. Da nämlich der Erweiterungsfaktor als reziproker Wert auch vor dem Integralzeichen steht, muß er ein konstanter Faktor sein. Im Beispiel 17.16. müßte aber mit $2x$ erweitert werden, und dieser Faktor ist nicht konstant. Das Integral des Beispiels 17.16. ist durch elementare reelle Funktionen in geschlossener Form nicht darstellbar.

$$17.22. \int (x^3 - 3x + 1)^4 (x^2 - 1) dx$$

$$\text{Lösung: } z = x^3 - 3x + 1, dz = (3x^2 - 3) dx = 3(x^2 - 1) dx$$

Erweitern mit 3 ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int (x^3 - 3x + 1)^4 \cdot 3(x^2 - 1) dx &= \frac{1}{3} \int z^4 dz = \frac{1}{3} \frac{z^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{15} (x^3 - 3x + 1)^5 + C \end{aligned}$$

$$17.23. \int \frac{u^3 du}{\sqrt{a^2 - u^4}}$$

$$\text{Lösung: } z = a^2 - u^4, dz = -4u^3 du$$

Erweitern mit -4 ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int \frac{-4u^3 du}{\sqrt{a^2 - u^4}} &= -\frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{4} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{1}{4} 2z^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - u^4} + C \end{aligned}$$

$$17.24. \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$$

Lösung: Ein Vergleich mit den Grundintegralen (Gln. (17.1)) zeigt Ähnlichkeit mit

$$\int \frac{dz}{1 + z^2}, \text{ also } z = e^x, dz = e^x dx;$$

$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + (e^x)^2} = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \arctan z + C = \arctan e^x + C$$

$$17.25. \int_0^3 x \sqrt{16 - x^2} dx$$

$$\text{Lösung: } z = 16 - x^2, dz = -2x dx.$$

Grenzen: $x_1 = 0$ ergibt $z_1 = 16$, $x_2 = 3$ ergibt $z_2 = 7$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \sqrt{16 - x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{16 - x^2} \cdot (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int_{16}^7 \sqrt{z} dz \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{16}^7 = -\frac{1}{3} [z \sqrt{z}]_{16}^7 = -\frac{1}{3} (7 \sqrt{7} - 64) \approx 15,2 \end{aligned}$$

$$17.26. \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \omega t \sin \omega t dt \quad \left(T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

Lösung: $z = \cos \omega t, dz = -\omega \sin \omega t dt$ (Kettenregel beachten!)

Grenzen: $t_1 = \frac{T}{4}$ ergibt $z_1 = \cos \omega \frac{T}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$,

$t_2 = \frac{T}{2}$ ergibt $z_2 = \cos \omega \frac{T}{2} = \cos \pi = -1$.

Erweitern mit $-\omega$ ergibt

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\omega} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \omega t (-\omega \sin \omega t) dt \\ &= -\frac{1}{\omega} \int_0^{-1} z^2 dz = -\frac{1}{\omega} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{-1} = -\frac{1}{\omega} \left[\left(-\frac{1}{3} \right) - (0) \right] = \frac{1}{3\omega} \end{aligned}$$

17.27. $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$

Dieser Integrand erfüllt nicht die in Gl. (17.3) geforderte Voraussetzung, denn wegen $z = 16 - x^2$ ist $dz = -2x dx$, d. h., das Integral muß auf $\int \sqrt{16 - x^2} (-2x) dx$ umgeformt werden. Das läßt sich durch Erweitern mit einem konstanten Faktor nicht erreichen.

Aus Gl. (17.3) lassen sich Sonderfälle herleiten.

Für $f(z) = z^n$ folgt

$$\boxed{\int [\varphi(x)]^n \varphi'(x) dx = \frac{1}{n+1} [\varphi(x)]^{n+1} + C, \quad n \neq -1} \quad (17.4)$$

BEISPIELE

17.28. $\int \left(\frac{1}{3} \sin x + 3 \right)^4 \cos x dx$

Lösung: $z = \varphi(x) = \frac{1}{3} \sin x + 3, \varphi'(x) = \frac{1}{3} \cos x$

Nach Erweitern mit 3 ergibt sich nach Gl. (17.4) mit $n = 4$

$$3 \int \left(\frac{1}{3} \sin x + 3 \right)^4 \cdot \frac{1}{3} \cos x dx = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3} \sin x + 3 \right)^5 + C$$

17.29. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

Lösung: $z = \varphi(x) = \sin x, \varphi'(x) = \cos x$

Gl. (17.4) mit $n = -3$ ergibt

$$\int \sin^{-3} x \cos x dx = \frac{1}{-2} \sin^{-2} x + C = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + C$$

17.30. $\int x^2 \sqrt{4 + x^2} dx$

Lösung: $z = \varphi(x) = 4 + x^2, \varphi'(x) = 2x^2; n = \frac{1}{2}$ in Gl. (17.4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \int \sqrt{4+x^3} \cdot 3x^2 dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (4+x^3)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} (4+x^3) \sqrt{4+x^3} + C\end{aligned}$$

Nach Gl. (17.4) lassen sich auch die Integrale der Beispiele 17.20., 17.22., 17.23., 17.25. und 17.26. berechnen.

Ein weiterer Sonderfall folgt aus Gl. (17.4) für $n = 1$:

$$\boxed{\int \varphi(x) \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 + C} \quad (17.5)$$

In diesem Falle ist der Integrand ein Produkt aus zwei Faktoren, von denen der eine die Ableitung des anderen ist.

BEISPIELE

17.31. $\int \sin x \cos x dx$

Lösung: $\varphi(x) = \sin x$, $\varphi'(x) = \cos x$;

Gl. (17.5) ergibt $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

17.32. $\int \frac{\ln u}{u} du$

Lösung: $\varphi(u) = \ln u$, $\varphi'(u) = \frac{1}{u}$;

$$\int \ln u \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} (\ln u)^2 + C$$

17.33. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

Lösung: $\varphi(x) = \arctan x$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} [(\arctan x)^2]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} (0)^2 = \frac{\pi^2}{32}\end{aligned}$$

Ein wichtiger Sonderfall folgt aus Gl. (17.3) für $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\varphi(x)}$. Dann ist $\overline{F}(z) = \ln |z| = \ln |\varphi(x)|$, und es gilt:

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)| + C} \quad (17.6)$$

In diesem Falle ist der Integrand ein Bruch, bei dem der Zählerterm die Ableitung des Nennerterms ist.

BEISPIELE

$$17.34. \int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx$$

Lösung: $\varphi(x) = x^2 + 5x + 6$, $\varphi'(x) = 2x + 5$.

Die in Gl. (17.6) geforderte Bedingung ist erfüllt, und es folgt

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx = \ln |x^2+5x+6| + C$$

$$17.35. \int \frac{t^2}{t^3+8} dt$$

Lösung: $\varphi(t) = t^3 + 8$, $\varphi'(t) = 3t^2$.

Nach Erweitern mit 3 folgt aus Gl. (17.6)

$$\frac{1}{3} \int \frac{3t^2}{t^3+8} dt = \frac{1}{3} \ln |t^3+8| + C$$

$$17.36. \int \cot x dx$$

Lösung: $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$; $\varphi(x) = \sin x$, $\varphi'(x) = \cos x$.

Nach Gl. (17.6) folgt

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$17.37. \int \frac{e^x}{1-3e^x} dx$$

Lösung: $\varphi(x) = 1 - 3e^x$, $\varphi'(x) = -3e^x$.

Erweitern mit -3 ergibt

$$-\frac{1}{3} \int \frac{-3e^x}{1-3e^x} dx = -\frac{1}{3} \ln |1-3e^x| + C$$

Es existieren noch weitere Substitutionsmöglichkeiten für andere Formen von Integranden. Sie werden in diesem Buch nicht behandelt.

Kontrollfragen

- 17.3. Welche Form muß der Integrand haben, um das in diesem Abschnitt behandelte Substitutionsverfahren anwenden zu können?
- 17.4. Welche Form hat die Stammfunktion, wenn der Integrand ein Bruch ist, dessen Zählerterm die Ableitung des Nennerterms ist?

Aufgaben: 17.7. und 17.8.

17.3. Die Integraltafel

Außer dem Substitutionsverfahren gibt es noch andere Integrationsverfahren für verschiedene Typen von Integranden. Da sie nicht von der gleichen grundlegenden Bedeutung wie das Substitutionsverfahren sind, werden sie in diesem Lehrbuch nicht behandelt.

Um den zum Integrieren erforderlichen Arbeitsaufwand zu verringern, werden häufig vorkommende Integrale in Tafeln zusammengestellt. Diesem Buch ist eine solche Integraltafel beigelegt. Sie ist nach den in den Integranden enthaltenen Funktionen geordnet. Falls ein zu lösendes Integral nicht in der Tafel enthalten ist, aber eine ähnliche Form existiert, läßt es sich mitunter durch Substitution auf das in der Tafel stehende Integral zurückführen.

BEISPIELE

$$17.38. \int \frac{x \, dx}{(2x + 3)^2}$$

Lösung: Integral 1.5. der Integraltafel mit $a = 2$, $b = 3$ ergibt

$$\int \frac{x \, dx}{(2x + 3)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2x + 3} + \ln |2x + 3| \right] + C$$

17.39. Es ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r zu berechnen.

Lösung: Aus der Mittelpunktsleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ folgt

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Der Inhalt des Viertelkreises im 1. Quadranten ist nach Integral 2.1. der Integraltafel

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} A &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r \\ &= \left(\frac{r}{2} \cdot 0 + \frac{r^2}{2} \arcsin 1 \right) - \left(0 + \frac{r^2}{2} \arcsin 0 \right) \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot 90^\circ = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \pi r^2, \end{aligned}$$

folglich gilt $A = \pi r^2$ für den Flächeninhalt des Kreises.

Einige Integrale der Tafel führen bei ihrer Anwendung wieder zu Integralen, die ihrerseits wieder berechnet werden müssen. Von besonderer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang die **Rekursionsformeln** (lat. „recursus“, Rücklauf), in denen ein Exponent n auftritt, der bei Anwendung der Formeln schrittweise kleiner wird. Solche Rekursionsformeln sind z. B. die Integrale 1.10., 3.5. und 4.2. der Integraltafel.

BEISPIELE

$$17.40. \int \frac{dx}{(x^2 - 5)^2}$$

Lösung: Integral 1.10. der Integraltafel mit $b = -5$, $n = 2$ ergibt

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 5)^2} = \frac{x}{-10(x^2 - 5)} - \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x^2 - 5};$$

nach Integral 1.12. ist mit $a = \sqrt{5}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right|;$$

also

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 5)^2} = -\frac{x}{10(x^2 - 5)} - \frac{1}{20\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C.$$

17.41. $\int \sin^4 \omega t \, dt$

Lösung: Integral 3.5. mit $n = 4$ ergibt

$$\int \sin^4 \omega t \, dt = -\frac{1}{4\omega} \sin^3 \omega t \cos \omega t + \frac{3}{4} \int \sin^2 \omega t \, dt;$$

nochmalige Anwendung dieses Integrals mit $n = 2$ ergibt

$$\int \sin^2 \omega t \, dt = -\frac{1}{2\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{1}{2} \int \sin^0 \omega t \, dt,$$

und

$$\int \sin^0 \omega t \, dt = \int 1 \, dt = t.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \sin^4 \omega t \, dt &= -\frac{1}{4\omega} \sin^3 \omega t \cos \omega t + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{1}{2} t \right) + C \\ &= -\frac{1}{4\omega} \sin^3 \omega t \cos \omega t - \frac{3}{8\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{3}{8} t + C \end{aligned}$$

17.42. $\int \cos^3 (2x - 3) \, dx$

Lösung: Die Substitution $z = 2x - 3$, $\frac{dz}{dx} = 2$, $dx = \frac{1}{2} dz$ führt auf das Integral

$$\frac{1}{2} \int \cos^3 z \, dz.$$

Integral 3.6. mit $n = 3$, $\omega = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \cos^3 z \, dz &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \cos^2 z \sin z + \frac{2}{3} \int \cos z \, dz \right] \\ &= \frac{1}{6} \cos^2 z \sin z + \frac{1}{3} \sin z + C \text{ (vgl. Integral 3.2.)}, \end{aligned}$$

und wegen $z = 2x - 3$ folgt

$$\int \cos^3 (2x - 3) \, dx = \frac{1}{6} \cos^2 (2x - 3) \sin (2x - 3) + \frac{1}{3} \sin (2x - 3) + C.$$

17.43. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \cos 3x \, dx$

Lösung: Integral 3.8. mit $n = 2$, $\omega = 3$ ergibt

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \cos 3x \, dx = \left[\frac{x^2}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x \, dx;$$

Integral 3.7. mit $n = 1$, $\omega = 3$ ergibt

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x \, dx = \left[-\frac{x}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^0 \cos 3x \, dx,$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \quad (\text{vgl. Integral 3.2}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \cos 3x \, dx &= \left[\frac{x^2}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 30^\circ \\ &= \left(\frac{\pi^2}{108} \sin 90^\circ + \frac{2\pi}{54} \cos 90^\circ - \frac{2}{27} \sin 90^\circ \right) - (0) \\ &= \frac{1}{108} (\pi^2 - 8) \approx 0,0173 \end{aligned}$$

17.44. $\int \sqrt{x^2 - 8x - 10} \, dx$

Lösung: Der Radikand wird durch Addition und Subtraktion der quadratischen Ergänzung von $x^2 - 8x$ umgeformt (die quadratische Ergänzung ist das Quadrat des halben Koeffizienten von x):

$$x^2 - 8x - 10 = (x^2 - 8x + 16) - 16 - 10 = (x - 4)^2 - 26.$$

Die Substitution $z = x - 4$, $\frac{dz}{dx} = 1$, $dx = dz$ und Integral 2.2. mit $a^2 = 26$ ergeben

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x-4)^2 - 26} \, dx &= \int \sqrt{z^2 - 26} \, dz \\ &= \frac{z}{2} \sqrt{z^2 - 26} - 13 \ln |z + \sqrt{z^2 - 26}| + C. \end{aligned}$$

Mit $z = x - 4$ folgt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 8x - 10} \, dx &= \frac{1}{2} (x - 4) \sqrt{(x-4)^2 - 26} \\ &\quad - 13 \ln |x - 4 + \sqrt{(x-4)^2 - 26}| + C. \end{aligned}$$

17.45. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}$

Lösung: Integral 2.8. mit $a = -1$, $b = 6$, $c = 16$ ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}} &= \frac{\sqrt{16 + 6x - x^2}}{-1} - \frac{6}{-2} \int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}} \\ &= -\sqrt{16 + 6x - x^2} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}. \end{aligned}$$

Der Integrand wird umgeformt:

$$16 - (x^2 - 6x) = 16 - (x^2 - 6x + 9) + 9 = 25 - (x - 3)^2$$

Die Substitution $z = x - 3$, $dz = dx$ und Integral 2.4. mit $a^2 = 25$ ergeben

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{25 - (x - 3)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{25 - z^2}} \\ &= \arcsin \frac{z}{5} = \arcsin \frac{x - 3}{5}. \end{aligned}$$

Folglich

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}} = -\sqrt{16 + 6x - x^2} + 3 \arcsin \frac{x - 3}{5} + C$$

Aufgaben: 17.9. bis 17.11.

17.4. Aufgaben

17.1. Es sind zu integrieren:

a) $\int_1^3 \left(4x^2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^4} \right) dx$

b) $\int_1^2 \left(2u^2 - \frac{1}{u^3} \right) du$

c) $\int_0^1 (e^x + 2^x) dx$

d) $\int_0^1 x^2 e^u dx$

e) $\int_0^1 x^2 e^u du$

17.2. Es sind zu integrieren:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - 2 \cos x) dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c) $\int \sin \alpha \cos \beta d\alpha$

d) $\int \sin \alpha \cos \beta d\beta$

e) $\int \sin \alpha \cos \beta dx$

f) $\int_{-0,95}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

g) $\int_{-0,3}^{0,3} \frac{3 dt}{1 + t^2}$

17.3. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von

$$f: y = \begin{cases} e^x, & x \in [-2; 0] \\ \cos x, & x \in [0; 0,8] \end{cases} \quad \text{und der } x\text{-Achse}$$

in den Grenzen von -2 bis $0,8$ zu berechnen (Skizze!)

17.4. Es sind zu integrieren:

a) $\int (3x + 5)^6 dx$

b) $\int_2^3 \frac{du}{(4 - u)^4}$

c) $\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x}{4}} dx$

d) $\int \sin \frac{1}{2} t dt$

e) $\int_{10^\circ}^{15^\circ} \cos \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) dx$

f) $\int \cos(-\alpha) d\alpha$

g) $\int \frac{3}{4t-1} dt$

h) $\int \frac{du}{3-4u}$

i) $\int_{10^\circ}^{20^\circ} \frac{d\varphi}{\sin^2 3\varphi}$

j) $\int e^{6x-2} dx$

k) $\int_4^{20} e^{5-\frac{1}{4}v} dv$

l) $\int e^{-y} dy$

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

n) $\int_{-0.42}^{0.2} \frac{dr}{1+(5r)^2}$

- 17.5. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse in den Grenzen von x_1 bis x_2 zu berechnen.

a) $f: y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}); \quad x_1 = -2, x_2 = 2$

b) $f: y = \sqrt[4]{2x-3}; \quad x_1 = 2, x_2 = 42$

- 17.6. Es ist der Inhalt des Rotationskörpers bei Rotation um die x - bzw. y -Achse zu berechnen.

a) V_x für die Funktion und die Grenzen der Aufgabe 17.5.a

b) V_x und V_y für die Funktion und die Grenzen der Aufgabe 17.5.b; die Grenzen für V_y sind $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

- 17.7. Es sind zu integrieren:

a) $\int \cos^5 x \sin x dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 - \sin x} \cos x dx$

c) $\int e^{\sin u} \cos u du$

d) $\int_0^{\ln 9} \sqrt[3]{7e^t + 1} dt$

e) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1} dx$

f) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} (2 - 3 \cos t)^2 \sin t dt$

g) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

h) $\int \frac{4x^3 - 10x}{x^4 - 5x^2 + 3} dx$

i) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

j) $\int \frac{t-3}{t^2-6t+8} dt$

k) $\int_a^b \frac{dx}{mx+n}$

- 17.8. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von

$$f: y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}, & x \in [0; 3] \\ \frac{x}{3\sqrt{25-x^2}}, & x \in [3; 4] \end{cases}$$

und der x -Achse in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 4$ zu berechnen.

17.9. Es sind zu integrieren:

a) $\int x(3x - 4)^3 dx$

b) $\int_0^1 \frac{x^2}{(2x + 1)^3} dx$

c) $\int_3^4 \sqrt{x^2 - 9} dx$

d) $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

e) $\int \sqrt{t^2 + 4t + 8} dt$

17.10. Es sind zu integrieren:

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2t dt$

b) $\int x \sin 5x dx$

c) $\int e^{-2x} \sin 5x dx$

d) $\int_0^2 x^2 e^{2x} dx$

17.11. Es ist der Inhalt der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zu berechnen.

17.12. Es sind zu integrieren:

a) $\int_9^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \sqrt{v} \right)^2 dv$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin \frac{\pi}{6} \cos u du$

c) $\int_{-0,6}^{0,4} \sin t dt$

17.13. a) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven von $f: y = 2 - \cos x$ und $g: y = \cos x$ zu berechnen. Die Grenzen sind die beiden kleinsten nicht negativen Berührungststellen (Skizze!)

b) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven von $f: y = 2 \sin x$ und $g: y = \frac{6}{5\pi} x$ in den Grenzen von 0 bis π zu berechnen (Skizze!).

17.14. Es ist $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ zu berechnen.

17.15. Es sind zu integrieren:

a) $\int x \sqrt{3 - x} dx$

b) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x^2 - 4}{3x + 1} dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

d) $\int_1^{1,5} \frac{dr}{5 + 4r^2}$

17.16. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Kurven von $f: y = \sin 2x$ und $g: y = \cos 2x$ in den Grenzen zu berechnen, die die im Intervall $[0; \pi]$ liegenden Schnittstellen sind.

17.17. a) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $f: y = \frac{1}{2} (3 - \ln x)$ und der y -Achse in den Grenzen von $y_1 = f(x_1)$ bis $y_2 = f(x_2)$ mit $x_1 = 1$ und $x_2 = e^3$ zu berechnen.

- b) Für die Funktion f der Aufgabe 17.17. a ist mit den angegebenen Grenzen das Volumen V_y des Rotationskörpers zu berechnen.

17.18. Es sind zu integrieren:

a) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

b) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

c) $\int e^{\cos \omega t} \sin \omega t dt$

d) $\int (\tan x + \tan^3 x) dx$

e) $\int \frac{2x^2 - 4}{x^3 - 6x + 1} dx$

f) $\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$

17.19. Es sind zu integrieren:

a) $\int \frac{du}{(u^2 + 5)^3}$

b) $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) dx$

c) $\int \sqrt{x^2 - 6x + 13} dx$

d) $\int \sqrt{4v^2 + 24v + 25} dv$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

f) $\int_{0.15}^{0.30} \tan 3t dt$

g) $\int \sin 2x \cos 3x dx$

h) $\int (\ln x)^3 dx$

i) $\int e^{3x+4} \sin 5x dx$

- 17.20. Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = 2 \sin^2 x$ und $y = \tan x$ eingeschlossen wird. Die Grenzen sind $x_1 = 0$ und die im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ liegende Berührungsstelle.

17.21. Für die Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen

$$y = e^{\frac{1}{2}x} + 1, \quad y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

eingeschlossen wird, sind der Inhalt der Fläche und das Volumen V_x des Rotationskörpers bei Rotation um die x -Achse zu berechnen.

- 17.22. Es ist der Inhalt der von den Kurven von f und g eingeschlossenen Fläche zu berechnen (Skizze!).

a) $f: y^2 = \frac{1}{32}(x+1)^3, \quad g: y^2 = 2(x-2)$

Grenzen: Nullstellen von f, g ; Schnittstelle $x_2 < 4$ von f und g .

b) $f: 2y^2 - 25x + 50 = 0, \quad g: 45x^2 + 36y^2 - 1620 = 0$

Grenzen: Positive Nullstellen von f, g ; Schnittstelle von f und g .

- 17.23. Die Kurve von $f: y = 3 \sin(2x - 0,3)$ rotiert um die x -Achse. Es ist der Inhalt des Rotationskörpers V_x in den Grenzen von 0 bis 0,15 zu berechnen.

18. Geometrische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

18.1. Kurvengleichungen in rechtwinkligen Koordinaten. Parameterdarstellung

Zahlreiche Kurven, die in der Technik verwendet werden, lassen sich vorteilhaft durch eine Parameterdarstellung beschreiben. Bei einigen technisch wichtigen Kurven existiert überhaupt nur diese Darstellungsart.

Nach Abschnitt 9.4. läßt sich eine Kurve unter Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y eines variablen Kurvenpunktes in der impliziten Form

$$F(x; y) = 0 \quad (\text{I})$$

oder, wenn eine Umstellung nach y möglich ist, in der expliziten Form

$$y = f(x) \quad (\text{II})$$

beschreiben.

Bei der Parameterdarstellung von Kurven (vgl. 11.1. und 11.2.) werden x und y getrennt voneinander als Funktionen einer Hilfsvariablen t , des Parameters, dargestellt:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Um von der Parameterdarstellung (III) zu einer parameterfreien Gleichung der Form (I) oder (II) zu kommen, wird eine der Funktionen, meist $x = x(t)$, nach t aufgelöst und die erhaltene Umkehrfunktion $t = \varphi(x)$ in $y = y(t)$ eingesetzt. Dann folgt $y = y(t) = y(\varphi(x)) = f(x)$ als explizite Form der parameterfreien Kurvengleichung.

BEISPIEL

18.1. Eine Kurve, hat die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= t^3 = x(t) \\ y &= t^2 = y(t) \end{aligned} \quad t \in T = P \quad (\text{IV})$$

Welches Bild hat die Kurve, und wie lautet ihre parameterfreie Gleichung?

Lösung: Mit der Wertetabelle

t	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
x	-8	-3,38	-1	-0,12	0	0,12	1	3,38	8
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

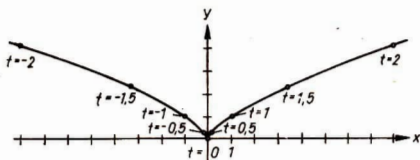


Bild 18.1

ergibt sich die Kurve des Bildes 18.1. Die Kurve heißt **Neilsche Parabel**. Aus der ersten Gleichung von (IV) folgt:

$$t = \sqrt[3]{x} = \varphi_1(x) \text{ für } x \in [0; \infty) \quad \text{bzw.}$$

$$t = -\sqrt[3]{-x} = \varphi_2(x) \text{ für } x \in (-\infty, 0)$$

und damit aus der zweiten Gleichung von (IV) nach Zusammenfassung

$$y = (\sqrt[3]{x})^2 = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$$

als parameterfreie Gleichung.

Während bei Wahl eines kartesischen Koordinatensystems zu einer Kurve nur jeweils eine der Gleichungen (I) oder (II) gehören, sind unbegrenzt viele Parameterdarstellungen einer Kurve möglich. Durch geeignete Wahl des Parameters kann daraus eine möglichst einfache Darstellung (III) ausgewählt werden. Zum Beispiel ergibt sich für die **NEILSche Parabel** mit $x = \sqrt[3]{t}$, $y = \sqrt[3]{t^2}$ eine weitere, aber für die praktische Rechnung nicht mehr so einfache Parameterdarstellung.

Während zu jeder Kurve Parameterdarstellungen existieren, gibt es Kurven, die sich nicht durch eine parameterfreie Gleichung der Form (I) oder (II) beschreiben lassen. Die Parameterdarstellung ist die allgemeinere Darstellungsform. Praktisch wird der Begriff „Kurve“ über eine Parameterdarstellung definiert.

In der Getriebelehre treten z. B. zahlreiche Kurven auf, die von Punkten bewegter Teile beschrieben werden und am einfachsten in der Parameterdarstellung erfaßt werden. Hierzu gehören auch die **Rollkurven** oder **Zykloiden**.

Ein Kreis k mit dem Radius r rollt (ohne zu gleiten) auf einer Geraden g . Ein Punkt P des Kreises beschreibt bei dieser Bewegung eine Kurve, die **gewöhnliche Zykloide** heißt.

Um die Kurvengleichung zu erhalten, wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen x -Achse mit der Geraden g zusammenfällt. Bild 18.2 zeigt

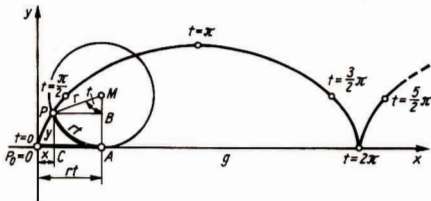


Bild 18.2

eine beliebige Lage während des Abrollens. Zu Beginn der Bewegung liege der Kreispunkt P auf der Geraden g . Diese Anfangslage P_0 von P wird als Ursprung des Koordinatensystems gewählt. t ist der Drehwinkel, um den der Kreis aus der Anfangslage heraus gedreht ist. Dabei ist der Kreis auf der Strecke $\overline{OA}$ weitergerollt. Die Strecke $\overline{OA}$ muß gleich dem abgerollten Kreisbogen $\widehat{PA}$ sein:

$$\overline{OA} = \widehat{PA} = rt.$$

Für die Koordinaten von P ergibt sich

$$x = \overline{OC} = \overline{OA} - \overline{CA} = \overline{OA} - \overline{PB} = rt - r \sin t$$

$$y = \overline{PC} = \overline{MA} - \overline{MB} = r - r \cos t.$$

Die Parameterdarstellung der gewöhnlichen Zykloide lautet:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad (18.1)$$

Die folgende Tabelle gibt für einige t -Werte die Koordinaten an. Die zugehörigen Punkte sind in Bild 18.2 eingezeichnet.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$
x	0	$0,57r$	$3,14r$	$4,71r$	$6,28r$	$7,85r$
y	0	r	$2r$	r	0	r

Die gewöhnliche Zykloide besteht aus kongruenten Bögen und hat in den Punkten, die zu $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ gehören, Spitzen.

Eine parameterfreie Darstellung $y = f(x)$ ist nicht möglich, da die erste Gleichung in (18.1) nicht nach t aufgelöst werden kann. Dagegen läßt sich aus (18.1) die Kurvengleichung $x = g(y) = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{y(2r-y)}$ herleiten, die kompliziertere Terme als die Parameterdarstellung hat.

Kontrollfragen

- 18.1. Welche wichtige Arten der analytischen Darstellung von Kurven gibt es?
- 18.2. Was wird unter der Parameterdarstellung einer Kurve verstanden?
- 18.3. Wie erfolgt, falls dieses möglich ist, der Übergang von der Parameterdarstellung zur parameterfreien Darstellung einer Kurve?

Aufgaben: 18.1. und 18.2.

18.2. Kurvengleichungen in Polarkoordinaten

Verschiedene technisch wichtige Kurven werden durch Gleichungen in Polarkoordinaten beschrieben. Das Polarkoordinatensystem ist diesen Kurven besonders günstig angepaßt, so daß einfachere Kurvengleichungen entstehen als bei Verwendung rechtwinkliger Koordinaten.

Ein **Polarkoordinatensystem** besteht aus einem Punkt O als **Pol** und einem von O ausgehenden Strahl als **Polarachse**, auf der eine Einheitsstrecke $\overline{OE}$ gewählt wird (Bild 18.3). Jedem Punkt P der Ebene, den Pol ausgenommen, lassen sich eindeutig die Strecke $\overline{OP}$ mit der Maßzahl $r > 0$ und der von der Polarachse mathematisch positiv bis $\overline{OP}$ gemessene Winkel $\varphi \in [0^\circ, 360^\circ)$ zuordnen. r und φ sind die **Polarkoordinaten** von P , r heißt **Abstand** oder **Radiusvektor**, φ heißt **Richtungswinkel** oder **Argument**. Die Gleichungen

$$F(r, \varphi) = 0 \quad \text{oder} \quad r = f(\varphi) \quad (\text{V})$$

stellen die implizite bzw. explizite Form einer Kurvengleichung in Polarkoordinaten dar.

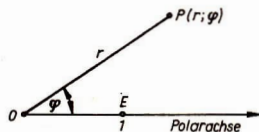


Bild 18.3

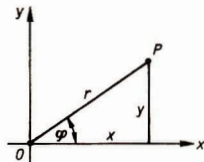


Bild 18.4

Fallen wie in Bild 18.4 der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Pol des Polarkoordinatensystems und die x -Achse mit der Polarachse zusammen, dann ist der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (\text{VI})$$

in der jeweiligen Kurvengleichung möglich. Für den Wechsel von einer Kurvengleichung der Form (I) oder (II) zu einer der Kurvengleichungen (V) dienen die Gleichungen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad \text{oder auch} \quad (\text{VII})$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

BEISPIELE

18.2. Wie lautet die Gleichung der **NEILSchen Parabel** in Polarkoordinaten?

Lösung: Aus der Kurvengleichung des Beispiels 18.1.

$$y = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$$

folgt mit den Gleichungen (VI)

$$r \sin \varphi = \sqrt[3]{r^2 \cos^2 \varphi}$$

$$r^3 \sin^3 \varphi = r^2 \cos^2 \varphi$$

$$r = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} = \frac{\cot^2 \varphi}{\sin \varphi} = f(\varphi)$$

18.3. Eine Kurve hat in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = \frac{4}{1 - \sin \varphi}.$$

Die Kurve ist mit Hilfe einiger Punkte zu zeichnen. Wie lautet die Kurvengleichung in rechtwinkligen Koordinaten?

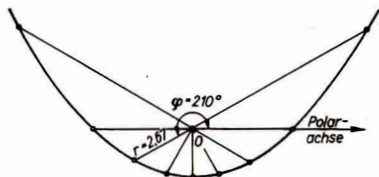


Bild 18.5

Lösung: Nach der folgenden Wertetabelle wurden die in Bild 18.5 angegebenen Kurvenpunkte konstruiert.

φ	0°	30°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
r	4	8	8	4	2,67	2,14	2	2,14	2,67

Aus der Kurvengleichung in Polarkoordinaten folgt mit den Gleichungen (VII):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y = 4$$

$$x^2 + y^2 = 16 + 8y + y^2$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - 2 = f(x)$$

Die Kurve ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Zu den Kurven, die sich bevorzugt durch Gleichungen in Polarkoordinaten beschreiben lassen, gehören die Spiralen. Der Winkel φ wird im folgenden in Bogenmaß angegeben und sei nicht auf das Intervall $[0, 2\pi)$ beschränkt.

Ein Punkt bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem von O ausgehenden Strahl von O weg, während sich der Strahl mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um O dreht (zur Veranschaulichung diene die sich bewegende Laufkatze auf einem sich drehenden Turmdrehkran). Dann beschreibt der Punkt P eine **Archimedisches Spirale**.

Es sei t die Zeit, und für $t = 0$, am Beginn der Bewegung, seien $r = 0$ und $\varphi = 0$. Zur Zeit t ist dann

$$r = vt, \quad \varphi = \omega t,$$

woraus

$$r = \frac{v}{\omega} \varphi \quad \text{oder mit} \quad a = \frac{v}{\omega} \neq 0$$

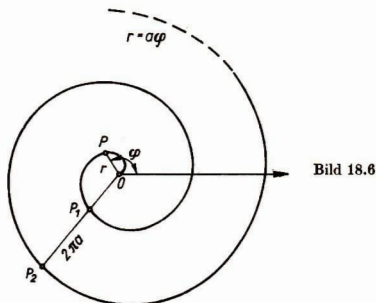
die Gleichung der Archimedischen Spirale in Polarkoordinaten folgt:

$$\boxed{r = a\varphi} \quad (\text{Bild 18.6}) \quad (18.2)$$

Allgemein muß wegen $r \geq 0$ gelten:

für $a > 0$ ist $\varphi \in [0, \infty)$

für $a < 0$ ist $\varphi \in (-\infty, 0]$



Sind $P_1(r_1; \varphi_1)$ und $P_2(r_2; \varphi_2)$ zwei Punkte der Spiralen, deren Argumente sich um 2π unterscheiden, so daß die Punkte auf einem Strahl durch O liegen, dann folgt mit $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$:

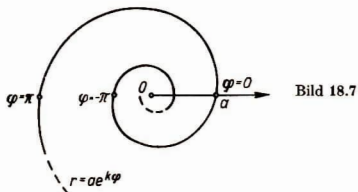
$$r_2 = a\varphi_2 = a(\varphi_1 + 2\pi) = a\varphi_1 + 2\pi a = r_1 + 2\pi a.$$

Allgemein haben zwei Punkte der Spiralen, deren Argumente sich um 2π unterscheiden, den konstanten Abstand $2a\pi$ (Bild 18.6).

Die Gleichung der Logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten lautet:

$$\boxed{r = a e^{k\varphi}} \quad (18.3)$$

mit den reellen Zahlen $a > 0$, $k \neq 0$ und $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Für $\varphi = 0$ wird $r = a$. Strebt φ von 0 gegen $+\infty$, dann umschlingt die Spirale in immer größeren Abständen



den Pol O . Strebt φ von O gegen $-\infty$, dann nähert sich die Spirale in immer engeren Windungen asymptotisch dem Punkt O (Bild 18.7).

Kontrollfrage

18.4. Wie erfolgt der Übergang von einer Kurvengleichung in Polarkoordinaten zu einer Kurvengleichung in rechtwinkligen Koordinaten und umgekehrt?

Aufgabe: 18.3.

18.3. Kurventangenten und -normalen

In diesem Abschnitt soll für die verschiedenen Darstellungsarten der Kurvengleichungen die Bestimmung von Kurventangenten und -normalen behandelt werden.

Ist an eine Kurve k in einem gegebenen Kurvenpunkt $P_0(x_0; y_0)$ die Tangente zu legen (Bild 18.8), so muß lediglich die Richtung der Tangente bestimmt werden. Für

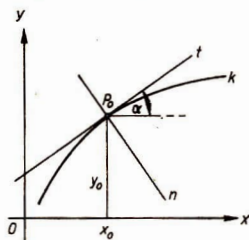


Bild 18.8

Kurvengleichungen der Form $y = f(x)$ und $F(x; y) = 0$ wurde diese Aufgabe bereits gelöst. Der Anstiegswinkel der Tangente ergibt sich bei der expliziten Form der Kurvengleichung unmittelbar aus

$$\tan \alpha = f'(x_0) = m_t$$

und bei der impliziten Form nach (21.4) aus

$$\tan \alpha = -\frac{F_x(x_0; y_0)}{F_y(x_0; y_0)} = m_t$$

In der Tangentengleichung $y = mx + b$ ist damit $m = m_t$ bekannt, und b kann unter Verwendung der Koordinaten x_0, y_0 berechnet werden.

Für eine Kurve mit der Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ folgt für den Anstieg einer Kurventangente unter Beachtung der Kettenregel (14.4) und der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktionen (14.6):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (\text{I})$$

Die Ableitungen der Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$ nach dem Parameter t werden durch einen darüber gesetzten Punkt gekennzeichnet:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}} \quad (18.4)$$

Damit erhält (I) die Form

$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}} \quad (18.5)$$

Die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ sind jeweils für denjenigen Wert $t = t_0$ zu betrachten, zu dem der Kurvenpunkt P_0 gehört:

$$m_t = f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Die Kurvennormale n in P_0 ist die Senkrechte zur Tangente t . Der Anstieg der Normalen ist nach (9.8)

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Mit den bisherigen Überlegungen können zum Beispiel für die Kegelschnitte „Tangenten- und Brennpunkteigenschaften“ auf einfachem Wege hergeleitet werden. Die folgenden Beispiele ergänzen die Behandlung der Kegelschnitte des Abschnittes 11.

BEISPIELE

18.4. Gegeben sind eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ und ein Parabelpunkt $P_0(x_0; y_0 > 0)$ (Bild 18.9). Der obere Parabelbogen, auf dem P_0 liegt, hat die Gleichung $y = \sqrt{2px} = f(x)$. Für den Anstieg der Parabeltangente in P_0 folgt

$$m_t = f'(x) = \frac{2p}{2\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}. \quad (II)$$

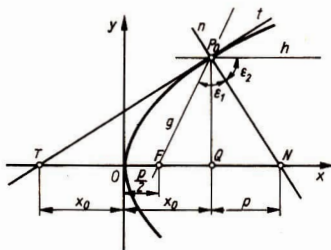


Bild 18.9

Die Gleichung der Tangente t lautet folglich

$$t: y = \frac{p}{y_0} x + b$$

Wegen $P_0 \in t$ gilt (unter Beachtung von $y_0^2 = 2px_0$)

$$y_0 = \frac{p}{y_0} x_0 + b \Rightarrow b = y_0 - \frac{p}{y_0} x_0 = \frac{px_0}{y_0}$$

Damit lautet die Tangentengleichung

$$t: y = \frac{p}{y_0} x + \frac{px_0}{y_0} \quad (\text{III})$$

Die Tangente schneidet die x -Achse im Punkt T . Dessen Abszisse folgt aus (III), wenn $y = 0$ gesetzt wird:

$$0 = \frac{p}{y_0} x_T + \frac{px_0}{y_0} \quad \text{oder}$$

$$x_T = -x_0$$

Der Abstand des Punktes T vom Ursprung ist gleich der Abszisse x_0 von P_0 . Damit läßt sich die Tangente an die Parabel in P_0 leicht konstruieren: x_0 wird von O nach links bis T abgetragen, und es wird die Tangente $TP_0 = t$ gezeichnet.

Für die Normale der Parabel in P_0 folgt mit $m_n = -\frac{1}{m_t}$ nach (II)

$$n: y = -\frac{y_0}{p} x + b$$

und aus $P_0 \in n$ folgt b :

$$y_0 = -\frac{y_0}{p} x_0 + b \Rightarrow b = y_0 + \frac{y_0}{p} x_0$$

und damit die Normalengleichung

$$n: y = -\frac{y_0}{p} x + y_0 + \frac{y_0}{p} x_0 \quad (\text{IV})$$

Für den Schnittpunkt N zwischen der Normalen und der x -Achse ergibt sich

$$0 = -\frac{y_0}{p} x_N + y_0 + \frac{y_0}{p} x_0$$

oder

$$x_N = x_0 + p$$

Die Strecke $\overline{QN}$ ist also stets gleich dem Halbparameter p der Parabel. Damit läßt sich die Tangente konstruieren, wenn T außerhalb der Zeichenebene liegt: p wird von Q bis N abgetragen, die Normale NP_0 gezeichnet und senkrecht zu n durch P_0 die Tangente gelegt.

- 18.5. Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$. Ist g die Gerade durch den Parabelpunkt P_0 und den Brennpunkt $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ und h die Gerade durch P_0 parallel zur x -Achse (Bild 18.9), so bildet die Parabelnormale n mit den Geraden g und h gleiche Winkel: $\epsilon_1 = \epsilon_2$.

Beweis: Die Gerade g hat den aus dem Bild abzulesenden Anstieg

$$m_g = \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}},$$

die Gerade h hat den Anstieg $m_h = 0$, und die Normale n hat nach (IV) den Anstieg

$$m_n = -\frac{y_0}{p}.$$

Nach (9.6) folgt für den Schnittwinkel ε_1 zwischen g und n :

$$\begin{aligned} \tan \varepsilon_1 &= \frac{m_n - m_g}{1 + m_n m_g} = \frac{-\frac{y_0}{p} - \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}}}{1 - \frac{y_0}{p} \cdot \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}}} = \frac{y_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)}{p \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} \\ \tan \varepsilon_1 &= \frac{y_0}{p} \end{aligned} \quad (V)$$

Bei der Umformung wurde wieder $y_0^2 = 2px_0$ verwendet. Für den Schnittwinkel ε_2 zwischen h und n wird:

$$\begin{aligned} \tan \varepsilon_2 &= \frac{m_h - m_n}{1 + m_h m_n} = \frac{0 + \frac{y_0}{p}}{1 + 0 \left(-\frac{y_0}{p} \right)} \\ \tan \varepsilon_2 &= \frac{y_0}{p} \end{aligned} \quad (VI)$$

Aus (V) und (VI) folgt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Hieraus ergibt sich die bekannte Eigenschaft des Parabolspiegels. Durch Rotation einer Parabel um ihre Achse entsteht ein Rotationsparaboloid. Der Parabolspiegel entspricht einem Stück des Paraboloids. Seine Innenfläche trägt einen Spiegelbelag. Parallel zur Achse einfallende Lichtstrahlen werden wegen obiger Brennpunkteigenschaft nach dem Reflexionsgesetz so zurückgeworfen, daß sie durch den Brennpunkt gehen. Hieraus erklärt sich auch für F der Name Brennpunkt (Bild 18.10).

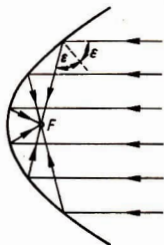


Bild 18.10

- 18.6. Für die gewöhnliche Zykloide mit der Parameterdarstellung (18.1): $x = r(t - \sin t) = x(t)$, $y = r(1 - \cos t) = y(t)$ ergibt sich

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos t)$$

$$\dot{y}(t) = r \sin t$$

und nach (18.5) für den Anstieg einer Tangente:

$$\tan \alpha = f'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{r \sin t}{r(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$f'(x) = \cot \frac{t}{2}.$$

Für $t = \pi$ wird $\tan \alpha = 0$ und damit $\alpha = 0$. Die Tangente liegt in dem zu $t = \pi$ gehörenden Kurvenpunkt waagrecht (Bild 18.2). Für $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ist $\tan \alpha$ nicht definiert. In den zugehörigen Punkten ist die Tangente senkrecht zur x -Achse, dort hat die Zykloide Spitzen.

- 18.7. Wird um einen Kreis ein Faden gelegt und straff abgewickelt, dann beschreibt ein Punkt P des Fadens eine Kurve, die **Kreisevolvente** heißt. In Bild 18.11 verläßt der Faden bei A den Kreis. Als Parameter wird $\sphericalangle AMP_0 = t$ gewählt. In der Anfangslage P_0 von P ist $t = 0$. Der Bogen $\widehat{AP_0}$ ist gleich der abgewickelten Fadenlänge $\overline{AP}$:

$$\overline{AP} = \widehat{AP_0} = Rt.$$

Da auch $\sphericalangle BAP = t$ ist, sind die Koordinaten von P :

$$x = \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{BC} = R \cos t + Rt \sin t$$

$$y = \overline{CP} = \overline{AB} - \overline{AD} = R \sin t - Rt \cos t.$$

Die Parameterdarstellung der Kreisevolvente lautet

$$x = R(\cos t + t \sin t)$$

$$y = R(\sin t - t \cos t)$$

(18.6)

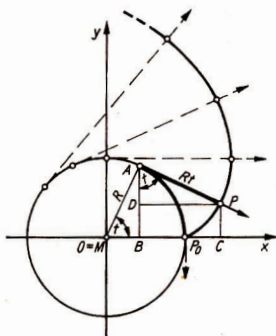


Bild 18.11

Der Anstieg m_t der Tangente der Kreisevolvente folgt aus

$$\dot{y} = R(\cos t - \cos t + t \sin t) = Rt \sin t$$

$$\dot{x} = R(-\sin t + \sin t + t \cos t) = Rt \cos t$$

$$m_t = f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{Rt \sin t}{Rt \cos t} = \tan t.$$

Wegen $m_t = \tan \alpha = \tan t$ ist der Anstiegswinkel α der Tangente gleich dem Parameter t ; d. h., die Tangente t ist parallel zum Radius MA (Bild 18.12). Damit folgt aus $AP \perp MA$ auch $AP \perp t$, d. h., AP ist die Kurvennormale n .

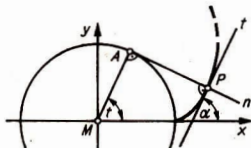


Bild 18.12

Ist die Kurve durch die Gleichung in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ gegeben und soll der Tangentenanstieg $\tan \alpha = y'$ bestimmt werden, dann kann φ als Parameter betrachtet werden. Die Gleichungen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ergeben die Parameterdarstellung

$$x = r(\varphi) \cos \varphi = x(\varphi)$$

$$y = r(\varphi) \sin \varphi = y(\varphi).$$

Für $m_t = f'(x)$ folgt aus (18.5), wobei der Punkt die Ableitung nach φ angibt:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi} \quad (18.7)$$

Wird in (18.7) mit $\dot{r} \cos \varphi$ gekürzt, dann ergibt sich

$$y' = \frac{\frac{r}{\dot{r}} + \tan \varphi}{1 - \frac{r}{\dot{r}} \tan \varphi} \quad (\text{VII})$$

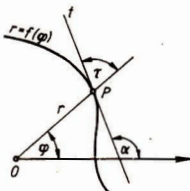


Bild 18.13

Bild 18.13 zeigt die zu einem Kurvenpunkt $P(r; \varphi)$ gehörende Tangente t . Zwischen dem Argument φ von P , dem Anstiegswinkel α der Tangente und dem Winkel τ zwischen der Tangente und dem Radiusvektor von P besteht die Beziehung

$$\alpha = \tau + \varphi \quad \text{oder}$$

$$y' = \tan \alpha = \tan(\tau + \varphi) = \frac{\tan \tau + \tan \varphi}{1 - \tan \tau \tan \varphi} \quad (\text{VIII})$$

Der Vergleich von (VII) und (VIII) ergibt eine Gleichung zur Berechnung des Winkels τ :

$$\tan \tau = \frac{r}{\dot{r}}$$

(18.8)

BEISPIEL

18.8. Die Logarithmische Spirale mit der Gleichung (18.3): $r = a e^{k\varphi}$ hat die Parameterdarstellung

$$x = r \cos \varphi = a e^{k\varphi} \cos \varphi = x(\varphi)$$

$$y = r \sin \varphi = a e^{k\varphi} \sin \varphi = y(\varphi)$$

Die Ableitungen nach dem Parameter φ sind nach (18.7):

$$\dot{x} = a e^{k\varphi}(k \cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$\dot{y} = a e^{k\varphi}(k \sin \varphi + \cos \varphi)$$

Damit ist der Tangentenanstieg

$$\tan \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{k \sin \varphi + \cos \varphi}{k \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{k \tan \varphi + 1}{k - \tan \varphi}$$

Für den Winkel τ zwischen Radiusvektor und zugehöriger Tangente folgt

$$\tan \tau = \frac{r}{\dot{r}} = \frac{a e^{k\varphi}}{a k e^{k\varphi}} = \frac{1}{k}$$

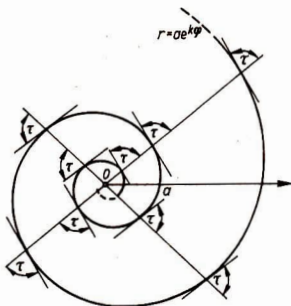


Bild 18.14

Da der Winkel τ nur von der Konstanten k , aber nicht von dem Argument φ und damit von dem Kurvenpunkt $P(r; \varphi)$ abhängt, gilt:

Die Logarithmische Spirale mit der Gleichung $r = a e^{k\varphi}$ schneidet alle Geraden durch O unter dem gleichen Winkel $\tau = \arctan \frac{1}{k}$ (Bild 18.14).

Kontrollfrage

- 18.5. Wie ergeben sich die Gleichungen der Tangente und der Normalen in einem Punkt einer Kurve, wenn die Kurve im rechtwinkligen Koordinatensystem a) durch eine parameterfreie Gleichung, b) durch eine Parameterdarstellung und c) durch eine Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist?

Aufgaben: 18.4. bis 18.8.

18.4. Die Bogenlänge

Die Kenntnis der Länge eines Kurvenstückes ist für zahlreiche technische Probleme von Bedeutung. Die Berechnung dieser Bogenlänge führt ebenso wie die Flächenbestimmung auf die Berechnung eines bestimmten Integrals.

Es ist die Länge des in Bild 18.15 gezeigten Kurvenstückes zwischen den Punkten P_1, P_2 zu berechnen. Nach Wahl von $n - 1$ Zwischenpunkten $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ kann die Kurve genähert durch den Sehnenzug $P_1 Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} P_2$ ersetzt werden. Seine Länge ist

$$s_n = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

s_n ist eine um so bessere Näherung für die gesuchte Bogenlänge, je größer die Anzahl n der Sehnen Δs_i und je kleiner jede Sehne Δs_i ist. Für $n \rightarrow \infty$, wobei zugleich für alle i $\Delta s_i \rightarrow 0$ gelten soll, strebt s_n gegen einen festen Wert s , der als **Bogenlänge** s des Kurvenstückes $P_1 P_2$ definiert wird:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (\text{I})$$

Zur Berechnung von s wird die Länge der Sehne Δs_i angegeben:

$$s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

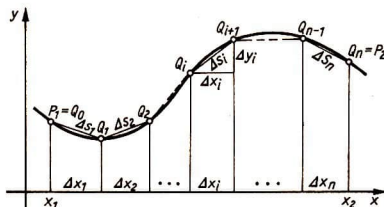


Bild 18.15

Die Länge des Sehnenzuges ist damit:

$$s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i,$$

und für die Bogenlänge s folgt mit (I):

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \quad (\text{II})$$

Wegen $\Delta s_i \rightarrow 0$ für alle i gilt auch $\Delta x_i \rightarrow 0$, also $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \rightarrow f'(x_i)$, und nach der Definition des bestimmten Integrals (vgl. 16.14) folgt aus (II) für die Bogenlänge

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (18.9)$$

Der Integrand heißt **Bogenelement** ds :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (18.10)$$

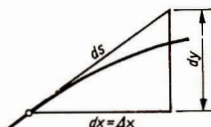


Bild 18.16

Geometrisch stellt $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ nach Bild 18.16 das zu den Differentialen dx und dy gehörige Tangentenstück dar.

Ist die Kurve durch eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben, dann folgt mit (18.4) $dx = \dot{x} dt$ sowie mit (18.5) und den Grenzen t_1, t_2 für die Bogenlänge

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \dot{x} dt \quad \text{oder} \quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (18.11)$$

Für die Kurvendarstellung in Polarkoordinaten ergibt sich aus (18.11), wenn t durch φ und $\dot{x}, \dot{y}$ nach (18.7) ersetzt werden:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 + (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi)^2} d\varphi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi \quad (18.12)$$

BEISPIELE

18.9. Die Länge des Halbkreises ist zu berechnen.

Lösung: Die Gleichung des (oberen) Halbkreises lautet [vgl. (11.4)]:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r; r].$$

Mit $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ ist nach (18.9)

$$\begin{aligned} s &= \frac{U}{2} = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = 2r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[2r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r \\ &= 2r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2r \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\pi r}}. \end{aligned}$$

18.10. Die Länge eines Zykloidenbogens zwischen zwei Spitzen ist zu berechnen (vgl. Bild 18.2).

Lösung: Mit den Grenzen $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ und den aus (18.1) folgenden Ableitungen $\dot{x} = r(1 - \cos t)$, $\dot{y} = r \sin t$ wird nach (18.11):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} \, dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \, dt \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} \, dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt = 2r \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \, dt \\ &= \left[-4r \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4r(-1 - 1) = \underline{\underline{8r}}. \end{aligned}$$

Die Länge eines Zykloidenbogens zwischen zwei Spitzen ist gleich dem achtfachen Radius des rollenden Kreises.

18.11. Wie groß ist die Bogenlänge der archimedischen Spirale $r = \frac{1}{2} \varphi$ [vgl. (18.2)] zwischen den Punkten $P_1(\varphi_1 = 0)$ und $P_2(\varphi_2 = 2\pi)$?

Lösung: Mit der Ableitung $\dot{r} = \frac{1}{2}$ folgt aus (18.12):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4} \varphi^2 + \frac{1}{4}} \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} \, d\varphi. \end{aligned}$$

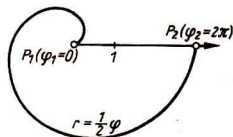


Bild 18.17

Aus der Integraltafel (vgl. 17.3.) ergibt sich für dieses Integral

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi \sqrt{(2\pi)^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{(2\pi)^2 + 1}) \right] = \underline{\underline{10,63}}. \quad (\text{Bild 18.17}) \end{aligned}$$

Kontrollfrage

18.6. Durch welchen Grenzwert wird die Bogenlänge eines Kurvenstücks definiert?

Aufgaben: 18.9. bis 18.13.

18.5. Die Krümmung

Eine Kurve sei das Bild einer Funktion f . Das Verhalten der Kurve in einem Punkt wird zunächst mit Hilfe der 1. Ableitung von f durch den Anstieg der Tangente in diesem Punkt beschrieben. Unter Verwendung der 2. Ableitung von f kann als weitere Aussage die Krümmung in dem betrachteten Kurvenpunkt angegeben werden. Es wird eine Formel für die Krümmung entwickelt und gezeigt, wie sich Kurven mit Hilfe bestimmter Krümmungskreise in guter Näherung einfacher zeichnen lassen. Kurven mit gleichmäßig sich ändernder Krümmung spielen z. B. als Übergangsbogen bei der Linienführung von Straßen und Eisenbahnen und als Kurvenscheibenkontur im Maschinenbau eine wichtige Rolle.

Der Krümmungsbegriff ist anschaulich so weit bekannt, daß z. B. für die Kurve in Bild 18.18 gesagt werden kann, sie ist in der Umgebung von P_2 stärker gekrümmt als in der Umgebung von P_1 . Um aber die Krümmung auch analytisch zu erfassen, wird ein Kurvenpunkt P betrachtet, der sich nach P_1 bewegt und dabei die Bogenlänge Δs zurücklegt (Bild 18.19). Die Tangente in P hat sich hierbei um den Winkel $\Delta\alpha$



Bild 18.18

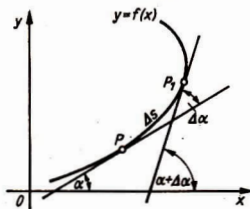


Bild 18.19

gedreht. Je größer $\Delta\alpha$ ist, um so größer ist auch die Krümmung zwischen P und P_1 . Da die Größe von $\Delta\alpha$ auch von der Größe der Bogenlänge Δs abhängt, kann der Quotient $\bar{k} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ als die mittlere Krümmung des Kurvenstücks PP_1 definiert werden. Durch den Grenzübergang $P_1 \rightarrow P$, d. h., $\Delta s \rightarrow 0$, ergibt sich die Krümmung im Kurvenpunkt P :

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (\text{I})$$

Wegen $\tan \alpha = y'$ ist $\alpha = \arctan y'$. Nach der Kettenregel ist

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2} y'' \quad \text{oder} \quad d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx. \quad (\text{II})$$

In (I) wird $d\alpha$ nach (II) und ds nach (18.10) ersetzt:

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{1 + y'^2} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2} dx}.$$

Damit folgt die **Krümmung der Kurve in einem Punkt**:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (18.13)$$

k ergibt sich als Funktion der Abszisse x des Kurvenpunktes. Das Vorzeichen von k hängt vom Zähler y'' ab (der Nenner ist positiv) und ist daher für eine von unten konvexe Kurve (Linkskurve) positiv und für eine von unten konkave Kurve (Rechtskurve) negativ. Im Wendepunkt einer Kurve ist wegen $y'' = 0$ auch $k = 0$.

Für eine in Parameterdarstellung gegebene Kurve ist in (18.13) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ zu setzen. Für y'' folgt daraus nach der Quotientenregel:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \cdot \frac{1}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \quad (18.14)$$

und damit aus (18.13)

$$k = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3 \left[1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{3/2}} \text{ und umgeformt}$$

$$k = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (18.15)$$

BEISPIELE

18.12. Für die Parabel $y = x^2$ ist mit $y' = 2x$, $y'' = 2$ nach (18.13) die Krümmung

$$k = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}.$$

Für $x = 0$ ist $k = 2$, das ist der Wendepunkt der Kurve, und für $x = 1$ ist $k = 0,19$.

18.13. Für den Kreis mit der Parameterdarstellung $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ wird

$$\dot{x} = -r \sin t \quad \dot{y} = r \cos t$$

$$\ddot{x} = -r \cos t \quad \ddot{y} = -r \sin t.$$

Die Krümmung ist nach (18.15):

$$k = \frac{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}{(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}. \quad (\text{III})$$

Die Krümmung des Kreises ist konstant gleich dem reziproken Radius.

Der in Beispiel 18.12. berechnete Wert $k = 0,19$ ist zunächst völlig unanschaulich. Mit dem Ergebnis des Beispiels 18.13. läßt sich aber k auch für beliebige Kurven geometrisch wie folgt deuten.

Es gibt unendlich viele Kreise, die eine Kurve in einem Punkt P berühren. Ihre Mittelpunkte liegen auf der Kurvennormalen n von P (Bild 18.20).

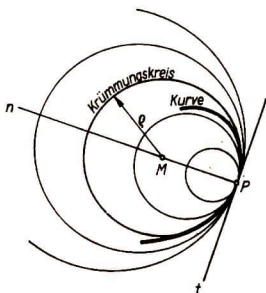


Bild 18.20

Unter diesen Kreisen existiert einer, der die gleiche Krümmung wie die Kurve in P hat. Er heißt **Krümmungskreis** und schmiegt sich anschaulich in der Umgebung von P der Kurve am besten an. Soll also die Kurve in der Umgebung von P durch einen Kreis ersetzt werden, dann gibt der Krümmungskreis die beste Näherung.

Ist k die Krümmung der Kurve in P und ϱ der Radius des Krümmungskreises, dann muß, damit Kurven- und Kreiskrümmung in P übereinstimmen, wegen (III) die Beziehung

$$\varrho = \left| \frac{1}{k} \right| \quad (18.16)$$

gelten. ϱ heißt **Krümmungsradius**. Der Mittelpunkt M des Krümmungskreises heißt **Krümmungsmittelpunkt**.

BEISPIEL

18.14. Für die Sinuskurve ist $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ und

$$k = \frac{-\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}.$$

Im Punkt $S \left(x_S = \frac{\pi}{2} \right)$ ist $k \left(\frac{\pi}{2} \right) = -1$. Der Krümmungsradius ist $\varrho \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left| \frac{1}{k \left(\frac{\pi}{2} \right)} \right| = 1$

und der Krümmungsmittelpunkt $M \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right)$. Bild 18.21 zeigt, daß mit Hilfe dieses Krümmungskreises die Sinuskurve in der Umgebung von S leichter gezeichnet werden kann.

Der Kurvenpunkt, in dem die Krümmung einen Extremwert annimmt, heißt **Scheitelpunkt** der Kurve. Während in einem beliebigen Kurvenpunkt P der Krümmungskreis die Kurve durchsetzt (z. B. Bild 18.20), liegt der zum Scheitelpunkt S gehörige Krümmungskreis in der Umgebung von S völlig auf einer Seite der Kurve (z. B. Bild 18.21).

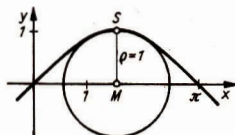


Bild 18.21

BEISPIEL

18.15. Die Ellipse ist mit Hilfe derjenigen Krümmungskreise zu konstruieren, die zu den Haupt- und Nebenscheitelpunkten gehören.

Lösung: Es wird die Parameterdarstellung verwendet:

$$x = a \cos t \quad \dot{x} = -a \sin t \quad \ddot{x} = -a \cos t$$

$$y = b \sin t \quad \dot{y} = b \cos t \quad \ddot{y} = -b \sin t.$$

$$k = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = k(t).$$

In den Hauptscheitelpunkten ist $t = 0$ bzw. $t = \pi$ (vgl. 11.2.): $k(0) = k(\pi) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$ und

damit $\varrho(0) = \varrho(\pi) = \frac{b^2}{a} = \varrho_A$. In den Nebenscheitelpunkten ist $t = \frac{\pi}{2}$ bzw. $t = \frac{3}{2}\pi$:

$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = k\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$ und damit $\varrho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varrho\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{a^2}{b} = \varrho_B$.

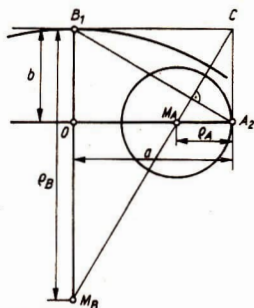


Bild 18.22

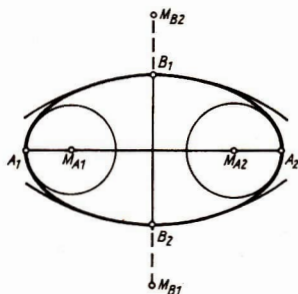


Bild 18.23

Die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte lassen sich leicht konstruieren. Im Rechteck OA_1CB_1 mit den Seiten a und b wird die Diagonale A_1B_1 gezeichnet (Bild 18.22). Die zu A_1B_1 senkrechte Gerade durch C schneidet die Hauptachse in M_A , die Nebenachse in M_B , und es ist $\overline{M_A A_2} = \varrho_A$, $\overline{M_B B_1} = \varrho_B$.

Beweis: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $M_A A_2 C$ und $A_2 C B_1$ folgt: $\overline{M_A A_2} : \overline{A_2 C} = \overline{A_2 C} : \overline{B_1 C}$ oder $\varrho_A : b = b : a$, woraus $\varrho_A = \frac{b^2}{a}$ folgt. Entsprechend verläuft der Beweis für ϱ_B .

Mit Hilfe der 4 Krümmungskreise in den Scheitelpunkten kann die Ellipse leicht gezeichnet werden (Bild 18.23).

Kontrollfragen

- 18.7. Wie wird die mittlere Krümmung eines Kurvenstücks s und wie wird die Krümmung in einem Kurvenpunkt definiert?
 18.8. Welche Bedingungen erfüllt der zu einem Kurvenpunkt gehörende Krümmungskreis?
 18.9. Was sind Scheitelpunkte von Kurven?

Aufgaben: 18.14. bis 18.19.

18.6. Flächen

Die in 16. behandelte Flächenberechnung wird um den Fall erweitert, daß die Kurve, die die Fläche begrenzt, in einer Parameterdarstellung bzw. durch eine Kurvengleichung in Polarkoordinaten gegeben ist.

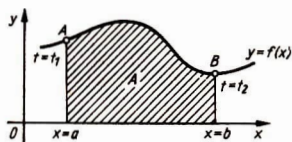


Bild 18.24

Bei gegebener Kurvengleichung $y = f(x)$ wird die in Bild 18.24 gezeigte Fläche nach 16.4. durch

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (I)$$

berechnet. Nun sei eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ der Kurve gegeben. Zu den Punkten A und B sollen die Parameterwerte t_1 bzw. t_2 gehören, d. h., $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. In (I) wird eine Substitution durch $y = f(x) = y(t)$ vorgenommen. Nach (18.4) ist $dx = \dot{x}(t) dt$, und aus (I) folgt

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt \quad (18.17)$$

BEISPIEL

18.16. Gesucht wird die Fläche zwischen einem Zykloidenbogen und der x-Achse.

Lösung:

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t) & \dot{x} &= a(1 - \cos t) & t_1 &= 0, & t_2 &= 2\pi \\y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\&= a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \right]_0^{2\pi} = a^2[2\pi + \pi] = \underline{\underline{3\pi a^2}}.\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche ist gleich der dreifachen Fläche des rollenden Kreises (vgl. Bild 18.2).

Die Formel (18.17) ist auch dann vorteilhaft anzuwenden, wenn die Fläche von einer geschlossenen Kurve begrenzt wird (Bild 18.25). A, B sind Kurvenpunkte mit vertikalen Tangenten. Die Kurve werde in Pfeilrichtung von A über B bis A durchlaufen, wenn t von t_1 über t_0 bis t_2 läuft. Der Punkt A wird also durch $t = t_1$ und $t = t_2$ erhalten: $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$. Zu $t \in [t_1; t_0]$ gehört der obere, zu $t \in [t_0; t_2]$ der untere Kurvenbogen. Für die eingeschlossene Fläche folgt:

$$A = \int_{t_1}^{t_0} y \dot{x} dt - \int_{t_1}^{t_0} y \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_0} y \dot{x} dt + \int_{t_0}^{t_2} y \dot{x} dt$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt \quad \text{mit} \quad x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2).$$

Die Fläche wird positiv oder negativ, je nachdem, ob die Kurve rechtsläufig, d. h. wie in Bild 18.25 angegeben, oder linksläufig, also entgegengesetzt zu Bild 18.25, umfahren wird.

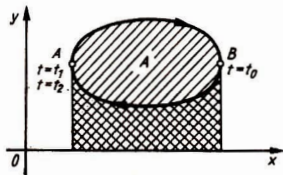


Bild 18.25

BEISPIEL

18.17. Gesucht wird die Fläche der Ellipse mit der Parameterdarstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Lösung: Nach (11.9) ergeben sich für $t \in [0; 2\pi]$ alle Ellipsenpunkte, und es ist $x(0) = x(2\pi) = a$, $y(0) = y(2\pi) = 0$. Mit $\dot{x} = -a \sin t$ folgt aus (18.17)

$$A = -ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -ab \left[\frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) \right]_0^{2\pi} = -\frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{-\pi ab}}.$$

Die Fläche wird negativ, da die Ellipse linksläufig umfahren wird, wenn der Winkel t von 0 bis 2π läuft.

Die Kurvengleichung sei in Polarkoordinaten gegeben: $r = f(\varphi)$. Ist A die in Bild 18.26 dargestellte Fläche und wird der zugehörige Winkel φ um $\Delta\varphi$ vergrößert, dann ändert sich die Fläche um ΔA . Im Intervall von φ bis $\varphi + \Delta\varphi$ sei r_1 der minimale, r_2 der maximale Radiusvektor. ΔA ist dann größer als die Fläche des Sektors mit dem Zentriwinkel $\Delta\varphi$ und dem Radius r_1 und kleiner als die Fläche des Sektors mit dem gleichen Zentriwinkel und dem Radius r_2 :

$$\frac{1}{2} r_1^2 \Delta\varphi < \Delta A < \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\varphi \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{2} r_1^2 < \frac{\Delta A}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2} r_2^2.$$

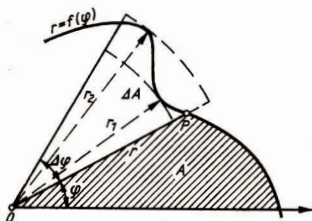


Bild 18.26

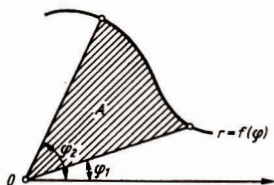


Bild 18.27

Für $\Delta\varphi \rightarrow 0$ folgt $r_1 \rightarrow r$, $r_2 \rightarrow r$ und damit

$$\frac{\Delta A}{\Delta\varphi} \rightarrow \frac{dA}{d\varphi} = \frac{1}{2} r^2. \quad (\text{I})$$

Die Integration von (I) ergibt A als Funktion von φ :

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi.$$

Für die in Bild 18.27 gezeigte Fläche folgt dann sofort

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi \quad (18.18)$$

BEISPIEL

18.18. Es ist die Fläche zu berechnen, die von der Logarithmischen Spirale $r = a e^{k\varphi}$ und den zu φ_1 und φ_2 gehörenden Radiusvektoren begrenzt wird.

Lösung: Nach (18.18) ist

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (a e^{k\varphi})^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2 e^{2k\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{e^{2k\varphi}}{2k} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{1}{4k} (a e^{k\varphi})^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$A = \frac{1}{4k} (r_2^2 - r_1^2)$$

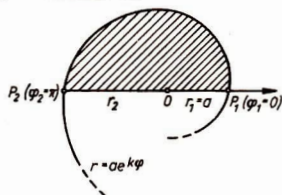


Bild 18.28

Bild 18.28 zeigt für die dargestellte Spirale die zu den Argumenten $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$ gehörende Fläche.

Aufgaben: 18.20. bis 18.25.

18.7. Aufgaben

- 18.1. Rollt ein Kreis mit dem Radius R auf einem festen Kreis mit dem gleichen Radius R ab, so beschreibt ein Punkt des rollenden Kreises eine Kurve, die Kardioiden (Herzkurve) heißt. Die Gleichung der Kardioiden lautet in Parameterdarstellung

$$x = R(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = R(2 \sin t - \sin 2t).$$

Es sind die Koordinaten von Kurvenpunkten für $t \in [0^\circ, 360^\circ]$ und $\Delta t = 20^\circ$ zu berechnen, und es ist die Kurve zu zeichnen.

- 18.2. Die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x = \frac{a(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{at(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$$

heißt Strophoide. Wie heißt die parameterfreie Gleichung?

- 18.3. Wie heißt die Gleichung der Strophoide aus Aufgabe 18.2. in Polarkoordinaten? Die Kurve ist mit Hilfe der Polarkoordinaten einiger Punkte zu zeichnen.
- 18.4. An den Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 289$ sind in den Punkten $P_1(15; y > 0)$, $P_2(8; y < 0)$ die Tangenten gezogen. Es sind die Gleichungen, der Schnittpunkt P_0 und der Schnittwinkel δ der Tangenten zu bestimmen.
- 18.5. Welche Fläche wird von der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ und der zum Parabelpunkt $P_0(x_0 = 2)$ gehörenden Normalen eingeschlossen?
- 18.6. In den Schnittpunkten zwischen der Geraden $y = -\frac{14}{27}x - \frac{2}{3}$ und der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ sind die Ellipsentangenten gezogen. Wie groß ist ihr Schnittwinkel?

- 18.7. Wie heißen die Gleichungen der Tangente und Normale der NEILSchen Parabel für $t = 2$? (vgl. Beispiel 18.1.)
- 18.8. Eine Kurve hat die Parameterdarstellung $x = 3t^2 + 2$, $y = 2t^3$. Für welches t hat die Tangente den Anstiegswinkel $\alpha = 45^\circ$?
- 18.9. Wie groß ist die Bogenlänge der Kurve aus Aufgabe 18.8. für $t_1 = 0$, $t_2 = 2$?
- 18.10. In einem Kreis mit dem Radius R rollt ein Kreis mit dem Radius $\frac{R}{4}$. Ein Punkt des rollenden Kreises beschreibt eine Astroide oder Sternkurve (Bild 18.29). Sie hat die Parameterdarstellung

$$x = R \cos^3 \frac{t}{4}, \quad y = R \sin^3 \frac{t}{4}.$$

Wie lang ist der Astroidenbogen in einem Quadrant ($t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$)?

- 18.11. Wie groß ist die Bogenlänge der Kreisevolvente, wenn der um einen Halbkreis liegende Faden abgewickelt wird?

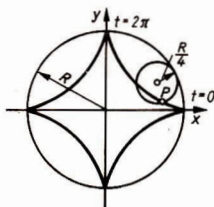


Bild 18.29

- 18.12. Die Kardioide aus Aufgabe 18.1. hat in Polarkoordinaten die Gleichung $r = 2R(1 - \cos \varphi)$. Dabei liegt der Pol in der Spitze der Kardioide. Gesucht wird ihre Bogenlänge.
- 18.13. Für die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ ist die Bogenlänge zwischen den Grenzen $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ zu berechnen.
- 18.14. Wie groß ist der Krümmungsradius im Scheitelpunkt der Parabel mit der Gleichung $x^2 = 2py$?
- 18.15. Für die Parabel $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ sind die zu den Extrempunkten gehörenden Krümmungsradien zu berechnen, und die Kurve ist mit Hilfe der zugehörigen Krümmungskreise zu zeichnen.
- 18.16. Wie groß ist die Krümmung der Zykloide?
- 18.17. Für die Kreisevolvente sind Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt zu bestimmen.
- 18.18. Zu berechnen ist der Krümmungsmittelpunkt M , der zum Punkt $P_0 \left(x_0 = \frac{8}{3}; y_0 > 0 \right)$ der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 6x$ gehört.
- 18.19. Wo liegen die Scheitelpunkte der Kurven mit den Gleichungen

a) $y = x^3$ b) $y = \ln x$ c) $y = \frac{1}{x}$?

- 18.20. Wie groß ist die von der Astroide eingeschlossene Fläche ($\frac{A}{4}$ für die Grenzen $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ berechnen)?
- 18.21. Wie groß ist die von einer Schleife der Kurve mit der Parameterdarstellung $x = 2 \sin t$, $y = 2 \sin 2t$ eingeschlossene Fläche?
- 18.22. Es ist die Fläche der Kardioiden
 a) mit der Parameterdarstellung (vgl. Aufg. 18.1.)
 b) mit der Gleichung in Polarkoordinaten $r = 2R(1 - \cos \varphi)$ zu berechnen.
- 18.23. Wie groß ist die Fläche einer Exzentrerscheibe, die von der Archimedisches Spirale mit der Gleichung $r = 2\varphi$ und den zu $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$ gehörenden Radiusvektoren begrenzt wird?
- 18.24. Rotiert ein Kurvenstück um eine Gerade, so entsteht ein Rotationskörper. Ist die Kurve in Parameterdarstellung gegeben und rotiert sie um die x -Achse, so läßt sich für das Volumen des Rotationskörpers aus (16.18) die Gleichung herleiten

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \dot{x}(t) dt$$

und bei Darstellung der Kurve in Polarkoordinaten

$$V_x = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin^3 \varphi (\dot{\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi.$$

Wie groß sind die Volumen der Rotationskörper, die durch Rotation der folgenden Kurven um die x -Achse entstehen:

- a) Bogen der Ellipse mit der Gleichung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$,
 b) Bogen der in Aufg. 18.21. angegebenen Kurve für $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$,
 c) Bogen der Kurve $r = 2R \cos \varphi$ zwischen 2 Schnittpunkten mit der x -Achse?
- 18.25. Für die Mantelfläche eines Rotationskörpers gibt es bei einer Rotation um die x -Achse und je nach der Darstellungsart der Kurve die Gleichungen

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

Wie groß sind die Mantel- bzw. Oberflächen der Rotationskörper, die durch Rotation der folgenden Kurven um die x -Achse entstehen:

- a) Bogen der Zykloide zwischen zwei Spitzen,
 b) Parabel mit der Gleichung $y^2 = 4x$ für $x_1 = 0$, $x_2 = 2$,
 c) Bogen der Kardioiden zwischen den zwei Schnittpunkten mit der x -Achse?

19. Physikalisch-technische Anwendungen

19.1. Differentiation und Integration zeitlich veränderlicher Größen

19.1.1. Berechnung von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Im folgenden sollen die Differential- und Integralrechnung auf die Berechnung von Bewegungsvorgängen, d. h. auf die Ermittlung der Zusammenhänge von Weg, Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung angewendet werden. Eigentlich ist es nicht zutreffend, hier von einer „Anwendung“ der Infinitesimalrechnung zu sprechen; denn die Probleme der Kinematik waren die Ursachen der Untersuchungen NEWTONS (ISAAC NEWTON, 1643 bis 1727, engl. Mathematiker und Naturwissenschaftler), und zu ihrer Lösung schuf er seit 1665/66 das neue Kalkül. NEWTON selbst formulierte das Problem, dessen Lösung ihm als erstem allgemein gelang, wie folgt:

„Wenn in jedem Zeitmoment die Länge des von einem Punkt beschriebenen Weges bekannt ist, ist zu einer bestimmten Zeit die Geschwindigkeit der Bewegung zu finden.“

Anders ausgedrückt: bekannt sei $s = s(t)$, gesucht ist $v = v(t)$ (im folgenden werden immer s und v als Funktionssymbole für die Weg-Zeit- bzw. Geschwindigkeits-Zeit-Funktion verwendet).

Wie bereits mit (13.10) bzw. (13.11) gezeigt wurde, ist die Geschwindigkeit die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion bzw. die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion nach der Zeit.

Da aber $v = \frac{ds}{dt}$, ergibt sich

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

d. h., $a = a(t)$ ist die zweite Ableitung der Funktion $s = s(t)$ nach t .

Umgekehrt kann aber auch z. B. der Weg bei Kenntnis der Geschwindigkeit $v = v(t)$ oder die Geschwindigkeit bei Kenntnis der Beschleunigung $a = a(t)$ bestimmt werden. Aus

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv}{dt} = a(t)$$

folgt $ds = v(t) dt$ bzw. $dv = a(t) dt$.

Beiderseitige Integration (s_0 ist der zur Zeit $t = t_0$ bereits zurückgelegte Weg, v_0 die bereits erreichte Geschwindigkeit) liefert

$$\int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t) dt$$

$$s - s_0 = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad v - v_0 = \int_{t_0}^t a(t) dt$$

$$\underline{s = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt} \quad \underline{v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt}$$

BEISPIEL

19.1. Ein Körper hat zu Beginn der Zeitmessung ($t = t_0 = 0$) die Geschwindigkeit $v = v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und bewegt sich mit der konstanten Beschleunigung $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- a) Welche Geschwindigkeit hat er zur Zeit $t_1 = 10 \text{ s}$?
 b) Welche Zeit $t = t_a$ vor Beginn der Zeitmessung begann der Bewegungsvorgang, wenn die konstante Beschleunigung von Anfang an wirksam war? Wo befand sich der Körper zu Beginn des Bewegungsvorganges ($s(t_a) = s_a$)?

Lösung:

a) Aus $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$
 folgt

$$v(t_1) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \int_0^{10 \text{ s}} 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} dt = (10 + 2 \cdot 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\underline{v(t_1) = v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

- b) Zu Beginn des Bewegungsvorganges ($t = t_a$) war die Geschwindigkeit $v(t_a) = 0$. Die Gleichung für $v = v(t)$ liefert

$$v(t_a) = v_0 + \int_{t_0}^{t_a} a(t) dt = v_0 + at_a = 0 \quad (t_0 = 0)$$

Daraus folgt

$$t_a = -\frac{v_0}{a} = \underline{\underline{-5 \text{ s}}}$$

Das Weg-Zeit-Gesetz ergibt sich aus

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = s_0 + \int_{t_0}^t \left[v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt$$

zu

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2} (t^2 - t_0^2).$$

Es folgt für $t = t_a = -5 \text{ s}$, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$

$$s(t_a) = s_a = 10 \cdot (-5) \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 25 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{s_a = -25 \text{ m}}}$$

d. h., bis zu Beginn der Zeitmessung hatte der Körper bereits 25 m zurückgelegt.

Ist auch die Funktion $t = t(s)$ differenzierbar, so können t , v und a in Abhängigkeit vom Weg s ermittelt werden. Die folgenden Übersichten enthalten die möglichen Fälle.

Gegeben	$s(t) =$	Gesucht	$v(t) =$	$a(t) =$
$s = s(t)$	—		$\frac{ds}{dt}$	$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$
$v = v(t)$	$s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$		—	$\frac{dv}{dt}$
$a = a(t)$	$s_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt$		$v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$	—

Gegeben	$t(s) =$	Gesucht	$v(s) =$	$a(s) =$
$t = t(s)$	—		$\frac{1}{\frac{dt}{ds}}$	$-\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^3} = \frac{dv}{ds} v$
$v = v(s)$	$t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)}$		—	$\frac{dv}{ds} v$
$a = a(s)$	$t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds}}$		$\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds}$	—

Ist $a = a(v)$ gegeben, so können daraus

$$s = s(v) = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v}{a(v)} dv, \quad t = t(v) = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)}$$

ermittelt werden.

Die entsprechenden Überlegungen und die in den Zusammenstellungen enthaltenen Beziehungen gelten auch für die Drehbewegung, wenn man

den Weg s	durch den Drehwinkel φ ,
die Geschwindigkeit v	durch die Winkelgeschwindigkeit ω ,
die Beschleunigung a	durch die Winkelbeschleunigung α

ersetzt.

BEISPIEL

19.2. Eine zeitlich veränderliche Kraft F wirkt nach dem Gesetz $F(t) = F_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ (τ Zeitkonstante) und erzeugt an einer Schwungmasse mit dem Massenträgheitsmoment J ein proportionales Drehmoment $M = F \cdot r$ ($r = \text{const.}$).

Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotiert die Masse, wenn die Kraft 10 s lang wirkt,

Reibungs- und andere Einflüsse vernachlässigt werden sollen, $J = 0,2 \text{ kg m}^2$, $M_{\max} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ und $\tau = 1 \text{ s}$ ist?

Lösung: Für Drehbewegungen gilt (in Analogie zu $F = m \cdot a$)

$$M = J \cdot \alpha, \text{ daraus folgt } \alpha = \frac{M}{J}.$$

Dann ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \omega &= \int_{t_0}^t \alpha \, dt = \int_{t_0}^t \frac{M}{J} \, dt = \int_{t_0}^t \frac{F \cdot r}{J} \, dt = \frac{F_{\max} r}{J} \int_{t_0}^t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt \\ &= \frac{M_{\max}}{J} \int_{t_0}^t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = \frac{M_{\max}}{J} \left[t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

Mit $t_0 = 0$, $t = 10 \text{ s}$ und den vorgegebenen Werten für $M_{\max}$, J und τ wird

$$\omega|_{t=10 \text{ s}} = \frac{1 \text{ N m}}{0,2 \text{ kg m}^2} [10 \text{ s} + 1 \text{ s } e^{-10} - 1 \text{ s}] \approx 5 \text{ s}^{-2} \cdot 9 \text{ s} = \underline{\underline{45 \text{ s}^{-1}}}$$

Kontrollfragen

- 19.1. Wie heißen die der Weg-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- und Beschleunigungs-Zeit-Funktion sowie dem Grundgesetz der Dynamik entsprechenden Beziehungen für die Drehbewegung?
- 19.2. Bei der Berechnung von Weg und Geschwindigkeit wurde von t_0 (untere Grenze) bis zu einer nicht bestimmten (variablen) oberen Grenze t integriert. Wieso ergibt sich nach Durchführung der Integration trotzdem ein bestimmtes Integral?

Aufgaben: 19.1. und 19.2.

19.1.2. Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen

Auch zur Darstellung von Beziehungen zwischen elektrischen Größen, wie z. B. Strom und Spannung, werden oft die Differential- und Integralrechnung benötigt. Im folgenden werden deshalb die Strom-Spannungs-Beziehungen an Kapazitäten und Induktivitäten hergeleitet und auf technische Sachverhalte angewendet. Die Stromstärke i ist definiert als der Quotient von Elektrizitätsmenge, die durch den Querschnitt eines Leiters fließt, dividiert durch die Durchströmzeit

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (Q \text{ Elektrizitätsmenge, } [Q] = \text{C}).$$

Ist die Stromstärke nicht konstant, so gibt dieser Differenzenquotient nur den Mittelwert der Stromstärke während des Zeitintervalls Δt an. Die Stromstärke in einem Zeitpunkt erhält man durch Bilden des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $\Delta t \rightarrow 0$, d. h. als Differentialquotient

$$i = \frac{dQ}{dt}.$$

Nach dQ aufgelöst $dQ = i dt$ und integriert, ergibt

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{t_0}^t i dt$$

Die Kapazität C eines Kondensators ist definiert durch das Verhältnis der auf dem Kondensator befindlichen Ladung (Elektrizitätsmenge) Q_C zur Spannung u_C :

$$C = \frac{Q_C}{u_C}$$

Setzt man für $Q = Q_C$ den obenstehenden Integralausdruck ein, so erhält man

$$C = \frac{\int_{t_0}^t i_C dt}{u_C}$$

$$\boxed{u_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt} \quad (19.1)$$

Andererseits folgt aus $Q_C = C u_C$ durch Differentiation nach der Zeit

$$\boxed{i_C = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{du_C}{dt}} \quad (19.2)$$

Die Berechnung von Spannung bzw. Stromstärke ist also beim Kondensator aus Kapazität und Stromstärke bzw. Spannung mittels Integration bzw. Differentiation möglich.

In analoger Weise ergeben sich für den Spannungsabfall u_L über einer Induktivität L (z. B. einer Spule) bzw. für die Stromstärke i_L aus dem Induktionsgesetz die Beziehungen (ψ Induktionsfluß)

$$\boxed{u_L = \frac{d\psi_L}{dt} = L \frac{di_L}{dt}} \quad (19.3)$$

und

$$\boxed{i_L = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt} \quad (19.4)$$

BEISPIELE

19.3. Die durch den Querschnitt eines Leiters hindurchtretende Ladungsmenge Q habe den in Bild 19.1 dargestellten zeitlichen Verlauf. Das Kurvenstück für $0 \leq t \leq 2$ s sei eine quadratische Parabel, die für $t = 2$ s ihren Scheitelpunkt erreicht. Es sollen

- der Zeitverlauf der Ladungsmenge und des Stromes in den einzelnen Zeitabschnitten beschrieben werden;
- die Strom-Zeit-Funktion grafisch dargestellt werden.

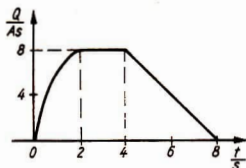


Bild 19.1

Lösung: Zur Vereinfachung der Darstellung wird im folgenden Rechengang für t/t_s , Q/C , i/A , u/V nur t , Q , i , u geschrieben.

a) $0 \leq t \leq 2$

Da die Parabel nach unten geöffnet ist, muß angesetzt werden [vgl. (11.18)]:

$$(t - t_s)^2 = -2p(Q - Q_s)$$

$$(t - 2)^2 = -2p(Q - 8).$$

p kann aus der Bedingung: $t = 0 \Rightarrow Q = 0$ bestimmt werden:

$$p = \frac{1}{4}.$$

Einsetzen von p in die Ausgangsgleichung und Auflösen nach Q liefert

$$\underline{Q = -2t^2 + 8t} \quad (\text{I})$$

$$2 \leq t \leq 4$$

Da die Kurve eine Parallele zur t -Achse ist, gilt

$$\underline{Q = 8} \quad (\text{II})$$

$$4 \leq t \leq 8$$

Der Zeitverlauf der Ladungsmenge wird durch eine Gerade dargestellt, die durch die Punkte (4; 8) und (8; 0) geht. Die Geradengleichung ergibt sich entsprechend Beispiel 9.12. mit

$$\underline{Q = -2t + 16} \quad (\text{III})$$

Die zugehörigen Zeitverläufe des Stromes erhält man gemäß Gl. (19.2) durch Differentiation von (I), (II) und (III) nach der Zeit

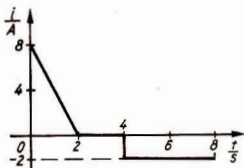


Bild 19.2

$$\underline{\underline{i = -4t + 8}} \quad (\text{Ia})$$

$$\underline{\underline{i = 0}} \quad (\text{IIa})$$

$$\underline{\underline{i = -2}} \quad (\text{IIIa})$$

b) Die Strom-Zeit-Funktion ist in Bild 19.2 dargestellt.

- 19.4. Der Spannungsabfall u_L über einer Induktivität L ($L = 10 \text{ H}$, $[L] = 1 \text{ H (Henry)}$) $= 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ habe den in Bild 19.3 gezeigten Verlauf. Zur Zeit $t = 0$ fließt durch die Induktivität ein Strom $i_0 = 0,1 \text{ A}$.

Die Gleichungen für die Stromstärke in den Zeitintervallen, in denen die dargestellte Funktion integrierbar ist, sind aufzustellen, die Strom-Zeit-Funktion ist zu zeichnen.

Lösung: Auch hier sollen die physikalischen Größen durch ihre Zahlenwerte ersetzt werden.

$$0 \leq t \leq 1$$

In diesem Intervall gilt für die Spannungskurve

$$u_L = -t$$

Damit folgt nach Einsetzen von u_L in Gl. (19.4)

$$i_L = \frac{1}{10} \int (-t) dt = -\frac{1}{20} t^2 + C_0.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C_0 wird der Anfangswert: $t = t_0 = 0 \Rightarrow i_L = i_0 = 0,1 \text{ A}$ verwendet. Man erhält

$$C_0 = 0,1$$

$$\underline{\underline{i_L = -0,05 t^2 + 0,1}}$$

Für die Stromstärke zur Zeit $t_1 = 1$ folgt hieraus

$$i_L(t_1) = 0,05$$

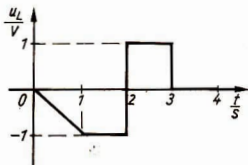


Bild 19.3

Die Berechnungen für die anderen Teilintervalle verlaufen analog denen für das erste Teilintervall. Es ergibt sich

$$1 \leq t \leq 2$$

$$u_L = -1; \quad i_L = \frac{1}{10} \int (-1) dt = -\frac{1}{10} (-t) + C_1$$

Aus $t = 1$, $i_L = 0,05$ folgt $C_1 = 0,15$.

$$\underline{i_L = -0,1t + 0,15}$$

$$t_2 = 2: i_L(t_2) = -0,05$$

$$2 \leq t \leq 3$$

$$u_L = 1; \quad i_L = \frac{1}{10}t + C_2$$

Aus $t = 2$, $i_L = -0,05$ folgt $C_2 = -0,25$.

$$\underline{i_L = 0,1t - 0,25}$$

$$t_3 = 3: i_L(t_3) = 0,05$$

$$3 \leq t \leq 4$$

$$u_L = 0; \quad i_L = C_3$$

Aus $t = 3$, $i_L = 0,05$ folgt $C_3 = 0,05$.

$$\underline{i_L = 0,05}$$

Die Strom-Zeit-Funktion ist in Bild 19.4 dargestellt.

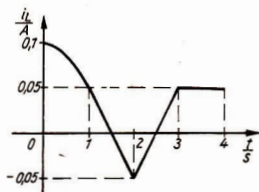


Bild 19.4

Kontrollfragen

- 19.3. Welche der Beziehungen zwischen Strom und Spannung bei Kapazität bzw. Induktivität sind beim Knotenpunktssatz (1. KIRCHHOFFSches Gesetz) und welche beim Maschen-satz (2. KIRCHHOFFSches Gesetz) zu verwenden?
- 19.4. Welche zugehörigen Spannungswerte ergeben sich bei sinusförmigem (z. B. $A \sin \omega t$) Strom i_G bzw. i_L ? Welche zeitliche Verschiebung zwischen Strom und Spannung besteht demnach bei den beiden elektrischen Schaltelementen?

Aufgabe: 19.3.

19.2. Berechnung von Mittelwerten

Für n diskrete Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind u. a.

das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

und das **quadratische Mittel**

$$x_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(das in der Statistik als **Streuung** Anwendung findet, vgl. Abschn. 22) definiert.

Aber auch für **stetige Größen** in Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie, die als Werte $y = f(x)$ vorliegen, können Mittelwerte sinnvollerweise definiert werden. Zwei von diesen Mittelwerten sowie ihre technische Anwendung sollen vorgestellt werden.

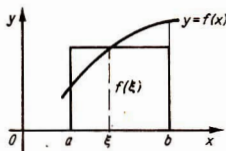


Bild 19.5

Zur Herleitung soll eine Fläche (Bild 19.5) betrachtet werden, die von der Kurve einer im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetigen und in diesem Intervall nur positive oder nur negative Werte habenden Funktion $f: y = f(x)$, der x -Achse und den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Es ist offensichtlich, daß sich diese Fläche durch ein flächengleiches Rechteck mit der Basis $b - a$ und der Höhe $f(\xi)$ darstellen läßt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) f(\xi) \quad (19.5)$$

Dabei ist $f(\xi)$ ein Funktionswert der Funktion f im betrachteten Intervall, d. h., $\xi \in (a; b)$.

Der in Gl. (19.5) formulierte Zusammenhang ist der **erste Mittelwertsatz der Integralrechnung**, auf dessen exakte Herleitung hier verzichtet werden soll. Der Wert $f(\xi)$ selbst heißt **linearer** oder **arithmetischer Mittelwert** der Funktion f im Intervall $[a; b]$:

$$y_{\text{ma}} = f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (19.6)$$

BEISPIELE

19.5. Es soll der arithmetische Mittelwert

a) für die Funktion $y = \sin x$

b) für die Funktion $y = \sin^2 x$

im Intervall $[0; \pi]$ berechnet werden.

Lösung:

$$\text{a) } y_{\text{ma}} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx \underline{\underline{0,636}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } y_{\text{ma}} &= \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \underline{0,5}.
 \end{aligned}$$

- 19.6. Ein geradliniger Bewegungsvorgang verläuft mit zeitabhängiger Beschleunigung $a = 3 \cdot 10^{-2} t^3 \text{ m/s}^4$. Es soll die mittlere Beschleunigung während der ersten 10 s berechnet und mit der Beschleunigung nach 10 s verglichen werden.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) \, dt = \frac{1}{10 \text{ s}} \left[3 \cdot 10^{-2} \frac{t^3}{3} \right]_0^{10 \text{ s}} \frac{\text{m}}{\text{s}^4} = \underline{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\
 a(10) &= 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} = \underline{3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\
 a_m &= \frac{1}{3} a(10).
 \end{aligned}$$

Neben dem linearen kann auch ein **quadratischer Mittelwert** einer Funktion $f: y = f(x)$ im Intervall $[a; b]$ definiert werden:

$$y_{\text{mq}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx} \quad (19.7)$$

BEISPIEL

- 19.7. Die im Zeitintervall $t_2 - t_1$ transportierte Elektrizitätsmenge Q bzw. von einem Strom verrichtete Arbeit W ergibt sich

bei konstantem Strom I (Gleichstrom) zu $Q = I(t_2 - t_1)$	$ \begin{aligned} W &= UI(t_2 - t_1) \\ &= I^2 R(t_2 - t_1) \end{aligned} $
bei zeitlich veränderlichem Strom $i = i(t)$ zu $Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) \, dt$	$ \begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} u i \, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} i^2 R \, dt. \end{aligned} $

Es sollen

- der Strom I_m bestimmt werden, der in einer halben Periode die gleiche Elektrizitätsmenge transportiert wie ein sinusförmiger Wechselstrom $i = \hat{i} \sin \omega t$ ($\hat{i}$ Scheitelwert),
- der Strom I_{eff} (Effektivwert der Stromstärke) berechnet werden, der in einer halben Periode die gleiche Arbeit leistet (den gleichen Effekt erzielt) wie der Wechselstrom $i = \hat{i} \sin \omega t$.

Lösung:

- a) Wenn die gleiche Elektrizitätsmenge transportiert werden soll, muß

$$I_m(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} i(t) \, dt \text{ sein.}$$

Für $t_1 = 0, t_2 = \frac{T}{2}$ (T Periode) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{2 \cdot i}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \, dt = \left[-\frac{2i}{\omega T} \cos \omega t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} \quad \left(\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}, \omega T = 2\pi \right) \\
 &= -\frac{i}{\pi} [\cos \pi - \cos 0] \\
 I_m &= \frac{2i}{\pi} \approx \underline{\underline{0,637i}}.
 \end{aligned}$$

Dieser arithmetische Mittelwert heißt auch **elektrolytischer Mittelwert** der Stromstärke.

b) Da die von beiden Strömen verrichtete Arbeit gleich sein soll, muß gelten

$$I_{\text{eff}}^2 R (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} i^2 R \, dt \quad (R = \text{const}).$$

Mit $t_1 = 0, t_2 = \frac{T}{2}$, $i = i \sin \omega t$ und $R = \text{const}$ wird

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2i^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t \, dt}.$$

Wie ein Vergleich mit Gl. (19.7) zeigt, ist der Effektivwert ein quadratischer Mittelwert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{2i^2}{2\omega T} [\omega t - \sin \omega t \cos \omega t]_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \sqrt{\frac{i^2}{2\pi} [(\pi - 0) - (0 - 0)]} \\
 I_{\text{eff}} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \approx \underline{\underline{0,707i}}.
 \end{aligned}$$

Im vorliegenden Beispiel ist $I_{\text{eff}} > I_m$. Wie von CAUCHY (AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, 1789 bis 1857, franz. Mathematiker) bewiesen wurde, ist stets der quadratische Mittelwert größer als der arithmetische, d. h., es gilt immer $y_{\text{mq}} > y_{\text{ma}}$.

Kontrollfrage

19.5. Überlegen Sie sich, warum beim quadratischen wie auch beim linearen Mittelwert ein konstanter Faktor a vor der Funktion $f(x)$ den Mittelwert in gleicher Weise, nämlich um den Faktor a , verändert?

Aufgaben: 19.4. und 19.5.

19.3. Arbeitsintegral

19.3.1. Allgemeines

Viele Anwendungen des Integrals beruhen auf der Möglichkeit, einen Zusammenhang zwischen physikalischen oder technischen Größen durch den Grenzwert einer Summe von Produkten darzustellen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß bei aller

Vielfalt der Probleme, wie Berechnung der Arbeit, statischer Momente usw., ihre Lösung sich auf das gleiche Grundprinzip zurückführen läßt, das in 16.4.1. auf die Berechnung der Flächeninhalte ebener Flächen angewendet wurde. Von der zu berechnenden Größe (z. B. in 16.4.1. die Fläche A) wird ein Teil (dort ein Flächenelement dA) herausgegriffen. Die Größe selbst (z. B. die Fläche A) gewinnt man hieraus durch Integration.

Dieses Vorgehen wurde bereits in 16.3. auf die Berechnung der Arbeit W einer wegbabhängigen Kraft F längs eines Weges s angewendet. Für die Arbeit im Wegintervall $[s_1; s_2]$ gilt:

$$W = \int_W dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$$

19.3.2. Dehnungsarbeit einer Schraubenfeder

Bei der Dehnung einer Schraubenfeder ist innerhalb des Elastizitätsbereiches die erforderliche Kraft

$$F = f(s) = k \cdot s \quad (k \text{ Federkonstante}).$$

Die aufzuwendende Dehnungsarbeit wird somit wegen $W = \int_{s_1}^{s_2} F ds$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} k \cdot s \cdot ds = k \int_{s_1}^{s_2} s ds = \left[\frac{ks^2}{2} \right]_{s_1}^{s_2} = \frac{k}{2} (s_2^2 - s_1^2).$$

Bei einer Dehnung aus der Ruhelage ($s_1 = 0$) um $s_2 = s_e$ (s_e Auslenkung oder Elongation) ist

$$W = \frac{1}{2} k s_e^2.$$

Dies entspricht der Arbeit einer konstanten Kraft, die gleich der halben Endkraft ks_e ist, bei einer Auslenkung um s_e .

19.3.3. Ausdehnungsarbeit eines Gases

Ein Gas vom Druck p übt auf eine Fläche A (z. B. eines Kolbens) eine Kraft $F = p \cdot A$ aus. Dehnt sich das Gas, dessen Volumen V ist, um dV aus, z. B. durch Bewegen des Kolbens um ein Wegelement ds : $dV = A \cdot ds$, so ist die vom Gas verrichtete Arbeit

$$dW = F \cdot ds = p \cdot A \cdot ds = p \cdot dV.$$

Bezeichnen V_1 und V_2 das Anfangs- und Endvolumen, s_1 und s_2 die beiden Stellungen des Kolbens, so ergibt sich für die Arbeit bei der Volumenänderung von V_1 und V_2

$$W = \int_{s_1}^{s_2} p A ds = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Für die **isotherme Ausdehnung** (Ausdehnung bei gleichbleibender Temperatur) von idealen Gasen gilt das Gesetz von BOYLE (engl. Physiker, 1626 bis 1691)

$$pV = p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const},$$

also

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} \quad (p_1, V_1 \text{ bekannte Anfangswerte}).$$

Damit wird die Arbeit bei isothermer Ausdehnung

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$W = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

oder auch — wegen $p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const}$ —

$$W = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Für die **adiabatische Ausdehnung** (Ausdehnung ohne Wärmezufuhr oder -abfuhr) von idealen Gasen gilt das Gesetz von Poisson (franz. Mathematiker und Physiker, 1781 bis 1840)

$$p V^\kappa = p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa = \text{const}$$

($\kappa = c_p/c_v$ Verhältnis der spezif. Wärmekapazität bei konstantem Druck und konstantem Volumen),
also

$$p = \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa}.$$

Die Arbeit bei adiabatischer Ausdehnung wird somit für $\kappa = \text{const}$

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} \, dV = \frac{p_1 V_1^\kappa}{-\kappa + 1} (V_2^{-\kappa+1} - V_1^{-\kappa+1}) \\ &= \frac{p_1 V_1^\kappa}{-\kappa + 1} \cdot (-1) [V_1^{-(\kappa-1)} - V_2^{-(\kappa-1)}] \\ W &= \frac{p_1 V_1^\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{1}{V_1^{\kappa-1}} - \frac{1}{V_2^{\kappa-1}} \right) \end{aligned}$$

19.3.4. Arbeit eines Wechselstromes

Zwischen Arbeit W und Leistung P besteht die Beziehung

$$W = P \cdot t,$$

wenn die Leistung während der Zeit t konstant ist.

Ist P eine zeitlich veränderliche Größe ($P = f(t)$), so kann für ein Arbeitselement

$$dW = P \, dt$$

gesetzt und daraus die Arbeit

$$W = \int_P P \, dt$$

errechnet werden.

Die Leistung eines Wechselstromes ist $P = u \cdot i$ mit $u = \hat{u} \sin \omega t$ und $i = \hat{i} \sin (\omega t + \varphi)$. ($\hat{u}$ und $\hat{i}$ Scheitelwerte von Spannung und Stromstärke, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz, f Frequenz, T Periode, φ Phasenwinkel zwischen Spannung und Stromstärke)

Die Arbeit eines Wechselstromes während einer Periode T wird mit

$$W = \int_0^T u i \, dt = \hat{u} \hat{i} \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi) \, dt$$

angesetzt.

Nach dem Additionstheorem (3.27) ist

$$\sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)].$$

Damit wird

$$\begin{aligned} W &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \left[\cos \varphi \int_0^T dt - \int_0^T \cos (2\omega t + \varphi) \, dt \right] \\ &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \left[T \cos \varphi - \frac{1}{2\omega} \sin (2\omega T + \varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

Wegen $\omega T = 2\pi$ heben sich das zweite und dritte Glied gegenseitig auf, und man erhält als Arbeit des Wechselstromes, wenn man die Effektivwerte $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ und $I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$ einführt,

$$W = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} T \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} T \cos \varphi.$$

Kontrollfragen

- 19.6. Das Arbeitsintegral wurde sowohl in der Form $\int f(s) \, ds$ als auch in der Form $\int g(t) \, dt$ aufgestellt. Welche physikalischen Größen stellen $f(s)$ und $g(t)$ dar? Welche Gesetze der Physik ergeben sich nach durchgeführter Integration für $f(s) = \text{const}$ bzw. $g(t) = \text{const}$?
- 19.7. Bei Zustandsänderungen von Stoffen treten auch sprunghafte Änderungen auf, die sich in den darstellenden Diagrammen als Sprungstellen abbilden (Unstetigkeitsstellen x_U der Funktion). Wie müssen in diesem Falle die Integrationsgrenzen gewählt werden?

Aufgaben: 19.6. und 19.7.

19.4. Statisches Moment und Schwerpunkt

19.4.1. Allgemeines

Das statische Moment M einer Masse m ergibt sich als Produkt von Masse und senkrechtem Abstand l der Masse von der Bezugsachse bzw. Bezugsebene: $M = lm$. Dies gilt nur dann genau, wenn die räumliche Ausdehnung der Masse nicht berücksich-

sichtigt zu werden braucht oder wenn man sich die gesamte Masse in einem Punkt, dem Schwerpunkt S , vereinigt denkt. Ist l_s der Abstand des Schwerpunktes von der Bezugsachse bzw. -ebene, so gilt für das statische Moment

$$M = l_s m$$

(19.8)

Zur Berechnung der statischen Momente von Körpern, deren räumliche Ausdehnung nicht vernachlässigbar und deren Schwerpunktlage nicht bekannt ist, kann man sich die Körper aus Massenelementen dm_i zusammengesetzt denken, die verschiedene Abstände l_i von der Bezugsachse bzw. -ebene aufweisen (Bild 19.6). Das statische Moment eines solchen Massenelementes ist

$$dM = l \, dm.$$

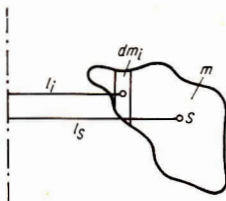


Bild 19.6

Durch Integration über die Massenelemente erhält man das statische Moment der Masse m

$$M = \int_m l \, dm$$

(19.9)

(Auch hier liegt in Wirklichkeit wieder der Grenzwert einer Summe von Produkten $l_i \Delta m_i$ für $\Delta m_i \rightarrow 0$ vor.)

Die Gln. (19.8) und (19.9) liefern eine Formel zur Berechnung des **Schwerpunktabstandes**

$$l_s = \frac{\int l \, dm}{m}$$

(19.10)

19.4.2. Statische Momente und Schwerpunkte von ebenen Flächen

Ist der in 19.4.1. betrachtete Körper mit der Masse m homogen, d. h., hat er überall die gleiche Dichte ρ , dann gilt

$$m = \rho V \quad \text{und} \quad dm = \rho \, dV. \quad (\text{I})$$

Hat der Körper außerdem die Gestalt eines Prismas, dessen einander kongruente Grundfläche und Deckfläche A den Abstand h aufweisen, dann ist

$$V = hA \quad \text{und} \quad dV = h \, dA. \quad (\text{II})$$

Durch Einsetzen von (II) in (I) und den daraus sich ergebenden Ausdrücken für m und dm in (19.10) wird

$$l_s = \frac{\int_m l dm}{m} = \frac{\int_A l \varrho h dA}{\varrho h A} = \frac{\varrho h \int_A l dA}{\varrho h A}$$

und nach Kürzen mit ϱ und h

$$l_s = \frac{\int_A l dA}{A} \quad (19.11)$$

$\int_A l dA$ heißt statisches Moment einer (ebenen) Fläche.

Bezeichnet man das statische Moment einer Fläche bezüglich der x -Achse mit M_x , das bezüglich der y -Achse mit M_y und die Koordinaten des Schwerpunktes selbst mit x_s und y_s , so wird aus (19.11)

$$x_s = \frac{M_y}{A}, \quad y_s = \frac{M_x}{A} \quad (19.12)$$

Bei der Berechnung von Schwerpunkten bzw. statischen Momenten von Flächen kann man oft den Rechenaufwand verringern, wenn man berücksichtigt, daß alle Symmetrieachsen von Flächen Schwerlinien (d. h. durch den Schwerpunkt gehende Linien) sind.

Ist die Fläche von der Kurve einer im Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion $f: y = f(x)$, den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ sowie der x -Achse begrenzt (Bild 19.7), so kann zunächst für das Flächenelement $dA = f(x) dx$ der Schwerpunkt angegeben werden.

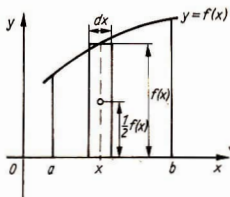


Bild 19.7

Da Symmetrieachsen gleichzeitig Schwerlinien sind, hat das Flächenelement die Schwerpunktkoordinaten $(x; \frac{1}{2} f(x))$, und für die statischen Momente des Flächenelementes bezüglich

	der x -Achse,	der y -Achse
gilt	$dM_x = \frac{1}{2} f(x) dA$	$dM_y = x dA$.

Integration liefert

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) \, dA \qquad M_y = \int_a^b x \, dA$$

und mit $dA = f(x) \, dx$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \qquad M_y = \int_a^b x f(x) \, dx \qquad (19.13)$$

als statische Momente einer (ebenen) Fläche unter einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ in den Grenzen von a bis b .

BEISPIELE

19.8. Es soll der Schwerpunkt eines Dreiecks mit der Grundseite a und der Höhe h berechnet werden.

Lösung: Man legt das Dreieck zweckmäßig so in das x, y -Koordinatensystem, daß eine Ecke im Ursprung und eine Seite parallel zu einer Achse liegt, z. B. Ecke A im Ursprung. Seite a parallel zur y -Achse (Bild 19.8).

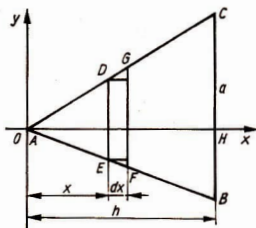


Bild 19.8

Um das statische Moment bezüglich der y -Achse zu ermitteln, wählt man ein Flächenelement $DEFG$ parallel zu dieser Achse:

$$dA = \overline{DE} \, dx.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AED gilt

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CB}} = \frac{x}{h}, \text{ und da } \overline{CB} = a,$$

$$\overline{DE} = \frac{ax}{h}.$$

Somit ist $dA = \frac{a}{h} x \, dx$.

Um das statische Moment für die gesamte Fläche zu erhalten, ist in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = h$ zu integrieren:

$$M_y = \int_0^h x \, dA = \frac{a}{h} \int_0^h x^2 \, dx = \frac{ah^3}{3}.$$

Die Fläche des Dreiecks ist $A = \frac{ah}{2}$.

$$\text{Gl. (19.12) ergibt } x_s = \frac{M_y}{A} = \frac{2}{3} h.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf einer Parallelen zur Dreiecksseite a im Abstand $\frac{2}{3} h$ von der Ecke A bzw. $\frac{1}{3} h$ von der Seite a entfernt. Da das Entsprechende für die beiden anderen Seiten gelten muß, kann auf die Berechnung von y_s verzichtet werden.

- 19.9. Der Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f: y = \cos x$ in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ soll berechnet werden.

Lösung:

$$\text{Es ist } M_y = \int_a^b x f(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$M_y = 0,5708$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} [x + \sin x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$M_x = 0,3927$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Damit ergibt sich als Lage des Schwerpunktes $S(0,57; 0,39)$.

Auch für das Dreieck (Beispiel 19.8.) hätte die Momentenberechnung mittels Gl. (19.13), d. h. für die Fläche unter einer Kurve $y = f(x)$ erfolgen können. Mittels der Gleichungen der beiden Geraden $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ kann man nämlich die statischen Momente M_{y1} und M_{y2} der beiden Teildreiecke AHC und ABH ermitteln und nach Division durch deren Flächeninhalte A_1 und A_2 die Abszissen ihrer Schwerpunkte $x_{s1} = \frac{M_{y1}}{A_1}$ und $x_{s2} = \frac{M_{y2}}{A_2}$. Der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks ergibt sich mit $M_y = \Sigma M_{yi} = M_{y1} + M_{y2}$ zu $x_s = \frac{M_{y1} + M_{y2}}{A}$.

Ein anderer möglicher Weg wäre der für die Momentenberechnung einer Fläche zwischen zwei Kurven $y = f_2(x)$ und $y = f_1(x)$ gewesen. Für eine solche Fläche er-

hält man für die statischen Momente

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_a^b ([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2) dx \\ M_y &= \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] dx \end{aligned} \quad (19.14)$$

Auf eine Herleitung dieser Formel soll hier verzichtet werden. Es soll aber noch darauf hingewiesen werden, daß bei beiden begrenzenden Kurven die Integrationsgrenzen die gleichen sein müssen.

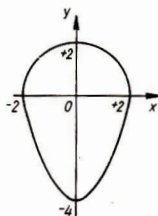


Bild 19.9

BEISPIEL

- 19.10. Eine Fläche (Bild 19.9) wird von einem Halbkreis und einem Parabelstück begrenzt. Wo liegt der Schwerpunkt dieser Fläche?

Lösung:

Die Gleichungen der begrenzenden Kurven sind

$$y = f_1(x) = x^2 - 4 \quad \text{und} \quad y = f_2(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Die y -Achse ist Symmetrieachse und damit Schwerlinie, also ist

$$\underline{x_S = 0}$$

Für die Berechnung von y_S werden A und M_x benötigt. Die Fläche setzt sich aus der Halbkreisfläche mit

$$A_2 = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi \approx 6,283$$

und dem Parabelsegment

$$A_1 = \left| 2 \int_0^2 (x^2 - 4) dx \right| = \left| 2 \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_0^2 \right| = \frac{32}{3} \approx 10,667$$

zusammen:

$$A = A_1 + A_2 = 16,950.$$

Das statische Moment bezüglich der x -Achse berechnet sich gemäß Gl. (19.14) zu

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} [(4 - x^2) - (x^2 - 4)^2] dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} [-x^4 + 7x^2 - 12] dx.$$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist und die Grenzen symmetrisch zur y -Achse liegen, wird

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^2 [-x^4 + 7x^2 - 12] dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{7}{3}x^3 - 12x \right]_0^2 \\ &= -\frac{32}{5} + \frac{56}{3} - 24 \approx -12,667. \end{aligned}$$

Damit wird

$$y_s = \frac{M_x}{A} = -\frac{12,667}{16,950} \approx \underline{\underline{-0,747}}.$$

Die Fläche hat ihren Schwerpunkt in $S(0; \underline{\underline{-0,747}})$.

Vergleicht man Gl. (19.13) mit der Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers bei Drehung der Kurve um die x -Achse [vgl. (16.18)]

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

so stellt man fest, daß $V = 2\pi M_x$ sein muß bzw.

$V = 2\pi y_s A$

(19.15)

Gl. (19.15) stellt die 2. **Guldinsche Regel** dar (PAUL GULDIN, schweizer. Mathematiker, 1577 bis 1643):

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus erzeugender Fläche A und dem Weg $2\pi y_s$ ihres Schwerpunktes bei der Rotation.

Kontrollfragen

- 19.8. Welche Dimension hat das statische Moment einer Fläche?
- 19.9. Liegt eine Fläche symmetrisch zur x -Achse, so ist diese Schwerlinie und $y_s = 0$. Unter welchen Bedingungen ergibt sich das auch aus Gl. (19.14)?
- 19.10. Wie müßte das statische Moment einer Linie der Kurvenlänge s analog dem statischen Moment einer Fläche definiert werden?

Aufgaben: 19.8. bis 19.11.

19.5. Aufgaben

- 19.1. Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht nach oben geworfen ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).
 - a) Welche Geschwindigkeit hat der Stein in 18 m Höhe?
 - b) Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Stein nach 0,5 s?
 - c) Wie groß ist die maximale Steighöhe?

- 19.2. Eine Kraft $F(t) = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ greift im Abstand $r = 10$ cm von der Drehachse einer Masse mit dem Massenträgheitsmoment J an ($F_0 = 10$ N, $\tau = 5$ s, $J = 1$ kg m²). Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω

- allgemein,
- zum Zeitpunkt $t = \tau$,
- für $t \rightarrow \infty$?

- 19.3. An einem Kondensator mit einer Kapazität $C = 10 \mu\text{F}$ ($1 \text{ F} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$) liegt eine Spannung mit dem in Bild 19.10 dargestellten zeitlichen Verlauf an. Es sollen

- der Zeitverlauf der Spannung und des Stromes in den einzelnen Zeitabschnitten beschrieben werden;
- die Strom-Zeit-Funktion grafisch dargestellt werden.

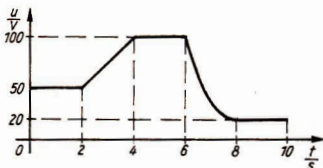


Bild 19.10

- 19.4. Der mittlere Funktionswert y_m der Funktion $y = \sqrt{9 - x^2}$ im Intervall $0 \leq x \leq 3$ soll ermittelt werden.
- 19.5. Die Stärke eines zeitlich veränderlichen Stromes ist durch die Gleichung $\frac{i}{\text{A}} = 0,1 \sqrt{\frac{t}{\text{min}}}$ ($0 \leq t \leq 1$ min) bestimmt. Es soll der arithmetische Mittelwert des Stromes im angegebenen Zeitintervall berechnet werden.
- 19.6. Welche Arbeit verrichtet eine wegbabhängige Kraft $\frac{F}{\text{N}} = \frac{2}{3} \left(\frac{s}{\text{m}}\right)^{\frac{3}{2}}$ längs eines Weges von $s_1 = 1$ m bis $s_2 = 8$ m? Welche konstante (mittlere) Kraft würde längs des Weges die gleiche Arbeit aufbringen?
- 19.7. Bei einem Expansionsvorgang in einem Dampfzylinder vergrößert sich das Volumen von V_1 auf V_2 , der Druck fällt von p_1 auf p_2 , die Temperatur bleibt konstant (Bild 19.11). Wie groß ist der konstante (mittlere) Druck, der längs des gleichen Kolbenweges (bei gleicher Volumenänderung) die gleiche Arbeit verrichten würde?

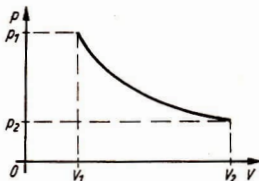


Bild 19.11

- 19.8. Die Schwerpunktskoordinaten des von den Geraden $x = 1$, $x = 4$, $y = 0,5x$ und der x -Achse gebildeten Trapezes sind zu bestimmen.

- 19.9. Es soll der Schwerpunkt eines Ellipsenquadranten (große Halbachse a auf der x -Achse, kleine Halbachse b auf der y -Achse) berechnet werden (Flächeninhalt der Ellipse $A = \pi ab$). Was folgt aus dem Ergebnis für den Abstand des Schwerpunktes eines Kreisquadranten vom Mittelpunkt?
- 19.10. Die Kurve der Funktion $y = 0,1 x \sqrt{6-x}$ schließt zusammen mit der x -Achse eine Fläche ein.
- Der Schwerpunkt dieser Fläche ist zu bestimmen.
 - Wie groß ist das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x -Achse erzeugt wird?
- 19.11. Wie groß ist das Volumen eines Rotationsparaboloids, dessen Mantelfläche durch Rotation einer bis zum Punkt $P_1(x_1; y_1)$ sich erstreckenden Ursprungsparabel um die x -Achse erzeugt wird? Die Berechnung soll mit der 2. GULDINschen Regel erfolgen.
-
- 19.12. Ein mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h fahrender PKW muß 60 m vor einem Hindernis abbremsen und erfährt dabei eine Verzögerung von 4 m/s².
- Wieviele Meter vor dem Hindernis kommt der PKW zum Stehen?
 - Welcher Weg ist 4 s nach Bremsbeginn zurückgelegt, welche Geschwindigkeit besitzt der PKW zu diesem Zeitpunkt?
- 19.13. Der freie Fall eines Körpers erfolgt (bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes) nach dem Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz
- $$v = \frac{g}{k} \cdot \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{kt} + e^{-kt}}$$
- ($k = \sqrt{\frac{cg}{m}}$, m Masse des Körpers, g Fallbeschleunigung, c von der Form des Körpers abhängiger Faktor).
- Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz ist aufzustellen.
 - Welchem Wert strebt die Geschwindigkeit für $t \rightarrow \infty$ zu?
- 19.14. Der Ladevorgang an einem Kondensator mit der Kapazität $C = 20$ pF verläuft nach der Spannungs-Zeit-Beziehung $u_C = U_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $U_0 = 5$ V, $\tau = 100$ ns. Wie groß ist der Strom i_C
- zum Zeitpunkt $t = 0$;
 - zum Zeitpunkt $t = t_S$, für den $u_C = 0$ wird;
 - für $t \rightarrow \infty$?
- 19.15. Für den in Bild 19.2 dargestellten zeitlichen Verlauf der Ladungsmenge Q soll für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 8$ s die mittlere Ladungsmenge berechnet werden.
- 19.16. Bei einer geradlinigen Bewegung ändert sich im Zeitintervall von $t_1 = 0$ bis $t_2 = 1$ min die Beschleunigung nach der Gleichung $a = \frac{1}{2} t^2 \frac{\text{m}}{\text{min}^2}$. Wie groß ist im Zeitintervall von t_1 bis t_2 die mittlere Beschleunigung?
- 19.17. Der Schwerpunkt der Fläche unter der Parabel $y = \frac{1}{3} x^2$ in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 3$ ist zu ermitteln.
- 19.18. Der Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve $y = e^{-x}$ ($0 \leq x \leq 2$) ist zu berechnen.
- 19.19. Der Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve $y = \frac{1}{4} \sqrt{x} (3-x)$ ($0 \leq x \leq 3$) ist zu berechnen.
- 19.20. Die Kurven der Funktionen $y = 1$, $y = \lg x$ und $x = 1$ schließen eine Fläche ein, deren Schwerpunkt zu berechnen ist.

20. Grafische und numerische Verfahren

20.0. Vorbemerkung

Wie in 14. gezeigt wurde, können alle elementaren Funktionen sowie algebraische Summen, Produkte usw. dieser Funktionen differenziert werden, das Ergebnis ist wiederum ein geschlossener analytischer Ausdruck. Im Gegensatz dazu sind viele Funktionen entweder überhaupt nicht oder nur mit beträchtlichem Aufwand geschlossen integrierbar. In diesem Falle oder wenn die zu differenzierende bzw. zu integrierende Funktion durch eine Wertetabelle oder ihren Graphen gegeben ist, führen oft grafische oder numerische Verfahren zum Ziel. Obwohl es sich hierbei um Näherungsverfahren handelt, sind die Ergebnisse für die Praxis meist hinreichend genau. Im folgenden werden die am häufigsten angewendeten Verfahren vorgestellt.

20.1. Grafische Differentiation und Integration

20.1.1. Grafische Differentiation

Oft ist die Zuordnung zwischen physikalisch-technischen oder ökonomischen Größen nur empirisch bekannt, z. B. durch Messung einer veränderlichen Größe in Abhängigkeit von einer anderen, unabhängigen Veränderlichen, d. h. durch eine Wertetabelle, oder als Aufzeichnung einer Schreibeinrichtung, d. h. durch eine Kurve. Wird auch hier der Wert der Ableitung benötigt, so bedient man sich — ausgehend von der Kurve der Funktion — der grafischen Differentiation.

Beispiele solcher Problemstellungen sind:

- a) Die Empfindlichkeit S eines Drehzeiger-Meßinstruments ist definiert durch

$$S = \frac{d\alpha}{dx_e} \quad \begin{array}{l} \alpha \text{ Ausschlagwinkel des Zeigers} \\ x_e \text{ Eingangsgröße (Meßgröße).} \end{array}$$

Die Kurve $\alpha = f(x_e)$ kann — nach Messen einander zugeordneter Werte x_e und α — gezeichnet werden.

- b) Bei einem beliebigen Bewegungsvorgang kann der zurückgelegte Weg in hinreichend kleinen Zeitabständen und mit der erforderlichen Genauigkeit gemessen und daraus die Geschwindigkeit in jedem Punkt des betrachteten Zeitintervalls durch

$$v = \frac{ds}{dt}$$

bestimmt werden.

In allen diesen und ähnlichen Fällen kann die Differentiation mittels der grafischen Darstellung der Funktion erfolgen.

Wie bekannt ist, gibt die Ableitung y' der Funktion $f: y = f(x)$ für $x = x_1$ den Anstieg der Kurve (Anstieg der Tangente) an der Stelle x_1 an. Soll die Ableitung einer durch ihre Kurve gegebenen Funktion $f: y = f(x)$ im Punkte $P_1(x_1; y_1)$ bestimmt werden (Bild 20.1), so kann dies deshalb nach folgender Vorschrift erfolgen (vgl. 15.1.):

1. Die Ordinatenachse wird gleichzeitig als y' -Achse verwendet.
2. Auf der negativen x -Achse ist ein Pol $P(-p; 0)$ festzulegen; zweckmäßig ist oft $p = 1$.
3. An die Kurve im Punkt P_1 die Tangente zu legen.
4. Durch den Pol P ist die Parallele zur Tangente, der sogenannte Polstrahl, zu zeichnen.
5. Der Schnittpunkt P_1^* des Polstrahls mit der y' -Achse liefert den Wert der Ableitung der Funktion im Punkt P_1 .

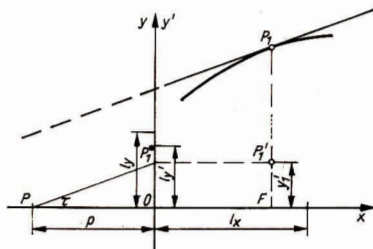


Bild 20.1

Beweis (Bild 20.1):

Es ist $\overline{OP_1^*} = \overline{FP_1'}$. Dann gilt

$$[y']_{x=x_1} = \tan \tau = \frac{\overline{OP_1^*}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{FP_1'}}{\overline{PO}}$$

und mit $p = \overline{PO} = 1$

$$[y']_{x=x_1} = \overline{FP_1'}.$$

Die Teilung der y' -Achse ergibt sich für beliebiges p aus

$$l_{y'} = \frac{p \cdot l_y}{l_x}$$

(20.1)

$l_{y'}$ Einheitslänge auf der y' -Achse für die Funktion $f': y' = f'(x)$

p Polabstand

l_y Einheitslänge auf der y -Achse für die Funktion $f: y = f(x)$

l_x Einheitslänge auf der x -Achse.

Gl. (20.1) ermöglicht auch, einen Polabstand p verschieden von 1 zu wählen. Bei der praktischen Durchführung der grafischen Differentiation wird man meist Wert darauf legen, für l_y' günstige Werte zu erhalten und ggf. für p , das nur einmalig zum Festlegen des Poles P benötigt wird, ungünstigere Zahlenwerte in Kauf nehmen:

$$p = \frac{l_x \cdot l_{y'}}{l_y}.$$

Soll nun eine Funktion in einem Bereich $x_1 \leq x \leq x_n$ grafisch differenziert werden (Bild 20.2), ist gemäß den Punkten 3. bis 5. der oben angegebenen Vorschrift n -mal (für n Punkte) zu verfahren, und es sind

6. die Punkte $P_1', \dots, P_n'$ durch eine Kurve zu verbinden.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Extrem- und Wendepunkte als Punkte P_i mit zu verwenden.

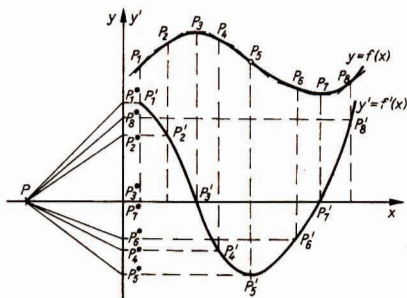


Bild 20.2

Zwischen dem Maßstab m_u und der Einheitslänge l_u bei der Abbildung einer Größe u gilt die Beziehung

$$m_u = \frac{l_u}{[u]}$$

(Maßstab = $\frac{\text{Abbildung}}{\text{abzubildende Größe}}$ oder Maßstab = $\frac{\text{Zeichengröße}}{\text{physikal. Größe}}$).

Somit ist $m_{y'} = \frac{l_{y'}}{[y']}$, $m_y = \frac{l_y}{[y]}$, $m_x = \frac{l_x}{[x]}$ und außerdem $[y'] = \frac{[y]}{[x]}$. Gl. (20.1) kann deshalb auch in der Form

$$m_{y'} = \frac{p \cdot m_y}{m_x}$$

beschrieben werden.

20.1.2. Grafische Integration

Die grafische Integration stellt die Umkehrung des in 20.1.1. beschriebenen Verfahrens der grafischen Differentiation dar. Sie wird angewendet, wenn entweder die zu integrierende Funktion $f: y = f(x)$ nur durch eine Wertetabelle bzw. durch ihre

Kurve bekannt ist oder die Integration mit keinem der anderen Integrationsverfahren möglich oder zweckmäßig ist.

Durch die grafische Integration können **partikuläre Integrale**

$$Y = \int f(x) dx = F(x) + C \quad [F'(x) = f(x)]$$

oder **bestimmte Integrale**

$$\int_{x_1=a}^{x_n=b} f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ermittelt werden.

Zur Durchführung der grafischen Integration wird die Kurve $y = f(x)$ im Bereich $x_1 \leq x \leq x_n$ durch eine Treppenkurve (Bild 20.3) ersetzt. Diese Ersatzkurve hat die Punkte $P_1, \dots, P_n$ mit der Kurve $y = f(x)$ gemeinsam, und die Fläche unter der Treppenkurve ist gleich der unter der Kurve $y = f(x)$. Damit ist das Problem auf die grafische Integration einer stückweise definierten Kurve zurückgeführt, wobei die Kurvenstücken die zur x -Achse parallelen Strecken der Treppenkurve sind, die durch $P_1, \dots, P_n$ gehen. Die Integration muß deshalb einen aus Geradenstücken zusammengesetzten Streckenzug ergeben (Bild 20.3).

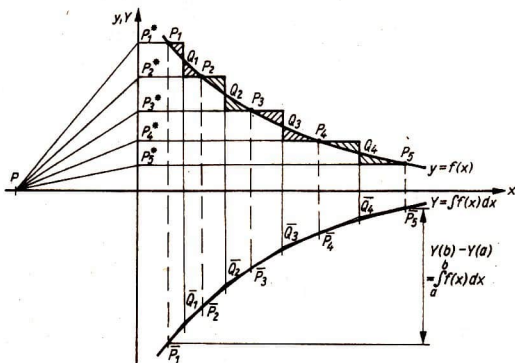


Bild 20.3

Im einzelnen sind zur Realisierung des Verfahrens folgende Schritte durchzuführen:

1. Die Ordinatenachse wird gleichzeitig als Y -Achse $[Y = \int f(x) dx]$ verwendet.
2. Auf der Kurve $y = f(x)$ werden im Bereich von $x = a$ bis $x = b$ Kurvenpunkte $P_1, \dots, P_n$ festgelegt, und zwar am dichtesten im Bereich größerer Funktionsänderungen, stärkerer Krümmung oder bei Änderung des Krümmungssinns.
3. Durch $P_1, \dots, P_n$ werden Waagerechten bis zum Schnitt mit der y -Achse in $P_1^*, \dots, P_n^*$ gezogen.

4. Auf der negativen x -Achse wird ein Pol $P(-p; 0)$ derart festgelegt, daß die Polstrahlen $\overline{PP_1^*}, \dots, \overline{PP_n^*}$ nicht zu steil verlaufen.
5. Auf der Kurve $y = f(x)$ werden Punkte $Q_1, \dots, Q_n$ festgelegt und ihre Ordinaten eingezeichnet, so daß die rechts und links davon entstehenden Flächen (in Bild 20.3 schraffiert) jeweils flächengleich werden.
6. Man wählt auf der Senkrechten durch P_1 einen Anfangspunkt $\overline{P_1}$ der Integralkurve.
7. Parallel zum Polstrahl $\overline{PP_1^*}$ wird durch $\overline{P_1}$ eine Gerade bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch Q_1 in $\overline{Q_1}$ gezeichnet, dann parallel zu $\overline{PP_2^*}$ eine Gerade durch $\overline{Q_1}$ bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch Q_2 in $\overline{Q_2}$ usw.
8. Es wird eine den Streckenzug $\overline{P_1Q_1P_2} \dots \overline{P_n}$ in $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \dots, \overline{P_n}$ berührende Kurve gezeichnet. Diese ist eine Integralkurve $Y = F(x) + C$.
9. Die Ordinatendifferenz $Y(b) - Y(a) = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$ liefert den Wert des gesuchten Integrals $\int_a^b f(x) dx$.

Begründung:

Die Punkte Q_i wurden so festgelegt, daß die rechts und links davon entstehenden Dreiecke flächengleich sind, d. h., ihre Ordinaten stellen jeweils den Mittelwert der Ordinaten des Kurvenstückes $P_i P_{i+1}$ dar. Das Integral der Treppenkurve im Bereich $x_1, \dots, x_n$ muß deshalb dem Integral der Kurve $y = f(x)$ gleich sein. Jedes Stück des Streckenzuges $\overline{P_1Q_1P_2} \dots \overline{P_n}$ wurde durch Umkehrung des Verfahrens der grafischen Differentiation ermittelt. Da die Punkte P_i sowohl auf der Treppenkurve als auch auf der vorgegebenen Kurve $y = f(x)$ liegen, müssen die Punkte $\overline{P_i}$ auf der Integralkurve liegen, wobei die Richtung der Integralkurve in diesen Punkten durch die des Streckenzuges bestimmt ist.

Der Schritt 8 (Einzeichnen der Integralkurve) ist nicht nötig, wenn nur der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ und nicht die Kurve eines partikulären

Integrals gesucht ist. Die Bedingung eines partikulären Integrals [vorgeschriebener Wert der Funktion $Y = F(x) + C$ für einen Wert x] kann bei der Konstruktion berücksichtigt werden, indem man von diesem Punkt ausgehend die Integralkurve konstruiert.

Die Wahl des Anfangspunktes $\overline{P_1}$ ist wegen der Differenzbildung $F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$ beliebig.

Die Teilung der Y -Achse ergibt sich analog Gl. (20.1):

$$l_Y = \frac{l_x \cdot l_y}{p} \quad (20.2)$$

l_Y Einheitslänge auf der Y -Achse für die Funktion $Y = \int f(x) dx = F(x) + C$

l_x Einheitslänge auf der x -Achse

l_y Einheitslänge auf der y -Achse für die Funktion $y = f(x)$

p Polabstand.

Auch hier ist es wiederum zweckmäßig, den Polabstand p so zu wählen, daß sich günstige Werte für die Teilung der Y -Achse ergeben.

Die grafische Integration findet in der Praxis stärkere Anwendung als die grafische Differentiation, da sie mit geringeren Fehlern als jene behaftet ist. Während bei der grafischen Differentiation Fehler — z. B. beim Zeichnen der Tangenten — sich in vollem Umfang auf die Ableitungskurve auswirken, gehen Fehler bei der grafischen Integration wegen der dabei erfolgenden Summierung nur noch mit einem Bruchteil in das Endergebnis ein, bzw. sie können sich teilweise oder im Extremfalle vollständig aufheben. Man sagt deshalb, beim grafischen Differenzieren erfolgt im allgemeinen eine „Aufrauhung“ gegenüber der Ausgangskurve, beim grafischen Integrieren eine „Glättung“ (das gleiche gilt auch für das numerische Differenzieren und Integrieren).

BEISPIEL

20.1. Durch grafische Integration soll $\int_{0,4}^2 \frac{e^x}{x} dx$ ermittelt werden. (Obwohl der Integrand „recht einfach“ aussieht, ist dieses Integral nicht geschlossen lösbar.)

Lösung: Mittels eines Tabellenwerkes oder Taschenrechners können die Funktionswerte für $y = \frac{e^x}{x}$ z. B. in Abständen $\Delta x = 0,1$ errechnet und die Kurve gezeichnet werden.

x	$\frac{e^x}{x}$	x	$\frac{e^x}{x}$	x	$\frac{e^x}{x}$
0,4	3,73	1,0	2,72	1,6	3,10
0,5	3,30	1,1	2,73	1,7	3,22
0,6	3,04	1,2	2,77	1,8	3,36
0,7	2,88	1,3	2,82	1,9	3,52
0,8	2,78	1,4	2,90	2,0	3,69
0,9	2,73	1,5	3,00		

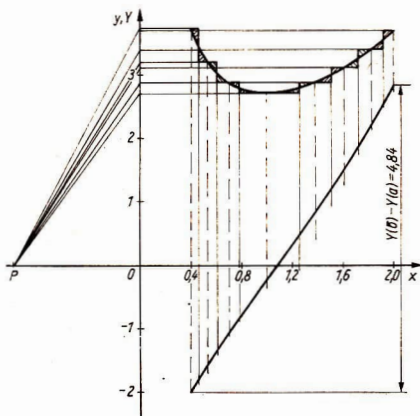


Bild 20.4

Da $x_{\max} = 2,0$ und $y_{\max} \approx 3,7$, wählt man

$$l_x = 5 \text{ cm}, \quad l_y = 2,5 \text{ cm}.$$

Ein Überschlag für den Wert des Flächeninhalts ergibt etwa 5 cm^2 , so daß

$$l_y = 2,5 \text{ cm}$$

zweckmäßig erscheint.

Damit wird (Bild 20.4)

$$p = \frac{l_x \cdot l_y}{l_y} = 5 \text{ cm}.$$

Die Konstruktion der Integralkurve gemäß den oben angegebenen Schritten 1 bis 8 zeigt Bild 20.4. Für ihren Anfangspunkt $\bar{P}_1$ wurde $\bar{y}_1 = Y(a) = -2$ gewählt.

Die Ordinatendifferenz $Y(b) - Y(a)$ liefert als Näherungswert

$$\int_{0,4}^2 \frac{e^x}{x} dx = \underline{\underline{4,84}}.$$

Kontrollfrage

20.1. Welche Gesichtspunkte bestimmen bei der grafischen Integration die Wahl des Polabstandes p und der Einheitslänge für Y ?

Aufgaben: 20.1. bis 20.3.

20.2. Numerische Integration

20.2.1. Allgemeines

Ist das bestimmte Integral $I = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ zu berechnen und die Funktion $f: y = f(x)$ nicht geschlossen oder nur mit großem Aufwand integrierbar, nur durch eine Wertetabelle oder durch ihre Kurve gegeben, so kann eine näherungsweise Integration auf numerischem Wege erfolgen. Die verschiedenen Verfahren fußen alle auf der Deutung des bestimmten Integrals als Fläche und als Grenzwert einer Summe:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}).$$

Im folgenden sollen ausschließlich solche Verfahren der numerischen Integration dargestellt werden, bei denen das Integrationsintervall $[a; b]$ in n gleiche Teile, d. h. die Fläche in Streifen gleicher Breite, zerlegt ist (z. B. $n = 6$ in Bild 20.5). Die Stützstellen x_i sollen Randpunkte eines Teilintervalles sein und die Funktionswerte $f(\xi_i)$ sich nur auf die Randpunkte beziehen. Die Länge eines Teilintervalles sei h :

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}$$

$$(x_0 = a, x_i = a + ih, x_n = b = a + nh).$$

Der prinzipielle Lösungsweg besteht bei der numerischen Integration darin, die Kurve $y = f(x)$ jeweils im Bereich eines oder mehrerer Teilintervalle durch die Kurve eines Interpolationspolynoms zu ersetzen und den Wert des bestimmten Integrals durch Summieren der Inhalte der Flächen unter diesen Kurven näherungsweise zu bestimmen. Ausgangspunkt der Berechnung sind die Funktionswerte y_i (Stützpunkte) an den Stützstellen x_i . Der Näherungswert des Integrals soll allgemein mit I bezeichnet werden:

$$I = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}). \quad (20.3)$$

Die Berechnung wird im allgemeinen um so genauer, je größer die Anzahl n der Teilintervalle und je größer der Grad des Interpolationspolynoms ist.

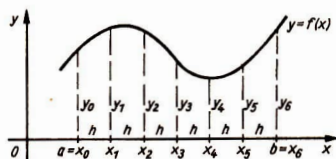


Bild 20.5

20.2.2. Keplersche Faßregel, Simpsonsche Regel

Teilt man das Integrationsintervall in eine gerade Anzahl von Teilintervallen, so kann die begrenzende Kurve $y = f(x)$ im Bereich eines Doppelstreifens durch eine Parabel (Kurve eines Polynoms 2. Grades) angenähert werden, die an den Stützstellen x_{i-1} , x_i und x_{i+1} die gleichen Ordinaten wie $y = f(x)$ hat. Die Gleichung der Parabel ist

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Für eine einfache Berechnung des Flächeninhalts des ersten Doppelstreifens soll dieser so verschoben werden (Bild 20.6), daß $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$ wird.

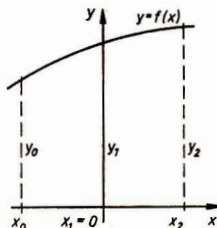


Bild 20.6

Durch Integration erhält man

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \int_{-h}^h (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx = \left[a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 \right]_{-h}^{+h} \\ &= 2a_0h + \frac{2}{3}a_2h^3 = \frac{2h}{3}(3a_0 + a_2h^2). \end{aligned}$$

Aus den Bedingungen für die 3 Stützstellen

$$\begin{aligned} x_0 &= -h & y_0 &= a_0 - a_1h + a_2h^2 \\ x_1 &= 0 & y_1 &= a_0 \\ x_2 &= h & y_2 &= a_0 + a_1h + a_2h^2 \end{aligned}$$

können die Werte a_0 , a_1 und a_2 des Interpolationspolynoms berechnet werden:

$$a_0 = y_1, \quad a_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}, \quad a_2 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}.$$

Setzt man a_0 , a_1 und a_2 in den berechneten Ausdruck für $\overline{I}_1$ ein, so erhält man für den Flächeninhalt des 1. Doppelstreifens

$$\boxed{\overline{I}_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)} \quad \text{Keplersche Faßregel} \quad (20.4)$$

Diese Formel wurde bereits 1615 von dem deutschen Astronomen JOHANNES KEPLER in seiner „Nova stereometria doliurum vinariorum“ (Neue Stereometrie der Weinfässer) veröffentlicht.

Die Gesamtfläche ergibt sich als Summe der Flächeninhalte von $\frac{n}{2}$ nach der KEPLERschen Faßregel errechneten Doppelstreifen:

$$I = \overline{I}_1 + \overline{I}_3 + \dots + \overline{I}_{n-1}$$

$$I = S = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$$

$$\boxed{I = S = \frac{b-a}{3n}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]} \quad (n \text{ gerade})$$

$$\text{Simpsonsche Regel} \quad (20.5)$$

Die KEPLERsche Faßregel — und damit auch die SIMPSONsche Regel — liefert den genauen Wert des Flächeninhaltes, wenn die den Doppelstreifen begrenzende Kurve die eines Polynoms bis zum 3. Grade ist (obwohl zur Herleitung eine quadratische Parabel verwendet wurde). Für viele Anwendungsfälle ist die mit der SIMPSONschen Regel erhaltene Genauigkeit bei der Berechnung eines bestimmten Integrals völlig ausreichend. Trotzdem erfordert jede angenäherte Berechnung letztlich eine Ab-

schätzung des begangenen Fehlers, um eine Sicherheit für die erreichte Genauigkeit zu bekommen. Auch für die Verfahren der numerischen Integration gibt es Ausdrücke zur Fehlerabschätzung, die aber einerseits einen relativ großen Aufwand erfordern (für die SIMPSONSche Regel z. B. ist die Bestimmung von Werten höherer Ableitungen der Funktion bis zur vierten an den Stützstellen nötig) und andererseits keine sehr enge Eingrenzung gestatten. In der Praxis wird deshalb oft mit einer anderen Form der SIMPSONSchen Regel gearbeitet, die höhere Differenzen der Funktionswerte mit verwendet (zunächst also etwas aufwendiger ist), und für die mit Hilfe der Differenzen sowohl eine Fehlerabschätzung als auch Rechenkontrollen durchgeführt werden können (vgl. z. B.: von Sanden, Praktische Mathematik).

Für die SIMPSONSche Regel, die im Vergleich zu den vorher aufgestellten Formeln für die Integration recht gute Näherungswerte liefert, existiert eine relativ einfach anwendbare Fehlerabschätzung. Sie erfordert allerdings, daß die Zahl der Teilintervalle durch 4 teilbar ist (n ein Vielfaches von 4 ist).

Man berechnet zusätzlich

$$S^* = \frac{2h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_4 + y_8 + \dots + y_{n-4}) + 4(y_2 + y_6 + \dots + y_{n-2})] \quad (20.6)$$

(dies ist ein Näherungswert für die Fläche bei einer Streifenbreite $2h$, zu dessen Berechnung man die Ordinaten mit ungeradem Index wegläßt) und bildet die Differenz $S - S^*$. Dann ist der Fehlerbetrag bei der Anwendung der SIMPSONSchen Regel

$$F_S = \left| \int_a^b f(x) dx - S \right| < \left| \frac{1}{15} (S - S^*) \right| \quad (20.7)$$

Für rationelles Arbeiten verwendet man zweckmäßigerweise ein Rechenschema, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird. Bei Verwendung eines programmierbaren Taschenrechners würde man die Glieder in der durch ihren Index bestimmten Reihenfolge addieren.

BEISPIEL

20.2. $\int_0^{1,2} \sin x^2 dx$ ist mittels der SIMPSONSchen Regel zu berechnen sowie die Fehlerabschätzung mit Formel (20.7) vorzunehmen.

Lösung: Wählt man $h = 0,1$, so ist $n = 12$, $x_0 = a = 0$, $x_{12} = b = 1,2$. Die Funktionswerte $y = \sin x^2$ können einem Tafelwerk entnommen, in ein Schema eingetragen und aus ihnen die im Schema (s. S. 222) angegebenen Summen errechnet werden.

Mit den einzelnen Näherungsformeln erhält man:

$$S = \frac{b-a}{3n} [\Sigma_0 + 2\Sigma_2 + 4\Sigma_1] = \underline{\underline{0,4961}}$$

$$S^* = \frac{2(b-a)}{3n} [\Sigma_0 + 2(y_4 + y_8) + 4(y_2 + y_6 + y_{10})] = \underline{\underline{0,4960}}$$

$$\underline{\underline{F_S < 10^{-5}}}$$

i	x_i	y_i
0	0	0
1	0,1	0,0100
2	0,2	0,0400
3	0,3	0,0899
4	0,4	0,1593
5	0,5	0,2474
6	0,6	0,3523
7	0,7	0,4706
8	0,8	0,5972
9	0,9	0,7243
10	1,0	0,8415
11	1,1	0,9356
12	1,2	0,9915
$\Sigma_0 = y_0 + y_{12}$		0,9915
$\Sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11}$		2,4778
$\Sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}$		1,9903

Kontrollfragen

- 20.2. Für welche begrenzenden Funktionen liefert die Simpson'sche Regel exakte Ergebnisse?
- 20.3. Wie wird man bei der numerischen Integration die Stützstellen bezüglich der Extremwerte, Wendepunkte und Unstetigkeitsstellen der begrenzenden Funktion zweckmäßig legen? Es soll eine Reihenfolge des Vorranges aufgestellt werden!
- 20.4. Ist der Integrand durch seine Kurve oder eine Wertetabelle vorgegeben, können sowohl die grafische als auch die numerische Integration angewendet werden. Welcher Unterschied besteht zwischen den beiden Verfahren hinsichtlich der erhaltenen Ergebnisse?

Aufgaben: 20.4. und 20.5.

20.3. Aufgaben

- 20.1. Eine Funktion ist im Intervall $(0; 2)$ durch folgende Wertetabelle gegeben:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y	1,02	1,08	1,19	1,34	1,54	1,81	2,15	2,58	3,11	3,76	4,57

Der Wert der Ableitung an der Stelle $x = 1$ soll durch grafische Differentiation bestimmt werden.

- 20.2. Durch grafische Integration sind zu berechnen

$$a) \int_0^{1,2} \sin x^2 dx$$

$$b) \int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx.$$

- 20.3. Von einer Kraftmaschine wurde das in Bild 20.7 dargestellte p, V -Diagramm aufgenommen. Durch grafische Integration soll die (für die Energieberechnung benötigte) eingeschlossene Fläche ermittelt werden.

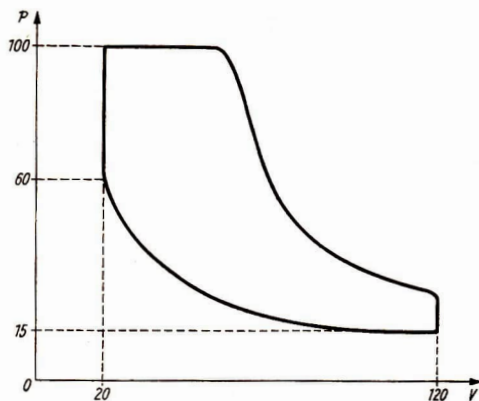


Bild 20.7

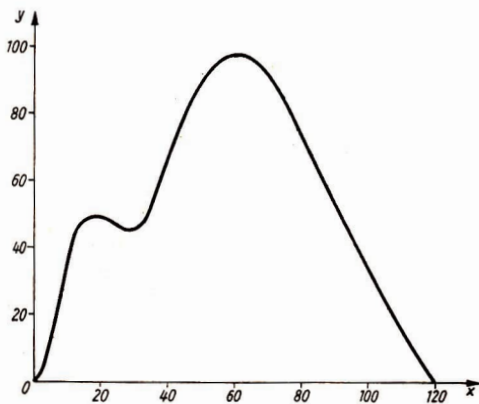


Bild 20.8

- 20.4. Es sind die Werte folgender bestimmter Integrale durch numerische Integration zu berechnen, und es ist eine Fehlerabschätzung durchzuführen

a) $\int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx, \quad h = 0,1:$

b) $\int_{0,4}^2 \frac{e^x}{x} dx, \quad h = 0,1.$

- 20.5. Mittels der SIMPSONschen Regel soll die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ in Bild 20.8 (aufgenommen bei der Ummagnetisierung eines Ferritkerns durch einen Strom konstanter Stärke. $y = U/mV$, $x = t/ms$, der Flächeninhalt ist der zum Ummagnetisieren erforderlichen Energie proportional) berechnet werden.

- 20.6. Für die Funktion $y = \sqrt{9 - x^2}$ (Halbkreis mit $r = 3$) soll durch grafische Differentiation der Wert der Ableitung an der Stelle $x = 2$ ermittelt werden.

- 20.7. Die Kurve des partikulären Integrals $\int \frac{\sin x}{x} dx$ für $0 \leq x \leq \pi$ mit $Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ soll durch grafische Integration ermittelt werden.

- 20.8. Durch numerische Integration soll

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad h = \frac{\pi}{12}$$

berechnet und eine Fehlerabschätzung durchgeführt werden.

21. Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

21.1. Definition und geometrische Veranschaulichung

In den bisherigen Abschnitten wurden Funktionen mit einer unabhängigen Variablen betrachtet. Dabei wurde die unabhängige Variable $x \in X$ eindeutig auf eine abhängige Variable $y \in Y$ abgebildet. Zahlreiche Größen in Physik und Technik sind jedoch von zwei oder mehr als zwei Variablen abhängig. Zum Beispiel ist der Druck eines Gases abhängig von seinem Volumen und von seiner Temperatur, die Eigenfrequenz eines Schwingkreises ist abhängig von der Induktivität der Spule und der Kapazität des Kondensators usw. Im folgenden wird deshalb der Funktionsbegriff bezüglich der Anzahl der Variablen erweitert. Es werden Ableitungen von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen behandelt, und es wird auf einige Anwendungen wie Bestimmung der linearen Änderung des Funktionswertes und Berechnung von Extremwerten eingegangen.

BEISPIELE

21.1. Die Stromstärke I ist nach dem Ohmschen Gesetz $I = \frac{U}{R}$ von der Spannung U und dem Widerstand R abhängig. Da Spannung und Widerstand unabhängig voneinander beliebig verändert werden können, sind U und R voneinander unabhängige Variable. Jedem Wertepaar $(U; R)$ ist eindeutig eine Stromstärke I zugeordnet:

$$(U; R) \rightarrow I \quad \text{bzw.} \quad I = f(U; R).$$

Die Menge f der geordneten Wertetripel $(U; R; I)$ wird eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen genannt:

$$f = \{(U; R; I) \mid I = f(U; R)\}.$$

21.2. Ein Raum wird von einer Stelle aus erwärmt. In den Raum sei ein dreiaxiges kartesisches Koordinatensystem gelegt. Die Temperatur T in einem Raumpunkt $P(x; y; z)$ hängt von dessen Koordinaten und der Zeit t ab:

$$T = f(x; y; z; t).$$

Es liegt eine Funktion von vier unabhängigen Variablen vor, die jedem Quadrupel $(x; y; z; t)$ eindeutig eine Temperatur T zuordnet. Die Funktion f ist die Menge der geordneten Quintupel:

$$f = \{(x; y; z; t; T) \mid T = f(x; y; z; t)\}.$$

21.3. Eine Funktion f von zwei unabhängigen Variablen ist durch die analytische Darstellung

$$z = 2\sqrt{x} - \ln(y - 1) = f(x; y)$$

gegeben. Die unabhängigen Variablen x und y können nur aus bestimmten Bereichen gewählt werden:

$$x \in X = [0; \infty), \quad y \in Y = (1; \infty).$$

Die Menge der damit möglichen geordneten Paare $(x; y)$ heißt Definitionsbereich D der Funktion:

$$(x; y) \in D.$$

Beispiele für die Abbildung $(x; y) \rightarrow z$ sind $(0; 2) \rightarrow 0$, $(1; 2) \rightarrow 2$, $(2; 2) \rightarrow 2,83$, $(4; 5) \rightarrow 2,61$ usw. oder bei der Darstellung in einer Wertetabelle für z mit den Tabelleneingängen x und y :

$y \ x \rightarrow$ $\downarrow$	0	1	2	3	4	...
2	0	2	2,83	3,46	4	...
3	-0,69	1,31	2,14	2,77	3,31	...
4	-1,10	0,90	1,73	2,37	2,90	...
5	-1,39	0,61	1,44	2,08	2,61	...
...	...	...	...	...	...	...

Allgemein gilt die **Definition**:

Liegt eine eindeutige Abbildung der Menge D von geordneten Zahlenpaaren $(x; y)$ auf die Menge Z vor, d. h., ist jedem Paar $(x; y) \in D$ eindeutig eine Zahl $z \in Z$ zugeordnet, dann heißt die Menge der geordneten Tripel $(x; y; z)$ eine **Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen**:

$$f = \{(x; y; z) \mid z = f(x; y) \wedge (x; y) \in D\}.$$

$z = f(x; y)$ heißt der Funktionswert von x und y . D heißt Definitionsbereich, Z Wertevorrat der Funktion.

Die Definition läßt sich erweitern auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen. Für eine Funktion mit drei unabhängigen Variablen wird der Funktionswert häufig durch

$$u = f(x; y; z)$$

und bei einer Funktion mit allgemein n Variablen durch

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

dargestellt. Im letzteren Fall dienen die Indizes also nicht wie sonst üblich zur Kennzeichnung fester Werte von x , sondern werden zur Unterscheidung der Variablen verwendet.

Der Definitionsbereich D läßt sich bei manchen Funktionen nicht wie in Beispiel 21.3. durch einzelne Intervalle X und Y , sondern nur durch Gleichungen zwischen den unabhängigen Variablen beschreiben (vgl. Beispiel 21.4.).

Die unabhängigen Variablen sollen auch stets voneinander unabhängig sein. Würde nämlich in $u = f(x; y; z)$ z. B. zwischen y und z eine Abhängigkeit bestehen, die explizit $y = g(z)$ lautet, dann ergibt sich durch Einsetzen dieses Wertes in u mit $u = f(x; g(z); z) = f(x; z)$ eine Funktion von nur noch zwei unabhängigen Variablen x und z .

Einer Funktion von einer unabhängigen Variablen läßt sich unter Zugrundelegung eines ebenen Koordinatensystems im allgemeinen eine Kurve zuordnen. Im folgenden wird das **Bild einer Funktion** $z = f(x; y)$ erklärt.

Gewählt wird ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit x -, y - und z -Achse entsprechend Bild 21.1. Einem gewählten Paar $(x; y)$ der unabhängigen Variablen entspricht ein Punkt $P'(x; y)$ in der x, y -Ebene (Grundrißebene). Die Menge der Wertepaare $(x; y)$, für die $z = f(x; y)$ definiert ist, d. h. der Definitionsbereich D der Funktion, hat daher als Bild eine Fläche in der x, y -Ebene. Ist z. B. D durch $X = [a; b]$, $Y = [c; d]$ bestimmt, dann ist das Bild von D ein Rechteck wie in Bild 21.1.

Der einem Wertepaar $(x; y)$ eindeutig zugeordnete Funktionswert $z = f(x; y)$ läßt sich als Höhe eines senkrecht über P' gelegenen Raumpunktes P deuten.

Der Menge aller Wertepaare $(x; y) \in D$ entspricht somit eine Punktmenge im Raum, die im allgemeinen eine Fläche darstellt:

$$\Phi = \{P(x; y; z) \mid z = f(x; y), (x; y) \in D\}.$$

Φ heißt das Bild der Funktion $z = f(x; y)$.

Wird in $z = f(x; y)$ für x der konstante Wert $x = x_0$ eingesetzt, dann folgt mit $z = f(x_0; y) = g(y)$ eine Funktion von einer Variablen. Ihr Bild ist eine Kurve auf

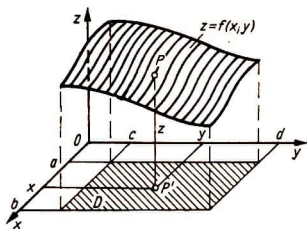


Bild 21.1

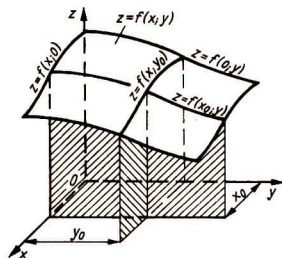


Bild 21.2

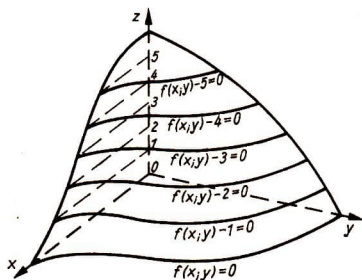


Bild 21.3

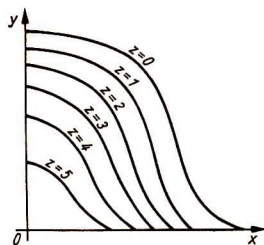


Bild 21.4

der Fläche. Alle Kurvenpunkte haben die gleiche Koordinate $x = x_0$. Die Kurve ist daher die Schnittkurve zwischen der Fläche und einer Ebene, die parallel zur y,z -Ebene ist und von dieser den Abstand x_0 hat (Bild 21.2). Für $x_0 = 0$ wird $z = f(0; y)$ die Gleichung der Schnittkurve zwischen Φ und der y,z -Ebene.

Analog folgt für $y = y_0 = \text{const}$ mit $z = f(x; y_0) = h(x)$ die Gleichung einer Kurve auf Φ parallel zur x,z -Ebene und für $y_0 = 0$ die Schnittkurve von Φ und der x,z -Ebene.

Für $z = z_0 = \text{const}$ stellt $z_0 = f(x; y)$ bzw. in impliziter Form $f(x; y) - z_0 = 0$ eine Kurve der Fläche dar, deren sämtliche Punkte die gleiche Höhe besitzen. Diese Kurve heißt Höhenlinie von Φ (Bild 21.3). Für $z_0 = 0$ ergibt sich die Schnittkurve mit der Grundrißebene. Werden für ausgewählte Werte von z , z. B. $z = 0; 1; 2; \dots$ die Höhenlinien bestimmt, in die x,y -Ebene als Grundrißebene projiziert und an jede Höhenlinie der zugehörige Wert z_0 geschrieben, dann ergibt sich eine Höhenliniendarstellung der Fläche, aus der mit etwas Übung wie aus einer Landkarte die Form der Fläche zu erkennen ist (Bild 21.4).

BEISPIELE

21.4. Gesucht wird das Bild der Funktion $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = f(x; y)$.

Lösung: Der Radikand muß positiv sein, so daß durch $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, d. h. $x^2 + y^2 \leq 16$ der Definitionsbereich D festgelegt ist:

$$D = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Den Wertepaaren $(x; y) \in D$ entsprechen alle Punkte der x,y -Ebene, die in bzw. auf dem Kreis um 0 mit dem Radius 4 liegen.

Werden nacheinander in der Funktion $z = f(x; y)$ die Variablen x, y bzw. z gleich Null gesetzt, dann ergeben sich die Gleichungen der Schnittkurven mit den Koordinatenebenen:

$$x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{16 - y^2}: \text{Halbkreis mit dem Radius 4 in der } y,z\text{-Ebene,}$$

$$y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{16 - x^2}: \text{Halbkreis mit dem Radius 4 in der } x,z\text{-Ebene,}$$

$$z = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \text{ bzw. } x^2 + y^2 = 16: \text{Kreis mit dem Radius 4 in der } x,y\text{-Ebene.}$$

Das Bild der Funktion ist eine Halbkugelfläche mit dem Radius 4 (Bild 21.5).

Bild 21.6 zeigt die Höhenliniendarstellung der Fläche.

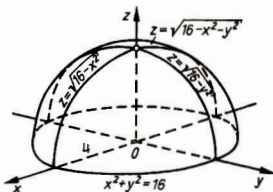


Bild 21.5

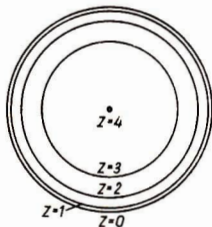


Bild 21.6

21.5. Welches Bild hat die Funktion $z = x^2 + y^2 = f(x; y)$?

Lösung: Für die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen und für die Höhenlinien folgt:

$x = 0 \Rightarrow z = y^2$: Parabel in der y, z -Ebene,

$y = 0 \Rightarrow z = x^2$: Parabel in der x, z -Ebene,

$z = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2$: Punkt (Koordinatenursprung) in der x, y -Ebene (Die Gleichung wird nur von dem Wertepaar $(x; y) = (0; 0)$ erfüllt.),

$z = z_0 \Rightarrow z_0 = x^2 + y^2$: Kreis mit dem Radius $\sqrt{z_0}$ als Höhenlinie mit der Höhe z_0 .

Das Bild der Funktion ist eine Fläche, die durch Rotation einer Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = 0$ und der z -Achse als Parabelachse um diese z -Achse entsteht. Die Fläche heißt Rotationsparaboloid. Für die Wahl von x und y bestehen keine Einschränkungen, d. h., die dem Definitionsbereich entsprechende Punktmenge ist die gesamte x, y -Ebene. Bild 21.7 zeigt die Fläche, Bild 21.8 zeigt die Höhenliniendarstellung für $z = 0; 1; 2; 3; 4$.

21.6. Für die zur Funktion $z = x^2 - y^2 = f(x; y)$ gehörende Fläche ist die Höhenliniendarstellung anzugeben.

Lösung: Für $z = z_0$ folgt $x^2 - y^2 = z_0$, das ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit den Halbachsen $a = b = \sqrt{z_0}$. Für $z_0 > 0$ ist die x -Achse, für $z_0 < 0$ die y -Achse die

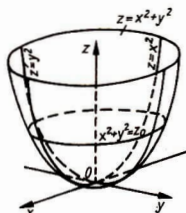


Bild 21.7

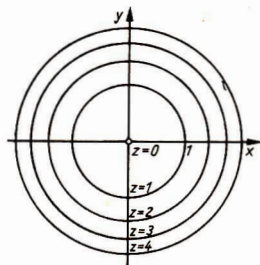


Bild 21.8

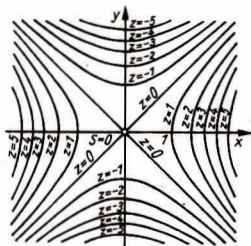


Bild 21.9

Hauptachse der Hyperbel. Für $z_0 = 0$ folgt $x^2 - y^2 = 0$ bzw. $y = \pm x$. Die Höhenlinien der Höhe $z = 0$ sind also zwei zueinander senkrechte Geraden und erscheinen in der Höhenliniendarstellung der Fläche (Bild 21.9) als Asymptoten sämtlicher Hyperbeln. Die Fläche heißt hyperbolisches Paraboloid und wird auch Sattelfläche genannt. Der Punkt $S = 0$ heißt Scheitelpunkt. Für die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen folgt

- $x = 0 \Rightarrow z = -y^2$: nach unten geöffnete Parabel k ,
 $y = 0 \Rightarrow z = x^2$: nach oben geöffnete Parabel g ,
 $z = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - y^2$: zwei sich in 0 schneidende Geraden h .

Bild 21.10 zeigt eine anschauliche Darstellung der Fläche.

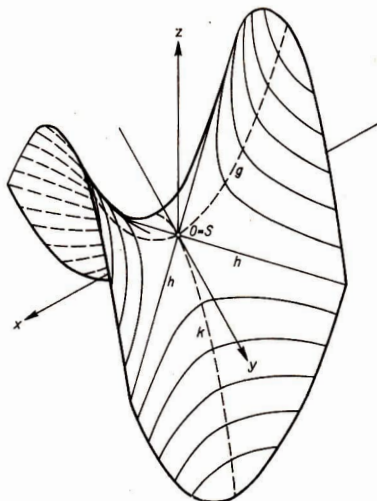


Bild 21.10

Kontrollfragen

- 21.1. Wie wird eine Funktion mit zwei bzw. mehreren unabhängigen Variablen definiert?
 21.2. Was wird unter dem Bild einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen verstanden?
 21.3. Was bedeutet es geometrisch, wenn in der Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ für x , für y bzw. für z eine Konstante eingesetzt wird?

Aufgabe: 21.1.

21.2. Partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Ableitung auch für Funktionen von mehreren Variablen definiert werden. Die erforderlichen Beziehungen werden zunächst für zwei Variablen anschaulich aus dem Bild ermittelt. Das Ergebnis wird dann sinngemäß auf Funktionen von mehr als zwei Variablen übertragen. Da eine strenge analytische Herleitung der Formeln und Sätze in diesem Abschnitt über den Rahmen des Buches hinausführt, ist eine Beschränkung auf Plausibilitätsbetrachtungen notwendig. Der Differentialquotient einer Funktion von einer Variablen wurde als Anstieg der Tangente erklärt, die in einem Punkt an die zur Funktion gehörende Kurve angelegt ist. Durch einen Punkt P_0 der Fläche, die zu einer Funktion $z = f(x; y)$ gehört, gehen im allgemeinen unendlich viel ebene Kurven, die auf der Fläche liegen,

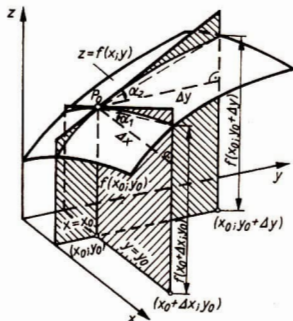


Bild 21.11

und an jede dieser Kurven kann die Tangente in P_0 angelegt werden. Für die Definition der Ableitung werden diejenigen Kurven mit den zugehörigen Tangenten ausgewählt, die parallel zur x,z - bzw. y,z -Ebene liegen. Diese Kurven haben die Gleichung $z = f(x; y_0)$ bzw. $z = f(x_0; y)$ und sind die Schnittkurven zwischen den Ebenen mit den Gleichungen $y = y_0$ bzw. $x = x_0$ und der Fläche (Bild 21.11). Die Tangenten, die in P_0 an die ausgewählten Kurven gelegt sind, haben die Anstiegswinkel α_1 bzw. α_2 . Zur Berechnung des Anstiegs $\tan \alpha_1$ wird zunächst das Sekantendreieck mit den Katheten Δx und $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ betrachtet und der Anstieg der Sekante durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

angegeben. Für $\Delta x \rightarrow 0$ geht die Sekante in die Tangente über. Ihr Anstieg ergibt sich aus dem Grenzwert

$$\tan \alpha_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} \quad (\text{I})$$

Entsprechend folgt für den Anstieg der zweiten Tangente

$$\tan \alpha_2 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}. \quad (\text{II})$$

Die Grenzwerte (I) und (II) heißen die **ersten partiellen¹⁾ Differentialquotienten** oder die **ersten partiellen Ableitungen** der Funktion $z = f(x; y)$ **nach x bzw. nach y an der Stelle $(x; y) = (x_0; y_0)$** . Werden die partiellen Ableitungen nicht an einer festen Stelle $P_0(x_0; y_0)$, sondern in einem variablen Punkt $P(x; y)$ betrachtet, dann ergeben sich die **ersten partiellen Ableitungsfunktionen nach x bzw. nach y** mit den gebräuchlichen Bezeichnungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = z_x = f_x(x; y) \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = z_y = f_y(x; y) \end{aligned}} \quad (21.1)$$

Vereinfacht wird meist nur von den ersten partiellen Ableitungen gesprochen.

Die partiellen Ableitungen (21.1) stellen geometrisch den Anstieg von Tangenten dar, die in einem Punkt $P(x; y)$ an die Fläche mit der Gleichung $z = f(x; y)$ gelegt sind und parallel zur x, z - bzw. y, z -Ebene verlaufen.

Zum Unterschied gegen den gewöhnlichen Differentialquotienten wird das geschwungene ∂ verwendet. Für $\frac{\partial z}{\partial x}$ wird gesprochen: **de- z partiell nach de- x** . Zur

Definition von $f_x(x; y)$ wurde eine Kurve der Fläche betrachtet, deren Punkte einen konstanten y -Wert besitzen. Für die praktische Berechnung ergibt sich daher die einfache **Regel**:

Um die partielle Ableitung der Funktion $z = f(x; y)$ nach x zu bilden, wird y vorübergehend als Konstante betrachtet und die Funktion nach den bekannten Regeln nach x differenziert. Bei der partiellen Ableitung nach y ist x vorläufig als Konstante anzusehen und nach y zu differenzieren.

Zur Berechnung der Tangentenanstiege in einem festen Punkt $P(x_0; y_0)$ sind dessen Koordinaten in die partiellen Ableitungen einzusetzen.

BEISPIELE

21.7. Es sind die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = 3x^2 + xy - y^2 - 4x - 5y + 6$$

an der Stelle $x_0 = 2, y_0 = -3$ zu berechnen.

Lösung: Die partiellen Ableitungen lauten

$$z_x = 6x + y - 4, \quad z_y = x - 2y - 5.$$

Durch Einsetzen der Werte $x_0 = 2, y_0 = -3$ folgt:

$$\underline{f_x(2; -3) = 5}, \quad \underline{f_y(2; -3) = 3}.$$

¹⁾ pars, partis (lat.) = Teil

21.8. Gesucht werden die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = e^x \ln(x^2 + y^2).$$

$$\text{Lösung: } z_x = e^x \ln(x^2 + y^2) + e^x \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$z_y = e^x \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

21.9. Wie groß ist der Anstiegswinkel α der Tangente, die die Fläche mit der Gleichung $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ im Punkte $P_0(2; 1; z_0)$ berührt und parallel zur y, z -Ebene verläuft?

Lösung: Die Funktion stellt nach Beispiel 21.4. eine Halbkugel mit dem Radius $r = 3$ dar. Durch Differenzieren nach y , wobei x als Konstante angesehen wird, folgt

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

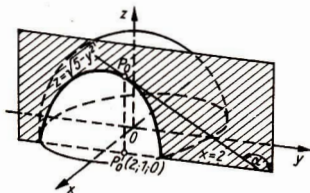


Bild 21.12

Für $x = 2$ muß der Berührungspunkt auf der Kurve mit der Gleichung $z = \sqrt{9 - 4 - y^2} = \sqrt{5 - y^2}$ liegen (Bild 21.12), und der Tangentenanstieg für diese Kurve ist

$$f_y(2; y) = \frac{-y}{\sqrt{5 - y^2}}.$$

Für $y = 1$ folgt dann der Anstieg im gegebenen Punkt P_0 :

$$f_y(2; 1) = \frac{-1}{\sqrt{5 - 1}} = -\frac{1}{2} = \tan \alpha$$

und der gesuchte Winkel mit $\alpha = 153^\circ 26'$.

Die partiellen Ableitungsfunktionen werden nun auch für Funktionen von mehr als zwei Variablen definiert. Die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

besitzt die n ersten partiellen Ableitungsfunktionen

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}.$$

Zur Berechnung von $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ sind alle unabhängigen Variablen außer x_i , das heißt $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, als konstant zu betrachten, und es ist nach x_i zu differenzieren.

BEISPIELE

21.10. Gesucht werden die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$y = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} + x_3 \sin x_1 = f(x_1; x_2; x_3)$$

Lösung:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} + x_3 \cos x_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = \sin x_1.$$

21.11. Ein Kondensator hat die Kapazität C , den Widerstand R und zur Zeit $t_0 = 0$ die Spannung U_0 . Beginnt zur Zeit t_0 die Entladung des Kondensators, so ergibt sich die Stromstärke i zur Zeit t aus

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Es sind die partiellen Ableitungen von i nach U_0 , R , t , C zu bilden.

Lösung:

$$\frac{\partial i}{\partial U_0} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{\partial i}{\partial R} = -\frac{U_0}{R^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \frac{t}{R^2 C} = \frac{U_0}{R^2} e^{-\frac{t}{RC}} \left(\frac{t}{RC} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{1}{RC} \right) = -\frac{U_0}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{\partial i}{\partial C} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \frac{t}{RC^2} = \frac{U_0 t}{R^2 C^2} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Die ersten partiellen Ableitungsfunktionen können (unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit) nochmals partiell differenziert werden. Es entstehen partielle Ableitungen 2. Ordnung bzw. allgemein **partielle Ableitungen höherer Ordnung**. Zum Beispiel ergeben sich für die 2. partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x; y)$ vier Möglichkeiten mit folgenden Schreibweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x; y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x; y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x; y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x; y).$$

Ferner bedeutet z. B.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}(x; y),$$

daß die Funktion $z = f(x; y)$ erst zweimal partiell nach x und anschließend einmal partiell nach y differenziert ist.

BEISPIEL

21.12. Es sind die 1. und 2. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen zu berechnen.

a) $z = x^2 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 + 3x - 4y + 10$

b) $z = 2x^3 \sin 2y$

Lösung:

a) $z_x = 2x + 5y + 3$

$z_y = 5x - y - 4$

$z_{xx} = 2 \quad z_{xy} = 5$

$z_{yz} = 5 \quad z_{yy} = -1$

b) $z_x = 6x^2 \sin 2y$

$z_y = 4x^3 \cos 2y$

$z_{xx} = 12x \sin 2y$

$z_{yz} = 12x^2 \cos 2y$

$z_{xy} = 12x^2 \cos 2y$

$z_{yy} = -8x^3 \sin 2y$

Die Übereinstimmung der beiden „gemischten“ partiellen Ableitungen z_{xy} und z_{yx} in Beispiel 21.12. ist kein Zufall. Allgemein gilt:

Unter der Voraussetzung, daß die partiellen Ableitungsfunktionen einer Funktion stetig sind, ist die Reihenfolge der partiellen Differentiationen gleichgültig.

BEISPIEL

21.13. Für die Funktion $u = x^y \sin z$ ist die Gleichheit der partiellen Ableitungen 3. Ordnung $u_{xyz} = u_{zyx}$ zu zeigen.

Lösung:

$u_x = yx^{y-1} \sin z$

$u_z = x^y \cos z$

$u_{xy} = (x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x) \sin z$

$u_{zy} = x^y \ln x \cos z$

$u_{xyz} = (x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x) \cos z$

$u_{zyx} = \left(yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} \right) \cos z$
 $= (yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}) \cos z$

Kontrollfragen

21.4. Wie werden die partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren unabhängigen Variablen gebildet?

21.5. Welche geometrische Bedeutung haben die partiellen Ableitungen einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen?

Aufgaben: 21.2. bis 21.5.

21.3. Das totale Differential

Der Begriff des Differentials $dy = f'(x) dx$ einer Funktion $f: y = f(x)$ wird auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen erweitert und führt zu dem besonders für die Fehlerrechnung wichtigen Begriff des totalen Differentials.

Werden in der Funktion $z = f(x; y)$ die unabhängigen Variablen x und y um Δx bzw. Δy geändert, dann ändert sich der Funktionswert z um

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Bei zahlreichen Anwendungen ist es notwendig oder vorteilhaft, diese Änderung Δz genähert als **lineare Funktion** von Δx und Δy darzustellen:

$$\Delta z \approx a \Delta x + b \Delta y.$$

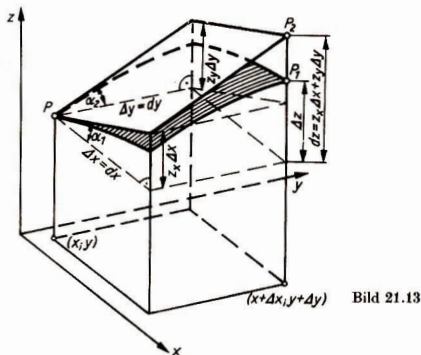


Bild 21.13

Zur Ermittlung der Koeffizienten a und b wird Bild 21.13 betrachtet. Δz bedeutet die Höhenänderung eines Punktes, der auf der Fläche von P nach P_1 verschoben wird. Ein Näherungswert für Δz ist der Höhenzuwachs dz bis zum Punkt P_2 der Tangentialebene, die in P an die Fläche gelegt ist. Die Tangentialebene wird von zwei Tangenten aufgespannt, die in P die Fläche berühren und parallel zur x, z - bzw. y, z -Ebene sind. Die Tangenten haben die Anstiege $\tan \alpha_1 = z_x$ bzw. $\tan \alpha_2 = z_y$. In den rechtwinkligen Dreiecken mit den Ankatheten Δx bzw. Δy sind daher die Gegenkatheten $z_x \Delta x$ bzw. $z_y \Delta y$. Der Höhenzuwachs dz setzt sich nach Bild 21.13 additiv aus diesen Gegenkatheten zusammen:

$$\Delta z \approx dz = z_x \Delta x + z_y \Delta y. \quad (\text{I})$$

Beachtet man, daß wie bei der Funktion von einer Veränderlichen (vgl. 13.4.) hier für die unabhängigen Variablen x und y Differenz und Differential übereinstimmend gewählt werden können: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, dann folgt

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (21.2)$$

dz heißt das **vollständige** oder **totale Differential** der Funktion $z = f(x; y)$. Die Näherung $\Delta z \approx dz$ ist um so besser, je kleiner $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$ sind.

BEISPIELE

- 21.14. Für die Funktion $z = x^2 + 3xy = f(x; y)$ sind Δz und dz zu berechnen und zu vergleichen.

Lösung: Die Funktionsänderung ist

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 - 3xy$$

$$\Delta z = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3xy + 3y\Delta x + 3x\Delta y + 3\Delta x\Delta y - x^2 - 3xy$$

$$\Delta z = (2x + 3y)\Delta x + 3x\Delta y + \Delta x^2 + 3\Delta x\Delta y.$$

Für das totale Differential folgt mit $dx = \Delta x$ und $dy = \Delta y$:

$$dz = z_x \Delta x + z_y \Delta y$$

$$dz = (2x + 3y)\Delta x + 3x\Delta y.$$

Das totale Differential dz enthält im Vergleich zur Funktionsänderung Δz nicht die Summanden Δx^2 und $3\Delta x\Delta y$. Sind nun Δx und Δy gegenüber x und y nur kleine Änderungen, so können Δx^2 und $3\Delta x\Delta y$ als Quadrat bzw. Produkt kleiner Größen gegenüber den anderen Summanden tatsächlich vernachlässigt werden, und es folgt die Näherung $\Delta z \approx dz$.

- 21.15. Für die Funktion $z = 2x - y^2$ sind Δz und dz für $x = 5$, $y = 2$, $dx = 0,4$, $dy = 0,1$ zu berechnen.

Lösung: Der Funktionswert an der Stelle $(5; 2)$ ist

$$z = f(5; 2) = 10 - 4 = 6.$$

Für die Stelle $(x + dx; y + dy) = (5,4; 2,1)$ folgt

$$z_1 = f(5,4; 2,1) = 10,8 - 4,41 = 6,39.$$

Die Änderung des Funktionswertes ist

$$\Delta z = z_1 - z = \underline{\underline{0,39}}.$$

Für das totale Differential ergibt sich

$$dz = 2dx - 2y dy = 0,80 - 0,40 = \underline{\underline{0,40}}.$$

Es ist also $\Delta z \approx dz$.

- 21.16. Nach der Zustandsgleichung eines idealen Gases ergibt sich der Druck eines Gases aus

$$p = \frac{mR}{M} \frac{T}{V}.$$

Darin ist $R = 8314,4 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ die allgemeine Gaskonstante, M ist die molare Masse und m die Masse des Gases, T ist seine Temperatur und V sein Volumen.

In einem Behälter mit dem Volumen $V = 8 \text{ m}^3$ befindet sich Luft mit der Temperatur $T = 288 \text{ K}$ und der Masse $m = 9 \text{ kg}$. Wie groß ist die Druckänderung Δp , wenn die Temperatur um $\Delta T = 1 \text{ K}$ und das Volumen um $\Delta V = 0,03 \text{ m}^3$ vergrößert werden? Die molare Masse der Luft ist $M = 28,96 \text{ kg/kmol}$.

Lösung: Für die Konstante $\frac{mR}{M}$ ergibt sich mit den angegebenen Werten (wobei $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$) $\frac{mR}{M} = 2700 \text{ N} \cdot \text{m/K}$. Der Druck p ist für diese Aufgabe als Funktion der

Variablen T und V anzusehen:

$$p = \frac{mR}{M} \frac{T}{V} = 2700 \frac{\text{N m}}{\text{K}} \frac{T}{V} = f(T; V).$$

Mit dem totalen Differential folgt

$$\Delta p \approx dp = \frac{mR}{M} \frac{1}{V} \Delta T - \frac{mR}{M} \frac{T}{V^2} \Delta V$$

$$\Delta p \approx 2700 \frac{\text{N m}}{\text{K}} \frac{1}{8 \text{ m}^3} 1 \text{ K} - 2700 \frac{\text{N m}}{\text{K}} \frac{288 \text{ K}}{64 \text{ m}^6} 0,03 \text{ m}^3$$

$$\Delta p \approx 337,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 364,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta p \approx -27 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = -27 \text{ Pa}$$

Die Gesamtdruckänderung ist sehr klein, da sich die Teiländerungen des Drucks infolge Vergrößerung der Temperatur und Vergrößerung des Volumens fast aufheben.

Beim Übergang zu Funktionen von n Variablen $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ wird als totales Differential definiert:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad (21.3)$$

Für die Änderung $y = f(x_1 + dx_1; \dots; x_n + dx_n) - f(x_1; \dots; x_n)$ des Funktionswertes y gilt bei kleinen Änderungen $dx_1; \dots; dx_n$ ebenfalls $\Delta y \approx dy$.

BEISPIEL

21.17. Um den Elastizitätsmodul eines bestimmten Stoffes zu ermitteln, wird ein aus diesem Stoff bestehender Stab von der Länge $l_0 = 1,500 \text{ m}$ und mit dem Querschnitt $A = 4 \text{ mm}^2$ durch eine Kraft $F = 620 \text{ N}$ in Längsrichtung gedehnt, so daß der Stab die Länge $l_1 = 1,5035 \text{ m}$ erhält. Der Elastizitätsmodul E berechnet sich dann aus

$$E = \frac{Fl_0}{A(l_1 - l_0)} = 8,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Welchen Einfluß haben die Änderungen $\Delta F = \pm 1 \text{ N}$, $\Delta A = \pm 0,04 \text{ mm}^2$, $\Delta l_0 = \pm 0,2 \text{ mm}$, $\Delta l_1 = \pm 0,2 \text{ mm}$ auf den Elastizitätsmodul E ?

Lösung: E wird als Funktion von F , A , l_0 und l_1 betrachtet, und es wird sein totales Differential berechnet:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial E}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial E}{\partial l_0} \Delta l_0 + \frac{\partial E}{\partial l_1} \Delta l_1$$

$$dE = \frac{l_0}{A(l_1 - l_0)} \Delta F - \frac{Fl_0}{A^2(l_1 - l_0)} \Delta A + \frac{FA(l_1 - l_0) - Fl_0(-A)}{A^2(l_1 - l_0)^2} \Delta l_0 \\ + \frac{-Fl_0 A}{A^2(l_1 - l_0)^2} \Delta l_1$$

$$dE = \frac{l_0}{A(l_1 - l_0)} \Delta F - \frac{Fl_0}{A^2(l_1 - l_0)} \Delta A + \frac{Fl_1}{A(l_1 - l_0)^2} \Delta l_0 \\ - \frac{Fl_0}{A(l_1 - l_0)^2} \Delta l_1.$$

Bei dem Einsetzen der gegebenen Werte ist zu beachten, daß die Änderungen ΔF , ΔA , ΔI_0 , ΔI_1 positiv und negativ sein können. Daher ergibt sich die größtmögliche Änderung dE , wenn die Beträge der Teiländerungen addiert werden:

$$dE = (0,107 + 0,664 + 3,805 + 3,796) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$dE = 8,4 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Die Rechnung zeigt, daß die Änderungen ΔF und ΔA relativ wenig Einfluß auf dE haben, so daß sich auf dE hauptsächlich die Änderungen ΔI_0 und ΔI_1 der Stablängen auswirken.

Kontrollfragen

- 21.6. Was wird unter dem totalen Differential einer Funktion mit der Gleichung $z = f(x; y)$ verstanden und welche geometrische Bedeutung hat es?
- 21.7. Auf welcher Näherung beruht die Anwendungsmöglichkeit des totalen Differentials in der Naturwissenschaft und Technik?

Aufgaben: 21.6. bis 21.12.

21.4. Die Ableitung von Funktionen mit impliziter Darstellung

Die Funktion $f: y = f(x)$ sei durch eine Gleichung in impliziter Form

$$F(x; y) = 0$$

gegeben, und es werde die Ableitungsfunktion $f': y' = f'(x)$ gesucht. Da es in einzelnen Fällen umständlich oder sogar unmöglich ist, durch Auflösen nach y zur expliziten Darstellung der Funktion zu gelangen, wird gezeigt, wie mit Hilfe partieller Ableitungen auch Funktionen mit impliziter Darstellung differenziert werden können (vgl. 14.1.3.).

$F(x; y) = 0$ wird als Sonderfall der Funktionsgleichung $z = F(x; y)$ für $z = 0$ aufgefaßt. Wird $z = F(x; y)$ als Gleichung einer Fläche gedeutet, dann ist $F(x; y) = 0$ die Gleichung der Schnittkurve k zwischen der Fläche und der x, y -Ebene (Bild 21.14). Die gesuchte Ableitung $y' = f'(x)$ ist der Anstieg $\tan \tau$ der Tangente t , die in einem Punkt P an k gelegt ist. t liegt in der zu P gehörenden Tangentialebene der Fläche. $P_1(x + dx; y + dy)$ sei ein Punkt der Tangente t , d. h., dy ist das zu dx gehörige

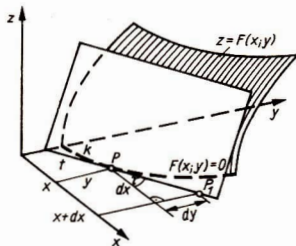


Bild 21.14

Differential der Funktion f . Mit dx und dy folgt für das totale Differential der Funktion F :

$$dz = F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy.$$

Da nach Bild 21.13 das totale Differential dz den Zuwachs bis zur Tangentialebene bedeutet, P_1 aber in der Tangentialebene selbst liegt, ist $dz = 0$:

$$0 = F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy.$$

Die Division durch dx ergibt

$$0 = F_x(x; y) + F_y(x; y) y'$$

und unter der Voraussetzung $F_y(x; y) \neq 0$ folgt

$$y' = - \frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} \quad (21.4)$$

BEISPIEL

21.18. Gegeben ist die Gleichung einer Kurve in impliziter Form

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0. \quad (I)$$

- a) Wie groß ist der Anstiegswinkel τ der Kurventangente in $P_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$?
- b) Wo liegen die Extrempunkte der Kurve?

Lösung:

a) Nach (21.4) ist

$$y' = - \frac{14x - 6\sqrt{3}y}{-6\sqrt{3}x + 26y} = \frac{14x - 6\sqrt{3}y}{6\sqrt{3}x - 26y}. \quad (II)$$

Im Punkt $P_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ ist

$$\begin{aligned} [y']_{x=-\frac{1}{2}} &= \frac{-7-9}{-3\sqrt{3}-13\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \tau \Rightarrow \underline{\underline{\tau = 30^\circ}}. \\ y &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) Für die Extrempunkte muß $y' = 0$ sein. Damit folgt aus (II)

$$\begin{aligned} 14x - 6\sqrt{3}y &= 0 \\ x &= \frac{3}{7}\sqrt{3}y. \end{aligned} \quad (III)$$

x aus (III) in die Kurvengleichung (I) eingesetzt ergibt

$$7 \cdot \frac{9}{49} \cdot 3y^2 - 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{7}\sqrt{3}y^2 + 13y^2 = 16$$

$$y^2 = \frac{7}{4}$$

$$\underline{\underline{y_{E1} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32;}} \quad \underline{\underline{y_{E2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} = -1,32.}}$$

Aus (III) folgt

$$\underline{x_{E_1} = \frac{3}{14} \sqrt{21} = 0,98; \quad x_{E_2} = -\frac{3}{14} \sqrt{21} = -0,98.}$$

Auf die Untersuchung zur Bestimmung der Art der Extremwerte wird verzichtet. Die Kurve stellt eine Ellipse mit $a = 2$, $b = 1$ dar, deren Hauptachse mit der x -Achse einen Winkel von 30° bildet (Bild 21.15). $E_1(0,98; 1,32)$ ist ein Hochpunkt, $E_2(-0,98; -1,32)$ ein Tiefpunkt.

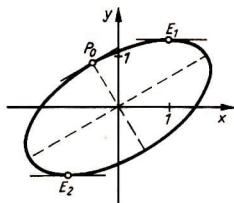


Bild 21.15

Anmerkung: Durch die Kurvengleichung (I) sind jedem x -Wert zwei y -Werte zugeordnet. (I) stellt die Zusammenfassung von zwei Funktionsgleichungen dar.

Aufgaben: 21.13. bis 21.17.

21.5. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler

Die aus 15.2.1. bekannte Bestimmung von Extremwerten einer Funktion $y = f(x)$ wird auf Funktionen von mehreren Variablen übertragen. Der Sachverhalt wird wieder ohne strenge analytische Herleitung anschaulich für Funktionen von zwei unabhängigen Variablen am Bild der Funktion erklärt und dann sinngemäß auf Funktionen von beliebig vielen Variablen erweitert.

Zum Bild der Funktion $z = f(x; y)$ gehöre der in Bild 21.16 dargestellte Flächenteil. Auf ihm soll ein Punkt $E(x_E; y_E; z_E)$ existieren, der höher liegt als jeder Punkt seiner Umgebung. Hierzu folgende Überlegung: Unter der Umgebung der Stelle $(x_E; y_E)$ soll ein Teilbereich U des Definitionsbereiches verstanden werden, der die Stelle $(x_E; y_E)$ im Inneren enthält. Das Bild von U wird im einfachsten Fall als die Fläche eines in der x, y -Ebene liegenden Kreises mit dem Mittelpunkt $E'(x_E; y_E)$ gedacht, dessen Radius beliebig klein gewählt werden kann. Für jeden Punkt $P(x; y; z)$ mit $(x; y) \in U$ gilt dann $z_E > z$. Bild 21.17 zeigt eine zur Funktion $z = f(x; y)$ gehörige Fläche, auf der ein Punkt E existiert, der tiefer liegt als jeder Punkt seiner Umgebung. Hier gilt für jeden Punkt $P(x; y; z)$ mit $(x; y) \in U$ die Ungleichung $z_E < z$.

Definition

Die Funktion $z = f(x; y)$ besitzt an der Stelle $(x_E; y_E)$ ein (relatives)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\} z_E = f(x_E; y_E), \text{ wenn } f(x_E; y_E) \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} f(x; y) \text{ für alle } (x; y) \in U.$$

Jede in der Fläche liegende und durch E gehende Kurve hat in E einen Maximum- bzw. Minimumpunkt und daher zur x, y -Ebene parallele Tangenten. Werden speziell die Kurven k_1, k_2 parallel zur x, z - bzw. y, z -Ebene betrachtet, so folgt für die Anstiege:

$$\tan \alpha_1 = f_x(x_E; y_E) = 0, \quad \tan \alpha_2 = f_y(x_E; y_E) = 0. \quad (I)$$

Aus den zwei Gleichungen (I) können bei gegebener Funktion $z = f(x; y)$ die zwei unbekannten Koordinaten x_E, y_E der Extremstelle berechnet werden. Die Gleichungen (I) sind jedoch nur notwendig für das Vorhandensein eines Extremums, aber nicht hinreichend. Zum Beispiel ist der Sattelpunkt S der in Bild 21.18 gezeigten Sattelfläche sowohl der Maximumpunkt der Kurve k_1 als auch der Minimumpunkt der Kurve k_2 . Obwohl also die Tangenten an beide Kurven in S parallel zur x, y -Ebene und damit die partiellen Ableitungen gleich Null sind, ist S kein Maximum- oder Minimumpunkt der Fläche. Ohne Beweis werden daher noch weitere Bedingungen hinzugefügt, so daß sich die folgenden **notwendigen und hinreichenden Bedingungen** für das Vorhandensein eines Extremwertes und für die Unterscheidung von Maximum und Minimum ergeben:

Existenz eines Extremwertes: $\begin{cases} f_x(x_E; y_E) = 0, f_y(x_E; y_E) = 0 \\ f_{xx}(x_E; y_E) \cdot f_{yy}(x_E; y_E) - f_{xy}^2(x_E; y_E) > 0 \end{cases}$ Maximum: $f_{xx}(x_E; y_E) < 0$ (und damit auch $f_{yy}(x_E; y_E) < 0$) Minimum: $f_{xx}(x_E; y_E) > 0$ (und damit auch $f_{yy}(x_E; y_E) > 0$)	(21.5)
---	--------

Ist $f_{xx}(x_E; y_E) \cdot f_{yy}(x_E; y_E) - f_{xy}^2(x_E; y_E) < 0$, dann ist kein Extremwert vorhanden. Für $f_{xx}(x_E; y_E) \cdot f_{yy}(x_E; y_E) - f_{xy}^2(x_E; y_E) = 0$ kann ein Extremwert existieren oder nicht existieren. Dieser Fall wird hier nicht weiter betrachtet.

BEISPIELE

21.19. Es sind die Extremwerte der Funktion $z = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5 = f(x; y)$ zu berechnen.

Lösung: Aus den zwei Gleichungen

$$f_x(x; y) = 6x^2 + 4y = 0$$

$$f_y(x; y) = 4x - 6y^2 = 0$$

errechnen sich für die möglichen Extremwerte die Stellen

$$(x_{E1}; y_{E1}) = (0; 0), \quad (x_{E2}; y_{E2}) = (2/3; -2/3).$$

Die zweiten Ableitungen lauten

$$f_{xx}(x; y) = 12x; \quad f_{yy}(x; y) = -12y; \quad f_{xy}(x; y) = 4.$$

Für die Stelle $(x_{E1}; y_{E1}) = (0; 0)$ ergibt sich

$$f_{xx}(0; 0) \cdot f_{yy}(0; 0) - f_{xy}^2(0; 0) = 0 \cdot 0 - 16 < 0.$$

An dieser Stelle liegt also kein Extremwert vor.

Für die Stelle $(x_{E2}; y_{E2}) = (2/3; -2/3)$ folgt

$$f_{xx}(2/3; -2/3) \cdot f_{yy}(2/3; -2/3) - f_{xy}^2(2/3; -2/3) = 48 > 0.$$

An dieser Stelle existiert ein Extremwert, und zwar wegen

$$f_{xx}(2/3; -2/3) = 8 > 0$$

ein Minimum. Der minimale Funktionswert ist

$$z_E = f(2/3; -2/3) = \frac{119}{27}.$$

- 21.20. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die drei Punkte $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ durch ihre Koordinaten gegeben. Ein Punkt $M(x_M; y_M)$ ist so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den drei Punkten ein Minimum wird.

Lösung: Mit der Bezeichnung des Bildes 21.19 soll also das Minimum der Funktion

$$g(u; v; w) = u^2 + v^2 + w^2$$

bestimmt werden. Werden u, v, w durch Koordinaten ausgedrückt, dann heißt die Funktion

$$f(x; y) = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2.$$

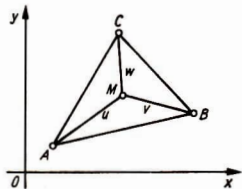


Bild 21.19

Aus den partiellen Ableitungen

$$f_x(x; y) = 2(x - x_A) + 2(x - x_B) + 2(x - x_C) = 0$$

$$f_y(x; y) = 2(y - y_A) + 2(y - y_B) + 2(y - y_C) = 0$$

folgt

$$\underline{x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.}$$

M ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Wegen

$$f_{xx}(x_M; y_M) \cdot f_{yy}(x_M; y_M) - f_{xy}^2(x_M; y_M) = 36 > 0,$$

$$f_{xx}(x_M; y_M) = 6 > 0$$

liegt tatsächlich ein Minimum vor.

- 21.21. Ein oben offener Behälter in Form eines Quaders hat das Volumen V . Wie sind die Kantenlängen x, y und z zu wählen, damit die Oberfläche und damit der Materialverbrauch ein Minimum werden?

Lösung: Sind x, y die Kanten der Grundfläche und ist z die Höhe des Behälters, dann folgt für die Oberfläche

$$O = xy + 2xz + 2yz = f(x; y; z).$$

Eine Nebenbedingung zwischen x, y, z folgt aus der Formel für das gegebene Volumen V :

$$V = xyz \quad \text{oder} \quad z = \frac{V}{xy}. \quad (\text{II})$$

Damit lautet die Zielfunktion

$$O = xy + 2 \frac{V}{y} + 2 \frac{V}{x} = f(x; y).$$

Die beiden partiellen Ableitungen werden gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial O}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \quad (\text{III})$$

$$\frac{\partial O}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \quad (\text{IV})$$

Durch Umstellen der Gleichungen (III) und (IV) und Gleichsetzen folgt:

$$2V = yx^2 = xy^2$$

und wegen $x \neq 0$ und $y \neq 0$:

$$x = y, \quad (\text{V})$$

das heißt, die Grundfläche ist quadratisch. Mit (V) folgt aus (III):

$$x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

$$\underline{\underline{x_E = y_E = \sqrt[3]{2V}}}$$

Die Höhe z ergibt sich aus (II)

$$z_E = \frac{V}{x_E y_E} = \frac{V}{\sqrt[3]{2V} \sqrt[3]{2V}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{4V^2}} = \sqrt[3]{\frac{2V}{8}}$$

$$\underline{\underline{z_E = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V} = \frac{1}{2} x_E}}$$

Die Oberfläche des angegebenen Behälters ist unter den angegebenen Bedingungen ein Minimum, wenn die Höhe halb so groß ist wie die Seite der quadratischen Grundfläche.

Die Bestimmung der Extremwerte läßt sich auf Funktionen von mehr als zwei Variablen übertragen. Ist die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

von n unabhängigen Variablen gegeben, dann werden die n partiellen Ableitungen gebildet und einzeln gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0. \quad (\text{VI})$$

Aus den n Gleichungen (VI) lassen sich die n Werte $x_{1E}; x_{2E}; \dots; x_{nE}$ der Extremstelle und damit der extreme Funktionswert $y_E = f(x_{1E}; x_{2E}; \dots; x_{nE})$ berechnen. Die Gleichungen (VI) sind wieder nur notwendige Bedingungen. Auf hinreichende Bedingungen kann für $n > 2$ im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen werden.

Bei eingekleideten Aufgaben geht meist schon aus der Aufgabenstellung die Existenz und Art des Extremwertes hervor.

BEISPIEL

21.22. Es ist der Extremwert der Funktion $y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 + 2x_3$ zu berechnen.

Lösung: Aus dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 2x_3 + 2 = 0$$

folgt

$$x_{1E} = -\frac{2}{3}; \quad x_{2E} = -\frac{1}{3}; \quad x_{3E} = -1 \quad \text{und damit} \quad \underline{\underline{y_E = -\frac{4}{3}}}.$$

Es läßt sich zeigen (u. a. durch Betrachtung der benachbarten Funktionswerte), daß ein Minimum vorliegt.

Kontrollfragen

- 21.8. Wie werden Extremwerte einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen mit der Gleichung $z = f(x; y)$ an einer Stelle $(x_E; y_E)$ definiert, und welche geometrische Bedeutung haben sie?
- 21.9. Welche Bedingungen sind a) notwendig, b) hinreichend für die Existenz eines Extremwertes einer Funktion mit der Gleichung $z = f(x; y)$? Welche geometrische Bedeutung haben die notwendigen Bedingungen?

Aufgaben: 21.18. bis 21.21.**21.6. Aufgaben**

- 21.1. Welches Bild hat die Funktion $z = -\frac{1}{2}x - 2y + 2$?
- 21.2. Es ist die Ableitung z_x der Funktion $z = x^2 + y^2$ an der Stelle $(x_0; y_0) = (1; 1)$ zu berechnen und das Ergebnis anschaulich entsprechend Bild 21.12 darzustellen.
- 21.3. Die 1. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen sind zu berechnen:
- a) $z = x^3 - 8x^2y + xy^2 + 15x - 20y + 2$ b) $u = x^5 + 6x^2y - 2x^2yz + 3yz^3$
- c) $z = \frac{3x^2 + 2xy^2}{1 - x}$ d) $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$
- e) $z = \cos(x + y) \cos(x - y)$ f) $z = \arctan \frac{y}{x}$
- g) $v = v_0 \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t) = f(p; t)$ h) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = f(l; g)$
- i) $I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = f(R_1; R_2)$ j) $z = y e^{\frac{x}{y}}$ k) $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = f(m_1; m_2; r)$
- 21.4. Die 1. und 2. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen sind zu berechnen:
- a) $z = x^5 + 2x^2y^3 + 2y^5$ b) $u = xy + yz + zx$ c) $z = \frac{x - y}{x + y}$

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = 2 \sin(x + y) \cos(x - y)$

f) $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

g) $z = \ln \frac{x+y}{x-y}$

21.5. Für die Funktion $u = e^{xyz}$ ist die partielle Ableitung 3. Ordnung u_{xyz} zu bilden.

21.6. Für die Funktion $z = \frac{x^2}{y}$ sind Δz und dz an der Stelle $(x; y) = (12; -3)$ für $dx = dy = 0,2$ zu berechnen.

21.7. Für die Funktion $u = xy + yz + zx$ sind Δu und du an der Stelle $(x; y; z) = (2; 3; 1)$ für $dx = 0,1$, $dy = -0,2$, $dz = 0,2$ zu bestimmen.

21.8. Man berechne das totale Differential dz der Funktion $e^x \sin(x - y)$ für $x = 1,4$; $y = 0,8$; $dx = 0,2$; $dy = 0,1$.

21.9. Es ist das totale Differential für jede der folgenden Funktionen anzugeben:

a) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

b) $z = x^y$

c) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

d) $z = \arctan xy$

e) $v = \frac{R}{p} (1 + \alpha t) = f(t; p)$

f) $F = m \frac{v^2}{r} = f(m; v; r)$

g) $v = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = f(m_1; m_2)$

21.10. Um welchen Wert ändert sich die Fläche A eines Dreiecks mit $a = 10$ m, $b = 16$ m, $\gamma = 60^\circ$, wenn die Änderungen $\Delta a = \Delta b = 0,2$ m, $\Delta \gamma = 1^\circ$ gegeben sind? (Zum Vergleich sind ΔA und dA zu berechnen.)

21.11. Man bestimme für die Zentrifugalkraft $z = mv^2 r^{-1}$ das totale Differential dz für die Werte $m = 300$ g, $v = 6$ m/s, $r = 1$ m, $\Delta v = 0,1$ m/s, $\Delta r = 0,01$ m.

21.12. Man berechne für den Abstand r eines Punktes $P(x; y)$ vom Punkt $P_1(3; 5)$ das totale Differential dr mit den Werten $x = 12$, $y = 2$, $dx = 0,2$, $dy = -0,1$.

21.13. Wie groß ist der Neigungswinkel der Tangente, die im Punkt $P_0(1; 2)$ an die Kurve mit der Gleichung $x^4 - 3x^2y + y^3 - 3 = 0$ gelegt ist?

21.14. Unter welchen Neigungen schneidet die Kurve mit der Gleichung

$$2y^3 + 6x^3 - 24x + 6y = 0$$

die x -Achse?

21.15. Gegeben ist eine Kurve durch die Gleichung $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8 = 0$. In welchen Punkten ist der Anstiegswinkel $\tau = 45^\circ$?

21.16. Unter welchen Winkeln schneiden einander die Kurven mit den Gleichungen

$$x^2 + 4y^2 - 100 = 0 \text{ und } x^2 - y^2 - 20 = 0?$$

21.17. In welchen Punkten hat die Kurve mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 31 = 0$ a) waagerechte und b) senkrechte Tangenten?

21.18. Die Extremstellen und -werte der folgenden Funktionen sind zu ermitteln:

a) $z = x^2 - xy + y^2 + 3y$

b) $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 8$

c) $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7$

d) $z = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

e) $z = x^2 y^2 (1 - x - y)$

f) $z = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$

$$g) z = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad \text{für } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

21.19. Eine Strecke l ist so in 3 Teile zu teilen, daß deren Produkt ein Maximum ist.

- 21.20. Das Volumen eines Quaders sei V . Wie groß müssen die Kanten sein, damit die Oberfläche ein Minimum wird?
- 21.21. Von einem Quader ist die Summe $s = a + b + c$ der Kantenlängen a, b, c gegeben. Wie sind die Längen der Kanten zu wählen, damit die Oberfläche ein Maximum wird?

21.22. Es sind die partiellen Ableitungen der Funktion $T_1 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} = f(V_1; V_2)$ zu bilden.

21.23. Für die Funktion $u = (x - y)^2$ ist die Gleichheit $u_{xyz} = u_{zyx}$ zu zeigen.

21.24. Für die Funktion $u = x^2 \ln \sin(y - z)$ ist die Richtigkeit der Gleichungen a) $u_{xyz} = u_{zyx}$, b) $u_{yyz} = u_{zyy}$ nachzuweisen.

21.25. Es ist zu zeigen, daß die Funktion $z = e^y \arcsin(x - y)$ die Beziehung $z_x + z_y = z$ erfüllt.

21.26. Mit der Funktion $z = \frac{x}{y}$ ist der Ausdruck $xz_x + yz_y$ zu berechnen.

21.27. Es ist zu zeigen, daß die Funktion $z = e^{\frac{x}{y}}$ die Gleichung $xz_x = yz_y = 0$ erfüllt.

21.28. Es ist das totale Differential für jede der folgenden Funktionen zu bilden.

$$\text{a) } u = \ln \tan \frac{x}{y} \quad \text{b) } u = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}} \quad \text{c) } T_1 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} = f(p_1; p_2)$$

21.29. Der Luftdruck p in der Höhe h über einer Bezugsfläche ist

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \quad (p_0: \text{Luftdruck für } h = 0, \rho_0: \text{Dichte der Luft für } h = 0)$$

Gesucht wird das totale Differential für $p_0 = 1013 \cdot 10 \text{ N/m}^2$, $dp_0 = 1 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 1,205 \text{ kg/m}^3$, $d\rho_0 = 0,002 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,807 \text{ m/s}^2$, $dg = 0,005 \text{ m/s}^2$, $h = 164 \text{ m}$, $dh = 1 \text{ m}$.

21.30. In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ gegeben. Die Strecke $s = \overline{P_1 P_2}$ hat den Anstiegswinkel α . Der Punkt P_2 werde in Richtung der x -Achse um Δx_2 und in Richtung der y -Achse um Δy_2 verschoben. Die hieraus folgende Änderung $\Delta \alpha$ des Anstiegswinkels ist genähert als lineare Funktion von Δx_2 und Δy_2 darzustellen.

21.31. Es sind die Extremwerte der Funktion $z = e^{\frac{x}{4}}(x + y^2)$ zu berechnen.

21.32. Gegeben ist die Summe $2s = a + b + c$ der Seiten eines Dreiecks. Wie groß müssen die Seiten a, b, c gewählt werden, damit die Dreiecksfläche A ein Maximum wird?

21.33. Welches Dreieck hat in einem Kreis mit dem Radius r den größten Flächeninhalt?

21.34. Ein Kanal hat einen trapezförmigen Querschnitt, dessen Fläche A gegeben ist (Bild 21.20). Wie müssen Höhe h und Böschungswinkel α gewählt werden, damit der benetzte Umfang U (gestrichelte Linie) ein Minimum wird?

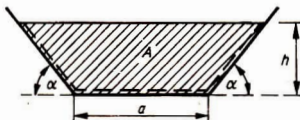


Bild 21.20

22. Fehlerrechnung

22.0. Vorbemerkung

Eine für den Ingenieur wichtige Anwendung des totalen Differentials bietet die Fehlerrechnung. Mit ihrer Hilfe sollen eine richtige Einschätzung von Meßergebnissen gesichert und damit Über- oder Unterschätzungen der Meßgenauigkeit vermieden werden. Es wird gezeigt, wie sich die zufälligen Meßfehler auf Größen, die aus den gemessenen berechnet wurden, auswirken. Diese Fehlerfortpflanzung wird für Maximalfehler und für Standardabweichungen behandelt. Als einfaches Beispiel der Ausgleichsrechnung wird die lineare Regression sowie die Berechnung einer linearen Trendfunktion behandelt.

22.1. Maximalfehler und ihre Fortpflanzung

Bei der Messung von Größen, z. B. Strecken, Temperaturen oder Stromstärken, wird der erhaltene Meßwert im allgemeinen nicht mit dem wahren Wert der Größe übereinstimmen. Es treten Meßfehler auf, die in 3 Gruppen eingeteilt werden.

Grobe Fehler ergeben sich meist durch Unaufmerksamkeit des Messenden oder Verwendung eines schadhafte Instrumentes. Sie liegen weit über der erreichbaren Meßgenauigkeit. So ist z. B. ein Meßfehler von 2 Volt bei einer Messung mit einem Volt-

meter, das eine Ablesegenauigkeit von $\frac{1}{20}$ V hat, ein grober Fehler. Grobe Fehler

werden durch Messungs- und Rechenproben erkannt. Sie gehören zu den vermeidbaren Fehlern.

Systematische Fehler sind nicht immer vermeidbar und haben ihre Ursache hauptsächlich in gewissen Mängeln des verwendeten Instrumentes bzw. in der Art des Meßvorgangs. Ist z. B. ein Meßband von 20 m Länge um 1 cm zu kurz, so wird bei

der Messung einer Strecke von 250 m ein Fehler von $\frac{250 \text{ m}}{20 \text{ m}} \cdot 1 \text{ cm} = 12,5 \text{ cm}$ ge-

macht. Ein systematischer Fehler tritt auch auf, wenn ein Thermometer einen Nullpunktfehler besitzt und etwa alle Temperaturen um 2 K zu klein angibt. Systematische Fehler können meist rechnerisch erfaßt und nach der Messung durch Anbringung einer Reduktion berücksichtigt werden.

Zufällige Fehler ergeben sich aus dem Zusammenwirken zahlreicher Fehlerursachen, die vom Messenden nicht erfaßt und beseitigt werden können, und sind daher nicht vermeidbar. Die Fehlerursachen sind Mängel im Instrument, die trotz aller Sorgfalt bei der Herstellung auftreten, Unvollkommenheit der Meßmethoden, persönliche Fehler des Beobachters, z. B. Augenfehler, Witterungseinflüsse usw. Die auftretenden kleinen Teilfehler ergeben sich mit einer ähnlichen Zufälligkeit wie die Zahlen 1 bis 6 beim Würfelspiel. Wie die Teilfehler bleibt auch der aus ihrer Vereinigung

entstehende zufällige Fehler, der auch **Meß-** oder **Beobachtungsfehler** heißt, unbekannt. Man begnügt sich mit genäherten Werten. Im folgenden wird nur dieser Meßfehler betrachtet.

In der Fehlerrechnung gibt es zwei grundlegende Aufgaben: Sind die Fehler gemessener Größen näherungsweise bekannt, etwa geschätzt, und werden aus den gemessenen Größen andere berechnet, dann ist zu zeigen, wie sich die Meßfehler auf die zu berechnenden Größen auswirken. Hierdurch wird verhindert, daß bei der Rechnung eine nicht vorhandene Genauigkeit vorgetäuscht wird, also z. B. Dezimalstellen berechnet werden, die wegen der Meßfehler nicht gesichert sind.

Wird umgekehrt vorgeschrieben, mit welcher Genauigkeit eine Größe aus Messungen zu berechnen ist, dann lassen sich mit Hilfe der Fehlerrechnung die einzuhaltenden Meßfehler bestimmen und Entscheidungen über die zu verwendenden Instrumente und Meßmethoden treffen.

X sei der wahre Wert einer zu messenden Größe und x der erhaltene Meßwert. Als **wahrer Fehler** der Messung wird

$$\varepsilon = x - X$$

definiert. ε ist ein zufälliger Fehler. Mit dem wahren Wert X bleibt auch der wahre Fehler ε unbekannt. Daher wird ε abgeschätzt, wobei die Ablesegenauigkeit des Meßinstrumentes, das Streuen der Meßwerte x bei mehreren Messungen sowie die Erfahrungen des Messenden die Grundlage bilden. Der geschätzte Wert von ε wird mit Δx bezeichnet und soll der Bedingung

$$|\varepsilon| \leq |\Delta x|$$

genügen. Wegen dieser Ungleichung wird Δx als **Maximalfehler der Meßgröße** bezeichnet.

Δx wird mit doppelten Vorzeichen angegeben. Durch die Schreibweise $X = x + \Delta x$ wird ausgedrückt, daß der wahre Wert X mit großer Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$x - |\Delta x| < X < x + |\Delta x|$$

liegt. Häufig interessiert nicht der Fehler Δx selbst, sondern sein Verhältnis zu der zu messenden Größe. In diesem Zusammenhang heißt

Δx der absolute Maximalfehler der Meßgröße

$\frac{\Delta x}{x}$ der relative Maximalfehler der Meßgröße

Der relative Maximalfehler wird meist in Prozent angegeben. In diesem Abschnitt ist unter Meßfehler stets der Maximalfehler zu verstehen.

BEISPIELE

22.1. An einem Voltmeter wurde eine Spannung von $u = 42,9$ V abgelesen und der Meßfehler mit $\Delta u = \pm 0,3$ V geschätzt. Dann ist $U = (42,9 \pm 0,3)$ V, d. h., der wahre Wert ist im Intervall $42,6$ V $< U < 43,2$ V zu erwarten; der relative Fehler ist $\frac{\Delta u}{u} = \frac{\pm 0,3 \text{ V}}{42,9 \text{ V}} = \pm 0,007 = \pm 0,7\%$.

22.2. Die Messungen der Strecken s_2 und s_1 ergaben die Meßwerte $s_1 = 622,60$ m, $s_2 = 280,70$ m. Die absoluten Fehler sind $\Delta s_1 = \pm 20$ cm, $\Delta s_2 = \pm 15$ cm. Für die relativen Fehler

folgt

$$\frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\pm 0,20 \text{ m}}{622,60 \text{ m}} = \pm 0,00032$$

$$\frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\pm 0,15 \text{ m}}{280,70 \text{ m}} = \pm 0,00053.$$

Die relativen Fehler zeigen besser als die absoluten Fehler, daß der ersten Messung eine größere Genauigkeit als der zweiten innewohnt.

Häufig läßt sich eine Größe nicht unmittelbar messen, sondern sie muß aus anderen, durch Messung erhaltenen Größen berechnet werden.

Die Größe Y sei von den k Größen $X_1, X_2, \dots, X_k$ abhängig:

$$Y = f(X_1; X_2; \dots; X_k). \quad (\text{I})$$

Die Messungen der X_i haben die Werte x_i ergeben, mit denen nach (I) der Wert

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_k)$$

berechnet wird. Zu jedem Meßwert x_i gehört ein Meßfehler Δx_i , d. h., $X_i = x_i + \Delta x_i$. Es ist festzustellen, wie sich diese Meßfehler auf die Genauigkeit der berechneten Größe y auswirken, d. h. wie groß Δy als Maß für die zu erwartende Abweichung vom wahren Wert Y ist. Aus (I) folgt

$$Y = y + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1; \dots; x_k + \Delta x_k)$$

und nach dem totalen Differential, da die Δx_i relativ klein sind,

$$\Delta y \approx dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \Delta x_k. \quad (\text{II})$$

Wegen der doppelten Vorzeichen der Δx_i wird sicherheitshalber der ungünstigste Fall angenommen, daß sich in (II) alle Fehleranteile summieren. Das führt zur Definition des **absoluten Maximalfehlers der berechneten Größe**:

$$\Delta y_{\max} = \pm \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_k} \Delta x_k \right| \right) \quad (22.1)$$

Dieses Fortpflanzungsgesetz der Maximalfehler der gemessenen Größen ist von dem Fortpflanzungsgesetz der Standardabweichungen zu unterscheiden (vgl. 22.4.).

Ist $y = f(x)$ eine Funktion von einer unabhängigen Variablen und hat x den Maximalfehler Δx , dann ergibt sich der Maximalfehler Δy als Sonderfall von (22.1):

$$\Delta y = f'(x) \Delta x \quad (22.2)$$

Aus (22.1) folgt der **relative Maximalfehler der berechneten Größe**:

$$y_r = \frac{\Delta y_{\max}}{y} \quad (22.3)$$

Für den Fehler werden höchstens ein oder zwei Ziffern angegeben (ohne die Nullen vor bzw. nach dem Komma). Bei der Berechnung von Fehlern wird stets aufgerundet. Nach der Größe des Fehlers Δy richtet sich die Stellenzahl, mit der y selbst angegeben wird.

BEISPIELE

- 22.3. Zur Bestimmung der nicht meßbaren Strecke $\overline{AB} = c$ wurde ein Hilfspunkt C gewählt, und dann wurden die Strecken $a = 364,76$ m, $b = 402,35$ m und der Winkel $\gamma = 68^\circ 14'$ gemessen (Bild 22.1). Die Meßfehler wurden mit $\Delta a = \Delta b = \pm 5$ cm, $\Delta \gamma = \pm 1'$ geschätzt. Wie groß ist c und sein absoluter Maximalfehler?

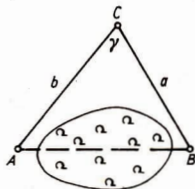


Bild 22.1

Lösung: c ergibt sich als Funktionswert der gemessenen Größen aus

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = f(a; b; \gamma) \quad (\text{III})$$

mit $c = 431,38$ m. Nach (22.1) folgt

$$\Delta c_{\max} = \pm \left(\left| \frac{\partial c}{\partial a} \Delta a \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial b} \Delta b \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial \gamma} \Delta \gamma \right| \right).$$

Nach der Bildung der partiellen Ableitungen wird die Wurzel nach (III) durch c ersetzt:

$$\Delta c_{\max} = \pm \left(\left| \frac{a - b \cos \gamma}{c} \Delta a \right| + \left| \frac{b - a \cos \gamma}{c} \Delta b \right| + \left| \frac{ab \sin \gamma}{c} \Delta \gamma \right| \right).$$

Die einzusetzenden Zahlenwerte können auf drei Ziffern gerundet werden, $\Delta \gamma$ ist im Bogenmaß anzugeben:

$$\Delta c_{\max} = \pm \left(\frac{365 - 402 \cdot 0,371}{431} 0,05 + \frac{402 - 365 \cdot 0,371}{431} 0,05 + \frac{365 \cdot 402 \cdot 0,929}{431} 0,000291 \right) \text{ m}$$

$$\Delta c_{\max} = \pm (0,025 + 0,031 + 0,092) \text{ m}$$

$$\Delta c_{\max} = \pm 0,148 \text{ m} \approx \pm 0,15 \text{ m}.$$

Für die Strecke c folgt damit

$$c = (431,38 \pm 0,15) \text{ m}.$$

- 22.4. Zur Berechnung eines elektrischen Widerstandes R wurden die Stromstärke $I = (15 \pm 0,3)$ A und die Spannung $U = (110 \pm 2)$ V gemessen. Gesucht wird der relative Maximalfehler von R .

Lösung: Nach dem OHmschen Gesetz gilt

$$R = \frac{U}{I} = f(U; I).$$

Für den absoluten Maximalfehler von R folgt

$$\Delta R_{\max} = \pm \left(\left| \frac{\partial R}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \Delta I \right| \right) = \pm \left(\left| \frac{\Delta U}{I} \right| + \left| \frac{U}{I^2} \Delta I \right| \right). \quad (\text{IV})$$

Zur Bestimmung des relativen Maximalfehlers wird (IV) durch R geteilt und für die Vereinfachung $IR = U$ gesetzt:

$$\Delta R_r = \frac{\Delta R_{\max}}{R} = \pm \left(\left| \frac{\Delta U}{IR} \right| + \left| \frac{U}{I^2 R} \Delta I \right| \right) = \pm \left(\left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right| \right).$$

$$\Delta R_r = \pm \left(\frac{2}{110} + \frac{0,3}{15} \right) \approx \underline{\underline{\pm 0,04}}.$$

Ist die der Fehlerrechnung zugrunde liegende Funktion speziell das Produkt aus mehreren Funktionen von je einer Variablen:

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_k) = \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi_k(x_k), \quad (\text{V})$$

dann ergibt sich der relative Maximalfehler leichter durch Differentiation nach Logarithmieren (vgl. 14.3.3.). Der analytische Ausdruck (V) wird logarithmiert:

$$\ln y = \ln \varphi_1(x_1) + \ln \varphi_2(x_2) + \dots + \ln \varphi_k(x_k)$$

und das totale Differential von $\ln y$ berechnet:

$$d(\ln y) = \frac{dy}{y} = \frac{\varphi_1'(x_1)}{\varphi_1(x_1)} dx_1 + \frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_2(x_2)} dx_2 + \dots + \frac{\varphi_k'(x_k)}{\varphi_k(x_k)} dx_k.$$

Werden die Differentiale dy , dx_1 , ... durch die Fehler Δy , Δx_1 , ... ersetzt, dann folgt der relative Maximalfehler aus

$$\Delta y_r = \frac{\Delta y_{\max}}{y} = \pm \left(\left| \frac{\varphi_1'(x_1)}{\varphi_1(x_1)} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_2(x_2)} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\varphi_k'(x_k)}{\varphi_k(x_k)} \Delta x_k \right| \right).$$

BEISPIELE

22.5. Von einem Zylinder wurden der Durchmesser $D = (4,84 \pm 0,01)$ cm, die Höhe $h = (6,74 \pm 0,01)$ cm und durch Wägung die Masse $m = (968,5 \pm 0,1)$ g bestimmt. Mit welchem relativen Maximalfehler läßt sich daraus die Dichte ρ berechnen?

Lösung: Es ist

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h} = \frac{4}{\pi} m \cdot \frac{1}{D^2} \cdot \frac{1}{h} = \frac{4}{\pi} \varphi_1(m) \cdot \varphi_2(D) \cdot \varphi_3(h).$$

Mit den oben angegebenen Operationen folgt schrittweise

$$\begin{aligned} \ln \rho &= \ln \frac{4}{\pi} + \ln m - 2 \ln D - \ln h \\ d(\ln \rho) &= \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{2dD}{D} - \frac{dh}{h} \\ \Delta \rho_r &= \pm \left(\left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{2\Delta D}{D} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| \right) \\ &= \pm \left(\frac{0,1}{970} + \frac{2 \cdot 0,01}{4,84} + \frac{0,01}{6,74} \right) = \pm (0,0001 + 0,0041 + 0,0015) \\ &= \underline{\underline{\pm 0,0057}} \approx \underline{\underline{\pm 0,6\%}}. \end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, daß der Fehler der Wägung gegen die Längenmeßfehler vernachlässigt werden kann und eine weitere Genauigkeitssteigerung für g nur durch genauere Volumenbestimmung möglich ist.

- 22.6. Aus der Länge $l = 118,5$ cm und der Periodendauer $T = 2,180$ s eines mathematischen Pendels soll die Fallbeschleunigung g berechnet werden. Wie genau sind l und T zu bestimmen, damit der Betrag des absoluten Maximalfehlers von g nicht mehr als 1 cm/s² beträgt?

Lösung: Obgleich die Fehler Δl und ΔT der zu messenden Größen gesucht werden und $\Delta g_{\max}$ gegeben wird, ist zunächst die Formel für $\Delta g_{\max}$ aufzustellen.

Aus $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = f(l; T)$ folgt

$$|\Delta g_{\max}| = \left| \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l \right| + \left| \frac{-8\pi^2 l}{T^3} \Delta T \right| \leq 1 \text{ cm/s}^2. \quad (\text{VI})$$

Es wird festgelegt, Δl und ΔT so zu bestimmen, daß die beiden Summanden in (VI) je zur Hälfte zum Fehler $|\Delta g_{\max}|$ beitragen:

$$\left| \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l \right| \leq 0,5 \text{ cm/s}^2 \Rightarrow |\Delta l| \leq \frac{T^2}{4\pi^2} 0,5 \text{ cm/s}^2 = 0,06 \text{ cm}$$

$$\left| \frac{8\pi^2 l}{T^3} \Delta T \right| \leq 0,5 \text{ cm/s}^2 \Rightarrow |\Delta T| \leq \frac{T^3}{8\pi^2 l} 0,5 \text{ cm/s}^2 = 0,00055 \text{ s}.$$

Die Pendellänge müßte annähernd auf einen halben Millimeter und die Periodendauer auf 6 Zehntausendstel Sekunden bestimmt werden, um die geforderte Genauigkeit für g einzuhalten.

Kontrollfragen

- 22.1. Welche Fehler sind bei Messungen möglich, und auf welche Fehlerart bezieht sich die Fehlerrechnung in diesem Abschnitt?
- 22.2. Wie werden absolute Maximalfehler einer Meßgröße und absolute Maximalfehler einer aus Meßwerten berechneten Größe erklärt?
- 22.3. Wann werden zweckmäßig relative Maximalfehler verwendet?

Aufgaben: 22.1. bis 22.11.

22.2. Kleinste Quadratsumme

Der Maximalfehler (Größtfehler) ist eine anschauliche, aber etwas grobe Fehler-schätzung. Wenn man eine Größe, z. B. eine Länge, mehrmals mißt, so werden die Meßwerte nicht sämtlich übereinstimmen. Ferner ist der wahre Wert der Größe gewöhnlich unbekannt. Damit erheben sich zwei grundlegende Fragen.

1. Frage nach dem **Mittelwert**: Welcher Wert soll als endgültiger Meßwert des Objektes angesehen werden?
2. Frage nach dem **Streuungsmaß**: Wie soll die Unsicherheit des endgültig gewählten Wertes gekennzeichnet werden?

Zur Lösung eines solchen Ausgleichsproblems benutzt man nach GAUSS die weitreichende

Methode der kleinsten Quadratsumme:

Die beobachteten Werte sind so auszugleichen, daß die Summe

$$Q = \sum v_i^2$$

der Quadrate der Fehler möglichst klein wird.

Dabei sind als Fehler v_i die Abweichungen der Meßwerte von dem gesuchten Mittelwert zu betrachten.

Dieses Ausgleichsprinzip ist die Grundlage der gesamten Ausgleichsrechnung und hat weitgehende Konsequenzen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Statistik.

22.3. Arithmetisches Mittel und Standardabweichung

Es seien n Meßwerte $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ desselben Objekts gegeben, die unter gleichen Versuchsbedingungen ermittelt wurden. Gesucht wird derjenige Wert x , der die Meßwerte möglichst gut ausgleicht. Man bildet die Einzelfehler

$$v_i = x_i - x,$$

betrachtet die Quadratsumme

$$Q = \sum v_i^2$$

als Funktion von x und bestimmt ihr Minimum mit Hilfe der Differentialrechnung:

$$\frac{dQ}{dx} = \sum 2v_i(-1) = -2 \sum v_i$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

$$\sum v_i = 0 \tag{I}$$

$$\sum (x_i - x) = 0$$

$$\sum x_i - nx = 0$$

$$x = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x} \tag{II}$$

Die Gln. (I) und (II) liefern folgenden

Satz

Das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tag{22.4}$$

ist derjenige Wert, für den die Summe der Fehler verschwindet und die Quadratsumme der Fehler am kleinsten ist.

Es erscheint zweckmäßig, als **Streuungsmaß** für die Meßwerte $x_1; \dots; x_n$ einen Ausdruck zu benutzen, der im wesentlichen auf der Quadratsumme der Fehler beruht. Um ein Streuungsmaß zu erhalten, das in der Größenordnung der Einzelfehler liegt, macht man die Quadrierung und die Summierung durch Radizieren und Dividieren wieder rückgängig.

Definition

Als Streuungsmaß für n gleichgenaue Beobachtungswerte wird die Größe

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (22.5)$$

benutzt. Sie heißt Streuungsmaß (im engeren Sinne), **mittlerer Fehler** (der Einzelmessungen), mittlere quadratische Abweichung oder **Standardabweichung**. Die Größe s^2 heißt **Streuung** (im engeren Sinne) oder **Varianz**.

Die Bezeichnungen Standardabweichung und Varianz werden bevorzugt verwendet.

Der Divisor $n-1$ hat eine anschauliche Bedeutung. Wenn nur ein Meßwert bestimmt wurde, dann kann über die Streuung noch gar nichts ausgesagt werden. Hat man n Meßwerte bestimmt, so liegen $n-1$ überschüssige oder **Kontrollmessungen** vor, die zur Beurteilung der Streuung dienen. Die Zahl der Kontrollmessungen nennt man den **Freiheitsgrad** des Ausgleichsproblems.

Die Standardabweichung s der Einzelmessungen ist ein Maß dafür, wie weit die einzelnen Meßwerte um das arithmetische Mittel streuen. Bei der Angabe des zusammenfassenden Ergebnisses einer Meßreihe interessiert aber die Frage, wie weit das arithmetische Mittel vom unbekannten wahren Wert des Objektes abweicht. Es leuchtet ein, daß das arithmetische Mittel den **wahren Wert** um so besser schätzen wird, je größer die Anzahl der Einzelmessungen, der **Umfang** der Meßreihe, ist. Es läßt sich zeigen, daß hierfür der folgende Satz gilt.

Satz

Aus einer Meßreihe vom Umfang n sei das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Einzelmessungen berechnet worden. Dann ist die **Standardabweichung des arithmetischen Mittels** gegeben durch die Gleichung

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (22.6)$$

Entsprechend dem relativen Maximalfehler in 22.1. können hier die relative Standardabweichung der Einzelmessung $s/\bar{x}$ und die relative Standardabweichung des arithmetischen Mittels $s_{\bar{x}}/\bar{x}$ gebildet werden. Vor der Berechnung von Standardabweichungen ist häufig eine einfache Fehlerschätzung mit Hilfe des Maximalfehlers nützlich. Während in 22.1. dazu im wesentlichen nur die Erfahrung des Messenden herangezogen wurde, zeigt das folgende Beispiel 22.7., wie der Maximalfehler aus mehreren Meßwerten objektiv definiert und berechnet werden kann.

BEISPIELE

- 22.7. Bei der Messung einer Schwingungszeit ergaben sich untenstehende Meßwerte in Sekunden (Spalte 1). Zur ersten Orientierung über die Genauigkeit dieser Meßreihe soll das arithmetische Mittel sowie der absolute und relative Maximalfehler berechnet werden.¹⁾

x_i	$x_i - \bar{x}$
2,87	-0,066
3,01	+0,074
2,99	+0,054
2,84	-0,096
2,97	+0,034
14,68	0,000

Lösung:

$$\bar{x} = \frac{14,68}{5} = 2,936$$

Als absoluter Maximalfehler wird der absolut größte Einzelfehler aus Spalte 2 herausgesucht. Man findet

$$\Delta x = 0,096.$$

Daraus ergibt sich der relative Maximalfehler

$$\Delta x_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{0,096}{2,936} = 0,0328.$$

Als Ergebnis der Messung folgt in sinngemäßer Rundung

$$\bar{x} = 2,94$$

$$\Delta x = 0,10$$

$$\Delta x_r = 3,3\%.$$

In vielen elementaren Praktikumsversuchen genügt eine solche Fehlerschätzung durchaus.

- 22.8. Aus den Angaben des Beispiels 22.7. sollen die absolute und die relative Standardabweichung des arithmetischen Mittels berechnet werden.

Lösung:

x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
2,87	0,00436
3,01	0,00548
2,99	0,00292
2,84	0,00922
2,97	0,00116
14,68	0,02314

¹⁾ Es erscheint zweckmäßig, bei statistischen Berechnungen wegen besserer Übersichtlichkeit grundsätzlich auf die Mitführung physikalischer Maßeinheiten zu verzichten. Im vorliegenden Beispiel ist durchweg die Maßeinheit Sekunde zu ergänzen.

Arithmetisches Mittel (vgl. Beispiel 22.7.):

$$\bar{x} = \frac{14,68}{5} = 2,936.$$

Streuung (Varianz):

$$s^2 = \frac{0,02314}{4} = 0,00578.$$

Standardabweichung der Einzelmessung

$$s = \sqrt{0,00578} = 0,0759.$$

Standardabweichung des arithmetischen Mittels

$$s_{\bar{x}} = \frac{0,0759}{\sqrt{5}} = 0,0340.$$

Relative Standardabweichung des arithmetischen Mittels

$$\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{0,0340}{2,936} = 0,0116.$$

Ergebnis der Messung:

$$\underline{\underline{\bar{x} = 2,94}}$$

$$\underline{\underline{s_{\bar{x}} = 0,03}}$$

$$\underline{\underline{\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = 1,2\% .}}$$

Die wahre Schwingungszeit wird also zwischen 2,91 und 2,97 liegen (Bild 22.2). Eine Präzisierung dieser Aussage ergibt sich in der mathematischen Statistik (25.3.).

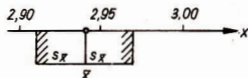


Bild 22.2

22.4. Fehlerfortpflanzung

Für Maximalfehler wurde die Fehlerfortpflanzung bereits im Abschnitt 22.1. behandelt. Der Maximalfehler der berechneten Größe ist im wesentlichen durch das totale Differential bestimmt (lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz). Wenn dagegen die Standardabweichungen (mittlere Fehler) der direkt gemessenen Größen bekannt sind, dann gilt der folgende, oft als quadratisches Fehlerfortpflanzungsgesetz bezeichnete

Satz

Es sei $z = f(x, y)$ eine bekannte Funktion der direkt gemessenen Größen x und y mit den Standardabweichungen s_x und s_y . Dann ist die Standardabweichung der Größe z bestimmt durch das Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2}. \quad (22.7)$$

Gewöhnlich sind die direkt gemessenen Größen arithmetische Mittel, die sich aus mehreren Einzelmeßwerten ergeben haben. Dann bedeuten s_x und s_y die Standardabweichungen dieser arithmetischen Mittel, und s_z ist die Standardabweichung des Mittelwertes z .

Für die vier Grundrechnungsarten lassen sich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz leicht die folgenden Sätze beweisen.

Satz

Für die Funktionen $z = x + y$ bzw. $z = x - y$ gilt

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 \quad (22.8)$$

Satz

Für die Funktionen $z = xy$ bzw. $z = \frac{x}{y}$ gilt

$$\left(\frac{s_z}{z}\right)^2 = \left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2 \quad (22.9)$$

Bei Addition und Subtraktion addieren sich also die Quadrate der absoluten Standardabweichungen, bei Multiplikation und Division addieren sich die Quadrate der relativen Standardabweichungen.

BEISPIEL

22.9. Zur Bestimmung der Dichte eines festen Körpers wurde die Masse m und das Volumen V gemessen. Es ergab sich

$$m = 35,7 \text{ g} \quad s_m = 0,38 \text{ g}$$

$$V = 23,6 \text{ cm}^3 \quad s_V = 0,53 \text{ cm}^3.$$

Gesucht wird die Dichte mit absoluter und relativer Standardabweichung.

Lösung:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{35,7 \text{ g}}{23,6 \text{ cm}^3} = 1,51 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{s_\rho}{\rho}\right)^2 &= \left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{s_V}{V}\right)^2 \\ &= \left(\frac{0,38}{35,7}\right)^2 + \left(\frac{0,53}{23,6}\right)^2 \\ &= 0,0107^2 + 0,0225^2 \\ &= 0,000114 + 0,000505 \\ &= 0,000619 \end{aligned}$$

$$\frac{s_\rho}{\rho} = 0,0249$$

$$\begin{aligned} s_\rho &= 0,0249 \cdot \rho \\ &= 0,0249 \cdot 1,51 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

$$= 0,0376 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

In sinngemäßer Rundung ergibt sich also

$$\underline{\underline{\varrho = 1,51 \text{ g/cm}^3}}$$

$$\underline{\underline{s_\varrho = 0,04 \text{ g/cm}^3}}$$

$$\underline{\underline{\frac{s_\varrho}{\varrho} = 2,5\%}}$$

22.5. Lineare Regression

Wenn die zu bestimmenden Größen nicht direkt meßbar sind, dann spricht man von **vermittelnden Beobachtungen**. Es sei zum Beispiel für die Längenausdehnung l eines Metallstabes in Abhängigkeit von der Temperatur T eine Funktionsgleichung

$$l = f(T)$$

gesucht. Dann handelt es sich darum, aus fehlerbehafteten gemessenen Wertepaaren auf eine möglichst gut angepaßte Funktionsgleichung zu schließen. Allgemein kann das Problem folgendermaßen formuliert werden:

Zu n fehlerfreien Werten x_i seien zugehörige Meßwerte y_i experimentell bestimmt worden. Gesucht wird eine ausgleichende Funktion $y = f(x)$, die zwischen den gegebenen „Meßpunkten“ möglichst genau vermittelt.

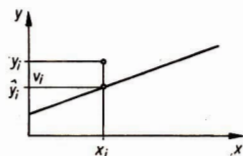


Bild 22.3

Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Methode der kleinsten Quadratsumme benutzt (22.2.). Als einfacherster Funktionstyp kommt eine Gerade

$$y = a + bx$$

in Betracht. Für die Abweichungen zwischen Meßwert y_i und Funktionswert $\hat{y}_i$ der Ausgleichsgeraden erhält man die Fehlergleichungen (Bild 22.3)

$$\begin{aligned} v_i &= y_i - \hat{y}_i \\ &= y_i - a - bx_i \end{aligned}$$

Nun wird die Quadratsumme

$$Q = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

als Funktion der unbekannten Koeffizienten a und b betrachtet. Gesucht werden diejenigen Werte für a und b , für welche die Quadratsumme $Q = Q(a, b)$ am kleinsten

wird. Da es sich um eine Funktion von zwei Variablen handelt, müssen die partiellen Ableitungen verschwinden:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum 2v_i(-1) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum 2v_i(-x_i) = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} \sum v_i = 0 \\ \sum v_i x_i = 0 \end{cases}$$

und durch Ersetzen von v_i das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \sum (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \sum (y_i - a - bx_i) x_i = 0 \end{cases}$$

Nach Auflösen der Summen folgt

$$\begin{cases} an + b \sum x_i = \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten a und b . Mit den Abkürzungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

ergibt sich nach einigen Umformungen der

Satz

Die Regressionsgerade

$$\hat{y} = a + bx$$

ist diejenige Gerade, für die die Quadratsumme der Fehler am kleinsten ist. Ihr Richtungsfaktor ist

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (22.10)$$

und ihr Ordinatenabschnitt beträgt

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \quad (22.11)$$

Es ist zweckmäßig, als weitere Kenngrößen die Varianz

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2) \\ s_x^2 &= \frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2) \end{aligned}$$

und die Kovarianz

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} (\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y})$$

einzuführen. Dann ist der Richtungsfaktor der Regressionsgeraden durch die Gleichung

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (22.12)$$

bestimmt.

BEISPIELE

22.10. Bei verschiedenen Temperaturen x (in °C) wurde die Längenänderung y (in mm) eines Metallstabes gemessen.

x_i	y_i
20	0,040
30	0,051
40	0,073
50	0,079
60	0,102

Die Meßpunkte sind durch eine Gerade nach Augenmaß grafisch auszugleichen, und es ist die Gleichung dieser Geraden aufzustellen.

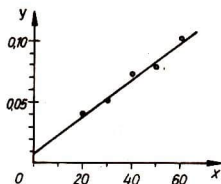


Bild 22.4

Lösung:

Aus Bild 22.4 liest man ab, daß die Punkte

$$P_1(0; 0,008)$$

$$P_2(60; 0,099)$$

auf der Geraden liegen. Daher müssen ihre Koordinaten die Geradengleichung

$$\hat{y} = a + bx$$

erfüllen. Es gilt also das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a = 0,008 \\ a + 60b = 0,099 \end{cases}$$

mit der Lösung

$$a = 0,008 \quad b = 0,00152.$$

Die Gleichung der Ausgleichsgeraden lautet

$$\underline{\hat{y} = 0,008 + 0,00152x.}$$

Für viele elementare Praktikumsversuche genügt eine solche grafische Ausgleichung durchaus.

- 22.11. Aus den Meßpunkten des Beispiels 22.10. soll die Regressionsgerade rechnerisch bestimmt werden.

Lösung:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
20	0,040	400	0,8
30	0,051	900	1,53
40	0,073	1600	2,92
50	0,079	2500	3,95
60	0,102	3600	6,12
200	0,345	9000	15,32

$$\bar{x} = \frac{200}{5} = 40$$

$$\bar{y} = \frac{0,345}{5} = 0,069$$

$$s_x^2 = \frac{1}{4} (9000 - 5 \cdot 40^2) = 250$$

$$s_{xy} = \frac{1}{4} (15,32 - 5 \cdot 40 \cdot 0,069) = 0,38$$

$$b = \frac{0,38}{250} = 0,00152$$

$$a = 0,069 - 0,00152 \cdot 40 = 0,0082.$$

Die Gleichung der Regressionsgeraden lautet

$$\underline{\hat{y} = 0,0082 + 0,00152x.}$$

22.6. Trend

Die Entwicklungsrichtung einer ökonomischen Erscheinung im Verlaufe der Zeit wird als **Trend** bezeichnet. Die Berechnung einer Trendfunktion kann als Spezialfall der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (Regression) betrachtet werden. Es liegt folgendes Problem vor:

Zu n Zeitpunkten t_i seien entsprechende Werte y_i eines statistischen Merkmals ermittelt worden. Gesucht wird eine ausgleichende Funktion $y = f(t)$, die zwischen den Meßpunkten möglichst gut vermittelt.

Hier erhebt sich nun allerdings die Frage, welcher **Funktionstyp** zur Ausgleichung benutzt werden darf. Diese Frage, die auch bei anderen Regressionsproblemen eine Rolle spielt, kann prinzipiell nur von der Theorie des betreffenden Fachgebietes entschieden werden. Bei Trendberechnungen ist der Funktionsansatz also vom Ökonomen zu begründen. Wir beschränken uns im folgenden mathematisch auf die Berechnung einer **linearen Trendfunktion**.

Häufig sind die vorgelegten Zeitwerte recht große Zahlen, z. B. Jahreszahlen. Dann empfiehlt sich eine Abszissentransformation derart, daß man den Zeitwerten t der Reihe nach die Abszissen $x = 1; 2; 3; \dots; n$ zuordnet.

BEISPIEL

22.12. Im Jahre t wurden in einem Betrieb y Stück Fertigprodukte hergestellt.

t	y
1963	205
1964	226
1965	263
1966	283
1967	263
1968	287
1969	306
1970	329

Es ist die Entwicklung des Betriebes durch eine lineare Trendfunktion zu charakterisieren.

Lösung:

Mit der Abszissentransformation $x = t - 1962$ folgt

t	x	y	x^2	xy
1963	1	205	1	205
1964	2	226	4	452
1965	3	263	9	789
1966	4	283	16	1132
1967	5	263	25	1315
1968	6	287	36	1722
1969	7	306	49	2142
1970	8	329	64	2632
	36	2162	204	10389

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4,5$$

$$\bar{y} = \frac{2162}{8} = 270,25$$

$$s_x^2 = \frac{1}{7} (204 - 8 \cdot 4,5^2) = 6$$

$$s_{xy} = \frac{1}{7} (10389 - 8 \cdot 4,5 \cdot 270,25) = 94,3$$

$$b = \frac{94,3}{6} = 15,7$$

$$a = 270,25 - 15,7 \cdot 4,5 = 199,6$$

Die Entwicklung des Betriebes kann durch die Trendfunktion

$$y = 200 + 15,7x$$

beschrieben werden (Bild 22.5).

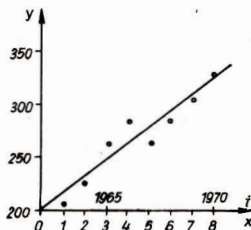


Bild 22.5

Kontrollfragen

- 22.4. Wie ist das arithmetische Mittel definiert? Welche Problemstellung liegt zugrunde?
 22.5. Was ist unter der Standardabweichung der Einzelmessungen zu verstehen? Welche anderen Bezeichnungen für diese Größe sind gebräuchlich?
 22.6. Es ist die Problemstellung der Fehlerfortpflanzung zu erläutern!
 22.7. Wie kann eine Regressionsgerade berechnet werden? Welche Voraussetzungen sind erforderlich?

Aufgaben: 22.12. bis 22.17.

22.7. Aufgaben

- 22.1. Die Zahl $\pi = 3,14159265\dots$ werde durch die Näherungswerte $z_1 = \frac{22}{7}$ und $z_2 = \frac{355}{113}$ ersetzt.
 a) Wie groß sind die wahren Fehler von z_1 und z_2 ?
 b) Welcher Fehler ergibt sich für den Umfang U eines Kreises mit dem Radius $r = 5$ m, wenn U unter Verwendung von z_1 bzw. z_2 berechnet wird?
- 22.2. Der Durchmesser d eines Drahtes wurde unter Verwendung eines Meßschiebers mit $(0,361 \pm 0,005)$ mm gemessen. Mit welchem relativen Fehler läßt sich daraus die Querschnittsfläche berechnen?
- 22.3. Zur grafischen Bestimmung der Fläche eines Dreiecks wurden aus einer Zeichnung mit einem Maßstab die Grundlinie $g = 171,4$ mm und die Höhe $h = 95,8$ mm mit den maximalen Meßfehlern $\Delta g = \Delta h = \pm 0,2$ mm bestimmt. Wie groß ist der Maximalfehler für die Fläche?

- 22.4. Von einem Quader wurden die Kanten mit $a = (32,3 \pm 0,1)$ cm, $b = (12,0 \pm 0,1)$ cm, $c = (6,7 \pm 0,1)$ cm bestimmt. Wie groß ist der absolute Maximalfehler des Quader-volumens?
- 22.5. Von einem Kegel wurden der Radius $r = 30,4$ cm und die Höhe $h = 75,2$ cm mit den maximalen Meßfehlern $\Delta r = \Delta h = \pm 0,1$ cm bestimmt. Wie groß ist der Maximalfehler für das Kegelvolumen?
- 22.6. Zur Bestimmung der Brennweite einer einfachen, bikonvexen Linse wurden die Gegenstandsweite $a = 42,4$ cm und die Bildweite $b = 26,6$ cm mit den Meßfehlern $\Delta a = \Delta b = \pm 0,1$ cm gemessen. Wie groß ist die Brennweite f und ihr absoluter Maximalfehler?
- 22.7. Im rechtwinkligen Dreieck wurden die Hypotenuse $c = (130 \pm 0,06)$ m und die Kathete $a = (50 \pm 0,02)$ m gemessen. Welcher absolute Maximalfehler ergibt sich hieraus für den Winkel α ?
- 22.8. Für die Fallzeit eines Körpers wurde $t = 4,5$ s mit dem maximalen Meßfehler $\Delta t = \pm 0,01$ s gestoppt. Die Fallbeschleunigung ist mit $g = 9,810$ m/s² und $\Delta g = \pm 0,005$ m/s² bekannt. Mit welchem Maximalfehler berechnet man die Fallhöhe h ?
- 22.9. Bei der Widerstandsmessung mit der WHEATSTONESchen Brücke wird der zu bestimmende Widerstand R_x aus $R_x = R \frac{x}{1000 - x}$ berechnet, wobei $R = (1000 \pm 1) \Omega$ der bekannte Widerstand und $x = (765,8 \pm 0,3)$ die Maßzahl der am Maßstab abgelesenen Länge in mm sind. Mit welchem absolutem Maximalfehler ergibt sich R_x ?
- 22.10. Die drei Widerstände $R_1 = (100 \pm 1) \Omega$, $R_2 = (50 \pm 1) \Omega$, $R_3 = (250 \pm 2) \Omega$ sind hintereinandergeschaltet. Wie groß ist für die Spannung $U = (220 \pm 2)$ V die Stromstärke des durchfließenden Stromes und ihr relativer Maximalfehler?
- 22.11. Die Widerstände $R_1 = (350 \pm 2) \Omega$ und $R_2 = (100 \pm 1) \Omega$ sind parallel geschaltet. Wie groß ist der Ersatzwiderstand R und sein relativer Maximalfehler?
- 22.12. Aus den folgenden Meßreihen sind zu berechnen
das arithmetische Mittel,
die Varianz,
die Standardabweichung,
die Standardabweichung des arithmetischen Mittels,
die relative Standardabweichung des arithmetischen Mittels.
- | | | | |
|---------|---------|--------|---------|
| a) 8,13 | b) 14,3 | c) 527 | d) 3720 |
| 8,15 | 14,2 | 513 | 3650 |
| | 14,5 | 541 | 3830 |
| | | 558 | 3670 |
| | | | 3540 |
- 22.13. Für ein Fadenpendel wurden die Länge l und die Periodendauer T durch mehrmalige Messung bestimmt. Es ergab sich
- | | |
|---------------|-----------------|
| $l = 0,643$ m | $s_l = 0,004$ m |
| $T = 1,60$ s | $s_T = 0,02$ s |
- Man berechne daraus die Erdbeschleunigung mit Angabe der absoluten und relativen Standardabweichung.
- 22.14. Ein Wechselstrom mit der Frequenz 675 kHz durchfließt eine Reihenschaltung von Selbstinduktion L und Kapazität C mit folgenden Werten:
- | | |
|-------------|----------------|
| $L = 5$ mH | $s_L = 0,1$ mH |
| $C = 35$ pF | $s_C = 0,3$ pF |
- Gesucht ist der Blindwiderstand mit absoluter und relativer Standardabweichung.

22.15. Aus den folgenden Wertepaaren ist die Gleichung der Regressionsgeraden zu berechnen.

a)

x	y
20	0,04
40	0,06
60	0,10

b)

x	y
400	1800
1000	2300
1800	3200
2300	3500

c)

x	y
0,259	0,737
0,383	0,898
0,422	0,955
0,546	1,108
0,642	1,245

d)

x	y
0	16,9
1	21,8
2	26,9
3	32,0
4	36,5
5	41,3

22.16. Zu verschiedenen Zeitpunkten t (in s) wurde die Geschwindigkeit v (in m/s) eines gleichmäßig beschleunigten Fahrzeugs gemessen. Man erhielt

t	v
0	5,5
10	11,1
20	22,7
30	26,9
40	45,2

Es ist die bestmögliche Ausgleichsgerade für diesen Vorgang zu berechnen.

22.17. Die Spareinlagen pro Kopf der Bevölkerung der DDR im Jahre t betrugen y Mark:

t	y
1958	650
1959	810
1960	1020
1961	1180
1962	1260
1963	1380
1964	1610

Es ist diese Entwicklung durch eine lineare Trendfunktion zu charakterisieren und grafisch darzustellen.

22.18. Um den Radius eines im Kreisbogen verlegten Gleises zu bestimmen, wurde eine Sehne $s = (20 \pm 0,01)$ m und die zugehörige Pfeilhöhe $p = (0,085 \pm 0,001)$ m gemessen. Zu berechnen sind r und $\Delta r_{\max}$ (Bild 22.6).

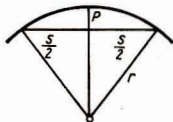


Bild 22.6

22.19. Ein Hohlzylinder hat den äußeren Radius $r_1 \approx 10$ cm, den inneren Radius $r_2 \approx 8$ cm und die Höhe $h \approx 12$ cm. Wie genau sind die drei Größen zu messen, damit der Betrag des relativen Maximalfehlers des zu berechnenden Volumens höchstens 0,2% beträgt? (Vgl. Beispiel 22.6.)

- 22.20. Die Brechzahl einer Glassorte ergibt sich aus $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Wie genau müssen Einfallswinkel $\alpha \approx 33^\circ 20'$ und Ausfallswinkel $\beta \approx 21^\circ 45'$ gemessen werden, damit $|\Delta n_r| \leq 0,001$ wird? (Vgl. Beispiel 22.6.)

- 22.21. Die Druck-Temperatur-Beziehung bei polytroper Zustandsänderung des idealen Gases lautet

$$T_2 = T_1(p_2/p_1)^{\frac{k-1}{k}}$$

Mit welchem relativem Maximalfehler ergibt sich T_2 , wenn die Temperatur $T_1 = 358 \text{ K} \pm 3 \text{ K}$ und die Drücke $p_1 = 2,05 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \pm 0,05 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$, $p_2 = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \pm 0,05 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ sowie der Polytropenexponent $k = 1,39 \pm 0,03$ gegeben sind?

- 22.22. Im Dreieck sollen die Seite b und die Winkel α und β gemessen und daraus die Seite a berechnet werden.

- Mit Hilfe der logarithmischen Differentiation ist die Fehlerformel für den relativen Maximalfehler von a aufzustellen.
- Wie genau müssen $b \approx 220 \text{ m}$, $\alpha \approx 63^\circ$, $\beta \approx 42^\circ$ gemessen werden, damit $|\Delta a_r| \leq 3 \cdot 10^{-4}$ ist? (Vgl. Beispiel 22.6.)

- 22.23. Im Jahre t wurden x Fernsprechhauptanschlüsse eingerichtet, wobei die Kosten y entstanden (x in Tausend Stück, y in Tausend Mark):

t	x	y
— 5	9	240
— 4	16	390
— 3	30	400
— 2	37	480
— 1	50	720

Für den Planungszeitraum sind folgende Hauptanschlüsse vorgesehen:

t	x
0	60
1	70
2	85
3	90
4	99
5	110

Welche Kosten sind in den Planjahren zu erwarten, wenn mit linearem Trend zu rechnen ist? (Hinweis: Man benutze die Regression zwischen x und y !)

23. Potenzreihen

23.1. Allgemeines über Reihen

Bei der Anwendung der Mathematik auf die Lösung von Aufgaben aus der Ingenieur-tätigkeit spielen die unendlichen Reihen eine wichtige Rolle. Sowohl die Herleitung von häufig gebrauchten Näherungsformeln und die Beurteilung der mit ihnen erreichten Genauigkeit als auch die Berechnung der Funktionswerte zahlreicher Funktionen, besonders in der modernen Rechentechnik, oder die Berechnung schwieriger Integrale erfolgt mit Hilfe unendlicher Reihen. Im folgenden werden nach kurzer allgemeiner Einführung hauptsächlich die für technische Anwendungen wichtigen Potenzreihen untersucht. An einigen Beispielen wird gezeigt, wie Potenzreihen für die Lösung unterschiedlicher Aufgaben aus der Ingenieurpraxis eingesetzt werden können.

Gegeben sei eine **unendliche Folge**:

$$\{u_k\} = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Durch Addition der Glieder der Folge entsteht die **unendliche Reihe**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (\text{I})$$

Diese Erklärung der unendlichen Reihe ist jedoch unzureichend. Das ergibt sich sofort bei der Frage nach der „Summe“ der unendlichen Reihe, da die Addition von unendlich vielen Summanden nicht definiert und praktisch auch nicht möglich ist. Deshalb werden, bei u_1 beginnend, schrittweise **Teil-** oder **Partialsummen** gebildet:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

S_n heißt die **n -te Teilsumme** und ergibt sich aus der Summe der n ersten Glieder der Folge. Die Teilsummen bilden die **Teilsummenfolge**:

$$\{S_k\} = S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \quad (\text{II})$$

die lediglich einen anderen Ausdruck für die unendliche Reihe (I) darstellt.

Definition:

Es sei $\{u_k\} = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ eine unendliche Folge. Dann ist eine unendliche Reihe der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

unter dem die Folge $\{S_k\}$ der Teilsummen

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

zu verstehen ist.

Die Frage, ob die unendliche Reihe eine Summe hat, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob die Teilsummen S_n mit wachsendem n einem Grenzwert S zustreben, d. h. ob die Teilsummenfolge (II) konvergent ist.

Definition:

Eine unendliche Reihe heißt **konvergent**, wenn die Folge der Teilsummen konvergent ist, wenn also der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ existiert. S heißt die **Summe** oder der **Wert** der unendlichen Reihe und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S$$

Eine nicht konvergente unendliche Reihe heißt **divergent**. Eine unendliche Reihe heißt **alternierend**, wenn die zugrunde gelegte Folge alternierend ist, d. h. die Glieder der Reihe abwechselnd positiv und negativ sind.

BEISPIELE**23.1. Die unendliche Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

hat die Teilsummen

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad \qquad \qquad = \frac{3}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \qquad \qquad \qquad = \frac{7}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

.....

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

.....

Es ergibt sich die Teilsummenfolge

$$\{S_n\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots$$

deren Glieder augenscheinlich gegen eins streben. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

ist die Teilsummenfolge und damit auch die unendliche Reihe konvergent, und die unendliche Reihe hat die Summe $S = 1$.

In Bild 23.1 ist die Teilsumme $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ anschaulich als Fläche dargestellt. Das Bild zeigt die Konvergenz der Reihe, da durch Hinzunahme weiterer Glieder der Reihe das Quadrat mit der Maßzahl eins der Fläche schrittweise immer weiter ausgefüllt wird.

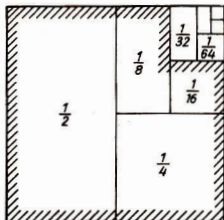


Bild 23.1

23.2. Die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + \dots$$

hat die n -te Teilsumme

$$S_n = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n,$$

die für $n \rightarrow \infty$ unbegrenzt größer wird. Es existiert kein Grenzwert, die Reihe ist divergent.

23.3. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist eine alternierende Reihe. Es läßt sich beweisen, daß diese Reihe konvergent ist und die Summe $S = \ln 2$ besitzt.

Aufgabe: 23.1.

23.2. Die unendliche geometrische Reihe

Aus der in 12.1.3. behandelten geometrischen Folge

$$\{u_k\} = \{u_1 q^{k-1}\} = u_1, u_1 q, u_1 q^2, u_1 q^3, \dots, u_1 q^{n-1}, \dots$$

entsteht durch Addition der Glieder die **unendliche geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_1 q^{k-1} = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{n-1} + \dots$$

Für die Summe der n ersten Glieder, also für die Teilsumme S_n , ergibt sich nach (12.6) der Ausdruck

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Die Konvergenz der unendlichen geometrischen Reihe hängt von der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

und damit von q ab. Es folgt für

$$|q| < 1: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ und damit}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q}; \text{ die unendliche geometrische Reihe ist in diesem Fall konvergent mit der Summe } S = \frac{u_1}{1 - q}.$$

$$|q| > 1: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, \text{ d. h., der Grenzwert } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ existiert nicht, und die unendliche geometrische Reihe ist divergent.}$$

$$q = 1: \quad \text{Die Formel für die Teilsumme würde } \lim_{n \rightarrow \infty} u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0},$$

also einen unbestimmten Ausdruck ergeben. Es ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_1 + \dots + u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n u_1 = \infty,$$

die unendliche geometrische Reihe ist divergent.

$$q = -1: \quad \text{Es ist } S_n = u_1 - u_1 + u_1 - u_1 + \dots + (-1)^{n-1} u_1 \text{ und wegen } S_1 = u_1, S_2 = 0, S_3 = u_1, S_4 = 0, \dots \text{ ist die Teilsummenfolge und damit die unendliche geometrische Reihe (unbestimmt) divergent.}$$

Satz:

Die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_1 q^{k-1} = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots + u_1 q^{n-1} + \dots$$

ist für $|q| < 1$ konvergent und hat die Summe

$$S = \frac{u_1}{1 - q} \quad (23.1)$$

BEISPIELE

23.4. Die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \dots$$

hat das Anfangsglied $u_1 = 2$, den Quotienten $q = -\frac{1}{3}$ und damit die Summe

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

- 23.5. Ein mathematisches Pendel führt unter dem Einfluß von Reibungskräften gedämpfte Schwingungen durch, die im Punkt P_1 beginnen sollen. Der Pendelkörper legt in der ersten Halbschwingung von P_1 nach P_2 die Bogenlänge s_1 zurück, in der zweiten Halbschwingung von P_2 nach P_3 die Bogenlänge $s_2 = 0,96s_1$, in der dritten Halbschwingung von P_3 nach P_4 die Bogenlänge $s_3 = 0,96s_2$ usw. Es wird die Annahme gemacht, daß das Pendel im Gegensatz zum realen Vorgang nicht zur Ruhe kommt. Gegen welchen Wert strebt dann der Gesamtweg des Pendelkörpers?

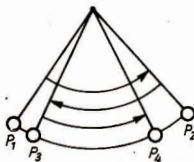


Bild 23.2

Lösung: Der Grenzwert des Gesamtweges ist die Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$s = s_1 + 0,96s_1 + 0,96^2s_1 + \dots$$

mit $u_1 = s_1$ und $q = 0,96$. Für s folgt

$$s = \frac{s_1}{1 - 0,96} = \underline{\underline{25s_1}}.$$

- 23.6. Der unendliche periodische Dezimalbruch $0,\overline{57}$ ist in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Lösung: Der periodische Dezimalbruch läßt sich als Summe einer konvergenten unendlichen geometrischen Reihe darstellen:

$$0,\overline{57} = \frac{57}{100} + \frac{57}{100^2} + \frac{57}{100^3} + \dots$$

Mit $u_1 = \frac{57}{100}$ und $q = \frac{1}{100}$ folgt für die Summe

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{57}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{57}{99} = \underline{\underline{\frac{19}{33}}}.$$

Auch die unendliche Reihe aus Beispiel 23.1. ist eine unendliche geometrische Reihe

mit $u_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$.

Aufgaben: 23.2. bis 23.5.

23.3. Das Restglied

Für eine unendliche geometrische Reihe kann in Abhängigkeit von q sehr leicht die Konvergenz oder Divergenz der Reihe festgestellt und bei Konvergenz nach (23.1) sofort die Reihensumme S berechnet werden. Für beliebige Reihen sind die Konver-

genzuntersuchungen und im Konvergenzfall die Berechnung von S nicht mehr so einfach.

Nur bei wenigen Reihen kann der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ tatsächlich berechnet werden, so daß damit die Konvergenz bewiesen und die Summe S ermittelt wurde. Bei vielen Reihen ist die Berechnung des Grenzwertes nicht möglich. Es kann dann in einem ersten Schritt unter Verwendung von „Konvergenzkriterien“ nur untersucht werden, ob die Reihe konvergent ist. Ist das der Fall, dann muß wie bei allen Anwendungen noch die Reihensumme S berechnet werden. Hierzu werden die n ersten Glieder der Reihe addiert, d. h., es wird die n -te Teilsumme S_n gebildet und diese als Näherungswert für die Reihensumme S verwendet:

$$S \approx S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Die Summe der unendlich vielen weggelassenen Glieder der Reihe, das sind alle Glieder von u_{n+1} ab, stellt den Fehler der Näherung dar und heißt das Restglied R_n :

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \quad (23.2)$$

Es gilt also

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{S_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}_{R_n}$$

Das Restglied stellt den (meist unbekannt bleibenden) Wert dar, der zu dem berechneten Näherungswert S_n zu addieren wäre, um die Reihensumme S zu erhalten.

Die Anzahl n der verwendeten Glieder hängt von der angestrebten Genauigkeit der Näherung $S \approx S_n$ ab. Es gilt nämlich nach der Definition für konvergente Reihen $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0$. Umgekehrt folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - R_n) = S$.

Satz

Es ist genau dann $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, wenn die Reihe konvergent ist.

Nach diesem Satz wird bei konvergenten Reihen der Fehler R_n der Näherung $S \approx S_n$ mit wachsendem n immer kleiner, so daß S durch Erhöhung der Anzahl der verwendeten Glieder mit beliebig hoher Genauigkeit berechnet werden kann.

BEISPIELE

23.7. Die unendliche Reihe aus Beispiel 23.1. hat die Summe $S = 1$ und die Teilsumme $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Daher ist das Restglied $R_n = S - S_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$. Für $n \rightarrow \infty$ strebt R_n gegen Null.

23.8. Es läßt sich beweisen, daß die folgende Reihe konvergent ist:

$$S = 0,4 + \frac{0,4^2}{2} + \frac{0,4^3}{3} + \frac{0,4^4}{4} + \frac{0,4^5}{5} + \dots$$

Um die Reihensumme S genähert zu berechnen, werde z. B. die Teilsumme S_4 gebildet:

$$S_4 = 0,4 + \dots + \frac{0,4^4}{4} = 0,50773.$$

Die Teilsumme S_5 ergibt:

$$S_5 = 0,4 + \dots + \frac{0,4^5}{5} = 0,50979.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe muß S_5 eine bessere Näherung für die Reihensumme S als die Teilsumme S_4 sein. Über die Güte der Näherungen $S \approx S_4$ bzw. $S \approx S_5$ selbst kann allerdings zunächst keine weitere Aussage gemacht werden (Es läßt sich zeigen, daß die Summe der Reihe $S = -\ln 0,6 = 0,51083$ ist.).

Wie in Beispiel 23.8. bleibt allgemein mit S auch R_n unbekannt. Um trotzdem etwas über die Genauigkeit der Näherung $S \approx S_n$ aussagen zu können, wird die Größe von R_n abgeschätzt.

Am einfachsten ist die **Restgliedabschätzung für alternierende Reihen**:

Satz

Bei alternierenden konvergenten Reihen ist der absolute Betrag des Restgliedes stets kleiner als der absolute Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes:

$$|R_n| < |u_{n+1}|,$$

und R_n besitzt dasselbe Vorzeichen wie u_{n+1} .

Anmerkung: Der Satz gilt strenggenommen nur für solche alternierende Reihen, für welche die Beträge der Glieder monoton gegen Null streben, was aber bei den meisten praktisch anwendbaren Reihen der Fall ist.

An Stelle eines Beweises wird der Satz an folgendem Beispiel veranschaulicht.

BEISPIEL

23.9. Für die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots,$$

deren Konvergenz gezeigt werden kann, soll als Näherungswert für S die Teilsumme

$$S_n = S_6 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2}$$

berechnet werden. Es ist bei gewählter 4stelliger Genauigkeit

$$S_6 = 1,0000 - 0,2500 + 0,1111 - 0,0625 + 0,0400 - 0,0278 = 0,8108.$$

Ohne Restgliedabschätzung kann keine Aussage darüber gemacht werden, welche der Ziffern von S_6 „gesichert“ sind, d. h. mit den Ziffern der unbekannten Summe S übereinstimmen. Das zugehörige Restglied

$$R_6 = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \dots$$

läßt sich wie folgt schreiben:

$$R_6 = \frac{1}{7^2} - \left(\frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} \right) - \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} \right) - \dots$$

bzw.

$$R_8 = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2}\right) + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2}\right) + \dots$$

Da alle auftretenden Klammern positiv sind, folgt aus der ersten Schreibweise, daß $|R_8| < \frac{1}{7^2} = u_7 = u_{n+1}$ ist, und aus der zweiten Schreibweise, daß R_8 ebenso wie das erste vernachlässigte Glied $u_7 = \frac{1}{7^2}$ positiv ist in Übereinstimmung mit obigem Satz.

Es ist also

$$0 < R_8 < \frac{1}{7^2}.$$

Nach Addition von S_8 folgt

$$S_8 < S_6 + R_8 < S_6 + \frac{1}{7^2}.$$

Damit wurde wegen $S = S_8 + R_8$ die unbekannte Summe S zwischen zwei Grenzen eingeschlossen:

$$S_8 < S < S_6 + \frac{1}{7^2}$$

$$0,8108 < S < 0,8312$$

Es ist also nur die in der linken und rechten Schranke übereinstimmende erste Zahl nach dem Komma gesichert:

$$\underline{\underline{S = 0,8 \dots}}$$

Analog zum Beispiel 23.9. kann auch für $R_n < 0$ die Summe S zwischen zwei Schranken eingeschlossen werden. Zusammengefaßt gilt bei alternierenden Reihen für

$$u_{n+1} > 0: \quad S_n < S < S_n + u_{n+1}$$

$$u_{n+1} < 0: \quad S_n + u_{n+1} < S < S_n$$

Aufgaben: 23.6. und 23.7.

23.4. Potenzreihen

In 23.1. wurden unendliche Reihen mit konstanten Gliedern betrachtet. Im folgenden sollen die Reihenglieder Funktionen sein, und zwar von der Form $u_k = a_k x^k$.

Definition

Die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

heißt **Potenzreihe**. Die Zahlen a_n sind die **Koeffizienten** der Potenzreihe.

Auch die Teilsummen der Potenzreihe sind Funktionen von x :

$$S_0(x) = a_0$$

$$S_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$S_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

$$\dots \dots \dots$$

Die n -te Teilsumme einer Potenzreihe ist also eine ganzrationale Funktion n -ten Grades.

Wird für x ein fester Wert $x = x_0$ eingesetzt, dann ergibt sich eine Reihe mit konstanten Gliedern:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots + a_n x_0^n + \dots,$$

und es gelten die Betrachtungen aus 23.1. Ist die Potenzreihe für $x = x_0$ konvergent, dann existiert eine Summe S , für die, da sie von x_0 abhängt, $S = f(x_0)$ geschrieben wird:

$$S = f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots + a_n x_0^n + \dots.$$

Ist die Potenzreihe für alle x aus einem Intervall I konvergent, dann gehört zu jedem $x \in I$ eine Summe S , d. h., S ist eine Funktion von x : $S = f(x)$ für alle $x \in I$. Diese Funktion heißt Summenfunktion. Es läßt sich beweisen, daß für alle Potenzreihen das Intervall I symmetrisch zum Nullpunkt liegt und daher die Form

$$I = (-r; r)$$

hat. I heißt der **Konvergenzbereich** oder das Konvergenzintervall der Potenzreihe, r heißt **Konvergenzradius**.

Zur Berechnung des Konvergenzradius einer gegebenen Potenzreihe dient der folgende

Satz

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ergibt sich aus

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(23.3a) bzw.

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

(23.3b)

Für $x \in (-r; r)$ ist die Potenzreihe konvergent, für $x \in (-\infty; -r) \cup (r; \infty)$ divergent, während für $x = -r$ und $x = r$ Konvergenz oder Divergenz vorliegen kann (Bild 23.3).

Der Beweis kann hier nicht geführt werden.

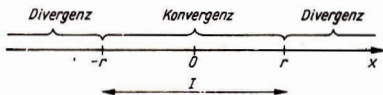


Bild 23.3

Ist $r = \infty$, dann ist $I = P$. Die Reihe konvergiert für jedes x und heißt beständig konvergent. Ist $r = 0$, dann ist $I = \{0\}$. Die Reihe konvergiert nur für $x = 0$ und heißt nirgends konvergent.

Für die Berechnung von r wird im allgemeinen die leichter zu handhabende Formel (23.3b) verwendet. Läßt sich damit der Grenzwert nicht berechnen, wird (23.3a) benutzt.

BEISPIEL

23.10. Es sind die Konvergenzbereiche der folgenden Potenzreihen zu bestimmen:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Lösung:

a) Die Reihe lautet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

d. h.,

$$a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots$$

Nach der Formel (23.3b) ist

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Die Reihe ist also für $x \in \underline{I = (-1; 1)}$ konvergent.

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k = x + 4x^2 + 27x^3 + \dots + n^n x^n + \dots$$

Zur Berechnung von r wird die Formel (23.3a) benutzt.

$$\text{Mit } a_n = n^n \text{ folgt } r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = 0.$$

Die Reihe ist nur für $x = 0$ konvergent: $\underline{I = \{0\}}$.

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe ist für alle x konvergent: $\underline{I = P}$.

Das Restglied einer Potenzreihe ist ebenfalls eine Funktion von x :

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) \quad (23.4)$$

Für alle $x \in (-r; r)$ ist nach dem Satz aus 23.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Ohne Beweis sei noch ein wichtiger Satz über Potenzreihen angegeben.

Satz

Eine Potenzreihe kann im Innern des Konvergenzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden. Die neu entstehenden Potenzreihen haben den gleichen Konvergenzbereich wie die ursprünglichen Reihen.

Aufgabe: 23.8.

23.5. Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen

23.5.1. Die 1. Form der Taylorschen Reihe

Die einfachsten Funktionen sind die rationalen und besonders die ganzrationalen Funktionen

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Sie gestatten es, auf einfache Weise zu gegebenem x den Funktionswert $g(x)$ zu berechnen. Schwieriger wird die Berechnung bei irrationalen Funktionen, wie z. B.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x}}$. Bei transzendenten Funktionen wie $y = \sin x$ oder $y = \ln x$ ist theoretisch eine Berechnung der Funktionswerte durch endlich viel algebraische Rechenoperationen überhaupt nicht möglich. Es wird deshalb die Aufgabe gestellt, derartige Funktionen näherungsweise durch die einfachsten, d. h. die ganzrationalen Funktionen darzustellen. Das geschieht auf folgendem Weg:

Zu der gegebenen Funktion $y = f(x)$ wird diejenige Potenzreihe gesucht, die im Konvergenzbereich diese Funktion als Summenfunktion besitzt. Es heißt, $y = f(x)$ wird in eine Potenzreihe entwickelt. Wird von der Potenzreihe die n -te Teilsumme verwendet, dann ist die Funktion tatsächlich genähert durch eine ganzrationale Funktion n -ten Grades dargestellt:

$$f(x) \approx S_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Da im Konvergenzbereich $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ist, kann durch Vergrößerung von n die Genauigkeit der Näherung beliebig erhöht werden.

Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe kann nach verschiedenen Methoden erfolgen. Eine verhältnismäßig universell anwendbare Formel stammt von Taylor (BROOK TAYLOR, 1685 bis 1731, englischer Mathematiker). Zu ihrer Herleitung wird für die gegebene Funktion $y = f(x)$ eine Potenzreihenentwicklung mit noch unbekannten Koeffizienten a_k angesetzt:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (I)$$

Die Reihe (III) heißt die **1. Form der Taylorschen Reihe** oder **MACLAURINSche Reihe** (COLIN MACLAURIN, 1698 bis 1746, englischer Mathematiker):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{S_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots}_{R_n(x)} \quad (23.6)$$

Die Formel $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$ heißt **TAYLORSche Formel**. Sie geht für alle $x \in I$ in die **TAYLORSche Reihe** über, wenn für dieses Intervall $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ist.

Anmerkung: Wird für eine Funktion $y = f(x)$ die Taylorentwicklung nach (23.6) vorgenommen und dann nach (23.3) der Konvergenzbereich I bestimmt, dann kann es in Ausnahmefällen vorkommen, daß die Taylorreihe in I als Summenfunktion nicht $y = f(x)$, sondern eine andere Funktion besitzt. Dagegen ist die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für $x \in I$ notwendig und hinreichend dafür, daß die Funktion $y = f(x)$ in I durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Durch die hier vorgenommene formale Herleitung der Taylorschen Reihe konnten diese Gesichtspunkte nicht herausgearbeitet werden.

Wird, je nach der geforderten Genauigkeit, die Funktion $y = f(x)$ genähert durch die Teilsummen $S_1, S_2, \dots$ dargestellt:

$$f(x) \approx S_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

$$f(x) \approx S_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

.....

so bedeuten die Näherungen geometrisch, daß die zu $y = f(x)$ gehörige Kurve durch Parabeln 1., 2. oder höheren Grades ersetzt wird. Diese **Näherungsparabeln** berühren die Kurve im Punkt $P_0(x_0 = 0)$ und schmiegen sich der Kurve um so mehr an, je höher der Grad n der Näherungsparabel ist (Bild 23.4).

Im folgenden werden einige wichtige Funktionen in Potenzreihen entwickelt.

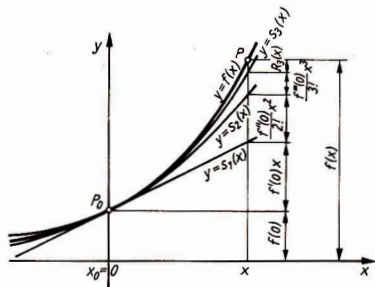


Bild 23.4

23.5.2. Entwicklung einiger spezieller Funktionen

a) Die Reihe der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$

Für diese Funktion ist $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = e^x$ für beliebig hohe Ableitungen und $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 1$. Aus (23.6) ergibt sich damit die Potenzreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Mit $a_n = \frac{1}{n!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ berechnet sich der Konvergenzradius r nach (23.3b) aus

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Der Konvergenzbereich ist $I = P$, die Potenzreihe ist beständig konvergent.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \quad x \in P \quad (23.7)$$

Für die Summendarstellung ist die Definition $0! = 1$ zu beachten.

BEISPIEL

23.11. Es ist der Funktionswert $f(x) = e^x$ für $x = 0,5$ unter Verwendung der Reihe (23.7) bis zum Glied 5. Ordnung zu berechnen und die erreichte Genauigkeit abzuschätzen.

Lösung: Nach (23.7) ist

$$e^{0,5} = 1 + 0,5 + \frac{0,5^2}{2!} + \frac{0,5^3}{3!} + \frac{0,5^4}{4!} + \frac{0,5^5}{5!} + R_5(0,5). \quad (IV)$$

Um einen Anhalt zu haben, auf wieviel Dezimalstellen die einzelnen Summanden zu berechnen sind, wird zuerst das Restglied nach (23.5) berechnet und abgeschätzt. Mit $n+1 = 6$, $f^{(6)}(x) = e^x$, also $f^{(6)}(\theta x) = e^{\theta x}$ und $x = 0,5$ ist

$$R_5(0,5) = \frac{e^{\theta \cdot 0,5}}{6!} \cdot 0,5^6.$$

Wegen $0 < \theta < 1$ ist, wenn θ durch 0 bzw. 1 ersetzt wird:

$$\frac{e^{0 \cdot 0,5}}{6!} \cdot 0,5^6 < R_5(0,5) < \frac{e^{1 \cdot 0,5}}{6!} \cdot 0,5^6$$

oder

$$\frac{1}{6!} \cdot 0,5^6 < R_5(0,5) < \frac{e^{0,5}}{6!} \cdot 0,5^6.$$

Wird noch $e^{0,5}$ durch den runden größeren Wert 2 ersetzt, dann ist

$$\frac{0,5^6}{6!} < R_5(0,5) < \frac{2}{6!} \cdot 0,5^6$$

oder

$$2,2 \cdot 10^{-5} < R_5(0,5) < 4,3 \cdot 10^{-5}. \quad (V)$$

Das Restglied ist kleiner als 5 Einheiten der 5. Dezimalen, so daß sich 4stellige Genauigkeit ergeben wird. Zur Sicherheit werden die Summanden in (IV) auf 2 Dezimalen mehr ausgerechnet:

$$e^{0,5} = 1 + 0,5 + 0,125 + 0,020833 + 0,002604 + 0,000260 + R_5(0,5)$$

$$e^{0,5} = 1,648697 + R_5(0,5).$$

Mit (V) folgt:

$$1,648697 + 2,2 \cdot 10^{-5} < e^{0,5} < 1,648697 + 4,3 \cdot 10^{-5}$$

$$1,648719 < e^{0,5} < 1,648740.$$

Vier Dezimalen des Funktionswertes sind gesichert:

$$e^{0,5} = 1,6487...$$

Durch Runden, dem praktisch wichtigeren Fall, ergeben sich hier ebenfalls 4 gesicherte Dezimalen:

$$\underline{e^{0,5} \approx 1,6487}.$$

Aus (23.7) folgt mit $x = 1$ eine Potenzreihe zur Berechnung der Zahl e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

b) Die Reihe der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

Für die Funktion und ihre Ableitung folgt

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & \text{und bei } x = 0 \quad f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = 1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Diese Werte in (23.6) eingesetzt ergeben die Potenzreihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad x \in P$$

(23.8)

Die Sinus-Reihe ist beständig konvergent. Der Beweis kann mit Hilfe der Formel (23.3b) geführt werden.

BEISPIEL

23.12. Es sind die Funktionswerte $\sin 10^\circ$ und $\sin 10'$ auf 5 Dezimalstellen (gerundet) zu berechnen.

Lösung: Die 5stellige Genauigkeit ist erreicht, wenn der Fehler der Näherung, also $R_n(x)$, kleiner als 5 Einheiten der 6. Dezimalen beträgt. Da die Sinus-Reihe alterniert,

ist $|R_n(x)|$ kleiner als das erste vernachlässigte Glied: Die Reihe kann daher dann abgebrochen werden, wenn der Betrag des letzten berechneten Gliedes kleiner als $5 \cdot 10^{-6}$ ist. Für die Zwischenrechnungen werden 7 Dezimalen verwendet. Die Winkel sind in Bogenmaß umzurechnen.

$$\sin 10^\circ = \sin 0,1745329$$

$$= 0,1745329 - \frac{0,1745329^3}{3!} + \frac{0,1745329^5}{5!} - + \dots$$

$$= 0,1745329 - 0,0008861 + 0,00000135 - + \dots$$

$$= 0,17364818 - + \dots \quad \underline{\underline{\sin 10^\circ \approx 0,17365}}$$

$$\sin 10' = \sin 0,0029089$$

$$= 0,0029089 - \frac{0,0029089^3}{3!} + - \dots$$

$$= 0,0029089 - 4 \cdot 10^{-9} + \dots$$

$$= 0,0029089 - + \dots \quad \underline{\underline{\sin 10' \approx 0,00291}}$$

Für die Rechnung sind um so weniger Glieder erforderlich, je kleiner x ist.

Bild 23.5 zeigt für die Näherungen

$$\sin x \approx x; \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}; \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

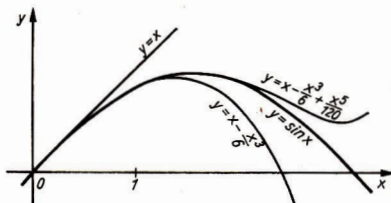


Bild 23.5

die zugehörigen Näherungsparabeln 1., 3. und 5. Grades. In der folgenden Tabelle sind für die ersten beiden Näherungen und verschiedene Genauigkeitsanforderungen die erlaubten Intervalle des Winkels in Bogen- und Gradmaß angegeben.

Genauigkeit auf				
	3 Dezimalen	4 Dezimalen	5 Dezimalen	6 Dezimalen
$\sin x \approx x$	$ x < 0,144$ $ \alpha < 8,2^\circ$	$ x < 0,067$ $ \alpha < 3,8^\circ$	$ x < 0,033$ $ \alpha < 1,8^\circ$	$ x < 0,014$ $ \alpha < 0,8^\circ$
$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$	$ x < 0,570$ $ \alpha < 32,6^\circ$	$ x < 0,359$ $ \alpha < 20,6^\circ$	$ x < 0,227$ $ \alpha < 13,0^\circ$	$ x < 0,143$ $ \alpha < 8,2^\circ$

c) Die binomische Reihe

Zu einer vielseitig anwendbaren Reihe führt die Entwicklung der Funktion

$$f(x) = (1+x)^m$$

mit der beliebigen reellen Zahl m . Es ist

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^m & f(0) = 1 \\ f'(x) = m(1+x)^{m-1} & f'(0) = m \\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0) = m(m-1) \\ f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f'''(0) = m(m-1)(m-2) \\ \dots & \dots \end{array}$$

Damit folgt aus (23.6):

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (\text{VI})$$

Die Koeffizienten von x sind Binomialkoeffizienten (vgl. 2.6.4.), deren allgemeine Form lautet:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} = \binom{m}{k}.$$

Mit (VI) ergibt sich die binomische Reihe

$$(1+x)^m = 1 + mx + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k; \quad x \in (-1; 1) \quad (23.9)$$

Der angegebene Konvergenzradius $r = 1$ folgt nach (23.3b) aus

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}}{\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{m}{n} - 1} \right| = 1. \end{aligned}$$

Ist m eine natürliche Zahl, dann werden alle Binomialkoeffizienten $\binom{m}{k}$ für $k > m$ gleich Null, und die Reihe bricht ab. Die unendliche binomische Reihe geht dann in eine endliche Reihe, den binomischen Satz, über.

Die binomische Reihe dient zur Herleitung vieler Näherungsformeln (vgl. 23.5.4.).

BEISPIELE

23.13. Für die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ lautet die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)x^3 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{4}\right)x^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots\end{aligned}$$

Für sehr kleine x gilt die Näherung

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \quad (\text{VII})$$

Wird 4stellige Genauigkeit verlangt, dann muß, da die Reihe alterniert, $|R_1(x)| < \frac{1}{8}x^2 < 5 \cdot 10^{-5}$ sein, woraus für die zulässigen x -Werte $x^2 < 4 \cdot 10^{-4}$ und $|x| < 2 \cdot 10^{-2}$ folgt. Zum Beispiel ist nach (VII)

$$\sqrt{1,0184} = \sqrt{1 + 0,0184} = 1 + \frac{0,0184}{2} = 1,0092.$$

23.14. Von einem Kreisbogen sind der Radius r und die Sehne s gegeben. Gesucht wird eine Näherungsformel zur Berechnung der zugehörigen Pfeilhöhe p .

Lösung: Nach Bild 23.6 ist

$$p = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

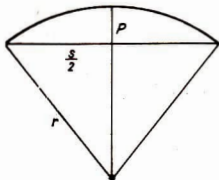


Bild 23.6

Die Wurzel wird umgeformt

$$p = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r - r \sqrt{1 - \frac{s^2}{4r^2}} = r - r \left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und nach (23.9) mit $x = -\frac{s^2}{4r^2}$, $m = \frac{1}{2}$ in eine binomische Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}p &= r - r \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{s^2}{4r^2}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right) \left(-\frac{s^2}{4r^2}\right)^2 + \dots \right] \\ p &= \frac{s^2}{8r} - \frac{s^4}{32r^3} + \dots \quad (\text{VIII})\end{aligned}$$

Wird bereits das zweite Glied der Reihe (VIII) vernachlässigt, dann ergibt sich die Näherungsformel

$$p \approx \frac{s^2}{8r} \quad (\text{IX})$$

Durch Restgliedabschätzung kann wieder entschieden werden, für welches Verhältnis der Sehne s zum Radius r die Näherungsformel (IX) bei festgelegter Genauigkeit gültig ist. Wird z. B. eine Genauigkeit auf 3 Dezimalen vorgegeben, dann gilt

$$|R_2| < \frac{s^4}{32r^3} < 0,0005$$

Daraus folgt $s < 0,36r^{\frac{3}{4}}$. Z. B. muß für $r = 100$ m die Sehne $s < 11,3$ m sein, um p nach (IX) auf mm genau zu erhalten.

d) Die Reihe für $y = \arcsin x$

Statt unmittelbar die TAYLORSche Reihe (23.6) anzuwenden, wird ein anderer Weg der Reihenentwicklung gezeigt. Der Term $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ wird nach (23.9) in eine binomische Reihe entwickelt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots; \quad x \in (-1; 1).$$

Auf beiden Seiten integriert ergibt

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \frac{5}{16} \frac{x^7}{7} + \dots + C, \quad x \in (-1; 1), \quad (\text{X})$$

wobei nach 23.4. der Konvergenzbereich erhalten geblieben ist.

Mit $x = 0$ folgt wegen $\arcsin 0 = 0$ aus (X) die Integrationskonstante $C = 0$. Die Reihe lautet:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots; \quad x \in (-1; 1)$$

(23.10)

Die angewandte Schreibweise der a_k läßt das Bildungsgesetz gut erkennen.

e) Die Reihe für $y = \ln(1+x)$

Wird für den Bruch $\frac{1}{1+x}$ die Partialdivision durchgeführt, dann entsteht die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^{n+1} + \dots$$

Der Konvergenzradius ist nach (23.3b): $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$.

Die Integration ergibt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}; \quad x \in (-1; 1)$$

(23.11)

Für die Integrationskonstante folgte mit $x=0$: $\ln 1 = C = 0$

BEISPIELE

23.15. Es ist $\ln 1,2$ auf 3 Dezimalen genau zu berechnen.

Lösung: Mit der Reihe (23.11) folgt

$$\begin{aligned} \ln 1,2 &= 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} - \frac{0,2^4}{4} + \dots \\ &= 0,2 - 0,02 + 0,00267 - 0,0004 + \dots \\ &= \underline{\underline{0,182}} \end{aligned}$$

23.16. Wieviel Glieder der Reihe (23.11) muß man verwenden, um $\ln 1,2$ auf 5 Dezimalstellen genau zu erhalten?

Lösung: Da die Reihe alterniert, ist $|R_n(0,2)| < \frac{0,2^{n+1}}{n+1}$; außerdem muß $R_n(0,2)$ kleiner als 5 Einheiten der 6. Dezimalstelle sein:

$$|R_n(0,2)| < \frac{0,2^{n+1}}{n+1} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Probieren zeigt sich, daß die Ungleichung bereits für $n=6$ erfüllt ist.

$$\frac{0,2^7}{7} = 1,8 \cdot 10^{-6} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Es müssen deshalb die ersten 6 Glieder der Reihe verwendet werden.

Die Reihe (23.11) gestattet nur die Berechnung der Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 2. Zur Berechnung beliebiger Logarithmen wurden andere, vor allem schneller konvergierende Reihen aufgestellt, z. B. die Reihe

$$\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]; \quad x \in (0; \infty) \quad (23.12)$$

Um z. B. $\ln 2$ auf 5 Dezimalen zu berechnen, braucht man von der Reihe (23.11) (mit $x=1$, für welchen Wert die Reihe auch konvergent ist) rund 200000 Glieder, während von der Reihe (23.12) (mit $x=2$) nur 5 Glieder benötigt werden.

Für einige Funktionen, z. B. $y = \tan x$, geben die höheren Ableitungen komplizierte Ausdrücke. Statt der Reihenentwicklung nach TAYLOR werden dann andere Verfahren angewandt, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Aufgaben: 23.9. bis 23.12.

23.5.3. Die 2. Form der Taylorschen Reihe

Bei der Anwendung der 1. Form der TAYLORSchen Reihe wird die Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$, der Entwicklungsstelle, genähert durch ganzrationale Funktionen n -ten Grades dargestellt. Allgemeiner ist die Aufgabe, die Funktion in der Umgebung einer beliebigen Entwicklungsstelle $x = x_0$ durch ganzrationale Funktionen anzunähern. Die zugehörigen Näherungsparabeln berühren dann die Kurve der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ entsprechend Bild 23.7. Ein Vergleich mit Bild 23.4 zeigt, daß nur eine Verschiebung in Richtung der x -Achse erfolgt. In Bild 23.4 ist x der Abstand der betrachteten Abszisse von der Entwicklungsstelle $x = 0$. Entsprechend ist in Bild 23.7 $x - x_0$ der Abstand von der Entwicklungsstelle x_0 .

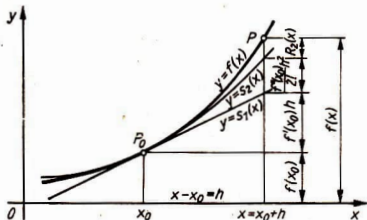


Bild 23.7

Wird deshalb in (23.6) auf der rechten Seite für x die Differenz $x - x_0$ und für 0 der Wert x_0 gesetzt, dann ergibt sich die 2. Form der Taylorschen Reihe

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{S_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \dots}_{R_n(x)} \quad (23.13)$$

Das zugehörige Restglied in der Lagrangeschen Form lautet

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}; \quad 0 < \vartheta < 1. \quad (23.14)$$

Häufig wird in (23.13) auch $x - x_0 = h$ gesetzt, so daß $x = x_0 + h$ ist:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n}_{S_n(h)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1} + \dots}_{R_n(h)} \quad (23.15)$$

mit dem Restglied in der LAGRANGESchen Form:

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad 0 < \vartheta < 1 \quad (23.16)$$

BEISPIELE

23.17. Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ ist nach der 2. Form der TAYLORSchen Reihe an der Stelle $x_0 = 2$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

Lösung: Für die Ableitungsfunktionen und die Ableitungen an der Stelle $x_0 = 2$ folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{x}{2}} & f(2) &= \frac{1}{e} \\ f'(x) &= -e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} & f'(2) &= -\frac{1}{2e} \\ f''(x) &= e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{4} & f''(2) &= \frac{1}{4e} \\ f'''(x) &= -e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{8} & f'''(2) &= -\frac{1}{8e} \\ f^{(4)}(x) &= e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{16} & f^{(4)}(2) &= \frac{1}{16e} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Damit folgt aus (23.13)

$$e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{e} \left[1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4 \cdot 2!} - \frac{(x-2)^3}{8 \cdot 3!} + \frac{(x-2)^4}{16 \cdot 4!} - + \dots \right]$$

Bei bekanntem Wert von e können damit weitere Funktionswerte von $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ berechnet werden, wenn x in der Nähe von $x_0 = 2$ liegt. Für $x = 2,4$ und eine Genauigkeit auf 4 Dezimalen ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned} e^{-1,2} &= \frac{1}{e} \left[1 - \frac{0,4}{2} + \frac{0,4^2}{8} - \frac{0,4^3}{48} + \frac{0,4^4}{384} - + \dots \right] \\ &= 0,367879 [1 - 0,2 + 0,02 - 0,001333 + 0,000067 - + \dots] \\ &= \underline{\underline{0,3012}} \end{aligned}$$

23.18. Der Funktionswert $\sin 31^\circ$ ist mit 5stelliger Genauigkeit unter Verwendung der bekannten Funktionswerte $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ zu berechnen.

Lösung: Nach (23.15) folgt:

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + \cos x_0 h - \frac{\sin x_0}{2!} h^2 - \frac{\cos x_0}{3!} h^3 + \dots$$

Mit $x_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ und $h = 0,0174533 = 1^\circ$ ist

$$\begin{aligned}\sin 31^\circ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 0,0174533 - \frac{1}{2 \cdot 2!} 0,0174533^3 - \dots \\ &= 0,5 + 0,0151150 - 0,0000762 - \dots\end{aligned}$$

Bei Verwendung der ersten 3 Glieder ergibt sich $\sin 31^\circ = 0,5150388 + R_2(31^\circ)$ und für das Restglied nach (23.16)

$$|R_2(31^\circ)| = \frac{\cos(x_0 + \theta h)}{3!} h^3 < \frac{1}{3!} h^3 = 9 \cdot 10^{-7}$$

[es ist stets $\cos(x_0 + \theta h) < 1$];

damit ist 5stellige Genauigkeit gesichert. Der gerundete Wert ist

$$\sin 31^\circ \approx \underline{\underline{0,51504}}.$$

Aufgaben: 23.13. und 23.14.

23.5.4. Einige Anwendungen

Zu den häufigsten Anwendungen der unendlichen Reihen gehören neben der Berechnung von Funktionswerten in der modernen Rechentechnik besonders die Aufstellung von Näherungsformeln und die Berechnung von Integralen, die nur schwer oder gar nicht auf Grundintegrale zurückgeführt werden können.

BEISPIELE

23.19. Es ist eine Näherungsformel aufzustellen, die bei gegebenem Radius r und gegebener Bogenlänge b die Differenz zwischen Bogen und zugehöriger Sehne ergibt.

Lösung: Nach Bild 23.8 ist

$$b = r\alpha, \quad s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

und damit die Differenz

$$d = b - s = r \left(\alpha - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

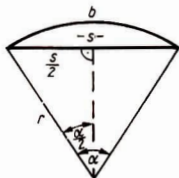


Bild 23.8

$\sin \frac{\alpha}{2}$ wird nach (23.8) mit $x = \frac{\alpha}{2}$ in eine Potenzreihe entwickelt:

$$d = r \left[\alpha - 2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} + \frac{\alpha^5}{3840} - + \dots \right) \right]$$

α sei so klein, daß nur die ersten 2 Glieder der Reihe verwendet werden:

$$d \approx r \left[\alpha - 2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} \right) \right] = \frac{\alpha^3 r}{48}.$$

Mit $\alpha = \frac{b}{r}$ ergibt sich die für den Rechenstab geeignete Näherungsformel

$$d = b - s \approx \frac{b^3}{24r^2};$$

z. B. ist für $r = 20 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$ die Differenz $d = b - s = 0,0225$. Für das Restglied gilt $|R_3| < \frac{2r\alpha^5}{3840} = \frac{b^5}{1920r^4} < 2,5 \cdot 10^{-5}$.

Damit ist für d die vierte, praktisch kaum noch verwertbare Dezimalstelle gesichert.

- 23.20. Ein Pendel hat die Form eines homogenen Stabes mit konstantem Querschnitt. α sei der Ausdehnungskoeffizient des Stabmaterials. Bei der Temperatur t_1 habe das Pendel die Periodendauer T_1 und die Stablänge l_1 . Welche Periodendauer T_2 ergibt sich bei einer Temperatur t_2 ?

Lösung: Ist l_2 die Stablänge bei der Temperatur t_2 , so gilt nach physikalischen Überlegungen

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \quad (\text{I})$$

Weiterhin ist

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$$

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$$

wenn l_0 die Stablänge bei der Temperatur t_0 ist. Damit folgt aus (I)

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}} \quad (\text{II})$$

Der Radikand wird als Funktion von α betrachtet und nach (23.6) in eine Reihe entwickelt

$$\frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} = 1 + (t_2 - t_1) \alpha - (t_2 - t_1) t_1 \alpha^2 + \dots$$

Da α^2 bereits sehr klein ist, können das 3. Glied sowie alle folgenden Reihenglieder vernachlässigt werden. Aus (II) folgt

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \sqrt{1 + (t_2 - t_1) \alpha} \quad \text{oder}$$

$$T_2 \approx T_1 \sqrt{1 + (t_2 - t_1) \alpha}.$$

Damit wurde eine leicht handhabbare Näherungsformel zur Berechnung von T_2 entwickelt.

- 23.21. Von einer Parabel sind nach Bild 23.9 die Sehne s und die Pfeilhöhe h gegeben. Gesucht wird eine Näherungsformel für die Bogenlänge $l = \widehat{AB}$, wenn h im Verhältnis zu s klein ist.

Lösung: Die Parabelgleichung lautet im angegebenen Koordinatensystem:

$$y = \frac{4h}{s^2} x^2.$$

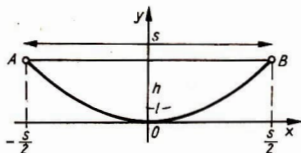


Bild 23.9

Die Bogenlänge $l = \widehat{AB}$ ist nach (18.9):

$$l = 2 \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = 2 \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 + \frac{64h^2}{s^4} x^2} \, dx.$$

Der Integrand wird nach (23.9) in eine Potenzreihe entwickelt:

$$l = 2 \int_0^{\frac{s}{2}} \left(1 + \frac{32h^2}{s^4} x^2 - \frac{512h^4}{s^8} x^4 + \dots \right) dx.$$

Die Reihe ist für $\frac{64h^2}{s^4} x^2 < 1$, d. h. für $|x| < \frac{s^2}{8h}$ konvergent und kann nach dem Satz aus 23.4. gliedweise integriert werden:

$$l = 2 \left[x + \frac{32h^2}{3s^4} x^3 - \frac{512h^4}{5s^8} x^5 + \dots \right]_{x=0}^{x=s/2}$$

Wird $h < \frac{s}{4}$ angenommen, dann ist $\frac{s}{2} < \frac{s^2}{8h}$, d. h., $x = \frac{s}{2}$ liegt im Konvergenzbereich, und nach Einsetzen der Grenzen folgt:

$$l = s + \frac{8h^2}{3s} - \frac{32h^4}{5s^3} + \dots$$

Die Verwendung der ersten 2 Glieder führt zur Näherungsformel:

$$\underline{\underline{l \approx s + \frac{8h^2}{3s}}}.$$

Bei einer geforderten Genauigkeit von 3 Dezimalen ist

$$|R_3| < \frac{32h^4}{5s^3} < 0,0005 \Rightarrow h < \sqrt[4]{8 \cdot 10^{-5} s^3};$$

z. B. muß für $s = 20 \text{ m}$ $h < 0,9 \text{ m}$ und für $s = 50 \text{ m}$ $h < 1,77 \text{ m}$ sein.

23.22. Für eine Ellipse mit der Parameterdarstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$ ergibt sich die Bogenlänge nach (18.11) mit

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} \, dt \quad (\text{III})$$

Die numerische Exzentrizität ist

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

Woraus

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

folgt. Damit wird aus (III)

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 - \varepsilon^2) \cos^2 t} \, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \, dt \\ &= a \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \, dt \end{aligned}$$

Dieses Integral kann durch keine elementare Funktion ausgedrückt werden. Deshalb wird der Radikand nach (23.9) in eine Reihe entwickelt:

$$s = a \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \cos^4 t - \dots \right) dt$$

Die gliedweise Integration unter Verwendung der Rekursionsformeln für $\int \cos^n t \, dt$ (s. Integraltafel) ergibt:

$$\begin{aligned} s &= a \left[t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \left(\frac{1}{4} \cos^3 t \sin t + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) \right) - \dots \right]_0^{2\pi} \\ s &= a \left[2\pi - \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot 2\pi - \frac{\varepsilon^4}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi - \dots \right] \end{aligned}$$

Umgeformt und ergänzt durch weitere Glieder der unendlichen Reihe ergibt

$$s = 2a\pi \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{3}{64} \varepsilon^4 - \frac{5}{256} \varepsilon^6 - \frac{175}{16384} \varepsilon^8 - \dots \right)$$

Zum Beispiel ist für $a = 42$ cm, $b = 36$ cm die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0,51508$ und damit die Bogenlänge bei einer geforderten Genauigkeit auf eine Dezimale

$$\begin{aligned} s &= 84\pi (1 - 0,06633 - 0,00330 - 0,00036 - 0,00005 - \dots) \text{ cm} \\ s &= \underline{\underline{245,4 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

Eine Restgliedabschätzung ist komplizierter. Es ist daher genügend, wenn auch theoretisch nicht exakt, für die Berechnung von s soviel Glieder der Reihe zu verwenden, bis das letzte mit erfaßte Glied, multipliziert mit 84π , kleiner als 0,05 ist.

23.23. In der mathematischen Statistik hat das GAUSSsche Fehlerverteilungsgesetz eine große Bedeutung. Es wird im einfachsten Sonderfall durch die Funktion $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ beschrieben, deren Bild eine Glockenkurve ist. Die in Bild 23.10 schraffierte Fläche ist zu berechnen.

Lösung: Da eine gerade Funktion vorliegt, ist

$$A = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Dieses Integral ist elementar nicht lösbar. Für den Integrand ergibt sich die Potenzreihe, wenn in (23.7) x durch $-x^2$ ersetzt wird (als Konvergenzbereich bleibt P):

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots \right). \end{aligned}$$

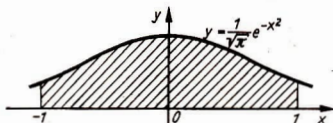


Bild 23.10

Aus den ersten 4 Gliedern folgt:

$$A = 0,838 + R_3 \text{ mit } |R_3| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{216} = 0,005, R_3 > 0.$$

Daher ist

$$0,838 < A < 0,843 \Rightarrow \underline{A \approx 0,84}.$$

Kontrollfragen

- 23.1. Wie wird die Konvergenz einer unendlichen Reihe definiert?
- 23.2. Welches Konvergenzverhalten hat die unendliche geometrische Reihe?
- 23.3. Welche Bedeutung hat das Restglied einer unendlichen Reihe?
- 23.4. Es sind a) eine notwendige Bedingung, b) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer unendlichen Reihe anzugeben.
- 23.5. Wie wird die Genauigkeit der Näherung $S \approx S_n$ abgeschätzt?
- 23.6. Wie ist das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe charakterisiert?
- 23.7. Wie lassen sich transzendente oder algebraische Funktionen genähert durch ganzrationale Funktionen darstellen?
- 23.8. Welche geometrische Bedeutung hat die n -te Teilsumme der ersten bzw. zweiten Taylorsche Reihe?
- 23.9. Was wird unter „Linearisierung“ einer Funktion verstanden?

Aufgaben: 23.15. bis 23.17.

23.6. Aufgaben

- 23.1. Für die folgenden unendlichen Reihen sowie für die zugehörigen Teilsummenfolgen sind jeweils die ersten vier Glieder anzugeben.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \\ \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,2^k}{k!} & \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k-1)!} \end{array}$$

- 23.2. Für jede der folgenden unendlichen geometrischen Reihen ist die Summe S zu bestimmen.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } S = 32 + 8 + 2 + 0,5 + \dots & \\ \text{b) } S = 15 - 9 + 5,4 - 3,24 + \dots & \\ \text{c) } S = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (|x| < 1) & \\ \text{d) } S = a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^3}{b^2} + \dots \quad (|a| < |b|) & \end{array}$$

- 23.3. In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b wird vom Scheitelpunkt des rechten Winkels das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b , von dessen Fußpunkt das Lot auf c , vom Fußpunkt des letzten Lotes das Lot auf b gefällt. Dieses Verfahren werde unbegrenzt fortgesetzt. Wie groß ist die Summe aller Lote?

- 23.4. Die Seite a_1 eines Quadrates ist Diagonale eines zweiten Quadrates, dessen Seite die Diagonale eines dritten Quadrates usw. a) Wie groß ist die Summe aller Quadratseiten $a_1, a_2, \dots$? b) Wie groß ist die Summe aller Quadratflächen?

- 23.5. Die nachstehenden periodischen Dezimalbrüche sind als gemeine Brüche zu schreiben.

$$\text{a) } 0,\overline{36} \quad \text{b) } 0,\overline{26} \quad \text{c) } 0,\overline{108} \quad \text{d) } 4,\overline{054}$$

- 23.6. Für die Summe der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$ ist ein Näherungswert aus der Teilsumme S_7 zu berechnen, und es sind die gesicherten Stellen anzugeben.

- 23.7. Desgl. für die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 0,2^k}{k}$ und S_4 .

- 23.8. Es ist der Konvergenzbereich für jede der folgenden Potenzreihen zu bestimmen.

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$$

- 23.9. Die folgenden Funktionen sind in Potenzreihen zu entwickeln. (Es sind von jeder Reihe die ersten 4 Glieder anzugeben.)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = (1 + e^x)^2 & \text{b) } y = \cos x & \text{c) } y = \sin^2 x \\ \text{d) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} & \text{e) } y = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x}} & \text{f) } y = \frac{a+x}{b+x} \\ \text{g) } y = \ln(1 + e^{at}) & & \end{array}$$

- 23.10. Für die folgenden Funktionen sind Näherungsformeln anzugeben. Dazu sind die Funktionen nach (23.9) in binomische Reihen zu entwickeln und diese nach dem 2. Glied abzubauen. Für welche x -Werte liefert die Näherungsformel eine Genauigkeit auf drei Dezimalen (Diese Genauigkeitsuntersuchung ist nur für die alternierenden Reihen durchzuführen)?

a) $y = \sqrt{1+x^2}$

b) $y = \sqrt{1-x}$

c) $y = \frac{1}{1+x}$

d) $y = \frac{1}{1-x}$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

h) $y = \sqrt[3]{1+x}$

i) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$

k) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

m) $y = \frac{1}{(1+x)^2}$

- 23.11. Es ist die Reihe für $\arctan x$ aufzustellen, indem auf den Bruch $\frac{1}{1+x^2}$ die Partialdivision angewendet und anschließend integriert wird. Wie groß ist der Konvergenzradius? Welche spezielle Reihe folgt für $x = 1$?

- 23.12. Die Funktionswerte $\cos 5^\circ$ und $\cos 20^\circ$ sind mit Hilfe der in Aufg. 23.9b ermittelten Reihe auf 5 Dezimalstellen zu berechnen.

- 23.13. Die folgenden Funktionen sind nach der 2. Form der TAYLORSchen Reihe an der Stelle $x = x_0$ zu entwickeln.

a) $y = e^{\frac{x}{a}}, \quad x_0 = a$

b) $y = x e^{-x}, \quad x_0 = 1$

c) $y = \frac{e^x}{x}, \quad x_0 = 2$

- 23.14. Unter Verwendung von $\ln 3 = 1,0986124$ ist $\ln 3,1$ nach der 2. Form der Taylorschen Reihe auf 6 Dezimalen zu berechnen.

- 23.15. Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b soll a um die variable Strecke Δa verändert werden. Der Winkel α ist genähert als lineare Funktion von Δa darzustellen (Bild 23.11).

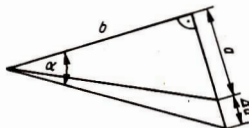


Bild 23.11

- 23.16. Im rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten a und b gegeben, und es ist $b \ll a$. Zur Berechnung der Hypotenuse ist eine Näherungsformel der Form $c \approx a + k$ zu entwickeln.

23.17. Die folgenden bestimmten Integrale sind durch Reihenentwicklung des Integranden und nachfolgende gliedweise Integration zu berechnen.

$$\text{a) } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{auf 4 Dezimalen genau}$$

$$\text{b) } I = \int_0^{0,6} x^2 e^{-x^3} dx \quad \text{auf 3 Dezimalen genau}$$

$$\text{c) } I = \int_0^{0,3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \quad \text{auf 5 Dezimalen genau}$$

$$\text{d) } I = \int_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x^3} dx \quad \text{auf 3 Dezimalen genau}$$

24. Differentialgleichungen

24.1. Einführende Betrachtungen, Grundbegriffe

In Naturwissenschaft und Technik treten oft Probleme auf, deren mathematische Behandlung das Lösen von Differentialgleichungen erfordert. Für einige Typen von Differentialgleichungen, darunter die für die Praxis bedeutungsvollen linearen Differentialgleichungen, werden im folgenden Lösungsverfahren vorgestellt. Einige Begriffe von allgemeiner Bedeutung sollen vom Beispiel ausgehend definiert werden.

Die Veranschaulichung des allgemeinen Vorgehens und einiger grundlegender Begriffe erfolgt am senkrecht nach oben geworfenen Körper. Auf diesen wirkt (wenn von anderen Kräften wie Luftwiderstand usw. abgesehen wird) die Anziehungskraft der Erde und bewirkt eine der Wurfrichtung entgegengesetzt gerichtete Beschleunigung g . Also gilt für die Beschleunigungs-Zeit-Funktion

$$f_1: a = f_1(t) = -g. \quad (\text{I})$$

Wegen $a = \frac{dv}{dt}$ wird

$$\frac{dv}{dt} = -g,$$

$$dv = -g \, dt.$$

Unbestimmte Integration beider Seiten der Gleichung

$$\int dv = \int -g \, dt$$

liefert die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$f_2: v = -gt + C_1, \quad C_1 \in P. \quad (\text{II})$$

(Die durch die unbestimmte Integration auf beiden Seiten sich ergebenden Integrationskonstanten können zu einer Konstanten C_1 auf einer Seite der Gleichung — hier die rechte — zusammengefaßt werden.)

In gleicher Weise erhält man wegen $v = \frac{ds}{dt}$ aus

$$\frac{ds}{dt} = -gt + C_1,$$

$$ds = (-gt + C_1) \, dt$$

durch unbestimmte Integration

$$\int ds = \int (-gt + C_1) \, dt$$

die Weg-Zeit-Funktion

$$f_3: s = -\frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in P. \quad (\text{III})$$

Hat der Körper zu Beginn der Zeitmessung, für $t = 0$, die Geschwindigkeit $v = v_0$ und ist der bis dahin zurückgelegte Weg $s = s_0$, so können mit Hilfe dieser **Anfangsbedingungen** die Werte von C_1 und C_2 für diesen speziellen Fall berechnet werden.

Aus (II) folgt für $t = 0$, $v = v_0$: $C_1 = v_0$,

aus (III) folgt für $t = 0$, $s = s_0$: $C_2 = s_0$.

Somit lautet das Weg-Zeit-Gesetz des Wurfes senkrecht nach oben unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $t = 0$ $\begin{cases} v = v_0 \\ s = s_0 \end{cases}$

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2. \quad (\text{IV})$$

Das Weg-Zeit-Diagramm ist in Bild 24.1 dargestellt.

Ausgangspunkt der Berechnung war die Beschleunigungs-Zeit-Funktion, Gl. (I), die wegen $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ auch in der Form

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g = 0 \quad (\text{V})$$

geschrieben werden kann.

Gl. (V) nennt man eine **gewöhnliche¹⁾ Differentialgleichung²⁾**, da sie eine Ableitung (hier die 2.) einer zu bestimmenden Funktion mit einer abhängigen (hier s) und einer unabhängigen Variablen (hier t) enthält. Allgemein gilt die

Definition

Eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion einer unabhängigen Variablen, die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion nach der unabhängigen Variablen enthält, heißt eine **gewöhnliche Differentialgleichung**.

Die höchste in einer Dgl. vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion bestimmt die **Ordnung der Dgl.**, d. h., in einer Dgl. n -ter Ordnung tritt als höchste Ableitung die n -te auf.

Gl. (V) stellt demnach eine Dgl. 2. Ordnung dar. Aus dieser konnte durch Integration die Lösung (III) der Dgl. sowie die spezielle, den Anfangsbedingungen genügende Lösung (IV) ermittelt werden. Von der Richtigkeit der Lösungen kann man sich durch Ableiten von (III) oder (IV) und Einsetzen des Wertes der 2. Ableitung in (V) überzeugen.

Definition

Die **allgemeine Lösung der Dgl.** ist die Menge aller Funktionen, deren Funktionswerte und Werte der Ableitungen im Definitionsbereich die Dgl. erfüllen.

¹⁾ Gewöhnliche Dgln. sind Gleichungen für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen, partielle Dgln. sind Gleichungen für Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen.

²⁾ Im folgenden wird „Differentialgleichung“ mit „Dgl.“ abgekürzt.

Das Lösen der Dgl. 2. Ordnung (V) erforderte ein zweimaliges Integrieren. Deshalb enthält die allgemeine Lösung (III) zwei Integrationskonstanten, die auch als **Parameter** bezeichnet werden. Allgemein gilt der

Satz

Die allgemeine Lösung einer Dgl. n -ter Ordnung enthält genau n willkürliche Parameter.

Werden z. B. auf Grund von Anfangsbedingungen für diese Parameter spezielle Werte festgelegt, so entsteht eine **partikuläre Lösung** der Dgl. (z. B. Gl. (IV)).

Die allgemeine Lösung einer Dgl. läßt sich grafisch durch eine Kurvenschar darstellen. Eine Dgl. n -ter Ordnung, deren allgemeine Lösung n Parameter enthält, hat eine **n -parametrische Kurvenschar**. Einer partikulären Lösung entspricht dann eine dieser Kurven, die auch als **Lösungskurve** oder **Integralkurve** bezeichnet wird.

Die Lösungsmenge der Dgl. (V), deren Elemente Funktionen mit der Gleichung (III) sind, wird durch eine zweiparametrische Kurvenschar repräsentiert, nämlich durch quadratische Parabeln. Für die partikuläre Lösung (IV) ergibt sich die in Bild 24.1 dargestellte Lösungskurve. Die Koordinaten des Scheitelpunktes können als die des

Extrempunktes der Funktion $s = s_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ zu

$$t_E = \frac{v_0}{g}; \quad s_E = s_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

berechnet werden.

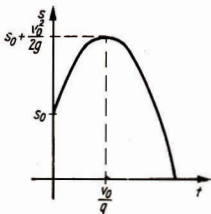


Bild 24.1

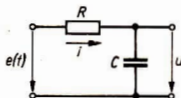


Bild 24.2

BEISPIELE

- 24.1. An einem RC -Glied (Bild 24.2) soll eingangsseitig eine zeitlich veränderliche Quellspannung $u_q(t)$ (im Bild $e(t)$) anliegen. Die Abhängigkeit der Ausgangsspannung u von der Zeit ist durch eine Dgl. anzugeben.

Lösung: Nach dem 2. Kirchhoffschen Satz („In einer Masche ist die Summe aller Urspannungen gleich der Summe aller Spannungsabfälle.“) gilt

$$u_q(t) = u_R + u_C,$$

wobei $u_R = iR$ und $u_C = u$ ist.

Für einen idealen Kondensator gilt (vgl. 19.1.2.) $i = C \frac{du}{dt}$. Damit erhält man

$$u_q(t) = iR + u = C \frac{du}{dt} R + u.$$

Das Übertragungsverhalten des Vierpols wird also durch eine Dgl. 1. Ordnung beschrieben:

$$RC \frac{du}{dt} + u = u_q(t).$$

- 24.2. Eine Masse m ist an einer elastischen Feder (deren Masse gegenüber m vernachlässigbar sei) aufgehängt (Bild 24.3). Die Dgl. für die Bewegung der Masse nach einmaligem Auslenken aus der Ruhelage ist aufzustellen.

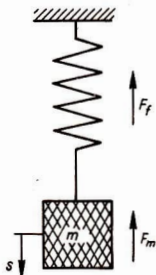


Bild 24.3

Lösung: Bei einer Abwärtsbewegung der Masse tritt eine nach oben gerichtete Federkraft auf, die proportional der Auslenkung ist

$$F_f = ks \quad (k \text{ Federkonstante}).$$

Die der Bewegung entgegengesetzt, also ebenfalls nach oben gerichtete Massenträgheitskraft ist

$$F_m = ma = m \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Werden Reibungskräfte vernachlässigt, so liefert die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + ks = 0$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m} s = 0.$$

Das ist eine Dgl. 2. Ordnung, durch die eine ungedämpfte freie Schwingung beschrieben wird. Die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung ist $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$. Damit erhält man die Dgl. in der Form

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

- 24.3. Es soll geprüft werden, ob $y = f(t) = y_0 + c + K e^{-\frac{t}{T}}$ und $y_p = y_0 + c \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ Lösungen der Dgl. 1. Ordnung $Ty' + y = y_0 + c$ ($t \geq 0$, y_0, c, T Konstanten, K Parameter) sind.

Lösung: Durch Differenzieren der angegebenen Lösungen entsteht

$$y' = -\frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{und} \quad y_p' = \frac{c}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

y und y' bzw. y_p und y_p' in die Dgl. eingesetzt, ergeben identische Gleichungen, d. h., y und y_p sind Lösungen der Dgl. y ist die allgemeine Lösung, da sie genau einen Parameter (K) enthält. y_p ist eine partikuläre Lösung, die sich aus der allgemeinen durch die Anfangsbedingung $t = 0$, $y' = y_0$ ergibt:

$$y_0 = y_0 + c + K e^0 \rightarrow K = -c \rightarrow y_p = y_0 + c \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

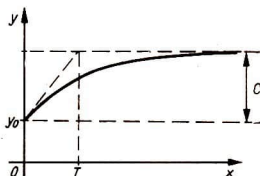


Bild 24.4

c bestimmt (Bild 24.4)

— in Verbindung mit T den Anfangsanstieg der Kurven:

$$t = 0 \rightarrow y' = \frac{c}{T}$$

— sowie in Verbindung mit y_0 deren Asymptote

$$t \rightarrow \infty \rightarrow y = y_0 + c.$$

Dgl. der Technik, in denen die Zeit als unabhängige Variable auftritt, werden im allgemeinen so geschrieben, daß die abhängige Variable den Koeffizienten eins hat (insbesondere dann, wenn die abhängige Variable linear auftritt). Dann ist aus der Dgl. auch das statische Verhalten zu erkennen. Wenn im Beispiel 24.1. die Ausgangsspannung des RC -Gliedes (nach längerer Zeit) in einen stationären Zustand übergeht (z. B. für $u_q(t) = U_q = \text{const}$), müssen die 1. Ableitung dieser Größe nach der Zeit und auch alle höheren Ableitungen zu Null geworden sein, und man entnimmt aus der Dgl.: $[u]_{t \rightarrow \infty} = U_q$. Die Dgl. des Beispiels 24.3. ergibt für den stationären Zustand $[y]_{t \rightarrow \infty} = y_0 + c$.

Anhand des Beispiels 24.1. soll auch noch erläutert werden, warum für viele Betrachtungen die Dgl. nicht nur wichtiger, sondern in ihrer Aussagekraft auch umfassender als ihre Lösung ist. Die im Beispiel 24.1. aufgestellte Dgl. beschreibt das Übertragungsverhalten des elektrischen Baugliedes für jede beliebige Form der Eingangsgröße (Quellspannung) $u_q(t)$. Es könnte also $u_q(t)$ sowohl eine Gleichspannung U sein (die im Zeitpunkt $t = 0$ zugeschaltet wird) als auch eine zeitlich veränderliche Spannung, z. B. $U \sin \omega t$ oder $U \cdot t$. Eine Lösung der Dgl. in der Form $u = f(t)$ kann aber

stets nur für eine bestimmte Form der Eingangsgröße angegeben werden. Zwar interessiert bei praktischen Problemen oft nur die für eine spezielle Eingangsgröße ermittelte partikuläre Lösung, diese gilt aber auch nur für den Spezialfall.

Kontrollfragen

24.1. Wodurch wird die Ordnung einer (gewöhnlichen) Dgl. bestimmt?

24.2. Eine Funktion ist Lösung einer Dgl. 2. Ordnung, enthält aber nur einen Parameter. Liegt damit eine allgemeine Lösung der Dgl. vor?

Aufgaben: 24.1. und 24.2.

24.2. Differentialgleichungen 1. Ordnung

Von den Dgln. 1. Ordnung soll eine für viele Anwendungen ausreichende Auswahl näher betrachtet werden. Die Lösung erfolgt durch Integrieren, d. h., entsprechende Vorkenntnisse aus der Integralrechnung sind erforderlich.

24.2.1. Die Differentialgleichung 1. Ordnung

Gemäß der in 24.1. gegebenen Definition tritt in einer Dgl. 1. Ordnung mindestens einmal der Wert der abgeleiteten Funktion $y' = f'(x)$ einer Funktion f auf, weiterhin können x und y selbst noch vorkommen. Eine Dgl. 1. Ordnung kann deshalb allgemein in der Form

$$\Phi(x; y; y') = 0 \quad (24.1)$$

geschrieben werden, sie wird als **implizite Dgl. 1. Ordnung** bezeichnet. Im folgenden sollen ausschließlich solche Dgln. 1. Ordnung behandelt werden, die sich eindeutig nach y' auflösen lassen. Diese sog. **expliziten Dgln. 1. Ordnung** können stets in der Form

$$y' = \varphi(x; y) \quad (24.2)$$

dargestellt werden.

24.2.2. Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Kann in der expliziten Dgl. 1. Ordnung $y' = \varphi(x; y)$ die rechte Seite $\varphi(x; y)$ als Produkt zweier Terme $g(x)$ und $h(y)$ geschrieben werden, die jeweils nur eine der beiden Variablen enthalten, so entsteht der häufig vorkommende Typ einer Dgl.

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad (24.3)$$

Bei dieser Dgl. ist es stets möglich, die beiden Variablen zu trennen. Deshalb wird (24.3) auch eine **Dgl. 1. Ordnung mit trennbaren Variablen** genannt.

Zum Lösen der Dgl. schreibt man y' als Quotienten der Differentiale

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y),$$

trennt die Variablen

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$$

und integriert beide Seiten

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx.$$

Die Berechnung der Integrale auf beiden Seiten liefert die allgemeine Lösung der Dgl. mit einer Integrationskonstanten als Parameter.

BEISPIELE

24.4. Die Dgl. $y'y + x = 0$ ($y \neq 0$) soll gelöst werden (vgl. Aufg. 24.2.).

Lösung:

Explizite Form $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$

Trennen der Variablen $y dy = -x dx.$

Integrieren $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Mit $r = \sqrt{2C}$ wird $\underline{\underline{x^2 + y^2 = r^2.}}$

Dies ist die Gleichung von Kreisen, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

24.5. Man löse die Dgl. $ay' + y = b$ ($a \neq 0$, $y \neq b$).

Lösung:

Explizite Form $\frac{dy}{dx} = \frac{b-y}{a}.$

Trennen der Variablen $\frac{dy}{y-b} = -\frac{dx}{a}.$

Integrieren $\ln |y-b| = -\frac{x}{a} + C$

$$y-b = \pm e^{-\frac{x}{a}+C} = \pm e^C \cdot e^{-\frac{x}{a}}$$

$$\underline{\underline{y = b + K e^{-\frac{x}{a}}}} \text{ mit } \pm e^C = K.$$

Im Beispiel 24.5. ergab sich nach dem Integrieren der linken Seite der Logarithmus eines Terms. Ist dies auf mindestens einer der beiden Seiten der Fall, dann setzt man zweckmäßig die Integrationskonstante gleich in der Form des Logarithmus einer Konstanten an. Dies ist ohne Einschränkung der Lösungsmenge möglich, denn C soll eine reelle Zahl sein, und jede reelle Zahl kann als Logarithmus einer positiven Zahl dargestellt werden. Im Beispiel 24.5. würde sich ergeben

$$\ln |y - b| = -\frac{x}{a} + \ln |K|$$

$$\ln \left| \frac{y - b}{K} \right| = -\frac{x}{a}$$

$$\frac{y - b}{K} = e^{-\frac{x}{a}}$$

$$y = b + K e^{-\frac{x}{a}}.$$

Mit dieser Dgl. können auch die Dgln.

$$Ty' + y = y_0 + c \quad \text{und} \quad RC \frac{du}{dt} + u = U$$

(vgl. Bsp. 24.3.)

(vgl. Bsp. 24.1. mit $u_q(t) = U$)

als allgemein gelöst betrachtet werden. Der Lösungsweg ist:

Trennen der Variablen

$$\frac{dy}{y - y_0 - c} = -\frac{dx}{T}$$

$$\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrieren

$$\ln |y - y_0 - c| = -\frac{x}{T} + C_1$$

$$\ln |u - U| = -\frac{t}{RC} + C_1$$

$$y = y_0 + c + K e^{-\frac{x}{T}}$$

$$u = U + K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\pm e^{C_1} = K)$$

Aufgaben: 24.3. bis 24.8.

24.2.3. Geometrische Deutung der Differentialgleichung 1. Ordnung

Der Dgl. (24.2) kann man eine anschauliche geometrische Deutung geben. Jedem Wertepaar $(x; y)$ des Definitionsbereiches der Funktion φ entspricht genau ein Punkt der x, y -Ebene. Durch die Funktion φ ist jedem dieser Punkte eine Steigung $y' = \varphi(x; y)$ mit einem Winkel $\alpha = \arctan y'$ zugeordnet (Bild 24.5). Ein Wertetripel $(x; y; y')$

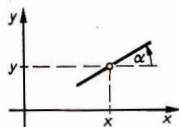


Bild 24.5

bestimmt demnach ein **Linienelement**, die Gesamtheit aller Linienelemente ergibt ein **Richtungsfeld** in der x,y -Ebene. Alle Kurven, die in jedem Punkt die Richtung des Linienelementes haben, erfüllen die Dgl., sind Kurven der Lösungsmenge der Dgl.

BEISPIEL

24.6. Welche Kurven beschreibt die Lösungsmenge der Dgl. $y' = x^2$?

Lösung: Die Dgl. besagt, daß in jedem Punkt des Richtungsfeldes die Steigung des Linienelementes gleich dem Abszissenwert dieses Punktes sein muß. Zeichnet man z. B. die Linienelemente nur für Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, so erhält man ein Richtungsfeld wie in Bild 24.6. Die zu diesem Richtungsfeld gehörenden Kurven sind quadratische Parabeln mit der Gleichung $y = \frac{x^2}{2} + C$.

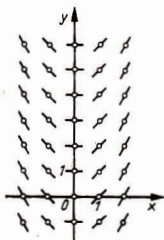


Bild 24.6

Kontrollfrage

24.3. Unter welchen Bedingungen ist es möglich, die Lösungsmenge einer Dgl. 1. Ordnung durch ein Richtungsfeld in der x,y -Ebene darzustellen?

Aufgabe: 24.9.

24.2.4. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Ist in Gl. (24.1) die Funktion Φ eine ganzrationale bezüglich des Funktionswertes y und des Wertes der Ableitung y' , so kann man auch von einem Grad der Dgl. sprechen, der sich aus der höchsten Potenz von y und seiner Ableitung y' ergibt. Besondere Bedeutung für die Praxis besitzen **lineare Dgln.** (Dgln. 1. Grades),

- da sehr oft in Naturwissenschaft und Technik ein linearer Zusammenhang zwischen dem Funktionswert y und dem Wert der Ableitung y' besteht. (Dies gilt auch für lineare Dgln. höherer Ordnung, vgl. Abschn. 24.3.)
- weil für lineare Dgln. spezielle, relativ einfache Lösungsverfahren existieren (neben numerischen und grafischen Lösungsverfahren ist hier die Möglichkeit des Lösens mittels Analogrechners zu nennen).

Aus dem letztgenannten Grunde werden oft auch nichtlineare Dgln. linearisiert, d. h., die Beschreibung durch eine nichtlineare Dgl. wird entweder für den gesamten

Definitionsbereich oder innerhalb einzelner Intervalle durch eine in Näherung gültige lineare Dgl. ersetzt. Eine mögliche Methode besteht darin, eine (nicht rationale) Funktion an einer Stelle in eine TAYLORSche Reihe zu entwickeln und diese z. B. nach dem 2. Glied (dem Glied mit der 1. Ableitung) abzuberechnen. Dies bedeutet die Annäherung der Funktion durch ihre Tangentengleichung an der Entwicklungsstelle. Eine lineare Dgl. 1. Ordnung besitzt die allgemeine Form

$$g_1(x) y' + g_0(x) y = S(x) \quad [g_1(x) \neq 0].$$

Dividiert man durch $g_1(x)$, so erhält man mit $\frac{g_0(x)}{g_1(x)} = g(x)$, $\frac{S(x)}{g_1(x)} = s(x)$ die Normalform der **inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung**

$$y' + g(x) y = s(x) \quad (24.4)$$

Im Falle $s(x) = 0$ liegt die **homogene lineare Dgl. 1. Ordnung** vor

$$y' + g(x) y = 0 \quad (24.5)$$

Die homogene lineare Dgl. 1. Ordnung kann nach Trennen der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -g(x) y \\ \frac{dy}{y} &= -g(x) dx \\ \ln |y| &= -\int g(x) dx + \ln |K|. \end{aligned}$$

Damit wird die **allgemeine Lösung der homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung**

$$y_h = K \cdot e^{-\int g(x) dx} \quad (24.6)$$

(Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. soll von der inhomogenen Dgl. durch den Index h unterschieden werden, deshalb y_h .) Die inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung besitzt im Gegensatz zur homogenen Dgl. ein Glied $s(x)$, das nur die Variable x enthält. Dieser Term $s(x)$ wird auch als **Störfunktion** bezeichnet. Der französische Mathematiker LAGRANGE hatte die Idee, die Integrationskonstante K in der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl. durch einen Term mit der Variablen x zu ersetzen und diesen Term $K(x)$ so zu bestimmen, daß $y = K(x) e^{-\int g(x) dx}$ Lösung der inhomogenen Dgl. wird. Weil bei diesem Verfahren die Integrationskonstante durch einen Term mit einer Variablen ersetzt wird, spricht man von der **Variation der Konstanten**. Aus (24.6) wird also

$$y = K(x) e^{-\int g(x) dx}.$$

Differenziert

$$\frac{dy}{dx} = K'(x) e^{-\int g(x) dx} - K(x) g(x) e^{-\int g(x) dx}.$$

Einsetzen in (24.6) ergibt

$$K'(x) e^{-\int s(x) dx} - K(x) g(x) e^{-\int s(x) dx} + g(x) K(x) e^{-\int s(x) dx} = s(x)$$

$$K'(x) e^{-\int s(x) dx} = s(x)$$

$$K'(x) = s(x) e^{\int s(x) dx}.$$

Da die Glieder mit $K(x)$ wegfallen, entsteht eine nach Trennen der Variablen lösbare Dgl. Aus dieser ergibt sich durch Integrieren $K(x)$. Das Einsetzen des errechneten Terms $K(x)$ in den Ansatz $y = K(x) e^{-\int s(x) dx}$ führt zur **allgemeinen Lösung der inhomogenen Dgl**. Zum Lösen der inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung sind also zwei Schritte mit insgesamt zwei Integrationen erforderlich:

1. Lösen der homogenen Dgl. durch Trennen der Variablen;
2. Lösen der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten.

BEISPIEL

24.7. $y' + \frac{y}{x} = \sin x \quad (x \neq 0)$

Lösung:

Homogene Dgl. $y' + \frac{y}{x} = 0.$

Trennen der Variablen $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad (y \neq 0).$

Integrieren $\ln |y| = -\ln |x| + \ln |K|.$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl. $y_h = \frac{K}{x}.$

Variation der Konstanten $y = \frac{K(x)}{x}$
 $y' = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2}$

Einsetzen in die Dgl. $\frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \sin x$
 $\frac{K'(x)}{x} = \sin x.$

Trennen der Variablen $dK(x) = x \sin x dx.$

Integrieren $K(x) = \sin x - x \cos x + C.$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. $y = \frac{\sin x - x \cos x + C}{x}$

Schreibt man das Ergebnis von Beispiel 24.7. als Summe in der Form

$$y = \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + \frac{C}{x},$$

so ist zu erkennen, daß der 2. Summand $\frac{C}{x}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. ist (die Bezeichnung des Parameters mit C oder K ist belanglos). Der 1. Summand stellt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. dar, die sich aus der allgemeinen Lösung für $C = 0$ ergibt.

Was für das spezielle Beispiel festgestellt wurde, gilt allgemein sowohl für lineare Dgln. 1. Ordnung wie auch für lineare Dgln. n -ter Ordnung mit der allgemeinen Form

$$g_n(x) y^{(n)} + g_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + g_1(x) y' + g_0(x) y = S(x).$$

Satz

Die allgemeine Lösung einer linearen Dgl. n -ter Ordnung setzt sich aus einer partikulären Lösung der Dgl. und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. zusammen.

BEISPIEL

24.8. Ein Stromkreis mit dem ohmschen Widerstand R , der Induktivität L und der Wechselspannungsquelle $e(t) = \hat{e} \sin \omega t$ wird zur Zeit $t = 0$ geschlossen (Bild 24.7). Wie ist der zeitliche Verlauf des Stromes?

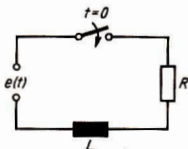


Bild 24.7

Lösung: Der 2. Kirchhoffsche Satz ermöglicht den Ansatz der Dgl.:

$$u_R + u_L = e$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = \hat{e} \sin \omega t.$$

Dgl. des Stromkreises $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\hat{e}}{L} \sin \omega t.$

Homogene Dgl. $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0.$

Trennen der Variablen $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$

Integrieren $\ln |i| = -\frac{R}{L} t + \ln |K|.$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl. $i_h = K e^{-\frac{R}{L} t}.$

Lösungsansatz durch Variation der Konstanten $i = K(t) e^{-\frac{R}{L} t}$

$$\frac{di}{dt} = K'(t) e^{-\frac{R}{L} t} - K(t) \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$$

Einsetzen in die Dgl. $K'(t) e^{-\frac{R}{L}t} - K(t) \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L} K(t) e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\mathcal{E}}{L} \sin \omega t.$

Trennen der Variablen $dK(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt.$

Integrieren $K(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t\right) + C.$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. $i = \frac{\mathcal{E}}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + C e^{-\frac{R}{L}t}.$

Für den Einschaltvorgang gilt die Anfangsbedingung $t = 0, i = 0$. Aus

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R^2 + \omega^2 L^2} (0 - \omega L) + C e^0$$

läßt sich für C der Wert

$$C = \frac{\mathcal{E} \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

errechnen. Damit wird die partikuläre Lösung zu

$$i_p = \frac{\mathcal{E}}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(\omega L e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right).$$

Bei Dgl.n. der Physik, Technik usw. kennt man oft partikuläre Lösungen, oder man kann diese ohne Integrationen ermitteln. Dann kann ein Teil des im vorangegangenen gezeigten Lösungsweges eingespart werden.

Mit $y_1 = f_1(x)$ liege eine partikuläre Lösung der homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung vor, d. h., es sei

$$\frac{dy_1}{dx} + g(x) y_1 = 0.$$

Dann ist auch $C y_1 = C f_1(x)$, worin C eine Konstante ist, Lösung dieser Dgl.: denn es ist (da $\frac{dC y_1}{dx} = C \frac{dy_1}{dx}$)

$$C \frac{dy_1}{dx} + g(x) C y_1 = C \left(\frac{dy_1}{dx} + g(x) y_1 \right) = 0.$$

Da $C y_1 = C f_1(x)$ Lösung der Dgl. ist und eine willkürliche Konstante enthält, muß es die allgemeine Lösung sein. Es gilt also:

Ist von einer homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung eine partikuläre Lösung bekannt, so erhält man durch Multiplizieren mit einer willkürlichen Konstanten die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

Ist $y_1 = f_1(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung, so kann nach Einführen einer neuen, von x abhängigen Variablen u die allgemeine

Lösung mittels des Lösungsansatzes

$$y = y_1 + u$$

berechnet werden.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

Nach Einsetzen in (24.4) erhält man

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} + g(x) y_1 + g(x) u = s(x).$$

Da vorausgesetzt wurde, daß y_1 partikuläre Lösung ist, muß

$$\frac{dy_1}{dx} + g(x) y_1 = s(x)$$

sein. Damit vereinfacht sich die Dgl. zu

$$\frac{du}{dx} + g(x) u = 0,$$

also einer Dgl. mit trennbaren Variablen, aus der u bestimmt werden kann. Man erkennt:

Ist von einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung eine partikuläre Lösung bekannt, so genügt eine Integration, um die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. zu finden.

Sind $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ zwei partikuläre Lösungen einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung, so muß gelten

$$\frac{dy_1}{dx} + g(x) y_1 = s(x) \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx} + g(x) y_2 = s(x).$$

Durch Subtrahieren der ersten Gleichung von der zweiten erhält man

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + g(x) (y_2 - y_1) = 0.$$

$y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$ ist also eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Wie oben dargelegt wurde, erhält man aus einer partikulären die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung durch Multiplizieren mit einer willkürlichen Konstanten. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung kann man nunmehr als Summe aus einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. ermitteln:

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

Aus zwei partikulären Lösungen einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung kann die allgemeine Lösung ohne Integrationen bestimmt werden.

Aufgaben: 24.10. bis 24.13.

24.2.5. Auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführbare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die implizite Dgl. 2. Ordnung besitzt die allgemeine Form

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0, \quad (24.7)$$

die explizite Dgl. 2. Ordnung lautet

$$y'' = \varphi(x, y, y') \quad (24.8)$$

Im folgenden sollen diejenigen expliziten Dgln. 2. Ordnung behandelt werden, die sich auf Dgln. 1. Ordnung zurückführen lassen. (Eine solche Dgl. 2. Ordnung wurde bereits in 24.1. gelöst, nämlich bei der Ermittlung des Weg-Zeit-Gesetzes für den Wurf senkrecht nach oben.) Die speziellen Typen von expliziten Dgln. 1. Ordnung, die Art ihrer Zurückführung auf eine Dgl. 1. Ordnung und diese Dgl. 1. Ordnung selbst sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

Typ der Dgl.	Zurückführung auf Dgl. 1. Ordnung durch	Entstehende Dgl. 1. Ordnung
$y'' = \varphi(x)$	Integration über x	$y' = \int \varphi(x) dx + C_1$
$y'' = \varphi(y)$	Multiplikation beider Seiten mit $2y'$, Setzen von $2y'y'' = \frac{d(y'^2)}{dx}$ und Integration über y	$y'^2 = 2 \int \varphi(y) dy + C_1,$ $y' = \pm \sqrt{2 \int \varphi(y) dy + C_1}$
$y'' = \varphi(y')$	Substitution $y' = u,$	$\frac{du}{dx} = \varphi(u)$
$y'' = \varphi(x; y')$	$y'' = \frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dx} = \varphi(x; u)$
$y'' = \varphi(y; y')$ ($y' = f'(x) \neq 0$, d. h., $y = f(x)$ eigentlich monoton)	Substitution $y' = u,$ $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u$	$\frac{du}{dy} u = \varphi^*(y; u),$ $\frac{du}{dy} = \varphi(y; u)$

BEISPIELE

24.9. $y'' - y' = e^x$

Lösung: Es liegt der Typ $y'' = \varphi(x; y')$ vor. Mit $y' = u$, $y'' = \frac{du}{dx}$ wird die Dgl. zu

$$\frac{du}{dx} - u = e^x,$$

einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung.

Homogene Dgl. $\frac{du}{dx} - u = 0.$

Trennen der Variablen	$\frac{du}{u} = dx.$
Integrieren	$\ln u = x + \ln K .$
Lösung der homogenen Dgl.	$u_h = K e^x.$
Variation der Konstanten	$u = K(x) e^x$
	$\frac{du}{dx} = K'(x) e^x + K(x) e^x.$

Einsetzen in die Dgl. ergibt

$$\begin{aligned} K'(x) e^x &= e^x \\ K'(x) &= 1 \\ K(x) &= x + C_1 \\ u &= (C_1 + x) e^x. \end{aligned}$$

Rücksubstitution $\frac{dy}{dx} = (C_1 + x) e^x.$

$$dy = (C_1 + x) e^x dx$$

Partielle Integration $y = C_1 e^x + x e^x - e^x + C_2 = e^x(x - 1 + C_1) + C_2.$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. $\underline{y = e^x(x + C_3) + C_2.} \quad (C_1 - 1 = C_3)$

24.10. Die Dgl. der freien ungedämpften Schwingung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

soll für die Anfangsbedingungen $t = 0: s = s_0, \frac{ds}{dt} = v_0 = 0$ gelöst werden (vgl. Bsp. 24.2.).

Lösung: Die Dgl. ist vom Typ $y'' = \varphi(y)$ bzw. $\ddot{s} = \varphi(s)$. (Im folgenden soll für die Ableitungen des Weges nach der Zeit die oft benutzte Schreibweise mit $\ddot{s}$ und $\dot{s}$ für $\frac{d^2 s}{dt^2}$ und $\frac{ds}{dt}$ angewendet werden.)

$$\ddot{s} = -\omega_0^2 s$$

Multiplikation mit $2\dot{s}$:

$$\begin{aligned} 2\dot{s}\ddot{s} &= -2\omega_0^2 s\dot{s} \\ d(\dot{s}^2) &= -2\omega_0^2 s ds \end{aligned}$$

Integrieren

$$\dot{s}^2 = -\omega_0^2 s^2 + C_1$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega_0^2 s_0^2 + C_1 \\ C_1 &= \omega_0^2 s_0^2 \end{aligned}$$

Damit wird

$$\dot{s}^2 = \omega_0^2 (s_0^2 - s^2)$$

$$\dot{s} = \omega_0 \sqrt{s_0^2 - s^2}$$

Trennen der Variablen

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \omega_0 dt$$

Integrieren (Integral der linken Seite aus Integraltafel)

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \omega_0 t + C_2$$

$$s = s_0 \sin (\omega_0 t + C_2)$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$s_0 = s_0 \sin (0 + C_2)$$

$$\sin C_2 = 1; \quad C_2 = \frac{\pi}{2}$$

Lösung der Dgl. für die vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$s = s_0 \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = s_0 \cos \omega_0 t$$

- 24.11. Für einen auf zwei Stützen gelagerten Balken von konstantem Querschnitt, auf den im Abstand x von einem Auflager ein Moment M in y -Richtung wirkt (Bild 24.8), gilt die sogen.

Dgl. der elastischen Linie

$$y'' + \frac{M}{EI} (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

(E Elastizitätsmodul, I Flächenträgheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die neutrale Faser).

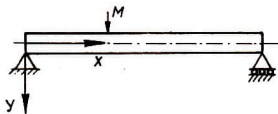


Bild 24.8

Diese ist eine nichtlineare Dgl. 2. Ordnung. In den meisten praktischen Fällen ist die Durchbiegung des Balkens sehr klein gegenüber der Balkenlänge, so daß man y'^2 (y' Tangens des Neigungswinkels) gegenüber 1 vernachlässigen kann. Für die dann entstehende lineare Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + \frac{M}{EI} = 0$$

soll für die Belastung mit einer konstanten Streckenlast q bei einer Balkenlänge l (Bild 24.9) die Gleichung der elastischen Linie ermittelt werden.

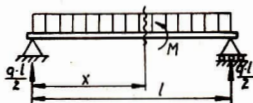


Bild 24.9

Lösung: Die Dgl. ist vom Typ $y'' = \varphi(x)$ mit $\varphi(x) = -\frac{M}{EI}$:

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

Das Moment im Abstand x errechnet sich aus der Gleichgewichtsbedingung für die Momente

$$M = \frac{q}{2} (lx - x^2)$$

Damit wird

$$y'' = -\frac{q}{2EI} (lx - x^2)$$

Zweimaliges Integrieren

$$y' = -\frac{q}{2EI} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$y = -\frac{q}{2EI} \left(l \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

An den Stellen $x = 0$ und $x = l$ muß $y = 0$ sein (sogen. **Randbedingungen**).

$$x = 0, y = 0 \quad \text{liefert} \quad C_2 = 0,$$

$$x = l, y = 0 \quad \text{liefert} \quad C_1 = \frac{q}{24EI} l^3.$$

Die Gleichung der elastischen Linie heißt für den vorliegenden Belastungsfall

$$y = \frac{q}{24EI} (l^3 x - 2lx^3 + x^4)$$

Kontrollfragen

- 24.4. Wodurch wird der Grad einer (gewöhnlichen) Dgl. bestimmt?
- 24.5. Ein technisches Problem wird durch eine lineare Dgl. **exakt** beschrieben, ein anderes erst nach Linearisierung. Was kann über die Genauigkeit der ermittelten Lösungen gesagt werden?
- 24.6. Ist eine explizite Dgl. 2. Ordnung vom Typ $y'' = \varphi(x; y)$ auf eine Dgl. 1. Ordnung zurückführbar?

Aufgaben: 24.14. bis 24.17.

24.3. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**24.3.0. Vorbemerkung**

Durch Dgln. 2. Ordnung lassen sich z. B. einfache Schwingungsvorgänge, Belastungsfälle von Trägern und Vorgänge des Energieaustausches beschreiben. Die möglichen Formen der Lösungen für diese Dgln. sowie einige Anwendungsfälle sollen im folgenden behandelt werden.

24.3.1. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die lineare Dgl. 2. Ordnung besitzt die allgemeine Form

$$g_2(x) y'' + g_1(x) y' + g_0(x) y = S(x).$$

Sind hierin $g_2(x)$, $g_1(x)$ und $g_0(x)$ konstante, reelle Zahlen und dividiert man die Dgl. durch den Koeffizienten der zweiten Ableitung, so erhält man mit $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = a_1$, $\frac{g_0(x)}{g_2(x)} = a_0$ und $\frac{S(x)}{g_2(x)} = s(x)$ als Normalform einer linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x) \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R} \quad (24.9)$$

Im Falle $s(x) = 0$ heißt die Dgl. homogen, für $s(x) \neq 0$ inhomogen.

24.3.2. Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Das Lösen der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (24.10)$$

ist allein mit Hilfe elementarer Funktionen und durch algebraische Operationen, also ohne Integration möglich.

Die Methode beruht auf folgender Überlegung: Eine elementare Funktion, die die Dgl. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ erfüllen soll, muß nach Einsetzen des Funktionswertes und der Werte der Ableitungen in die Dgl. eine Summe gleichartiger Glieder ergeben, die identisch gleich Null sein muß. Eine solche Funktion ist die Exponentialfunktion.

Zum Lösen einer homogenen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten verwendet man den Ansatz

$$y = e^{kx}$$

und bestimmt die Konstante k so, daß $y = e^{kx}$ die Dgl. erfüllt.¹⁾

Aus $y = e^{kx}$ folgt $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Dies in die Dgl. (24.10) eingesetzt, ergibt

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_0 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx} (k^2 + a_1 k + a_0) = 0.$$

¹⁾ Dieses Verfahren ist allgemein auf lineare Dgln. n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten anwendbar.

Da e^{kx} für alle Werte der Variablen x verschieden von Null ist, muß

$$\dot{k}^2 + a_1 k + a_0 = 0 \quad (24.11)$$

sein. Man nennt (24.11) die der Dgl. (24.10) zugeordnete **charakteristische Gleichung**. (Die charakteristische Gleichung entsteht aus der Dgl. dadurch, daß die Werte der Ableitungen durch Potenzen von k gleicher Ordnung ersetzt werden.) Aus der charakteristischen Gleichung errechnet man für k die Werte

$$k_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Damit sind zwei partikuläre Lösungen $y = f_1(x) = e^{k_1 x}$ und $y = f_2(x) = e^{k_2 x}$ der homogenen Dgl. ermittelt. Da jede dieser Funktionen die linke Seite der Dgl. (24.10) zu Null werden läßt, muß auch für die Summe von $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ bzw. für die mit einer Konstanten multiplizierten Lösung $y = f_1(x)$ die linke Seite gleich Null werden. Es gelten folgende Sätze¹⁾, auf deren Beweisführung verzichtet werden soll.

Sätze

1. Sind $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ Lösungen einer homogenen linearen Dgl., so ist auch $y = f_1(x) + f_2(x)$ eine Lösung.
2. Ist $y = f_1(x)$ Lösung einer homogenen linearen Dgl., so ist auch $y = C \cdot f_1(x)$ eine Lösung.
3. Liegen mit $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ zwei wesentliche²⁾, voneinander nicht abhängige³⁾ Lösungen einer homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung vor, so kann mit $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ die allgemeine Lösung angegeben werden.
4. Ist eine komplexwertige Funktion der reellen Variablen x in der Form $y = f(x) = u(x) + jv(x)$ Lösung einer homogenen linearen Dgl., so sind auch $y = u(x)$ und $y = v(x)$ Lösungen der Dgl.

Der letzte Satz folgt aus der Tatsache, daß eine komplexe Zahl dann und nur dann den Wert Null hat, wenn Realteil und Imaginärteil gleich Null sind.

Unter Anwendung dieser Sätze lassen sich für die Lösungen der charakteristischen Gleichung, je nachdem, ob die Diskriminante $\frac{a_1^2}{4} - a_0$ größer, gleich oder kleiner Null ist, drei Fälle unterscheiden:

1. k_1 und k_2 sind reell und voneinander verschieden ($\frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$). Dann lautet gemäß Satz 3 die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (24.12a)$$

¹⁾ Diese Sätze gelten auch für lineare Dgln. n -ter Ordnung, im Falle von Satz 3 für n wesentliche, voneinander nicht abhängige Lösungen.

²⁾ Jede homogene lineare Dgl. hat die triviale Lösung $y = 0$. Diese soll nicht als wesentliche Lösung gelten.

³⁾ Ist z. B. $y = f_1(x) = \sin x \cos x$ Lösung einer Dgl., so ist $y = f_2(x) = \sin 2x$ wegen $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ keine unabhängige Lösung.

2. k_1 und k_2 sind gleich $\left(\frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0\right)$.

Wegen $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$ ergäbe sich nur eine unabhängige Lösung $y = C e^{kx}$. Die allgemeine Lösung kann hier mit Hilfe der Variation der Konstanten bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y &= C(x) e^{kx} \\ y' &= C'(x) e^{kx} + C(x) k e^{kx} = e^{kx} [C'(x) + kC(x)] \\ y'' &= C''(x) e^{kx} + C'(x) k e^{kx} + C'(x) k e^{kx} + C(x) k^2 e^{kx} \\ &= e^{kx} [C''(x) + 2kC'(x) + k^2 C(x)]. \end{aligned}$$

Die Terme für y , y' und y'' in die Dgl. (24.10) eingesetzt, ergibt

$$e^{kx} [C''(x) + (2k + a_1) C'(x) + (k^2 + a_1 k + a_0) C(x)] = 0.$$

Wegen $e^{kx} \neq 0$, $k = -\frac{a_1}{2}$ und $a_0 = \frac{a_1^2}{4}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} C''(x) &= 0 \\ C(x) &= C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Führt man noch $-\delta = -\frac{a_1}{2} = k$ ein, so erhält man als allgemeine Lösung der Dgl.

$$\boxed{y = (C_1 x + C_2) e^{-\delta x}} \quad (24.12b)$$

3. k_1 und k_2 sind konjugiert komplex $\left(\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0\right)$.

Mit $\frac{a_1}{2} = \delta$ und $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$ wird

$$\begin{aligned} k_1 &= -\delta + j\omega \\ k_2 &= -\delta - j\omega. \end{aligned}$$

Die Lösung der Dgl. kann somit in der Form

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(-\delta + j\omega)x} + C_2 e^{(-\delta - j\omega)x} \\ &= e^{-\delta x} (C_1 e^{j\omega x} + C_2 e^{-j\omega x}) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Mit Hilfe der Beziehungen $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ und $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ läßt sich die Lösung umformen zu

$$\begin{aligned} y &= e^{-\delta x} [C_1 (\cos \omega x + j \sin \omega x) + C_2 (\cos \omega x - j \sin \omega x)] \\ &= e^{-\delta x} [(C_1 + C_2) \cos \omega x + j(C_1 - C_2) \sin \omega x]. \end{aligned}$$

Nach Satz 4 müssen Realteil und Imaginärteil dieser Lösung selbst Lösung der Dgl. sein. Setzt man noch $C_1 + C_2 = A$ und $C_1 - C_2 = B$ und bildet aus Realteil und Imaginärteil eine neue Lösung, so erhält man diese in der Form

$$\boxed{y = e^{-\delta x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)} \quad (24.12c)$$

BEISPIEL

24.12. Die Dgl. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ist für $a_1 = 4$ und

a) $a_0 = 3$,

b) $a_0 = 4$,

c) $a_0 = 5$

zu lösen.

Lösung:

a)

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

Lösungen der charakt. Gl.

$$k_1 = -1, k_2 = -3$$

Allgemeine Lösung der Dgl.

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

b)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

Lösungen der charakt. Gl.

$$k_1 = k_2 = k = -2$$

Allgemeine Lösung der Dgl.

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-2x}$$

c)

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$k^2 + 4k + 5 = 0$$

Lösungen der charakt. Gl.

$$k_1 = -2 + j, k_2 = -2 - j$$

Allgemeine Lösung der Dgl.

$$y = e^{-2x}(C_1 e^{jx} + C_2 e^{-jx})$$

$$y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$$

Bei nur geringen Änderungen von a_0 ergaben sich in diesem Beispiel recht unterschiedliche Lösungsfunktionen. Diese und die Übergänge zwischen ihnen lassen sich in praktischen Anwendungsfällen oft anschaulich interpretieren, wie im folgenden Beispiel zu erkennen sein wird.

BEISPIEL

24.13. Eine Masse ist an einer elastischen Feder aufgehängt und starr mit einem in einer Flüssigkeit eingetauchten Dämpfungskolben verbunden (Bild 24.10).

a) Die Dgl. für die Bewegung der Gesamtmasse nach einmaligem Auslenken aus der Ruhelage ist aufzustellen.

b) Die grundsätzlich möglichen Lösungen der Dgl. unter Berücksichtigung einer Reibungskraft $F_d \neq 0$, d. h. für die gedämpfte freie Schwingung, sind zu ermitteln und zu diskutieren.

Lösung:

a) In Erweiterung des Ansatzes in Bsp. 24.2. ist jetzt noch eine geschwindigkeitsproportionale Reibungs- bzw. Dämpfungskraft F_d zu berücksichtigen:

$$F_d = d \frac{ds}{dt} = d\dot{s} \quad (d \text{ Dämpfungsfaktor}).$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte liefert die Dgl.

$$m\ddot{s} + d\dot{s} + fs = 0,$$

$$\ddot{s} + \frac{d}{m}\dot{s} + \frac{f}{m}s = 0,$$

$$\text{bzw. mit } \frac{d}{m} = 2\delta, \quad \frac{f}{m} = \omega_0^2$$

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0.$$

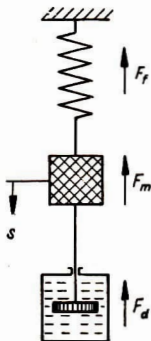


Bild 24.10

- b) Die charakteristische Gleichung $k^2 + 2\delta k + \omega_0^2 = 0$

hat die Lösungen $k_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Je nachdem, ob $\delta < \omega_0$, $\delta = \omega_0$ oder $\delta > \omega_0$ ist, ergeben sich verschiedene Lösungen der Dgl. Die Berechnung dieser Lösungen soll unter Verwendung des

Dämpfungsgrades $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ erfolgen.

- $\alpha)$ $0 < D < 1$, d. h. $\delta < \omega_0$.

Dies ist der Fall, wenn die Dämpfung relativ klein ist ($\delta < 2\sqrt{f/m}$). k_1 und k_2 sind konjugiert komplex:

$$k_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{oder, mit} \quad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

$$k_1 = -\delta + j\omega_e, \quad k_2 = -\delta - j\omega_e.$$

Als allgemeine Lösung der Dgl. ergibt sich nach Gl. (24.12c)

$$s = e^{-\delta t}(A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t),$$

die unter Anwendung eines Additionstheorems auch in der Form

$$s = e^{-\delta t} K \sin(\omega_e t + \varphi)$$

mit $K = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = \arctan \frac{B}{A}$ geschrieben werden kann.

Das System führt eine gedämpfte Schwingung aus. Die Amplituden $K \cdot e^{-\delta t}$ ändern sich in Abhängigkeit von t . $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ ist die Eigenfrequenz der freien Schwingung des gedämpften Systems, die um so mehr von der Kennkreisfrequenz ω_0 abweicht, je größer der Dämpfungsgrad D ist. Wegen $\omega_e < \omega_0$ ist die Periodendauer T des gedämpften Systems stets größer als die Periodendauer T_0 des ungedämpften Systems (Bild 24.11 a).

- $\beta)$ $D = 1$, d. h. $\delta = \omega_0$.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$k_1 = k_2 = -\delta.$$

Nach (24.12 b) heißt dann die allgemeine Lösung der Dgl.

$$s = (C_1 t + C_2) e^{-\delta t}.$$

Das System führt keine Schwingungen, d. h. periodische Bewegungen, mehr aus. Wie man zeigen kann, hat die Lösungsfunktion höchstens eine Nullstelle (wenn $C_1 \neq 0$) und einen Extremwert. Der Fall $D = 1$ trennt die für $D > 1$ aperiodisch verlaufenden Vorgänge von den periodischen (für $0 < D < 1$), man nennt ihn deshalb den **aperiodischen Grenzfall** (Bild 24.11 b).

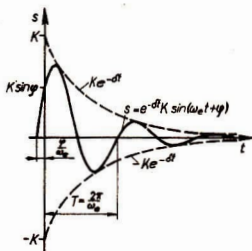


Bild 24.11 a

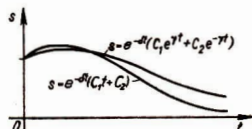


Bild 24.11 b

$\gamma) D > 1$, d. h. $\delta > \omega_0$.

Das System ist stark gedämpft. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$k_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Mit $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ kann man die allgemeine Lösung der Dgl. in der Form

$$s = e^{-\delta t} (C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t})$$

schreiben. Diese Funktion hat ebenfalls höchstens eine Nullstelle (wenn $C_1 \neq 0$ und $C_2 \neq 0$ sowie $C_1 C_2 < 0$) und einen Extremwert. Der durch diese Funktion beschriebene aperiodische Vorgang heißt der **Kriechfall** (Bild 24.11 b).

In allen drei betrachteten Fällen können die den speziellen technischen Problemstellungen entsprechenden partikulären Lösungen ermittelt werden, indem man die zu den Anfangsbedingungen gehörenden Werte für C_1 und C_2 bzw. A und B (oder k und φ) bestimmt.

Aufgaben: 24.18. bis 24.20.

24.3.3. Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie bereits in 24.2.4. ausgeführt wurde, setzt sich die allgemeine Lösung einer linearen Dgl. n -ter Ordnung aus der allgemeinen Lösung (y_h) der zugehörigen homogenen Dgl. und einer partikulären Lösung (y_p) der inhomogenen Dgl. zusammen:

$$y = y_h + y_p.$$

Damit ist — da der Lösungsweg der homogenen Dgl. bereits bekannt ist — für das Lösen einer inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x)$$

nur noch erforderlich, ein Verfahren zum Bestimmen einer partikulären Lösung bereitzustellen. Dieses ist für den allgemeinen Fall das Verfahren der Variation der Konstanten. Bei gewissen speziellen Formen der Störfunktion $s(x)$ kann jedoch eine partikuläre Lösung wesentlich einfacher, ohne das (allgemeingültige) Verfahren der Variation der Konstanten anwenden zu müssen, gefunden werden. Der Vorteil dieses Weges besteht darin, daß er keine Integrationen erfordert. Die nachfolgende Tabelle enthält 3 spezielle Formen der Störfunktion, für die durch geeigneten Ansatz (Ansatz und Bedingung seiner Anwendbarkeit sind ebenfalls aufgeführt) eine partikuläre Lösung bestimmt werden kann:

1. die Störfunktion ist ein Polynom m -ten Grades;
2. die Störfunktion ist eine Exponentialfunktion;
3. die Störfunktion ist eine Sinus- oder eine Cosinusfunktion oder eine Summe aus beiden (mit gleichem Argument).

Als Lösungsansatz dient dann im Normalfall eine Funktion vom gleichen Grade bzw. des gleichen Arguments m , wobei in jedem Glied noch ein konstanter Faktor mit anzusetzen ist. Sonderfälle ergeben sich, wenn $k = 0$ bzw. $k = m$ bzw. $k = jm$ Lö-

Störfunktion $s(x) =$	Ansatz $y_p =$	Bedingung
$s_0 + s_1 x + \dots + s_m x^m$ (Polynom m -ten Grades)	$b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ [gleicher Grad wie $s(x)$]	$a_0 \neq 0$ (y tritt auf)
	$x^q (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$ $q \in \{1, 2\}$	$a_0 = 0$ oder $a_0 = a_1 = 0$ ($k = 0$ ist q -fache Lösung der charakterist. Gl.)
$B e^{mx}$ (Exponentialfunktion)	$b e^{mx}$ [gleiches Argument m wie $s(x)$]	$m \neq k_1, k_2$ (m ist nicht Lösung der charakterist. Gl.)
	$b x^q e^{mx}$ $q \in \{1, 2\}$	$m = k_1$ oder $m = k_1 = k_2$ (m ist q -fache Lösung der charakterist. Gl.)
$A \cos mx + B \sin mx$ (Sinus- und/oder Cosinusfunktion)	$a \cos mx + b \sin mx$ [gleiches Argument m wie $s(x)$]	$jm \neq k_1, k_2$ (jm ist nicht Lösung der charakterist. Gl.)
	$x(a \cos mx + b \sin mx)$	$jm = k_1$ und $-jm = k_2$ (jm und $-jm$ sind Lösungspaar der charakterist. Gl.)

sung(en) der charakteristischen Gleichung ist (sind). In diesen Fällen ist der normale Lösungsansatz durch einen Faktor x (bzw. x^2 bei zweifachen Lösungen) zu erweitern. Die Koeffizienten b_i bzw. b bzw. a und b des Lösungsansatzes sind durch Koeffizientenvergleich nach Bilden der Ableitungen und Einsetzen von y_p , y_p' , y_p'' in die zu lösende inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung zu bestimmen.

Ist die Störfunktion $s(x)$ die Summe oder das Produkt aus den in der Tabelle aufgeführten Störfunktionen, so ist als Ansatz die Summe bzw. das Produkt der angegebenen Ansätze zu nehmen.

Im Falle der Summe kann die partikuläre Lösung auch mit Hilfe des folgenden Satzes ermittelt werden.

Satz

Ist bei einer inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung die Störfunktion die Summe zweier (oder auch mehrerer) Funktionen, d. h., $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$, und ist

y_{p1} eine partikuläre Lösung der Dgl. $y'' + a_1y' + a_0y = s_1(x)$,

y_{p2} eine partikuläre Lösung der Dgl. $y'' + a_1y' + a_0y = s_2(x)$,

so ist $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ eine partikuläre Lösung der Dgl. $y'' + a_1y' + a_0y = s(x)$.

BEISPIELE

24.14. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

Lösung:

Homogene Dgl.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Charakteristische Gleichung

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$k_1 = 1, k_2 = 2.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

$s(x)$ ist ein Polynom 1. Grades. Der Lösungsansatz lautet, da $a_0 \neq 0$,

$$y_p = b_0 + b_1x$$

$$y_p' = b_1$$

$$y_p'' = 0.$$

In die Dgl. eingesetzt

$$0 - 3b_1 + 2(b_0 + b_1x) = 2x + 1$$

$$2b_1x + (2b_0 - 3b_1) = 2x + 1.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$b_1 = 1, b_0 = 2.$$

Also ist

$$\underline{y_p = x + 2.}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. erhält man mit $y = y_h + y_p$ zu

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2.}$$

24.15. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

Lösung:

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}} \quad (\text{s. Beispiel 24.14.}).$$

Für $s(x) = e^{3x}$, und weil $m \neq k_1, k_2$, lautet der Lösungsansatz

$$y_p = b e^{3x}$$

$$y_p' = 3b e^{3x}$$

$$y_p'' = 9b e^{3x}.$$

In die Dgl. eingesetzt

$$9b e^{3x} - 3 \cdot 3b e^{3x} + 2b e^{3x} = e^{3x}.$$

$$b = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{y_p = \frac{1}{2} e^{3x}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

24.16. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

Lösung:

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}} \quad (\text{s. Beispiel 24.14.}).$$

Da $m = 2$ einfache Lösung der charakteristischen Gleichung der homogenen Dgl. ist, lautet der Lösungsansatz

$$y_p = bx e^{2x}$$

$$y_p' = b e^{2x} + 2bx e^{2x}$$

$$y_p'' = 4b e^{2x} + 4bx e^{2x}.$$

In die Dgl. eingesetzt und den Koeffizientenvergleich durchgeführt, ergibt

$$b = 1.$$

$$\underline{y_p = x e^{2x}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{y = C_1 e^x + (C_2 + x) e^{2x}.$$

$$24.17. \quad y'' - 3y' + 2y = 2x + 1 + e^{2x}$$

Lösung: Die zugehörige homogene Dgl. wurde bereits in Beispiel 24.14. gelöst. Die Störfunktion $s(x) = 2x + 1 + e^{2x}$ kann in zwei Summanden $s_1(x) = 2x + 1$ und $s_2(x) = e^{2x}$ zerlegt werden. Für die Dgl. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ und $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ wurden bereits in Beispiel 24.14. und 24.16. die partikulären Lösungen $y_{p1} = x + 2$ und $y_{p2} = x e^{2x}$ bestimmt, aus denen gemäß dem obenstehenden Satz die partikuläre Lösung $y_p = x + 2 + x e^{2x}$ der vorliegenden Dgl. ermittelt werden kann: Man erhält

$$y = y_h + y_p = y_h + y_{p1} + y_{p2}$$

$$\underline{y = C_1 e^x + (C_2 + x) e^{2x} + x + 2.$$

$$24.18. \quad y'' - 3y' + 2y = 2x e^{3x}$$

Lösung:

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}} \quad (\text{s. Beispiel 24.14.}).$$

$s(x)$ ist das Produkt eines Polynoms ($2x$) und einer Exponentialfunktion (e^{3x}). Der Lösungsansatz muß deshalb als Produkt von $b_0 + b_1 x$ (wegen $m = 1$ und $a_0 \neq 0$) und $b e^{3x}$ (wegen $m = 3 \neq k_1, k_2$) in der Form $(b_0 + b_1 x) b e^{3x} = (c_0 + c_1 x) e^{3x}$ ($c_0 = b_0 b$, $c_1 = b_1 b$) erfolgen:

$$y_p = (c_0 + c_1 x) e^{3x}$$

$$y_p' = (3c_1 x + c_1 + 3c_0) e^{3x}$$

$$y_p'' = (9c_1 x + 6c_1 + 9c_0) e^{3x}.$$

Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich ergeben

$$c_1 = 1, c_0 = -\frac{3}{2}$$

$$\underline{y_p = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{3x}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{3x}.$$

$$24.19. \quad y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$$

Lösung:

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}} \quad (\text{s. Beispiel 24.14}).$$

$jm = j2$ und $-jm = -j2$ sind nicht Lösungen der charakteristischen Gleichung. Deshalb lautet der Lösungsansatz

$$y_p = a \cos 2x + b \sin 2x$$

$$y_p' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x$$

$$y_p'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x.$$

Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich liefert

$$a = -\frac{1}{20}, \quad b = -\frac{3}{20}.$$

$$\underline{y_p = -0,05 \cos 2x - 0,15 \sin 2x.}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 0,05 \cos 2x - 0,15 \sin 2x.}$$

Kontrollfragen

- 24.7. Ist die Lösung einer homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Form $y = C e^{-bx} \sin(\omega x + \varphi)$ der in Gl. (24.12c) angegebenen äquivalent? Welche Beziehungen zwischen A und B einerseits und C und φ andererseits müßten dann gelten?
- 24.8. Welche Fallunterscheidungen sind für das Lösen
- von homogenen linearen Dgln. 2. Ordnung
 - von inhomogenen linearen Dgln. 2. Ordnung möglich?
- 24.9. Welches Verfahren ist generell zum Lösen von inhomogenen linearen Dgln. 2. Ordnung anwendbar, wenn die Form der Störfunktion das Bestimmen einer partikulären Lösung durch Ansatz nicht möglich macht?
- 24.10. Welche Möglichkeiten bieten Potenzreihen, um z. B. partikuläre Lösungen (für bestimmte Anfangsbedingungen) einer inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu ermitteln, wenn wegen der Form der Störfunktion ein Lösungsansatz nicht möglich ist?

Aufgaben: 24.21. bis 24.30.

24.4. Aufgaben

- 24.1. Gesucht ist die Gleichung $y = f(x)$ der Menge aller Kurven, deren Subtangente (Projektion des Tangentenabschnittes zwischen Berührungspunkt und Schnittpunkt mit der Abszissenachse auf die Abszissenachse) die konstante Länge l besitzt (Bild 24.12). Es sind einige Kurven der Kurvenschar zu zeichnen, darunter die durch den Punkt $(0; 1/2)$ verlaufende Kurve.

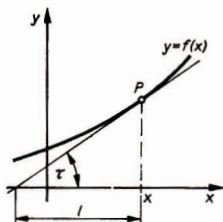


Bild 24.12

24.2. Wie heißt die Dgl. aller Kurven, die alle Geraden durch den Ursprung rechtwinklig schneiden?

Man löse nach Trennen der Variablen:

$$24.3. \quad y' = \frac{y}{x}$$

$$24.4. \quad xy' - ay' - y + b = 0$$

$$24.5. \quad xy' - \frac{y}{x+1} = 0$$

Es sind die partikulären Lösungen zu ermitteln, die die angegebenen Anfangsbedingungen erfüllen.

$$24.6. \quad \frac{y'}{x \sin x} + \frac{1}{y} = 0; \quad x = \pi, y = 11$$

$$24.7. \quad y'y'' + x^2 - 1 = 0; \quad x = 2, y = 1$$

24.8. Die Dgl. $T\dot{y} + y = K \left(\dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$ ist zu lösen ($t = 0, y = 0$). Wie groß ist y für $t \rightarrow \infty$? Wie groß ist y zur Zeit $t = T$? Zu welcher Zeit t (bezogen auf T) hat y 95% bzw. 99% von $y|_{t \rightarrow \infty}$ erreicht?

24.9. Das Richtungsfeld der Dgl. $y' = 1 - y$ ($x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$) ist zu zeichnen. Wie heißt die vom Koordinatenursprung ausgehende Kurve der Lösungsmenge?

$$24.10. \quad y' - xy + 2x = 0$$

$$24.11. \quad y' - y \tan x + \sin x = 0$$

$$24.12. \quad y' + y + e^x = 0; \quad x = 1, y = 0$$

24.13. Für ein System mit einfacher Speicherwirkung gilt die Dgl. $T\dot{x}_a + x_a = Kx_e$ (x_a Ausgangsgröße, x_e Eingangsgröße, T Zeitkonstante, K proportionaler Übertragungsfaktor mit $[K] = [x_a]/[x_e]$). Wie ändert sich die Ausgangsgröße x_a in Abhängigkeit von der Zeit t , wenn $x_e = ct$ ($c = \text{const}$)?

$$24.14. \quad y'' + y = 0$$

$$24.15. \quad y'' - 10y' + x^2 = 0; \quad x = 0; y = 0, y' = 0$$

$$24.16. \quad y'' = 2e^y; \quad x = 0; y = 0, y' = -2$$

24.17. Für einen Träger auf zwei Stützen mit der Länge l ist die Gleichung der elastischen Linie für folgende Belastungsfälle zu ermitteln:

a) Mittellast, $M = \frac{Fx}{2}$; b) Dreieckslast, $M = \frac{Fl}{3} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$.

24.18. $y'' + 2y' + y = 0$

24.19. $y'' + 6y' + 13y = 0$

24.20. $y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$

24.21. $y'' + y = x^2$

24.22. $y'' - y = e^x$

24.23. $y'' - 3y' = (2x + 1)e^{3x}$

24.24. $y'' - 4y' + 3y = 7x^2 + 3$

24.25. $y'' + 2y' + 4y = \sin 2x$

24.26. $y'' - 10y' + 25y = 16e^x$

24.27. $y'' + y' + y = x^2 + 2x + 3$

24.28. $y'' - y = -x; x = 1: y = 3, y' = 5$

24.29. $y'' + y + x^2 + 6 = 0; x = 0: y = 0, x = \pi: y' = 0$

24.30. Für ein Übertragungssystem mit zweifacher Speicherwirkung gilt die Dgl.
 $T_2^2 \ddot{x}_a + T_1 \dot{x}_a + x_a = Kx_e$ (vgl. Aufg. 24.13.). Es soll x_a für $x_e = \text{const}$ und $T_1 > 2T_2$
 mit der Anfangsbedingung $x_e = 0: x_a = 0, \dot{x}_a = 0$ berechnet werden.

24.31. $y' = \frac{e^x}{y}$

24.32. $y' - xy + x\sqrt{y} = 0$

24.33. Die Dgl. $y' \sin x = y \ln y$ ist zu lösen. Wie lautet die partikuläre Lösung, für die $x = \pi/2$,
 $y = 1$ gilt?

24.34. $y'(1 - x^2) - 1 - 2y^2 = 0; x = 1/3, y = \sqrt{2}/2$

24.35. Die Dgl. aller Kurven, deren Subtangentiallänge das Doppelte der Abszisse des Berührungspunktes ist, soll aufgestellt werden. Wie heißt die Gleichung der Kurven?

24.36. $y' + 2y = e^{3x}$

24.37. $y' = \frac{y}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$

24.38. $xy' + 2y = 3x^2 - 2x + 4; x = 1, y = 1/12$

24.39. $y'' + y' = e^x$

24.40. $y'' + 3y' - 6x + 5 = 0; x = -1: y = 1, y' = 2$

24.41. Die Dgl. $y'' - 7y' + 12y = 0$ ist zu lösen und die Gleichung der Lösungskurve zu bestimmen, die durch den Punkt $(0; 2)$ geht.

24.42. $y'' - 4y' + 13y = 0$

24.43. $4y'' - 4y' + y = 0$

24.44. $y'' + 2y = e^{3x}$

24.45. $y'' - 5y' + 4y = x$

24.46. $y'' + 6y' + 25y = e^{3x}$

24.47. $y'' - 4y' + 4y = \sin x$

24.48. $y'' - y' + 1,25y = 5 \sin 5x - 23,75 \cos 5x$

24.49. $y'' - 5y' + 6y = 4 \sin 2x$

24.50. $y'' - 5y + 3x - 8 = 0; \quad x = 0: y = 0, y' = 3$

24.51. $y'' + 3y' - 6y + 3 = 0; \quad x = 0: y = 0, y' = 0$

24.52. Eine an einer elastischen Feder aufgehängte und mit einem Dämpfungskolben starr verbundene Masse (vgl. Bild 24.10) wird durch eine erzwungene periodische Bewegung des oberen Federaufhängepunktes (von außen einwirkende Kraft $F_a = F \sin \omega t$) zum Schwingen gebracht.

a) Die Dgl. der gedämpften erzwungenen Schwingung ist aufzustellen.

b) Die Lösung für $\delta < \omega_0$ ist zu ermitteln.

25. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

25.1. Klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung

25.1.0. Vorbemerkung

In den verschiedensten Wissensgebieten begegnet man dem eigenartigen Begriff des **Zufalls**. Wenn man mit einem Würfel mehrmals würfelt, so ist kaum zu erwarten, daß man jedesmal die gleiche Augenzahl, etwa die Sechs, wirft. Wenn ein Schütze mehrmals unter gleichen Bedingungen auf eine Scheibe schießt, so trifft er in der Regel nicht jedesmal die Scheibenmitte. Weitere Beispiele sind die zufälligen Meßfehler in der Meßtechnik, die unterschiedliche Qualität der Serienproduktion, die Lebensdauer von Bauelementen und die Länge der Warteschlangen bei der Kundenbedienung. Trotz der Regellosigkeit dieser Erscheinungen im einzelnen gelingt es der Mathematik, allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten für Zufallsprobleme aufzustellen. Das Rechnen mit **Wahrscheinlichkeiten** hat sich, historisch gesehen, zunächst durch die Untersuchung von Glücksspielen entwickelt. Die so entstandenen Methoden der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung spielen aber auch heute noch, besonders in der theoretischen Physik und bei der Verknüpfung technischer Bauelemente, eine erhebliche Rolle.

25.1.1. Zufälliges Ereignis und Wahrscheinlichkeit

Nicht immer ist bei einem Experiment das **Versuchsergebnis** durch die Versuchsbedingungen eindeutig bestimmt. Wenn die Ursachen nicht sämtlich erfaßt worden sind, dann ist die **Wirkung** unsicher. Nicht immer wird der gewünschte **Treffer** erzielt.

Definition

Ein **zufälliges Ereignis** ist ein Versuchsergebnis, das unter gleichbleibenden Versuchsbedingungen eintreten kann, aber nicht eintreten muß.

Wird eine Münze beliebig in die Luft geworfen, so ist es ganz ungewiß, ob nach dem Aufschlag die Zahl oder das Bild (Wappen) oben liegt. Es gibt zwei **mögliche** Ergebnisse des Versuchs. Hat jemand gewettet, daß die Zahl oben liegen wird, so ist für ihn nur dieser eine Fall **günstig**. Es liegt nahe, das Verhältnis 1 : 2 als Maß für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Zahl“ zu benutzen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses beträgt also $p = 1/2 = 0,5 = 50\%$.

Definition

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses wird gemessen durch den Bruch

$$p = \frac{g}{m} \quad (25.1)$$

wobei g die Anzahl der günstigen und m die Anzahl der möglichen Fälle bedeutet. Dabei müssen die möglichen Fälle sämtlich gleichwertig sein.

Diese „klassische Definition“ der Wahrscheinlichkeit ist nur auf solche Probleme anwendbar, bei denen von vornherein klare Aussagen über die möglichen Fälle gemacht werden können. Wenn das Ereignis A bei der Angabe der Wahrscheinlichkeit besonders hervorgehoben werden soll, so ist die Schreibweise $p = P(A)$ üblich, die an ein Funktionssymbol erinnert und entsprechend „ P von A “ gelesen wird.

BEISPIEL

25.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel mehr als vier Augen zu werfen?

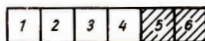


Bild 25.1

Lösung: Die möglichen Fälle sind die Augenzahlen 1 bis 6, die in Bild 25.1 als Flächen dargestellt sind. Ihre Anzahl ist $m = 6$. Günstig für das betrachtete Ereignis sind die Zahlen 5 und 6. Die Anzahl der günstigen Fälle ist also $g = 2$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333 = \underline{\underline{33,3\%}}.$$

Um die Massenerscheinungen der Statistik mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln untersuchen zu können, genügt die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nicht. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine Sechs zu werfen, läßt sich **im voraus** bestimmen, ehe ein Versuch angestellt wird. Die Wahrscheinlichkeit, mit der bei einem Schützen die Trefferzahl 9 Ringe auftritt, läßt sich erst **nach Ausführung von Versuchen** feststellen.

Beim Würfel ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mehr als drei Augen“ im voraus gleich 0,5. Führt man n Versuche aus und bestimmt die Häufigkeit h , mit der das fragliche Ereignis eingetreten ist, so kann man die **relative Häufigkeit**

$$w = \frac{h}{n}$$

berechnen. Es zeigt sich, daß bei wachsender Anzahl n der Versuche eine eigentümliche Konstanz dieses Zahlenwertes entsteht (Bild 25.2).

Umfangreiches Zahlenmaterial hat immer wieder ergeben, daß die relative Häufigkeit nahezu gleich der im voraus berechneten klassischen Wahrscheinlichkeit wird. Es erscheint daher sinnvoll, auch solchen Ereignissen, bei denen die klassische Definition nicht anwendbar ist, eine Wahrscheinlichkeit p zuzuordnen, die die Erschei-

nung zahlenmäßig **objektiv** charakterisiert. Zusammenfassend ergibt sich also folgende **Regel zur statistischen Schätzung der Wahrscheinlichkeit**:

Wenn die Anzahl h der Versuche, bei denen das Ereignis eingetreten ist, durch die Anzahl n aller angestellten Versuche dividiert wird, so gilt für die **Wahrscheinlichkeit** p die Näherung

$$p \approx \frac{h}{n}$$

Je größer die Anzahl n aller angestellten Versuche ist, desto unwahrscheinlicher sind grobe Abweichungen (Gesetz der großen Zahlen).

Aus dieser Schätzregel darf nicht geschlossen werden, daß die Wahrscheinlichkeit der Grenzwert der relativen Häufigkeit sei. Denn auch bei großem n sind grobe Abweichungen **nicht mit Sicherheit** auszuschließen. Der beschriebene Zusammenhang legt die Vorstellung nahe, daß die praktisch durchgeführten Versuche aus der Menge aller überhaupt denkbaren Versuche entnommen seien.

Definition

Die Gesamtheit aller denkbaren Versuchsergebnisse, die unter gleichen Bedingungen zustande kommen können, heißt die zu diesen Versuchsbedingungen gehörige **Grundgesamtheit**.

Definition

Jede endliche Anzahl n von Versuchsergebnissen, die unter gleichen Versuchsbedingungen zustande gekommen sind, heißt eine **Stichprobe** vom Umfang n aus der entsprechenden Grundgesamtheit.

BEISPIELE

25.2. Beim Wurf mit einem Würfel soll als **Treffer** jede gerade Zahl gelten. Nach Durchführung von n Versuchen ergab sich die Trefferzahl h (Spalten 1 und 2):

n	h	w	n	h	w
1	1	1	6	3	0,5
2	1	0,5	7	4	0,571
3	2	0,667	8	4	0,5
4	2	0,5	9	5	0,556
5	2	0,4	10	5	0,5

Es soll die **relative Häufigkeit** $w = h/n$ als Funktion von n grafisch dargestellt werden.

Lösung: Nach Berechnung der relativen Häufigkeiten (Spalte 3) ergibt sich $w = f(n)$ als Streckenzug im Koordinatensystem (Bild 25.2). Mit wachsendem n nähert sich der Streckenzug immer mehr der Geraden $w = 0,5$.

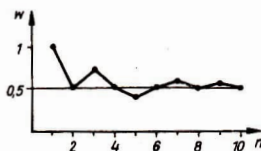


Bild 25.2

- 25.3. Für die Wohnraumplanung eines Verwaltungsbereiches wurde festgestellt, daß von insgesamt 6110217 Haushalten 4618168 Haushalte weniger als 4 Personen umfassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zu einem Haushalt höchstens 3 Personen gehören?

Lösung: Es wurden $n = 6110217$ „Versuche“ angestellt, wobei für das fragliche Ereignis $A = 4618168$ „Treffer“ erzielt wurden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist näherungsweise

$$p \approx \frac{4618168}{6110217} = 0,756 = \underline{\underline{75,6\%}}.$$

Aufgaben: 25.1. bis 25.3.

25.1.2. Zusammengesetzte Ereignisse

Häufig werden Ereignisse miteinander verknüpft. Es entstehen zusammengesetzte Ereignisse. Diese lassen sich mit den Aussagenverbindungen der Logik formulieren und können durch ebene Punkt Mengen veranschaulicht werden. Besonders wichtig sind die folgenden drei Beziehungen:

1. Das Ereignis „ A oder B “ besteht darin, daß mindestens eines der Ereignisse A oder B eintritt. Man schreibt

$$C = A \vee B$$

Diese Beziehung heißt die **Summe der Ereignisse** (Bild 25.3). In der Logik heißt sie **Alternative** (oder Disjunktion), in der Mengenlehre Vereinigungsmenge.

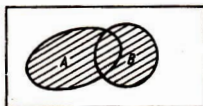


Bild 25.3

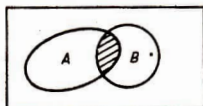


Bild 25.4

2. Das Ereignis „ A und B “ besteht darin, daß beide Ereignisse gleichzeitig auftreten. Man schreibt

$$C = A \wedge B$$

Diese Beziehung heißt das **Produkt der Ereignisse** (Bild 25.4). In der Logik heißt sie **Konjunktion** und in der Mengenlehre Durchschnitt.



Bild 25.5

3. Das Ereignis „Nicht A “ besteht darin, daß das Ereignis A unter den festgelegten Versuchsbedingungen nicht eintritt. Man schreibt

$$C = \bar{A}$$

Diese Beziehung heißt das **entgegengesetzte Ereignis** (Bild 25.5). In der Logik heißt sie Negation, in der Mengenlehre Komplementärmenge.

25.1.3. Additionsregel

In einer Lostrommel mögen sich m Lose befinden. Unter diesen sollen a Treffer und b Freilose vorhanden sein. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „ A oder B “, nämlich einen Treffer oder ein Freilos zu ziehen. Untersucht man, welche Fälle günstig bzw. möglich sind, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \frac{a}{m} \quad P(B) = \frac{b}{m}$$

sowie

$$P(A \text{ oder } B) = \frac{a+b}{m}.$$

Wegen

$$\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

kann man die gesuchte Wahrscheinlichkeit schreiben in der Form

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B).$$

Diese Gleichung gilt nur dann, wenn die Ereignisse, wie im vorliegenden Fall, unverträglich sind.

Definition

Zwei Ereignisse A und B heißen **unverträglich**, wenn sie bei einem Versuch nicht beide zugleich auftreten können.

Mit der Symbolik der Logik gilt also der

Satz

Wenn die Ereignisse A und B unverträglich sind, dann gilt die Additionsregel

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) \quad (25.2)$$

BEISPIELE

- 25.4. Ein industriell gefertigtes Produkt wird in der Güteklasse 1 mit der Wahrscheinlichkeit 17%, in der Güteklasse 2 mit der Wahrscheinlichkeit 36% angeboten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Stück aus einer dieser beiden Güteklassen zu erhalten?

Lösung: $p = P(G_1 \vee G_2) = P(G_1) + P(G_2) = 0,17 + 0,36 = \underline{0,53}$

Mit 53% Wahrscheinlichkeit wird man Güteklasse 1 oder 2 erwarten dürfen.

- 25.5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatspiel eine Zahlenkarte (Ereignis A) oder eine grüne Karte (Ereignis B) zu ziehen?

Lösung:

- a) Es gibt 16 Zahlenkarten, also

$$P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

- b) Es gibt 8 grüne Karten, also

$$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

- c) Es gibt 16 Zahlenkarten und außerdem 4 grüne Karten, die keine Zahlenkarten sind, also

$$P(C) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = \underline{0,625}.$$

Das Additionstheorem darf nicht angewandt werden, da die Ereignisse A und B nicht unverträglich sind. Es gibt nämlich Karten, die sowohl Zahlenkarten als auch grüne Karten sind. Die Summe

$$P(A) + P(B) = 0,75$$

ist größer als die richtige Wahrscheinlichkeit $P(C) = 0,625$.

25.1.4. Multiplikationsregel

Mit ähnlichen Überlegungen läßt sich eine Verknüpfungsregel für das Ereignis „ A und B “ beweisen, wobei der Begriff der Unabhängigkeit zweier Ereignisse auftritt.

Definition

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn das Eintreten von A auf die Wahrscheinlichkeit von B keinen Einfluß hat und umgekehrt.

Satz

Wenn die Ereignisse A und B unabhängig sind, dann gilt die Multiplikationsregel

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B) \quad (25.3)$$

Zum Beweis werden zwei Loskästen betrachtet:

1. Kasten: m Lose, darunter a Treffer
2. Kasten: n Lose, darunter b Treffer

Die Treffer seien von 1 bis a bzw. von 1 bis b numeriert. Dann lassen sich die möglichen Fälle des Ziehens von je einem Los aus beiden Kästen leicht aufschreiben:

11	12	13	...	1b	...	1n
21	22	23	...	2b	...	2n
31	32	33	...	3b	...	3n
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
a1	a2	a3	...	ab	...	an
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m1	m2	m3	...	mb	...	mn

Die erste Zahl bedeutet jeweils die Nummer des Loses aus dem ersten Kasten. Man erkennt, daß die günstigen Fälle für das Ereignis „Zwei Treffer“ sämtlich in der rechteckigen Teilfläche links oben stehen. Es folgt

$$P(A \wedge B) = \frac{ab}{mn} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = P(A) \cdot P(B)$$

Dies aber war behauptet worden.

BEISPIEL

25.6. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Gasmolekül in einem gewissen Raumgebiet befindet, sei 30%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich drei solche Moleküle, die sich gegenseitig nicht beeinflussen sollen, in dem gleichen Raumgebiet befinden?

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } p &= P(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3) = P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(M_3) \\ &= 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,30 = \underline{0,027} \end{aligned}$$

Das Zusammentreffen von drei Molekülen ist nur mit 2,7% Wahrscheinlichkeit zu erwarten.

Aufgaben: 25.4. bis 25.8.

25.1.5. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit soll an folgendem Beispiel erläutert werden.

BEISPIEL

25.7. In einem Loskasten mit 100 Losen befinden sich 5 Treffer. Es werden nacheinander 2 Lose gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide Lose Treffer sind?

Lösung: Für die erste Ziehung sind 5 günstige unter 100 möglichen Fällen vorhanden. Also gilt

$$P(A) = \frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$$

Wäre die erste Ziehung nicht vorausgegangen, so würde für die zweite Ziehung die Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$$

gelten.

Wenn die erste Ziehung ein Treffer gewesen ist, dann sind für die zweite Ziehung nur noch 4 günstige unter 99 möglichen Fällen vorhanden. Also gilt

$$P(B/A) = \frac{4}{99} = 0,0405 = 4,05\%.$$

Das Eintreten von A hat einen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit von B . Die Ereignisse A und B sind nicht unabhängig. Man nennt $P(B/A)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Voraussetzung A . Es läßt sich zeigen, daß in diesem Falle eine verallgemeinerte Multiplikationsregel gilt. Man erhält

$$\begin{aligned} P(A \wedge B) &= P(A) \cdot P(B/A) \\ &= \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,00202 = \underline{\underline{0,202\%}} \end{aligned}$$

Allgemein formuliert ergibt sich der

Satz

Für zwei beliebige Ereignisse A und B gilt die Multiplikationsregel

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (25.4)$$

Sind die beiden Ereignisse unabhängig, so ist $P(B/A) = P(B)$, und es folgt die Gl. (25.3) als Spezialfall.

25.1.6. Bernoullische Formel

Eine entscheidende Rolle beim weiteren Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt das Problem der **Trefferzahl** in einer Reihe von unabhängigen Versuchen.

Satz

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sei p . Es werden n voneinander unabhängige Versuche angestellt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis A genau k -mal auftritt, bestimmt durch die **Bernoullische Formel**

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (25.5)$$

Der Beweisgedanke wird aus folgender Überlegung deutlich. Mit einem Würfel soll 4mal gewürfelt werden, und es wird das Ereignis „2 Treffer“ betrachtet, wobei als Treffer eine Sechs gilt. Wenn man jeden Treffer mit A und jeden Nicht-Treffer mit B bezeichnet, dann kann das Ereignis „2 Treffer“ auf verschiedene Weise zustande kommen:

i	E_i				K_i
1	A	A	B	B	12
2	A	B	A	B	13
3	A	B	B	A	14
4	B	A	A	B	23
5	B	A	B	A	24
6	B	B	A	A	34

Aus diesem Schema läßt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit schrittweise zusammensetzen.

1. Die Trefferwahrscheinlichkeit für einen Einzelversuch beträgt

$$P(A) = p = \frac{1}{6}$$

2. Das Ereignis „ A oder B “, nämlich „Treffer oder Nicht-Treffer“, hat die Wahrscheinlichkeit 100%. Es gilt $P(A \vee B) = 1$, also $P(A) + P(B) = 1$. Daher folgt

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

3. Für das Ereignis E_1 gilt die Multiplikationsregel

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(A \wedge A \wedge B \wedge B) \\ &= P(A) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P(B) \\ &= p^2(1 - p)^2. \end{aligned}$$

4. Für die Ereignisse E_2 bis E_6 ergibt sich dieselbe Wahrscheinlichkeit, da sie sich nur durch die Reihenfolge von A und B unterscheiden. Es gilt also für alle i die Gleichung

$$P(E_i) = p^2(1 - p)^2.$$

5. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit findet man nun mit Hilfe der Additionsregel:

$$\begin{aligned} P &= P(E_1 \vee \dots \vee E_6) \\ &= P(E_1) + \dots + P(E_6) \\ &= 6p^2(1 - p)^2 \end{aligned}$$

6. Die Anzahl der Möglichkeiten E_i läßt sich aus der 3. Spalte (K_i) des Schemas theoretisch erklären. Dort ist die Stellung der Ereignisse A in jeder Versuchsserie vermerkt. Wie aus dem folgenden Abschnitt 25.1.7. hervorgeht, handelt es sich um Kombinationen von 4 Elementen zu je zwei Stück, deren Anzahl nach der Formel berechnet wird:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Damit läßt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit schreiben in der Form

$$P = \binom{4}{2} \cdot p^2(1 - p)^{4-2}$$

Die Verallgemeinerung des Beweisgedankens führt auf die behauptete Gleichung (25.5).

Eine interessante Veranschaulichung des zusammengesetzten Ereignisses „ k Treffer“ zeigt Bild 25.6. Das Ereignis „Treffer“ bedeutet stets ein Wegstück nach rechts unten, das Ereignis „Nicht-Treffer“ ein Wegstück nach links unten. Die weitere Deutung des Bildes sei dem Leser als nützliche Übung empfohlen.

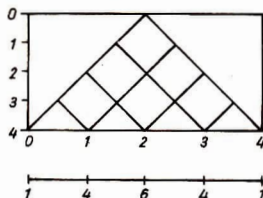


Bild 25.6

BEISPIEL

- 25.8. Ein Großhandelskontor versorgt 10 Geschäfte, die für den nächsten Tag eine Bestellung jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 40% aufgeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 6 Bestellungen aufgegeben werden?

Lösung:

$$\begin{aligned}
 P_{10}(6) &= \binom{10}{6} \cdot 0,4^6 \cdot (1 - 0,4)^4 \\
 &= 210 \cdot 0,4^6 \cdot 0,6^4 \\
 &= 210 \cdot 0,0041 \cdot 0,1296 \\
 &= \underline{\underline{0,111}}
 \end{aligned}$$

Sechs Bestellungen an einem Tag werden mit der Wahrscheinlichkeit 11,1% eintreten.

Aufgaben: 25.9. bis 25.15.

25.1.7. Kombinatorik

Bei komplizierteren Aufgaben der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung kann die Abzählung der möglichen Fälle Schwierigkeiten bereiten. Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Frage, wie viele Möglichkeiten der **Zusammenstellung gleichartiger Dinge** vorhanden sind. Die gleichartigen Dinge werden Elemente genannt und mit den Zahlen 1; 2; 3; ...; n numeriert. Es gibt drei Grundprobleme der Kombinatorik, nämlich Permutationen, Variationen und Kombinationen.

- a) Es seien n Elemente gegeben, die in beliebiger Reihenfolge nebeneinander gestellt werden sollen.

Definition

Permutationen entstehen, indem die gegebenen Elemente in jeder möglichen Reihenfolge zusammengestellt werden.

Für $n \leq 4$ ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

n	Permutationen	Anzahl
1	1	1
2	12 21	2
3	123 213 312 132 231 321	6
4	1234 2134 3124 4123 1243 2143 3142 4132 1324 2314 3214 4213 1342 2341 3241 4231 1423 2413 3412 4312 1432 2431 3421 4321	24

Alle Permutationen, die mit dem gleichen Element beginnen, sind in dieselbe Spalte geschrieben worden. Man erhält die Permutationen einer Spalte, indem man die übrigen $n - 1$ Elemente, außer dem ersten, permutiert. Für die Anzahl P_n aller Permutationen folgt daher

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = 2 \cdot 1$$

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

Allgemein gilt der

Satz

Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen beträgt

$$P_n = n!$$

(25.6)

b) Es seien n Elemente gegeben, aus denen jeweils k Stück herausgegriffen werden sollen.

Definition

Variationen entstehen, indem aus n Elementen jeweils k Stück herausgegriffen und in jeder möglichen Reihenfolge zusammengestellt werden.

Für $n = 4$ und $k = 2$ ergeben sich folgende Möglichkeiten:

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Man kann sich die Variationen aus den Permutationen entstanden denken:

12	34	21	34	31	24	41	23
12	43	21	43	31	42	41	32
13	24	23	14	32	14	42	13
13	42	23	41	32	41	42	31
14	23	24	13	34	12	43	12
14	32	24	31	34	21	43	21

Streicht man jeweils die letzten $n - k$ Elemente weg, so entsteht jede Variation so oft, wie sich die gestrichenen Elemente permutieren lassen, also $(n - k)!$ -mal. Für die Anzahl $V_n^{(k)}$ aller Variationen gilt daher die Gleichung

$$(n - k)! V_n^{(k)} = n!$$

und damit folgt der

Satz

Die Anzahl der Variationen von n verschiedenen Elementen zu je k Stück beträgt

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (25.7)$$

Eine spezielle Art von Variationen soll nun gesondert betrachtet werden, weil sie in den Anwendungen häufig vorkommt.

Definition

Variationen mit Wiederholung entstehen, wenn in den einzelnen Variationen dasselbe Element mehrmals auftreten darf.

Für $n = 4$ und $k = 2$ ergeben sich folgende Möglichkeiten:

11	21	31	41
12	22	32	42
13	23	33	43
14	24	34	44

Die Variationen mit Wiederholung zu je k Stück entstehen aus denen zu je $k - 1$ Stück, indem man jedes der n Elemente vor die schon vorhandenen Variationen schreibt. Es gilt also

$$n \cdot V_{wn}^{(k-1)} = V_{wn}^{(k)}$$

Man erhält der Reihe nach

$$V_{wn}^{(1)} = n$$

$$V_{wn}^{(2)} = n \cdot V_{wn}^{(1)} = n^2$$

$$V_{wn}^{(3)} = n \cdot V_{wn}^{(2)} = n^3$$

Allgemein folgt der

Satz

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zu je k Stück mit Wiederholung beträgt

$$V_{wn}^{(k)} = n^k \quad (25.8)$$

BEISPIEL

25.9. Aus den Ziffern 0 bis 9 sind alle Variationen zu je zwei Stück mit Wiederholung aufzuschreiben. Welche praktische Anwendung beruht auf diesen Überlegungen?

Lösung:

00	10	20	...	90
01	11	21	...	91
02	12	22	...	92
03	13	23	...	93
04	14	24	...	94
05	15	25	...	95
06	16	26	...	96
07	17	27	...	97
08	18	28	...	98
09	19	29	...	99

Diese Variationen können nicht nur elementweise gelesen werden, sondern als **Zahlen** des praktischen Rechnens. Zum Beispiel ergibt sich in der zweiten Spalte statt „Eins-Null“ die Zahl „Zehn“, statt „Eins-Eins“ die Zahl „Elf“ usw. Man erkennt, daß die Variationen mit Wiederholung die Grundlage für das **Dezimalsystem** des üblichen Zahlenrechnens bilden. Die Nullen vor der Ziffernfolge werden im praktischen Gebrauch bekanntlich weggelassen. Für $n = 10$ und $k = 3$ würden alle Zahlen bis einschließlich der dreistelligen Zahlen entstehen, also von 0 bis 999. Ihre Anzahl beträgt $10^3 = 1000$.

Aufgaben: 25.16. bis 25.22.

c) Bei vielen Aufgaben der Kombinatorik ist die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Zusammenstellung ohne Bedeutung.

Definition

Kombinationen entstehen, indem aus n Elementen jeweils k Stück herausgegriffen und in einer einzigen Reihenfolge zusammengestellt werden, wobei die Reihenfolge unwesentlich ist.

Für $n = 4$ und $k = 2$ erhält man folgende Möglichkeiten:

12	23	34
13	24	
14		

Offensichtlich kann man sich die Kombinationen aus den entsprechenden Variationen entstanden denken. Es fallen nämlich alle diejenigen Variationen, die die gleichen Elemente enthalten, jeweils in eine einzige Kombination zusammen. Dies sind aber

je $k!$ Variationen. Für die Anzahl $C_n^{(k)}$ der Kombinationen erhält man somit

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Mit der Definition des Binomialkoeffizienten (vgl. Band I) folgt daraus der

Satz

Die Anzahl der Kombinationen von n verschiedenen Elementen zu je k Stück beträgt

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k} \quad (25.9)$$

BEISPIEL

25.10. Zur Demonstration des Zahlenlottos werden aus einem Skatspiel vier Karten beliebig herausgezogen. Jemand tippt, daß es die vier Asse sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er $k = 0; 1; 2; 3; 4$ Treffer erzielt?

Lösung: Die Karten seien von 1 bis 32 numeriert; die Asse sollen die Zahlen 1 bis 4 erhalten. Die möglichen Fälle des Herausziehens von 4 Karten sind die Kombinationen von $n = 32$ Karten zu je $m = 4$ Stück. Ihre Anzahl ist

$$\binom{32}{4} = 35960$$

Es soll nun die Anzahl der **günstigen** Fälle für $k = 2$ Treffer bestimmt werden. Die Treffer sind aus den Zahlen 1 bis 4, die Nicht-Treffer aus den Zahlen 5 bis 32 auszuwählen. Jeder günstige Tipsatz hat die Form

Treffer, Treffer, Niete, Niete,

wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Wenn man 4 Asse zu je 2 Stück zusammenstellt, so ergeben sich

$$\binom{4}{2} = 6$$

Möglichkeiten. Werden die übrigen 28 Karten zu je zwei Stück zusammengestellt, entstehen

$$\binom{28}{2} = 378$$

Möglichkeiten. Jede der Trefferzusammenstellungen kann mit jeder Nicht-Trefferzusammenstellung zu einem Tipsatz vereinigt werden. Die Anzahl der günstigen Tipsätze beträgt also

$$g = 6 \cdot 378 = 2268,$$

und daher ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer

$$P(2) = \frac{2268}{35960} = 0,0631.$$

Die Verallgemeinerung dieser Überlegungen führt zu der Formel

$$P(k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{28}{4-k}}{\binom{32}{4}}$$

und damit zu folgender Wertetabelle:

k	$\binom{4}{k}$	$\binom{28}{4-k}$	g	$P(k)$
0	1	20475	20475	0,569
1	4	3276	13104	0,364
2	6	378	2268	0,063
3	4	28	112	0,003
4	1	1	1	0,00003

Die Übertragung dieses Beispiels auf $n = 90$ und $m = 5$ kann dem Leser überlassen bleiben.

Aufgaben: 25.23. bis 25.25.

Kontrollfragen

- 25.1. Wie ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses definiert? Wie kann man sie statistisch näherungsweise berechnen bzw. bestimmen?
- 25.2. Welches sind die drei wichtigsten zusammengesetzten Ereignisse? Wie kann man ihre Wahrscheinlichkeit berechnen?
- 25.3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Trefferzahl k bei n angestellten Versuchen und bekannter Grundwahrscheinlichkeit?
- 25.4. Wieviel Permutationen von 4 verschiedenen Elementen gibt es?
- 25.5. Was versteht man unter Variationen a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung?
- 25.6. Wie ist der Binomialkoeffizient „ n über k “ definiert? Wo wird er innerhalb der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt?

25.2. Zufallsgrößen

25.2.0. Vorbemerkung

Während in der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung von Ereignissen gesprochen wurde, ist für statistische Probleme der Begriff der Zufallsgröße erforderlich. Die Grundaufgabe der Statistik besteht darin, eine **Massenerscheinung** auf ein bestimmtes **Merkmal** hin zu untersuchen. Stellt man viele Versuche unter gleichbleibenden Versuchsbedingungen an, so zeigt sich, daß die Versuchsergebnisse nicht sämtlich übereinstimmen, sondern zufällige Schwankungen aufweisen.

Definition

Eine **Zufallsgröße** ist eine Veränderliche, deren verschiedene Werte durch zufällige Unterschiede im Versuchsablauf zustande kommen.

Es sollen nun zunächst einige notwendige Begriffe zur elementaren Beschreibung von Zufallsgrößen bereitgestellt werden, bevor die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Zufallsgrößen übertragen wird.

25.2.1. Beschreibende Statistik

Bei der Untersuchung von Massenerscheinungen können die Versuchsergebnisse durch **Zählung** oder durch **Messung** gewonnen werden.

Wenn ein Schütze auf eine Ringscheibe mit 10 Ringen schießt, so können als mögliche Werte der Trefferzahl nur die Zahlen 0; 1; 2; ...; 10 auftreten. Die Trefferzahl ist eine **diskrete** Zufallsgröße.

Definition

Eine Zufallsgröße heißt **diskret**, wenn sie nur endlich viele (oder abzählbar unendlich viele) mögliche Werte annehmen kann.

Wenn man eine gegebene Länge mehrmals mißt, so können als Meßwerte prinzipiell alle reellen Zahlen (in einer gewissen Umgebung des wahren Wertes) auftreten. Die Zufallsgröße Meßwert ist eine **stetige** Zufallsgröße.

Definition

Eine Zufallsgröße heißt **stetig**, wenn sie (in einem gewissen Intervall) jeden reellen Wert annehmen kann.

Statistische Maßzahlen

Die einfachste Beschreibung einer Zufallsgröße ergibt sich aus der Fehlerrechnung. Dort werden bekanntlich die Begriffe **Mittelwert** und **Streuung** eingeführt (Abschnitt 22.3.). Zur Ausgleichung der Einzelmeßwerte benutzt man dabei die **Methode der kleinsten Quadratsumme** und erhält als Mittelwert das **arithmetische Mittel**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

und als **Streuungsmaß** die **Varianz**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

beziehungsweise die **Standardabweichung**

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Diese Kennwerte lassen sich auf beliebige Zufallsgrößen übertragen. Sie charakterisieren die Größenordnung und die Schwankungsbreite einer Zufallsgröße.

Absolute Häufigkeit

Während man es bei physikalischen Messungen meist nur mit 5 bis 10 Meßwerten eines Objekts zu tun hat, liegen bei anderen statistischen Massenerscheinungen oft Hunderte von Einzelwerten vor. Diese sind zunächst der Reihe nach in einer **Urliste**

aufgeschrieben. Um einen besseren Überblick zu gewinnen, stellt man sich eine **Häufigkeitsverteilung** her. Bei einer diskreten Zufallsgröße mit endlich vielen möglichen Werten kann dies in folgender Weise geschehen.

In die erste Spalte schreibt man die möglichen Werte $x_1; x_2; x_3; \dots; x_m$ der Zufallsgröße. Dann zählt man in der Urliste ab, mit welcher Häufigkeit h_i der Wert x_i angenommen wurde. So erhält man eine Häufigkeitstabelle der Form

x_i	h_i
x_1	h_1
$\vdots$	$\vdots$
x_m	h_m
	n

Die Summe aller Häufigkeiten muß gleich der Anzahl der Einzelwerte sein:

$$\sum_{i=1}^m h_i = n$$

Man beachte den Unterschied zwischen dem Umfang n der Stichprobe und der Anzahl m der verschiedenen Merkmalswerte! Wird die Häufigkeit $h = h(x)$ als Funktion von x grafisch dargestellt, so entsteht gewöhnlich ein **glockenförmiges** Gebilde. Die Darstellung kann als gebrochener Streckenzug (Polygon) oder durch Rechtecksflächen (Säulendiagramm, Histogramm) erfolgen (Bilder 25.7 und 25.8).

Relative Häufigkeit

Wenn Stichproben verschiedenen Umfangs verglichen werden sollen, ist es zweckmäßig, die Häufigkeiten h_i auf den Umfang n der Stichprobe zu beziehen und für jeden Merkmalswert die **relative Häufigkeit**

$$w = \frac{h}{n} \quad (25.10)$$

zu berechnen. Wegen $0 \leq h \leq n$ liegt die relative Häufigkeit stets im Intervall

$$0 \leq w \leq 1$$

Daher können relative Häufigkeiten auch in Prozent angegeben werden.

BEISPIEL

25.11. Ein Schütze erzielt der Reihe nach folgende Trefferzahlen:

5	8	7	5	7	4
7	7	6	7	6	8
4	8	8	7	8	8
8	7	7	5	9	9
10	7	6	6	8	8
6	6	7	7	9	6

Es soll die relative Häufigkeitsverteilung als Polygon dargestellt werden.

Lösung:

x_i	h_i	w_i
4	2	0,0556
5	3	0,0833
6	7	0,194
7	11	0,306
8	9	0,250
9	3	0,0833
10	1	0,0278
	36	1,0000

Die Trefferzahl 4 erzielte der Schütze zweimal. Dies sind 5,56% aller abgegebenen Schüsse. Entsprechendes gilt für die anderen Trefferzahlen. Am häufigsten wurde die Trefferzahl 7 erzielt, und zwar in 30,6% aller abgegebenen Schüsse (Bild 25.7).

Aufgaben: 25.26. bis 25.28.

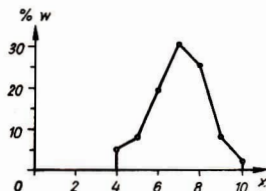


Bild 25.7

Verallgemeinerte statistische Maßzahlen

Wenn die Einzelwerte in Form einer Häufigkeitstabelle vorliegen, dann erhält man für das **arithmetische Mittel** die Summe aller Einzelwerte, indem h_1 mal der Wert x_1 , h_2 mal der Wert x_2 usw. addiert wird. So ergibt sich der Ausdruck

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i h_i,$$

der oft als gewogenes arithmetisches Mittel bezeichnet wird. Für die **Varianz** ergibt sich entsprechend

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$$

und daraus durch Wurzelziehen die Standardabweichung s .

Es sei erwähnt, daß in der beschreibenden Statistik, insbesondere bei manchen ökonomischen Problemen, andere Größen als Mittelwert und Streuungsmaß benutzt werden. Die **mathematische Statistik** dagegen verwendet immer das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.

BEISPIEL

25.12. Aus der bekannten Häufigkeitsverteilung eines Schützen (Beispiel 25.11.) ist das arithmetische Mittel der Trefferzahl und die Standardabweichung der Schüsse zu berechnen.

Lösung:

x_i	h_i	$x_i h_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$
4	2	8	-2,97	17,6
5	3	15	-1,97	11,6
6	7	42	-0,97	6,6
7	11	77	+0,03	0,0099
8	9	72	+1,03	9,55
9	3	27	+2,03	12,4
10	1	10	+3,03	9,18
	36	251		66,9399

$$\text{Arithmetisches Mittel: } \bar{x} = \frac{251}{36} = \underline{\underline{6,97}}$$

$$\text{Varianz: } s^2 = \frac{66,9399}{35} = \underline{\underline{1,91}}$$

$$\text{Standardabweichung: } s = \sqrt{1,91} = \underline{\underline{1,38}}$$

Die Differenzen $x_i - \bar{x}$ können zu starken Rundungsfehlern bei der Varianz führen. Daher wird die Varianz in der beschreibenden Statistik meist nach geeigneter Umformung berechnet. Hier wird darauf nicht eingegangen.

Stetige Zufallsgrößen

Wenn bei der Untersuchung einer Zufallsgröße die Versuchsergebnisse durch **Messung** gewonnen werden, dann kann wie schon erwähnt prinzipiell jede reelle Zahl in einem gewissen Intervall als Merkmalswert auftreten. Solche stetigen Zufallsgrößen sind z. B. der Meßwert der Länge eines Metallstabes bei mehrmaliger Messung, die Lebensdauer von Glühlampen bei Serienproduktion oder das Geburtsgewicht von Kindern.

Die möglichen Werte einer stetigen Zufallsgröße sind offenbar nicht abzählbar. Man kann sie nicht einzeln aufschreiben, um ihnen gewisse Häufigkeiten zuzuordnen. Dagegen läßt sich das Gesamtintervall der möglichen Werte in **Teilintervalle** zerlegen. Eine solche **Klasseneinteilung** ist natürlich in gewissem Grade willkürlich. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, etwa 5 bis 10 gleichbreite Klassen zu benutzen. Nun kann man in der Urliste abzählen, wie viele Werte in eine bestimmte Klasse fallen. Wenn ein Wert genau auf eine Klassengrenze fällt, dann soll er in die rechts von ihm liegende Klasse eingereiht werden (in speziellen Fällen kann auch eine andere Verabredung getroffen werden). Die Häufigkeitsverteilung einer stetigen Zufallsgröße entsteht, indem jeder **Klassenmitte** x_i die entsprechende **Klassenhäufigkeit** ΔH_i zugeordnet wird. Damit lassen sich alle Überlegungen, die für diskrete Zufallsgrößen angestellt wurden, auf die stetigen Zufallsgrößen übertragen.

Die Willkürlichkeit der Klasseneinteilung kann vermieden werden, indem man die Klassenhäufigkeit ΔH auf die Klassenbreite Δx bezieht. Die Größe

$$h = \frac{\Delta H}{\Delta x}$$

soll die Klassendichte heißen. Dann läßt sich die Klassenhäufigkeit

$$\Delta H = h \Delta x$$

als Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Grundlinie Δx und der Höhe h deuten. So entsteht die Häufigkeitsverteilung einer stetigen Zufallsgröße als Histogramm (Bild 25.8). Wird die Klassenbreite Δx verändert, so ändert sich die Klassenhäufigkeit ΔH , aber die Form der Häufigkeitsverteilung bleibt im wesentlichen die gleiche.

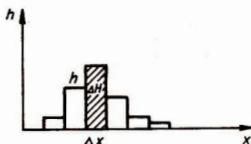


Bild 25.8

Wenn man die Klassenbreite Δx immer mehr verkleinert, so wird die Treppenkurve allmählich in eine stetige Kurve übergehen. Diese Kurve charakterisiert die stetige Zufallsgröße unabhängig von der willkürlichen Klasseneinteilung. Sie wird die **Häufigkeitsdichte** der Verteilung genannt und solange keine Verwechslungen zu befürchten sind, weiterhin mit dem Buchstaben h bezeichnet, siehe Bild 25.9.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung führen entsprechende Überlegungen zum Begriff der Wahrscheinlichkeitsdichte und werden dort mathematisch präzisiert.

Aufgabe: 25.29.

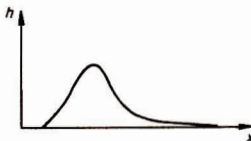


Bild 25.9

25.2.2. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Während bisher die Zufallsgrößen ohne den Begriff der Wahrscheinlichkeit beschrieben wurden, sollen nun geeignete Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Untersuchung von Zufallsgrößen entwickelt werden. Ausgehend vom Begriff des zufälligen Ereignisses (s. 25.1.1.) liegt es nahe, eine Zufallsgröße als eine Menge von zufälligen Ereignissen aufzufassen. Jedem Merkmalswert entspricht ein Ereignis, das eintreten kann, aber nicht eintreten muß.

Der enge Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses führt zu der Vorstellung, daß auch für Zufallsgrößen jede relative Häufigkeitsverteilung $w = f(x)$ einer **Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$p = \varphi(x)$$

in der Grundgesamtheit zugeordnet ist. Es erhebt sich nun die Frage, ob gewisse Wahrscheinlichkeitsverteilungen im voraus durch eine Funktionsgleichung angegeben werden können, so daß möglichst viele statistische Massenerscheinungen einer solchen Verteilung exakt oder wenigstens angenähert genügen.

Weiterhin ist zu erwarten, daß sich die zusammenfassenden statistischen Maßzahlen, insbesondere das arithmetische Mittel und die Varianz, zur Definition geeigneter wahrscheinlichkeitstheoretischer Parameter benutzen lassen.

Dies ist in der Tat der Fall und führt zu den Begriffen Erwartungswert und Dispersion. Zusammenfassend ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

Statistik	Wahrscheinlichkeitsrechnung
Merkmalswert	Ereignis
Relative Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
Massenerscheinung	Zufallsgröße
Häufigkeitsverteilung	Wahrscheinlichkeitsverteilung
Arithmetisches Mittel	Erwartungswert
Varianz	Dispersion

25.2.3. Binomialverteilung

Verteilungsgesetz

Einen ersten Hinweis auf eine theoretische bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert die **Bernoullische Formel**, die in der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt wurde (s. 25.1.6.). Bei fester Grundwahrscheinlichkeit p und konstanter Versuchszahl n ist jedem Wert k der Trefferzahl eine bestimmte Wahrscheinlichkeit

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

zugeordnet. Es liegt also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p_k = P_n(k)$$

vor, und zwar für die Zufallsgröße „Trefferzahl“.

Definition

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Trefferzahl k heißt die **Binomialverteilung** und ist bestimmt durch die **BERNOULLISCHE Formel**

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bei der grafischen Darstellung ergibt sich ein glockenförmiges Gebilde wie bei Häufigkeitsverteilungen der Statistik.

BEISPIEL

25.13. Bei einem komplizierten Produktionsprozeß ist die Wahrscheinlichkeit für die Herstellung eines einwandfreien Gerätes gleich 50%. Zur Qualitätskontrolle werden 10 Stück aus der laufenden Produktion entnommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in diesem Warenposten $k = 0; 1; 2; \dots; 10$ einwandfreie Stücke enthalten sind? Die Ergebnisse sind grafisch als Polygon darzustellen.

Lösung: $p = 0,5 = \frac{1}{2} \quad n = 10$

$$p_k = P_{10}(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \binom{10}{k} \cdot \frac{1}{1024}$$

Damit ergibt sich die Wertetafel

k	$\binom{10}{k}$	p_k
0	1	0,001
1	10	0,010
2	45	0,044
3	120	0,117
4	210	0,205
5	252	0,246
6	210	0,205
7	120	0,117
8	45	0,044
9	10	0,010
10	1	0,001

Als grafische Darstellung erhält man Bild 25.10.

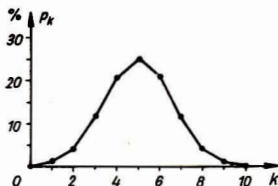


Bild 25.10

Erwartungswert und Dispersion

Die zusammenfassenden Maßzahlen der beschreibenden Statistik geben Veranlassung zur Definition gewisser Kennwerte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vom **arithmetischen Mittel**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i h_i$$

wird man wegen der Näherung

$$\frac{h_i}{n} \approx p_i$$

auf den Ausdruck

$$\mu = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p_i$$

geführt.

Definition

Der **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsgröße ist bestimmt durch die Gleichung

$$\mu = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p_i$$

Ausgehend von der **Varianz**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$$

können für großes n die Näherungen

$$\frac{h_i}{n-1} \approx \frac{h_i}{n} \approx p_i \quad \text{und} \quad \bar{x} \approx \mu$$

benutzt werden, und dies führt zu der

Definition

Die **Dispersion** einer diskreten Zufallsgröße ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Mit Benutzung der Begriffe Stichprobe und Grundgesamtheit ergibt sich folgende Übersicht:

	Stichprobe	Grundgesamtheit
Mittelwert	$\bar{x}$	μ
Streuung	s^2	σ^2

Wenn als Zufallsgröße speziell die Trefferzahl k bei n unabhängigen Versuchen betrachtet wird, so läßt sich zeigen, daß für den theoretischen Mittelwert der Trefferzahl und für das zugehörige Streuungsmaß der folgende Satz gilt:

Satz

Die **Binomialverteilung** besitzt den **Mittelwert**

$$\mu = n \cdot p \quad (25.11)$$

und die **Streuung**

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad (25.12)$$

BEISPIEL

- 25.14. In einer Betriebsabteilung ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Wasserverbrauch je Tag normal ist, gleich 75%. An wieviel Tagen wird der Wasserverbrauch durchschnittlich je Quartal (90 Tage) normal sein, und welche Abweichung von dieser Anzahl muß im allgemeinen eingeplant werden?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Normaler Wasserverbrauch“ ist $p = 0,75$. Es werden $n = 90$ „Versuche“ angestellt. Dann ist die mittlere „Trefferzahl“ bestimmt durch

$$\mu = 90 \cdot 0,75 = \underline{67,5}$$

und die mittlere Abweichung beträgt

$$\sigma = \sqrt{90 \cdot 0,75 \cdot (1 - 0,75)} = \underline{4,11}$$

In sinnvoller Rundung läßt sich also folgendes aussagen: Der Wasserverbrauch wird durchschnittlich an 67 Tagen eines Quartals normal sein. Es muß aber im allgemeinen mit einer Abweichung von 4 Tagen gerechnet werden. Es ist also eine mittlere Schwankung zwischen 63 und 71 Tagen einzuplanen.

Wahrscheinlichkeit eines Intervalls

Häufig wird die Wahrscheinlichkeit dafür benötigt, daß die Trefferzahl k einen Wert im Intervall $a \leq k \leq b$ annimmt. Es handelt sich offenbar um das Ereignis „ a oder $a + 1$ oder ... oder b “. Daher kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der Additionsregel bestimmt werden. Man erhält

$$P(a \leq k \leq b) = \sum_{k=a}^b p_k$$

Eine anschauliche Deutung ergibt sich, wenn man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Histogramm (vgl. 25.2.1.) darstellt. Die Wahrscheinlichkeit des Intervalls erscheint dann als Summe der entsprechenden Rechtecke, also als zusammenhängende Fläche unter der Treppenkurve.

Satz

Die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls ist bestimmt durch die zugehörige Fläche unter der Verteilungskurve.

BEISPIEL

- 25.15. Für den Warenposten des Beispiels 25.13. soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß die Trefferzahl k der einwandfreien Stücke vom Mittelwert μ höchstens um den Betrag a abweicht. Ferner ist diese Wahrscheinlichkeit im Histogramm der Verteilung grafisch zu deuten.

Lösung: Für den Mittelwert ergibt sich

$$\mu = 10 \cdot 0,5 = 5.$$

Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit des Intervalls

$$\mu - a \leq k \leq \mu + a$$

$$-a \leq k - \mu \leq +a$$

$$|k - \mu| \leq a,$$

also nach der Wahrscheinlichkeit

$$P = P(|k - \mu| \leq a),$$

die mit $P = \Phi(a)$ bezeichnet werden soll. Nach der Additionsregel ergibt sich für $a = 1$

$$\begin{aligned} P(|k - \mu| \leq 1) &= P(4 \vee 5 \vee 6) \\ &= P(4) + P(5) + P(6) \\ &= 0,205 + 0,246 + 0,205 \\ &= \underline{\underline{0,656}} \end{aligned}$$

usw. So entsteht für die möglichen Werte von a die folgende Wertetabelle

k	a	$\Phi(a)$
5	0	0,246
4...6	1	0,656
3...7	2	0,890
2...8	3	0,978
1...9	4	0,998
0...10	5	1,000

Bei einem Warenposten von 10 Stück sind 3 bis 7 einwandfreie Stücke mit einer Wahrscheinlichkeit von 89% zu erwarten. Weniger als 3 oder mehr als 7 einwandfreie Stücke zu finden ist ziemlich unwahrscheinlich. Dies wird durchschnittlich nur in 11% aller entnommenen Warenposten von 10 Stück auftreten (Bild 25.11).

Aufgabe: 25.30.

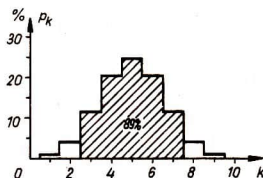


Bild 25.11

25.2.4. Normalverteilung

Verteilungsgesetz

Die **BERNOULLISCHE** Formel ist für praktische Rechnungen bei großen Werten von n höchst un bequem. Wie **LAPLACE** gezeigt hat, ist für $n \rightarrow \infty$ die Näherung

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

benutzbar.

Es hat sich nun herausgestellt, daß dieser Funktionstyp nicht nur für die Trefferzahl k die Wahrscheinlichkeitsverteilung annähert, sondern für viele Zufallsgrößen der Statistik als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Grundgesamtheit angesehen werden kann.

Definition

Die Zufallsgröße x heißt **normalverteilt** mit dem Mittelwert μ und dem Streuungsmaß σ , wenn sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (25.13)$$

besitzt.

Dabei bedeutet der Buchstabe p jetzt die Funktionsvariable einer stetigen Funktion von x und hat nichts mehr mit der Grundwahrscheinlichkeit in der BERNOULLISCHEN Formel zu tun.

Die grafische Darstellung ergibt eine glockenförmige, symmetrische Kurve mit einem Maximum bei $x = \mu$ und zwei Wendepunkten bei $x = \mu \pm \sigma$. Diese Kurve wird oft die GAUSSSCHE Glockenkurve genannt.

BEISPIEL

25.16. Zur Skizzierung der Normalverteilung sollen die Funktionswerte p für die Abszissen $x = \mu$; $\mu \pm \sigma$; $\mu \pm 2\sigma$ und $\mu \pm 3\sigma$ als Bruchteile von $p_{\max}$ berechnet werden.

Lösung:

$$p(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = p_{\max}$$

$$p(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0,61 p_{\max}$$

$$p(\mu \pm 2\sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2} = 0,14 p_{\max}$$

$$p(\mu \pm 3\sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{9}{2}} = 0,01 p_{\max}$$

Nach willkürlicher Wahl von $p_{\max}$ und σ ergibt sich daraus leicht eine Skizze der Normalverteilung (Bild 25.12).

Wahrscheinlichkeit eines Intervalls

Die Normalverteilung wird durch eine stetige Funktion dargestellt. Dies ist eine prinzipiell neue Sachlage. Man nennt die Funktion p die **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

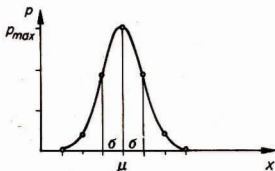


Bild 25.12

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße exakt eine vorgegebene reelle Zahl x annimmt, ist praktisch gleich Null. Wesentlich ist dagegen die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines Intervalls. Es erscheint sinnvoll, die **Flächendarstellung** der Intervallwahrscheinlichkeit von der Binomialverteilung auf die Normalverteilung zu übertragen. Die Fläche unter einer stetigen Kurve kann aber bekanntlich durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden. So ergibt sich die allgemeine

Definition

Die Wahrscheinlichkeit P dafür, daß die stetige Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(X)$ einen Wert im Intervall $x_1 < X < x_2$ annimmt, ist bestimmt durch das Integral

$$P = \int_{x_1}^{x_2} p(X) dx \quad (25.14)$$

Fehlerintegral

Wegen der Symmetrie der Normalverteilung bezüglich des Mittelwertes μ interessiert besonders die Wahrscheinlichkeit des Intervalls

$$\mu - a < X < \mu + a$$

einer beiderseits gleichen Abweichung a .

Bei der Betrachtung von Intervallwahrscheinlichkeiten stetiger Zufallsgrößen ist es üblich, die Zufallsgröße mit großen Buchstaben, dagegen die speziellen Werte, die sie annimmt, mit kleinen Buchstaben zu bezeichnen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich stets zurückführen auf den Fall $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (normierte Normalverteilung).

Definition

Das Integral

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{+u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (25.15)$$

wird das Abweichungsintegral der Normalverteilung oder **Fehlerintegral** genannt.

Satz

Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit dem Mittelwert μ und dem Streuungsmaß σ . Dann gilt

$$P(|X - \mu| < a) = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \quad (25.16)$$

Beweis:

Nach Definition der Intervallwahrscheinlichkeit gilt:

$$P = P(|X - \mu| < a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\mu-a}^{\mu+a} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Durch die Substitution

$$u = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

mit $dx = \sigma du$ und den neuen Integralgrenzen

$$u_1 = \frac{1}{\sigma} (\mu - a - \mu) = -\frac{a}{\sigma}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma} (\mu + a - \mu) = +\frac{a}{\sigma}$$

folgt

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a}{\sigma}}^{+\frac{a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist unwesentlich. Nach Gl. (25.15) gilt also

$$P = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

wie behauptet.

Wenn man die Abweichung a als Vielfaches des Streuungsmaßes in der Form $a = u \cdot \sigma$ darstellt, dann läßt sich die bewiesene Gleichung offenbar auch in der Form

$$P(|X - \mu| < u \cdot \sigma) = \Phi(u) \quad (25.17)$$

schreiben. Die Intervallwahrscheinlichkeit $P = \Phi(u)$ liegt als Funktion von u tabelliert vor (Tab. 25.1).

BEISPIELE

25.17. Von einem serienmäßig gefertigten Werkstück sei bekannt, daß seine Länge eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert $\mu = 20$ mm und dem Streuungsmaß $\sigma = 0,2$ mm ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Länge eines beliebig herausgegriffenen Einzelstückes um weniger als 0,3 mm vom Mittelwert abweicht?

Lösung:

$$P = P(|X - 20| < 0,3) = \Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right) = \Phi(1,5)$$

Nach Tabelle 25.1 ergibt sich

$$P = 0,866$$

Es werden 86,6% aller hergestellten Werkstücke eine Abweichung von weniger als 0,3 mm haben (Bild 25.13).

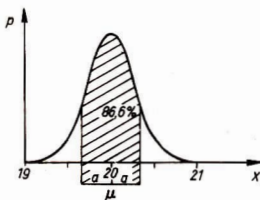


Bild 25.13

- 25.18. Die Masse eines in Serie produzierten Werkstückes sei normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 8,4$ kg und dem Streuungsmaß $\sigma = 0,025$ kg. Welche Genauigkeit läßt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% garantieren?

Lösung:

$$P = P(|X - 8,4| < a) = 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{a}{0,025}\right) = 0,99$$

Nach Tabelle 25.1 ergibt sich

$$\frac{a}{0,025} = 2,6$$

$$a = 0,065$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% wird die Masse der Werkstücke um weniger als 65 g vom Mittelwert abweichen.

Verteilungsfunktion

Zur Definition einer Zufallsgröße kann anstelle der Wahrscheinlichkeitsdichte auch eine geeignete Intervallwahrscheinlichkeit dienen. Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X einen Wert im Intervall $-\infty < X < x$ annimmt, wobei x eine beliebige reelle Zahl darstellt.

Definition

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X einen Wert annimmt, der kleiner als x ist, heißt die **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße. Man schreibt

$$P(X < x) = F(x)$$

Im Falle der Normalverteilung muß offenbar eine Beziehung zwischen dem Fehlerintegral und der Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung bestehen.

Es läßt sich zeigen, daß folgende Gleichung gilt:

$$F(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(u)$$

Eine Tabelle der Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung kann also anstelle einer Tabelle des Fehlerintegrals zu praktischen Rechnungen benutzt werden.

Aufgaben: 25.31. bis 25.35.

25.2.5. Weitere Verteilungen

Poissonsche Verteilung

Bei vielen Anwendungen wird nach der Trefferzahl eines **seltenen Ereignisses** gefragt. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein einzelnes Atom einer radioaktiven Substanz im Verlauf einer Sekunde zerfällt, äußerst gering. Wenn nun sehr viele Versuche betrachtet werden, so wird trotzdem die mittlere Trefferzahl $\mu = n \cdot p$ eine ziemlich kleine Zahl bleiben. Unter diesen Bedingungen läßt sich zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit der Trefferzahl k näherungsweise durch das Poissonsche Verteilungsgesetz bestimmt ist.

Definition

Die Zufallsgröße k mit dem Mittelwert μ genügt der **Poisson-Verteilung**, wenn sie das Verteilungsgesetz

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \quad (25.18)$$

besitzt.

Zur Anwendung der Poisson-Verteilung ist die genaue Kenntnis der Grundwahrscheinlichkeit p und der Anzahl n der angestellten Versuche nicht erforderlich, wenn nur bekannt ist, daß die Bedingungen $p \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ erfüllt sind und μ hinreichend klein bleibt.

BEISPIEL

25.19. Bei einer Fernsprechvermittlung werden durchschnittlich zwei Gespräche pro Minute angemeldet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Minute $k = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ Anmeldungen eintreffen, wenn für die Anzahl der Anmeldungen eine Poisson-Verteilung angenommen werden kann?

Lösung: Wegen $\mu = 2$ gilt das Verteilungsgesetz

$$P(k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}$$

Für $k = 0$ folgt

$$P(0) = e^{-2} = 0,135$$

usw. Man erhält die folgende Wertetafel

k	$P(k)$
0	0,135
1	0,270
2	0,270
3	0,180
4	0,090
5	0,036
6	0,012

Eine grafische Darstellung zeigt Bild 25.14. Man könnte nun fragen, ob die eintreffenden „Kunden“ sämtlich sofort „bedient“ werden können. Dies ist eine Problemstellung der Bedienungstheorie, einer wichtigen Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der vor allem Warteschlangenprobleme untersucht werden.

Aufgabe: 25.36.

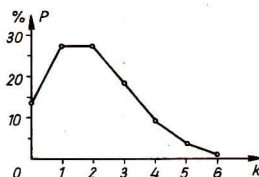


Bild 25.14

Exponentialverteilung

Häufig tritt in den Anwendungen als Zufallsgröße die Zeit auf. So ist z. B. die Lebensdauer eines Gerätes zufallsbedingt. Auch die Bedienungsdauer bei der Bedienung von Kunden im weitesten Sinne hängt von zufälligen Einflüssen ab. Es hat sich gezeigt, daß solche Zufallsgrößen im allgemeinen einer Exponentialverteilung genügen.

Definition

Die Zufallsgröße X genügt der Exponentialverteilung mit dem Parameter λ , wenn sie die Verteilungsfunktion

$$P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

(25.19)

besitzt.

Die Definition steht im Einklang mit der Erfahrung: Je länger ein Vorgang andauert, desto wahrscheinlicher ist seine Beendigung.

BEISPIEL

25.20. Die Lebensdauer eines Gerätes sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda = 1/500 \text{ h}^{-1}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Gerät nach $t = 0; 500; 1000; 1500 \text{ h}$ ausgefallen ist? Die Verteilungsfunktion ist zu zeichnen.

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Lebensdauer T kleiner als die Zeit t ist, beträgt

$$P(T < t) = 1 - e^{-\frac{t}{500}},$$

wobei t in Stunden (h) zu messen ist. Man erhält die Wertetabelle

t	P
0	0
500	0,632
1000	0,865
1500	0,950

Eine grafische Darstellung zeigt Bild 25.15. Nach einer Arbeitszeit von 1000 h beträgt die Ausfallwahrscheinlichkeit 86,4%. Je länger das Gerät arbeitet, desto wahrscheinlicher ist sein Ausfall. Die Ausfallwahrscheinlichkeit nimmt zu, die Zuverlässigkeit des Gerätes nimmt ab.

Aufgabe: 25.37.

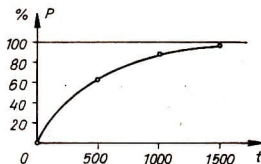


Bild 25.15

Kontrollfragen

- 25.7. Was ist der Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen?
- 25.8. Wie ist das arithmetische Mittel, die Varianz und die Standardabweichung definiert?
- 25.9. Unter welchen Bedingungen spricht man von einer Häufigkeitsverteilung?
- 25.10. Wie wird die relative Häufigkeit eines Merkmalswertes berechnet?
- 25.11. Was versteht man unter dem Mittelwert und dem Streuungsmaß der Trefferzahl? Wie werden diese Größen berechnet?
- 25.12. Wie lautet die Funktionsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung?
- 25.13. Wozu dient das Fehlerintegral? Wie rechnet man praktisch damit?
- 25.14. Unter welchen Bedingungen wird das Poissonsche Verteilungsgesetz angewendet?
- 25.15. Was versteht man unter einer Verteilungsfunktion? Welche Gleichung hat die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung?

25.3. Mathematische Statistik

25.3.0. Vorbemerkung

Die mathematische Statistik untersucht die Zufallsgrößen der beschreibenden Statistik mit den Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der praktisch wichtigste Teil der mathematischen Statistik befaßt sich mit der Prüfung statistischer Maß-

zahlen. Gegeben ist ein für das betrachtete Problem charakteristischer **Normalzustand**. In einer speziellen Meßreihe wird jedoch ein anderer Zustand festgestellt. Dann lautet die **Grundfrage**:

Ist die Abweichung vom Normalzustand nur zufällig oder wesentlich?

Zur objektiven Beantwortung dieser Frage werden verschiedene neue Begriffe eingeführt.

25.3.1. Prüfverteilung

Als einfachstes Beispiel einer Prüfverteilung soll die Normalverteilung näher untersucht werden. Wenn die Zufallsgröße X normalverteilt ist mit dem Mittelwert μ und dem Streuungsmaß σ , so gilt nach Gl. (25.17) mit $u = u_0$

$$P(|X - \mu| < u_0 \cdot \sigma) = \Phi(u_0)$$

oder

$$P\left(\frac{|X - \mu|}{\sigma} < u_0\right) = \Phi(u_0).$$

Die Zufallsgröße

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

soll eine **Prüfgröße** heißen. Dann folgt

$$P(|U| < u_0) = \Phi(u_0)$$

Das Fehlerintegral wird jetzt eine **Prüfverteilung** genannt. Nach Definition der Intervallwahrscheinlichkeit und des Fehlerintegrals folgt weiter

$$\int_{-u_0}^{+u_0} p(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_0}^{+u_0} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

und damit

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Es ergibt sich also der

Satz

Es sei die Zufallsgröße X normalverteilt mit dem Mittelwert μ und dem Streuungsmaß σ . Dann ist die Prüfgröße

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

normalverteilt mit dem Mittelwert 0 und dem Streuungsmaß 1.

Die Prüfverteilung

$$P = \Phi(u_0)$$

gibt an, wie die Intervallwahrscheinlichkeit

$$P = P(|u| < u_0)$$

von der zugelassenen Abweichung u_0 abhängt (Bild 25.16). Umgekehrt läßt sich aber auch die Abweichung

$$u_0 = u(P)$$

als Funktion der gewünschten Intervallwahrscheinlichkeit P betrachten. Dann wird P die **statistische Sicherheit** und u_0 die zugehörige **Sicherheitsgrenze** genannt. Wenn in dieser Weise die statistische Sicherheit als unabhängige Variable benutzt wird, so ergibt sich als Tabelle einfach die Wertetafel der **Umkehrfunktion des Fehlerintegrals**, also auszugsweise

P	u_0
0	0
0,683	1
0,955	2
0,997	3

Besonders häufig werden die folgenden Wertepaare benutzt:

P	u_0
0,95	1,960
0,99	2,576
0,999	3,291

In der mathematischen Statistik wird anstelle der statistischen Sicherheit P meist das **Signifikanzniveau** α verwendet. Das ist die Wahrscheinlichkeit des Intervalls $|U| > u_0$ (Bild 25.17). Offenbar gilt $\alpha = 1 - P$. Anstelle der statistischen Sicherheit 95% kann also das Signifikanzniveau 5% benutzt werden. Für die Wertetafel der Sicherheitsgrenzen bedeutet dies nur eine Umschreibung der linken Spalte.

α	u_0
0,05	1,960
0,01	2,576
0,001	3,291

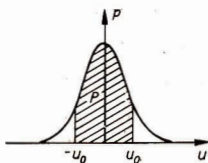


Bild 25.16

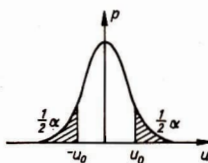


Bild 25.17

Definition

Wenn für die Prüfgröße U die Sicherheitsgrenze u_0 in Abhängigkeit vom Signifikanzniveau α tabelliert wird, dann spricht man von der **Prüfverteilung** der Prüfgröße U .

BEISPIEL

- 25.21. Die Qualität einer Serienproduktion sei durch eine normalverteilte Kenngröße mit dem Mittelwert $\mu = 34$ und dem Streuungsmaß $\sigma = 2$ bestimmt. Bei Prüfung eines Gerätes ergab sich für die Kenngröße der Wert $x = 39$. Darf man annehmen, daß dieses Gerät mit einem anderen Verfahren gefertigt wurde?

Lösung: Für die Prüfgröße ergibt sich bei dem betrachteten Gerät der Wert

$$u = \frac{39 - 34}{2} = 2,5.$$

Nach Annahme einer statistischen Sicherheit von 95% bzw. eines Signifikanzniveaus von 5% beträgt die zugehörige Sicherheitsgrenze

$$u(5\%) = 1,96.$$

Der berechnete Wert der Prüfgröße ist größer als die Sicherheitsgrenze:

$$|u| > u(5\%).$$

Eine solche Abweichung vom Mittelwert 0 der Prüfgröße ist recht unwahrscheinlich. Sie dürfte nur sehr selten durch Zufall entstanden sein. Unter Vorbehalt eines Irrtums von 5% ist es eine **wesentliche** (signifikante) Abweichung. Das betrachtete Gerät ist **nicht** mit dem üblichen Verfahren gefertigt.

25.3.2. Sicherheitsgrenze

Die im vorigen Abschnitt eingeführten Begriffe können prinzipiell auf alle statistischen Maßzahlen angewandt werden, mit denen ein gewisser Normalzustand beurteilt werden soll. Besonders einfach liegen die Dinge beim arithmetischen Mittel. Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ ist eine Stichprobenfunktion, mit der man den Mittelwert μ der Grundgesamtheit möglichst genau zu schätzen trachtet. Im allgemeinen wird der Wert x vom Mittelwert μ abweichen. Es soll nun geprüft werden, ob x von μ nur zufällig oder aber wesentlich abweicht.

Es erhebt sich die Frage, welche Abweichungen noch als zufällig, welche aber schon als wesentlich angesehen werden sollen. Große Abweichungen sind „ziemlich unwahrscheinlich“, eine große Abweichung ist mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit zu erwarten. Es erscheint vernünftig, die „Grenze des Zufälligen“ dadurch abzustecken, daß man die Wahrscheinlichkeit desjenigen Intervalls angibt, das man nicht mehr als zufällig betrachten will.

Definition

Das **Signifikanzniveau** α ist die Wahrscheinlichkeit desjenigen Intervalls, das nicht mehr als zufällig betrachtet werden soll.

Es sei U die vorliegende Prüfgröße. Dann ist das Signifikanzniveau bestimmt durch

$$\alpha = P(|U| > u_0).$$

Der Wert u_0 heißt die zugehörige Sicherheitsgrenze.

Definition

Die **Sicherheitsgrenze** ist derjenige Wert der Prüfgröße, der die Grenzen des zufälligen Intervalls bestimmt.

Für alle Prüfgrößen der mathematischen Statistik liegt die Sicherheitsgrenze

$$u_0 = u(\alpha)$$

in Abhängigkeit vom Signifikanzniveau α tabelliert vor. In Abschnitt 25.3.1. wurde gezeigt, wie die Tabelle der Normalverteilung (Tabelle 25.1) sinngemäß als Prüfverteilung benutzt werden kann. Die nächste wichtige Prüfverteilung ist die **t-Ver-**

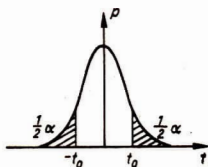


Bild 25.18

teilung (Student-Verteilung). Die Wahrscheinlichkeitsdichte der entsprechenden Prüfgröße t ist bestimmt durch die Gleichung

$$p = c_m \cdot \left(1 + \frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}$$

Dabei ist m ein Parameter, der als **Freiheitsgrad** bezeichnet wird. Eine hier weniger interessierende Konstante stellt c_m dar. Die grafische Darstellung ergibt eine Glockenkurve, die aber etwas flacher verläuft als die grafische Darstellung der Normalverteilung (Bild 25.18). Die Sicherheitsgrenzen

$$t_0 = t(\alpha, m)$$

sind aus der Tabelle 25.2 zu entnehmen.

25.3.3. Prüfhypothese

Es sei zu prüfen, ob das arithmetische Mittel $\bar{x}$ einer Stichprobe wesentlich vom Mittelwert μ der Grundgesamtheit abweicht. Dazu wird zunächst angenommen, daß die betrachtete Stichprobe tatsächlich aus der ins Auge gefaßten Grundgesamtheit stammt. Diese Annahme ist die Prüfhypothese, die in ähnlicher Form bei jedem Prüfverfahren auftritt.

Daraus folgt, daß die entsprechende Prüfgröße der zugehörigen Prüfverteilung genügen muß.

Nun wird aus der vorliegenden Stichprobe der Wert u_0 der für das Prüfverfahren erforderlichen Prüfgröße U berechnet. Ferner wird ein für das praktische Problem angemessen erscheinendes Signifikanzniveau α ausgewählt. Damit läßt sich die zu-

gehörige Sicherheitsgrenze

$$u(\alpha) = u_0$$

aus der Tabelle der Prüfverteilung ablesen. Es können nun zwei Fälle auftreten:

1. Fall $|u| < u(\alpha)$.

Der Stichprobenwert ist dem Betrage nach kleiner als die Sicherheitsgrenze. Er liegt in dem Intervall, das noch als zufällig betrachtet werden soll. Der Stichprobenwert weicht nur zufällig von Null ab. Dies steht im Einklang mit der Annahme, daß die Stichprobe aus der zugrunde gelegten Grundgesamtheit stammt, also im Einklang mit der Prüfhypothese. Es ist **nicht feststellbar**, ob die Stichprobe aus einer anderen Grundgesamtheit stammt.

2. Fall $|u| > u(\alpha)$.

Der Stichprobenwert liegt in dem Intervall, das nicht mehr als zufällig betrachtet werden soll. Er weicht wesentlich von Null ab. Dies steht im Widerspruch zur Prüfhypothese. Also kann die Hypothese nicht aufrechterhalten werden. Die Hypothese

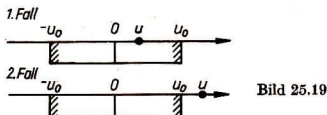


Bild 25.19

ist falsch. Richtig ist vielmehr, daß die Stichprobe aus einer anderen Grundgesamtheit stammt. Diese Schlußfolgerungen sind nicht sicher, da die Grenze des Zufallsintervalls mit Hilfe von einer Wahrscheinlichkeit α , dem Signifikanzniveau, festgelegt wurde. Unter Vorbehalt einer Irrtumswahrscheinlichkeit α stammt die Stichprobe aus einer anderen Grundgesamtheit (Bild 25.19). Damit ergibt sich für die Prüfung statistischer Maßzahlen folgender grundlegender

Satz

Ein Unterschied zwischen zwei gleichartigen statistischen Maßzahlen gilt als **signifikant** (wesentlich), wenn für die entsprechende Prüfgröße die Ungleichung

$$|u| > u(\alpha)$$

erfüllt ist.

Damit kann der Ablauf eines statistischen Prüfverfahrens grundsätzlich durch folgendes Programm skizziert werden:

1. Stichprobenwert u der Prüfgröße berechnen,
2. Signifikanzniveau α sinnvoll annähern, bzw. wählen,
3. Sicherheitsgrenze u_0 aus der Tabelle der Prüfverteilung ablesen,
4. Vergleich zwischen u und u_0 durchführen.

Die Abweichung ist wesentlich, wenn die Sicherheitsgrenze überschritten wird.

25.3.1. Prüfung von Mittelwerten

Es handelt sich nun darum, für die praktisch wichtigsten Prüfverfahren jeweils Prüfgröße und Prüfverteilung anzugeben. Die Beweise dieser Sätze gehen über den Rahmen dieser Einführung hinaus. Die meisten Prüfverfahren setzen normalverteilte Grundgesamtheiten voraus. In den Anwendungen ist diese Bedingung im allgemeinen erfüllt. In Zweifelsfällen sind genauere Untersuchungen erforderlich, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Abweichung eines arithmetischen Mittels

Zunächst soll die zufällige Abweichung des arithmetischen Mittels einer Stichprobe vom Mittelwert der Grundgesamtheit betrachtet werden. Dafür gilt der

Satz

Es sei die Grundgesamtheit normalverteilt mit dem Mittelwert μ und dem Streuungsmaß σ , und es werde eine Stichprobe vom Umfang n mit dem Mittelwert $\bar{x}$ und dem Streuungsmaß s herausgegriffen. Dann genügt die Größe

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_T} \quad \text{mit} \quad s_T = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (25.20)$$

der t -Verteilung mit dem Freiheitsgrad $m = n - 1$.

Unterschied zweier arithmetischer Mittel

Besonders wichtig für die Praxis ist der Fall, daß der Unterschied zwischen den beiden arithmetischen Mittelwerten von zwei Stichproben geprüft werden soll.

Satz

Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mögen zwei voneinander unabhängige Stichproben vom Umfang n_1 bzw. n_2 mit dem Mittelwert $\bar{x}_1$ bzw. $\bar{x}_2$ und dem Streuungsmaß s_1 bzw. s_2 herausgegriffen werden. Dann genügt die Größe

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \quad (25.21)$$

mit

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2} \quad (25.22)$$

der t -Verteilung mit dem Freiheitsgrad $m = n_1 + n_2 - 2$.

Bei hinreichend großem Stichprobenumfang kann zur Prüfung von Mittelwerten die Normalverteilung benutzt werden. Dies gilt etwa für $n > 200$.

BEISPIELE

- 25.22. Die Lebensdauer einer Elektronenröhre ist bei einem langjährig benutzten Produktionsverfahren 525 Stunden. Bei einem neuen Verfahren ergab sich für 5 Röhren der Mittelwert $\bar{x} = 550$ h und das Streuungsmaß $s = 22,8$ h. Darf man unter Vorbehalt eines Irrtums von 5% annehmen, daß das neue Verfahren das bessere sei?

Lösung: Als hinreichend genau bekannter Mittelwert der Grundgesamtheit wird der Wert $\mu = 525$ angesehen. Es ist also die Abweichung des Mittelwertes $\bar{x}$ der Stichprobe vom Mittelwert μ der Grundgesamtheit zu prüfen. Aus der Stichprobe folgt

$$s_{\bar{x}} = \frac{22,8}{\sqrt{5}} = \underline{10,2}$$

$$t = \frac{550 - 525}{10,2} = \underline{2,45}$$

Für die Sicherheitsgrenze ergibt sich aus Tabelle 25.2

$$t(5\%; 4) = \underline{2,776}$$

Es ist also

$$|t| < t(5\%; 4).$$

Nach 25.3.3. ist daher die Abweichung als **zufällig** anzusehen. Es liegt **keine** wesentliche Abweichung vor. Es ist **nicht feststellbar**, ob das neue Verfahren das bessere ist (Bild 25.20).

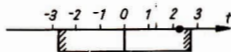


Bild 25.20

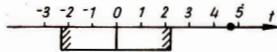


Bild 25.21

- 25.23. Gegenüber dem Beispiel 25.22. wurde der Stichprobenumfang auf 20 erhöht. Mittelwert und Streuungsmaß haben sich nur wenig verändert; es ergab sich $\bar{x} = 549$ und $s = 23,1$. Darf man jetzt schließen, daß das neue Verfahren das bessere ist?

Lösung:

Prüfstreuung

$$s_{\bar{x}} = \frac{23,1}{\sqrt{20}} = \underline{5,17}$$

Prüfgröße

$$t = \frac{549 - 525}{5,17} = \underline{4,64}$$

Sicherheitsgrenze

$$t(5\%; 19) = \underline{2,093}$$

Vergleich

$$|t| > t(5\%; 19).$$

Nach 25.3.3. ist daher die Abweichung als **wesentlich** zu betrachten. Das neue Verfahren ist **besser** als das alte. Durch die Erhöhung des Stichprobenumfangs ist ein deutlicherer Einblick in die zufälligen Schwankungen des neuen Verfahrens ermöglicht worden, und dies wirkt sich im Testverfahren aus (Bild 25.21).

25.3.5. Konfidenzintervall

Wie gezeigt, ist die Abweichung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ einer Stichprobe vom Mittelwert μ der Grundgesamtheit dann als zufällig anzusehen, wenn die Ungleichung

$$\frac{|\bar{x} - \mu|}{s_{\bar{x}}} < t(\alpha, m)$$

gilt. Dabei ist α das gewählte Signifikanzniveau und $m = n - 1$ der Freiheitsgrad. Aus dieser Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \mu| &< t \cdot s_{\bar{x}} \\ -t \cdot s_{\bar{x}} &< \bar{x} - \mu < t \cdot s_{\bar{x}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich einerseits

$$\mu < \bar{x} + t \cdot s_{\bar{x}}$$

und andererseits

$$\bar{x} - t \cdot s_{\bar{x}} < \mu,$$

also zusammengefaßt

$$\bar{x} - t \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t \cdot s_{\bar{x}}.$$

Die Größe

$$a = t \cdot s_{\bar{x}} = \frac{t \cdot s}{\sqrt{n}}$$

soll der statistische Größtfehler genannt werden. Es gilt also der

Satz

Nach Annahme eines Signifikanzniveaus α ist der statistische Größtfehler des Mittelwertes bestimmt durch die Gleichung

$$a = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t(\alpha, m)$$

Damit ist das **Konfidenzintervall**

$$\bar{x} - a < \mu < \bar{x} + a$$

festgelegt, das unter Vorbehalt einer Irrtumswahrscheinlichkeit α den Mittelwert μ überdeckt.

BEISPIEL

25.24. Bei der Messung einer Schwingungszeit (in Sekunden) erhielt man aus 5 Meßwerten das arithmetische Mittel $\bar{x} = 2,936$ und die Standardabweichung der Einzelmessungen $s = 0,0759$. Es soll das Konfidenzintervall des Mittelwertes für ein Signifikanzniveau von 5% bestimmt werden.

Lösung: Statistischer Größtfehler

$$\alpha = \frac{0,0759}{\sqrt{5}} \cdot 2,776 = 0,094$$

Konfidenzgrenzen

$$\mu_1 = 2,936 - 0,094 = 2,842$$

$$\mu_2 = 2,936 + 0,094 = 3,030$$

Bei einem Signifikanzniveau von 5% wird das Konfidenzintervall

$$2,842 < \mu < 3,030$$

den Mittelwert μ der Grundgesamtheit überdecken (Bild 25.22). Weniger präzise ausgedrückt, ist das arithmetische Mittel mit absolutem und relativem statistischem Größtfehler darstellbar in der Form

$$\bar{x} = \underline{2,936} \quad \alpha = \underline{0,094} \quad \frac{\alpha}{\bar{x}} = \underline{3,2\%}$$

Der elementare Größtfehler zu diesem Beispiel wurde bereits in Abschnitt „Fehlerrechnung“ bestimmt. (Bsp. 22.7.)

Aufgaben: 25.38. bis 25.42.

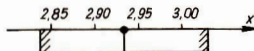


Bild 25.22

Kontrollfragen

- 25.16. Wie lautet die Grundfrage für die Anwendung statistischer Prüfverfahren?
 25.17. Welcher Programmablauf kann zur Prüfung statistischer Maßzahlen benutzt werden? Welche Fragen sind nacheinander abzuarbeiten?
 25.18. Welche Prüfgröße ist zur Prüfung der Abweichung eines Mittelwertes vom Mittelwert der Grundgesamtheit zu berechnen?
 25.19. Wie lautet die Prüfgröße, wenn die Differenz der Mittelwerte zweier Stichproben geprüft werden soll?
 25.20. Was versteht man unter einem Konfidenzintervall?

Tabelle 25.1

Normalverteilung

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,0	0,000	1,1	0,729	2,2	0,972
0,1	0,080	1,2	0,770	2,3	0,979
0,2	0,159	1,3	0,806	2,4	0,984
0,3	0,236	1,4	0,838	2,5	0,988
0,4	0,311	1,5	0,866	2,6	0,991
0,5	0,383	1,6	0,890	2,7	0,993
0,6	0,451	1,7	0,911	2,8	0,995
0,7	0,516	1,8	0,928	2,9	0,996
0,8	0,576	1,9	0,943	3,0	0,997
0,9	0,632	2,0	0,955	4,0	0,99994
1,0	0,683	2,1	0,964	5,0	0,9999994

Tabelle 25.2

t-Verteilung (Bild 25.18)

m	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,001$
1	12,706	63,657	636,619
2	4,303	9,925	31,598
3	3,182	5,841	12,941
4	2,776	4,604	8,610
5	2,571	4,032	6,859
6	2,447	3,707	5,959
7	2,365	3,499	5,405
8	2,306	3,355	5,041
9	2,262	3,250	4,781
10	2,228	3,169	4,587
11	2,201	3,106	4,437
12	2,179	3,055	4,318
13	2,160	3,012	4,221
14	2,145	2,977	4,140
15	2,131	2,947	4,073
16	2,120	2,921	4,015
17	2,110	2,898	3,965
18	2,101	2,878	3,922
19	2,093	2,861	3,883
20	2,086	2,845	3,850
21	2,080	2,831	3,819
22	2,074	2,819	3,792
23	2,069	2,807	3,767
24	2,064	2,797	3,745
25	2,060	2,787	3,725
26	2,056	2,779	3,707
27	2,052	2,771	3,690
28	2,048	2,763	3,674
29	2,045	2,756	3,659
30	2,042	2,750	3,646
35	2,030	2,724	3,592
40	2,021	2,704	3,551
45	2,014	2,689	3,521
50	2,008	2,678	3,496
60	2,000	2,660	3,460
70	1,994	2,648	3,435
80	1,990	2,638	3,416
90	1,987	2,631	3,402
100	1,984	2,626	3,390
120	1,980	2,617	3,373
140	1,977	2,611	3,361
160	1,975	2,607	3,352
180	1,973	2,603	3,346
200	1,972	2,601	3,340
300	1,968	2,592	3,324
400	1,966	2,588	3,315
500	1,965	2,586	3,310
1000	1,962	2,581	3,300
∞	1,960	2,576	3,291

25.4. Aufgaben

- 25.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatspiel
- a) ein As,
 - b) eine grüne Karte (Pik-Karte),
 - c) eine Bildkarte zu ziehen?
- 25.2. In einem Loskasten befinden sich 573 Lose, darunter 134 Treffer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Niete zu ziehen?
- 25.3. Bei der Serienproduktion eines Werkstücks waren von 2350 kontrollierten Stücken 38 Stück nicht normgerecht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein normgerechtes Werkstück? Wie groß ist die Ausschußwahrscheinlichkeit dieses Produktionsverfahrens?

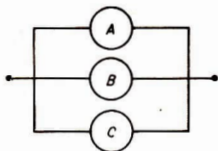


Bild 25.23

- 25.4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel folgende Augenzahlen zu werfen:
- a) 1 oder 6,
 - b) weder 3 noch 4,
 - c) mindestens 4,
 - d) höchstens 5,
 - e) weniger als 3,
 - f) mehr als 2?
- 25.5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfeln
- a) zweimal eine 6,
 - b) eine gerade und eine ungerade Zahl zu werfen?
- 25.6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze in zwei Würfeln mindestens einmal „Bild“ zu werfen?
- 25.7. In obenstehender elektrischer Schaltung (Bild 25.23) können die Bauelemente unabhängig voneinander ausfallen mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = 0,55; \quad P(B) = 0,61; \quad P(C) = 0,52.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gesamte Schaltung ausfällt?

- 25.8. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem Telefonanruf die technische Einrichtung A_i störungsfrei arbeitet, heißt die Erfolgsrate $r_i = P(A_i)$. Wie groß ist die Gesamterfolgsrate für einen Anruf, der die technischen Einrichtungen A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 mit den Erfolgsraten $r_1 = 83\%$, $r_2 = 96\%$, $r_3 = 89\%$, $r_4 = 78\%$ und $r_5 = 94\%$ durchlaufen muß?
- 25.9. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sei p . Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür,
- a) daß A nicht eintritt,
 - b) daß A in n Versuchen nicht eintritt,
 - c) daß A in n Versuchen mindestens einmal eintritt?

- 25.10. Bei einer gewissen Form der Datenübertragung werden je 8 Zeichen zu einem Block zusammengefaßt. Die Wahrscheinlichkeit eines falsch übertragenen Zeichens betrage 2%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Block mindestens ein falsches Zeichen vorhanden ist?
- 25.11. Die Wahrscheinlichkeit, ein Flugzeug mit einem Gewehrshuß abzuschießen, sei unter gewissen Bedingungen gleich 0,004. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, das Flugzeug bei gleichzeitigem Schießen aus 250 Gewehren abzuschießen?
- 25.12. Es soll die Wahrscheinlichkeit der Trefferzahl k unter n angestellten Versuchen berechnet werden, wenn die Grundwahrscheinlichkeit p bekannt ist:
- a) $p = \frac{1}{2}$ $n = 7$ $k = 5$
- b) $p = \frac{2}{3}$ $n = 6$ $k = 2$
- c) $p = 0,27$ $n = 8$ $k = 3$
- 25.13. Die Trefferwahrscheinlichkeit eines Geschützes sei $p = 0,80$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 5 Schüssen genau 3 Treffer erzielt werden?
- 25.14. Die Wahrscheinlichkeit für die vollständige Ausheilung einer Krankheit sei 70%. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von 6 erkrankten Personen genau 4 geheilt werden.
- 25.15. Die Ausschußwahrscheinlichkeit eines Produktes sei 12%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Posten von 20 Stück weniger als 3 Ausschußstücke zu finden?
- 25.16. Aus den fünf Elementen 1, 2, 3, 4, 5 sind diejenigen Permutationen zu bilden, die mit 24 beginnen.
- 25.17. Wie viele Permutationen lassen sich (ohne Wiederholung) aus den 10 Ziffern des Dezimalsystems bilden?
- 25.18. Welche sinnvollen Wörter lassen sich aus den folgenden Buchstaben bilden, wenn jeweils alle gegebenen Buchstaben nur einmal benutzt werden sollen? Wieviel Prozent aller möglichen Zusammenstellungen sind das?
- a) a s u
b) b e i l
- 25.19. Es sollen alle Variationen von 5 Elementen zu je 2 Stück aufgeschrieben werden.
- 25.20. Wieviel Variationen können aus 6 Elementen zu je 4 Stück gebildet werden?
- 25.21. Fünf Seminargruppen sollen auf 8 Räume verteilt werden. Wieviel Möglichkeiten gibt es?
- 25.22. In Digitalrechenmaschinen werden die Dezimalziffern 0 bis 9 als duale Tetraden verschlüsselt. Aus den Elementen 0 und 1 sind alle Variationen zu je 4 Stück zu bilden und der Reihe nach den Dezimalziffern 0 bis 9 zuzuordnen. Wie viele Variationen bleiben als „Pseudotetraden“ übrig?
- 25.23. Es sind alle Kombinationen von 6 Elementen zu je 4 Stück aufzuschreiben.
- 25.24. Wie viele Kombinationen lassen sich aus 8 Elementen zu je 3 Stück bilden?
- 25.25. Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei den folgenden Spielen aus n Elementen jeweils k Stück auszuwählen?
- a) Sechsendsechzig $n = 24$ $k = 6$
b) Skat $n = 32$ $k = 10$
c) Rommé $n = 106$ $k = 12$
d) Zahlenlotto $n = 90$ $k = 5$

- 25.26. Bei der Qualitätskontrolle wurden Stichproben von je 20 Stück untersucht. In h Stichproben wurden x qualitätsgerechte Stücke festgestellt.

x	h	x	h
9	1	15	15
10	3	16	8
11	5	17	5
12	9	18	2
13	13	19	0
14	16	20	0

Es ist die absolute und die relative Häufigkeitsverteilung der qualitätsgerechten Stücke als Polygon zu zeichnen!

- 25.27. In einem Verwaltungsbereich wurden x Personen je Haushalt mit der Häufigkeit h gezählt.

x	h
1	1277409
2	1877063
3	1463696
4	874626
5	397257
6	171507
7	73767
8	54892

Man veranschauliche die relative Häufigkeitsverteilung der Haushaltgrößen als Polygon!

- 25.28. Bei einer radioaktiven Strahlung wurden in h Zeitintervallen von je 7,5 s jeweils x Teilchen gezählt.

x	h	x	h
0	57	6	273
1	203	7	139
2	383	8	45
3	525	9	27
4	532	10	16
5	408		

Es ist die relative Häufigkeitsverteilung der Teilchenzahl als Polygon zu zeichnen!

- 25.29. Aus der Produktion von Speziallampen wurde eine Stichprobe auf die Lebensdauer untersucht. Man erhielt folgende Werte (in Stunden):

153	64	401	368	299	342
288	161	311	212	313	266
238	360	227	348	412	433
420	189	270	503	201	307
395	123	77	194	327	271

Es soll eine Klasseneinteilung mit den Klassenmitten 100; 200; 300; 400 und 500 vorgenommen werden, und es ist die relative Häufigkeitsverteilung als Polygon zu zeichnen!

- 25.30. In einem technischen System ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einem Tag alle Geräte normal arbeiten, gleich 70%.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von 7 Tagen die Geräte an $k = 0; 1; 2; \dots; 7$ Tagen normal arbeiten?
- Man zeichne die Verteilungskurve der Trefferzahl!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Geräte an weniger als 4 Tagen und
- an mindestens 5 Tagen störungsfrei arbeiten?

- 25.31. Die Körpergröße von Männern ist eine normalverteilte Zufallsgröße, die unter gewissen Bedingungen den Mittelwert $\mu = 1,70$ m und das Streuungsmaß $\sigma = 6,53$ cm besitzt. Wieviel Prozent der Herrenkonfektion muß unter diesen Voraussetzungen für Männer über 1,80 m und unter 1,60 m bereitgestellt werden?
- 25.32. Bei der Produktion von Lagerkugeln wurde festgestellt, daß der Durchmesser normalverteilt ist mit dem Mittelwert $\mu = 8,000$ mm und dem Streuungsmaß $\sigma = 0,006$ mm. Wieviel Prozent der Produktion sind Ausschuß, wenn eine Abweichung von höchstens 0,01 mm zulässig ist?
- 25.33. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine normalverteilte Zufallsgröße um weniger als 3σ von ihrem Mittelwert abweicht?
- 25.34. Bei der Produktion von Wellen ergab sich, daß die Abweichung des Durchmessers vom Nennmaß eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert $\mu = -0,052$ mm und dem Streuungsmaß $\sigma = 0,043$ mm ist. Zwischen welchen Intervallgrenzen wird die Abweichung mit 90% Wahrscheinlichkeit schwanken? Das gefundene Intervall ist grafisch darzustellen.
- 25.35. Der Schwefelgehalt einer gewissen Stahlsorte ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 0,022\%$ und dem Streuungsmaß $\sigma = 0,004\%$. In welchem Bereich liegt der Schwefelgehalt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%?
- 25.36. Von einer radioaktiven Substanz wurden im Mittel 1,55 Zerfallsakte je Sekunde gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Sekunde 0; 1; 2; ...; 7 Zerfallsakte eintreten?
Man zeichne die Wahrscheinlichkeitsverteilung!
- 25.37. In einem Betrieb sind 1430 gleichartige Geräte mit der Ausfallrate $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ eingesetzt, deren Lebensdauer exponentialverteilt ist. Mit wieviel ausgefallenen Geräten ist nach 7000 Arbeitsstunden durchschnittlich zu rechnen?
- 25.38. Eine Ladung Kupfererz soll nach Angabe des Absenders einen Durchschnittsgehalt von 2,5% Kupfer besitzen. Der Empfänger stellt bei 7 Proben folgende Gehalte fest:
1,96 2,06 2,18 2,22 2,62 2,28 1,84
Liegt danach mit 95% Wahrscheinlichkeit der Verdacht nahe, daß die Angabe des Absenders falsch ist?
- 25.39. Zur experimentellen Prüfung des elektrischen Wärmeäquivalents $\mu = 4,18$ Ws/cal wurden 5 Versuche angestellt, aus denen sich der Mittelwert $\bar{x} = 4,32$ Ws/cal und das Streuungsmaß $s = 0,08$ Ws/cal ergab. Kann man daraus, unter Vorbehalt eines Irrtums von 1%, schließen, daß systematische Fehler gemacht worden sind?
- 25.40. Aus der Serienproduktion eines Werkstücks sind zur Prüfung der Masse zwei Stichproben mit folgenden Vergleichswerten herausgegriffen worden:
 $n_1 = 10$ $\bar{x}_1 = 3524 \text{ mg}$ $s_1 = 46,9 \text{ mg}$
 $n_2 = 10$ $\bar{x}_2 = 3479 \text{ mg}$ $s_2 = 58,9 \text{ mg}$
Darf man mit 99% Sicherheit annehmen, daß wesentliche Änderungen im Produktionsablauf eingetreten sind?
- 25.41. Bei der Messung einer Kapazität fand ein Experimentator in 5 Versuchen den Mittelwert $\bar{x}_1 = 22,9$ nF und das Streuungsmaß $s_1 = 0,3$ nF, ein anderer in 4 Versuchen den Mittelwert $\bar{x}_2 = 21,8$ nF und das Streuungsmaß $s_2 = 0,04$ nF. Kann man mit 95% Sicherheit behaupten, daß wesentliche meßtechnische Fehler aufgetreten sind?
- 25.42. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 7$ erhielt man das arithmetische Mittel $\bar{x} = 2,27$ und die mittlere Abweichung $s = 0,252$. Man berechne das Konfidenzintervall des Mittelwertes für ein Signifikanzniveau von 5% bzw. 1%.

- 25.43. In einer Verkaufsstelle befinden sich 1000 Glühlampen, von denen 700 Stück im Betrieb B_1 , der Rest im Betrieb B_2 hergestellt wurden. Normgerecht (im Sinne einer gewissen normalen Lebensdauer) seien vom Betrieb B_1 581 Stück, vom Betrieb B_2 189 Stück. Man berechne für eine beliebig herausgegriffene Glühlampe die Wahrscheinlichkeit dafür,
- a) daß die Glühlampe im Betrieb B_1 hergestellt wurde,
 - b) daß die Glühlampe im Betrieb B_1 hergestellt wurde und normgerecht ist,
 - c) daß die Glühlampe im Betrieb B_1 hergestellt wurde, unter der Bedingung, daß sie normgerecht ist,
 - d) daß die Glühlampe normgerecht ist, unter der Bedingung, daß sie im Betrieb B_1 hergestellt wurde.
- 25.44. Wie oft muß man mit einem Würfel werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens einmal eine Sechs erhält?
- 25.45. Wie viele Stellen sind für die Morsezeichen höchstens erforderlich, um alle 26 Buchstaben der lateinischen Schrift durch die Elemente „Punkt“ und „Strich“ darzustellen? Wie viele von diesen Zusammenstellungen bis einschließlich k Stellen werden nicht benötigt?
- 25.46. Wieviel Autonummern für polizeiliche Kennzeichen können aus 2 Buchstaben und 4 Ziffern gebildet werden?
- 25.47. In der kinetischen Gastheorie wird die Verteilung der Gasmoleküle auf die Stellen des Raumes untersucht. Es seien 4 Moleküle auf 2 gleichgroße Kästen zu verteilen. Welche Fälle sind möglich? Man stelle eine Tabelle mit folgenden Spalten auf:
- a) Die Moleküle 1, 2, 3, 4 befinden sich in den Kästen mit untenstehenden Nummern.
 - b) In den Kästen 1, 2 befindet sich untenstehende Anzahl von Molekülen.
 - c) Die einzelnen Belegungen („Verteilungen“) der Spalte b) sind zu einer Häufigkeitstabelle zusammenzufassen.
- 25.48. Aus organisatorischen Gründen sei bei einem Schachturnier die Anzahl der Spiele auf 150 beschränkt. Wieviel Personen können höchstens teilnehmen, wenn jeder gegen jeden spielen soll?
- 25.49. Wieviel Möglichkeiten gibt es, bei einem Wurf mit zwei Würfeln die Augensumme s zu werfen? Man stelle eine Wertetafel für $2 \leq s \leq 12$ auf und zeichne die Häufigkeitsverteilung!
- 25.50. Aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 sollen alle Variationen mit Wiederholung zu je 3 Stück gebildet werden. Dann ist jeweils die Summe der drei Zahlen zu berechnen und die Häufigkeitsverteilung zu zeichnen.
- 25.51. Aus einem Skatspiel werden alle Karten mit den Werten 7, 8 und 9 heraussortiert. Aus diesen 12 Karten sollen 4 Stück willkürlich ausgewählt werden. Welcher Summenwert ist am häufigsten zu erwarten? Man berechne die Häufigkeitsverteilung!
- 25.52. Aus der Häufigkeitsverteilung der qualitätsgerechten Stücke (s. Aufgabe 25.26.) ist die theoretische Ausschußquote (näherungsweise mittels $\bar{x} \approx \mu$) zu berechnen. Ferner sind die Werte der relativen Häufigkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten der theoretischen Binomialverteilung zu vergleichen.
- 25.53. In einer Geburtenstatistik wurden unter 2612246 Geburten 300 Drillingsgeburten registriert. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß unter 30000 Geburten genau 5 Drillingsgeburten auftreten?

25.54. Aus der Geburtenstatistik wurde ermittelt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Mädchen-geburt $p = 48\%$ beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in Familien, in denen 5 Kinder geboren werden,

- a) genau 2 Mädchen,
- b) höchstens 3 Mädchen,
- c) mindestens 4 Mädchen

unter den 5 Kindern sind?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

- d) alle Kinder Mädchen,
- e) alle Kinder Jungen sind?

12.20. 24,8 a

12.21. 0,18 s

12.22. a) 0,5 b) -7 c) 8

12.23. a) hebbare Unstetigkeit bei $x = +2$: $g^+ = g^- = 1/4$

b) überall stetig

c) hebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $g^+ = g^- = 1$ 12.24. Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$:a) $+\infty$ b) $\mp \infty$ c) 0

12.25. a) 0, 3, 8, 15, 24

b) 1,9, 1,99, 1,999, 1,9999, 1,99999

c) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}$ d) $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}$ e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$

f) 0, 1, 0, 1, 0

12.26. a) monoton wachsend

b) monoton wachsend

c) monoton wachsend

d) monoton wachsend

e) monoton fallend

f) nicht monoton

12.27. a) $x_k = -3,8 + 0,8k$, $n = 16$ b) $x_k = 18,2 - 1,5k$, $n = 12$ c) $x_k = 2,0 + 2,2k$, $n = 13$ 12.28. a) $x_k = 14,5 - 2,5k$ b) $x_k = 7,06 - 0,36k$ c) $-24 + \frac{4}{3}k$

12.29. a) -3, 0 b) 5,2, 72 c) 6, 80 d) 9, 112,5 e) 32, 435

12.30. 494550

12.31. a) $d^* = x_{2k+1} - x_{2k-1} = 2d$ b) $d^* = x_{4k+3} - x_{4k-1} = 4d$ 12.32. $y_k = mx_1 + b + (k-1)md$, $y_1 = mx_1 + b$, $d^* = md$ 12.33. $d = y_{k+1} - y_k = m$ 12.34. a) $x_1 = -37$, $x_{22} = 47$ b) $x_1 = 20$, $s_{25} = -250$ c) $x_1 = -10$, $s_{28} = 319$ d) $d = 0,4$, $n = 43$ 12.35. a) $2/3$ b) 1,2 c) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d) $-x^2$ e) $\frac{2}{3}yx^{-1}$ 12.36. $y_k = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 12.37. $y_k = \lg x_1 + (k-1) \cdot \lg q$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 12.38. a) $q = 2/3$, $n = 7$ b) $q = 1/2$, $n = 8$ 12.39. a) $x_5 = 43,2$, $s_8 = 630,5$ b) $x_5 = -243$, $s_8 = 472,875$

12.40. a) arithm. Folge b) 47 phon

c) 50 phon (53 phon) d) $25 \cdot 10^{-4} \text{ W/cm}^2$ 12.41. a) 1,5 bar b) 0,02 bar c) $p_k = (1 + 0,02k) \text{ bar}$ 12.42. a) $a_0 = 1189 \text{ mm}$, $b_0 = 841 \text{ mm}$ b) $a_k = 10^3 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ $b_k = 10^3 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ c) $a_{10} = 37 \text{ mm}$, $b_{10} = 26 \text{ mm}$

- 12.43. a) 52500 cm b) 0,195 mm
- 12.44. 120, 151, 190, 239, 301, 379, 478, 601, 757, 953, 1200
- 12.45. $l = 96,5$ m
- 12.46. 6,4%
- 12.47. a) 6326,60 Mark b) 7697,27 Mark c) in 20,1 Jahren
- 12.48. a) 106,3% b) 6,3%
c) in Mill. M: 0,788; 0,843; 0,897; 0,953; 1,014
- 12.49. a) unbeschränkt: $-\infty < x_n < +\infty$
b) beschränkt: $-1/2 \leq x_n \leq 1$
c) beschränkt: $0 \leq x_n < 0,1$
d) n. u. beschränkt: $1 \leq x_n < \infty$
e) n. u. beschränkt: $0 \leq x_n < \infty$
f) n. u. beschränkt: $0,25 \leq x_n < \infty$
- 12.50. a) $(-0,001; 0,001)$ b) 0; 0,007
- 12.51. a) $c < 0$ b) $|c| < 1$
- 12.52. a) 1 b) 5 c) 0 d) 0
e) $-1/5$ f) 1 g) 0 h) 2
- 12.53. a) unbestimmt divergent: $g = \pm \infty$ b) konvergent: $g = 0$
c) konvergent: $g = 1/10$ d) bestimmt divergent: $g = \infty$
e) bestimmt divergent: $g = \infty$ f) bestimmt divergent: $g = \infty$
- 12.54. $0,021 \text{ a}^{-1}$
- 12.55. 22,8 min
- 12.56. a) $t = RC = 12,69 \text{ s}$ b) $\frac{t}{RC} = 15$; $t = 34,4 \text{ s}$
- 12.57. a) U/R ; $e^{-\frac{R}{L}t}$ ist für wachsende t -Werte eine Nullfolge.
b) $t = L/R$
- 12.58. a) $1/2$ b) -7 c) 8 d) 0 e) 12 f) $4a^3$
- 12.59. a) nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $g^+ = +1$, $g^- = -1$
b) hebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $g^+ = g^- = 1/2$
nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 2$: $g^+ = +\infty$, $g^- = -\infty$
c) nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $g^+ = +\infty$, $g^- = 0$
d) nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 1$: $g = +\infty$
e) nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $g^+ = 0$, $g^- = 1$
- 12.60. Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$:
a) $-\infty$ b) 0 c) 1 d) $\pm \infty$ e) 0 f) $\pm \infty$
g) $\mp \infty$ h) -1
- 13.1. a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = 2x$ c) $f'(x) = 0,4x - 2$
- 13.2. a) $y' = 3x^2$ b) $y' = 8x^7$ c) $a' = 12s^{11}$
d) $y' = -4/x^5$ e) $k' = -6/r^7$ f) $w' = -9/u^{10}$
g) $v' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ h) $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ i) $s' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{r^4}}$

- 13.3. a) $\tan \tau = 2$ b) $\tan \tau = n$ c) $\tan \tau = -2$
 d) $\tan \tau = -n$
- 13.4. $S_1(0; 0): \alpha = 45^\circ$ $S_2(1; 1): \alpha = 18,4^\circ$
- 13.5. a) $y' = 8x^2 - 3$ b) $y' = 72x^5 - 3x^3 + 2,5x^2$
 c) $y' = 3ax^2 + 6a^2x + a^3$ d) $y' = 3x^3 + 2ax - a^2$
- 13.6. a) $y' = \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$ b) $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x}}$ c) $y' = \frac{1}{6\sqrt{x^5}}$
- 13.7. $153,4^\circ$
- 13.8. $-3; -1$
- 13.9. $\alpha = 92,4^\circ$
- 13.10. $x_1 = 0,2, \quad x_2 = 2$
- 13.11. $S\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + q\right)$
- 13.12. $y = 0,5x^3 - 1,5x^2 - 3x + 4$
- 13.13. $y = -0,6x^2 + 1,8x + 6,2$
- 13.14. a) $v = v_0 - gt; 5,2 \text{ m/s}, -4,6 \text{ m/s}, -14,4 \text{ m/s}$
 b) $v > 0$ aufwärts, $v < 0$ abwärts
 c) Bei $s_{\max}$ ist $v = 0, s_{\max} = 11,48 \text{ m}$
 d) $v_e = -v_0 = -15 \text{ m/s}$
- 13.15. a) $dy = (-4x + 6) dx$ b) $dw = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ c) $dr = 2at dt$
 d) $ds = gt dt$ e) $dW = mv dv$ f) $dA = \frac{1}{2} g dh$
- 13.16. a) $0,063 \text{ m}^2$ b) $0,825 \text{ mA}$
- 13.17. a) $f'(x) = 3x^2$ b) $f'(x) = 6x$
 c) $f'(x) = -6x^2 + 5$ d) $s'(t) = gt$
 e) $v'(t) = g$ f) $r'(u) = 2,4u$
- 13.18. a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $r'(t) = \frac{3}{2} \sqrt{t}$
- 13.19. $S_1(0; 0), \alpha_1 = 45^\circ$ $S_2(1; 1), \alpha_2 = 26,6^\circ$ $S_3(-1; -1), \alpha_3 = 26,6^\circ$
- 13.20. a) $y - 4 = 4(x - 2)$ b) $y + 0,5 = -0,25(x + 2)$
 c) $y + 0,125 = 0,75(x + 0,5)$ d) $y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{27}\left(x - \frac{9}{4}\right)$
- 13.21. a) $y' = -1,2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1,2$ b) $y' = 18t - 6$
 c) $y' = \frac{-2x - 2}{x^4}$ d) $y' = 2 + \frac{x - 2}{x^3}$
 e) $y' = -3x - \frac{x - 4}{4x^3}$ f) $y' = \frac{11}{4} x^4 \sqrt{x^5}$
 g) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}}$ h) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

13.22. vgl. Bild L 1.

13.23. a) $76,8^\circ$

b) $30,2^\circ$

13.24. 1; -1

13.25. a) $\alpha_1 = 125,8^\circ, \alpha_2 = 54,2^\circ$

b) $\alpha_1 = 85,2^\circ, \alpha_2 = 0^\circ$

c) $\alpha_1 = 50,2^\circ, \alpha_2 = 149,0^\circ, \alpha_3 = 50,2^\circ$

13.26. $k = -0,1$

13.27. a) $P_1(0; 0), \alpha_1 = 90^\circ;$

$P_2(1; 1), \alpha_2 = 45^\circ$

b) $P_1(-2; 3), \alpha_1 = 36,9^\circ$

$P_2(1; 1,5), \alpha_2 = 71,6^\circ$

c) $P(-1; -3), \alpha = 20,2^\circ$

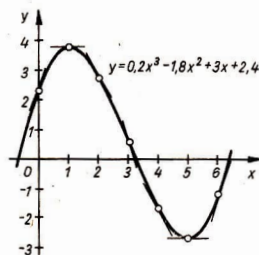


Bild L 1

13.28. a) $x_1 = -2, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$

b) $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

13.29. a) $y = -x - 1,5$

b) $y - 3 = -4(x + 0,5)$

13.30. $S\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{B^2}{4A} + C\right)$

13.31. $\frac{b}{3a} < 0$

13.32. $y = -0,25x^3 - x^2 + 2$

13.33. a) $y = -\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{3}{2}x + 2$

b) $x_3 = -2$

13.34. $w = -0,5u + 3,75$

13.35. $a^2 < 3b$

13.36. a) $9,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3$

b) 10,10

13.37. 14,1 m/s; 3,5 s

13.38. a) $v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha - g \cdot t$

b) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2}$

c) $v_e = v_0$

d) $y_h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

13.39. Aus $v = 0$ folgt $t_e = 4,19$ s, $s = 36,2$ m

14.1. a) $y' = (6x - 2)(2x + 1) + 2(3x^2 - 2x)$

b) $y' = (10x^4 + 3)(1 - x^2) - 2x(2x^5 + 3x)$

c) $y' = -(1 + 2x)(1 + bx) + b(a - x - x^2)$

d) $y' = (x^2 - 1)(1 - 2x) + 2x^2(1 - 2x) - 2x(x^2 - 1)$

14.2. $(x^5)' = 5x^4$; $(x^3)' \cdot (x^2)' = 3x^2 \cdot 2x = 6x^3$; $5x^4 \neq 6x^3$

14.3. a) $y' = \frac{1}{(1+x)^2}$

b) $y' = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$

c) $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$

d) $y' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$

14.4. a) $y' = 30(3x + 1)^9$

b) $y' = -6(a - x)^5$

c) $y' = 5(8x^3 - 6x)(2x^4 - 3x^2 + 1)^4$

14.5. a) $y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 1}}$

b) $y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

c) $y' = \frac{1 - x^2}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + x^3}}$

14.6. a) $w' = -\frac{1}{2\sqrt{1-u}}$

b) $s' = \frac{1+t}{(1-t)^3}$

c) $z' = \frac{8s}{(1-s^2)^5}$

14.7. a) $0; 0^\circ$

b) $-0,895; 138,2^\circ$

14.8. a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y' = \frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - x^2}}$

14.9. a) $y' = \sin x + x \cos x$

b) $u' = 4 \cos(2t - 1)$

c) $y' = \frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos x}}$

14.10. a) $y' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

b) $y' = -\frac{2 \cot x}{\sin^2 x}$

c) $y' = \frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}$

14.11. a) 45°

b) 45°

14.12. a) $y' = 1 + \ln x$

b) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

c) $y' = -\frac{2x}{1 - x^2}$

d) $y' = \frac{x}{1 + x^2}$

e) $y' = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$

14.13. a) $y' = (1+x)e^x$

b) $y' = -2t e^{1-t^2}$

c) $y' = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

d) $y' = -\sin t e^{\cos t}$

e) $y' = \cot x$

$$14.14. y' = e^{-x}(x^2 - 2x - 1), x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$14.15. a) y' = x^2(1 + \ln x)$$

$$b) y' = -\frac{e \ln 2}{x^2} \sqrt[3]{2}$$

$$14.16. a) y' = 2x \arctan x + 1$$

$$b) y' = \frac{-x}{|x| \sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x < 0 \end{cases}$$

$$14.17. a) y' = (6x^2 - 3)(x^2 - 1) + 2x(2x^2 - 3x + 4)$$

$$b) y' = -3x^2(1 - x^2) - 2x(2 - x^2)$$

$$c) y' = -2x(b - x^2) - 3x^2(a - x^2)$$

$$d) y' = 2x(1 + ax)(1 - bx) + ax^2(1 - bx) - bx^2(1 + ax)$$

$$14.18. a) y' = 3(1 + x)^2$$

$$b) y' = 2x \sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$c) y' = -6x^2 \sqrt[3]{x} + \frac{1 - 2x^3}{3 \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1 - 20x^3}{3 \sqrt[3]{x^2}} \quad d) y' = -\frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -1$$

$$14.19. a) y' = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(1 - x^2)^2}$$

$$b) y' = \frac{-8x^3 + 6x^2 + 10}{(1 - 2x)^2}$$

$$c) y' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$d) y' = \frac{8x^3}{(1 - 2x^4)^2}$$

$$e) y' = \frac{-3}{(x + 1)^4}$$

$$f) y' = \frac{-x^4 - 5x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 2)^2}$$

$$g) y' = \frac{-2x^4 - 6x^2}{(1 - x^4)^2}$$

$$h) y' = \frac{b^2x^2 - 2abx - ab}{(a + bx^2)^2}$$

$$14.20. a) y' = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$$

$$b) y' = \frac{1 + 4x}{(1 - 2x)^4}$$

$$c) y' = \frac{-9x^2 + 8x + 3}{(1 + x^2)^3}$$

$$d) y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$e) y' = -\frac{1}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$14.21. a) r' = \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$b) x' = \frac{1}{2\sqrt{1 + u^2}}$$

$$c) v' = \frac{4u}{(u^2 + 1)^2}$$

$$14.22. a) P_1(-1; -0,5), P_2(3; -1,5)$$

$$b) P_1(0; 0), P_2\left(\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), P_3\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$c) P\left(-0,5; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$14.23. a) y' = \frac{2x - x^2}{(1 - x)^2}; \quad y + 4,5 = -0,75(x - 3) \quad \text{bzw.} \quad y = -0,75x - 2,25$$

$$b) y' = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}; \quad y - 0,8 = -0,16(x + 2) \quad \text{bzw.} \quad y = -0,16x + 0,48$$

$$c) y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad y - 1,25 = 0,6(x - 0,75) \quad \text{bzw.} \quad y = 0,6x + 0,8$$

$$d) y' = -\frac{4x}{\sqrt{9 - 4x^2}}; \quad y - 1,8 = \frac{8}{3}(x - 1,2) \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{8}{3}x - 1,4$$

$$14.24. a) x = 2, \alpha = 18,80^\circ$$

$$b) x_1 = 1, \alpha_1 = 8,13^\circ; \quad x_2 = 2 + \sqrt{2}, \alpha_2 = 1,58^\circ; \quad x_3 = 2 - \sqrt{2}, \alpha_3 = 14,98^\circ$$

$$14.25. a) y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad b) y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$c) y' = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad d) y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

14.26. $f'(x) \cdot v(x) + f(x) \cdot v'(x) = u'(x)$. Durch Umstellen dieser Gleichung wird die bekannte Form der Ableitung eines Quotienten gewonnen.

$$14.27. qy^{q-1} \cdot y' = px^{p-1}, \quad y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$14.28. a) 1,643; 58,7^\circ \quad b) -0,906; 137,8^\circ$$

$$14.29. a) y' = \frac{3}{2y-4}; \quad y - 1 = -1,5(x + 1)$$

$$b) y' = -\frac{x-6}{y-5}; \quad y + 1 = -\frac{4}{3}(x + 2)$$

$$c) y' = -\frac{1}{2y}; \quad y - 1 = -0,5x$$

$$d) y' = \frac{x+1}{2-y}; \quad x_1 = -3: y = -x - 3; \quad x_2 = 1: y = x - 1$$

$$14.30. a) u = 2\pi r, \frac{du}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}, v_u = 2\pi v_r$$

$$b) A = \pi r^2, \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}, v_A = 2\pi r v_r$$

$$14.31. A = \frac{u^2}{4\pi}, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{u}{2\pi} \frac{du}{dt}, \quad v_A = 9 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$14.32. c^2 = a^2 + x^2, \quad \frac{dc}{dt} = \frac{x}{c} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad v_c = 2,4 \text{ cm/s}$$

$$14.33. y^2 = l^2 - x^2, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad v_y = 1,5 \text{ cm/s}$$

$$14.34. a) V = \frac{\pi}{27} h^3, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{9}{\pi h^2} \frac{dh}{dt}, \quad h = 9 \text{ cm}: v_h = 0,42 \text{ cm/s}$$

$$b) h(8 \text{ s}) = 9,38 \text{ cm}, v_h = 0,39 \text{ cm/s}$$

14.35. a) $y' = \sin^2 x - \cos^2 x - \sin x$

b) $s' = 6t \cos t - 3t^2 \sin t$

c) $y' = -\frac{1}{1 - \cos x}$

d) $y' = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$

e) $y' = 2 \frac{\cos^2 x + \sin x \cos x - x}{(\cos x + \sin x)^2}$

f) $y' = \frac{1 + \sin t}{\cos^2 t}$

14.36. a) $y' = 2^x \cdot \ln 2$

b) $y' = \frac{1 + e^x - x e^x}{(1 + e^x)^2}$

c) $u' = (2 + 4t^2) e^{t^2-1}$

14.37. a) $y' = (\sin x + x \cos x) e^{x \sin x}$

b) $w' = -2 e^{-t} (\sin t + \cos t)$

c) $y' = \frac{1}{x \ln x}$

d) $y' = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$

14.38. a) $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]$

b) $y' = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)}\right]$

c) $y' = x^{1-\cos x} \left(\sin x \ln x + \frac{1-\cos x}{x}\right)$

d) $y' = \frac{x-1-\ln x}{x^2}$

14.39. 45°

14.40. Aus $\frac{4x}{x^2+3} = 1$ folgt $x_1 = 1, x_2 = 3$.

$y' = \frac{-x^2+3}{x(x^2+3)}$; $y = 0,5x - 0,5$, $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

14.41. $x_0 - x_T = x_0 y_0$

14.42. a) $\alpha_1 = 71,6^\circ, \alpha_2 = 18,4^\circ$

b) $\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 9,8^\circ$

14.43. a) $P\left(\pi/3; \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$

b) $P(0,69; 1,28)$

c) $P(\ln 2; 2)$

d) $P(-1; -1/e)$

e) $P(\pi/2; 2e)$

f) $P\left(\pi/4; -\frac{1}{2} \ln 2\right)$

g) $P_1(3,15; -2,39) \quad P_2(0,32; -0,096)$

14.44. a) $P_0(4; 1), \alpha = 151,93^\circ$

b) $P_0(2; 3), \alpha = 70,56^\circ$

14.45. a) $x(t) = r \cos \omega t, \quad v_x = -\omega r \sin \omega t, \quad a_x = -\omega^2 r \cos \omega t$

$y(t) = r \sin \omega t, \quad v_y = \omega r \cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 r \sin \omega t$

b) $v_x = 0: t = \frac{1}{\omega} \cdot n\pi, \quad a_x = 0: t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$v_y = 0: t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad a_y = 0: t = \frac{1}{\omega} \cdot n\pi$

c) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r$

d) $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 r$. Wegen $a_x = -\omega^2 x$ und $a_y = -\omega^2 y$ ist die Bahnbeschleunigung zum Kreismittelpunkt gerichtet.

14.46. a) Ansatz: $e^{0.44x} = 2^n$, $\Delta x = 2.5n \ln 2$

b) Vgl. Bild L 2

c) $x_0 - x_T = 2.5$

d) $x_0 - x_T = 1/b$

14.47. a) Ansatz: $e^{-\frac{t}{\tau}} = 2^{-n}$, $t = n\tau \ln 2$

b) Vgl. Bild L 3

c) $x_N - x_0 = \tau/s = 4$

14.48. a) $y' = \arcsin 4x + \frac{4x}{\sqrt{1-16x^2}}$

b) $y' = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

c) $y' = \frac{1}{1+x^2}$

d) $y' = \arctan x$

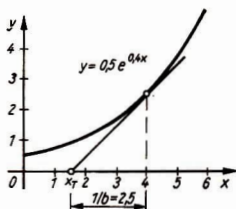


Bild L 2

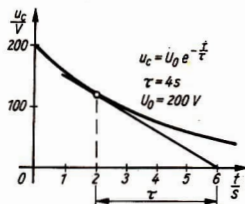


Bild L 3

15.1. a) $y' = 32x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

$y'' = 96x^2 + x$

b) $y' = \frac{2}{(1-x)^2}$

$y'' = \frac{4}{(1-x)^3}$

c) $y' = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$

$y'' = \frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$

d) $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}$

e) $y' = -\frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

$y'' = \frac{3x^2+2}{x^3 \sqrt{1+x^2}^3}$

f) $y' = -\sin 2x$

$y'' = -2 \cos 2x$

g) $y' = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

$y'' = \frac{\cot \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

* h) $y' = \frac{2x}{1+x^2}$

$y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

i) $y' = x^3(1+4 \ln x)$

$y'' = x^2(7+12 \ln x)$

k) $y' = e^x(\cos x - \sin x)$

$y'' = -2e^x \sin x$

l) $y' = e^{\sin x} \cos x$

$y'' = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$

m) $y' = 3a^{3x} \ln a$

$y'' = 9a^{3x} \ln^2 a$

- 15.2. a) $y' = 4x^3 + 4x$ $y'' = 12x^2 + 4$ $y''' = 24x$ $y^{(4)} = 24$
 b) $y' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ $y'' = -\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2}$ $y''' = -\frac{1}{8} \cos \frac{x}{2}$ $y^{(4)} = \frac{1}{16} \sin \frac{x}{2}$
 c) $y' = \frac{1}{x}$ $y'' = -\frac{1}{x^2}$ $y''' = \frac{2}{x^3}$ $y^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$
 d) $y' = \cos 2x - 2x \sin 2x$ $y'' = -4(\sin 2x + x \cos 2x)$
 $y''' = -4(3 \cos 2x - 2x \sin 2x)$ $y^{(4)} = 16(2 \sin 2x + x \cos 2x)$
- 15.3. a) $y^{(n)} = an!$ b) $y^{(n)} = e^x(x + n)$
 c) $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}}$ d) $y^{(n)} = 2^n \cdot e^{2x}$
- 15.4. a) $y = 2x^3 + 6x^2 - 12x - 16$ b) $y = x^3 - 5x^2 + x$
 c) $y = \frac{1}{12} x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3} x - \frac{3}{2}$
- 15.5. a) Bei $x_E = 2$ Minimum $y_E = 6$
 b) Bei $x_{E1} = -1$ Maximum $y_{E1} = 10$
 Bei $x_{E2} = 3$ Minimum $y_{E2} = -22$
 c) Bei $x_E = 2$ Minimum $y_E = -14$
 d) Bei $x_E = 1$ Maximum $y_E = \frac{1}{2}$
 e) Kein Extremwert
 f) Bei $x_E = -3$ ein Minimum $y_E = -27e^{-3} = -1,35$
 g) Bei $x_{E1} = \frac{\pi}{6}$ ein Maximum $y_{E1} = \frac{3}{4}$
 Bei $x_{E2} = \frac{\pi}{2}$ ein Minimum $y_{E2} = \frac{1}{2}$
 Bei $x_{E3} = \frac{5}{6} \pi$ ein Maximum $y_{E3} = \frac{3}{4}$
 Bei $x_{E4} = \frac{3}{2} \pi$ ein Minimum $y_{E4} = -\frac{3}{2}$
- 15.6. $y = 2x^3 - 6x^2 - 48x$ (vgl. Aufg. 15.4.)
- 15.7. a) $W(5; -10)$ b) $W_1(1; 2), W_2(3; 1)$
 c) $W\left(-2; -\frac{4}{3}\right)$, d) kein Wendepunkt,
 e) $W_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), W_2(3,39; -0,73), W_3\left(\frac{3}{2}\pi; 0\right), W_4(6,03; 0,73)$
 f) $W_1(0,71; 0,61), W_2(-0,71; 0,61)$
- 15.8. $W_1(0; 0), t_{W1}: y = 4x$
 $W_2(\sqrt{3}; \sqrt{3}), t_{W2}: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{3},$
 $W_3(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}), t_{W3}: y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{3}.$

- 15.9. $y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 3x + 5)$
- 15.10. a) $X = P$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $X_1(0; 0) = Y_1$, $X_2(3; 0)$, $H(1; 4)$, $T(3; 0)$,
 $W(2; 2)$, $f'(x_W) = -3$, $Y = P$
- b) $X = P$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $X_1(-1; 0)$, $X_2(1; 0)$, $X_3(3; 0)$, $Y_1(0; 3)$,
 $H(-0,15; 3,08)$, $T(2,15; -3,08)$, $W(1; 0)$, $f(x_W) = -4$, $Y = P$
- c) $X = P$, symmetr. zur y -Achse, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$, $X_1(-1; 0)$, $X_2(1; 0)$, $Y_1(0; 1)$,
 $H(0; 1)$, $T_1(-1; 0)$, $T_2(1; 0)$, $W_1(-0,58; 0,44)$, $W_2(0,58; 0,44)$,
 $f'(x_{W1}) = 1,54$, $f'(x_{W2}) = -1,54$, $Y = [0; \infty)$
- d) $X = P$, symmetr. zur y -Achse, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$, $X_1(-3,11; 0)$, $X_2(-1,58; 0)$,
 $X_3(1,58; 0)$, $X_4(3,11; 0)$, $Y_1(0; 1)$, $H(0; 1)$, $T_1(-2,45; -0,5)$, $T_2(2,45; -0,5)$,
 $W_1(-1,41; 0,17)$, $W_2(1,41; 0,17)$, $f'(x_{W1}) = 0,94$, $f'(x_{W2}) = -0,94$, $Y = [-0,5; \infty)$
- e) $X = P$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$, $X_1(-4; 0)$, $X_2(0; 0) = Y_1$, $T\left(-3; -\frac{27}{4}\right)$, $S(0; 0)$,
 $W(-2; -4)$, $f'(x_W) = 4$, $Y = \left[-\frac{27}{4}; \infty\right)$
- f) $X = P$, symmetr. zum Ursprung, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $X_1(-1,73; 0)$,
 $X_2(0; 0) = Y_1$, $X_3(1,73; 0)$, $H(-1,26; 4,61)$, $T(1,26; -4,61)$, $W_1(-0,78; 2,97)$,
 $W_2(0; 0)$, $W_3(0,78; -2,97)$, $f'(x_{W1}) = -4,8$, $f'(x_{W2}) = -3$, $f'(x_{W3}) = -4,8$, $Y = P$
- 15.11. a) $X = P \setminus \{1\}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$, $X_1(0; 0) = Y_1$, Pol bei $x = 1$, $T(0; 0)$, $W\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{9}\right)$,
 $f'(x_W) = -\frac{8}{27}$, Bild L 4, $Y = [0; \infty)$
- b) $X = P \setminus \{-2; 2\}$, symmetr. zur y -Achse, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$, $X_1(-3; 0)$, $X_2(3; 0)$, $Y_1(0; 2,25)$
Pole bei $x = -2$, $x = 2$, $T(0; 2,25)$, Bild L 5, $Y = P \setminus [1; 2,25)$
- c) $X = P$, symmetr. zur y -Achse, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$, $X_1(0; 0) = Y_1$, $T(0; 0)$, $W_1(-1,16; 0,5)$,
 $W_2(1,16; 0,5)$, $f'(x_{W1}) = -0,65$, $f'(x_{W2}) = 0,65$, Bild L 6, $Y = [0; 2)$
- d) $X = P \setminus \{0\}$, symmetr. zum Ursprung, Asymptote: $y = x$, Pol bei $x = 0$, $T(1; 2)$,
 $H(-1; -2)$, Bild L 7, $Y = P \setminus (-2; 2)$
- e) $X = P$, symmetr. zum Ursprung, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$, $X_1(0; 0) = Y_1$, $H\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $T\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$,
 $W_1(-1,73; -0,43)$, $W_2(0; 0)$, $W_3(1,73; 0,43)$, $f'(x_{W1}) = -\frac{1}{8}$, $f'(x_{W2}) = 1$,
 $f'(x_{W3}) = -\frac{1}{8}$, Bild L 8, $Y = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$
- f) $X = P \setminus \{-1\}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$, $X_1(0; 0) = Y_1$, Pol bei $x = -1$, $H\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $W\left(2; \frac{4}{9}\right)$,
 $f'(x_W) = -\frac{2}{27}$, Bild L 9, $Y = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

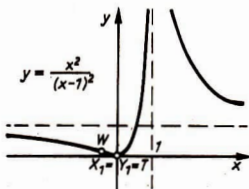


Bild L 4

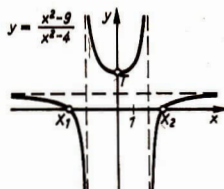


Bild L 5

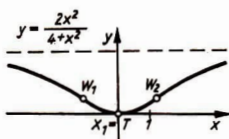


Bild L 6

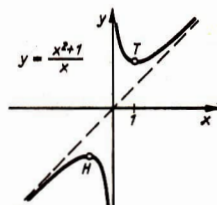


Bild L 7

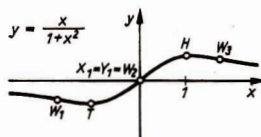


Bild L 8

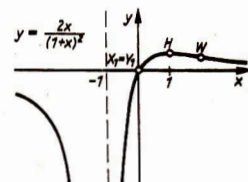


Bild L 9

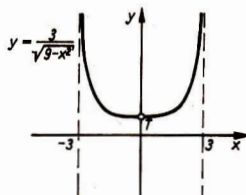


Bild L 10

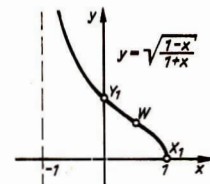


Bild L 11

- 15.12. a) $X = (-3; 3)$, symmetr. zur y -Achse, Pole bei $x = -3$, $x = 3$, $T(0; 1)$, Bild L 10, $Y = [1; \infty)$
- b) $X = (-1; 1)$, $X_1(1; 0)$, $Y_1(0; 1)$, Pol bei $x = -1$, $W(0,5; 0,58)$, $f'(x_W) = -0,77$, Bild L 11,
- c) $X = [0; \infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $X_1(0; 0) = Y_1$, $X_2(16; 0)$, $T(4; -4)$, Bild L 12, $Y = [-4; \infty)$
- 15.13. a) $X = P$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $X_1(0; 0) = Y_1$, $T(-1; -0,37)$, $W(-2; -0,27)$, $f'(x_W) = -0,135$, Bild L 13, $Y = [-0,37; \infty)$
- b) $X = P$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $X_1(0; 0) = Y_1$, $H(-2; 0,54)$, $T(0; 0)$, $W_1(-3,41; 0,39)$, $W_2(-0,59; 0,19)$, $f'(x_{W_1}) = 0,16$, $f'(x_{W_2}) = -0,46$, Bild L 14, $Y = [0; \infty)$
- c) $X = P \setminus \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, Pol bei $x = 0$, $T(2; 1,85)$, Bild L 15, $Y = (0; \infty)$
- d) $X = P$, Symmetrie zur y -Achse, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$, $H(0; 1)$, $W_1(-1; 0,61)$, $W_2(1; 0,61)$, $f'(x_{W_1}) = 0,61$, $f'(x_{W_2}) = -0,61$, Bild L 16, $Y = (0; 1]$
- e) $X = (0; \infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $X_1(1; 0)$, $H(2,72; 0,37)$, $W(4,48; 0,34)$, $f'(x_W) = -0,025$, Bild L 17, $Y = (-\infty; 0,37)$
- f) $X = P$, Periode 2π , Beschränkung auf $\bar{X} = [0; 2\pi)$: $X_1(1,57; 0)$, $X_2(4,71; 0)$, $Y_1(0; 1)$, $H(0,52; 1,30)$, $T(2,62; -1,30)$, $S(4,71; 0)$, $W_1(1,57; 0)$, $W_2(3,39; -0,73)$, $W_3(6,03; 0,73)$, $f'(x_{W_1}) = -2$, $f'(x_{W_2}) = 1,12$, $f'(x_{W_3}) = 1,12$, Bild L 18, $Y = [-1,30; 1,30]$
- g) $\lim_{t \rightarrow \infty} u = 0$, $H\left(\frac{1}{a}; \frac{c}{ae}\right)$, $W\left(\frac{2}{a}; \frac{2c}{ae^2}\right)$, $f'(t_W) = -\frac{c}{e^2}$, $Y = \left[0, \frac{c}{ae}\right)$
- 15.14. a) $U = 2\left(a + \frac{A}{a}\right) = f(a)$, $a_E = b_E = \sqrt{A}$, das Rechteck ist ein Quadrat
- b) $A = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = f(a)$, $a_E = b_E = \frac{U}{4}$, das Rechteck ist ein Quadrat
- 15.15. a) $U = 2(a + \sqrt{4r^2 - a^2}) = f(a)$, $a_E = b_E = \sqrt{2}r$, das Rechteck ist ein Quadrat
- b) $A = a\sqrt{4r^2 - a^2} = f(a)$, $a_E = b_E = \sqrt{2}r$, das Rechteck ist ein Quadrat
- 15.16. $A = \sqrt{2Rh^3 - h^4} = f(h)$, h ist die Dreieckshöhe, $h_E = \frac{3}{2}R$, $A_E = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$
- 15.17. $A = \frac{1}{2}(bs - b^2)\sin\alpha = f(b)$, $b_E = c_E = \frac{s}{2}$
- 15.18. $A = 3(4\sin\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha) = f(\alpha)$, $A' = 0 \Rightarrow 6\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 3 = 0$. $2\alpha_E = 126,7^\circ$
- 15.19. $A = \frac{1}{2}(Ur - 2r^2) = f(r)$, $r_E = \frac{U}{4}$, $\alpha_E = 114,6^\circ$
- 15.20. a) $U = a + 2b = a + \frac{2A}{a} = f(a)$; $a_E = \sqrt{2A} = 2b_E \approx 14,14 \text{ dm}$
- b) $U = a + 2b$; $A = \frac{h}{2}(a + c) = \frac{b}{4}(2a + b\sqrt{3})$; $U = \frac{2A}{b} + b\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = f(b)$;
 $b_E = 2\sqrt{\frac{A}{4 - \sqrt{3}}}$; $a_E = b_E(2 - \sqrt{3})$; $h_E = \frac{b_E}{2}$

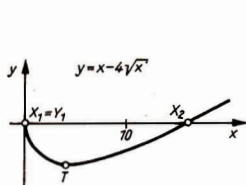


Bild L 12

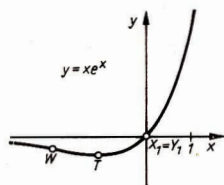


Bild L 13

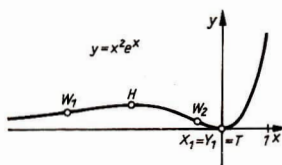


Bild L 14

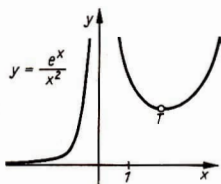


Bild L 15

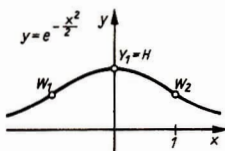


Bild L 16

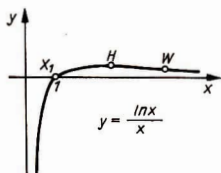


Bild L 17

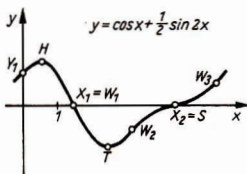


Bild L 18

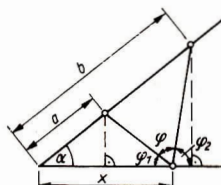


Bild L 19

$$c) A = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha; U = 2 \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}} = f(\alpha); \alpha_E = 90^\circ, a_E = \sqrt{2A}$$

$$d) U = \frac{2A}{a} + a \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = f(a); a_E = \frac{2\sqrt{2A}}{\sqrt{4+\pi}}$$

$$15.21. a) V = \pi \left(hR^2 - \frac{h^3}{4} \right) = f(h), h_E = \frac{2}{3} \sqrt{3}R, r_E = \frac{1}{3} \sqrt{6}R$$

$$b) M = \pi \sqrt{4R^2h^2 - h^4} = f(h), h_E = \sqrt{2}R = 2r_E$$

$$c) V = \frac{\pi}{3} (2Rh^2 - h^3) = f(h), h_E = \frac{4}{3} R, r_E = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$$

$$d) M = \pi \sqrt{4R^2h^2 - 2Rh^3} = f(h), h_E = \frac{4}{3} R, r_E = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$$

$$15.22. V = \pi \frac{H}{R} (Rr^2 - r^3) = f(r), r_E = \frac{2}{3} R, h_E = \frac{1}{3} H,$$

$$15.23. V = 4x^3 - 44x^2 + 96x = f(x), x_E = \frac{4}{3} \text{ dm}, V_E = \frac{1600}{27} \text{ dm}^3$$

$$15.24. A = \frac{4b}{a} \sqrt{a^2x^2 - x^4} = f(x) \text{ mit } x = \frac{c}{2}, c_E = \sqrt{2}a, d_E = \sqrt{2}b, A_E = 2ab$$

$$15.25. \sum_{i=1}^n v_i^2 = (x - l_1)^2 + \dots + (x - l_n)^2 = f(x), x_E = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$$

$$15.26. a) v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}; a_0 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad b) v_0 = \frac{4}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}; a_0 = -\frac{2}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$c) v_0 = -0,781 \frac{\text{m}}{\text{s}}; a_0 = -1,563 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$15.27. V = \frac{\delta^3}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2\alpha^4 - \alpha^6} = f(\alpha); \alpha_E = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \approx 294^\circ$$

$$15.28. \varphi = 180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_2), \text{ Bild L 19, } \tan \varphi_1 = \frac{b \sin \alpha}{x - b \cos \alpha}, \tan \varphi_2 = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha - x},$$

$$\tan \varphi = \frac{(a-b)x \sin \alpha}{ab + x^2 - (a+b)x \cos \alpha} = f(x), x_E = \sqrt{ab},$$

$$15.29. y = \sqrt{x} = f(x), x_E = e$$

$$15.30. t = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + y_A^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} = f(x), \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

(entspricht dem Brechungsgesetz)

15.31. Geschwindigkeit am unteren Ende des Brettes:

$$v = \sqrt{2gl \sin \alpha}.$$

$$\text{Waagerechte Komponente von } v: v_1 = \sqrt{2gl \sin \alpha \cos^2 \alpha} = f(\alpha)$$

$$\alpha_E = 35,3^\circ$$

$$15.32. s = \frac{g^2}{g-j} = f(g), b_E = g_E = 2f, e_E = 4f$$

$$15.33. W = \frac{1}{6} (d^2 b - b^3) = f(b), \quad b_E = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} d, \quad h_E = \frac{\sqrt[3]{6}}{3} d$$

$$15.34. \text{ a) } x_E = \frac{l}{2}, \quad M_{xE} = \frac{ql^2}{8} \quad \text{ b) } x_E = \frac{l}{3\sqrt{3}}, \quad M_{xE} = \frac{ql^2}{27} \sqrt{3}$$

$$\text{ c) } x_E = \frac{2l-a}{4}, \quad M_{xE} = \frac{F}{2l} \left(l - \frac{a}{2} \right)^2,$$

der gefährdete Querschnitt ist nicht die Balkenmitte

$$15.35. d^2 = (12 - 0,3t)^2 + (9 - 0,4t)^2 = f(t), \quad t_E = 72$$

$$15.36. I = NE \frac{n}{n^2 R_1 + N R_a} = f(n), \quad n_E = \sqrt{\frac{N R_a}{R_1}}, \quad m_E = \sqrt{\frac{N R_1}{R_a}}$$

$$15.37. K \text{ wird ein Maximum, wenn der Nenner und damit auch sein Quadrat ein Minimum wird.} \\ \omega_E = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$15.38. Q = 2 \sqrt{4r^2 a^2 - a^4} - a^2 = f(a), \quad a_E = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)} r,$$

$$b_E = \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)} r$$

15.39. Das Quadrat des Nenners muß ein Minimum werden. Zielfunktion:

$$z = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = f(\omega), \quad \omega_E = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

16.1. Siehe Bild L 20

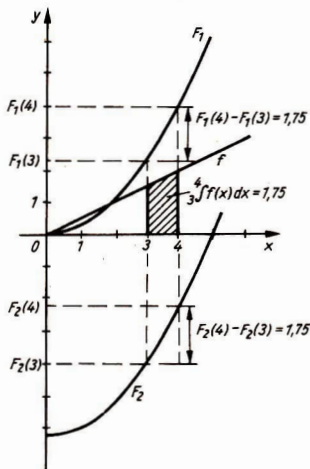


Bild L 20

- 16.2. a) $\frac{1}{13} x^{13} + C$ b) $\frac{1}{3} t^3 + C$ c) $-\frac{1}{x} + C$ d) $-\frac{1}{9s^9} + C$
 e) $\frac{3}{5} x^3 \sqrt{x^2} + C$ f) $\frac{4}{11} x^2 \sqrt[4]{x^3} + C$ g) $\frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C$ h) $2 \sqrt{x} + C$
 i) $4 \sqrt[4]{u} + C$
- 16.3. a) $x^3 + C$ b) $\sqrt{t} + C$ c) $\sqrt[3]{a} + C$
 d) $\frac{4}{5} x^5 - 12x - \frac{3}{x^2} + C$ e) $\frac{u^3}{3v^2} + C$ f) $-\frac{u^2}{v} + C$
- 16.4. a) $\left(56 \frac{1}{4}\right) - (16) = 40 \frac{1}{4}$ b) $f(u)$ ist ungerade: 0
 c) $f(r)$ ist gerade: $2 \int_0^3 f(r) dr = 151 \frac{1}{5}$ d) $\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{2}{9}$
 e) $\frac{3}{5} \left[t^3 \sqrt[3]{t^2}\right]_1^8 = 18 \frac{3}{5}$ f) $16(2\sqrt{2} - 1)$ g) 2
 h) 0 (s. Gl. (16.12)) i) $x^3 - 4x$ j) $x^3 + 3x^2 + 8x$
 k) $\frac{1}{7} (v^7 - 1)$
- 16.5. a) Grenzen: 0; 1; 4. $I_1 = -2 \frac{1}{3}$, $I_2 = 9$; $A = 11 \frac{1}{3}$
 b) Grenzen: -2; 1; 5; 7. $I_1 = 81$, $I_2 = -32$, $I_3 = 32$; $A = 145$
 c) Grenzen: -1; 0; 2; 3. $I_1 = -6 \frac{1}{4}$, $I_2 = 4$, $I_3 = -1 \frac{3}{4}$; $A = 12$
 d) Grenzen: $\frac{1}{3}$; 1. $I = \left(-81 \frac{1}{3}\right) - (-36) = -45 \frac{1}{3}$; $A = 45 \frac{1}{3}$
 e) Grenzen: 0; 4; 9. $I_1 = 2 \frac{2}{3}$, $I_2 = -2 \frac{2}{3}$; $A = 5 \frac{1}{3}$
 f) Grenzen: 4; 6; 8. $A = 8 \frac{4}{9} + 9 \frac{1}{3} = 17 \frac{7}{9}$
- 16.6. a) Grenzen: 0; 4; 6. $I_1 = -26 \frac{2}{3}$, $I_2 = 14 \frac{2}{3}$; $A = 41 \frac{1}{3}$
 b) Grenzen: 2; 4. $I = -34$; $A = 34$
- 16.7. Grenzen (Schnittstellen von f und g): -1; 2. $I = -9$; $A = 9$
- 16.8. a) $\varphi: x = 2y + 4$; $A = 8$
 b) $\varphi: x = \sqrt{y^3}$; $A = 12 \frac{4}{5}$
- 16.9. a) $\frac{81}{10} \pi \approx 25,4$ b) $8\pi \approx 25,1$ c) $2 \int_0^a y^2 dx = \frac{4}{3} \pi a b^2$
- 16.10. a) $\pi \cdot 17 \frac{1}{15} \approx 53,6$ b) $\pi [2 \sqrt{y}]_1^3 = 2\pi (\sqrt{3} - 1) \approx 4,60$

$$16.11. \pi \int_1^4 \left[4x - \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \right)^2 \right] dx = \pi \left[\left(1 \frac{5}{27} \right) - \left(-\frac{22}{27} \right) \right] = 2\pi \approx 6,28$$

$$16.12. \pi \left[\int_0^1 4y^4 dy + \int_1^3 (3-y)^2 dy \right] = \pi \cdot \frac{10}{3} \approx 10,47$$

$$16.13. a) \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C \quad b) \frac{m-\sqrt[3]{2}+1}{-\sqrt[3]{2}+1} + C = -\frac{m}{(\sqrt[3]{2}-1)m\sqrt[3]{2}} + C$$

$$c) \frac{3}{7} a^2 \sqrt[3]{a} + C \quad d) \int v^{-\frac{5}{3}} dv = -\frac{3}{2\sqrt[3]{v^2}} + C$$

$$16.14. a) \int_{-1}^2 (x^4 - 4x^3 + 4) dx = 15 \frac{3}{7} \quad b) \left(-\frac{1}{32} + \frac{16}{5} \sqrt[3]{2} \right) - \left(-\frac{6}{5} \right) \approx 5,69$$

$$c) (v^2 - 3v) - (u^2 - 3u) \quad d) 0 \text{ (s. Gl. (16.13))}$$

16.15. Die Grenzen sind die Nullstellen von f

$$a) \text{ Grenzen: } -3; 3. \quad 2 \int_0^3 f(x) dx = 259 \frac{1}{5}$$

b) Grenzen: $-1; 4$ (zweifach) (Schema von HORNER)

$$A = \left(42 \frac{2}{3} \right) - \left(-9 \frac{5}{12} \right) = 52 \frac{1}{12}$$

16.16. a) Grenzen: $0; 4; 9$ ($x = \frac{1}{4}$ ist nicht Lösung der Wurzelgleichung)

$$I_1 = 4, I_2 = -8 \frac{1}{2}; \quad A = 12 \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Grenzen: } 0; \pm 2. \quad f \text{ ist ungerade: } I = 2 \int_0^2 f(x) dx; \quad A = 8$$

$$16.17. \int_0^{x_3} f(x) dx = \int_{x_3}^2 f(x) dx; \quad x_3^4 - 8x_3^2 + 8 = 0; \quad x_3 = 1,082$$

$$16.18. \text{ Grenzen: } 3; 12. \quad \int \sqrt{3x} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{x} dx; \quad I = (0) - \left(-1 \frac{1}{2} \right); \quad A = 1 \frac{1}{2}$$

16.19. Schnitt mit der y -Achse ($x = 0$): 2.

$$\text{Grenzen: } 0; 2; 4. \quad I_1 = -1 \frac{1}{2}, \quad I_2 = 5 \frac{1}{2}; \quad A = 7$$

$$16.20. \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2, \quad y = 0,6 \cdot 2 = 1,2 \text{ für } x = \pm \sqrt{1,6}$$

$$A = 2 \left[\int_0^{\sqrt{1,6}} 1,2 dx + \int_{\sqrt{1,6}}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx \right] \approx 2(1,518 + 0,474) \text{ m}^2 \\ = 3,984 \text{ m}^2; \quad V \approx 956 \text{ m}^3$$

$$16.21. \int_2^a f(x) dx : \int_a^5 f(x) dx = 1 : 3;$$

$$\left(\frac{1}{4} a^4 - 3a^3 + 12a^2 - 20a + 12 \right) : \left(-\frac{1}{4} a^4 + 3a^3 - 12a^2 + 20a - 18,75 \right) = 1 : 3$$

$$a^4 - 12a^3 + 48a^2 - 80a + 54,75 = 0; a \approx 3,369$$

$$16.22. a) 2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^4 (4\sqrt{x} - \sqrt{x^3}) dx = 4 \frac{4}{15} \quad b) \frac{4}{3} \pi \approx 4,19$$

$$16.23. V_{x1} = \pi \int_0^8 [25 - (x-5)^2 - 2x] dx = \pi \cdot 85 \frac{1}{3} \approx 268$$

$$V_{x2} = \pi \int_0^8 2x dx + \pi \int_8^{10} [25 - (x-5)^2] dx = \pi \cdot 81 \frac{1}{3} \approx 256$$

$$16.24. a) \pi \int_1^8 \frac{256}{x^2} dx - \pi \int_4^8 (x-4) dx = 216\pi \approx 679$$

$$b) \pi \int_0^2 (y^2 + 4)^2 dy + \pi \int_2^{16} \frac{256}{y^2} dy - \pi \int_0^{16} 1^2 dy = \pi \cdot 155 \frac{11}{15} \approx 489$$

$$16.25. \pi \rho_G \left[\int_0^5 5y dy - \int_2^5 (5y - 10) dy \right] + \pi \rho_{Hg} \int_2^4 (5y - 10) dy$$

$$\approx 327 \text{ g} + 424 \text{ g} = 751 \text{ g}$$

$$17.1. a) \left[\frac{4}{3} x^3 - 3 \ln x - \frac{2}{3x^3} \right]_1^3 \approx 32,013$$

$$b) \int_1^2 \left(4u^4 - \frac{4}{u} + \frac{1}{u^6} \right) du = 25 - \frac{1}{160} - 4 \ln 2 \approx 22,221$$

$$c) e + \frac{1}{\ln 2} - 1 \approx 3,161$$

$$d) \frac{1}{3} e^u$$

$$e) [x^2 e^u]_0^1 = x^2(e - 1)$$

$$17.2. a) 1 - \frac{3}{2} \sqrt{2} \approx -1,121$$

$$b) 2[\tan x]_0^{30^\circ} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$$c) -\cos \alpha \cos \beta + C$$

$$d) \sin \alpha \sin \beta + C$$

$$e) x \sin \alpha \cos \beta + C$$

$$f) \approx 30^\circ - (-58,21^\circ) = 88,21^\circ \approx 1,54$$

$$g) 2[3 \arctan x]_0^{0,3} \approx 100,20^\circ \approx 1,75$$

$$17.3. 1 - e^{-2} + \sin(0,8 \text{ rad}) \approx 1,58$$

$$17.4. a) \frac{1}{21} (3x + 5)^7 + C$$

$$b) a = -1; -\left[\frac{1}{-3(4-u^3)} \right]_2^3 = \frac{7}{24}$$

$$c) a = \frac{1}{4}; \frac{8}{3} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{x}{4} \right)^3} \right]_0^1 \approx 1,06$$

$$d) -2 \cos \frac{1}{2} t + C$$

$$e) \frac{1}{3} [\sin(-45^\circ) - \sin(-60^\circ)] \approx 0,0530$$

$$f) -\sin(-\alpha) + C = \sin \alpha + C$$

$$g) \frac{3}{4} \ln |4t - 1| + C$$

$$h) a = -4; -\frac{1}{4} \ln |3 - 4u| + C$$

$$i) \frac{1}{3} [-\cot 3\varphi]_{10^\circ}^{20^\circ} = \frac{2}{9} \sqrt{3} \approx 0,385$$

$$j) \frac{1}{6} e^{6x-2} + C$$

$$k) -4 \left[e^{5 - \frac{1}{4}v} \right]_4^{20} \approx 214$$

$$l) a = -1; -e^{-v} + C$$

$$m) a = 4; \frac{1}{4} \arcsin 4x + C$$

$$n) \frac{1}{5} [\arctan 5r]_{-0,42}^{0,2} = \frac{1}{5} (\arctan 1 - \arctan(-2,1)) \approx 0,382$$

$$17.5. \quad a) \left[\frac{1}{2} e^x - e^{-x} \right]_{-2}^2 = e^2 - e^{-2} \approx 7,25 \quad b) \left[\frac{2}{5} (\sqrt[5]{2x-3})^5 \right]_2^{42} = 96,8$$

$$17.6. \quad a) 2 \cdot \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^2 \approx 49,2$$

$$b) V_x = \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} (\sqrt[3]{2x-3})^3 \right]_2^{42} \approx 763; V_y = \frac{\pi}{4} \int_1^3 (y^4 + 3)^2 dy \approx 1960$$

$$17.7. \quad a) -\frac{1}{6} \cos^6 x + C$$

$$b) z = 3 - \sin x; -\int_3^2 z^{\frac{1}{2}} dz \approx 1,578$$

$$c) z = \sin u; e^{\sin u} + C$$

$$d) z = 7e^t + 1; \frac{1}{7} \int_8^{64} z^{\frac{1}{3}} dz = 25 \frac{5}{7}$$

$$e) \frac{1}{4} (x^3 + 1) \sqrt[3]{x^3 + 1} + C$$

$$f) \frac{1}{3} \int_5^2 z^2 dz = -13$$

$$g) \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C$$

$$h) \ln |x^4 - 5x^2 + 3| + C$$

$$i) \ln |\cos x + \sin x| + C$$

$$j) \frac{1}{2} \ln |t^2 - 6t + 8| + C$$

$$k) \frac{1}{m} [\ln |mb + n| - \ln |ma + n|] = \frac{1}{m} \ln \left| \frac{mb + n}{ma + n} \right|$$

17.8. 1. Integral vgl. Beispiel 17.15.; 2. Integral nach Gl. (17.3) mit $z = 25 - x^2$:

$$[\arcsin z]_0^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{3} [\sqrt{z}]_{16}^9 \approx 0,977$$

$$17.9. \quad a) \text{Integraltafel 1.3.: } \frac{1}{y} \left[\frac{(3x-4)^4}{4} + \frac{4(3x-4)^3}{3} \right] + C$$

b) Integraltafel 1.9.:

$$\frac{1}{8} \left[\ln |2x + 1| + \frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{2(2x + 1)^2} \right]_0^1 \approx 0,0262$$

c) Integraltafel 2.2.:

$$\left(2\sqrt{7} - \frac{9}{2} \ln(4 + \sqrt{7})\right) - \left(-\frac{9}{2} \ln 3\right) \approx 1,71$$

d) Integraltafel 2.5.:

$$\ln(4 + \sqrt{12}) - \ln(3 + \sqrt{5}) = \ln \frac{4 + \sqrt{12}}{3 + \sqrt{5}} \approx 0,355$$

e) Integraltafel 2.3.:

$$\frac{1}{2} (t+2) \sqrt{(t+2)^2 + 4} + 2 \ln(t+2 + \sqrt{(t+2)^2 + 4}) + C$$

17.10. a) Integraltafel 3.4.:

$$\left[\frac{1}{4} (2t + \sin 2t \cos 2t) \right]_{-90^\circ = -\frac{\pi}{2}}^{90^\circ = \frac{\pi}{6}} \approx 1,155$$

b) Integraltafel 3.7., 3.2.: $-\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C$ c) Integraltafel 4.3.: $-\frac{1}{29} e^{-2x} (2 \sin 5x + 5 \cos 5x) + C$

d) Integraltafel 4.2.:

$$\left[e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \right]_0^2 = \frac{1}{4} (5e^4 - 1) \approx 68,0$$

$$17.11. \quad 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi ab$$

$$17.12. \quad a) \left[\ln v + 2v + \frac{1}{2} v^2 \right]_9 \approx -43,31$$

$$b) \frac{1}{2} [\sin u]_{-45^\circ}^{180^\circ} = \frac{1}{4} \sqrt{2} \quad c) [-\cos t]_{-34,38^\circ}^{22,92^\circ} \approx -0,0957$$

17.13. a) Grenzen: 0; 2π . $A = 4\pi$ b) Schnitstelle: $\frac{5}{6} \pi$; $2,423 + 0,308 = 2,731$

$$17.14. \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} + 1 \right) = 1$$

$$17.15. \quad a) z = 3 - x; \int \left(-3z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \right) dz = \sqrt{3-x} \left[-2(3-x) + \frac{2}{5} (3-x)^2 \right] + C$$

$$b) z = 3x + 1; \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{z} \left[\left(\frac{z-1}{3} \right)^2 - 4 \right] dz = \frac{1}{27} \int_1^2 \left(z - 2 - \frac{35}{z} \right) dz \approx -0,917$$

$$c) 4 - 9x^2 = 4 \left[1 - \left(\frac{3x}{2} \right)^2 \right]; \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C$$

$$d) 5 + 4r^2 = 5 \left[1 + \left(\frac{2r}{\sqrt{5}} \right)^2 \right]; \approx \frac{\sqrt{5}}{10} (53,30^\circ - 41,81^\circ) \approx 0,0448$$

17.16. Grenzen: $\sin 2x = \cos 2x$, $\tan 2x = 1$; $x_1 = 22,5^\circ$, $x_2 = 112,5^\circ$; $A = \sqrt{2}$

17.17. a) $\int_{1,5}^{-1} e^{3-2y} dy = -\frac{1}{2} [e^5 - 1]$; $A \approx 73,7$

b) $x^2 = e^{6-4y}$; $V_y = \left| -\frac{\pi}{4} (e^{10} - 1) \right| \approx 1,73 \cdot 10^4$

17.18. a) $\frac{1}{4 \cos^4 x} + C$

b) $z = e^x$; $\arcsin e^x + C$

c) $-\frac{1}{\omega} e^{\cos \omega t} + C$

d) $\int \tan x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$

e) $\frac{2}{3} \ln |x^3 - 6x + 1| + C$

f) $-\ln |1 + e^{-x}| + C$

17.19. a) Integraltafel 1.10., 1.11.:

$$\frac{u}{20(u^2 + 5)^2} + \frac{3u}{200(u^2 + 5)} + \frac{3}{200\sqrt{5}} \arctan \frac{u}{\sqrt{5}} + C$$

b) $z = 3x - \frac{\pi}{3}$; $\frac{1}{3} \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 z dz = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 z dz$,

Integraltafel 3.3.: $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} (z - \sin z \cos z) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \approx 0,842$

c) $x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4$; Integraltafel 2.3.:

$$\frac{x-3}{2} \sqrt{(x-3)^2 + 4} + 2 \ln |x-3 + \sqrt{(x-3)^2 + 4}| + C$$

d) $4v^2 + 24v + 25 = 4 \left[(v+3)^2 - \frac{11}{4} \right]$; Integraltafel 2.2.:

$$(v+3) \sqrt{(v+3)^2 - \frac{11}{4}} - \frac{11}{4} \ln \left| v+3 + \sqrt{(v+3)^2 - \frac{11}{4}} \right| + C$$

e) $3 + 2x - x^2 = 4 - (x-1)^2$; Integraltafel 2.4.:

$$\arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

f) Integraltafel 3.15.: $-\frac{1}{3} (\ln \cos 0,9 - \ln \cos 0,45) \approx 0,124$

g) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C$

h) $x[(\ln x)^2 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x - 6] + C$

i) $e^4 \int e^{3x} \sin 5x dx = \frac{e^{3x+4}}{34} (3 \sin 5x - 5 \cos 5x) + C$

17.20. $x_1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$; $[-\ln |\cos x| + \sin x \cos x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} \approx 0,0612$

$$17.21. A = \left[2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{x^3}{3} - x \right]_0^3 = 2(e^{1,5} - 1) \approx 6,96$$

$$V_x = \pi \left[(e^x + 4e^{\frac{1}{2}x} + x) - \left(\frac{4}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x \right) \right]_0^3 \\ = \pi(e^3 + 4e^{1,5} - 6) \approx 100,6$$

$$17.22. a) 2 \left[\frac{1}{\sqrt{32}} \int_{-1}^3 \sqrt{(x+1)^3} dx - \sqrt{2} \int_2^3 \sqrt{x-2} dx \right] = \frac{28}{15} \sqrt{2} \approx 2,64$$

$$b) 2 \left[\frac{5}{\sqrt{2}} \int_2^4 \sqrt{x-2} dx + \frac{\sqrt{5}}{2} \int_4^6 \sqrt{36-x^2} dx \right] \\ = -\frac{20}{3} + 9\sqrt{5}\pi - 18\sqrt{5} \arcsin \frac{2}{3} \approx 27,2$$

$$17.23. z = 2x - 0,3$$

$$V_x = \frac{9\pi}{2} \int_{-0,3}^0 \sin^2 z dz = \frac{9\pi}{4} (0,3 - \sin 0,3 \cos 0,3) \approx 0,125$$

$$18.1. \text{ Bild L 21}$$

$$18.2. y^2(a-x) - x^2(a+x) = 0,$$

$$18.3. r = -\frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi} \quad (\text{Bild L 22})$$

$$18.4. t_1: y = -\frac{15}{8}x + \frac{289}{8}, \quad t_2: y = \frac{8}{15}x - \frac{289}{8}, \quad P_0(23; -7), \quad \delta = 90^\circ.$$

$$18.5. n: y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad A = \frac{125}{12}$$

$$18.6. \delta = 31^\circ 26'$$

$$18.7. y' = \frac{2}{3t}, \quad t: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \quad n: y = -3x + 28$$

$$18.8. t = 1$$

$$18.9. s = 20,4$$

$$18.10. s = \frac{3}{2}R$$

$$18.11. s = \frac{R\pi^2}{2}$$

$$18.12. s = 16R$$

$$18.13. s = \frac{1}{2} [2x\sqrt{1+4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})]_0^3 = 19,49$$

$$18.14. q = p$$

$$18.15. H(0; 0), T(2; -1), \varrho(0) = \varrho(2) = \frac{2}{3}, \quad (\text{Bild L 23})$$

$$18.16. k = -\frac{1}{4r \sin \frac{t}{2}}$$

$$18.17. \varrho = Rt. \text{ Nach Beispiel 18.6. ist } AP \text{ in Bild 18.11 die Normale von } P, \text{ also ist wegen } AP = Rt \text{ der Punkt } A \text{ Krümmungsmittelpunkt.}$$

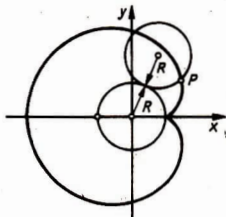


Bild L 21

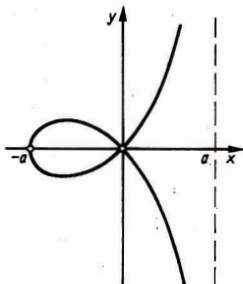


Bild L 22

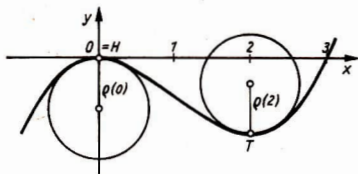


Bild L 23

$$18.18. \varrho(x_0) = \frac{125}{9}, \quad \varphi'(x_0) = \tan \alpha = \frac{3}{4},$$

$$x_M = x_0 + \varrho \sin \alpha = 11; \quad y_M = y_0 - \varrho \cos \alpha = -\frac{64}{9}$$

$$18.19. a) k = \frac{6x}{\sqrt{1+9x^4}} = k(x), \text{ Minimum von } k \text{ f\"ur } x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{45}},$$

$$S_1(0,386; 0,058), S_2(-0,386; -0,058)$$

$$b) k = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = k(x), S(0,707; -0,347)$$

$$c) k = \frac{2x^2}{\sqrt{x^4+1}} = k(x), S_1(1; 1), S_2(-1; -1)$$

$$18.20. A = -\frac{3}{8} \pi R^2$$

$$18.21. t_1 = 0, t_2 = \pi, A = \frac{16}{3}$$

$$18.22. A = 6\pi R^2$$

$$18.23. A = \frac{19}{12} \pi^2$$

$$18.24. a) |V| = \frac{4\pi ab^2}{3} \text{ (Rotationsellipsoid)}$$

$$b) V = \frac{64}{15} \pi$$

$$c) |V| = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (Kugel)}$$

18.25. a) $A_0 = \frac{64}{3} \pi r^2$

b) $A_M = \frac{2}{3} \pi (12\sqrt{3} - 4) = 35,15$

c) Nach Umformung des Integrals ergibt sich

$$A_0 = 64\pi R^2 \int_0^\pi \sin^4 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{128}{5} \pi R^2.$$

19.1. a) $v \approx 6,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $s = 8,73 \text{ m}; v = 15,10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $s_{\max} = 20,4 \text{ m}$

19.2. a) $\omega = \frac{F_0 r \tau}{J} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

b) $\omega(\tau) \approx 3,16 \text{ s}^{-1}$

c) $\omega(\infty) = 5 \text{ s}^{-1}$

19.3. a) $0 \leq t \leq 2: u = 50;$

$i = 0$

$2 \leq t \leq 4: u = 25t;$

$i = 0,25 \cdot 10^{-3}$

$4 \leq t \leq 6: u = 100;$

$i = 0$

$6 \leq t \leq 8: u - 20 = 20(t - 8)^2;$

$i = 0,4 \cdot 10^{-3}(t - 8)$

$8 \leq t \leq 10: u = 40;$

$i = 0$

b) Bild L 24

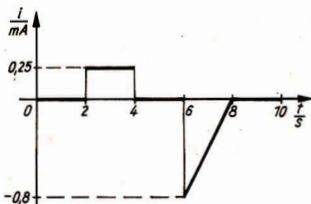


Bild L 24

19.4. $y_m = 2,356$

19.5. $i_m = 67 \text{ mA}$

19.6. $W \approx 122 \text{ N m}; F_m \approx 17,4 \text{ N}$

19.7. $p_m = \frac{p_1 V_1}{V_2 - V_1} \ln \frac{V_2}{V_1}$

19.8. $A = 3,75; S(2,8; 0,7)$

19.9. $S\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right); a = b = r, x_S = y_S, r_S = \frac{4r}{3\pi} \sqrt{2}$

19.10. $A = 2,35, M_x = 0,54, M_y = 8,20, S(3,49; 0,23); V_x = 3,39$

19.11. $V_x = \frac{\pi}{2} x_1 y_1^2$

19.12. a) $s = 50 \text{ m} (t = 5 \text{ s})$

b) $s = 48 \text{ m}; v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

19.13. a) $a = g \frac{(e^{kt} + e^{-kt})^2 - (e^{kt} - e^{-kt})^2}{(e^{kt} + e^{-kt})^2} = g \cdot 1 - \frac{k^2}{g^2} v^2 = g - \frac{c}{m} v^2$

b) $t \rightarrow \infty: v \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{c}}$

19.14. a) $i_C = \frac{2CU_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}; i_C(0) = 2 \text{ mA}$

b) $t_S = \ln 2 \cdot \tau \approx 0,693 \cdot \tau; i_C(t_S) = 1 \text{ mA}$ c) $i_C(\infty) = 0$

19.15. $Q_m = 5,67 \text{ A s}$

19.16. $a_m = 0,125 \text{ m} \cdot \text{min}^{-2}$

19.17. $A = 3; S(2,25; 0,9)$

19.18. $A = 1 - \frac{1}{e^2}; S(0,687; 0,284)$

19.19. $A = 1,039, M_x = 0,209, M_y = 1,336; S(1,286; 0,203)$

19.20. $A = 2,91, M_x = 0,5, M_y = 10,25; S(3,52; 0,17)$

20.1. $y'(1) \approx 1,51$

20.2. a) $l_x = 12 \text{ cm}, l_y = 10 \text{ cm}, l_Y = 15 \text{ cm}, p = 8 \text{ cm}$

$Y(b) - Y(a) \approx 0,50 (\triangle 7,5 \text{ cm}), \text{ vgl. Beispiel 20.2.}$

b) $I = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx, l_x = l_y = 8 \text{ cm}, l_Y = 10 \text{ cm}, p = 6,4 \text{ cm}$

$Y(b) - Y(a) \approx 1,50 (\triangle 15,0 \text{ cm}); \text{ vgl. Aufgabe 20.4. a)}$

20.3. $l_Y = l_x = \frac{2}{3} \text{ mm}; l_p = l_y = \frac{2}{3} \text{ mm}; l_Y = \frac{1}{75} \text{ mm}, p = \frac{100}{3} \text{ mm}$

$A = 4125 (= 5,5 \text{ cm})$

20.4. a) $\bar{I} = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx; y = 0, b = 1, n = 10$

x	y		
0,0	1,0000		
0,1		0,9900	
0,2			0,9608
0,3		0,9139	
0,4			0,8521
0,5		0,7788	
0,6			0,6977
0,7		0,6126	
0,8			0,5273
0,9		0,4449	
1,0	0,3679		
	1,3679 = Σ_0	3,7402 = Σ_1	3,0379 = Σ_2

Σ_0	1,3679	$S = 2 \cdot \frac{1}{30} \cdot \Sigma = 1,4936$ $S^* = 1,4937$ ($a = -1, b = 1, h = 0,1; n = 20$) $F_S < 10^{-4}$
$2 \Sigma_2$	6,0758	
$4 \Sigma_1$	14,9608	
Σ	22,4045	

b) $n = 16; S = 4,8496; S^* = 4,8509; F_S < 10^{-4}$

20.5.	x	y		
	0	0		
	10		36	
	20			49
	30		46	
	40			67
	50		90	
	60			98
	70		92	
	80			73
	90		53	
	100			32
	110		15	
	120	0		
		0	332	319
		$= \Sigma_0$	$= \Sigma_1$	$= \Sigma_2$

Σ_0	0
$2 \Sigma_1$	638
$4 \Sigma_2$	1328
Σ	1966

$$S = \frac{120}{36} \Sigma \approx 6550$$

20.6. $y'(2) \approx -0,89$

20.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $l_x = l_y = 4$ cm, $l_Y = 5$ cm; $p = 3,2$ cm; Bild L 25

20.8. $n = 12$; $S = 1,8520$; $S^* = 1,8521$; $F_S < 10^{-5}$

21.1. Ebene entsprechend Bild L 26

21.2. $f_x(1; 1) = 2 = \tan \alpha$, $\alpha = 63^\circ 26'$ (Bild L 27)

21.3. a) $z_x = 3x^3 - 16xy + y^2 + 15$ $z_y = -8x^3 + 2xy - 20$

b) $u_x = 5x^4 + 18x^2y - 4xyz$ $u_y = 6x^3 - 2x^2z + 3z^3$ $u_z = -2x^2y + 9yz^2$

c) $z_x = \frac{6x + 2y^2 - 3x^2}{(1-x)^2}$ $z_y = \frac{4xy}{1-x}$

d) $z_x = -\frac{x}{z}$ $z_y = -\frac{y}{z}$

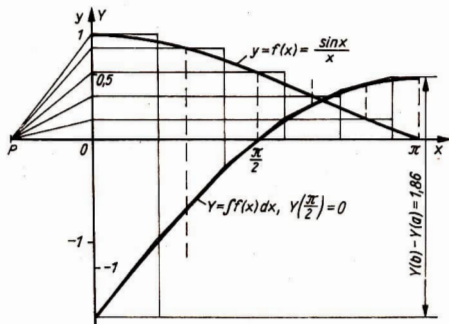


Bild L 25

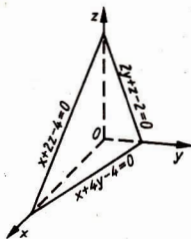


Bild L 26

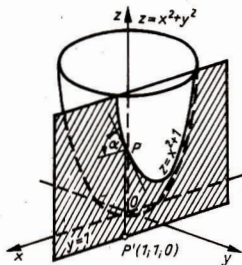


Bild L 27

$$e) z_x = -\sin 2x \quad z_y = -\sin 2y$$

$$f) z_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad z_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$g) \frac{\partial v}{\partial p} = -v_0 \frac{p_0}{p^2} (1 + \alpha t) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_0 p_0}{p} \alpha$$

$$h) \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} \quad \frac{\partial T}{\partial g} = -\frac{\pi \sqrt{gl}}{g^2}$$

$$i) \frac{\partial I_1}{\partial R_1} = -I \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad \frac{\partial I_1}{\partial R_2} = I \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$j) z_x = e^{\frac{x}{y}} \quad z_y = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

$$k) F_{m_1} = \frac{\gamma m_2}{r^2} \quad F_{m_2} = \frac{\gamma m_1}{r^2} \quad F_r = -2\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}$$

21.4. a) $z_x = 5x^4 + 6x^2y^3 \quad z_y = 4x^3y + 10y^4$
 $z_{xx} = 20x^3 + 12xy^3 \quad z_{xy} = z_{yx} = 12x^2y \quad z_{yy} = 4x^3 + 40y^3$

b) $u_x = y + z \quad u_y = x + z \quad u_z = y + x \quad u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = 0$
 $u_{xz} = u_{zx} = 1 \quad u_{xy} = u_{yx} = 1 \quad u_{yz} = u_{zy} = 1$

c) $z_x = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad z_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$
 $z_{xx} = -\frac{4y}{(x+y)^3} \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \quad z_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$

d) $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 $z_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad z_{xy} = z_{yx} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad z_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$

$$\text{e) } z_x = 2 \cos 2x \quad z_y = 2 \cos 2y \\ z_{xx} = -4 \sin 2x \quad z_{xy} = z_{yx} = 0 \quad z_{yy} = -4 \sin 2y$$

$$\text{f) } z_x = \frac{1}{1+x^2} \quad z_y = \frac{1}{1+y^2} \\ z_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad z_{xy} = z_{yx} = 0 \quad z_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

$$\text{g) } z_x = -\frac{2y}{x^2 - y^2} \quad z_y = \frac{2x}{x^2 - y^2} \\ z_{xx} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2} \quad z_{xy} = z_{yx} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \quad z_{yy} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$21.5. \quad u_{xyz} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$$

$$21.6. \quad \Delta z = -5,16; \quad dz = -4,8$$

$$21.7. \quad \Delta u = 0,76; \quad du = 0,8$$

$$21.8. \quad dz = e^x[(\sin(x-y) + \cos(x-y)) dx - \cos(x-y) dy] = 0,79$$

$$21.9. \quad \text{a) } dz = \frac{x^2 - y^2}{x^2y^2} (y dx - x dy) \quad \text{b) } dz = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$$

$$\text{c) } du = 2e^{x^2+y^2+z^2}(x dx + y dy + z dz) \quad \text{d) } dz = \frac{y dx + x dy}{1 + x^2y^2}$$

$$\text{e) } dv = \frac{R}{p} \alpha dt - \frac{R}{p^2} (1 + \alpha t) dp$$

$$\text{f) } dF = \frac{v^2}{r} dm + \frac{2mv}{r} dv - \frac{mv^2}{r^2} dr$$

$$\text{g) } dv = \frac{2v_1}{(m_1 + m_2)^2} (m_2 dm_1 - m_1 dm_2)$$

$$21.10. \quad A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = f(a; b; \gamma) \quad \Delta A = (72,26 - 69,28) \text{ m}^2 = 2,98 \text{ m}^2$$

$$dA = \frac{1}{2} (b \sin \gamma da + a \sin \gamma db + ab \cos \gamma d\gamma) = 2,95 \text{ m}^2$$

$d\gamma$ ist in Bogenmaß anzugeben.

$$21.11. \quad dz = \frac{v^2}{r} \Delta m + \frac{2mv}{r} \Delta v - \frac{mv^2}{r^2} \Delta r = 288 \text{ N}$$

$$21.12. \quad r = \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2}$$

$$dr = \frac{x-3}{r} dx + \frac{y+5}{r} dy = 0,1$$

$$21.13. \quad \alpha = 41^\circ 38'$$

$$21.14. \quad x_1 = 0 \quad [y']_{x=0} = 4 \quad x_2 = 2 \quad [y']_{x=2} = -8 \quad x_3 = -2 \quad [y']_{x=-2} = -8$$

$$21.15. \quad y' = -\frac{3x+5y}{5x+3y} = 1 \Rightarrow y = -x \quad E_1(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), E_2(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

Die Kurve ist eine Hyperbel, deren reelle Achse um 45° gegen die x -Achse geneigt ist. E_1, E_2 sind die Hauptscheitelpunkte.

$$21.16. \quad \text{Schnittpunkt im I. Quadranten: } P_1(6; 4). \quad \text{Schnittwinkel: } \delta = 76^\circ 52'$$

$$21.17. y' = -\frac{2x-4}{2y-2} = -\frac{Z}{N}$$

$$a) Z = 2x - 4 = 0 \Rightarrow P_1(2; 7), P_2(2; -5)$$

$$b) N = 2y - 2 = 0 \Rightarrow P_3(8; 1), P_4(-4; 1)$$

$$21.18. a) \text{ Minimum } z_E = -3 \text{ bei } (x_E; y_E) = (-1; -2).$$

$$b) \text{ Kein Extremwert.}$$

$$c) \text{ Minimum } z_E = -6 \text{ bei } (x_E; y_E) = (2; 3).$$

$$d) \text{ Maximum } z_E = -1 \text{ bei } (x_E; y_E) = (-3; 3).$$

$$e) \text{ Bei } (0; 0) \text{ kein Extremwert, bei } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \text{ ein Maximum } z_E = \frac{1}{432}.$$

$$f) \text{ Bei } (0; 0) \text{ kein Extremwert, bei } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ ein Minimum } z_E = \frac{3}{4}.$$

$$g) \text{ Aus } z_x = 0, z_y = 0 \text{ folgt } x = y \text{ und damit } \cos x = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

$$\text{Maximum } z_E = \frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ bei } x_E = y_E = \frac{\pi}{3}. \text{ Wegen } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ ist nur } \cos x = \frac{1}{2} \text{ Lösung.}$$

$$21.19. x + y + z = l \text{ bzw. } z = l - x - y. \text{ Das Produkt ist } x \cdot y \cdot z = xy(l - x - y) = f(x; y), \\ x_E = y_E = \frac{l}{3}, \text{ d. h., die Strecke ist in 3 gleiche Teile zu teilen.}$$

$$21.20. \text{ Sind } K_1, K_2, K_3 \text{ die Kanten, dann ist die Oberfläche } A_0 = 2(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3). \\ \text{Wegen } V = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \text{ folgt } K_3 = \frac{V}{K_1K_2}. A_0 = 2 \left(K_1K_2 + \frac{V}{K_2} + \frac{V}{K_1} \right) = f(K_1; K_2). \\ A_0 \text{ ist ein Minimum für } K_1 = K_2 = K_3 = \sqrt[3]{V}, \text{ d. h., der Quader ist ein Würfel.}$$

$$21.21. O = 2(ab + a(a+b) - (a+b)^2) = f(a; b)$$

$$a_E = b_E = c_E = \frac{a}{3}, \text{ der Quader ist ein Würfel.}$$

$$21.22. \frac{\partial T_1}{\partial V_1} = -\frac{(k-1) T_2}{V_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial V_2} = \frac{(k-1) T_2}{V_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-2}$$

$$21.23. u_{xyz} = u_{zyx} = (x-y)^{z-2} [1 - 2z + (z-z^2) \ln(x-y)]$$

$$21.24. a) u_{xyz} = u_{zyx} = \frac{2x}{\sin^2(y-z)} \quad b) u_{yyz} = u_{zyy} = \frac{-2x^2 \cos(y-z)}{\sin^3(y-z)}$$

$$21.25. z_x = \frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \quad z_y = e^y \arcsin(x-y) - \frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$$

$$21.26. z_x = \frac{1}{y} \quad z_y = -\frac{x}{y^2} \quad xz_x + yz_y = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0$$

$$21.27. \text{ Mit } z_x = \frac{2x}{y^2} e^{\frac{x^2}{y^2}} \text{ und } z_y = -\frac{2x^2}{y^3} e^{\frac{x^2}{y^2}} \text{ folgt die Behauptung.}$$

$$21.28. a) du = \frac{2}{y^3 \sin \frac{2x}{y}} (y dx - x dy)$$

$$b) du = \frac{x+y}{y^3} e^{\frac{x}{y}} (y dx - x dy)$$

$$c) dT_1 = \frac{\kappa-1}{\kappa} T_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} \left(\frac{1}{p_2} dp_1 - \frac{p_1}{p_2^2} dp_2 \right)$$

$$21.29. dp = e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \left[\left(1 + \frac{\rho_0 g h}{p_0} \right) dp_0 - g h d\rho_0 - \rho_0 h dg - \rho_0 g dh \right]$$

$$dp = 84 \text{ Nm}^{-2}$$

$$21.30. \alpha = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta \alpha \approx d\alpha = -\frac{y_2 - y_1}{s^2} \Delta x_2 - \frac{x_2 - x_1}{s^2} \Delta y_2$$

$$21.31. \text{Minimum } z_E = -\frac{4}{e} \text{ f\"ur } x_E = -4, y_E = 0.$$

$$21.32. z = A^2 = s(s-a)(s-b)(a+b-s), a_E = b_E = c_E = \frac{2s}{3}, \text{ das Dreieck mu\ss gleichseitig sein.}$$

$$21.33. z = \frac{1}{2} r^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)) = f(\alpha; \beta), \alpha_E = \beta_E = \gamma_E = 120^\circ, \text{ das Dreieck ist gleichseitig.}$$

$$21.34. \text{Benetzter Umfang: } U = a + 2 \frac{h}{\sin \alpha}. \text{ Aus } A = (a + h \cot \alpha) h \text{ folgt } a = \frac{A}{h} - h \cot \alpha$$

$$\text{und damit } U = \frac{A}{h} - h \cot \alpha + 2 \frac{h}{\sin \alpha} = f(h; \alpha). U \text{ ist minimal f\"ur } \alpha_E = \frac{\pi}{3},$$

$$h_E = \sqrt{\frac{A}{3}} \sqrt{3} \left(a_E = \frac{2}{3} \sqrt{A \sqrt{3}} \right)$$

$$22.1. a) \Delta z_1 = z_1 - \pi \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$$

$$b) \Delta U_1 \approx 1,3 \text{ cm}$$

$$\Delta z_2 = z_2 - \pi \approx 2,7 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta U_2 \approx 0,00027 \text{ cm}$$

$$22.2. A = \pi \frac{d^3}{4} = 0,102 \text{ mm}^3, \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{2\Delta d}{d} = \pm 2,8\%$$

$$22.3. \Delta A_{\max} = \pm \frac{|h+g|}{2} |\Delta g| = 27 \text{ mm}^3 \text{ (wegen } \Delta g = \Delta h)$$

$$22.4. \Delta V_{\max} = \pm (bc |\Delta a| + ac |\Delta b| + ab |\Delta c|) = \pm 68 \text{ cm}^3$$

$$22.5. \Delta V_{\max} = \pm \frac{r\pi}{3} (2h |\Delta r| + r |\Delta h|) = \pm 580 \text{ cm}^3$$

$$22.6. f = \frac{ab}{a+b} = 16,35 \text{ cm}, \quad \Delta f_{\max} = \pm \frac{b^2 |\Delta a| + a^2 |\Delta b|}{(a+b)^2} = \pm 0,05 \text{ cm}$$

$$22.7. \alpha = \arcsin \frac{a}{c}$$

$$\Delta \alpha_{\max} = \pm \left(\left| \frac{\Delta a}{\sqrt{c^2 - a^2}} \right| + \left| \frac{-a \Delta c}{c \sqrt{c^2 - a^2}} \right| \right) = \pm 0,00036 = \pm 1,3'$$

$$22.8. \Delta h_{\max} = \pm \left[\left| \frac{1}{2} t^2 \Delta g \right| + \left| g t \Delta t \right| \right] = \pm 0,5 \text{ m}$$

$$22.9. \Delta R_{x,\max} = \pm \left(\left| \frac{x}{1000 - x} \Delta R \right| + \left| \frac{1000R}{(1000 - x)^2} \Delta x \right| \right) = \pm 8,7 \Omega$$

$$22.10. I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U}{R} = 0,5 \text{ A}$$

$$\Delta I_r = \pm \left(\left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \frac{1}{R} (|\Delta R_1| + |\Delta R_2| + |\Delta R_3|) \right) = \pm 2\%$$

$$22.11. R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 77,8 \Omega, \quad \Delta R_r = \pm \left(\left| \frac{R \Delta R_1}{R_1^2} \right| + \left| \frac{R \Delta R_2}{R_2^2} \right| \right) = \pm 0,9\%$$

$$22.12. \text{ a) } \bar{x} = 8,14$$

$$s^2 = 0,0002 \quad s = 0,0141$$

$$s_{\bar{x}} = 0,01 \quad \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = 0,123\%$$

$$\text{ c) } \bar{x} = 534,8$$

$$s^2 = 372 \quad s = 19,3$$

$$s_{\bar{x}} = 9,65 \quad \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = 1,8\%$$

$$\text{ b) } \bar{x} = 14,33$$

$$s^2 = 0,0234 \quad s = 0,153$$

$$s_{\bar{x}} = 0,0883 \quad \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = 0,616\%$$

$$\text{ d) } \bar{x} = 3682$$

$$s^2 = 11170 \quad s = 105$$

$$s_{\bar{x}} = 47,1 \quad \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = 1,28\%$$

$$22.13. g = 9,92 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2} = 15,4 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 l}{T^3} = -12,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

$$s_g = 0,256 \text{ m/s}^2$$

$$22.14. X = 14460 \Omega$$

$$\frac{\partial X}{\partial L} = 2\pi f = 4,24 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial C} = \frac{1}{2\pi f C^2} = 1,93 \cdot 10^{14} \frac{\text{V}^2}{\text{A}^2 \text{ s}}$$

$$s_x = 428 \Omega$$

$$22.15. \text{ a) } \hat{y} = 0,00667 + 0,0015x$$

$$\text{ c) } \hat{y} = 0,35 + 1,4x$$

$$\text{ b) } \hat{y} = 1420 + 0,93x$$

$$\text{ d) } \hat{y} = 17 + 4,89x$$

$$22.16. b = \frac{952}{1000} = 0,952$$

$$\hat{y} = 3,24 + 0,952x$$

$$a = 22,28 - 19,04 = 3,24$$

$$22.17. b = \frac{4260}{28} = 152$$

$$\hat{y} = 522 + 152x$$

$$a = 1130 - 608 = 522$$

(Bild L 28)

$$22.18. r = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2} \approx \frac{s^2}{8p} \approx 590 \text{ m}$$

$$\Delta r_{\max} = \pm \left(\left| \frac{s}{4p} \Delta s \right| + \left| \frac{-s^2}{8p^2} \Delta p \right| \right) = \pm (0,59 + 6,93) \text{ m} \approx \pm 8 \text{ m}$$

Der Fehler der Sehne hat also kaum Einfluß auf $\Delta r_{\max}$

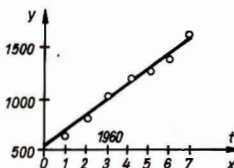


Bild L 28

$$22.19. |\Delta V_{\max}| = (|2\pi r_1 h \Delta r_1| + |2\pi r_2 h \Delta r_2| + |\pi(r_1^2 - r_2^2) \Delta h|) \leq 2,7 \text{ cm}^3,$$

$$|\Delta r_1| \leq 0,0012 \text{ cm}, |\Delta r_2| \leq 0,0015 \text{ cm}, |\Delta h| \leq 0,008 \text{ cm}$$

$$22.20. |\Delta n_r| = (|\cot \alpha \Delta \alpha| + |\cot \beta \Delta \beta|) \leq 0,001, |\Delta \alpha| \leq 1', |\Delta \beta| \leq 0,6'$$

$$22.21. \ln T_2 = \ln T_1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) (\ln p_2 - \ln p_1)$$

$$\frac{\Delta T_{2\max}}{T_2} = \pm \left[\left| \frac{\Delta T_1}{T_1} \right| + \left| \frac{1}{k^2} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Delta k \right| + \left| 1 - \frac{1}{k} \right| \left(\left| \frac{\Delta p_2}{p_2} \right| + \left| \frac{\Delta p_1}{p_1} \right| \right) \right]$$

$$\Delta T_{2,r} = \pm 0,0325 = \pm 3,2\%$$

$$22.22. a) \Delta \alpha_r = \pm \left(\left| \frac{\Delta b}{b} \right| + |\cot \alpha \cdot \Delta \alpha| + |\cot \beta \cdot \Delta \beta| \right)$$

$$b) |\Delta b| \leq 0,02 \text{ m}, |\Delta \alpha| \leq 0,6', |\Delta \beta| \leq 0,3'.$$

$$22.23. b = \frac{10868}{1073,2} = 10,13$$

$$a = 446 - 288 = 158$$

$$\hat{y} = 158 + 10,13x$$

t	x	$\hat{y}$
0	60	766
1	70	867
2	85	1019
3	90	1070
4	99	1161
5	110	1272

$$23.1. a) \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$\{S_k\} = 0,333; 0,444; 0,481; 0,494; \dots$$

$$b) 1 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$\{S_k\} = 1; 5; 13; 29; \dots$$

$$c) 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$\{S_k\} = 1; 0,75; 0,861; 0,799; \dots$$

$$d) \frac{0,2}{1} + \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{6} + \frac{0,2^4}{24} + \dots$$

$$\{S_k\} = 0,2; 0,22; 0,221; 0,2214; \dots$$

$$e) 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \dots$$

$$\{S_k\} = 2; 0,666; 0,933; 0,908; \dots$$

$$23.2. \quad a) S = \frac{128}{3} \quad b) S = \frac{15}{16} \quad c) S = \frac{1}{1+x} \quad d) S = \frac{ab}{b-a}$$

$$23.3. \quad S = \frac{b}{a} (b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$23.4. \quad a) S = a_1 (2 + \sqrt{2}) \quad b) S = 2a_1^2$$

$$23.5. \quad a) \frac{4}{11} \quad b) \frac{4}{15} \quad c) \frac{4}{37} \quad d) \frac{450}{111}$$

23.6. Wegen $|R_7| < 2,0 \cdot 10^{-4}$ genügt 5stellige Rechnung.

$$S = S_7 + R_7 = 0,36806 + R_7; R_7 < 0; 0,36786 < S < 0,36806; S \approx 0,368$$

23.7. Wegen $|R_4| < 6,4 \cdot 10^{-6}$ wird 6stellig gerechnet.

$$S = S_4 + R_4 = 0,182267 + R_4; R_4 > 0; 0,182267 < S < 0,182331; S \approx 0,1823$$

$$23.8. \quad a) r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = 1; I = (-1; 1)$$

$$b) r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \infty; I = P$$

$$c) r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0; I = \{0\}$$

$$23.9. \quad a) (1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x} = 1 + 2e^x + \frac{2}{2!}e^{2x} + \frac{2^2}{4!}e^{4x} + \dots$$

$$b) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$c) \sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{3} + \frac{2}{45}x^7 - \frac{1}{315}x^9 + \dots$$

$$d) \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \dots$$

$$e) \ln \frac{1}{\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \dots, \left(\ln \frac{1}{\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2} \ln(1+x) \right)$$

$$f) \frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 + \dots$$

$$g) \ln(1 + e^{at}) = \ln 2 + \frac{at}{2} + \frac{a^2 t^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{a^4 t^4}{4 \cdot 2^3} + \dots$$

$$23.10. \text{ a) } \sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} \quad |x| < 0,251$$

$$\text{ b) } \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad |x| < 0,063$$

$$\text{ c) } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad |x| < 0,02$$

$$\text{ d) } \frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

$$\text{ e) } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad |x| < 0,036$$

$$\text{ f) } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad |x| < 0,19$$

$$\text{ g) } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{3} \quad |x| < 0,047$$

$$\text{ h) } \sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} \quad |x| < 0,067$$

$$\text{ i) } \sqrt[3]{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{3}$$

$$\text{ k) } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx 1 - \frac{x^2}{3} \quad |x| < 0,22$$

$$\text{ l) } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{3}{2} x^2$$

$$\text{ m) } \frac{1}{(1+x)^3} \approx 1 - 3x \quad |x| < 0,009$$

$$23.11. \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad r = 1$$

$$\text{Für } x = 1 \text{ folgt: } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$23.12. \cos 5^\circ = \cos 0,0872665$$

$$= 1 - 0,0038077 + 0,0000024 - + \dots \approx 0,99619$$

$$\cos 20' = \cos 0,0058178$$

$$= 1 - 0,0000169 + 5 \cdot 10^{-11} - + \dots \approx 0,99998$$

$$23.13. \text{ a) } e^{\frac{x}{a}} = e \left[1 + \frac{x-a}{1!a} + \frac{(x-a)^2}{2!a^2} + \frac{(x-a)^3}{3!a^3} + \dots \right]$$

$$\text{ b) } x e^{-x} = \frac{1}{e} \left[1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{8} + \dots \right]$$

$$\text{ c) } \frac{e^x}{x} = e^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{48} + \dots \right]$$

23.14. $x_0 = 3$; $h = 0,1$

$$\ln(x_0 + h) = \ln x_0 + \frac{1}{x_0} h - \frac{1}{2!x_0^2} h^2 + \frac{2}{3!x_0^3} h^3 - \frac{6}{4!x_0^4} h^4 + \dots$$

$$\ln 3,1 = 1,1314024 + R_3(3); |R_3(3)| < 3 \cdot 10^{-7}; R_3(3) < 0;$$

$$1,1314021 < \ln 3,1 < 1,1314024; \ln 3,1 \approx 1,131402$$

23.15. $\alpha = \arctan \frac{a + \Delta a}{b} = f(a + \Delta a).$

Nach (23.15) ist $\alpha = f(a) + f'(a) \Delta a + \dots = \arctan \frac{a}{b} + \frac{b}{a^2 + b^2} \Delta a + \dots$

Mit $\alpha_0 = \arctan \frac{a}{b}$ folgt $\alpha \approx \alpha_0 + \frac{b}{a^2 + b^2} \Delta a.$

23.16. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$ Nach (23.9) ist $c \approx a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2}\right); c \approx a + \frac{b^2}{2a}.$

d. h., $k = \frac{b^2}{2a}$

23.17. a) $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) dx$
 $= 2 \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \dots \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
 $= 2(0,785398 - 0,026915 + 0,000498 - 5,2 \cdot 10^{-6} + \dots)$

$I \approx 1,5180$

b) $I = \int_0^{0,6} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{0,6} x^2 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right) dx$
 $= \int_0^{0,6} \left(x^2 - x^4 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^8}{3!} + \dots\right) dx$
 $= 0,072 - 0,015552 + 0,002000 - 0,000187 + \dots$

$I \approx 0,058$

c) $I = \int_0^{0,3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{0,3} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} x^4 - \frac{5}{16} x^6 + \dots\right) dx$
 $= 0,3 - 0,0010125 + 0,0000117 - 2 \cdot 10^{-7} + \dots$

$I \approx 0,29900$

d) $I = \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{0,5} \left(1 + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{18} x^4 + \frac{2}{81} x^6 - \dots\right) dx$
 $= 0,5 + 0,01389 - 0,00035 + \dots$

$I \approx 0,514$

$$24.1. \quad y' = y/l, \quad y = K e^{\frac{x}{l}} \quad (\text{Bild L 29})$$

$$24.2. \quad y'y + x = 0$$

$$24.3. \quad y = Cx$$

$$24.4. \quad y = C(x - a) + b$$

$$24.5. \quad y = \frac{Cx}{1+x}$$

$$24.6. \quad y = \pm \sqrt{2(x \cos x - \sin x) + 127,3}$$

$$24.7. \quad y^3 = 3 + 3x - x^3$$

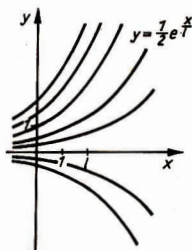


Bild L 29

$$24.8. \quad y = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right); \quad y|_{t \rightarrow \infty} = K; \quad y|_{t=T} = 0,632K; \quad t_{95\%} = T \ln 20 \approx 3,00T; \quad t_{99\%} = T \ln 100 \approx 4,61T$$

$$24.9. \quad y = 1 - e^{-x}$$

$$24.10. \quad y = 2 + K e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$24.11. \quad y = \frac{\cos x}{2} + \frac{C}{\cos x}$$

$$24.12. \quad y = \frac{1}{2} (e^{3-x} - e^x)$$

$$24.13. \quad x_a = Kc(t - T) + C e^{-\frac{t}{T}}$$

$$24.14. \quad y = A \cos x + B \sin x$$

$$24.15. \quad y = \frac{x}{500} + \frac{x^2}{100} + \frac{x^3}{30} - \frac{1}{5000} (e^{10x} - 1)$$

$$24.16. \quad y = -\ln(1+x)^3$$

$$24.17. \quad a) \quad y = \frac{FP^3}{16EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{4x^3}{3l^3} \right)$$

$$b) \quad y = \frac{FP^3}{180EI} \left[7 \frac{x}{l} - 10 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right]$$

$$24.18. \quad y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

$$24.19. \quad y = e^{-2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$24.20. \quad y = 3e^{-x} - e^{-4x}$$

$$24.21. \quad y = A \cos x + B \sin x + x^2 - 2$$

$$24.22. \quad y = e^x \left(\frac{x}{2} + C_1 \right) + C_2 e^{-x}$$

$$24.23. \quad y = C_1 + \left(C_2 + \frac{x}{9} + \frac{x^2}{3} \right) e^{3x}$$

$$24.24. \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \frac{7}{3} x^2 + \frac{56}{9} x + \frac{209}{27}$$

$$24.25. \quad y = e^{-x} (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x) - \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$24.26. \quad y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^x$$

$$24.27. y = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \sqrt{\frac{3}{4}} x + B \sin \sqrt{\frac{3}{4}} x \right) + x^2 + 1$$

$$24.28. y = x + 3e^{x-1} - e^{1-x}$$

$$24.29. y = 4 \cos x - 2\pi \sin x - x^2 - 4$$

$$24.30. x_2 = Kx_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[\frac{\tau_2 + \tau_1}{2\tau_1} e^{\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \right\};$$

$$\tau_1 = \frac{2T_1^2}{T_1}, \tau_2 = \frac{2T_2^2}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}$$

$$24.31. y = \pm \sqrt{2e^x + C_1}$$

$$24.32. y = \pm \left(1 + C e^{\frac{x^2}{4}} \right)$$

$$24.33. y = e^{K \tan \frac{x}{2}}, y_p = 1$$

$$24.34. y = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + 0,295 \right]$$

$$24.35. y' = \frac{y}{2x}; y^2 = Cx$$

$$24.36. y = \frac{1}{5} e^{3x} + C e^{-2x}$$

$$24.37. y = \sin x + K \tan x$$

$$24.38. y = \frac{3}{4} x^2 - \frac{2}{3} x + 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$24.39. y = \frac{e^x}{2} - C_1 e^{-x} + C_2$$

$$24.40. y = -\frac{7}{3} x + x^2 - 0,105e^{-3x} - 0,22$$

$$24.41. y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}; y = C e^{3x} + (2 - C) e^{4x}$$

$$24.42. y = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$24.43. y = (C_1 x + C_2) e^{0,5x}$$

$$24.44. y = A \cos \sqrt{2} x + B \sin \sqrt{2} x + \frac{1}{11} e^{3x}$$

$$24.45. y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x + \frac{x}{4} + \frac{5}{16}$$

$$24.46. y = e^{-3x}(A \cos 4x + B \sin 4x) + \frac{1}{52} e^{2x}$$

$$24.47. y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{25} \sin x + \frac{4}{25} \cos x = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{5} \sin \left(x + \arctan \frac{4}{3} \right)$$

$$24.48. y = e^{\frac{x}{2}} (A \cos x + B \sin x) + \cos 5x$$

$$24.49. y = \frac{1}{13} \sin 2x + \frac{5}{13} \cos 2x + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

$$24.50. y = -1,60 + 0,60x + 1,34e^{\sqrt{5}x} + 0,26e^{-\sqrt{5}x}$$

$$24.51. y = 0,5 - 0,381e^{1,37x} - 0,119e^{-4,37x}$$

$$24.52. a) m\ddot{s} + d\dot{s} + fs = F \sin \omega t \quad b) s = e^{-\delta t} K_1 \sin(\omega_e t + \varphi_1) + K_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$25.1. \quad a) \quad p = \frac{4}{32} = 12,5\%$$

$$b) \quad p = \frac{8}{32} = 25\%$$

$$c) \quad p = \frac{16}{32} = 50\%$$

$$25.2. \quad p = \frac{573 - 134}{573} = 76,6\%$$

$$25.3. \quad p = \frac{2350 - 38}{2350} = 98,4\% \text{ (normgerechtes Werkstück)}$$

$$p = \frac{38}{2350} = 1,6\% \text{ (Aussschuß)}$$

$$25.4. \quad a) \quad P(1 \vee 6) = \frac{1}{3} = 33,3\%$$

$$b) \quad P(1 \vee 2 \vee 5 \vee 6) = \frac{2}{3} = 66,7\%$$

$$c) \quad P(4 \vee 5 \vee 6) = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$d) \quad P(1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5) = \frac{5}{6} = 83,3\%$$

$$e) \quad P(1 \vee 2) = \frac{1}{3} = 33,3\%$$

$$f) \quad P(3 \vee 4 \vee 5 \vee 6) = \frac{2}{3} = 66,7\%$$

$$25.5. \quad a) \quad P(6 \wedge 6) = \frac{1}{36} = 2,8\%$$

$$b) \quad P((G \wedge U) \vee (U \wedge G)) = P(G) \cdot P(U) + P(U) \cdot P(G) = 50\%$$

$$25.6. \quad P((B \wedge B) \vee (B \wedge Z) \vee (Z \wedge B)) \\ = P(B) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(Z) + P(Z) \cdot P(B) = 75\%$$

$$25.7. \quad P(A \wedge B \wedge C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 17,4\%$$

$$25.8. \quad r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 = 52\%$$

$$25.9. \quad a) \quad P_1 = P(\bar{A}) = 1 - p$$

$$b) \quad P_2 = P(\bar{A} \wedge \bar{A} \wedge \dots \wedge \bar{A}) = (1 - p)^n$$

$$c) \quad P_3 = 1 - P_2 = 1 - (1 - p)^n$$

$$25.10. \quad P = 1 - (1 - 0,02)^8 = 0,149 = 14,9\%$$

$$25.11. \quad P = 1 - 0,996^{250} = 0,633 = 63,3\%$$

$$25.12. \quad a) \quad 16,4\%$$

$$b) \quad 8,23\%$$

$$c) \quad 22,9\%$$

25.13. 20,5%

25.14. 32,4%

25.15. $P = P(0 \vee 1 \vee 2) = 0,078 + 0,212 + 0,274 = 0,564 = 56,4\%$

25.16. $P_3 = 3!$

24135	24315	24513
24153	24351	24531

25.17. $P_{10} = 10! = 3628800$

25.18. a) aus, sau; $w = \frac{2}{3!} = 33,3\%$

b) beil, blei, leib, lieb; $w = \frac{4}{4!} = 16,7\%$

25.19.

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

25.20. $V = \frac{6!}{2!} = 360$

25.21. $V = \frac{8!}{3!} = 6720$

25.22. $V_{w2}^{(4)} = 2^4 = 16$

Dual	Dezimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	Pseudotetrade
.	"
.	"
1111	"

25.23. $C = \binom{6}{4} = 15$

1234	1235	1236	1245	1246	1256
1345	1346	1356	1456		
2345	2346	2356	2456		
3456					

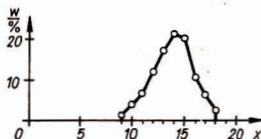
25.24. $C = \binom{8}{3} = 56$

- 25.25. a) $C = 134596$
 b) $C = 64512240$
 c) $C = 2200787712814600$
 d) $C = 43949268$

25.26. x w (s. Bild L 30)

9	0,013
10	0,039
11	0,065
12	0,117
13	0,169
14	0,208
15	0,195
16	0,104
17	0,065
18	0,026
19	0
20	0

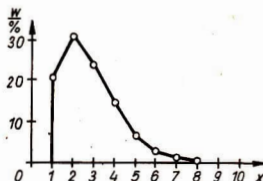
Bild L 30



25.27. x w (s. Bild L 31)

1	0,206
2	0,303
3	0,236
4	0,141
5	0,0642
6	0,0277
7	0,0119
8	0,00887

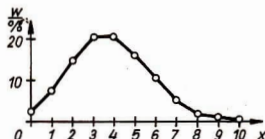
Bild L 31



25.28. x w (s. Bild L 32)

0	0,0219
1	0,0778
2	0,147
3	0,201
4	0,204
5	0,156
6	0,105
7	0,0533
8	0,0172
9	0,0104
10	0,00613

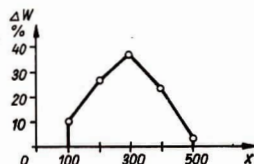
Bild L 32



25.29. x ΔH ΔW (s. Bild L 33)

100	3	0,100
200	8	0,267
300	11	0,367
400	7	0,233
500	1	0,033
30		1,000

Bild L 33



25.30. a) $P_7(k) = \binom{7}{k} \cdot 0,7^k \cdot 0,3^{7-k}$

b) (s. Bild L 34)

k	$P(k)$
0	0,000
1	0,004
2	0,025
3	0,097
4	0,227
5	0,318
6	0,247
7	0,082

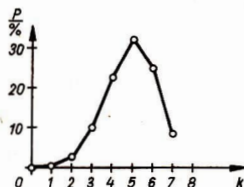


Bild L 34

c) $P(k < 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0,126 = 12,6\%$

d) $P(k \geq 5) = P(5) + P(6) + P(7) = 0,647 = 64,7\%$

25.31. $P = 1 - P(|X - 170| < 10) = 1 - \Phi(1,53) = 1 - 0,874$
 $= 0,126 = 12,6\%$

25.32. $P = 1 - P(|X - 8| < 0,01) = 1 - \Phi(1,67) = 1 - 0,905$
 $= 0,095 = 9,5\%$

25.33. $P = \Phi(3) = 0,997$

25.34. $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,9$ $\frac{a}{\sigma} = 1,65$ $a = 0,0708$
 $-0,1228 < x < 0,0188$ (s. Bild L 35)

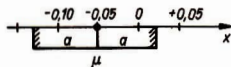


Bild L 35

25.35. $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,8$ $\frac{a}{\sigma} = 1,28$ $a = 0,00512$
 $0,0169 < x < 0,0271$

25.36. $P = \frac{1,55^k}{k!} \cdot e^{-1,55}$

(s. Bild L 36)

k	P
0	0,212
1	0,329
2	0,255
3	0,132
4	0,051
5	0,016
6	0,0041
7	0,0009

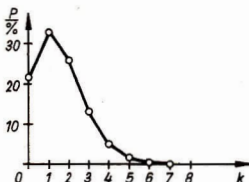


Bild L 36

$$25.37. p = P(T < 7000) = 1 - e^{-0.35} = 0,295$$

$$\mu = 1430 \cdot 0,295 = 422$$

$$25.38. \bar{x} = \frac{15,16}{7} = 2,17 \quad s = \sqrt{0,0637} = 0,252$$

$$s_{\bar{x}} = 0,0954 \quad t = -3,46 \quad t(95\%; 6) = 2,447$$

$|t| > 2,447$ Abweichung wesentlich! Angabe des Absenders falsch.

$$25.39. t = \frac{4,32 - 4,18}{0,0357} = 3,91 \quad t(1\%; 4) = 4,604$$

$|t| < 4,604$ Abweichung zufällig! Systematische Fehler nicht nachweisbar.

$$25.40. t = \frac{3524 - 3479}{23,81} = 1,89 \quad t(99\%; 18) = 2,878$$

$|t| < 2,878$ Abweichung zufällig! Keine Produktionsänderung nachweisbar.

$$25.41. t = \frac{22,9 - 21,8}{0,153} = 7,19 \quad t(95\%; 7) = 2,365$$

$|t| > 2,365$ Abweichung wesentlich! Systematische meßtechnische Fehler vorhanden.

$$25.42. s_{\bar{x}} = \frac{0,252}{\sqrt{7}} = 0,0955$$

$$t(5\%; 6) = 2,447 \quad a_0\% = 2,447 \cdot s_{\bar{x}} = 0,234$$

$$t(1\%; 6) = 3,707 \quad a_1\% = 3,707 \cdot s_{\bar{x}} = 0,354$$

$$\text{Konfidenzintervall (5\%)} \quad 1,936 \leq x \leq 2,404$$

$$\text{Konfidenzintervall (1\%)} \quad 1,816 \leq x \leq 2,524$$

25.43. Es sei A_1 das Ereignis „Normgerecht“, A_2 das Ereignis „Nicht normgerecht“. Damit erhält man die „Vierfeldertafel“

	A_1	A_2	
B_1	581	119	700
B_2	189	111	300
	770	230	1000

aus der man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten abliest:

$$a) P(B_1) = \frac{700}{1000} = 0,70 = 70\%$$

$$b) P(B_1 \cap A_1) = \frac{581}{1000} = 0,581 = 58,1\%$$

$$c) P(B_1/A_1) = \frac{581}{770} = 0,755 = 75,5\%$$

$$d) P(A_1/B_1) = \frac{581}{700} = 0,83 = 83\%$$

$$25.44. n \cdot \lg(1-p) = \lg(1-P)$$

Für $p = \frac{1}{6}$ und $P = 0,9$ folgt ganzzahlig aufgerundet $n = 13$.

$$25.45. 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30 > 26$$

Es sind ein- bis vierstellige Zeichen erforderlich, und es werden 4 vierstellige Zeichen nicht benötigt.

$$25.46. V = 26^3 \cdot 10^4 = 6760000$$

25.47. a) Moleküle b) Kästen

1	2	3	4	1	2
1	1	1	1	4	0
1	1	1	2	3	1
1	1	2	1	3	1
1	1	2	2	2	2
1	2	1	1	3	1
1	2	1	2	2	2
1	2	2	1	2	2
1	2	2	2	1	3
2	1	1	1	3	1
2	1	1	2	2	2
2	1	2	1	2	2
2	1	2	2	1	3
2	2	1	1	2	2
2	2	1	2	1	3
2	2	2	1	1	3
2	2	2	2	0	4

c) Belegung Häufigkeit

x	h
40	1
31	4
22	6
13	4
04	1

$$25.48. C = 150 = \binom{n}{2} \quad n^2 - n - 300 = 0$$

$$n_1 = 17,8 \quad (n_2 = -16,8 \text{ entfällt})$$

Es können höchstens 17 Personen teilnehmen.

25.49. s h (s. Bild L 37)

2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

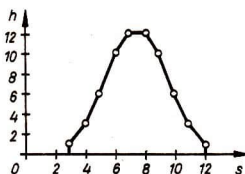


Bild L 37

25.50. x s s h (s. Bild L 38)

111	3	3	1
112	4	4	3
113	5	5	6
114	6	6	10
121	4	7	12
122	5	8	12
123	6	9	10
124	7	10	6
131	5	11	3
⋮	⋮	12	1
442	10		
443	11		
444	12		

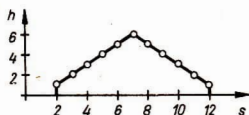


Bild L 38

25.51. x s s h Am häufigsten ist die Summe 32 zu erwarten.

7777	28	28	1
7778	29	29	4
7779	30	30	10
⋮	⋮	31	16
9997	34	32	19
9998	35	33	16
9999	36	34	10
		35	4
		36	1

25.52. x	h	$x \cdot h$	w	$\binom{20}{x}$	$P(x)$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	20	0
2	0	0	0	190	0
3	0	0	0	1140	0
4	0	0	0	4845	0
5	0	0	0	15504	0
6	0	0	0	38760	0
7	0	0	0	77520	0,001
8	0	0	0	125970	0,004
9	1	9	0,013	167960	0,014
10	3	30	0,039	184756	0,034
11	5	55	0,065	167960	0,070
12	9	108	0,117	125970	0,120
13	13	169	0,169	77520	0,168
14	16	224	0,208	38760	0,192
15	15	225	0,195	15504	0,174
16	8	128	0,104	4845	0,124
17	5	85	0,065	1140	0,067
18	2	36	0,026	190	0,025
19	0	0	0	20	0,006
20	0	0	0	1	0,001
77		1069	1,000		1,000

$$\bar{x} = \frac{1069}{77} = 13,9 \quad p = \frac{\mu}{n} \approx \frac{13,9}{20} = 0,695$$

$$P(x) = \binom{20}{x} \cdot 0,695^x \cdot (1 - 0,695)^{20-x}$$

$$25.53. \quad p = \frac{300}{2612246} = 0,000115 \quad \mu = n \cdot p = 3,45$$

$$P = P(5) = \frac{3,45^5}{5!} \cdot e^{-3,45} = 0,129$$

$$25.54. \quad p_k = P_s(k) = \binom{5}{k} \cdot 0,48^k \cdot (1 - 0,48)^{5-k}$$

k	p_k
0	0,038
1	0,175
2	0,324
3	0,299
4	0,138
5	0,025

$$a) \quad P_s(2) = 0,324 = 32,4\%$$

$$b) \quad P = P(0 \vee 1 \vee 2 \vee 3) = P_s(0) + P_s(1) + P_s(2) + P_s(3) \\ = 0,836 = 83,6\%$$

$$c) \quad P = P(4 \vee 5) = P_s(4) + P_s(5) = 0,163 = 16,3\%$$

$$d) \quad P_s(5) = 0,025 = 2,5\%$$

$$e) \quad P_s(0) = 0,038 = 3,8\%$$

Sachwortverzeichnis

- Ableitung 46, 48
 - , partielle 232, 233, 234
 - der Exponentialfunktion 73
 - — logarithmischen Funktion 72
 - — Potenzfunktion 50
 - — trigonometrischen Funktionen 70
 - — Umkehrfunktion 68
 - — zyklometrischen Funktionen 74
 - einer Funktion bei Darstellung in Polarkoordinaten 175
 - — — Parameterdarstellung 171
 - — — in impliziter Darstellung 66, 240
 - — Konstanten 52
 - — mittelbaren Funktion 65
 - — Summe 52
 - eines konstanten Faktors 52
 - — Produktes 63
 - — Quotienten 64
 - höherer Ordnung 81
- Ableitungsregeln 52 ff.
- Arbeit eines Wechselstromes 202
- Arbeitsintegral 200
- Archimedische Spirale 169
- Astroide 188, 189
- Ausdehnungsarbeit eines Gases 201
- Ausgleichs-gerade 260
 - -prinzip 255
- Beobachtungen, vermittelnde 260
- Beobachtungsfehler 250
- BERNOULLISCHE Formel 338
- Beschleunigung 190
- Binomialverteilung 351
 - , Mittelwert 353
 - , Streuung 353
- Bogen-element 178
 - -länge 177
- charakteristische Gleichung 318
- Definitionsbereich für Funktionen von mehreren Variablen 226
- Differential 54 ff.
 - , totales 236, 238
- Differentialgleichung, allgemeine Lösung 300
 - —, Definition 300
 - —, homogene lineare 1. Ordnung 308
 - —, — — 2. Ordnung 317
 - —, lineare 1. Ordnung 307 ff.
 - —, — n -ter Ordnung 301
 - —, inhomogene lineare 1. Ordnung 308
 - —, — — 2. Ordnung 322
 - —, mit trennbaren Variablen 304
 - —, Ordnung 300
 - —, 1. Ordnung 304
 - —, partikuläre Lösung 301
 - -quotient 57
 - —, partieller 232, 233
- Differentiation 48
 - , grafische 212
- Differenzquotient 47
- differenzierbar 48, 49
- differenzieren nach logarithmieren 74
- Dispersion 353
- divergent, bestimmt 23
 - , unbestimmt 23
- Ereignis, entgegengesetztes 335
- Ereignis, zufälliges 331
- Ereignisse, Produkt der 334
 - , Summe der 334
 - , unabhängige 336
 - , unverträgliche 335
- Erwartungswert 353
- Exponentialverteilung 361
- Extrem-punkt 86
 - -stelle 87, 243
 - -wert 87, 243, 245
 - —, hinreichende Bedingung 87, 243
 - —, notwendige Bedingung 87, 243
 - — -aufgaben 100
- Fehler, absoluter 250
 - , grober 249
 - , mittlerer 256
 - , relativer 250
 - , systematischer 249
 - , wahrer 250
 - , zufälliger 249
 - -fortpflanzungsgesetz 258
 - -integral 357
- Fläche, Berechnung bei Darstellung in Polarkoordinaten 186
 - , — — Parameterdarstellung 184
 - , Inhalt, bei symmetrischen Kurven 130 ff.
 - , —, zwischen einer Kurve und der x -Achse 125 ff.
 - , —, — — — — y -Achse 135 ff.
 - , —, — — zwei Kurven 132 ff.
- Flächen-einheit 116
 - -element 125
 - -inhalt 125 ff.
 - —, orientierter 129
- Flachpunkt 89
- Freiheitsgrad 256, 366
- Funktion, äußere 65
 - , differenzierbare 49

- Funktion, innere** 65
 —, mittelbare 65
 —, monoton fallende 82
 —, — wachsende 82
 —, stetige 37
 —, unstetige 37
 —, von unten konkave 84
 —, — — konvexe 84
 — mit n Veränderlichen 226
 — — zwei Veränderlichen 226
- GAUSSsche Glockenkurve** 356
Geschwindigkeit 190
grafische Differentiation 212
 — Integration 214
Grenze, obere 115
 —, untere 115
Grenzwert, linksseitiger 33
 —, rechtsseitiger 33
 —, uneigentlicher 23
 — einer Folge 19ff., 22
 — — Funktion 30ff., 33, 38
 — sätze 26, 33
Größtfehler 254
 —, statistischer 370
Grund-gesamtheit 333
 — integral 117, 145
- Halbwertszeit** 28
Häufigkeit, absolute 346
 —, relative 332, 347
Häufigkeitsverteilung 347
Herzkurve 187
Histogramm 347
Hochpunkt 86
- Induktivität** 194
Integral, bestimmtes 115
 —, —, als Grenzwert 123
Integral, RIEMANNsches be-
stimmtes 123
 —, unbestimmtes 113
 — funktion 113
 — tafel 156ff.
Integrand 113
Integration grafische 214
 —, numerische 218
 — durch Substitution 148ff.
Integrations-intervall 115
 — konstante 113
 — variable 113
integrierbar 123
- Kapazität** 194
Kardioide 187, 189
KEPLERsche FaBregel 220
- Kettenregel** 66
Klassen-einteilung 349
 — häufigkeit 349
 — mitte 349
Kombinationen 343
Kombinatorik 340ff.
Konfidenzintervall 370
Konkavbogen 84
Kontrollmessungen 256
konvergente Folgen 22
 — Reihen 270
Konvergenz-bereich 277
 — radius 277
Konvexbogen 84
Kovarianz 262
Kreisevolvente 174
Krümmung 181
Krümmungs-kreis 182
 — mittelpunkt 182
 — radius 182
Kurve, abgeleitete 82
Kurven-anstieg 48
 — diskussion 94
- Ladung** 194
Linielement 307
logarithmische Spirale 169
Lücke 34
- Maßzahlen, statistische** 346ff.
Maximalfehler 250, 251
Maximum 87, 241
 — punkt 86, 243
 — stelle 87
Meßfehler 250
Methode der kleinsten
 Quadratsumme 255
Minimum 87, 241
 — punkt 86, 243
 — stelle 87
Mittelwert 254
 —, arithmetischer 197, 255,
 348
 —, elektrolytischer 200
 —, linearer 198
 —, quadratischer 198
Monotoniebogen, fallender 82
 —; wachsender 82
- Näherungsparabeln** 281
Nebenbedingungen 102
NEILSche Parabel 165
Normale 171
Normalverteilung 355ff.
 —, Abweichungsintegral 357
- Nullfolge** 22
numerische Integration 218
- Obersumme** 122
- Paraboloid, hyperbolisches**
 230
Partialsummen 269
Permutationen 340
Poisson-Verteilung 360
Pol einer Funktion 35
Potenzreihe 276
 —, Koeffizienten 276
 —, Konvergenzbereich 277
 —, Konvergenzradius 277
Produktregel 63
Prüf-größe 363
 — hypothese 366ff.
 — verteilung 363
 —, der Prüfgröße 365
- Quotientenregel** 65
- radioaktiver Zerfall** 28
Rauminhalt 137ff.
Regression, lineare 260ff.
Regressionsgerade 261
Reihe, alternierende 270
 —, binomische 285
 —, divergente 270
 —, konvergente 270
 —, Summe der 13, 18, 270
 —, unendliche 269ff.
 —, — geometrische 271ff.
Rekursionsformel 157
Restglied 274
 —, Form von LAGRANGE 280,
 289
 — abschätzung für alternie-
 rende Reihen 275
 — — — Potenzreihen 280
Richtungsfeld 307
Rollkurven 165
Rotations-körper, Mantel-
fläche 189
 —, Volumen 139, 189
 — paraboloid 229
- Sattelfläche** 230
Scheitelpunkt 183
Schwerpunkt 203
 — ebener Flächen 204
Sicherheit, statistische 364
Sicherheitsgrenze 364, 366
Signifikanzniveau 364, 365
SIMPSONsche Regel 220

- Spannung 193
 Stamm-funktion 82, 113
 — -kurve 82
 Standardabweichung 256, 258
 statisches Moment 203
 — — ebener Flächen 204
 Sternkurve 188
 Stetigkeit einer Funktion 37
 Stichprobe 333
 Störfunktion 308
 Streuungsmaß 254, 256
 Stromstärke 193
 Strophoide 187
 Stufenpunkt 91
 Stützstellen 218
 Substitution, lineare 148 ff.
- Tangentenanstieg 48
 TAYLORsche Reihe, 1. Form 281
 — —, 2. Form 289
 Teilsummen 269, 277
 — -folge 269
 Terrassenpunkt 91
 Tiefpunkt 86
 Trend 263
 trigonometrische Funktionen, Ableitungsregeln 70 ff.
 t -Verteilung 368
- Umfang der Meßreihe 256
 — — Stichprobe 333
 Umkehrfunktion, Ableitungsregel 68
 Unstetigkeit einer Funktion 30
 — — —, hebbare 38
 Untersumme 122
 Urliste 346
- Variation der Konstanten 308
 Variationen 341
 Varianz 256, 348
 Verteilungsfunktion 359
 Volumen-element 137
 — eines Rotationskörpers 168, 139 ff.
 — -einheit 138
- Wachstum, kontinuierliches 28
 Wachstumsintensität 28
 Wahrscheinlichkeit 331, 332, 333
 —, Additionsregel 335
 —, bedingte 337
 —, eines Intervalls 354, 356
 —, Multiplikationsregel 336
 Wahrscheinlichkeits-dichte 356
- Wahrscheinlichkeits-verteilungen 350 ff.
 Weg 190
 Wendepunkt 90
 Wertevorrat für Funktionen von mehreren Variablen 226
- Zahlenfolgen 9 ff.
 —, alternierende 10
 —, arithmetische 12
 —, beschränkte 20
 —, divergente 22
 —, fallende 10
 —, geometrische 15
 —, Grenzwert von 19 ff.
 —, konstante 10
 —, konvergente 22
 —, unendliche 10
 —, wachsende 10
 zeitlich veränderliche Größen 190
 — — Ströme und Spannungen 193
 Zielfunktion 102
 Zufallsgröße 345
 —, diskrete 346
 —, stetige 346
 Zykloiden 165
 —, gewöhnliche 165

Integraltafel

Bei jedem unbestimmten Integral ist die Integrationskonstante zu addieren.

1. Die Integranden sind rational

$$1.1. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)}; n \neq -1$$

$$1.2. \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b|$$

$$1.3. \int x(ax + b)^n dx = \frac{1}{a^2} \left[\frac{(ax + b)^{n+2}}{n+2} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{n+1} \right]; n \notin \{-1; -2\}$$

$$1.4. \int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{1}{a^2} [ax - b \ln |ax + b|]$$

$$1.5. \int \frac{x dx}{(ax + b)^2} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{b}{ax + b} + \ln |ax + b| \right]$$

$$1.6. \int x^2(ax + b)^n dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax + b)^{n+3}}{n+3} - \frac{2b(ax + b)^{n+2}}{n+2} + \frac{b^2(ax + b)^{n+1}}{n+1} \right] \\ n \notin \{-1; -2; -3\}$$

$$1.7. \int \frac{x^2 dx}{ax + b} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax + b)^2}{2} - 2b(ax + b) + b^2 \ln |ax + b| \right]$$

$$1.8. \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^2} = \frac{1}{a^3} \left[ax + b - 2b \ln |ax + b| - \frac{b^2}{ax + b} \right]$$

$$1.9. \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^3} = \frac{1}{a^3} \left[\ln |ax + b| + \frac{2b}{ax + b} - \frac{b^2}{2(ax + b)^2} \right]$$

$$1.10. \int \frac{dx}{(x^2 + b)^n} = \frac{x}{(n-1)2b(x^2 + b)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(n-1)2b} \int \frac{dx}{(x^2 + b)^{n-1}}; n \neq 1$$

$$1.11. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$1.12. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

2. Die Integranden enthalten Quadratwurzeln

$$2.1. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$2.2. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$2.3. \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$2.4. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$2.5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$2.6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$2.7. \int x \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{(\sqrt{ax^2 + bx + c})^3}{3a} - \frac{b(2ax + b) \sqrt{ax^2 + bx + c}}{8a^2} - \frac{b(4ac - b^2)}{16a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$2.8. \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$2.9. \int x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{(6ax - 5b)(\sqrt{ax^2 + bx + c})^3}{24a^2} + \frac{5b^2 - 4ac}{16a^3} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$$

$$2.10. \int \frac{x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx = \frac{2ax - 3b}{4a^2} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^3} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

3. Die Integranden enthalten trigonometrische Funktionen

$$3.1. \int \sin \omega x \, dx = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x$$

$$3.2. \int \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

$$3.3. \int \sin^2 \omega x \, dx = \frac{1}{2\omega} (\omega x - \sin \omega x \cos \omega x)$$

$$3.4. \int \cos^2 \omega x \, dx = \frac{1}{2\omega} (\omega x + \sin \omega x \cos \omega x)$$

$$3.5. \int \sin^n \omega x \, dx = -\frac{1}{n\omega} \sin^{n-1} \omega x \cos \omega x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} \omega x \, dx; n \neq 0$$

$$3.6. \int \cos^n \omega x \, dx = \frac{1}{n\omega} \cos^{n-1} \omega x \sin \omega x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \omega x \, dx; n \neq 0$$

$$3.7. \int x^n \sin \omega x \, dx = -\frac{x^n}{\omega} \cos \omega x + \frac{n}{\omega} \int x^{n-1} \cos \omega x \, dx$$

$$3.8. \int x^n \cos \omega x \, dx = \frac{x^n}{\omega} \sin \omega x - \frac{n}{\omega} \int x^{n-1} \sin \omega x \, dx$$

$$3.9. \int \sin \omega_1 x \sin \omega_2 x \, dx = \frac{\sin (\omega_1 - \omega_2) x}{2(\omega_1 - \omega_2)} - \frac{\sin (\omega_1 + \omega_2) x}{2(\omega_1 + \omega_2)}; |\omega_1| \neq |\omega_2|$$

$$3.10. \int \sin \omega_1 x \cos \omega_2 x \, dx = -\frac{\cos (\omega_1 - \omega_2) x}{2(\omega_1 - \omega_2)} - \frac{\cos (\omega_1 + \omega_2) x}{2(\omega_1 + \omega_2)}; |\omega_1| \neq |\omega_2|$$

$$3.11. \int \cos \omega_1 x \cos \omega_2 x \, dx = \frac{\sin (\omega_1 - \omega_2) x}{2(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{\sin (\omega_1 + \omega_2) x}{2(\omega_1 + \omega_2)}; |\omega_1| \neq |\omega_2|$$

$$3.12. \int \sin \omega x \sin (\omega x + \varphi) \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\omega} \sin (2\omega x + \varphi) + x \cos \varphi \right]$$

$$3.13. \int \sin \omega x \cos (\omega x + \varphi) \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\omega} \cos (2\omega x + \varphi) - x \sin \varphi \right]$$

$$3.14. \int \cos \omega x \cos (\omega x + \varphi) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\omega} \sin (2\omega x + \varphi) + x \cos \varphi \right]$$

$$3.15. \int \tan \omega x \, dx = -\frac{1}{\omega} \ln |\cos \omega x|$$

$$3.16. \int \cot \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} \ln |\sin \omega x|$$

4. Die Integranden enthalten Exponentialfunktionen

$$4.1. \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$4.2. \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

$$4.3. \int e^{ax} \sin \omega x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2} (a \sin \omega x - \omega \cos \omega x)$$

$$4.4. \int e^{ax} \cos \omega x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2} (a \cos \omega x + \omega \sin \omega x)$$

5. Die Integranden enthalten logarithmische Funktionen

$$5.1. \int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$5.2. \int (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx; n \in \mathbb{N}$$

$$5.3. \int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]; n \neq -1$$

$$5.4. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x|$$

6. Einige bestimmte Integrale

(6.5. bis 6.14. gelten für $m \in \mathbb{G}$, $n \in \mathbb{G}$.)

$$6.1. \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega x \, dx = 0$$

$$6.2. \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega x \, dx = 0$$

$$6.3. \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin \omega x \, dx = \frac{1}{\omega}$$

$$6.4. \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\omega}$$

$$6.5. \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0$$

$$6.6. \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

$$6.7. \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$6.8. \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

$$6.9. \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$6.10. \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$6.11. \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$6.12. \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$6.13. \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$6.14. \int_0^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m + n \text{ gerade} \\ \frac{2m}{m^2 - n^2}, & m + n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Wenn $m = n = 0$, so ist 6.9.: 0, 6.10.: 2π , 6.12.: 0, 6.13.: π)

$$6.15. \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$6.16. \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx = n!; \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

