

The cover features a complex abstract design. At the top left, a black cross is on a tan background. To its right, a green field contains a large blue infinity symbol. Below the cross, a blue field contains a white chevron pointing left. To the right of the chevron, a green triangle is on a tan background. In the middle left, a green field contains two blue circles. The title is centered on a tan background. At the bottom left, a blue field contains a black chevron pointing right. At the bottom right, a green field contains a white 'X' shape.

Aufgaben von
Mathematikolympiaden
in der UdSSR
und in der ČSSR

Aufgaben von Mathematikolympiaden in der UdSSR und in der ČSSR



VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1965

Titel der Originalausgaben:

Н. Б. Васильев, А. А. Егоров:

«Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков»
(Учпедгиз 1963)

Rudolf Zelinka:

„Osmý ročník matematické olympiády“
(Státní pedagogické nakladatelství 1960)

Rudolf Zelinka:

„Devátý ročník matematické olympiády“
(Státní pedagogické nakladatelství 1961)

Herausgegeben von Prof. Dr. Udo Pirl, Professor mit Lehrauftrag
am I. Mathematischen Institut der Humboldt-Universität zu Berlin

Übersetzt von Doris-Ursula Pirl, Berlin, und Hilde Fritsch, Potsdam

Redaktion: Siegmар Kubicek, Karlheinz Martin, Ursula Krüger (Red.-Ass.)

Redaktionsschluß: 15. Mai 1964

Einband: Medea Lemme

Zeichnungen: Heinz Grothmann

ES 10 C · Bestell-Nr. 002106-1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/64 (E)

Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)

INHALTSVERZEICHNIS

Teil I · Aufgaben zur Vorbereitung auf die Allrussische Olympiade junger Mathematiker

Vorwort		9
Vorwort des Herausgebers		11
	Aufgaben	Lösungen
1. Aufgaben über die Teilbarkeit von Zahlen	13	33
2. Aufgaben zum „Dirichletschen Schubfachschiuß“	16	39
3. Aufgaben zur ebenen Geometrie	17	41
4. Aufgaben zur Geometrie des Raumes	22	47
5. Aufgaben, die mit Hilfe der vollständigen Induktion zu lösen sind	23	50
6. Aufgaben über kariertes Papier	26	56
7. Vermischte Aufgaben	27	59
8. Aufgaben, die bei der zweiten allrussischen Olympiade gestellt worden sind	31	66

Teil II · Achter Jahrgang der Mathematikolympiade in der ČSSR

	Aufgaben	Lösungen
1. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 11	75	84
2. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 11	76	103
3. Aufgaben der dritten Stufe, Klasse 11	77	111
4. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 10	77	120
5. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 10	78	139
6. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 9	79	145
7. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 9	80	161
8. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 8	81	166
9. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 8	82	176

Teil III · Neunter Jahrgang der Mathematikolympiade in der ČSSR

	Aufgaben	Lösungen
1. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 11	189	198
2. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 11	190	218
3. Aufgaben der dritten Stufe, Klasse 11	191	225
4. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 10	192	234
5. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 10	192	252
6. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 9	193	257
7. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 9	194	272
8. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 8	195	277
9. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 8	196	286

TEIL I

N. B. Wassiljew, A. A. Jegorow

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Allrussische Olympiade junger Mathematiker

Staatlicher Verlag für pädagogische Literatur, Moskau 1963

VORWORT

Der bedeutendste Wettbewerb junger Mathematiker in unserem Lande, die allrussische Mathematik-Olympiade, die vom Ministerium für Volksbildung der RSFSR durchgeführt wird, ist schon zur Tradition geworden.

Für die Endetappe der Olympiade, die in den Frühjahrsferien in Moskau stattfindet, kommen aus allen Teilen unseres Landes diejenigen Schüler zusammen, die bei den Olympiaden in den Städten, Kreisen und Bezirken die besten Resultate erzielten.

Im Zusammenhang damit wurde es notwendig, alle Schüler, die sich für Mathematik interessieren, in verständlicher Form mit dem Charakter der Aufgaben, die für die Olympiade vorgesehen sind, vertraut zu machen. Zu diesem Zweck wird die vorliegende Sammlung, die ungefähr 200 verschiedene Aufgaben enthält, herausgegeben.

Dabei bilden die Aufgaben von erhöhter Schwierigkeit, die das Ziel haben, die mathematischen Kenntnisse im Schulunterricht zu vertiefen, nur einen geringen Teil der Sammlung. Es gibt eine genügende Anzahl von Büchern sowohl für Schüler als auch für Lehrer, in denen derartige Aufgaben zusammengestellt sind und auf deren Lösungsverfahren hingewiesen wird. (SCHACHNO, Sammlung von mathematischen Aufgaben; KRETSCHMAR, Sammlung von Algebra-Aufgaben; DELONE und SHITOMIRSKI, Sammlung von Aufgaben der Geometrie; HADAMARD, Elementar-Geometrie; verschiedene Aufgaben für Wettbewerbe u. a.)

Der Zweck der vorliegenden Sammlung ist vor allem, die Leser mit solcher Thematik und solchen Fragestellungen bekannt zu machen, die nicht selten sogar sehr befähigte Schüler in Schwierigkeiten bringen, wenn sie zum ersten Male mit ihnen zusammen treffen.

Insbesondere werden an vielen Stellen in der Aufgabensammlung Teilbarkeitsaufgaben gestellt. Ferner enthält die Sammlung Aufgaben über die Anordnung von Punkten und Figuren in der Ebene, geometrische Konstruktionsaufgaben, Aufgaben zur Methode der vollständigen Induktion, Aufgaben von rein logischem Charakter und andere, die häufig bei Mathematik-Olympiaden gestellt werden. Ein großer Teil der Aufgaben ist der Sammlung von Vorbereitungsaufgaben zur Moskauer Olympiade und einigen anderen Olympiaden sowie den Büchern der Reihe *Bibliothek des mathematischen Zirkels* und einigen ausländischen Zeitschriften entnommen worden.

Bei vielen der gestellten Aufgaben sind zur Lösung einige Anstrengungen und eine erhebliche Auffassungsgabe nötig.

Zur Erleichterung sind alle Aufgaben mit Hinweisen und in einzelnen Fällen auch mit kurzen Lösungen versehen, die Aufschluß über einige Verfahren geben, die man oft bei der Lösung von ähnlichen Aufgaben verwenden kann.

Es empfiehlt sich jedoch, erst dann die Hinweise zu benutzen, wenn man lange genug versucht hat, die Lösung zu finden; nur in diesem Fall bringt das Arbeiten an den Aufgaben wirklich einen Nutzen. Man sollte dabei nicht gleich verzweifeln, wenn es nicht gelingt, diese oder jene Aufgabe selbständig zu lösen. Dies bezieht sich besonders auf die schwierigeren Aufgaben, die mit einem oder mit zwei Sternchen versehen sind.

Die Aufgabensammlung besteht aus 8 Abschnitten, von denen ein jeder Aufgaben enthält, die entweder in der Idee der Lösung oder im Thema verwandt sind. Vor allem sind die Aufgaben jedes Abschnitts der Reihe nach zu lösen (dies bezieht sich insbesondere auf die Abschnitte 2 und 6).

Ein großer Teil der Aufgaben ist für Schüler der achten Klasse zugänglich. Für die übrigen sind besondere Vermerke angebracht (z. B. bedeutet die Ziffer (X) nach der Nummer der Aufgabe, daß diese für Schüler der X. bis XI. Klassen gedacht ist). Die Abschnitte 4 und 5 sind durchweg für Schüler der Klassen X und XI bestimmt.

Am Schluß der Sammlung werden die Aufgaben, die bei der zweiten allrussischen Olympiade junger Mathematiker gestellt worden sind, einschließlich ihrer vollständigen Lösungen mitgeteilt.

Bei dieser Gelegenheit möchten wir dem Initiator dieser Sammlung, dem Akademiemitglied A. N. KOLMOGOROW, der die Herausgabe der Sammlung übernahm, unseren Dank aussprechen.

N. B. Wassiljew, A. A. Jegorow

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Unser Land benötigt eine große Anzahl gut ausgebildeter und talentierter Mathematiker. Es ist sehr wichtig, daß man für den Beruf eines Mathematikers solche Vertreter unserer Jugend auswählt, die auf diesem Gebiet besonders produktiv arbeiten können. Die Mathematik-Olympiaden ermöglichen es, begabte junge Menschen für die Mathematik zu interessieren. Die Teilnahme an mathematischen Zirkeln und Olympiaden in den Schulen kann jedem helfen, seine eigenen Fähigkeiten, die Ernsthaftigkeit und Beständigkeit seiner Zuneigung zur Mathematik einzuschätzen. In der Sammlung, die von N. B. WASSILJEW und A. A. JEGOROW verfaßt wurde, sind Aufgaben zusammengestellt worden, für deren Lösung keine besonderen Kenntnisse erforderlich sind, die über die Grenzen des Lehrplanes für Mittelschulen hinausgehen, sondern sie erfordern eine bestimmte Selbständigkeit im Denken und in der Auffassungsgabe. Zum Schluß der Sammlung werden Beispiele von Aufgaben angeführt, die auf allrussischen Mathematik-Olympiaden gestellt worden sind. Es wird beabsichtigt, im Jahre 1963 für die besten Teilnehmer der allrussischen Mathematik-Olympiaden, welche die IX. Klasse der Zehnjahresschule oder die X. Klasse der Elfjahresschule besucht haben, in Moskau einen *Frühjahrslehrgang für Mathematik* einzurichten, in dem sie sich einen Monat lang unter Anleitung von Hochschullehrern und Aspiranten der Moskauer Universität mit Mathematik beschäftigen können.

Indem ich den Lesern der Sammlung viel Erfolg beim Lösen der Aufgaben und einen Sieg bei den Olympiaden in den Städten und Bezirken sowie bei der allrussischen Olympiade wünsche, möchte ich zugleich bemerken, daß der Weg zur ernsthaften Arbeit auf dem Gebiet der mathematischen Wissenschaft nicht immer der gleiche ist. Dem einen fällt das Lösen von komplizierten Aufgaben leicht, ein anderer tut sich anfangs auf diesem Arbeitsgebiet nicht hervor, aber er dringt, indem er langsamer arbeitet, tiefer und ernsthafter in die Theorie ein. Einige lernen erst später selbständig zu arbeiten. Letzten Endes muß sich jeder, der die Mathematik als Hauptinteressengebiet und Beruf wählt, von seiner eigenen Selbsteinschätzung leiten lassen und nicht von der Anzahl der Prämien und Belobigungen auf den Olympiaden.

A. N. Kolmogorow

16. Kann eine Quadratzahl auf vier einander gleiche von Null verschiedene Ziffern enden?
17. Es ist zu beweisen, daß die Zahl $n^4 + 4$ für jedes ganze $n \geq 2$ eine zusammengesetzte Zahl ist.
18. Es ist zu beweisen:
Ist die Summe dreier ganzer Zahlen durch 6 teilbar, dann ist die Summe ihrer Kuben auch durch 6 teilbar.
19. Es ist zu beweisen:
Die Zahl $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ ist für jedes ganze m ganzzahlig.
20. Eine gewisse ganze Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit Hilfe von 300 Einsen und einer gewissen Anzahl Nullen. Kann sie eine Quadratzahl sein?
21. Es sei b die letzte Ziffer der Zahl 2^n und $2^n = 10a + b$. Man zeige, daß ab durch 6 teilbar ist.
- *22. Einige von 15 Bogen Papier wurden in 10 Teile zerschnitten. Sodann wurden einige der zerschnittenen Bogen nochmals in 10 Teile zerschnitten usw. Als man alle so entstehenden Papierbogen zusammenzählte, erhielt man 1963. Beweisen Sie, daß falsch gezählt worden ist!
23. Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu finden, die bei der Teilung durch 2, 3, 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 ergibt.
24. (Fortsetzung) Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu finden, die bei der Teilung durch 2, 3, 5, ..., p_i , ..., p_n (p_i die i -te der ersten n Primzahlen) den Rest 1 ergibt.
- *25. (Fortsetzung) Man beweise, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.
26. Man beweise, daß es zu jeder beliebigen Zahl N stets N aufeinanderfolgende zusammengesetzte ganze Zahlen gibt. (Das heißt, obwohl die Menge der Primzahlen unendlich ist, gibt es doch beliebig lange Abschnitte natürlicher Zahlen, die keine Primzahl enthalten.)
- *27. Es ist zu beweisen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, die bei Teilung durch 4 den Rest 3 ergeben, d. h. die Primzahlen der Form $4n + 3$ sind. Das entsprechende ist für die Zahlen der Form $6n + 5$ zu zeigen.
28. Es ist zu beweisen, daß es unendlich viele ganze Zahlen gibt, die sich nicht in der Form $p + n^2$ darstellen lassen, wie die Primzahl p und die ganze Zahl $n > 1$ auch gewählt sein mögen.

29. Es ist die folgende Gleichung zu beweisen:

$$(2 + 1)(2^2 + 1) \dots (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

****30.** Es ist zu beweisen, daß zwei beliebige Zahlen der Folge

$$2^{2^0} + 1 = 3, \quad 2^{2^1} + 1 = 5, \quad 2^{2^2} + 1 = 17, \quad \dots, \quad 2^{2^n} + 1$$

zueinander teilerfremd sind. Man leite hieraus das Resultat der Aufgabe 25 her.

31. Unter dem ganzen Bestandteil einer gegebenen reellen Zahl x versteht man die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Er wird mit dem Symbol $[x]$ bezeichnet.

a) Der ganze Bestandteil folgender Zahlen ist zu finden.

$$-1,5; \quad -\frac{1}{2}; \quad 0; \quad 1; \quad 2\frac{1}{2}; \quad 3,99$$

b) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften über den ganzen Bestandteil von Zahlen!

1) Es ist $[n + x]$ gleich $n + [x]$ für jedes ganze n . 2) Es gilt $\left[\frac{ka}{b}\right] \geq k \left[\frac{a}{b}\right]$ für jedes ganze k .

32. Man beweise, daß es genau $\left[\frac{N}{q}\right]$ natürliche Zahlen gibt, die nicht größer als die gegebene Zahl $N > 0$ sind und durch die gegebene natürliche Zahl $q (q < N)$ teilbar sind.

33. Man beweise:

Ist $b > 0$ eine ganze Zahl, dann gilt $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{[a]}{b}\right]$ für $a \geq 0$.

***34.** Mit $n!$ bezeichnet man das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots)$. Beweisen Sie, daß die höchste Potenz der Primzahl p , durch die $n!$ teilbar ist, gleich $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^m}\right]$ ist, wenn $p^m \leq n$ und $p^{m+1} > n$ ist!

***35. (X)** Man beweise, daß $n!$ für kein n durch p^n teilbar ist, wenn p eine Primzahl ist.

***36.** Man beweise, daß die Zahl $(n)!$ durch die Zahl $(n!)^{(n-1)!}$ teilbar ist.

37. Es seien zwei natürliche Zahlen a und b gegeben. Bei der Teilung durch b ergebe a den Rest r_1 . Teilt man b durch r_1 (es ist klar, daß $r_1 < b$ ist) möge sich der Rest r_2 ergeben, weiter möge sich bei der Teilung von r_1 durch r_2 der Rest r_3 ergeben usw. Es ist zu beweisen, daß nach einer gewissen Anzahl von Schritten

der Prozeß abbricht (d. h. ein gewisser Rest r_{n-1} wird schließlich durch r_n teilbar sein) und daß der letzte von Null verschiedene Rest der größte gemeinsame Teiler von a und b ist.

***38.** (Fortsetzung) Es ist zu beweisen, daß man zu zwei beliebigen ganzen Zahlen a und b stets zwei ganze Zahlen m und n finden kann, so daß $ma + nb = d$ ist, wenn d den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b bedeutet. (Sind insbesondere a und b teilerfremd zueinander, dann folgt aus dem Ergebnis dieser Aufgabe, daß es zwei ganze Zahlen m und n gibt, so daß $ma + nb = 1$ ist.)

****39.** Man beweise:

Sind die Zahlen $2^p - 1$ und $2^q - 1$ zueinander teilerfremd, dann sind auch die Zahlen p und q zueinander teilerfremd und umgekehrt:

Sind die Zahlen p und q zueinander teilerfremd, dann sind auch die Zahlen $2^p - 1$ und $2^q - 1$ zueinander teilerfremd.

Es ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $2^p - 1$ und $2^q - 1$ zu finden, wenn p und q nicht zueinander teilerfremd sind.

40. Es ist zu beweisen, daß alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^m = y^n$, in der die gegebenen Zahlen m und n teilerfremd sind, durch die Formeln $x = t^n$, $y = t^m$ gegeben werden, wobei t alle ganzen Zahlen durchläuft.

41. (IX) Beweisen Sie, daß $\lg 2$ eine irrationale Zahl ist!

***42.** (IX) Wie müssen die ganzen Zahlen a und b beschaffen sein, damit $\log_a b$ eine rationale Zahl ist?

2. Aufgaben zum „DIRICHLETSchen Schubfachschiuß“

Im vorliegenden Abschnitt werden einige Aufgaben gestellt, deren Lösungen auf dem folgenden „DIRICHLETSchen Schubfachschiuß“ beruhen:

Wenn $n + 1$ Gegenstände auf n Schubladen verteilt sind, dann müssen sich in wenigstens einer Schublade zwei Gegenstände befinden.

43. Es ist zu beweisen, daß man unter $n + 1$ ganzen Zahlen stets zwei finden kann, deren Differenz durch n teilbar ist.

44. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Zahl der Gestalt $111 \dots 100 \dots 0$, die durch n teilbar ist. Dies ist zu beweisen.

45. Zu jeder 100stelligen Zahl M kann man eine Zahl finden, die durch 1963 teilbar ist und deren letzte 100 Ziffern die Zahl M bilden. Dies ist zu beweisen.

46. Man beweise, daß man aus 1000 ganzen Zahlen solche Zahlen auswählen kann, daß deren Summe durch 1000 teilbar ist.
47. Es wird die Folge der Zahlen $6, 6^2, 6^3, \dots, 6^n, \dots$ betrachtet, und es werden die letzten vier Ziffern dieser Zahlen 0006, 0036, 0216, 1296, 7776, ... hingeschrieben. Es ist zu beweisen, daß diese Folge von einer gewissen Stelle n_0 an periodisch ist.
48. Kann man eine Potenz von 3 finden, die mit den Ziffern 0001 endet?
- *49. a) Es ist zu zeigen, daß die Folge der letzten drei Ziffern der „FIBONACCISCHEN Zahlen“ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (jede Zahl ist gleich der Summe der beiden vorhergehenden) periodisch ist.
b)** Es ist zu beweisen, daß unter der ersten Million Glieder dieser Folge eine Zahl vorkommt, die mit drei Neunen endet.
50. Es ist zu beweisen, daß man aus 26 verschiedenen natürlichen Zahlen, die nicht größer als 50 sind, zwei auswählen kann, von denen die eine doppelt so groß wie die andere ist. Ist dies auch für 25 verschiedene Zahlen, die nicht größer als 50 sind, richtig?
- *51. Man zeige, daß man aus $n + 1$ verschiedenen natürlichen Zahlen, die kleiner als $2n$ sind, drei solche auswählen kann, bei denen die Summe von zweien gleich der dritten ist.
- *52. Auf einer quadratischen Fläche von 1 km Seitenlänge wächst ein neuer Wald heran, der aus 4500 Bäumen mit einem Durchmesser von 50 cm besteht. Es ist zu beweisen, daß man in dem Wald eine rechteckige Fläche von $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ finden kann, auf der kein Baum steht.

3. Aufgaben zur ebenen Geometrie

53. Es ist zu beweisen:
Ist die Länge der Strecke $\overline{MN}$, die die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des Vierecks $ABCD$ verbindet, gleich der halben Summe der Länge der anderen Seiten, dann ist dieses Viereck ein Trapez mit der Grundseite $\overline{AD}$.
54. Gegeben sind zwei Kreislinien S_1 und S_2 und die Gerade l . Man konstruiere eine zu der gegebenen Geraden parallele Gerade, bei der der Betrag des Abstandes zwischen ihren Schnittpunkten mit den gegebenen Kreislinien gleich einer gegebenen Zahl a ist.
55. Es ist der geometrische Ort aller Punkte zu finden, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen nicht parallelen Geraden l_1 und l_2 gleich der gegebenen Zahl a ist.

56. Durch einen gegebenen Punkt A soll eine Gerade so gelegt werden, daß die Strecke zwischen ihren Schnittpunkten mit einer gegebenen Geraden und einer gegebenen Kreislinie im Punkte A halbiert wird.
57. Beweisen Sie, daß die Mitten der Seiten jedes Vierecks die Ecken eines Parallelogramms sind!
- *58. Durch einen Punkt, der im Innern eines gegebenen Winkels liegt, soll eine Gerade so gelegt werden, daß das von ihr abgeschnittene Dreieck einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat.
59. Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken auf drei gegebenen konzentrischen Kreisbögen liegen.
60. Über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms $ABCD$ werden nach außen die Quadrate konstruiert. Beweisen Sie, daß die Mittelpunkte dieser Quadrate die Ecken eines Quadrates bilden!
61. Über der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABO mit den gegebenen Seiten $\overline{AO} = a$ und $\overline{OB} = b$ wird das gleichseitige Dreieck ABC konstruiert. Bei welcher Größe des Winkels AOB hat die Strecke $\overline{OC}$ ihre größte (kleinste) Länge?
62. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des gegebenen Dreiecks ABC werden die Quadrate $A'B'BA$ und $B''C'CB$ konstruiert. Beweisen Sie, daß die Verlängerung der Höhe im Dreieck ABC durch die Ecke B Seitenhalbierende im Dreieck $B''B'B$ ist!
63. In ein Quadrat ist ein gleichseitiges Dreieck einzubeschreiben, dessen eine Ecke ein gegebener Punkt auf dem Rande des Quadrats ist.
64. Auf einer gegebenen Geraden l ist ein Punkt X zu finden, so daß die Summe der Abstände des Punktes X von zwei gegebenen Punkten A und B , die auf ein und derselben Seite der gegebenen Geraden liegen, möglichst klein ist.
65. Es soll ein Dreieck von möglichst kleinem Umfang konstruiert werden, dessen eine Ecke in einen gegebenen Punkt A innerhalb eines gegebenen Winkels B fällt und dessen andere Ecken auf verschiedenen Schenkeln des Winkels B liegen.
- *66. Durch einen gegebenen Punkt soll eine Gerade gelegt werden, die von einem gegebenen Winkel ein Dreieck gegebenen Umfangs abschneidet.
- *67. Gegeben sind eine Gerade MN und die Punkte A und B auf ein und derselben Seite der Geraden. Auf dieser Geraden ist ein Punkt X zu finden, für den $\star AXM = 2\star BXN$ ist.
68. Kann man die Ebene parkettieren: a) durch kongruente Dreiecke gegebener Gestalt; b) durch kongruente Vierecke gegebener Gestalt?

69. Ermitteln Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einem Dreieck mit gegebener Grundseite $\overline{AB}$ und gegebenem Gegenwinkel eingeschrieben sind!
70. Gegeben ist eine Kreislinie S . Ermitteln Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die durch einen gegebenen Punkt A gehen!
- *71. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC . Der Punkt M sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und D der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$. Die dem Dreieck MBC umschriebene Kreislinie schneidet die Höhe $\overline{BD}$ im Punkte K . Beweisen Sie, daß $\overline{BK} = \frac{3}{2} R$ ist, wenn R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!
- *72. Einem gegebenen Sektor ist ein einem gegebenen Dreieck kongruentes einzuschreiben.
73. Zwei Kreislinien S_1 und S_2 mögen sich im Punkte A schneiden. Durch den Punkt A soll eine Gerade so gelegt werden, daß die Strecke, die von ihr durch die Kreise S_1 und S_2 abgeschnitten wird, eine gegebene Länge hat.
- *74. Gegeben sind die drei Punkte M_1, M_2, M_3 . Es ist ein Dreieck zu konstruieren, welches zu einem gegebenen kongruent ist und dessen Seiten durch die Punkte M_1, M_2, M_3 gehen.
- *75. In ein gegebenes Dreieck $A_1B_1C_1$ ist ein Dreieck einzuschreiben, das zu einem gegebenen Dreieck ABC kongruent ist.
76. Es ist der geometrische Ort aller Punkte M zu finden, für die $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = k$ ist. Dabei bedeuten A und B gegebene Punkte und k eine gegebene von 1 verschiedene positive Zahl.
77. Es ist eine Kreislinie zu konstruieren, die durch zwei gegebene Punkte A und B geht und eine gegebene Gerade l berührt.
78. Es ist ein Punkt zu finden, von dem aus gesehen eine gegebene Strecke und eine gegebene Kreislinie unter den Winkeln α und β erscheinen.
- *79. Konstruieren Sie ein Dreieck, von dem die drei bezüglich seiner Seiten spiegelbildlich zum Orthozentrum gelegenen Punkte gegeben sind.
80. Es ist ein Dreieck mit den drei Höhen h_a, h_b, h_c zu konstruieren.
- *81. Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ des Parallelogramms $ABCD$ sind die Punkte M und N so gegeben, daß $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \alpha$ und $\frac{\overline{AN}}{\overline{AD}} = \beta$ ist. Der Punkt P sei der Schnittpunkt von $\overline{NM}$ und $\overline{AC}$. Gesucht ist das Verhältnis $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$.

82. Es sind der Winkel ABC und ein Punkt P in seinem Innern gegeben. Auf dem Schenkel AB dieses Winkels ist ein Punkt zu finden, der vom Punkte P den gleichen Abstand wie vom Schenkel BC hat.
83. Innerhalb eines beliebigen Rechtecks liege ein Polygon so, daß jede Gerade, die zu einer Rechteckseite parallel ist, das Polygon in höchstens einem Punkte schneidet. Es ist zu beweisen, daß die Länge des Polygons nicht größer als die Summe der beiden Rechteckseiten ist.
- *84. Es ist der geometrische Ort der Endpunkte aller Polygonzüge der Länge 1 zu finden, die von einem gegebenen Punkt ausgehen und von jeder Geraden, die zu einer von zwei zueinander senkrechten Geraden parallel ist, höchstens einmal geschnitten werden.
85. Beweisen Sie, daß bei einem Vieleck mit mehreren Symmetrieachsen alle diese durch einen gemeinsamen Punkt gehen!
86. Beweisen Sie, daß drei beliebige Punkte der Ebene, von denen keine zwei einen größeren Abstand als 1 haben, in einer Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ liegen.
- *87. (Fortsetzung)
- a) Wenn man von n gegebenen Punkten der Ebene drei stets in eine Kreisscheibe vom Radius r einbeschreiben kann, dann liegen alle n Punkte in einer Kreisscheibe vom Radius r .
- b) Es liegen n Punkte der Ebene, von denen je zwei einen nicht größeren Abstand als 1 haben, innerhalb eines Kreises vom Radius $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Satz von JUNG).
88. (IX) Alle Seiten eines konvexen Vielecks vom Umfang 12 werden um 1 nach außen geschoben. Es ist zu beweisen, daß sich dabei der Flächeninhalt um mehr als 15 vergrößert.
89. Es ist zu beweisen, daß die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes M im Innern eines gleichseitigen Dreiecks von dessen Seiten konstant ist. Allgemeiner gilt: Für einen beliebigen Punkt M im Innern eines gegebenen konvexen Vielecks ist die Summe $a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n$ stets dieselbe. Dabei bedeuten $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Längen der Seiten des Vielecks, und $h_1, h_2, \dots, h_n$ die Abstände des Punktes M von den entsprechenden Seiten.
90. Es ist zu beweisen, daß es im Innern eines spitzwinkligen Dreiecks ABC genau einen Punkt P gibt, für den
- a) $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$ ist,

- b) die Geraden, die durch die Punkte ABC gehen und senkrecht auf den Strecken $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ stehen, ein gleichseitiges Dreieck bilden,
- c) die Summe der Abstände des Punktes P von den Ecken des Dreiecks ABC kleiner ist als von jedem anderen Punkte der Ebene.
91. a) Es seien a und b zwei Seiten eines Dreiecks. Es ist zu beweisen, daß dessen Flächeninhalt S nicht größer als $\frac{ab}{2}$ ist.
- b) Es seien a, b, c und d vier aufeinanderfolgende Seiten eines Vierecks. Es ist zu beweisen, daß dessen Flächeninhalt nicht größer als $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$ ist.
- *92. (IX) Es ist zu beweisen, daß man in einer Kreisscheibe vom Radius 9,5 unmöglich 400 Punkte so unterbringen kann, daß der Abstand zwischen je zweien stets größer als 1 ist.
- *93. (IX) In einem Rechteck mit den Seiten 20 und 25 befinden sich 120 Quadrate der Seitenlänge 1. Es ist zu beweisen, daß man innerhalb des Rechtecks eine Kreisscheibe vom Durchmesser 1 unterbringen kann, die mit keinem der Quadrate einen Punkt gemeinsam hat.
94. Es seien E und F die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Vierecks $ABCD$. P sei der Schnittpunkt der Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{AF}$, Q der Schnittpunkt der Strecken $\overline{EC}$ und $\overline{BF}$. Es ist zu beweisen, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke APD und BQC gleich dem Flächeninhalt des Vierecks $PEQF$ ist.
- *95. In der Ebene seien n Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Es ist zu beweisen, daß man einen sich nicht selbst überschneidenden geschlossenen Polygonzug konstruieren kann, der diese Punkte als Ecken hat.
- *96. Es ist ein sich überschneidender Polygonzug zu konstruieren, bei dem jede Seite genau einmal geschnitten wird. Man zeige, daß ein solcher Polygonzug sicher eine gerade Anzahl n von Seiten hat; für gerade $n \geq 6$ sind Beispiele zu konstruieren.
97. Beweisen Sie, daß es für jede beliebige ungerade Zahl $n \geq 5$ einen geschlossenen, sich selbst überschneidenden Polygonzug mit n Seiten gibt, bei dem jede Seite genau zweimal geschnitten wird!
98. In der Ebene seien $2n$ Punkte gegeben. Weiter sei bekannt, daß es unter drei beliebigen dieser Punkte stets zwei gibt, deren Abstand nicht größer als 1 ist. Man zeige, daß man zwei Kreisscheiben vom Radius 1 so in die Ebene legen kann, daß sie alle diese Punkte bedecken.

4. Aufgaben zur Geometrie des Raumes (X. und XI. Klasse)

99. Es ist zu beweisen, daß die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte einander gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders sich in einem Punkte schneiden und durch ihn halbiert werden.
100. Kann man ein Tetraeder konstruieren, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen oder rechten ebenen Winkels ist?
101. Es ist zu beweisen, daß für ein Parallelepiped, das keine rechten Winkel hat, eine der beiden folgenden Aussagen gilt:
In einer Ecke befinden sich drei ebene spitze Winkel oder in einer Ecke befinden sich drei stumpfe Winkel.
102. Welches ist die größte Anzahl von Kanten, in der eine reguläre n -seitige Pyramide von einer Ebene geschnitten werden kann? Wie ist die Frage bei regulären n -seitigen Prismen zu beantworten?
103. Man zeige, daß es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Man gebe ein Beispiel eines Polyeders mit n Kanten, $n \geq 8$.
104. Eine Ebene schneide alle Strecken eines geschlossenen Polygonzuges $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_nA_1}$ in den Punkten $B_1, B_2, \dots, B_n$. Es ist zu beweisen, daß
- $$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}} \cdot \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2A_3}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{A_{n-1}B_{n-1}}}{\overline{B_{n-1}A_n}} \cdot \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{B_nA_1}} = 1$$
- ist.
105. Man beweise, daß der Flächeninhalt der Projektion eines Polygons auf eine horizontale Ebene gleich $S \cos \alpha$ ist, wenn S sein Flächeninhalt und α der Neigungswinkel der Polygonebene gegenüber der horizontalen Ebene sind.
106. Welche Lage muß ein rechtwinkliges Parallelepiped im Raum haben, damit der Flächeninhalt seiner Projektion auf eine horizontale Ebene möglichst groß ist?
- *107. Man zeige, daß der Flächeninhalt der Projektion eines beliebigen Tetraeders auf eine horizontale Ebene in einem der folgenden 7 Fälle maximal ist: Eine der 4 Seitenflächen ist horizontal oder eines der 3 Paare gegenüberliegender Kanten ist horizontal. Welcher Fall tritt bei einer regulären dreiseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Seitenkante b ein?
108. Man zeige, daß das Volumen eines Polyeders, das einer Kugel vom Radius r umschrieben ist, gleich $\frac{1}{3} rS$ ist, wenn S der Inhalt der Oberfläche des Polyeders ist.

- *109. a) Dafür, daß es eine Kugel gibt, die alle Kanten des Tetraeders $ABCD$ berührt, ist notwendig und hinreichend, daß $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ ist.
 b) Wie ändert sich diese Bedingung, wenn diese Kugel drei Kanten einer Seitenfläche und die Verlängerungen der drei anderen Kanten berührt?
 c) Für welche Tetraeder gibt es zwei Kugeln vom Typ b), die zu zwei gleichen Seitenflächen gehören? Für welche Tetraeder gibt es eine Kugel vom Typ a) und eine Kugel vom Typ b)?
 d) Es ist zu zeigen: Gibt es eine Kugel a) und zwei Kugeln b), dann ist das Tetraeder regulär und es existieren alle 5 Kugeln, eine vom Typ a) und 4 vom Typ b).
110. Im Raum seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, die in verschiedenen Ebenen liegen. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte M , für die die Volumina der Tetraeder $MABC$ und $MA'B'C'$ einander gleich sind.
111. Es seien eine Ebene und zwei nicht in ihr liegende Punkte A und B gegeben. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte M in der Ebene, für die die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ mit der Ebene den gleichen Winkel einschließen.
112. Gegeben sei eine Kreislinie K und ein Punkt P , der nicht in der Ebene der Kreislinie liegt. Durch die Kreislinie K wird eine beliebige Kugel gelegt und es wird der Kegel mit der Spitze P konstruiert, der diese Kugel in einer gewissen Kreislinie mit dem Mittelpunkt M berührt. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte M .
113. Man beweise, daß man eine beliebige vierseitige körperliche Ecke mit einer Ebene so schneiden kann, daß der Schnitt ein Parallelogramm ist.
114. Man zeige, daß man zu jeder dreiseitigen körperlichen Ecke, deren drei ebene Winkel rechte sind, eine Ebene finden kann, so daß ihr Schnitt einem beliebig vorgegebenen spitzwinkligen Dreieck kongruent ist.

5. Aufgaben, die mit Hilfe der vollständigen Induktion zu lösen sind

115. Man zeige, daß $4^n + 15n - 1$ für alle $n \geq 1$ durch 9 teilbar ist.
116. Man zeige, daß $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ ist.
117. Man zeige, daß für $n > 1$ stets $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$ ausfällt.
118. Man ermittle die Summe

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{n}{m}.$$

- 119.** In der Folge der Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, ... ist jede Zahl die Summe der beiden vorangehenden. Man zeige, daß jede vierte Zahl der Folge durch 3 teilbar ist.
- 120.** Man zeige, daß man mit Hilfe der Wägestücke 1 g, 2 g, ..., 2^n g jede beliebige Masse von 1 g bis $(2^{n+1} - 1)$ g zusammensetzen kann.
- 121.** Es seien die Wägestücke 1 g, 3 g, 9 g, ..., 3^n g gegeben. Man zeige, daß man mit ihrer Hilfe jeden Gegenstand mit der Masse von 1 g bis $\frac{3^n - 1}{2}$ g wägen kann.
(Dabei dürfen die Wägestücke auf beide Waagschalen gelegt werden.)
- 122. a)** Man beweise, daß $3^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} , aber nicht durch 2^{n+3} teilbar ist.
b) Man beweise, daß $2^{3^n} + 1$ durch 3^{n+1} , aber nicht durch 3^{n+2} teilbar ist.
- *123.** Man zeige, daß eine Zahl, die mit Hilfe von 3^n Einsen geschrieben werden kann, durch 3^{n+1} , aber nicht durch 3^{n+2} teilbar ist.
- 124.** In der Ebene seien $n \geq 3$ Punkte gegeben. Man beweise, daß man von jedem Punkte zu gewissen der übrigbleibenden Punkte Strecken so legen kann, daß diese einander nicht schneiden und ein konvexes in Dreiecke zerlegtes Polygon bilden.
- *125.** Jede von $n \geq 3$ gegebenen Strecken haben eine größere Länge als 1. Weiter sei bekannt, daß k von diesen Strecken für kein k mit $k = 3, 4, \dots, n$, ein geschlossenes Polygon bilden. Man zeige, daß die Summe der Längen aller dieser Strecken größer als 2^{n-1} ist.
- 126.** In einer Tabelle mit drei Zeilen und n Spalten sind in beliebiger Weise n weiße, n rote und n schwarze Spielmarken untergebracht. Man zeige, daß man die Marken in jeder Zeile so umordnen kann, daß in jeder Spalte 3 Marken verschiedener Farbe liegen.
- 127.** Man beweise, daß die Winkelsumme eines nicht in ein und derselben Ebene gelegenen geschlossenen Polygonzuges, der aus n Strecken besteht, kleiner als $(n - 2) 180^\circ$ ist.
- *128. a)** In der Ebene seien n Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. In wieviel Teile zerlegen Sie die Ebene?
b) Man beweise, daß n Ebenen in allgemeiner Lage (keine 2 sind parallel, keine 3 haben eine gemeinsame Gerade und keine 4 einen gemeinsamen Punkt) den Raum in $\frac{n^3 + 5n}{6} + 1$ Teile zerlegen.
- *129.** n Kreislinien zerlegen die Ebene in mehrere Teile. Man zeige, daß man die Ebene mit zwei Farben so färben kann, daß jeder Teil eine Farbe bekommt,

und zwei Teile, die längs eines Bogens aneinander stoßen, verschiedene Farben bekommen.

130. Die Zahl $a + \frac{1}{a}$ sei ganz. Man beweise, daß für jedes ganze n auch $a^n + \frac{1}{a^n}$ ganz ist.

- *131. Man zeige, daß die Teilnehmer eines Schachturniers, in dem jeder mit jedem genau eine Partie gespielt hat, in einer solchen Ordnung nummeriert werden können, daß jeder gegen den Spieler, der eine um 1 größere Nummer hat, gewonnen oder unentschieden gespielt hat.

- *132. Es seien $2n$ positive Zahlen $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$ gegeben. Wie muß man sie in Paare zerlegen, damit

- a) die Summe der Produkte der Paare möglichst groß wird,
- b) die Summe der Produkte der Paare möglichst klein wird,
- c) das Produkt der Summe der Paare möglichst groß wird,
- d) das Produkt der Summe der Paare möglichst klein wird?

- *133. Die Summe von n positiven Zahlen sei gegeben. Man zeige, daß ihr Produkt dann am größten ist, wenn die Zahlen alle einander gleich sind. Daraus ist zu schließen, daß für n beliebige positive Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

ausfällt (das geometrische Mittel ist nicht größer als das arithmetische).

- *134. a) Aus der Zeile $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$, deren 2^n Glieder entweder $+1$ oder -1 sind, wird die folgende Zeile gebildet:

$$u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_4, \dots, u_{2n-1} u_{2n}, u_{2n} u_1,$$

deren 2^n Glieder ebenfalls $+1$ oder -1 sind. Aus dieser Zeile wird nach der gleichen Regel wiederum eine neue gebildet. Man zeige, daß nach spätestens 2^n Schritten eine Zeile entsteht, die nur aus Einsen besteht.

b) (Fortsetzung) Man zeige, daß aus einer Zeile mit einer ungeraden Anzahl von Elementen, in der wenigstens einmal $+1$ und wenigstens einmal -1 vorkommt, auf diese Weise niemals eine Zeile, die nur aus Einsen besteht, entstehen kann.

c) (Fortsetzung) Man stelle alle Zeilen mit m Elementen auf (m eine beliebige natürliche Zahl), aus denen man schließlich eine Zeile erhält, die nur aus Einsen besteht.

- **135.** Es seien 2^n ganze Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$ gegeben. Mit ihnen werden die Beträge der Differenzen zweier aufeinanderfolgender Zahlen gebildet:

$$|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_{2^{n-1}} - a_{2^n}|, |a_{2^n} - a_1|.$$

Mit den so entstehenden Zahlen wird der gleiche Prozeß vorgenommen usw. Man zeige, daß nach einer gewissen Anzahl von Schritten eine Zeile entsteht, die nur Nullen enthält.

6. Aufgaben über kariertes Papier

- 136.** Man beweise, daß auf einem karierten Bogen die Länge jedes geschlossenen Weges, der aus Strecken des Netzes besteht, eine gerade Zahl ist, wenn die Seitenlänge jedes Karos gleich 1 ist.
- 137.** Eine Schnecke kriecht mit konstanter Geschwindigkeit über einen Tisch. Alle 15 Minuten ändert sie ihre Richtung um 90° und bewegt sich zwischen zwei Richtungsänderungen geradlinig fort. Es ist zu beweisen, daß sie den Anfangspunkt nur nach einer ganzen Zahl von Stunden erreichen kann.
- *138.** Der Flächeninhalt eines Polygons, dessen Ecken in den Knoten eines auf kariertem Papier gezeichneten Netzes liegen, ist gleich $j + \frac{r}{2} - 1$, wenn j die Anzahl der Knoten ist, die innerhalb des Polygons liegen, und r die Anzahl der Knoten ist, die auf seinem Rand, bzw. seinen Ecken liegen. (Als Knoten des Netzes bezeichnen wir die Punkte, in denen die Linien des Netzes einander schneiden; die Seiten des Netzes werden gleich 1 angenommen.) Man beweise diese Formel:
- a) für Rechtecke aus $m \times n$ Karos, deren Seiten von Linien des Netzes gebildet werden;
 - b) für rechteckige Trapeze, bei denen die Grundseiten und eine andere Seite von Linien des Netzes gebildet werden;
 - c) für beliebige konvexe Polygone.
- *139.** a) Wieviel Lösungen in natürlichen Zahlen hat die Gleichung $x + y + z = 100$?
 b) Wieviel Dreiecke vom Umfang 200 gibt es, deren Seitenlängen natürliche Zahlen sind?
- *140.** (X) Wieviel Lösungen in natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_k$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$?
- 141.** Auf einem karierten Bogen ist ein Rechteck aus $m \times n$ Karos gezeichnet. Aus den Linien des Netzes soll ein Polygonzug gebildet werden, der genau einmal

durch jeden Knoten des Netzes, der innerhalb oder auf dem Rand des Rechteckes liegt, läuft und nicht über den Rand des Rechteckes hinaustritt.

a) Man ermittle die Länge dieses Polygonzuges.

b) Für welche m und n kann man einen solchen Polygonzug finden?

c) Man ermittle den Inhalt der Fläche, die von einem solchen Polygon begrenzt wird (dabei ist zu beweisen, daß dieser für alle solche Polygonzüge ein und derselbe ist).

142. (X) Wieviel Polygonzüge der Länge $m + n$ gibt es, die aus Linien des Netzes bestehen und von einer Ecke eines Rechteckes $m \times n$ zur gegenüberliegenden laufen?

***143.** (X) Man beweise, daß $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ ist.

***144.** (X) Man beweise, daß die Anzahl der geschlossenen Polygonzüge der Länge $2n$, die aus Linien des Netzes bestehen und deren Anfangs- und Endpunkt in einem festen Knoten des Netzes liegt, gleich $\binom{2n}{n}^2$ ist. (Der Polygonzug kann auch mehrmals durch ein und denselben Knoten des Netzes gehen oder ein und dieselbe Strecke mehrmals enthalten.)

****145.** (X) Es ist zu beweisen, daß die Anzahl der Polygonzüge der Länge $2n$, die aus Linien des Netzes bestehen und von einer Ecke eines Quadrates $m \times n$ gegenüberliegenden führen und ganz unterhalb der Diagonalen verlaufen, gleich $\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}$ ist (alle Ecken des Polygonzuges mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunktes, liegen unterhalb der Diagonalen).

7. Vermischte Aufgaben

146. Kann man 1963 Telefone so miteinander verbinden, daß jedes von ihnen mit genau 5 anderen verbunden ist?

***147.** Man zeige, daß man unter 99 beliebigen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen eine solche Zahl finden kann, deren Quersumme durch 14 teilbar ist.

148. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

149. Auf einer Kreislinie sind eine Anzahl von Pluszeichen und Minuszeichen untergebracht. Es sei a die Anzahl der Pluszeichen, b die Anzahl der Minuszeichen, p die Anzahl der Paare nebeneinanderstehender Pluszeichen und q die Anzahl

der Paare nebeneinanderstehender Minuszeichen. Es ist zu beweisen, daß $a - b = p - q$ ist.

150. Gegeben sind n Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$, deren jede gleich $+1$ oder -1 ist. Man beweise: Ist $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0$, so ist die Zahl n durch 4 teilbar.

***151.** (X) Man beweise, daß die Zahl $\binom{n}{k}$ durch n teilbar ist, wenn n und k zueinander teilerfremd sind.

152. In der Ebene seien n Punkte gegeben. Von diesen sei bekannt, daß von vier gegebenen Punkten stets drei auf ein und derselben Geraden liegen. Es ist zu beweisen, daß alle Punkte mit Ausnahme von höchstens einem auf ein und derselben Geraden liegen.

153. Die Summe von 1963 positiven Zahlen, deren jede kleiner als 1 ist, sei gleich 5. Man zeige, daß man diese Zahlen in drei Gruppen so einteilen kann, daß die Summe der Zahlen in jeder Gruppe größer als 1 ist.

***154.** Es seien 50 voneinander verschiedene positive Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ gegeben. Wie muß man sie numerieren, damit die Summe

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{50} - a_1|$$

möglichst groß ausfällt?

***155.** (X) Zu beweisen ist: Wenn $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ist, dann ist für beliebiges ungerades n auch

$$\frac{1}{a^n + b^n + c^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}.$$

***156.** (X) Es seien n komplexe Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_n$ so gegeben, daß die ihnen entsprechenden Punkte der GAUSSschen Zahlenebene die Ecken eines konvexen n -Ecks bilden. Man beweise, daß für jede komplexe Zahl z , die die Eigenschaft besitzt, daß $\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \dots + \frac{1}{z - c_n} = 0$ ist, der z entsprechende Punkt der Ebene im Innern des n -Ecks liegt.

157. Es ist die Summe der Koeffizienten des Polynoms zu finden, das man nach Entwickeln der Klammern und Ausmultiplizieren der entstehenden Glieder in dem Ausdruck $(x^5 + x^4 - 1)^{1963} \cdot (x^2 - x + 1)^{1964}$ erhält.

158. Man denke sich zwei Fässer von unendlich großem Fassungsvermögen. Kann man mit Hilfe von zwei Kellen, die $(2 - \sqrt{2})l$ und $\sqrt{2}l$ fassen, von dem einen in das andere genau $1l$ umfüllen?

***159.** Gibt es eine ganze Zahl p , so daß für alle ganzen $n \geq p$ stets $n!$ durch 2^{n-p} teilbar ist?

160. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

wenn $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ beliebige reelle Zahlen sind! Für welche $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ gilt das Gleichheitszeichen?

***161. (X)** Man beweise, daß sich für jede natürliche Zahl n die Zahl $(\sqrt{2} - 1)^n$ in Gestalt der Differenz $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ darstellen läßt, wobei m eine ganze Zahl bedeutet.

162. Ein Schüler denkt sich fünf positive Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und teilt einem anderen die Summen aller möglichen Paare dieser Zahlen $x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, \dots, x_4 + x_5$ mit. Wie kann der Schüler aus diesen 10 Zahlen die von dem ersten Schüler gedachten finden?

***163.** Aus dem Zahlenquadrupel a, b, c, d wird das neue Quadrupel $a + b, b + c, c + d, d + a$ gebildet. Aus diesem mit Hilfe der gleichen Regel ein weiteres usf. Man zeige, daß in dieser Folge niemals zwei gleiche Zahlenquadrupel auftreten können (mit Ausnahme des Falles $a = -b = c = -d$)!

***164.** Es seien zwei beliebige Zeilen gleicher Länge gegeben, deren Elemente $+1$ und -1 sind. In der ersten Zeile werden gleichzeitig bei 15 beliebigen Zahlen die Zeichen geändert. Man zeige, daß man durch Wiederholung dieser Operation in einigen Schritten die erste Zeile in die zweite überführen kann (d. h., man kann erreichen, daß an gleichen Stellen ein und dieselbe Zahl steht).
Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung nicht mehr richtig ist, wenn man jedes Mal bei 14 beliebigen Zahlen der ersten Zeile das Zeichen ändert.

***165.** Auf einem unendlichen Schachbrett steht ein (m, n) -Springer. Das ist eine Figur, welche um m Felder längs einer Horizontalen und um n Felder längs einer Vertikalen oder umgekehrt weiterzieht.

a) Man ermittle, für welche n ein $(1, n)$ -Springer von einem gegebenen Feld zu jedem anderen Feld des Brettes (in einer gewissen Anzahl von Zügen) gelangen kann.

b) Man markiere alle Felder, auf die ein (m, n) -Springer in einer gewissen Anzahl von Zügen von einem gegebenen Feld aus gelangen kann.

c) (Fortsetzung) Man beweise, daß man diese Felder mit einem Rotstift und einem Blaustift so markieren kann, daß der (m, n) -Springer auf die roten Felder von einem Anfangsfeld aus nur in einer geraden Anzahl von Zügen und auf die blauen Felder nur in einer ungeraden Anzahl von Zügen gelangen kann.

166. Man zeige, daß man die Felder eines Brettes 4×5 mit einem Schachspringer [(1, 2)-Springer] so durchlaufen kann, daß jedes Feld genau einmal benutzt wird.

- 167.** Man beweise, daß man ein 8×8 Brett mit einem (1, 2)-Springer nicht so durchlaufen kann, daß man in der linken oberen Ecke beginnt, in der rechten unteren Ecke endet und auf jedem Feld genau einmal absetzt.
- **168.** Man beweise, daß man ein $4 \times n$ Brett mit einem (1, 2)-Springer nicht so durchlaufen kann, daß man zu jedem Feld genau einmal gelangt und mit dem letzten Zug zum Ausgangspunkt zurückkehrt.
- *169.** Man beweise, daß man ein $7 \times n$ Brett mit einem (2, 3)-Springer nicht so durchlaufen kann, daß man zu jedem Feld genau einmal gelangt.
- *170.** Auf 25 in einer Reihe angeordnete Felder sind in irgendeiner Ordnung 24 Münzen verteilt, auf die die Nummern 1 bis 24 geschrieben sind, ein Feld bleibt frei. Bei einem Zug darf man eine beliebige Münze auf das freie Feld setzen. Man beweise, daß man in 36 derartigen Zügen die Münzen der Nummer nach anordnen kann. Es ist ein Beispiel für eine Anfangsverteilung anzugeben, bei dem man dies in 35 Zügen nicht erreichen kann.
- *171.** Auf dem ersten von n in einer Reihe angeordneten Feldern befindet sich eine Münze. Mit einem Zuge kann man sie um 1, 2 oder 3 Felder vorrücken. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Gewonnen hat derjenige, der die Münze auf das letzte Feld zieht. Wer von den beiden Spielern gewinnt bei diesen Spielregeln, der erste (anziehende) oder der zweite? Wie muß man spielen?
- *172.** In der rechten oberen Ecke eines Schachbrettes steht eine Figur. Mit einem Zuge darf sie um 1 Feld nach links, nach unten oder diagonal nach links unten rücken. Gewonnen hat derjenige, der als erster in der linken unteren Ecke ankommt. Wie muß man bei diesem Spiel ziehen? Wer gewinnt auf einem $m \times n$ Brett?
- *173.** In einer Tabelle mit m Zeilen und n Spalten sind irgendwelche Zahlen eingetragen. Man darf bei allen Zahlen ein und derselben Zeile oder ein und derselben Spalte gleichzeitig das Vorzeichen ändern. Man beweise, daß man durch mehrmalige Wiederholung dieser Operation erreichen kann, daß die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte der Tabelle positiv oder 0 ist.
- **174.** Mit einem nicht konvexen Vieleck werden folgende Operationen vorgenommen: Sind A und B zwei beliebige nicht aufeinanderfolgende Ecken, und liegt das Vieleck ganz auf einer Seite der Geraden durch AB , dann wird einer der Teile des Umfanges, der zwischen den Punkten A und B liegt, am Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ gespiegelt. Man beweise, daß man nach mehrmaliger Wiederholung dieser Operation jedes Vieleck in ein konvexes überführen kann.
- **175.** Man beweise, daß in der Dezimalbruchentwicklung der Zahl $(\sqrt{26} + 5)^{1963}$ die ersten 1963 Ziffern nach dem Komma Nullen sind.

8. Aufgaben, die bei der zweiten allrussischen Olympiade gestellt worden sind

8. Klasse

1. Auf den Verlängerungen der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ eines konvexen Vierecks $ABCD$ werden die Strecken $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$, $\overline{DD'} = \overline{CD}$ und $\overline{AA'} = \overline{DA}$ abgetragen. Man beweise, daß der Flächeninhalt des Vierecks $A'B'C'D'$ fünfmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.
2. In der Ebene ist eine Kreislinie S und eine Gerade l gegeben, die durch den Mittelpunkt O des Kreises S geht. Durch den Punkt O wird eine beliebige Kreislinie S' , deren Mittelpunkt auf der Geraden l liegt, gelegt. Es ist der geometrische Ort aller Punkte M zu finden, in denen die gemeinsamen Tangenten der Kreise S und S' den Kreis S' berühren.
3. Es sind die positiven ganzen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{100}$ gegeben. Weiter ist bekannt, daß $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \dots, a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$ ist. Man beweise, daß $a_{100} > 2^{99}$ ist.
4. Man beweise, daß es keine ganzen Zahlen a, b, c, d derart gibt, daß der Ausdruck $ax^3 + bx^2 + cx + d$ für $x = 19$ gleich 1 und für $x = 62$ gleich 2 ist.
5. In jedes Feld einer quadratischen Tabelle 25×25 wird in beliebiger Weise eine der Zahlen 1 oder -1 eingetragen. Unter jede Spalte wird das Produkt aller Zahlen, die in dieser Spalte stehen, geschrieben. Rechts neben jede Zeile wird das Produkt aller Zahlen geschrieben, die in dieser Zeile stehen. Man beweise, daß die Summe der 50 aufgeschriebenen Produkte nicht gleich 0 ist.

9. Klasse

1. Man konstruiere ein Dreieck aus zwei gegebenen Seiten so, daß sich deren Seitenhalbierende unter einem rechten Winkel schneiden.
2. Es seien a, b, c, d vier positive Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist. Es ist zu beweisen, daß

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + da + ac + bd \geq 10$$

gilt.

3. Es ist ein reguläres Fünfeck gegeben und M sei ein nicht außerhalb von ihm gelegener Punkt. Die Abstände des Punktes M von den Seiten des Fünfecks seien der Größe nach angeordnet: $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_5$. Es sind sämtliche Lagen des Punktes M zu bestimmen, für die r_3 einen möglichst großen Wert annimmt und alle Lagen des Punktes M , für die r_3 einen möglichst kleinen Wert annimmt.

4. Man wähle irgendeine 1962-stellige Zahl, die durch 9 teilbar ist, bezeichne die Summe ihrer Ziffern mit a , die Summe der Ziffern von a bezeichne man mit b und die Summe der Ziffern von b mit c . Wie groß ist c ?
5. Die Aufgabe Nr. 5 für die Klasse 8 für Tafeln der Form $m \times n$ mit beliebigem ungeraden n .

10. Klasse

1. Von der Mitte M der Grundseite $\overline{AC}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC werde das Lot $\overline{MH}$ auf die Seite $\overline{BC}$ gefällt. P sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{MH}$. Man zeige, daß $\overline{AH}$ senkrecht auf $\overline{BP}$ steht.
2. Welches ist der größtmögliche Flächeninhalt für alle Dreiecke, deren Seiten a, b, c der folgenden Bedingung genügen: $0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$?
3. Es seien x, y, z drei paarweise voneinander verschiedene ganze Zahlen. Man zeige, daß $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ durch $5(x - y)(y - z)(z - x)$ teilbar ist.
4. Von den Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ sei bekannt, daß $a_0 = a_n = 0$, und daß $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0$ für alle k , ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) gilt. Es ist zu beweisen, daß alle Zahlen a_k nicht negativ sind.
5. Gegeben seien die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$, wobei

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

ist.

Man beweise, daß man in eine leere Tabelle mit m Zeilen und n Spalten höchstens $m + n - 1$ positive Zahlen so eintragen kann, daß die Summe der Zahlen in den Zeilen jeweils gleich $a_1, a_2, \dots, a_m$ und die Summe der Zahlen in den Spalten jeweils gleich $b_1, b_2, \dots, b_n$ ist.

1. Über die Teilbarkeit von Zahlen

1. Erste Lösung: Wir beweisen zunächst, daß jede Primzahl $p \geq 5$ bei der Teilung durch 6 den Rest 1 oder 5 läßt, d. h. in der Gestalt $6k + 1$ oder $6k + 5$ mit ganzzahligem k darstellbar ist. Ließe nämlich die Zahl $p \geq 5$ bei der Teilung durch 6 den Rest 2, 3 oder 4, dann wäre sie entweder gerade oder durch 3 teilbar. Sie könnte also nicht Primzahl sein. Im Falle $p = 6k + 1$ ergibt sich unmittelbar $(6k + 1)^2 - 1 = 12k(3k + 1)$. Weiter ist leicht zu sehen, daß eine der Zahlen k und $3k + 1$ gerade ist, und das bedeutet, daß $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist. Der Fall $p = 6k + 5$ läßt sich analog behandeln.

Zweite Lösung: Wir betrachten die Zahlen $p - 1$, p , $p + 1$. Da $p \geq 5$ Primzahl ist, sind $p - 1$ und $p + 1$ gerade, und daraus folgt, daß eine von ihnen durch 4 teilbar ist. Daher ist $p^2 - 1$ durch 8 teilbar. Weiter ist eine der Zahlen $p - 1$, p , $p + 1$ durch 3 teilbar (denn dies sind drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen), und da $p \geq 5$ Primzahl ist, muß entweder $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar sein.

2. $p = 3$. Ist $p \neq 3$, so ist $14p^2 + 1$ durch 3 teilbar. Dann gilt nämlich $p = 3k + 1$ oder $p = 3k - 1$, woraus sich durch Quadrieren $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ oder $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$ ergibt, und das bedeutet, daß p^2 bei der Teilung durch 3 den Rest 1 läßt.

Daraus folgt, daß $14p^2 + 1$ für beliebiges p durch 3 teilbar, d. h. keine Primzahl ist. Für $p = 3$ ist aber $14p^2 + 1 = 127$ eine Primzahl.

3. Man benutze, daß aus $ab = N$ folgt, daß entweder $a \leq \sqrt{N}$ oder $b \leq \sqrt{N}$ ist.

4. Wir untersuchen, welche Reste die Zahlen $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$ bei der Teilung durch 3 und 5 ergeben und erhalten

a) 2, 1, 2, 1, ...

b) 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, ...

Jetzt bemerken wir, daß für alle n , die durch 4 teilbar sind, die Zahl 2^n bei der Division durch 5 den Rest 1 ergibt und daß 2^n bei der Division durch 3 für gerades n ebenfalls den Rest 1 ergibt. Hieraus folgt, daß die beiden gesuchten Reste gleich 1 sind.

5. a) Für $n > 1$ läßt die Zahl $2^n - 1$ bei Division durch 4 den Rest 3. Beweisen Sie, daß das Quadrat einer ganzen Zahl bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 läßt! Für $n = 1$ ist $2^1 - 1 = 1$ Quadratzahl.

b) Ist $2^n + 1$ eine Quadratzahl, dann gilt $2^n + 1 = k^2$ und $2^n = (k + 1)(k - 1)$, d. h. $k + 1 = 2^l$, $k - 1 = 2^m$. Hieraus erhalten wir, wenn wir die zweite Zahl von der ersten abziehen, $2 = 2^l - 2^m$, woraus sich $m = 1$, $l - m = 1$ also $m = 1$, $l = 2$, d. h. $n = 3$ ergibt.

6. Die Antwort heißt 0, 1, 8. Ist die Zahl n durch 3 teilbar, dann ist n^3 durch 9 teilbar. Ist aber n nicht durch 3 teilbar, dann hat es die Form $n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$. Das übrige ist klar.

7. Beweisen Sie unter Benutzung des Ergebnisses der vorhergehenden Aufgabe, daß die Zahlen $9k + 4$ und $9k + 5$ für kein ganzes k als Summe dreier Kuben darstellbar sind!

8. Ist p keine Primzahl, so gilt $p = k \cdot l$, und die Zahl $2^{kl} - 1$ läßt sich leicht in Faktoren zerlegen:

$$2^{kl} - 1 = (2^k - 1) [2^{k(l-1)} + 2^{k(l-2)} + \dots + 2^k + 1].$$

9. Ist n keine Potenz von 2, so gilt $n = 2^l n'$, wobei $n' > 1$ ungerade und $l \geq 0$ ist, dann ist aber $2^n + 1 = (2^{2^l})^{n'} + 1$ durch $2^{2^l} + 1$ teilbar. (Dabei ist benutzt worden, daß $x^k + y^k$ für ungerades k durch $x + y$ teilbar ist.)

10. $7^{2n} - 4^{2n} = (7^2)^n - (4^2)^n$. Man benutze jetzt, daß $x^k - y^k$ für jedes natürliche k durch $x - y$ teilbar ist.

11. Für gerades n . Wir beachten, daß $323 = 17 \cdot 19$ ist, und untersuchen, welche Reste die Zahl $20^n + 16^n - 3^n - 1$ bei der Division durch 17 und 19 läßt. Wir zeigen, daß für gerades n beide Reste Null und daß für ungerades n beide Reste von Null verschieden sind. Um z. B. zu finden, welchen Rest die in der Bedingung der Aufgabe genannte Zahl bei der Teilung durch 19 läßt, beachten wir, daß 20 den Rest 1 und 16 den Rest -3 läßt. Das bedeutet, daß

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 \text{ denselben Rest läßt wie}$$

$$1^n + (-3)^n - 3^n - 1 = 3^n[(-1)^n - 1].$$

Durch analoge Betrachtungen über den Rest, den die gegebene Zahl bei der Division durch 17 läßt, kommen wir zu der Feststellung, daß diese Zahl für gerades n durch 17 und durch 19 teilbar ist, für ungerades n aber nicht.

12. $n^5 - 5n^3 + 4n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$

Unter 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen befinden sich stets 2 gerade Zahlen $2k$ und $2k + 2$, von denen eine durch 4 teilbar ist. Das bedeutet, daß

ihr Produkt und damit die gegebene Zahl durch 8 teilbar ist. Unter 3 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt es stets eine durch 3 teilbare und unter 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets eine durch 5 teilbare. Hieraus folgt die Behauptung der Aufgabe ($120 = 8 \cdot 5 \cdot 3$).

13. Wir bemerken zunächst, daß in der gegebenen Zahlenfolge keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 vorkommen kann. Käme nämlich eine dieser Zahlen (z. B. 13) unter den gegebenen vor, dann müßte das erste Glied p_1 dieser Folge gleich einer der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 sein. Nun ist die Zahl $p_1 + p_1 d$ auch ein Glied der Folge und daher Primzahl. Wir zeigen jetzt, daß die Differenz d der Folge durch 2, 3, 5, 7, 11 und 13 teilbar sein muß. Wir beweisen, daß d z. B. durch 13 teilbar ist. Es sei wie vorhin p_1 das erste Glied der gegebenen Zahlenfolge. Dann sind alle Zahlen $p_1, p_1 + d, p_1 + 2d, \dots, p_1 + 12d$ Primzahlen. Nehmen wir einmal an, daß d nicht durch 13 teilbar wäre, dann müßten alle Zahlen $p_1, p_1 + d, \dots, p_1 + 12d$ bei der Teilung durch 13 verschiedene Reste lassen, d. h. eine von ihnen müßte durch 13 teilbar sein. Genauso wird bewiesen, daß d durch 2, 3, 5, 7, 11 teilbar ist. Da d durch alle Primzahlen, die nicht größer als 13 sind, teilbar ist, kann d nicht kleiner als $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$ sein.

$$14. 5^{2n+1} + 3^{n+2} 2^{n-1} = 5 \cdot 25^n + 27 \cdot 6^{n-1}.$$

Die Zahl 25 läßt bei der Division durch 19 den Rest 6. Das bedeutet, daß unsere Zahl bei der Division durch 19 denselben Rest wie $5 \cdot 6^n + 27 \cdot 6^{n-1} = 57 \cdot 6^{n-1}$ läßt. Die letzte Zahl ist aber stets durch 19 teilbar.

15. Schreiben Sie die Zahl in der Form $10a + b$, wobei b deren letzte Ziffer ist, und erheben Sie sie ins Quadrat!
16. Das ist nicht möglich. Benutzen Sie das Resultat der vorhergehenden Aufgabe!
17. Zerlegen Sie das Polynom $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$ in zwei Faktoren!
18. Die Zahl

$$a^3 + b^3 + c^3 - a - b - c = a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1)$$

ist immer durch 6 teilbar. Das bedeutet $a^3 + b^3 + c^3$ und $a + b + c$ sind beide gleichzeitig entweder durch 6 teilbar oder nicht durch 6 teilbar.

$$19. \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m^3}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

20. Ermitteln Sie die Quersumme der genannten Zahl, und überzeugen Sie sich, daß sie durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist, woraus sich ergibt, daß sie keine Quadratzahl sein kann!

21. Vergleichen Sie die Reste, die die Zahl 2^n und ihre letzte Ziffer bei der Division durch 3 lassen! Diese Reste sind in den Fällen, in denen die letzte Ziffer der Zahl 2^n von 6 verschieden ist, einander gleich. Daraus ergibt sich, daß die Zahl a durch 3 teilbar ist.

22. Berechnen Sie, welchen Rest die Gesamtzahl der Papierbögen bei der Division durch 9 läßt, und benutzen Sie die Tatsache, daß die Zerschneidung eines Papierbogens in 10 Teile die Gesamtzahl der Blätter um 9 vermehrt, so daß der Rest, der bei der Division der gesamten Blätterzahl durch 9 bleibt, nicht verändert wird! Die Zahlen 15 und 1963 lassen aber bei der Teilung durch 9 verschiedene Reste.

$$23. 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$$

$$24. 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

25. Wäre die Menge der Primzahlen endlich, dann wäre die Zahl $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, wobei $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$ das Produkt aller Primzahlen bedeutet, zusammengesetzt und daher durch eine von ihnen teilbar.

26. Wir betrachten die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (N + 1) = (N + 1)!$. Dann sind alle Zahlen $(N + 1)! + 2, (N + 1)! + 3, \dots, (N + 1)! + N + 1$ zusammengesetzt.

27. Angenommen, es gäbe nur eine endliche Anzahl solcher Primzahlen. Betrachten Sie die Zahl $4p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 1$, wobei $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ das Produkt aller Primzahlen der Form $4k + 3$ ist! Beweisen Sie, daß diese Zahl einen Primteiler der Form $4k + 3$ hat, der von $p_1, p_2, \dots, p_n$ verschieden ist oder selbst Primzahl ist!

28. Wir betrachten alle Zahlen der Form N^2 mit ganzzahligem N und beweisen, daß es unendlich viele Zahlen gibt, die sich nicht in der verlangten Weise darstellen lassen. Es sei $N^2 = p + n^2$. Dann gilt $(N - n)(N + n) = p$. Da p Primzahl ist, muß $N - n = 1$ sein, d. h. $p = 2N - 1$ und das bedeutet: Dafür, daß die Zahl N^2 in der geforderten Weise darstellbar ist, ist notwendig, daß die Zahl $2N - 1$ Primzahl ist. Es ist klar, daß es unendlich viele ganze Zahlen N gibt, für die die Zahl $2N - 1$ zusammengesetzt ist.

$$29. (2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^n} + 1)$$

$$= (2 - 1) \cdot (2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot \dots = (2^2 - 1) \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots$$

$$= (2^4 - 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot \dots = 2^{2^{n+1}} - 1$$

****30.** Unter Benutzung des Resultates der vorhergehenden Aufgabe erhalten wir

$$(2^{2^n} + 1) - 2 = 2^{2^n} - 1 = (2 + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{n-1}} + 1),$$

d. h.

$$2^{2^n} + 1 = (2 + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^{n-1}} + 1) + 2.$$

Daraus folgt die Behauptung der Aufgabe. Da je zwei Zahlen der Form $2^{2^n} + 1$ teilerfremd sind, ist die Zahl $2^{2^n} + 1$ entweder Primzahl oder sie hat nur solche Primteiler, durch die keine andere Zahl der Folge 2^{2^n} teilbar ist. Hieraus folgt leicht die Behauptung der Aufgabe 25.

31. a) $[-1, 5] = -2$; $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$; $[0] = 0$; $[1] = 1$; $\left[2\frac{1}{2}\right] = 2$; $[3,99] = 3$.

b) 1. Ist offensichtlich.

2. Wir bemerken, daß $\frac{ka}{b} = \left[\frac{ka}{b}\right] + \alpha$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt, woraus sich

$\frac{a}{b} = \left[\frac{\alpha}{b}\right] + \beta$, mit $0 \leq \beta < 1$, d. h. $\frac{ka}{b} = k \left[\frac{a}{b}\right] + k\beta$ ergibt. Hieraus folgt unmittelbar, daß $\left[\frac{ka}{b}\right] \geq k \left[\frac{a}{b}\right]$ gilt.

32. Alle ganzen Zahlen $q, 2q, \dots, \left[\frac{N}{q}\right]q$, sind nicht größer als N und durch q teilbar; $\left(\left[\frac{N}{q}\right] + 1\right)q > N$.

33. Ist $\frac{a}{b} \geq m$ und sind $m \geq 0$ sowie $b > 0$ ganze Zahlen, so gilt $\left[\frac{a}{b}\right] \geq m$.

34. Entsprechend dem Resultat der Aufgabe 32 gibt es genau $\left[\frac{n}{p}\right]$ Zahlen, die nicht größer als n und durch p teilbar sind, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, die durch p^2 , $\left[\frac{n}{p^3}\right]$, die durch p^3 teilbar sind, usw. Zur Berechnung der höchsten Potenz von p , durch die $n!$ teilbar ist, hat man alle diese Zahlen zu addieren. Wir erhalten

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Dabei ist k so zu wählen, daß $p^k \leq n$ und $p^{k+1} > n$ ausfällt also $\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right] = 0$ ist.

35. Die höchste Potenz der Zahl p , durch die $n!$ teilbar ist, ist gleich

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Diese Zahl ist kleiner als n , denn es gilt:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots + \frac{n}{p^k} + \dots < \frac{n}{p-1} \leq n.$$

36. Es sei p eine beliebige Primzahl. Auf Grund des Resultates der Aufgabe 34 ist die höchste Potenz der Zahl p , durch die $(n!)!$ teilbar ist, gleich

$$\left\lfloor \frac{n!}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n!}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n!}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

Unter Benutzung der Formel aus Aufgabe 31 erhalten wir daraus

$$\left\lfloor \frac{n!}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n!}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n!}{p^3} \right\rfloor + \dots \geq (n-1)! \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \right).$$

37. Auf Grund der Bedingungen der Aufgabe gilt

$$a = q_1 b + r_1 \quad \text{mit} \quad 0 < r_1 < b;$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad \text{mit} \quad 0 < r_2 < r_1;$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad \text{mit} \quad 0 < r_3 < r_2;$$

$\vdots$

$$r_{m-2} = q_m r_{m-1} + r_m \quad \text{mit} \quad 0 < r_m < r_{m-1}.$$

Dabei ist die Folge der natürlichen Zahlen $b, r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ abnehmend, und das bedeutet, daß der Prozeß der wiederholten Division schließlich abbricht, d. h. einer der Reste r_{m-1} ist durch r_m teilbar, also $r_{m-1} = q_{m+1} r_m$. Unsere Gleichungskette nimmt jetzt die folgende Gestalt an

$$a = q_1 b + r_1;$$

$$b = q_2 r_1 + r_2;$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3;$$

$\vdots$

$$r_{m-2} = q_m r_{m-1} + r_m;$$

$$r_{m-1} = q_{m+1} r_m.$$

Beweisen Sie nun, daß r_m durch jeden gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b teilbar ist und umgekehrt r_m gemeinsamer Teiler von a und b ist. Das bedeutet aber, daß r_m der größte gemeinsame Teiler von a und b ist. Die vorliegende Aufgabe gibt ein einfaches und handliches Verfahren zur Auffindung des g. g. T. zweier Zahlen an.

Es wird auch EUKLIDISCHER Algorithmus genannt.

38. Man drücke r_m durch a und b unter Benutzung der Gleichungskette der vorigen Aufgabe aus.

39. Beweisen Sie unter Benutzung des EUKLIDISCHEN Algorithmus, daß der g. g. T. der Zahlen 2^{p-1} und 2^{q-1} gleich 2^{d-1} ist, wenn d der g. g. T. von p und q ist.

40. Zerlegt man in der Gleichung $x^m = y^n$ die Zahlen x und y in ihre Primfaktoren $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$; $y = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_r^{l_r}$, so erhält man

$$p_1^{k_1 m} \cdot p_2^{k_2 m} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r m} = p_1^{l_1 n} \cdot p_2^{l_2 n} \cdot \dots \cdot p_r^{l_r n}.$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die Exponenten von p_1 , so ergibt sich

$$k_1 m = l_1 n, \text{ d. h. } \frac{k_1}{l_1} = \frac{n}{m}. \text{ Da } m \text{ und } n \text{ teilerfremd sind, kann der Bruch } \frac{n}{m}$$

nicht gekürzt werden. Folglich gibt es eine ganze Zahl d_1 , so daß

$$k_1 = d_1 n, \quad l_1 = d_1 m$$

ist. Genauso beweist man, daß für gewisse ganze Zahlen $d_2, \dots, d_r$

$$k_2 = d_2 n, \quad l_2 = d_2 m,$$

$\vdots$

$$k_r = d_r n, \quad l_r = d_r m$$

gilt. Bezeichnet man die Zahl $p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_r^{d_r}$ mit t , dann ergibt sich aus den hergeleiteten Gleichungen $x = t^n$ und $y = t^m$. Andererseits ist klar, daß $x = t^n$ und $y = t^m$ für jedes ganze $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ eine Lösung der Gleichung $x^m = y^n$ sind. Da wir oben bewiesen haben, daß jede Lösung in dieser Gestalt darstellbar ist, geben diese Formeln alle Lösungen der Gleichung $x^m = y^n$ an.

41. Angenommen, es sei $\lg 2 = \frac{m}{n}$, dann müßte $10^m = 2^n$ sein, was für ganzzahlige m und n unmöglich ist.

42. Sind a und b zwei teilerfremde ganze Zahlen, für die $\log_a b = \frac{p}{q}$ ist, dann muß

$a^p = b^q$ sein. Aus dem Resultat der Aufgabe 40 folgt, daß es dann eine positive ganze Zahl t derart gibt, daß $a = t^q$ und $b = t^p$ ist.

2. Über den „DIRICHLETSchen Schubfachschluß“

43. Bei der Teilung einer beliebigen Zahl durch n ergibt sich als Rest eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-1$, d. h., es gibt insgesamt n voneinander verschiedene Reste. Daher kann man unter $n+1$ Zahlen sicher zwei finden, die bei der Teilung durch n den gleichen Rest lassen. Die Differenz dieser Zahlen ist dann durch n teilbar.

44. Es werden die Zahlen $1, 11, 111, \dots, \underbrace{11 \dots 1}_{n+1}$ betrachtet, womit die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt ist.
45. Es werden die Zahlen betrachtet, die man erhält, wenn man die Zahl M einmal, zweimal, dreimal ... 1964mal hintereinander schreibt, ganz entsprechend wie in der vorhergehenden Aufgabe.
46. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ diese Zahlen. Wir bilden die Reste der Zahlen $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{1000}$ bei der Division durch 1000. Unter diesen Resten kommt entweder 0 vor, oder es gibt zwei Summen mit gleichem Rest. Die weitere Lösung der Aufgabe verläuft wie in Aufgabe 43.
47. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten, nämlich 10^4 , um die letzten vier Ziffern in verschiedener Weise auszuwählen. Daher müssen in unserer Folge zwei gleiche Quadrupel vorkommen, mit anderen Worten, man kann zwei Zahlen n_0 und $n_0 + t$ derart finden, daß die letzten Ziffern der Zahlen 6^{n_0} und 6^{n_0+t} übereinstimmen ($6^{n_0+t} - 6^{n_0} = 10^4 \cdot m$, m ganzzahlig). Dann stimmen natürlich auch bei den Zahlen 6^{n_0+1} und 6^{n_0+t+1} die letzten vier Ziffern überein ($6^{n_0+t+1} - 6^{n_0+1} = 10^4 \cdot 6m$), und allgemein stimmen bei den Zahlen 6^n und 6^{n+t} für jedes $n > n_0$ die letzten vier Ziffern überein ($6^{n+t} - 6^n = 10^4 \cdot 6^{n-n_0} m$).
48. Ja. In der Folge $3, 3^2, \dots, 3^n$ gibt es zwei Zahlen, deren letzte vier Ziffern übereinstimmen: 3^k und 3^l , $k < l$, $3^l - 3^k = 10^4 \cdot m$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß 3^{l-k} eine gesuchte Potenz von 3 ist, d. h., daß $3^{l-k} - 1 = 10^4 m_1$, m_1 ganzzahlig gilt.
49. Man braucht nur die gleichen Überlegungen anzustellen wie bei der Aufgabe 47. Unter $10^6 + 1$ Gliedern der Folge muß es zwei Paare aufeinanderfolgender Glieder geben, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen. (Es gibt nämlich nur 10^6 Kombinationen aus zwei dreistelligen Zahlen.) Nun ist aber leicht zu sehen, daß sich aus den letzten drei Ziffern eines Paares aufeinanderfolgender Glieder der Folge die letzten drei Ziffern der diesen folgenden und vorangehenden Gliedern der Folge bestimmen: Hieraus ergibt sich, daß die Folge der letzten drei Ziffern periodisch ist und die Periode nicht größer als $10^6 + 1$ ist. Denken wir uns aber diese Periode von einer gewissen Stelle an nach links fortgesetzt, so erhalten wir die Ziffern 999, 001, 000, 001, 001. Hieraus folgt die zweite Behauptung dieser Aufgabe.
50. Man betrachte die 25 Zahlenpaare $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots, (25, 50)$ und beweise, daß unter 26 beliebigen natürlichen Zahlen von 1 bis 50 die beiden Zahlen eines dieser Paare zu finden sind. Für 25 Zahlen ist die Behauptung nicht richtig, wie das Beispiel 26, 27, ..., 50 erkennen läßt.

51. Es seien $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ diese Zahlen. Man betrachte die n Zahlen $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1$ und die n Zahlen $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$. Da alle diese Zahlen kleiner als $2n$ sind, kann man aus der ersten Folge eine Zahl finden, die gleich einer gewissen Zahl aus der zweiten Folge ist: $a_k - a_1 = a_i$, woraus $a_k = a_1 + a_i$ folgt.
52. Auf einer Fläche von $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ kann man 4560 Rechtecke der Größe $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ unterbringen – 95 längs der einen und 48 längs der anderen Seite, so daß zwischen ihnen ein Streifen von mindestens $0,5 \text{ m}$ frei bleibt. Da in dem Wald insgesamt 4500 Bäume wachsen, gibt es mindestens 60 von diesen Rechtecken, in denen keiner der Bäume wächst.

3. Zur Ebenen Geometrie¹

53. Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ werden parallel-verschoben, so daß die Punkte B und A in den Punkt M fallen. Verbinden Sie die Endpunkte C' und D' der verschobenen Strecken, und beweisen Sie, daß $\overline{MN}$ Seitenhalbierende im Dreieck $MC'D'$ ist! Zeigen Sie dann, daß die Seitenhalbierende $\overline{MN}$ des Dreiecks $MC'D'$ kleiner ist als die halbe Summe der Seiten $\overline{AD'}$ und $\overline{MC'}$, d. h. kleiner als $\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$.
54. Verschieben Sie die Kreislinie parallel zu der Geraden l um a !
55. Auf der Geraden l_1 gibt es zwei Punkte A und C , deren Abstand von l_2 gleich a ist. Ebenso gibt es auf der Geraden l_2 zwei Punkte B und D , deren Abstand von l_1 gleich a ist. Der geometrische Ort ist die Randlinie des Vierecks $ABCD$.
56. Drehen Sie die Kreislinie S um 180° um den Punkt A !
57. Es sei $ABCD$ ein gegebenes Viereck. Dann sind die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ und der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ zu der Diagonalen $\overline{AC}$ parallel und halb so lang wie diese.
58. Die Strecke zwischen den Schnittpunkten der gesuchten Geraden mit den Schenkeln des Winkels muß im Punkte A halbiert werden.

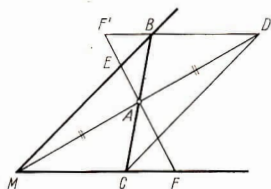


Abb. 1.1.

Beweis: Wir konstruieren ein solches Dreieck DBC , daß dessen Seite $\overline{BC}$ durch den Punkt A geht und $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist (Abb. 1.1.). Es sei $\triangle MEF$ ein beliebiges Dreieck, dessen Seite $\overline{EF}$ durch den Punkt A geht ($\overline{ME} < \overline{MB}$). Wir beweisen, daß $S_{\triangle MEF} > S_{\triangle MBC}$ gilt. Es gilt nämlich $S_{\triangle ABE} < S_{\triangle AFC}$, da $S_{\triangle AFC} = S_{\triangle AF'B}$ ist (F' liegt so, daß die Strecke $\overline{BF'}$ gleich

¹ Beachten Sie bitte den Hinweis auf Seite 71!

lang und parallel zu $\overline{CF}$ ist). Außerdem gilt:

$$S_{\triangle MEF} = S_{\triangle MBC} - S_{\triangle AEB} + S_{\triangle ACF} > S_{\triangle BMC}.$$

Damit ist bewiesen, daß $\triangle MBC$ den kleinstmöglichen Flächeninhalt hat. Die Konstruktion von $\overline{BC}$ ist aus der Abbildung zu erkennen ($\overline{MA} = \overline{AD}$, $\overline{BD} \parallel \overline{MC}$).

59. Nehmen Sie auf einer der Kreislinien irgendeinen Punkt und drehen Sie eine beliebige der anderen Kreislinien um diesen Punkt um 60° !
60. Es seien O_1 , O_2 , O_3 und O_4 die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$ des Parallelogramms $ABCD$. Beweisen Sie, daß bei einer Drehung um 90° um den Punkt O_2 der Punkt O_1 in O_3 übergeführt wird!
61. Man kann annehmen, daß die Strecke $\overline{OA}$ fest ist. Dann liegen die Spitzen aller Dreiecke OAB , deren Seite $\overline{OB}$ gleich b ist, auf der Kreislinie S mit dem Mittelpunkt A und dem Radius b . Der geometrische Ort der Ecken C aller gleichseitigen Dreiecke ABC ist die Kreislinie, die man aus S durch eine Drehung um den Punkt A um 60° erhält. Hieraus erkennt man, daß $\overline{OC}$ dann maximal ist, wenn $\overline{OC} = a + b$ und $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ ist. Das Minimum für $\overline{OC}$ ist gleich $a - b$ (wenn $a > b$) und wird angenommen, wenn $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ ist.
62. Drehen Sie das Dreieck $B'BB''$ um 90° um den Punkt B !
63. Drehen Sie das Quadrat um den Punkt P um 60° .
64. Betrachten Sie den Punkt A' , der spiegelbildlich zum Punkte A in bezug auf die Gerade l liegt. Der Punkt X ist der Schnittpunkt der Strecke $\overline{A'B}$ mit der Geraden l .
65. Es seien A' und A'' die Spiegelpunkte von A bezüglich der Schenkel des gegebenen Winkels. Die Schnittpunkte der Strecke $\overline{A'A''}$ mit den Schenkeln des Winkels sind Ecken des gesuchten Dreiecks.
66. Tragen Sie auf jedem Schenkel des Winkels von der Spitze eine Strecke der Länge $\frac{p}{2}$ ab! Schlagen Sie den Kreis, der die Schenkel des Winkels in den Enden dieser Strecken berührt! Die Tangenten an diese Kreislinie, die durch den Punkt A gehen und die Schenkel des Winkels zwischen den Berührungspunkten der Schenkel mit dem Kreis und der Spitze des Winkels schneiden, sind dann die Lösungen der Aufgabe.
67. Konstruieren Sie den bezüglich der Geraden MN achsensymmetrisch zu B gelegenen Punkt B' und danach den Kreis um B' , der die Gerade MN berührt! Einer der Schnittpunkte X von MN mit den durch den Punkt A gehenden Tangenten an den Kreis ist der gesuchte Punkt.

68. a) Ja. b) Ja.

69. Ein Kreisbogen (und dessen Spiegelbild an der Strecke $\overline{AB}$). Man beachte, daß der gegebene Winkel an der Spitze durch den Schnittwinkel der Winkelhalbierenden der beiden anderen Winkel eindeutig bestimmt ist.

70. Es sei O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises S und S' der Kreis mit dem Durchmesser AO . Der gesuchte geometrische Ort besteht aus allen Punkten des Kreises S' , die innerhalb des gegebenen Kreises S liegen.

71. Es sei O der Mittelpunkt des Kreises durch MBC , O_1 der Mittelpunkt des Kreises durch ABC , N der Mittelpunkt von $\overline{BM}$ und L der Schnittpunkt von $\overline{ON}$ und $\overline{BD}$. Beweisen Sie, daß das Dreieck OO_1L gleichschenkelig ist!

72. Es seien ein Dreieck ABC und ein Kreissektor vom Radius R mit dem Zentriwinkel α gegeben. Statt das Dreieck ABC in den Sektor einzubeschreiben, wird einem gegebenen Dreieck ein vorgegebener Sektor umbeschrieben. Konstruieren Sie dazu über jeder Dreiecksseite ein Segment mit dem Umfangswinkel α , und ermitteln Sie auf dem Bogen jedes dieser Segmente Punkte, deren Abstand von der gegenüberliegenden Ecke gleich R ist! In diesen Punkten müssen die Ecken des Sektors liegen. Die Aufgabe hat höchstens 6 Lösungen.

73. Es seien O_1 und O_2 die Mittelpunkte der gegebenen Kreise und l eine beliebige durch den Punkt A gehende Gerade, die S_1 im Punkte B_2 schneide. Ziehen Sie durch O_1 eine zu l parallele Gerade und fällen Sie vom Punkte O_2 auf diese das Lot $\overline{O_2K}$. Beweisen Sie sodann, daß $\overline{O_1K}$ halb so lang wie $\overline{B_1B_2}$ ist! Danach bereitet die Konstruktion der geforderten Geraden keine Schwierigkeiten mehr.

74. Das gegebene Dreieck habe die Winkel α, β, γ und die Seiten a, b, c . Konstruieren Sie über den Strecken $\overline{M_1M_2}$ und $\overline{M_2M_3}$ Bögen mit den Umfangswinkeln α und β (oder α und γ, β und γ), und ergänzen Sie diese Bögen zu Kreislinien! Benutzen Sie sodann das Resultat der vorhergehenden Aufgabe!

75. Die Aufgabe läßt sich auf die vorhergehende zurückführen.

76. Für $k \neq 1$ ist der geometrische Ort die Kreislinie mit den Durchmesser $\overline{K_1K_2}$, wenn die Punkte K_1 und K_2 auf der Geraden durch A und B so liegen, daß $\frac{\overline{AK_1}}{\overline{BK_1}} = \frac{\overline{AK_2}}{\overline{BK_2}} = k$ gilt. Betrachten Sie zum Beweis das Dreieck AMB , wobei M ein beliebiger Punkt des gesuchten geometrischen Ortes ist, und konstruieren Sie die Winkelhalbierenden des Winkels AMB und des entsprechenden Außenwinkels! Beweisen Sie sodann, daß diese Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht stehen und die Gerade durch A und B in den Punkten K_1 und K_2 schneiden!

77. Es sei X der Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit der Geraden l und M der Schnittpunkt der Geraden durch AB und l . (Sollten diese Geraden parallel sein, so ist der Punkt X leicht zu finden.) Es ist leicht zu sehen, daß $\overline{MB} \cdot \overline{MA} = \overline{AX}^2$ gilt, wonach der Punkt X mühelos zu finden ist.
78. Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte, von denen aus eine gegebene Strecke unter einem gegebenen Winkel erscheint, und den geometrischen Ort aller Punkte, von denen aus eine gegebene Kreislinie unter einem gegebenen Winkel erscheint! Die Schnittpunkte der genannten geometrischen Örter bilden die Lösungen der Aufgabe.
79. Beweisen Sie zunächst, daß die Spiegelpunkte des Höhenschnittpunktes an den drei Dreiecksseiten auf dem Umkreis dieses Dreiecks liegen und daß die Bögen zwischen ihnen in den Ecken des Dreiecks halbiert werden!
80. Es seien die drei Strecken h_a, h_b, h_c gegeben, die die Höhen des gesuchten Dreiecks sind. Beweisen Sie, daß das Dreieck mit den Seiten h_a, h_b und $\frac{h_a h_b}{h_c}$ zu dem gesuchten ähnlich ist!
81. Ziehen Sie durch den Punkt N die Parallele zu CD ! Es sei S der Schnittpunkt dieser Geraden mit $\overline{AC}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AMP und PNS erhalten wir $\frac{\overline{AM}}{\overline{NS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}$, so daß aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ANS und ACD die Beziehung $\frac{\overline{AN}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AC}} = \beta$ folgt. Daher gilt $\overline{NS} = \beta \overline{CD}$, $\overline{AS} = \beta \overline{AC}$ und $\overline{PS} = \beta \overline{AC} - \overline{AP}$, und die erste Gleichung kann in der folgenden Weise geschrieben werden: $\frac{\overline{AM}}{\beta \overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\beta \overline{AC} - \overline{AP}}$.
Hieraus erhalten wir leicht, daß $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta}$ gilt.
82. Nehmen Sie auf der Geraden durch AB einen beliebigen Punkt Q an, und suchen Sie auf der Geraden durch BP einen Punkt, dessen Abstand vom Punkte Q gleich dem Abstand des Punktes Q von der Geraden durch BC ist! Benutzen Sie sodann Ähnlichkeitssätze!
83. Es sei $A_1 A_2 \dots A_n$ der gegebene Polygonzug. Benutzen Sie die Tatsache, daß die Länge einer Strecke nicht größer ist als die Summe der Längen ihrer Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Geraden!
84. Es sei O der Schnittpunkt zweier gegebener zueinander senkrechter Geraden. Der gesuchte geometrische Ort besteht aus allen Punkten der Kreisscheibe um O

mit dem Radius 1, die außerhalb des Quadrates liegen, dessen Ecken die Schnittpunkte des Randes dieser Kreisscheibe mit den gegebenen Geraden sind. Benutzen Sie zum Beweis das Resultat der vorhergehenden Aufgabe und ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Geraden gleich 1 ist!

85. Beweisen Sie zunächst folgendes: Sind l_1 und l_2 Symmetrieachsen irgendeiner Figur, dann ist die zur Geraden l_1 in bezug auf l_2 spiegelbildlich gelegene Gerade ebenfalls eine Symmetrieachse dieser Figur. Zeigen Sie danach: Schnitten sich irgend drei Symmetrieachsen nicht in einem Punkt, d. h., erzeugten sie ein Dreieck, so könnte man durch Spiegelung dieses Dreiecks an seinen Seiten unendlich viele verschiedene Symmetrieachsen erhalten, was aber nicht möglich ist!

86. Es seien A , B und C drei gegebene Punkte. Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig oder rechtwinklig, dann enthält die Kreisscheibe, deren Mittelpunkt in der Mitte der dem stumpfen oder rechten Winkel gegenüberliegenden Seite liegt und deren Radius gleich der halben Länge dieser Seite ist, alle drei Punkte A , B und C . Es ist klar, daß der Radius nicht größer als $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. Ist aber

das Dreieck ABC spitzwinklig und R der Radius des Umkreises, dann ist, da einer der Bögen $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ mindestens 120° beträgt, aber die entsprechende Sehne nicht größer als 1 ist, $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

87. a) Wir schließen alle diese Punkte in irgendeine Kreisscheibe ein und verkleinern diese (eventuell unter Verschiebung des Mittelpunktes). Nur in einem der beiden folgenden Fälle wird uns die Verkleinerung des Kreisradius nicht gelingen. 1) Zwei der gegebenen Punkte liegen auf dem Rande der Kreisscheibe einander diametral gegenüber. 2) Drei von den gegebenen Punkten bilden die Ecken eines dem Kreise einbeschriebenen spitzwinkligen Dreiecks. Da man aber nach Voraussetzung stets drei und daher erst recht zwei der Punkte in eine Kreisscheibe vom Radius r einschließen kann, kann in beiden Fällen der Radius der Kreisscheibe, die wir erhalten, nicht größer als r sein.
b) Dies folgt unmittelbar aus dem Ergebnis der Aufgabe a) und der vorhergehenden Aufgabe.

88. Der an das Vieleck angrenzende Streifen besteht aus Rechtecken der Höhe 1, die über den Seiten des Vielecks errichtet sind, und den verbleibenden Vierecken. Die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke ist 12. Die Vierecke kann man so parallel verschieben, daß sie zusammen ein Vieleck bilden, welches einem Kreise vom Radius 1 umbeschrieben ist. Daher ist die Summe ihrer Flächeninhalte größer als $\pi > 3$.

89. Man verbinde den Punkt M mit den Ecken des Vielecks und betrachte die Flächeninhalte der sich ergebenden Dreiecke.
90. a) Den Punkt P findet man als Schnittpunkt zweier Bögen, die über zwei Seiten des Dreiecks errichtet sind und zu einem Umfangswinkel von 120° gehören.¹
- b) Der Winkel zwischen den konstruierten Geraden beträgt 160° .
- c) Es ist klar, daß man sich auf die Betrachtung von Punkten beschränken kann, die nicht außerhalb des Dreiecks ABC liegen. Für jeden solchen von P verschiedenen Punkt ist die Summe der Abstände zu den Ecken A, B, C größer als die Summe der Abstände zu den Seiten des gemäß b) konstruierten gleichseitigen Dreiecks, die nach der vorhergehenden Aufgabe konstant und gleich $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ ist.
91. a) Die Höhe auf der Seite a ist nicht größer als b .
- b) Der Flächeninhalt jedes der vier Dreiecke, die von zwei Seiten und einer Diagonalen des Vierecks gebildet werden, läßt sich unter Benutzung von a) abschätzen. Die Summe dieser Flächeninhalte ist gleich dem doppelten Inhalt des Vierecks.
92. In einer Kreisscheibe vom Radius 10 kann man nicht 400 Kreisscheiben vom Radius 1 so unterbringen, daß keine zwei einander überlappen, denn die Summe ihrer Flächeninhalte $400 \frac{\pi}{4}$ ist gleich dem Flächeninhalt der größeren Kreisscheibe, nämlich 100π .
93. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreisscheibe darf nicht weniger als 0,5 von den Seiten des Rechtecks oder eines der Quadrate entfernt sein. Fügen wir zu jedem der Quadrate alle Punkte hinzu, die von diesen einen kleineren Abstand als 0,5 haben, so erhalten wir eine Figur (ein Quadrat mit abgerundeten Ecken) mit dem Flächeninhalt $3 + 0,25\pi$. Diese Figuren können nicht das Rechteck 19×24 überdecken, auch dann nicht, wenn sie nicht übereinandergreifen, da $120(3 + 0,25\pi) < 19 \times 24$ ist.
94. Der Flächeninhalt des Dreiecks DEC ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ADF und FBC .
95. Eine der vielen Lösungsmöglichkeiten ist die folgende:
Wir wählen einen von den n Punkten A . Von diesem aus ziehen wir einen Strahl und verbinden, indem wir ihn um die Ecke A drehen, die übrigen Punkte in der Reihenfolge, in der sie der Strahl trifft. Den ersten und den letzten von ihnen verbinden wir mit dem Punkt α .

¹ Man überlege sich, daß der Schnittpunkt tatsächlich im Innern des Dreiecks liegt. (Anm. d. Herausgeb. d. dtsh. Ausg.)

96. Die Strecken des Polygonzuges zerfallen in Paare einander schneidender. Daher ist ihre Anzahl gerade. Ein Beispiel für $n = 6$ ist der Polygonzug $A_1B_2A_3B_1A_2B_3A_1$, wenn A_1, A_2, A_3 die Ecken eines regulären Dreiecks mit dem Mittelpunkt O und B_1, B_2, B_3 die Mittelpunkte der Strecken $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}$ sind. Aus diesem Beispiel erhält man mühelos Beispiele für $n = 8, 10, 12$ usw.
97. Es sei $A_1A_2 \dots A_n$ ein reguläres n -Eck. Betrachten Sie den Linienzug $A_1, A_3, A_5 \dots$ (dabei sind alle Ecken durch einen einzigen Linienzug verbunden)!
98. Nehmen Sie zwei Punkte mit größtem Abstand, und konstruieren Sie zwei Kreisscheiben vom Radius 1, die diese Punkte als Mittelpunkte haben! Beweisen Sie dann, daß alle Punkte im Innern dieser Kreisscheibe liegen!

4. Zur Geometrie des Raumes

99. Je zwei dieser Strecken bilden die Diagonalen eines Parallelogramms, welches von Mittellinien der Seitenflächen gebildet wird.
100. Nein. Betrachten Sie die längste Kante des Tetraeders!
101. Es sei $ABCD A' B' C' D'$ ein Parallelepiped, bei dem sich keine zwei Kanten rechtwinklig schneiden. Man kann annehmen, daß die Winkel bei A und A' in den Grundflächen $ABCD$ und $A' B' C' D'$ stumpf und daher die bei B und B' spitz sind. Betrachtet man die Seitenfläche $ABA' B'$, so sieht man, daß entweder in der Ecke A zwei stumpfe Winkel, also in der Ecke B zwei spitze oder in der Ecke A' zwei stumpfe, also in der Ecke B' zwei spitze liegen. Jetzt ist klar, daß, wie auch die stumpfen Winkel auf den Seitenflächen $ADD' A'$ und $BCC' B'$ liegen mögen, von genau einer der Ecken A, B, A', B' zwei stumpfe oder zwei spitze Winkel ausgehen müssen.
In den Ecken C', D', C, D liegen die Verhältnisse wegen der Zentralsymmetrie eines Parallelepipeds in bezug auf seinen Mittelpunkt genauso.
102. $n + 1$ Kanten. Das Polygon, das als Schnitt entsteht, kann nicht mehr als $n + 1$ Seiten haben, denn die Anzahl der Seitenflächen der Pyramide ist $n + 1$. Andererseits schneidet die Ebene, welche durch die Mitten zweier benachbarter Kanten der Grundfläche und die Mitte der Höhe der Pyramide geht, alle Seitenflächen, d. h. $n + 1$ Kanten. Für Prismen lautet die Antwort entsprechend $n + 2$ Kanten.
103. Eine der möglichen Lösungen ist folgende:
In einem Polyeder mit 7 Kanten kann keine Fläche mit 4 oder mehr Kanten

vorkommen, da es sonst außer den 4 noch wenigstens weitere 4 Kanten, die von den Ecken ausgingen, insgesamt also mindestens 8 Kanten hätte. Aus Dreiecken kann es aber auch nicht zusammengesetzt sein, denn ein Polyeder, das aus m Dreiecken besteht, hat $\frac{3m}{2}$ Kanten.

Ein Beispiel eines Polyeders mit $2n$ Kanten ($n \geq 0$) ist eine n -seitige Pyramide. Ein Polyeder mit $2n + 3$ Kanten ($n \geq 3$) erhält man aus einer n -seitigen Pyramide, wenn man auf einer ihrer Seitenflächen ein Tetraeder aufsetzt.

104. Es seien $h_1, h_2, \dots, h_n$ die Abstände der Punkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ von den gegebenen Ebenen. Dann ist das in der Aufgabe genannte Produkt gleich

$$\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_4} \cdot \dots \cdot \frac{h_{n-1}}{h_n} \cdot \frac{h_n}{h_1}.$$

105. Jedes Polygon kann man in Dreiecke und Trapeze zerlegen, deren Grundseiten zu einer horizontalen Ebene parallel sind. Dazu braucht man nur durch alle ihre Ecken horizontale Ebenen zu legen. Für diese Dreiecke und Trapeze ist aber die Behauptung der Aufgabe leicht einzusehen, denn ihre Grundseiten bleiben bei der Projektion erhalten, während die Höhen mit $\cos \alpha$ multipliziert werden.

106. Man braucht das Parallelepiped nur so zu legen, daß die Ebene durch die Endpunkte dreier von einer Ecke A ausgehenden Kanten des Parallelepipeds horizontal liegt. Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß die Fläche des Sechsecks (Abb. 1.2.), die die Projektion des Parallelepipeds ist, stets einen doppelt so großen Inhalt hat wie die schraffierte Dreiecksfläche, die Projektion des Schnittes des Parallelepipeds mit der obengenannten Ebene. (Wir nehmen an, daß die Ecke A oben liegt.) Dann bleibt nur noch zu zeigen, daß der Flächeninhalt der Projektion des Dreiecks maximal ist, wenn das Dreieck parallel zu einer horizontalen Ebene liegt. (Dies folgt aber aus dem Resultat der vorhergehenden Aufgabe.)

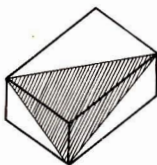


Abb. 1.2.

107. Die Projektion eines Tetraeders ist entweder ein Dreieck oder ein Viereck. Im ersten Fall ist klar, daß der Flächeninhalt der Projektion nicht größer ist als der Inhalt einer Seitenfläche. Im zweiten Fall (Abb. 1.3.) ist dieser doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches der Schnitt des Tetraeders mit einer durch die Mitten von vier Kanten gehenden und zu den zwei

übrigen Kanten parallelen Ebene ist. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie in der vorhergehenden Aufgabe. Eine reguläre dreiseitige Pyramide muß man im Falle $b \geq a \frac{\sqrt{3}}{2}$ so legen, daß eine Kante der Grundfläche und eine Kante einer schrägen Seitenfläche horizontal liegen,

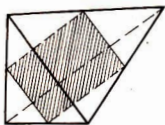


Abb. 1.3.

während man im Falle $b \leq a \frac{\sqrt{3}}{2}$ die Grundfläche in eine horizontale Ebene legen muß. (Der Flächeninhalt der Projektion ist im ersten Falle gleich $\frac{ab}{2}$ und im zweiten $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.)

108. Man verbinde den Mittelpunkt der Kugel mit den Ecken des Polyeders und bilde die Summe der Volumina der entstehenden Pyramiden.

109. a) Für die Existenz einer solchen Kugel ist notwendig und hinreichend, daß die den Seitenflächen einbeschriebenen Kreise jede der Kanten in ein und demselben Punkte berühren: Die Kante $\overline{AB}$ im Punkte P , $\overline{BC}$ in Q , $\overline{CA}$ in R , $\overline{AD}$ in L , $\overline{BD}$ in M , $\overline{CD}$ in N . Für die Punkte P, Q, R, L, M, N müssen die Gleichungen $\overline{AP} = \overline{AR} = \overline{AL} = a$; $\overline{BP} = \overline{BQ} = \overline{BM} = b$ usw. erfüllt sein.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß für die Existenz solcher Punkte die Bedingung

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

$$\times \left[a = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}) = \frac{1}{2} (\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{CD}); \right.$$

$$\left. b = \frac{1}{2} (\overline{BA} + \overline{BC} - \overline{AC}) = \frac{1}{2} (\overline{BA} + \overline{BD} - \overline{AD}) = \frac{1}{2} (\overline{BC} + \overline{BD} - \overline{CD}) \text{ usw.} \right]$$

hinreichend ist.

b) Berührt die Kugel die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und die Verlängerungen der Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$, dann nimmt die Bedingung die Gestalt $\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AD} = \overline{CA} - \overline{BD}$ an. Der Beweis verläuft analog wie unter a).

Es sind lediglich drei Inkreise durch Ankreise zu ersetzen.

c) Aus den genannten Bedingungen folgt unmittelbar, daß es dann und nur dann zwei Kugeln vom Typ b) gibt, wenn gegenüberliegende Kanten gleich lang sind. In diesem Falle gibt es noch zwei weitere Kugeln vom Typ b). Nur bei regulären Pyramiden gibt es eine Kugel vom Typ a) und eine vom Typ b) [die Kugel vom Typ b) berührt die Kanten der Grundfläche].

d) Folgt aus c).

- 110.** Das Verhältnis der Abstände des Punktes M von den Ebenen durch ABC und $A'B'C'$ ist gleich dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC . Der gesuchte geometrische Ort besteht aus zwei Ebenen, die durch die Schnittgerade der Ebenen, in denen die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen, gehen (strenggenommen muß diese Schnittgerade ausgeschlossen werden).
- 111.** Es seien A' und B' die Projektionen der Punkte A und B auf die Ebene. Uns interessieren die Punkte M , für die $\overline{A'M} : \overline{B'M} = \overline{A'A} : \overline{B'B}$ gilt. Der geometrische Ort der Punkte M ist eine Kreislinie oder im Falle $\overline{A'A} = \overline{B'B}$ eine Gerade. Vergleiche Aufgabe Nr. 76!
- 112.** Wir ziehen vom Punkte P aus die Tangenten PA und PB an den Kreis K . Es sei C der Mittelpunkt des Kreises und D der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CP}$. Der gesuchte geometrische Ort ist die Kreislinie mit der Strecke $\overline{DP}$ als Durchmesser, die in einer zur gegebenen Ebene senkrechten Ebene liegt und aus der der Punkt P herausgenommen ist. Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß jeder Berührungskreis von Kugel und Kegel durch die Punkte A und B geht (die Ebene des Kreises dreht sich um die Ebene AB) und daß PM senkrecht auf diesen Ebenen steht. Eine andere Lösung kann man erhalten durch Zurückführung der Aufgabe auf eine planimetrische in der zur gegebenen Ebene senkrechten Ebene durch die Punkte P und C .
- 113.** Man braucht nur die beiden Ebenenpaare, die zu gegenüberliegenden Seitenflächen gehören, bis zu ihrer Schnittgeraden fortzusetzen und als Schnittebene eine zu den beiden erhaltenen Geraden parallele Ebene zu wählen.
- 114.** Die Konstruktion des Dreiecks mit den drei Seiten a, b, c führt auf die Lösung des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = b^2, z^2 + x^2 = c^2,$$

woraus

$$x^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, z^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

folgt.

5. Zur vollständigen Induktion

- 115.** Für $n = 1$ ist die Zahl $4^n + 15n - 1 = 18$ durch 9 teilbar. Wir nehmen jetzt an, daß für ein n die Zahl $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar ist. Wir zeigen, daß dies dann auch für die um 1 größere Zahl als n gilt, d. h. daß auch $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ durch 9 teilbar ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Gleichung $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18$ erfüllt ist.

116. Zur unmittelbaren Überprüfung beweise man mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

gilt.

117. Für $n = 1$ ergibt sich die Gleichung $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Wir nehmen an, daß die Ungleichung $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{n}{2}$ erfüllt sei. Wenn man in der Summe

$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$ jeden der 2^n Summanden durch $\frac{1}{2^{n+1}}$ ersetzt, dann wird die Summe verkleinert. Es gilt also

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}.$$

Addieren wir diese Ungleichung zur ersten, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

118. Die Summe ist gleich $\binom{n+1}{m+1}$. Der Beweis beruht auf der Relation

$$\binom{n+1}{m} + \binom{n+1}{m+1} = \binom{n+2}{m+1}.$$

119. $a_4 = 3$ ist durch 3 teilbar. Ist a_{4n} durch 3 teilbar, dann ist auch

$$a_{4n+4} + a_{4n+2} = 2a_{4n+2} + a_{4n+1} = 3a_{4n+1} + 2a_{4n}$$

durch 3 teilbar.

120. Wir nehmen an, daß wir schon alle Massen bis $(2^{n+1} - 1)$ g aus den Wägestücken 1 g, 2 g, ..., 2^n g zusammengesetzt haben. Es sei jetzt M eine beliebige ganze Zahl zwischen $2^{n+1} - 1$ und $2^{n+2} - 1$. Dann ist $M - 2^{n+1}$ nicht größer als $2^{n+2} - 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$. Daher kann man die Masse M aus den Wägestücken 1 g, 2 g, 4 g, ..., 2^n g, 2^{n+1} g zusammensetzen. Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

- 121.** Die Aufgabe wird ähnlich wie die vorhergehende gelöst. Ist M eine beliebige Zahl zwischen $\frac{3^{n+1}}{2} + 1$ und $\frac{3^{n+2} - 1}{2}$, so gilt entweder

$$\frac{3^{n+1} - 1}{2} \leq M \leq 3^{n+1}$$

und folglich

$$0 \leq 3^{n+1} - M \leq \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) \quad \text{oder} \quad 3^{n+1} < M \leq \frac{3^{n+2} - 1}{2}$$

und folglich

$$0 < M - 3^{n+1} \leq \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1).$$

- 122. a)** $3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1 = (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an, daß $3^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar ist. Da $3^{2^n} + 1$ durch 2 teilbar ist, ist $3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n} + 1)(3^{2^n} - 1)$ durch 2^{n+3} teilbar. Andererseits kann man als bewiesen annehmen, daß $3^{2^n} - 1$ nicht durch 2^{n+3} teilbar ist. Nun ist aber $3^{2^n} + 1$ nicht durch 4 teilbar, da $(3^{2^n} + 1) - 2 = 3^{2^n} - 1$ durch 4 teilbar ist (sogar durch $4 \cdot 2^n$). Daraus folgt, daß $3^{2^{n+1}} - 1$ nicht durch 2^{n+4} teilbar ist.

b) Die Lösung ist genau dieselbe wie unter a). Man braucht sich nur von der Richtigkeit der folgenden Umformung

$$\begin{aligned} 2^{3^{n+1}} + 1 &= (2^{3^n})^3 + 1 = (2^{3^n} + 1)(2^{2 \cdot 3^n} - 2^{3^n} + 1) \\ &= (2^{3^n} + 1)[(2^{3^n} + 1)^2 - 3 \cdot 2^{3^n}] \end{aligned}$$

zu überzeugen. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9.

- 123.** Es gilt $\underbrace{111 \dots 1}_{3^{n+1}} = A_n \underbrace{111 \dots 1}_{3^n}$ mit $A_n = 100 \dots 0100 \dots 01$

(zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einsen stehen $3^n - 1$ Nullen). A_n ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9 (die Summe der Ziffern von A_n ist 3). Daher können wir mit Hilfe der vollständigen Induktion schließen, daß $\underbrace{111 \dots 1}_{3^n}$ durch 3^n teilbar ist, aber nicht durch 3^{n+1} .

- 124.** Man kann annehmen, daß n miteinander verbundene Punkte ein konvexes in Dreiecke zerlegtes Polygon bilden. Dann wird der $(n + 1)$ -te Punkt durch Strecken mit allen Punkten verbunden, die von ihm aus gesehen werden können (d. h. die für ihn noch nicht durch eine schon vorhandene Strecke verdeckt sind).

125. Man benutze die folgende Regel:

Aus mehreren Strecken kann man dann und nur dann ein Polygon bilden, wenn die größte unter ihnen kleiner ist als die Summe der übrigen.

126. Man führe eine vollständige Induktion nach der Anzahl der Spalten durch: Es ist nicht schwer zu zeigen, daß man in jeder Tabelle $3n$ durch eine Umordnung der Münzen innerhalb der Zeilen erreichen kann, daß sich in der ersten Spalte Münzen verschiedener Farbe befinden.

127. Man betrachte einen Polygonzug, der aus $n + 1$ Strecken besteht, und ersetze zwei benachbarte Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ durch die eine $\overline{AC}$ und benutze, daß in einer dreiseitigen körperlichen Ecke jeder ebene Winkel kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

128. a) In $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Teile. Eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Teile. Die $(n+1)$ -te Gerade schneidet die übrigen in n Punkten, d. h., sie zerlegt $n+1$ der bereits vorhandenen Teile in je zwei Teile.

b) Die $(n+1)$ -te Ebene hat mit den vorhergehenden Ebenen n Schnittgeraden in allgemeiner Lage, durch die sie in $\frac{n(n+1)}{2} + 1 = \binom{n+1}{2} + 1$ Teile zerlegt

wird. Daher entstehen durch die $(n+1)$ -te Ebene $\frac{n(n+1)}{2}$ neue Teile im Raum.

Bei der Untersuchung des Ausdruckes $\frac{n^3 + 5n}{6} + 1 = \binom{n+1}{3} + n + 1$ erhalten wir für $n = 1$ gerade 2 Teile, und allgemein ergibt sich

$$\frac{n^3 + 5n}{6} + 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)^3 + 5(n+1)}{6} + 1.$$

129. Die Gebiete, in die die Ebene durch n Kreise zerlegt wird, seien bereits in der geforderten Weise gefärbt. Wir zeichnen jetzt eine $(n+1)$ -te Kreislinie. Wenn wir dann bei den innerhalb der Kreislinie gelegenen Gebieten die Farbe durch die andere ersetzen, so erhalten wir eine Färbung der Ebene, die den geforderten Bedingungen genügt.

130. Man benutze, daß

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right) \text{ gilt.}$$

131. Wir nehmen an, daß bereits n Schachspieler in der geforderten Weise angeordnet sind. Die Stelle des $(n+1)$ -ten Schachspielers kann man folgendermaßen bestimmen: Wenn er gegen niemanden verloren hat, so stellen wir ihn an die

Spitze, anderenfalls stellen wir ihn hinter den letzten (in bezug auf die Numerierung), gegen den er verloren hat.

132. a) $a_1 a_2 + a_3 a_4 + \dots + a_{2n-1} a_{2n}$

b) $a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \dots + a_n a_{n+1}$

c) $(a_1 + a_{2n}) \cdot (a_2 + a_{2n-1}) \cdot \dots \cdot (a_n + a_{n+1})$

d) $(a_1 + a_2) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2n-1} + a_{2n})$

Die Beweise verlaufen analog. Wir beweisen z. B. b). Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Wir nehmen an, daß die Behauptung für $2n$ Zahlen bereits bewiesen ist und zeigen, daß sie auch für $2(n + 1)$ Zahlen

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$$

richtig ist. Wir überzeugen uns davon, daß es stets günstiger ist, a_0 und a_{2n+1} zu einem Paar zusammenzufassen als irgend zwei andere der Zahlen a_k und a_l . In der Tat gilt $a_0 a_{2n+1} + a_k a_l < a_0 a_k + a_{2n+1} a_l$, da $(a_l - a_0)(a_{2n+1} - a_k) > 0$ sein muß. Daher hat die kleinste Summe der Produkte die Form $a_0 \cdot a_{2n+1} + \dots$. Nun sind aber nach Induktionsvoraussetzung die übrigen $2n$ Zahlen auf folgende Weise am günstigsten zusammengefaßt:

$$a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \dots + a_n a_{n+1}.$$

133. Der Beweis verläuft ähnlich wie im vorhergehenden Fall. Es sei $x_1 + \dots + x_{n+1} = (n + 1)a$. Man kann annehmen, daß nicht alle Zahlen $x_1, \dots, x_{n+1} = a$ sind. Es sei z. B. $x_1 > a$ und $x_2 < a$. Ersetzen wir $x_1 = a + d$ durch a und x_2 durch $x'_2 = x_2 + d$, dann vergrößert sich das Produkt $x_1 x_2$, da $(a + d)x_2 < a(x_2 + d)$ ist. Folglich wird auch das ganze Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n+1}$ vergrößert, d. h., es gilt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n < a \cdot x'_2 \cdot \dots \cdot x_n$, obwohl die Summe der Zahlen nicht verändert worden ist: $a + x'_2 + x_3 + \dots + x_n = a(n + 1)$. Nun können wir für die n Zahlen $x'_2, \dots, x_n$, deren Summe gleich na ist, bereits als bewiesen annehmen, daß ihr Produkt dann am größten ist, wenn sie alle gleich a sind. Daher gilt

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1} \leq a^n, \quad \text{d. h.} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n < a \cdot x'_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq a^{n+1}.$$

Somit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Die Ungleichung in der Aufgabe kann in der Form

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n$$

geschrieben werden und damit auf die bewiesene Ungleichung zurückgeführt werden.

134. a) Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß in zwei Schritten eine an einer ungeraden Stelle (oder an einer geraden Stelle) stehende Zahl so transformiert wird wie eine Zahl aus einer Zeile, die aus 2^{n-1} positiven und negativen Einheiten besteht, bei der analogen Regel: $U_1, U_3, \dots, U_{2n-1}$ wird übergeführt in $U_1U_3, U_3U_5, \dots, U_{2n-1}U_1$. Wir nehmen dann als bewiesen an, daß jede Zeile aus 2^{n-1} positiven und negativen Einheiten nach 2^{n-1} Schritten in eine Zeile übergeführt wird, die nur aus positiven Einheiten besteht. Daraus schließen wir sofort, daß nach 2^{n-1} Paaren von Schritten an jeder ungeraden (und genauso an jeder geraden) Stelle $+1$ steht.

b) Bevor wir zum ersten Mal eine Zeile aus positiven Einheiten erhalten, müßten wir vorher eine Zeile aus lauter negativen Einheiten gehabt haben und vor dieser eine Zeile, in der $+1$ und -1 beständig abwechseln. (Wir nehmen an, daß diese „auf einer Kreislinie“ untergebracht sind, d. h. daß die letzte Zahl neben der ersten steht.) Das ist aber offenbar wegen der ungeraden Länge der Zeile nicht möglich.

c) $m = r \cdot 2^k$, r ungerade. Dann muß die Zeile aus r aufeinanderfolgenden gleichen Abschnitten mit je 2^k positiven und negativen Einheiten bestehen, sie muß also die Periode 2^k haben.

Man beweist zunächst mit Hilfe der vollständigen Induktion nach k , daß nach 2^k Schritten alle Zahlen, die voneinander um 2^k entfernt sind [d. h. 1-te, $(2^k + 1)$ -te, $(2 \cdot 2^k + 1)$ -te usw., 2-te, $(2^k + 2)$ -te, $(2 \cdot 2^k + 2)$ -te usw. ...], so transformiert werden, als ob sie in einer Zeile der Länge r ständen. Mit Hilfe von b) erhalten wir daraus sofort das gewünschte Resultat.

135. Wir bemerken zunächst: Wenn man den geraden Zahlen den Wert $+1$ und den ungeraden den Wert -1 zuordnet, dann entspricht die in der Aufgabe genannte Transformation der Zahlen genau der Transformation der Zeile $+1$ und -1 der Aufgabe 134a. Das bedeutet, daß nach einigen Schritten jetzt alle entstehenden Zahlen gerade sind: dies entspricht der Tatsache, daß eine Spalte aus lauter Einsen besteht. Andererseits kann die größte der Zahlen bei der in der Aufgabe genannten Operation nicht wachsen. Diese Angaben genügen zur Lösung der Aufgabe. Der vollständige Beweis kann etwa folgendermaßen geführt werden: Für eine Reihe von Nullen ist die Behauptung offenbar richtig.

Wir setzen jetzt voraus, daß für alle Reihen, die nur aus Zahlen bestehen, die kleiner als 2^m ($m \geq 1$) sind, die Behauptung bereits bewiesen ist. Wir wissen, daß diese Reihe durch eine gewisse Anzahl von Schritten in eine Reihe aus geraden Zahlen $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2^n}$ übergeführt wird, bei der jede Zahl kleiner als 2^m ist, d. h. jedes b_k kleiner als 2^{m-1} ist. Nun haben wir aber vorausgesetzt, daß die Reihe $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$, bei der jede Zahl kleiner als 2^{m-1} ist, nach einigen Schritten in eine Reihe mit Nullen übergeführt werden kann. Damit ist klar, daß das gleiche auch für die Reihe $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2^n}$ gilt.

6. Lösungen zu den Aufgaben über kariertes Papier

136. Werden p Strecken nach oben durchlaufen, so werden auch p nach unten durchlaufen, und werden q Strecken nach rechts durchlaufen, so werden auch q nach links durchlaufen. Die Länge des Weges ist dann gleich $2p + 2q$.

137. Vgl. die vorhergehende Aufgabe für $p = q$!

138. a) Innerhalb des Rechtecks $m \times n$ liegen $(m - 1)(n - 1)$ Knoten und auf dem Rande $(2m + 2n)$ Knoten. Nun ist aber

$$(m - 1)(n - 1) + \frac{2(m + n)}{2} - 1 = mn$$

also gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

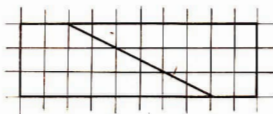


Abb. 1.4.

b) Es sei r die Anzahl der Knoten innerhalb des Trapezes, j_1 die Anzahl der Knoten auf der schrägen Seite und j_2 die Anzahl der Knoten auf den übrigen Seiten und in den Ecken. Aus zwei kongruenten Trapezen, die längs ihrer schrägen Seite aneinander stoßen (Abb. 1.4.), kann man ein Rechteck zusammensetzen. Der Flächen-

inhalt dieses Rechtecks ist nach a) gleich $2r + j_2 + \frac{2j_1 - 2}{2} - 1$.

Der Flächeninhalt eines Trapezes beträgt die Hälfte hiervon, also

$$r + \frac{j_1 + j_2}{2} - 1.$$

c) Wir zeichnen uns auf einer Seite des Vielecks eine vertikale Gerade und fällen von jeder Ecke das Lot auf diese (Abb. 1.5.). Der Flächeninhalt des Vielecks

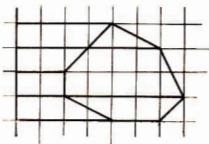


Abb. 1.5.

ist gleich der Differenz aus den Flächeninhalten der Trapeze, deren schräge Seite von der vertikalen Geraden aus nicht sichtbar ist, und den Flächeninhalten der Trapeze, deren schräge Seiten von der vertikalen Geraden aus sichtbar sind. Der Flächeninhalt jedes Trapezes wird gemäß b) berechnet. Man braucht sich nun nur noch davon zu überzeugen, daß dabei jeder Knoten im Innern und auf dem Rande des Vielecks in der geforderten Anzahl von Malen auftritt.

139. a) Man braucht nur zu ermitteln, wieviel Paare natürlicher Zahlen (x, y) es gibt, für die $x + y < 100$ ausfällt (dann ist $z = 100 - x - y$).

Erste Lösung: Es gibt 98 Paare $(x, 1)$, $x = 1, 2, 3, \dots, 98$; 97 Paare $(x, 2)$, $x = 1, 2, \dots, 97$ usw. und ein Paar $(x, 98)$, $x = 1$. Die Anzahl aller Paare (x, y) , für die $x + y < 100$ ausfällt, ist also

$$98 + 97 + \dots + 2 + 1 = (98 + 1) + (97 + 2) + (96 + 3) + \dots + (50 + 49) = 99 \cdot 49 = 4851.$$

Zweite Lösung: Jedes Paar ganzer Zahlen kann man durch einen Knoten des Netzes auf einem karierten Blatt Papier repräsentieren. Der Knotenpunkt (x, y) ist vom Anfangspunkt $(0, 0)$ um x horizontale Einheiten und um y vertikale Einheiten entfernt. Uns interessieren die Paare ganzer Zahlen (x, y) , die durch Knotenpunkte repräsentiert werden, die innerhalb des Dreiecks $x + y < 100$, $x > 0$, $y > 0$ liegen. Um ihre Anzahl festzustellen, benutzen wir dann das Resultat der Aufgabe 138. Der Flächeninhalt des Dreiecks $x + y < 100$, $x > 0$, $y > 0$ ist gleich $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000$. Auf seinen Seiten liegen 300 Knoten-

punkte. Unter Benutzung der schon genannten Aufgabe 138 erhalten wir $j + \frac{r}{2} - 1 = 5000$, $r = 300$, woraus $j = 5000 - \frac{300}{2} + 1 = 4851$ folgt.

b) Die natürlichen Zahlen x, y und $200 - x - y$ können dann und nur dann die Seiten eines Dreiecks sein, wenn

$$x + y > 200 - x - y, \quad x + (200 - x - y) > y, \quad y + (200 - x - y) > x, \\ \text{d. h. } x + y > 100, \quad x < 100, \quad y < 100 \text{ gilt.}$$

Die Anzahl der Zahlenpaare (x, y) , die der Bedingung genügen, ist 4851 (es sind dies gerade die Lösungen von a)). Bei dieser Zählung werden alle Dreiecke mit drei verschiedenen Seiten (a, b, c) sechsmal gezählt [es werden nämlich die Dreiecke (a, b, c) , (a, c, b) , (b, c, a) , (b, a, c) , (c, a, b) , (c, b, a) als verschieden gezählt], und die Dreiecke mit zwei gleichen Seiten: $(2, 99, 99)$, $(4, 98, 98)$, $(6, 97, 97)$, $(8, 96, 96)$, ..., $(98, 51, 51)$ — das sind 49 — werden dreimal gezählt. Daher ist die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke vom Umfang 200 gleich:

$$\frac{4851 + 3 \cdot 49}{6} = \frac{1617 + 49}{2} = 833.$$

140. $\binom{n-1}{k-1}$. Die Aufgabe läßt sich auf die folgende zurückführen: Es werden der Reihe nach n Einsen hingeschrieben und in die $n - 1$ Lücken zwischen ihnen sind $k - 1$ Nullen einzutragen, die diese Einsen in k Gruppen zerlegen, so daß in jeder einige Einsen stehen: x_1 in der ersten Gruppe, x_2 in der zweiten usw.

141. a) $(m + 1)(n + 1)$, denn von jedem Knoten im Innern und auf dem Rande des Rechtecks geht eine Linie des Polygons aus.

b) Eine der Zahlen m und n muß ungerade sein (vgl. Aufg. 136). In diesem Fall kann man leicht ein Beispiel konstruieren.

c) $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)$.

142. $\binom{m+n}{n}$

Wir numerieren die Strecken eines beliebigen Polygonzuges, der von einer Ecke des Rechtecks $m \times n$ zur gegenüberliegenden führt, der Reihe nach mit $1, 2, \dots, m+n$. Es ist klar, daß von den $m+n$ Nummern genau m horizontalen Strecken entsprechen. Wie man dabei auch die m Nummern aus den $m+n$ auswählt, stets gibt es einen Polygonzug, bei dem die horizontalen Strecken gerade die ausgewählten Nummern haben, und solch ein Polygonzug ist sogar eindeutig bestimmt. Es ist aber bekannt, daß man m Elemente aus $m+n$ Elementen auf $\binom{m+n}{n}$ verschiedene Arten auswählen kann.

143. Unter Benutzung der Formel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ kann man diese Summe in der

Formel $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$ darstellen. Die zu beweisende Gleichheit ergibt sich nach der Ermittlung der Anzahl der Kombinationen: Wir bilden aus $2n$ Elementen 2 Haufen von je n . Will man aus den $2n$ Elementen n auswählen, so muß man entweder 0 aus dem ersten Haufen und n aus dem zweiten oder 1 aus dem ersten Haufen und $n-1$ aus dem zweiten oder 2 aus dem ersten und $n-2$ aus dem zweiten usw. auswählen.¹

144. I. Der natürlichste Weg zur Lösung besteht darin, zu zählen, wieviel Polygonzüge es gibt, bei denen p Strecken nach oben, p nach unten, $n-p$ nach rechts und $n-p$ nach links führen, und diese Zahlen über p aufzusummieren. Beim Beweis der Gleichung

$$\frac{(2n)!}{[n!]^2} + \frac{(2n)!}{[1!]^2 [(n-1)!]^2} + \frac{(2n)!}{[2!]^2 [(n-2)!]^2} + \dots \\ \dots + \frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2 [1!]^2} + \frac{(2n)!}{[n!]^2} = \binom{2n}{n}^2$$

kann man das Resultat der vorhergehenden Aufgabe benutzen.

II. Eine kürzere Lösung ist die folgende: Wir notieren unter den Nummern $1, 2, \dots, 2n$ diejenigen n , für die es eine Strecke gibt, die nach rechts oder nach links oben führt (dafür gibt es $\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten). Unabhängig davon kann

¹ Beachten Sie bitte den Hinweis auf Seite 71!

man die Nummern n notieren, für die es Strecken gibt, die nach rechts oder nach unten führen (dafür gibt es auch $\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten). Es ist klar, daß diese Polygonzüge eindeutig bestimmt sind. Damit beträgt die Gesamtzahl aller Möglichkeiten $\binom{2n}{n}^2$.

145. Die Anzahl aller die Punkte A und B verbindenden Polygonzüge der Länge $2n - 2$ ist gleich $\binom{2n-2}{n-1}$ (Abb. 1.6.). Die Anzahl aller derjenigen von diesen Polygonzügen, die mit der Diagonalen einen Punkt gemeinsam haben, ist gleich

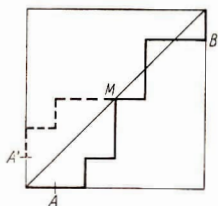


Abb. 1.6.

$\binom{2n-2}{n-2}$; das kann man folgendermaßen einsehen: Auf jedem dieser Polygonzüge wird der erste Schnittpunkt M mit der Diagonalen gewählt und das Stück $\overline{AM}$ des Polygonzuges durch sein Spiegelbild $\overline{A'M}$ ersetzt. Dann entspricht jedem Polygonzug AMB ein Polygonzug $A'MB$ und umgekehrt. Nun ist aber die Anzahl der Polygonzüge der Länge $2n - 2$, die A' und B verbinden, offenbar gleich $\binom{2n-2}{n-2}$ (wir benutzen hier das Resultat von Aufgabe 142).

7. Lösungen der vermischten Aufgaben

146. Nein. Hat man k Telephone, deren jedes mit genau m anderen verbunden ist, so ist die Zahl km gerade, da sie doppelt so groß ist wie die Anzahl der die Telephone verbindenden Leitungen. Die Zahl $5 \cdot 1963$ ist aber ungerade.
147. Man beweise, daß es unter 99 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets eine Gruppe von 50 aufeinanderfolgenden Zahlen gibt, deren erste entweder die Ziffern 00 oder 50 als die letzten beiden Ziffern hat. Die Summe der Ziffern einer solchen Zahl sei gleich a . Dann kann man leicht die Summe der Ziffern aller Zahlen dieser Gruppe ermitteln. Wir schreiben die Summe dieser Ziffern hin und erhalten

$a, a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + 9, a + 1, a + 2, \dots, a + 10, a + 2, \dots, a + 11, \dots, a + 13.$

Die Lösung der Aufgabe erhält man unmittelbar, wenn man beachtet, daß eine der Zahlen $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 13$ durch 14 teilbar ist.

Unter 98 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen braucht es keine Zahl zu geben, deren Ziffernsumme durch 14 teilbar ist. So gibt es z. B. unter den 98 Zahlen 951, 952, ..., 1048 keine solche Zahl.

148. Beweisen Sie, daß

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^2 \\ &= [n \cdot 1] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdot \dots \cdot [(n-k)(k+1)] \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot [2(n-1)] \cdot [1 \cdot n]\end{aligned}$$

ist. Beweisen Sie dann, daß jedes der Produkte in den eckigen Klammern nicht kleiner als n ist!

149. Wir durchlaufen die Kreislinie entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn und kehren zum Ausgangspunkt zurück. Es ist klar, daß dabei die Anzahl der Übergänge von plus zu minus gleich der Anzahl der Übergänge von minus zu plus ist. Wir bezeichnen diese Zahl mit d . Da nach jedem plus entweder plus oder minus steht, ist a gleich $p + d$, und da nach jedem minus entweder minus oder plus steht, ist b gleich $q + d$. Hieraus folgt $d = a - p = b - q$.

150. Dies ist eine einfache Folgerung aus der vorhergehenden Aufgabe. Es ist $p + q = 2d$, woraus $a + b = 4d$ folgt. Es gibt noch einen anderen Lösungsweg: Die Anzahl aller Summanden in der Summe $x_1 x_2 + \dots + x_n x_1$ ist gleich n , und da jeder der Summanden gleich ± 1 und die ganze Summe gleich Null ist, ist die Anzahl der Summanden $+1$ gleich der Anzahl der Summanden -1 , und daraus folgt, daß n gerade ist. Außerdem ist das Produkt

$$(x_1 x_2) \cdot (x_2 x_3) \cdot \dots \cdot (x_n x_1) = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^2 = 1,$$

und daher ist die Anzahl der Produkte in den Klammern, die gleich -1 sind, gerade. Hieraus folgt, daß n durch 4 teilbar ist.

151. $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

152. Aus den gegebenen Punkten wählen wir irgend drei Punkte A, B, C aus, die auf einer Geraden liegen. Unter den gegebenen Punkten möge es noch zwei weitere K und L geben, die nicht auf dieser Geraden liegen. Wenn die Gerade KL zur Geraden ABC parallel ist, dann kann man aus den 4 Punkten A, B, K, L nicht drei auswählen, die in einer Geraden liegen, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Schneiden einander aber die Geraden KL und AB , dann gibt es

unter den drei Punkten A, B, C wenigstens zwei, die nicht in den Schnittpunkt dieser Geraden fallen. Dies seien etwa die Punkte B und C . Dann kann man aus den vier Punkten K, L, B, C keine drei auswählen, die auf einer Geraden liegen, was wiederum im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Daraus folgt, daß alle Punkte mit höchstens einer Ausnahme auf der Geraden AB liegen.

153. Es seien $a_1, a_2, \dots, a_{1963}$ diese Zahlen. Wir wählen eine Gruppe von k Zahlen so, daß $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} < 1$, und $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 1$ ausfällt. Dies kann man erreichen, weil keine der Zahlen größer als 1 ist. Dabei ist klar, daß $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 2$ gilt. Weiter wählen wir analog eine zweite Gruppe $a_{k+1} + \dots + a_m$ so, daß $a_{k+1} + \dots + a_m \geq 1$ und $a_{k+1} + \dots + a_{m-1} < 1$ ausfällt. Die übrigen Zahlen bilden die dritte Gruppe. Damit haben wir die geforderte Zerlegung.

154. Es sei $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{50}$. Bei der in der Aufgabe genannten Summe befreien wir uns von den Absolutstrichen und erhalten

$$\pm(a_1 - a_2) \pm (a_2 - a_3) \pm \dots \pm (a_{50} - a_1).$$

Lösen wir die Klammern auf, so kommen in der entstehenden algebraischen Summe 50 Summanden mit dem Pluszeichen und 50 mit dem Minuszeichen vor. Diese Summe ist offenbar nicht größer als

$$2a_{50} + 2a_{49} + \dots + 2a_{26} - 2a_{25} - \dots - 2a_1.$$

Um die größtmögliche Summe zu erhalten, genügt es daher, die Zahlen in der folgenden Weise anzuordnen:

$$a_{50}, a_1, a_{49}, a_2, \dots, a_{26}, a_{25}.$$

155. Es sei $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dann gilt $abc = (a+b+c)(ab+bc+ac)$.

Wir setzen $a+b+c = A$, $ab+bc+ac = B$ und betrachten die Gleichung $x^3 - Ax^2 + Bx - A \cdot B = 0$. Die Zahlen a, b, c sind die Wurzeln dieser Gleichung. Lösen Sie diese Gleichung, indem Sie die linke Seite in Faktoren zerlegen, und beweisen Sie anschließend, daß eine der Summen $a+b$, $b+c$, $a+c$ gleich Null ist. Hieraus ergibt sich leicht das Resultat der Aufgabe.

156. Wir identifizieren zunächst die Punkte der Ebene und die ihnen entsprechenden komplexen Zahlen. Der Punkt Z liege außerhalb des Vielecks $C_1 C_2 \dots C_n$. Da das Vieleck $C_1 C_2 \dots C_n$ konvex ist, erscheint es vom Punkte Z aus gesehen unter einem Winkel, der kleiner als 180° ist. Daraus folgt, daß alle Punkte, die den Zahlen $Z - C_1, Z - C_2, \dots, Z - C_n$ entsprechen, innerhalb eines gewissen Winkelraums A liegen, der kleiner als 180° ist und dessen Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Wir bemerken jetzt, daß man für jede komplexe Zahl Z

den Punkt $\frac{1}{Z}$ aus Z durch Spiegelung an der reellen Achse und Multiplikation mit $\frac{1}{|Z|^2}$ erhält. Daraus folgt, daß die Punkte $\frac{1}{Z - C_1}, \dots, \frac{1}{Z - C_n}$ im Innern

eines Winkelraumes liegen, den man aus A und durch Spiegelung an der reellen Achse erhält. Weiter ist klar, daß die Summe von nicht verschwindenden komplexen Zahlen, die innerhalb eines Winkelraumes von kleinerer Öffnung als 180° liegen, nicht 0 sein kann.

157. Antwort: 1.

Setzen Sie in dem in der Aufgabe gegebenen Ausdruck $x = 1$ ein!

158. Nein; denn aus dem einen Faß kann man in das andere $k\sqrt{2} + l(2 - \sqrt{2})$ Liter umfüllen, wobei k und l ganze Zahlen bedeuten.

159. Es gibt keine solche Zahl. Beweisen Sie zunächst, daß die Zahl $(2^k)!$ für beliebiges ganzes k durch 2^{k-1} teilbar ist! Beachten Sie jetzt, daß die Zahl $(2^k - 1)!$ nur durch 2^{k-k-1} teilbar ist (Aufgabe 34)! Gäbe es eine Zahl p , die der Bedingung der Aufgabe genügt, dann müßte für alle natürlichen k gelten $2^k - 1 - k \geq 2^k - p - 1$, d. h. $k \leq p$, was unmöglich ist.

160. Es sei x eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten den Ausdruck

$$(a_1 - xb_1)^2 + (a_2 + xb_2)^2 + \dots + (a_n - xb_n)^2 \geq 0.$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern erhalten wir

$$x^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)x + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0.$$

Auf der linken Seite der letzten Ungleichung steht ein quadratisches Polynom in x . Da dieses Polynom keine negativen Werte annehmen kann, kann seine Diskriminante nicht positiv sein, d. h., es gilt

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn es zwei Zahlen x und y gibt, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, so daß $ya_k = xb_k$ für $k = 1, 2, \dots, n$ gilt.

161. Nach Potenzieren mit n und Zusammenfassung geeigneter Glieder erhalten wir
 $(\sqrt{2} - 1)^n = A\sqrt{2} - B$, A und B ganz. Beweisen Sie, daß

$$(\sqrt{2} + 1)^n = A\sqrt{2} + B$$

gilt! Durch Multiplikation erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$1 = (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^n = 2A^2 - B^2 \text{ oder } B = \sqrt{2A^2 - 1}$$

und damit die gewünschte Darstellung $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{2A^2} - \sqrt{2A^2 - 1}$.

162. Wir nehmen an, daß die Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 der Größe nach angeordnet sind: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Wir ordnen die Summen von je zwei dieser Zahlen ebenfalls der Größe nach an: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9 < a_{10}$. Dann kann man behaupten, daß

$$x_1 + x_2 = a_1, \quad x_1 + x_3 = a_2, \quad x_3 + x_5 = a_9, \quad x_4 + x_5 = a_{10}$$

und außerdem

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

gilt. Zur Berechnung von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 braucht man nur das entstandene Gleichungssystem mit 5 Unbekannten zu lösen.

163. Bei der genannten Operation wird die Summe von vier Zahlen verdoppelt. Daher ist im Falle $a + b + c + d \neq 0$ alles klar. Ist aber die Summe der Zahlen gleich Null, dann entsteht nach dem ersten und jedem folgenden Schritt ein Quadrupel der Form $a_1, b_1, -a_1, -b_1$. Ist jede dieser vier Zahlen von Null verschieden, so ist es nicht schwer zu zeigen, daß der Betrag der größten Zahl des Quadrupels vergrößert wird (man kann zeigen, daß er in zwei Schritten verdoppelt wird). Sind aber nur zwei dieser vier Zahlen von Null verschieden, so kommt man durch ähnliche Überlegungen zum Resultat.

164. Wir verändern das Vorzeichen bei den 15 beliebigen Zahlen $a_1, a_3, a_4, \dots, a_{16}$ und danach bei den 15 Zahlen $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{16}$. Als Ergebnis dieser beiden Operationen erhält man eine Vorzeichenänderung nur bei den Zahlen a_1 und a_2 . Auf genau dieselbe Weise kann man das Vorzeichen bei den Zahlen a_3 und a_4 , a_5 und a_6 , ..., a_{13} und a_{14} ändern. Ändert man jetzt das Vorzeichen bei den 15 Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{15}$, dann hat man gegenüber den Ausgangswerten das Vorzeichen nur bei der Zahl a_{15} geändert. Das übrige ist klar. Ändert man das Zeichen nur 14mal (allgemein eine gerade Anzahl von Malen), dann kann man aus der ersten Zeile auf diese Weise nicht die zweite erhalten, wenn diese sich von ihr an einer ungeraden Anzahl von Stellen unterscheidet.

165. a) Für beliebiges gerades n . In diesem Falle kann der Springer, wie in Abbildung 1.7. gezeichnet, in $n + 1$ Zügen auf ein dem Anfangsfeld benachbartes gelangen. Das übrige ist klar. Für ungerades n gelangt der $(1, n)$ -Springer nur auf Felder der gleichen Farbe (wir nehmen an, daß die Farben der Felder wie bei einem gewöhnlichen Schachbrett angeordnet sind).

b) Bei der Lösung kann man annehmen, daß m und n teilerfremd sind. Ist nämlich $m = dm_1$ und $n = dn_1$, dann erhält man das Feld für den (m, n) -Springer offenbar aus dem Feld für den (m_1, n_1) -Springer, indem man die Abstände in beiden Richtungen ver- d -facht. Für teilerfremde m und n kann man zwei Zahlen a und b so finden, daß $am - bn = 1$, d. h. $a \cdot 2m - b \cdot 2n = 2$ ist

(Aufg. 38). Hieraus kann man schließen, daß ein (m, n) -Springer in $2a + 2b$ Schritten auf ein Feld gelangen kann, das auf einer Horizontalen oder Vertikalen durch ein Feld vom Anfangsfeld getrennt ist. Benutzt man dies, so ist es nicht schwer zu zeigen, daß ein (m, n) -Springer auf jedes Feld des Brettes gelangen kann, wenn $m + n$ ungerade ist. Ist aber $m + n$ gerade, so kann er auf ein beliebiges Feld gelangen, das die gleiche Farbe hat wie das Anfangsfeld.

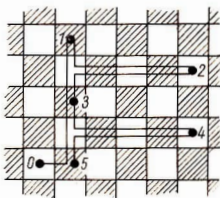


Abb. 1.7.

1	20	5	14	9
6	15	10	19	4
11	2	17	8	13
16	7	12	3	18

Abb. 1.8.

c) Wir bezeichnen mit (x, y) das Feld, das vom Anfangsfeld $(0, 0)$ um x Felder längs der Horizontalen und um y Felder längs der Vertikalen entfernt ist. Man kann annehmen, daß m und n teilerfremd sind. Ist $m + n$ ungerade, dann werden diejenigen Felder (x, y) , für die $x + y$ gerade ist, mit Rotstift markiert, und diejenigen, für die $x + y$ ungerade ist, mit einem Blaustift. Ist $m + n$ gerade, dann werden die Felder rot gefärbt, für die x und y gerade sind, und diejenigen blau, für die x und y ungerade sind.

166. Die Lösung ist in Abbildung 1.8. angegeben.

167. Auf dem Brett befindet sich eine gerade Anzahl von Feldern, und der Springer zieht jeweils auf ein Feld der anderen Farbe.

168. Wir nehmen zunächst an, daß die in der Aufgabe genannte Durchlaufung des $4 \times n$ Brettes mit einem Springer möglich ist. Wir zerlegen jetzt das Brett und seine Felder und ordnen diese $4n$ Felder auf einer Kreislinie so an, wie sie vom Springer der Reihe nach durchlaufen werden. Dabei wechseln die schwarzen und weißen Felder ab. Wo liegen dabei die $2n$ Felder, die die beiden Randreihen des $4 \times n$ Brettes bilden? Keine zwei dieser Felder liegen nebeneinander, da der Springer von einem Randfeld immer nach innen ziehen muß. Das bedeutet, daß zwischen ihnen genau ein anderes Feld liegt. Daher müssen diese Randfelder alle die gleiche Farbe haben.

169. Die Lösung ergibt sich analog zur vorhergehenden Aufgabe. Von einer der vier Randlinien zieht der Springer auf eine der drei inneren Linien. Dabei kann er von den $7n$ Feldern nicht mehr als $6n + 1$ durchlaufen.

170. Wir legen eine beliebige Münze a_1 , die nicht an der richtigen Stelle liegt, auf das freie Feld. Auf das dadurch frei gewordene Feld setzen wir die Münze a_2 , die auf ihm liegen muß. Auf das dann frei gewordene Feld legen wir die Münze a_3 ,

die auf ihm liegen muß usw., bis wir die Münze a_1 auf ihr Feld legen müssen (dieses Feld wird nach Umsetzung eines gewissen a_k auf dessen Feld frei). Wenn jetzt noch nicht alle Münzen richtig angeordnet sind, dann setzen wir dieses Verfahren fort, indem wir mit einer gewissen anderen Münze a_{k+1} beginnen usw., bis alle Münzen auf ihrem Platz liegen. Bei der Umsetzung jeder Kette, wie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ ($k > 2$), verliert man einen „überflüssigen“ Schritt (nämlich den, bei dem eine der Münzen $a_1, a_2, \dots, a_k$ nicht auf ihren Platz gelegt wird). Es gibt aber höchstens 12 solche Ketten. Ein Beispiel für eine möglichst ungünstige Verteilung ist: 2, 1, 4, 3, 6, 5 ...

171. Man kommt leicht darauf, daß es für jeden Spieler günstig ist, auf dem 5., 9. und allgemein $(4k + 1)$ -ten Feld vom Ende, und ungünstig ist, auf den anderen Feldern zu stehen. Daher verliert der erste Spieler, wenn $n = 5, 9, 13, \dots, 4k + 1$ ist, und gewinnt in den übrigen Fällen: Er zieht sofort auf das „gewinnende“ Feld und ergänzt jeden Zug des Gegners „auf 4“.
172. Hier ist ein „gewinnendes“ Feld ein solches, bei dem sowohl die horizontale als auch die vertikale Nummer ungerade ist [dazu gehört auch die linke untere Ecke (1, 1), in der das Spiel endet]. Auf einem $(m \times n)$ Brett gewinnt der Anziehende mit Ausnahme des Falles, daß sowohl m als auch n ungerade ist.
173. *Lösung:* Wir ändern die Vorzeichen in einer Zeile oder einer Spalte, wenn die Summe der Zahlen negativ ist. Dabei wird die Summe aller Zahlen in der Tabelle vergrößert, d. h., wir erhalten immer neue Tabellen. Da die Vertauschung der Vorzeichen nur zu einer endlichen Anzahl verschiedener Tabellen führen kann, können wir nach einigen Schritten keine derartige Operation mehr vornehmen, d. h., wir gelangen zu einer Tabelle, bei der die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte nicht negativ ist.
174. Der Gedanke zur Lösung ist derselbe wie in der vorhergehenden Aufgabe. Wir beachten, daß bei der in der Aufgabe genannten Transformation der Flächeninhalt des Vielecks jedesmal vergrößert wird. Andererseits gibt es nur eine endliche Anzahl verschiedener Vielecke, die man auf diese Weise erhalten kann, da sie alle aus denselben Strecken bestehen, die nur jeweils anders angeordnet sind.
175. Es gilt $\sqrt{26} - 5 = \frac{1}{\sqrt{26} + 5} < \frac{1}{10}$.
- Nun ist aber die Zahl $(\sqrt{26} + 5)^{1963} - (\sqrt{26} - 5)^{1963}$ ganz (man benutze die Lösung der Aufgabe 130 oder den binomischen Satz).

8. Aufgaben, die bei der zweiten allrussischen Olympiade gestellt wurden

8. Klasse

1. Jede Seitenhalbierende zerlegt ein Dreieck in zwei flächengleiche Teile. Daher sind die Flächeninhalte der Dreiecke ABC , CBB' , $CB'C'$ gleich. Hieraus folgt, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $BB'C'$ doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC : $S_{\triangle BB'C'} = 2S_{\triangle ABC}$. Genauso beweist man, daß

$$S_{\triangle CC'D'} = 2S_{\triangle BCD}; \quad S_{\triangle DD'A'} = 2S_{\triangle CDA}; \quad S_{\triangle AA'B'} = 2S_{\triangle DAB}$$

ist. Durch Addition erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$\begin{aligned} S_{\triangle BB'C'} + S_{\triangle CC'D'} + S_{\triangle DD'A'} + S_{\triangle AA'B'} \\ = 2(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CDA} + S_{\triangle DAB}). \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ mit S , so gilt

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle DAB} = S.$$

Aus der obenstehenden Gleichung folgt, daß der Flächeninhalt der vier anliegenden Dreiecke gleich $4S$ ist. Um den Flächeninhalt des Vierecks $A'B'C'D'$ zu erhalten, braucht man zu diesen Dreiecken nur das Viereck $ABCD$ hinzuzufügen, welches den Flächeninhalt S hat. Daher ist der Flächeninhalt des Vierecks $A'B'C'D'$ gleich $4S + S = 5S$.

2. Der gesuchte geometrische Ort ist das Geradenpaar, welches den Kreis S in seinen Schnittpunkten mit der gegebenen Geraden l berührt (Abb. 1.9.).

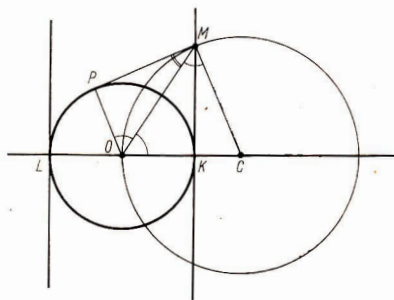


Abb. 1.9.

Beweis: Es sei C der Mittelpunkt des Kreises S' und M ein Schnittpunkt von S' mit der Senkrechten KM zur Geraden l , MP die andere vom Punkte M aus an den Kreis S gelegte Tangente. Wir beweisen, daß Winkel PMC ein rechter ist, d. h., daß PM eine gemeinsame Tangente der Kreise S und S' ist. Hieraus folgt, daß der Punkt M auf dem gesuchten geometrischen Ort liegt. Es ist $\sphericalangle OMC = \sphericalangle MOC$, da

$\overline{OC} = \overline{MC}$ ist und $\sphericalangle MOC = \sphericalangle MOP$, da $\triangle MOK \cong \triangle MOP$ ist. Schließlich ist $\sphericalangle PMC = \sphericalangle PMO + \sphericalangle OMC = \sphericalangle PMO + \sphericalangle MOP = 90^\circ$.

Damit haben wir bewiesen, daß für eine beliebige Kreislinie S' der entsprechende Punkt des geometrischen Ortes auf der Senkrechten zur Geraden l liegt, die durch K geht (oder durch L , wenn der Mittelpunkt C des Kreises S' auf der anderen Seite vom Punkte O liegt). Umgekehrt kann man durch jeden Punkt M dieser Senkrechten eine Kreislinie S' legen, deren Mittelpunkt auf der Geraden l liegt und die durch den Punkt O geht. Wie oben bewiesen, ist dann der Punkt M ein Punkt auf dem geometrischen Ort, der dieser Kreislinie S' entspricht. Folglich gehört jeder Punkt der Senkrechten dem geometrischen Ort an. Damit ist der Beweis beendet.

3. Nach Voraussetzung ist

$$a_1 - a_0 > 0, a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0), \dots, a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98}).$$

Hieraus folgt, daß alle Differenzen $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{100} - a_{99}$ positiv sind und daß

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_0} = \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = \dots = \frac{a_{100} - a_{99}}{a_{99} - a_{98}} = 2 \text{ ist.}$$

Durch Multiplikation erhalten wir aus diesen 99 Relationen $\frac{a_{100} - a_{99}}{a_1 - a_0} = 2^{99}$,

woraus sich $a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a_0)$ ergibt. Wir wissen, daß $a_{99} > x_0$ und $a_1 - a_0 \geq 1$ ist und daher $a_{100} > 2^{99}$ sein muß.

Bemerkung: Durch eine genauere Abschätzung von $a_1, a_2, a_3, \dots$ kann man zeigen, daß sogar $a_{100} \geq 2^{100}$ gilt.

4. Es gilt

$$\begin{aligned} & (ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) - (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d) \\ &= a(x_2^3 - x_1^3) + b(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) [a(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + b(x_2 + x_1) + c]. \end{aligned}$$

Sind a, b, c, x_1, x_2 ganze Zahlen, dann steht in der eckigen Klammer eine ganze Zahl, d. h., $(ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) - (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d)$ ist durch $(x_2 - x_1)$ teilbar. Dies steht im Widerspruch zu den Voraussetzungen der Aufgabe, daß $ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 1$ ist für $x_1 = 19$ und $ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 2$ ist für $x_2 = 62$, denn $2 - 1 = 1$ ist nicht durch $62 - 19 = 43$ teilbar.

5. Erste Lösung: Wir multiplizieren alle 50 Produkte. In dem so entstehenden Produkt kommt jede Zahl der Tabelle zweimal vor: einmal in einem Produkt in einer Zeile und einmal in einem Produkt in einer Spalte. Daher ist das Gesamtprodukt gleich 1. Hieraus folgt, daß unter den 50 Produkten (-1) eine gerade Anzahl von Malen auftritt, und daraus folgt, daß die Summe der Produkte nicht Null sein kann.

Zweite Lösung: Wenn man in der Tabelle eine 1 durch -1 ersetzt, dann ändern sich das Produkt der Zahlen in der betreffenden Zeile um zwei und das Produkt der Zahlen in der betreffenden Spalte auch um zwei, während die übrigen Produkte ungeändert bleiben. Folglich bleibt die Summe der 50 Produkte dieselbe, oder sie ändert sich um 4 oder um -4 .

Für Tabellen, die nur aus Einsen bestehen, ist die Summe der Produkte gleich 50. Aus einer solchen kann man eine beliebige Tabelle erhalten, indem man nacheinander verschiedene Einsen durch -1 ersetzt. Dabei geht, wie bereits oben bemerkt, die Summe der Produkte in $50 - 4k$ über, wobei k eine gewisse ganze Zahl ist. Es ist klar, daß eine Zahl der Form $50 - 4k$ nicht gleich Null sein kann.

9. Klasse

1. *Erste Lösung:* In dem Dreieck ABC mit $\overline{AC} = a$ und $\overline{BC} = b$ mögen die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ aufeinander senkrecht stehen; ihren Schnittpunkt bezeichnen wir mit M . Wir ziehen $\overline{DF} \parallel \overline{BE}$ (der Punkt F liegt auf $\overline{AC}$). Dann ist $\sphericalangle ADF = \sphericalangle AME = 90^\circ$ und $\frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = 2$, d. h. $\overline{AF} = \frac{3}{4} \overline{AC} = \frac{3}{4} a$. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion: Wir tragen auf einer Geraden die Strecke $\overline{AC} = a$ ab und konstruieren den Punkt F , der die Strecke $\overline{AC}$ im Verhältnis 3 : 1 teilt. Wir konstruieren die Kreislinie mit der Strecke $\overline{AF}$ als Durchmesser. Sie schneidet den Kreis um C mit dem Radius $\frac{b}{2}$ im Punkte D : $\overline{CD} = \frac{b}{2}$, $\sphericalangle ADF = 90^\circ$. Wir verlängern die Strecke $\overline{CD}$ über den Punkt D hinaus um $\overline{DB} = \frac{b}{2}$. Dann ist das Dreieck ABC das gesuchte: $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$, und die Seitenhalbierenden $\overline{BE}$ und $\overline{AD}$ schneiden sich im Punkte M unter einem rechten Winkel, da $\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}}$ und folglich $\overline{BE} \parallel \overline{DF}$ und $\sphericalangle AME = \sphericalangle ADF = 90^\circ$ ist. Die Aufgabe hat eine Lösung, wenn $\frac{a}{4} < \frac{b}{2} < a$, d. h. wenn $\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < 2$ ist. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Zweite Lösung: Die zweite Lösung beruht darauf, daß die dritte Seite c eines Dreiecks mit zueinander senkrechten Seitenhalbierenden der Gleichung $5c^2 = a^2 + b^2$ genügt.

2. Für beliebige positive Zahlen x und y gilt die Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ [sie ist mit der Ungleichung $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ äquivalent]. Unter Benutzung

dieser Ungleichung erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß $abcd = 1$ ist:

$$ab + cd \geq 2, \quad ac + bd \geq 2, \quad ad + bc \geq 2,$$

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2\sqrt{a^2b^2} + 2\sqrt{c^2d^2} \geq 4.$$

Aus diesen vier Ungleichungen ergibt sich durch Addition die Behauptung.

3. Es sei $ABCDE$ ein reguläres Fünfeck (Abb. 1.10.). Von seinem Mittelpunkt O aus ziehen wir die Strahlen nach allen Ecken und fällen die Lote auf die Seiten.

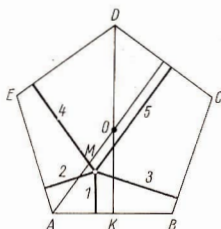


Abb. 1.10.

Dadurch wird das Fünfeck in zehn kongruente Dreiecke zerlegt. Offenbar genügt es, den Fall zu betrachten, daß der Punkt M im Innern oder auf den Seiten eines dieser Dreiecke, etwa auf dem Dreieck OAK , liegt (K ist der Mittelpunkt von AB). Wir beachten jetzt: Ob sich ein in einem gewissen Winkel gelegener Punkt näher an dem einen oder an dem anderen Schenkel des Winkels befindet, hängt davon ab, auf welcher Seite der Winkelhalbierenden er liegt. Unter Benutzung dieser einfachen Bemerkung ist es nicht schwer, für die Abstände des Punktes von den

Seiten des Fünfecks folgende Ungleichungen nachzuweisen (wir nehmen an, daß der Punkt M im Dreieck AOK liegt, und bezeichnen den Abstand des Punktes M von der Seite AB mit r_{AB} usw.):

$$r_{AB} \leq r_{AE}, \quad r_{AE} \leq r_{BC}, \quad r_{BC} \leq r_{DE}, \quad r_{DE} \leq r_{DC}.$$

Mit anderen Worten, für den Punkt M gilt: $r_1 = r_{AB}$, $r_2 = r_{AE}$, $r_3 = r_{BC}$, $r_4 = r_{DE}$, $r_5 = r_{DC}$. Offenbar ist r_{BC} am größten, wenn M in die Ecke A fällt. Aus Symmetriegründen ergibt sich daher, daß r_3 am größten ist, wenn sich der Punkt M in einer Ecke des Fünfecks, dagegen am kleinsten, wenn er sich im Mittelpunkt einer Seite des Fünfecks befindet.

4. Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist auch ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a, b, c, d der Aufgaben durch 9 teilbar. Andererseits gilt

$$a \leq 9 \cdot 1962 < 9 \cdot 2000 = 18000, \quad b \leq 9 \cdot 5 = 45,$$

also $b = 9, 18, 27$ oder 36 .

Folglich ist $c = 9$.

5. Jede der beiden Lösungen der Aufgabe 5 für die 8. Klasse kann fast ohne Änderung auf den Fall eines beliebigen ungeraden n übertragen werden.

1. Wir fällen die Höhe $\overline{AD}$ auf die Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC (Abb. 1.11.). Wegen $\overline{AD} \parallel \overline{MH}$ und $\overline{AM} = \overline{MB}$ erhalten wir $\overline{DH} = \overline{HB}$. Weiter ist $\triangle ADB \sim \triangle CHM$ (rechtwinklige Dreiecke mit gleichen spitzen Winkeln) und folglich $\triangle ADH \sim \triangle CHP$. (Die einander entsprechenden Seitenhalbierenden $\overline{AH}$ und $\overline{CP}$ schneiden von den ähnlichen Dreiecken ADB und CHM ähnliche Dreiecke ab.) Hieraus folgt, daß $\sphericalangle DAH = \sphericalangle HCP$ ist. Da $\overline{AD} \perp \overline{CH}$ und $\sphericalangle DAH = \sphericalangle HCP$ ist, muß $\overline{PC} \perp \overline{AH}$ sein.

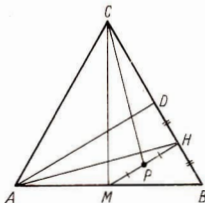


Abb. 1.11.

2. Wir setzen zunächst voraus, daß die Länge der dritten Seite c keiner Bedingung unterworfen ist. Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel α berechnet sich nach der Formel $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.

Sind a und b der Bedingung $0 < a \leq 1 \leq b \leq 2$ unterworfen, so ist das Produkt $ab \sin \alpha$ am größten, wenn jeder der Faktoren maximal ist: $a = 1$, $b = 2$, $\sin \alpha = 1$, d. h. $\alpha = 90^\circ$. Daher fällt der Flächeninhalt am größten für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 1 und 2 aus. Die dritte Seite dieses Dreiecks hat die Länge $c = \sqrt{5}$ und genügt also der Bedingung $2 \leq c \leq 3$. Daher hat dieses Dreieck unter allen Dreiecken, deren Seiten der Bedingung $0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$ genügen, den größten Flächeninhalt. Dieser ist gleich 1.

3. Mit den Bezeichnungen $y - x = p$ und $z - y = q$ gilt $z - x = p + q$ und

$$\begin{aligned} (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 &= (-p)^5 + (-q)^5 + (p + q)^5 \\ &= -p^5 - q^5 + p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5 \\ &= 5pq(p^3 + q^3 + 2p^2q + 2pq^2) = 5pq(p + q)(p^2 + pq + q^2). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß diese Zahl durch

$$5(x - y)(y - z)(z - x) = 5pq(p + q)$$

teilbar ist.

4. Wir nehmen im Gegensatz dazu an, daß es unter den Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ positive gibt und daß a_r die erste von diesen ist, so daß also $a_{r-1} \leq 0$, $a_r > 0$ ist. Dann gilt $a_r - a_{r-1} > 0$.

Wir benutzen jetzt, daß nach Voraussetzung $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$ für alle k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) gilt. Von $k = r$ an erhalten wir aus der Ungleichung $a_r - a_{r-1} > 0$ die folgenden:

$$a_{r+1} - a_r > 0; a_{r+2} - a_{r+1} > 0; \dots; a_{n-1} - a_{n-2} > 0; a_n - a_{n-1} > 0,$$

d. h.

$$0 < a_r < a_{r+1} < a_{r+2} < \dots < a_{n-1} < a_n.$$

Das steht aber im Widerspruch dazu, daß $a_n = 0$ ist.

5. Wir zeichnen eine Strecke der Länge

$$l = a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_n$$

und teilen sie durch die Punkte $A_1, \dots, A_{m-1}$ in m Teile der Länge $a_1, \dots, a_m$ und durch die Punkte $B_1, \dots, B_{n-1}$ in n Teile der Länge $b_1, \dots, b_n$. Die $m + n - 2$ Punkte zerlegen die Strecke l in $m + n - 1$ kleinere Teilstrecken d_j , $j = 1, 2, \dots, m + n - 1$ (oder in eine kleinere Anzahl von kleinen Strecken d_j , wenn einige Punkte zusammenfallen). Jede der Strecken d_j liegt in einer der Strecken d_i und in einer der Strecken b_k ($i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$). Demgemäß setzen wir fest, daß die Zahl d_j dem Karo entspricht, welches in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte steht. Es ist klar, daß damit alle Forderungen der Aufgabe erfüllt sind.

Bemerkung: Die Aufgabe kann man auch mit Hilfe von vollständiger Induktion nach $m + n$ lösen.

Anmerkung des Herausgebers der deutschen Ausgabe:

Zur Seite 41:

- ¹ Einige der Aufgaben, z. B. Nr. 54, 56, 59 sind nicht immer lösbar. Man kann die Aufgaben daher von folgenden zwei Standpunkten aus betrachten: a) die Lösung ist anzugeben unter der Annahme, daß sie existiert; b) es sind außerdem notwendige und hinreichende Bedingungen für die gegebenen Größen zu finden, so daß die betreffende Aufgabe lösbar ist.

Zur Seite 58:

- ¹ Ein anderer Lösungsweg ist der folgende: Denkt man sich $(a + b)^{2n}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so ist der Koeffizient von $a^n b^n$ gleich $\binom{2n}{n}$. Andererseits ist $(a + b)^{2n} = (a + b)^n \cdot (a + b)^n$ und man erhält den Koeffizienten von $a^n b^n$ auf der rechten Seite als Summe der Produkte der Koeffizienten $\binom{n}{p}$ und $\binom{n}{r}$ von $a^p b^q$ und $a^r b^s$ mit $p + r = n$ in den Entwicklungen von $(a + b)^n$.

TEIL II

R. Zelinka

Achter Jahrgang der Mathematikolympiade
in der ČSSR

Staatlicher Pädagogischer Verlag · Prag 1960

AUFGABEN

1. Aufgaben der ersten Stufe¹, Klasse 11

1. Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge d . Die Strecke p bewege sich so, daß ihre Endpunkte auf dem Umfang des gegebenen Quadrats liegen. Welches geometrische Gebilde erzeugt der Mittelpunkt der sich bewegenden Strecke? Führen Sie eine Diskussion in Bezug auf die gegebenen Zahlen d und p durch!
2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , für die die Beziehung

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} \leq 2 \quad (1)$$

gilt!

3. Konstruieren Sie das Dreieck ABC , wenn t_c , u_c und v_c gegeben sind! Diskutieren Sie die Lösbarkeit im Hinblick auf die gegebenen Zahlen! (Die gegebenen Zahlen bedeuten der Reihe nach die Längen der Seitenhalbierenden, der Winkelhalbierenden und der Höhe durch den Punkt C des Dreiecks ABC .)
4. Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \tan y, \quad (1)$$

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \cot y, \quad (2)$$

wenn x und y unbekannt sind!

5. Ermitteln Sie alle Paare (x, y) ganzer Zahlen x und y , für die

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50} \quad (1)$$

gilt!

¹ Die Mathematikolympiaden werden in der ČSSR ähnlich wie in unserer Republik nach Schwierigkeitsstufen durchgeführt. Mit den Aufgaben der ersten Stufe beschäftigen sich die Schüler in einer Hausarbeit. Etwa 10% der besten Schüler einer Schule werden dann für die zweite Stufe vorgeschlagen. Die Aufgaben der zweiten Stufe werden in einer Klausurarbeit in den Kreistädten gelöst. Die Schüler, die diese Prüfung mit Erfolg bestanden haben, können an der schwierigsten Arbeit dieses Wettbewerbs teilnehmen. Diese dritte Stufe wird in der Hauptstadt, in Prag, ausgetragen.

6. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Winkeln α, β und γ sowie dem Radius r seines umschriebenen Kreises. Angenommen, es seien M, N und P der Reihe nach die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}, \overline{CA}$ und $\overline{AB}$. Beweisen Sie:

Wenn das Dreieck ABC spitzwinklig ist, existiert ein Tetraeder $MNPQ$, dessen Netz die Dreiecke MNP, NPA, PMB und MNC bilden. Sein Volumen ist

$$V = \frac{1}{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Wenn das Dreieck ABC nicht spitzwinklig ist, gibt es ein solches Tetraeder nicht.

2. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 11

7. Konstruieren Sie das Dreieck ABC , wenn t_c, v_c und γ gegeben sind! (t_c ist die Länge der Seitenhalbierenden, die zum Eckpunkt C gehört; v_c ist die Höhe, die zum gleichen Eckpunkt gehört; $\gamma = \sphericalangle BCA$.) Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Aufgabe!

8. Suchen Sie alle reellen Zahlen x , für die

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} > 1 \quad (1)$$

gilt!

Bemerkung: Ermitteln Sie zuerst alle x , für die die linke Seite der Ungleichung keinen Sinn hat!

9. Gegeben ist die Funktion

$$y = \frac{\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p}}, \quad \text{mit } p = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

wobei y und x Variable sind (x ist stets reell).

Entwerfen Sie nach geeigneter Umformung der gegebenen Ausdrücke eine grafische Darstellung dieser Funktion, und entscheiden Sie, für welche x der Ausdruck für y nicht definiert ist! Ermitteln Sie mit Hilfe dieser grafischen Darstellung diejenigen Werte, für die y seinen kleinsten positiven Wert annimmt!

10. Eine dreiseitige Pyramide habe als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge p . Die Seitenflächen schließen mit ihrer Grundfläche der Reihe nach die spitzen Winkel α, β und γ ein.

Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist, so ist der Radius der der Pyramide einbeschriebenen Kugel

$$\varrho = \frac{1}{2} p \sqrt{3} \cdot \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma.$$

Dies ist zu beweisen.

3. Aufgaben der dritten Stufe, Klasse 11

11. Konstruieren Sie das rechtwinklige Dreieck ABC (wobei der Winkel $BCA = 90^\circ$ ist), wenn die Längen der Seitenhalbierenden t_1 und t_2 durch die Eckpunkte A bzw. B gegeben sind! Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Aufgabe im Hinblick auf die gegebenen Zahlen t_1 und t_2 ! (Die Aufgabe läßt sich durch Ergänzen des Dreiecks zu einem Parallelogramm lösen.)
12. Wenn für die reellen Zahlen a , b und c die drei Ungleichungen
- $$a + b + c > 0, \quad (1)$$
- $$ab + bc + ca > 0, \quad (2)$$
- $$abc > 0 \quad (3)$$
- erfüllt sind, dann sind a , b und c positive Zahlen. Das ist zu beweisen.

13. Aus einem Halbfabrikat in der Gestalt eines Kegelstumpfs, dessen Grundflächen die Radien R bzw. r haben, wurde ein Werkstück hergestellt, indem eine Höhlung in Gestalt eines achsgleichen Kegelstumpfs ausgefräst wurde. Die Abb. 2.21. auf Seite 115 zeigt den Achsenschnitt. Dadurch hat sich die Masse des Stückes um die Hälfte verringert. Errechnen Sie die Radien der Öffnungen, die in den Grundflächen des Werkstücks entstanden sind! Entscheiden Sie, für welches Verhältnis $\frac{R}{r}$ die Aufgabe eine Lösung hat!

14. Ermitteln Sie alle Zahlenpaare x, y , die dem Gleichungssystem

$$\sin(x + 150^\circ) = \cos(y - 75^\circ) \quad \left. \vphantom{\sin(x + 150^\circ) = \cos(y - 75^\circ)} \right\} \quad (1)$$

$$\cos x + \sin(y - 225^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \left. \vphantom{\cos x + \sin(y - 225^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0} \right\} \quad (2)$$

genügen!

4. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 10

15. In dem Trapez $ABCD$ mit der größeren Grundseite $\overline{AB}$ bezeichnen wir den Schnittpunkt der Diagonalen mit M . Angenommen, es sei $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$ die Transversale durch den Punkt M (die Punkte X und Y liegen auf den Schenkeln $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ des Trapezes). Drücken Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der Trapeze $ABYX$ und $XYCD$ mit Hilfe der Zahlen $a = \overline{AB}$ und $c = \overline{CD}$ aus!
16. Einen Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel 60° teilen wir durch eine Gerade, die auf der Winkelhalbierenden senkrecht steht, in zwei Teile, deren Umfänge

einander gleich sind. Welcher von diesen beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt?

17. Konstruieren Sie das Dreieck ABC , wenn die Seite $\overline{AB} = c$ und der Winkel $\angle CAB = \alpha$ gegeben sind und wenn der Höhenschnittpunkt V die durch den Eckpunkt A verlaufende Höhe halbiert! Diskutieren Sie die Lösbarkeit in bezug auf die Größe des Winkels α !

18. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , für die gilt

$$\frac{1}{\sqrt{x+p}} + \frac{1}{\sqrt{x-p}} = \frac{x+p^2}{x-p^2}, \quad (1)$$

wobei p eine gegebene reelle Zahl ist!

19. Gegeben sind zwei voneinander verschiedene parallele Geraden a und b . Auf der Geraden a ist der Punkt A gegeben, auf der Geraden b der Punkt B . Konstruieren Sie alle Kreislinien $k_1 \equiv (S_1, r_1)$; $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, die die folgenden Eigenschaften haben:

- (1) Die Kreislinie k_1 berührt die Gerade a im Punkt A , die Kreislinie k_2 berührt die Gerade b im Punkt B .
- (2) Die beiden Kreislinien k_1 und k_2 berühren einander.
- (3) Es gilt $r_1 = 2r_2$.

20. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , für die die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \sqrt{2} \quad (1)$$

gilt!

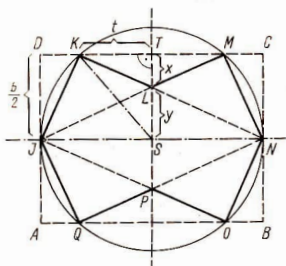
5. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 10

21. Lösen Sie im Bereich der reellen Zahlen die Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1! \quad (1)$$

Ermitteln Sie ferner alle x , für die Gleichheit eintritt!

22. Dem gegebenen Rechteck $ABCD$, in welchem $\overline{AB} > \overline{BC}$ ist, ist das Achteck $JKLMNO$ einbeschrieben, wie es in der Abbildung 2.1. angedeutet ist. Das Achteck ist aus den beiden Rechtecken $JKNO$ und $JMNQ$ mit der gemeinsamen



Diagonalen $\overline{JN}$ entstanden, wobei der Punkt J der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ und der Punkt N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist.

Errechnen Sie den Flächeninhalt des Achtecks, wenn das gegebene Rechteck folgende Maße aufweist: $a = \overline{AB}$; $b = \overline{BC}$!

Abb. 2.1.

23. Beweisen Sie, daß für jedes Tripel positiver Zahlen a, b, c stets die Beziehung

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \quad (1)$$

gilt, und ermitteln Sie alle Tripel, für die Gleichheit eintritt!

24. Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ der Länge 1. Wir bezeichnen mit P den Flächeninhalt des gemeinsamen Teils der beiden Kreisscheiben, die den Punkten A und B mit dem Radius $r = 1$ umschrieben sind.

Drücken Sie den Flächeninhalt P in Prozenten (mit einer Genauigkeit bis zu den Einern)¹ des Flächeninhalts eines der betrachteten Kreise aus!

6. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 9

25. Wir haben Flaschen mit jeweils 1 kg 14%iger, 11%iger und 9%iger Essigsäurelösung im Lager (jede Art in ausreichender Anzahl).

Wieviel Flaschen einer jeden von diesen Lösungen werden wir mischen müssen, damit wir 30 kg 12%iger Lösung erhalten, wobei wir Lösungen aller drei Arten verwenden sollen? Geben Sie alle Möglichkeiten an!

26. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$, in dem $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ ist.

Welche geometrische Figur bilden alle Punkte X der Ebene eines Trapezes, für die die Beziehungen

$$\overline{AX} < \overline{BX} < \overline{CX} < \overline{DX} \quad (1)$$

gelten?

Diskutieren Sie nach der Größe der Winkel $\sphericalangle DAB = \alpha$ und $\sphericalangle ABC = \beta$!

¹ Gemeint ist, daß der Fehler kleiner als 0,5% sein soll. (Anm. d. Red.)

27. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , für die der Bruch

$$Z = \frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18}$$

größer als $\frac{3}{2}$ ausfällt!

28. Gegeben ist die Kreislinie $k \equiv (S, r)$ und darin der Zentriwinkel $\omega \equiv ASB$ ($0 < \omega < 180^\circ$), wobei A und B Punkte der Kreislinie k sind.

Ermitteln Sie auf der Tangente t , die diese Kreislinie im Punkt B berührt, den Punkt X so, daß der zweite Schnittpunkt Y der Geraden AX mit der Kreislinie k der Scheitelpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks YBX ist!

Untersuchen Sie, für welche Winkel ω die Aufgabe lösbar ist!

29. Wieviel Quadrupel ganzer Zahlen a, b, c, d haben folgende Eigenschaften:

(1) Keine zwei der Zahlen a, b, c, d sind untereinander gleich.

(2) Es gilt $a + b + c + d = 0$.

(3) Der absolute Betrag jeder Zahl a, b, c, d ist kleiner als fünf. (Die Quadrupel 1, 2, -3, 4 und 2, -3, 4, 1 usw. werden als voneinander verschieden angesehen.)

30. Gegeben ist die Kreislinie $k \equiv (S, r)$ mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ und die positive Zahl m .

Ermitteln Sie auf der die Kreislinie k im Punkt B berührende Tangente einen Punkt X so, daß für den zweiten Schnittpunkt Y der Geraden AX mit der Kreislinie k die Beziehung $\overline{XY} = m$ gilt!

Bemerkung: Berechnen Sie zuerst die Länge der Strecke $\overline{XA}$, und führen Sie auf Grund der Berechnung die Konstruktion durch!

7. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 9

31. Gegeben ist die Gerade m . Innerhalb einer der Halbebenen, die durch die Gerade m begrenzt sind, ist im Abstand v die Gerade $n \parallel m$ gegeben. Innerhalb der komplementären Halbebene sind die beiden voneinander verschiedenen Punkte P und Q gegeben. Die Abstände der Punkte P und Q von der Geraden m bezeichnen wir mit p bzw. q . Ferner setzen wir $\overline{PQ} = d$.

Konstruieren Sie den Rhombus $ABCD$, dessen Seite $\overline{AB}$ auf der Geraden m liegt und dessen Seite $\overline{CD}$ auf der Geraden n liegt, so daß der Punkt P auf der

Geraden AC und der Punkt Q auf der Geraden BD liegt. Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Aufgabe in bezug auf die positiven Zahlen d, p, q und r !

32. Eine Stenotypistin schreibt auf der Schreibmaschine eng hintereinander die natürlichen Zahlen

123456789101112 usw.

ohne Zwischenräume und ohne Kommas; insgesamt hat sie so 1000 Ziffern geschrieben.

Berechnen Sie, wie oft sie dabei die Ziffer 7 geschrieben hat!

33. Gegeben sind die beiden rechten Winkel MPQ und PQN und die positive Zahl p . Konstruieren Sie auf den Strahlen PM und QN die Punkte A bzw. B und auf der Strecke PQ den Punkt C so, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist und die Seitenlänge p hat!

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Aufgabe in bezug auf die Zahlen p und $d = PQ$!

34. Entscheiden Sie, welcher der beiden Brüche

$$\frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} \quad \text{und} \quad \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$$

größer ist!

Hinweis: Bilden Sie ihre Differenz!

8. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 8

35. Gegeben ist der Ausdruck

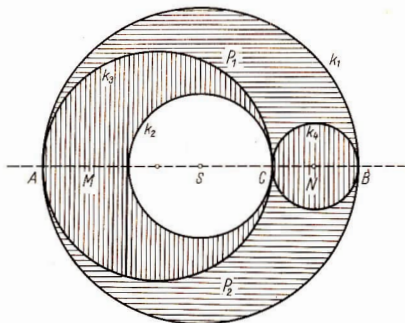
$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Vereinfachen Sie ihn, und beweisen Sie, daß er positiv ist! Was muß von den Zahlen a, b und c vorausgesetzt werden, damit der gegebene Ausdruck einen Sinn hat?

36. Wählen Sie das Dreieck MNP ! Zeichnen Sie das Dreieck ABC so, daß der Punkt M der Mittelpunkt der Seite BC ist, der Punkt N der Mittelpunkt der Seite CA und daß der Punkt P der Fußpunkt der Höhe a durch den Punkt C, b durch den Punkt A ist! (Lösen Sie jede der beiden Aufgaben gesondert!)

37. Stellen Sie sich vor, Sie sollen alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 aufschreiben! Wie oft müssen Sie dabei die Ziffer 9 schreiben?

38. In der Abbildung 2.2. sind die konzentrischen Kreislinien $k_1 \equiv (S, x)$ und $k_2 \equiv (S, y)$ mit $x > y$ gegeben. Die Strecke $\overline{AB}$ ist der Durchmesser der Kreislinie k_1 , der Punkt C liegt auf der Kreislinie k_2 und innerhalb der Strecke $\overline{SB}$.



Über den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ als Durchmesser beschreiben wir die Kreislinien k_3, k_4 . Beweisen Sie, daß die Summe $P_1 + P_2$ der Flächeninhalte der waagrecht schraffierten Flächen gleich der Summe $M + N$ der Flächeninhalte der senkrecht schraffierten Flächen ist!

Abb. 2.2.

39. Zeichnen Sie das rechtwinklige Dreieck ABC so, daß die Kathete $\overline{BC}$ kleiner ist als die Kathete $\overline{CA}$! Wählen Sie auf der Strecke $\overline{BC}$ den Punkt X und auf der Strecke $\overline{AB}$ den Punkt Y so, daß $\overline{XY} = \overline{XB}$ gilt! Errichten Sie im Punkt Y die Senkrechte auf der Geraden XY , und bezeichnen Sie ihren Schnittpunkt mit der Geraden AC mit Z !

Überzeugen Sie sich davon, daß der Umfang des Vierecks $CXYZ$ immer der gleiche ist, unabhängig davon, wo Sie den Punkt X auf der Strecke $\overline{BC}$ wählen!

Ermitteln Sie diesen Umfang mit Hilfe der Seiten des Dreiecks ABC !

40. Wir haben 12 gleiche Steine, von denen jeder ein Quader mit den Maßen 2 cm, 3 cm und 4 cm ist. Aus allen diesen Steinen setzen wir einen großen Quader so zusammen, daß wir immer kongruente Seitenflächen zweier Quader so aneinanderlegen, daß sich eine Seitenfläche mit der anderen deckt. Es ist möglich, eine größere Anzahl solcher Quader zusammenzustellen. Geben Sie die Maße aller dieser Quader an! Untersuchen Sie gleichzeitig, welche davon mehrfach auf unterschiedliche Weise zusammengesetzt werden können!

9. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 8

41. Gegeben ist der Ausdruck

$$\frac{a^3 - b^2c - bc^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3 - c^2a - ca^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3 - a^2b - ab^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Vereinfachen Sie ihn!

Unter welchen Bedingungen für a , b und c hat der gegebene Ausdruck einen Sinn?

42. Konstruieren Sie das Dreieck ABC , wenn $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ und $\sphericalangle CAB = 67\frac{1}{2}^\circ$ gegeben sind und wenn Sie wissen, daß der Schnittpunkt aller drei Höhen dieses Dreiecks ABC die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!
43. Konstruieren Sie das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB} = 0,7 \text{ dm}$! Schlagen Sie um die Punkte A und B Kreislinien mit dem Radius $\frac{1}{2}\overline{AB}$! Bezeichnen Sie mit x den Flächeninhalt (in dm^2) jenes Teils des Dreiecks ABC , der außerhalb dieser beiden Kreislinien liegt!
- a) Berechnen Sie die Zahl x !
- b) Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt der Flächeninhalt x ?
44. Pavel hatte genau 40 Kčs¹ (durchweg in Papiernoten) bei sich. Er wollte sich ein Buch für 30 Kčs kaufen. Er konnte es aber nicht bezahlen, weil der Verkäufer kein Kleingeld herausgeben konnte und der Betrag von 30 Kčs mit Pavels Geld nicht bezahlt werden konnte. Stellen Sie fest, welche Sorten von Banknoten Pavel bei sich hatte!² Begründen Sie die Antwort!

¹ Kronen (tschechoslowakische Währungseinheit).

² (Anm. d. Red.) In der ČSSR gibt es Banknoten mit den Werten: 1 Krone, 3 Kronen, 5 Kronen, 10 Kronen, 25 Kronen, 50 Kronen und 100 Kronen.

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 11

1. Die Seiten des gegebenen Quadrats $ABCD$ haben die Länge $d > 0$. Bezeichnen wir die Strecke der Länge $p > 0$, deren Endpunkte auf dem Umfang des gegebenen Quadrats liegen, mit $\overline{XY}$ und ihren Mittelpunkt mit Z .

Anhand einer Skizze kommt man zu der Vermutung, daß die Länge p der Strecke $\overline{XY}$ kleiner sein muß als die Länge der Diagonale $\overline{AC} = d\sqrt{2}$ des Quadrats $ABCD$; diese Vermutung beweisen wir.

Beweis: Wenn die Punkte X und Y auf der gleichen Seite des gegebenen Quadrats liegen, beispielsweise auf der Seite $\overline{AB}$, so ist $\overline{XY} \leq d < d\sqrt{2}$.

Wir betrachten die beiden möglichen Fälle [a] und [b].

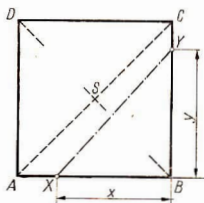


Abb. 2.3.

[a] Die Punkte X und Y liegen auf zwei benachbarten Seiten des Quadrats, zum Beispiel auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ (Abb. 2.3.).

[b] Die Punkte X und Y liegen auf gegenüberliegenden Seiten des gegebenen Quadrats, zum Beispiel auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ (Abb. 2.4.).

Fall [a] (Abb. 2.3.): Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\overline{BX} = x; \overline{BY} = y, \text{ wobei } 0 \leq x \leq d; 0 \leq y \leq d \quad (1')$$

ist.

Nach Anwendung des pythagoreischen Satzes auf das Dreieck XYB erhalten wir

$$x^2 + y^2 = p^2. \quad (2')$$

Wegen (1') gilt

$$x^2 + y^2 \leq d^2 + d^2. \quad (3')$$

Aus (2') und (3') folgen

$$p^2 \leq 2d^2$$

und

$$p \leq d\sqrt{2},$$

was zu beweisen war.

Fall [b]: Wir führen die Bezeichnungen $\overline{BX} = x$ und $\overline{CY} = y$ wie in Abbildung 2.4. ein, wobei wir, ohne den allgemeinen Fall in unzulässiger Weise eingeschränkt zu haben, voraussetzen können, daß $0 \leq x \leq d$, $0 \leq y \leq d$ und $y \leq x$ gilt; denn wir

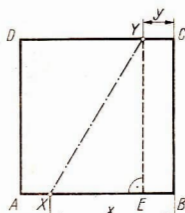


Abb. 2.4.

können die Bezeichnungen und damit auch x und y gegeneinander austauschen. Wir bezeichnen mit E den Fußpunkt der Senkrechten auf die Gerade AB durch den Punkt Y ; wenn $E \equiv B$, so ist $y = 0$. Sonst ist $y > 0$. Allgemein gilt: $\overline{XE} = x - y$.

Wenden wir den pythagoreischen Satz auf das Dreieck XYE an, so erhalten wir

$$\overline{XE}^2 + \overline{EY}^2 = \overline{XY}^2$$

oder

$$(x - y)^2 + d^2 = p^2. \quad (4')$$

Wegen $0 \leq x \leq d$, $0 \leq y \leq d$ und $y \leq x$ gilt $0 \leq x - y \leq d$. Daraus folgt:

$$(x - y)^2 + d^2 \leq d^2 + d^2.$$

Hieraus und aus (4') erhalten wir:

$$p^2 \leq 2d^2$$

und schließlich

$$p \leq d\sqrt{2},$$

was zu beweisen war.

Damit ist bewiesen, daß die gegebene Aufgabe im Fall

$$p > d\sqrt{2}$$

keinen Sinn hat.

Im folgenden setzen wir für die Zahl p voraus, daß sie die Ungleichung

$$p \leq d\sqrt{2} \quad (1)$$

erfüllt.

Bei der weiteren Untersuchung der Aufgabe unterscheiden wir vier Fälle:

$$[1] \ p < d; \quad [2] \ p = d; \quad [3] \ d < p < d\sqrt{2}; \quad [4] \ p = d\sqrt{2}. \quad (2)$$

Fall [1], $p < d$ (Abb. 2.5.): Wir beachten, daß der Abstand zweier Punkte, die auf gegenüberliegenden Seiten des Quadrats $ABCD$ liegen, wenigstens gleich der Zahl d ist. In diesem Fall müssen deshalb die Punkte X und Y entweder auf derselben Seite des Quadrats liegen – beispielsweise auf $\overline{AB}$ – oder auf zwei benachbarten Seiten. Unterscheiden wir nun diese zwei Möglichkeiten: a) Die Punkte X und Y liegen auf

benachbarten Seiten des Quadrats $ABCD$; b) die Punkte X und Y liegen auf derselben Seite des gegebenen Quadrats.

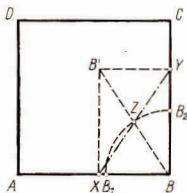


Abb. 2.5.

a) Angenommen, der Punkt X liegt zwischen A und B und Punkt Y zwischen B und C (siehe Abb. 2.5.) – und beide Punkte fallen mit keinem der Eckpunkte A , B oder C zusammen. (Aus dem rechtwinkligen Dreieck XYB mit dem rechten Winkel bei B folgt, daß $\overline{BY} < \overline{XY}$, d. h. $\overline{BY} < d$. Das bedeutet aber $Y \neq C$.) Dann gelten in dem Dreieck XYB für den Mittelpunkt Z der Seite $\overline{XY}$ die Beziehungen

$$\overline{ZB} = \overline{ZX} = \overline{ZY} = \frac{1}{2}p;$$

also liegt der Punkt Z auf dem kleineren Kreisbogen k um B mit dem Radius $\frac{p}{2}$,

der durch die Endpunkte B_1 und B_2 auf den Schenkeln $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$ des rechten Winkels ABC begrenzt wird (die Endpunkte B_1 und B_2 rechnen wir nicht dazu).

Umkehrung: Angenommen, C sei ein beliebiger Punkt, der auf der Viertelkreislinie k und folglich innerhalb des Winkels ABC liegt. Wir konstruieren in diesem Winkel das Rechteck $BXB'Y$ (wobei X auf dem Strahl BA und Y auf dem Strahl BC liegt), dessen Mittelpunkt der Punkt Z ist. Wir führen die Konstruktion, indem wir das Bild B' des Punktes B , der symmetrisch zum Mittelpunkt Z liegt, bestimmen und dann durch den Punkt B' eine Parallele zu den Geraden BA und BC ziehen. Für die Diagonale $\overline{BB'}$ gilt: $\overline{BB'} = 2 \cdot \frac{1}{2}p = p$. Da aber die Seiten eines Rechtecks immer

kleiner als die Diagonale sind, gilt: $\overline{BX} < p$, $\overline{BY} < p$. Daraus folgt, daß die Punkte X und Y innerhalb der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ liegen. Ferner gilt $\overline{XY} = \overline{BB'} = p$ und $\overline{XZ} = \overline{ZY} = \frac{1}{2}p$ (die Diagonalen des Rechtecks $BXB'Y$ sind kongruent). Damit ist

die Umkehrung bewiesen.

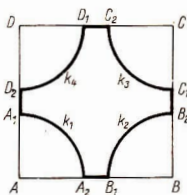


Abb. 2.6.

Wenn wir diese Überlegung für die übrigen Eckpunkte des Rechtecks $ABCD$ wiederholen (Abb. 2.6.), erhalten wir insgesamt die vier Viertelkreisbögen k_1 , k_2 , k_3 und k_4 (ohne die Endpunkte).

b) Weil $p < d$ ist, liegt in der Abbildung 2.6. der Punkt B_1 näher am Punkt B als am Punkt A und der Punkt A_2 näher am Punkt A als am Punkt B . Daraus folgern wir, daß die Strecke $\overline{A_2B_1}$ (einschließlich der Eckpunkte) die Menge der Mittelpunkte der Strecken $\overline{XY} = p$ ist, deren beide Eckpunkte X und Y auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen.

Resultat im Fall [1]:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken $\overline{XY}$ ist die Kurve, die in der Abbildung 2.6. stärker ausgezogen ist.

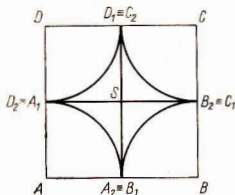


Abb. 2.7.

Fall [2], (Abb. 2.7.): Angenommen, es gilt $p = d$. Dieser Fall unterscheidet sich vom Fall [1] durch folgendes:

a) Gegeben ist eine Strecke $\overline{XY} = p = d$, die auf der Seite $\overline{AB}$ liegt; also jene, die mit der Strecke $\overline{AB}$ zusammenfällt. Es ist also $A_2 \equiv B_1$; $B_2 \equiv C_1$; $C_2 \equiv D_1$ und $D_2 \equiv A_1$. Wir erhalten die vier Viertelkreislinien k_1, k_2, k_3 und k_4 einschließlich ihrer Endpunkte A_1, B_1, C_1 und D_1 .

b) Gegeben sind die Strecken $\overline{XY} = p$, wobei X und Y auf den gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks liegen, beispielsweise auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ (zu diesen Strecken gehören auch die Seiten des gegebenen Rechtecks). Die Mittelpunkte dieser

Strecken erfüllen die Mitteltransversalen $\overline{A_1C_1}$ und $\overline{B_1D_1}$ (siehe Abb. 2.7.).

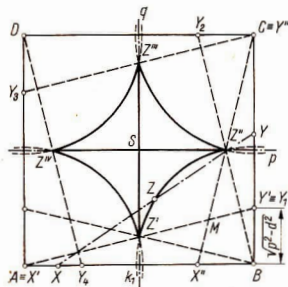


Abb. 2.8.

Resultat im Fall [2]:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken $\overline{XY}$ ist in der Abbildung 2.7. fett gekennzeichnet.

Fall [3], (Abb. 2.8.): Angenommen, es ist $d < p < d\sqrt{2}$. Dann können die Eckpunkte der Strecke $\overline{XY} = p$ nicht auf der gleichen Seite des Quadrats $ABCD$ liegen. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

a) Die Punkte X und Y liegen auf benachbarten Seiten des gegebenen Quadrats oder b) sie liegen auf gegenüberliegenden Seiten des Quadrats.

a) Wir konstruieren die beiden rechtwinkligen Hilfsdreiecke $AY'B$ und $CX''B$ mit den Hypotenusen $\overline{AY'} = \overline{CX''} = p$ wie in der Abbildung 2.8. Wir werden gleich zeigen, daß diese Dreiecke existieren, wodurch wir die Strecken $\overline{X'Y'} = \overline{X''Y''} = p$ erhalten, wobei $X' \equiv A$, $Y'' \equiv C$ ist. Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt in dem Dreieck $AY'B$ der Abbildung 2.8. $\overline{BY'}^2 = \overline{AY'}^2 - \overline{AB}^2 = p^2 - d^2$, so daß $\overline{BY'}^2 < p^2$ und $\overline{BY'} < \overline{BC}$ ist. Es liegt also der Punkt Y' auf der Strecke $\overline{BC}$. Ebenso liegt der Punkt X'' auf der Strecke $\overline{AB}$, was übrigens aus der Symmetrie in bezug auf die

Gerade BD hervorgeht, so daß

$$\overline{BX''} = \overline{BY'} = \sqrt{p^2 - d^2} \quad (3)$$

ist.

Wir setzen nun voraus, daß der Punkt X der Strecke $\overline{XY} = p$ innerhalb der Strecke $\overline{AX''}$ liegt, d. h. daß gilt

$$\overline{BX''} < \overline{BX} < \overline{BA}.$$

Aus der Beziehung $\overline{BX''} < \overline{BX}$ und (3) erhalten wir

$$p^2 - d^2 < \overline{BX}^2; \quad (4)$$

die Beziehung $\overline{BX} < \overline{BA}$ kann man in der Form

$$d^2 > \overline{BX}^2 \quad (5)$$

schreiben.

Es ist nun leicht zu beweisen, daß der entsprechende Punkt Y der Strecke $\overline{XY}$, der auf der Strecke $\overline{BC}$ liegt, auf die Strecke $\overline{Y'C}$ fällt, d. h., es gilt

$$\overline{BY'} < \overline{BY} < \overline{BC}. \quad (6)$$

Beweis: In dem Dreieck XYB mit $\angle XBY = 90^\circ$ ist $\overline{XY} = p$, und es gelten (4) und (5). Nach dem Satz des PYTHAGORAS ist

$$\overline{BX}^2 = p^2 - \overline{BY}^2. \quad (7)$$

Daraus und aus (5) folgt:

$$d^2 > p^2 - \overline{BY}^2$$

oder fortlaufend [siehe (3)]

$$\overline{BY}^2 > p^2 - d^2,$$

$$\overline{BY} > \overline{BY'}. \quad (8)$$

Aus den Beziehungen (7) und (4) gehen nacheinander die Ungleichungen

$$p^2 - d^2 < p^2 - \overline{BY}^2,$$

$$\overline{BY}^2 < d^2,$$

$$\overline{BY} < \overline{BC} \quad (9)$$

hervor.

Die Gültigkeit der Beziehungen (6) ergibt sich aus den Beziehungen (8) und (9).

Die Strecken $\overline{AY'}$ und $\overline{CX''}$ haben der Reihe nach die Mittelpunkte Z' bzw. Z'' , und sie haben ferner den Punkt M gemeinsam, der auf der Strecke $\overline{BD}$ liegt, oder die Strecken liegen symmetrisch in bezug auf die Gerade BD .

Durchläuft der Punkt X die Strecke $\overline{AX''}$, so durchläuft der entsprechende Punkt Y auf der Strecke $\overline{BC}$ die Strecke $\overline{Y'C}$ (und umgekehrt). Wie im Falle [1] schließen wir, daß die Mittelpunkte dieser Strecken den Bogen $\widehat{Z'Z''}$ der Kreislinie $k_1 \equiv \left(B, \frac{1}{2}p\right)$

bilden. Dieser Bogen $\widehat{Z'Z''}$ liegt im Winkel AMC . Dabei gilt auf Grund einer Eigenschaft des Mittelpunkts der Kreislinie, die dem rechtwinkligen Dreieck $AY'B$ umschrieben ist, $\overline{Z'A} = \overline{ZY'} = \overline{Z'B}$, so daß der Punkt Z' auf der Mitteltransversalen q des Quadrats $ABCD$ liegt, die senkrecht auf der Seite $\overline{AB}$ steht (siehe Abb. 2.8., aus der ebenfalls hervorgeht, daß der Punkt Z'' auf der Strecke $\overline{BY_2}$ liegt, wobei Y_2 auf der Seite $\overline{CD}$ liegt und $\overline{CY_2} = \overline{BY'}$ gilt).

b) Angenommen, die Punkte X und Y der Strecke $\overline{XY}$ der Länge p liegen auf den gegenüberliegenden Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ des Quadrats $ABCD$. Ein Beispiel für solche Strecken sind in der Abbildung 2.8. die Strecken $\overline{BY_2}$ (Y_2 liegt auf $\overline{CD}$, und es ist $\overline{CY_2} = \overline{BY'} = \sqrt{p^2 - d^2}$) sowie $\overline{DY_4}$ (Y_4 liegt auf $\overline{AB}$, und es ist $\overline{AY_4} = \overline{BY'}$). Die Strecken, die aus der Strecke $\overline{BY_2}$ durch Parallelverschiebung entstehen, wobei der eine Endpunkt auf $\overline{BA}$ verschoben wird, und zwar höchstens um die Länge $\overline{BY_4}$, gehören zu den zu betrachtenden Strecken. Sie liegen alle im Parallelogramm BY_2DY_4 . Ihre Mittelpunkte bilden auf der Mitteltransversale $p \parallel \overline{AB}$ des gegebenen Quadrats die Strecke $\overline{Z''Z^{IV}} = \overline{AX''}$. Das zweite System solcher paralleler Strecken $\overline{XY}$ entsteht durch entsprechende Verschiebung der Strecke $\overline{CX''}$ um höchstens $\overline{BY_4}$ (oder $\overline{X''A}$). Ihre Mittelpunkte bilden ebenfalls die Strecke $\overline{Z''Z^{IV}}$. Andere Strecken außer denen in beiden erwähnten Systemen, die ihre Endpunkte auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ haben, gibt es nicht.

Resultat im Fall [3]:

Aus der Symmetrie des Quadrats in bezug auf die Diagonalen und die Mitteltransversalen geht hervor:

Die Menge der Mittelpunkte aller Strecken setzt sich zusammen aus den vier Bogen und den zwei Strecken, die auf den Mitteltransversalen des gegebenen Quadrats liegen (siehe die fetten Linien in der Abb. 2.8.).

Fall [4]: Angenommen, es sei $p = d\sqrt{2}$ (Abb. 2.3.): Aus der einleitenden Erwägung geht hervor, daß die einzigen zwei Strecken $\overline{XY}$ der Länge p die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind. Die gesuchte Menge der Mittelpunkte dieser Strecken wird von einem einzigen Punkt gebildet, und zwar dem Mittelpunkt S des Quadrats $ABCD$.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

2. Die reelle Zahl x erfülle die Ungleichung

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} \leq 2, \quad (1)$$

d. h. die Ungleichung

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} - 2 \leq 0. \quad (2)$$

Wir bezeichnen mit V den Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung (2); dann ergibt sich nacheinander:

$$\begin{aligned} V &= \frac{x+1-\sqrt{2}+x+1+\sqrt{2}-2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2x+2-2[(x+1)^2-(\sqrt{2})^2]}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2[x+1-(x^2+2x+1-2)]}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} \\ V &= \frac{2(x^2+x-2)}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Nach der Zerlegung des quadratischen Trinoms im Zähler erhalten wir

$$V = - \frac{2(x+2)(x-1)}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}. \quad (3)$$

Für die Zahl x gilt (2). Wegen des Ergebnisses (3) gilt also

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} \geq 0. \quad (3')$$

Es muß also für die Zahl x gelten:

[1] entweder gleichzeitig

$$(x+2)(x-1) \geq 0, \quad (3a)$$

$$(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) > 0 \quad (3b)$$

[in der letzten Ungleichung darf $>$ nicht durch $\geq$ ersetzt werden, sonst könnte der Nenner des Bruchs in (3') Null sein],

[2] oder gleichzeitig

$$(x+2)(x-1) \leq 0, \quad (4a)$$

$$(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) < 0 \quad (4b)$$

[wobei wiederum in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen nicht zulässig ist].

Jede der beiden Möglichkeiten untersuchen wir gesondert.

Fall [1]: Aus der Beziehung (3a) geht hervor, daß für die Zahl x genau eine der Beziehungen gelten muß:

$$\text{a) } x \geq 1, \quad (5a)$$

$$\text{b) } x \leq -2. \quad (5b)$$

Aus der Beziehung (3b) folgt, daß für die Zahl x genau eine der Beziehungen

$$\text{a) } x > \sqrt{2} - 1 (> 0,4), \quad (6a)$$

$$\text{b) } x < -(\sqrt{2} + 1) (< -2,4) \quad (6b)$$

gelten muß.

Die Forderungen (5a) und (6b) oder die Forderungen (5b) und (6a) kann man nicht gleichzeitig erfüllen. Durch Kombinieren von (5a) und (6a) erkennen wir, daß für die Zahl x nur die Bedingung

$$x \geq 1 \quad (7)$$

übrigbleibt.

Durch Kombinieren von (5b) und (6b) erhalten wir, daß für die Zahl x nur die Bedingung

$$x < -(\sqrt{2} + 1) \quad (7')$$

übrigbleibt.

I. Für $x \geq 1$ sind tatsächlich die beiden Faktoren im Nenner des Bruches (3) positive Zahlen (es gilt $x + 1 - \sqrt{2} \geq 2 - \sqrt{2} > 0,5$, weil $\sqrt{2} < 1,5$). Ebenso sind alle drei Faktoren im Zähler des Bruches (3) nichtnegative Zahlen. Es ist also $V \leq 0$, und alle Zahlen $x \geq 1$ sind Lösung der Ungleichung (1); denn die Beziehung $V \leq 0$ ist äquivalent mit der Ungleichung (1).

II. Für $x < -(\sqrt{2} + 1)$ sind die beiden Brüche auf der linken Seite der Ungleichung (1) negative Zahlen, und deshalb ist auch ihre Summe eine negative Zahl und damit kleiner als 2.

Fall [2]: Aus der Beziehung (4a) geht hervor, daß für die Zahl x einzig und allein die Beziehung

$$-2 \leq x \leq 1 \quad (8)$$

übrigbleibt.

Aus der Beziehung (4b) folgt, daß für die Zahl x gelten muß:

$$-(\sqrt{2} + 1) < x < \sqrt{2} - 1. \quad (9)$$

Es gilt aber $-(\sqrt{2} + 1) < -2$, $\sqrt{2} - 1 < 1$. Daher bleibt für die Zahl x , für welche gleichzeitig die Beziehungen (8) und (9) gelten, nur die Möglichkeit

$$-2 \leq x < \sqrt{2} - 1 \quad (10)$$

übrig.

Für jede Zahl x aus dem Intervall (10) ist

$$x + 1 + \sqrt{2} > 0; \quad x - (\sqrt{2} - 1) < 0.$$

Der Nenner des Bruches (3) ist also negativ. Ferner ist für diese x

$$x + 2 \geq 0; \quad x - 1 < 0,$$

und der Zähler des Bruches (3) ist dann negativ oder null. Es ist also der Bruch in dem Ausdruck (3) nichtnegativ, und deshalb muß $V \leq 0$ gelten. Alle Zahlen x aus dem Intervall (10) sind demnach Lösung der Ungleichung (1).

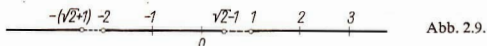


Abb. 2.9.

Resultat: Die Gesamtheit aller Lösungen der Ungleichung (1) wird von allen Zahlen x gebildet, die in einem der Intervalle (7), (7') und (10) (betrachten Sie auch die grafische Veranschaulichung in der Abbildung 2.9.), d. h. in einem der Intervalle

$$x < -(\sqrt{2} + 1); \quad -2 \leq x < \sqrt{2} - 1; \quad x \geq 1$$

liegen.

3. (Abb. 2.10., 2.11.): Statt eine Analyse durchzuführen, beweisen wir folgenden Hilfssatz V:

In dem Dreieck ABC sei $\overline{CA} = \overline{CB}$, d. h. $a = b$, dann gilt

$$t_c = u_c = v_c; \quad (1)$$

wenn aber $\overline{CA} \neq \overline{CB}$, d. h. $a \neq b$, ist, so gilt

$$t_c > u_c > v_c. \quad (2)$$

Beweis: Die Gültigkeit der Beziehung (1) ergibt sich aus der Symmetrie des gleichschenkligen Dreiecks ABC in bezug auf die Symmetrieachse p seiner Grundseite $\overline{AB}$ (Abb. 2.10.). Angenommen, es sei nun $a \neq b$ (Abb. 2.11.). Wir setzen, um Festes vor Augen zu haben, voraus, daß $a < b$, d. h. daß $\alpha < \beta$ gilt (der kleineren Seite des Dreiecks liegt der kleinere Winkel gegenüber). Wenn $a > b$ ist, genügt es, das zu dem gegebenen Dreieck in bezug auf die Achse p spiegelbildliche zu betrachten, wobei p die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist. Wir konstruieren den Winkel $\alpha' \equiv \angle ABB' = \alpha$ (Abb. 2.11.). Aus der Beziehung $\alpha < \beta$ geht hervor, daß der

Strahl BB' innerhalb des Winkels α verläuft. Ferner geht aus der Beziehung $\alpha < \beta$ hervor, daß α ein spitzer Winkel ist. Es ist also $\alpha + \alpha' < 180^\circ$, und die Strahlen AC und BB' haben nach dem Parallelenaxiom EUKLIDS¹ in der Halbebene $\mathfrak{H}$ einen Schnittpunkt P . Dabei ist $\mathfrak{H}$ diejenige Halbebene, die von der Geraden AB begrenzt wird und P enthält. Das Dreieck ABP ist gleichschenkelig, und die Symmetrieachse p seiner Grundseite $\overline{AB}$ verläuft durch den Punkt P und durch den Mittelpunkt E der Grundseite $\overline{AB}$. Weil der Strahl BB' im Winkel β liegt, wobei sich der Punkt P auf diesem Strahl befindet, liegt also der Punkt P innerhalb der Strecke $\overline{AC}$, und der Punkt C liegt demnach in der von p begrenzten und B enthaltenden Halbebene $\mathfrak{H}'$. Die Gerade p ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, und deshalb liegt auf ihr der Mittelpunkt S des dem Dreieck ABC

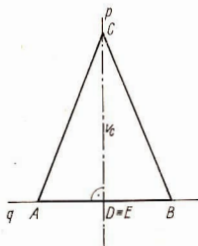


Abb. 2.10.

unbeschriebenen Kreises. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden p und der Kreislinie k , der nicht in der Halbebene $\mathfrak{H}$ liegt, mit G . Aus der Symmetrie der Strecke $\overline{AB}$ und der Kreislinie k in bezug auf die Gerade p folgt $\sphericalangle ASG = \sphericalangle BSG$.

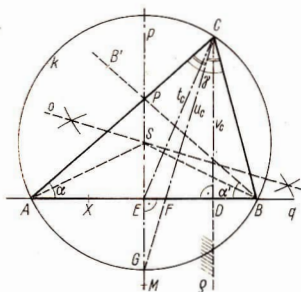


Abb. 2.11.

Zu diesen kongruenten Zentriwinkeln der Kreislinie k gehören kongruente Peripheriewinkel, so daß gilt

$$\angle ACG = \angle BCG = \frac{1}{2}\gamma.$$

Der Strahl CG ist demnach die Halbierende des Winkels γ und schneidet deshalb die Gerade AB in einem Punkt F , der auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt. Weil der Punkt F innerhalb der Kreislinie k liegt, liegt er auf der Strecke $\overline{CG}$, die bis auf den Punkt G innerhalb der von der Geraden PG begrenzten und C enthaltenden Halbebene $\mathcal{H}$ liegt.

und deshalb ist F ein innerer Punkt der Strecke $\overline{EB}$.

Die Höhe $\overline{CD}$ des Dreiecks ABC hat auf der Seite $\overline{AB}$ den Fußpunkt D , der mit dem Punkt C innerhalb der Halbebene $\mathfrak{H}'$ liegt. Die Geraden p und CD sind also voneinander verschiedene Parallelen. Die Strecke $\overline{CG}$ liegt bis auf den Punkt C inner-

¹ In Deutschland wird im Schulunterricht an Stelle des Parallelenaxioms EUKLIDS gewöhnlich benutzt, daß Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen einander gleich sind.

halb der von der Geraden durch CD begrenzten und E enthaltenden Halbebene, und deshalb liegt in dieser auch der Punkt F . Der Punkt F liegt also innerhalb der Strecke $\overline{ED}$. Wenn ein Punkt X den Strahl DE von seinem Anfang D aus durchläuft, wächst auch sein Abstand vom Punkt C , denn in den rechtwinkligen Dreiecken XDC wächst die Kathete $\overline{XD}$, während die Kathete $\overline{DC}$ fest bleibt. Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt aber $\overline{XC} = \sqrt{\overline{XD}^2 + \overline{CD}^2}$, so daß auch $\overline{XD}$ wächst. Aus der Beziehung $\overline{DE} > \overline{DF}$ und $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ergibt sich

$$\overline{CE} > \overline{CF} > \overline{DC},$$

d. h. die zu beweisende Ungleichung (2).

Wenn weder die Beziehung (1) noch die Beziehung (2) gilt, hat die Aufgabe *keine* Lösung.

Konstruktion: Wir betrachten die beiden Möglichkeiten: [1] es gilt (1); [2] es gilt (2).

Fall [1]: Angenommen, es gilt $t_c = u_c = v_c$ (siehe Abb. 2.10.). Wir konstruieren die Strecke $\overline{DC} = v_c$, und im Punkt D errichten wir auf ihr die Senkrechte q . Auf der Geraden q konstruieren wir die Strecken $\overline{EA} = \overline{EB}$, wobei wir den Punkt $A \neq D$ beliebig wählen. Dann entspricht das Dreieck ABC den Forderungen der Aufgabe.

Ergebnis: Die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen.

Fall [2]: Angenommen, es gilt $t_c > u_c > v_c$ (siehe Abb. 2.11.). Wir wählen die Strecke $\overline{DC} = v_c$ und konstruieren durch den Punkt D die Gerade $q \perp \overline{DC}$. Wir fordern, daß der Mittelpunkt E der Seite $\overline{AB}$ des gesuchten Dreiecks ABC in eine der Halbebenen fällt, die von der Geraden DC begrenzt werden (diese Halbebene wollen wir mit ϱ bezeichnen). Das bedeutet wegen der Beweisführung zum Satz V, daß auch der Punkt F in die Halbebene ϱ fällt. Wir konstruieren nach dem Satz ssw in der Halbebene ϱ das Dreieck CFD mit $\overline{CF} = u_c$ und $\sphericalangle CDF = 90^\circ$. Der Punkt F liegt dann auf der Geraden q . Wir konstruieren weiter in der Halbebene ϱ das Dreieck CED mit $\overline{CE} = t_c$ und $\sphericalangle CDE = 90^\circ$. Der Punkt E liegt dann auf dem Strahl DF . Durch den Punkt E ziehen wir die Gerade $p \perp \overline{ED}$, und mit G bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden durch $\overline{CF}$ mit p . Weiter konstruieren wir die Mittelsenkrechte o der Strecke $\overline{CG}$ und bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden p und o mit S . Wir schlagen die Kreislinie $k \equiv (S, \overline{SC})$ und bezeichnen mit A bzw. B ihre Schnittpunkte mit der Geraden q . Dann ist das Dreieck ABC die Lösung der gegebenen Aufgabe. Dabei sehen wir von einer Vertauschung der Bezeichnung der Punkte A und B ab.

Beweis: Die Punkte E und S liegen auf der Geraden p . Deshalb ist E der Mittelpunkt der Bogensehne $\overline{AB}$ der Kreislinie k . Nach der Konstruktion ist $\overline{CE} = t_c$, so daß die Länge der Mittellinie $\overline{CE}$ in dem Dreieck ABC gleich t_c ist. Aus der Symmetrie der Kreislinie k und der Strecke $\overline{AB}$ in bezug auf die Gerade p folgt: $\sphericalangle ASE = \sphericalangle BSE$. Deshalb gilt für die zu diesen Zentriwinkeln der Kreislinie k gehörenden Peripheriewinkel: $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCE$. Es ist also $\overline{CF}$ Winkelhalbierende, und entsprechend der

Konstruktion ist $\overline{CF} = u_a$. Schließlich ist $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ und $\overline{CD} = v_c$. Damit ist der Beweis geführt.

Diskussion: Auf Grund der Beziehung (2) existieren die beiden Dreiecke CFD und CED [entsprechend dem Satz ssw], und die Reihenfolge der Punkte lautet: D, F, E . Der Winkel CFD ist ein Winkel des rechtwinkligen Dreiecks CFD . Er ist also spitz, und deshalb ist auch der dazugehörige Scheitelwinkel spitz. Demzufolge hat der Strahl CF nach dem EUKLIDischen Parallelenaxiom mit der Geraden p einen Schnittpunkt G , der nicht in der Halbebene $\S$ liegt. Die Gerade durch $\overline{DF}$ trennt also die Punkte C und G voneinander, und der Punkt F liegt innerhalb der Bogensehne $\overline{CG}$ der Kreislinie k und also auch innerhalb von k . Folglich ist auch die Gerade q durch DFE eine Sekante (sie enthält den Punkt F) der Kreislinie k , d. h., die Punkte A und B gibt es wirklich.

Nach Wahl der Lage der Strecke $\overline{DC} = v_c$ und der den Punkt E enthaltenden Halbebene q gibt es also, wenn die Beziehung (2) erfüllt ist, genau ein Dreieck ABC (bis auf eine mögliche Vertauschung der Bezeichnungen für die Punkte A und B).

Ergebnis: Im Fall $t_c = u_c = v_c$ kann man unendlich viele nicht kongruente Dreiecke konstruieren. Im Fall $t_c > u_c > v_c$ kann man genau ein Dreieck konstruieren.

4. Angenommen, das Zahlenpaar (x, y) erfüllt das Gleichungssystem. Multiplizieren wir die linken und die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) miteinander, so erhalten wir

$$\cos x \sin x + \frac{1}{\cos x \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{9}{2}.$$

Wir multiplizieren die beiden Seiten der neuen Gleichung mit der Zahl $\cos x \sin x$. Dann erhalten wir nach einer Umformung:

$$(\cos x \sin x)^2 - \frac{9}{2} \cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x + 1 = 0,$$

$$(\cos x \sin x)^2 - \frac{9}{2} \cos x \sin x + 2 = 0.$$

Gemäß einer bekannten Formel ist $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Nach Einsetzen in die vorausgegangene Gleichung erhalten wir:

$$\frac{1}{4} \sin^2 2x - \frac{9}{4} \sin 2x + 2 = 0,$$

$$\sin^2 2x - 9 \sin 2x + 8 = 0,$$

$$(\sin 2x - 1)(\sin 2x - 8) = 8.$$

Für die Zahl x muß also entweder $\sin 2x - 8 = 0$ oder $\sin 2x - 1 = 0$ sein.

Aus der Beziehung $\sin 2x = 1$ folgt

$$2x = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ,$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist, d. h.

$$x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ. \quad (3)$$

In Anbetracht der Tatsache, daß für jede reelle Zahl α sicher $|\sin \alpha| \leq 1$ ist, gilt die Beziehung

$$\sin 2x = 8$$

für keine reelle Zahl x .

Für die Zahl x muß gemäß (3) also entweder

$$x = 45^\circ + 2n \cdot 180^\circ \quad (3a)$$

oder

$$x = 225^\circ + 2n \cdot 180^\circ \quad (3b)$$

gelten, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Betrachten wir weiter jede von diesen Möglichkeiten für sich getrennt.

Fall [1]: Angenommen, es gilt (3a). Dann ist

$$\cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad (4)$$

und nach dem Einsetzen in die Gleichung (1) erhalten wir

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 9 \tan y.$$

Nun erhalten wir nacheinander:

$$\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = 9 \tan y,$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = 9 \tan y,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} = \tan y. \quad (5)$$

Wegen

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

ist

$$\tan y \approx \frac{1}{3} \cdot 1,414 \approx 0,236,$$

und unter Benutzung einer Tafel erhalten wir für y die Näherungswerte

$$y \approx 13^\circ 16' + k \cdot 180^\circ, \quad (4a)$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

Die Zahlenpaare (x, y) der gegebenen Beziehungen (3a) und (5) [bzw. näherungsweise (4a)] bilden die Lösung des Systems. Daß die Gleichung (1) erfüllt ist, ergibt sich unmittelbar auf Grund der Berechnung von y . Wir setzen nun dieses Paar (x, y) aus den Beziehungen (3a) und (5) in (2) ein. Unter Beachtung von (4) erhalten wir auf der linken Seite der Gleichung (2):

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

und nach Vereinfachung

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Auf der rechten Seite erhalten wir unter Beachtung der Beziehung (5) für y :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Fall [2]: Angenommen, es gilt (3b). Dann ist

$$\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad (6)$$

und nach Einsetzen in (1) erhalten wir:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 9 \tan y,$$

$$\tan y = -\frac{\sqrt{2}}{6}, \quad (7)$$

$$\tan y \approx -0,2357.$$

Auf die gleiche Weise wie im Fall 1 erhalten wir

$$y \approx 166^\circ 44' + k \cdot 180^\circ, \quad (7a)$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

Das Zahlenpaar (x, y) aus den Beziehungen (3b) und (7) [bzw. näherungsweise (7a)] genügt sicher der Gleichung (1). Durch Vergleich der Beziehungen (4), (6) und der Beziehungen (5) und (7) wird deutlich, daß das Zahlenpaar $(\sin x, y)$ aus (6) und (7) gerade aus den zu den Zahlen des Zahlenpaares aus den Beziehungen (4) und (5) entgegengesetzten Zahlen besteht. Es ist aber $\cot(-y) = -\cot y$. Wenn wir also das Paar $(\sin x, y)$ aus den Beziehungen (3b) und (7) in (2) einsetzen, so bedeutet dies das Einsetzen des Paares (x, y) aus den Beziehungen (3a) und (5) in (2) und das Multiplizieren der beiden Seiten der Gleichung (2) mit der Zahl -1 . Aber die Zahlen (x, y) aus (3a) und (5) erfüllen (2), und deshalb erfüllen auch die Zahlen (x, y) aus den Beziehungen (3b) und (7a) die Gleichung (2).

Ergebnis: Damit ist die Lösung der Aufgabe durchgeführt. Die Lösungen des Systems (1), (2) sind alle Zahlenpaare (x, y) , die entweder durch die Beziehungen (3a) und (5) oder durch die Beziehungen (3b) und (7a) gegeben sind.

5. Angenommen, es sind x und y ganze Zahlen, die der Gleichung (1) genügen. Dann müssen die Zahlen x und y nichtnegative ganze Zahlen sein (wir setzen voraus, daß die Quadratwurzel als nichtnegative Zahl definiert ist). Dann folgt aus (1)

$$\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}.$$

Dadurch, daß wir die beiden Seiten ins Quadrat erheben, erhalten wir die Gleichung

$$y = 50 + x - 2\sqrt{50x} \quad (1')$$

oder

$$2\sqrt{50x} = 50 + x - y.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine ganze Zahl. Deshalb ist auch die linke Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl a , und es gilt

$$2\sqrt{50x} = a.$$

Die Zahl auf der linken Seite ist nichtnegativ, also ist $a \geq 0$.

Wenn wir die beiden Seiten dieser Gleichung ins Quadrat erheben, erhalten wir

$$2 \cdot 10^2 \cdot x = a^2$$

oder

$$2x = \left(\frac{a}{10}\right)^2. \quad (2)$$

Die Zahl a muß ein ganzzahliges Vielfaches von 10 sein, d. h.

$$a = 10b,$$

wobei b eine nichtnegative ganze Zahl ist. Nach Einsetzen in (2) erhalten wir

$$2x = b^2. \quad (3)$$

Die Zahl b muß also gerade sein; denn ihr Quadrat ist eine gerade Zahl. Es muß also

$$b = 2c$$

gelten, wobei c eine nichtnegative ganze Zahl ist. Nach Einsetzen in (3) ergibt sich für x

$$2x = 4c^2,$$

oder

$$x = 2c^2. \quad (4)$$

Wir beachten noch, daß für $x > 50$ sicher $\sqrt{x} > \sqrt{50}$ ist, woraus

$$0 \leq x \leq 50,$$

$$0 \leq 2c^2 \leq 50,$$

$$0 \leq c^2 \leq 25,$$

$$0 \leq c \leq 5.$$

folgt. Wir stellen für die nichtnegative ganze Zahl c eine Tabelle zusammen und ergänzen sie gleich durch die nichtnegative ganze Zahl y , die wir nach Einsetzen der Zahl x in die rechte Seite der Gleichung (1') erhalten:

c	0	1	2	3	4	5
x	0	2	8	18	32	50
y	50	32	18	8	2	0

Wenn es also ein Paar (x, y) nichtnegativer ganzer Zahlen x und y , die der Gleichung (1) genügen, gibt, so ist dies irgendeines von den sechs Paaren dieser Tabelle. Durch Einsetzen in (1) können wir uns leicht davon überzeugen, daß jedes von diesen sechs Paaren der Gleichung (1) genügt. Die gegebene Aufgabe hat also die sechs in der Tabelle angeführten Paare als Lösung und zwar nur diese. Damit ist die Aufgabe gelöst.

6. I. In dem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c sind die Strecken $\overline{NP}$, $\overline{PM}$ und $\overline{MN}$ Mitteltransversalen, so daß sie in dieser Reihenfolge parallel zu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ (Abb. 2.14.) verlaufen. Wir bezeichnen der Reihe nach die von den Eckpunkten A, B und C aus zu den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC gefällten Lote mit o_1, o_2 und o_3 . Ihre Fußpunkte auf den gegenüberliegenden Seiten bezeichnen wir der Reihe nach mit V_1, V_2 und V_3 . Ferner seien O_1, O_2 und O_3 die Schnittpunkte der Geradenpaare (o_1, NP) , (o_2, PM) , (o_3, MN) . Wir setzen schließlich

$$\overline{AV_1} = v_1, \quad \overline{BV_2} = v_2, \quad \overline{CV_3} = v_3$$

und bemerken, daß $\sphericalangle NPM = \sphericalangle BCA = \gamma$ ist usw.

Wir beachten diese Tatsache (vergleichen Sie mit der Abbildung 2.14.): $MNPQ$ sei ein beliebiges Tetraeder. Wir drehen der Reihe nach die Dreiecke NPQ , PMQ und MNQ mit ihren Ebenen um die Geraden NP , PM bzw. MN in die Ebene MNP , und zwar jeweils in die Halbebenen, die den Halbebenen NPM , PMN , MNP entgegengesetzt sind. Sie gehen über in die Lagen NPA , PMB bzw. MNC . Der Punkt Q dreht sich bei diesen Rotationsbewegungen in den Ebenen $\omega_1 \perp NP$, $\omega_2 \perp PM$, bzw. $\omega_3 \perp MN$. Deren Schnittlinien mit der Ebene MNP sind o_1, o_2 bzw. o_3 und die Drehzentren der entsprechenden Kreislinien k_1, k_2 bzw. k_3 (diese liegen in den Ebenen ω_1, ω_2 bzw. ω_3) sind die Punkte O_1, O_2, O_3 . Die Radien dieser Kreislinien k_1, k_2, k_3 um die Achsen NP, PM, MN sind

$$\overline{O_1Q} = \overline{O_1A}; \quad \overline{O_2Q} = \overline{O_2B}; \quad \overline{O_3Q} = \overline{O_3C}.$$

Die Gerade $q \equiv QO \perp MNP$, wobei O der Fußpunkt dieser Senkrechten ist, liegt in den Ebenen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und demnach ist der Punkt O der Schnittpunkt der Höhen im Dreieck ABC . Dieses Ergebnis verwenden wir für den Beweis, daß unsere Aufgabe keine Lösung hat, wenn das Dreieck ABC nicht spitzwinklig ist.

Fall [1], (Abb. 2.12.): Angenommen, es sei $\gamma = 90^\circ$. Dann ist $O \equiv C$ und $N \equiv O_1$ und die Kreislinie k_1 hat den Durchmesser $\overline{AC}$, d. h., sie hat mit der Geraden

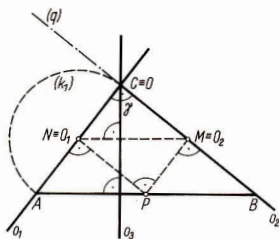


Abb. 2.12.

$q \perp MNP$ (die durch den Punkt O geht) nur den Punkt C gemeinsam, und dieser liegt in der Ebene MNP , so daß das gesuchte Tetraeder $MNPQ$ nicht existiert.

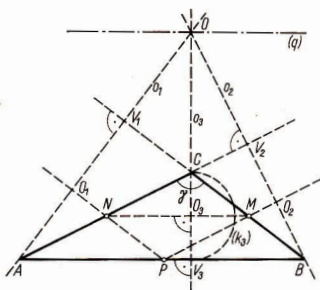


Abb. 2.13.

Fall [2], (Abb. 2.13.): Angenommen, es sei $\gamma > 90^\circ$, so daß der Schnittpunkt O der Höhen des Dreiecks ABC außerhalb des Dreiecks fällt. Die bei der Drehung entstandene Kreislinie k_3 hat den Durchmesser $\overline{CV_3}$ und keinen Schnittpunkt mit der Geraden $q \perp MNP$ durch den Punkt O .

Fall [3], (Abb. 2.14.): Angenommen, es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, so daß der Schnittpunkt O seiner Höhen in dieses Dreieck fällt, also beispielsweise auf die Strecke $\overline{AV_1}$.

Dann ist der Radius $\overline{O_1A} = \overline{O_1Q}$ der vom Punkt A beschriebenen Kreislinie k_1 größer als $\overline{O_1O}$, und die Gerade $q \perp MNP$ durch den Punkt O hat mit der Kreislinie k_1 einen Schnittpunkt Q , der nicht in der Ebene MNP liegt. Es ist nun zu beweisen, daß jede der Kreislinien k_1 , k_2 und k_3 durch diesen Punkt Q verläuft.

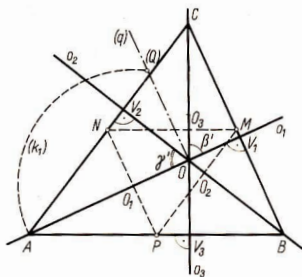


Abb. 2.14.

Das beweisen wir dadurch, daß wir die Länge v der Strecke $\overline{OQ}$ berechnen, die wir mit Hilfe der Kreislinie k_1 konstruiert haben.

In der Abbildung 2.14. ist durch Buchstaben in runden Klammern die Lage in der Ebene ω_1 veranschaulicht, nämlich die Kreislinie (k_1) , die Gerade (q) , der Punkt (Q) , wobei das Dreieck $AV_1(Q)$ nach dem Satz des THALES im Eckpunkt (Q) einen rechten Winkel hat. Für die Länge v seiner Höhe $O(Q)$ gilt nach dem Höhensatz des EUKLID:

$$v^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OV_1}. \quad (1)$$

Es ergibt sich nun aus dem Dreieck AOV_2 , in dem $\sphericalangle OV_2A = 90^\circ$ und $\sphericalangle AOV_2 = \gamma$ gilt:

$$\overline{OA} = \frac{\overline{AV_2}}{\sin \gamma}.$$

Aus dem Dreieck ABV_2 , in dem $\sphericalangle AV_2B = 90^\circ$, $\overline{AB} = c$ und $\sphericalangle BAV_2 = \alpha$ gilt, ergibt sich:

$$\overline{AV_2} = c \cdot \cos \alpha.$$

Daraus erhält man:

$$\overline{OA} = c \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

Ferner ergibt sich aus dem Dreieck OCV_1 , in dem $\sphericalangle OV_1C = 90^\circ$ und $\sphericalangle COV_1 = \beta$ ist:

$$\overline{OV_1} = \overline{CV_1} \cdot \cot \beta.$$

Aus dem Dreieck ACV_1 , in dem $\sphericalangle AV_1C = 90^\circ$, $\sphericalangle ACV_1 = \gamma$ und $\overline{AC} = b$ ist, erhält man:

$$\overline{CV_1} = b \cdot \cos \gamma$$

und weiter

$$\overline{OV_1} = b \cdot \cot \beta \cdot \cos \gamma. \quad (3)$$

Nach Einsetzen von (2) und (3) in (1) erhalten wir schließlich

$$v^2 = bc \cdot \cos \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cos \gamma \cdot \frac{1}{\sin \gamma}. \quad (4)$$

Wir bezeichnen mit r den Radius des Umkreises des Dreiecks ABC . Nach dem Sinussatz, angewandt auf das Dreieck ABC , gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

also

$$b = 2r \sin \beta; \quad c = 2r \sin \gamma. \quad (5)$$

Nach dem Einsetzen für b und c in (4) erhalten wir $v^2 = 4r^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$ und schließlich

$$v = 2r \sqrt{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}. \quad (6)$$

Dieselbe Zahl v erhalten wir, wenn wir anstelle der Kreislinie k_1 eine von den Kreislinien k_2 oder k_3 verwenden; denn die Beziehung (6) bleibt erhalten, wenn wir die Winkel α, β und γ miteinander vertauschen. Daraus folgt, daß durch den konstruierten Punkt Q alle drei Kreislinien k_1, k_2 und k_3 verlaufen, was zu beweisen war.

II. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

woraus sich nach dem Einsetzen für b und c aus (5) $2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ ergibt. Der Flächeninhalt p des Dreiecks MNP ist gleich $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts des Dreiecks ABC , d. h.,

$$p = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma. \quad (7)$$

Das Volumen V des Tetraeders $MNPQ$ ist

$$V = \frac{1}{3} p \cdot v$$

oder nach dem Einsetzen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot 2r \sqrt{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

also

$$V = \frac{1}{3} r^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 11

7. *Analyse:* Angenommen, wir haben das Dreieck ABC mit den geforderten Eigenschaften konstruiert. Wir bezeichnen mit M den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$, ferner mit P den Fußpunkt des vom Punkt C auf die Gerade AB gefällten Lotes. Es ist also

$$\overline{CM} = t_c, \quad \overline{CP} = v_c, \quad \sphericalangle BCA = \gamma < 180^\circ.$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

Fall [1]: Es ist $M \equiv P$ und demnach ist also $t_c = v_c$ (Abb. 2.15.). In diesem Falle ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck, welches man, von der Strecke $\overline{MC}$ ausgehend, konstruieren kann und das nach Wahl einer der Halbebenen, in der der Punkt A liegen soll, eindeutig bestimmt ist. Damit betrachten wir diesen Fall als gelöst.

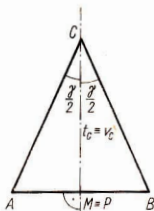


Abb. 2.15.

Fall [2]: Es ist $M \neq P$. Das Dreieck CMP hat den Winkel $\sphericalangle CPM = 90^\circ$ (Abb. 2.16.).

Deshalb ist $\overline{CM} > \overline{CP}$, d. h., es muß

$$t_c > v_c$$

(1)

sein.

(Im Falle $t_c < v_c$ hat die Aufgabe offensichtlich keine Lösung.) Konstruieren wir das Parallelogramm $ACBC'$

mit dem Mittelpunkt M . Dann gilt $\overline{CC'} = 2t_c$, $\sphericalangle CAC' = 180^\circ - \gamma$. Einer der beiden Punkte A und B (bei geeigneter Bezeichnung ist das der Punkt A) liegt auf dem Strahl $\overline{MP}$. Daraus ergibt sich die

Konstruktion:

Wir konstruieren das Dreieck CMP , wobei $\overline{CP} = v_c$, $\sphericalangle CPM = 90^\circ$ und $\overline{CM} = t_c$ ist. Wir fordern, daß der Punkt A in die Halbebene CMP fällt. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{CM}$ über den Punkt M hinaus konstruieren wir die Strecke $\overline{MC'} = t_c$. Wir bezeichnen mit k den Bogen in der Halbebene CMP , von dem aus die Strecke $\overline{CC'}$ unter einem Winkel von $180^\circ - \gamma$ zu sehen ist. Den Mittelpunkt S des Bogens k konstruieren wir folgendermaßen: a) wir konstruieren die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{CC'}$; b) in der von CM begrenzten, P nicht enthaltenden Halbebene konstruieren wir den Sehnentangentenwinkel $\sphericalangle CC'K = 180^\circ - \gamma$ und die Gerade $C'L \perp C'K$. Dann ist S der Schnittpunkt von m und $\overline{C'L}$. Der Radius des Bogens ist $\overline{SC}$. Wir bezeichnen mit A den gemeinsamen Punkt des Strahls $\overline{MP}$ und des Bogens k . Der Punkt B ist das Spiegelbild des Punktes A in bezug auf den Mittelpunkt M . Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis (Abb. 2.16.): Der Punkt M ist nach der Konstruktion der Mittelpunkt der Strecken $\overline{CC'}$ und $\overline{AB}$, so daß $ACBC'$ ein Parallelogramm ist, in welchem nach der

Konstruktion $\angle C'AC = 180^\circ - \gamma$ und demnach also $\angle ACB = \gamma$ i. S. Das Dreieck ABC hat bezüglich der Seite $\overline{AB}$ die Höhe $\overline{CP} = v_2$ und die Seitenhalbierende $\overline{CM} = t_c$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

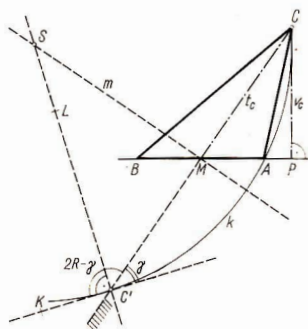


Abb. 2.16.

Diskussion (Abb. 2.16.): Das Dreieck CMP kann man unter der Voraussetzung (1) konstruieren, so daß die Geraden CM , MP verschieden sind. Der Bogen k (für $\gamma < 180^\circ$) existiert ebenfalls. Der Punkt M liegt nach der Konstruktion innerhalb der Kreislinie ($S, \overline{SC}$), und demnach enthält der Strahl MP genau einen Punkt des Bogenes k , nämlich den Punkt $A \neq M$. Die Aufgabe hat also bei der gewählten Lage genau eine Lösung.

Ergebnis: Für $t_c \geq v_c$; $0 < \gamma < 180^\circ$ hat die Aufgabe genau eine Lösung; sonst besitzt sie keine Lösung.

8. Wir formen den Zähler und den Nenner des Bruches Z auf der linken Seite der Beziehung (1) um. Es gilt (wir benutzen die Formel für die Summe der Funktionen $\sin \alpha + \sin \beta$ und $\cos \alpha + \cos \beta$):

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 3x + \sin 5x &= (\sin x + \sin 5x) + \sin 3x \\ &= 2 \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \\ &= \sin 3x(1 + 2 \cos 2x).\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 3x + \cos 5x &= (\cos x + \cos 5x) + \cos 3x \\ &= 2 \cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x \\ &= \cos 3x(1 + 2 \cos 2x).\end{aligned}\tag{3}$$

I. Der Bruch Z verliert wegen (3) seinen Sinn, wenn eine der Beziehungen

$$\cos 3x = 0, \quad (4)$$

$$1 + 2 \cos 2x = 0 \quad (5)$$

gilt.

Aus der Beziehung (4) ergibt sich: Entweder ist $3x = 90^\circ + n \cdot 4R$, oder es ist $3x = 270^\circ + n \cdot 4R$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist, d. h.

$$x = 30^\circ + n \cdot 120^\circ \quad \text{oder} \quad x = 90^\circ + n \cdot 120^\circ,$$

also

$$x = \alpha + k \cdot 4R, \quad (6)$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl und α irgendeiner der Winkel

$$30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ \quad (6')$$

ist.

Aus der Beziehung (5) folgt: $2 \cos 2x = -1$, oder $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ und demnach ist entweder

$$2x = (180^\circ - 60^\circ) + m \cdot 4R, \quad (7)$$

oder es ist

$$2x = (180^\circ + 60^\circ) + m \cdot 4R, \quad (7')$$

wobei m eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Aus (7) und (7') ergibt sich einerseits

$$x = 60^\circ + m \cdot 2R,$$

andererseits

$$x = 120^\circ + m \cdot 2R;$$

es ist also

$$x = \beta + p \cdot 4R, \quad (8)$$

wobei p eine beliebige ganze Zahl und β irgendeiner der Winkel

$$60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ \quad (8')$$

ist. Auf Grund der Beziehungen (6), (6') und (8), (8') verliert der Bruch Z seinen Sinn für

$$x = \gamma + q \cdot 4R, \quad (9)$$

wenn q eine beliebige ganze Zahl und γ ein beliebiger der folgenden Winkel ist:

$$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ. \quad (9')$$

II. Angenommen, x ist eine Zahl, die der Ungleichung (1) genügt, so daß sie also insbesondere von allen Zahlen aus der Beziehung (9), (9') verschieden ist. Gemäß (2) und (3) ist

$$Z = \frac{\sin 3x(1 + \cos 2x)}{\cos 3x(1 + \cos 2x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x.$$

Die Beziehung (1) kann man also in der Form

$$\tan 3x > 1 \quad (10)$$

schreiben. Die Ungleichung $\tan \varphi > 1$, bei der φ im Intervall $[0^\circ, 180^\circ]$ liegt, hat die Lösung

$$45^\circ < \varphi < 90^\circ,$$

die Ungleichung (10) erfüllen also genau die Zahlen x , für die

$$45^\circ + r \cdot 180^\circ < 3x < 90^\circ + r \cdot 180^\circ$$

gilt, wobei für r jede ganze Zahl eingesetzt werden darf, d. h. für

$$15^\circ + r \cdot 60^\circ < x < 30^\circ + r \cdot 60^\circ. \quad (11)$$

Alle Zahlen (9) kann man in der Form $x = m \cdot 30^\circ$ schreiben, wobei m eine ganze nicht durch 6 teilbare Zahl ist. Keine von diesen genügt der Bedingung (11). Da wir äquivalente Umformungen der gegebenen Ungleichung vorgenommen haben, sind die Zahlen (11) Lösungen der gegebenen Ungleichung, und es gibt keine anderen Lösungen.

Ergebnis: In dem Intervall $[0^\circ, 180^\circ]$ erhalten wir gemäß (11) genau folgende Lösungen x (Abb. 2.17.):

$$\begin{aligned} 15^\circ < x < 30^\circ, \\ 75^\circ < x < 90^\circ, \\ 135^\circ < x < 150^\circ. \end{aligned} \quad (12)$$

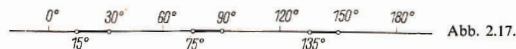


Abb. 2.17.

Aus diesen erhalten wir alle Lösungen der Ungleichung (1), indem wir ein ganzzahliges Vielfaches von $2R$ hinzufügen; also

$$x + s \cdot 2R,$$

wobei x eine von den Zahlen (12) und s eine beliebige ganze Zahl ist.

9. Zuerst ermitteln wir, für welche x die Wurzeln $\sqrt{1+p}$, $\sqrt{1-p}$ einen Sinn haben. Wegen

$$1+p = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

ist $1+p$ für jedes reelle x eine nichtnegative Zahl, und wegen

$$1-p = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

ist auch $1 - p$ für jedes reelle x eine nichtnegative Zahl. Ferner fragen wir:

Für welche x ist

$$\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p} = 0, \text{ d. h. } \sqrt{1+p} = \sqrt{1-p},$$

also $1+p = 1-p$, d. h. $p = 0$? Es ist aber $p = 0$ genau für $x = 0$. Für $x = 0$ ist also y nicht definiert.

Im folgenden setzen wir voraus, daß die reelle Zahl x von null verschieden ist, so daß das zugehörige y definiert ist. Wir formen den Ausdruck für y um:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p}} = \frac{(\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p})^2}{(\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p})(\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p})} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{(1+p)(1-p)}}{1+p - (1-p)} = \frac{2(1 + \sqrt{1-p^2})}{2p} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1-p^2}}{p}. \end{aligned}$$

Weil

$$1 - p^2 = 1 - \frac{(2x)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

gilt, ist

$$\sqrt{1-p^2} = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}.$$

Wir erhalten also

$$y = \frac{1 + \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}}{\frac{2x}{x^2 + 1}}$$

das heißt

$$y = \frac{x^2 + 1 + |x^2 - 1|}{2x}.$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

[1] Angenommen, es ist $x^2 - 1 \geq 0$; d. h., entweder ist $x \geq 1$ oder $x \leq -1$. Dann ist $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ und

$$y = \frac{x^2 + 1 + x^2 - 1}{2x} = x,$$

also

$$y = x.$$

Für $|x| \geq 1$ setzt sich die grafische Darstellung der Funktion aus den Strahlen AP und $A'P'$ zusammen, die symmetrisch in bezug auf den Koordinatenursprung O liegen. Dabei ist $A \equiv (1, 1)$, $P \equiv (2, 2)$.

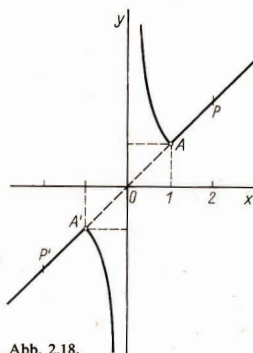


Abb. 2.18.

[2] Angenommen, es ist $x^2 - 1 \leq 0$, aber $x \neq 0$, d. h. $-1 \leq x \leq 1$, $x \neq 0$; dann ist $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ und

$$y = \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x},$$

also

$$y = \frac{1}{x}.$$

In diesem Falle besteht die grafische Darstellung aus zwei Bögen einer gleichseitigen Hyperbel (vgl. auch die grafische Veranschaulichung der indirekten Proportionalität), und zwar für $0 < |x| \leq 1$.

Aus der Abbildung 2.18. geht der Verlauf unserer Funktion hervor. Daraus ist zu er-

sehen, daß wir den kleinsten positiven Wert $y = 1$ für $x = 1$ erhalten. Damit ist die Aufgabe gelöst.

10. Wir bezeichnen mit V die Spitze der Pyramide und mit S den Mittelpunkt der der Pyramide (oder, anders ausgedrückt, dem Tetraeder $VABC$) einbeschriebenen Kugelfläche. Es ist bekannt, daß der Punkt S existiert. Wir bezeichnen mit U den

Fußpunkt des vom Punkt S auf die Ebene ABC (Abb. 2.19.) gefällten Lotes. Der Punkt S liegt in den Ebenen, die die Winkel α, β und γ halbieren. Leicht läßt sich feststellen, daß der Punkt S innerhalb der senkrechten Prismenfläche liegt, die über dem Dreieck ABC konstruiert ist, und deshalb fällt der Punkt U in dieses Dreieck hinein.

Wir bezeichnen die Fußpunkte des Lotes, das durch den Punkt U auf die Geraden BC, CA und AB gefällt ist, mit X, Y bzw. Z und setzen $\overline{UX} = x, \overline{UY} = y$ und $\overline{UZ} = z$. Auf Grund des

Vorhergehenden sind x, y und z positive Zahlen (der Punkt U liegt nicht auf dem Umfang des Dreiecks ABC). Es entstehen die Dreiecke SXU, SYU und SZU , wobei

$$\sphericalangle U = 90^\circ, \quad \sphericalangle X = \frac{1}{2}\alpha, \quad \sphericalangle Y = \frac{1}{2}\beta, \quad \sphericalangle Z = \frac{1}{2}\gamma, \quad \overline{SU} = \varrho$$

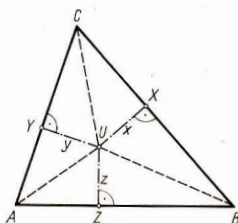


Abb. 2.19.

ist. Für diese Dreiecke gilt:

$$x = \varrho \cot \frac{1}{2} \alpha, \quad y = \varrho \cot \frac{1}{2} \beta \quad \text{und} \quad z = \varrho \cot \frac{1}{2} \gamma. \quad (1)$$

Der Flächeninhalt P des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seite p ist

$$P = \frac{1}{4} p^2 \sqrt{3}. \quad (2)$$

Gleichzeitig ist der Flächeninhalt P gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke UBC , UCA und UAB (Abb. 17), d. h.,

$$P = \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} py + \frac{1}{2} pz$$

oder

$$P = \frac{1}{2} p(x + y + z). \quad (3)$$

Durch Vergleich von (2) und (3) erhalten wir nach einfacher Umformung

$$x + y + z = \frac{1}{2} p \sqrt{3}.$$

Setzen wir für x , y und z die Größen aus den Beziehungen (1) ein, so erhalten wir

$$\varrho \left(\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta + \cot \frac{1}{2} \gamma \right) = \frac{1}{2} p \sqrt{3}$$

oder

$$\varrho = \frac{1}{2} p \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta + \cot \frac{1}{2} \gamma}.$$

Wenn die Behauptung der Aufgabe richtig ist, muß

$$\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta + \cot \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{\tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma},$$

das heißt

$$\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta + \cot \frac{1}{2} \gamma = \cot \frac{1}{2} \alpha \cot \frac{1}{2} \beta \cot \frac{1}{2} \gamma$$

gelten.

Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist, so gilt diese Beziehung tatsächlich, wie wir sogleich beweisen werden.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\frac{1}{2}\gamma = R - \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right).$$

Jetzt formen wir der Reihe nach um:

$$\begin{aligned} \left(\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\beta\right) + \cot \frac{1}{2}\gamma &= \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta + \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma\right) + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\left(\sin \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta\right) \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\left\{\sin\left[90^\circ - \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\right] + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta\right\} \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\left[\cos\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta\right] \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \\ &= \frac{\left[\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta - \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta\right] \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma} = \cot \frac{1}{2} \alpha \cot \frac{1}{2} \beta \cot \frac{1}{2} \gamma,$$

was zu beweisen war. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Lösungen zu den Aufgaben der dritten Stufe, Klasse 11

11. *Analyse* (Abb. 2.20.): Nehmen wir an, wir haben ein Dreieck gefunden, welches die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Wir bezeichnen mit T den Schwerpunkt des gesuchten Dreiecks und konstruieren das Parallelogramm $ABCD$. Sein Mittelpunkt B' ist zugleich der Mittelpunkt der Kathete $\overline{CA}$ des gesuchten Dreiecks ABC . Es gilt

$$\overline{TA} = \frac{2}{3} t_1, \quad \overline{TD} = \frac{4}{3} t_2,$$

$$\overline{B'D} = \overline{BB'} = t_2, \quad \overline{TB'} = \frac{1}{3} t_2.$$

Aus der Symmetrie des Parallelogramms $ABCD$ in bezug auf seinen Mittelpunkt B' folgt, daß

$$\sphericalangle B'AD = \sphericalangle B'CB = 90^\circ.$$

Der Punkt A liegt deshalb auf dem THALESkreis, über der Strecke $\overline{DB'}$ als

Durchmesser, wobei $\overline{TA} = \frac{2}{3} t_1$ ist.

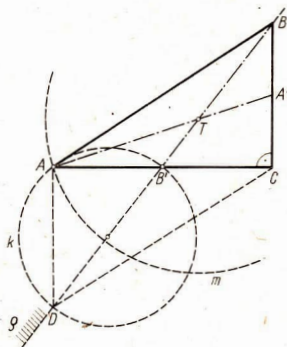


Abb. 2.20.

Daraus ergibt sich die *Konstruktion* (Abb. 2.20.): Wir konstruieren die Strecke $\overline{BD}$ der Länge $2t_2$, bezeichnen ihren Mittelpunkt mit B' und konstruieren auf dem Strahl BD die Strecke $\overline{BT} = \frac{2}{3} t_1$. Wir wählen die Halbebene q mit dem Rand BD . Über der Strecke $\overline{DB'}$ als Durchmesser konstruieren wir den THALESkreis k und schlagen den Kreis $m \equiv \left(T, \frac{2}{3} t_1\right)$. Wir bezeichnen den Schnittpunkt (sofern ein solcher existiert) der beiden Kreislinien k und m , der in der Halbebene q liegt, mit A . Ferner

konstruieren wir das Spiegelbild C des Punktes A in bezug auf den Mittelpunkt B' . Dann genügt das Dreieck ABC den Forderungen der Aufgabe.

Beweis: Nach der Konstruktion sind D und B' voneinander verschiedene Punkte (die Zahlen t_2 und t_1 sind positiv). Wir haben angenommen, daß der Punkt A in der Halbebene ϱ liegt, die von DB begrenzt wird. Deshalb existiert das Dreieck ABD und also auch das Dreieck ABC . Für dieses Dreieck gilt nach Konstruktion:

a) Der Punkt B' ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{CA}$, und die Strecke $\overline{BB'}$ (kongruent zu der Strecke $\overline{DB'} = t_2$) ist also Seitenhalbierende des Dreiecks ABC und hat die Länge t_2 .

b) Nach der Konstruktion ist $\overline{BT} = \frac{2}{3} \overline{BB'} = \frac{2}{3} t_2$. Weil die Strecke $\overline{BB'}$ Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist, ist T der Schwerpunkt dieses Dreiecks.

c) Nach der Konstruktion ist $\overline{TA} = \frac{2}{3} t_1$, wobei T der Schwerpunkt ist. Deshalb hat die Seitenhalbierende des Dreiecks ABC , durch den Eckpunkt A , die Länge t_1 .

d) Nach der Konstruktion liegt der Punkt A auf der Kreislinie k . Es ist also $\sphericalangle DAB' = 90^\circ$. Das Spiegelbild dieses Winkels in bezug auf den Mittelpunkt B' ist der Winkel BCA , welcher deshalb ebenfalls ein rechter Winkel ist.

Das Dreieck ABC erfüllt also alle im Text der Aufgabe gestellten Forderungen.

Diskussion: Die Lösbarkeit der Aufgabe anhand der durchgeführten Konstruktion und der Beweisführung hängt von der Existenz des Punktes A innerhalb der Halbebene ϱ ab. Offensichtlich handelt es sich also darum, daß sich die Kreislinien k und m in zwei voneinander verschiedenen Punkten schneiden. Diese Punkte liegen, sofern sie existieren, symmetrisch in bezug auf die Gerade DB , so daß nur einer der Schnittpunkte in die Halbebene ϱ fällt.

Die Kreislinien k und m haben die Radien $r = \frac{1}{2} t_2$ bzw. $\varrho_0 = \frac{2}{3} t_1$ und ihre Mittelpunkte haben den Abstand $\frac{5}{6} t_2$. Die Kreislinien k und m haben genau dann zwei

voneinander verschiedene Schnittpunkte, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte der Ungleichung

$$\varrho_0 - r < \frac{5}{6} t_2 < \varrho_0 + r,$$

das heißt

$$\frac{2}{3} t_1 - \frac{1}{2} t_2 < \frac{5}{6} t_2 < \frac{2}{3} t_1 + \frac{1}{2} t_2$$

genügt.

Daher erhalten wir die beiden Ungleichungen

$$4t_1 < 8t_2 \quad \text{und} \quad 2t_2 < 4t_1,$$

also

$$t_1 < 2t_2 \quad \text{und} \quad t_2 < 2t_1.$$

Das läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

Die eine der gegebenen Seitenhalbierenden muß mehr als doppelt so lang sein wie die andere. Unter dieser Voraussetzung hat die Aufgabe eine Lösung, und zwar eine einzige; andernfalls hat sie keine.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

12. Aus der Ungleichung (3) folgt, daß die Zahlen a , b und c alle von null verschieden sind, und ferner, daß es nur die beiden Möglichkeiten gibt:

[1] Die Zahlen a , b und c sind alle positiv.

[2] Zwei von den Zahlen a , b und c sind negativ und die dritte ist positiv.

Wir werden beweisen, daß der Fall [2] nicht eintreten kann, wodurch die Richtigkeit der Behauptung der gegebenen Aufgabe bewiesen wird.

Beweis: Angenommen, es ist $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ (das kann man im Falle [2] erreichen durch eine geeignete Vertauschung der Bezeichnung der in Erwägung gezogenen Zahlen). Aus der Beziehung (2) folgt

$$ab > -c(a + b), \quad (4)$$

und aus der Beziehung (1) folgt

$$a + b > -c. \quad (5)$$

Wir multiplizieren die beiden Seiten der Ungleichung (5) mit der Zahl $-c$, die positiv ist, und erhalten

$$-c(a + b) > c^2. \quad (6)$$

Aus den Ungleichungen (4) und (6) ergibt sich dann

$$ab > c^2. \quad (7)$$

Aber diese Beziehung gilt nicht, denn es ist $ab < 0$ und $c^2 > 0$. Damit haben wir den Beweis erbracht, daß der Fall [2] nicht eintreten kann.

Eine andere Lösung: Angenommen, die Behauptung der Aufgabe gilt nicht, d. h., eine von den Zahlen a , b , c ist nicht positiv (wir werden beweisen, daß das nicht möglich ist). Dann können wir annehmen, daß dies die Zahl a ist (für die Zahlen b und c würde die Erwägung in ähnlicher Weise durchgeführt). Nehmen wir also an, daß

$$a \leq 0 \quad (4)$$

gilt.

Es kann nicht $a = 0$ sein, sonst würde nicht $abc > 0$ gelten. Es müßte also

$$a < 0$$

sein.

Aus der Beziehung $abc > 0$ erhalten wir dann

$$bc < 0. \quad (5)$$

Aus der Ungleichung (1) erhalten wir

$$a > -(b + c),$$

so daß gilt

$$-(b + c) < a < 0$$

und also auch

$$-(b + c) < 0,$$

woraus hervorgeht

$$b + c > 0.$$

Weil $a < 0$ ist, folgt aus der vorhergehenden Ungleichung die Beziehung

$$a(b + c) < 0, \quad (6)$$

und aus den Beziehungen (5) und (6) folgt, daß auch die Ungleichung

$$a(b + c) + bc < 0$$

bzw.

$$ab + bc + ca < 0$$

gilt. Das steht aber im Widerspruch zur Ungleichung (2).

Es ist also nicht $a \leq 0$, d. h., es gilt $a > 0$. Weil wir die gleiche Erwägung auch für die Zahlen b und c anstellen können, ist der Beweis für die Behauptung der Aufgabe erbracht.

13. Auf Grund der Bedeutung der Zahlen R und r gilt

$$R > r > 0. \quad (1)$$

Die Aushöhlung (Abb. 2.21.) hat die Form eines Kegelstumpfs, dessen Grund- bzw. Deckfläche den Radius

$$R' = R - x \quad \text{bzw.} \quad r' = r - x \quad (2)$$

hat. Wir bezeichnen sein Volumen mit V_1 und das Volumen des gegebenen Kegels mit V_2 . Nach der Aufgabe soll

$$V_2 = 2V_1$$

gelten oder

$$2 \cdot \frac{1}{3} \pi [(R-x)^2 + (R-x)(r-x) + (r-x)^2] = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

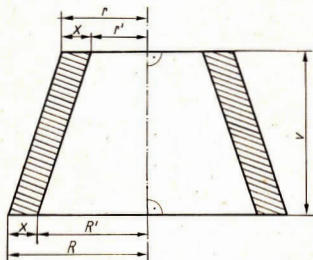


Abb. 2.21.

Wenn die Aufgabe eine Lösung hat, muß die Zahl x dieser Gleichung genügen, die wir schrittweise folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} 2(R^2 - 2Rx + x^2 + Rr - Rx - rx + x^2 + r^2 - 2rx + x^2) &= R^2 + Rr + r^2, \\ 6x^2 - 6(R+r)x + R^2 + Rr + r^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Diskriminante der Gleichung (3) ist

$$\begin{aligned} D &= 36(R+r)^2 - 24(R^2 + Rr + r^2) \\ &= 12(3R^2 + 6Rr + 3r^2 - 2R^2 - 2Rr - 2r^2) \\ D &= 12(R^2 + 4Rr + r^2). \end{aligned}$$

Auf Grund der Beziehung (1) ist $D > 0$ und also

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}.$$

Die Wurzeln $x_{1,2}$ der Gleichung (3) sind

$$x_{1,2} = \frac{6(R+r) \pm 2\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{12}$$

oder

$$x_{1,2} = \frac{3(R+r) \pm \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6}. \quad (4)$$

Die Zahl x_1 (die zum Pluszeichen gehört) ist größer als $\frac{3(R+r)}{6} = \frac{R+r}{2}$, und

diese Zahl ist größer als r [siehe (1)]. Es ist also $x_1 > r$ und die Differenz $r - x_1$ ist negativ. Daher kommt x_1 für unsere Aufgabe nicht in Frage.

Wenn die Aufgabe eine Lösung hat, so kann die gesuchte Zahl x nur die Wurzel x_2 sein. Wie wir sogleich beweisen werden, ist $x_2 > 0$. Wir bedienen uns dazu des folgenden *Hilfssatzes V*:

Wenn a, b nichtnegative Zahlen sind und wenn $a^2 \geq b^2$ gilt, so ist $a \geq b$.

Wir setzen $a = 3(R + r)$ und $b = \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}$ und berechnen die Differenz:

$$a^2 - b^2 = [3(R + r)]^2 - [\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}]^2$$

$$a^2 - b^2 = 9(R^2 + 2Rr + r^2) - 3(R^2 + 4Rr + r^2) = 6R^2 + 6Rr + 6r^2.$$

Die letzte Zahl ist auf Grund der Beziehung (1) positiv. Es ist also $x_2 > 0$.

Für die Zahlen R' und r' erhalten wir im Falle $x = x_2$ aus (4) folgende Ergebnisse:

$$R' = \frac{3(R - r) + \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6},$$

$$r' = \frac{-3(R - r) + \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6}. \quad (5)$$

Die Zahl R' ist auf Grund von (1) positiv. Es handelt sich darum, festzustellen, unter welchen Bedingungen auch r' positiv ist. Das tritt genau dann ein, wenn

$$\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)} > |-3(R - r)|$$

ausfällt. Um den Satz V anwenden zu können, bilden wir die Differenz Q der Quadrate der Zahl auf der linken und auf der rechten Seite der letzten Ungleichung:

$$Q = [\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}]^2 - [-3(R - r)]^2$$

$$= 3(R^2 + 4Rr + r^2) - 9(R^2 - 2Rr + r^2) = -6R^2 + 30Rr - 6r^2$$

$$Q = -6(R^2 - 5Rr + r^2).$$

Die Zahl Q muß positiv sein, d. h., es muß

$$R^2 - 5Rr + r^2 < 0 \quad (6)$$

ausfallen.

Die Gleichung $y^2 - 5y + 1 = 0$ mit der Unbekannten y hat die Wurzeln $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$. Deshalb läßt sich die Beziehung (6) in der Gestalt schreiben:

$$\left(R - \frac{5r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{21}\right)\left(R - \frac{5r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{21}\right) < 0. \quad (7)$$

Dabei ist der erste Faktor der linken Seite von (7) um $r\sqrt{21}$ größer als der zweite. Die Beziehung (7) läßt sich also nur auf folgende Weise erfüllen

$$R - \frac{5r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{21} > 0 \quad \text{oder}$$

$$R - \frac{5r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{21} < 0,$$

das heißt

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{r} &> \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) \quad \text{oder} \\ \frac{R}{r} &< \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Durch Rückschluß folgt aus den beiden Beziehungen (8), daß $Q > 0$ und damit $r' > 0$ ist. Dabei ist die erste Beziehung (8) auf Grund von (1) stets erfüllt.

Daraus folgt das *Ergebnis*: Die Aufgabe hat genau dann eine Lösung, wenn die Ungleichungen

$$1 < \frac{R}{r} < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$$

gelten.

14. A. Nehmen wir an, daß das Zahlenpaar (x, y) die beiden gegebenen Gleichungen (1) und (2) erfüllt.

Im folgenden bedienen wir uns der bekannten Formel

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad (3)$$

und dann des Satzes V:

Wenn $\cos \beta = \cos \gamma$, so ist entweder $\beta = \gamma + k \cdot 360^\circ$ oder $\beta = -\gamma + k \cdot 360^\circ$, wobei k eine ganze Zahl bedeutet.

Durch Anwendung der Formel (3) auf die linke Seite der Gleichung (1) erhalten wir $\cos[90^\circ - (x + 150^\circ)] = \cos(y - 75^\circ)$.

Nun gilt *entweder* nach dem Satz V:

$$\text{a) } 90^\circ - (x + 150^\circ) + k \cdot 360^\circ = y - 75^\circ,$$

wobei k irgendeine ganze Zahl ist. Dann ist

$$y = 15^\circ - x + k \cdot 360^\circ. \quad (4)$$

Oder es gilt:

$$\text{b) } x + 150^\circ - 90^\circ + k \cdot 360^\circ = y - 75^\circ,$$

wobei k irgendeine ganze Zahl ist. Dann ist

$$y = x + 135^\circ + k \cdot 360^\circ. \quad (5)$$

B. Durch Anwendung der Formel (3) formen wir den Ausdruck $\sin(y - 225^\circ)$ um. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(y - 225^\circ) &= \cos(y - 225^\circ - 90^\circ) \\ &= \cos(y - 225^\circ - 90^\circ + 360^\circ) = \cos(y + 45^\circ). \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen dieses Ergebnisses für $\sin(y - 225^\circ)$ in die Gleichung (2) erhalten wir:

$$\cos x + \cos(y + 45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (6)$$

C. Diese Gleichung kombinieren wir einmal mit (4) [siehe Teil I] und zum anderen mit (5) [siehe Teil II].

I. Durch Einsetzen von (4) in (6) erhalten wir

$$\cos x + \cos(60^\circ - x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

oder

$$\cos x + \cos(x - 60^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

und durch Anwendung der Formel für die Summe der Cosinus erhalten wir ferner:

$$2 \cos(x - 30^\circ) \cdot \cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$2 \cos(x - 30^\circ) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$2 \cos(x - 30^\circ) = -1,$$

$$\cos(x - 30^\circ) = -\frac{1}{2}.$$

Es muß also gelten:

entweder **[a]**

$$x - 30^\circ = 120^\circ + m \cdot 360^\circ \quad (7)$$

(wobei m irgendeine ganze Zahl ist);

oder **[b]**

$$x - 30^\circ = 240^\circ + p \cdot 360^\circ \quad (8)$$

(wobei p irgendeine ganze Zahl ist).

Fall [a]: Aus der Beziehung (7) folgt

$$x = 150^\circ + m \cdot 360^\circ,$$

und nach Einsetzen in (4) ergibt sich

$$y = -135^\circ + n \cdot 360^\circ = 360^\circ - 135^\circ + p \cdot 360^\circ = 225^\circ + p \cdot 360^\circ,$$

wobei $p = n - 1$ irgendeine ganze Zahl ist. Wir erhalten das Paar

$$x = 150^\circ + m \cdot 360^\circ, \quad y = 225^\circ + p \cdot 360^\circ. \quad (9)$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen (1) und (2) überzeugen wir uns davon, daß (9) für beliebige ganze Zahlen m und p stets diese Gleichungen erfüllt. Wir bezeichnen mit L_1 und P_1 die nach der Einsetzung entstehende linke bzw. rechte Seite der Gleichung (2). Wir erhalten:

$$L_1 = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$P_1 = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\begin{aligned} L &= \cos 150^\circ + \sin 0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\cos 30^\circ + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also $L_1 = P_1$ und $L = 0$, so daß alle Paare (9) eine Lösung des gegebenen Systems der Gleichungen (1) und (2) sind.

Fall [b]: Aus der Beziehung (8) folgt

$$x = 270^\circ + p \cdot 360^\circ.$$

Nach dem Einsetzen dieses Ergebnisses in die Beziehung (4) erhalten wir:

$$y = -255^\circ + (k - p) \cdot 360^\circ,$$

also

$$y = 105^\circ + q \cdot 360^\circ$$

(wobei q irgendeine ganze Zahl ist). Wir erhalten also das Paar

$$x = 270^\circ + p \cdot 360^\circ, \quad y = 105^\circ + q \cdot 360^\circ. \quad (10)$$

Wir überzeugen uns durch Einsetzen in die einzelnen Seiten der Gleichungen (1) und (2) davon, daß das genannte Paar für beliebige ganze p und q diese Gleichungen er-

füllt. Dazu verwenden wir die gleiche Bezeichnung wie beim Fall [a]:

$$L_1 = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad P_1 = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$L = \cos 270^\circ + \sin(-120^\circ) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.$$

Es gilt also $L_1 = P_1$ und $L = 0$, so daß alle Paare (10) eine Lösung des Systems der Gleichungen (1) und (2) sind.

II. Nach Einsetzen von (5) in die linke Seite der Gleichung (6) erhalten wir:

$$\cos x + \cos(x + 180^\circ) = \cos x - \cos x = 0.$$

Andererseits ist aber die rechte Seite der Gleichung (6) von null verschieden. Das System der Gleichungen (5), (6) hat also keine Lösung.

Ergebnis: Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, und alle Lösungen des gegebenen Systems der Gleichungen sind mit den Zahlen x und y aus den Beziehungen (9) und (10) gegeben.

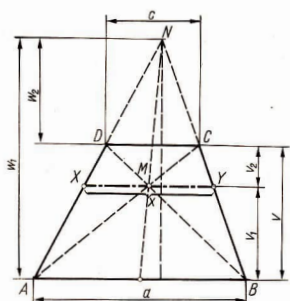
Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 10

15. Wir führen die Bezeichnungen der Abbildung 2.22. ein. Danach sind die Flächeninhalte P_1 und P_2 der Trapeze $ABYX$ und $XYCD$:

$$P_1 = \frac{1}{2}(a + x)v_1 \quad (1)$$

bzw.

$$P_2 = \frac{1}{2}(x + c)v_2. \quad (2)$$



Weil $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{XY}$ ist, gilt

$$\triangle MAB \sim \triangle MCD, \quad (3)$$

$$\triangle NAB \sim \triangle NDC, \quad (4)$$

$$\triangle NAB \sim \triangle NXY, \quad (5)$$

wobei auch die zugehörigen Höhen dieser Dreiecke im gleichen Verhältnis stehen wie die zugehörigen Seiten.

Abb. 2.22.

Gemäß der Abbildung 2.22. gilt:

$$v = v_1 + v_2 = w_1 - w_2. \quad (6)$$

Aus der Beziehung (3) folgt

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{c}$$

oder

$$v_1 = ka \quad \text{und} \quad v_2 = kc, \quad (7)$$

wobei $k > 0$ der Ähnlichkeitsfaktor ist. Auf Grund der ersten Beziehung (6) ist $v = ka + kc$ oder

$$k = \frac{v}{a + c}. \quad (7')$$

Aus der Beziehung (4) folgt

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{c}$$

oder

$$w_1 = k'a \quad \text{und} \quad w_2 = k'c, \quad (8)$$

wobei $k' > 0$ der Ähnlichkeitsfaktor ist. Auf Grund der zweiten Beziehung (6) ist $v = k'a - k'c$ und wegen $a > c$ also $a - c > 0$

$$k' = \frac{v}{a - c}. \quad (8')$$

Aus der Beziehung (5) folgt

$$\frac{x}{a} = \frac{w_1 - v_1}{w_1}$$

oder unter Benutzung von (7) und (8)

$$x = a \cdot \frac{k'a - ka}{k'a},$$

und es ist also

$$x = \frac{1}{k'} \cdot (k' - k) a.$$

Setzen wir hier für k' und k die Werte auf den rechten Seiten von (7') bzw. (8') ein, so erhalten wir:

$$x = \frac{a - c}{v} \cdot \left(\frac{v}{a - c} - \frac{v}{a + c} \right) \cdot a$$

$$x = a(a - c) \cdot \frac{a + c - (a - c)}{(a - c)(a + c)} = \frac{2ac}{a + c},$$

das heißt

$$x = \frac{2ac}{a+c}. \quad (9)$$

Auf Grund von (1) und (2) gilt:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a+x}{c+x} \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Unter Benutzung von (7) erhalten wir daraus:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a+x}{c+x} \cdot \frac{a}{c}.$$

Nun setzen wir für x den Ausdruck aus der Beziehung (9) ein und erhalten nacheinander

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} &= \left[a \left(a + \frac{2ac}{a+c} \right) \right] : \left[c \left(c + \frac{2ac}{a+c} \right) \right] \\ &= \frac{a[a(a+c) + 2ac]}{a+c} : \frac{c[c(a+c) + 2ac]}{a+c} \\ &= [a(a^2 + 3ac)] : [c(c^2 + 3ac)] \end{aligned}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = [a^2(a + 3c)] : [c^2(c + 3a)]$$

und schließlich

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2(a + 3c)}{c^2(3a + c)},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

16. Wir führen die in der Abbildung 2.23. verwendeten Bezeichnungen ein, wobei S der Kreismittelpunkt, $\overline{SM} = \overline{SN} = r$ der Radius des Sektors und $\overline{SP}$ die Winkelhalbierende des Sektors ist. Der Umfang des gleichseitigen Dreiecks SMN ist $3r$, der Umfang des durch die Gerade MN abgeschnittenen Segments ist

$$r + \frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{1}{3} r \cdot (3 + \pi).$$

Dann gilt

$$3r - r \cdot \frac{3 + \pi}{3} = \frac{9 - (3 + \pi)}{3} r = \frac{6 - \pi}{3} r.$$

Der Umfang des Dreiecks SMN ist also größer als der Umfang des Segments MPN . Nehmen wir an, daß die gegebene Aufgabe eine Lösung hat. Dann muß die gesuchte Gerade $AB \perp SP$ entsprechend dem vorhergegangenen vom Punkt S eine kleinere

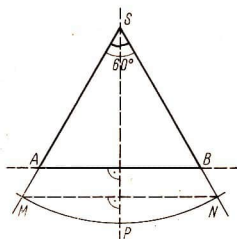


Abb. 2.23.

Entfernung haben als die Gerade MN (siehe Abb. 2.23.). Diese Gerade zerlegt also den Sektor in zwei Teile, von denen der eine das gleichseitige Dreieck SAB ist, dessen Seiten die Länge x haben. Sein Umfang ist $3x$. Der Umfang des zweiten Teils ist $x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r$.

Nach dem Text der Aufgabe sollen beide Umfänge einander gleich sein, d. h., es soll

$$3x = x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r.$$

sein. Das ist eine Gleichung ersten Grades für die Unbekannte x . Wir erhalten:

$$4x = 2r + \frac{1}{3}\pi r,$$

$$x = \frac{1}{12}(6 + \pi)r.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks SAB ist $P_1 = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$. Der Flächeninhalt des zweiten Teils ist $P_2 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$. Wir berechnen $P_1 - P_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12^2}(6 + \pi)^2 r^2 \sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi r^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{48}(36 + 12\pi + \pi^2)\sqrt{3} - \pi \right] r^2 \\ P_1 - P_2 &= \frac{1}{6 \cdot 48} [(36 + 12\pi + \pi^2)\sqrt{3} - 48\pi] r^2. \end{aligned} \quad (1')$$

Es genügt zu entscheiden, ob der Ausdruck V in der eckigen Klammer in der Beziehung (1') positiv oder negativ oder null ist. Es gilt

$$V = (36\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\pi + \pi^2\sqrt{3}) - 48\pi. \quad (1)$$

Versuchen wir zu beweisen, daß V eine negative Zahl ist. Erinnern wir uns zu diesem Zwecke daran, daß gilt:

$$3 < \pi \quad (2)$$

$$\pi < 3,2, \quad (3)$$

$$\sqrt{3} < 1,733. \quad (4)$$

Wenn wir eine von den Zahlen in der Klammer auf der rechten Seite der Beziehung (1) vergrößern, erhalten wir anstelle der Zahl V eine neue Zahl, die größer als V ist. Dieses Verfahren wenden wir wiederholt an. Nacheinander ergibt sich so

$$\begin{aligned} V &= 12 \cdot 3 \sqrt{3} + 12 \sqrt{3} \pi + \pi^2 \sqrt{3} - 48\pi < \\ &< 12\pi \sqrt{3} + 12 \sqrt{3} \pi + \pi^2 \sqrt{3} - 48\pi \end{aligned} \quad [\text{siehe (2)}]$$

$$\begin{aligned} &= 24 \sqrt{3} \pi + \pi^2 \sqrt{3} - 48\pi \\ &= \pi \sqrt{3} (24 + \pi) - 48\pi < \pi \sqrt{3} (24 + 3,2) - 48\pi \end{aligned} \quad [\text{siehe (3)}]$$

$$= \pi \sqrt{3} \cdot 27,2 - 48\pi < \pi \cdot 1,733 \cdot 27,2 - 48\pi$$

$$V = \pi(1,733 \cdot 27,2 - 48),$$

also

$$V < \pi(1,733 \cdot 27,2 - 48). \quad (5)$$

Nun ist $1,733 \cdot 27,2 = 47,1376$, so daß die Zahl z in der Klammer in der Beziehung (5) negativ ist:

$$z = 47,1376 - 48 < 0.$$

Es gilt also $\pi z < 0$ und folglich $V < 0$. Daher ist auch der Ausdruck (1') negativ und also

$$P_1 - P_2 < 0,$$

d. h.

$$P_1 < P_2.$$

Ergebnis: Der Teil der Figur, der ein gleichseitiges Dreieck ist, hat einen kleineren Flächeninhalt als der andere Teil des Sektors.

Im folgenden soll der Ausdruck V noch auf eine andere Weise abgeschätzt werden. In der Klammer der Beziehung (1) ersetzen wir die Zahlen $\sqrt{3}$ und π durch 1,74 bzw. 3,15 und 48π durch $48 \cdot 3,14$. Wir erhalten auf diese Weise wegen

$$\sqrt{3} < 1,74 \quad \text{bzw.} \quad 3,14 < \pi < 3,15$$

$\overline{AO}$ als Durchmesser hat, über. Der Punkt O' ist also der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AO}$. Das Bild V des Punktes V_1 in dieser Homothetie liegt auf Grund der Beziehung (1) notwendigerweise auf der Kreislinie k' . Dabei ist V ein Punkt der Geraden $\overline{BV_2} \perp \overline{AC}$ und also Schnittpunkt der Kreislinie k' und der Geraden $\overline{BV_2}$. Daraus ergibt sich die Konstruktion.

Konstruktion (Abb. 2.24.): Wir konstruieren die Strecke $\overline{AB} = c$ und bezeichnen eine der durch die Gerade AB begrenzten Halbebenen mit ϱ sowie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit O . Dann konstruieren wir über der Strecke $\overline{AO}$ als Durchmesser die Kreislinie $k' = \left(O', \frac{1}{4}c\right)$. In der Halbebene ϱ konstruieren wir den Winkel $BAX = \alpha$

und bezeichnen den Fußpunkt des vom Punkt B auf die Gerade AX gefällten Lotes mit V_2 . Die Schnittpunkte der Geraden $\overline{BV_2}$ mit der Kreislinie k' bezeichnen wir mit V bzw. V' (sofern sie existieren).

Auf dem Strahl AV konstruieren wir die Strecke

$$\overline{AV_1} = 2\overline{AV}.$$

Den Schnittpunkt der Strahlen AX und BV_1 bezeichnen wir mit C ; dann entspricht das Dreieck ABC den Forderungen der Aufgabe.

Beweis: In dem Dreieck ABC (sofern es existiert) ist $\overline{BV_2} \perp \overline{AC}$, $\overline{AV_1} \perp \overline{BC}$, so daß $\overline{AV_1}$ und $\overline{BV_2}$ Höhen sind. Für ihren Schnittpunkt V gilt nach Konstruktion $\overline{AV} = \overline{VV_1}$. Dabei ist, sofern C in der Halbebene ϱ liegt, $\sphericalangle BAC = \alpha$ und $\overline{AB} = c$. Damit ist der Beweis geführt.

Diskussion:

I. Zuerst beweisen wir die folgende Feststellung: Die Aufgabe hat keine Lösung, wenn in dem Dreieck ABC der Winkel $\alpha \geq 90^\circ$ ist. Das heißt, wenn die Aufgabe eine Lösung hat, muß der Winkel α spitz sein. Wir unterscheiden im folgenden zwei Fälle:

Fall [1]: Angenommen, es ist $\alpha = 90^\circ$. In einem solchen Dreieck ist $V \equiv A$, und die Forderung (1) ist nicht erfüllbar.

Fall [2], (Abb. 2.25.): Angenommen, es ist $180^\circ > \alpha > 90^\circ$. Dann sind die Winkel ABC und ACB des Dreiecks ABC spitz. Deshalb liegt der Fußpunkt V_1 des vom Punkt A auf die Gerade BC gefällten Lotes auf der Strecke $\overline{BC}$. Deshalb verläuft die Gerade AV_1 innerhalb des Winkels BAC und des zugehörigen Scheitelwinkels $B'AC'$. Weil der Winkel CAB des Dreiecks ABC stumpf ist, fällt der Fußpunkt B_2 des durch den Punkt B auf die Gerade CA gefällten Lotes auf den zu dem Strahl AC entgegengesetzten Strahl, so daß der Punkt A auf der Strecke $\overline{CV_2}$ liegt. Aus dem Dreieck BCV_2 folgt, daß der Winkel $ABC = \varepsilon$ in diesem Dreieck spitz ist, so daß die Summe der Winkel $AV_1B = 90^\circ$ und ε kleiner als 180° ist. Nach dem EUKLIDISCHEN Parallelenaxiom haben die Strahlen V_1A und BV_2 einen Schnittpunkt V . Dieser

aber liegt notwendigerweise innerhalb des Winkels $B'AC'$, denn die Strecken $\overline{AV_1}$ und $\overline{BV_2}$ können keinen Punkt gemeinsam haben (sie sind voneinander durch die Gerade AB getrennt). Der Punkt A trennt also die Punkte V , V_1 , und der Punkt V kann nicht der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AV_1}$ sein.

Damit ist der Beweis geführt.

II. Im weiteren setzen wir deshalb voraus, daß der Winkel α spitz ist, so daß der Strahl $BV_2 \perp AX$ bis auf den Punkt B in die Halbebene q fällt. Zuerst entscheiden wir, ob die Punkte V und V' existieren. Es gilt: Die Gerade BV_2 ist a) eine Sekante, b) eine Tangente, c) eine Nichtschneidende der Kreislinie k' je nachdem, ob (Abb. 2.24.)

$$\text{a) } \overline{O'P} < \frac{1}{4}c, \quad \text{b) } \overline{O'P} = \frac{1}{4}c \quad \text{oder} \quad \text{c) } \overline{O'P} > \frac{1}{4}c' \quad (2)$$

gilt, wobei P der Fußpunkt des vom Punkt O' auf die Gerade BV_2 gefällten Lotes ist. Der Punkt P mit dem Strahl BV_2 liegt offensichtlich innerhalb der Halbebene q . Aus der Homothetie der Dreiecke $BO'P$ und BAV_2 (der Koeffizient der Homothetie ist $\frac{3}{4}$) in bezug auf den Mittelpunkt B folgt, daß $\overline{O'P} = \frac{3}{4}\overline{AV_2} = \frac{3}{4}c \cdot \cos \alpha$ ist, wie aus dem rechtwinkligen Dreieck ABV_2 mit der Hypotenuse $\overline{AB} = c$ hervorgeht. Nach dem Einsetzen in (2) erhalten wir die Bedingungen

$$\cos \alpha < \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha > \frac{1}{3}$$

und für den spitzen Winkel α die Bedingungen

$$\alpha > \varepsilon, \quad \alpha = \varepsilon, \quad \alpha < \varepsilon,$$

wobei ε der durch die Beziehung

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{3} \quad (3)$$

definierte spitze Winkel ist. (Es gilt $70^\circ 40' < \varepsilon < 70^\circ 50'$.)

Im Falle $\alpha > \varepsilon$ existieren die Punkte $V \neq V'$, im Falle $\alpha = \varepsilon$ gibt es nur den einzigen Schnittpunkt V der Geraden BV_2 mit der Kreislinie k' . Die Geraden BV_2 und AV_1 sind divergierende Geraden mit dem Schnittpunkt V . Also sind auch die Geraden $AV_2 \perp BV_2$ und $BV_1 \perp AV_1$ divergierende Geraden mit dem Schnittpunkt C . Der Punkt C existiert also und liegt offensichtlich innerhalb der Halbebene q . Das folgt aus dem EUKLIDISCHEN Parallelenaxiom.

Ergebnis: Die Aufgabe hat je nach Wahl der Lage der Strecke $\overline{AB}$ und des Winkels α zwei Lösungen (siehe die Dreiecke ABC und ABC' in der Abb. 2.24.), wenn $\alpha > \varepsilon$ ist. Sie hat nur eine einzige Lösung, wenn $\alpha = \varepsilon$ ist. Sonst hat sie keine Lösung. Dabei ist ε der spitze Winkel, der durch die Beziehung (3) gegeben ist.

18. Angenommen, es sei x eine reelle Zahl, welche die Gleichung (1) erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{\sqrt{x} - p + \sqrt{x} + p}{(\sqrt{x} + p)(\sqrt{x} - p)} = \frac{x + p^2}{x - p^2},$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + p)(\sqrt{x} - p)} = \frac{x + p^2}{(\sqrt{x} - p)(\sqrt{x} + p)}. \quad (1')$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit der Zahl $(\sqrt{x} - p) \cdot (\sqrt{x} + p)$ multiplizieren, erhalten wir die Gleichungen

$$2\sqrt{x} = x + p^2, \quad (2)$$

$$x - 2\sqrt{x} + p^2 = 0.$$

Setzen wir

$$\sqrt{x} = y \quad \text{oder} \quad y^2 = x, \quad (3)$$

so erhalten wir die Gleichung

$$y^2 - 2y + p^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 - p^2} \quad \text{und} \quad y_2 = 1 - \sqrt{1 - p^2}. \quad (4)$$

Weil $y = \sqrt{x}$ ist, müssen die Zahlen y_1, y_2 nichtnegative Zahlen sein. Deshalb muß vor allem $1 - p^2 \geq 0$ sein, sonst wäre die Zahl $\sqrt{1 - p^2}$ nicht reell. Aus der Beziehung $1 - p^2 \geq 0$ oder $(1 - p)(1 + p) \geq 0$ folgt, daß p der Bedingung

$$-1 \leq p \leq 1 \quad (5)$$

genügen muß.

Unter der Voraussetzung (5) ist

$$y_1 > 0. \quad (6)$$

Damit $y_2 \geq 0$ ist, muß wegen (4) $1 - \sqrt{1 - p^2} \geq 0$, d. h. $1 \geq \sqrt{1 - p^2}$ gelten. Beide Seiten dieser Ungleichung sind nichtnegative Zahlen und deshalb muß für ihre Quadrate $1 \geq 1 - p^2$, d. h. $p^2 \geq 0$, gelten; das ist sicher erfüllt. Wenn also (5) gilt, ist auch $y_2 \geq 0$.

Gemäß (3) gehören zu den Zahlen y_1 und y_2 entsprechend der Beziehung (3) jeweils die Zahlen $x_1 = y_1^2$ bzw. $x_2 = y_2^2$ oder

$$x_1 = (1 + \sqrt{1 - p^2})^2 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}, \quad (7)$$

bzw.

$$x_2 = (1 - \sqrt{1 - p^2})^2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}. \quad (8)$$

Wenn die Gleichung (1) eine Lösung hat, können es nur diese Zahlen x_1 und x_2 sein. Damit diese Zahlen die Gleichung (1) erfüllen, müssen sie zunächst folgende Eigenschaften haben:

Die Zahlen $\sqrt{x} + p$, $\sqrt{x} - p$ und $x - p^2 = (\sqrt{x} - p)(\sqrt{x} + p)$ müssen für $x = x_1$ und $x = x_2$ von null verschieden sein. Sonst hätten einige der Brüche in der Gleichung (1) keinen Sinn. Offenbar genügt es, zu fordern, daß $x - p^2 \neq 0$ und $x \geq 0$ ist.

Nach (7) und (8) ist

$$x - p^2 = 2(1 - p^2 + \varepsilon \sqrt{1 - p^2}),$$

wobei $\varepsilon = 1$ für $x = x_1$ ist, und $\varepsilon = -1$ für $x = x_2$. Ferner gilt

$$x - p^2 = 2\sqrt{1 - p^2}(\sqrt{1 - p^2} + \varepsilon). \quad (9)$$

Weil diese Zahl von null verschieden sein muß, muß jeder der Faktoren auf der rechten Seite von null verschieden sein. Wenn aber $\sqrt{1 - p^2} = 0$ ist, ist $1 - p^2 = 0$ oder $(1 - p)(1 + p) = 0$, d. h., entweder $p = 1$ oder $p = -1$. Deshalb muß wegen (5)

$$-1 < p < 1 \quad (10)$$

gelten.

Ebenso muß der zweite Faktor auf der rechten Seite der Beziehung (9) von null verschieden sein. Für $\varepsilon = 1$ gilt aber nie

$$\sqrt{1 - p^2} + \varepsilon = 0,$$

denn es ist $\sqrt{1 - p^2} \geq 0$. Für $\varepsilon = -1$ gilt dann

$$\sqrt{1 - p^2} - 1 = 0,$$

d. h.

$$\sqrt{1 - p^2} = 1,$$

$$1 - p^2 = 1,$$

wenn

$$p = 0$$

ist. Für $p = 0$ ist tatsächlich $x_2 = 0$, und die Nenner in (1) sind gleich null.

Mit Ausnahme der Zahl x_2 , die man für $p = 0$ erhält, können die Zahlen x_1 und x_2 für alle Zahlen p aus den Beziehungen (10) Lösungen der Gleichung (1) sein. Das allerdings gilt unter der Voraussetzung, daß $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ ist, wovon wir uns noch überzeugen müssen:

a) Weil die Beziehung (10) gilt, ist $2 - p^2 > 0$ und weil $2\sqrt{1 - p^2} \geq 0$ ist, ist offensichtlich $x_1 > 0$.

b) Die Zahlen $a = 2 - p^2$, $b = 2\sqrt{1 - p^2}$ sind nichtnegativ (die erste ist sogar positiv). Entscheiden wir, welche von beiden die größere ist. Es gilt der Satz V: Wenn a und b nichtnegative Zahlen sind, geht aus der Beziehung $a \geq b$ hervor, daß $a^2 \geq b^2$ ist und umgekehrt.

Wegen

$$(2 - p^2)^2 = 4 - 4p^2 + p^4, \quad (2\sqrt{1 - p^2})^2 = 4 - 4p^2$$

gilt

$$a^2 - b^2 = p^4,$$

und wegen $p^4 \geq 0$ ist $a^2 \geq b^2$ und damit $a \geq b$. Es ist also $x_2 \geq 0$.

Nun zeigen wir, daß die Zahlen x_1 , x_2 (unter den Voraussetzungen, von denen wir gesprochen haben) tatsächlich Lösungen der Gleichung (1) sind. Es genügt, wenn wir uns auf den Vergleich der Zähler in der Gleichung (1') beschränken; denn wir haben festgestellt, daß die Nenner in (1') untereinander gleich und von null verschieden sind. Wir werden also beweisen, daß $2\sqrt{x} = x + p^2$ für $x = x_1$ und $x = x_2$ gilt. Wir wissen, daß $x_1 > 0$ und $x_2 \geq 0$ ist. Deshalb sind die Zahlen $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $x_1 + p^2$, $x_2 + p^2$ nichtnegative Zahlen, und für den Vergleich bedienen wir uns des Satzes V (für den Fall der Gleichheit), d. h., wir vergleichen die Quadrate dieser Zahlen, also die Zahlen $4x$ und $(x + p^2)^2$.

Der Kürze halber schreiben wir:

$$x = 2 - p^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2},$$

wobei wir x_1 für $\varepsilon = 1$ und x_2 für $\varepsilon = -1$ erhalten. Es ist:

$$(x + p^2)^2 = (2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2})^2 = 4(2 - p^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2})$$

$$4x = 4(2 - p^2 + \varepsilon\sqrt{1 - p^2}).$$

Das Ergebnis ist in übersichtlicher Form aus der folgenden Tabelle zu-ersehen.

Die Zahl p ist im Intervall	Lösung der Gleichung (1)
$p \leq -1$	(1) hat keine Lösung
$-1 < p < 0$	$x_1 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}$, $x_2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}$,
$p = 0$	$x_1 = 4$
$0 < p < 1$	$x_1 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}$, $x_2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}$
$1 \leq p$	(1) hat keine Lösung

19. Im folgenden geben wir eine kurze Lösung der Aufgabe. Gründlicher führen wir nur den letzten mit **[2b]** bezeichneten Fall aus. Vergleichen Sie bitte mit den Abbildungen 2.26. bis 2.36!

Den Abstand der Geraden $a \parallel b$ bezeichnen wir mit $v > 0$, ferner ist $\overline{AB} = d > 0$. Es ist also $v \leq d$. Die Halbebenen aB , bA bezeichnen wir der Reihe nach mit ϱ und σ sowie die zugehörigen komplementären Halbebenen mit ϱ' und σ' . Die Kreislinie $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ muß in einer der Halbebenen ϱ oder ϱ' liegen, die Kreislinie $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ muß in einer der Halbebenen σ oder σ' liegen. Die Kreislinien k_1 und k_2 berühren sich im Punkt T , in dem sie die gemeinsame Tangente $t \perp S_1S_2$ haben (sicher ist $S_1 \neq S_2$). Der Punkt T liegt auf der Geraden S_1S_2 .

Wir kombinieren jede der Halbebenen ϱ und ϱ' mit jeder der Halbebenen σ und σ' , wobei wir gleich die Kombination (ϱ', σ') ausschließen, denn die Halbebenen ϱ' und σ' haben keinen Punkt gemeinsam. Wir erhalten die drei Paare

$$(\varrho, \sigma), (\varrho, \sigma'), (\varrho', \sigma). \quad (1)$$

Zu diesen Kombinationen kommt noch die Forderung, daß die Kreislinien k_1 und k_2 einander von außen oder von innen berühren.

Führen wir folgende Bezeichnung ein: Es bedeuten U und V das innere bzw. äußere Homothetiezentrum der Kreislinien k_1 und k_2 . Die Koeffizienten dieser Homothetien

sind $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Im weiteren werden wir sehen, daß man den einen von den

Punkten U und V sofort konstruieren kann. Das Wesen der Konstruktion beruht in der Bestimmung des zweiten von den beiden Punkten U und V .

Die Lösung der Aufgabe zerlegen wir in zwei Teile: **[1]** Es ist $v = d$, d. h., $AB \perp a$.

[2] Es ist $v < d$, d. h., die Geraden AB und a stehen nicht senkrecht aufeinander.

Den Fall **[1]**, in dem $v = d$ ist, erwähnen wir nur kurz. Die Punkte S_1 und S_2 liegen notwendigerweise auf der Geraden AB , denn die Geraden a und b sind Tangenten an die Kreislinien k_1 und k_2 . Damit liegt auch der Punkt T auf der Geraden AB . Nun betrachten wir die Kombinationen (1) und die Art der Berührung:

[1a] Angenommen, k_1 und k_2 haben eine *äußere Berührung*, so daß $T \equiv U$ ist, dann führt jedes der Paare (1) zur Lösung. (Siehe Abbildung 2.26., in der $r_2 = \frac{1}{6}v$ ist! Siehe ferner Abbildung 2.27., in der $r_2 = \frac{1}{4}v$ ist! Vergleiche schließlich auch mit der Abbildung 2.28., in der $r_2 = \frac{1}{2}v$ ist!)

[1b] Angenommen, k_1 und k_2 haben eine *innere Berührung*, so daß $T \equiv V$ ist. Hier führt das Paar (ϱ', σ) nicht zu einer Lösung, denn die Kreislinie k_2 muß – bis auf den Punkt T – innerhalb der Kreislinie k_1 liegen, welche einen größeren Radius hat.

Wir erhalten: **a)** die Lösung aus Abbildung 2.29., in der $r_2 = \frac{1}{4} v$ ist; **b)** die Lösung aus Abbildung 2.30., in der $r_2 = \frac{1}{2} v$ ist; **c)** die Lösung aus Abbildung 2.31., in der $r_2 = \frac{1}{2} v$ ist.

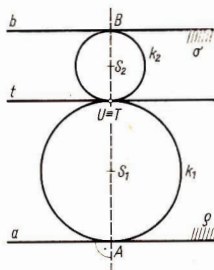


Abb. 2.26.

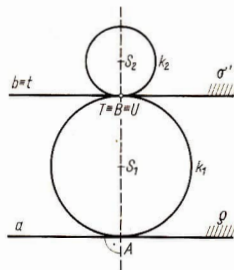


Abb. 2.27.

Im Fall [2], in dem $v < d$ ist, bezeichnen wir mit s die Senkrechte zu a durch den Punkt A . Aus der Homothetie der Kreislinien k_1 und k_2 ergeben sich die Beziehungen

$$\overline{VS_2} = \frac{1}{2} \overline{VS_1}, \quad \overline{US_2} = \frac{1}{2} \overline{US_1},$$

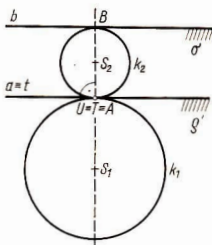


Abb. 2.28.

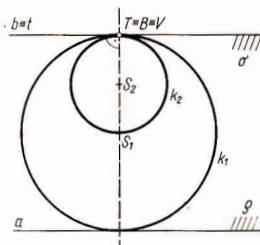


Abb. 2.29.

wobei der Punkt V auf der Verlängerung der Strecke $\overline{S_1S_2}$ über den Punkt S_2 hinaus liegt, während der Punkt U auf der Strecke $\overline{S_1S_2}$ liegt. Nun unterscheiden wir nach der Art der Berührung der Kreislinien k_1 und k_2 folgende Fälle:

[2a] *Äußere Berührung*: Es ist $T \equiv U$.

(α) Die Kombination (q, σ) – siehe Abbildung 2.32. Dann ist $\overline{AS_1} \uparrow \downarrow \overline{BS_2}$, wobei die Gerade b mit dem Punkt B Bild der Geraden a mit dem Punkt A bei der Homothetie (T) mit dem Zentrum T und dem Koeffizienten $-\frac{1}{2}$ ist. Daraus ergibt sich die *Konstruktion*:

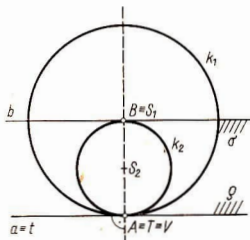


Abb. 2.30.

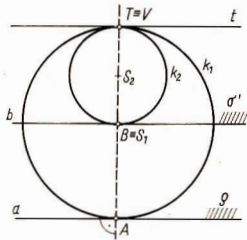


Abb. 2.31.

Innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ konstruieren wir den Punkt T so, daß

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{AT}} = \frac{1}{2}$$

ist. Der Punkt S_1 ist der Schnittpunkt der Geraden s und p , wobei p die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AT}$ ist. Wir konstruieren die Kreislinie $k_1 \equiv (S_1, \overline{S_1A})$; die Kreislinie k_2 ist das Bild der Kreislinie k_1 bei der Homothetie (T) . Die *Beweisführung* ist leicht. Der Punkt T existiert und damit auch das einzige Kreislinienpaar k_1 und k_2 .

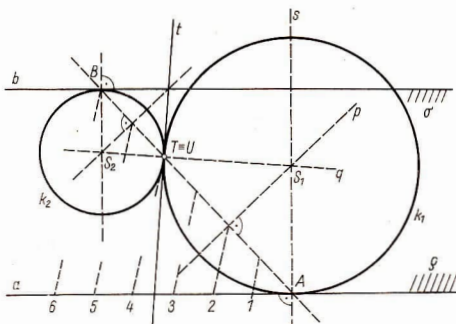


Abb. 2.32.

(β) Die Kombinationen (ϱ, σ') und (ϱ', σ) werden in den Abbildungen 2.33. und 2.34. veranschaulicht. Dann ist $\overline{AS_1} \uparrow \uparrow \overline{BS_2}$, und es handelt sich um Homothetie (V) mit dem Zentrum V und dem Koeffizienten $\frac{1}{2}$. Angenommen, es ist T' die Abbildung des Punktes T bei der Homothetie (V). Dann ergeben sich die Beziehungen:

$$\overline{VT'} = \frac{1}{2} \overline{VT}, \quad \frac{1}{2} \overline{S_1 T} = \overline{S_2 T'} = \overline{S_2 T} = r_2, \quad \frac{1}{2} \overline{VA} = \overline{VB},$$

so daß T' der Mittelpunkt der Strecke $\overline{VT}$ ist, d. h., $\overline{VT'} = 2r_2 = \overline{S_1 A} = r_1$, $\overline{VS_1} = 6r_2$. Für die Seiten des Dreiecks $AS_1 V$ gilt

$$\frac{\overline{S_1 A}}{\overline{S_1 V}} = \frac{1}{3}.$$

Daraus ergibt sich die *Konstruktion*: Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über den Punkt B hinaus bestimmen wir den Punkt V so, daß $\overline{BV} = \overline{AB}$, also $\overline{VA} = 2\overline{VB}$

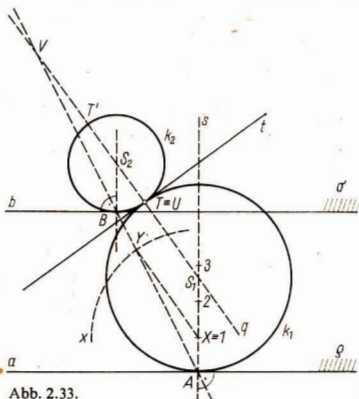


Abb. 2.33.

ist. Auf der Geraden s wählen wir die Strecke $\overline{AX}$ (siehe Abbildung 2.33. in der Halbebene ϱ ; ferner die Abbildung 2.34. in der Halbebene ϱ'). Nach dem Kongruenzsatz ssw konstruieren wir das Dreieck AXY , in dem Y auf dem Strahl AB liegt und in dem $\overline{XY} = 3\overline{AX}$ gilt. Zur Konstruktion verwenden wir die Kreislinie $x \equiv (X, 3\overline{AX})$. Durch den Punkt V ziehen wir die Gerade $q \parallel XY$ und bezeichnen mit S_1 den Schnittpunkt der Geraden q und s . Zur Kreislinie $k_1 \equiv (S_1, \overline{S_1 A})$ konstruieren wir das Bild k_2 bei der Homothetie (V) mit dem Zentrum V und dem Koeffizienten $\frac{1}{2}$. Die Beweisführung für die Konstruktion ist leicht. Die Aufgabe hat offensichtlich nur eine einzige Lösung.

[2b] *Innere Berührung*: Es ist $T = V$. Die Kombination (ϱ', σ) entfällt offensichtlich. (γ) Die Kombination (ϱ, σ') ist in der Abbildung 2.35. veranschaulicht. Jetzt ist $\overline{AS_1} \uparrow \uparrow \overline{BS_2}$, $\overline{TB} = \frac{1}{2} \overline{TA}$. Daraus ergibt sich die *Konstruktion*: Auf der Verlängerung

der Strecke $\overline{AB}$ über den Punkt B hinaus konstruieren wir die Strecke $\overline{BT} = \overline{BA}$ und bezeichnen mit S_1 den Schnittpunkt der divergierenden Geraden s und p , wobei p die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AT}$ ist. Bezüglich der Homothetie (V) mit dem Zentrum V und dem Koeffizienten $\frac{1}{2}$ konstruieren wir das Bild k_2 der Kreislinie

$$k_1 \equiv (S_1, \overline{S_1A}).$$

Die Kreislinie k_2 verläuft offensichtlich durch den Punkt S_1 . Die Aufgabe hat nur eine einzige Lösung.

(d) Die Kombination (q, σ) ist veranschaulicht in der Abbildung 2.36. Analyse: Hier ist $\overline{AS_1} \uparrow \downarrow \overline{BS_2}$, und das innere Zentrum U der Homothetie (U) der Kreislinien k_1 und k_2 liegt innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ so, daß

$$\overline{UB} = \frac{1}{2} \overline{UA}$$

gilt.

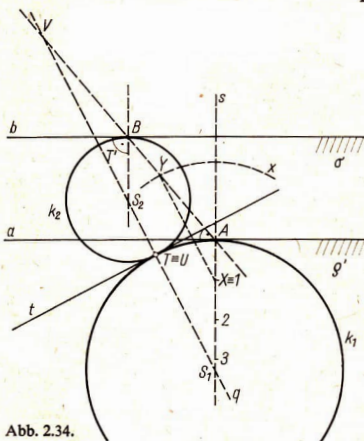


Abb. 2.34.

Weil $r_1 = 2r_2$ ist und die Kreislinien k_1 und k_2 eine innere Berührung haben, liegt der Punkt S_1 auf der Kreislinie k_2 . Angenommen, $T' \equiv S_1$ ist das Bild des Punktes $T \equiv V$ bei der Homothetie (U) mit dem Koeffizienten $-\frac{1}{2}$, so daß $\overline{S_1U} = \frac{1}{3} \overline{S_1T} = \frac{2}{3} r_2$ und $\overline{S_1A} = 2r_2$ ist, dann gilt

$$\frac{\overline{S_1U}}{\overline{S_1A}} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Angenommen, es ist X der Fußpunkt des Lotes s vom Punkt A auf die Gerade b . Dann ist $\overline{AX} = v$. Bei der Homothetie mit dem Zentrum A entspricht nun dem Punkt S_1 der Punkt X und dem Punkt U der Punkt Y des Strahls $\overline{AB}$, so daß gemäß (2)

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{S_1U}}{\overline{S_1A}} = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad \overline{XY} = \frac{1}{3} \overline{AX},$$

Punkt B das Bild der Geraden a mit dem Punkt A . Deshalb berührt die Kreislinie k_2 die Gerade b im Punkt B .

Diskussion: Wir errechnen zuerst die Länge der Höhe $y = \overline{XP}$ in dem Dreieck ABX mit $\angle X = 90^\circ$. Es ist $\triangle XBP \sim \triangle ABX$ und demnach ist

$$\frac{\overline{XP}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AB}}$$

oder

$$\frac{y}{\sqrt{d^2 - v^2}} = \frac{v}{d}$$

und also

$$y = \frac{v}{d} \sqrt{d^2 - v^2}. \quad (4')$$

Nun entscheiden wir, wann die Gerade AB eine Sekante, eine Tangente oder eine Nichtschneidende der Kreislinie x mit dem Radius $\frac{1}{3}v$ ist. Die einzelnen Fälle treten bekanntlich ein, je nachdem welche der Beziehungen

$$y < \frac{1}{3}v, \quad y = \frac{1}{3}v, \quad y > \frac{1}{3}v \quad (4)$$

gilt.

Durch Anwendung von (4') lassen sich diese Bedingungen in die Form

$$d < \frac{3}{4}\sqrt{2}v, \quad d = \frac{3}{4}\sqrt{2}v, \quad d > \frac{3}{4}\sqrt{2}v$$

bringen.

Wir werden noch beweisen, daß der Punkt S_1 tatsächlich auf dem Strahl AX liegt (sonst würde die Kreislinie k_1 nicht existieren). Wir bezeichnen mit $e \parallel a$ die Gerade durch den Punkt U (die Gerade e liegt innerhalb des Streifens zwischen den Parallelen a und b , so daß sie von der Geraden b den Abstand $\frac{1}{3}v$ hat). Diese ist eine Tangente

der Kreislinie x . Deshalb fällt der Punkt Y in die Halbebene eX , d. h. auf den Strahl UB . Angenommen, es seien $\angle XUA$, $\angle UXZ$ zwei kongruente Wechselwinkel, d. h., es gilt $\overline{XZ} \uparrow \downarrow \overline{UA}$. Der Punkt Y liegt offensichtlich innerhalb des Winkels UKZ . Deshalb fällt der Punkt S_1 (wobei $\overline{US_1} \uparrow \downarrow \overline{XY}$ ist) in den Winkel XUA und also auf die Strecke $\overline{AX}$, womit der Beweis erbracht ist.

Ergebnis: Wenn $\overline{AB} \perp a$, so lassen sich sechs Paare von Kreislinien konstruieren. Wenn nicht $\overline{AB} \perp a$, so gibt es wenigstens vier solche Paare. Zu ihnen kommen weitere zwei Paare, eines oder kein Paar, je nachdem, ob die erste, die zweite oder die dritte der Beziehungen (4) gilt.

20. Angenommen, die reelle Zahl x ist die Lösung der Ungleichung (1). Dann muß $1 - x > 0$ und $1 + x > 0$, d. h.,

$$-1 < x < 1, \quad (2)$$

gelten, sonst hätten die Brüche auf der linken Seite der Beziehung (1) keinen Sinn. Formen wir die linke Seite der Ungleichung (1) um, so erhalten wir

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} \geq \sqrt{2}. \quad (1')$$

Wenn die Forderung (2) erfüllt ist, ist der Nenner auf der linken Seite (1') eine positive Zahl. Weil auf der rechten Seite (1') eine positive Zahl steht, muß der Zähler des Bruchs auf der linken Seite (1') ebenfalls positiv sein, d. h., es muß

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt{1+x} > \sqrt{1-x}$$

gelten. Weil beide Zahlen in der letzten Ungleichung positiv sind, muß für ihre Quadrate gelten $1+x > 1-x$, d. h. $x > 0$. Wenn wir die Forderung (2) damit verbinden, muß x der Bedingung

$$0 < x < 1 \quad (3)$$

genügen. Multiplizieren wir die beiden Seiten der Ungleichung (1') mit der Zahl $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} > 0$, so erhalten wir

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq \sqrt{2} \sqrt{1-x^2}. \quad (4)$$

Ist die Forderung (3) erfüllt, so sind beide Seiten dieser Ungleichung positive Zahlen. Deshalb erhalten wir nach Quadrieren der beiden Seiten der Beziehung (4) nacheinander:

$$\begin{aligned} 1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2} &\geq 2(1-x^2), \\ x^2 &\geq \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Die beiden Seiten dieser Ungleichung sind wegen (3) positive Zahlen. Durch Quadrieren erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} x^4 &\geq 1-x^2, \\ x^4+x^2-1 &\geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Das Trinom $y^2 + y - 1$ kann man als Produkt

$$\left[y + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right] \cdot \left[y - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \right]$$

darstellen. Die Ungleichung (5) kann man also in der Form

$$\left[x^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \right] \left[x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \right] \geq 0$$

schreiben. Der erste Faktor der linken Seite ist positiv. Deshalb muß der zweite Faktor nichtnegativ sein, d. h., es muß

$$x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \geq 0 \quad (6)$$

gelten. Wegen $\sqrt{5} - 1 > 0$ ist die Zahl

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} \quad (7')$$

positiv. Die Ungleichung (6) kann man in der Form

$$(x + a)(x - a) \geq 0 \quad (7)$$

schreiben. Unter Berücksichtigung der Forderung (3) ist der erste Faktor auf der linken Seite der Beziehung (7) positiv. Deshalb muß $x - a \geq 0$, d. h. $x \geq a$ sein. Wenn wir damit die Forderung (3) verbinden, erhalten wir, daß

$$a \leq x < 1 \quad (8)$$

gelten muß, wobei die Zahl a durch die Beziehung (7') gegeben ist.

Daß tatsächlich $a < 1$ ist, erkennt man so: Es gilt

$$a^2 - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 3) < 0,$$

d. h., es ist $a^2 < 1$ und also $a < 1$. Das Intervall (8) existiert also.

Die Zahl x aus der Beziehung (8) erfüllt die Forderungen (2) und (3). Bei unseren Umformungen haben wir überall auf Äquivalenz geachtet. Deshalb sind alle Zahlen x aus dem Intervall (8) Lösungen der Ungleichung (1), und es existieren keine weiteren. (Vgl. Abb. 2.37.)

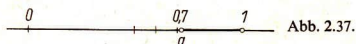


Abb. 2.37.

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 10

21. Angenommen, x ist Lösung der Ungleichung (1). Dann ist

$$x \neq 0. \quad (2)$$

Damit die Wurzel $\sqrt{1 - 2x^2}$ einen Sinn hat, muß ferner $1 - 2x^2 \geq 0$, d. h.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \right) \quad (3)$$

sein, und umgekehrt ist für diese x die Wurzel tatsächlich erklärt.

Es gelten die folgenden äquivalenten Umformungen der Ungleichung (1):

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} - 1 &\leq 0, \\ \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} &\leq 0, \\ \frac{\sqrt{1 - 2x^2} + x - 1}{x} &\geq 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten: **[1]:** $x > 0$ und **[2]:** $x < 0$.

Fall **[1]:** Angenommen, es ist [siehe (3)]

$$0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.\tag{5}$$

Aus (4) folgt, daß dann

$$\sqrt{1 - 2x^2} \geq 1 - x$$

ist.

Wegen $1 - x \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ ergibt sich daraus nacheinander:

$$\begin{aligned}1 - 2x^2 &\geq 1 - 2x + x^2, \\ 0 &\geq x(3x - 2), \\ 0 &\geq 3x - 2, \\ \frac{2}{3} &\geq x.\end{aligned}\tag{6}$$

Wegen $\frac{1}{2}\sqrt{2} > 0,7 > \frac{2}{3}$ folgt aus (5) und (6), daß x der Bedingung

$$0 < x \leq \frac{2}{3}\tag{7}$$

genügen muß.

In diesem Falle tritt in (1) Gleichheit für $x = \frac{2}{3}$ ein.

Fall **[2]:** Angenommen, es ist [siehe (3)]

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0.\tag{8}$$

Dann folgt aus (4)

$$\sqrt{1 - 2x^2} \leq 1 - x,$$

wobei $1 - x > 0$ ist. Daraus erhalten wir nacheinander:

$$1 - 2x^2 \leq 1 - 2x + x^2,$$

$$0 \leq x(3x - 2),$$

$$0 \geq 3x - 2,$$

$$\frac{2}{3} \geq x.$$

Das ist für jedes x aus (8) erfüllt. Im Falle [2] kann in (1) keine Gleichheit eintreten. Die der Beziehung (7) oder (8) genügenden Zahlen x sind tatsächlich Lösung der gegebenen Ungleichung.

Ergebnis (Abb. 2.38.): Alle Lösungen der Ungleichung (1) werden von den Zahlen x aus den Intervallen

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0, \quad 0 < x \leq \frac{2}{3}$$

gebildet. Gleichheit tritt in (1) genau dann ein, wenn $x = \frac{2}{3}$ ist.

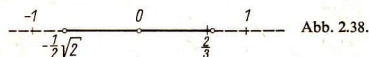


Abb. 2.38.

22. Die Konstruktion des Achtecks ist aus der Abbildung 2.1. (im Aufgabenteil) zu ersehen. Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung 2.1. setzen wir $\overline{LT} = x$, $\overline{LS} = y$, $\overline{KT} = t$. Der Flächeninhalt p des Rechtecks $JKNO$ ist $p = \overline{JN} \cdot \overline{JD}$ oder

$$p = \frac{1}{2} ab.$$

Der Flächeninhalt r des Rhombus $JLNP$ ist

$$r = ay,$$

so daß der Flächeninhalt s des Achtecks $s = 2p - r$ oder

$$s = a(b - y) \tag{1}$$

ist. Wir berechnen y . In dem Dreieck SKT gilt: $\angle T = 90^\circ$, $\overline{SK} = \frac{1}{2} a$. Nach dem Satz des PYTHAGORAS erhalten wir

$$t^2 = \overline{SK}^2 - \overline{ST}^2$$

oder

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{2}$$

Aus der Homothetie der Dreiecke LNS und LKT in bezug auf den Punkt L folgt

$$\frac{\overline{TL}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{SN}}$$

oder

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\frac{1}{2}a},$$

Nach dem Einsetzen aus (2) und nach elementarer Umformung erhalten wir

$$x = \frac{2yt}{a} = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

und

$$x = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (3)$$

Daneben gilt $\overline{TL} + \overline{LS} = \frac{1}{2}b$ oder

$$x + y = \frac{b}{2},$$

woraus sich zusammen mit (3)

$$y \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) = \frac{b}{2},$$

$$y \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{2},$$

$$y = \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})}$$

ergibt.

Nach Einsetzen in (1) erhalten wir die Beziehung

$$s = a \left(b - \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})} \right),$$

d. h.

$$s = \frac{ab(a + 2\sqrt{a^2 - b^2})}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})},$$

die man durch Multiplikation des Zählers und des Nenners mit $a - \sqrt{a^2 - b^2}$ in die Form

$$s = \frac{a(2b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2})}{2b}$$

überführen kann.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

23. Die gegebene Ungleichung ist äquivalent mit der Ungleichung

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 \geq 0;$$

ihre linke Seite bezeichnen wir mit L . Es gilt:

$$\begin{aligned} L &= (a + b + c) \cdot \frac{bc + ca + ab}{abc} - 9 \\ &= \frac{a^2c + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 + 3abc - 9abc}{abc} \\ &= \frac{a^2c + ac^2 + b^2a + ba^2 + c^2b + cb^2 - 6abc}{abc} \\ &= \frac{a^2c - 2abc + b^2c + b^2a - 2abc + ac^2 + c^2b - 2abc + ba^2}{abc} \\ &= \frac{c(a^2 - 2ab + b^2) + a(b^2 - 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ac + a^2)}{abc} \\ L &= \frac{c(a - b)^2 + a(b - c)^2 + b(c - a)^2}{abc}, \end{aligned}$$

also

$$L = \frac{a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2}{abc}. \quad (2)$$

Sind a, b, c positive Zahlen, so ist der Nenner abc des Bruchs ebenfalls positiv. Der Zähler des Bruchs ist die Summe dreier nichtnegativer Zahlen, $a(b - c)^2$ ist z. B. das Produkt der Zahl $a > 0$ und der Zahl $(b - c)^2 \geq 0$. Deshalb ist der Zähler und folglich auch der Bruch (2) nichtnegativ. Damit ist die Gültigkeit der Beziehung (1) bewiesen.

Gleichheit tritt in der Beziehung (1) genau dann ein, wenn jede der drei nichtnegativen Summanden im Zähler des Bruchs (2) gleich null ist, d. h., wenn gilt

$$a(b - c)^2 = 0, \quad b(c - a)^2 = 0, \quad c(a - b)^2 = 0.$$

Wegen $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ ist das nur für

$$b - c = 0, \quad c - a = 0, \quad a - b = 0,$$

d. h.

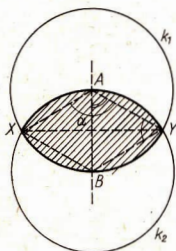
$$a = b = c$$

möglich. Wenn das Tripel die Gestalt (a, a, a) hat, wobei a eine beliebige positive Zahl ist, so steht in der Beziehung (1) tatsächlich das Gleichheitszeichen.

24. (Siehe Abb. 2.39.). Wir bezeichnen mit X , Y die Schnittpunkte der Kreislinien $(A, 1)$ und $(B, 1)$, so daß ABX ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 ist.

Sein Flächeninhalt ist

$$t = \frac{1}{4}\sqrt{3}. \quad (1)$$



Deshalb ist $\alpha = \angle XAY = 120^\circ = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ$. Der

Flächeninhalt p des Segments mit der Bogensehne $\overline{XY}$ und dem Bogen XBY ist (der Flächeninhalt q jedes der beiden Kreise ist $q = \pi$)

$$p = \frac{1}{3}\pi - t,$$

Abb. 2.39.

und die Dreiecke ABX und AXY haben gleiche Flächeninhalte. Nach Einsetzen aus der Beziehung (1) erhalten wir

$$p = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt P des gemeinsamen Teils der beiden Kreise ist $2p$, oder

$$P = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Das Verhältnis $\frac{P}{q}$, multipliziert mit der Zahl 100, gibt die gesuchte Anzahl x der Prozente an, d. h., es gilt

$$x = 100 \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) : \pi,$$

oder

$$x = 100 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right).$$

Dabei ist

$$\frac{2}{3} = 0,\bar{6}; \quad 1,732 < \sqrt{3} < 1,733; \quad 3,141 < \pi < 3,142.$$

Die Zahl $y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ sollen wir auf zwei Zehntel genau bestimmen. Es gilt

$$a = 0,666 - \frac{1,733}{2 \cdot 3,141} < y < 0,667 - \frac{1,732}{2 \cdot 3,142} = b.$$

Wir errechnen näherungsweise die Werte der beiden Brüche aus den vorhergehenden Ausdrücken:

$$1,733 : 6,282 < 0,276$$

$$1732 : 6284 > 0,275$$

Es gilt also:

$$0,666 - 0,276 < a, \quad b < 0,667 - 0,275$$

oder

$$0,390 < a, \quad b < 0,392.$$

Es ist also

$$0,390 < a < y < b < 0,392$$

oder

$$0,390 < y < 0,392$$

und also

$$39,0 < x < 39,2.$$

Antwort: Der Flächeninhalt P beträgt etwa 39% des Flächeninhalts eines Kreises mit dem Radius $r = 1$.

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 9

25. Nehmen wir an, daß die Aufgabe eine Lösung hat und daß die natürlichen Zahlen x , y und z der Reihe nach die Anzahl der Flaschen 14%iger, 11%iger bzw. 9%iger Lösung angeben, die wir zur Mischung verwenden. Die Flaschen enthalten je 1 kg, also insgesamt $x + y + z$ kg Lösung. Diese Summe beträgt entsprechend der Forderung der Aufgabe 30 kg. Es gilt also

$$x + y + z = 30.$$

(1'')

Die Flaschen mit der ersten Lösung enthalten $\frac{14}{100}x$ kg Essigsäure,

die Flaschen mit der zweiten Lösung enthalten $\frac{11}{100}y$ kg Essigsäure,

die Flaschen mit der dritten Lösung enthalten $\frac{9}{100}z$ kg Essigsäure.

Die entstandene Mischung enthält $\frac{12}{100} \cdot 30$ kg Essigsäure. Es muß gelten

$$\frac{14}{100}x + \frac{11}{100}y + \frac{9}{100}z = \frac{12}{100} \cdot 30 \quad (2'')$$

oder nach Multiplizieren der beiden Seiten dieser Gleichung mit 100

$$14x + 11y + 9z = 360.$$

Wir erhalten die zwei Gleichungen

$$x + y + z = 30, \quad (1)$$

$$14x + 11y + 9z = 360, \quad (2)$$

welche die natürlichen Zahlen x , y und z erfüllen müssen. Nun ist es unsere Aufgabe, alle derartigen Tripel x , y , z natürlicher Zahlen zu finden, von denen jede kleiner als 30 sein muß. Jede von ihnen muß sogar kleiner als 29 sein.

Wir eliminieren aus den Gleichungen (1) und (2) die Zahl z [die beiden Seiten der Gleichung (1) multiplizieren wir mit der Zahl -9 und addieren sie zu den entsprechenden Seiten der Gleichung (2)]. Wir erhalten:

$$5x + 2y = 90,$$

d. h.

$$y = 45 - \frac{5}{2}x. \quad (3)$$

Daraus folgt, daß x eine gerade Zahl sein muß. Wir setzen deshalb

$$x = 2n,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Aus (3) und (1) erhalten wir nach Einsetzen von $x = 2n$ insgesamt

$$x = 2n, \quad (1')$$

$$y = 5(9 - n), \quad (2')$$

$$z = 3(n - 5). \quad (3')$$

Aus (2') sehen wir, daß $9 - n$ eine natürliche Zahl sein muß, d. h., $9 - n > 0$ (sonst wäre y keine positive Zahl) und ferner $9 - n < 6$ ist (sonst wäre y größer als 29). Aus den beiden Ungleichungen folgt

$$3 < n < 9. \quad (4)$$

Aus (3') sehen wir, daß $n - 5 > 0$ und $n - 5 < 10$ sein muß (sonst wäre z größer als 29). Aus diesen beiden Ungleichungen erhalten wir

$$5 < n < 15. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt, daß n der Bedingung

$$5 < n < 9$$

genügen muß.

In Frage kommen also nur die Zahlen 6, 7 und 8. Setzen wir für n in (1'), (2') und (3') der Reihe nach die Zahlen 6, 7, 8 ein, so erhalten wir die folgende Tabelle:

n	6	7	8
x	12	14	16
y	15	10	5
z	3	6	9

Jedes Tripel der Zahlen x , y und z aus dieser Tabelle erfüllt tatsächlich die Gleichungen (1) und (2), wovon wir uns durch Einsetzen überzeugen können. Deshalb erfüllt es auch die Ausgangsgleichungen (1'') und (2''), denn (1'') und (1) sind dieselben Gleichungen, und (2'') entsteht aus (2) durch Multiplikation beider Seiten mit der Zahl $\frac{1}{100}$.

Antwort: Die geforderte Mischung erhalten wir, wenn wir der Reihe nach

12, 15, 3 Flaschen

oder

14, 10, 6 Flaschen

oder

16, 5, 9 Flaschen

von den einzelnen Flaschenarten nehmen.

26. Zuerst beweisen wir die beiden Hilfssätze U und V. Der Satz U lautet:

Angenommen, in einer Ebene ist die Strecke $\overline{MN}$ mit dem Mittelpunkt S und der Mittelsenkrechten p gegeben. Der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, die vom Punkt M einen kleineren Abstand haben als vom Punkt N , ist das „Innere“ der Halbebene pM .

Beweis (Abb. 2.40.): Diese Behauptung lässt sich leicht beweisen für die Punkte der Geraden MN (alle Punkte mit der geforderten Eigenschaft auf dieser Geraden liegen auf dem Strahl SM ; vgl. die Punkte X_1 , X_2 und X_3 in der Abbildung 2.40.)

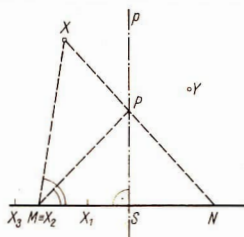


Abb. 2.40.

Angenommen, es ist X ein Punkt in der Ebene pM , der nicht auf der Geraden MN liegt. Dann trennt die Gerade p die Punkte N und X . Innerhalb der Strecke NX liegt ihr Schnittpunkt P mit der Geraden p . Die Strecken $\overline{PM}$ und $\overline{PN}$ sind symmetrisch in bezug auf p , und demnach ist also

$$\overline{MP} = \overline{NP}. \quad (2)$$

Für die Seiten des Dreiecks gilt:

$$\overline{MX} < \overline{MP} + \overline{PX}$$

(die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte). Nach Einsetzen aus (2) erhalten wir:

$$\overline{MX} < \overline{NP} + \overline{PX}$$

oder

$$\overline{MX} < \overline{NX}. \quad (3)$$

Ist Y ein Punkt innerhalb der Halbebene pN , so lässt sich die Beziehung

$$\overline{MY} > \overline{NY} \quad (4)$$

beweisen.

Für jeden Punkt P der Mittelsenkrechten p gilt

$$\overline{MP} = \overline{NP}. \quad (5)$$

Mit den Beziehungen (3), (4), (5) ist der Satz U bewiesen, denn wir haben damit alle Punkte der Ebene erfaßt.

Als nächstes beweisen wir den Satz V (vgl. Abb. 2.42. bis 2.44.):

Angenommen, $ABCD$ ist ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{AB} \geq \overline{CD}$. P_1 und P_3 seien die Mittelpunkte und p_1 und p_3 die Mittelsenkrechten der Grundseiten. Dann gilt:

a) $p_1 \parallel p_3$

b) Sind α , β die Winkel an den Eckpunkten A , B des Trapezes, so gilt:

[1] Wenn $\alpha = \beta$, so ist $p_1 \equiv p_3$;

[2] wenn $\alpha < \beta$, so liegt der Punkt P_3 und mit ihm die Gerade p_3 in der Halbebene p_1B ;

[3] wenn $\alpha > \beta$, so liegt der Punkt P_3 und mit ihm die Gerade p_3 in der Halbebene p_1A .

Beweis: Die Behauptung [1] ergibt sich aus der Symmetrie des Trapezes $ABCD$ in bezug auf p_1 .

Beweis für die Behauptung [2] (siehe Abb. 2.41.). In dem Dreieck ABE gilt

$$\overline{BE} < \overline{AE}, \quad (6)$$

denn es ist $\alpha < \beta$ (dem größeren Winkel des Dreiecks ABE liegt die größere Seite gegenüber). Aus der Beziehung (6) ergibt sich nach dem Satz U, daß der Punkt E in die Halbebene p_1B fällt. Deshalb liegt der Punkt Q der Geraden p_1 innerhalb der

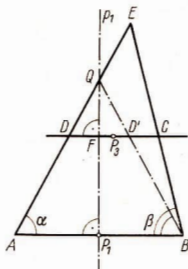


Abb. 2.41.

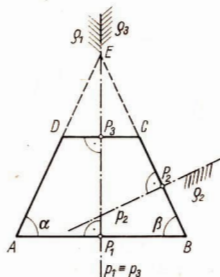


Abb. 2.42.

Strecke $\overline{AE}$. Ist D ein Punkt der Strecke $\overline{QE}$, so ist die Behauptung [2] selbstverständlich richtig, denn die ganze Strecke $\overline{DC}$ liegt in der Halbebene p_1B . Angenommen, D liegt innerhalb der Strecke $\overline{AQ}$. Wir bezeichnen mit $D' \neq D$ sein Spiegelbild zur Halbierenden p_1 und mit F den Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$ (dieser liegt auf p_1). Der Strahl BQ liegt im Winkel β , und daher liegt D' innerhalb der Strecke $\overline{FC}$. Es ist also

$$\overline{DD'} < \overline{DC}$$

und

$$\frac{1}{2} \overline{DD'} < \frac{1}{2} \overline{DC},$$

d. h.

$$\overline{DF} < \overline{DP_3}.$$

Daraus folgt, daß P_3 innerhalb der Strecke $\overline{FC}$ liegt und damit in der Halbebene p_1B . Mit diesem Punkt liegt auch die Gerade $p_3 \parallel p_1$ in dieser Halbebene. Damit ist die Behauptung [2] bewiesen.

Der Beweis der Behauptung [3] wird der Beweisführung für die Behauptung [2] nachgebildet.

Bemerkung: Den Beweis der Behauptung [2] kann man auch unter Ausnutzung der Tatsache führen, daß der Punkt P_3 innerhalb der Strecke $\overline{P_1E}$ liegt, die mit Ausnahme des Punktes P_1 ganz innerhalb der Halbebene p_1B liegt. Das setzt voraus, daß man weiß, daß die Dreiecke AP_1E und DP_3E sowie BP_1E und CP_3E ähnlich sind.

Lösung der gegebenen Aufgabe (vgl. die Abb. 2.42., 2.43., 2.44.): (Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß es sich in den Beziehungen (1), die wir zugrunde legen, um die Entfernung der Punkte handelt, so daß wir beispielsweise auch die Möglichkeit zulassen $\overline{AX} = 0$, d. h. $A = X$ usw.) Wir bezeichnen mit p_1 , p_2 und p_3 (in dieser Reihenfolge) die Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$ des Trapezes $ABCD$.

Der Punkt X , für den gemäß (1) $\overline{AX} < \overline{BX}$ gilt, liegt nach dem Satz U in der Halbebene p_1A ;

der Punkt X , für den $\overline{BX} < \overline{CX}$ gilt, liegt in der Halbebene p_2B ;

der Punkt X , für den $\overline{CX} < \overline{DX}$ gilt, liegt in der Halbebene p_3C .

Es handelt sich darum, ob die Halbebenen p_1A , p_2B und p_3C gemeinsame Punkte haben. Die Entscheidung darüber fällen wir nach Satz V.

Fall [1]: Angenommen, es ist $\alpha = \beta$ (Abb. 2.42.). Dann ist $p_1 \equiv p_3$, und p_1A und p_3C sind entgegengesetzte Halbebenen, die keinen (inneren) Punkt gemeinsam haben. Einen Punkt X , für den (1) gilt, gibt es also nicht.

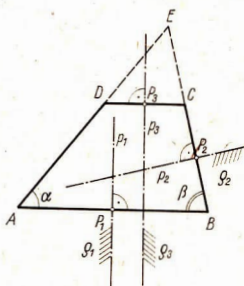


Abb. 2.43.

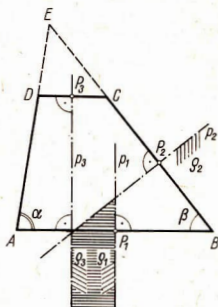


Abb. 2.44.

Fall [2]: Angenommen, es ist $\alpha < \beta$ (Abb. 2.43.). Die Gerade p_3 und mit ihr die ganze Halbebene p_3C liegen innerhalb der Halbebene p_1B , so daß die Halbebenen p_1A und p_3C keinen gemeinsamen Punkt haben. Deshalb gibt es einen Punkt X mit den Eigenschaften (1) nicht.

Fall [3]: Angenommen, es ist $\alpha > \beta$ (siehe Abb. 2.44.). Die Gerade p_3 liegt innerhalb der Halbebene p_1A , und die Halbebenen p_1A und p_3C haben jene Punkte gemeinsam, die innerhalb des Streifens zwischen den Parallelen p_1 und p_3 liegen. Die Geraden BA und BC sind divergierende Geraden. Deshalb divergieren auch die Geraden $p_1 \perp \overline{BA}$ und $p_2 \perp \overline{BC}$ und mithin auch die Geraden p_2 und p_3 . Das Innere der Halbebene p_2B hat mit dem Inneren des Streifens zwischen den Parallelen p_1 und p_3 Punkte gemeinsam, die in der Abbildung 2.44. schraffiert gekennzeichnet sind. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Ergebnis: Nur im Falle $\alpha > \beta$ existieren Punkte mit der geforderten Eigenschaft.

27. Den gegebenen Bruch Z formen wir in folgender Weise um:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18} = \frac{3(4x^2 - 12x + 9)}{2(4x^2 - 9)} \\ &= \frac{3(2x - 3)^2}{2(2x + 3)(2x - 3)} = \frac{3(2x - 3)}{2(2x + 3)} = \frac{3(2x + 3 - 6)}{2(2x + 3)} \\ Z &= \frac{3(2x + 3)}{2(2x + 3)} = \frac{3 \cdot 6}{2(2x + 3)} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2x + 3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{2}}{x + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Damit $Z > \frac{3}{2}$ gilt, muß

$$-\frac{\frac{9}{2}}{x + \frac{3}{2}} \quad (1)$$

positiv sein.

Das bedeutet, daß $x + \frac{3}{2}$ negativ, d. h. $x < -\frac{3}{2}$ sein muß. Für $x < -\frac{3}{2}$ ist jeder der Ausdrücke $2x + 3$ und $2x - 3$ von null verschieden (der erste Ausdruck ist gleich null für $x = -\frac{3}{2}$, der zweite für $x = \frac{3}{2}$) und der Bruch Z hat einen Sinn. Für diese x ist der Bruch (1) positiv und $Z > \frac{3}{2}$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Eine andere Lösung: Nach der vorhergehenden Lösung ist

$$Z = \frac{3(2x - 3)}{2(2x + 3)},$$

d. h.

$$Z = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x - 3}{2x + 3}. \quad (2)$$

Soll $Z > \frac{3}{2}$ sein, so muß

$$Z = \frac{2x - 3}{2x + 3} \quad (3)$$

größer als 1 sein. Umgekehrt, wenn $z > 1$ ist, wird auch $Z > \frac{3}{2}$ sein. Wir ermitteln deshalb alle Zahlen x , für die $z > 1$ ausfällt. Da dann Zähler und Nenner des Bruchs (3) entweder beide gleichzeitig positiv oder beide gleichzeitig negativ sein müssen, gliedern wir die Aufgabe in zwei Teile:

Teil [1]: Angenommen, $2x - 3$ und $2x + 3$ sind positiv. Wenn $z > 1$ sein soll, muß $2x - 3 > 2x + 3$ sein. Das ist aber nicht erfüllbar, denn die Zahl $2x - 3$ ist um 6 kleiner als $2x + 3$.

Teil [2]: Angenommen, $2x - 3$ und $2x + 3$ sind negativ. Die Zahl $2x + 3 = 3 + 2x$ ist negativ für alle Zahlen $2x < -3$, d. h., für $x < -\frac{3}{2}$ (das können wir leicht erkennen, wenn wir uns auf der Zahlenachse die Zahl 3 veranschaulichen). Für diese Zahlen ist nicht nur der Ausdruck $2x + 3$ negativ, sondern auch der Ausdruck $2x - 3 = 2x + (-3)$, der dann die Summe der negativen Zahlen $2x$ und -3 ist. Es handelt sich noch darum, festzustellen, ob für

$$x < -\frac{3}{2}$$

der Bruch z größer als 1 ist. Wir erweitern den Bruch (3) mit -1 und erhalten

$$z = \frac{3 - 2x}{-3 - 2x}.$$

Dann sind der Zähler und der Nenner positive Zahlen. Damit $z > 1$ ist, muß der Zähler größer als der Nenner sein, und das ist tatsächlich für $x < -\frac{3}{2}$ der Fall, denn die Differenz

$$3 - 2x - (-3 - 2x)$$

ist gleich 6.

Ergebnis: Der Bruch Z ist größer als $\frac{3}{2}$ für alle Zahlen $x < -\frac{3}{2}$ und nur für diese.

28. Wir wenden folgenden Satz P (siehe die Bezeichnungen in der Abbildung 2.45.) an:

In dem gleichschenkligen Dreieck BYX mit dem Scheitelpunkt Y ziehen wir den Strahl $BF \uparrow \uparrow XY$. Dann ist $\eta' = \eta$ und $\gamma' = \gamma$. Umgekehrt gilt, wenn wir in der

Halbebene MBY , wobei der Punkt M auf der Verlängerung der Strecke $\overline{XB}$ über den Punkt B hinaus liegt, den Winkel $\gamma' \equiv \angle MBF = \gamma$ konstruieren, so ist $\overline{XY} \parallel \overline{BF}$.

(Der Beweis ist leicht zu führen.)

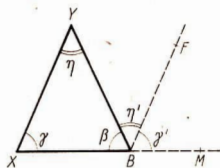


Abb. 2.45.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) Es ist $0 < \omega < 180^\circ$; b) $\omega = 180^\circ$ (die Lösung deuten wir nur an). Angenommen, es liegt der Fall a) vor (Abb. 2.46. bis 2.48.): Den zweiten Zentriwinkel ASB bezeichnen wir mit ω' ; es gilt

$$\omega + \omega' = 360^\circ, \quad \omega < \omega'.$$

Die zugehörigen Peripherie- und den Sehnen tangentialen Winkel im Eckpunkt B bezeichnen wir mit φ, φ' bzw. $\varepsilon, \varepsilon'$; es gilt $\varphi = \varepsilon = \frac{1}{2} \omega$, $\varphi' = \varepsilon' = \frac{1}{2} \omega'$, $\varepsilon < 90^\circ < \varepsilon'$.

Die Tangenten t und t' in den Punkten B bzw. A der Kreislinie k haben den Schnittpunkt C , wobei $\varepsilon = \angle CBA$ ist; BC und MB sind entgegengesetzte Strahlen. Ferner sei $DAE \uparrow \uparrow MBC$.

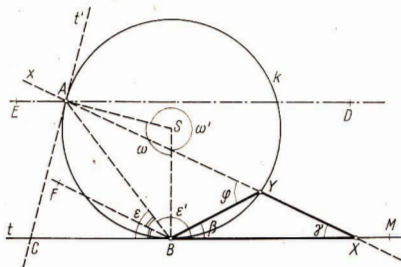


Abb. 2.46.

Fall [I] (siehe Abb. 2.46.): In dem gleichschenkligen Dreieck YBX ist φ ein Außenwinkel, denn Y liegt innerhalb der Strecke $\overline{AX}$. Es ist also

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Die Winkelhalbierende $\overline{BF}$ des Winkels ε ist also nach dem Satz P parallel zu $x \equiv \overline{AYX}$. Daraus ergibt sich die Konstruktion (siehe Abb. 2.46.):

Durch den Punkt A ziehen wir $x \parallel \overline{BF}$, wobei $\overline{BF}$ die Winkelhalbierende des Winkels ε ist. Wir bezeichnen der Reihe nach mit X und $Y \neq A$ die Schnittpunkte der Geraden x mit t bzw. k ; dann entspricht X den Forderungen der Aufgabe.

Beweis und Diskussion: Es ist $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD$ (Wechselwinkel zwischen Parallelen). Weil $\overline{BF}$ die Halbierende des ersten dieser Winkel ist, liegt auf der Geraden x die Winkelhalbierende des zweiten Winkels BAD . Daraus folgt, daß x und t auseinanderlaufende Geraden sind und daß der Punkt X existiert, so daß auch der Punkt $Y \neq A$ existiert. Entsprechend der Konstruktion ist $\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon$, $\beta = \varphi - \gamma$ (nach einem Satz über die Außenwinkel eines Dreiecks), und demnach ist $\frac{1}{2}\varepsilon = \gamma$.

Ergebnis [1]: Auf dem Strahl BM liegt genau ein Punkt, der den geforderten Bedingungen genügt.

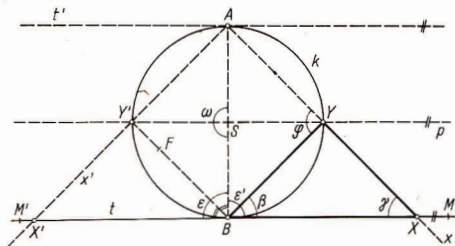


Abb. 2.47.

Bemerkung: Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir auch im Fall $\omega = 180^\circ$ (siehe Abb. 2.47.). Aus der Symmetrie der Kreislinie k und der Geraden t in bezug auf die Achse SB folgt, daß die Aufgabe in diesem Falle zwei Lösungen hat. Der Punkt Y liegt auf dem Durchmesser $p \parallel t$, durch den Punkt S , und der Punkt Y' liegt auf der Kreislinie k dem Punkt Y diametral gegenüber.

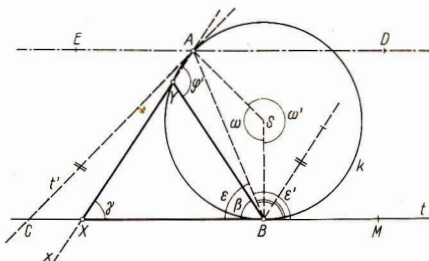


Abb. 2.48.

Fall [2] (siehe die Abb. 2.48., 2.49.): Wir haben die Möglichkeit ausgeschieden, daß $X \equiv C$ ist. (In diesem Fall hat nämlich die Gerade AX mit k keinen weiteren Punkt gemeinsam, und es ist notwendigerweise $\beta = \gamma = \sphericalangle BAC = 60^\circ$, $\omega = 120^\circ$.)

Es gibt zwei mögliche Fälle:

a) Vergleichen Sie mit der Abbildung 2.49., in der X ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$ ist und Y ein innerer Punkt des kleineren Bogens $\widehat{AB}$ der Kreislinie k . In dem gesuchten gleichschenkligen Dreieck YBX gilt:

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2} \varphi' = \frac{1}{2} \varepsilon'. \quad (1)$$

Wenn $\overline{BF'}$ die Winkelhalbierende des Winkels ε' ist, dann ist $\sphericalangle MBF' = \frac{1}{2} \varepsilon'$, und nach Satz P ist

$$XA \parallel BF'. \quad (2)$$

b) Vergleichen Sie mit der Abbildung 2.49., in der X auf der Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ über den Punkt C hinaus liegt und der Punkt Y sodann notwendigerweise auf dem größeren Bogen $\widehat{AB}$ der Kreislinie k liegt. Wir bezeichnen mit φ' den Nebenwinkel zum Peripheriewinkel $\varphi \equiv \sphericalangle AYB$. Dann ist $\varphi' = \varepsilon'$, wobei $\varepsilon' \equiv \sphericalangle MBA$ ist.

Es gelten ebenso wie im vorhergehenden Falle die Beziehungen (1), und für die Winkelhalbierende $\overline{BF'}$ des Winkels ε' gilt

$$XA \parallel BF'. \quad (3)$$

Aus den Beziehungen (2) und (3) folgt dieselbe Konstruktion: Durch den Punkt A ziehen wir die Gerade $x \parallel BF'$, wobei $\overline{BF'}$ die Winkelhalbierende des Sehnentangenten-

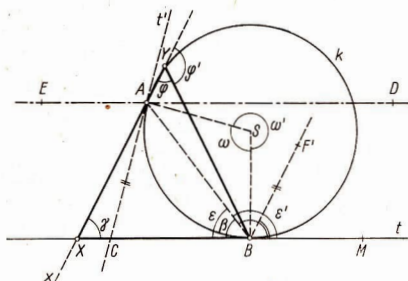


Abb. 2.49.

winkels ε' ist. Hat die Gerade x mit der Geraden t den Schnittpunkt $X \neq C$ und mit der Kreislinie k den Punkt $Y \neq A$ gemeinsam, dann entspricht der Punkt X den Forderungen der Aufgabe.

Beweis und Diskussion (Abb. 2.48., 2.49.): Es ist $\sphericalangle BAE = \sphericalangle MBA \equiv \varepsilon'$ (Wechselwinkel zwischen den Parallelen $BM \uparrow \downarrow AE$). Ihre Winkelhalbierenden liegen auf den Geraden x bzw. $\overline{BF'}$. Daraus folgt, daß der Punkt X auf den Strahl $\overline{BC}$ fällt. Es ist $\sphericalangle BAC = \varepsilon$ und $\sphericalangle BAX = \frac{1}{2} \varepsilon'$. Es gibt drei Möglichkeiten:

α) Es ist $\varepsilon > \frac{1}{2} \varepsilon'$ oder $\omega > \frac{1}{2} \omega'$, $\omega > \frac{1}{2} (360^\circ - \omega)$ und $\omega > 120^\circ$. Dann liegt tatsächlich X zwischen den Punkten B , C und Y auf dem kleineren Bogen $\widehat{AB}$

(Abb. 2.48.). Es gilt $\beta = \varphi' - \gamma$ (Satz über die Außenwinkel beim Dreieck YBX), d. h.

$$\beta = \varepsilon' - \frac{1}{2} \varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon' = \gamma.$$

β) Es ist $\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon'$ und also $\omega = 120^\circ$. Dann ist $Y \equiv A$. Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

γ) Es ist $\varepsilon < \frac{1}{2} \varepsilon'$ oder $\omega < 120^\circ$ (siehe Abb. 2.49.). Dann liegt die Gerade x innerhalb des Winkels CAE und dem dazugehörigen Scheitelwinkel. Der Punkt X fällt auf die Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ über den Punkt C hinaus und der Punkt Y auf den größeren Bogen $\widehat{AB}$ der Kreislinie k .

Es ist $\beta = \varphi' - \gamma$ (siehe die Bezeichnungen in der Abb. 2.49.), d. h.

$$\beta = \varepsilon' - \frac{1}{2} \varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon' - \gamma.$$

Ergebnis: Auf jedem der entgegengesetzten Strahlen BC , BM liegt genau ein Punkt X , der die geforderten Eigenschaften aufweist. Im Fall $\omega = 120^\circ$ und nur in diesem ist genau eines der gleichschenkligen Dreiecke sogar gleichseitig.

29. Die Aufgabe gliedern wir in zwei Teile: [1] Wir suchen diejenigen Quadrupel, bei denen ein Zahlenpaar die Summe null hat. [2] Keine zwei der Zahlen des Quadrupels haben die Summe null.

Fall [1]: Angenommen, die Summe zweier Zahlen einer Quadrupelreihe, beispielsweise c , d , ist null. Dann können weder c noch d null sein; sonst wären wegen $c + d = 0$ beide null. Das Paar $c = d = 0$ ist ausgeschlossen, denn die Zahlen der Quadrupel sollen paarweise voneinander verschieden sein.

Tabelle 1

I	II	III	IV
$5 > a > d$	b	c	$5 > d > 0$
2	-2	-1	1
3	-3	-1	1
4	-4	-1	1
3	-3	-2	2
4	-4	-2	2
4	-4	-3	3

Wir stellen nun die Tabelle (Nummer 1) der Zahlen a , b , c , d so zusammen, daß $d > 0$ ist (d. h., wir suchen die Quadrupel, in denen $d > 0$ ist) und daß in der Tabelle d

sukzessive anwächst. Wir treffen weiter die Übereinkunft, daß in der Tabelle $a > d$ ist.

Unter den gegebenen Voraussetzungen erhalten wir genau 6 Quadrupel (a, b, c, d) . Nun stellen wir folgende Überlegungen an: Die Eigenschaften der Zahl d , die wir gefordert haben, kann jede der Zahlen a, b, c, d haben; das ergibt also

4 Möglichkeiten. (1)

Von den drei übrigen Zahlen a, b, c, d kann jede die Eigenschaften, die von c gefordert werden (d. h., $c + d = 0$) haben. Das sind

3 Möglichkeiten, (2)

wobei man jede beliebige Möglichkeit (1) mit jeder beliebigen Möglichkeit (2) kombinieren kann; es ergeben sich so

$4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. (3)

Nun bleiben uns aus dem Quadrupel a, b, c, d zwei Zahlen übrig. Die Eigenschaft, welche die Zahl a hatte, kann jede von ihnen haben. Das sind

2 Möglichkeiten,

wovon man jede mit den 12 Möglichkeiten (3) kombinieren kann. Wir erhalten also

$12 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten

und damit insgesamt 24 Tabellen vom Typ Nr. 1. Das heißt

$6 \cdot 24$

verschiedene Quadrupel mit der gegebenen Eigenschaft.

Fall [2]: Angenommen, für die Zahlen des Quadrupels (a, b, c, d) gilt

$|a| > |b| > |c| > |d|$. (4)

Wir stellen die Tabelle (Nummer 2) so auf, daß wir die Zahl a wählen. Danach wählen wir die Zahl b so, daß (4) gilt, anschließend wählen wir die Zahl c wieder entsprechend (4), worauf wir die Zahl d durch die Beziehung $a + b + c + d = 0$ bestimmen. Dabei müssen noch die Zahlen a, b, c, d paarweise voneinander verschieden sein. Wir erhalten:

Tabelle 2

I	II	III	IV
a	b	c	d
4	-3	-2	1
-4	3	2	1
4	-3	-1	0
-4	3	1	0
3	-2	-1	0
-3	2	1	0

In der Tabelle gibt es also 6 Zahlenquadrupel. Die Eigenschaft, welche die Zahl a in der Tabelle 2 hat, kann wiederum jede beliebige von den Zahlen a, b, c, d haben. Daraus ergeben sich vier Möglichkeiten. Die Eigenschaft der Zahl b kann jede beliebige der drei übrigen Zahlen haben, das sind 3 Möglichkeiten; also $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. Es bleiben zwei Zahlen übrig, und eine davon wählen wir aus (als Zahl c in der Tabelle 2). Das sind zwei Möglichkeiten, also $12 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten. Wir bekommen also 24 Tabellen, die nach dem gleichen Verfahren zusammengestellt werden wie die Tabelle 2. Wir erhalten somit

$$6 \cdot 24 \text{ Quadrupel.} \quad (5)$$

Weil mit den angeführten Fällen [1], [2] alle Möglichkeiten erschöpft sind, erhalten wir [siehe (4), (5)] insgesamt

$$6 \cdot 24 + 6 \cdot 24 = (6 + 6) \cdot 24 = 288$$

voneinander verschiedene Quadrupel.

Antwort: Es gibt 288 voneinander verschiedene Quadrupel, welche die im Text der gegebenen Aufgabe geforderten Eigenschaften aufweisen.

30. In der Abbildung 2.50. bedeuten

$$\begin{aligned} \overline{SA} &= \overline{SB} = r, & \overline{XY} &= m, & \overline{AX} &= x \\ \overline{AY} &= x - m. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei sind r und m die gegebenen positiven Zahlen und $x > 0$ ist eine unbekannte Zahl, die wir berechnen.

Es gilt

$$\triangle ABY \sim \triangle AXB, \quad (2)$$

denn diese rechtwinkligen Dreiecke stimmen in ihren Winkeln überein.

Aus der Beziehung (2) folgt

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} \quad (2')$$

und unter Berücksichtigung von (1)

$$\frac{x - m}{2r} = \frac{2r}{x}.$$

ist. Deshalb gilt

$$\overline{AY_0} \cdot \overline{AX} = (\sqrt{D})^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

oder

$$\overline{AY_0} \cdot \overline{AX} = 4r^2.$$

Es ist also

$$\overline{AY_0} = \frac{4r^2}{\overline{AX}}. \quad (7)$$

Durch Vergleich von (6) und (7) erhalten wir $\overline{AY_0} = \overline{AY}$, so daß die Differenz der Längen der konstruierten Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{AY}$ tatsächlich m beträgt.

Diskussion: Die Aufgabe hat stets zwei Lösungen, denn nach der Konstruktion ist $\overline{AB} < \overline{AL} < \overline{AP}$, so daß der Abstand des Punktes A von der Geraden t kleiner ist als der Radius r' der Kreislinie k' . Also ist t eine Sekante der Kreislinie k' . Weil die Gerade $\overline{AX}$ nicht senkrecht auf der Geraden AB steht, ist sie nicht die Tangente an die Kreislinie k im Punkt A , d. h., sie ist eine Sekante (von den Geraden durch den Punkt A auf der Kreislinie k ist eine einzige Tangente; die übrigen sind Sekanten der Kreislinie).

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 9

31. Analyse (Abb. 2.51.): Wir bezeichnen mit S den Mittelpunkt des gesuchten Rhombus $ABCD$. Dann ist $\sphericalangle PSQ = 90^\circ$, und der Punkt S liegt auf der Mittelparallelen $s \parallel \overline{AB}$. Die Entfernung der Geraden s von m beträgt $\frac{1}{2}v$. Daraus ergibt

sich die *Konstruktion*: Wir konstruieren die Symmetrieachse $s \parallel m$ des Parallelenpaares m, n . Wir bezeichnen mit O den Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ und beschreiben die Kreislinie $k \equiv \left(0, \frac{1}{2}d\right)$ über der Strecke $\overline{PQ}$ als Durchmesser. Ferner bezeichnen wir mit S einen der Schnittpunkte (wenn ein solcher existiert) der Geraden s mit der Kreislinie k . Wir konstruieren die Geraden SP und SQ und bezeichnen mit A bzw. C die Schnittpunkte der Geraden SP (in dieser Reihenfolge) mit den Geraden m und n und ferner mit B bzw. D die Schnittpunkte der Geraden SQ (in dieser Reihenfolge) mit diesen Geraden m und n . Dann genügt das Viereck $ABCD$ den Forderungen der Aufgabe.

Beweis: Der Punkt S hat nach der Konstruktion der Geraden s von den Parallelen m und n den gleichen Abstand. In bezug auf Punkt S liegen die Geraden m und n und damit auch das Punktepaa A und C und das Punktepaa B und D symmetrisch. Der

32. Zuerst ermitteln wir diejenige natürliche Zahl, deren Ziffer bei der angeführten Schreibweise der Ziffern an tausendster Stelle stehen wird und zählen dazu der Reihe nach die geschriebenen Ziffern:

Wir schreiben die Zahlen:

Wir haben damit folgende Anzahl
von Ziffern geschrieben:

1 bis 9	9
10 bis 99	180
100 bis 199	300
200 bis 299	300

Dabei haben wir insgesamt 789 Ziffern geschrieben.

Wir haben noch 211 Ziffern zu schreiben. Wenn wir $\frac{210}{3} = 70$ weitere (dreiziffrige)

Zahlen, nämlich die Zahlen von 300 bis 369, schreiben, so benötigen wir 210 Ziffern. Es bleibt noch eine weitere Ziffer (die tausendste) zu schreiben, und das ist die Ziffer 3 der Zahl 370.

Nun rechnen wir aus, wie oft wir die Sieben schreiben, wenn wir die unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von 1 bis 369 niederschreiben.

In jedem Zehner von 1 bis 100 schreiben wir eine Sieben, die an der Stelle der Einer steht, d. h., insgesamt 10mal die Ziffer Sieben. Beim Schreiben der Zehner der Zahlen 70, 71 usw. bis 79 schreiben wir ebenfalls insgesamt 10mal die Ziffer Sieben. Beim Schreiben der Zahlen von 1 bis 100 schreiben wir also insgesamt 20mal die Ziffer Sieben. Das gleiche gilt beim Schreiben der Zahlen von 101 bis 200 und von 201 bis 300. Zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 300 benötigen wir 60mal die Ziffer Sieben. Beim Niederschreiben der Zahlen 301 bis 369 benötigen wir 7mal die Ziffer Sieben.

Antwort: Bei der in der Aufgabe dargestellten Ausführung hat die Stenotypistin 67mal die Ziffer 7 geschrieben.

33. (Abb. 2.52.): Bei der Lösung bedienen wir uns des bekannten Satzes V:

Im Falle $\angle PQY = 90^\circ$ (siehe Abb. 2.53.) gilt, wenn $\overline{QY} < \overline{QT}$ ist, $\overline{PY} < \overline{PT}$ und $\angle PYQ > \angle PTQ$ und umgekehrt.

Analyse: Angenommen, ABC ist ein Dreieck, welches die Forderungen der gegebenen Aufgabe erfüllt, dann bezeichnen wir mit o die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PQ}$. Die Gerade o ist Symmetrieachse einer Figur, die aus der Strecke $\overline{PQ}$ und aus den beiden Strahlen PM und QN besteht. Wir bezeichnen mit $B'A'C'$ das Spiegelbild des Dreiecks ABC an der Achse o . Die Punkte B', A', C' liegen auf den Strahlen QN, PM bzw. der Strecke $\overline{PQ}$. Das Dreieck erfüllt also auch die Forderungen der Aufgabe. Wir bezeichnen mit a bzw. b den Abstand des Punktes A bzw. B von der Geraden PQ .

Es haben also B' und A' von der Geraden PQ ebenfalls die Abstände a bzw. b . Deshalb können wir bei der gesamten weiteren Lösung voraussetzen, daß

$$a \leq b$$

ist; sonst würde es nämlich genügen, anstelle des Dreiecks ABC sein Spiegelbild $B'A'C'$ an der Achse o zu betrachten.

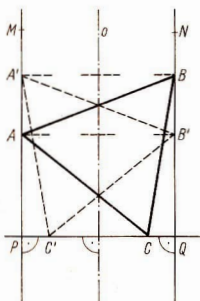


Abb. 2.52.

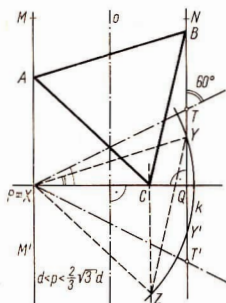


Abb. 2.53.

Wir verschieben das Dreieck ABC um a in Richtung MP (siehe Abb. 2.53.), wodurch wir das kongruente Dreieck XYZ (es ist $X \equiv P$) erhalten. Es gibt zwei Möglichkeiten: [1] Es ist $a = b$ und also $Y \equiv Q$, d. h., $d = p$. In diesem Falle ist offensichtlich ABC die einzige Lösung (siehe Abb. 2.54.), und es ist $AB \parallel PQ$, wobei $C = \overline{PQ} \cap o$ ist. [2] Es ist $a < b$, so daß das rechtwinklige Dreieck PYQ mit der Hypotenuse $\overline{PY} = p$ und der Kathete $\overline{PQ} = d$ existiert und

$$d < p \quad (1)$$

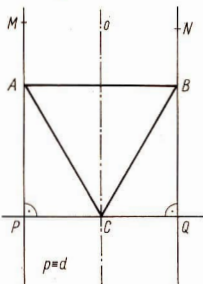


Abb. 2.54.

ist. (Es ist offensichtlich, daß die Aufgabe für $d > p$ keine Lösung hat.) Dabei liegt der Punkt C auf der Strecke $\overline{PQ}$ und demnach der Punkt Z in dem Streifen zwischen den Parallelen $\overline{PM}$ und $\overline{ON}$. Der Punkt Z liegt dann im Winkel $\angle PYQ$, daher muß $60^\circ = \angle PYZ \leq \angle PYQ$ sein. Es ist also $\angle YPQ \leq 30^\circ$, und deshalb verläuft der Strahl PZ innerhalb des rechten Winkels $\angle QPM'$, wobei PM' der zu PM entgegengesetzte Strahl ist. Wir konstruieren das gleichseitige Dreieck PTT' , in welchem die Strecke $\overline{PQ}$ die Höhe ist und der Punkt T

Ergebnis: Wenn $d = p$ ist, hat die Aufgabe eine einzige Lösung. Wenn die Beziehungen (2) gelten, gibt es zwei voneinander verschiedene Lösungen. Für $d > p$, d. h. für $p > \frac{2}{3}\sqrt{3d}$ gibt es keine Lösung.

34. Die Differenz zwischen den Brüchen ist gleich

$$r = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} - \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$$

$$r = \frac{(100^{100} + 1)(100^{89} + 1) - (100^{99} + 1)(100^{90} + 1)}{(100^{90} + 1)(100^{89} + 1)}.$$

Wenn der Zähler des letzten Bruchs eine positive Zahl ist, wird der erste der gegebenen Brüche größer sein. Wir bezeichnen diesen Zähler mit x . Es gilt:

$$x = 100^{189} + 100^{100} + 100^{89} + 1 - (100^{189} + 100^{99} + 100^{90} + 1)$$

$$= 100^{100} + 100^{89} - 100^{99} - 100^{90}$$

$$x = 100^{100} \left(1 + \frac{1}{100^{11}} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100^{10}} \right).$$

Die Zahl in der Klammer ist offensichtlich positiv, so daß x eine positive Zahl ist.

Antwort: Der erste der gegebenen Brüche ist größer als der zweite.

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 8

35. I. Wir bezeichnen den gegebenen Ausdruck mit V . Wir formen die Nenner in den Brüchen des Ausdrucks V der Reihe nach in folgender Weise um:

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(a-c) &= -(a-b)(c-a), \\ (b-a)(b-c) &= -(a-b)(b-c), \\ (c-a)(c-b) &= -(c-a)(b-c). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wir sehen nun, daß die Nenner unserer Brüche das Produkt je zweier der folgenden Ausdrücke

$$a-b, \quad b-c, \quad c-a \quad (1')$$

und des Faktors -1 sind. Der Ausdruck

$$n = (a-b)(b-c)(c-a) \quad (2)$$

ist offensichtlich gemeinschaftliches Vielfaches der Ausdrücke (1), denn es gilt z. B.

$$\frac{n}{(a-b)(a-c)} = -(b-c) \quad (3)$$

usw. Also ist der Ausdruck n tatsächlich gemeinschaftliches Vielfaches der Nenner.

Um nun die Brüche im Ausdruck V auf den Nenner n zu bringen, erweitern wir sie auf Grund von (1) und (3) der Reihe nach mit

$$-(b-c), \quad -(c-a), \quad -(a-b)$$

und erhalten so die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{-(b-c)(a-1)^2}{n} + \frac{-(c-a)(b-1)^2}{n} + \frac{-(a-b)(c-1)^2}{n} \\ &= -\frac{1}{n} [(b-c)(a^2 - 2a + 1) + (c-a)(b^2 - 2b + 1) + \\ &\quad + (a-b)(c^2 - 2c + 1)]; \end{aligned} \quad (4)$$

hier haben wir aus den Brüchen $\left(-\frac{1}{n}\right)$ ausgeklammert. Wir führen nun die Multiplikationen in der eckigen Klammer aus und addieren dann die entstehenden Ausdrücke. Bezeichnen wir mit L den Ausdruck in der eckigen Klammer, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} L &= a^2b - 2ab + b - a^2c + 2ac - c + b^2c - 2bc + c - ab^2 + 2ab - a + \\ &\quad + ac^2 - 2ac + a - bc^2 + 2bc - b \\ L &= (a^2b - ab^2) + (b^2c - bc^2) + (c^2a - a^2c). \end{aligned} \quad (5)$$

Führen wir die Multiplikation auf der rechten Seite der Gleichung (2) aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} n &= (a-b)(b-c)(c-a) \\ &= (ab - ac - b^2 + bc)(c-a) \\ &= abc - ac^2 - b^2c + bc^2 - a^2b + a^2c + ab^2 - abc \\ n &= -(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2) = -L \end{aligned}$$

[siehe die Beziehung (5)]. Es gilt also

$$n = -L.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (4) ein, so erhalten wir:

$$V = -\frac{1}{-L} \cdot L = 1. \quad (6)$$

Ergebnis: Der Ausdruck V ist gleich der Zahl 1 und damit positiv für alle Zahlen a, b, c , für die er einen Sinn hat.

II. Wir müssen noch feststellen, wann der Ausdruck V seinen Sinn verliert. Das tritt dann ein, wenn einer der Nenner (1) des gegebenen Ausdrucks gleich null ist, d. h., wenn wenigstens eine der folgenden Beziehungen gilt:

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(c-a) &= 0, \\ (a-b)(b-c) &= 0, \\ (c-a)(b-c) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (7) folgt, daß dann notwendigerweise wenigstens eine der Gleichungen

$$a-b=0, \quad b-c=0, \quad c-a=0,$$

d. h.

$$a=b, \quad b=c, \quad c=a \quad (8)$$

bestehen muß. Andererseits sind tatsächlich, wenn eine der Beziehungen (8) gilt, zwei der Nenner (1) gleich null, und der Ausdruck V hat dann keinen Sinn.

Antwort: Wenn gleichzeitig gilt

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a \quad (9)$$

hat der Ausdruck V einen Sinn; sonst hat er keinen Sinn. Unter der Voraussetzung, daß (9) gilt, ist auf Grund der Beziehung (2) die Zahl n von null verschieden (damit ist auch $L \neq 0$) und es läßt sich in die den Beziehungen (6) angedeutete Kürzung durchführen.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

36. a) In der Abbildung 2.56. haben wir das Dreieck ABC und die Punkte M und N , welche (in dieser Reihenfolge) die Mittelpunkte der Seiten BC , CA sind, so daß MN

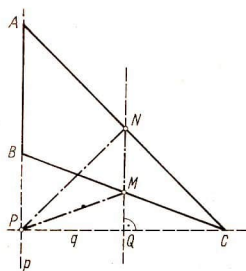


Abb. 2.56.

Mitteltransversale ist. Deshalb ist $MN \parallel AB$. Ferner ist P der Fußpunkt der durch den Punkt C gezogenen Höhe. Der Punkt P kann höchstens mit einem der Punkte A oder B zusammenfallen. Nehmen wir an, daß $P \neq B$ ist. Dann ist in dem Dreieck BCP die Strecke $MQ \parallel BP$ (Q ist der Schnittpunkt der Geraden MN und CP), denn MN ist parallel zu AB . MQ ist also Mitteltransversale in diesem Dreieck und Q ist also der Mittelpunkt der Strecke CP . Daneben ist $MQ \parallel BP$ und $CP \perp BP$. Wenn die Gerade CP zu einer der Parallelen senkrecht

steht, ist sie auch in bezug auf die andere senkrecht. In dem Dreieck CMQ ist also $\sphericalangle CQM = 90^\circ$. Dementsprechend führen wir die Konstruktion durch.

Konstruktion (Abb. 2.56.): Wir wählen das Dreieck MNP . Durch den Punkt P ziehen wir die Gerade $p \parallel MN$. Im Punkt P errichten wir die Senkrechte q zur Geraden p und bezeichnen mit Q den Schnittpunkt der Geraden q und MN . Auf der Verlängerung der Strecke PQ über den Punkt Q hinaus konstruieren wir die Strecke $QC = QP$. Ferner konstruieren wir die Strahlen CM und CN und bezeichnen mit B und A die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Geraden p . Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion: Weil MNP ein Dreieck ist, liegt der Punkt P nicht auf der Geraden MN , und deshalb sind MN und p zwei voneinander verschiedene Parallelen. Damit sind auch die Punkte P und Q voneinander verschieden. Der Punkt C läßt sich also konstruieren. Die Gerade CM schneidet die Gerade MN im Punkt M . Deshalb schneidet sie auch die zu MN parallele Gerade p (schneidet CM die eine Parallele, so schneidet sie auch die andere). Der Punkt B läßt sich also konstruieren und ebenso auch der Punkt A .

Die Aufgabe hat also eine Lösung, und zwar nur eine einzige.

b) In der Abbildung 2.57. gehen wir von dem Dreieck ABC aus. Die Punkte M und N sind (in dieser Reihenfolge) die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. CA . Der Punkt P ist der Fußpunkt der Höhe durch A , d. h., es gilt $p \perp PM$. Die Strecke MN ist Mitteltransversale und deshalb ist $MN \parallel AB$. Die Gerade $n \parallel MP$ (oder $n \parallel BC$) geht durch den Punkt N und deshalb liegt auf ihr die Mitteltransversale $LN \parallel BC$, wobei L der Mittelpunkt der Seite AB ist. Der Punkt P kann höchstens mit einem der Punkte B oder C zusammenfallen. Nehmen wir an, daß $P \neq B$ ist. Dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABP ($\sphericalangle BPA = 90^\circ$) $LQ \parallel BP$, und der Punkt Q ist der Mittelpunkt der Strecke PA . Daraus ergibt sich die Konstruktion.

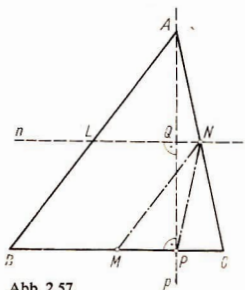


Abb. 2.57.

Konstruktion (Abb. 2.57.): Wir wählen das Dreieck MNP . Durch den Punkt N ziehen wir die Gerade $n \parallel MP$. Durch den Punkt P konstruieren wir die Gerade $p \perp MP$. Den Schnittpunkt der Geraden n und p bezeichnen wir mit Q . Auf der Verlängerung der Strecke PQ über den Punkt Q hinaus konstruieren wir die Strecke $QA = QP$.

Der Strahl AN hat mit der Geraden MP den Punkt C gemeinsam. Auf der Verlängerung der Strecke CM über den Punkt M hinaus konstruieren wir die Strecke $MB = MC$. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion: Der Punkt Q ist nach der Konstruktion der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PA}$, und deshalb ist N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ (entweder es ist $N \equiv Q$, oder es ist, wenn $N \neq Q$ ist, $\overline{QN}$ Mitteltransversale im Dreieck CAP , und N ist also der Mittelpunkt der Seite AC). Nach der Konstruktion sind die Punkte M und N die Mittelpunkte der Seiten und P der Fußpunkt der Höhe

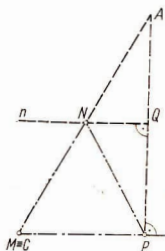


Abb. 2.58.

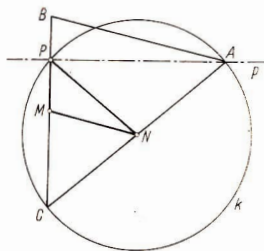


Abb. 2.59.

durch den Punkt A . Wenn aber $C \equiv M$ ist, was eintritt, wenn $\overline{MN} = \overline{NP}$ ist (siehe Abb. 2.58.), hat die Aufgabe keine Lösung (es wäre $B \equiv C$). Sonst hat die Aufgabe genau eine Lösung (das gilt auch für den Fall, daß $\angle PMN = 90^\circ$ ist, d. h. $P \equiv B$ ist).

Eine andere Lösung.

Analyse: In der Abbildung 2.59. ist ABC das gesuchte Dreieck. Das Dreieck ACP hat den Winkel $\angle APC = 90^\circ$. Deshalb ist der Punkt N der Mittelpunkt seiner Hypotenuse $\overline{AC}$. Aus diesem Grunde verläuft auch die Kreislinie $k \equiv (N, \overline{NP})$ durch die Punkte A

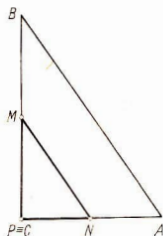


Abb. 2.60.

und C (THALESkreis). Dabei enthält die Gerade $p \perp PM$, die durch den Punkt P geht, gleichzeitig auch den Punkt A . Daraus ergibt sich die *Konstruktion* (Abb. 2.59.).

Wir zeichnen die Kreislinie $k \equiv (N, \overline{NP})$ und ziehen durch den Punkt P die Gerade $p \perp MP$. Schneidet die Gerade p die Kreislinie k im Punkt A , der vom Punkt P verschieden ist, so konstruieren wir den Durchmesser ANC der Kreislinie k , wobei C der zweite Schnittpunkt der Geraden NA mit der Kreislinie k ist. Auf der Geraden MC konstruieren wir den Punkt B so, daß der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CB}$ ist. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis: Nach der Konstruktion gilt: 1. Der Punkt A liegt auf der Senkrechten p , so daß $\overline{AP}$ die Höhe des Dreiecks ABC ist. 2. Der Punkt N ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. 3. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$.

Diskussion: Die Gerade p ist nicht Tangente der Kreislinie k (so daß $A \neq \bar{P}$ ist); denn sonst würde der Punkt M auf der Geraden NP liegen, was im Widerspruch zu der Voraussetzung steht, daß MNP ein Dreieck ist.

Der Punkt B läßt sich genau dann konstruieren, wenn $M \neq C$ ist. Ist M ein Punkt der Kreislinie k (d. h., $\overline{MN} = \overline{NP}$), so hat die Aufgabe keine Lösung.

In unserer Analyse haben wir vorausgesetzt, daß $P \neq C$ ist, d. h., daß $\angle NPM$ nicht 90° ist. In diesem Falle gibt es aber genau eine Lösung, wie sich leicht zeigen läßt (siehe Abb. 2.60.).

37. Zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 100 benötigen wir 20mal die Grundziffer 9. Die gleiche Anzahl von Neunen ist für das Schriftbild der Zahlen von 101 bis 200 erforderlich. Das gleiche gilt für die Zahlen von 201 bis 300, von 301 bis 400, ..., von 701 bis 800. Zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 800 sind $20 \cdot 8$ Neunen, d. h. 160 Neunen erforderlich.

Wenn wir aber die Zahlen von 801 bis 900 schreiben, benötigen wir 21 Neunen (die Zahl 900 erfordert im Schriftbild eine einzige Neun).

Jede Zahl von 901 bis 999 (es sind 99) beginnt mit einer Neun. Gemäß dem Vorausgegangenen (siehe die Zahlen von 1 bis 99) sind also $20 + 99$, d. h. 119 Neunen erforderlich.

Zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 1000 benötigen wir also $160 + 21 + 119 = 300$ Neunen.

Die gleiche Anzahl Neunen brauchen wir zum Schreiben der Zahlen von 1001 bis 2000, ferner von 2001 bis 3000, ferner von 3001 bis 4000 und schließlich von 4001 bis 5000. Insgesamt also $300 \cdot 5 = 1500$ Neunen.

Zum Schreiben der Zahlen von 5001 bis 5500 ist die gleiche Anzahl Neunen erforderlich wie zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 500, d. h. $20 \cdot 5 = 100$ Neunen.

Zum Schreiben der Zahlen von 5501 bis 5555 benötigen wir die gleiche Anzahl Neunen wie zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 55, d. h. 5 Neunen.

Zum Schreiben der Zahlen von 1 bis 5555 sind deshalb erforderlich:

$$1500 + 100 + 5 = 1605 \text{ Neunen.}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

38. Die Inhalte der von den Kreislinien k_1, k_2, k_3, k_4 begrenzten Flächen bezeichnen wir der Reihe nach mit $p_1, p_2, p_3, p_4 = N$ (Abb. 2.2. im Aufgabenteil). Die Radien der Kreislinien k_3, k_4 sind der Reihe nach

$$r_3 = \frac{1}{2} \overline{AC}, \quad r_4 = \frac{1}{2} \overline{CB},$$

wobei $\overline{AC} = \overline{AS} + \overline{SC} = x + y$, $\overline{CB} = \overline{SB} - \overline{SC} = x - y$ ist. Deshalb ist

$$r_3 = \frac{1}{2}(x + y), \quad r_4 = \frac{1}{2}(x - y)$$

und

$$p_1 = \pi x^2, \quad p_2 = \pi y^2, \quad p_3 = \frac{\pi}{4}(x + y)^2, \quad p_4 = \frac{\pi}{4}(x - y)^2.$$

Daraus erhält man:

$$P_1 + P_2 = p_1 - p_3 - p_4$$

$$= \frac{\pi}{4} [4x^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2]$$

$$P_1 + P_2 = \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2} (x^2 - y^2). \quad (1)$$

Ferner ist

$$M = p_3 - p_2 = \frac{\pi}{4}(x + y)^2 - \pi y^2 = \frac{\pi}{4} [(x + y)^2 - 4y^2],$$

$$N = p_4 = \frac{\pi}{4}(x - y)^2$$

und also

$$M + N = \frac{\pi}{4} [(x + y)^2 - 4y^2 + (x - y)^2]$$

$$M + N = \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2} (x^2 - y^2). \quad (2)$$

Aus dem Vergleich der Ergebnisse (1) und (2) folgt

$$P_1 + P_2 = M + N,$$

was zu beweisen war.

39. (Vgl. die Bezeichnungen aus der Abbildung 2.61.)

I. Wir setzen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$; entsprechend dem Text der Aufgabe ist

$$a < b. \quad (1'')$$

Den Punkt X haben wir entsprechend dem Text der Aufgabe innerhalb der Strecke $\overline{BC}$ gewählt. Wir stellen uns vor, daß sich die Konstruktion der Punkte X und Z so durchführen läßt, wie es in der Abbildung 2.2. angedeutet ist, d. h., daß

$$\overline{XY} = \overline{XB} \quad (*)$$

ist, wobei der Punkt Y auf der Strecke $\overline{BA}$ liegt, und daß

$$\overline{YZ} \perp \overline{XY}$$

gilt, wobei der Punkt Z auf die Strecke $\overline{CA}$ fällt. Gemäß (*) ist das Dreieck XYB gleichschenkelig, und die Winkel β und β' an seiner Grundseite $\overline{BY}$ sind gleich. Es ist also

$$\beta' = \beta. \quad (1)$$

Ferner ist entsprechend der Konstruktion der Senkrechten k

$$\gamma' = 90^\circ. \quad (2)$$

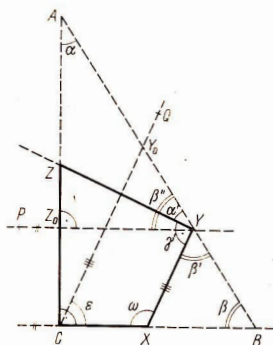


Abb. 2.61.

Berechnen wir nun die Größe des Winkels α' ! Wir wissen, daß in dem gegebenen Dreieck ABC der Winkel $\gamma = 90^\circ$ und also

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (3)$$

ist (die Summe der spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck beträgt 90°). Es ist demnach

$$\alpha' = 180^\circ - \beta' - \gamma'$$

oder unter Benutzung der Beziehungen (1) und (2)

$$\alpha' = 180^\circ - \beta - 90^\circ$$

und also

$$\alpha' = 90^\circ - \beta.$$

Aus der Beziehung (3) ergibt sich, daß $\alpha = 90^\circ - \beta$ ist. Daher erhalten wir durch Vergleich der beiden letzten Beziehungen

$$\alpha' = \alpha. \quad (3')$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für das Dreieck XYZ , daß

$$\overline{ZY} = \overline{ZA} \quad (**)$$

ist.

Nun berechnen wir den Umfang p des Vierecks $CXYZ$. Er ist

$$p = (\overline{CX} + \overline{XY}) + (\overline{CZ} + \overline{ZY}).$$

Setzen wir hier für $\overline{XY}$ gemäß der Beziehung (*) $\overline{XA}$ und für $\overline{ZY}$ gemäß der Beziehung (**) $\overline{ZA}$ ein, so erhalten wir

$$p = (\overline{CX} + \overline{XB}) + (\overline{CZ} + \overline{ZA}). \quad (4)$$

Nach der Abbildung 2.61. gilt aber:

$$\overline{CX} + \overline{XB} = \overline{CB} = a,$$

$$\overline{CZ} + \overline{ZA} = \overline{CA} = b.$$

Setzen wir diese Ergebnisse in (4) ein, so erhalten wir

$$p = a + b.$$

Antwort: Der Umfang des Vierecks $CXYZ$ ist gleich der Summe der Katheten des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks ABC .

II. Zum Schluß müssen wir noch beweisen, daß bei der Wahl des Punktes X innerhalb der Strecke $\overline{CB}$ (siehe Abb. 2.62.)

[1] der Punkt Y auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt,

[2] der Punkt Z auf der Strecke $\overline{CA}$ liegt.

Beweis (siehe die Bezeichnungen in der Abb. 2.61.): In der Halbebene BCA konstruieren wir den Strahl $CQ \parallel XY$. Der Außenwinkel ω des gleichschenkligen Dreiecks XYB ist gleich $\beta + \beta'$ und weil $\beta' = \beta$ ist [siehe (1)], gilt

$$\omega = 2\beta. \quad (5)$$

Die Summe der anliegenden Winkel ε und ω zwischen den Parallelen CQ und YX ergibt $\varepsilon + \omega = 180^\circ$. Wir setzen hier für ω gemäß der Beziehung (5) den Wert 2β ein und erhalten

$$\varepsilon + 2\beta = 180^\circ.$$

Deshalb ist

$$\varepsilon = 2\alpha,$$

denn $2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ$ [siehe die Beziehung (3)]. Da aber $\alpha < 45^\circ$ und $\beta > 45^\circ$ ist, denn in dem gegebenen Dreieck ABC gilt $a < b$ und $\gamma = 90^\circ$, ist $\varepsilon = 2\alpha < 90^\circ$ und der Strahl CQ liegt im rechten Winkel γ . Deshalb fällt der Schnittpunkt Y_0 des Strahls CQ und der Strecke $\overline{AB}$ auf diese Strecke. Es liegt also die ganze Gerade $XY \parallel CY_0$ innerhalb der Halbebene CY_0B , und der Punkt Y fällt demnach immer auf die Strecke Y_0B und damit auch auf die Strecke $\overline{AB}$.

Nun konstruieren wir die Gerade $YP \parallel BC$. Es ist also $CA \perp YP$. Weil die Gerade YP in der Halbebene BCA liegt und weil der Punkt Y ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, fällt der Schnittpunkt Z_0 der Senkrechten $\overline{CA}$ und $\overline{YP}$ auf die Strecke $\overline{CA}$. In dem Dreieck AYZ_0 ist der Winkel bei Z_0 ein Rechter und der Winkel $\beta'' = 90^\circ - \alpha$, d. h., $\beta'' = \beta$. Wegen $\alpha < \beta$ ist gemäß (3') auch $\alpha' < \beta''$, und der Strahl YZ liegt im Winkel β'' . Demnach fällt der Punkt Z auf die Strecke $\overline{Z_0A}$. Diese Strecke fällt aber

auf die Strecke $\overline{CA}$, und deshalb liegt der Punkt Z auch auf der Strecke $\overline{CA}$, was zu beweisen war.

40. Im folgenden bedeuten alle Zahlen natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit x, y, z die Maße irgendeines der großen Quader, den wir durch Zusammensetzen der kleinen Quader erhalten. Es sind x, y, z natürliche Zahlen. Dabei bezeichnen wir mit x das Maß, welches dadurch entsteht, daß wir die Kanten der Quader zusammenlegen, welche die Länge $a = 2$ cm haben. Entsprechend ist y das Maß, welches durch das Aneinanderlegen der Kanten von der Länge $b = 3$ cm entsteht. Schließlich ist z das Maß, welches wir durch Aneinanderlegen der Kanten der Länge $c = 4$ cm erhalten. Es ist also x das Produkt aus der Zahl 2 und irgendeiner natürlichen Zahl x_1 (diese Zahl gibt an, wieviel Steine wir in Richtung der Kante mit der Länge x aneinandergelegt haben). Deshalb gilt:

$$x = 2x_1, \quad y = 3y_1, \quad z = 4z_1. \quad (1)$$

(Im weiteren führen wir die Maße bereits nicht mehr an. Die Größen der Längen geben wir in Zentimetern, das Volumen der Quader in Kubikzentimetern.) Das Volumen eines Quaders ist $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (cm³). Da 12 Steine verwendet werden, ist das Volumen V des großen Quaders

$$V = 24 \cdot 12. \quad (2)$$

Weil der große Quader gemäß (1) die Maße x, y, z hat, ist sein Volumen xyz oder nach (1)

$$V = 2x_1 \cdot 3y_1 \cdot 4z_1$$

und also

$$V = 24x_1y_1z_1. \quad (3)$$

Wenn wir die Ergebnisse (2) und (3) vergleichen, erhalten wir

$$x_1y_1z_1 = 12. \quad (4)$$

Unsere Aufgabe ist es, die drei natürlichen Zahlen x_1, y_1, z_1 so zu ermitteln, daß sie das Produkt 12 haben. Wenn wir die Reihenfolge der Faktoren unberücksichtigt lassen, existieren genau die folgenden vier Zerlegungen der Zahl 12 in ein Produkt dreier natürlicher Zahlen: $1 \cdot 1 \cdot 12$; $1 \cdot 2 \cdot 6$; $1 \cdot 3 \cdot 4$; $2 \cdot 2 \cdot 3$. Dabei ist es in unserem Falle erforderlich, für das Produkt $x_1y_1z_1$ in diesen Zerlegungen alle möglichen Reihenfolgen der Faktoren auszutauschen. Die entsprechenden Quader finden wir der Reihe nach, wie es aus der Tabelle auf S. 176 ersichtlich ist. Darin führen wir zuerst die laufende Nummer des Quaders an, ferner die Zahlen x_1, y_1, z_1 und schließlich die Maße des großen Endquaders, der zu diesen Zahlen gehört.

Tabelle

Quader- nummer	Original des Typs	x_1	y_1	z_1	x ($2x_1$)	y ($3y_1$)	z ($4z_1$)	Anzahl der Arten, auf die sich ein solcher Quader zu- sammensetzen läßt
1	I	1	1	12	2	3	48	1
2	II	1	12	1	2	36	4	1
3	III	12	1	1	24	3	4	2
4	IV	1	2	6	2	6	24	1
5	V	1	6	2	2	18	8	1
6	(III)	2	1	6	4	3	24	siehe Nr. 3
7	VI	2	6	1	4	18	4	1
8	VII	6	1	2	12	3	8	2
9	VIII	6	2	1	12	6	4	3
10	IX	1	3	4	2	9	16	1
11	X	1	4	3	2	12	12	1
12	XI	3	1	4	6	3	16	1
13	(VIII)	3	4	1	6	12	4	siehe Nr. 9
14	(VII)	4	1	3	8	3	12	siehe Nr. 8
15	XII	4	3	1	8	9	4	2
16	(VIII)	2	2	3	4	6	12	siehe Nr. 9
17	(XII)	2	3	2	4	9	8	siehe Nr. 15
18	XIII	3	2	2	6	6	8	1
13 Typen								18 Fälle

Ergebnis: Man kann aus den gegebenen kleinen Quadern 18 große zusammensetzen, aber einige von ihnen haben die gleichen Maße. Es gibt 13 Quader, die nicht die gleichen Maße haben, d. h., die nicht kongruent sind. Die Anzahl der Arten, nach denen man einen Quader mit bestimmten Maßen aus den Würfeln zusammensetzen kann, ist in der letzten Spalte der Tabelle angeführt.

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 8

41. I. Wir bezeichnen den gegebenen Ausdruck mit V . Die Nenner seiner drei Brüche sind

$$\left. \begin{aligned} x &= (a-b)(a-c) = -(a-b)(c-a), \\ y &= (b-a)(b-c) = -(b-c)(a-b), \\ z &= (c-a)(c-b) = -(c-a)(b-c). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Aus den rechten Seiten dieser Gleichungen erkennen wir, daß diese Ausdrücke als Produkt von jeweils zwei der folgenden drei Zahlen

$$a-b, \quad b-c, \quad c-a$$

und der Zahl -1 entstanden sind. Deshalb ist der Ausdruck

$$n = (a - b)(b - c)(c - a)$$

gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen (1). Dabei gilt

$$\left. \begin{aligned} n &= -x(b - c), \\ n &= -y(c - a), \\ n &= -z(a - b). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Um die Brüche des gegebenen Ausdrucks V auf den gemeinsamen Nenner n zu bringen, erweitern wir sie der Reihe nach mit den Zahlen

$$-(b - c), \quad -(c - a), \quad -(a - b)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{n} [(a^3 - b^2c - bc^2)(b - c) + (b^3 - c^2a - ca^2)(c - a) \\ &\quad + (c^3 - a^2b - ab^2)(a - b)] = -\frac{1}{n} \cdot U \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} U &= a^3b - b^3c - b^2c^2 - a^3c + b^2c^2 + bc^3 + b^3c - ac^3 - a^2c^2 - \\ &\quad - ab^3 + a^2c^2 + a^3c + ac^3 - a^3b - a^2b^2 - bc^3 + a^2b^2 + ab^3 \\ U &= a^3b - a^3b + b^2c^2 - b^2c^2 + bc^3 - bc^3 + b^3c - b^3c + a^2c^2 - \\ &\quad - a^2c^2 + a^3c - a^3c + ac^3 - ac^3 + a^2b^2 - a^2b^2 + ab^3 - ab^3 = 0, \end{aligned}$$

d. h., es ist $U = 0$, und folglich

$$V = -\frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

für alle Zahlen a, b, c , für welche jeder der Brüche des gegebenen Ausdrucks einen Sinn hat.

II. Wenn der Nenner irgendeines Bruchs des Ausdrucks V gleich null ist und nur dann, verliert der Ausdruck V seinen Sinn. Wir fragen also, für welche Zahlen a, b, c irgendeine der Zahlen x, y, z [siehe (1)] gleich null ist. Aus den Beziehungen

$$(a - b)(c - a) = 0,$$

$$(b - c)(a - b) = 0,$$

$$(c - a)(b - c) = 0$$

folgt, daß eine der folgenden Gleichungen

$$a - b = 0, \quad b - c = 0, \quad c - a = 0,$$

d. h. eine der Gleichungen

$$a = b, \quad b = c, \quad c = a \quad (3)$$

gelten muß.

Wenn eine der angeführten Gleichungen gilt, sind zwei der Zahlen x, y, z [siehe (1)] gleich null. Damit verlieren zwei Brüche im Ausdruck V ihren Sinn.

Wenn keine der Beziehungen (3) gilt, hat der Ausdruck V einen Sinn.

Antwort: Der gegebene Ausdruck V verliert seinen Sinn, wenn zwei der Zahlen a, b einander gleich sind. Anderenfalls ist $V = 0$.

42. Analyse: Wir nehmen an, daß das Dreieck ABC in der Abbildung 2.62. den Forderungen der Aufgabe entspricht, d. h., daß gilt

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \quad \sphericalangle CAB = 67\frac{1}{2}^\circ, \quad \overline{VB} = \overline{VB'}, \quad (1)$$

wobei V der Schnittpunkt der Höhen und B' der Fußpunkt der Höhe durch den Punkt B ist. Dann gilt $\overline{BC} \perp \overline{AV}$. Danach führen wir die *Konstruktion* durch:

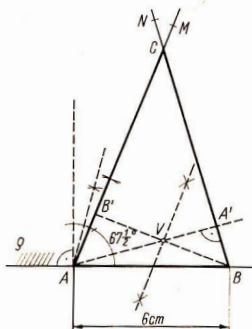


Abb. 2.62.

Wir wählen die Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge 6 cm. Eine der Halbebenen, die von der Geraden AB begrenzt sind, bezeichnen wir mit g . In der Halbebene g konstruieren wir mit Hilfe von Zirkel und Lineal den Winkel $\sphericalangle MAB = 67\frac{1}{2}^\circ$, fällen vom Punkt B das Lot

auf die Gerade AM und bezeichnen ihren Fußpunkt mit B' . Wir konstruieren den Mittelpunkt V der Strecke $\overline{BB'}$. Durch den Punkt B ziehen wir die Senkrechte zur Geraden AM und bezeichnen mit N einen Punkt auf ihr, der innerhalb der Halbebene g liegt. Der Schnittpunkt C der Strahlen AM und BN ist der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreiecks.

Beweis: Gemäß der Konstruktion gelten im Dreieck ABC die Beziehungen (1). Ferner ist $\overline{BB'} \perp \overline{AC}$ und $\overline{AA'} \perp \overline{BC}$, so daß der Schnittpunkt V der Geraden AA' und BB' der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC ist.

Diskussion: Der Winkel $MAB = 67\frac{1}{2}^\circ$ ist spitz. Deshalb liegt der Punkt B' auf dem Strahl AM . Der Punkt B' und mit ihm auch der Mittelpunkt V der Strecke $\overline{BB'}$ liegt deshalb innerhalb der Halbebene ϱ . Der Punkt V und mit ihm der Strahl AV liegt im Winkel BAM . Deshalb ist der Winkel BAV kleiner als $67\frac{1}{2}^\circ$, und das rechtwinklige Dreieck ABA' mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ liegt in der Halbebene ϱ . Dabei ist der Winkel ABA' der dritte Eckpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABA' und er ist also ein spitzer Winkel. Die Summe der spitzen Winkel BAM und ABA' ist deshalb kleiner als 180° . Daraus folgt nach dem Parallelenaxiom EUKLIDS, daß die Strahlen AM und BN in der Halbebene ϱ einen Schnittpunkt C haben. Das Dreieck ABC läßt sich also aus den gegebenen Elementen konstruieren. Damit ist die Aufgabe gelöst.

43. (Abb. 2.63.): a) Der Flächeninhalt P des Dreiecks ABC ist

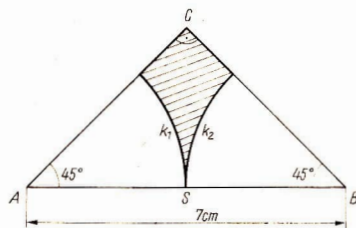


Abb. 2.63.

$$P = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{SC},$$

wobei $\overline{AB} = 0,7$; $\overline{SC} = \frac{1}{2} \cdot 0,7$ ist. Es ist also

$$P = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,7$$

oder

$$P = \frac{1}{4} \cdot 0,7^2. \quad (1)$$

Die Ausschnitte mit den Mittelpunkten A und B haben den Radius $r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 0,7$.

Ihre Zentriwinkel betragen 45° . Die Summe der beiden Ausschnitte ist ein Viertelkreis mit dem Flächeninhalt

$$Q = \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 0,7 \right)^2$$

$$Q = \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,7^2,$$

d. h.

$$Q = \frac{1}{16} \pi \cdot 0,7^2.$$

Der Flächeninhalt $x = P - Q$ ist

$$x = \frac{1}{16} \cdot 0,7^2(4 - \pi). \quad (2)$$

Es gilt

$$4 - \pi \approx 4 - 3,1416 = 0,8584 \quad (2')$$

und also

$$x \approx \frac{1}{16} \cdot 0,7^2 \cdot 0,8584 = \frac{1}{16} \cdot 0,49 \cdot 0,8584 \approx 0,0263.$$

Antwort: Der Flächeninhalt beträgt etwa $2,6 \text{ cm}^2$.

b) Wir bezeichnen mit p die gesuchte Anzahl der Prozente. Der Prozentanteil ist gegeben durch die Beziehung (2), die Basis P ist gegeben durch die Beziehung (1). Es gilt

$$p = \frac{x}{P} \cdot 100 = 100x \cdot \frac{1}{P}. \quad (3)$$

Aus der Beziehung (1) folgt, daß

$$\frac{1}{P} = \frac{4}{0,7^2}. \quad (4)$$

Wir setzen aus den Beziehungen (2) und (4) in die Beziehung (3) ein. Wir erhalten

$$p = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot 0,7^2(4 - \pi) \cdot \frac{4}{0,7^2} = 25(4 - \pi).$$

Gemäß (2') ist also

$$p \approx 25 \cdot 0,8584 \approx 21,46 \approx 21,5.$$

Antwort: Der Flächeninhalt der betrachteten Figur beträgt etwa 21,5% des Flächeninhaltes des gegebenen Dreiecks ABC .

44. I. Im weiteren bedeutet das Zeichen 3/10 drei Zehnkronenscheine; entsprechend bedeutet 4/3 vier Dreikronenscheine und 5/1 bedeutet fünf Einkronenscheine.

Wir stellen alle Möglichkeiten fest, wie man von vierzig Kronen (in tschechoslowakischem Papiergeld) den Betrag von 10 Kčs oder den Betrag von 30 Kčs auszahlen kann. Der Betrag von 10 Kčs würde nämlich Pavel nach der Bezahlung des Einkaufs übrigbleiben. Wir werden aber alle diese Möglichkeiten nicht in aller Ausführlichkeit untersuchen. Wir begnügen uns mit gewissen Fällen, in denen sich eine Auszahlung von 30 Kčs bzw. von 10 Kčs durchführen läßt (im übrigen siehe Tabelle S.182).

Wir gehen davon aus, daß die Anzahl der Papiergeldscheine möglichst klein sein soll, so daß wir für das Zusammenstellen des Betrags von 40 Kčs möglichst hohe Geldscheine verwenden. Unter der Bezeichnung „Fall Nr. 1“ verstehen wir z. B. eine Reihe von Möglichkeiten, bei denen unter dem Geld 1/25, 1/10 sind und wo uns weiteres Geld nicht interessiert. Das Gleiche ist auch bei den weiteren Möglichkeiten der Fall.

Bei unseren Erwägungen bedienen wir uns mehrfach des folgenden Satzes P:

Wenn wir einen Betrag von wenigstens 10 Kčs in Dreikronenscheinen und in Einkronenscheinen haben, unter denen sich wenigstens ein Einkronenschein befindet, können wir den Betrag von 10 Kčs auszahlen.

Beweis: Stellen wir uns vor, daß wir aus dem gegebenen Betrag Mengen von drei Kronen bilden (d. h., in einer Menge befindet sich entweder ein Dreikronenschein oder drei Einkronenscheine). Dann liegen in der letzten Menge entweder drei Kronen oder nur zwei oder nur eine. Dabei können wir die Mengenbildung so durchführen, daß wir hier einen Einkronenschein, der nach der Voraussetzung im gegebenen Betrag vorhanden ist (s. die Voraussetzung des Satzes P), zur letzten Menge legen. Da wir einen Betrag von wenigstens 10 Kčs haben, brauchen wir zumindest 4 Mengen, von denen nur die letzte Menge aus weniger als 3 Kronen bestehen kann. Wir fügen zu den ersten 3 Mengen einen Einkronenschein aus der letzten Menge hinzu. Damit entsteht der gesuchte Betrag von 10 Kčs, womit der Satz P bewiesen ist.

II. Lösung der gegebenen Aufgabe: In der beigefügten Tabelle haben wir festgestellt, auf welche Weise Pavel die Geldbeträge zusammenstellen kann. Die Fragezeichen in der Tabelle bedeuten eine gewisse natürliche Zahl oder null. Eine solche Reihe bedeutet dabei gegebenenfalls eine Reihe von Möglichkeiten, denn die Fragezeichen kann man auf verschiedene Weise geeignet ergänzen, damit der Geldwert in der Reihe gerade 40 Kčs ausmacht.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft. Entsprechend der Tabelle hatte also Pavel einen Fünfundzwanzigkronenschein und 5 Dreikronenscheine. Das ergibt tatsächlich

$$25 + 15 = 40.$$

Den Betrag von 30 Kčs kann aber Pavel von seinem Geld nicht auszahlen, denn es ist $25 + 3 = 28$ und $25 + 3n > 30$ für jede natürliche Zahl $n > 1$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Ein anderes Lösungsverfahren:

I. Wir beweisen, daß die im Text der Aufgabe geschilderte Situation lediglich dann eintreten kann, wenn Pavel 1/25 hat.

Beweis: Nehmen wir an, daß er nicht 1/25 hat, dann können wir beweisen, daß er 10 Kčs oder 30 Kčs auszahlen kann. Wenn er wenigstens 1/10 oder wenigstens 2/5 hat, kann er 10 Kčs auszahlen.

Tabelle

Laufende Nummer der Möglich- keiten	Wir haben folgende Anzahl					Art der Auszahlung des Betrags		Bemerkung
	25 Kronen	10 Kronen	5 Kronen	3 Kronen	1 Krone	10 Kronen	30 Kronen	
1	1	1	?	?	?	1/10		
2	1	0	wenig- stens 1	—	—		1/25 + 1/5	
3	1	0	0	gerade 5	0	geht nicht	geht nicht	Das ist gerade der gesuchte Fall, in dem man weder 30 Kës noch 10 Kës auszahlen kann
4	1	0	0	? weniger als 5 St.	? wenig- stens 1 St.	nach Satz P		Wir haben wenig- stens 10 Kës in Dreikronenschei- nen und in Ein- kronenscheinen; siehe Satz P
5	0	wenig- stens 1	?	?	?	1/10		
6	0	0	wenig- stens 2	?	?	2/5		
7	0	0	gerade 1	?	? ¹	nach P		¹ Pavel hat genau 1/5 und noch 35 Kës (d. h. Dreikronen- scheine und Ein- kronenscheine); er kann nicht nur lau- ter Dreikronen- scheine haben (d. h. er hat wenigstens 1/1)
8	0	0	0	?	? ²	nach P		² Pavel hat nur Dreikronenscheine und Einkronen- scheine, aber er hat notwendigerweise wenigstens 1/1

Wenn er $1/5$ hat und weder $1/25$ noch $1/10$ besitzt, hat er den Betrag von 35 Kčs in Dreikronenscheinen und in Kronenscheinen. Weil $35 = 33 + 2$ ist, muß er wenigstens $2/1$ haben. Aus dem Rest des Geldes (35 Kčs) bildet er Mengen zu 3 Kčs (entweder mit Hilfe von $1/3$ oder $3/1$), nimmt 3 Mengen und $1/1$, wodurch er 10 Kčs erhält.

Angenommen, er hat weder $1/25$ noch $1/10$ noch $1/5$, d. h., er hat nur Dreikronenscheine und Einkronenscheine. Weil $40 = 39 + 1$ ist, hat er wenigstens $1/1$, und ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt bildet er mit Hilfe der Mengen aus Dreikronenscheinen und $1/1$ den Betrag von 10 Kčs.

Damit ist der Beweis geführt.

II. Angenommen, Pavel hat $1/25$.

Wenn er $1/10$ oder wenigstens $1/5$ hat, kann er den Betrag von 10 Kčs bzw. von 30 Kčs bezahlen (es ist $25 + 5 = 30$). Angenommen, er hat $1/25$, aber weder $1/10$ noch $1/5$, d. h., daß er nur Dreikronenscheine und Kronenscheine hat. Wenn er wenigstens $1/1$ hat, d. h. $1/25$ und $1/1$ hat, also insgesamt 26 Kčs, bleiben ihm 14 Kčs übrig. Aus diesem Betrag bildet er 3 Mengen aus Dreikronenscheinen und zu dreien von ihnen fügt er $1/1$ hinzu, so daß er 10 Kčs auszahlen kann. Es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, daß er auch nicht $1/1$ hat, so daß er $1/25$ und $5/3$ haben muß. Hier gilt tatsächlich $25 + 3 \cdot 5 = 40$.

Den Betrag von 10 Kčs kann man nicht in Dreikronenscheinen auszahlen, und deshalb kann man unter den gegebenen Bedingungen auch den Betrag von 30 Kčs nicht auszahlen.

Antwort: Pavel hatte einen Fünfundzwanzigkronenschein und 5 Dreikronenscheine.

DIE AUFGABEN DER ERSTEN INTERNATIONALEN MATHEMATIK-OLYMPIADE

Die Erste Internationale Mathematik-Olympiade fand am 24. und 25. Juli 1959 in der Rumänischen Volksrepublik statt.

Hinter jeder Aufgabe wird in Klammern das Land angegeben, welches die betreffende Aufgabe eingereicht hat. Den größten Teil dieser Aufgaben finden Sie auch unter den Aufgaben der ersten Stufe des dritten Teils der *Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden in der UdSSR und in der ČSSR*. Daraus können sowohl die Schüler als auch die Lehrer erfahren, mit welcher Thematik man sich bei den nationalen Olympiaden der einzelnen befreundeten Länder am meisten beschäftigt. Man kann sagen, daß der Zahlentheorie und in der Planimetrie neben konstruktiven Aufgaben auch Beweisaufgaben erhebliche Aufmerksamkeit geschenkt wird.

Zunächst die Aufgaben der ersten schriftlichen Arbeit, die am 24. 7. 1959 geschrieben wurde und für drei Zeitstunden bemessen war.

1. Beweisen Sie, daß sich der Bruch

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

für keine natürliche Zahl n kürzen läßt!
(Polen)

2. Für welche reellen Zahlen x gilt:

a) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2};$

b) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1;$

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2?$

(Dabei bedeuten die Wurzeln stets nichtnegative Zahlen.)
(Rumänien)

3. Die Zahl x genügt der Gleichung

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

wobei a, b, c gegebene reelle Zahlen sind.

Geben Sie eine Gleichung zweiten Grades an, welche die entsprechende Zahl $\cos 2x$ erfüllt!

Wenden Sie das Ergebnis der Berechnung auf den Fall

$$a = 4, \quad b = 2, \quad c = -1$$

an!

(Ungarn)

Am 25. 7. 1959 folgte die zweite schriftliche Arbeit, die die Lösung folgender Aufgaben verlangte. (Auch diese Arbeit war für drei Zeitstunden bemessen.)

4. Konstruieren Sie das rechtwinklige Dreieck ABC , wenn seine Hypotenuse $c = \overline{AB}$ gegeben ist und wenn bekannt ist, daß die zur Hypotenuse gehörige Seitenhalbierende gleich dem geometrischen Mittel (= mittlere Proportionale) der beiden Katheten ist!

(Ungarn)

5. In einer Ebene ist die Strecke $\overline{AB}$ gegeben, und auf ihr sei M ein beweglicher Punkt. Über den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ als Seiten konstruieren wir die beiden Quadrate $AMCD$ und $BMEF$ so, daß sie in der gleichen Halbebene liegen, die

durch die Gerade AB begrenzt ist. Diesen Quadraten beschreiben wir eine Kreislinie um. Beide Kreislinien schneiden einander außer im Punkt M noch in einem weiteren Punkt N .

a) Beweisen Sie, daß die Geraden AE und BC durch den Punkt N verlaufen!

b) Beweisen Sie, daß alle Geraden MN durch einen bestimmten festen von N unabhängigen Punkt verlaufen!

c) Ermitteln Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken, welche die Mittelpunkte der beiden betrachteten Quadrate miteinander verbinden!
(Rumänien)

6. Gegeben sind die beiden nichtparallelen Ebenen P, Q mit der Schnittgeraden p . In der Ebene P ist der Punkt A und in der Ebene Q der Punkt C gegeben, wobei keiner der Punkte A und C auf der Geraden p liegt.

Konstruieren Sie das gleichschenklige Trapez $ABCD$ (wobei $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), dem man eine Kreislinie einbeschreiben kann, und zwar so, daß der Punkt B in der Ebene P und der Punkt D in der Ebene Q liegt!

(Tschechoslowakei)

TEIL III

R. Zelinka

**Neunter Jahrgang der Mathematikolympiade
in der ČSSR**

Staatlicher Pädagogischer Verlag • Prag 1961

AUFGABEN

1. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 11

1. Beweisen Sie, daß für beliebige positive Zahlen a, b, c stets die Ungleichung

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

gilt!

2. Gegeben sind die beiden Ebenen P und Q , die einander in der Geraden p schneiden. In der Ebene P ist der Punkt A und in der Ebene Q der Punkt C gegeben, von denen keiner auf der Geraden p liegt.

Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ (mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), so daß man ihm eine Kreislinie einbeschreiben kann und daß der Punkt B in der Ebene P und der Punkt D in der Ebene Q liegt!

3. In einer Ebene sind die Strecke $\overline{AB}$ gegeben, und auf ihr sei M ein beweglicher Punkt. Über den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ als Seiten konstruieren wir die beiden Quadrate $AMCD$ und $BMEF$ so, daß sie in der gleichen von der Geraden AB begrenzten Halbebene liegen. Diesen Quadraten beschreiben wir Kreislinien um, die einander außer in dem Punkt M noch in dem weiteren Punkt N schneiden.

a) Beweisen Sie, daß die Geraden AE und BC durch den Punkt N verlaufen!

b) Beweisen Sie, daß die Gerade MN durch einen bestimmten festen Punkt verläuft!

c) Ermitteln Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken, welche die Mittelpunkte der beiden betrachteten Quadrate verbinden!

4. Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 - 6(k-1)x + 9(k^2-2) = 0 \quad (1)$$

mit der Unbekannten x , wobei k eine reelle Zahl ist.

Ermitteln Sie alle Zahlen k , für welche die gegebene Gleichung wenigstens eine nichtnegative Wurzel hat, die nicht größer als 1 ist!

5. Ermitteln Sie alle reellen x , für welche die rechte Seite von

$$y = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} \quad (1)$$

(reell) definiert ist, und zeigen Sie, daß sie für $x \geq 2$ konstant ist! Zeichnen Sie dann das Bild der Funktion!

6. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\sin(x - \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0, \quad (1)$$

$$\sin(x + \alpha) + \cos(y + \alpha) = \sin 2\alpha \quad (2)$$

mit den Unbekannten x und y , wobei α eine gegebene reelle Zahl ist!

2. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 11

7. Suchen Sie alle reellen Zahlen x , für welche die Beziehung gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2 \cot 2x}{\cot x} \leq 1! \quad (1)$$

8. Gegeben sind die beiden zueinander windschiefen Geraden p_1 und p_2 und der Punkt M , der auf keiner von ihnen liegt. Geben Sie von folgender Aufgabe eine Lösung im Raum und diskutieren Sie diese Lösung: Zu konstruieren sind zwei Kreislinien k_1 und k_2 , die durch den Punkt M verlaufen und in diesem Punkt ein und dieselbe Gerade berühren, wobei die Kreislinie k_1 die Gerade p_1 und die Kreislinie k_2 die Gerade p_2 berührt.

Geben Sie in der Diskussion an, wieviel Paare solcher Kreislinien (k_1, k_2) existieren!

9. Gegeben ist das regelmäßige Sechseck $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ mit der Seitenlänge 1. Innerhalb der Seiten (d. h. der Strecken) $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_6, A_6A_1$ sind der Reihe nach die Punkte $B_1, B_2, \dots, B_6$ so konstruiert, daß gilt

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \dots = \overline{A_6B_6} = x.$$

Die Abschnitte zwischen den Schnittpunkten zweier aufeinanderfolgender Strecken $\overline{A_1B_2}, \overline{A_2B_3}, \dots, \overline{A_6B_1}$ begrenzen ein neues Sechseck. Beweisen Sie, daß dieses Sechseck regelmäßig ist, und drücken Sie seinen Flächeninhalt als Funktion des Winkels $\varphi = \angle A_2A_1B_2$ aus (Abb. 3.1.)!

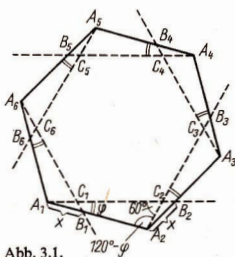


Abb. 3.1.

Errechnen Sie sodann, für welches φ das entstandene Sechseck einen Flächeninhalt hat, der gleich zwei Dritteln des Flächeninhalts des gegebenen Sechsecks ist!

Zusatzaufgabe: Drücken Sie den Flächeninhalt des entstandenen Sechsecks als Funktion der Länge $x = \overline{A_1B_1}$ aus!

10. Wenn für die reellen Zahlen a, b, c die Ungleichungen

$$a > 0, \quad b > 0, \quad 2c > a + b$$

bestehen, dann ist $c^2 > ab$, und es gilt

$$c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab}. \quad (1)$$

Das ist zu beweisen.

3. Aufgaben der dritten Stufe, Klasse 11

11. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , für welche die Ungleichung

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3} \quad (1)$$

gilt!

12. Gegeben ist der Würfel $ABCD A' B' C' D'$, wobei $ABCD$ ein Quadrat ist, und $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'} \parallel \overline{DD'}$ gilt. Auf der Geraden AA' liegt der Punkt P .

Konstruieren Sie den Mittelpunkt S der Kugel, welche symmetrisch in bezug auf die Ebene ABB' ist, durch den Punkt P geht und die Geraden $p \equiv AB, q \equiv A'D'$ berührt!

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Aufgabe, wenn der Punkt P auf der Geraden AA' verschiedene Lagen hat!

13. In einer Ebene sind die beiden voneinander verschiedenen Punkte A und M mit der Entfernung d gegeben. Ferner ist eine positive Zahl v gegeben. Konstruieren Sie in dieser Ebene einen Rhombus $ABCD$ mit der Höhe v so, daß der Punkt M der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ ist!

Ermitteln Sie die Bedingungen für die Lösbarkeit, und stellen Sie fest, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!

Kann eine Lösung ein Quadrat sein?

14. Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen x die rechte Seite von

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} \quad (1)$$

gilt, und fertigen Sie eine grafische Darstellung an!

4. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 10

15. Zu ermitteln sind alle reellen Zahlen x , für welche gilt:

$$\text{a) } \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}; \quad (1)$$

$$\text{b) } \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1; \quad (2)$$

$$\text{c) } \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2. \quad (3)$$

(Dabei bedeutet die Wurzel stets eine nichtnegative Zahl.)

16. In einer Ebene ist das Dreieck ABC gegeben. Konstruieren Sie auf der Strecke $\overline{AC}$ den Punkt X und auf der Strecke $\overline{BC}$ den Punkt Y so, daß gilt:

$$(1) \overline{XY} \parallel \overline{AB},$$

(2) der Umfang des Dreiecks CXY ist gleich dem Umfang des Trapezes $ABYX$!

17. Es sei n eine natürliche Zahl. Man beweise:

a) Ist die Zahl n gerade, so ist die Zahl $3^n + 63$ durch 72 teilbar.

b) Ist die Zahl $3^n + 63$ durch 72 teilbar, so ist n gerade.

18. Konstruieren Sie das rechtwinklige Dreieck ABC , wenn seine Hypotenuse $c = \overline{AB}$ gegeben ist und wir wissen, daß die zur Hypotenuse gehörende Seitenhalbierende gleich der mittleren Proportionalen der beiden Katheten ist!

19. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , welche der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1 \quad (1)$$

genügen!

20. Gegeben ist der positive Winkel $\angle PCQ = \gamma < 180^\circ$ und die Kreislinie $k \equiv (S, r)$, welche die Geraden CP und CQ in den Punkten P bzw. Q berührt. Konstruieren Sie auf den Strecken $\overline{CP}$ und $\overline{CQ}$ der Reihe nach die Punkte A und B so, daß die Gerade AB Tangente der Kreislinie k und $\overline{AB}$ gleich einer gegebenen positiven Zahl c ist! Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Aufgabe in bezug auf die gegebenen Zahlen c, r, γ !

5. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 10

21. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , für welche

$$\frac{\sqrt{x+x}}{\sqrt{x-x}} \leq 6\sqrt{x} \quad (1)$$

ausfällt!

22. Gegeben sind die Halbkreislinie k_1 mit dem Durchmesser $\overline{AB} = 2r$ und der Punkt C innerhalb der Strecke $\overline{AB}$, wobei $\overline{AB} = 2p < r$ ist. Auf der Halbkreislinie k_1 ist der Punkt D so gegeben, daß $\overline{CD}$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Über dem Durchmesser $\overline{AC}$ ist in der Halbebene ABD die Halbkreislinie k_2 konstruiert. Errechnen Sie mit Hilfe der gegebenen positiven Zahlen r und p den Radius x der Kreislinie k , welche die beiden Halbkreislinien k_1 und k_2 und die Strecke $\overline{CD}$ berührt!

23. Beweisen Sie, daß für beliebige positive Zahlen a und b stets

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \leq \frac{\sqrt{a}}{b^5 \cdot \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{a^5 \cdot \sqrt{a}} \quad (1)$$

gilt!

24. In einer Ebene sind die beiden nichtparallelen Geraden p_1 und p_2 gegeben und der nicht auf ihnen gelegene Punkt M . Konstruieren Sie zwei kongruente (verschiedene) Kreislinien k_1 und k_2 , die einander im Punkt M berühren, wobei die Kreislinie k_1 die Gerade p_1 und die Kreislinie k_2 die Gerade p_2 berührt!

Bemerkung: Bei der Lösung kann man die Zentralsymmetrie benutzen.

6. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 9

25. In einer Ebene sind der (positive) Winkel $PCQ < 180^\circ$ und der Punkt V gegeben. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC , dessen Eckpunkt A auf dem Strahl CP und dessen Eckpunkt B auf dem Strahl CQ liegen, und zwar so, daß der Punkt V der Schnittpunkt der Höhen dieses Dreiecks ist!

Wenn die Aufgabe eine Lösung haben soll, kann der Punkt V in bezug auf den gegebenen Winkel PCQ nicht eine beliebige Lage haben. Ermitteln Sie die einzelnen Fälle, und führen Sie die Konstruktion des gesuchten Dreiecks für jeden Fall gesondert durch!

26. Ein regelmäßiges vierseitiges Prisma, dessen Grundseite die Größe a (in cm) und dessen Höhe die Größe v (in cm) hat, besitzt die Eigenschaft, daß die Zahl, welche seine Oberfläche (in cm^2) angibt, gleich der Zahl ist, welche sein Volumen (in cm^3) angibt. Dabei sind a, v natürliche Zahlen. Ermitteln Sie alle solche Prismen und die zugehörigen Zahlen a und v !

27. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Grundseite $\overline{AB}$, welches die Eigenschaft hat, daß es sich durch eine Gerade p durch einen seiner Eckpunkte in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegen läßt.

Berechnen Sie die Innenwinkel des gegebenen Dreiecks ABC , und zwar in Abhängigkeit davon, durch welchen der Punkte A, B oder C die Gerade p gezogen wurde!

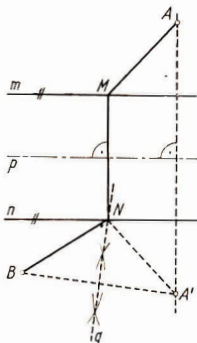
28. Gegeben ist der Ausdruck

$$V = (x + y)^2 (x - y) + (y + z)^2 (y - z) + (z + x)^2 (z - x),$$

wobei x , y und z reelle Zahlen sind.

Zerlegen Sie den Ausdruck V in ein Produkt von Linearfaktoren in x , y , z , und ermitteln Sie alle Zahlentripel (x, y, z) , für die $V = 0$ ist!

29. In der Abbildung 3.2. bedeuten die voneinander verschiedenen Parallelen m und n die Ufer eines Kanals, dessen verlängerte Achse die Gerade $p \parallel m$ ist. An den



beiden verschiedenen Ufern liegen die Orte A und B , welche durch die Straße $AMNB$ (gebrochene Linie) verbunden sind. Dabei gilt:

(1) $MN \perp p$;

(2) die Punkte M und N liegen in der angegebenen Reihenfolge auf den Geraden m bzw. n ;

(3) $AM = BN$.

Konstruieren Sie eine Straße von A nach B , wenn die Geraden $m \parallel n$ und die Punkte A und B wie in der Abbildung 3.2. gegeben sind, und entscheiden Sie, ob die Aufgabe eine Lösung hat!

Abb. 3.2.

30. Wenn die Zahl p von den Zahlen -1 , 0 , 1 verschieden ist, so hat die Gleichung

$$\frac{p(x-1) + p^2 - x}{p(x-1) - p^2 + x} = \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1} \quad (1)$$

mit der Unbekannten x stets genau eine Lösung. Beweisen Sie dieses und entscheiden Sie, wie es sich mit der Lösung dieser Gleichung in den eben angegebenen Ausnahmefällen verhält!

Lösen Sie dann folgende Aufgabe: Man berechne eine Zahl p , für die die gegebene Gleichung die Wurzel a) $x = 5$; b) $x = -3$ hat, und entscheiden Sie, ob das möglich ist!

7. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 9

31. Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{3px - 6x}{px - 2x - 1} - \frac{5px - 10x}{px - 2x + 1} = -2 \quad (1)$$

mit der Unbekannten x , wobei p eine gegebene reelle Zahl ist! Ermitteln Sie, für welche Zahl p die gegebene Gleichung keine Lösung hat!

Suchen Sie dann auch eine Zahl p , für die die Gleichung die Lösung $x = -\frac{1}{5}$ hat!

32. Gegeben ist die Kreisscheibe $k \equiv (S, r)$ und in ihr im Abstand $p \geq 0$ von ihrem Mittelpunkt S der Punkt T .

Ermitteln Sie die zwei kongruenten Kreislinien k_1 und k_2 , die durch den Punkt T verlaufen, einander in diesem Punkt berühren, und zwar so, daß jede von ihnen die gegebene Kreislinie k berührt!

Diskutieren Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von den gegebenen Zahlen r und p !

33. Konstruieren Sie ein gleichschenkliges (nicht rechtwinkliges) Trapez $ABCD$ ($\overline{AB}$ ist seine größere Grundseite), wenn gegeben ist: b (die Länge des Schenkels), p (die Länge der Mittellinie), e (die Länge der Diagonale)!

Diskutieren Sie die Lösbarkeit im Hinblick auf die Zahlen b , p und e !

34. Wir haben m Gramm p -prozentige Zuckerlösung in Wasser. Wieviel Prozent der Masse des gesamten Wassers müssen wir aus der Lösung verdampfen, damit eine $2p$ -prozentige Lösung entsteht?

Empfehlung: Lösen Sie die Aufgabe zuerst für $p = 40$!

Erklärung: Eine p -prozentige Zuckerlösung ist eine solche, bei der in je 100 Gramm Lösung p Gramm Zucker und $100 - p$ Gramm Wasser enthalten sind.

8. Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 8

35. Gegeben ist das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{CA} = \overline{CB} = 2$ dm. Um jeden seiner Eckpunkte beschreiben wir eine Kreislinie mit dem Radius 1 dm. Die Bogen dieser Kreislinien schneiden aus dem Dreieck ABC drei Kreisausschnitte heraus, und von dem Dreieck bleibt eine Figur übrig, deren Flächeninhalt wir mit x bezeichnen.

Berechnen Sie, wieviel Prozent die Zahl x vom Inhalt des gegebenen Dreiecks ausmacht!

36. Auf wieviel verschiedene Weisen kann man die Zahl 99 als Summe dreier verschiedener Primzahlen schreiben? (Dabei berücksichtigen wir die Reihenfolge der Summanden nicht.)

37. Gegeben sind der positive Winkel $\angle PAQ < 180^\circ$ und eine Strecke der Länge d . Konstruieren Sie den Rhombus $ABCD$, dessen Eckpunkt B auf dem Strahl AP und dessen Eckpunkt D auf dem Strahl AQ liegt, und bei dem die Summe der Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich der Zahl d ist!

Hat die Aufgabe immer eine Lösung?

38. An einer Touristenreise haben 286 Angestellte eines Betriebes teilgenommen. Ihnen standen Autobusse, einerseits mit 19 Sitzen, andererseits mit 17 Sitzen zur Verfügung (der Kraftfahrer des Autobusses und auch sein Sitz werden in der Aufgabe nicht in Betracht gezogen).

Berechnen Sie, wieviel Autobusse von jeder der beiden Arten für die Reise gebraucht wurden, wenn alle Sitze besetzt waren!

39. Gegeben ist der spitze Winkel $APM = 45^\circ$. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{PA} = 4$ cm über den Punkt A hinaus ist der Punkt B gegeben, wobei $\overline{PB} = 14$ cm ist.

Konstruieren Sie unter Anwendung der Achsensymmetrie auf dem Strahl PM zwei Punkte X und Y so, daß für das Viereck $AXYB$

$$(1) \quad \sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB; \quad (2) \quad \overline{XY} = 3 \text{ cm}$$

gilt!

Bemerkung: Die Abbildung, die wir erhalten, können wir als Plan eines Geländes betrachten, welches durch die vertikale Ebene ϱ geschnitten ist. Dabei ist PA der Schnitt eines schrägen ebenen Hanges und PM der Schnitt einer waagerechten Ebene. Das Viereck $AXYB$ ist der Schnitt eines Durchstichs im Hang. Der Durchstich führt senkrecht zur Ebene ϱ , seine Seitenwände haben die gleiche Neigung und seine waagerechte Wand hat die gegebene Breite usw.

40. Gegeben ist der Bruch

$$Z = \frac{[x(p+q) + pq + 1]^2 - [x(pq + 1) + p + q]^2}{(p+q)^2 - (pq + 1)^2},$$

wobei p, q gegebene Zahlen sind.

- a) Wenn jede der beiden Zahlen p und q verschieden von den Zahlen 1, -1 ist, so hat der Bruch Z einen Sinn und nach Kürzung ist zu ersehen, daß er von keiner der Zahlen p, q abhängig ist. Führen Sie die Berechnung durch!
- b) Berechnen Sie alle Zahlen x , für welche $Z = 0$ ist!
- c) Berechnen Sie alle Zahlen x , für welche Z eine negative Zahl ist!

9. Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 8

41. Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{p(x-3)}{9p^2 - 12p + 4} + \frac{p(x+3)}{9p^2 + 12p + 4} = \frac{-4}{9p^2 - 4} \quad (1)$$

mit der Unbekannten x , wobei p eine gegebenen Zahl ist!

Entscheiden Sie, für welche Zahlen p die gegebene Gleichung keine Lösung hat!

42. Gegeben sind die Kreislinien $k \equiv (S, r = 7 \text{ cm})$ und $k' \equiv (S', r' = 3 \text{ cm})$, k' berühre k von innen.

Zeichnen Sie alle von k' verschiedenen Kreislinien mit dem Radius 3 cm, die die beiden gegebenen Kreislinien k und k' berühren! Konstruieren Sie die Berührungspunkte der gesuchten Kreislinien mit den gegebenen Kreislinien!

Untersuchen Sie durch Vergleich der Länge der Mittelpunktslinie der Kreislinien k und k' und der Radien der Hilfskreislinien, wieviel Lösungen die gegebene Aufgabe hat!

43. Wir haben 1500 Gramm 7,2prozentige Kochsalzlösung in Wasser. Durch Kochen dieser Lösung verdampft ein Teil des Wassers und es verbleiben uns 1200 Gramm der neuen Lösung.

a) Wieviel Prozent ist die neue Lösung?

b) Wieviel Gramm Kochsalz müssen wir der neuen Lösung begeben, damit wir daraus eine 25prozentige Lösung gewinnen?

Erklärung: p -prozentige Kochsalzlösung in Wasser bedeutet, daß in je 100 Gramm Lösung p Gramm Kochsalz und $100 - p$ Gramm Wasser enthalten sind.

44. Gegeben sind die Gerade p und die Punkte A und B , welche auf verschiedenen Seiten der Geraden p liegen. Konstruieren Sie einen Streckenzug $AXYB$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Punkte X und Y liegen auf der Geraden p .
2. Die Geraden AX und BY laufen parallel.
3. Die Strecke $\overline{XY}$ ist 6 cm lang.

Bemerkung: Wählen Sie die Punkte A und B beliebig!

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 11

1. Aus der Bedingung $a > 0, b > 0, c > 0$ ergeben sich die Ungleichungen

$$a + b > 0, \quad b + c > 0, \quad c + a > 0, \quad a + b + c > 0.$$

Aus den letzten Ungleichungen erhalten wir durch Kombination mit den Ungleichungen $a > 0, b > 0, c > 0$ der Reihe nach

$$a + b + c > b + c,$$

$$a + b + c > c + a,$$

$$a + b + c > a + b.$$

In diesen Ungleichungen stehen auf beiden Seiten positive Zahlen. Nach einem bekannten Satz gelten deshalb folgende Ungleichungen für die Kehrwerte:

$$\frac{1}{a + b + c} < \frac{1}{b + c},$$

$$\frac{1}{a + b + c} < \frac{1}{c + a},$$

$$\frac{1}{a + b + c} < \frac{1}{a + b}.$$

Durch Addition der linken und der rechten Seiten dieser drei Ungleichungen erhalten wir:

$$\frac{3}{a + b + c} < \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a},$$

d. h.

$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} > \frac{3}{a + b + c},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

2. *Bemerkung:* Die Lösung der Aufgabe gliedern wir in zwei Teile: den stereometrischen Teil **A** und den planimetrischen Teil **B**.

A. Analyse des stereometrischen Teils der Aufgabe (Abb. 3.3.): Angenommen, es existiert ein Trapez $ABCD$, welches die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Die Ebene des Trapezes bezeichnen wir mit R . Die Schnittgerade der Ebenen P und R bezeichnen wir mit p_1 und die Schnittgerade der Ebenen Q und R mit p_2 . Es ist also $p_1 \equiv AB$ und $p_2 \equiv CD$, wobei notwendigerweise $p_1 \parallel p_2$, $p_1 \neq p_2$ gilt. Die Ebene R ist also durch die beiden voneinander verschiedenen Parallelen p_1 und p_2 bestimmt. Dabei ist notwendig $R \neq P$, denn der Punkt C liegt nicht in der Ebene P (P und Q sind entsprechend dem Text der Aufgabe nicht parallel, der Punkt C liegt in Q , aber er liegt nicht in P). Ebenso ist $R \neq Q$. Es ist also $p \neq p_1$ und $p \neq p_2$.

Die Geraden p und p_1 sind zueinander parallel, was wir sogleich beweisen werden. Angenommen, es seien p und p_1 nicht parallel und X ihr Schnittpunkt, so daß $P \equiv (p, p_1)$ ist. Die Ebene R schneidet die Ebene Q in der Geraden p_2 , und weil der Punkt X der Ebene R auch in der Ebene Q liegt, verläuft die Schnittgerade p_2 der Ebenen Q und R durch diesen Punkt. (Es ist sicher $Q \neq R$), d. h., die Geraden p_1 und p_2 haben einen gemeinsamen Punkt, was jedoch nicht möglich ist. Es gilt also $p \parallel p_1$

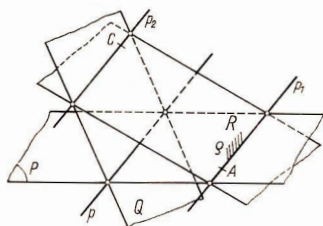


Abb. 3.3.

und, da $p_1 \parallel p_2$ ist, auch $p \parallel p_2$. Die Geraden p , p_1 und p_2 sind also zueinander parallel und keine zwei von ihnen fallen zusammen. Daraus ergibt sich die **Konstruktion** der Ebene R : Durch den Punkt A ziehen wir die Gerade $p_1 \parallel p$ und durch den Punkt C die Gerade $p_2 \parallel p$. Nach einem bekannten Satz ist dann $p_1 \parallel p_2$. Dabei ist $p_1 \neq p_2$, weil die Gerade p_1 den Punkt A enthält, der nicht auf p liegt (so daß $p \neq p_1$ ist),

die Gerade p_2 ist aus einem ähnlichen Grund von p verschieden (die Ebenen P und Q haben außer der Geraden p keinen gemeinsamen Punkt). Die beiden voneinander verschiedenen Parallelen p_1 und p_2 bestimmen eine Ebene R , welche damit konstruiert ist.

Nun führen wir in der Ebene R den weiteren Teil **B** der Lösung der Aufgabe durch.

B. Analyse des planimetrischen Teils der Aufgabe. (Vergleiche die Bezeichnungen in Abbildung 3.4.): Diesen Teil der Aufgabe kann man folgendermaßen formulieren:

In der Ebene R sind die beiden voneinander verschiedenen Parallelen p_1 und p_2 gegeben. Auf p_1 liegt der Punkt A , auf p_2 liegt der Punkt C . Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$, bei dem B auf p_1 und D auf p_2 liegt, und zwar so, daß man ihm eine Kreislinie einbeschreiben kann!

Mit der Lösung dieser Aufgabe wird die Lösung der gegebenen Aufgabe abgeschlossen sein.

In dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ steht die Diagonale $\overline{AC}$ offensichtlich niemals senkrecht auf der Grundseite $\overline{AB}$.¹ Deshalb hat die Aufgabe in dem Fall

$$AC \perp p_1 \quad (1)$$

keine Lösung.

Im weiteren nehmen wir an, daß (1) nicht gilt. Außerdem können wir annehmen, daß

$$\overline{AB} \geq \overline{CD} \quad (2)$$

ist oder daß auf der Geraden p_1 die größere Grundseite des Trapezes liegt. Wir begründen das folgendermaßen:

Angenommen, es ist $\overline{AB} < \overline{CD}$. Wir bezeichnen mit O den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Die Geraden p_1 und p_2 liegen symmetrisch in bezug auf den Punkt O . Das Gleiche gilt auch für die Punkte A und C . Dem Trapez $ABCD$ entspricht dabei das Trapez CD_0AB_0 oder AB_0CD_0 (Abb. 3.4.), welches mit ihm kongruent ist, d. h., es gilt $\overline{CD_0} < \overline{AB_0}$ (weil $\overline{AB} = \overline{CD_0}$ und $\overline{CD} = \overline{AB_0}$ ist). Das Trapez AB_0CD_0 hat also die größere Grundseite in der Geraden p_1 . Bei Gültigkeit der Beziehung (2) konstruieren wir das Rechteck $AFCE$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von C auf p_1 ist. Wir be-

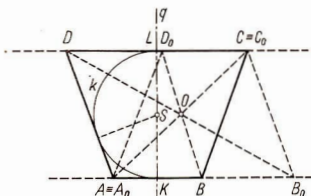


Abb. 3.4.

zeichnen mit K und L die Mittelpunkte der Grundseiten des Trapezes $ABCD$ und mit M und N die Berührungspunkte der Schenkel $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AD}$ mit der Kreislinie $k \equiv (S, r)$, die dem Trapez eingeschrieben ist. Die Höhe des Trapezes ist $v = 2r$. Aus der Symmetrie des Trapezes in bezug auf die Achse $q \equiv KL$ folgt, daß K und L Berührungspunkte der Kreislinie k mit den Grundseiten sind. Der Punkt F

fällt auf die Strecke $\overline{KB}$, der Punkt D auf die Strecke $\overline{EL}$. An der größeren Grundseite $\overline{AB}$ liegt der spitze Winkel DAB des Trapezes. Deshalb fällt der Punkt D notwendigerweise auf die Strecke $\overline{LE}$ und damit auch in die Halbebene AEC . Wir setzen (Abb. 3.5.)

$$\overline{AB} = 2a, \quad \overline{CD} = 2c,$$

wobei $a \geq c$ ist.

Die Längen der Tangenten von den Punkten A und C an die Kreislinie sind

$$a = \overline{AK} = \overline{AN}, \quad c = \overline{DL} = \overline{DN}.$$

¹ Unter einem gleichschenkligen Trapez wird hier ein solches verstanden, bei dem nicht nur die beiden Schenkel gleich lang, sondern auch die beiden Basiswinkel, die diese mit der Grundseite $\overline{AB}$ bilden, ebenfalls gleich sind. Die nicht rechtwinkligen Parallelogramme sind demnach keine gleichschenkligen Trapeze, obwohl sie Trapeze mit gleich langen Schenkeln sind. (Anm. d. dtsh. Herausg.)

Es ist also

$$\overline{AD} = \overline{AN} + \overline{DN} = a + c$$

sowie

$$\overline{AF} = \overline{AK} + \overline{FK} = \overline{AK} + \overline{LC} = a + c$$

und daher

$$\overline{AD} = \overline{AF}. \quad (3)$$

Dieses Ergebnis verwenden wir zur Konstruktion des Punktes D und damit auch des gesuchten Trapezes. Der Punkt D ist der Schnittpunkt der Geraden p_2 mit der Kreislinie $m \equiv (A, \overline{AF})$, der in die von $\overline{AE}$ begrenzte, C enthaltende Halbebene fällt. Beachten Sie dabei noch, daß $\overline{AD} \geq v$ sein muß (für $\overline{AD} = v$ erhalten wir ein Quadrat), d. h. es gilt notwendigerweise

$$\overline{CF} \leq \overline{AF} \quad (4)$$

oder

$$\angle CAF \leq 45^\circ. \quad (4')$$

Wir können vorweg bereits sagen, daß die Aufgabe keine Lösung hat für

$$\overline{AF} < \overline{CF} \quad \text{oder} \quad \angle CAF > 45^\circ,$$

d. h., wenn die Winkel zwischen den Nichtparallelen p und $\overline{AC}$ größer als 45° sind. Bei der Konstruktion werden wir beweisen, daß die Aufgabe genau zwei Lösungen hat, wenn in (4) oder (4') das Zeichen $<$ gilt.

Konstruktion (Abb. 3.5.): In der Ebene R sind die voneinander verschiedenen Geraden $p_1 \parallel p_2$, auf p_1 der Punkt A und auf p_2 der Punkt C gegeben, wobei $\angle CAF < 45^\circ$

und F der Fußpunkt der Senkrechten durch den Punkt C zur Geraden p_1 ist. Konstruieren wir das Rechteck $AFCE$, so ist

$$\overline{AF} > \overline{CF}. \quad (5)$$

Wir beschreiben die Kreislinie $m \equiv (A, \overline{AF})$. Weil (5) gilt, schneidet m die Gerade p_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten.

Aus der Symmetrie der Kreis-

linie m in bezug auf die Gerade AE folgt, daß einer der Schnittpunkte auf den Strahl EC fällt. Wir bezeichnen ihn mit D (der zweite Punkt D_0 führt offenbar nicht zu einem Trapez mit der größeren Grundseite auf der Geraden p_1). Weil

$$\overline{AD} = \overline{AF} < \overline{AC}$$

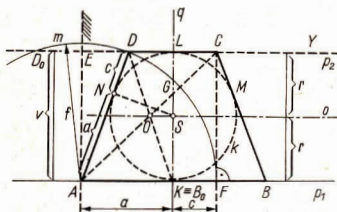


Abb. 3.5.

gilt (die Hypotenuse $\overline{AC}$ des Dreiecks ACF ist größer als die Kathete $\overline{AF}$), fällt der Punkt D entsprechend einem bekannten Satz auf die Strecke $\overline{EC}$. Wir bezeichnen mit q die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{DC}$ und mit B das Spiegelbild des Punktes A an q und erhalten das Viereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse q , wobei $\overline{AB} \perp q$, $\overline{CD} \perp q$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt, d. h. ein gleichschenkliges Trapez mit der größeren Grundseite $\overline{AB}$.

Wir beweisen, daß man ihm einen Kreis einbeschreiben kann und bezeichnen dazu mit K und L die Schnittpunkte der Geraden q mit den Geraden p_1 bzw. p_2 . S sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{KL}$. Die Kreislinie $k \equiv \left(S, \frac{1}{2}v\right)$, wobei v den Abstand der Par-

allelen p_1 und p_2 bedeutet, berührt die Geraden p_1 und p_2 in den Punkten K bzw. L . Sie berührt aber auch die Gerade AD , was wir sogleich beweisen werden:

Gemäß der Konstruktion ist $\overline{AD} = \overline{AF}$, so daß ADF ein gleichschenkliges Dreieck ist. Seine Grundseite ist die Strecke $\overline{DF}$, aber die Punkte D und F liegen symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt S , weil K und L symmetrisch in bezug auf S liegen und $\overline{KF} = \overline{LC} = \overline{LD}$ ist, wobei die Punkte F und D durch die Gerade q voneinander getrennt sind. Aus der Zentralsymmetrie der Punkte F und D folgt, daß der Punkt S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DF}$ ist, so daß die Gerade AS Symmetrieachse des Dreiecks ADF ist und der Punkt S auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ liegt. Der Mittelpunkt S der Kreislinie k liegt ebenfalls auf der Winkelhalbierenden $\overline{AS}$ und berührt den Schenkel $\overline{AF}$ im Punkt K . Deshalb berührt k auch den Schenkel $\overline{AD}$ dieses Winkels. Aus der Symmetrie des Trapezes in bezug auf die Gerade q folgt, daß die Kreislinie k auch den Schenkel $\overline{BC}$ des Trapezes $ABCD$ berührt. Damit ist der Beweis erbracht.

Durch Anwendung der Zentralsymmetrie in bezug auf den Mittelpunkt O der Strecke $\overline{AC}$ geht das Trapez $ABCD$ in das Trapez CD_0AB_0 über, welches ebenfalls eine Lösung der Aufgabe darstellt. Weitere Lösungen hat die Aufgabe nicht.

Ergebnis: Wenn F der Fußpunkt des vom Punkt C auf die Gerade p_1 gefällten Lotes ist, und $\overline{AF} > \overline{CF}$ gilt, hat die Aufgabe zwei voneinander verschiedene Lösungen. Die beiden Trapeze sind symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt O der Strecke $\overline{AC}$. Ist $\overline{AF} = \overline{CF}$, so hat die Aufgabe nur eine Lösung, bei der das Trapez ein Quadrat ist. Ist $\overline{AF} < \overline{AC}$, so gibt es keine Lösung.

Besser kann man die Bedingung für die Lösbarkeit folgendermaßen zum Ausdruck bringen: Wenn ein Winkel zwischen den Nichtparallelen p , $\overline{AC}$ kleiner als 45° ist, hat die Aufgabe zwei Lösungen. Ist ein Winkel 45° , so hat sie eine Lösung. In allen anderen Fällen gibt es kein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

3. (Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Abbildung 3.6.)

a) Im weiteren nehmen wir an, daß gilt

$$\overline{AM} > \overline{BM}. \quad (1)$$

Den Fall $\overline{AM} < \overline{BM}$ erhalten wir aus (1) durch Verwendung der Symmetrie in bezug auf die Mittelsenkrechte q der Strecke $\overline{AB}$ und durch geeignete Vertauschung der Bezeichnungen der Punkte A und B . Den Fall $\overline{AM} = \overline{BM}$ behandeln wir abschließend. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$\overline{AB} = 4d \quad (2)$$

und bezeichnen mit q die Halbebene, in der die beiden Quadrate $AMCD$, $BMEF$ liegen, sowie mit U den Scheitelpunkt des rechten Winkels in dem gleichschenkligen Drei-

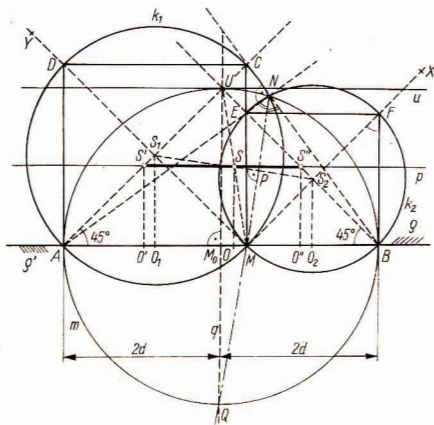


Abb. 3.6.

eck ABU , wobei U in der Halbebene q auf der Geraden q liegt. Weiter sei M_0 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt

$$\overline{AM_0} = 2d = \overline{M_0U}. \quad (3)$$

Aus der Beziehung (1) folgt $\overline{S_1O_1} > \overline{S_2O_2}$, denn es ist $\overline{S_1O_1} = \frac{1}{2}\overline{AM}$ und $\overline{S_2O_2} = \frac{1}{2}\overline{BM}$. Daraus folgt, daß die Senkrechte $\overline{MP} \perp \overline{S_1S_2}$ innerhalb des rechten Winkels BMC verläuft, so daß der zweite Schnittpunkt $N \neq M$ der beiden Kreislinien k_1, k_2 innerhalb dieses Winkels liegt. Der Punkt E fällt auf die Strecke $\overline{MC}$ und die Punkte S_1 und S_2 fallen offensichtlich auf die Schenkel $\overline{AU}$ und $\overline{BU}$ des Dreiecks ABU . Die Winkel $\angle ACM$ und $\angle ANM$ sind Peripheriewinkel auf der Kreislinie k_1 , und ihre Scheitelpunkte liegen in der Halbebene q . Es ist also $45^\circ = \angle ACM = \angle ANM$ oder

$$\angle ANM = 45^\circ. \quad (4)$$

Ebenso läßt sich auch die Beziehung $\sphericalangle BEM = \sphericalangle BNM = 45^\circ$ unter Benutzung der Kreislinie k_2 beweisen, d. h., es ist

$$\sphericalangle BNM = 45^\circ. \quad (5)$$

Die beiden Winkel ANM und BNM sind Nebenwinkel und auf Grund von (4) und (5) gilt $\sphericalangle ANM + \sphericalangle BNM = 90^\circ$, also $\sphericalangle ANB = 90^\circ$ und daher

$$\overline{AN} \perp \overline{BN}. \quad (6)$$

Das Dreieck ANB ist mithin rechtwinklig, und es hat die Strecke $\overline{AB}$ als Hypotenuse. Die Kreislinie $m \equiv (M_0, 2d)$ ist ihm umschrieben.

Nun beweisen wir, daß die Punkte A , E und N auf ein und derselben Geraden liegen (in der eben genannten Reihenfolge): Die Strecke $\overline{BE}$ ist Durchmesser der Kreislinie k_2 , der Punkt E liegt auf der Strecke $\overline{MC}$, so daß die Punkte M und N durch die Gerade BE getrennt sind. Die dem Dreieck BEN umschriebene Kreislinie ist k_2 , und demnach ist $\sphericalangle BNE = 90^\circ$, d. h., es gilt

$$\overline{EN} \perp \overline{BN}. \quad (7)$$

Aus den Beziehungen (6) und (7) folgt die Richtigkeit unserer Behauptung, womit der Beweis erbracht ist.

Ferner beweisen wir, daß die Punkte B , N und C (in der eben beschriebenen Reihenfolge) auf der gleichen Geraden liegen: Die Strecke $\overline{AC}$ ist Durchmesser der Kreislinie k_1 , die dem Dreieck ACN umschrieben ist. Daher ist $\sphericalangle ANC = 90^\circ$. Die beiden Winkel ANC und ANB sind rechte Winkel und demnach Nebenwinkel. Damit ist auch diese Behauptung bewiesen.

Wir haben also nachgewiesen, daß, wenn (1) gilt, die Geraden AE und BC durch den Punkt N verlaufen.

Wenn aber $AM = BM$ ist, sind die beiden betrachteten Quadrate kongruent, so daß auch die Kreislinien k_1, k_2 kongruent sind und $C \equiv E \equiv N$ gilt und die Behauptung a) der Aufgabe selbstverständlich ist.

Damit ist die Behauptung des Teiles a) der Aufgabe bewiesen.

b) Im Vorausgehenden haben wir bewiesen, daß das Dreieck ABN mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ und der umschriebenen Kreislinie $m \equiv (M_0, 2d)$ rechtwinklig ist. Der Strahl NM ist Winkelhalbierende des Winkels ANB und schneidet notwendigerweise die Kreislinie m in dem Punkt $Q \neq N$, wobei Q in der zur Halbebene ϱ komplementären Halbebene ϱ' liegt. Das folgt aus der Tatsache, daß $\sphericalangle ANM = \sphericalangle BNM = 45^\circ$ ist oder $\sphericalangle ANQ = \sphericalangle BNQ$ ist, so daß auch die zugehörigen Zentriwinkel kongruent sind und $\sphericalangle AM_0Q = \sphericalangle BM_0Q = 90^\circ$ ist.

Die Gerade MN verläuft also durch den Punkt Q . Damit ist der Teil b) der Aufgabe gelöst.

c) Wir bezeichnen mit S den Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$ und ferner der Reihe nach mit O_1 , O_2 und O die Fußpunkte der Lote durch die Punkte S_1 , S_2 bzw. S auf die Gerade AB . Das Viereck $S_1S_2O_2O_1$ ist ein rechtwinkliges Trapez (falls $\overline{AM} = \overline{BM}$ gilt, sogar ein Rechteck), und die Strecke $\overline{SO}$ ist seine Mittellinie, so daß O der Mittelpunkt der Strecke $\overline{O_1O_2}$ ist und ferner

$$\overline{SO} = \frac{1}{2}(\overline{S_1O_1} + \overline{S_2O_2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{BF}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overline{AB}\right] = \frac{1}{4} \cdot 4d = d$$

gilt. Wir bezeichnen mit $p \parallel AB$ diejenige Gerade in der Halbebene ϱ , deren Abstand von der Geraden AB gleich d ist. Der Punkt S liegt also auf der Geraden p .

Der Winkel AUB ist ein rechter. Weil die Punkte S_1 und S_2 auf seinen Schenkeln liegen, liegt die Strecke $\overline{S_1S_2}$ innerhalb dieses Winkels. Der Punkt S ist ein innerer Punkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$ und demnach ein innerer Punkt des Winkels AUB .

Weil die Strecke $\overline{S'S''}$ genau derjenige Teil der Geraden p ist, der im Winkel AUB liegt, befindet sich der betrachtete Punkt S notwendigerweise auf der Strecke $\overline{S'S''}$.

Daraus folgt, daß der Punkt O ein innerer Punkt der Strecke $\overline{O'O''}$ ist (wobei O' und O'' die Fußpunkte der Lote durch die Punkte S' bzw. S'' auf die Gerade AB sind), und damit ist der Punkt S ein innerer Punkt von $\overline{S'S''}$.

Es bleibt noch zu beweisen, daß jeder Punkt S innerhalb der eben beschriebenen Strecke $\overline{S'S''}$ der Mittelpunkt einer von den Mittelpunkten S_1 und S_2 der Quadrate $AMCD$ und $BMEF$ begrenzten Strecke $\overline{S_1S_2}$ ist.

Beweis: Angenommen, der Punkt S liegt innerhalb der Mitteltransversale (der Strecke) $\overline{S'S''}$ des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks ABU . Dann liegt der Punkt S innerhalb des rechten Winkels AUB , und wir konstruieren das Spiegelbild des rechten Winkels AUB in bezug auf den Mittelpunkt S . Der Punkt M sei das Bild des Punktes U . Wenn u die Parallele zur Geraden AB durch den Punkt U ist, so haben die Streifen zwischen den Parallelen $S'S'' \parallel AB$ und $S'S'' \parallel u$ die gleichen Breiten, und aus der Beziehung $\overline{US} = \overline{SM}$ folgt, daß der Punkt M auf die Gerade AB fällt, und zwar auf die Strecke $\overline{AB}$.

Wir bezeichnen mit MX und MY die Spiegelbilder der Strahlen UA und UB in bezug auf den Mittelpunkt S . Die Geraden $UA \parallel MX$ und $UB \parallel MY$ begrenzen das Rechteck US_2MS_1 (siehe Abb. 3.6.) mit dem Mittelpunkt S , für das $\overline{SS_1} = \overline{SS_2}$ gilt, so daß S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$ ist. Wir konstruieren die Quadrate $AMCD$ und $BMEF$ in der Halbebene ϱ . Weil

$$\sphericalangle AMY = \sphericalangle ABU = 45^\circ$$

und

$$\sphericalangle BMX = \sphericalangle BAU = 45^\circ$$

gilt, sind die eben konstruierten Punkte S_1 und S_2 die Mittelpunkte der Quadrate $AMCD$ bzw. $BMEF$. Damit ist der Beweis abgeschlossen und die Lösung des Teils c) der Aufgabe gefunden.

Der geometrische Ort der Punkte S ist also das Innere der Strecke $\overline{S'S''}$, wobei S' und S'' die Mittelpunkte der Katheten des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks ABU mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ sind, das in der Halbebene g liegt.

4. Wir nehmen an, daß die Zahl x mit

$$0 \leq x \leq 1 \quad (1')$$

die Lösung der Gleichung (1) ist und suchen nach Bedingungen, die für sie gelten müssen. Weil die Umformungen, die wir durchführen werden, umkehrbar sind, erhalten wir dabei Bedingungen für die Zahl k , so daß für x die Beziehung (1') gilt. Die Diskriminante D der Gleichung (1) ist

$$D = 9(k-1)^2 - 9(k^2 - 2) = 9(k^2 - 2k + 1 - k^2 + 2) = 9(3 - 2k). \quad (2')$$

Weil $D \geq 0$, d. h. $3 - 2k \geq 0$ gelten muß, erhalten wir

$$k \leq \frac{3}{2} = 1,5. \quad (2)$$

Anderenfalls hätte die Gleichung (1) keine reelle Lösung.

Wir bezeichnen mit $x_1 \geq x_2$ die reellen Wurzeln der Gleichung (1). Es gilt

$$x_{1,2} = 3(k-1) \pm 3\sqrt{3-2k}$$

und nach Umformung

$$x_1 = 3(k-1 + \sqrt{3-2k}), \quad (3)$$

$$x_2 = 3(k-1 - \sqrt{3-2k}). \quad (4)$$

Die Untersuchung über die Zahl k führen wir für jede der Wurzeln x_1, x_2 gesondert durch.

I. Untersuchung der Wurzel x_1 :

A. Angenommen, es ist $x_1 \geq 0$. Dann folgt aus (3):

$$\begin{aligned} k-1 + \sqrt{3-2k} &\geq 0, \\ \sqrt{3-2k} &\geq 1-k. \end{aligned} \quad (5)$$

a) Angenommen, es ist $1-k \leq 0$, also $1 \leq k$. Dann ist die Ungleichung (5) für jedes k mit

$$1 \leq k \leq \frac{3}{2} \quad (6)$$

erfüllt.

b) Angenommen, es ist

$$1-k \geq 0, \text{ d. h. } k \leq 1. \quad (7)$$

Dann erhalten wir durch Quadrieren der beiden Seiten die Beziehung (5):

$$3 - 2k \geq 1 - 2k + k^2$$

$$k^2 - 2 \leq 0,$$

$$(k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) \leq 0.$$

Der Faktor $k - \sqrt{2}$ ist unter der Voraussetzung (7) negativ, und deshalb muß

$$k + \sqrt{2} \geq 0, \text{ d. h.}$$

$$k \geq -\sqrt{2},$$

und mithin wegen (2) und (7)

$$-\sqrt{2} \leq k \leq 1 \quad (8)$$

sein. Faßt man die Beziehungen (6) und (8) zusammen, so ergibt sich, daß für k die Beziehung

$$-\sqrt{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \quad (8')$$

bestehen muß.

B. Ist aber $x_1 \leq 1$, so erhalten wir aus (3)

$$3(k - 1 + \sqrt{3} - 2k) \leq 1,$$

$$3\sqrt{3} - 2k \leq 4 - 3k, \quad (9)$$

so daß $4 - 3k \geq 0$, d. h.

$$k \leq \frac{4}{3} = 1, \bar{3} \quad (10)$$

gelten muß.

Durch Quadrieren der beiden Seiten von (9) ergibt sich:

$$9(3 - 2k) \leq 16 - 24k + 9k^2,$$

$$0 \leq 9k^2 - 6k - 11 \quad (11)$$

$$0 \leq (3k - 1 - 2\sqrt{3})(3k - 1 + 2\sqrt{3}).$$

Nun ist auf Grund von (10)

$$3k - 1 - 2\sqrt{3} \leq 4 - 1 - 2 \cdot 1,7 = 4 - 4,4 < 0.$$

Deshalb ergibt sich aus (11):

$$3k - 1 + 2\sqrt{3} \leq 0,$$

$$k \leq -\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1) < 0. \quad (12)$$

Zusammenfassung des Falles I:

Aus den Beziehungen (8') und (12) erhalten wir:

$$-2 \leq k \leq -\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1). \quad (13)$$

Es gilt $-\sqrt{2} < -\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1)$; denn es ist

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1) - (-\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{3}(3\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{3}) > \frac{1}{3}(3 \cdot 1,4 + 1 - 2 \cdot 1,8) \\ &= \frac{1}{3}(4,2 + 1 - 3,6) > 0. \end{aligned}$$

Daher wird durch (13) tatsächlich ein Intervall definiert.

Durch Rückschluß erhalten wir:

Ergebnis I (Abb. 3.7.): Die Beziehung $0 \leq x_1 \leq 1$ besteht genau dann, wenn

$$-\sqrt{2} \leq k \leq -\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1) \quad (13')$$

gilt.

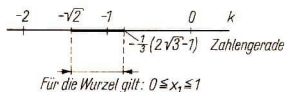


Abb. 3.7.

II. Untersuchung der Wurzel x_2 :

A. Aus der Forderung $x_2 \geq 0$ ergibt sich aus (4)

$$k - 1 - \sqrt{3 - 2k} \geq 0 \quad (14)$$

und

$$k - 1 \geq \sqrt{3 - 2k},$$

und es muß also $k - 1 \geq 0$, d. h.

$$k \geq 1 \quad (15)$$

sein, was zusammen mit der Beziehung (2)

$$1 \leq k \leq \frac{3}{2} \quad (16)$$

ergibt.

Durch Quadrieren der beiden Seiten der Ungleichung (14) erhalten wir

$$k^2 - 2k + 1 \geq 3 - 2k,$$

$$k^2 - 2 \geq 0$$

und

$$(k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) \geq 0.$$

Auf Grund von (16) ist $k + \sqrt{2} \geq 0$, und aus der letzten Ungleichung folgt, daß $k - \sqrt{2} \geq 0$, d. h. $k \geq \sqrt{2}$, ausfallen muß. Unter Benutzung von (16) erhalten wir so

$$\sqrt{2} \leq k \leq \frac{3}{2}. \quad (17)$$

B. Aus der Forderung $x_2 \leq 1$ ergibt sich aus (4):

$$3(k - 1 - \sqrt{3 - 2k}) \leq 1$$

und

$$3k - 4 \leq 3\sqrt{3 - 2k}. \quad (18)$$

Für $3k - 4 \leq 0$, d. h. $k \leq \frac{4}{3}$, ist diese Ungleichung erfüllt. Weil aber $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$ gilt, ist diese Forderung mit (17) unvereinbar.

Für $3k - 4 > 0$, d. h. für $k > \frac{4}{3}$, erhalten wir nach Quadrieren der beiden Seiten der Ungleichung (18):

$$9k^2 - 24k + 16 \leq 27 - 18k$$

und

$$(3k - 1 - 2\sqrt{3})(3k - 1 + 2\sqrt{3}) \leq 0.$$

Dabei ist der erste Faktor auf der linken Seite dieser Ungleichung kleiner als der zweite Faktor. Aus der letzten Ungleichung ergibt sich also:

$$3k - 1 - 2\sqrt{3} \leq 0$$

und

$$3k - 1 + 2\sqrt{3} \geq 0,$$

d. h., es müssen gleichzeitig

$$k \leq \frac{1}{3}(2\sqrt{3} + 1) \quad (19)$$

und

$$-\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-1) \leq k \quad (20)$$

gelten. Die Beziehung (20) ist mit der Forderung (17) erfüllt. Wir vergleichen jetzt die Beziehungen (17) und (19).

Es ist $\sqrt{2} < \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1) - \sqrt{2} &= \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1-3\sqrt{2}) > \frac{1}{3}(2 \cdot 1,7+1-3 \cdot 1,42) \\ &= \frac{1}{3}(4,4-4,26) > 0. \end{aligned}$$

Ferner ist $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1) < \frac{3}{2}$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1) &= \frac{1}{6}(9-4\sqrt{3}-2) \\ &= \frac{1}{6}(7-4\sqrt{3}) > \frac{1}{6}(7-4 \cdot 1,74) \\ &= \frac{1}{6}(7-6,96) > 0. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der beiden letzten Ergebnisse muß also auf Grund der Beziehungen (17) und (19) die Zahl k die Bedingung

$$\sqrt{2} \leq k \leq \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1) \quad (21)$$

erfüllen.

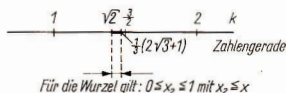


Abb. 3.8.

Durch Rückschluß erhalten wir:

Ergebnis II (Abb. 3.8.). Die Beziehung $0 \leq x_2 \leq 1$ besteht genau dann, wenn

$$\sqrt{2} \leq k \leq \frac{1}{3}(2\sqrt{3}+1) \quad (21')$$

gilt.

Endergebnis: Wenigstens eine von den Wurzeln der gegebenen Gleichung (1) ist nicht negativ und zugleich höchstens gleich der Zahl 1, wenn die Zahl k entweder der Beziehung (13') oder der Beziehung (21') genügt.

Bemerkung: Es kann niemals gleichzeitig $0 \leq x_1 \leq 1$ und $0 \leq x_2 \leq 1$ gelten (siehe auch die grafischen Darstellungen in Abb. 3.7. und 3.8.).

5. Zunächst muß $x - 1 \geq 0$, d. h.

$$x \geq 1 \quad (2)$$

sein, weil sonst $\sqrt{x-1}$ nicht definiert wäre. Dann ist $x + 2\sqrt{x-1}$ eine positive Zahl, und es existiert auch ihre Quadratwurzel. Die Zahl $x - 2\sqrt{x-1}$ darf nicht negativ sein, wenn ihre Quadratwurzel definiert sein soll, d. h., es muß gelten $x \geq 2\sqrt{x-1}$. Auf beiden Seiten dieser Ungleichung stehen nichtnegative Zahlen. Deshalb erhalten wir, wenn wir sie quadrieren, die Ungleichung

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 4(x-1), \\ \text{d. h.} \quad (x-2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist aber für jedes reelle x erfüllt. Deshalb existiert für $x \geq 1$ auch die Wurzel $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Die rechte Seite von (1) ist also für alle $x \geq 1$ und nur für diese definiert.

Jetzt ermitteln wir das Vorzeichen der y -Werte für $x \geq 1$. Wir werden beweisen, daß $y \leq 0$, d. h., daß

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \leq \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \quad (3)$$

gilt. Weil $x - 2\sqrt{x-1}$ und $x + 2\sqrt{x-1}$ für $x \geq 1$ nichtnegative Zahlen sind, erhalten wir durch Quadrieren der beiden Seiten der Ungleichung (3) eine äquivalente Ungleichung. Wenn wir die Differenz zwischen ihrer linken und ihrer rechten Seite bilden, erhalten wir:

$$x - 2\sqrt{x-1} - (x + 2\sqrt{x-1}) = -4\sqrt{x-1},$$

also für $x > 1$ einen negativen Wert und für $x = 1$ null. Damit ist bewiesen, daß

$$y \leq 0$$

ist.

Jetzt berechnen wir y^2 . Es gilt:

$$y^2 = x - 2\sqrt{x-1} + x + 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)},$$

$$y^2 = 2(x - \sqrt{(x-2)^2}),$$

$$y^2 = 2(x - |x-2|),$$

woraus unter Beachtung von $y \leq 0$

$$y = -\sqrt{2(x - |x - 2|)}$$

folgt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall [1]: Angenommen, es ist $x - 2 \geq 0$, so daß $|x - 2| = x - 2$ ist. Dann gilt

$$y = -\sqrt{4}, \text{ d. h. } y = -2.$$

Für $x \geq 2$ ist also y gleich der Konstanten -2 , was zu beweisen war, und der entsprechende Teil des Bildes der Funktion ist ein Strahl (Abb. 3.9.).

Fall [2]: Angenommen, es ist $1 \leq x \leq 2$, so daß $|x - 2| = 2 - x$ ist. Dann gilt

$$y = -\sqrt{2(x - 2 + x)},$$

$$y = -\sqrt{4(x - 1)},$$

$$y = -2\sqrt{x - 1}.$$

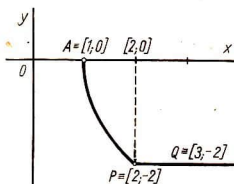
Das Bild der Funktion ist in dem betreffenden Intervall der Bogen $\widehat{AP}$ der durch die Gleichung

$$y^2 = 4(x - 1)$$

definierten Parabel, welche den Scheitelpunkt $A \equiv (1, 0)$ hat und durch den Punkt $P \equiv (2, -2)$ verläuft.

Damit ist die Ermittlung der grafischen Darstellung durchgeführt.

Abb. 3.9.



6. Angenommen, das Paar (x, y) erfülle die beiden Gleichungen (1) und (2). Dann erhalten wir auf Grund der Formel $\sin \varphi = -\sin(-\varphi)$ aus der Gleichung (1) die Gleichung

$$-\sin(-x + \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0.$$

Mit Hilfe der Formel $\sin \varepsilon = \cos(90^\circ - \varepsilon)$ kann man das erste Glied der linken Seite dieser Gleichung umformen, wodurch wir die Gleichung

$$-\cos(90^\circ + x - \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0,$$

d. h. die Gleichung

$$\cos(90^\circ + x - \alpha) - \cos(y - \alpha) = 0$$

erhalten.

Sie nimmt nach Anwendung der Formel

$$\cos \omega_1 - \cos \omega_2 = -2 \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

die Gestalt

$$-2 \sin \frac{1}{2}(x + y - 2\alpha + 90^\circ) \cdot \sin \frac{1}{2}(x - y + 90^\circ) = 0$$

an. Folglich ist

$$\sin \frac{1}{2}(x + y - 2\alpha + 90^\circ) \cdot \sin \frac{1}{2}(x - y + 90^\circ) = 0. \quad (3)$$

Einer von den beiden Faktoren der linken Seite dieser Gleichung muß gleich null sein. Jede dieser Möglichkeiten betrachten wir gesondert.

Fall [I]: Angenommen, es ist

$$\sin \frac{1}{2}(x + y - 2\alpha + 90^\circ) = 0. \quad (3')$$

Es ist bekannt, daß die Zahlen $\omega = n \cdot 180^\circ$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist, die Gesamtheit aller Lösungen der Gleichung $\sin \omega = 0$ bilden. Nach Gleichung (3') muß daher für die Zahlen x und y

$$\frac{1}{2}(x + y - 2\alpha + 90^\circ) = n \cdot 180^\circ,$$

also

$$y = 2\alpha - x - 90^\circ + n \cdot 360^\circ,$$

d. h.

$$y = 2\alpha - x + 90^\circ(4n - 1) \quad (4)$$

gelten, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Wir setzen nun dieses Ergebnis in die Gleichung (2) ein. Ihre linke Seite wird in folgender Weise umgeformt:

$$\begin{aligned} & \sin(x + \alpha) + \cos(3\alpha - x - 90^\circ) \\ &= \sin(x + \alpha) + \cos[90^\circ - (3\alpha - x)] \\ &= \sin(x + \alpha) + \sin(3\alpha - x) \\ &= 2 \sin 2\alpha \cos(x - \alpha), \end{aligned}$$

wobei wir die Formel

$$\sin \omega_1 + \sin \omega_2 = 2 \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

verwendet haben.

Setzt man (4) in (2) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\alpha \cdot \cos (x - \alpha) &= \sin 2\alpha, \\ \sin 2\alpha \left[\cos (x - \alpha) - \frac{1}{2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Unterscheiden wir die beiden Möglichkeiten **[a]** und **[b]**.

[a]: Angenommen, es ist

$$\sin 2\alpha = 0, \quad (6)$$

d. h.

$$2\alpha = p \cdot 180^\circ, \quad (6')$$

wobei p eine beliebige ganze Zahl ist. Dann ist die Gleichung (5) für jede reelle Zahl x erfüllt. Die Lösung des Gleichungssystems (1) und (2) kann einzig und allein das Zahlenpaar [siehe (4)]

$$(x, y) \quad \text{mit} \quad y = -x + 2\alpha - 90^\circ + n \cdot 360^\circ \quad (7)$$

sein, in dem x eine beliebige reelle und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, wobei (6') gilt.

Führen wir die Probe durch Einsetzen der Zahlen (7) in die Gleichungen (1) und (2) durch, deren linke Seiten wir der Reihe nach mit L_1 und L_2 bezeichnen:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sin (x - \alpha) + \cos (-x + \alpha - 90^\circ) \\ &= \sin (x - \alpha) + \cos [90^\circ - (\alpha - x)] \\ &= \sin (x - \alpha) + \sin (\alpha - x) \\ L_1 &= \sin (x - \alpha) - \sin (x - \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich tatsächlich: $L_1 = 0$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} L_2 &= \sin (x + \alpha) + \cos (-x + 3\alpha - 90^\circ) \\ &= \sin (x + \alpha) + \cos [90^\circ - (3\alpha - x)] \\ &= \sin (x + \alpha) + \sin (3\alpha - x) \\ L_2 &= 2 \sin 2\alpha \cos (x - \alpha). \end{aligned}$$

Da aber $\sin 2\alpha$ nach der Voraussetzung gleich null ist, so ist also $L_2 = 0$, deshalb sind die beiden Seiten der Gleichung (2) gleich null. Es sind also die Zahlen (7) die Lösung des Gleichungssystems (1), (2), und zwar dann, wenn (6) oder, was auf dasselbe hinausläuft, (6') gilt.

[b]: Angenommen, es ist

$$\sin 2\alpha \neq 0, \quad (8)$$

d. h.

$$2\alpha \neq p \cdot 180^\circ, \quad (8')$$

und zwar für jede beliebige ganze Zahl p . Dann ergibt sich aus der Gleichung (5) die Gleichung

$$\cos(x - \alpha) = \frac{1}{2},$$

d. h., es muß entweder

$$x - \alpha = 60^\circ + m_1 \cdot 360^\circ$$

oder

$$x - \alpha = 300^\circ + m_2 \cdot 360^\circ$$

sein, wobei m_1 und m_2 beliebige ganze Zahlen sind. Die Zahl x muß demnach einer der beiden Bedingungen

$$x = \alpha + 60^\circ + m_1 \cdot 360^\circ \quad (m_1 \text{ ganz}) \quad (9)$$

oder

$$x = \alpha + 300^\circ + m_2 \cdot 360^\circ \quad (m_2 \text{ ganz}) \quad (10)$$

genügen. Setzen wir einen der x -Werte aus (9) oder (10) in (4) ein, so erhalten wir als entsprechende Zahlen y :

$$y = \alpha - 90^\circ - 60^\circ + (n - m_1) 360^\circ,$$

$$y = \alpha - 90^\circ - 300^\circ + (n - m_2) 360^\circ,$$

d. h.

$$y = \alpha + 210^\circ + n_1 \cdot 360^\circ, \quad (9')$$

$$y = \alpha + 330^\circ + n_2 \cdot 360^\circ. \quad (10')$$

Dabei gehören die Paare (9), (9') und (10), (10') zusammen.

I. Probe durch Einsetzen des Paares (9), (9') in (1) und (2):

$$L_1 = \sin 60^\circ + \cos 210^\circ = \sin 60^\circ - \cos 30^\circ = 0;$$

$$L_2 = \sin(2\alpha + 60^\circ) + \cos(2\alpha + 210^\circ)$$

$$= \sin 2\alpha \cos 60^\circ + \cos 2\alpha \sin 60^\circ + \cos 2\alpha \cos 210^\circ - \sin 2\alpha \sin 210^\circ$$

$$= \sin 2\alpha (\cos 60^\circ + \sin 30^\circ) + \cos 2\alpha (\sin 60^\circ - \cos 30^\circ)$$

$$L_2 = \sin 2\alpha \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sin 2\alpha.$$

Das Zahlenpaar (9), (9') erfüllt also die beiden Gleichungen (1) und (2).

II. Probe durch Einsetzen des Paares (10), (10') in (1) und (2):

$$L_1 = \sin 300^\circ + \cos 330^\circ = -\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = 0;$$

$$L_2 = \sin (2\alpha + 300^\circ) + \cos (2\alpha + 330^\circ)$$

$$= \sin 2\alpha \cos 300^\circ + \cos 2\alpha \sin 300^\circ + \cos 2\alpha \cos 330^\circ - \sin 2\alpha \sin 330^\circ$$

$$= \sin 2\alpha (\cos 60^\circ + \sin 30^\circ) + \cos 2\alpha (-\sin 60^\circ + \cos 30^\circ)$$

$$L_2 = \sin 2\alpha \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sin 2\alpha.$$

Das Zahlenpaar (10), (10') erfüllt also ebenfalls die beiden Gleichungen (1) und (2).

Fall [2]: Angenommen, es ist

$$\sin \frac{1}{2}(x - y + 90^\circ) = 0, \quad (3'')$$

d. h.

$$\frac{1}{2}(x - y + 90^\circ) = n \cdot 180^\circ,$$

wobei n eine ganze Zahl ist, so daß

$$\text{ist. } x = y - 90^\circ + n \cdot 360^\circ \quad (11)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\sin (y + \alpha - 90^\circ) + \cos (y + \alpha) = \sin 2\alpha$$

und weiter

$$-\sin [90^\circ - (y + \alpha)] + \cos (y + \alpha) = \sin 2\alpha,$$

$$-\cos (y + \alpha) + \cos (y + \alpha) = \sin 2\alpha,$$

$$0 = \sin 2\alpha. \quad (12)$$

Es gibt die zwei Möglichkeiten **[a]** und **[b]**:

[a] Angenommen, es ist

$$\sin 2\alpha = 0, \quad (13)$$

also

$$2\alpha = n \cdot 180^\circ,$$

d. h.

$$\alpha = n \cdot 90^\circ,$$

wobei n eine gewisse ganze Zahl ist. Dann ist die Gleichung (12) für jede beliebige Zahl y erfüllt. Eine der Zahlen x, y wählen wir aus, die zweite errechnen wir aus der Beziehung (11).

Wenn $\sin 2\alpha = 0$ ist, dann ist jedes Paar

$$(x, y) \text{ mit } y = x + R + m \cdot 360^\circ, \quad (14)$$

bei dem x eine reelle und m eine ganze Zahl ist, Lösung der Gleichungen (1) und (2). Wir überzeugen uns davon durch Einsetzen.

III. Probe:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sin(x - \alpha) + \cos(x + 90^\circ - \alpha) \\ &= \sin(x - \alpha) + \cos[90^\circ - (\alpha - x)] \\ &= \sin(x - \alpha) + \sin(\alpha - x) \end{aligned}$$

$$L_1 = \sin(x - \alpha) - \sin(x - \alpha) = 0.$$

$$L_2 = \sin(x + \alpha) + \cos(90^\circ + x + \alpha)$$

$$L_2 = \sin(x + \alpha) - \sin(x + \alpha) = 0,$$

wobei die rechte Seite der Gleichung (2) gleich $\sin 2\alpha = 0$ ist.

Die Zahlen (14) erfüllen die Gleichungen (1) und (2).

[b] Angenommen, es ist

$$\sin 2\alpha \neq 0,$$

d. h.

$$\alpha \neq nR,$$

welche ganze Zahl wir auch immer für n wählen. Dann ist die linke Seite der Gleichung (2) nach Einsetzen für x aus der Beziehung (11) gleich null, während die rechte Seite von null verschieden ist. Das Zahlenpaar (14) erfüllt also die Gleichung (2) im Fall $\alpha \neq nR$ nicht.

Ergebnis: Ist 1. $\sin 2\alpha = 0$, dann ist jedes Zahlenpaar (7), d. h. x (eine beliebige reelle Zahl), $y = -x + 2\alpha - 90^\circ + n \cdot 360^\circ$ (wobei n eine beliebige ganze Zahl ist) und ferner jedes Zahlenpaar (14), d. h. x (eine beliebige reelle Zahl), $y = x + 90^\circ + n \cdot 360^\circ$ (wobei n eine beliebige ganze Zahl ist) Lösung des Gleichungssystems (1), (2).

Ist 2. $\sin 2\alpha \neq 0$, dann ist jedes Zahlenpaar (9), (9') und (10), (10'), d. h.

$$\text{a) } x = \alpha + 60^\circ + m \cdot 360^\circ, \quad y = \alpha + 210^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\text{b) } x = \alpha + 300^\circ + m \cdot 360^\circ, \quad y = \alpha + 330^\circ + n \cdot 360^\circ$$

(wobei m, n beliebige ganze Zahlen sind) Lösung der beiden Gleichungen (1), (2). Andere Lösungen gibt es nicht.

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 11

7. Damit die Ausdrücke auf der linken Seite von (1) einen Sinn haben, muß $\tan x \neq 0$, $\cot x \neq 0$ sein, und außerdem müssen $\tan x$, $\cot x$, $\tan 2x$ und $\cot 2x$ erklärt sein. Daraus erhalten wir folgende Bedingungen für die Zahl x :

Für jede ganze Zahl m ist:

$$x \neq m\pi; \quad x \neq (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}; \quad x \neq (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$x \neq m\pi;$$

$$2x \neq (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}; \quad 2x \neq m\pi.$$

Diese Forderungen kann man folgendermaßen schreiben:

$$x \neq n \cdot \frac{\pi}{4}, \tag{2}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Angenommen, im weiteren erfüllt x die Beziehung (2). Wenn x eine Lösung der Ungleichung (1) ist, so setzen wir

$$\tan x = y.$$

Dann lautet (1)

$$\frac{2y}{(1-y^2)y} - \frac{2y(1-y^2)}{2y} \leq 1,$$

woraus sich durch Umformungen

$$\frac{2}{1-y^2} - (1-y^2) \leq 1,$$

$$\frac{2 - (1-y^2)^2 - (1-y^2)}{1-y^2} \leq 0,$$

$$\frac{-y^4 + 3y^2}{1-y^2} \leq 0,$$

$$\frac{y^2(y^2-3)}{y^2-1} \leq 0 \tag{3}$$

ergibt. Wegen (2) ist $y \neq 0$ und also $y^2 > 0$. An Stelle von (3) genügt es deshalb, die Ungleichung

$$\frac{y^2-3}{y^2-1} \leq 0 \tag{3'}$$

zu untersuchen.

Im folgenden ist n eine beliebige ganze Zahl. Betrachten wir die Fälle [1] und [2]:

Fall [1]: Angenommen, es ist $y^2 - 1 > 0$, d. h. $|y| > 1$. Dann gilt offensichtlich

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3}{4}\pi + n\pi \quad (4)$$

[wobei nach Voraussetzung gleichzeitig (2) gilt].

Aus (3') folgt dann, daß $y^2 - 3 \leq 0$, d. h. daß $|y| \leq \sqrt{3}$ also entweder

$$n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (5)$$

oder

$$\frac{2}{3}\pi + n\pi \leq x \leq \pi + n\pi \quad (6)$$

sein muß. Aus (2), (4) und (5) bzw. (6) erhalten wir, daß entweder

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (7)$$

oder

$$\frac{2}{3}\pi + n\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi \quad (7')$$

gelten muß.

Durch Rückschluß stellen wir fest, daß alle Zahlen, die die Beziehungen (7) bzw. (7') erfüllen, der Ungleichung (1) genügen.

Fall [2]: Angenommen, es ist $y^2 - 1 < 0$. Dann folgt aus (3'), daß $y^2 - 3 \geq 0$ sein muß. Aber diesen beiden Beziehungen kann keine reelle Zahl gleichzeitig genügen.

Ergebnis (Abb. 3.10.): Alle Lösungen der Ungleichung (1) sind durch die Beziehungen (7) und (7') gegeben.

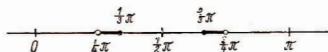


Abb. 3.10.

8. Wir nehmen an, daß die Aufgabe eine Lösung hat und bezeichnen mit α_1 und α_2 die Ebenen, die durch den Punkt M und die Gerade p_1 bzw. p_2 bestimmt sind. Diese Ebenen sind voneinander verschieden (sonst würden die Geraden p_1 und p_2 in dieser Ebene liegen), und weil sie den Punkt M gemeinsam haben, sind die Ebenen α_1 und α_2 nicht zueinander parallel. Ihre Schnittgerade bezeichnen wir mit t . Die Gerade t ist offensichtlich von den Geraden p_1 und p_2 verschieden, weil sonst der Punkt M auf einer von ihnen liegen würde. Jetzt führen wir die betreffende Konstruktion in der Ebene α_1 durch:

a) In der Ebene α_1 sind die voneinander verschiedenen Geraden p_1 und t gegeben und auf der Geraden t der Punkt M , der nicht auf p_1 fällt.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

[1]: p_1 und t haben einen Punkt P_1 gemeinsam (Abb. 3.11.).

[2]: $p_1 \parallel t$, wobei $p_1 \neq t$ ist (Abb. 3.12.).

Fall [1]: Wenn p_1 und t auseinanderlaufende Geraden sind, kann man folgendermaßen verfahren (Abb. 3.11.):

Wir konstruieren auf p_1 die zwei voneinander verschiedenen Punkte X_1 und Y_1 so, daß $\overline{P_1 X_1} = \overline{P_1 Y_1} = \overline{P_1 M}$ ist. In jedem der Winkel $MP_1 X_1$ und $MP_1 Y_1$ liegt genau eine Kreislinie, welche die Gerade t in dem Punkt M und die Gerade p_1 (in dem Punkt X_1 bzw. Y_1 – siehe Abb. 3.11.) berührt. Wir bezeichnen diese Kreislinien mit x_{k1} und y_{k1} . Es sind dies zwei Kreislinien, die voneinander verschieden sind.

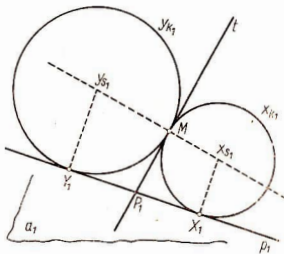


Abb. 3.11.

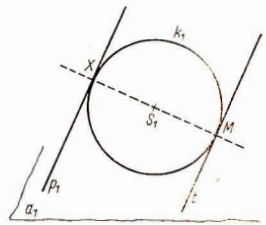


Abb. 3.12.

Fall [2]: Angenommen, es ist $p_1 \parallel t$, $p_1 \neq t$ (siehe Abb. 3.12.). Dann existiert offensichtlich nur eine einzige Kreislinie k_1 , welche die Gerade t in dem Punkt M und die Gerade p_1 berührt.

b) Die gleiche Konstruktion wie in der Ebene α_1 führen wir in der Ebene α_2 durch (siehe den vorausgehenden Text, in welchem die Gerade p_1 durch die Gerade p_2 ersetzt wird). Wenn p_2 und t auseinanderlaufende Geraden sind, erhalten wir zwei voneinander verschiedene Kreislinien x_{k2} und y_{k2} . Wenn $p_2 \parallel t$ ist (dabei ist $p_2 \neq t$), erhalten wir nur eine Kreislinie k_2 .

Diskussion: Damit sind die Kreislinien konstruiert. Es bleibt noch zu ermitteln, unter welchen Bedingungen wir in der Ebene α_1 bzw. in der Ebene α_2 zwei Kreislinien oder eine erhalten.

Wenn $p_1 \parallel t$ ist, dann sind die Geraden p_2 und t , welche in der Ebene α_2 liegen, auseinanderlaufend (sonst wäre $p_1 \parallel p_2$). Der Punkt M und die Gerade t liegen in der

Ebene α_2 , d. h., es ist $\alpha_2 \parallel p_1$. Entsprechend liegen der Punkt M und die Gerade t , wenn $p_2 \parallel t$ ist, in der Ebene α_1 und es ist $\alpha_1 \parallel p_2$. Wenn keine der Beziehungen $p_1 \parallel t$ oder $p_2 \parallel t$ gilt, dann ist t Transversale der zueinander windschiefen Geraden p_1 und p_2 .

Ergebnis der Diskussion: Wir bezeichnen mit π_1 die Ebene durch die Gerade p_1 , die parallel zu p_2 ist. Ferner bezeichnen wir mit π_2 die Ebene durch die Gerade p_2 , die parallel zu p_1 ist. (Es existiert genau eine Ebene π_1 und eine Ebene π_2 , es ist $\pi_1 \parallel \pi_2$ und $\pi_1 \not\equiv \pi_2$.) Wenn der Punkt M in keiner der Ebenen π_1 oder π_2 liegt, so existieren in jeder der Ebenen α_1 und α_2 genau zwei Kreislinien, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Durch Kombinieren erhalten wir also insgesamt vier Paare gesuchter Kreislinien (k_1, k_2) , und zwar die Paare:

$$x_{k1}, x_{k2}; \quad x_{k1}, y_{k2}; \quad y_{k1}, x_{k2}; \quad y_{k1}, y_{k2}.$$

Liegt der Punkt M in einer der Ebenen π_1, π_2 , etwa in der Ebene π_1 , so daß $\pi_1 \equiv \alpha_1$ ist, dann existieren in der Ebene α_1 genau zwei Kreislinien, während in der Ebene $\alpha_2 \not\equiv \pi_2$ nur eine einzige Kreislinie existiert, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht (jetzt ist $t \parallel p_2$). In diesem Falle erhalten wir also durch Kombinieren insgesamt zwei Paare gesuchter Kreislinien, z. B. das Paar x_{k1}, x_{k2} und das Paar y_{k1}, x_{k2} .

9. a) Wir bezeichnen wie in der Abbildung 3.1. die Eckpunkte des neuen Sechsecks mit $C_1, C_2, \dots, C_6$. Nach den Sätzen über die Kongruenz der Dreiecke können wir leicht beweisen, daß die Dreiecke $\triangle A_1 A_2 B_2, \triangle A_2 A_3 B_3, \dots, \triangle A_6 A_1 B_1$ sowie die Dreiecke $\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2, \dots, \triangle A_6 B_6 C_6$ kongruent sind. Daraus folgt, daß im Sechseck $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6$ alle Innenwinkel und alle Seiten gleich sind, daß es also regelmäßig ist.

b) Der Flächeninhalt P_0 des gegebenen Sechsecks ist

$$P_0 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Wir bezeichnen mit P den Flächeninhalt des Sechsecks $C_1 C_2 \dots C_6$ und mit P' den Flächeninhalt des Dreiecks $A_1 A_2 C_2$.

In dem Dreieck $A_1 A_2 C_2$ ist $\sphericalangle A_2 A_1 B_2 = \varphi$,

$$\sphericalangle A_1 A_2 C_2 = \sphericalangle A_1 A_2 A_3 - \sphericalangle A_3 A_2 B_3 = 120^\circ - \varphi$$

und $\sphericalangle A_1 C_2 A_2 = 60^\circ$. Aus dem auf dieses Dreieck angewandten Sinussatz folgt

$$\frac{\overline{A_1 C_2}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin 60^\circ}, \quad \frac{\overline{A_2 C_2}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\sin \varphi}{\sin 60^\circ},$$

d. h.

$$\overline{A_1 C_2} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin 60^\circ}, \quad \overline{A_2 C_2} = \frac{\sin \varphi}{\sin 60^\circ}.$$

Dabei ist $\overline{A_1 C_1} = \overline{A_2 C_2}$ und also $\overline{C_1 C_2} = \overline{A_1 C_2} - \overline{A_1 C_1} = \overline{A_1 C_2} - \overline{A_2 C_2}$, d. h.

$$y = \overline{C_1 C_2} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi) - \sin \varphi}{\sin 60^\circ}$$

$$y = \frac{2 \cos 60^\circ \sin(60^\circ - \varphi)}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(60^\circ - \varphi).$$

Daher ist

$$P = 6 \cdot \frac{1}{4} y^2 \sqrt{3} = \frac{6}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin^2(60^\circ - \varphi),$$

d. h.

$$P = 2\sqrt{3} \sin^2(60^\circ - \varphi). \quad (1)$$

c) Wir sollen den Wert von φ ermitteln, für den $P = \frac{2}{3} P_0$, d. h. $P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3}$ und also

$$P = \sqrt{3} \quad (2)$$

gilt.

Aus den Beziehungen (1) und (2) ergibt sich:

$$2\sqrt{3} \sin^2(60^\circ - \varphi) = \sqrt{3},$$

$$\sin^2(60^\circ - \varphi) = \frac{1}{2},$$

$$\sin(60^\circ - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (3)$$

denn auf Grund der Aufgabe ist

$$0 < \varphi < 30^\circ, \quad (3')$$

und demnach ist $\sin(60^\circ - \varphi) > 0$, so daß für den Winkel $60^\circ - \varphi$

$$30^\circ < 60^\circ - \varphi < 60^\circ$$

gelten muß, d. h., der Winkel $60^\circ - \varphi$ ist spitz.

Aus den Beziehungen (3) und (3') ergibt sich $60^\circ - \varphi = 45^\circ$, d. h.

$$\varphi = 15^\circ.$$

Ergebnis: Den Flächeninhalt des entstandenen Sechsecks für $0 < \varphi < 30^\circ$ erhält man mit Hilfe der Formel (1). Dieser Flächeninhalt ist genau dann gleich zwei Dritteln des Flächeninhalts des gegebenen Sechsecks, wenn $\varphi = 15^\circ$ ist.

Zusatzaufgabe:

Aus dem Dreieck $A_1A_2B_2$, in welchem $\sphericalangle A_2A_1B_2 = \varphi_1$, $\sphericalangle A_1A_2B_2 = 120^\circ$ und $\sphericalangle A_2B_2A_1 = 60^\circ - \varphi_1$ ist, erhalten wir mit Hilfe des Sinussatzes

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\sin \varphi}{\sin (60^\circ - \varphi)}.$$

Für $x = \overline{A_2B_2}$ gilt

$$x = \frac{\sin \varphi}{\sin (60^\circ - \varphi)} \quad (4).$$

und also

$$\sin (60^\circ - \varphi) = \frac{\sin \varphi}{x}.$$

Nach Einsetzen in (1) erhalten wir

$$P = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{x^2}. \quad (5).$$

Aus (4) ergibt sich hieraus für $0 < \varphi < 30^\circ$ (siehe die geometrische Bedeutung des Winkels φ und der Strecke $\overline{A_2B_2}$ der Länge x , wobei der Punkt B_2 innerhalb der Strecke $\overline{A_2A_3}$ liegt):

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin (60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right] : \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \varphi - \frac{1}{2}$$

und also

$$\cot \varphi = \frac{2+x}{2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2+x}{x\sqrt{3}}. \quad (6).$$

Bekanntlich ist

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi},$$

woraus sich unter Benutzung von (6):

$$\sin^2 \varphi = 1 : \left[1 + \frac{4 + 4x + x^2}{3x^2} \right]$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

ergibt. Setzen wir nun dieses Ergebnis in (5) ein, so erhalten wir:

$$P = \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

10. Aus der Ungleichung $2c > a + b$ erhalten wir durch Quadrieren der beiden Seiten (es handelt sich um positive Zahlen)

$$4c^2 > a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 + 4ab \geq 4ab$$

und also

$$c^2 > ab. \quad (2)$$

Deshalb ist in (1) $c^2 - ab > 0$, und die Wurzeln haben einen Sinn.

I. Nehmen wir an, daß gilt

$$c - \sqrt{c^2 - ab} < a \quad \text{oder} \quad c - a < \sqrt{c^2 - ab}. \quad (3)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

Fall [1]: Angenommen, es ist $c - a \leq 0$, dann gilt (3).

Fall [2]: Angenommen, es ist $c - a > 0$. Wir erheben die beiden Seiten (3) ins Quadrat und erhalten

$$c^2 - 2ac + a^2 < c^2 - ab$$

und

$$0 < a(2c - a - b). \quad (4)$$

Weil $2c > a + b$ gilt, ist die Beziehung (4) richtig. Durch Rückschluß kommen wir zu (3).

II. Die Gültigkeit der Ungleichung $a < c + \sqrt{c^2 - ab}$, d. h.

$$a - c < \sqrt{c^2 - ab}$$

beweisen wir entsprechend wie im Absatz I.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Entwurf einer anderen Lösung:

I. Nach der Voraussetzung gilt

$$(2c)^2 > (a + b)^2. \quad (5)$$

Angenommen, es gilt nicht (2), d. h., es gilt

$$4c^2 \leq 4ab. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) ergibt sich $4ab > (a + b)^2$ oder $0 > (a - b)^2$, was unmöglich ist.

II. Angenommen, es gilt $c - \sqrt{c^2 - ab} \geq a$ oder $c - a \geq \sqrt{c^2 - ab}$. Dann ist notwendigerweise $c - a \geq 0$, und es gilt $(c - a)^2 \geq c^2 - ab$, d. h. $-2ac + a^2 \geq -ab$ und $2c \leq a + b$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Lösungen zu den Aufgaben der dritten Stufe, Klasse 11

11. Wenn x Lösung der Ungleichung (1) ist, dann muß für jede ganze Zahl n

$$x \neq n \cdot 90^\circ \quad (2)$$

sein, sonst hätten die Brüche in (1) keinen Sinn. Dann ist

$$3 \sin^2 x \cos^2 x > 0,$$

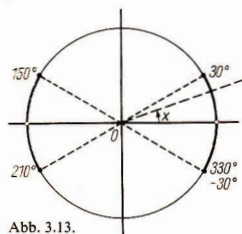


Abb. 3.13.

und durch Multiplizieren der beiden Seiten der Ungleichung (1) mit dieser Zahl erhalten wir die Ungleichung

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) \geq 8 \cos^2 x \sin^2 x.$$

Nach einer Umformung erhalten wir

$$8 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - 3 \geq 0$$

oder

$$\left[\cos^2 x - \frac{3}{4} \right] \left[\cos^2 x + \frac{1}{2} \right] \geq 0.$$

Weil der zweite Faktor auf der linken Seite dieser Ungleichung sicher positiv ist, folgt daraus, daß

$$\cos^2 x - \frac{3}{4} \geq 0,$$

d. h.

$$|\cos x| \geq \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

sein muß.

Weil $\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ist, finden wir aus der grafischen Darstellung der Funktion

$y = \cos x$ leicht folgende Intervalle für den Winkel x (siehe z. B. Abb. 3.13.):

$$-30^\circ + k \cdot 180^\circ \leq x < k \cdot 180^\circ,$$

$$k \cdot 180^\circ < x \leq 30^\circ + k \cdot 180^\circ,$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

Durch Rückschluß kommen wir von einer beliebigen der Zahlen x dieser Intervalle zu der Beziehung (1). Damit ist die Aufgabe gelöst.

Eine andere Lösung:

Die Beziehung (1) kann man unter der Voraussetzung (2) auf folgende Weise umformen (es ist $\tan^2 x > 0$):

$$\cot^2 x - \tan^2 x \geq \frac{8}{3},$$

$$0 \geq 3 \tan^4 x + 8 \tan^2 x - 3.$$

Die Gleichung $3y^2 + 8y - 3 = 0$ hat die Wurzeln

$$y_{1,2} = \frac{1}{6}(-8 \pm \sqrt{64 + 36}) = \frac{1}{6}(-8 \pm 10),$$

d. h. $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -3$. Man kann deshalb die Beziehung (3) in der Form

$$0 \geq (\tan^2 x + 3)(3 \tan^2 x - 1)$$

schreiben, wobei der erste Faktor rechts eine positive Zahl ist, und deshalb

$$3 \tan^2 x - 1 \leq 0$$

sein muß.

Daraus folgt

$$|\tan x| \leq \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

Für x muß deshalb entweder

$$n \cdot 180^\circ \leq x \leq 30^\circ + n \cdot 180^\circ$$

oder

$$150^\circ + n \cdot 180^\circ \leq x \leq 180^\circ + n \cdot 180^\circ$$

gelten, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Unter Berücksichtigung von (2) erhalten wir somit die Intervalle

$$n \cdot 180^\circ < x \leq 30^\circ + n \cdot 180^\circ,$$

$$150^\circ + n \cdot 180^\circ \leq x < 180^\circ + n \cdot 180^\circ,$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Durch Rückschluß gelangen wir von jeder von dieser Zahlen x zur Ungleichung (1).

12. Analyse (Abb. 3.14.): Die gesuchte Kugel κ ist in bezug auf die Ebene $\varrho \equiv ABB'$ symmetrisch. Deshalb liegt ihr Mittelpunkt S in der Ebene ϱ . Die Kugel κ berührt die Gerade $q \equiv A'D'$, so daß $q \perp \varrho$ gilt. Weil die durch den Mittelpunkt einer Kugel

gelegte Ebene, die auf einer gegebenen Kugeltangente senkrecht steht, diese Tangente in ihrem Berührungspunkt schneidet, ist der Punkt A' der Berührungspunkt der Tangente q mit der Kugel κ . Die Ebene q schneidet die Kugel κ in der Großkreislinie k mit dem Mittelpunkt S . Die Kreislinie k verläuft also durch die Punkte A' und P und berührt die Gerade $p \equiv AB$. Damit haben wir unsere Aufgabe auf eine planimetrische Aufgabe zurückgeführt, welche wir in der Ebene q durchführen.

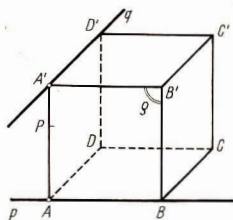


Abb. 3.14.

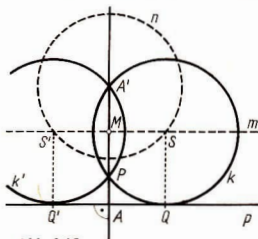


Abb. 3.15.

Wir bezeichnen mit m die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PA'}$ (sofern $P \neq A'$ ist), so daß $m \parallel p$ ist; der Punkt S muß auf der Halbierenden m der Bogensehne $\overline{PA'}$ liegen, und weil die Tangente p zum Durchmesser m parallel verläuft, ist der Abstand r der Parallelen p und m der Radius der Kreislinie k . Daraus ergibt sich die Konstruktion des Punktes S (Abb. 3.15.): Wir konstruieren die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{PA'}$ und ermitteln den Abstand $r = \overline{AM}$ zwischen den Parallelen m und p . Der Punkt S liegt einerseits auf der Geraden m , andererseits auf der Kreislinie $n \equiv (A', r)$, d. h., er ist einer der Schnittpunkte der Geraden m und der Kreislinie n . Ferner konstruieren wir die Kreislinie $k \equiv (S, r)$.

Beweisführung: Wir betrachten nun die Kugel κ mit dem Mittelpunkt S und dem Radius r . Auf ihr ist die Kreislinie k Großkreislinie. Die Fläche κ verläuft entsprechend der Konstruktion durch die Punkte P und A' . Weil $A'D' \perp q$ steht, ist der Punkt A' der Berührungspunkt der Tangente $A'D' \equiv q$ der Kugel κ . Die Gerade p berührt die Kreislinie k im Punkt Q . Deshalb hat die Gerade p mit der Fläche κ nur den Punkt Q gemeinsam, und die Gerade p ist deshalb auch Tangente an die Fläche κ . Damit haben wir bewiesen, daß die Fläche κ die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Unsere Erwägung haben wir unter der Voraussetzung angestellt, daß $P \neq A'$ ist.

Diskussion:

[1] Wenn $P = A$ ist, so ist $r = \frac{1}{2} \overline{AA'}$, und die Kreislinie k berührt die Gerade p im

Punkt A . Die Aufgabe hat eine einzige Lösung (Abb. 3.16.).

[2] Wenn der Punkt P innerhalb der Strecke AA' liegt, ist $r > \frac{1}{2} \overline{AA'}$. Die Ent-

fernung des Punktes A' von der Geraden m ist kleiner als r . Deshalb schneidet die

Kreislinie n die Gerade m in zwei voneinander verschiedenen Punkten S und S' , und die Aufgabe hat zwei Lösungen (Abb. 3.15.).

[3] Wenn $P \equiv A'$ ist (ein Ausnahmefall, den wir nicht in Betracht gezogen haben – siehe Abb. 3.17.), so hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Jeder Punkt T der

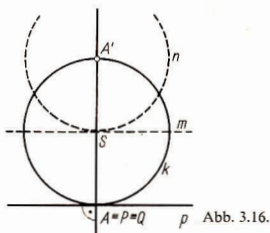


Abb. 3.16.

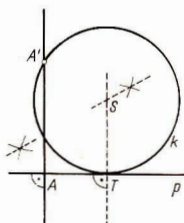


Abb. 3.17.

Geraden p ist Berührungspunkt einer Kreislinie durch den Punkt A' . (Die Menge der Mittelpunkte der gesuchten Kugelflächen κ ist nach der bekannten Definition eine Parabel mit dem Brennpunkt A' und der Leitlinie p .)

[4] Wenn der Punkt P auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AA'}$ über den Punkt A' hinaus liegt, ist der Abstand d des Punktes A' von der Geraden m gleich $d = \frac{1}{2} \overline{A'P}$, während der Radius r der Kreislinie n gleich $r = \frac{1}{2} \overline{A'P} + \overline{AA'}$ ist, d. h., $r > d$. Des-

halb schneiden die Gerade m und die Kreislinie n einander in zwei voneinander verschiedenen Punkten S und S' , und die Aufgabe hat zwei Lösungen (Abb. 3.18.).

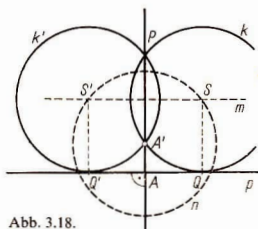


Abb. 3.18.

[5] Wenn der Punkt P auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AA'}$ über den Punkt A hinaus liegt, hat die Aufgabe keine Lösung; denn zwei Punkte (P und A') einer Kreislinie können nicht auf verschiedenen Seiten einer Tangente (p) dieses Kreises liegen.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

13. Analyse (Abb. 3.19.): In dem Dreieck ABM ist $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BM}$, und deshalb ist der Winkel $\omega \equiv \angle BAM$ sicher spitz. Daher fällt der Fußpunkt K des von M auf die Gerade AB gefällten Lotes auf den Strahl $\overline{AB}$. Weil M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, ist $\overline{MK} = \frac{1}{2} v$, wobei v die Höhe des Rhombus ist. Das Dreieck AMK hat am

Eckpunkt K einen rechten Winkel. Wir kennen die Hypotenuse $\overline{AM}$ und die Länge der Kathete $\overline{MK}$ dieses Dreiecks (Bestimmung nach dem Satz *ssw*). In dem Dreieck ABM ist

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Auf Grund dessen konstruieren wir die Seite des gesuchten Rhombus.

Konstruktion (Abb. 3.19): Über der Strecke $\overline{AM}$ als Durchmesser konstruieren wir die Kreislinie k und beschreiben die Kreislinie $m \equiv \left(M, \frac{1}{2}v\right)$. Wir wählen eine der Halbebenen, die von der Gerade AM begrenzt werden, und bezeichnen mit K den Schnittpunkt der Kreislinien k und m , der in dieser Halbebene liegt. Damit haben wir das Dreieck AMK konstruiert. Das Dreieck ABM konstruieren wir unter Verwendung der Homothetie folgendermaßen:

Innerhalb des Strahls AK wählen wir einen Punkt P und beschreiben die Kreislinie $n \equiv \left(P, \varrho = \frac{1}{2}\overline{AP}\right)$. Wir bezeichnen mit $X \neq A$ einen der Schnittpunkte des Strahls AM mit der Kreislinie n . Dann gilt $\frac{\overline{PX}}{\overline{AP}} = \frac{1}{2}$. Bei der Homothetie zum Mittelpunkt A

ist dem Punkt X der Punkt M zugeordnet. Dann entspricht dem Punkt P der Punkt B (es ist $\overline{MB} \parallel \overline{XP}$), und es gilt die Beziehung (1). Damit haben wir die Seite $\overline{AB}$ des gesuchten Rhombus $ABCD$ konstruiert, welchen wir dann leicht konstruieren können.

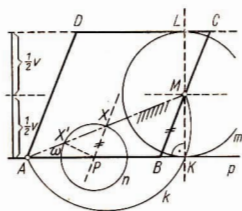


Abb. 3.19.

Aus der Konstruktion folgt, daß ein auf diese Weise konstruierter Rhombus die Forderungen der Aufgaben erfüllt: Der Punkt A ist Eckpunkt, der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$, und die Höhe des Rhombus ist v .

Diskussion: Der Punkt K läßt sich in der gewählten Halbebene genau dann konstruieren, wenn $\overline{MK} < \overline{MA}$, d. h. wenn

$$v < 2d \quad (2)$$

ist.

Die Aufgabe hat zwei Lösungen, eine oder keine Lösung, je nachdem, ob auf dem Strahl AM zwei Punkte, ein oder kein Punkt der Kreislinie $n \equiv \left(P, \varrho = \frac{1}{2}\overline{AP}\right)$ liegen, d. h. je nachdem, welche von den Beziehungen $x < \varrho$, $x = \varrho$, $x > \varrho$ gilt (x ist die Entfernung des Punktes P von der Geraden AM). Dabei ist $\varrho < \overline{AP}$, so daß jeder Schnittpunkt der Kreislinie n mit der Geraden AM auf den Strahl AM fällt). Nun ist

aber $x = \overline{AP} \cdot \sin \omega$ und $\sin \omega = \frac{1}{2} v \cdot \frac{1}{d}$, wenn $\omega \equiv \angle KAM$ ist. Es gilt also $\frac{x}{2\varrho} = \frac{v}{2d}$. Je nachdem ob $\frac{v}{d} < 1$, $\frac{v}{d} = 1$ oder $\frac{v}{d} > 1$, d. h. $v < d$, $v = d$ oder $v > d$ ist, hat die Aufgabe zwei, eine oder keine Lösung.

In einem Quadrat ist die Höhe v des Quadrats gleich der Seite a des Quadrats. Mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS erhalten wir in diesem Falle aus dem Dreieck AMB :

$$d = \frac{1}{2} v \sqrt{5}.$$

Wenn diese Beziehung gilt, so ist $v < d$, und eine der beiden Lösungen ist ein Quadrat.

Ergebnis: Bei der Konstruktion des Punktes K haben wir uns auf eine der beiden entgegengesetzten Halbebenen mit der Grenze AM begrenzt. Durch Spiegelung an der Geraden AM gelangen wir mit Hilfe der eben beschriebenen Lösungen zu weiteren

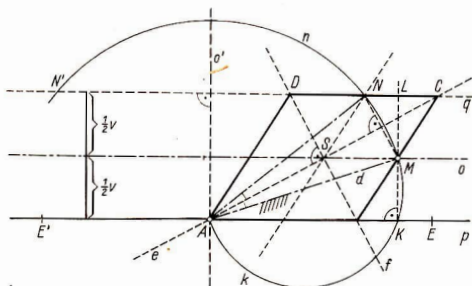


Abb. 3.20.

(auch in dem Falle, daß BC senkrecht auf AM steht oder $v = d$ ist) Lösungen. Für $v = d$ gibt es also insgesamt zwei Lösungen, für $v < d$ insgesamt vier Lösungen (gegebenenfalls einschließlich der beiden Quadrate), für $v > d$ keine Lösung.

Entwurf einer anderen Lösung (Abb. 3.20.):

Wir bezeichnen mit N den Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$ des gesuchten Rhombus $ABCD$. Es ist bekannt, daß die Diagonale $\overline{AC}$ die Symmetrieachse des Rhombus $ABCD$ ist. In bezug auf diese Symmetrie sind die Strecken $\overline{CB}$ und $\overline{CD}$ und damit auch die Punkte M und N symmetrisch gelegene Figuren, d. h., es gilt

$$\overline{AN} = \overline{AM}.$$

Auf Grund dieser Eigenschaften führen wir die *Konstruktion* durch:

Den Punkt K konstruieren wir entsprechend der vorhergehenden Lösung (dabei wird der gesuchte Punkt B auf der Geraden $p \equiv \overline{AK}$ liegen). Wir bezeichnen mit L das zentralsymmetrisch zum Mittelpunkt M gelegene Bild des Punktes K , so daß $\overline{KL} = v$ ist, und ziehen durch den Punkt L die Gerade $q \parallel p$. Wir beschreiben die Kreislinie $n \equiv (A, d = \overline{AM})$. Den einen der Schnittpunkte der Geraden q mit der Kreislinie n bezeichnen wir mit N . Die Mittelsenkrechte e der Strecke $\overline{MN}$ (sie verläuft sicher durch den Punkt A) schneide die Gerade q im Punkt C . Die Punkte B und D des gesuchten Rhombus liegen auf der Mittelsenkrechten f der Strecke $\overline{AC}$ und auf den Geraden p bzw. q .

Beweis: Wir bezeichnen mit S den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten e und f . Nach der Konstruktion ist $\overline{SA} = \overline{SC}$ und ferner $\overline{SB} = \overline{SD}$, denn die Geraden p und q und damit auch die Punkte B und C liegen symmetrisch in bezug auf den Punkt S . $ABCD$ ist also ein Parallelogramm, seine Höhe ist v . Nach der Konstruktion ist die Gerade AC Symmetrieachse dieses Parallelogramms, und deshalb ist $\overline{CB} = \overline{CD}$. Es ist also $ABCD$ ein Rhombus. Weil der Punkt M auf der Achse o des Streifens zwischen den Parallelen p und q liegt, ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$. Damit ist der Beweis geführt.

Diskussion: Nach Wahl einer der Halbebenen, die von der Geraden AM begrenzt werden, existiert der Punkt K genau dann, wenn $v < 2d$ ist. Über die Lösbarkeit entscheidet ferner die gegenseitige Lage der Kreislinie $n \equiv (A, d)$ und der Geraden q . Wenn $v < d$ ist, gibt es in der gewählten Halbebene zwei voneinander verschiedene Lösungen (darunter ist auch ein Quadrat, wenn $d = \frac{1}{2} v \sqrt{5}$ ist). Diese Lösungen sind wirklich verschieden, denn die Punkte N und N' fallen nicht zusammen (sie liegen symmetrisch in bezug auf die Gerade $o' \perp AK$, die durch den Punkt A verläuft), wobei der Punkt M innerhalb der Halbebene $o'K$ liegt (der Winkel MAK ist spitz). Wenn $v = d$ ist, gibt es nur eine einzige Lösung, während die Aufgabe für $v > d$ keine Lösung hat. Das Ergebnis ist in der vorhergehenden Lösung dargestellt.

14. I. Zuerst entscheiden wir, für welche reellen Zahlen x die rechte Seite einen Sinn hat.

[1] Es muß gelten

$$1 - \frac{x}{2} |x| \geq 0, \quad \text{d. h.} \quad x|x| \leq 2. \quad (2)$$

a) Für $x < 0$ ist $x|x| = -x^2$, so daß die Beziehung (2) erfüllt ist.

b) Für $x \geq 0$ ist $x|x| = x^2$, und man kann die Beziehung (2) in der Form $x^2 \leq 2$, d. h. $x \leq \sqrt{2}$ schreiben.

Aus beiden Ergebnissen zusammen erhalten wir zunächst, daß

$$x \leq \sqrt{2} \quad (3)$$

gelten muß.

Die Gültigkeit dieser Beziehung werden wir im weiteren voraussetzen.

[2] Wir schreiben (1) kurz in der Form $y = \sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}$, wobei $A_1 \geq A_2 \geq 0$ ist. Es genügt daher, zu ermitteln, unter welcher Bedingung $A_2 \geq 0$ ist, d. h., unter welcher Bedingung

$$1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} \geq 0$$

gilt. Die letzte Ungleichung kann man in der Form

$$1 - \frac{x}{4}|x| \geq \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}$$

schreiben.

Wenn x diese Beziehung erfüllt, ist die linke Seite der Ungleichung notwendigerweise eine nichtnegative Zahl. Daher folgt durch Quadrieren, daß

$$1 - \frac{x}{2}|x| + \left(\frac{x}{4}|x|\right)^2 \geq 1 - \frac{x}{2}|x|,$$

also

$$\left(\frac{x}{4}|x|\right)^2 \geq 0$$

ausfallen muß, was aber für jedes reelle x erfüllt ist.

Durch Rückschluß findet man, daß für jede reelle Zahl x , für die A_2 definiert ist, auch tatsächlich $A_2 \geq 0$ ausfällt. So haben wir festgestellt, daß (1) für alle x definiert ist, für die (3) gilt.

II. Für das weitere Studium der durch (1) in $x \leq \sqrt{2}$ definierten Funktion unterscheiden wir zwei Fälle:

$$\text{a) } x \leq 0; \quad \text{b) } 0 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Fall [a]: Für $x \leq 0$ ist $x|x| = -x^2$, und die rechte Seite von (1) kann man dann schreiben:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{4}(4 + x^2)} + \sqrt{\frac{1}{2}(2 + x^2)} - \sqrt{\frac{1}{4}(4 + x^2)} - \sqrt{\frac{1}{2}(2 + x^2)}. \end{aligned}$$

Wir setzen $2 + x^2 = a^2$ mit $a > 0$. Nach Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{4}(2 + a^2)} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(2 + a^2)} - \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}[(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}a + a^2]} - \sqrt{\frac{1}{4}[(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}a + a^2]} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2} + a)\right]^2} - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2} - a)\right]^2} \\ y &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + a) - \left|\frac{1}{2}(\sqrt{2} - a)\right|. \end{aligned}$$

Weil $a^2 \geq 2$ ist, ist $a \geq \sqrt{2}$, und es ist also

$$\left|\frac{1}{2}(\sqrt{2} - a)\right| = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2}).$$

Wir erhalten deshalb

$$y = \frac{1}{2}[\sqrt{2} + a - (a - \sqrt{2})] = \sqrt{2}.$$

Ergebnis [a]: Für $x \leq 0$ ist

$$y = \sqrt{2}. \quad (4)$$

Fall [b]: Für $x \geq 0$ ist $x|x| = x^2$, und die rechte Seite von (1) nimmt die Form an:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(4 - x^2)} + \sqrt{\frac{1}{2}(2 - x^2)} - \sqrt{\frac{1}{4}(4 - x^2)} - \sqrt{\frac{1}{2}(2 - x^2)}. \end{aligned}$$

Wir setzen $2 - x^2 = b^2$ mit $b \geq 0$ [vgl. (3)]. Nach Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{4}(2 + b^2)} + \sqrt{\frac{1}{2}b^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(2 + b^2)} - \sqrt{\frac{1}{2}b^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2} + b)\right]^2} - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2} - b)\right]^2} \\ y &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + b) - \left|\frac{1}{2}(\sqrt{2} - b)\right|. \end{aligned}$$

Es gilt aber $2 \geq b^2$, d. h., $\sqrt{2} \geq b$ oder $\sqrt{2} - b \geq 0$. Deshalb erhalten wir

$$y = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + b - (\sqrt{2} - b)] = b = \sqrt{2 - x^2}.$$

Ergebnis [b]: Für $x \geq 0$ ist

$$y = \sqrt{2 - x^2}. \quad (5)$$

Endresultat: Für $x \leq 0$ ist $y = \sqrt{2}$, also eine Konstante, und die zugehörige grafische Darstellung ist der Strahl AM , wobei $A \equiv [0, \sqrt{2}]$, $M \equiv [-1, \sqrt{2}]$ ist (siehe

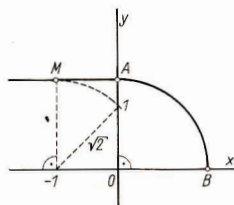


Abb. 3.21.

Abb. 3.21.). Für $x \geq 0$ ist $y = \sqrt{2 - x^2} \geq 0$ und damit $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$. Die Punkte $[x, y]$, welche die letzte Gleichung erfüllen, liegen auf der Kreislinie $k \equiv (0, \sqrt{2})$, wobei in unserem Falle $x \geq 0$ und gleichzeitig $y \geq 0$ ist. Das bedeutet, daß das Bild der Viertelkreis $\widehat{AB}$ ist, wobei $A \equiv [0, \sqrt{2}]$, $B \equiv [\sqrt{2}, 0]$ und $O \equiv [0, 0]$ der Mittelpunkt ist (siehe Abb. 3.21.). Damit ist die Aufgabe gelöst.

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 10

15. I. Wir lösen die Gleichung

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = p, \quad (4)$$

wobei $p > 0$ eine gegebene reelle Zahl ist. Wenn x eine reelle Zahl ist, welche diese Gleichung erfüllt, so muß

$$2x - 1 \geq 0, \quad (5')$$

d. h.

$$x \geq \frac{1}{2} \quad (5)$$

ausfallen, sonst hätte die Wurzel $\sqrt{2x - 1}$ keinen Sinn. Unter der Voraussetzung (5) ist wegen (5') das erste Glied der Summe auf der linken Seite der Gleichung (4) eine positive Zahl. Es ist aber erforderlich, daß auch das zweite Glied der linken Seite der Gleichung (4) einen Sinn hat, d. h., daß

$$x - \sqrt{2x - 1} \geq 0, \quad (6)$$

also

$$x \geq \sqrt{2x - 1}$$

gilt.

In dieser Ungleichung sind beide Seiten nichtnegative Zahlen [siehe (5) und (5')]. Deshalb ist diese Ungleichung mit den Ungleichungen

$$x^2 \geq 2x - 1,$$

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

äquivalent.

Diese Ungleichung gilt aber für jede reelle Zahl x , und deshalb ist die Beziehung (6) für alle x , die (5) genügen, erfüllt. Wir quadrieren nun beide Seiten der Gleichung (4). Für $p > 0$ erhalten wir dann die Gleichung

$$x + \sqrt{2x - 1} + x - \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)} = p^2,$$

d. h. die Gleichung

$$2x + 2\sqrt{(x - 1)^2} = p^2.$$

Weil für jede reelle Zahl a stets $\sqrt{a^2} = |a|$ ist, folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$2x + 2|x - 1| = p^2. \quad (7)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall [1]: Angenommen, es ist

$$x \geq 1. \quad (8)$$

Dann nimmt die Gleichung (7) die Gestalt

$$2x + 2(x - 1) = p^2$$

oder

$$4x = p^2 + 2$$

an, und es ist also

$$x = \frac{p^2 + 2}{4}. \quad (9)$$

Fall [2]: Angenommen, es ist $\frac{1}{2} \leq x < 1$. Dann nimmt die Gleichung (7) die Form

$$2x + 2(1 - x) = p^2$$

oder

$$2 - p^2 = 0 \quad (7')$$

an.

Wenn also $p = \sqrt{2}$ ist, so ist die Gleichung (7) für alle

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \quad (10)$$

erfüllt, während für $0 < p, p \neq \sqrt{2}$ die Gleichung (4) im Intervall (10) keine Lösung hat.

II. Nun gehen wir zu den einzelnen Aufgaben über.

a) Für $p = \sqrt{2}$ muß im Fall [1]

$$x = \frac{2+2}{4}$$

d. h.

$$x = 1$$

sein.

Im Fall [2] muß für jede Lösung x aus dem Intervall (10) $p = \sqrt{2}$ sein. Durch Einsetzen in die Gleichung (1) überzeugen wir uns davon, daß jede Zahl x aus dem Intervall

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Lösung der Gleichung (1) ist.

b) Für $p = 1$ ergibt sich aus der Beziehung (9)

$$x = \frac{3}{4},$$

was der Voraussetzung (8) widerspricht. Die Gleichung (2) hat also keine Lösung.

c) Für $p = 2$ ergibt sich aus der Beziehung (9)

$$x = \frac{4+2}{4}$$

oder

$$x = \frac{3}{2},$$

was der Forderung (8) entspricht. Die Zahl $x = \frac{3}{2}$ ist tatsächlich die Lösung der Gleichung (3), wovon man sich durch Rückschluß oder durch Einsetzen überzeugen kann.

Ergebnis: Lösung der Gleichung (1) ist jede Zahl x , für die

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

gilt.

schreiben. Damit nimmt (1) die Form

$$\overline{CX} + (\overline{ZB} + \overline{YB}) = \overline{CX} + \overline{CY}$$

oder

$$\overline{ZB} + \overline{BY} = \overline{CY}$$

an. (4)

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$\overline{AZ} = \overline{CX} - \overline{XA},$$

$$\overline{BZ} = \overline{CY} - \overline{YB}.$$

Nach Einsetzen aus (2) erhalten wir dann

$$\overline{AZ} = \overline{CX}(1 - k),$$

$$\overline{BZ} = \overline{CY}(1 - k)$$

und also

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{CY}}. \quad (5)$$

Weil $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$ ist, gilt entsprechend einem bekannten Satz die Beziehung

$$\frac{\overline{CX}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}},$$

und wegen (5) gilt dann auch

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}. \quad (6)$$

Wir konstruieren auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AC}$ über den Punkt A hinaus den Punkt M so, daß $\overline{AM} = \overline{AZ}$ ist und auf der Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ über den Punkt B hinaus den Punkt N so, daß $\overline{BN} = \overline{BZ}$ ist. Nach Einsetzen für $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ in die linke Seite von (6) erhalten wir

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

Nach einem bekannten Satz (über eine Schar von Geraden, welche durch zwei Parallelen geschnitten wird, oder über die Homothetie der Dreiecke CAB und CMN) ergibt sich aus dieser Gleichheit

$$\overline{MN} \parallel \overline{AB}.$$

Dabei ist $\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{AM} = \overline{XA} + \overline{AZ} = \overline{CX}$, und ähnlich wird bewiesen, daß $\overline{YN} = \overline{CY}$ sein muß. Es ist also $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$ Symmetrieachse des Dreiecks CMN . Daneben gilt (6), so daß der Punkt Z die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis der Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ des Dreiecks teilt.

(Bemerkung: Nach einem bekannten Satz über Winkelhalbierende ist $\overline{CZ}$ die Halbierende dieses Winkels BCA .) Auf dieser Grundlage führen wir die Konstruktion durch.

Konstruktion (Abb. 3.22.): Durch den Punkt A konstruieren wir den Hilfsstrahl APQ , der nicht Teil der Geraden AB ist, und zwar so, daß für P und Q

$$\overline{AP} = \overline{CA}, \quad \overline{PQ} = \overline{CB} \quad (7)$$

gilt. Wir ziehen in dem Dreieck die Gerade $PR \parallel QB$ und bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden PR und AB mit Z . Weil der Punkt P innerhalb der Strecke $\overline{AQ}$ liegt, liegt Z innerhalb von $\overline{AB}$. Dabei ist

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}},$$

und auf Grund von (7)

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}. \quad (8)$$

Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AC}$ über den Punkt A hinaus konstruieren wir die Strecke $\overline{AM} = \overline{AZ}$ und auf der Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ über den Punkt B hinaus die Strecke $\overline{BN} = \overline{BZ}$. Wir bezeichnen der Reihe nach mit X und Y die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CM}$, $\overline{CN}$. Dann ist XY die gesuchte Gerade.

Den Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion werden wir der Kürze halber nicht durchführen. Er geht aus der Analyse und den zur Konstruktion gemachten Bemerkungen insbesondere der Beziehung (8) hervor.

Diskussion: Weil man bei der beschriebenen Konstruktion stets nur einen Punkt Z erhält, und weil die Mitteltransversale $XY \parallel MN$ des Dreiecks CMN existiert, hat die Aufgabe stets genau eine Lösung.

Nachtrag 1: Aus der im Text aufgeführten Bemerkung ergibt sich die äußerst einfache Konstruktion des Punktes Z unter Verwendung der Winkelhalbierenden des Winkels BCA . Hier bedienen wir uns des bekannten Satzes:

Die Halbierende des Winkels BCA des Dreiecks teilt die Seite $\overline{AB}$ in zwei Strecken, für die die Beziehung (8) gilt.

17. a) Weil für $n = 2$ die Behauptung der Aufgabe richtig ist, nehmen wir an, daß $n > 2$ ist und setzen $n = 2k$, wobei k eine natürliche Zahl größer als 1 ist. Es gilt

$$x = 3^n + 63 = (3^n - 3^2) + 72. \quad (1)$$

Wenn wir beweisen, daß die Zahl

$$y = 3^n - 3^2$$

durch die Zahl 72 teilbar ist, so ist der Beweis für die Behauptung der Aufgabe erbracht, weil $x = y + 72$ ist, wobei der zweite Summand durch die Zahl 72 teilbar ist.

Nun gilt

$$y = 3^2(3^{n-2} - 1).$$

Die Zahl y ist also durch 9 teilbar. Da $72 = 9 \cdot 8$ ist, genügt es zu beweisen, daß die Zahl $z = 3^{n-2} - 1$

durch 8 teilbar ist. Die Zahl $n - 2$ ist gerade und natürlich, so daß man schreiben kann $n - 2 = 2k$,

wobei k eine natürliche Zahl ist. Nach einer bekannten Formel gilt

$$z = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1),$$

wobei $3^k - 1$, $3^k + 1$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen sind. Von diesen ist bekannt, daß genau eine von ihnen durch 4 und die andere durch 2 teilbar ist. Deshalb ist die Zahl z durch das Produkt von $4 \cdot 2$, d. h. durch die Zahl 8, teilbar. Damit ist die Behauptung der Aufgabe a) bewiesen.

b) Den Beweis für die Behauptung der Aufgabe führen wir indirekt.

Angenommen, die natürliche Zahl n ist ungerade, so daß

$$n = 2k + 1$$

ist. Wir können $k \geq 1$ voraussetzen (für $k = 0$ ist $x = 3 + 63 = 66$ und nicht durch 72 teilbar).

Für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} x - 72 = y &= 3^{2k+1} - 3^2 = 3^2(3^{2k-1} - 1), \\ z &= 3^{2k-1} - 1 \\ &= (3 - 1)(3^{2k-2} + 3^{2k-3} + \dots + 3 + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Der zweite Faktor dieses Produkts ist eine Summe aus $2k - 1$ ungeraden Zahlen, ist also ungerade. Der erste Faktor $3 - 1$ ist durch 2 teilbar. Von den beiden Faktoren in der Beziehung (2) ist also einer ungerade und der andere durch 2, nicht aber durch 8 teilbar. Die Zahl y ist also nicht durch 8 teilbar, und deshalb ist auch x für natürliches ungerades n nicht durch 72 teilbar. Wenn also $3^n + 63$ (für ein natürliches n) durch die Zahl 72 teilbar ist, muß n gerade sein.

Damit ist die Behauptung der Aufgabe b) bewiesen.

18. Analyse: Wir bezeichnen mit a, b, c die Katheten bzw. die Hypotenuse des gesuchten Dreiecks ABC , wobei $\angle ACB = 90^\circ$ ist. Ferner bezeichnen wir mit α, β seine spitzen Winkel, mit v die zur Hypotenuse AB gehörende Höhe (siehe Abb. 3.23.),

mit P ihren Fußpunkt und mit S den Mittelpunkt der Hypotenuse, welcher der Mittelpunkt der dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreislinie k ist. Es gilt $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \frac{1}{2}c$. Entsprechend dem Text der Aufgabe gilt dann $\overline{SC}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$ oder $\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = ab$, d. h.

$$c^2 = 4qb, \quad (1)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $p = \frac{1}{2} ab$ und ebenso $p = \frac{1}{2} cr$. Daher erhalten wir durch Vergleich

$$v = \frac{ab}{c}. \quad (2)$$

Nach Einsetzen aus (1) ergibt sich

$$v = \frac{c^2}{4c}$$

d. h.

$$v = \frac{c}{4}. \quad (3)$$

In dem Dreieck SCP , in dem der Winkel $SPC = 90^\circ$ ist, ist $\overline{SC} = \frac{1}{2} c$, $\overline{CP} = \frac{1}{4} c$, so daß das Verhältnis der Kathete $\overline{CP}$ und der Hypotenuse $\overline{SC}$ gleich 1:2 ist; nach einem bekannten Satz liegt dann $\overline{CP}$ der Winkel $PSC = 30^\circ$ gegenüber. Der Winkel ASC ist der Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\beta \equiv \sphericalangle ABC$, so daß

ist, $\beta = 15^\circ$ und $\alpha = 75^\circ$ (4)

Das gilt, wenn der Punkt P ein Punkt der Strecke $\overline{SA}$, also $\alpha > \beta$ ist. Im Fall $\alpha < \beta$ erhalten wir das Winkel-

$$\beta = 75^\circ, \quad \alpha = 15^\circ. \quad (5)$$

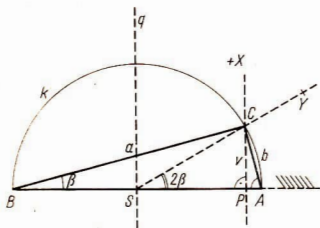


Abb. 3.23.

Daraus ergibt sich die *Konstruktion* (siehe Abb. 3.23.). Nach Wahl der Lage der Hypotenuse $\overline{AB} = c$ und der Halbebene ABX , in der das gesuchte Dreieck liegen soll, zeichnen wir die Kreislinie $k \equiv \left(S, \frac{1}{2}c\right)$ mit der Strecke $\overline{AB}$ als Durchmesser und konstruieren in der Halbebene ABX den Winkel $\angle YSA = 30^\circ$: Der gemeinsame Punkt des Strahls $\overrightarrow{SY}$ und der Kreislinie k ist der Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks,

welches nach dem vorhergehenden offensichtlich die Forderungen der Aufgabe erfüllt [siehe die Beziehung (4)]. Ferner bezeichnen wir mit q die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ und mit BAC' das Spiegelbild des Dreiecks ABC in bezug auf die Gerade q . Das Dreieck ABC' ist bei der gewählten Lage der Strecke $\overline{AB}$ und der Halbebene ABX offensichtlich auch die Lösung der Aufgabe [vgl. die Beziehung (5)]. Die Aufgabe hat also zwei Lösungen.

Entwurf einer anderen Lösung: Aus den Beziehungen $a^2 + b^2 = c^2$ und (1) erhalten wir durch Vergleich der rechten Seiten

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4ab, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 &= 0, \\ \left(\frac{a}{b}\right)_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Weil $\left(\frac{a}{b}\right)_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)_2 = 1$ ist, sind die Dreiecke $(ABC)_1, (BAC)_2$, die zu den Wurzeln (6) gehören, kongruent. Wir beschränken uns auf die Konstruktion für den Fall der ersten Wurzel.

Konstruktion (siehe Abb. 3.24.): Wir konstruieren das Hilfsdreieck $A'B'C' \sim ABC$, wobei der Winkel $A'C'B' = 90^\circ$ ist. Wir wählen die Strecke $\overline{C'A'} = b'$ und die Halbebene $C'A'M$, in der der Eckpunkt B' liegt. Nach (6) muß $\frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A'}} = 2 + \sqrt{3}$ sein.

In der gewählten Halbebene konstruieren wir den Winkel $A'C'D = 90^\circ$ so, daß $\overline{C'D} = 2b'$ ist. Über der Strecke $\overline{C'D}$ als Durchmesser konstruieren wir die Kreislinie $k \equiv (O, b')$. Wir bezeichnen mit E den Schnittpunkt der Kreislinien k und $m \equiv (C', b')$, der in der Halbebene $C'A'M$ liegt. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{DE}^2 &= \overline{DC'}^2 - \overline{C'A'}^2 = 4b'^2 - b'^2 = 3b'^2, \\ \text{d. h. } \overline{DE} &= b' \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{DC'}$ über den Punkt D hinaus konstruieren wir die Strecke $\overline{DB'} = \overline{DE} = b' \sqrt{3}$, so daß $\overline{C'B'} = (2 + \sqrt{3})b'$ und

$$\frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A'}} = \frac{(2 + \sqrt{3})b'}{b'} = 2 + \sqrt{3}$$

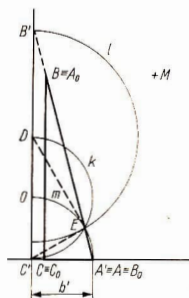


Abb. 3.24.

ist. Zu dem Dreieck $A'B'C'$ konstruieren wir das Dreieck ABC , welches homothetisch ist in bezug auf den Mittelpunkt $A' \equiv A$, und zwar in folgender Weise: Auf dem Strahl $A'B'$ konstruieren wir die Strecke $\overline{A'B} = c$, wobei c die im Text der Aufgabe gegebene Zahl ist. In der betrachteten Homothetie ordnen wir dem Punkt B' den Punkt B als Bild zu. Dann ist ABC eine der gesuchten Lösungen. Die andere Lösung, die der zweiten Wurzel (6) entspricht, ist das Dreieck $A_0B_0C_0 \cong \triangle BAC$ (siehe Abb. 3.24.), wovon wir uns leicht überzeugen können.

19. Wir nehmen an, daß die reelle Zahl x Lösung der gegebenen Ungleichung (1) ist. Damit die Brüche auf der linken Seite der Ungleichung im reellen Bereich einen Sinn haben, muß gelten

$$1 + x > 0, \quad 1 - x > 0, \quad (1')$$

d. h.

$$-1 < x < 1. \quad (2)$$

Die gegebene Ungleichung (1) kann man in die Form bringen

$$\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \geq 1, \quad (3)$$

und weil $\sqrt{(1+x)(1-x)} > 0$ ist, erhalten wir nach Multiplikation der beiden Seiten (3) mit dieser Zahl

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \geq \sqrt{1-x^2}. \quad (4)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung muß positiv sein, denn es ist $\sqrt{1-x^2} > 0$. Es muß also

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} > 0$$

oder

$$\sqrt{1-x} > \sqrt{1+x}$$

sein, und nach dem Quadrieren der beiden positiven Seiten dieser Ungleichung erhalten wir

$$1 - x > 1 + x,$$

$$0 > 2x,$$

$$x < 0.$$

Zusammen mit der Beziehung (2) muß also

$$-1 < x < 0 \quad (5)$$

sein.

Durch Quadrieren der beiden positiven Seiten der Ungleichung (4) erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 - x + 1 + x - 2\sqrt{1 - x^2} &\geq 1 - x^2, \\ 1 + x^2 &\geq 2\sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

und durch erneutes Quadrieren (es ist sicherlich $1 - x^2 > 0$) ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 + 2x^2 + x^4 &\geq 4 - 4x^2, \\ x^4 + 6x^2 - 3 &\geq 0, \\ (x^2 + 3 - 2\sqrt{3})(x^2 + 3 + 2\sqrt{3}) &= 0. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor auf der linken Seite ist eine positive Zahl. Deshalb muß der erste Faktor nichtnegativ sein, d. h., es muß

$$x^2 + 3 - 2\sqrt{3} \geq 0 \quad (*)$$

ausfallen. Nun ist

$$2\sqrt{3} - 3 > 2 \cdot 1 \cdot 7 - 3 = 0,4 > 0.$$

Man kann deshalb die Beziehung (*) in der Form

$$(x + \sqrt{2\sqrt{3} - 3})(x - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}) \geq 0$$

schreiben. Wegen (5) ist der zweite Faktor negativ. Deshalb muß

$$x + \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \leq 0,$$

d. h.

$$x \leq -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$

gelten.

Wenn wir diese Forderung mit (5) zusammenfassen, erhalten wir (siehe Abb. 3.25.):

$$-1 < x \leq -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}. \quad (6)$$



Abb. 3.25.

Es ist nämlich $-1 < -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$, denn es gilt

$$0 < 2\sqrt{3} - 3 < 2 \cdot 1,8 - 3 = 0,6 < 1$$

und also

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} < 1.$$

gegenüberliegt, und die Länge r der Höhe, die zur Seite $\overline{AB}$ gehört. Wir konstruieren das Hilfsdreieck $\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB$, und zwar aus folgenden Elementen: der Seite $\overline{A'B'} = c$, dem Winkel $\angle A'S'B' = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ und der Höhe mit der Länge r , die zur Seite $\overline{A'B'}$ gehört. Mit Hilfe des Dreiecks $S'A'B'$ können wir dann leicht die gesuchte Strecke $\overline{AB}$ konstruieren.

Konstruktion (vgl. Abb. 3.27.): Wir wählen die Lage der Strecke $\overline{A'B'} = c$ und die Halbebene σ , welche von der Geraden $A'B'$ begrenzt wird. Den gesuchten Punkt S' in der Halbebene σ erhalten wir als den Schnittpunkt der beiden folgenden geometrischen Örter m und n :

a) der Geraden $m \parallel A'B'$, die in der Halbebene σ den Abstand r von der Geraden $A'B'$ hat (die Höhe des Dreiecks $S'A'B'$ zur Seite $\overline{A'B'}$ soll r sein);

b) des Bogens $n \equiv \widehat{A'B'}$ mit dem Mittelpunkt O des geometrischen Ortes der Punkte in der Halbebene σ , von denen aus die Strecke $\overline{A'B'}$ unter dem Schwinkel $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ erscheint (in der Abb. 3.27. ist also der Winkel $\angle B'A'O' = \frac{1}{2}\gamma$).

Wir wissen, daß das Dreieck $S'A'B'$ spitzwinklig sein muß, und daß (2) gelten muß, d. h., daß $\angle A'B'S' \leq \angle B'A'S' < 90^\circ$ ist. Deshalb muß der Punkt S' in das Innere des Bogens $\widehat{KF}$ fallen, wobei KA' senkrecht auf $A'B'$ steht und F der gemeinsame Punkt des Bogens n und der Mittelsenkrechten $\overline{OD}$ der Strecke $\overline{A'B'}$ ist. Der Punkt D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B'}$. Dabei tritt für den Fall $S' \equiv F$ in den Beziehungen (2) [oder (1)] Gleichheit ein. Wenn S' innerhalb des Bogens $\widehat{KF}$ liegt, steht in (2) nicht das Gleichheitszeichen. Im ersten Falle gibt es eine einzige Lösung, im zweiten Falle liegt außer dem Punkt S' innerhalb des Bogens $\widehat{KF}$ sein Spiegelbild S'' an der Mittelsenkrechten $\overline{OD}$ im Inneren des Bogens $\widehat{LF}$, welcher das Spiegelbild des Bogens $\widehat{KF}$ ist.

Es muß also

$$\overline{A'K} < \overline{DE} \leq \overline{DF} \quad (3)$$

gelten, wobei E der Schnittpunkt der Geraden m und OD ist. Es gilt aber $DE = r$,

$$\overline{A'K} = \overline{A'B'} \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma = c \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\overline{DF} = \overline{OD} + \overline{OF} = \overline{OD} + \overline{OA'} = \frac{1}{2}c \cdot \tan \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$$

$$\overline{DF} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\gamma} \left(1 + \sin \frac{1}{2}\gamma \right).$$

Die Beziehung (3) können wir daher in der Form

$$c \cdot \tan \frac{1}{2} \gamma < r \leq \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \left(1 + \sin \frac{1}{2} \gamma \right) \quad (3')$$

schreiben.

Die Beziehung (3) verwandeln wir so, daß wir ihre geometrische Bedeutung erkennen können. Wir multiplizieren die beiden Seiten der ersten Ungleichungen mit

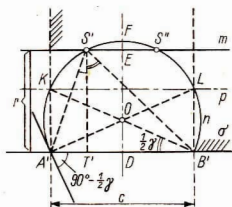


Abb. 3.27.

$\cot \frac{1}{2} \gamma > 0$. Wir erhalten dann

$$c < r \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma.$$

Ferner multiplizieren wir die beiden Seiten der zweiten Ungleichung mit der positiven Zahl

$$\frac{2\left(1 - \sin \frac{1}{2}\gamma\right)}{\cos \frac{1}{2}\gamma}.$$

Wir erhalten

$$2r \cdot \frac{1 - \sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \leq c.$$

An Stelle von (3') ergeben sich also die äquivalenten Beziehungen

$$2r \cdot \frac{1 - \sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \leq c < r \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma, \quad (4)$$

denen wir uns zuwenden. Wenn diese Beziehungen gelten, fällt der Punkt S' im Falle der Ungleichung in das Innere des Bogens $\widehat{KF}$, und es ist $\overline{S'A'} < \overline{S'B'}$, während im Falle der Gleichheit (links) $S' \equiv F$ gilt und das Dreieck $S'A'B'$ gleichschenkelig ist. Wir bezeichnen mit T' den Fußpunkt der Höhe des Dreiecks $S'A'B'$ durch den Punkt S' , wobei $\angle A'B'S' \leq \angle S'A'B' < 90^\circ$ und $\overline{S'T'} = r$ ist. Kehren wir zur Abbildung 3.26. zurück, d. h. zur gegebenen Kreislinie k , welche die Schenkel des Winkels $\gamma \equiv \angle BCQ$ berührt, wobei $\overline{CP} = \overline{CQ}$ ist. Den Winkel $\angle PSQ$ teilen wir durch den Strahl ST (wobei $\overline{ST} = r$ ist) in zwei Winkel, und zwar in

$$\sphericalangle PST = 2 \cdot \sphericalangle A'S'T' \quad \text{und in} \quad \sphericalangle OST = 2 \cdot \sphericalangle B'S'T'.$$

was nach der Konstruktion offensichtlich möglich ist. Wir konstruieren die Halbierenden $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ der Winkel PST und QST , wobei A auf der Geraden CP und B auf der Geraden CQ liegt (der Punkt A liegt offensichtlich innerhalb der Strecke $\overline{CP}$ und B innerhalb der Strecke $\overline{CQ}$). Dann ist die Strecke $\overline{AB}$ Lösung der Aufgabe.

Beweis: Der Punkt T ist nach Konstruktion das Spiegelbild des Punktes P an der Achse $\overline{SA}$ (der Strahl $\overline{SA}$ ist nämlich die Halbierende des Winkels PST und es gilt $\overline{ST} = \overline{SP} = r$). Es ist also $\angle STA = 90^\circ$. Ebenso ist $\angle STB = 90^\circ$, so daß die Strahlen $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ entgegengesetzt liegen und $\overline{ST}$ senkrecht auf $\overline{ATB}$ steht. Es ist also $\overline{AB}$ eine Tangente der Kreislinie k , und der Punkt T ist der zugehörige Berührungspunkt. Nach der Konstruktion ist $\triangle SAT \cong \triangle S'A'T'$ (wsw), weil nach der Konstruktion $\overline{ST} = \overline{S'T'}$, $\angle AST = \angle A'S'T'$ und ferner $\angle A'T'S' = \angle ATS = 90^\circ$ ist. Daraus ergibt sich, daß $\overline{SA} = \overline{S'A'}$ ist. Ebenso wird bewiesen, daß $\overline{SB} = \overline{S'B'}$ ist. Deshalb ist $\triangle ASB \cong \triangle A'S'B'$ (sws) (nach der Konstruktion ist $\angle ASB = \angle A'S'B'$). Es ist also $\overline{AB} = \overline{A'B'} = c$, womit der Beweis geführt ist.

Ergebnis: Wenn (4) gilt, hat die Aufgabe eine Lösung, und zwar:

a) Wenn in der Beziehung (4) Gleichheit gilt, existiert eine einzige Strecke $\overline{AB}$, weil $\triangle S'A'B'$ ein gleichschenkliges Dreieck ist und also auch das Dreieck $\triangle SAB$ gleichschenkelig ist, welches die Gerade $\overline{SC}$ zur Symmetrieachse hat. Die Gerade $\overline{AB} \perp \overline{SC}$ ist die Tangente der Kreislinie k im Punkt H , in welchem der Strahl $\overline{SC}$ diese Kreislinie schneidet [damit ist die geometrische Bedeutung des Ausdrucks auf der linken Seite in den Beziehungen (4) gegeben, d. h., c ist die Länge der eben konstruierten Strecke]. In der Abb. 3.26. ist die Tangente $\overline{UV} \perp \overline{SC}$ diese gesuchte Gerade $\overline{AB}$, und zwar für den Fall, daß $c = \overline{UV}$ ist.

b) Wenn in (4) nicht Gleichheit eintritt, ist $\overline{CA} > \overline{CB}$ und außer der Strecke $\overline{AB}$ haben wir noch eine andere Lösung. Es ist dies das Spiegelbild $\overline{B_1A_1}$ der Strecke $\overline{AB}$ an der Mittelsenkrechten $\overline{SC}$ (der Punkt B_1 ist das Spiegelbild des Punktes A , und der Punkt A_1 ist das Spiegelbild des Punktes B). Die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{SC}$ und also auch die Geraden $\overline{B_1A_1}$ und $\overline{SC}$ schneiden einander. Die geometrische Bedeutung der Ungleichung rechts in den Beziehungen (4) ist folgende: Es ist

$$\overline{CP} = \overline{SP} \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma = r \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma;$$

es muß also $c < \overline{CP}$ sein, wobei $\overline{CP}$ die Länge einer der gegebenen Tangenten ist, die durch den Punkt C zur Kreislinie k gezogen sind.

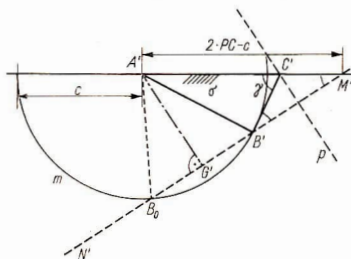
Wenn (4) nicht gilt, hat die Aufgabe keine Lösung.

Ein anderes Lösungsverfahren (siehe die Bezeichnungen in der Abb. 3.28.).

Analyse: Wir nehmen (ebenso wie in der vorhergehenden Lösung) an, daß die Beziehung gilt

$$CA \geq CB. \quad (1)$$

Im Fall $B' \equiv G'$, d. h. $c = \overline{A'G'}$, liegt der Punkt C' auf der Mittelsenkrechten p der Strecke $\overline{M'G'}$ und auf der Geraden $A'M'$, also innerhalb der Strecke $\overline{A'M'}$ (der Punkt C' ist dann der Mittelpunkt dieser Strecke). In dem Fall, daß B' innerhalb der



Strecke $\overline{M'G'}$ liegt, liegt der Schnittpunkt C' der Mittelsenkrechten p der Strecke $\overline{M'B'}$ und der Geraden $A'M'$ näher am Punkt M' als am Punkt A' , und weil $\overline{C'B'} = \overline{C'M'}$ ist, ist $\overline{C'B'} < \overline{C'A'}$. (Da in der Abbildung 3.29. der Schnittpunkt C_0 der Mittelsenkrechten p_0 der Strecke $\overline{M'B_0}$ und der Geraden $A'M'$ näher am Punkt A' liegt und die Entfernung der Punkte C_0 und A' kleiner als

$$\angle C'B'M' = \angle C'M'B' = \frac{1}{2}\gamma$$
$$\angle A'C'B' = \gamma, \quad \overline{A'B'} = c \quad \text{und} \quad \overline{A'C'} + \overline{C'B'} = 2 \cdot \overline{CP} - c.$$

Es ist also $A'B'C'$ das gesuchte Hilfsdreieck. Wir legen dieses Dreieck folgendermaßen in die Abbildung 3.28. Der Punkt C' fällt mit dem Punkt C zusammen, die Strahlen $C'A'$, $C'B'$ der Reihe nach mit den Strahlen CP bzw. CQ (das ist möglich, denn es ist $\sphericalangle A'C'B' = \gamma = \sphericalangle PCQ$). Es fallen also die Punkte A' und B' auf die Strahlen CP bzw. CQ . Ihre neuen Lagen bezeichnen wir mit A und B (es ist also $\overline{CA} = \overline{C'A'}$ und $\overline{CB} = \overline{C'B'}$). Aus der Kongruenz $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (sws) ergibt sich $\overline{AB} = \overline{A'B'} = c$. Wir beweisen, daß die Strecke $\overline{AB}$ Lösung der Aufgabe ist (siehe Abb. 3.28., 3.29.).

Der in dem Winkel ACB gelegene Ankreis an das Dreieck ABC berührt die Strahlen CA und CB in Punkten P_0 bzw. Q_0 , für die $\overline{CP_0} = \overline{CQ_0} = s$ gilt, wobei s die Hälfte des Umfangs des Dreiecks ABC ist. (Der Beweis ist in der Analyse unserer Aufgabe enthalten.)

Nach der Konstruktion gilt für den Umfang $2s$ des Dreiecks ABC und des Dreiecks $A'B'C'$:

$$\begin{aligned} 2s &= \overline{A'B'} + (\overline{B'C'} + \overline{C'A'}) = \overline{A'B'} + (\overline{M'C'} + \overline{C'A'}) \\ &= \overline{A'B'} + \overline{M'A'} = c + (2 \cdot \overline{CP} - c) = 2 \cdot \overline{CP}, \end{aligned}$$

d. h.

$$s = \overline{CP}.$$

Der Punkt P ist in Anbetracht des Satzes V ein Berührungspunkt des Ankreises von ABC , der innerhalb des Winkels ACB liegt und die beiden Schenkel dieses Winkels berührt. Es gibt aber nur eine derartige Kreislinie, und diese ist die gegebene Kreislinie k . Damit ist der Beweis geführt, daß die Gerade AB eine Tangente der Kreislinie k ist.

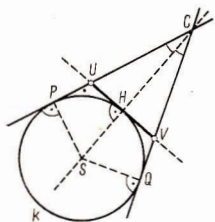


Abb. 3.30.

Untersuchen wir die Lösbarkeit der Aufgabe:

a) Wenn $B' \equiv G'$ ist (Abb. 3.29.), dann verläuft die Mittelsenkrechte q der Strecke $A'B'$ (oder der Strecke $A'G'$) durch den Punkt C' , so daß q Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks $C'A'B'$ mit der Grundseite $A'B'$ ist. Also ist $\overline{SC}$ (Abb. 3.28.) die Mittelsenkrechte der konstruierten Strecke $\overline{AB}$ und die einzige Lösung (siehe Abb. 3.30. für $A \equiv U$, $B \equiv V$).

b) Wenn B' (Abb. 3.29.) ein innerer Punkt der Strecke $\overline{M'G'}$ ist, so ist $\overline{C'A'} > \overline{C'B'}$ und also auch $\overline{CA} > \overline{CB}$. Außer der Strecke $\overline{AB}$ haben wir als zweite Lösung B_1A_1 , wobei das Spiegelbild der Strecke $\overline{AB}$ in bezug auf die Achse $\overline{SC}$ ist. Jetzt ist $\overline{CA_1} < \overline{CB_1}$.

c) Wenn B' weder identisch G' noch ein innerer Punkt der Strecke $\overline{M'G'}$ ist, hat die Aufgabe keine Lösung.

Diese Ergebnisse bringen wir mit Hilfe der gegebenen Zahlen c, γ, r (siehe Abb. 2.28. und 2.29.) zum Ausdruck. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \overline{CP} &= r \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma, \\ \overline{A'G'} &= \overline{A'M'} \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma = (2 \cdot \overline{CP} - c) \sin \frac{1}{2} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Kreislinie m hat mit dem Strahl $M'N'$ genau dann einen Schnittpunkt B' mit der beschriebenen Eigenschaft, wenn

$$\overline{A'G'} \leq c < \overline{A'M'} \quad (6)$$

gilt, dabei gibt es im Falle der Gleichheit genau eine Lösung und im Falle der Ungleichheit links genau zwei Lösungen. Die Beziehung $\overline{A'G'} \leq c$ kann man nach Einsetzen aus (5) in der Form:

$$2r \cos \frac{1}{2}\gamma - c \sin \frac{1}{2}\gamma \leq c$$

oder

$$2r \cos \frac{1}{2}\gamma \leq c \left(1 + \sin \frac{1}{2}\gamma \right)$$

schreiben.

Wir multiplizieren die beiden Seiten dieser Ungleichung mit der positiven Zahl

$$\frac{1 - \sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} \text{ und erhalten}$$

$$2r \cdot \frac{1 - \sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma} \leq c. \quad (7)$$

Die Beziehung $c < \overline{A'M'}$ aus (6) kann man folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} c &< (2 \cdot \overline{CP} - c), \quad c < \overline{CP}, \\ c &< r \cdot \cot \frac{1}{2}\gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Durch Zusammenfassen von (7) und (8) erhalten wir die Beziehungen (4) der ersten Lösung

$$2r \cdot \frac{1 - \sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma} \leq c < r \cdot \cot \frac{1}{2}\gamma.$$

Dabei gibt es im Falle der Gleichheit genau eine Lösung und im Falle der Ungleichheit zwei Lösungen. Sonst gibt es keine Lösung.

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 10

21. Damit der Bruch auf der linken Seite (1) einen Sinn hat, muß

$$x > 0, \quad x \neq 1 \quad (2)$$

sein.

Wir führen der Reihe nach die äquivalenten Umformungen durch:

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - 6\sqrt{x} \leq 0$$

(wir haben den Bruch durch die Zahl x gekürzt),

$$\frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \leq 0.$$

Setzen wir $\sqrt{x} = y$, wobei $y > 0$, $y \neq 1$ ist, so erhalten wir

$$\frac{6y^2 - 5y + 1}{1 - y} \leq 0. \quad (3)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten: $1 - y > 0$ oder $1 - y < 0$.

Fall [1]: Angenommen, es ist $1 - y > 0$, d. h. $y < 1$. Aus (3) ergibt sich dann

$$6y^2 - 5y + 1 \leq 0$$

und

$$(3y - 1)(2y - 1) \leq 0.$$

Es muß deshalb gleichzeitig

$$3y - 1 \geq 0,$$

$$2y - 1 \leq 0,$$

d. h.,

$$\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

ausfallen, so daß für x

$$\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{4}. \quad (4)$$

gelten muß. Durch Rückschluß erkennen wir, daß jede der Zahlen (4) der Beziehung (3) genügt.

Fall [2]: Angenommen, es ist $1 - y < 0$, d. h. $y > 1$. Dann muß wegen (3)

$$6y^2 - 5y + 1 \geq 0$$

sein. Diese Beziehung gilt offensichtlich für alle $y > 1$, d. h. für alle $x > 1$.

Ferner wenden wir den Satz des PYTHAGORAS auf das Dreieck SS_1K (wo $\angle SKS_1 = 90^\circ$ ist) an, wobei

$$\text{ist. } \overline{KS_1} = \overline{KC} + \overline{CS_1} = x + r - 2p \quad (6)$$

Mit Hilfe von (5) und (6) erhalten wir:

$$\overline{SS_1}^2 = \overline{KS}^2 + \overline{KS_1}^2 = 4px + (x + r - 2p)^2. \quad (7)$$

Aus der Beziehung (2) ergibt sich:

$$\overline{SS_1}^2 = (r - x)^2. \quad (8)$$

Durch Vergleich von (7) und (8) erhalten wir dann nach Umformung:

$$4px + (x + r - 2p)^2 - (r - x)^2 = 0,$$

woraus sich

$$4px + [x + r - 2p + r - x] \cdot [x + r - 2p - (r - x)] = 0,$$

$$4px + 2(r - p) \cdot 2(x - p) = 0,$$

$$px + p^2 - px - pr + rx = 0,$$

$$rx = p(r - p),$$

$$x = \frac{p(r - p)}{r} \quad (9)$$

ergibt.

Damit ist der Radius x berechnet. Wir können leicht feststellen, daß die Kreislinie $k \equiv (S, x)$ die Forderungen der Aufgabe erfüllt, wenn $\overline{KS} = 2\sqrt{px}$ und wenn $\overline{ST} = x$ ist (wobei KS senkrecht auf AB steht und ST parallel zu AB verläuft).

23. Es gilt der Satz V:

Wenn $a > b > 0$ und n eine beliebige natürliche Zahl ist, so gilt $a^n > b^n > 0$.

Wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = p \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = q.$$

Offensichtlich ist $p > 0$ und $q > 0$. Dann haben wir die Beziehung

$$p^{10} + q^{10} \leq \frac{p^{11}}{q} + \frac{q^{11}}{p} \quad (1')$$

zu beweisen. Sie ist äquivalent mit den folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} p^{11}q + pq^{11} &\leq p^{12} + q^{12}, \\ 0 &\leq p^{11}(p - q) - q^{11}(p - q), \\ 0 &\leq (p - q)(p^{11} - q^{11}). \end{aligned} \quad (2)$$

Für $p = q$ gilt die Beziehung (2) offensichtlich.

Der Strahl DM hat mit k_0 die beiden voneinander verschiedenen Schnittpunkte M_0 und M'_0 .

Die Homothetie mit dem Zentrum D , welche den Punkt M_0 in den Punkt M überführt, führt die Kreislinie k_0 in die Kreislinie k_2 und den Punkt S_0 in den Mittelpunkt S_2 der Kreislinie k_2 über. Der Punkt S_2 ist der Schnittpunkt des Strahls DS_0 und der Geraden $n \parallel S_0M_0$ durch den Punkt M .

Bemerkung: Wenn der Punkt M auf dem Strahl DS_0 liegt, ist die Konstruktion einfach – es handelt sich um die Konstruktion einer einbeschriebenen Kreislinie und eines dieser Kreislinie umbeschriebenen Dreiecks mit den Seiten auf den Geraden p_2 , q und $m \perp DM$, wobei m durch den Punkt M verläuft.

Dann ist $k_2 \equiv (S_2, \overline{S_2M})$ und die Kreislinie k_1 ist ihr Spiegelbild in bezug auf den Punkt M . Ebenso konstruieren wir die Kreislinien $k'_2 \equiv (S'_2, \overline{S'_2M})$ und ihr Spiegelbild k'_1 in bezug auf den Punkt M (es ist $S'_2M \parallel S_0M'_0$ usw.). Damit ist die Konstruktion durchgeführt.

Die Kreislinien k_1 , k_2 und k'_1 , k'_2 entsprechen offensichtlich den Forderungen der Aufgabe, und deshalb verzichten wir auf den Beweis.

Diskussion: Es gilt $M_0 \neq M'_0$, denn M liegt innerhalb des Winkels ADC ; deshalb sind die beiden betrachteten Homothetien mit dem Zentrum D und den beiden Paaren (M_0, M) und (M'_0, M) einander entsprechender Punkte voneinander verschieden. Das gleiche gilt dann auch für die Kreislinien k_2 und k'_2 .

Die Aufgabe hat also genau zwei Lösungen.

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 9

25. Es gilt der bekannte Satz I:

In jedem Dreieck ABC schneiden einander die drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt V (dem sogenannten Höhenschnittpunkt oder *Orthozentrum* des Dreiecks).

Ferner gilt der Satz II:

Ist P der Fußpunkt des vom Punkte M auf die Gerade UN gefällten Lotes, so fällt der Punkt P , wenn der Winkel MUN spitz ist, auf den Strahl UN , und wenn der Winkel MUN stumpf ist, auf den dem Strahl UN entgegengesetzten Strahl.

Wir beweisen jetzt den Satz III (Abb. 3.34. bis 3.36.):

Das Orthozentrum V des Dreiecks ABC liegt: **a)** *innerhalb* dieses Dreiecks, wenn das Dreieck ABC spitzwinklig ist; **b)** *in seinem Eckpunkt* C , wenn der Winkel BCA ein rechter Winkel ist; **c)** *innerhalb* des Scheitelwinkels γ' zum Winkel $\gamma \equiv \sphericalangle BCA$, wenn dieser Winkel stumpf ist. Dabei teilt der Strahl CV den Winkel γ' in zwei spitze Winkel.

Beweis: Wir bezeichnen mit A' , B' , C' die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks ABC wie in den Abbildungen 3.34. bis 3.36. Die Innenwinkel dieses Dreiecks bezeichnen wir mit α , β , γ .

a) Angenommen, ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck (Abb. 3.34.). Nach dem Satz II fällt der Punkt A' auf den Schenkel $\overline{BC}$ des spitzen Winkels ABC , und ferner fällt er auf den Schenkel $\overline{CB}$ des spitzen Winkels ACB . Er fällt also gleichzeitig auf jeden der

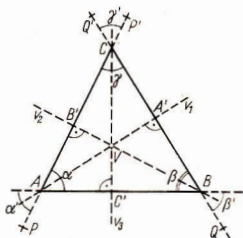


Abb. 3.34.

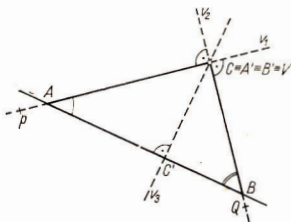


Abb. 3.35.

beiden Strahlen BC und CB , d. h., er fällt auf die Strecke $\overline{BC}$. Die Höhe $\overline{AA'}$ verläuft also durch das Innere des Winkels $\alpha \equiv \sphericalangle CAB$ und durch das Innere des zugehörigen Scheitelwinkels. Das gleiche gilt auch von der Höhe $\overline{BB'}$ in bezug auf den Winkel $\beta \equiv \sphericalangle ABC$. Weil nach Satz I die Geraden AA' und BB' nicht parallel sind, muß ihr Schnittpunkt V innerhalb der Winkel α und β liegen. [Der Winkel α und der Winkel β' ,

der Scheitelwinkel von β , haben nämlich keinen Schnittpunkt. Dasselbe gilt für die Winkel α' (den Scheitelwinkel von α) und β sowie für die Winkel α' und β' .] Aber der Teil, der im Inneren der Winkel α und β liegt, ist gerade das Innere des Dreiecks ABC . Damit ist der Teil a) des Satzes III bewiesen.

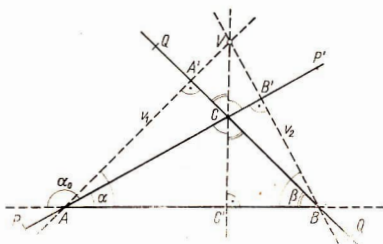


Abb. 3.36.

b) Angenommen, es ist $\gamma = 90^\circ$. Dann ist offensichtlich $V \equiv C$ (Abb. 3.35.).

c) Angenommen, es ist $\gamma > 90^\circ$, so daß α und β spitze Winkel sind (Abb. 3.36.). Ähnlich wie im Teil a) der Beweisführung wird bewiesen, daß die Gerade CC' durch das Innere des Winkels γ verläuft und also auch durch das Innere des entsprechenden

Scheitelwinkels γ' . Der Winkel β ist spitz. Gemäß Satz II fällt der Fußpunkt A' der Höhe $\overline{AA'}$ auf den Strahl BC . Weil ABA' ein rechtwinkliges Dreieck ist, in welchem der Winkel $AA'B$ ein Rechter ist, kann A' nicht auf der Strecke $\overline{BC}$ liegen. Sonst wäre nämlich der Winkel ACB spitz. Es liegt also der Punkt A' auf der Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ über den Punkt C hinaus, und deshalb liegt der Schenkel $\overline{AA'}$ des spitzen Winkels BAA' im Winkel α_0 , dem Nebenwinkel von α (in der Halbebene ABC), so daß der Strahl AA' nicht durch das Innere des Winkels α verläuft. Dabei ist $\sphericalangle BAA'$ ein spitzer Winkel des Dreiecks ABA' . Ähnlich wird bewiesen, daß der Strahl BB' in der Halbebene ABC außerhalb des Winkels β liegt, und daß der Winkel ABB' spitz ist. Weil $\sphericalangle BAA' + \sphericalangle ABB'$ die Summe spitzer Winkel ist, ist sie kleiner als 180° , und nach dem EUKLIDischen Parallelenaxiom haben die Strahlen AA' und BB' innerhalb der Halbebene ABC einen Schnittpunkt V . Dieser liegt nach Satz I auch auf der Geraden CC' , aber auf Grund des Vorausgegangenen außerhalb des Dreiecks ABC , d. h. innerhalb des Winkels γ' , welcher der Scheitelwinkel von γ ist. Aus dem Dreieck ACC' (in dem der Winkel $AC'C$ ein Rechter ist und der Punkt C' innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ liegt) folgt, daß der Winkel ACC' spitz ist. Dasselbe gilt auch für den Winkel BCC' . Der Strahl CV teilt also den Winkel γ in zwei spitze Winkel (siehe Abb. 3.36.).

Damit ist der Satz III bewiesen.

Lösung der Aufgabe:

I. Wir bezeichnen den gegebenen Winkel PCQ mit γ und seinen Scheitelwinkel mit $\gamma' \equiv P'CQ'$. Wir unterscheiden jetzt die folgenden Fälle [a] bis [c]:

Fall [a]: Es sei $\gamma < 90^\circ$.

Wir bezeichnen mit $\sphericalangle QCQ''$ den rechten Winkel, in welchem der Punkt P liegt, und mit $\sphericalangle PCP''$ den rechten Winkel, in welchem der Punkt Q liegt (siehe Abb. 3.38.).

Wenn der Punkt V in den Winkel $P''CQ''$ (der offensichtlich stumpf ist) fällt, so hat die Aufgabe genau eine Lösung.

Fall [b]: Es sei $\gamma = 90^\circ$ und $V \equiv C$.

Dann hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen (Abb. 3.35.).

Fall [c]: Angenommen, es ist $90^\circ < \gamma < 180^\circ$, und der Punkt V fällt in den Winkel $P'CQ'$, wobei beide Winkel VCP' und $VQ'P'$ spitz sind.

Dann hat die Aufgabe genau eine Lösung (Abb. 3.36.).

In allen anderen Fällen hat die Aufgabe keine Lösung.

II. Beweis:

Fall [a]: Es ist $\gamma < 90^\circ$.

Wir unterscheiden drei Unterfälle: (1) der Punkt V liegt im Winkel γ . (2) Der Punkt V liegt auf einem der Strahlen CP oder CQ . (3) Der Punkt V liegt im Winkel $P''CQ''$, aber außerhalb des Winkels γ (siehe Abb. 3.38.).

Fall (1) (siehe Abb. 3.34.): Wir bezeichnen mit A' und B' die Fußpunkte der Senkrechten v_1 und v_2 durch den Punkt V zu den Geraden CQ bzw. CP . Die Gerade $VA' \equiv v_1$ hat mit dem Strahl CP den Punkt $A \neq C$ gemeinsam und die Gerade $VB' \equiv v_2$ hat mit dem Strahl CQ den Punkt $B \neq C$ gemeinsam. Beweisen wir diese Behauptung für den Punkt A : Es ist $A' \neq C$ (das geht aus Satz II hervor, denn der

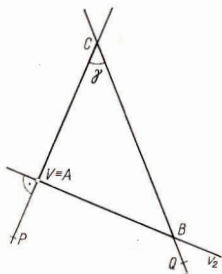


Abb. 3.37.

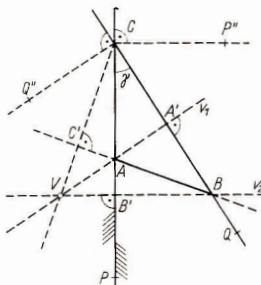


Abb. 3.38.

Winkel VCQ ist spitz). Die Summe der Winkel γ und $\angle VA'C = 90^\circ$ ist kleiner als 180° , und deshalb haben die Strahlen CP und $A'V$ innerhalb der Halbebene CQP den Punkt A gemeinsam (Parallelenaxiom des EUKLID).

Das Dreieck ABC existiert also und hat die Geraden v_1 und v_2 als Höhen. Der Schnittpunkt V ist das Orthozentrum dieses Dreiecks ABC (Satz I), das spitzwinklig ist und die einzige Lösung der Aufgabe bildet.

Fall (2) (siehe Abb. 3.37.): Der Punkt $V \neq C$ liegt innerhalb des Strahls CP . (der Fall, in dem V innerhalb von CQ liegt, wird analog gelöst). Nach Satz III liegt das Orthozentrum nur dann auf dem Umfang des Dreiecks, wenn dieses rechtwinklig ist. Konstruieren wir also die Gerade $v_2 \perp CP$ durch den Punkt $V \equiv A$. Aus dem Parallelenaxiom EUKLIDS ergibt sich, daß innerhalb der Halbebene CPQ die Geraden v_2 und CQ den Schnittpunkt B haben. Das Dreieck ABC ist die einzige Lösung der Aufgabe, und der Punkt V ist sein Orthozentrum.

Fall (3) (siehe Abb. 3.38.): Der Punkt V liegt innerhalb des Winkels $P''CQ''$, aber außerhalb des Winkels γ . Der Punkt V liege innerhalb der Halbebene CQP und also innerhalb des Winkels $Q''CP$ (der Fall, in dem der Punkt V in den Winkel QCP'' fällt, wird analog gelöst).

Wir bezeichnen mit B' den Fußpunkt der Senkrechten $v_2 \perp CP$ durch den Punkt V . Die Gerade v_2 und der Strahl CQ haben nach dem Parallelenaxiom EUKLIDS innerhalb der Halbebene $CB'Q$ den Punkt B gemeinsam. Die Winkel des Dreiecks BCV sind spitz (es gilt: $\angle VCQ < \angle 90^\circ$, $\angle B'BC$ ist ein spitzer Winkel des rechtwinkligen

Dreiecks BCB' , und $\sphericalangle CVB'$ ist ein spitzer Winkel des Dreiecks VCB'). Wir bezeichnen mit A das Orthozentrum des Dreiecks BCV . Weil BCV ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Punkt A auf der Höhe $\overline{CB'}$ des Dreiecks CVB zwischen C und B' und es ist $VA \perp BC$ und $BAC' \perp VC$, wobei C' der Fußpunkt der Senkrechten durch B zur Geraden CV ist. V ist also das Orthozentrum des Dreiecks ABC , welches die einzige Lösung der Aufgabe darstellt. (Der Winkel CAB des Dreiecks ABC ist nach dem Satz III notwendigerweise stumpf.)

Ergänzung: Wenn der Punkt V auf einen der Strahlen CQ'' und CP'' oder außerhalb des Winkels $P''CQ''$ fällt, hat die Aufgabe für $\gamma < 90^\circ$ offensichtlich keine Lösung. Wenigstens einer der Fußpunkte A' oder B' der Senkrechten v_1 und v_2 fällt nicht auf den zugehörigen Strahl CP bzw. CQ .

Fall [b]: Es ist $\gamma = 90^\circ$ (Abb. 3.35.).

Wenn ABC das gesuchte Dreieck ist, so muß $V \equiv C$ sein.

Wenn $V \equiv C$ ist, wählen wir auf den Strahlen CP und CQ je einen Punkt. Wir bezeichnen die Punkte mit A bzw. B . Das Dreieck ABC hat das Orthozentrum $C \equiv V$. Die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen.

Ergänzung: Wenn $V \neq C$ ist, hat die Aufgabe offensichtlich keine Lösung.

Fall [c]: Es ist $90^\circ < \gamma < 180^\circ$, der Punkt V liegt innerhalb des Winkels $\gamma' \equiv \sphericalangle P'CQ'$, und die Winkel VCP' und VCQ' sind spitz (Abb. 3.36.).

In den anderen Fällen gibt es nach Satz III keine Lösung.

Durch den Punkt V ziehen wir die Geraden $v_1 \perp CQ$ und $v_2 \perp CP$ und bezeichnen die zugehörigen Fußpunkte mit A' bzw. B' . Weil $\sphericalangle VCQ'$ spitz ist, fällt der Punkt A' auf den dem Strahl CQ entgegengesetzten Strahl CQ' , und aus demselben Grunde liegt der Punkt C zwischen den Punkten P und B' .

Die Strahlen VA' und $B'CP$ haben nach dem Parallelenaxiom EUKLIDS einen Schnittpunkt A innerhalb der Halbebene $VB'C$ (denn es ist $\sphericalangle CB'V = 90^\circ$ und $\sphericalangle A'VB' < 90^\circ$, was sich aus dem Viereck $CA'VB'$ ergibt, in dem $\sphericalangle CA'V$ und $\sphericalangle CB'V$ rechte Winkel sind und $\sphericalangle A'CB' \equiv \gamma'$ stumpf ist). Ebenso wird bewiesen, daß die Strahlen CQ und VB' einen Schnittpunkt $B \neq C$ innerhalb der Halbebenen $VA'C$ haben. Leicht kann man dann zeigen, daß der Punkt A auf den Strahl CP und der Punkt B auf den Strahl CQ fallen müssen. In dem Dreieck ABC sind die Geraden v_1 und v_2 nach Konstruktion Höhen und der Punkt V das Orthozentrum, so daß das Dreieck ABC offensichtlich die einzige Lösung der Aufgabe ist. Damit ist die Beweisführung abgeschlossen und die Aufgabe gelöst.

26. Das Volumen V des gegebenen Prismas ist

$$V = a^2 v; \quad (1)$$

die Oberfläche P des Prismas ist

$$P = 4aV + 2a^2. \quad (2)$$

Nach dem Text der Aufgabe müssen

$$a^2v = 4av + 2a^2$$

und $a > 0$ sein, so daß wir die beiden Seiten der letzten Gleichung durch die Zahl a dividieren können. Wir erhalten die Gleichung

$$av = 4v + 2a,$$

aus der $a \neq 4$ und

$$v = \frac{2a}{a-4} \quad (3)$$

folgt, woraus sich durch Umformung

$$v = \frac{2(a-4) + 8}{a-4} = 2 + \frac{8}{a-4} \quad (4)$$

ergibt.

Aus der geometrischen Bedeutung der Zahl v folgt, daß auch $v > 0$ ist. Weil der Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung (3) eine positive Zahl ist, erhalten wir $v > 0$ nur für $a - 4 > 0$, d. h., es muß $a > 4$ sein. Nach Voraussetzung sind a und v natürliche Zahlen. In die Gleichung (4) setzen wir also nacheinander für a die natürlichen Zahlen 5, 6, 7 usw. ein. Weil $\frac{8}{a-4}$ eine natürliche Zahl sein soll [siehe (4)], muß

$$8 \geq a - 4,$$

d. h.

$$a \leq 12$$

sein.

Für a werden wir also nur die Zahlen von 5 bis 12 einsetzen. Die Ergebnisse gehen aus der folgenden Tabelle hervor:

a	5	6	7	8	9	10	11	12
v	10	6	$\frac{14}{3}$	4	$\frac{18}{5}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{22}{7}$	3

Die vier der Zahlenpaare (a, v) , bei denen auch v ganz ist, genügen den Bedingungen der Aufgabe, wovon wir uns leicht durch Einsetzen in (1), (2) und durch Vergleich der zugehörigen Zahlen V und P überzeugen können.

Bemerkung: Mit Hilfe der Beziehung (4) kann man die Berechnung der Zahlen a und v folgendermaßen vereinfachen: Die Zahl $\frac{8}{a-4}$ muß eine natürliche Zahl sein, d. h.,

die positive Zahl $a - 4$ muß Teiler von 8 sein. Deshalb muß sie einer der positiven Teiler der Zahl 8, nämlich 1, 2, 4, 8 sein. Wir erhalten also 4 Gleichungen:

- a) $a - 4 = 1$, d. h. $a = 5$ und $v = 10$;
- b) $a - 4 = 2$, d. h. $a = 6$ und $v = 6$;
- c) $a - 4 = 4$, d. h. $a = 8$ und $v = 4$;
- d) $a - 4 = 8$, d. h. $a = 12$ und $v = 3$.

27. Wir bedienen uns des Satzes P:

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent und spitz.

Ferner verwenden wir den Satz Q:

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Grundseite $\overline{AB}$ (also mit dem Scheitelpunkt C) hat die durch den Punkt C verlaufende Gerade $g \perp AB$ als Symmetrieachse.

Die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC bezeichnen wir mit α, β, γ , und nach Satz P ist

$$\alpha = \beta < 90^\circ, \quad (1)$$

ferner ist $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$.

Für die Lage der Geraden p genügt es, zwei Fälle in Betracht zu ziehen: Die Gerade p verläuft: [1] durch den Punkt C ; [2] durch den Punkt A . Den Fall, daß die Gerade p durch den Punkt B verläuft, führen wir unter Benutzung von Satz Q durch Achsensymmetrie auf den Fall [2] zurück.

Fall [1] (siehe die Bezeichnungen der Abb. 3.39.): Die Gerade p verlaufe durch den Punkt C . Der Schnittpunkt D dieser Geraden mit der Grundseite $\overline{AB}$ fällt auf diese

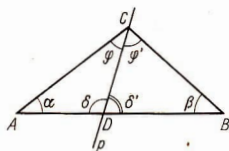


Abb. 3.39.

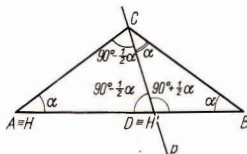


Abb. 3.40.

Strecke. Nach dem Text der Aufgabe erhalten wir die beiden gleichschenkligen Dreiecke ACD und BCD . Ihre Scheitelpunkte bezeichnen wir mit H bzw. H' . Es gibt drei Unterfälle: [1a] bis [1c].

[1a] (siehe Abb. 3.40.): Ist $H \equiv A$, dann müssen nach dem Satz P die beiden Beziehungen $\delta = \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ und $\delta' = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ gelten, da δ' der Nebenwinkel

von δ ist. Es ist also $\delta' > 90^\circ$, und deshalb muß $H' \equiv D$ sein. Die Strecke $\overline{BC}$ ist also die Grundseite des Dreiecks BCD , und es gilt

$$\beta = \varphi' = \frac{1}{2} \delta = 45^\circ - \frac{1}{4} \alpha.$$

Daraus und aus der Beziehung (1) ergibt sich $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{4} \alpha$ oder $\frac{5}{4} \alpha = 45^\circ$, und es ist also

$$\alpha = 36^\circ, \quad \beta = 36^\circ, \quad \gamma = 108^\circ.$$

Es gilt

$$\delta = \varphi = 72^\circ, \quad \beta = \varphi' = 36^\circ, \quad \gamma' = \varphi + \varphi' = 108^\circ,$$

und die Gerade p zerlegt tatsächlich das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke.

[1b] (siehe Abb. 3.41.): Es ist $H \equiv C$, d. h. $\alpha = \delta$, wobei δ Außenwinkel des Dreiecks BCD ist, d. h., es gilt $\delta = \beta + \varphi'$ (siehe Abb. 3.39.). Setzen wir nun hier $\delta = \alpha$ und $\beta = \alpha$ ein, so erhalten wir $\alpha = \alpha + \beta'$, was unmöglich ist.

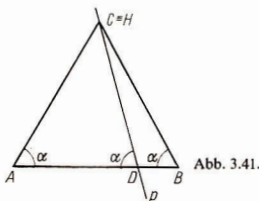


Abb. 3.41.

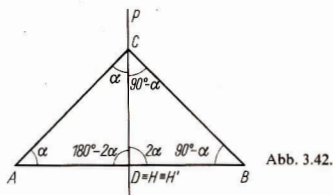


Abb. 3.42.

[1c] (siehe Abb. 3.42.): Angenommen, es ist $H \equiv D$, und infolgedessen auch $\varphi = \alpha$ und $\delta = 180^\circ - 2\alpha$. Für das Dreieck BCD ergeben sich dann die folgenden drei Möglichkeiten **[1c₁]**, **[1c₂]**, **[1c₃]**.

[1c₁] (siehe Abb. 3.42.): Es ist $H' \equiv D$ und also

$$\beta = \varphi' = \frac{1}{2} \delta = 90^\circ - \alpha,$$

denn δ ist Außenwinkel des Dreiecks BCD . Aus den Beziehungen $\beta = 90^\circ - \alpha$ und $\beta = \alpha$ erhalten wir $2\alpha = 90^\circ$, d. h.

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad \gamma = 90^\circ.$$

Dann ist $\varphi = \alpha = 45^\circ$ und $\delta = 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ$ und daher

$$\beta = \varphi' = \frac{1}{2} \delta = 45^\circ.$$

Die Gerade p zerlegt tatsächlich das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke.

[1c₂] (siehe Abb. 3.43.): Es ist $H' \equiv B$ und also $\delta' = \varphi' = 2\alpha$. Daraus und aus dem Dreieck BCD ergibt sich, daß $\beta = 180^\circ - 4\alpha$ ist. Aus dieser Beziehung und wegen $\beta = \alpha$ erhalten wir $\alpha = 180^\circ - 4\alpha$ oder

$$\alpha = 36^\circ, \quad \beta = 36^\circ, \quad \gamma = 108^\circ.$$

Diese Lage ist symmetrisch zu der im Fall [1a]. Vergleiche die Abbildungen 3.43. und 3.40!

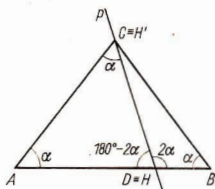


Abb. 3.43.

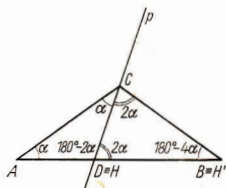


Abb. 3.44.

[1c₃] (siehe Abb. 3.44.): Es ist $H' \equiv C$ und also $\delta' = \beta$, d. h. $\delta' = \alpha$. Der Winkel δ'' ist ein Außenwinkel im Dreieck ADC , und deshalb gilt $\delta'' = \alpha + \varphi$ also $\delta'' = 2\alpha$, was zu der Beziehung $\delta'' = \alpha$ in Widerspruch steht.

Damit ist der Fall [1] erledigt.

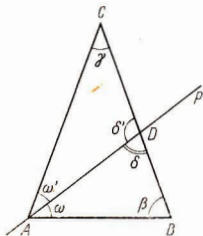


Abb. 3.45.

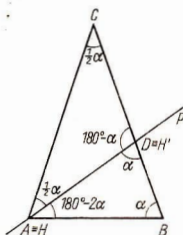


Abb. 3.46.

Fall [2] (siehe Abb. 3.45.): Die Gerade p verläuft durch den Punkt A und schneidet den Schenkel BC im Punkt D , welcher auf die Strecke $\overline{BC}$ fällt. Die Winkel δ und δ' sind Nebenwinkel, d. h. $\delta + \delta' = 180^\circ$. Wir bezeichnen die Scheitelpunkte in den Dreiecken ABD und ACD mit H bzw. H' . Es sind drei Fälle in Betracht zu ziehen: [2a] bis [2c].

[2a] (siehe Abb. 3.46.): Es ist $H \equiv A$ und also $\beta = \delta$. Weil $\beta = \alpha$ ist, ergibt sich daher $\delta = \alpha$, so daß der Nebenwinkel $\delta' = 180^\circ - \alpha$ stumpf und der Punkt $D \equiv H'$ ist. Deshalb gilt in dem Dreieck DAC $\gamma = \omega' = \frac{1}{2}\delta$ oder $\omega' = \gamma = \frac{1}{2}\alpha$.

Es ist $\omega = 180^\circ - 2\alpha$ und $\omega' = \frac{1}{2}\alpha$ und wegen $\omega + \omega' = \alpha$ erhalten wir nach Einsetzen $(180^\circ - 2\alpha) + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$ oder $\frac{5}{2}\alpha = 180^\circ$ und damit

$$\alpha = 72^\circ, \quad \beta = 72^\circ, \quad \gamma = 36^\circ.$$

Tatsächlich ist

$$\delta = \beta = 72^\circ, \quad \omega' = \gamma = \frac{1}{2}\delta = 36^\circ,$$

$$\omega = 180^\circ - \beta - \delta = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ \quad \text{und} \quad \alpha = \omega + \omega' = 72^\circ.$$

Die Gerade p zerlegt das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke.

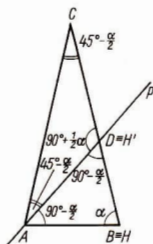


Abb. 3.47.

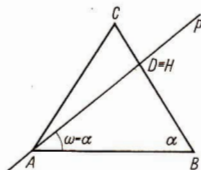


Abb. 3.48.

[2b] (siehe Abb. 3.47.): Es ist $H \equiv B$ und also

$$\omega = \delta = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha.$$

Der Winkel $\delta' = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ (Nebenwinkel zu δ) ist stumpf, so daß $H' \equiv D$ und

$$\omega' = \gamma = \frac{1}{2}\delta = 45^\circ - \frac{1}{4}\alpha \quad \text{ist.}$$

Aus der Beziehung $\omega + \omega' = \alpha$ erhalten wir nach Einsetzen

$$\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) + \left(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha\right) = \alpha \quad \text{oder} \quad 135^\circ = \frac{7}{4}\alpha.$$

Es ist also

$$\alpha = 77\frac{1}{7}^\circ, \quad \beta = 77\frac{1}{7}^\circ, \quad \gamma = 25\frac{5}{7}^\circ.$$

Tatsächlich gilt

$$\omega = \delta = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - 38\frac{4}{7}^\circ = 51\frac{3}{7}^\circ.$$

Ferner ist

$$\omega' = \alpha - \omega = 77\frac{1}{7}^\circ - 51\frac{3}{7}^\circ = 25\frac{5}{7}^\circ, \quad \text{d. h.} \quad \omega = \gamma.$$

Die Gerade p zerlegt also das gegebene Dreieck in zwei *gleichschenklige* Teildreiecke.

Weil $25\frac{5}{7}^\circ \cdot 2 = 51\frac{3}{7}^\circ$ oder $2\omega' = \omega$ ist, teilt die Gerade p den Winkel α im Verhältnis 2:1.

[2c] (siehe Abb. 3.48.): Angenommen, es ist $H \equiv D$. Diese Situation kann nicht eintreten, denn sonst müßte $\omega = \beta$, also $\omega = \alpha$ und gleichzeitig $\omega < \alpha$ sein.

Damit ist der Fall [2] erledigt. Das Resultat ist in der Tabelle zusammengestellt.

Ergebnistabelle:

Nummer des Falles	$\alpha = \beta$	γ	Lage der Geraden p	Bemerkung
1 a	36°	108°	Die Gerade geht durch den Punkt C; sie teilt den Winkel γ in zwei Winkel von 72° bzw. 36° .	2 Fälle (symmetrisch in bezug auf die Halbierende q der Grundseite $\overline{AB}$)
1 c	45°	90°	Die Gerade p geht durch den Punkt C; sie halbiert den Winkel γ und steht senkrecht auf $\overline{AB}$.	1 Fall
2 a	72°	36°	Die Gerade p geht durch den Punkt A (oder B) und halbiert den Winkel des gegebenen Dreiecks ABC bei diesem Eckpunkt.	2 Fälle (symmetrisch)
2 b	$77\frac{1}{2}^\circ$	$25\frac{5}{7}^\circ$	Die Gerade p geht durch den Punkt A (oder B) und teilt den Winkel bei diesem Eckpunkt im Verhältnis 2:1, wobei der größere Teil der Grundseite $\overline{AB}$ des gegebenen Dreiecks ABC anliegt.	2 Fälle (symmetrisch)

28. Wir formen den Ausdruck V in folgender Weise um:

$$\begin{aligned} V &= (x+y)(x^2-y^2) + (y+z)(y^2-z^2) + (z+x)(z^2-x^2) \\ &= x^3 - xy^2 + y^3 - yz^2 + z^3 - zx^2 - x^3 + x^2y - y^3 + y^2z - z^3 + z^2x \\ V &= x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 + xyz - xyz. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $xyz - xyz = 0$ hinzugefügt, um die weitere Verwandlung durchführen zu können:

$$\begin{aligned} V &= xy(x-y) - xz(x-y) - yz(x-y) + z^2(x-y) \\ &= (x-y)(xy - xz - yz + z^2) \\ &= (x-y)[x(y-z) - z(y-z)] \\ &= (x-y)(y-z)(x-z) \\ V &= -(x-y)(y-z)(z-x). \end{aligned}$$

Es gilt also $V = 0$ genau dann, wenn wenigstens eine von den Beziehungen

$$x - y = 0, \quad y - z = 0, \quad z - x = 0$$

gilt, d. h. wenn eine der Beziehungen

$$x = y, \quad y = z, \quad z = x$$

zutrifft. Der Ausdruck V ist also genau dann gleich Null, wenn in dem Tripel (x, y, z) wenigstens zwei Zahlen einander gleich sind.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

29. Analyse (Abb. 3.2.): Wir nehmen an, daß wir Punkte M und N konstruiert haben, die dem Text der Aufgabe entsprechen. Die Gerade p ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{MN}$. Das Spiegelbild der Strecke $\overline{MA}$ an der Geraden p sei die Strecke $\overline{NA'}$. Das Dreieck NBA' ist gleichschenkelig und hat als Grundseite die Strecke $\overline{BA'}$. Der Punkt N liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke $\overline{BA'}$. Dementsprechend führen wir die Konstruktion durch.

Konstruktion (Abb. 3.2.): Wir konstruieren das Spiegelbild A' des Punktes A in bezug auf die Gerade p sowie die Mittelsenkrechte q der Strecke $\overline{BA'}$ (wenn $B \neq A'$ ist) und bezeichnen mit N den Schnittpunkt der Geraden n und q und mit M das Spiegelbild des Punktes N in bezug auf die Gerade p .

Wir beweisen, daß die Punkte M und N den Forderungen der Aufgabe entsprechen. Die Punkte B und A' liegen innerhalb der Halbebene nB . Deshalb ist der Punkt N von B und A' verschieden. Der Punkt N liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke $\overline{BA'}$. Daher ist

$$\overline{NB} = \overline{NA'}. \quad (1)$$

Die Strecken $\overline{NA'}$ und $\overline{MA}$ liegen nach der Konstruktion symmetrisch in bezug auf die Gerade p . Deshalb ist

$$\overline{NA'} = \overline{MA}. \quad (2)$$

Aus den Beziehungen (1) und (2) ergibt sich $\overline{NB} = \overline{MA}$, was wir zu beweisen hatten.

Bemerkung: Die in der Aufgabe ausgesprochenen Forderungen verlieren ihre praktische Bedeutung, wenn der Schnittpunkt N sehr weit entfernt ist, wovon wir uns anhand der Skizze leicht überzeugen können.

Diskussion: Die Lösbarkeit der Aufgabe hängt vor allem davon ab, ob $B \neq A'$ ist. Wenn aber $B \equiv A'$ ist, liegen die Punkte A und B symmetrisch in bezug auf die Gerade p . Dann können wir jeden beliebigen Punkt der Geraden m als gesuchten Punkt M betrachten (der Punkt N ist dann der Fußpunkt des Lotes durch den Punkt M auf die Gerade n).

Wenn also A und B in bezug auf die Gerade p symmetrisch liegen, hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen.

Liegen aber A und B in bezug auf die Gerade p nicht symmetrisch, so daß $B \neq A'$ ist, dann existiert die Strecke $\overline{BA'}$. Ihre Mittelsenkrechte q ist zur Geraden n genau dann nicht parallel, wenn BA' nicht senkrecht zu n ist, d. h., wenn die Gerade AB zur Geraden p (oder zu den Geraden m und n) schräg steht. Dann hat die Aufgabe nur eine einzige Lösung. Die Gerade q ist aber zu n genau dann parallel, wenn $BA' \perp n$, d. h. $AB \perp p$ ist. Dann sind q und n zwei voneinander verschiedene Parallelen und die Aufgabe hat keine Lösung.

Ergebnis: Wenn die Gerade p die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist, hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Wenn AB senkrecht zu p verläuft und wenn p nicht die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist, hat die Aufgabe keine Lösung. Wenn AB und p nicht aufeinander senkrecht stehen, hat die Aufgabe genau eine Lösung.

30. Angenommen, für die gegebene reelle Zahl p ist x Lösung der Gleichung (1). Nach Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung mit der Zahl

$$(p^3 + 1) [p(x - 1) - p^2 + x]$$

erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned} (p^3 + 1) [p(x - 1) + p^2 - x] &= (p^3 - 1) [p(x - 1) - p^2 + x], \\ (p^3 + 1) [x(p - 1) + p(p - 1)] &= (p^3 - 1) [x(p + 1) - p(p + 1)], \\ x[(p - 1)(p^3 + 1) - (p + 1)(p^3 - 1)] &= \\ &= -p(p - 1)(p^3 + 1) - p(p + 1)(p^3 - 1), \\ x(p - 1)(p + 1) [p^2 - p + 1 - (p^2 + p + 1)] &= \\ &= -p(p - 1)(p + 1) [p^2 - p + 1 + (p^2 + p + 1)], \\ -2p(p - 1)(p + 1)x &= -2p(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1), \\ -2p(p - 1)(p + 1) [x - p^2 - 1] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Wir unterscheiden die Fälle [1] bis [4]:

[1] Es ist $p(p-1)(p+1) \neq 0$, d. h., es ist

$$p \neq 1, \quad p \neq 0, \quad p \neq -1. \quad (3)$$

Dann muß wegen der Gleichung (2)

$$\begin{aligned} & x - p^2 - 1 = 0, \\ \text{d. h.} \quad & x = p^2 + 1 \\ & \text{sein.} \end{aligned} \quad (4)$$

Probe: Wir bezeichnen der Reihe nach mit L und P die Einsetzungen der Zahl (4) in die linke und in die rechte Seite der Gleichung (1). Wir erhalten (es ist $x - 1 = p^2$):

$$L = \frac{p^3 + p^2 - p^2 - 1}{p^3 - p^2 + p^2 + 1} = \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}.$$

Es ist also $L = P$, sofern allerdings $p^3 + 1 \neq 0$ ist. Wir lösen die Gleichung

$$\begin{aligned} & p^3 + 1 = 0 \\ \text{oder} \quad & (p+1)(p^2 - p + 1) = 0. \end{aligned} \quad (5')$$

Dann ist entweder $p+1=0$, d. h. $p=-1$, was wegen (3) nicht eintritt. Oder es ist

$$p^2 - p + 1 = 0, \quad (5)$$

was umgeformt wird zu

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

oder zu

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

was wegen $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ unmöglich ist.

Die Gleichung (5) kann für keine reelle Zahl erfüllt sein. Die Gleichung (5') ist also einzig und allein für die Zahl $p = -1$ erfüllt, die wir in der Voraussetzung (3) ausgeschlossen haben.

Ergebnis [1]: Wenn p von den Zahlen $-1, 0, 1$ verschieden ist, hat die Gleichung (1) die einzige Lösung $x = p^2 + 1$.

[2] Angenommen, es ist $p = 1$. Die Gleichung (1) lautet dann:

$$\frac{0}{2(x-1)} = \frac{0}{2}.$$

Sie ist offensichtlich für jede Zahl x erfüllt, für die

$$x - 1 \neq 0$$

ist, d. h., alle von 1 verschiedenen reellen Zahlen sind Lösung.

Ergebnis [II]: Für $p = 1$ hat die Gleichung (1) unendlich viele Lösungen. Sie ist für jede Zahl $x \neq 1$ erfüllt.

[3] Angenommen, es ist $p = 0$. Die Gleichung (1) lautet dann

$$\frac{-x}{x} = -1.$$

Jetzt ist jede Zahl $x \neq 0$ Lösung.

Ergebnis [III]: Für $p = 0$ ist jede reelle Zahl $x \neq 0$ Lösung der Gleichung (1).

[4] Angenommen, es ist $p = -1$. Die Gleichung (1) lautet dann

$$\frac{-2x + 2}{0} = \frac{-2}{0},$$

so daß weder die linke noch die rechte Seite einen Sinn hat.

Ergebnis [IV]: Für $p = -1$ hat die Gleichung (1) keine Lösung. Einen Überblick über die Ergebnisse entnehmen wir der folgenden Tabelle.

Zahl p	Lösung x der Gleichung	Bemerkung
ist verschieden von den Zahlen $-1, 0, 1$	$x = p^2 + 1$	eine einzige Lösung
$p = -1$	existiert nicht	die Brüche auf beiden Seiten der Gleichung haben keinen Sinn
$p = 0$	x ist eine beliebige reelle Zahl $\neq 0$	unendlich viele Lösungen
$p = 1$	x ist eine beliebige reelle Zahl $\neq 1$	unendlich viele Lösungen

Jetzt beantworten wir noch die verbleibenden zwei Fragen **a)** und **b)**:

a) Für jede von den Zahlen $-1, 0, 1$ verschiedene Zahl p erhalten wir aus (4) die Gleichung

$$5 = p^2 + 1$$

und weiter

$$0 = p^2 - 4,$$

$$0 = (p - 2)(p + 2)$$

und also entweder

$$\begin{aligned} & p = 2 \\ \text{oder} \\ & p = -2. \end{aligned}$$

Durch Verifikation [wir setzen in (1) für p die Zahl 2 oder -2 ein] erhalten wir eine Gleichung, welche tatsächlich, wie wir uns leicht überzeugen können, die Wurzel $x = 5$ hat.

Auch für $p = 0$ oder für $p = 1$ erhalten wir Gleichungen, unter deren Lösungen sich auch die Zahl $x = 5$ befindet.

Ergebnis: a) Die Gleichung (1) hat $x = 5$ als Lösung, wenn p eine der Zahlen: -2 , 0 , 1 , 2 ist.

b) Für jede von den Zahlen -1 , 0 , 1 verschiedene Zahl p erhalten wir aus dem Ergebnis (4) die Gleichung

$$-3 = p^2 + 1,$$

welche sich durch keine reelle Zahl erfüllen läßt; denn auf der linken Seite steht eine negative und auf der rechten immer eine positive Zahl (die Summe der Zahl 1 und der nichtnegativen Zahl p^2).

Für $p = 0$ und für $p = 1$ ist $x = -3$ Lösung der Gleichung (1).

Ergebnis: b) $x = -3$ ist genau dann Lösung der Gleichung (1), wenn $p = 0$ oder $p = 1$ ist.

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 9

31. a) Angenommen, die Zahl x erfüllt die Gleichung (1). Dann gilt

$$\frac{3x(p-2)}{(p-2)x-1} - \frac{5x(p-2)}{(p-2)x+1} = -2, \quad (1')$$

$$\begin{aligned} 3x(p-2)[(p-2)x+1] - 5x(p-2)[(p-2)x-1] &= \\ &= -2[(p-2)x-1][(p-2)x+1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(p-2)^2 x^2 + 3(p-2)x - 5(p-2)^2 x^2 + 5(p-2)x &= \\ &= -2[(p-2)^2 x^2 - 1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p-2)^2 x^2 \cdot (3-5+2) + (p-2)x(3+5) &= 2 \\ \text{und} \\ 8(p-2)x &= 2. \end{aligned}$$

Fall [1]: Angenommen, es ist $p \neq 2$, d. h. $p-2 \neq 0$. Dann ist

$$x = \frac{1}{4(p-2)}. \quad (2)$$

Unter der Voraussetzung, daß $p - 2 \neq 0$ ist, d. h.

$$p \neq 2 \quad (3)$$

ist, kann also die Gleichung (1) nur die Lösung (2) haben.

Die Probe führen wir durch Einsetzen aus. Wir bezeichnen mit L den Wert auf der linken Seite der Gleichung (1), wenn wir in ihr für x den Wert aus (2) einsetzen. Wir verwenden dazu die Form (1') der gegebenen Gleichung. Es gilt:

$$L = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4} - 1} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1 - 1 = -2.$$

Es ist also tatsächlich $L = -2$, so daß (2) Lösung ist.

Fall [2]: Angenommen, es ist $p = 2$. Dann ist die linke Seite der Gleichung (1') gleich null, während die rechte Seite gleich -2 ist. Die Gleichung (1) hat also für $p = 2$ keine Lösung.

b) Es soll $x = -\frac{1}{5}$ sein. Nach Einsetzen in (2) erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{1}{5} = \frac{1}{4(p-2)},$$

woraus

$$p - 2 = -\frac{5}{4}$$

und

$$p = \frac{3}{4} \quad (4)$$

folgt.

Die Probe führen wir so durch, daß wir in (1') auf der linken Seite $p = \frac{3}{4}$ und $x = -\frac{1}{5}$

einsetzen. Wir erhalten (dabei ist der Nenner eines jeden der beiden Brüche auf der linken Seite der Gleichung für $x = -\frac{1}{5}$ von null verschieden):

$$L = \frac{-\frac{15}{4}\left(\frac{1}{5}\right)}{-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right) - 1} - \frac{-\frac{25}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)}{-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{5}\right) + 1} = \frac{+\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} - \frac{+\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -2.$$

Damit ist die Probe durchgeführt.

Antwort: Die Gleichung (1) hat für $p = \frac{3}{4}$ und nur für diesen Wert die Wurzel

$$x = -\frac{1}{5}.$$

32. Wir bezeichnen mit x die Radien der gesuchten kongruenten Kreislinien k_1 und k_2 . Der Fall $p = 0$, d. h. $T \equiv S$, ist sehr einfach (Abb. 3.49.). Offensichtlich gilt $x = \frac{1}{2}r$, und es existiert eine unendliche Anzahl von Paaren von Kreislinien (k_1, k_2),

welche der Aufgabe entsprechen (wenn T_1 ein Punkt der Kreislinie k ist, so ist k_1 die über der Strecke $\overline{ST_1}$ konstruierte Kreislinie usw.).

Im weiteren sei $p > 0$ (siehe die Bezeichnungen in der Abbildung 3.50.). In dem Dreieck ST_1T_2 ist $\overline{ST_1} = \overline{ST_2} = r$. In dem Dreieck SS_1S_2 ist $\overline{SS_1} = \overline{ST_1} - \overline{S_1T_1} = r - x$, $\overline{SS_2} = \overline{ST_2} - \overline{S_2T_2} = r - x$, d. h. $\overline{SS_1} = \overline{SS_2}$. Es ist also SS_1S_2 ein gleichschenkeliges Dreieck. Weil $\overline{TS_1} = \overline{TS_2} = x$ ist, ist T der Mittelpunkt der Grundseite dieses Dreiecks, d. h., $q \equiv ST \perp S_1S_2$ ist Symmetrieachse nicht nur des Dreiecks SS_1S_2 , sondern auch der aus den Kreislinien k, k_1, k_2 zusammengesetzten Figur.

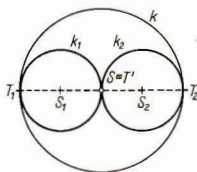


Abb. 3.49.

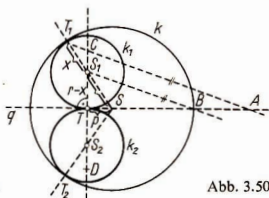


Abb. 3.50.

Aus dem Dreieck SS_1T (wobei $\angle STS_1 = 90^\circ$ ist) erhalten wir mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS $\overline{ST}^2 = \overline{SS_1}^2 - \overline{TS_1}^2$ und weiter

$$p^2 = (r - x)^2 - x^2,$$

$$p^2 = (r - 2x) \cdot r,$$

$$2rx = r^2 - p^2,$$

$$x = \frac{(r - p)(r + p)}{2r}. \quad (1)$$

Damit ist die Berechnung durchgeführt. Wegen $r > p$ ist $x > 0$, so daß das Resultat auch geometrisch sinnvoll ist.

Die Beziehung (1) kann man in der Form

$$\frac{2r}{r + p} = \frac{r - p}{x} \quad (2)$$

schreiben. Wir führen die Konstruktion der Strecke $\overline{TS_1} = x$ auf Grund der Beziehung (2) durch. In der Abbildung 3.50. ist:

$$\overline{TA} = 2r, \quad \overline{TB} = r + p, \quad \overline{TC} = \overline{TD} = r - p, \quad \overline{BS_1} \parallel \overline{AC}.$$

Hier gilt $\triangle TBS_1 \sim \triangle TAC$ und also

$$\overline{TS_1} = x.$$

Wenn $T \neq S$ ist, hat die Aufgabe genau eine Lösung.

33. Analyse (Abb. 3.51.): Wenn $ABCD$ das gesuchte Trapez ist, konstruieren wir das Parallelogramm $ACDE$. Es ist:

$$\overline{AD} = \overline{BC} = b, \quad \overline{AE} = \overline{CD} = c,$$

$$\overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AE} = a + c = 2p,$$

$$\overline{AC} = \overline{DE} = \overline{BD} = e.$$

In dem gleichschenkligen Dreieck DBE ist $\overline{BE}$ Grundseite. Seine Seiten sind

$$\overline{BE} = 2p, \quad \overline{BD} = \overline{ED} = e.$$

Daraus ergibt sich die *Konstruktion*: Wir konstruieren das gleichschenklige Dreieck BED so, daß

$$\overline{BE} = 2p, \quad \overline{BD} = \overline{ED} = e$$

gilt.

Dazu beschreiben wir die Kreislinie $k \equiv (D, b)$ und bezeichnen mit A den Schnittpunkt der Geraden BE mit dieser Kreislinie, der auf die Strecke $\overline{PE}$ fällt, wobei P der Fußpunkt der Senkrechten durch den Punkt D zur Geraden BE ist (die Existenz des Punktes A untersuchen wir in der Diskussion). Ferner konstruieren wir das Parallelogramm $AEDC$. Dann ist $ABCD$ das gesuchte Trapez.

Beweis: Das Viereck $ABCD$ ist nach der Konstruktion ein Trapez, denn es ist:

$$AB \parallel CD, \quad 2p = \overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD},$$

d. h., die Mittellinie ist gleich p , der Schenkel $\overline{AD} = b$, $\overline{AC} = \overline{ED} = \overline{BD} = e$ (nach der Konstruktion), $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BED = \sphericalangle ABD$ (nach der Konstruktion), so daß die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ symmetrisch in bezug auf die Mittelsenkrechte q der Strecke $\overline{AB}$

sind, und damit sind in bezug auf q auch die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ symmetrisch, d. h. $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Dabei ist $\overline{AB}$ die größere Grundseite, denn der Punkt A liegt auf der Strecke $\overline{PE}$, und deshalb ist $\overline{AB} > \overline{BP} = \overline{PE} > \overline{AE} = \overline{CD}$ oder $\overline{AB} > \overline{CD}$. Damit ist der Beweis geführt.

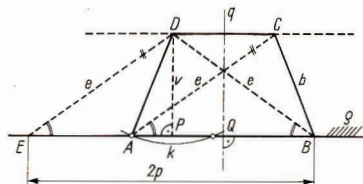


Abb. 3.51.

Diskussion: Damit sich das Dreieck DBE konstruieren läßt, muß

$$\overline{BE} < \overline{ED} + \overline{BD},$$

also

$$2p < 2e,$$

d. h.

$$p < e.$$

sein.

Damit der Punkt A auf die Strecke $\overline{PE}$ fällt, muß

$$v = \overline{DP} < \overline{DA} < \overline{DE}$$

oder

$$v < b < e \quad (2)$$

gelten. Aus dem Satz des PYTHAGORAS für das Dreieck EDP mit $\angle DPE = 90^\circ$ ergibt sich $\overline{DP}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{PE}^2$ oder $v = \sqrt{e^2 - p^2}$. Nach Einsetzen in (2) erhalten wir die Beziehungen

$$\sqrt{e^2 - p^2} < b < e$$

oder

$$e^2 - p^2 < b^2 < e^2. \quad (3)$$

Wenn die Beziehungen (1) und (3) erfüllt sind, hat die Aufgabe offensichtlich genau eine Lösung; sonst gibt es keine Lösung.

34. Angenommen, die ursprüngliche Lösung wiegt m Gramm. Die Masse des Zuckeranteils beträgt dann

$$\frac{p}{100} m \quad (1)$$

Gramm, die Masse des Wassers $\frac{100-p}{100} m$ Gramm. Wenn wir $q\%$ des Wassers verdampfen, verringert sich die Masse der Lösung um $\frac{100-p}{100} \cdot \frac{q}{100} m$ Gramm.

Die Masse der neuen Lösung beträgt dann:

$$m - \frac{(100-p)q}{100^2} m = \frac{100^2 - (100-p)q}{100^2} m$$

Gramm. Wenn die neue Lösung $2p$ -prozentig ist, so gilt

$$\frac{2p}{100} = \frac{p}{100} m : \frac{100^2 - (100-p)q}{100^2} m, \quad (2)$$

denn der Zuckeranteil (1) bleibt unverändert. Durch Umformung von (2) erhalten wir

$$2p = \frac{100^2 p}{100^2 - (100 - p)q}, \quad (3)$$

und

$$q = \frac{5000}{100 - p}. \quad (4)$$

Wenn die Aufgabe lösbar sein soll, muß offensichtlich $p < 50$ sein. Dann ergibt sich nach der Formel (4) $q > 0$ und zugleich $q < 100$.

Zahlenbeispiel: Für $p = 40$ ergibt sich $q = 83 \frac{1}{3} = 83, \bar{3}$. Wenn wir also aus einer 40prozentigen Lösung eine 80prozentige gewinnen wollen, müssen wir $83 \frac{1}{3} \%$ der ursprünglichen Wassermenge verdampfen.

Lösungen zu den Aufgaben der ersten Stufe, Klasse 8

35. (Abb. 3.52.): Wir bezeichnen mit P den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und mit x den Flächeninhalt der im Text der Aufgabe dargestellten Figur. Ferner bezeichnen

wir mit Q den Flächeninhalt der drei Kreisausschnitte, die wir vom Dreieck ABC abtrennen sollen. Es gilt

$$P = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

also ist

$$P = 2. \quad (1)$$

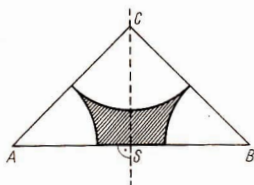


Abb. 3.52.

Der Flächeninhalt Q ist die Summe der Flächeninhalte der drei Kreisausschnitte mit

dem Radius $r = 1$. Der Kreis mit dem Radius $r = 1$ hat den Flächeninhalt πr^2 , d. h. π . Zwei von diesen Kreisausschnitten (bei den Eckpunkten A und B) haben also Flächeninhalte, die gleich $\frac{1}{8}\pi$ sind, und der dritte Kreisausschnitt (beim Eckpunkt C) hat den Flächeninhalt $\frac{1}{4}\pi$. Es ist also

$$Q = 2 \cdot \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi,$$

$$Q = \frac{1}{2}\pi.$$

Aus den Ergebnissen (1) und (2) erhalten wir für die Zahl $x = P - Q$:

$$x = 2 - \frac{1}{2}\pi. \quad (3)$$

Wir setzen näherungsweise $\pi \approx \frac{22}{7}$. Nach dem Einsetzen in (3) erhalten wir:

$$x \approx 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 2 - \frac{11}{7} = \frac{14 - 11}{7} = \frac{3}{7}. \quad (4)$$

Wir bezeichnen mit p die gesuchte Prozentzahl. Sie ist

$$p = \frac{x}{P} \cdot 100.$$

Setzen wir nun hier aus (1) und (4) ein, so erhalten wir näherungsweise

$$p \approx \frac{3 \cdot 100}{7} : 2 = \frac{3 \cdot 100}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{150}{7} = 21 \frac{3}{7}$$

oder

$$p \approx 21,43.$$

Antwort: Der Inhalt der Restfigur beträgt etwa $21 \frac{1}{2} \%$ des Inhalts des gegebenen Dreiecks.

36. Bemerkung: Die Primzahlen bis 99 ermitteln wir mit Hilfe des sogenannten „Siebs des ERATOSTHENES“, d. h. dadurch, daß wir nacheinander alle Vielfachen der natürlichen Zahlen, beginnend mit zwei, aussieben. Beachten Sie hierzu die folgende Tabelle, in der die „ausgesiebten“ Zahlen gewöhnlich und die „nicht ausgesiebten“ Zahlen halbfett gedruckt sind!)

1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	7 ,	8 ,	9 ,	10 ,
11 ,	12,	13 ,	14,	15,	16,	17 ,	18,	19 ,	20,
21,	22,	23 ,	24,	25,	26,	27,	28,	29 ,	30,
31 ,	32,	33,	34,	35,	36,	37 ,	38,	39,	40,
41 ,	42,	43 ,	44,	45,	46,	47 ,	48,	49,	50,
51,	52,	53 ,	54,	55,	56,	57,	58,	59,	60,
61 ,	62,	63,	64,	65,	66,	67 ,	68,	69,	70,
71 ,	72,	73 ,	74,	75,	76,	77,	78,	79 ,	80,
81,	82,	83 ,	84,	85,	86,	87,	88,	89 ,	90,
91,	92,	93,	94,	95,	96,	97 ,	98,	99.	

Wir haben also folgende *Primzahlen* zur Verfügung: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Bei der Zusammenstellung der Summe der gesuchten drei Primzahlen bemühen wir uns, den ersten und den zweiten Summanden möglichst klein zu wählen. Eine Zwei

Auf dieser Grundlage führen wir die Konstruktion durch.

Konstruktion (Abb. 3.53.): Wir konstruieren die Halbierende AX des gegebenen Winkels PAQ und sodann die Strecke $\overline{AE} = \frac{1}{2}d$. In der Halbebene AXP konstruieren wir den Winkel $AEY = 45^\circ$. Der Winkel PAX ist kleiner als 90° . Die Summe der Winkel PAX und AEY ist also kleiner als 180° , und nach dem Parallelenaxiom EUKLIDS haben die Strahlen AP und EY innerhalb der Halbebene AXP einen Schnittpunkt B .

In der Halbebene APX konstruieren wir über der Strecke $\overline{AB}$ als Seite den Rhombus $ABCD$, dessen Eckpunkt D auf den gegebenen Strahl AQ fällt. Die Konstruktion führen wir folgendermaßen durch: Auf dem Strahl AQ konstruieren wir die Strecke $\overline{AD} = \overline{AB}$ und das Dreieck ABD ergänzen wir so zum Parallelogramm $ABCD$, daß wir durch den Punkt D die Gerade $c \parallel AP$ und durch den Punkt B die Gerade $b \parallel AQ$ legen. Der Schnittpunkt der Geraden b und c ist der gesuchte Eckpunkt C . Dieses Parallelogramm ist die einzige Lösung der Aufgabe, was wir sogleich beweisen werden.

Beweis: Nach der Konstruktion ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Weil $\overline{AB} = \overline{AD}$ ist, ist es ein Rhombus. Im Eckpunkt A hat er den gegebenen Winkel PAQ . Wir wissen, daß die Diagonale $\overline{AC}$ des Rhombus dessen Winkel im Eckpunkt A halbiert, und deshalb fallen die Strahlen AC und AX zusammen, so daß der Punkt E auf den Strahl AC fällt. Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen aufeinander senkrecht und schneiden einander im Mittelpunkt des Rhombus. In dem Dreieck BES ist also $\angle BSE = 90^\circ$ und nach Konstruktion $\angle BES = 45^\circ$. Deshalb ist der dritte Winkel $\angle EBS = 45^\circ$, und das Dreieck ist gleichschenkelig, so daß $\overline{SB} = \overline{SE}$ ist. Nach der Konstruktion ist $\overline{AE} = \frac{1}{2}d$, also $\overline{AS} + \overline{SE} = \frac{1}{2}d$. Wir setzen für $\overline{SE} = \overline{SB}$ ein und erhalten $\overline{AS} + \overline{SB} = \frac{1}{2}d$. Die Summe der Hälften der Diagonalen ist also $\frac{1}{2}d$, und deshalb ist die Summe der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich d . Damit ist der Beweis geführt.

Entwurf einer ähnlichen Lösung:

Wenn $ABCD$ der gesuchte Rhombus ist, konstruieren wir das Parallelogramm $BDCB'$ (siehe Abb. 3.54.). Dann ist

$$\overline{CB'} = \overline{DB}. \quad (1)$$

Dabei halbiert die Diagonale $\overline{AC}$ des Rhombus den Winkel DAB . Auf dem Strahl AC konstruieren wir die Strecke $d = \overline{AC'} = \overline{AC} + \overline{DE}$. Auf Grund der Beziehung (1) ist $\overline{CC'} = \overline{AC'} - \overline{AC} = \overline{DB}$. Es ist also

$$\overline{CB'} = \overline{CC'}. \quad (2)$$

Dabei ist $AC \perp DB$ und damit auch $CB' \perp CC'$ (Wechselwinkel an den Parallelen DB und CB' , die durch die Gerade $ASCC'$ geschnitten werden). Deshalb ist das Dreieck $CB'C'$ rechtwinklig ($\sphericalangle B'CC' = 90^\circ$) und gleichschenkelig [siehe (2)]. Daraus folgt, daß $\sphericalangle CC'B' = 45^\circ$ ist. Auf Grund dessen führen wir folgende Konstruktion durch:

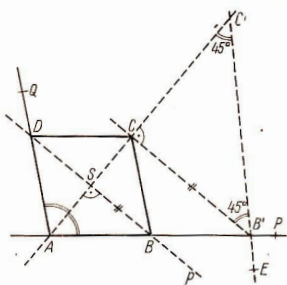


Abb. 3.54.

Wir konstruieren den Winkel $\sphericalangle PAQ$ und auf seiner Halbierenden die Strecke $\overline{AC'} = d$. In der Halbebene $AC'P$ konstruieren wir den Winkel $\sphericalangle AC'E = 45^\circ$ und bezeichnen mit B' den Schnittpunkt der Strahlen AP und $C'E$. Ferner bezeichnen wir mit C den Fußpunkt der Senkrechten durch den Punkt B' zur Geraden AC' . Die Mittelsenkrechte p der Strecke $\overline{AC}$ schneidet die Strahlen AP und AQ der Reihe nach in den Punkten B bzw. D . Der Beweis für die Konstruktion ist leicht, so daß wir ihn übergehen können.

Der Winkel $\sphericalangle PAC'$ ist kleiner als ein Rechter. Deshalb gilt

$$\sphericalangle AC'E + \sphericalangle PAC' < 45^\circ + 90^\circ < 180^\circ,$$

und nach dem EUKLIDischen Parallelenaxiom haben die Strahlen AP und $C'E$ immer einen Schnittpunkt B' . Deshalb hat die Aufgabe nur eine einzige Lösung.

38. Nehmen wir an, daß man mit Autobussen vom Typ II (mit 17 Sitzen) gefahren ist. Man kann höchstens 286 : 17 Autobusse vom Typ II voll besetzen.

Würde man 16 Autobusse vom Typ II verwenden, so müßten noch 14 Personen untergebracht werden. Ein Autobus vom Typ I (mit 19 Sitzen) hat 2 Sitze mehr als ein Autobus vom Typ II. Da $14 : 2 = 7$ ist, ersetzen wir 7 Autobusse vom Typ II durch Autobusse vom Typ I. So bringen wir gerade die übriggebliebenen 14 Personen unter.

Tatsächlich, 7 Autobusse vom Typ I und $16 - 7 = 9$ Autobusse vom Typ II sind in der Lage (wenn alle Autobusse voll besetzt sind) diese Personenzahl zu befördern:

$$19 \cdot 7 + 17 \cdot 9 = 133 + 153 = 286.$$

Antwort: Es waren 7 Autobusse vom Typ I und 9 Autobusse vom Typ II erforderlich. Die angegebene Lösung ist die einzige.

Beweis: Die Anzahl der verwendeten Autobusse vom Typ I sei n , die vom Typ II sei m . Dann sind m und n nichtnegative ganze Zahlen, für die

$$17m + 19n = 286 \quad (+)$$

Konstruktion (Abb. 3.55.): Wir konstruieren den Winkel $APM = 45^\circ$, wobei $\overline{PA} = 4$ ist. Ferner konstruieren wir auf dem Strahl PA die Strecke $\overline{PB} = 14$. Vom Punkt A fallen wir das Lot k auf die Gerade PM , und danach ermitteln wir den Spiegelpunkt A' von A an der Geraden PM (in der Abbildung 3.55. ist also $\overline{SA'} = \overline{SA}$).

Ferner ziehen wir durch den Punkt B die Gerade $p \parallel PM$ und konstruieren sodann die Strecke $\overline{BZ} = 3$, und zwar so, daß die Punkte M und Z in entgegengesetzten Halbebenen liegen, welche von der Geraden PA begrenzt werden. Die Punkte A' und Z liegen in entgegengesetzten Halbebenen mit dem Rand PM . Deshalb liegt auf der Strecke $\overline{A'Z}$ der Punkt X , der gleichzeitig auch auf der Geraden PM liegt. Es ist dies der Schnittpunkt der Geraden $A'Z$ und PM . Schließlich konstruieren wir durch den Punkt B die Gerade $q \parallel A'Z$ und bezeichnen mit Y den Schnittpunkt der Geraden q und PM . Damit sind die Punkte X und Y konstruiert.

Für die Punkte X und Y gilt tatsächlich $\overline{XY} = \overline{BZ} = 3$; denn $XYBZ$ ist nach der Konstruktion ein Parallelogramm. Ferner ist nach der Konstruktion $A'Z \parallel q$. Die Parallelen $A'Z$ und q werden von der Geraden XY geschnitten, weshalb die Wechselwinkel $\angle A'XY$ und $\angle XYB$ kongruent sind. Aus der Konstruktion des Punktes A' ergibt sich die Kongruenz der symmetrisch gelegenen Winkel $\angle AXY$ und $\angle A'XY$, so daß tatsächlich $\angle AXY = \angle XYB$ ist. Die Punkte X und Y erfüllen also die Forderungen der Aufgabe. Aus der Konstruktion geht hervor, daß die gegebene Aufgabe bei den gegebenen Werten genau eine Lösung hat.

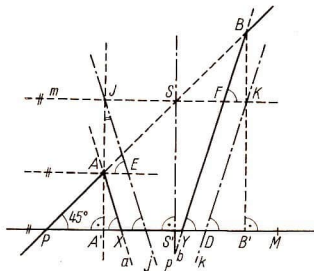


Abb. 3.56.

Entwurf einer anderen Lösung:

Analyse (Abb. 3.56.): Stellen wir uns vor, daß wir die gesuchten Punkte X und Y konstruiert haben. Wir bezeichnen mit A' bzw. B' die Fußpunkte der von den Punkten A und B auf die Gerade PM gefällten Lote, so daß $AA'B'B$ ein Trapez ist. Wenn S und S' die Mittelpunkte der Trapezschenkel $\overline{AB}$ bzw. $\overline{A'B'}$ sind, ist $p \equiv SS'$ seine Mittellinie und gleichzeitig Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{A'B'}$.

Bei einer Spiegelung am Punkt S wird der Punkt A in den Punkt B und die Gerade AA' in die Gerade BB' übergeführt und umgekehrt. Die Gerade $m \parallel PM$ durch den Punkt S schneidet die Geraden AA' und BB' in den Punkten J bzw. K , die in bezug auf den Punkt S symmetrisch sind. Durch den Punkt J ziehen wir die Gerade $j \parallel AX$ und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit der Geraden PM mit C . Durch den Punkt K ziehen wir die Gerade $k \parallel BY$ und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit der Geraden PM mit D . Aus der Gleichheit der Winkel $\angle AXY$ und $\angle XYB$ und aus

der Parallelität von $j \parallel AX$ und $k \parallel BY$ folgt, daß $\sphericalangle JCD = \sphericalangle CDK$ ist. Daraus ergibt sich, daß das Trapez $CDKJ$ (es ist $CD \parallel JK$) gleichschenkelig ist und p als Symmetrieachse hat. Ferner gilt $\triangle EJA \cong \triangle FBK$ (siehe Abb. 3.56., wo $AE \parallel PM$ ist), denn es ist $AJ = BK$, was sich aus der Symmetrie dieser Strecken in bezug auf den Mittelpunkt S ergibt. Ferner ist $\sphericalangle EAA' = \sphericalangle FKB' = 90^\circ$ und $\sphericalangle AEJ = \sphericalangle BFK$; deshalb ist $\overline{AE} = \overline{KF}$, und weil $\overline{XC} = \overline{AE}$ und $\overline{DY} = \overline{KF}$ ist, ist auch $\overline{XC} = \overline{DY}$, d. h. $\overline{CD} = \overline{XY} = 3$.

Daraus ergibt sich die *Konstruktion*:

Wir konstruieren den Mittelpunkt S der Strecke $\overline{AB}$ und fällen von ihm das Lot p auf die Gerade PM . Den Fußpunkt bezeichnen wir mit S' . Auf der Geraden PM konstruieren wir die Strecken $\overline{S'C} = \overline{S'D} = 1,5$ (mit $C \neq D$). Ferner errichten wir die Senkrechten AA' und BB' auf der Geraden PM und schneiden sie mit der Geraden $m \parallel PM$ durch den Punkt S . Die Gerade m schneidet die Geraden AA' und BB' der Reihe nach in den Punkten J bzw. K . Damit haben wir das gleichschenkelige Trapez $CDKJ$ konstruiert. Nun ziehen wir durch den Punkt A die Gerade $a \parallel JC$ und durch den Punkt B die Gerade $b \parallel KD$. Die Geraden a und b schneiden die Gerade PM in den gesuchten Punkten X und Y .

Der Beweis der Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich aus der Umkehrung des in der Analyse durchgeführten Verfahrens, die Aufgabe hat offensichtlich nur eine einzige Lösung.

40. Wir bezeichnen mit A den Zähler und mit B den Nenner des Bruchs Z . Die Ausdrücke A und B formen wir mit Hilfe der Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ um. Es gilt

$$\begin{aligned} A &= [x(p + q) + pq + 1]^2 - [x(pq + 1) + p + q]^2 \\ &= [x(p + q) + pq + 1 + x(pq + 1) + p + q] \cdot \\ &\quad \cdot [x(p + q) + pq + 1 - x(pq + 1) - p - q] \\ &= [x(p + q + pq + 1) + (pq + p + q + 1)] \cdot \\ &\quad \cdot [x(p + q - pq - 1) - (p + q - pq - 1)] \\ &= (p + q + pq + 1)(x + 1) \cdot (p + q - pq - 1)(x - 1) \\ &= [p(1 + q) + (1 + q)](x + 1) \cdot [p(1 - q) - (1 - q)](x - 1) \\ &= (1 + q)(p + 1) \cdot (x + 1) \cdot (1 - q)(p - 1) \cdot (x - 1) \\ A &= -(p + 1)(p - 1)(q + 1)(q - 1) \cdot (x + 1)(x - 1). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B &= (p + q)^2 - (pq + 1)^2 \\ &= [p + q + pq + 1] \cdot [p + q - pq - 1] \\ &= [p(1 + q) + (1 + q)] \cdot [p(1 - q) - (1 - q)] \\ &= (1 + q)(p + 1) \cdot (1 - q)(p - 1) \\ B &= -(p + 1)(p - 1)(q + 1)(q - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Es ist also

$$Z = \frac{-(p+1)(p-1)(q+1)(q-1) \cdot (x+1)(x-1)}{-(p+1)(p-1)(q+1)(q-1)}. \quad (3)$$

[Bemerkung: Der Bruch Z verliert offensichtlich seinen Sinn, wenn eine der Zahlen p und q gleich einer der Zahlen $-1, 1$ ist.]

Alle weiteren Umformungen führen wir unter der Voraussetzung durch, daß keine der beiden Zahlen p und q eine der Zahlen $-1, 1$ ist.

a) Weil die Zahlen p und q von den Zahlen 1 und -1 verschieden sind, ist keiner der Faktoren im Produkt (2) gleich null, und deshalb ist $B \neq 0$. Wir können also Zähler und Nenner des Bruches (3) durch die Zahl B dividieren und erhalten

$$Z = (x+1)(x-1). \quad (4)$$

Dieser Ausdruck enthält tatsächlich nicht die Zahlen p und q , und deshalb ist der Bruch Z von den Zahlen p und q unabhängig.

b) Auf Grund von a) ist genau dann $Z = 0$, wenn

$$(x+1)(x-1) = 0$$

ist, d. h., wenn entweder $x+1 = 0$ oder $x-1 = 0$ ist. Aus der Gleichung

$$x+1 = 0$$

erhalten wir $x = -1$. Aus der Gleichung

$$x-1 = 0$$

erhalten wir $x = 1$.

Umgekehrt: Wenn wir in die Beziehung (4) $x = -1$ einsetzen, erhalten wir

$$Z = (-1+1) \cdot (-1-1) = 0 \cdot (-2) = 0.$$

Ähnlich erhalten wir, wenn wir in (4) $x = 1$ einsetzen,

$$Z = (1+1)(1-1) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Ergebnis: Der Bruch Z ist für $x = -1$ und für $x = 1$ und nur für diese Werte gleich Null (sofern keine der Zahlen p und q eine der Zahlen -1 oder 1 ist).

c) Wir sollen entscheiden, für welche Zahlen x das Produkt

$$Z = (x+1)(x-1)$$

eine negative Zahl ist.

Das Produkt zweier Zahlen ist negativ, wenn der eine Faktor positiv und der andere negativ ist. Wir suchen also alle solche x , so daß eine der Zahlen $x+1$ oder $x-1$ positiv und die andere negativ ist.

Die Zahl $x - 1$ ist positiv für $x > 1$. Dann ist $x + 1$ die Summe zweier positiver Zahlen, Z ist dann das Produkt positiver Zahlen, und damit ist es positiv.

Die Zahl $x - 1$ ist negativ für $x < 1$. Die Zahl $x + 1$ ist in dem Fall nur dann positiv, wenn $x > -1$ ist. Das bedeutet, daß x zwischen den Zahlen -1 und 1 liegen muß.

Für $x = 1$ oder -1 ist eine der Zahlen $x + 1$, $x - 1$ null, und deshalb ist $Z = 0$.

Für $x < -1$ ist $x + 1$ und $x - 1$ eine negative Zahl und Z ist das Produkt zweier negativer Zahlen, also eine positive Zahl.

Ergebnis: Der Bruch Z ist negativ für alle Zahlen x , die größer als -1 , aber kleiner als 1 sind (sofern die beiden Zahlen p und q von den Zahlen -1 und 1 verschieden sind).

Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Stufe, Klasse 8

41. Die gegebene Gleichung (1) formen wir folgendermaßen um:

$$\frac{p(x-3)}{(3p-2)^2} + \frac{p(x+3)}{(3p+2)^2} = \frac{-4}{(3p+2)(3p-2)}. \quad (2)$$

Gemeinsames Vielfaches der Nenner aller drei Brüche ist

$$n = (3p-2)^2 (3p+2)^2. \quad (3)$$

Es ist verschieden von null, wenn weder

$$3p-2=0 \quad \text{noch} \quad 3p+2=0$$

gilt.

Wenn also

$$p \neq \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad p \neq -\frac{2}{3}$$

ist, so haben die Brüche in (2) einen Sinn, und es ist $n \neq 0$. Wir multiplizieren die beiden Seiten der Gleichung (2) mit der Zahl n und erhalten nacheinander die Gleichungen

$$\begin{aligned} p(x-3)(3p+2)^2 + p(x+3)(3p-2)^2 &= -4(3p+2)(3p-2), \\ px[(3p+2)^2 + (3p-2)^2] &= \\ &= -4(3p+2)(3p-2) + 3p[(3p+2)^2 - (3p-2)^2], \\ px[9p^2 + 12p + 4 + 9p^2 - 12p + 4] &= \\ &= -4(9p^2 - 4) + 3p[(9p^2 + 12p + 4) + (9p^2 - 12p + 4)], \end{aligned}$$

$$p(18p^2 + 8)x = -4(9p^2 - 4) + 3 \cdot 24p^2,$$

$$2p(9p^2 + 4)x = -36p^2 + 16 + 72p^2,$$

$$2p(9p^2 + 4)x = 36p^2 + 16,$$

$$p(9p^2 + 4)x = 2(9p^2 + 4).$$

[1] Weil p^2 eine nichtnegative Zahl ist, ist die Summe $9p^2 + 4$ eine positive Zahl. Wenn $p \neq 0$ ist, so ist die Zahl $p(9p^2 + 4)$ das Produkt zweier Zahlen, die von null verschieden sind, d. h., sie ist ebenfalls eine von null verschiedene Zahl. Die zu ihr

reziproke Zahl ist $\frac{1}{p(9p^2 + 4)}$. Wir multiplizieren damit die beiden Seiten der letzten Gleichung und erhalten

$$x = \frac{2}{p}. \quad (4)$$

Probe: Wir setzen das Ergebnis (4) in die linke Seite der Gleichung (1) ein und erhalten mit

$$\begin{aligned} \frac{2 - 3p}{(3p - 2)^2} + \frac{2 + 3p}{(3p + 2)^2} &= -\frac{(3p - 2)}{(3p - 2)^2} + \frac{3p + 2}{(3p + 2)^2} \\ &= -\frac{1}{3p - 2} + \frac{1}{3p + 2} \\ &= \frac{-(3p + 2) + 3p - 2}{(3p - 2)(3p + 2)} = \frac{-4}{9p^2 - 4} \end{aligned}$$

die rechte Seite der Gleichung (1).

[2] Wenn $p = 0$ ist, so ist die linke Seite der Gleichung (1)

$$L = \frac{0}{4} - \frac{0}{4} = 0.$$

Die rechte Seite ist

$$\frac{-4}{-4} = 1.$$

Es ist also $L \neq P$, und die Gleichung (1) hat keine Lösung.

Antwort: Die gegebene Gleichung hat die Lösung $x = \frac{2}{p}$ für jede Zahl p , welche von den Zahlen $-\frac{2}{3}$, 0 , $\frac{2}{3}$ verschieden ist. Für diese drei Zahlen gibt es keine Lösung.

42. Es ist bekannt, daß die Länge der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Kreislinien, die einander von außen berühren, gleich der Summe der Radien der Kreislinien ist. Wenn sich dagegen die Kreise von innen berühren, ist sie gleich der Differenz $r_1 - r_2$ ihrer Radien r_1 und r_2 , wobei $r_1 > r_2$ ist. Daraus ergibt sich der Satz V:

Die Mittelpunkte aller Kreislinien mit dem Radius $\varrho = 3$, welche die gegebene Kreislinie $k \equiv (S, r)$ von außen berühren, bilden die Kreislinie $v \equiv (S, r + 3)$. Die Mittelpunkte aller Kreislinien mit dem Radius 3, welche die gegebene Kreislinie $k \equiv (S, r)$ von innen berühren (wobei $r > 3$ ist), bilden die Kreislinie $u \equiv (S, r - 3)$.

Wir konstruieren die zur Kreislinie k konzentrischen Kreislinien $v \equiv (S, r + 3)$ und $u \equiv (S, r - 3)$. Ferner konstruieren wir die Kreislinie $v' \equiv (S', r' + 3)$. (*Bemerkung:* Weil $r' = 3$ ist, ist $r' - 3 = 0$, und es existieren also keine Kreislinien mit dem Radius 3, die die Kreislinie k' von innen berühren.) Wenn X der Mittelpunkt einer Kreislinie mit dem Radius 3 ist, welche die Kreislinien k und k' von außen berührt, so muß der Punkt X auf jeder der Kreislinien v und v' liegen, also ihr Berührungspunkt sein.

Wenn Y der Mittelpunkt einer Kreislinie mit dem Radius 3 ist, die die Kreislinie k von innen und die Kreislinie k' von außen berührt, so muß der Punkt Y Schnittpunkt der Kreislinien u und v' sein.

(In unserem Fall existiert keine Kreislinie mit dem Radius 3, welche die Kreislinien k und k' von innen berührt; siehe Bemerkung.)

Dementsprechend führen wir die Konstruktion durch.

Konstruktion (Abb. 3.57.): Wir bezeichnen mit T den Berührungspunkt der gegebenen Kreislinien k und k' , so daß

$$\begin{aligned}\overline{ST} &= r = 7, \quad \overline{S'T} = r' = 3, \\ \overline{SS'} &= \overline{ST} - \overline{S'T} = 4\end{aligned}\tag{1}$$

ist.

Wir beschreiben die Hilfskreislinien $v \equiv (S, r + 3 = 10)$, $u \equiv (S, r - 3 = 4)$ und $v' \equiv (S', r' + 3 = 6)$.

Die Kreislinien v und v' haben den Berührungspunkt X . Gemäß (1) ist $\overline{SX} = \overline{ST} + 3$ und $\overline{S'X} = \overline{S'T} + 3$, und die Punkte S, S', T und X liegen auf ein und derselben Geraden. Die Kreislinie $x \equiv (X, \varrho = 3)$ berührt die Kreislinien k und k' von außen. Die Kreislinien u, v' schneiden einander in den beiden Punkten Y und Y' . Die Kreislinien $y \equiv (Y, \varrho = 3)$ und $y' \equiv (Y', \varrho = 3)$ berühren die Kreislinie k von innen und die Kreislinie k' von außen.

Mit x, y und y' sind alle Kreislinien (Abb. 3.57.) mit den geforderten Eigenschaften konstruiert.

Der *Beweis* für die Richtigkeit ergibt sich aus der Konstruktion der Hilfskreislinien.

Berührungspunkt der Kreislinie x mit den Kreislinien k und k' ist offensichtlich der Punkt T .

Den Berührungspunkt T_1 der Kreislinien y und k erhalten wir als den Schnittpunkt der Kreislinie k mit dem Strahl SY . Den Berührungspunkt T_2 der Kreislinien y und k'

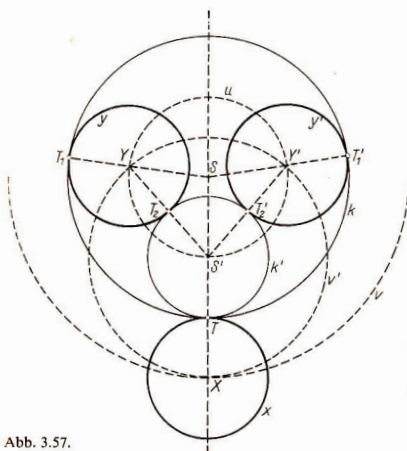


Abb. 3.57.

erhalten wir als Schnittpunkt der Kreislinie k' mit dem Strahl $S'Y$.

Die Spiegelbilder T'_1 und T'_2 der Punkte T_1 und T_2 an der Achse SS' sind die Berührungspunkte der Kreislinienpaare y', k und y', k' .

Diskussion: Die Kreislinien v und v' haben die Mittelpunktslinie $\overline{SS'} = 4$, die Radien $r + 3 = 10$ und $r' + 3 = 6$, so daß also $\overline{SS'} = r + 3 - (r' + 3) = 4$ ist. Deshalb berühren die Kreislinien v und v' einander von innen und deshalb haben sie nur den Punkt X gemeinsam.

Die Kreislinien u und v' haben die Mittelpunktslinie $\overline{SS'} = 4$, die Radien $r_1 = r - 3 = 4$, $r_2 = r' + 3 = 6$ und deshalb gilt

$$r_2 - r_1 < \overline{SS'} < r_2 + r_1,$$

so daß die Kreislinien u und v' einander in den verschiedenen Punkten Y und Y' schneiden. Deshalb existieren die beiden gesuchten Kreislinien y und y' , welche die Kreislinie k von innen und die Kreislinie k' von außen berühren.

Ergebnis: Man kann insgesamt drei Kreislinien x , y , y' mit den geforderten Eigenschaften konstruieren.

43. In den 1500 Gramm der ursprünglichen Lösung sind $\frac{1500}{100} \cdot 7,2 = 108$ Gramm Salz enthalten.

a) Es ist $108 : \frac{1200}{100} = 9$.

Antwort: Die neue Lösung ist 9prozentig.

b) Wir fügen x Gramm Salz hinzu. Die gewonnene Lösung wiegt $(1200 + x)$ Gramm und es sind darin $(108 + x)$ Gramm Salz enthalten. Nach dem Text der Aufgabe soll dann

$$(108 + x) : \frac{1200 + x}{100} = 25$$

oder

$$(108 + x) \cdot \frac{100}{1200 + x} = 25$$

sein. Durch Umformung dieser Gleichung erhalten wir nacheinander

$$100(108 + x) = 25(1200 + x),$$

$$4(108 + x) = 1200 + x,$$

$$3x = 1200 - 432,$$

$$3x = 768,$$

$$x = 256.$$

Antwort: Es müssen 256 Gramm Salz hinzugefügt werden. Die gewonnene Lösung wiegt 1456 Gramm.

Probe: Es ist

$$364 : \frac{1456}{100} = \frac{364 \cdot 100}{1456} = \frac{1 \cdot 100}{4} = 25,$$

was mit der Forderung, daß die Lösung 25prozentig sein soll, übereinstimmt.

44. Analyse: Wenn die Punkte X und Y in der Abbildung 3.58. den Forderungen der Aufgabe entsprechen, ist $\overline{XY} = 6$ cm und $AX \parallel BY$. Wir konstruieren das Parallelogramm $XYBZ$. Darin ist $\overline{BZ} = \overline{XY} = 6$ cm. Mit Hilfe dieses Ergebnisses führen wir die Konstruktion durch.

Konstruktion: Wir konstruieren durch den Punkt B die Gerade $q \parallel p$ und darauf die Strecke $\overline{BZ} = \overline{BZ'} = 6$ cm (dabei sind BZ und BZ' entgegengesetzte Strahlen).

Eine weitere Konstruktion führen wir mit dem Punkt Z durch (mit dem Punkt Z' geschieht es analog): Wir bezeichnen mit X den Schnittpunkt der Geraden p und AZ . Ferner ziehen wir durch den Punkt B die Gerade $b \parallel AZ$ und bezeichnen mit Y den Schnittpunkt der nicht parallelen Geraden p und b . Dann ist der Streckenzug $AXYB$ eine Lösung der Aufgabe.

Beweis (Abb. 3.58.): Nach der Konstruktion ist $XYBZ$ ein Parallelogramm. Für seine gegenüberliegenden Seiten gilt

$$\overline{XY} = \overline{BZ} = 6 \text{ cm},$$

$$XZ \parallel BY \quad \text{oder} \quad AX \parallel BY.$$

Dabei liegen die Punkte X und Y auf der Geraden p . Damit ist der Beweis geführt.

Diskussion (Abb. 3.59.): Zu jedem der Punkte Z und Z' gehört ein Streckenzug, d. h., wir erhalten genau die beiden Linien $AXYB$ und $AX'Y'B$. Diese sind tatsächlich voneinander verschieden, denn es sind die Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{AX'}$ voneinander verschieden,

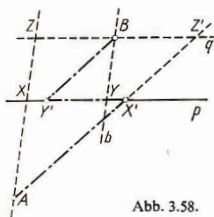


Abb. 3.58.

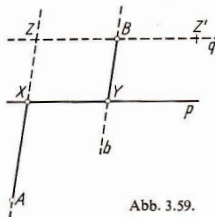


Abb. 3.59.

was sich daraus ergibt, daß $\overline{AZ}$ und $\overline{AZ'}$ Seiten des Dreiecks AZZ' und deshalb voneinander verschiedene Strecken sind. Die Aufgabe hat also genau zwei Lösungen. (*Bemerkung:* Dabei kann $X \equiv Y'$ und $Y \equiv X'$ sein, und trotzdem existieren zwei verschiedene Streckenzüge.)

DIE AUFGABEN DER ZWEITEN INTERNATIONALEN MATHEMATIKOLYMPIADE

Die Zweite Internationale Mathematikolympiade fand am 21. und 22. Juli 1960 in Sinaia in der Rumänischen Volksrepublik statt.

Hinter jeder Aufgabe wird in Klammern das Land angegeben, welches die betreffende Aufgabe eingereicht hat.

Zunächst die Aufgaben der ersten schriftlichen Arbeit, die am 21. Juli 1960 geschrieben wurde.

1. Wenn wir eine gesuchte dreistellige Zahl durch 11 teilen, erhalten wir einen Wert, der gleich der Quadratsumme der Ziffern der gesuchten Zahl ist. — Ermitteln Sie alle diese dreistelligen Zahlen! (Bulgarien)
2. Ermitteln Sie alle Zahlen x , für welche die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

gilt! (Ungarn)

3. Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC , dessen Hypotenuse $\overline{BC}$ in n kongruente Strecken geteilt ist, wobei n eine ungerade Zahl ist. Wir bezeichnen mit α den Winkel, unter dem vom Punkte A aus diejenige der kongruenten Strecken erscheint, welche den Mittelpunkt der Hypotenuse des gegebenen Dreiecks enthält. Ferner

bezeichnen wir mit h die Höhe und mit a die Länge der Hypotenuse des gegebenen Dreiecks. Beweisen Sie, daß dann

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}$$

gilt! (Rumänien)

Die zweite schriftliche Arbeit wurde am 22. Juli 1960 geschrieben.

4. Konstruieren Sie das Dreieck ABC , wenn die zu den Eckpunkten A und B des Dreiecks gehörigen Längen der Höhen r_a , r_b und ferner die Länge t_a der Seitenhalbierenden, welche zum Eckpunkt A gehört, gegeben sind! (Ungarn)

5. Gegeben ist der Würfel $ABCD A' B' C' D'$.

a) Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{XY}$, wobei X ein beliebiger Punkt der Strecke $\overline{AC}$ und Y ein beliebiger Punkt der Strecke $\overline{B'D'}$ ist!

b) Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte Z , die auf der Strecke $\overline{XY}$ [aus der vorhergehenden Aufgabe a)] liegen, für die

$$\overline{ZY} = 2 \cdot \overline{XZ}$$

ist! (ČSSR)

6. Gegeben ist ein Rotationskegel, dem eine Kugelfläche so einbeschrieben ist, daß sie die Grundfläche des Kegels berührt. Dieser Kugelfläche ist ein Rotationszylinder umbeschrieben, dessen eine Grundfläche in der Ebene der Grundfläche des gegebenen Kegels liegt. Wir bezeichnen mit V_1 das Volumen des Kegels, mit V_2 das Volumen des Zylinders.

a) Beweisen Sie, daß $V_1 \neq V_2$ ist!

b) Ermitteln Sie die kleinste Zahl k , für welche die Beziehung

$$V_1 = k \cdot V_2$$

gilt!

Konstruieren Sie für diesen Fall den Winkel, unter dem von der Kegelspitze aus der Durchmesser der Grundfläche des Kegels zu sehen ist! (Bulgarien)

7. Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten a und c und der Höhe v . Konstruieren Sie auf der Symmetrieachse dieses Trapezes einen Punkt P so, daß von ihm aus die beiden Schenkel des Trapezes unter rechten Winkeln zu sehen sind!

Berechnen Sie ferner den Abstand des Punktes P von einer der Grundseiten des Trapezes!

Entscheiden Sie schließlich, unter welchen Bedingungen ein solcher Punkt P existiert! (Diskussion der Fälle, die auftreten können.) (DDR)

