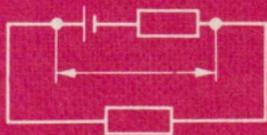
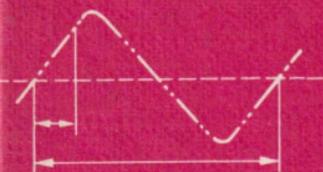


Physik

Praktikum

Mende/Kretschmar/Wollmann



SI-Einheiten

Elektrik	
Stromstärke	A
Stromdichte	A/m ²
Ladung	C
Spannung	V
Widerstand	Ω
Leitwert	S
spezifischer Widerstand	$\Omega \text{ m}$
Leitfähigkeit	S/m
elektrische Feldstärke	V/m
elektrische Verschiebung	C/m ²
Kapazität	F
elektrische Feldkonstante	F/m
magnetische Feldstärke	A/m
magnetische Induktion	T
Induktivität	H
magnetische Feldkonstante	H/m

SI-Einheiten

Basiseinheiten

Länge	m
Zeit	s
Masse	kg
elektrische Stromstärke	A
Temperatur (thermodynamische)	K
Stoffmenge	mol
Lichtstärke	cd

Vorsätze

Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Tera	T	10^{12}	Piko	p	10^{-12}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Mega	M	10^6	Mikro	μ	10^{-6}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Hekto	h	10^2	Zenti	c	10^{-2}
Deka	da	10	Dezi	d	10^{-1}

Hekto, Dekka, Dezi und Zenti sollen nur noch verwendet werden, soweit es bisher üblich war.

Physik- Praktikum

Mit 62 Versuchsanleitungen und 172 Bildern

2. Auflage



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Physik-Praktikum / [Federführung: Dietmar Mende ...].

— 2. Aufl. — Leipzig : Fachbuchverl., 1990. —

180 S. : 172 Abb.

NE: Mende, Dietmar [Mitarb.]

ISBN 3-343-00239-9

© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1990

2. Auflage

Lizenznummer 114-210/18/90

LSV 1103

Verlagslektor: Dipl.-Ing. Christine Fritsch

Gestaltung: Christine Graichen

Printed in GDR

Satz : VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg

Fotomechanischer Nachdruck: Grafische Werke Zwickau

Redaktionsschluß: 15. 9. 1989

Bestellnummer: 5472335

01480

Federführung:

Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Riesa

Verfaßt von

Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Riesa

Dr. sc. paed., Dr. rer. nat. Werner Kretschmar, Jena

Dipl.-Phys. Hellmut Wollmann, Dresden

unter Mitarbeit von

Dipl.-Phys. Edgar Korst, Lengenfeld (Vogtl.)

Dipl.-Phys. Peter Leißner, Leipzig

Dipl.-Lehrer Gerhard Oertel, Karl-Marx-Stadt

Dipl.-Phys. Günter Simon, Apolda

Dipl.-Phys. Hubert Waldmann, Hermsdorf (Thür.)

Dr. rer. nat. Jürgen Zeitler, Magdeburg

Vorwort

Ein unerläßlicher Bestandteil der Physik-Ausbildung ist das Physikalische Praktikum. Im Praktikum lernen die Studierenden, das im Unterricht erworbene Wissen komplex anzuwenden und die Erkenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Physik zu verbinden. Hier wird ihr physikalisches Verständnis vertieft und gefestigt. Die selbständige Arbeit im Praktikum verlangt vom Studierenden gründliches Durcharbeiten und Aneignen des Stoffes. Der Studierende gewinnt darüber hinaus Einblick in physikalische Untersuchungsmethoden und meßtechnische Verfahren. Er erwirbt experimentelles Geschick und bereitet sich auf die wissenschaftliche Tätigkeit im Studium und in der beruflichen Praxis vor.

Das vorliegende Buch enthält neben einer allgemeinen Aufgabenstellung eine Einführung in die Fehlerrechnung und 62 Versuchsanleitungen mit zahlreichen Abbildungen der Versuchsanordnungen. Es wendet sich vorwiegend an Studierende an Fachschulen und Fachhochschulen, kann aber auch für Studierende anderer Bildungseinrichtungen sowie für Lehrer an allgemeinbildenden Schulen nützlich sein. Als ergänzendes Tabellenwerk empfehlen wir das „Taschenbuch der Physik“ von H. Kuchling, das im gleichen Verlag erschienen ist.

Wir wünschen den Benutzern des Buches viel Erfolg bei der Durchführung ihres Praktikums.

Autoren und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. Warum physikalisches Praktikum?	9	2.6.3.2. Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x; y)$	17
2. Einführung in die Fehlerabschätzung	11	3. Versuchsanleitungen	21
2.1. Wert einer Größe	11	MECHANIK	21
2.1.1. Wahrer Wert einer Größe	11	1. Flächenmessung mit dem Polarplanimeter	21
2.1.2. Richtiger Wert einer Größe	11	2. Waage	24
2.1.3. Meßwert	11	3. Messung von Geschwindigkeit	28
2.1.4. Mittelwert einer Meßreihe	11	4. Dichtebestimmung mit dem Pyknometer	29
2.1.5. Erwartungswert	11	5. Physisches Pendel	31
2.2. Fehler einer Messung	11	6. Federkonstante einer Schraubenfeder	33
2.2.1. Absoluter Fehler	11	7. Trägheitsmoment	35
2.2.2. Relativer Fehler	12	8. Gekoppelte Pendel	38
2.3. Fehlerarten	12	9. Gedämpfte Pendelschwingungen	42
2.3.1. Grobe Fehler	12	10. Oberflächenspannung von Flüssigkeiten	45
2.3.2. Systematische Fehler	12	11. Bestimmung der Dichte von festen Körpern aus dem Auftrieb in Flüssigkeiten	47
2.3.2.1. Ursache systematischer Fehler	12	12. Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten mit der MOHR-WESTPHALischen Waage	49
2.3.2.2. Erfaßte systematische Fehler — Korrektion	12	13. Viskosität von Flüssigkeiten	51
2.3.2.3. Nichterfaßte systematische Fehler	13	14. Strömungsgeschwindigkeit und Widerstandszahl	53
2.3.3. Zufällige Fehler	13	15. Schallgeschwindigkeit und Elastizitätsmodul	56
2.4. Fehlerstatistik	13	16. Messung des Elastizitätsmoduls mit Ultraschall	58
2.4.1. Standardabweichung	13	17. Resonanzrohr	60
2.4.2. Vertrauensgrenzen und Vertrauensbereich des Mittelwertes	13	THERMODYNAMIK	63
2.4.3. Meßunsicherheit	14	18. Längenausdehnungskoeffizient fester Körper	63
2.4.4. Meßergebnis	14		
2.5. Fehlergrenzen	15		
2.6. Fehlerfortpflanzung	15		
2.6.1. Problemstellung	15		
2.6.2. Fehlerfortpflanzung (ohne Differentialrechnung)	15		
2.6.2.1. Die Summe $z = x + y$	15		
2.6.2.2. Die Differenz $z = x - y$	16		
2.6.2.3. Das Produkt $z = xy$	16		
2.6.2.4. Die Potenz $z = x^a$	16		
2.6.2.5. Der Quotient $z = x/y$	16		
2.6.3. Fehlerfortpflanzung (mit Differentialrechnung)	17		
2.6.3.1. Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x)$	17		

19.	Wärmekapazität eines Kalorimeters	64	40.	Lade- und Entladungskurven bei Kondensatoren	113
20.	Spezifische Wärmekapazität fester Körper	66	41.	Bestimmung von Dielektrizitätszahlen	116
21.	Spezifische Wärmekapazität von Flüssigkeiten	69	42.	Messung der Induktivität	117
22.	Dichte von Luft und Kohlendioxid	71	43.	Kompensation der Blindleistung	121
23.	Ausdehnungskoeffizient von Gasen	74	44.	Resonanzerscheinungen in <i>RLC</i> -Schaltungen	123
24.	Spezifischer Brennwert	76	45.	Transformator	128
25.	Spezifische Verdampfungswärme	79	46.	Thermoelement	130
26.	Spezifische Schmelzwärme	81	47.	Kennlinie von Halbleiter-Gleichrichterdiolen	131
27.	Kenngrößen einer Wärmepumpe	82	48.	Transistor	133
28.	Luftfeuchte	85	49.	Frequenzbestimmung mit dem Elektronenstrahl-Oszillografen	138
29.	Wärmetransportvorgänge	89			
30.	Abkühlungsvorgänge	92			
ELEKTRIK			OPTIK — ATOMPHYSIK		
		95	50.	Brechzahlbestimmung mit dem Refraktometer	142
31.	Wirkungsgrad bei Erwärmung von Flüssigkeiten	95	51.	Brennweite von Linsen und Linsensystemen	145
32.	WHEATSTONEsche Brücke	97	52.	Mikroskop	149
33.	Innenwiderstand eines Akkumulators	99	53.	Gitterkonstante eines Reflexionsgitters	153
34.	Innenwiderstand von Stromstärke- und Spannungsmessern	101	54.	Wellenlängenmessung mit dem Gitterspektralapparat	155
35.	Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Leitern und Halbleitern	102	55.	NEWTONsche Ringe	158
36.	Gedämpfte Schwingungen eines Galvanometers	104	56.	Dispersionskurve eines Prismenspektroskops	160
37.	Leistungsanpassung	108	57.	Polarimeter	162
38.	Erweiterung des Meßbereichs von Stromstärke- und Spannungsmessern	110	58.	Fotometrische Messungen	166
39.	Kapazität von Kondensatoren	112	59.	Lichtreflexion und -absorption	170
			60.	Charakteristik eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohrs	173
			61.	Absorption von Gammastrahlung	175
			62.	Aktivitätskonzentration	178

1. Warum physikalisches Praktikum?

Lieber Praktikant!

Das physikalische Praktikum ist an allen Lehranstalten untrennbarer Bestandteil der Ausbildung im Lehrgebiet Physik geworden. Hier erhalten Sie die Möglichkeit, das im Unterricht oder in der Vorlesung Gelernte anzuwenden, Ihr Wissen zu festigen und zu vertiefen. Das physikalische Praktikum ist gleichzeitig eine gute Vorbereitung auf die Praktika in technischen Lehrgebieten und auf die Tätigkeit in Labors, in Betrieben oder Instituten; denn allen naturwissenschaftlich-technischen Messungen liegen physikalische Meßverfahren zugrunde.

Die Lösung der Praktikumsaufgaben erfordert vielfach das gleichzeitige Beachten von Gesetzmäßigkeiten aus verschiedenen Teilgebieten der Physik. Sie erarbeiten sich dadurch einen besseren Überblick und erkennen die Zusammenhänge der physikalischen Erscheinungen. Sie gewinnen so dauerhaftere Kenntnisse von den Vorgängen, als das bei der vorwiegend theoretischen Aneignung des Wissens der Fall sein kann. Das physikalische Praktikum trägt in hohem Maße dazu bei, daß Sie fundierte, anwendungsbereite Kenntnisse erlangen.

Die physikalischen Übungen wecken in vielen Fällen das Interesse an einem eingehenderen Studium physikalischer Zusammenhänge. Sie fördern Ihre Fähigkeiten im Umgang mit empfindlichen Apparaturen und elektrischen Meßgeräten.

Indem Sie dazu angehalten werden, alle Messungen mit der erforderlichen Sorgfalt auszuführen und die Meßergebnisse mit Hilfe der Fehlerabschätzung kritisch auszuwerten, lernen Sie die Methoden der experimentellen Forschung kennen. Gleichzeitig werden Sie sowohl vor einer Überschätzung als auch einer Unterbewertung der Genauigkeit Ihrer Messungen bewahrt.

Es kommt im physikalischen Praktikum nicht darauf an, daß Sie möglichst viele Versuche durchführen. Es soll vielmehr erreicht werden, daß Sie anhand einer sorgfältigen Auswahl von Versuchen die Methoden der experimentellen Untersuchung physikalischer Zusammenhänge so kennenlernen, daß Sie später selbständig Untersuchungen auf ähnlichen Gebieten anstellen können. Es wird Ihnen deshalb empfohlen, nicht nur die von Ihnen gefundenen Daten kritisch zu werten, sondern auch die Methode der Datengewinnung sorgfältig auf Angemessenheit zu prüfen.

So wie bei jeder wissenschaftlichen Untersuchung müssen auch im physikalischen Praktikum die gemessenen Werte sorgfältig registriert werden. Das über jeden Versuch anzufertigende Protokoll soll alle Meßwerte und Rechnungen in übersichtlicher Form enthalten. Die grafische Darstellung der Meßergebnisse erleichtert in vielen Fällen ihre Auswertung, d. h. das Erkennen der funktionalen Zusammenhänge. Im Protokoll sind die verwendeten Geräte und die besonderen Versuchsbedingungen so zu beschreiben, daß auch noch zu einem späteren Zeitpunkt eine Auswertung der Messungen möglich ist.

Für den Erfolg des Praktikums ist Ihre Vorbereitung auf die Lösung der Ihnen gestellten

Aufgaben von entscheidender Bedeutung. Bevor mit der experimentellen Arbeit begonnen werden darf, müssen die theoretischen Grundlagen und das Ziel des Versuches bekannt sein. Sie sollen sich selbständig diese Voraussetzungen schaffen. Das vorliegende Buch enthält zu den einzelnen Versuchen die wichtigsten Grundlagen. Zur Beantwortung zusätzlich gestellter Fragen werden diese Angaben jedoch vielfach nicht ausreichen, so daß Sie noch Lehrbücher und Ihre Aufzeichnungen verwenden müssen. Nur wenn Sie sich sorgfältig auf jeden Versuch vorbereiten, kann das physikalische Praktikum so wertvoll für Ihre Ausbildung sein, wie es hier beschrieben wurde.

2. Einführung in die Fehlerabschätzung

2.1. Wert einer Größe

2.1.1. Wahrer Wert einer Größe

In Physik und Technik sind häufig physikalische Größen zu messen, d. h., der *Wert einer Größe* ist zu ermitteln. Durch die Unvollkommenheit sowohl der Meßgeräte als auch des Beobachters und durch äußere Einflüsse verschiedenster Art gelingt das aber nicht genau genug; der Meßwert (\rightarrow 2.1.3.) stimmt mit dem *wahren Wert* nicht völlig überein. Man würde den wahren Wert nur durch eine absolut fehlerfreie Messung erhalten. Beispielsweise könnte der wahre Wert einer Länge 14,3217435892 m sein. Es ist sofort verständlich, daß dieser Wert mit keinem Meßgerät gemessen werden kann.

2.1.2. Richtiger Wert einer Größe

Wir müssen uns also mit einem Wert abfinden, der dem wahren Wert so nahe kommt, daß er für den bestimmten Zweck ausreicht und anstelle des wahren Wertes verwendet werden kann. Dieser Wert wird als *richtiger Wert* bezeichnet. Als richtiger Wert würde in unserem Beispiel vielleicht 14,32 m gelten können.

2.1.3. Meßwert

Wenn eine Größe *einmal* gemessen wird, so ist das Ergebnis dieser Einzelmessung der *Meßwert*. Wir wollen ihn im folgenden mit x_j bezeichnen. Der Meßwert ist von Zufälligkeiten abhängig und stimmt im all-

gemeinen nicht mit dem richtigen Wert überein. Deshalb ist es zweckmäßig, eine Messung unter gleichen Bedingungen mehrfach auszuführen (Meßreihe).

2.1.4. Mittelwert einer Meßreihe

Nimmt man eine Meßreihe auf, so wird der *Mittelwert \bar{x} der Meßreihe* als arithmetisches Mittel aus den Meßwerten gebildet. Werden n Einzelmessungen durchgeführt, so ist

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j. \quad (1)$$

Durch die Mittelwertbildung werden zufällige Meßfehler (\rightarrow 2.3.3.) zumindest teilweise ausgeglichen.

2.1.5. Erwartungswert

Der Mittelwert \bar{x} wird um so zuverlässiger sein, je mehr Messungen der Mittelwertbildung zugrunde liegen. Mit steigender Anzahl der Einzelmessungen nähert sich dieser Mittelwert einem Grenzwert, der als *Erwartungswert* bezeichnet wird.

2.2. Fehler einer Messung

2.2.1. Absoluter Fehler

Der absolute Fehler ist die Differenz aus dem Meßwert x_j und dem richtigen Wert (\rightarrow 2.1.2.):

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x}. \quad (2)$$

Der Fehler ist also positiv, wenn der Meßwert zu groß ausgefallen ist ($x_i > \bar{x}$); er ist negativ bei zu kleinem Meßwert ($x_i < \bar{x}$). Bildet man die Summe aller Fehler

$$\sum_{j=1}^n \Delta x_j = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) = \sum_{j=1}^n x_j - n\bar{x},$$

so folgt, da nach Gl. (1)

$$n\bar{x} = \sum_{j=1}^n x_j, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \Delta x_j = 0.$$

Die Summe aller absoluten Fehler ist Null. Dabei sind selbstverständlich die Vorzeichen bei der Summenbildung zu berücksichtigen. Die Erfüllung der Gl. (3) kann als Rechenkontrolle sowohl für die Richtigkeit des Mittelwertes als auch der berechneten Fehler dienen.

2.2.2. Relativer Fehler

Der absolute Fehler (\rightarrow 2.2.1.) gibt noch keinen Aufschluß über die Güte der Messung, die erst beurteilt werden kann, wenn man den absoluten Fehler ins Verhältnis zum richtigen Wert (\rightarrow 2.1.2.) der Meßgröße setzt:

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{x_j - \bar{x}}{\bar{x}}. \quad (4)$$

Der relative Fehler ist also eine Verhältnißgröße und kann auch in % oder ‰ angegeben werden. Die relativen Fehler von Meßgrößen verschiedener Art sind miteinander vergleichbar.

2.3. Fehlerarten

2.3.1. Grobe Fehler

Grobe Fehler machen ein Ergebnis unbrauchbar. Sie werden verursacht durch defekte oder ungeeignete Meßgeräte oder durch Unachtsamkeit des Beobachters

(z. B. falsche Ablesung). Grobe Fehler lassen sich prinzipiell vermeiden und sollen nicht weiter erörtert werden.

2.3.2. Systematische Fehler

2.3.2.1. Ursache systematischer Fehler

Der Erwartungswert (\rightarrow 2.1.5.) stimmt nicht immer mit dem richtigen Wert (\rightarrow 2.1.2.) überein. Die Ursache liegt in *systematischen Fehlern*, die unter Wiederholbedingungen immer mit gleichem Betrag und gleichem Vorzeichen auftreten oder sich *gesetzmäßig* ändern. Sie haben ihre Ursache in der Unvollkommenheit der Meßgeräte, der Meßverfahren oder der Maßverkörperungen (z. B. der Wägestücke). Systematische Fehler ergeben sich beispielsweise, wenn Längen mit einem zu kurzen oder zu langen Maßstab gemessen werden oder wenn Wägestücke zu leicht oder zu schwer sind. Der systematische Fehler ist die Differenz aus Erwartungswert und richtigem Wert.

2.3.2.2. Erfasste systematische Fehler – Korrektion

Ein Teil der systematischen Fehler kann durch Versuche oder durch Berechnung (z. B. Überprüfen der Meßgeräte und der Maßverkörperungen) erfaßt werden. Dadurch wird es möglich, am Meßwert eine *Korrektion* anzubringen und damit den erfaßten systematischen Fehler auszuschalten. Die Korrektion hat den gleichen Betrag wie der systematische Fehler, aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Wenn also beispielsweise ein „Kilogrammstück“ nur eine Masse von 995 g hätte, fielen sämtliche Meßergebnisse, die mit diesem Wägestück erhalten würden, um 5 g zu groß aus, und es müßte an jedem Meßwert die Korrektion -5 g angebracht werden. Im allgemeinen ist es aber nicht Aufgabe des Praktikanten, systematische Fehler zu korrigieren.

2.3.2.3. Nichterfaßte systematische Fehler

Nichterfaßte systematische Fehler sind solche, deren Erfassung zu aufwendig wäre. Sie werden daher nur abgeschätzt und bei der Berechnung des Meßergebnisses (\rightarrow 2.4.4.) berücksichtigt.

2.3.3. Zufällige Fehler

Zufällige Fehler machen ein Ergebnis unsicher. Sie werden oft durch den Beobachter verursacht: z. B. Parallaxenfehler durch Änderung der Beobachtungsrichtung beim Ablesen von Skalen, Interpolationsfehler beim Abschätzen von Bruchteilen eines Skalenteils oder Beobachtungsfehler, die sich beim Betätigen einer Stoppuhr (einmal zu früh, dann zu spät) ergeben. Zufällige Fehler entstehen auch durch die Reibungskräfte in den Lagern beweglicher Teile der Meßgeräte.

Zufällige Fehler lassen sich statistisch erfassen. Das setzt die Aufnahme einer Meßreihe voraus (\rightarrow 2.4.). Liegt jedoch nur ein Meßwert vor, muß der zufällige Fehler abgeschätzt werden. Dabei nimmt man meist die Hälfte eines Skalenteils an.

2.4. Fehlerstatistik

2.4.1. Standardabweichung

Stellt man eine Meßreihe auf, so streuen die Meßwerte infolge der zufälligen Fehler (\rightarrow 2.3.3.) um den Mittelwert (1). Als wichtigste Rechengröße für die zufälligen Abweichungen der voneinander unabhängigen n Einzelwerte x_j einer Meßreihe von ihrem Mittelwert \bar{x} gilt die *Standardabweichung* (auch als mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessung bezeichnet):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}. \quad (5)$$

Je größer die Anzahl n der Meßwerte ist, um so weniger unterscheidet sich s von der

Standardabweichung σ der Grundgesamtheit. Trägt man die Häufigkeit H übereinstimmender Meßwerte x_j über dem Meßwert x_j auf, so ergibt sich ein Maximum der Häufigkeit am Mittelwert \bar{x} ; nach beiden Seiten fällt die Häufigkeit ab: *Normalverteilung* oder *GAUSSsche Verteilung*. Die Kurve wird als *Gaussche Glockenkurve* bezeichnet (Bild 1).

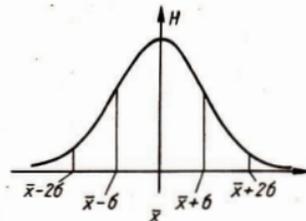


Bild 1

Bei einer Normalverteilung liegen

31,7% der Meßwerte außerhalb des Bereiches $\bar{x} \pm \sigma$

(statistische Sicherheit daher $P = 68,3\%$),
4,6% der Meßwerte außerhalb des Bereiches $\bar{x} \pm 2\sigma$

(statistische Sicherheit $P = 95,4\%$),

0,3% der Meßwerte außerhalb des Bereiches $\bar{x} \pm 3\sigma$

(statistische Sicherheit $P = 99,7\%$). (6)

2.4.2. Vertrauensgrenzen und Vertrauensbereich des Mittelwertes

Der Mittelwert \bar{x} der Meßreihe stimmt im allgemeinen nicht mit dem gesuchten richtigen Wert (\rightarrow 2.1.2.) der Meßgröße überein. Es können aber zwei Grenzen (oberhalb und unterhalb des Mittelwertes) angegeben werden, zwischen denen der wahre Wert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit P (\rightarrow 2.4.1.) liegt, sofern der Mittelwert nicht von systematischen Fehlern (\rightarrow 2.3.2.) beeinflusst wurde. Diese Grenzen heißen *Vertrauensgrenzen des Mittelwertes*. Der Bereich, der durch die Vertrauensgrenzen eingeschlossen wird, heißt *Vertrauensbereich des Mittelwertes*.

Tabelle 1

Anzahl n der Meß- werte	Werte für t		
	$P = 68,3\%$ t	$P = 95\%$ t	$P = 99\%$ t
5	1,15	2,8	4,6
10	1,06	2,3	3,25
20	1,03	2,1	2,9
50	1,00	2,0	2,6

Da σ (\rightarrow 2.4.1.) nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, werden die Vertrauensgrenzen berechnet aus

$$\bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} s \quad \text{und} \quad \bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s. \quad (7)$$

Der Faktor t hängt von der gewählten statistischen Sicherheit P (\rightarrow 2.4.1.) und von der Anzahl n der Einzelmessungen ab. t kann aus Tabelle 1 entnommen werden. Der Vertrauensbereich ist dann

$$\bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s, \quad (8)$$

siehe Bild 2. Im Vertrauensbereich ist der wahre Wert mit der gewählten statistischen Sicherheit zu finden.

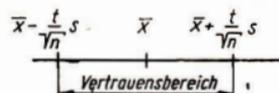


Bild 2

2.4.3. Meßunsicherheit

Die Meßunsicherheit u umfaßt die zufälligen Fehler, die in Standardabweichung und Vertrauensbereich zum Ausdruck kommen, sowie die nichterfaßten systematischen Fehler f (\rightarrow 2.3.2.), die nur abgeschätzt werden können:

$$u = \frac{t}{\sqrt{n}} s + f. \quad (9)$$

2.4.4. Meßergebnis

Das Endergebnis einer Meßreihe aus n Einzelwerten besteht dann aus dem Mittelwert \bar{x} und der Meßunsicherheit u :

$$x = \bar{x} \pm u, \quad (10)$$

mit u nach Gl. (9). Dabei muß der gewählte Wert P der statistischen Sicherheit, Gl. (6), stets angegeben werden.

● Beispiel 1

In der folgenden Tabelle ist die Auswertung einer Meßreihe, bestehend aus $n = 10$ Messungen, vorgenommen. Dabei bedeutet x den Zahlenwert einer beliebigen Meßgröße:

Tabelle 2

j	x _j	Δx_j		$(\Delta x_j)^2$	
		+	-		
1	10,2		0,06	0,0036	
2	10,3	0,04		0,0016	
3	10,3	0,04		0,0016	
4	10,4	0,14		0,0196	
5	10,1		0,16	0,0256	
6	10,2		0,06	0,0036	
7	10,3	0,04		0,0016	
8	10,1		0,16	0,0256	
9	10,4	0,14		0,0196	
10	10,3	0,04		0,0016	
		10,26	0,44	0,44	0,1040
		$= \bar{x}$	$\sum_{j=1}^{10} \Delta x_j = 0$	$\sum_{j=1}^{10} (\Delta x_j)^2$	

Die Standardabweichung wird nach Gl. (5) unter Berücksichtigung von Gl. (2) berechnet:

$$s = \sqrt{\frac{0,1040}{9}} = \sqrt{0,011555} = \underline{\underline{0,1075}}.$$

Der Vertrauensbereich für eine statistische Sicherheit $P = 68,3\%$ ergibt sich aus Gl. (8) und Tabelle 1 zu

$$\pm \frac{1,06}{\sqrt{10}} \cdot 0,1075 = \underline{\underline{\pm 0,036}}.$$

Bei Vernachlässigung systematischer Fehler ($f = 0$) ist die *Meßunsicherheit* nach Gl. (9)

$$u = 0,036 \approx 0,04.$$

Das *Meßergebnis* folgt aus Gl. (10):

$$\underline{x = 10,26 \pm 0,04.}$$

Wählt man die statistische Sicherheit $P = 95\%$, so ergeben sich

der Vertrauensbereich

$$\pm \frac{2,3}{\sqrt{10}} \cdot 0,1075 = \pm 0,078,$$

die Meßunsicherheit $u = 0,078 \approx 0,08$,

das Meßergebnis $x = 10,26 \pm 0,08$.

2.5. Fehlergrenzen

Die Fehlergrenzen der Meßgeräte müssen von den in 2.1. bis 2.3. behandelten Fehlern und der Meßunsicherheit begrifflich unterschieden werden. Es handelt sich dabei um die Grenze der garantierten oder vereinbarten zulässigen äußersten Abweichungen der Meßwerte von den jeweiligen Sollwerten. Bei elektrischen Meßgeräten werden die Garantiefehlergrenzen durch das Klassenzeichen ausgedrückt, z. B. 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0. Daraus kann die Fehlergrenze berechnet werden. So bedeutet beispielsweise 1,0: Die Fehlergrenze beträgt 1% vom *Endausschlag* des Meßinstrumentes.

● Beispiel 2

Berechnen Sie die Fehlergrenze eines Spannungsmessers der Klasse 0,2 mit dem Meßbereich 250 V!

Die Fehlergrenze ist $\delta = \pm 0,002 \cdot 250 \text{ V} = \pm 0,5 \text{ V}$ an jeder Stelle der Skale.

2.6. Fehlerfortpflanzung

2.6.1. Problemstellung

Oft kann die gesuchte physikalische Größe nicht unmittelbar gemessen werden, sondern ist aus anderen, unmittelbar meßbaren Größen zu berechnen. Es soll nun unter-

sucht werden, wie sich die Meßfehler der Eingangsgrößen auf das Ergebnis auswirken. Diese Fehlerabschätzung erfolgt meist auf der Grundlage der Fehlergrenzen der verwendeten Meßgeräte. Sind die Fehlergrenzen nicht angegeben, wird man im allgemeinen einen Skalenteil zugrunde legen können.

Im folgenden sollen die Meßwerte mit x, y, u, v, w und die zugehörigen Meßfehler (gleichgültig, ob geschätzt oder aus Fehlerrechnung) mit $\Delta x, \Delta y, \dots$ bezeichnet werden. Die zu errechnende Größe wird mit z , ihr Fehler mit Δz bezeichnet.

Es ist denkbar, daß sich die Fehler z. T. gegenseitig ausgleichen. Wird z. B. eine Durchschnittsgeschwindigkeit nach der Gleichung $v = s/t$ berechnet, wobei sowohl s als auch t zu groß gemessen wurden, dann gleichen sich die Meßfehler gegenseitig aus, da ein zu groß gemessener Weg s die Geschwindigkeit v zu groß, eine zu groß gemessene Zeit t die Geschwindigkeit v zu klein erscheinen läßt. Die Fehler wirken auch gegeneinander, wenn s und t zu klein gemessen werden. v wird mit dem größten Fehler behaftet sein, wenn eine der beiden Eingangsgrößen zu groß, die andere zu klein ausgefallen ist. Bei den Fehlerabschätzungen (s. 2.6.2.) für einige häufig vorkommende Funktionen interessiert der Größtfehler, mit dem das Ergebnis (im ungünstigsten Falle) behaftet sein kann infolge der fehlerbehafteten Eingangswerte.

2.6.2. Fehlerfortpflanzung (ohne Differentialrechnung)

Folgende Funktionen sollen untersucht werden:

2.6.2.1. Die Summe $z = x + y$

Die Eingangswerte x und y sind mit den Fehlern Δx und Δy behaftet. Es interessiert die Auswirkung auf das Ergebnis z , also der Fehler Δz . Man erhält

$$z \pm \Delta z = x \pm \Delta x + y \pm \Delta y.$$

Subtrahiert man die Gleichung $z = x + y$, so bleibt

$$\pm \Delta z = \pm \Delta x \pm \Delta y.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß Δz den größten Wert annimmt, wenn Δx und Δy gleiche Vorzeichen haben, wenn sich die beiden Fehler also addieren. Für den möglichen *Größtfehler* ergibt sich daher

$$\underline{\underline{\Delta z = \Delta x + \Delta y.}} \quad (11)$$

Der maximale Absolutfehler einer Summe ist gleich der Summe der Absolutfehler der einzelnen Summanden.

2.6.2.2. Die Differenz $z = x - y$

Führt man die entsprechende Rechnung wie für eine Summe durch, so erhält man

$$\pm \Delta z = \pm \Delta x \mp \Delta y.$$

Der Größtfehler tritt hier auf, wenn Δx und Δy verschiedene Vorzeichen haben. Dann gilt

$$\underline{\underline{\Delta z = \Delta x + \Delta y}} \quad (11)$$

wie für eine Summe.

Der obige Satz für eine Summe kann daher erweitert werden:

Der maximale Absolutfehler einer algebraischen Summe ist gleich der Summe der Absolutfehler der einzelnen Summanden.

2.6.2.3. Das Produkt $z = xy$

Die Meßergebnisse $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ werden eingesetzt:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)$$

$$z \pm \Delta z = xy \pm x \Delta y \pm y \Delta x \pm \Delta x \Delta y.$$

Beachtet man, daß $z = xy$ und daß das Produkt $\Delta x \Delta y$ so klein ist, daß es vernachlässigt werden kann, so bleibt

$$\pm \Delta z = \pm x \Delta y \pm y \Delta x.$$

Dividiert man die linke Seite der Gleichung durch z und die rechte Seite durch xy

($z = xy!$), so erhält man

$$\pm \frac{\Delta z}{z} = \pm \frac{\Delta x}{x} \pm \frac{\Delta y}{y}.$$

Der Größtfehler des Produktes tritt auf, wenn Δx und Δy gleiche Vorzeichen haben. Daher gilt

$$\underline{\underline{\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.}} \quad (12)$$

Der maximale Relativfehler eines Produktes ist gleich der Summe der Relativfehler der einzelnen Faktoren.

2.6.2.4. Die Potenz $z = x^n$

Setzt man in Gl.(12) $y = x$, so erhält man

$$\underline{\underline{\frac{\Delta z}{z} = 2 \frac{\Delta x}{x}.}} \quad (13)$$

Der maximale Relativfehler eines Quadrates ist gleich dem doppelten maximalen Relativfehler der Basis.

Überlegen Sie sich selbst, wie groß der Relativfehler einer 3., 4., ..., n -ten Potenz ist!

2.6.2.5. Der Quotient $z = x/y$

Setzt man die Meßwerte ein, so erhält man

$$z \pm \Delta z = \frac{x \pm \Delta x}{y \pm \Delta y}.$$

Erweitert man diesen Bruch mit $y \mp \Delta y$, so folgt

$$z \pm \Delta z = \frac{(x \pm \Delta x)(y \mp \Delta y)}{(y \pm \Delta y)(y \mp \Delta y)}$$

$$z \pm \Delta z = \frac{xy \pm y \Delta x \mp x \Delta y - \Delta x \Delta y}{y^2 - (\Delta y)^2}.$$

Vernachlässigt man wieder die Quadrate und Produkte kleiner Größen, so bleibt

$$z \pm \Delta z = \frac{xy \pm y \Delta x \mp x \Delta y}{y^2}$$

$$z \pm \Delta z = \frac{x}{y} \pm \frac{\Delta x}{y} \mp \frac{x \Delta y}{y^2}.$$

Beachtet man $z = x/y$ und dividiert dann die linke Seite der Gleichung durch z , die rechte durch x/y , dann erhält man

$$\pm \frac{\Delta z}{z} = \pm \frac{\Delta x}{x} \mp \frac{\Delta y}{y}.$$

Der Relativfehler erhält hier offenbar seinen größten Wert, wenn Δx und Δy entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dann ist

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}. \quad (14)$$

Der maximale Relativfehler eines Quotienten ist gleich der Summe der Relativfehler von Dividend und Divisor.

Überlegen Sie sich, wie groß der Relativfehler für die Funktion

$$z = \frac{xyv}{uw}$$

ist!

2.6.3. Fehlerfortpflanzung (mit Differentialrechnung)

Wie schon im vorigen Abschnitt mehrfach erwähnt wurde, sind die Meßfehler allgemein klein gegenüber den gemessenen Größen. Man kann daher bei der Untersuchung der Fehlerfortpflanzung die Fehler näherungsweise durch Differentiale ersetzen. (Über das Differential vgl. die Lehrbücher der Höheren Mathematik.)

2.6.3.1. Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x)$

Ist $z = f(x)$, so ist nach den Regeln der Differentialrechnung

$$dz = f'(x) dx. \quad (15)$$

Damit lassen sich beispielsweise die trigonometrischen Funktionen leicht behandeln.

Für

$$= \sin x$$

ist

$$dz = \cos x dx. \quad (16)$$

Aus

$$z = \cos x$$

folgt

$$dz = -\sin x dx$$

und

$$|dz| = \sin x dx. \quad (17)$$

Für die Funktion

$$z = \tan x$$

ist

$$dz = \frac{dx}{\cos^2 x}. \quad (18)$$

Schließlich ist für die Funktion

$$z = \cot x$$

$$dz = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

und

$$|dz| = \frac{dx}{\sin^2 x}. \quad (19)$$

2.6.3.2. Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x; y)$

Totales Differential

Dieser Fall liegt in der Fehlerrechnung meist vor; denn die gesuchte Größe ist im allgemeinen aus mehreren Einflußgrößen, von denen Meßwerte vorliegen, zu berechnen. Wir beschränken uns zunächst auf zwei unabhängige Veränderliche x und y , werden aber sehen, daß sich die für diesen Fall gefundenen Ergebnisse leicht auf mehrere unabhängige Veränderliche erweitern lassen. Ist also $z = f(x; y)$, so kann die Funktion (Differenzierbarkeit vorausgesetzt) nach den beiden unabhängigen Veränderlichen x und y differenziert werden:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Diese *partiellen Ableitungen* werden nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung gebildet, wobei man y bei der Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x}$ als Konstante zu betrachten

hat. Entsprechend ist bei der partiellen Differentiation nach y die Veränderliche x als Konstante anzusehen.

Das *totale Differential* dz hängt von x, y, dx und dy ab:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (20a)$$

Es stellen dx und dy wie im vorigen Abschnitt die Meßfehler der Einflußgrößen x und y dar. dz ist der Fehler der errechneten Größe. Die Erweiterung auf beliebig viele Veränderliche liegt auf der Hand:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw + \dots \quad (20)$$

Als einfache Beispiele sollen zunächst die Gl. (11), (12) und (14) hergeleitet werden: Für die Funktion $z = x + y$ ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (20a) ein, so folgt

$$dz = dx + dy. \quad (11a)$$

Für das Produkt $z = xy$ ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

In Gl. (20a) eingesetzt:

$$dz = y dx + x dy.$$

Das ist der Absolutfehler des Produktes. Für den Relativfehler ist die linke Seite der Gleichung durch z , die rechte durch xy ($z = xy$) zu dividieren:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

Für den größtmöglichen Fehler gilt

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad (12a)$$

Für den Quotienten $z = \frac{x}{y}$ ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

In Gl. (20a) eingesetzt:

$$dz = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy.$$

Zur Bildung des Relativfehlers ist die linke Seite der Gleichung durch z , die rechte durch x/y zu dividieren:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

Da, wie bereits früher ausgeführt, der Relativfehler seinen größten Wert annimmt, wenn dx und dy ungleiche Vorzeichen haben, wird

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad (14a)$$

Das Verfahren sei noch an einer etwas umfangreicheren Funktion vorgeführt:

In Versuch 7 tritt die Gleichung

$$J = mr^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2} \quad (21)$$

auf. In ihr sollen die Größen

m mit der Meßunsicherheit Δm

r mit der Meßunsicherheit Δr

T mit der Meßunsicherheit ΔT

T' mit der Meßunsicherheit $\Delta T'$

behaftet sein. Es ist gemäß Gl. (20), wenn die Differentiale durch die entsprechenden Meßunsicherheiten ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{\partial J}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial J}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial J}{\partial T} \Delta T \\ &+ \frac{\partial J}{\partial T'} \Delta T'. \end{aligned} \quad (22)$$

Zunächst sind die partiellen Ableitungen zu bilden:

$$\frac{\partial J}{\partial m} = r^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial r} = 2mr \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} = mr^2 \frac{2TT'^2}{(T'^2 - T^2)^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial T'} = -mr^2 \frac{2T^2T'}{(T'^2 - T^2)^2}$$

Die partiellen Ableitungen werden in Gl. (22) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{1}{(T'^2 - T^2)^2} \\ &\times [T^2(T'^2 - T^2) r^2 \Delta m \\ &+ 2mrT^2(T'^2 - T^2) \Delta r \\ &+ 2mr^2TT'^2 \Delta T - 2mr^2T^2T' \Delta T']. \end{aligned}$$

Der größte Fehler tritt auf, wenn ΔT und $\Delta T'$ ungleiche Vorzeichen haben. Dann ist

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{1}{(T'^2 - T^2)^2} \\ &\times [T^2(T'^2 - T^2) r^2 \Delta m \\ &+ 2mrT^2(T'^2 - T^2) \Delta r \\ &+ 2mr^2TT'^2 \Delta T + 2mr^2T^2T' \Delta T']. \end{aligned} \quad (23)$$

Der Relativfehler wird gebildet, indem die linke Seite von Gl. (23) durch J , die rechte Seite durch die rechte Seite von Gl. (21) dividiert wird:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J}{J} &= \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{T'^2 \Delta T}{T(T'^2 - T^2)} \\ &+ 2 \frac{T' \Delta T'}{T'^2 - T^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Logarithmische Differentiation
(Differenzieren nach Logarithmieren)

Vielfach erreicht man eine Vereinfachung der Rechnung dadurch, daß man die Funktion logarithmiert und anschließend

differenziert. Aus

$$z = \ln x$$

folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

$$d \ln x = \frac{dx}{x}. \quad (25)$$

Das Verfahren liefert daher sofort den *relativen Fehler*. Bei umfangreicheren Ausdrücken muß man die Kettenregel anwenden.

Die Gln. (12a) und (14a) sollen auf diese Weise hergeleitet werden.

$$z = xy$$

wird logarithmiert:

$$\ln z = \ln x + \ln y.$$

Differentiation ergibt

$$d \ln z = d \ln x + d \ln y.$$

Wendet man Gl. (25) an, so erhält man

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

und für den größtmöglichen Fehler

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad (12a)$$

Entsprechend ergibt sich für die Funktion

$$z = \frac{x}{y}$$

$$\ln z = \ln x - \ln y$$

und

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

Für ungleiche Vorzeichen von dx und dy hat der Relativfehler seinen größten Wert. Dann ist:

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad (14a)$$

An dem Beispiel aus Versuch 7 wird der Vorteil des Verfahrens besonders deutlich.

$$J = mr^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

wird logarithmiert:

$$\ln J = \ln m + 2 \ln r + 2 \ln T - \ln (T'^2 - T^2).$$

Differentiation: -

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2 \frac{dr}{r} + 2 \frac{dT}{T} - \frac{2T' dT' - 2T dT}{T'^2 - T^2}.$$

Durch elementare Umformungen läßt sich dieser Ausdruck auf die Form Gl. (24) bringen:

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2 \frac{dr}{r} + 2 \frac{dT}{T} - \frac{2T' dT'}{T'^2 - T^2} + \frac{2T dT}{T'^2 - T^2}.$$

Zusammenfassung der Glieder mit dT :

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2 \frac{dr}{r} + \frac{2(T'^2 - T^2) dT + 2T^2 dT}{T(T'^2 - T^2)} - \frac{2T' dT}{T'^2 - T^2}$$

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2 \frac{dr}{r} + 2 \frac{T'^2 dT}{T(T'^2 - T^2)} - 2 \frac{T' dT'}{T'^2 - T^2}.$$

Haben dT und dT' ungleiche Vorzeichen, ergibt sich nach Übergang auf endliche Differenzen wieder (24).

● Beispiel 3

Im Versuch 7 seien folgende Meßwerte festgestellt worden:

$$\begin{array}{ll} m = 500 \text{ g} & \Delta m = \pm 1 \text{ g} \\ r = 30,0 \text{ cm} & \Delta r = \pm 0,1 \text{ cm} \\ T = 1,82 \text{ s} & \Delta T = \pm 0,005 \text{ s} \\ T' = 5,85 \text{ s} & \Delta T' = \pm 0,005 \text{ s} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{aus 20} \\ \text{Schwin-} \\ \text{gungen} \end{array} \right\}$$

Aus der in Versuch 7 abgeleiteten Gleichung (8) folgt zunächst

$$J = 500 \text{ g} \cdot 900 \text{ cm}^2 \cdot \frac{3,312 \text{ s}^2}{30,910 \text{ s}^2} = 48,2 \text{ kg cm}^2.$$

Aus Gl. (24) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J}{J} &= \frac{1}{500} + 2 \frac{0,1}{30} + 2 \frac{34,22 \cdot 0,005}{1,82 \cdot 30,91} \\ &\quad + 2 \frac{5,85 \cdot 0,005}{30,91} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta J}{J} = 0,002 + 0,007 + 0,006 + 0,002.$$

An dieser Stelle lassen sich die Fehler der einzelnen Einflußgrößen vergleichen. Wir stellen hier z. B. fest, daß die Masse am genauesten, T aber am unsichersten bestimmt wurde.

$$\frac{\Delta J}{J} = 0,017 = 1,7\%.$$

Daraus folgt der Absolutfehler

$$\begin{aligned} \Delta J &= 0,017J = 0,017 \cdot 48,2 \text{ kg cm}^2 \\ &= 0,8 \text{ kg cm}^2. \end{aligned}$$

Das Endergebnis lautet dann nach Gl. (10)

$$\underline{\underline{J = (48,2 \pm 0,8) \text{ kg cm}^2.}}$$

3. Versuchsanleitungen

MECHANIK

1. Flächenmessung mit dem Polarplanimeter

G Grundlagen

Zur Ermittlung des Flächeninhaltes besonders solcher Flächen, deren Begrenzungsfunktion nicht analytisch bestimmbar ist, wird ein Planimeter verwendet. Das gebräuchlichste Planimeter ist das von AMSELER 1854 angegebene *Polarplanimeter*. Man bestimmt eine Fläche, indem man sie mit dem Planimeter umfährt.

Gerätebeschreibung (Bild 3)

Der Polarm (4) trägt an einem Ende den Polkörper (6) mit der Nadel (3). Die Nadel

soll ein unbeabsichtigtes Verrücken des Poles auf der Meßfläche verhindern. Am anderen Ende des Polarmes befindet sich ein Kugelzapfen (1), der in eine Bohrung des Meßkopfes (9) eingesetzt wird und damit den Meßkopf, der Träger des Meßwerkes ist, mit dem Polarm gelenkig verbindet. Die Laufrolle (2) stützt den Meßkopf.

Im Meßkopf steckt der Fahrarm (16), dessen Längenteilung man am Glasnonius (10) in $\frac{1}{10}$ -Intervallen ablesen kann. Der Fahrarm wird mit der Feinstellschraube (15) reguliert und mit Klemmschrauben festgestellt. Das Umfahren der zu planimetrierenden Fläche geschieht mit dem Fahrstift (5), der am Ende des Fahrarmes sitzt. Die Bedienung erfolgt durch ein Griffchen. Die Stützschraube (7) verhindert, daß die Spitze des Fahrstiftes auf der Unterlage entlanggleitet und diese verletzt. Der gesamte Fahrstifthalter kann gegen eine

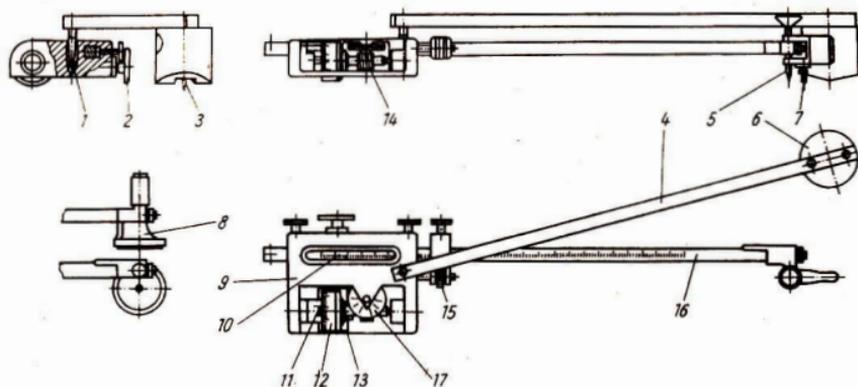


Bild 3

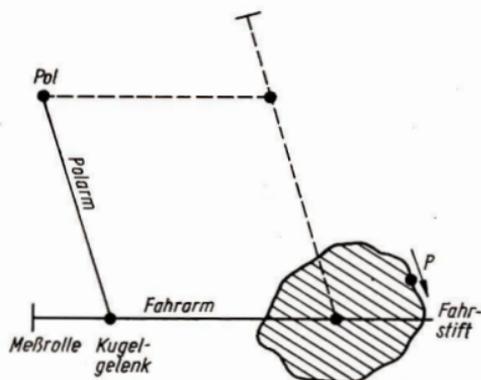


Bild 4

Planglasplatte (8) mit Ringmarke ausgetauscht werden.

Im Meßkopf befindet sich das Meßwerk, bestehend aus der in Spitzen gelagerten Spindel (14) und Meßrolle (13) mit Meßtrommel (12). Die Meßtrommel trägt auf ihrem Umfang 100 Teilstriche und ist von 0...9 beziffert. Sie bewegt sich beim Drehen der Meßrolle an dem am Meßkopf befestigten Nonius (11) vorbei. Die Umdrehungen der Meßrolle werden durch eine von 0...9 bezifferte Zählsscheibe (17) angezeigt, die sich bei 10 Umdrehungen der Meßrolle einmal dreht.

Hinweis: Die Meßrolle ist der empfindlichste Teil des Planimeters! Sie soll grundsätzlich

nicht angefaßt werden! Hartes Aufsetzen ist zu vermeiden! Das Planimetrieren ist auf einer ebenen Unterlage (Reißbrett) durchzuführen.

Aufstellung des Planimeters

Der Fahrstift wird etwa in die Mitte der zu planimetrierenden Fläche gestellt und der Pol nach Augenmaß in die verlängerte Meßrollenebene gelegt (Bild 4). Als Anfangspunkt zum Umfahren wählt man einen beliebigen Punkt *P* auf der Begrenzungslinie der Fläche. Anschließend ist die Fläche grob zu umfahren, um festzustellen, ob die Meßrolle dabei auf der Papierunterlage bleibt.

V Versuchsdurchführung

Der Fahrstift wird auf einen beliebigen Anfangspunkt *P* eingestellt und die dazugehörige Meßrollenstellung u_1 an Zählsscheibe und Trommel vierstellig abgelesen. Das vorliegende Flächenstück wird nun im Uhrzeigersinn umfahren, bis man wieder auf den Ausgangspunkt kommt; die neue Meßrollenstellung u_2 kann nun abgelesen werden. Beim Umfahren verfolgt man die Fahrstiftspitze möglichst in der Bewegungsrichtung, um einen durch die Parallaxe auftretenden Fehler auszuschalten. Aus diesem Grunde ist auch das Entlangfahren an einem Lineal bei geradliniger Begrenzung nicht zu empfehlen. Die durch das Hin- und Herschwenken bei freiem Entlangfahren entstehenden Fehler gleichen sich mit großer Wahrscheinlichkeit aus. Mit Hilfe der Integralrechnung läßt sich die *Planimetergleichung* aufstellen:

$$A = k(u_2 - u_1).$$

Dabei bedeuten:

- A Größe des umfahrenen Flächenstückes,
 k Planimeterkonstante, welche durch einen Vorversuch ermittelt wird,
 $u_2 - u_1$ Zahl der Meßrollenumdrehungen.

Die Ermittlung der *Planimeterkonstanten* k kann immer nur für eine bestimmte Fahrarmeinrichtung erfolgen. Dabei umfährt man eine Fläche bekannter Größe, etwa einen Kreis, weil hier bestimmte bevorzugte Stellungen der Meßrollenachse zur Meßrollenfortbewegungsrichtung im Durchschnitt am besten kompensiert werden.

Kompensationsmessung. Das vorliegende Planimeter ist ein *Kompensationsplanimeter*. Die Verbindung zwischen Pol- und Fahrarm wird hier durch ein auseinandernehmbares Kugelgelenk hergestellt. Bei dieser Verbindung vermeidet man einen Fehler, der entstehen kann, wenn das Scharnier zwischen beiden Planimeterarmen nicht senkrecht zur Zeichenebene steht. Außerdem kann und soll man nach dem Umfahren unter Festhalten von Pol und Fahrstift das Instrument im Kugelgelenk auseinandernehmen, beide Arme nach der Seite hin durchschlagen und in dieser neuen Lage des Planimeters ein zweites Umfahren im gleichen Umlaufsinn vornehmen (Bild 4, Kompensationsstellung gestrichelt). Bildet man aus den beiden so gefundenen Maßzahlen das Mittel, so umgeht man einen zweiten Planimeterfehler, der entstehen kann, wenn die Achse der Meßrolle nicht parallel zum Fahrarm ist.

A Aufgaben

- Das Planimeter wird entsprechend der Anleitung zusammengesetzt und aufgestellt. Durch mehrfaches Umfahren der auszumessenden Fläche macht man sich mit der Funktion der Meßrolle und des Meßwerkes vertraut und übt sich im Umfahren von Flächen.
- Es ist die Planimeterkonstante k durch 10maliges Umfahren der Einmeßfläche (Kreis!) in Normal- und Kompensationsstellung zu ermitteln. Die Planimeterkonstante ergibt sich als Mittelwert

$$k = \frac{k_N + k_K}{2}.$$

Die Fahrarmeinrichtung wird vom Praktikumsleiter angegeben.

- Die Flächeninhalte der auf der Vorlage dargestellten Flächen sind zu bestimmen (je 5 Messungen).
- Kontrollieren Sie durch Integration die Inhalte der Flächen, deren Begrenzungskurven analytisch bekannt sind.
- Es ist der relative Fehler

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_{\text{Planimeter}} - A_{\text{Integral}}}{A_{\text{Integral}}}$$

zu ermitteln.

Versuchsgeräte: Polarplanimeter, Vorlage, Reißbrett

2. Waage

Beschreibung der Waage

Die Waage ist eines der wichtigsten Feinmeßinstrumente. Sie dient zur Bestimmung der Masse eines Körpers. Bei der Wägung wird die Masse des Körpers mit der Masse von *Wägestücken* verglichen.

Das Meßprinzip hat sich von der klassischen *Kompensationsmethode* zur modernen *Substitutionsmethode* entwickelt. In Bild 5 ist eine Feinwaage dargestellt, die nach der Substitutionsmethode arbeitet. Solche Waagen haben u. a. den Vorteil, daß ihre Empfindlichkeit über den gesamten Wägebereich konstant ist. Bild 6 zeigt eine Feinwaage, die nach der Kompensationsmethode arbeitet. Waagen dieser Bauart werden auch heute noch für Wägungen benutzt, und mit ihnen kann man die Kenngrößen einer jeden Wägeeinrichtung — die

Ruhestellung und die Empfindlichkeit — unter Anwendung der physikalischen Grundgesetze bestimmen. Die in Bild 6 dargestellte Feinwaage ist in einem Glasgehäuse untergebracht und wird so gegen übermäßige Verschmutzung, Luftbewegung und mechanische Beschädigung geschützt. Wichtigster Teil der Waage ist der Waagebalken (1). Sein Auflager wird aus einer Schneide (2) gebildet, die in der Mitte des Waagebalkens eingesetzt ist. Die Schneide liegt auf einem polierten Achatplättchen (3) angebracht ist. An den beiden Enden des Waagebalkens befinden sich die Vorrichtungen zum Aufhängen der Waagschalen (4). Im allgemeinen sind diese Vorrichtungen ebenfalls Schneidenlager. Zur Ermittlung der Stellung des Waagebalkens dient der Zeiger (5). Das Ende des Zeigers bewegt sich beim Wägen vor einer Skale (6), die an der Säule befestigt ist. In Ruhestellung der Waage muß der Zeiger nicht

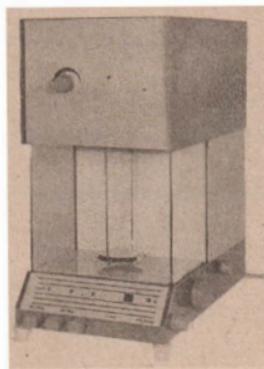


Bild 5

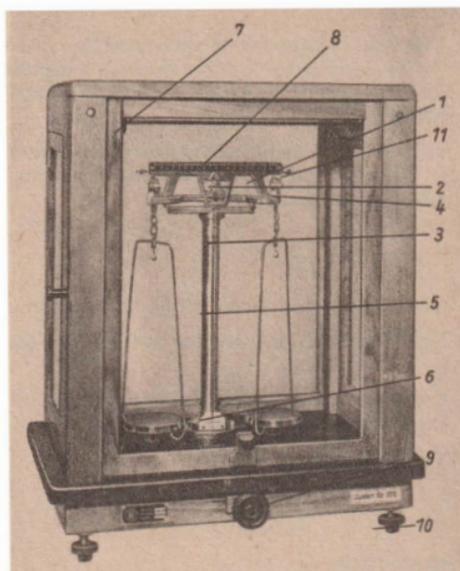


Bild 6

unbedingt auf die Mitte der Skale zeigen. Um die Benutzung sehr kleiner Wägestücke zu vermeiden, werden sogenannte Reiter verwendet. Dies sind Drahthäkchen von bekannter Masse. Sie werden mittels eines verschiebbaren Auflegers (7) auf den Waagebalken aufgesetzt. Der Waagebalken ist durch eine Skale (8) gleichmäßig unterteilt, im allgemeinen in 10 Teile auf jeder Seite. Jedem Teilstrich entspricht dann beim Auflegen des Reiters ein Wägestück $\Delta m = nm/10$, wenn m die Masse des Reiters ist und $n = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Die Arretierung der Waage erfolgt mit einer speziellen Einrichtung, die durch Drehen des Knopfes (9) betätigt wird. Dadurch werden die Schneiden der Waagschalen und des Waagebalkens von den Kissen abgehoben und gleichzeitig der Waagebalken entlastet.

Jede Waage ist für eine bestimmte Höchstbelastung konstruiert. Sie liegt fest und darf nicht überschritten werden. Jeder Waage ist ein Satz Wägestücke beigegeben, deren Gesamtmasse der Höchstbelastung entspricht.

Aufstellung der Waage

Die Säule der Waage muß vertikal und erschütterungsfrei stehen. Dies wird mittels eines an der Säule angebrachten Lotes oder einer Dosenlibelle überprüft. Die Justierung erfolgt durch die an der Grundplatte befindlichen Standschrauben (10). Bei richtiger Justierung der Waage im unbelasteten Zustand soll das Ende des Zeigers ungefähr auf die Mitte der Skale zeigen. Ist eine Abweichung von mehr als 3 Skalenteilen vorhanden, so wird durch Verdrehen der Justierschrauben (11) an den Enden des Waagebalkens ausgeglichen.

Regeln für die Benutzung von Waagen

1. Zum Auflegen des Wägeguts und der Wägestücke sind *nur die Seitentüren* des Gehäuses zu öffnen.
2. Wägestücke dürfen auf die Waagschalen

nur aufgelegt oder entfernt werden, wenn die Waage arretiert ist. Die Wägestücke sollen so auf der Waagschale liegen, daß der gemeinsame Schwerpunkt unter der Aufhängung liegt.

3. Wägestücke dürfen nicht mit der Hand angefaßt werden. *Pinzette benutzen!*
Nach der Benutzung gehören die Wägestücke in das Aufbewahrungskästchen.
4. Der Waagebalken darf nicht vollständig entarretiert werden, solange die Waagschalen noch wenig abgeglichen sind. Die Arretierung wird nur so weit gelöst, daß man beurteilen kann, nach welcher Seite der Zeiger ausschlägt, d. h., welche der Waagschalen noch leichter ist. Dann wird sofort wieder arretiert, und die Wägestücke werden vermehrt oder vermindert. Bei geringem Unterschied zwischen der Masse des zu wägenden Körpers und der Wägestücke fängt der Waagebalken nach Entarretierung an zu schwingen.
5. Nach jeder Wägung ist die Waage zu arretieren, und das Wägegut und die Wägestücke sind von der Waagschale zu entfernen. Die Türen des Glasgehäuses sind zu schließen.

G Grundlagen

Zu den wichtigsten Kenngrößen einer Waage gehören

die Ruhestellung und die Empfindlichkeit der unbelasteten Waage.

Diese Größen sind durch die physikalischen Eigenschaften der Waage als schwingungsfähiges System miteinander verknüpft und sollen nachfolgend erläutert werden.

Die Bestimmung der Ruhestellung

Wird die Arretierung der Waage vorsichtig gelöst, so pendelt der Zeiger vor der Skale hin und her. Um die Ruhestellung der Waage zu bestimmen, wartet man nicht, bis der Zeiger zur Ruhe kommt, sondern ermittelt die Ruhestellung aus den Um-

kehrpunkten der Schwingungen, wobei Zehntel-Skalenteile geschätzt werden können.

Das Unterbrechen der Schwingungen durch Anhalten des Zeigers führt zu Beschädigungen der Waage und muß auf jeden Fall unterbleiben!

Die Waage führt gedämpfte Schwingungen aus, deren Amplituden (Ausschlagweiten des Zeigers) also abnehmen. Bei der geringen Dämpfung der Analysenwaagen (sofern die Waage keine zusätzliche Dämpfungseinrichtung hat) nehmen die Amplituden praktisch bei jeder Schwingung um den gleichen Betrag ab. In Bild 7 ist der zeitliche Ablauf einiger aufeinanderfolgender Schwingungen dargestellt. Durch die Bestimmung der Umkehrpunkte U_1, U_2, U_3, \dots ist es möglich, die Ruhstellung der Waage aus dem Schwingungszustand heraus zu bestimmen. Die Umkehrpunkte werden in Skalenteilen angegeben. Würden zur Bestimmung der Ruhstellung die Ausschläge a_1 und a_2 benutzt, so läge die Ruhstellung, gebildet aus dem Mittelwert von Ausschlag a_1 und a_2 , zu weit nach U_1 zu, der Mittelwert von a_2 und a_3 dagegen zu weit nach U_2 zu. Mittelt man die beiden Werte nochmals, so ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit die wirkliche Ruhstellung der Waage. Wird die Ruhstellung mit a_0 bezeichnet, so ist:

$$a_0 = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2}}{2} = \frac{1}{4} (a_1 + 2a_2 + a_3). \quad (1)$$

Der Versuch ist mehrmals zu wiederholen. Die Bestimmung der Ruhstellung ist also nur aus einer ungeraden Anzahl aufeinanderfolgender Umkehrpunkte möglich. Das Verfahren läßt sich auf eine größere Anzahl von Umkehrpunkten erweitern. Die Ruhstellung der Waage ist nach jeder Wägung zu kontrollieren bzw. neu zu bestimmen.

Die Empfindlichkeit der Waage

Die Waage stellt prinzipiell einen zweiseitigen Hebel dar, für dessen Gleichgewicht $\sum M_i = 0$ gilt. Der Schwerpunkt S des Waagebalkens und der Waagschalen liegt im belasteten Zustand unter dem Drehpunkt D (Bild 8). Legt man auf die eine Schale der im Gleichgewicht befindlichen Waage ein Zusatzwägestück mit der Masse Δm ($\Delta m \ll m_1$), so kommt der Waagebalken nach Drehung um den Winkel α zur Ruhe. Es tritt außer den beiden Drehmomenten der an den Enden A und B des Waagebalkens wirkenden Kräfte G_1 und G_2 (es wird vorausgesetzt, daß A, B und D in einer Geraden liegen) noch ein drittes Drehmoment auf, welches den Schwerpunkt in die Ruhelage zurückzudrehen versucht. Im Schwerpunkt greift die Gewichtskraft G_0 des Waagebalkens an und wirkt am Hebelarm a' . Entsprechend der Gleichgewichtsbedingung gilt: $M_1 + M_0 - M_2 = 0$ mit $M_1 = G_1 a$, $M_2 = G_2 a$ und $M_0 = G_0 a'$. Setzt man voraus, daß $\overline{AD} = \overline{BD} = l$

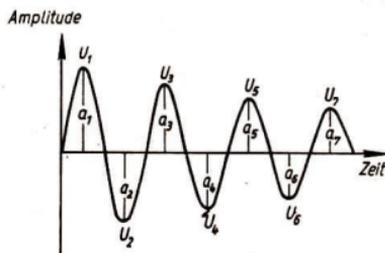


Bild 7

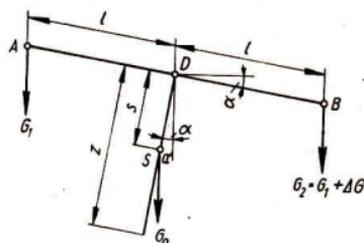


Bild 8

ist, so erhält man $a = l \cos \alpha$. Führt man für $\overline{SD} = s$ ein, so ist $a' = s \sin \alpha$. Beachtet man weiterhin, daß ganz allgemein $G = mg$ gilt, so erhält die Momentengleichung die Form

$$m_2 g l \cos \alpha + m_0 g s \sin \alpha - m_1 g l \cos \alpha = 0.$$

Nach Division durch $g \cos \alpha$ und mit $m_2 - m_1 = \Delta m$ ergibt sich

$$\frac{\tan \alpha}{\Delta m} = \frac{l}{m_0 s}. \quad (2)$$

Da sich bei einem Massenunterschied Δm die Waage nur sehr wenig aus der Ruhstellung dreht, kann $\tan \alpha \approx \alpha$ gesetzt werden. Führt man noch die Zeigerlänge z ein, so gilt $\alpha = \Delta a/z$. Wird diese Beziehung in Gl. (2) eingesetzt und nach $\Delta a/\Delta m$ auf-

gelöst, so erhält man

$$E = \frac{\Delta a}{\Delta m} = \frac{z l}{m_0 s}. \quad (3)$$

Der Quotient $E = \Delta a/\Delta m$ wird als die *Empfindlichkeit* einer Waage bezeichnet. Die Ausschlagsänderung Δa ist die Differenz aus der Ruhstellung a_0' des Zeigers bei Belastung der Waage mit einem kleinen Zusatzmassenteil Δm und der Ruhstellung a_0 ohne Belastung.

Die Größen z , l , m_0 und s in Gl. (3) sind der Messung im allgemeinen nicht zugänglich. Infolgedessen bestimmt man die Empfindlichkeit einer Waage durch Feststellung des Ausschlagsunterschiedes Δa des Zeigers bezüglich der Skale bei einem Belastungsunterschied durch die Massendifferenz Δm .

V Versuchsdurchführung

Nach sorgfältigem Studium der *Regeln für die Benutzung von Waagen* wird die Ruhstellung der zu untersuchenden Waage im unbelasteten Zustand ermittelt. Diese Bestimmung ist mehrmals mit unterschiedlicher Anzahl von Umkehrpunkten durchzuführen und der Mittelwert zu bilden.

Ermittlung der Empfindlichkeit der Waage im unbelasteten Zustand mit dem Reiter (oder einem Wägestück) der Masse Δm .

Die Ermittlung der Empfindlichkeit im belasteten Zustand ist mit den standardisierten Wägestücken durchzuführen. Zu verwenden sind Wägestücke mit den Gesamtmassen 5 g, 10 g, 20 g, 30 g, 50 g und 100 g. Bei jeder Belastung ist die Ruhelage zu bestimmen und der Ausschlag durch Verschieben des Reiters herbeizuführen.

A Aufgaben

1. Erläutern Sie, weshalb bei der Bestimmung der Ruhstellung der Waage die Mittelwertbildung erlaubt ist! Wenden Sie hierzu Ihre Kenntnisse aus der Mathematik und der Schwingungslehre an!
2. Entwickeln Sie eine der Gl. (1) entsprechende Form aus 5, 7 und $2n + 1$ aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten für a_0 !
3. Berechnen Sie a_0 aus 3, 5, 7 und 9 Umkehrpunkten!
4. Berechnen Sie die Empfindlichkeit der untersuchten Waage im unbelasteten Zustand nach Gl. (3)!
5. Berechnen Sie die Empfindlichkeit der untersuchten Waage im belasteten Zustand für die einzelnen Belastungsfälle!
6. Erläutern Sie, welche Größen auf die Empfindlichkeitsbestimmung nach Aufgabe 5 wesentlichen Einfluß haben!
7. Stellen Sie die ermittelten Empfindlichkeitswerte über der Belastung grafisch dar!
8. Diskutieren Sie die grafische Darstellung der Empfindlichkeit!

Versuchsgeräte: Analysenwaage, Wägestücke mit Pinzette im Behälter, Reiter

3. Messung von GeschöÙgeschwindigkeiten

G Grundlagen

Die Bewegung eines GeschöÙes unmittelbar nach dem Verlassen des Laufes kann in erster Näherung als gleichförmig geradlinige Bewegung angesehen werden. Legt das GeschöÙ in der Zeit t den Weg s zurück, so ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus

$$v_0 = \frac{s}{t}. \quad (1)$$

Bei einer digitalen Zeitmessung wird die Periodenzahl z eines Generators mit der Frequenz f gezählt, die zwischen einem Start- und einem Stoppsignal auftritt.

Dann ergibt sich die Zeit t zwischen beiden Signalen aus

$$t = \frac{z}{f}, \quad (2)$$

und es ist

$$v_0 = \frac{sf}{z}. \quad (3)$$

In Wirklichkeit wird das GeschöÙ durch den Luftwiderstand gebremst. Die Bremskraft kann näherungsweise berechnet werden durch

$$F = c \frac{\rho_L}{2} Av^2. \quad (4)$$

Dabei sind c der Widerstandsbeiwert, A der Querschnitt der Kugel und ρ_L die Dichte der Luft.

V Versuchsdurchführung

Das Luftgewehr ist auf einer Grundplatte montiert (Bild 9). Unmittelbar vor seiner Mündung befindet sich eine Lichtschranke, eine zweite ist in etwa einem Meter Abstand von der ersten Schranke montiert. Dahinter folgt ein Kugelfang.

Beide Lichtschranken werden an ein elektronisches Zählgerät mit eingebautem Generator (Frequenz mindestens 10 kHz) angeschlossen. Die erste Lichtschranke liefert bei Lichtunterbrechung den Startimpuls, die zweite Lichtschranke den Stoppimpuls für die Zählung der Generatorimpulse.

Beide Lichtschranken sind in vertikaler Richtung verstellbar. Sie werden so justiert, daß die Kugel beide Lichtbündel unmittelbar vor den Lichtempfängern (Fototransistoren) unterbricht. (Zur Markierung des Kugelweges bei der Justierung wird dünner Karton vor und hinter den Lichtschrankengehäusen befestigt und durchschossen.) Nach erfolgter Justierung wird der Abstand zwischen den optischen Achsen der Lichtbündel mit einem Meßlineal gemessen. Den Durchmesser der Kugeln bestimmen Sie mit einem Meßschieber, die Masse mit einer Feinwaage.

Zur Berechnung der mittleren GeschöÙgeschwindigkeit ermitteln Sie für 10 Schüsse die Impulszahl beim Passieren der Meßstrecke.

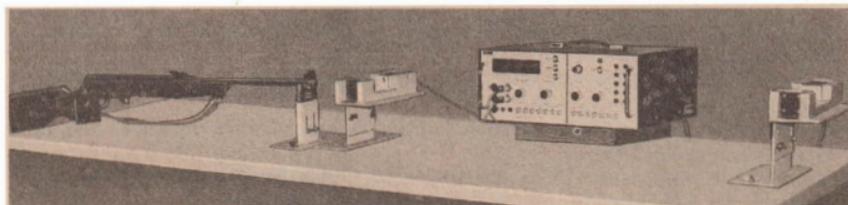


Bild 9

A Aufgaben

1. Justieren Sie das Gewehr und die Lichtschranken so, daß die Kugel beide Lichtschranken unterbricht und den Kugelfang trifft.
2. Ermitteln Sie mit einem Meßlineal den Abstand zwischen den Lichtbündeln der beiden Lichtschranken.
3. Bestimmen Sie die Masse und den Durchmesser einer Kugel.
4. Ermitteln Sie für 10 Schüsse die Periodenzahl und für jede Kugel die Geschwindigkeit.
5. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit und führen Sie eine Fehlerabschätzung durch.
6. Berechnen Sie für die mittlere Geschwindigkeit näherungsweise unter Verwendung von Gl. (4) die durch die Bremsbeschleunigung verursachte Geschwindigkeitsänderung zwischen den beiden Lichtschranken. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Fehlerabschätzung zu 5. und entscheiden Sie, ob die Näherung „gleichförmig geradlinige Bewegung“ berechtigt ist.

Versuchsgeräte: Luftgewehr, Kugelfang, 2 Lichtschranken, Digitalmeßgerät (Zähler und Generator), Maßstab, Waage, Meßschieber

4. Dichtebestimmung mit dem Pyknometer

G Grundlagen

Die Dichte ist der Quotient aus der Masse und dem Volumen eines Körpers:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1)$$

Sie kann daher aus Masse und Volumen des Körpers berechnet werden. Die Bestimmung der Masse ist durch Wägung sehr genau möglich. Schwierigkeiten bereitet hingegen die Bestimmung des Volumens, besonders bei unregelmäßig geformten Körpern.

Die bekannte Volumenbestimmung mit dem Überlaufgefäß liefert ungenaue Werte und kann daher nur für Überschlagsrechnungen verwendet werden. Man ist bestrebt, die Volumenbestimmung auf Wägungen zurückzuführen. Dies wird z. B. erreicht, wenn man ein *Pyknometer* verwendet.

Das Pyknometer ist ein Glasfläschchen mit einem eingeschlifften Glasstopfen, der



Bild 10

kapillar durchbohrt ist (Bild 10). Das Pyknometer (Masse m_0) wird mit Wasser gefüllt (Masse des mit Wasser gefüllten Pyknometers m_1). Dann bringt man den Probekörper (Masse m) in das Pyknometer und füllt wieder mit Wasser auf (Masse des Pyknometers mit Probekörper und verringert Wasseremenge m_2).

Es läßt sich nun das Volumen des Probekörpers wie folgt bestimmen:

Die Masse des ursprünglich im Pyknometer enthaltenen Wassers ist

$$m_1 - m_0.$$

Die Masse der verringerten Wassermenge ist

$$m_2 - m_0 - m.$$

Die Masse m_w des vom Probekörper verdrängten Wassers ist daher gleich der Differenz

$$\begin{aligned} m_w &= (m_1 - m_0) - (m_2 - m_0 - m) \\ &= m_1 + m - m_2. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also unabhängig von m_0 , der Masse des Pyknometers. m_0 braucht daher auch nicht bestimmt zu werden.

Nach (1) läßt sich nun das Volumen des

verdrängten Wassers berechnen:

$$V = \frac{m_w}{\varrho_w} = \frac{m_1 + m - m_2}{\varrho_w}. \quad (2)$$

Dabei ist ϱ_w die Dichte des Wassers. Es ist zu beachten, daß ϱ_w temperaturabhängig ist.

Das Volumen des Probekörpers ist gleich dem Volumen des verdrängten Wassers. Es ist daher Gl. (2) in (1) einzusetzen, und es folgt

$$\varrho = \frac{m}{m + m_1 - m_2} \varrho_w. \quad (3)$$

Damit ist die Dichtebestimmung auf drei Wägungen zurückgeführt:

m Masse des Probekörpers,
 m_1 Masse des Pyknometers mit Wasser,
 m_2 Masse des Pyknometers mit Probekörper und Wasser.

V Versuchsdurchführung

Zunächst ist der Probekörper zu wägen (Masse m). Dann wird die Temperatur t des destillierten Wassers festgestellt. Das Pyknometer wird mit dem destillierten Wasser, das Raumtemperatur haben soll, gefüllt. Man benutzt dazu zweckmäßig eine Pipette oder Spritzflasche. Es ist darauf zu achten, daß sich keine Luftblasen im Pyknometer befinden, wenn der Glasstopfen aufgesetzt ist. Das Wasser steigt in der Kapillare auf und quillt heraus. Das Pyknometer ist mit Fließpapier gut abzutrocknen. Das Wasser soll die Kapillare bis oben hin füllen, aber auf dem Glasstopfen keine Kuppe bilden. Damit sich die Temperatur des eingefüllten Wassers durch die Handwärme nicht ändert, darf das Pyknometer nur am Hals angefaßt werden. Zweckmäßig ist es, einen Reagenzglashalter zu verwenden. Das Pyknometer ist mit Wasser zu wägen (m_1). Dann bringt man den Probekörper in das Pyknometer und füllt wie beschrieben mit destilliertem Wasser auf. Die anschließende Wägung ergibt m_2 .

Die Regeln für die Benutzung von Waagen (Versuch 2) sind genau zu beachten!

A Aufgaben

1. Berechnen Sie nach Gl. (3) die Dichte der vorgelegten Probekörper!
2. Fehlerabschätzung

Versuchsgeräte: Pyknometer, Thermometer, Spritzflasche oder Pipette, Reagenzglashalter, Waage,
Versuchskörper (Stahlkugeln, Schrot, Kupferdrahtstücke, Glasperlen, Quarzsand o. ä.)

5. Physisches Pendel

G Grundlagen

Zur Bestimmung der Fallbeschleunigung dient ein physisches Pendel. Dies kann ein beliebig gestalteter Körper sein, der um die Achse A drehbar angeordnet ist (Bild 11).

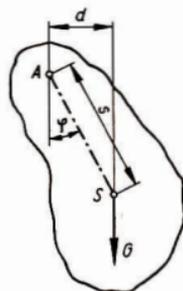


Bild 11

Hat der Schwerpunkt S den Abstand s von der Drehachse, so wirkt bei einer Auslenkung um den Winkel φ aus der Ruhelage das rücktreibende Drehmoment

$$M = -mgs \sin \varphi.$$

Für kleine Auslenkungswinkel gilt $\sin \varphi \approx \varphi$ und damit

$$M = -mgs\varphi.$$

Das rücktreibende Drehmoment ist Ursache einer beschleunigten Drehbewegung, für diese gilt

$$M = J_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J_A \ddot{\varphi}$$

(NEWTONsche Bewegungsgleichung für Drehung um die Achse A).

Durch Gleichsetzen der beiden Drehmomente erhält man

$$J_A \ddot{\varphi} + mgs\varphi = 0.$$

Dies stellt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, die den Schwingungsvorgang des physischen Pendels be-

schreibt. Da es sich unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungswinkel um eine harmonische Schwingung handelt, muß der Lösungsansatz

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \beta)$$

die Differentialgleichung identisch erfüllen. Durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit und Einsetzen wird dies bestätigt.

Die Periodendauer des physischen Pendels ergibt sich aus

$$\omega^2 = \frac{mgs}{J_A}$$

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ zu}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}}.$$

Verwendet man als physisches Pendel einen Stab der Länge l und legt die Drehachse A durch den Endpunkt (Bild 12), so kann man das Trägheitsmoment J_A leicht bestimmen. Unter Anwendung des STEINERSchen Satzes ergibt sich

$$J_A = \frac{1}{3} ml^2.$$

Damit erhält man für die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}.$$

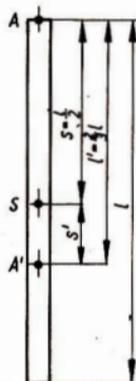


Bild 12

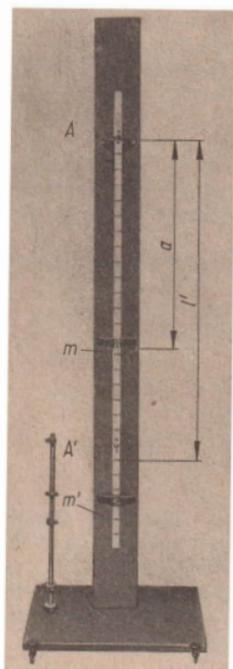


Bild 13

Das Stabpendel hat demnach die gleiche Periodendauer wie ein mathematisches Pendel von $\frac{2}{3}$ seiner Länge.

Die Pendellänge l' des mathematischen Ersatzpendels gleicher Periodendauer nennt man *reduzierte Pendellänge*. Trägt man die reduzierte Pendellänge l' auf dem

physischen Pendel der Länge l vom Drehpunkt A aus ab, so erhält man einen zweiten Drehpunkt A' , in bezug auf den das Pendel die gleiche Periodendauer T haben muß (Bild 13). Der neue Drehpunkt A' wird als *Schwingungsmittelpunkt* bezeichnet.

Wird bei einem physischen Pendel der Drehpunkt A mit dem Schwingungsmittelpunkt A' vertauscht, so bleibt die reduzierte Pendellänge l' unverändert.

Diese Erkenntnis hat zur Konstruktion des *Reversionspendels* geführt.

Mit Hilfe des Reversionspendels ist man in der Lage, die Fallbeschleunigung an jedem beliebigen Ort zu bestimmen. Aus der Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

folgt

$$g = l' \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (1)$$

Da es Schwierigkeiten bereitet, den Drehpunkt A genau am Stabende anzubringen, legt man eine Länge l' zwischen zwei beliebigen Drehpunkten A und A' fest. Es gelingt dann immer, durch Verschieben zweier Zusatzmassenstücke m und m' (Bild 13) für A und A' als Drehpunkte die gleiche Periodendauer zu ermitteln. Wird l' bestimmt (dies kann genau genug durchgeführt werden), so läßt sich g un schwer ermitteln.

V Versuchsdurchführung

Mit einer Dosenlibelle ist die Pendelaufhängung zu loten. Durch Lösen der Auflagerschraube entnimmt man den Pendelstab der Haltevorrichtung. Mit einem Maßstab wird der Abstand der beiden Schneiden festgestellt. Damit ist l' bestimmt. Nun sind die beiden Massenstücke so einzustellen, daß die Periodendauer T , die sich bei Schwingungen um Punkt A ergibt, gleich der Periodendauer T' bei Schwingung um A' ist. Um ein langwieriges planloses Probieren zu vermeiden, wird das Massenstück m' fest eingestellt und nur die Strecke a , der Abstand des Massenstücks m vom Drehpunkt A (Bild 13), verändert. Für etwa 8 verschiedene Werte a wird T (aus 20 Schwingungen) bestimmt. Anschließend hängt man den Pendelstab um, für die gleichen Entfernungen a (ebenfalls von Schneide A aus gemessen, die sich jetzt unten befindet) wird T' er-

mittelt. Die Werte sind in ein Diagramm (Bild 14) einzutragen. Die Schnittpunkte der beiden Kurven geben die Werte a an, für die T und T' einander gleich sind. Nun ist die aus dem Diagramm gefundene Entfernung a am Reversionspendel einzustellen. T und T' werden aus 50 (besser 100) Schwingungen ermittelt. Sollten die Werte T und T' voneinander abweichen, so ist der Mittelwert zu bilden. Mit π , l' und T errechnet man aus (1) die Fallbeschleunigung g .

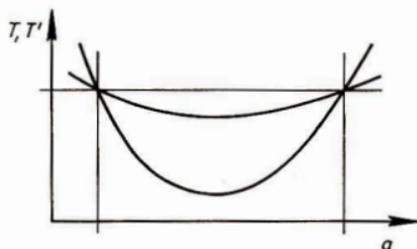


Bild 14

A Aufgaben

- Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung mit dem Reversionspendel!
- Fehlerabschätzung
- Es ist die Abweichung des Ergebnisses vom Normwert der Fallbeschleunigung des Ortes, an dem die Messung stattfand, zu begründen.
- Mit welcher Stellenzahl ist π mindestens einzusetzen, damit der Fehler von π das Ergebnis nicht beeinflusst?
- Fertigen Sie ein mathematisches Pendel mit der Pendellänge l' an und kontrollieren Sie, ob die Aussage über die Periodendauer stimmt!
- Wovon hängt der Unterschied zwischen T und T' im wesentlichen ab, und unter welchen Voraussetzungen ist $T = T'$?
- Weisen Sie nach, daß für ein beliebiges physisches Pendel die Gleichung $I = s + s'$ (Bild 12) gilt!

Versuchsgерäte: Reversionspendel komplett, Dosenlibelle, Stahlmaß 100 cm, Stoppuhr

6. Federkonstante einer Schraubenfeder

G Grundlagen

Die Längenänderung einer Schraubenfeder ist proportional der einwirkenden Kraft (Hookesches Gesetz). Die von einer bestimmten Kraft hervorgerufene Längenänderung ist abhängig vom Material und den Abmessungen der Feder. Material-

eigenschaften und Federabmessungen bestimmen das Verhältnis von wirkender Kraft und erzielter Längenänderung; es wird als *Federkonstante* oder *Richtgröße* bezeichnet.

$$\left| \frac{F}{\Delta l} \right| = k. \quad (1)$$

Wird ein an einer Schraubenfeder hängender Körper in der Längsrichtung der Feder angestoßen, so führt er Schwingun-

gen aus. Die auf den senkrecht schwingenden Körper wirkende resultierende Kraft ist der Entfernung des Körpers von der Mittellage (der Elongation y) proportional und immer zur Mittellage gerichtet:

$$F = -ky.$$

Mit $F = m\ddot{y}$ erhält man die Differentialgleichung $m\ddot{y} = -ky$ oder

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0. \quad (2)$$

Das ist die Differentialgleichung der *undämpften harmonischen Schwingung*. $\frac{k}{m}$ ist das Quadrat der Kreisfrequenz ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Daraus folgt die Periodendauer der Schwingung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4)$$

Bei der Längenänderung der Schraubenfeder wird das Material vorwiegend auf Torsion beansprucht. Die elastischen Eigenschaften einer solchen Feder werden deshalb außer von den äußeren Abmessungen vom Torsionsmodul des Federwerkstoffs bestimmt. Dabei besteht zwischen der Federkonstanten k , dem Drahtdurchmesser d , dem mittleren Windungsdurchmesser D_m , der Anzahl der federnden Windungen N und dem Torsionsmodul G die Beziehung

$$k = \frac{Gd^4}{8ND_m^3}. \quad (5)$$

V Versuchsdurchführung

1. Bestimmung der Federkonstanten aus dem Verhältnis von Kraft- und Längenänderung

Auf eine an die Federwaage gehängte Waagschale werden nacheinander solche Wägestücke gelegt, daß jeweils eine Dehnung der Feder um einige Zentimeter eintritt. Die Längenänderung der Feder läßt sich am besten mit einer Spiegelskala feststellen (Verfahren nach JOLLY). Die Proportionalitätsgrenze der Feder darf nicht überschritten werden.

2. Bestimmung der Federkonstanten aus Periodendauer und Masse des angehängten Körpers

Die Masse des anzuhängenden Körpers soll möglichst groß sein gegenüber der Masse der Feder und mindestens eine Periodendauer von 0,5 s ergeben. Der Körper muß frei schwingen können. Es ist jeweils die Dauer von 10 oder 20 Schwingungen zu messen, um den Fehler bei der Bestimmung von T möglichst klein zu halten.

A Aufgaben

- Von drei Schraubenfedern ist die Federkonstante zu bestimmen,
 - aus dem Verhältnis $F/\Delta l$, indem $F = F(\Delta l)$ in ein Diagramm eingetragen wird,
 - aus Periodendauer und Masse des angehängten Körpers.
- Fehlerabschätzung

3. Untersuchen Sie den Einfluß der Masse der Feder auf die Periodendauer!
4. Berechnen Sie den Torsionsmodul nach Gl. (5) aus den nach 1.1. und 1.2. bestimmten Werten!
5. Ein Körper soll an zwei gleichen Schraubenfedern der Federkonstante k aufgehängt werden; die Federn seien einmal „parallelgeschaltet“, zum andern „in Reihe“. Überlegen Sie sich, welchen Wert dann jeweils die Federkonstante des Systems annimmt!

Versuchsgeräte: Spiegelskale mit Millimeterteilung, Schraubenfedern, Wägestücke und Waagschale, Stoppuhr, Meßlehre, Meßschraube

7. Trägheitsmoment

G Grundlagen

Das NEWTONSche Grundgesetz der Dynamik $F = ma$ nimmt für die Rotation die Form

$$M = J\alpha \quad (1)$$

an. Darin ist M das Drehmoment, J das Trägheitsmoment und α die Winkelbeschleunigung. Das Trägheitsmoment ist definiert als

$$J = \int r^2 dm. \quad (2)$$

Mit ihm wird die *Massenverteilung* des Körpers um die Drehachse erfaßt. Für

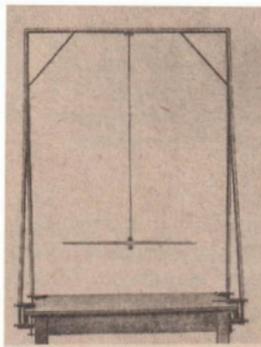


Bild 15

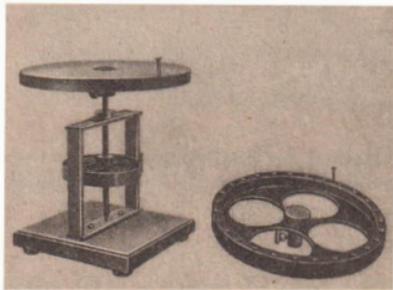


Bild 16

unregelmäßige Körper muß das Trägheitsmoment experimentell — meist aus Schwingungen — bestimmt werden. Der Probekörper hängt an einem Draht (Bild 15) oder wird auf eine Drillachse montiert (Bild 16). Bringt man den Körper aus seiner Ruhelage, indem man den Draht verdreht bzw. die Spiralfeder spannt, so entsteht ein rücktreibendes Drehmoment

$$M = -k'\varphi. \quad (3)$$

Dabei ist k' die *Winkelrichtgröße* und φ der Auslenkwinkel. Gibt man den Körper frei, so führt er am Draht Torsionsschwingungen bzw. auf der Drillachse Drehschwingungen mit der Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k'}} \quad (4)$$

aus.

V Versuchsdurchführung

1. Torsionsschwingungen 1

Die Winkelrichtgröße braucht nicht bekannt zu sein, wenn man das folgende Verfahren verwendet:

Am Probekörper werden zwei Zusatzkörper (Masse je $m/2$) angebracht (Bild 17). Damit wird das Trägheitsmoment um

$$J' = mr^2 \quad (5)$$

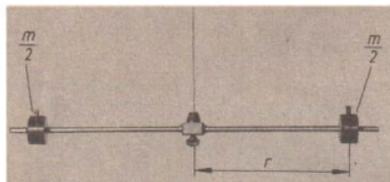


Bild 17

(r Abstand der Zusatzmassenstücke von der Drehachse) größer. Das Gesamtträgheitsmoment beträgt nun $J + J'$. Die Periodendauer wird jetzt größer und beträgt

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J + J'}{k'}}. \quad (6)$$

Dividiert man Gl. (4) durch Gl. (6), so folgt

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{J + J'}{J}}. \quad (7)$$

Gl. (7) wird nach J aufgelöst, und man erhält mit Gl. (5)

$$J = mr^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2}. \quad (8)$$

Zunächst wird die Periodendauer T gemessen, mit der der Probekörper am Draht schwingt. Zur Bestimmung von T sollen mindestens 20 Schwingungen beobachtet werden.

Zwei Zusatzmassenstücke (je $m/2$) werden am Probekörper im Abstand r von der Drehachse angebracht. Infolge des vergrößerten Trägheitsmomentes schwingt das System aus Probekörper und Zusatzmassenstücken jetzt mit der größeren Periodendauer T' . Diese Periodendauer wird ebenfalls aus mindestens 20 Schwingungen bestimmt. Das Trägheitsmoment J des Probekörpers wird nach Gl. (8) berechnet.

2. Torsionsschwingungen 2

Die Versuchsanordnung wird verändert (Bild 18) und ermöglicht es, die Trägheitsmomente von Rotationskörpern (Motor- und Dynamorotoren, Transporttrommeln usw.) bezüglich der Symmetrieachse zu bestimmen. Der Zusatzkörper ist jetzt ein Zylinder mit dem Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{2} mr^2. \quad (9)$$

Er schwingt allein mit der Periodendauer T , die aus mindestens 20 Schwingungen zu bestimmen ist. Dann wird der Rotationskörper, dessen Trägheitsmoment J' ermittelt werden soll, am Zylinder angebracht. Die Periodendauer T' , mit der Zylinder und Rotationskörper gemeinsam schwingen, wird ebenfalls aus mindestens 20 Schwingungen ermittelt. Aus Gln. (7) und (9) folgt

$$J' = \frac{1}{2} m r^2 \frac{T'^2 - T^2}{T^2}. \quad (10)$$

3. Drehschwingungen

Der zu untersuchende Körper wird auf eine dünne Achse montiert. An der Achse ist eine Spiralfeder befestigt, die am anderen Ende an einem Rahmen angeschraubt ist (Bild 16). Der Körper wird in Schwingungen versetzt und die Periodendauer gemessen.

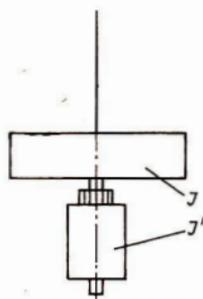


Bild 18

Je nach der Dämpfung des Schwingungsvorganges können etwas mehr oder weniger als 5 Schwingungen beobachtet werden. Die Messung ist mehrfach zu wiederholen. Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße der Spiralfeder verdreht man diese um einen bestimmten Winkel (z. B. $\pi/2$ oder π). Die Federwaage wird dabei in einen Haken eingehängt, der an dem zu untersuchenden Körper angebracht ist. Sie muß senkrecht zum Radius der vom Haken beschriebenen Kreisbahn gehalten werden. Die Winkelrichtgröße k' kann dann aus der Federkraft F , dem Abstand r des Hakens von der Drehachse und dem Drehwinkel φ nach Gl. (3) berechnet werden:

$$k' = \frac{|F| r}{\varphi}. \quad (11)$$

Auch die Bestimmung von k' sollte mehrfach und bei verschiedenen Auslenkwinkeln erfolgen. Der Mittelwert kann für die weitere Auswertung verwendet werden. J wird aus Gl. (4) berechnet.

A Aufgaben

- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines Probekörpers aus Torsionsschwingungen! Verwenden Sie für Variante 1 2 Paar unterschiedliche Wägestücke in je 3 verschiedenen Abständen von der Drehachse!

- Ermitteln Sie das Trägheitsmoment einiger Körper aus Drehschwingungen!
- Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße der Spiralfeder!
- Überlegen Sie, welchen Einfluß das Eigentragheitsmoment von Spiralfeder und Achse auf die Messung hat!
- Fehlerabschätzung
Beachten Sie Ihren individuellen Fehler bei der Ermittlung von T und T' !
Für den maximalen systematischen Fehler der Stoppuhr sind 0,03 s für je 60 s zu berücksichtigen.
- Erläutern Sie, inwieweit die Anzahl der Schwingungen das Ergebnis der Bestimmung von T und T' beeinflusst!

Versuchsgeräte: Stativ mit Torsionsdraht und Probekörper, 2 Paar Massenstücke, Maßstab, Meßschieber, Waage, Stoppuhr, Aufspannvorrichtung mit Spiralfedern, Federwaage, Winkelmesser, Probekörper

8. Gekoppelte Pendel

⊗ Grundlagen

Zwei Stangenpendel sind durch eine *Koppelfeder* miteinander verbunden (Bild 19).

Das Trägheitsmoment J des Stangenpendels (Bild 20) läßt sich als Summe aus dem Trägheitsmoment J_1 der Stange

$$J_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \quad (1)$$

und dem Trägheitsmoment J_2 der Kugel, die wir als Massenpunkt ansehen wollen,

$$J_2 = m_2 l_2^2 \quad (2)$$

berechnen.

$$J = J_1 + J_2. \quad (3)$$

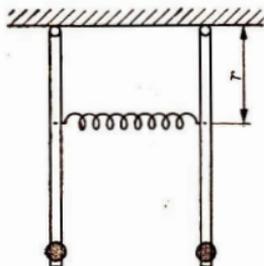


Bild 19

Die Gesamtmasse des Pendels ist $m = m_1 + m_2$, sein Schwerpunkt S hat den Abstand s vom Aufhängepunkt (Bild 20).

Aus der Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} \quad (4)$$

des Pendels läßt sich s errechnen.

Durch die Kopplung werden Kräfte von einem Pendel auf das andere übertragen und damit die Bewegungen (Amplituden und Frequenzen) verändert. Die Reibung ist zu vernachlässigen, es sollen also ungedämpfte Schwingungen mit kleiner Amplitude ($\tan \varphi \approx \varphi \approx \sin \varphi$) vorausgesetzt werden. Das Problem soll weiter dadurch vereinfacht werden, daß die Koppelfeder bei gleichem Ausschlag der Pendel keine Kraft überträgt. Im Ruhezustand hängen die beiden Pendel also senkrecht; die

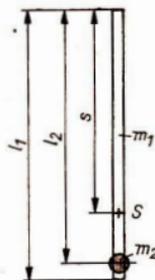


Bild 20

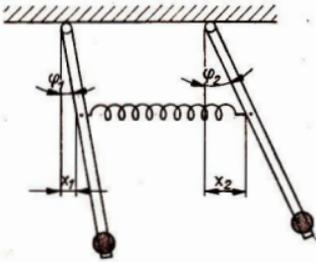


Bild 21

Feder ist entspannt. Die Feder greift an beiden Pendeln im Abstand r von der Drehachse an.

Wir betrachten nun einen beliebigen Bewegungszustand der Pendel: Pendel 1 sei um den Winkel φ_1 , Pendel 2 um den Winkel φ_2 aus der Ruhelage ausgelenkt (Bild 21). Die Feder übt dann auf Pendel 1 die Kraft

$$F = k(x_2 - x_1), \quad (5)$$

auf Pendel 2 nach dem Gegenwirkungsprinzip die Kraft

$$-F = -k(x_2 - x_1) \quad (6)$$

aus. (Winkel, Strecken und Kräfte sollen nach rechts positiv, nach links negativ gezählt werden.)

Für die ungedämpfte Schwingung des physischen Pendels gilt für kleine Amplituden ($\sin \varphi \approx \varphi$) nach Versuch 5 die Differentialgleichung

$$J\ddot{\varphi} + mgs\varphi = 0. \quad (7)$$

Diese Differentialgleichung ist noch um das Moment zu erweitern, das die Feder auf die Pendel ausübt:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + mgs\varphi_1 &= M_1 \\ J\ddot{\varphi}_2 + mgs\varphi_2 &= M_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Aus $M = Fr$ folgt mit Gl. (5) für Pendel 1

$$M_1 = k(x_2 - x_1)r$$

und für Pendel 2

$$M_2 = k(x_1 - x_2)r.$$

Führen wir noch ein

$$x_1 = r\varphi_1 \quad (9)$$

$$x_2 = r\varphi_2,$$

so erhalten wir

$$M_1 = k(\varphi_2 - \varphi_1)r^2 \quad (10)$$

$$M_2 = k(\varphi_1 - \varphi_2)r^2.$$

Aus Gl. (8) folgt mit Gl. (10)

$$J\ddot{\varphi}_1 + mgs\varphi_1 = k(\varphi_2 - \varphi_1)r^2 \quad (11)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + mgs\varphi_2 = k(\varphi_1 - \varphi_2)r^2.$$

Mit den Abkürzungen

$$mgs = D \quad (12)$$

und

$$kr^2 = C \quad (13)$$

wird

$$J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 = C(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (14)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 = C(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Dies ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen. Es kann entkoppelt werden, wenn wir die neuen Variablen

$$u = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (15)$$

$$v = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (16)$$

einführen. Durch Addition der beiden Gln. (14) folgt mit der Substitution (15)

$$J\ddot{u} + Du = 0. \quad (17)$$

Subtraktion der beiden Gln. (14) ergibt mit der Substitution (16)

$$J\ddot{v} + (D + 2C)v = 0. \quad (18)$$

Gl. (17) stimmt mit der bekannten Differentialgleichung (7) überein und stellt die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator dar. Seine Kreisfrequenz ist (vgl. Versuch 5)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}}. \quad (19)$$

Daraus ergibt sich die Periodendauer zu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (20)$$

Gl. (18) ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{J} + \frac{2C}{J}} \quad (21)$$

und der Periodendauer

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D + 2C}}. \quad (22)$$

Zwei Bewegungsformen sind besonders einfach zu übersehen. Ist nämlich $v = 0$, so ist nach Gl. (16) zu jeder Zeit

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

(Bild 22), und das System schwingt mit der Kreisfrequenz ω_1 . Es gilt dann

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \quad (23)$$

Ist andererseits $u = 0$, so ist nach Gl. (15) zu jeder Zeit

$$\varphi_1 = -\varphi_2$$

(Bild 23), und das System schwingt mit der Kreisfrequenz ω_2 . Dann gilt

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (24)$$

Die in Bild 22 und 23 dargestellten Schwingungen werden als *Eigenschwingungen* oder *Normalschwingungen* bezeichnet, die zugehörigen Frequenzen heißen *Eigenfrequenzen* oder *Normalfrequenzen*.

An gekoppelten Pendeln lassen sich auch Schwebungen beobachten. Hält man Pendel 2 in der Ruhelage fest, lenkt Pendel 1 aus und gibt dann beide Pendel gleichzeitig frei, so beobachtet man, daß die Amplituden von Pendel 1 rasch abnehmen und Pendel 2 zu schwingen beginnt. Die Energie wandert zwischen den beiden Pendeln hin und her. Diese Bewegungsform entsteht durch Überlagerung der beiden oben beschriebenen Eigenschwingungen.

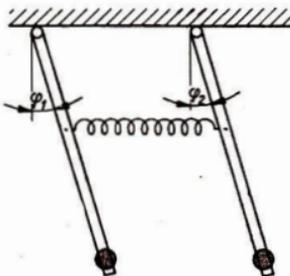


Bild 22

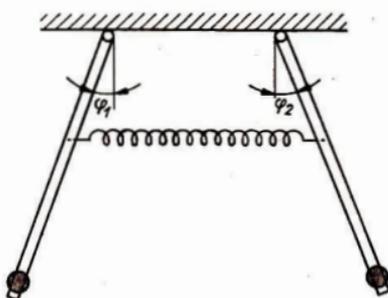


Bild 23

Aus der Addition von Gl. (15) und Gl. (16) folgt $u + v = 2\varphi_1$ oder

$$\varphi_1(t) = \frac{u + v}{2} = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_2 t.$$

Nach einem Additionstheorem kann dafür geschrieben werden

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (25)$$

Für Pendel 2 gilt wegen der anderen Anfangsbedingungen und der sich daraus ergebenden Phasenverschiebung

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (26)$$

Im Falle schwacher Kopplung ist $\omega_1 \approx \omega_2$, also $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$.

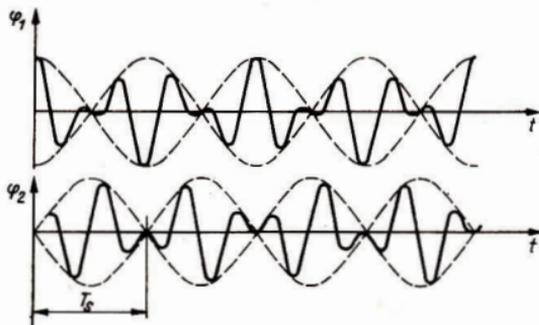


Bild 24

Man kann $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ bzw. $\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ als zeitliche Änderung der Amplitude auffassen:

$$\omega_S = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (27)$$

ist dann die Kreisfrequenz der Schwebung, während

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (28)$$

die Kreisfrequenz der Schwingung ist. Aus Gl. (27) läßt sich die Periodendauer T_S der Schwebung berechnen:

$$T_S = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)^{-1} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}. \quad (29)$$

Die Schwebungsdauer ist damit gleich der Zeitdauer von einem Stillstand zum andern. In Bild 24 ist der zeitliche Verlauf der Schwingungen der beiden Pendel dargestellt.

Als *Kopplungsgrad* κ wird definiert

$$\kappa = \frac{C}{C + D}. \quad (30)$$

Aus Gl. (19) folgt $D = J\omega_1^2$, aus (21)

$C = \frac{1}{2} (J\omega_2^2 - D)$. Damit wird (rechnen Sie nach!) mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\kappa = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}. \quad (31)$$

V Versuchsdurchführung

Zunächst werden die in Bild 20 eingetragenen Werte ermittelt: l_1, l_2, r, m_1, m_2 . Der Schwerpunktabstand s wird aus l_1, l_2, m_1 und m_2 berechnet, das Trägheitsmoment aus den Gln. (1), (2) und (3). Die Federkonstante der Koppelfeder ist entweder gegeben oder muß nach einem der in Versuch 6 beschriebenen Verfahren bestimmt werden. Aus mindestens 20 Schwingungen kleiner Amplitude wird die Periodendauer T_1 gemessen. Der Schwerpunktabstand ist daraus nach Gl. (4) zu berechnen und mit dem oben bestimmten Wert zu vergleichen. Dann wird die Koppelfeder eingehängt. Man überzeugt sich, daß bei gleichsinnigen Eigenschwingungen die gleiche Periodendauer auftritt wie bei der Schwingung des einzelnen Pendels. Dann werden die Pendel zu gegensinnigen Eigenschwingungen angeregt; aus mindestens 20 Schwingungen wird die Periodendauer T_2 bestimmt. Schließlich sind die Pendel zu Schwebungen anzuregen und die Schwebungsdauer zu messen.

A Aufgaben

1. Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden Stangenpendel, den Schwerpunkt-
abstand und die Konstanten D und C !
2. Ermitteln Sie die Periodendauer des ungekoppelten Pendels!
3. Messen Sie die Periodendauer der gekoppelten Pendel bei gegensinnigen Eigen-
schwingungen!
4. Bestimmen Sie die Schwebungsdauer!
5. Berechnen Sie die Periodendauer-Werte T_1 und T_2 nach Gln. (20) und (22), ver-
gleichen Sie mit den Meßwerten und diskutieren Sie Abweichungen!
6. Ermitteln Sie die Schwebungsdauer nach Gl. (29) und vergleichen Sie mit dem Meß-
wert!
7. Berechnen Sie den Kopplungsfaktor aus Gl. (30) und Gl. (31) und vergleichen Sie
diese Werte!
8. Fehlerabschätzung zum Kopplungsfaktor

Versuchsgeräte: Stativ, 2 Stangenpendel, Koppelfeder, Maßstab, Waage, Stoppuhr

9. Gedämpfte Pendelschwingungen**G Grundlagen**

Für die ungedämpfte Schwingung des physischen Pendels gilt bei kleinen Amplituden ($\sin \varphi \approx \varphi$) die Differentialgleichung

$$J\ddot{\varphi} + k'\varphi = 0$$

(J Trägheitsmoment, k' Winkelrichtgröße).

Für die gedämpfte Schwingung muß diese Gleichung um das rücktreibende Moment erweitert werden, das durch die Reibung verursacht wird. Dieses Moment ist der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ proportional. Damit lautet die Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + k'\varphi = 0.$$

β ist die Dämpfungskonstante oder der Dämpfungskoeffizient. Division durch J ergibt

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{J}\dot{\varphi} + \frac{k'}{J}\varphi = 0. \quad (1)$$

Wir setzen $\frac{\beta}{J} = 2\delta$ (δ Abklingkonstante) und $\frac{k'}{J} = \omega_0^2$ (ω_0 ist die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung [Versuch 8]). Damit wird

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (2)$$

Das ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die durch den Ansatz

$$\varphi = C e^{\lambda t} \quad (3)$$

gelöst wird.

Aus Gl. (3) folgt

$$\dot{\varphi} = \lambda C e^{\lambda t} \quad (4)$$

$$\ddot{\varphi} = \lambda^2 C e^{\lambda t}.$$

Gln. (3) und (4) in Gl. (2):

$$\lambda^2 C e^{\lambda t} + 2\delta\lambda C e^{\lambda t} + \omega_0^2 C e^{\lambda t} = 0.$$

Division durch $C e^{\lambda t}$ liefert die (quadratische) charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (5)$$

Für die Lösung der charakteristischen Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\delta < \omega_0$: Schwingfall
2. $\delta > \omega_0$: Kriechfall
3. $\delta = \omega_0$: aperiodischer Grenzfall

1. Der Schwingfall

Für $\delta < \omega_0$ wird die Lösung der charakteristischen Gleichung komplex. Führt man die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (6)$$

ein, so folgt

$$\lambda = -\delta \pm j\omega^2.$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

also

$$\varphi = e^{-\delta t} (C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}).$$

Mit der EULERSchen Gleichung $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ ergibt sich

$$\varphi = e^{-\delta t} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + j(C_1 - C_2) \times \sin \omega t].$$

Mit den neuen Konstanten $A = C_1 + C_2$ und $B = j(C_1 - C_2)$ folgt schließlich

$$\varphi = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (7)$$

A und B lassen sich aus den Anfangsbedingungen (φ und $\dot{\varphi}$ für $t = 0$) berechnen. Ist z. B. zu Beginn das Pendel maximal ausgelenkt, dann gilt

$$t = 0: \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Durch Einsetzen findet man $A = \varphi_0$ und

$$B = \frac{\delta}{\omega} \varphi_0. \quad (7) \text{ lautet dann}$$

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (8)$$

Diese Gleichung ist eine Lösung der Differentialgleichung (2). $e^{-\delta t}$ beschreibt

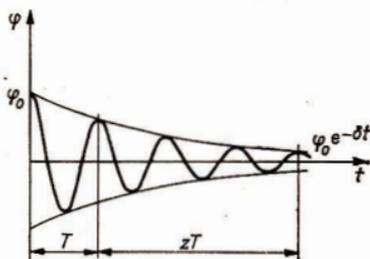


Bild 25

die exponentielle Abnahme der Amplituden (Bild 25).

Zur Bestimmung von δ betrachten wir zwei Umkehrpunkte auf derselben Seite, zwischen denen das Pendel z Vollschnwingungen ausführt. Es ergibt sich aus Gl. (8)

$$\varphi_t = \varphi_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (9a)$$

$$\varphi_{t+zT} = \varphi_0 e^{-\delta(t+zT)} \left[\cos \omega(t+zT) + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega(t+zT) \right]. \quad (9b)$$

Der Ausschlag geht während dieser Zeit zT auf den n -ten Teil zurück. Es gilt also

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_{t+zT}} = n. \quad (10)$$

Dividiert man andererseits die linken und rechten Seiten von Gl. (9a) und (9b) durcheinander, so erhält man

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_{t+zT}} = e^{\delta zT}. \quad (11)$$

Vergleich von Gln. (10) und (11) liefert

$$e^{\delta zT} = n$$

oder

$$\delta zT = \ln n$$

$$\delta = \frac{\ln n}{zT}. \quad (12)$$

Als *logarithmisches Dekrement* Λ definiert man

$$\Lambda = \delta T. \quad (13)$$

Aus Gl. (6) läßt sich die Kreisfrequenz ω_0 der zugehörigen ungedämpften Schwingung berechnen:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}.$$

Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und Gl. (12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{\ln n}{zT}\right)^2} \\ &= \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln n}{2\pi z}\right)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Für die Periodendauer T_0 der ungedämpften Schwingung ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$) folgt daraus

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln n}{2\pi z}\right)^2}}. \quad (15)$$

2. Der Kriechfall

Für $\delta > \omega_0$ ist die Lösung der charakteristischen Gleichung reell. Mit der Abkürzung $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ kommt man auf ähnlichem Wege zu der Lösung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} \left(\cosh \gamma t + \frac{\delta}{\gamma} \sinh \gamma t \right). \quad (16)$$

Bei großer Dämpfung kriecht das Pendel auf die Ruhelage zu; es führt eine aperiodische Bewegung aus.

3. Der Grenzfall

Man kann vom Schwingfall ausgehen. Für $\delta = \omega_0$ ist nach Gl. (6) $\omega = 0$. Mit

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$$

ergibt sich aus (8)

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t). \quad (17)$$

Diese Gleichung beschreibt ebenfalls eine aperiodische Bewegung; das Pendel kehrt in kürzester Zeit in die Ruhelage zurück, ohne aber diese zu überschreiten.

V Versuchsdurchführung

Wir verwenden ein Stangenpendel, an das Platten verschiedener Größe angeklemt werden können, um verschiedene Dämpfungen zu erzielen. Große Dämpfungen werden erreicht, wenn man die Platten in Flüssigkeit eintauchen läßt. An einer Skale können

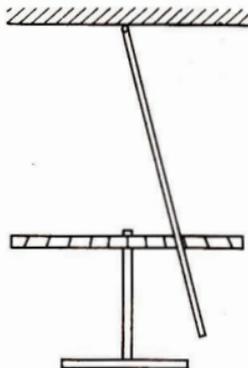


Bild 26

die Amplituden abgelesen werden (Bild 26). Zunächst verwendet man das Stangenpendel ohne Platte. Es wird die Periodendauer der gedämpften Schwingung gemessen.

Dann stellt man fest, auf welchen Bruchteil $\frac{1}{n}$ die Amplitude nach z Schwingungen abfällt. Dabei soll z so groß wie möglich gewählt werden.

An das Stangenpendel werden dann nacheinander die verschiedenen Platten angeklemt und die genannten Größen bestimmt.

A Aufgaben

1. Weisen Sie nach, daß die Gln. (8), (16) und (17) die Differentialgleichung (2) erfüllen!
2. Der Schwingfall ist bei drei verschiedenen Dämpfungen zu untersuchen.
 - 2.1. Berechnen Sie Abklingkonstante und logarithmisches Dekrement!
 - 2.2. Ermitteln Sie Kreisfrequenz und Periodendauer der zugehörigen ungedämpften Schwingung!
3. Für den Kriechfall ist bei verschiedenen Dämpfungen der Ausschlag des Pendels in Abhängigkeit von der Zeit aufzunehmen und grafisch darzustellen.
4. Es ist der Grenzfall zu suchen und wie in Aufgabe 3 das φ, t -Diagramm aufzunehmen.

Versuchsgesäte: Stativ mit Pendel und verschiedenen Platten, Schalen mit Flüssigkeiten verschiedener Viskosität, Maßstab, Stoppuhr

10. Oberflächenspannung von Flüssigkeiten

G Grundlagen

Die Oberfläche einer Flüssigkeit wirkt wie eine gespannte dünne Haut, denn es ist eine Kraft erforderlich, um die Oberfläche einer Flüssigkeit zu deformieren oder zu durchstoßen. Die Spannung der Flüssigkeitsoberfläche hat ihre Ursache in den Kräften, die zwischen den Flüssigkeitsmolekülen wirken. Diese Kräfte werden als Kohäsionskräfte bezeichnet. Sie haben einen Wirkungsbereich, der auch Wirkungssphäre genannt wird.

Ist ein Flüssigkeitsmolekül im Inneren der Flüssigkeit (Bild 27), so heben sich diese Kräfte auf, da allseitig gleich große Gegenkräfte, die von den Molekülen in der Umgebung herrühren, wirksam werden. Befindet sich jedoch ein Molekül in der Ober-

fläche oder in einem Abstand darunter, der kleiner ist als die Wirkungssphäre, so resultiert eine in das Innere der Flüssigkeit gerichtete Kraft (Bild 28); denn die

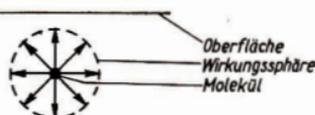


Bild 27

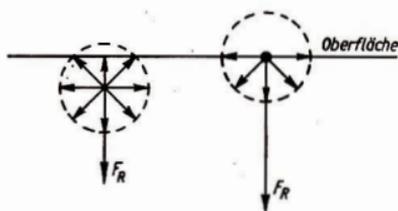


Bild 28

in der Oberfläche befindlichen Moleküle sind nur zum Teil von anderen Molekülen umgeben. Da die Flüssigkeitsmoleküle relativ leicht verschiebbar sind, werden die Moleküle der nach innen gerichteten Kraft so lange nachgeben, bis die Oberfläche den kleinstmöglichen Wert annimmt.

Sollen Moleküle aus dem Inneren der Flüssigkeit in die Oberfläche gebracht



Bild 29

werden, d. h., soll die Oberfläche der Flüssigkeit vergrößert werden, so ist eine Arbeit zu verrichten. Dieser Arbeitsaufwand ist spezifisch für jede Flüssigkeit und kann zur Bestimmung der *Oberflächenspannung* der Flüssigkeit benutzt werden.

Legt man auf die Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit einen völlig benetzten, sehr dünnen Draht der Länge l , so bildet sich um den Draht eine Flüssigkeitshaut (Bild 29). Hebt man den Draht um die Strecke Δs hoch, so haftet die Flüssigkeit an dem Draht, und die Ober-

fläche der Flüssigkeit wird um den Betrag $\Delta A = 2l \Delta s$ vergrößert. Um diese Oberflächenvergrößerung durchzuführen, ist eine Arbeit ΔW erforderlich:

$$\Delta W = \sigma \Delta A$$

$$\Delta W = \sigma 2l \Delta s.$$

Die zur Oberflächenvergrößerung erforderliche Arbeit hängt außer von der Oberflächenvergrößerung noch von einer für die Flüssigkeit charakteristischen Größe ab. Diese Größe nennt man die *Oberflächenspannung* (auch spezifische Oberflächenenergie oder Grenzflächenenergie). Sie hat die Dimension Arbeit/Fläche oder

$$\text{Kraft/Länge. Ihre Einheit ist } [\sigma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Die Arbeit ΔW ist genausogroß wie die mechanische Arbeit, die erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht zu heben. Diese beträgt

$$\Delta W = F \Delta s.$$

Durch Gleichsetzen erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{F}{2l}. \quad (1)$$

V Versuchsdurchführung

Zur Messung der Oberflächenspannung wird ein in einem Bügel ausgespannter dünner Draht der Länge l , der an einer Waage hängt, dicht unter die Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit getaucht. Der Drahtbügel ist vorher einige Minuten in Alkohol zu tauchen und anschließend durch Schwenken zu trocknen, so daß er in kurzer Zeit von der Flüssigkeit benetzt wird. Nach dem Eintauchen des Drahtes wird die Waage in den Gleichgewichtszustand gebracht. Vor dem Versuchsbeginn ist die Ruhestellung der Waage zu bestimmen. Durch weiteres Auflegen von Wägestücken bildet sich eine Flüssigkeitlamelle aus, die am Draht haftet und mit zunehmender Belastung länger wird. Bei einer bestimmten Belastung reißt die Lamelle ab. Durch mehrfache Wiederholung ist diese Kraft F möglichst genau zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß die Größe der Kraft F abhängig ist vom Auftrieb, den der in die Flüssigkeit eintauchende Teil des Drahtbügels erfährt.

A Aufgaben

1. Die Ruhestellung der Waage ist zu bestimmen. Wird eine Torsionswaage benutzt, so ist diese nach besonderer Vorschrift zu justieren.
2. Durch mehrmalige Versuchsdurchführung ist ein Mittelwert von F zu bilden.
3. Berechnen Sie den relativen Fehler, der entsteht, wenn der Auftrieb des eintauchenden Teiles des Drahtbügels nicht berücksichtigt wird!
4. Nach Gl. (1) ist die Oberflächenspannung zu berechnen.
5. Vergleichen Sie mit den in Tabellen angeführten Werten und erläutern Sie auftretende Abweichungen!

Versuchsgeräte: Waage, Wägestücke, PÉTRI-Schale, Meßlehre, Drahtbügel

11. Bestimmung der Dichte von festen Körpern aus dem Auftrieb in Flüssigkeiten

G Grundlagen

Um die als Quotient aus *Masse* und *Volumen* definierte *Dichte* eines Körpers zu bestimmen, muß man die Größen Masse und Volumen ermitteln können.

Die Masse läßt sich mit den üblichen Waagen bis auf 10 mg genau messen. Zum Feststellen des Volumens können verschiedene Verfahren angewandt werden. Hier soll beschrieben werden, wie das Volumen mit Hilfe des Auftriebes, den der Körper in einer Flüssigkeit erfährt, gefunden wird.

Das *Prinzip* von ARCHIMEDES besagt:

Auf einen in eine Flüssigkeit getauchten Körper wirkt eine Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.

Das bedeutet, daß der zum Erdmittelpunkt gerichteten Schwerkraft, die zwischen der Masse des Körpers und der Masse der Erde wirksam ist, eine Kraft entgegenwirkt, die als Auftriebskraft F_A bezeichnet wird. Sie ist eine Folge des Druckunterschiedes zwischen Ober- und Unterseite des in die Flüssigkeit getauchten Körpers:

$$F_A = V_{F1} \varrho_{F1} g. \quad (1)$$

In Gl. (1) ist V_{F1} das Volumen, ϱ_{F1} die Dichte der verdrängten Flüssigkeit und g die Fallbeschleunigung.

Da das Volumen des eingetauchten Körpers gleich dem Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist, gilt nach Gl. (1)

$$V = \frac{F_A}{\varrho_{F1} g}.$$

Wegen $V = \frac{m}{\varrho}$ ist auch

$$\frac{m}{\varrho} = \frac{F_A}{\varrho_{F1} g};$$

somit kann die *gesuchte Dichte* nach der Gleichung

$$\varrho = \frac{mg}{F_A} \varrho_{F1} \quad (2)$$

berechnet werden. Das Produkt mg ist die Gewichtskraft des Körpers in der Luft (G_L). Die Auftriebskraft F_A wird aus der Differenz der Gewichtskräfte in Luft und in der Flüssigkeit bestimmt:

$$\varrho = \frac{G_L}{G_L - G_{F1}} \varrho_{F1}. \quad (3)$$

Somit wird die Volumenbestimmung eines Körpers auf zwei Wägungen zurückgeführt. Da die Meßfehler beim Wägen gewöhnlich sehr klein sind, handelt es sich hier um ein recht genaues Verfahren.

V Versuchsdurchführung

1. Hydrostatische Waage

Mit Hilfe einer *hydrostatischen Waage* (Bild 30) wird die Gewichtskraft des Probekörpers in Luft bestimmt. Anschließend taucht man ihn in Wasser ein, um die Verminderung der Gewichtskraft, d. h. die Auftriebskraft, festzustellen.

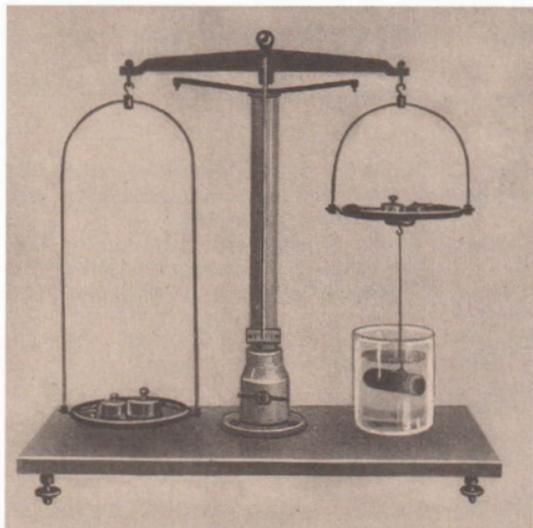


Bild 30

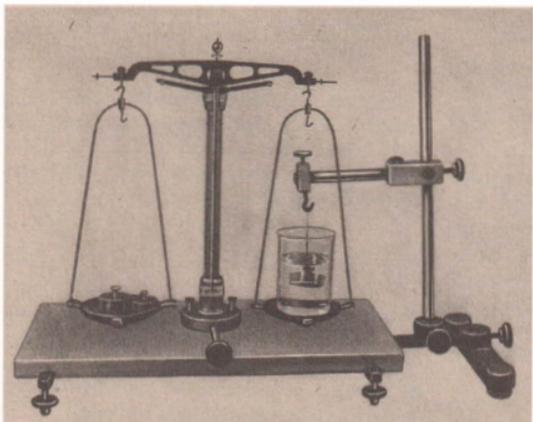


Bild 31

2. Feinwaage

Steht keine hydrostatische Waage zur Verfügung, so kann auch eine normale *Feinwaage* (Bild 31) verwendet werden. Den Probekörper legt man auf eine Waagschale, um seine Gewichtskraft in Luft festzustellen. Nunmehr wird auf eine Waagschale ein Becherglas mit Wasser gestellt und die Waage ins Gleichgewicht gebracht. Die Gewichtskraft des gefüllten Becherglases braucht nicht bestimmt zu werden, das Austarieren kann mit Schrotkugeln erfolgen. Der inzwischen an einem dünnen Faden an einem Stativ befestigte Körper wird in das Wasser getaucht. Dabei senkt sich die Waagschale mit dem Becherglas. Nachdem die Waage wieder austariert wurde, kann aus der scheinbaren Gewichtszunahme des gefüllten Becherglases die Auftriebskraft bestimmt werden. Bei beiden Methoden ist sorgfältig darauf zu achten, daß beim Eintauchen der Probekörper keine Luftbläschen an ihnen haften.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie nach Verfahren 1 oder 2 die Dichte verschiedener Probekörper!
2. Entscheiden Sie, ob für die Dichte des Wassers $1,000 \text{ g cm}^{-3}$ eingesetzt werden kann! Prüfen Sie auch, ob die Vernachlässigung des Auftriebes in Luft zulässig ist!
3. Weshalb sinkt bei Verfahren 2 die Waagschale mit dem gefüllten Becherglas, wenn der Probekörper eingetaucht wird?
4. Erläutern Sie, wieso mit Hilfe der vorgeschlagenen Balkenwaagen die Gewichtskräfte G_L und G_{F1} der Probekörper gefunden werden können, obwohl mit diesen Waagen im Grunde nur ein Massenvergleich erfolgt!

Versuchsgeräte: Hydrostatische Waage oder Feinwaage, Becherglas, Stativmaterial, verschiedene Probekörper

12. Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten mit der Mohr-Westphalschen Waage

G Grundlagen

Das Prinzip der MOHR-WESTPHALSchen Waage besteht darin, daß der *Auftrieb*, den ein Meßkörper in einer, zu untersuchenden Flüssigkeit erfährt, verglichen wird mit dem Auftrieb im Wasser.

Die MOHR-WESTPHALSche Waage (Bild 32) besteht aus einem Stativkörper mit einem Waagebalken, der auf einer Schneide ruht. Während die eine Seite des Balkens durch Kerben in 10 gleiche Teile geteilt ist und am Ende einen Haken trägt, an dem ein Meßkörper aus Glas mit einem eingebauten Thermometer hängt, läuft die andere Seite des Waagebalkens in einen spitzen

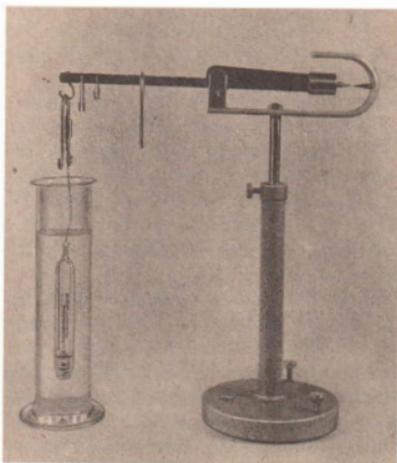


Bild 32

Dorn aus. Dieser Teil des Waagebalkens stellt das Gleichgewicht her, wenn der Meßkörper von Luft umgeben ist. Die Dornspitze und die am Stativ angebrachte Spitze stehen sich dann gegenüber.

Zur Waage gehören noch Reiter, deren Massen sich wie $1: \frac{1}{10} : \frac{1}{100}$ verhalten.

Sie werden im folgenden Text als Reiter 1, Zehntelreiter und Hundertstelreiter bezeichnet. Reiter 1 ist doppelt vorhanden. Das Gewicht von Reiter 1 ist so gewählt, daß es am oben erwähnten Haken hängend ungefähr Gleichgewicht hervorruft, wenn der Meßkörper in eine Flüssigkeit mit der Dichte $1,000 \text{ g cm}^{-3}$ getaucht wird.

Angenommen, die Dornspitzen stehen sich gegenüber, wenn der Meßkörper in eine Flüssigkeit mit der Dichte von $1,000 \text{ g cm}^{-3}$ eintaucht und ein Reiter 1 am Haken (im folgenden mit Kerbe 10 bezeichnet) hängt. Die Auftriebskraft ist in diesem Fall gleich der Gewichtskraft von Reiter 1. Die Auftriebskraft erzeugt dasselbe Drehmoment wie der Reiter 1. Gleichgewicht würde an dem Hebel auch herrschen, wenn zwei Reiter 1 auf Kerbe 5 hängen. Ist die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit nun z. B. 1,547mal so groß wie die der Vergleichsflüssigkeit, so erfährt der Meßkörper auch einen um den Faktor 1,547 größeren Auftrieb.

Im angenommenen Fall muß mit Hilfe der Reiter das Gegendrehmoment auf den 1,547fachen Wert gebracht werden, um wieder Gleichgewicht herzustellen. Das ist der Fall, wenn ein Reiter 1 auf Kerbe 10, ein Reiter 1 auf Kerbe 5, der Zehntelreiter auf Kerbe 4 und der Hundertstelreiter auf Kerbe 7 hängt.

Wenn die Dichte der Vergleichsflüssigkeit $1,000 \text{ g cm}^{-3}$ betrug und die Dornspitzen sich nach dem Eintauchen des Meßkörpers in die zu untersuchende Flüssigkeit gegenüberstehen, wenn ein Reiter 1 auf Kerbe 8, der Zehntelreiter auf Kerbe 1 und der Hundertstelreiter auf Kerbe 5 hängt, so ist das durch den Auftrieb verursachte

Drehmoment nur das 0,815fache des Auftriebes in der Vergleichsflüssigkeit. Das bedeutet aber, daß die gesuchte Dichte $0,815 \text{ g cm}^{-3}$ beträgt.

Nun ist aber die Dichte z. B. von Wasser bei Zimmertemperatur nicht $1,000 \text{ g cm}^{-3}$, wie bisher angenommen wurde. Außerdem erfährt der Aufhängerdraht des Meßkörpers einen Auftrieb, der von der Eintauchtiefe abhängig ist.

Wir nehmen an, daß als Vergleichsflüssigkeit Wasser mit einer Temperatur von 18°C verwendet wird und die Waage einspielt, wenn ein Reiter 1 und der Zehntelreiter auf Kerbe 9 und der Hundertstelreiter auf Kerbe 7 sitzen. Die Dichte ρ_w von Wasser hat bei 18°C den Wert $0,9986 \text{ g cm}^{-3}$. Das bedeutet nun, daß $0,997$ Reitergewicht einer Dichte von $0,9986 \text{ g cm}^{-3}$ entsprechen.

Reiter 1 wird mit 1,0, der Zehntelreiter mit 0,1 und der Hundertstelreiter mit 0,01 bewertet, wenn sie auf Kerbe 10 (Haken) hängen.

Stehen sich die Dornspitzen gegenüber, wenn die zu untersuchende Flüssigkeit mit der Dichte ρ_{F1} einen Auftrieb verursacht, der durch a_{F1} Reitergewichte ausgeglichen wird, während der Auftrieb im Wasser durch a_w Reitergewichte kompensiert wurde, so ist die gesuchte Dichte

$$\rho_{F1} = \frac{\rho_w a_{F1}}{a_w} \quad (1)$$

Die hohe Genauigkeit des Verfahrens ausnützend, verwendet man die MOHR-WESTPHALSche Waage auch zur Bestimmung der Dichte fester Körper ($\rho = 0,9$ bis $2,5 \text{ g cm}^{-3}$). Es wird davon ausgegangen, daß ein fester Körper in einer Flüssigkeit schwebt. Der Auftrieb und das Gewicht des Körpers sind an jeder Stelle der Flüssigkeit gleich groß, wenn die Dichte des Körpers und der Flüssigkeit übereinstimmen. Gelingt es nun, diesen Schwebzustand zu erreichen, dann kann mit der MOHRschen Waage die Dichte des festen Körpers bestimmt werden.

V Versuchsdurchführung

Nachdem die Waage so eingestellt wurde, daß sich die Dornspitzen gegenüberstehen, wird der Meßkörper in Wasser getaucht, dessen Temperatur gemessen wird. Die Eintauchtiefe ist zu beachten und bei den folgenden Messungen einzuhalten. Mit Hilfe der Reiter wird der Auftrieb kompensiert und die Reiterstellung notiert. Nachdem der Glaskörper von anhaftendem Wasser befreit ist, wird er in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Aus der nunmehr zum Ausgleich des Auftriebes erforderlichen Reiterstellung, der für das Wasser zutreffenden Stellung und dem aus der Tabelle entnommenen Wert für die Dichte des Wassers kann man die Dichte der Flüssigkeit errechnen.

A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Dichte von drei verschiedenen Flüssigkeiten!
2. Bestimmen Sie die Dichte eines festen Körpers nach der Schwebemethode!
3. Erläutern Sie die Wirkungsweise eines Aräometers und bestimmen Sie mit einem solchen Gerät die Dichte einer Flüssigkeit! Äußern Sie sich zu den bei diesem Meßverfahren auftretenden Meßfehlern!

Versuchegeräte: MOHR-WESTPHALsche Waage, verschiedene Flüssigkeiten (z. B. Toluol, Benzen, Tetrachlormethan, Petroleum, Salzwasser), Aräometer, Körper aus Hartgummi oder Dederon, Thermometer

13. Viskosität von Flüssigkeiten

G Grundlagen

Bewegt man einen Körper durch eine Flüssigkeit, so muß man eine Kraft aufwenden. Bei kleinen Geschwindigkeiten herrscht *laminare Strömung*: Dem Körper haftet eine Flüssigkeitsschicht an, die sich gegenüber der nächsten Schicht verschiebt. Die dazu erforderliche Kraft ist proportional dem Geschwindigkeitsgefälle dv/ds und der Berührungsfläche A . Der Proportionalitätsfaktor η ist ein Materialwert und heißt *dynamische Viskosität*:

$$F = \eta A \frac{dv}{ds} \quad (1)$$

Die dynamische Viskosität ist stark temperaturabhängig.

Die SI-Einheit der dynamischen Viskosität ergibt sich aus Gl. (1) zu

$$[\eta] = \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = \text{Pa s}.$$

Gebäuchlich war früher die Einheit Poise: $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa s}$ bzw. $1 \text{ cP} = 1 \text{ mPa s}$.

Der Quotient aus der dynamischen Viskosität η und der Dichte ρ der Flüssigkeit heißt *kinematische Viskosität*:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

Aus Gl. (2) folgt die SI-Einheit der kinematischen Viskosität:

$$[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Als SI-fremde Einheit wurde früher das Stokes verwendet: $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ und $1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Um die dynamische Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen, läßt man Kugeln in dieser Flüssigkeit sinken. Für die laminare Umströmung einer Kugel gilt das STOKESsche Gesetz:

$$F_R = 6\pi\eta r v. \quad (3)$$

Auf die in der Flüssigkeit sinkende Kugel wirken drei Kräfte: die Gewichtskraft G nach unten, die Auftriebskraft F_A und die Reibungskraft F_R nach oben. Die Kugel

führt zunächst eine beschleunigte Bewegung aus, dann fällt sie mit konstanter Geschwindigkeit; zwischen den drei Kräftepaaren muß demnach Gleichgewicht bestehen:

$$G = F_A + F_R. \quad (4)$$

Dabei ist

$$G = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_K g, \quad (5)$$

$$F_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g. \quad (6)$$

Setzt man die Gln. (3), (5) und (6) in (4) ein und löst nach η auf, so erhält man

$$\eta = \frac{2r^2 g (\rho_K - \rho)}{9v}.$$

Bei gleichförmiger Bewegung ist die Geschwindigkeit v der Quotient aus dem zurückgelegten Weg s und der Zeit t :

$$\eta = \frac{2r^2 g (\rho_K - \rho) t}{9s}. \quad (7)$$

Kennzeichnend für das Verhalten einer Strömung ist die REYNOLDSSche Zahl

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}. \quad (8)$$

Hier bedeutet l eine Vergleichslänge; bei der umströmten Kugel kann $l = 2r$ (r Kugelradius) gesetzt werden. Laminare Umströmung der Kugel liegt mit Sicherheit vor, wenn $Re \ll 1$ ist. Oberhalb einer *kritischen* REYNOLDSSchen Zahl wird die Strömung turbulent, d. h., es bilden sich Wirbel.

V Versuchsdurchführung

Mit der Meßschraube werden zunächst die Durchmesser der verschiedenen Kugeln gemessen. Die Kugeldichten ρ_K lassen sich aus den Massen und den Volumina der Kugeln berechnen. Mit der MOHR-WESTPHALSchen Waage (Versuch 12) kann die Viskosität der Versuchsflüssigkeit gemessen werden.

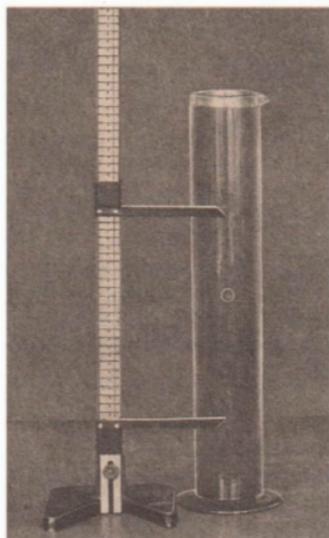


Bild 33

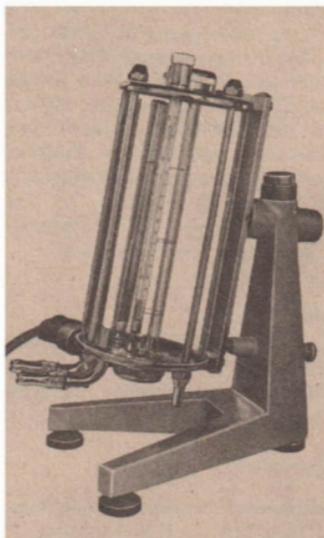


Bild 34

Ein hoher Standzylinder, dessen Radius groß gegen den Kugelradius ist, enthält die Versuchsflüssigkeit. Am Zylinder sind zwei Marken angebracht, die voneinander den Abstand s haben (Bild 33). Die obere Marke muß so weit von der Flüssigkeitsoberfläche entfernt sein, daß sich die Kugel an dieser Stelle bereits in gleichförmiger Bewegung befindet. Es wird die Zeit t gemessen, in der die Kugel von einer Marke zur andern gelangt.

Technisch bestimmt man die dynamische Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen mit dem HÖPPLER-Viskosimeter. Hier befindet sich die Versuchsflüssigkeit in einem Rohr, das etwa 5° gegen die Vertikale geneigt ist (Bild 34). In dem Rohr fällt eine Kugel, deren Durchmesser nur wenig kleiner als der Rohrdurchmesser ist. Das STOKESsche Reibungsgesetz läßt sich auf die Bewegung der Kugel nicht anwenden, hier gilt die Beziehung

$$\eta = K(\rho_K - \rho) t. \quad (9)$$

Darin ist K der „Kugelfaktor“, der der Bedienungsanleitung des Gerätes zu entnehmen ist.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die dynamische Viskosität der Versuchsflüssigkeit! Messen Sie dazu für jede Kugel zehnmal die Fallzeit!
2. Fehlerabschätzung für η
3. Berechnen Sie die kinematische Viskosität der Versuchsflüssigkeit!
4. Berechnen Sie für die Bewegung aller Kugeln die REYNOLDSsche Zahl! Ist in allen Fällen die Voraussetzung laminarer Umströmung der Kugel erfüllt?
5. Skizzieren Sie das v, t -Diagramm für die Bewegung der Kugel und erläutern Sie diese Bewegung!

Versuchsgeräte: Standzylinder mit Versuchsflüssigkeit, Kugeln mit verschiedenem Durchmesser und verschiedener Dichte, MOHR-WESTPHALSche Waage, Meßschraube, Waage, Vertikalmaßstab, Stoppuhr, Thermometer, Phosphorlöffel, HÖPPLER-Viskosimeter

14. Strömungsgeschwindigkeit und Widerstandszahl

G Grundlagen

Strömt Luft mit einer Geschwindigkeit, die gegenüber der *Schallgeschwindigkeit* klein ist, so kann die Luft als *inkompressibel* bezeichnet werden. Das ist für Strömungsgeschwindigkeiten bis etwa $70 \text{ m} \times \text{s}^{-1}$ der Fall. Wird weiterhin die *innere Reibung* vernachlässigt, liegt eine *ideale Strömung* vor.

Betrachtet man in dieser strömenden Luft

einen Ausschnitt, der als *Stromröhre* bezeichnet werden soll (Bild 35), so ist Arbeit zu verrichten, wenn die Luft von Niveau 1 nach dem Niveau 2 strömen soll. Strömt die Luft mit der Geschwindigkeit v_1 durch den Querschnitt A_1 , so hat die Luft vom Volumen dV in der Zeit dt den Weg $v_1 dt$ zurückgelegt. Da aus der Stromröhre die Luft nur aus dem Querschnitt A_2 austreten kann, gilt für das Luftvolumen $dV = A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$, d. h.,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als *Kontinuitätsgleichung*. Damit die Luft vom

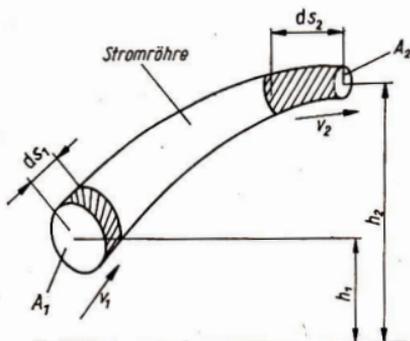


Bild 35

Niveau 1 nach dem Niveau 2 strömt, ist eine Arbeit zu verrichten, die die kinetische und potentielle Energie der strömenden Luft verändert:

$$dW = dW_{\text{kin}} + dW_{\text{pot}}. \quad (1)$$

Die an der Luft zu verrichtende Arbeit ergibt sich aus folgender Überlegung: die Luft vom Volumen dV wird quasistatisch vom Niveau 1 nach dem Niveau 2 gebracht. Dazu ist die Arbeit dW erforderlich. Diese Arbeit wird durch eine Kraft F längs des Weges ds ausgeführt, so daß $dW = F ds$ gilt. Mit $F = pA$ wird $dW = pA ds = p dV$. Diese Arbeit ist aufzubringen, um die kinetische Energie $dW_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm v^2$ und die potentielle Energie $dW_{\text{pot}} = dmgh$ zu ändern. Wendet man Gl. (1) auf die beiden Niveaus an, so wird

$$(p_1 - p_2) dV = \frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2) + dm g(h_2 - h_1).$$

Beachtet man, daß $dm = \rho dV$ ist, und ordnet die vorstehende Gleichung, so ist

$$p_1 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 + \rho dV g h_1 = p_2 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 + \rho dV g h_2$$

und nach Division durch dV ergibt sich

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2. \quad (2)$$

Wird der Versuch so durchgeführt, daß die Luft waagrecht strömt, dann ist $h_1 = h_2$, und Gl. (2) erhält die Form

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (3)$$

d. h., in einer horizontal strömenden Luftmenge ist die Summe aus statischem und Staudruck konstant. Gl. (3) wird als BERNOULLISCHE Gleichung bezeichnet. Bringt man in die strömende Luft ein Staurohr nach PRANDTL (Bild 36), so ist es möglich, den Staudruck als Differenz von Gesamtdruck p_0 und statischem Druck p zu messen. Aus Gl. (3) folgt für $v_2 = 0$, $p_2 = p_0$ und $p_1 = p$, $v_1 = v$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0$$

und daraus die Strömungsgeschwindigkeit v der Luft

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p)}. \quad (4)$$

In die strömende Luft wird ein Körper gebracht. Es staut sich die Strömung in

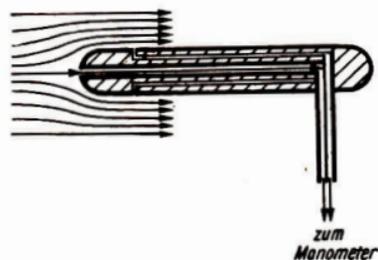


Bild 36

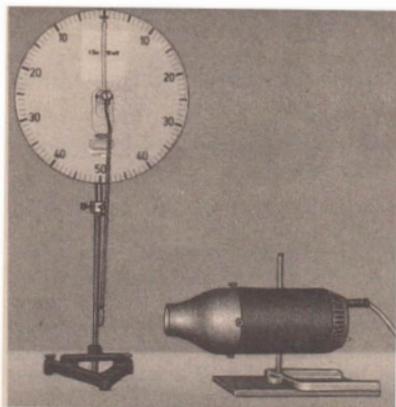


Bild 37

Abhängigkeit von der Form des Körpers. Der Körper bietet der strömenden Luft einen Widerstand. Für die Widerstandskraft F gilt

$$F = c \frac{\rho}{2} v^2 A. \quad (5)$$

In Gl. (5) bedeuten: c Widerstandszahl, ρ Dichte der Luft, A Querschnittsfläche des Körpers, v Strömungsgeschwindigkeit der Luft. Die Abhängigkeit der Widerstandskraft von der Körperform ist nachweisbar, wenn Körper verschiedener Form von gleichem Querschnitt in die mit der Geschwindigkeit v strömende Luft gebracht werden und durch ein *Winddruckmeßgerät* die Widerstandskraft F gemessen wird (Bild 37).

V Versuchsdurchführung

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit der strömenden Luft wird der Luftstromerzeuger so aufgestellt, daß die strömende Luft in axialer Richtung waagrecht austreten kann. Der Motor wird über einen Einstellwiderstand an die Spannung angeschlossen. Durch Einstellung der Spannung (z. B. 0, 20, 40, 60, ... V) erhöht man die Strömungsgeschwindigkeit. Vor die Ausströmduüse des Luftstromerzeugers wird das Staurohr angeordnet und mit dem Druckmeßgerät (Mikromanometer, Ringwaage) verbunden. Zu jeder Spannungs-(Umlauffrequenz-) Stufe wird am Druckmesser die Druckdifferenz abgelesen und nach (4) die zugehörige Strömungsgeschwindigkeit errechnet.

Zur Ermittlung der Widerstandszahlen wird vor dem Luftstromerzeuger das Winddruckmeßgerät, eine Drehmomentenwaage, angebracht (Bild 37). Der zu untersuchende Probekörper wird an den gekröpften Hebelarm angesteckt. Vor dem Anblasen befindet sich der Hebel mit dem Probekörper in senkrechter Stellung, und der Zeiger steht auf Null. Die beim Anblasen des Probekörpers auftretende Widerstandskraft wird über den mit der Drillachse verbundenen Stellzeiger der Drehmomentenwaage ausgeglichen, so daß der Zeiger vor der Skalenscheibe in die Nullage einspielt. Die Messungen sind mit den vorgegebenen Probekörpern bei jeweils zwei Geschwindigkeiten durchzuführen. Nach Gl. (5) ist die Widerstandszahl zu errechnen.

A Aufgaben

1. Messen Sie mit dem Staurohr die Druckdifferenz im gesamten Drehfrequenzbereich des Luftstromerzeugers!
2. Stellen Sie $v = f(p_0 - p)$ grafisch dar!
3. Bestimmen Sie die Widerstandszahlen der vorgelegten Probekörper bei zwei verschiedenen Geschwindigkeiten!
4. Begründen Sie eventuelle Abweichungen!

5. Beziehen Sie die gefundenen Widerstandszahlen auf den Wert, der für die Kreisscheibe ermittelt wurde!
6. Welche Bedeutung kommt der Widerstandszahl bei der Entwicklung von Fahrzeugen (z. B. PKW, Lokomotiven) zu?

Versuchsgeräte: Windstromerzeuger, Einstellwiderstand, Spannungsmesser, Staurohr, Druckmesser, Winddruckmeßgerät, Verbindungsschläuche, Stativmaterial

15. Schallgeschwindigkeit und Elastizitätsmodul

G Grundlagen

Wird mit einer Schallquelle ein Ton erzeugt, so breitet er sich mit der Geschwindigkeit $c = \lambda f$ aus, wobei f die Frequenz des Tones und λ die Wellenlänge im betreffenden Medium ist. Tritt die Schallwelle in ein anderes Medium über, so ändern sich Schallgeschwindigkeit und Wellenlänge, während die Frequenz f unverändert bleibt. Für die beiden Medien gelten die Gleichungen

$$c = \lambda f \quad \text{und} \quad c' = \lambda' f.$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich

$$\frac{c}{c'} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (1)$$

d. h., in zwei verschiedenen Medien verhalten sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer Welle wie ihre Wellenlängen. Wird die Wellenlänge in beiden Medien gemessen und ist die Schallgeschwindigkeit in dem einen bekannt, so ist die andere aus Gl. (1) bestimmbar. Für den Versuch sei die Schallgeschwindigkeit in Luft gegeben. Sie hängt von der Temperatur ab und beträgt

$$c' = \sqrt{\kappa \frac{R}{M} T} \quad (2)$$

mit dem Isentropenexponenten (Adiabatexponenten) κ ($\kappa = 1,4$ für zweiatomige Gase), der Gaskonstanten $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und der molaren Masse M .

Für Luft gilt die zugeschnittene Größen-gleichung

$$c'_{\text{Luft}} = 331,6 + 0,6 t/^\circ\text{C}. \quad (3)$$

V Versuchsdurchführung

1. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Ein Stab aus dem Material, für welches die Schallgeschwindigkeit bestimmt werden soll, wird genau in der Mitte fest eingeklemmt. Durch Reiben des Stabes in der Längsrichtung mit einem mit Kolophonium bestreuten Lappen werden stehende Longitudinalwellen erzeugt, wodurch hohe Quetschöne entstehen. Die festgeklemmte Stelle ist ein Schwingungsknoten, die beiden Stabenden sind Schwingungsbäuche. Da die Entfernung zweier benachbarter Schwingungsbäuche gleich der halben Wellenlänge ist, ergibt sich für die Wellenlänge λ der Stabschwingung die doppelte Stablänge:

$$\lambda = 2l. \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Wellenlänge λ' in Luft dient ein langes Glasrohr (KUNDTSCHESES Rohr), das an einem Ende mit einem verschiebbaren Stempel versehen ist und in dessen anderes Ende der zum Schwingen erregte Stab hineinragt (Bild 38). Um die

Longitudinalschwingung des Stabes gut auf die Luftsäule im Glasrohr zu übertragen, ist der Stab mit einer Endplatte (Korkscheibe) versehen, die die Stabschwingungen mitmacht. Die von der Endplatte ausgehenden Schallwellen werden am geschlossenen Ende des Glasrohrs reflektiert, so daß sich in der Luftsäule stehende Wellen ausbilden. Um sie sichtbar zu machen, verteilt man wenig trockenes Korkpulver in dem Glasrohr, so daß das Pulver einen langen, gleichmäßig dünnen Strich unten in dem

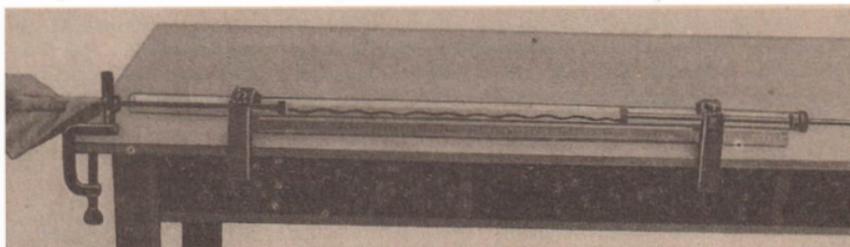


Bild 38

Rohr bildet. Ganz vorsichtig wird das Korkpulver durch Drehen des Rohres um seine Achse etwas gehoben. Bilden sich nun in der Glasröhre stehende Wellen, so ist die Luft an den Knotenstellen dauernd in Ruhe, und das Korkpulver bleibt dort liegen. An den Stellen starker Luftbewegung, den Schwingungsbäuchen, fällt das Korkpulver an der Glaswand herunter, und es entstehen girlandenartige Bögen (Bild 39).

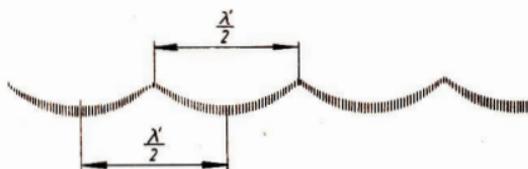


Bild 39

Die stehende Welle bildet sich nur dann scharf aus, wenn die Luftsäule in dem Rohr eine bestimmte Länge hat, d. h. auf die Röhrenlänge eine ganzzahlige Anzahl von halben Wellenlängen entfällt. Das erreicht man durch Probieren, indem man den Stempel verschiebt. Der Abstand zweier benachbarter Schwingungsknoten ist gleich der halben Wellenlänge in Luft. Die Messung der Wellenlänge λ' in Luft geschieht folgendermaßen:

Man mißt den Abstand a zwischen zwei gut ausgeprägten Schwingungsknoten und teilt diesen Abstand durch die Anzahl n der zwischen ihnen liegenden Bögen. Somit erhält man

$$\lambda' = \frac{2a}{n}.$$

Diese Messungen werden 5- bis 10mal mit jedesmal neu erzeugten Staubfiguren wiederholt.

Die Gl. (2), (3) und (4) liefern alle Größen, die zur Berechnung der gesuchten Schallgeschwindigkeit benötigt werden, denn aus Gl. (1) folgt:

$$c = \frac{\lambda}{\lambda'} c'.$$

2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Bei einer longitudinalen Welle breiten sich die Verdichtungen und Verdünnungen aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird also von der Zusammendrückbarkeit und Dehnbarkeit des Mediums, d. h. von seinem Elastizitätsmodul E abhängen. Außerdem spielt die Dichte ρ eine Rolle, da bei großer Dichte die in Bewegung zu setzende träge Masse größer ist. Es gilt die Beziehung

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Hat man die Schallgeschwindigkeit c bestimmt und kennt die Dichte des Stoffes, so ergibt sich für den Elastizitätsmodul:

$$E = c^2 \rho. \quad (5)$$

A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen in einem Metallstab!
2. Der Elastizitätsmodul des Metallstabes ist nach Gl. (5) zu errechnen.
3. Fehlerabschätzung
4. Die Entstehung stehender Wellen ist zu erläutern.
5. Leiten Sie Gl. (3) aus (2) ab!

Versuchsgeräte: KUNDT'Sches Rohr mit Haltevorrichtung, Korkpulver, Kolophonium, Lappen, Maßstab, Metallstab

16. Messung des Elastizitätsmoduls mit Ultraschall

G Grundlagen

Für die Beurteilung der Festigkeit und elastischen Eigenschaften von festen Stoffen ist die Kenntnis des Elastizitätsmoduls von großer Bedeutung. Seine experimentelle Ermittlung kann nach verschiedenen Methoden erfolgen.

Man unterscheidet statische und dynamische Meßverfahren.

Bekannte statische Messungen können mittels des HOOKE'Schen Gesetzes bzw. der Durchbiegung von Stäben erfolgen.

Aus dem HOOKE'Schen Gesetz wird auch der Elastizitätsmodul E definiert. Ist l die Ausgangslänge eines Stabes und Δl die durch die senkrecht zur Querschnittsfläche A des Stabes wirkende Kraft F hervorgerufene Längenänderung, gilt

$$E = \frac{Fl}{A \Delta l}. \quad (1)$$

Der Quotient aus dieser Kraft F und der Fläche A ist die Normalspannung σ und

$\Delta l/l$ die relative Längenänderung ε . Damit geht Gl. (1) in die übliche Formulierung des Hooke'schen Gesetzes über:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2)$$

Die SI-Einheit des Elastizitätsmoduls E ergibt sich aus Gl. (1):

$$[E] = \frac{[F][l]}{[A][\Delta l]} = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m} = \frac{N}{m^2} = Pa.$$

Eine dynamische Methode zur experimentellen Bestimmung des Elastizitätsmoduls erhält man aus der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c in dem betreffenden Stoff von der Dichte ρ und den elastischen Eigenschaften des Stoffes. Besonders einfach ist dieser Zusammenhang bei

langen Stäben. Wenn die Länge l des Körpers sehr viel größer ist als die größte Querschnittsabmessung q (bei kreisförmigem Querschnitt ist q der Durchmesser d), gilt

$$c = \sqrt{E/\rho}$$

und damit

$$E = c^2 \rho. \quad (3)$$

Wird die Schallgeschwindigkeit c im Stab bestimmt, und ist die Dichte ρ des Stabes bekannt oder ermittelt, so kann der Elastizitätsmodul E nach Gl. (3) berechnet werden. Dazu muß die Laufzeit t eines Ultraschallimpulses, der den Körper der Länge l durchläuft, gemessen werden.

V Versuchsdurchführung

Für die Experimente werden Stäbe mit *konstantem* Querschnitt über die gesamte Länge verwendet. Mit einer geeigneten Waage wird die Masse m gemessen. Die Messung der Länge l erfolgt mit einem Stahlbandmaß, während die Abmessungen der Querschnittsfläche A mit dem Meßschieber oder mit der Meßschraube ermittelt werden. Zur Be-

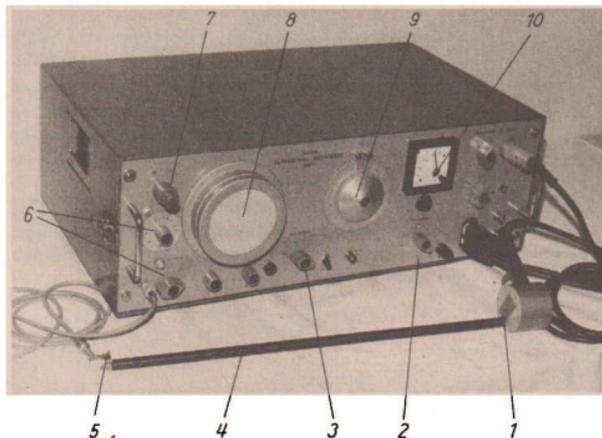


Bild 40

1 Ultraschallimpulsgeber, 2 Netz Spannungsschalter, 3 Meßbereichschalter, 4 Probestab, 5 Ultraschallimpulsaufnehmer, 6 Grob- und Feineinstellung des Verstärkers, 7 Helligkeits- und Kontrasteinstellung des Elektronenstrahls, der den Impuls abbildet, 8 Oszillografenröhre, auf deren Leuchtschirm der Ultraschallimpuls und der Meßimpuls abgebildet werden, 9 Skale zum Verschieben des Meßimpulses und zum Ablesen der Laufzeit des Impulses durch den Probestab, 10 Spannungsmesser für die Netzspannung

stimmung der Laufzeit t der Ultraschallimpulse (diese Messung erfolgt elektronisch) kann z. B. die Ultraschallmeßeinrichtung USME 9 verwendet werden, die in Bild 40 dargestellt ist. Der magnetostriktive Ultraschallgeber und der piezoelektrische Ultraschallempfänger werden mit säurefreiem Öl oder Fett an die Stabenden angekoppelt. Entsprechend der Gebrauchsanweisung der Ultraschallmeßeinrichtung (diese liegt am Arbeitsplatz und muß vor der Einschaltung des Gerätes durchgearbeitet werden) wird die Zeit t , die der Ultraschallimpuls zum Durchlaufen des Körpers der Länge l benötigt, abgelesen. Somit sind alle Meßwerte bekannt, um nach Gl. (3) den Elastizitätsmodul des Stoffes zu berechnen.

A Aufgaben

1. Für 5 Stäbe aus verschiedenen Stoffen ist der Elastizitätsmodul zu bestimmen. Dazu sind die Hinweise in der Versuchsdurchführung sowie die in der Gebrauchsanweisung des Ultraschallmeßplatzes zu beachten.
2. Es ist für alle Meßwerte eine Fehlerabschätzung vorzunehmen und der absolute sowie der relative Fehler des Elastizitätsmoduls anzugeben.

Versuchsgeräte: Waage, Wägesatz, Ultraschallmeßeinrichtung, Stahlbandmaß, Meßschieber, Meßschraube, Probestäbe

17. Resonanzrohr

G Grundlagen

Das Resonanzrohr ist ein Glasrohr und enthält eine Luftsäule, deren Länge verändert werden kann. Diese Luftsäule wird zu Schwingungen angeregt, wenn man z. B. eine Stimmgabel anschlägt, die über der Öffnung des Rohres angebracht ist. Dabei werden im Resonanzrohr *erzwungene* Schwingungen erzeugt: Die Teilchen schwingen mit der Frequenz, die ihnen von der Stimmgabel „aufgezwungen“ wird. Die *Longitudinalwellen* laufen bis zum Ende der Luftsäule, das durch eine Wasseroberfläche gebildet wird, und werden dort reflektiert. Einfallende Welle und reflektierte Welle interferieren miteinander, so daß sich im Rohr stehende Wellen ausbilden. Ändert man die Länge der Luftsäule durch Heben und Senken der Niveauflasche F (Bild 41), so gibt es

Stellen, an denen die Lautstärke besonders anschwillt. Es besteht Resonanz zwischen Stimmgabel und Luftsäule im Rohr. Diese Resonanz tritt ein, wenn die Luftsäule so lang ist, daß sich an der Wasseroberfläche ein Schwingungsknoten, an der Öffnung des Rohres aber ein Schwingungsbauch befindet (stehende Welle, Bild 42). Die Luftsäulenlänge muß ein ungeradzahliges Vielfaches eines Viertels der Wellenlänge sein:

$$l_1 = \frac{1}{4} \lambda, \quad l_2 = \frac{3}{4} \lambda, \quad l_3 = \frac{5}{4} \lambda, \quad \dots, \quad (1)$$

$$l_n = \frac{2n-1}{4} \lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Wellenlänge ist mit der Frequenz über die Gleichung

$$c = \lambda f \quad (2)$$

verbunden. Dabei ist c die Schallgeschwindigkeit in Luft, die von der Temperatur

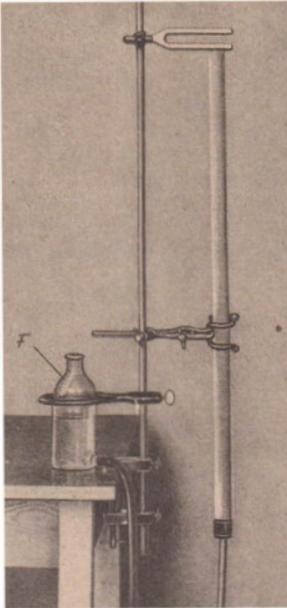


Bild 41

abhängt:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{R}{M} T} \quad (3)$$

mit dem Isentropenexponenten (Adiabatexponenten) κ ($\kappa = 1,4$ für zwei-

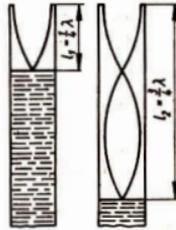


Bild 42

atomige Gase), der Gaskonstanten $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und der molaren Masse M .

Für Luft gilt die zugeschnittene Größen-
gleichung

$$c/m_{\text{Luft}} = 331,6 + 0,6 t/^{\circ}\text{C}. \quad (4)$$

• Versuchsdurchführung

Über dem Resonanzrohr wird eine Stimmgabel eingespannt. Die Niveauflasche wird so weit gehoben, daß das Resonanzrohr vollständig mit Wasser gefüllt ist. Nachdem man mit dem Gummihammer die Stimmgabel angeschlagen hat, senkt man den Wasserspiegel, bis ein deutliches Anschwellen des Tones zu hören ist. Der Wasserstand ist zu markieren (Kreide, Ölstift). Nachdem die Länge l_1 gemessen ist, wird der Wasserspiegel weiter bis zur nächsten Resonanzstelle gesenkt; die Messung ergibt l_2 . Alle weiteren Resonanzstellen sind ebenfalls auszumessen ($l_3, l_4 \dots$).

Aus (1) folgt

$$l_2 - l_1 = l_3 - l_2 = l_n - l_{n-1} = \lambda/2. \quad (5)$$

Der Abstand zweier Resonanzstellen ist gleich der halben Wellenlänge. Es empfiehlt sich, diese Differenzbildung vorzunehmen, um so den störenden Einfluß der Luftteilchen zwischen Stimmgabel und oberem Rand des Rohres auszuschalten. Bei hohen Frequenzen ist es zweckmäßig, zwei weit auseinanderliegende Resonanzstellen zuzulegen. Dabei muß selbstverständlich die Zahl der dazwischenliegenden Maxima beachtet werden.

A Aufgaben

1. Leiten Sie Gl. (4) aus Gl. (3) her!
2. Berechnung der Wellenlänge nach Gl. (5).
3. Ermitteln Sie die Schallgeschwindigkeit nach Gl. (3) oder (4).
4. Berechnung der Frequenzen der Stimmgabeln nach Gl. (2).
5. Für die anderen Stimmgabeln sind die Messungen ebenfalls auszuführen.
6. Fehlerabschätzung für λ und f .

Versuchsgeräte: Resonanzrohr, Stutzenflasche, Gummischlauch, Stativ mit Kreuzmuffen und Klemmen, Maßstab, Stimmgabeln, Gummihammer

THERMODYNAMIK

18. Längenausdehnungskoeffizient fester Körper

G Grundlagen

Ein Körper erfährt durch Erwärmung im allgemeinen eine allseitige Volumenzunahme. Wir wollen hier jedoch nur die Ausdehnung stabförmiger fester Körper in ihrer Längsrichtung messen.

Bei den zu untersuchenden Stoffen und dem vorgesehenen Temperaturbereich ist die Längenänderung der Temperaturänderung proportional. Kann sich der Körper ungehindert ausdehnen, so ändert

sich die Länge jedes Teilstückes um den gleichen Betrag, und die Längenänderung ist folglich auch proportional der ursprünglichen Länge l_0 .

$$\Delta l \sim l_0 \Delta t,$$

d. h.,

$$\frac{\Delta l}{l_0 \Delta t} = \text{konstant.}$$

Das Verhältnis $\frac{\Delta l}{l_0 \Delta t}$ wird als *Längenausdehnungskoeffizient* α bezeichnet:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t}. \quad (1)$$

V Versuchsdurchführung

Um den Längenausdehnungskoeffizienten bestimmter Stoffe zu ermitteln, müssen die Ausgangslänge, die Längenänderung und die Temperaturänderung gut meßbar sein. Zur Messung dienen Glas- bzw. Metallrohre, deren Enden verschlossen sind und die zwei seitliche Anschlußöffnungen haben. Die Länge der Rohre beträgt z. B. 50 cm (Bild 43).

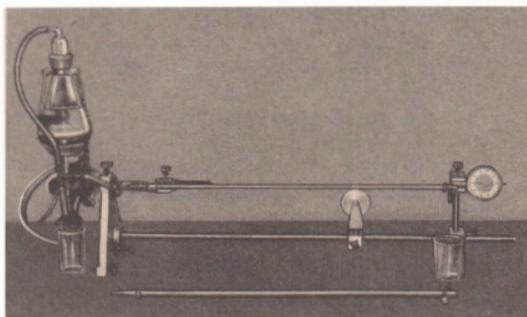


Bild 43

Es wird jeweils ein Rohr mit den angeschlossenen Schläuchen in die Aufnahmevorrichtung gelegt und an den Anschlagbolzen angedrückt. Danach wird der Reiter mit der Meßuhr so weit herangeschoben, daß sich der Zeiger der Meßuhr bereits ein Stück bewegt. Durch Verdrehen der Skale stellt man den Zeiger über den Nullstrich.

Sobald nun der im Glaskolben erzeugte Wasserdampf in das Rohr eintritt, dehnt es sich aus, und der Zeiger der Meßuhr dreht sich. Der Versuch ist beendet, wenn die Bewegung des Zeigers aufgehört hat. Dann strömt aus dem anderen Ende angeschlossenen Schlauch Dampf aus. Das Rohr hat nun die Temperatur des Dampfes. Das Kondenswasser muß ungehindert auslaufen können, was durch Schrägstellen des Rohres erreicht werden kann.

Mit einem Thermometer mit Zehntelgrad-Einteilung werden die Zimmertemperatur (Anfangstemperatur) und die Dampftemperatur (Endtemperatur) gemessen. Es empfiehlt sich eine zweifache Temperaturmessung (am Anfang und am Ende des Ausdehnungsrohrs). Die Dampftemperatur wird am Ende des gesamten Versuches bestimmt. Zu diesem Zweck wird das Thermometer dicht über die Wasseroberfläche gebracht, um die Temperatur des gesättigten Dampfes zu messen. Durch die heißen Gefäßwände kann der Dampf überhitzt werden. Der an den Rohrwandungen seine Wärme abgebende Dampf ist aber wieder gesättigter Dampf. Wenn der an der Ausströmöffnung angebrachte Schlauch eine genügende lichte Weite besitzt, dann empfiehlt es sich, durch Einführen des Thermometers in diesen Schlauch die Temperatur des ausströmenden Dampfes zu ermitteln. Der Dampf muß am Thermometer vorbeiströmen können, damit kein Überdruck entsteht.

Die gemessenen Werte können in Gl. (1) eingesetzt werden, um den Längenausdehnungskoeffizienten zu bestimmen.

A Aufgaben

1. Es sind nacheinander die Längenänderungen von 4 verschiedenen Stoffen zu bestimmen (z. B. Glas, Aluminium, Stahl, Messing oder Kupfer). Als Ausgangstemperatur ist die Zimmertemperatur und als Endtemperatur die Temperatur des aus dem Rohr ausströmenden Dampfes zu betrachten.
2. Nach (1) werden die jeweiligen Längenausdehnungskoeffizienten errechnet.

Versuchsgeräte: Apparatur nach Bild 43 oder Führungsschiene (z. B. von der optischen Bank), vier Reiter zur Aufnahme eines Anschlages, der beiden Führungswinkel und der Meßuhr, Rohre aus Glas, Aluminium, Stahl, Kupfer und Messing, Glaskolben mit passendem Schlauchanschluß, BUNSEN-Brenner und Dreifuß

Bemerkung: Die Aufnahmevorrichtung für die Rohre soll möglichst so gestaltet sein, daß keine Wärmeübertragung auf die Schiene erfolgt.

19. Wärmekapazität eines Kalorimeters

G Grundlagen

Bei der Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester oder flüssiger Stoffe tritt immer die Frage auf, in welcher Weise das verwendete Gefäß die Vorgänge und damit die Meßergebnisse beeinflusst.

In keinem Falle darf bei einer halbwegs exakten Messung die Wärmeenergie übersehen werden, die das Kalorimeter z. B. während eines Mischungsvorganges aufnimmt oder abgibt. Zufuhr von Wärmeenergie führt nicht nur zu einer Erhöhung der Temperatur des Wassers, sondern erwärmt auch das Gefäß mit. Die erhaltenen Werte können einen Fehler von mehr als 10% aufweisen, wenn die vom Kalori-

meter aufgenommene Wärme nicht berücksichtigt würde.

Die vom Gefäß bei Temperaturerhöhung aufgenommene Wärme Q errechnet sich nach der Gleichung

$$Q = cm \Delta t.$$

Der Quotient aus dieser Wärme und der Temperaturdifferenz Δt wird als *Wärmekapazität* C bezeichnet.

$$C = \frac{Q}{\Delta t}.$$

Der Quotient aus Wärmekapazität und Masse heißt *spezifische Wärmekapazität* c :

$$c = \frac{C}{m}.$$

Auf rechnerischem Wege kann die Wärmekapazität nur ermittelt werden, wenn es sich um ein Metallgefäß handelt, das sich gleichmäßig erwärmt. Von dem Gefäßmaterial muß außerdem die spezifische Wärmekapazität bekannt sein. Es wird ein Versuchsgerät verwendet, das während des Versuches nur wenig Wärme an die Umgebung abgibt oder aus ihr aufnimmt. Als Kalorimeter dient deshalb oft ein *Thermosgefäß* (auch als DEWAR-Gefäß bezeichnet, Bild 44), von dem die Wärmekapazität nur experimentell bestimmt werden kann.

Die Bestimmung der Wärmekapazität kann nicht Selbstzweck sein, sondern wird



Bild 44

immer einem anderen Versuch zur Wärmelehre vorausgehen. Da ein Thermosgefäß infolge der geringen Wärmeleitfähigkeit nur teilweise die Temperatur der enthaltenen Flüssigkeit annimmt, ist seine Wärmekapazität vom *Füllstand* abhängig. Mit größer werdender Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Gefäßwand steigt auch die Wärmekapazität. Soll diese bestimmt werden, so muß im Gefäß so viel Flüssigkeit enthalten sein, wie bei dem anschließenden Versuch etwa zur Bestimmung einer spezifischen Wärmekapazität.

V Versuchsdurchführung

Es soll die spezifische Wärmekapazität bestimmt werden. Der Versuch sei mit 200 g Wasser durchzuführen. Dann muß vorher die Wärmekapazität des Kalorimeters bei einem Füllstand untersucht werden, wie er durch 200 g Wasser erreicht wird. Außerdem ist darauf zu achten, daß die zuerst im Gefäß befindliche Flüssigkeit möglichst Zimmertemperatur hat, denn nur so ist gewährleistet, daß das Kalorimeter an allen Stellen die gleiche Temperatur aufweist. Andernfalls nehmen die bereits vom Wasser mit einer Temperatur von vielleicht 12°C berührten Teile mehr Wärme auf als die auf Zimmertemperatur befindlichen anfangs nicht mit Flüssigkeit bedeckten Teile.

In das Thermosgefäß werden in dem angenommenen Fall etwa 100 g Wasser (m_1) von Zimmertemperatur (t_1) gegeben. Danach werden weitere 100 g Wasser (m_2) mit einer

Temperatur von etwa 50°C (t_2) zugegossen. Rührer und Thermometer bleiben während des Versuchs im Gefäß. Die Vermischung ist vollständig, wenn die Flüssigkeit am Boden und an der Oberfläche die gleiche Temperatur aufweist. Nun kann die Mischungstemperatur (t_m) festgestellt werden.

Nach dem Energieerhaltungssatz muß folgende Beziehung gelten:

$$m_1 c_1 (t_m - t_1) + C(t_m - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t_m).$$

Demnach ist

$$C = \frac{m_2 c_2 (t_2 - t_m) - m_1 c_1 (t_m - t_1)}{t_m - t_1}$$

$$C = m_2 c_2 \frac{t_2 - t_m}{t_m - t_1} - m_1 c_1.$$

Die spezifische Wärmekapazität c_1 ist gleich c_2 , nämlich $c = 4,18 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$:

$$C = c \left(m_2 \frac{t_2 - t_m}{t_m - t_1} - m_1 \right). \quad (1)$$

Die ermittelte Wärmekapazität gilt nur für den Füllstand, der bei dem Versuch vorlag. Es ist gleichzeitig die Wärmekapazität von Thermometer und Rührwerk erfaßt. Um das Kalorimeter jederzeit bei verschiedenen Füllständen verwenden zu können, ohne jedesmal erst die entsprechende Wärmekapazität zu ermitteln, wird eine *Kennlinie* aufgenommen, die C in Abhängigkeit vom Füllstand angibt. Um diese Kennlinie zu erhalten, sind Messungen bei wenigstens 4 verschiedenen Füllständen erforderlich.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Wärmekapazität eines als Kalorimeter vorgesehenen Thermosgefäßes bei 4 verschiedenen Füllständen!
2. Stellen Sie die Wärmekapazität in Abhängigkeit vom Füllstand grafisch dar!
3. Bestimmen Sie die Wärmekapazität eines Metallkalorimeters!
4. Fehlerabschätzung
5. Weshalb kann die Wärmekapazität eines metallischen Gefäßes aus seiner Masse und spezifischen Wärmekapazität errechnet werden, und warum ist dies bei DEWAR-Gefäßen nicht möglich?

Versuchsgeräte: Kalorimeter, Thermometer mit Zehntelgrad-Teilung, Waage, Becherglas

20. Spezifische Wärmekapazität fester Körper

G Grundlagen

Die Wärmemenge Q , die zur Erhöhung der Temperatur eines Körpers aufgebracht werden muß, ist der Temperaturerhöhung $\Delta\theta$ und der Masse m des Körpers pro-

portional:

$$Q = cm \Delta\theta^1). \quad (1)$$

Der Proportionalitätsfaktor c heißt *spezifische Wärmekapazität* und ist materialabhängig.

¹⁾ Wenn t für die Zeit verwendet wird, bedeutet θ die CELSIUS-Temperatur.

Die spezifische Wärmekapazität fester Körper kann nach der Mischmethode bestimmt werden. Dabei erfolgt eine Übertragung von Wärmeenergie von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedriger Temperatur. Der Probekörper, dessen spezifische Wärmekapazität c_1 gesucht ist, hat die Masse m_1 und wird auf die Temperatur ϑ_1 erhitzt. Er wird in ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter mit der Wärmekapazität C und der Temperatur ϑ_2 gebracht. Dabei kühlt er sich auf die *Mischungstemperatur* ϑ_m ab, während sich Wasser und Kalorimeter auf diese Temperatur ϑ_m erwärmen. Nach dem Energiesatz ist die vom Körper abgegebene Energie $Q = c_1 m_1 (\vartheta_1 - \vartheta_m)$ gleich der vom wassergefüllten Kalorimeter aufgenommenen Energie $Q = C(\vartheta_m - \vartheta_2)$:

$$c_1 m_1 (\vartheta_1 - \vartheta_m) = C(\vartheta_m - \vartheta_2).$$

Daraus:

$$c_1 = \frac{C}{m_1} \frac{\vartheta_m - \vartheta_2}{\vartheta_1 - \vartheta_m}. \quad (2)$$

Wird ein Messing- oder Aluminiumkalorimeter benutzt, so nimmt das gesamte innere Gefäß infolge seiner guten Wärmeleitfähigkeit die Temperatur des Wassers an. Die Wärmekapazität C des *gefüllten* Kalorimeters setzt sich zusammen aus der Wärmekapazität C_1 des Gefäßes:

$$C_1 = c_K m_K$$

und der Wärmekapazität C_2 der Wasserfüllung,

$$C_2 = c_W m_W.$$

Hinzu kommt noch ein kleiner Betrag $C_3 = 4 \text{ J K}^{-1}$ für Thermometer und Rührer, so daß sich die Wärmekapazität C

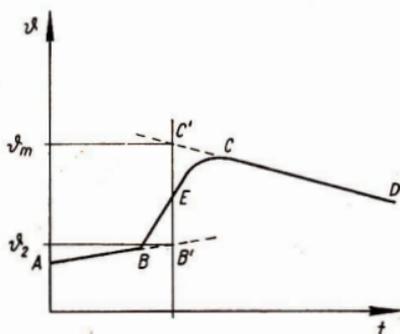


Bild 45

berechnet zu

$$C = c_K m_K + c_W m_W + C_3. \quad (3)$$

Weicht die Temperatur des Wassers im Kalorimeter wesentlich von der Temperatur der Umgebung ab, so erfolgt trotz Wärmeisolation ein Wärmeaustausch mit der Umgebung. Um diesen Einfluß auszuschalten, wendet man für Metallkalorimeter ein grafisches Verfahren an. Bild 45 zeigt die Temperatur ϑ in Abhängigkeit von der Zeit t :

Von A bis B steigt die Temperatur im Kalorimeter linear an. An der Stelle B wird der Probekörper ins Kalorimeter gebracht. Dadurch steigt die Temperatur steil bis C an und fällt dann nach D wieder ab. Man kann auf unendlich schnellen Temperaturengleich extrapolieren, indem man das Kurvenstück AB vorwärts, das Kurvenstück CD rückwärts verlängert. Eine Senkrechte, die die Verlängerungen in B' und C' schneidet, wird so gelegt, daß die Flächenstücke BB'E und CC'E einander etwa gleich sind. Dem Diagramm können die Temperaturen ϑ_2 und ϑ_m entnommen werden.

V Versuchsdurchführung

Zur Berechnung der Wärmekapazität nach Gl. (3) ist zunächst das innere Kalorimetergefäß zu wägen (m_K) und dann etwa zur Hälfte mit Wasser zu füllen. Die Masse m_W des eingefüllten Wassers ist festzustellen. Die spezifische Wärmekapazität c_K des

Kalorimeters ist am Arbeitsplatz angegeben. Der Körper, dessen spezifische Wärmekapazität bestimmt werden soll, wird auf die Temperatur ϑ_1 gebracht. Das kann in einem besonderen Dampfheizkörper (Bild 46) geschehen, in den Wasserdampf eingeleitet wird. Man erzeugt den Wasserdampf in einem Siedegeäß und führt ihn dem Dampfheizkörper zu. Der Probekörper wird in den Heizkörper gebracht. Seine Bohrung nimmt ein Thermometer auf. Ändert sich die Temperatur des Probekörpers nicht

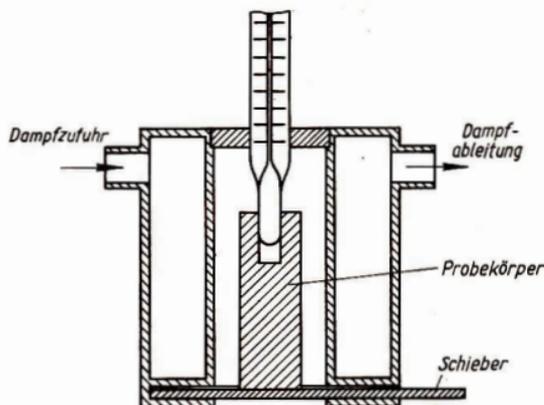


Bild 46

mehr, so wird während 5 min die Temperatur im Kalorimeter in Abständen von 30 s abgelesen und in das Diagramm (Bild 45) eingetragen. Dann wird der Schieber geöffnet. Der Probekörper fällt in das Kalorimeter. Das Wasser ist kräftig umzurühren. Die Temperatur wird jetzt in Abständen von 10 s abgelesen, bis der Temperaturengleich zwischen Körper und Wasser beendet ist. Dann ist noch etwa 10 min lang der Temperaturverlauf aufzunehmen (Messungen in Abständen von 30 s). Aus dem Diagramm werden ϑ_2 und ϑ_m entnommen.

Steht ein Dampfheizkörper nicht zur Verfügung, erfolgt das Erhitzen des Probekörpers im Wasserbad. Der Körper verbleibt etwa 15 min auf einem Rost in siedendem Wasser. Dann hat der Probekörper bestimmt die Temperatur des siedenden Wassers angenommen. Mit einer Zange wird der Körper schnell (damit Wärmeverluste möglichst vermieden werden) in das Kalorimeter gebracht. Die Aufnahme der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit erfolgt wie oben beschrieben (die Aufnahme 5 min vor dem Einbringen des Probekörpers beginnen).

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität zweier Probekörper!
2. Diskutieren Sie ausführlich die Fehlerquellen!
3. Fehlerabschätzung

Bersuchsgeräte: Kalorimeter, 2 Probekörper aus Metall, Dampfheizkörper mit Siedegeäß (oder Feherglas mit Rost), Dreifuß, BUNSEN-Brenner, Thermometer (1-K-Teilung), Thermometer (0,1-K-Teilung), Asbestdrahtnetz, Tiegelzange

21. Spezifische Wärmekapazität von Flüssigkeiten

G Grundlagen

Führt man einem Körper Wärmeenergie zu, so erhöht sich im allgemeinen seine Temperatur. Zwischen der zugeführten Wärmeenergie Q , der Masse m des Körpers und der Temperaturerhöhung Δt besteht die Beziehung

$$Q = cm \Delta t. \quad (1)$$

Der in Gl. (1) auftretende Proportionalitätsfaktor c ist vom Material des Körpers abhängig und wird als spezifische Wärmekapazität bezeichnet.

Um die spezifische Wärmekapazität einer Flüssigkeit zu bestimmen, benutzt man einen „Wärmeträger“ (*Thermophor*). Der Thermophor besteht aus einem kugelförmigen Glasgefäß mit angesetztem Steigrohr (Bild 47). Die Kugel ist mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt, die sich bei Erwärmung ausdehnt und im Rohr emporsteigt. Am Rohr sind zwei Marken angebracht. Wird dem Thermophor Wärmeenergie zugeführt, so steigt die Flüssigkeit

in dem Steigrohr bis zu der oberen Marke. Bei dem ersten Versuch wird der Thermophor in einem Kalorimeter mit Wasserfüllung so weit abgekühlt, bis die Flüssigkeit im Steigrohr die untere Marke er-

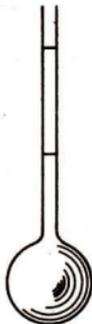


Bild 47

reicht hat. Bei einem zweiten Versuch wird der Thermophor im gleichen Kalorimeter, welches nun mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist, ebenfalls bis zur unteren Marke abgekühlt. Dann ist bei beiden Versuchen die gleiche Wärmeenergie an das Wasser bzw. an die zu untersuchende Flüssigkeit abgegeben worden.

V Versuchsdurchführung

Das innere Gefäß des Kalorimeters wird gewogen: m_1 . Das etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllte Kalorimeter hat die Masse m_2 . Damit ist die Masse des Wassers $m_W = m_2 - m_1$. Die Temperatur t_1 des Wassers im Kalorimeter wird gemessen. Den Thermophor erwärmt man im Wasserbad so lange, bis die gefärbte Flüssigkeit im Steigrohr etwas über der oberen Marke steht. Dann wird der Thermophor aus dem Wasserbad genommen, abgetrocknet und in dem Moment in das Kalorimeter getaucht, in dem die Flüssigkeitssäule an der oberen Marke steht. Unter langsamem Bewegen des Thermophors gibt dieser an das Wasser und das Kalorimeter die Wärmeenergie ab, die notwendig ist, damit die Flüssigkeitssäule die untere Marke am Steigrohr erreicht. Der Thermophor wird entfernt und die Temperatur t_2 des Wassers gemessen.

Das Wasser nimmt die Wärmeenergie

$$Q_W = c_W m_W (t_2 - t_1) \quad (2)$$

und das Kalorimeter die Wärmeenergie

$$Q_K' = C(t_2 - t_1) \quad (3)$$

auf. Ist Q die vom Thermophor abgegebene Wärmeenergie, dann gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$Q = Q_W + Q_K'. \quad (4)$$

Die Wärmekapazität C des Kalorimeters ist eine Gerätekonstante und wird zu Beginn des Versuches durch den Praktikumsleiter bekanntgegeben.

Das Wasser wird nun aus dem Kalorimeter entfernt, letzteres gut ausgetrocknet und der Versuch in der gleichen Reihenfolge mit der zu untersuchenden Flüssigkeit durchgeführt. Die Masse der Flüssigkeit sei m_{F1} , die Temperaturen t_3 vor und t_4 nach dem Eintauchen des Thermophors in die Flüssigkeit.

Die Flüssigkeit nimmt die Wärmeenergie

$$Q_{F1} = c_{F1} m_{F1} (t_4 - t_3) \quad (5)$$

und das Kalorimeter die Wärmeenergie

$$Q_K'' = C(t_4 - t_3) \quad (6)$$

auf. Für die abgegebene Wärmeenergie gilt dann

$$Q = Q_{F1} + Q_K''. \quad (7)$$

Da die Wärmemengen Q gleich sind, gilt

$$Q_W + Q_K' = Q_{F1} + Q_K''. \quad (8)$$

In Gl. (8) setzt man Gln. (2), (3), (5) und (6) ein und erhält

$$c_W m_W (t_2 - t_1) + C(t_2 - t_1) = c_{F1} m_{F1} (t_4 - t_3) + C(t_4 - t_3).$$

Daraus errechnet man für die gesuchte spezifische Wärmekapazität c_{F1} der Flüssigkeit

$$c_{F1} = \frac{c_W m_W (t_2 - t_1) + C(t_2 - t_1 - t_4 + t_3)}{m_{F1} (t_4 - t_3)}. \quad (9)$$

Nach dem Versuch sind das Kalorimeter, der Thermophor und das Thermometer gut zu reinigen.

A Aufgaben

- Bestimmen Sie die spezifischen Wärmekapazitäten der gegebenen Flüssigkeiten nach Gl. (9)!
- Führen Sie eine Fehlerabschätzung durch!
- Vergleichen Sie die durch Versuch ermittelten Werte mit Tabellenwerten und erläutern Sie die Abweichungen!

Versuchsgeräte: Kalorimeter, Thermophor, Thermometer, Becherglas, Dreibein, Drahtnetz, BUNSEN-Brenner, Reinigungslappen, Versuchsflüssigkeit

22. Dichte von Luft und Kohlendioxid

Ⓔ Grundlagen

Die Dichte ist definiert als Quotient aus Masse und Volumen eines Körpers:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1)$$

Bei Gasen ist die Dichte stark von Druck und Temperatur abhängig. Aus der *Zustandsgleichung*

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (2)$$

folgt

$$\frac{m}{V} = \rho = \frac{pM}{RT}. \quad (3)$$

Hierin ist

$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ die Gaskonstante,
 M die molare Masse,
 p der Druck,
 T die Temperatur ($T/\text{K} = t/^\circ\text{C} + 273,15$).

Um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu haben, bezieht man Gasdichten auf den *Normzustand*

$p_0 = 101,325 \text{ kPa}$ und
 $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ($t_0 = 0^\circ\text{C}$).

Damit ist

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}. \quad (3a)$$

Durch Division von Gl. (3a) und (3) erhält man

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{p_0 T}{p T_0}. \quad (4)$$

Ⓕ Versuchsdurchführung

1. Dichtebestimmung von Luft und Kohlendioxid

Es soll die Dichte von Luft und von Kohlendioxid bestimmt werden. Dazu werden zunächst Luftdruck und Zimmertemperatur gemessen. Während des Versuches müssen diese beiden Größen ständig überprüft werden.

Zur Volumenbestimmung wird der Meßkolben (Masse m_0 , Volumen V_0) mit Luft, möglichst auf 1 mg genau, gewogen (m_1):

$$m_1 = m_0 + V_0 \rho_{\text{Luft}}. \quad (5)$$

Dann wird der Meßkolben durch einen Schlauch mit dem Kippschen Gasentwickler verbunden und Kohlendioxid von unten in den Meßkolben eingeleitet. Die Luft kann durch den oberen Hahn entweichen. Die CO_2 -Zufuhr wird beendet, wenn ein brennendes Streichholz, das unmittelbar über den oberen Hahn gehalten wird, erlischt. Zunächst schließt man den unteren Hahn, dann den oberen. Der mit CO_2 gefüllte Meßkolben ist auf 1 mg genau zu wägen (m_2):

$$m_2 = m_0 + V_0 \rho_{\text{CO}_2}. \quad (6)$$

Durch den Kolben wird Luft angesaugt; dann wird der Kolben evakuiert (Bild 48) und, ebenfalls auf 1 mg genau, gewogen: m_3 .

Anschließend taucht man den Kolben in luftfreies, d. h. abgekochtes Wasser von Zimmertemperatur und öffnet unter Wasser den unteren Hahn: Der Kolben füllt sich zum großen Teil mit Wasser. Den Kolben taucht man so weit ein, daß das Wasser innen und außen gleich hoch steht, schließt den Hahn, nimmt den Kolben aus dem Wasser, trocknet ihn ab und wägt ihn auf 1 g genau (m_4). Das eingeströmte Wasser

hat das gleiche Volumen wie die abgesaugte Luft. Dieses Volumen ergibt sich nach Gl. (1) zu

$$V = \frac{m_W}{\varrho_W} = \frac{m_4 - m_3}{\varrho_W}.$$

Die Masse der Luft ist

$$m_L = m_1 - m_3.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (1) ein, so erhält man

$$\varrho_L = \frac{m_L}{V} = \frac{m_1 - m_3}{m_4 - m_3} \varrho_W. \quad (7)$$

Dabei ist ϱ_W temperaturabhängig und kann Tabellen entnommen werden.

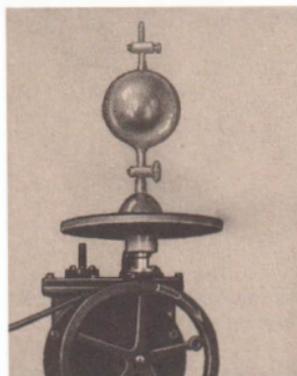


Bild 48

Zur Bestimmung der Dichte von CO_2 muß auch das Volumen des gesamten Kolbens bekannt sein. Deshalb wird der Kolben vollkommen mit Wasser gefüllt. Die anschließende Wägung ergibt m_5 (auf 1 g genau):

$$m_5 = m_0 + V_0 \varrho_W. \quad (8)$$

Nach Gln. (5) und (8) ist

$$m_1 = m_0 + V_0 \varrho_L$$

$$m_5 = m_0 + V_0 \varrho_W$$

$$m_5 - m_1 = V_0 (\varrho_W - \varrho_L). \quad (9)$$

Nach Gln. (5) und (6) gilt

$$m_1 = m_0 + V_0 \varrho_L$$

$$m_2 = m_0 + V_0 \varrho_{\text{CO}_2}$$

$$m_2 - m_1 = V_0 (\varrho_{\text{CO}_2} - \varrho_L). \quad (10)$$

Eliminiert man V_0 aus Gl. (9) und (10), so erhält man

$$\frac{m_2 - m_1}{m_5 - m_1} = \frac{\varrho_{\text{CO}_2} - \varrho_L}{\varrho_W - \varrho_L}.$$

Daraus ergibt sich

$$\varrho_{\text{CO}_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_5 - m_1} (\varrho_W - \varrho_L) + \varrho_L. \quad (11)$$

2. Dichtebestimmung von Luft

Soll nur die Dichte von Luft bestimmt werden, so ist es zweckmäßig, zur Volumenbestimmung einen zweiten Kolben zu verwenden, in den man das Wasser einströmen läßt. Der Luftkolben bleibt trocken, und das Experiment kann sofort mehrmals wiederholt werden.

Der Versuch läuft wie folgt ab: Es ist noch die Masse eines zweiten Kolbens (des Wasserkolbens) zu bestimmen: m_6 .

Nachdem der Luftkolben evakuiert und gewogen worden ist, taucht man den Wasserkolben bei geöffneten Hähnen bis in die Höhe des unteren Hahnes in das Wasser. Dann verbindet man mit einem Vakuumschlauch den Luftkolben mit dem Wasserkolben (Bild 49). Der untere Hahn des Luftkolbens wird *langsam* geöffnet; das Wasser

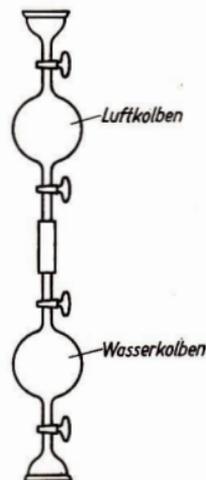


Bild 49

dringt in den Wasserkolben ein. Man verfährt nun sinngemäß wie unter 1., trennt die beiden Kolben voneinander und stellt die Masse des wassergefüllten Kolbens fest: m_7 . Anstelle von Gl. (7) erhält man

$$\varrho_L = \frac{m_1 - m_2}{m_7 - m_6} \varrho_W. \quad (12)$$

A Aufgaben

- Bestimmen Sie nach Gl. (7) bzw. (12) die Dichte der Luft!
- Nach Gl. (11) ist die Dichte von Kohlendioxid zu ermitteln.
- Rechnen Sie diese Dichten nach Gl. (4) auf Normbedingungen um!
- Berechnen Sie die molaren Massen von Luft und CO_2 nach Gl. (3a)!
- Fehlerabschätzung
- Weshalb muß nach dem Einleiten von CO_2 in den Kolben zunächst der untere Hahn geschlossen werden?
- Weshalb kann bei m_4 , m_5 , m_6 und m_7 ein Fehler von 1 g hingenommen werden (gegenüber 1 mg bei m_1 , m_2 und m_3)?

Versuchsgeräte: 2 Kolben mit 2 Hähnen (Bild 48), Kippscher Apparat, Barometer, Thermometer, Waage (1 mg), Waage (1 g), Luftpumpe, Wasserbehälter

23. Ausdehnungskoeffizient von Gasen

G Grundlagen

Die Festlegung einer Temperaturskala unter Anwendung der Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten führt zu unterschiedlichen Skalen auf Grund der spezifischen Eigenschaften der Flüssigkeiten.

Die Gase zeigen ein einfacheres Verhalten insbesondere dann, wenn die Untersuchungen in einem Temperaturbereich geführt werden, der vom Siedepunkt des betreffenden Gases hinreichend weit entfernt ist.

Soll der Temperaturbegriff von den spezifischen Eigenschaften der Thermometersubstanz unabhängig sein, so läßt sich mit der thermischen Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (1)$$

eine Temperaturskala definieren. Diese Temperaturskala wird als *thermodynamische Temperaturskala* bezeichnet. Aus Gl. (1) ist zu erkennen, daß die Untersuchung einer abgeschlossenen Gasmenge auf zwei Wegen durchgeführt werden kann. Wird das Volumen des Gases konstant gehalten, so sind Druck und thermodynamische Temperatur einander proportional. Hält

man den Druck konstant, so sind Volumen und thermodynamische Temperatur einander proportional.

Gl. (2) gibt den Zusammenhang der Zustandsvariablen p , V , T für zwei Zustände der abgeschlossenen Menge des idealen Gases an:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (2)$$

Zwischen der nach Gl. (1) definierten thermodynamischen Temperaturskala und der CELSIUS-Skala besteht der Zusammenhang

$$T = \frac{1}{\gamma} + t, \text{ wobei } \gamma \text{ der Raumausdehnungs- bzw. Spannungskoeffizient ist.}$$

Damit erhält Gl. (2) die Form

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \frac{(1 + \gamma t_2)}{(1 + \gamma t_1)} \quad (3)$$

Im vorliegenden Versuch soll das Volumen des zu untersuchenden Gases konstant gehalten werden, also $V_1 = V_2$. Das Gas wird vom Zustand p_1, t_1 in den Zustand p_2, t_2 gebracht. Aus Gl. (3) erhält man den Ausdehnungskoeffizienten

$$\gamma = \frac{p_2 - p_1}{p_1 t_2 - p_2 t_1} \quad (4)$$

Gl. (4) liegt dem durchzuführenden Versuch zugrunde.

V Versuchsdurchführung

Der mit dem zu untersuchenden Gas gefüllte Glaskolben G (Bild 50) hat das Volumen V und ist durch ein Glasrohr mit einem Quecksilbermanometer verbunden. In dem Glasrohr befindet sich ein Dreiwegehahn, der es ermöglicht, ein anderes Gas einzufüllen. Die Quecksilberoberflächen des Manometers werden so einreguliert, daß die des rechten Schenkels stets mit der Ringmarkierung RM übereinstimmt.

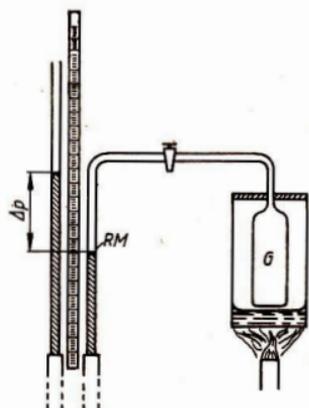


Bild 50

Der Glaskolben wird so lange mit Eiswasser begossen, bis die Druckanzeige am Manometer konstant bleibt. Der Druckunterschied Δp_0 wird abgelesen. Beträgt der Außendruck p_0 , so ist der absolute Druck des im Glaskolben eingeschlossenen Gases bei der Temperatur $t_1 = 0^\circ\text{C}$ des schmelzenden Eises $p_1 = p_0 + \Delta p_0$. Nun wird der Glaskolben in ein Erhitzungsgefäß mit Wasser gebracht. Dabei ist darauf zu achten, daß der Glaskolben nicht in das Wasser eintaucht, da sonst durch den hydrostatischen Auftrieb das Verbindungsglasrohr auf Biegung beansprucht wird und bricht. Mit einem BUNSEN-Brenner wird das Wasser im Erhitzungsgefäß zum Sieden gebracht. Der Glaskolben befindet sich im Wasserdampf der Temperatur t_2 . Die Siedetemperatur des Wassers wird aus der Tabelle entnommen. Am Manometer wird der Druck Δp abgelesen und mit dem Außendruck p_0 der absolute Druck des eingeschlossenen Gases $p_2 = p_0 + \Delta p$ bestimmt. Nach Gl. (4) kann γ jetzt errechnet werden.

Nach dem Versuch ist der Dreiwegehahn am Verbindungsglasrohr zu öffnen und Niveaugleichheit der Quecksilberkuppen herzustellen.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Ausdehnungskoeffizienten nach Gl. (4)!
2. Fehlerabschätzung
3. Begründen Sie, warum die Wärmeausdehnung des Glaskolbens nicht mit berücksichtigt wird!

4. Schätzen Sie den Fehler ab, der entsteht, wenn sich im Glaskolben bei 0°C ein Wassertropfen von 1 mg Masse befindet!
5. Warum muß nach dem Versuch der Dreivegehahn am Verbindungsglasrohr geöffnet werden?

Versuchsgeräte: Stativ mit Glaskolben und Quecksilberthermometer, Stativ mit Siedegerät und BUNSEN-Brenner, große Schale, Becherglas

24. Spezifischer Brennwert

G Grundlagen

Die Bedeutung der Brennstoffe als wichtige Energieträger verlangt größte Wirtschaftlichkeit bei ihrer Nutzung. Unmittelbarer Wertmesser für jeden Brennstoff ist sein *spezifischer Brennwert* H_0 . Man versteht darunter die auf die Masse des Brennstoffs bezogene Wärmemenge, die bei der vollständigen Verbrennung entsteht. Der spezifische Brennwert fester Brennstoffe wird mit dem *Bombenkalorimeter* (Bild 51) ermittelt.

Bei der Definition des spezifischen Brennwertes wird gefordert, daß vorher im Brennstoff vorhandenes sowie bei der Verbrennung entstehendes Wasser nach der Verbrennung im flüssigen Zustand vorliegt. Im allgemeinen aber entweichen bei der Verbrennung der Wasserdampf

und damit die zu seiner Bildung notwendige Verdampfungswärme ungenutzt. Daher hat beim praktischen Einsatz der *spezifische Heizwert* H_u eine noch größere Bedeutung als der spezifische Brennwert. Bei seiner Festlegung wird angenommen, daß alles Wasser nach der Verbrennung in Dampfform vorliegt. Bei Kenntnis des Wassergehaltes und der chemischen Zusammensetzung des Brennstoffes kann man den spezifischen Heizwert aus dem spezifischen Brennwert rechnerisch ermitteln.

Zur Bestimmung des spezifischen Brennwertes verbrennt man einen bekannten Brennstoff der Masse m in Sauerstoff unter einem Druck von etwa 3 MPa in einer kalorimetrischen Bombe (Bild 52), die sich in einem Kalorimetergefäß (Bild 53) befindet. Aus der dabei auftretenden Temperaturänderung $\Delta\theta$ und der Wärmekapazität C des Kalorimeters kann der spezifische Brennwert des Brennstoffes

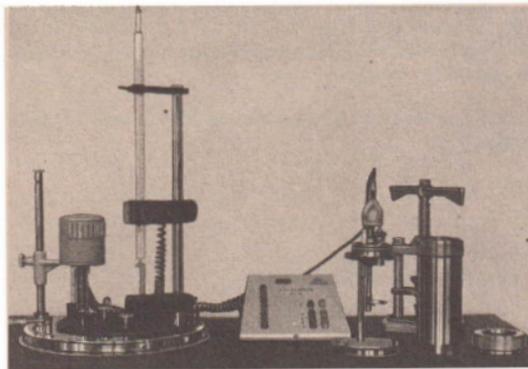


Bild 51

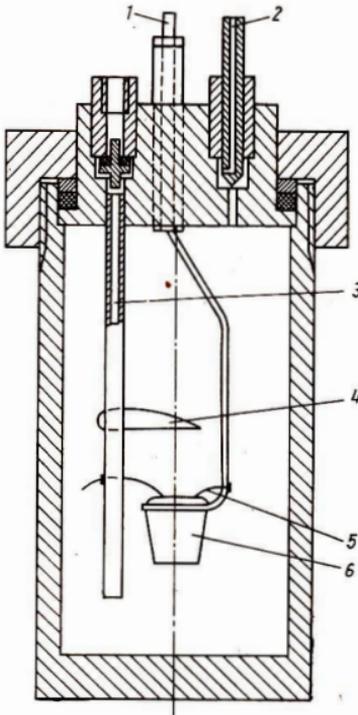


Bild 52

1 Kontaktstift für Zündstecker,
 2 Ableitung für Gas, 3 Zuleitung für
 Sauerstoff, 4 Metallschirm, 5 Zünddraht,
 6 Verbrennungstiegel

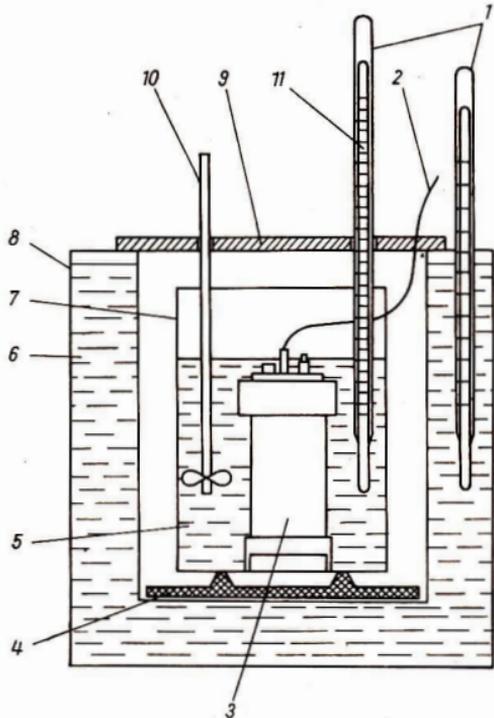


Bild 53

1 Thermometer, 2 Zündkabel, 3 kalorimetrische
 Bombe, 4 Untersatz mit Füßen aus Isolierstoff,
 5 Kalorimeterflüssigkeit, 6 Wasser konstanter
 Temperatur, 7 Kalorimetergefäß, 8 Kalori-
 metergehäuse, 9 Isolierdeckel, 10 Rührwerk,
 11 Skale 10^{-2} K

errechnet werden. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt

abgegebene Wärmemenge = aufgenommene Wärmemenge

$$mH_0 = C \Delta\theta$$

$$H_0 = \frac{C \Delta\theta}{m}$$

Die Wärmekapazität C des Kalorimeters setzt sich aus der Wärmekapazität $c_w m_w$ der Wasserfüllung und der meist vorgege-

benen Wärmekapazität C_G des Gerätes (Gefäß, Rührwerk, Bombe, Thermometer) zusammen:

$$C = c_w m_w + C_G$$

Damit folgt aus (1)

$$H_0 = \frac{(c_w m_w + C_G) \Delta\theta}{m} \quad (2)$$

Bei Präzisionsmessungen wird C durch Versuche mit Proben von bekanntem spezifischem Brennwert bestimmt. Die Ge-

naugigkeit der Messungen erhöht man mit Hilfe der Korrektur Q_k , in der alle zusätzlich frei werdenden Wärmemengen erfaßt werden. Dabei handelt es sich vor allem um die Bildungswärme der entstehenden Säuren (Salpetersäure, Schwefelsäure). Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß der Brennstoff von außen durch einen Stromstoß in einem dünnen Metalldraht

gezündet wird. Die Verbrennungswärme dieses Drahtes und möglicher anderer Hilfsmittel (Papierhüllen, Kollodiumbeutel) sind weitere Bestandteile von Q_k . Damit lautet die vollständige Gleichung für den spezifischen Brennwert

$$H_o = \frac{(c_w m_w + C_G) \Delta\theta - Q_k}{m} \quad (3)$$

V Versuchsdurchführung

Zuerst wird geprüft, ob die vorgeschriebene Menge Kalorimeterwasser (m_w) vorhanden ist und die Temperatur des Wassers im Außenmantel nicht weiter als 2 K von der Raumtemperatur abweicht. Danach bereitet man die Probe des Brennstoffes vor, der lose in einem Quarzschälchen oder brikettiert verbrannt werden kann. Zum Herstellen einer solchen Pastille gibt es eine Preßeinrichtung, die auch das Einfügen des Zünddrahtes ermöglicht.

Die Masse der Probe muß mit der Analysenwaage auf 0,2 mg genau bestimmt werden. Beim Einsetzen der Pastille oder des Verbrennungsschälchens in die Bombe wird der Zünddraht um die beiden Elektroden gewickelt und möglichst sofort auf elektrischen Kontakt geprüft (Kontrollampe am Steuerpult oder Durchgangsprüfer).

Will man auch die Mengen der entstehenden Säuren durch Titration ermitteln, so müssen noch etwa 10 ml destilliertes Wasser als Lösungsmittel eingebracht werden.

Nach festem Verschrauben von Deckel und Unterteil der Bombe wird unter sorgfältiger Beachtung der Sicherheitsvorschriften die Füllung mit Sauerstoff bis zu einem Druck von etwa 2,5 MPa aus der bereitstehenden Gasflasche vorgenommen. Das Zündkabel wird angeschlossen und die Bombe vorsichtig in das Kalorimetergefäß gestellt.

Bei den folgenden Temperaturmessungen ist wegen der geringen Temperaturerhöhung von 1...3 K eine besonders hohe Genauigkeit erforderlich. Es wird ein Präzisionsthermometer eingesetzt, an dem man mit Hilfe einer Lupe Temperaturen möglichst auf 0,002 K genau ablesen kann. Mit dem Schließen des Isolierdeckels und dem Einschalten des Rührwerkes sind die Vorarbeiten beendet.

Für den Ablauf der Temperaturablesungen und die Zündung sind in den Gerätebeschreibungen konkrete Programme vorgesehen. Allgemein ist zu fordern, daß in Minutenabständen abgelesen und die Zündung erst dann vorgenommen wird, wenn die Temperatur konstant ist oder sich nur geringfügig und gleichmäßig ändert. Dieser Zustand muß auch am Ende des Versuches wieder erreicht sein, ehe die Messungen abgebrochen werden können. Eine grafische Darstellung des zeitlichen Temperaturverlaufes und eine Auswertung nach Bild 45 (Versuch 20) sind zu empfehlen.

Beim Abschluß der experimentellen Arbeiten ist zu beachten, daß das Öffnen, Entleeren und Säubern der Bombe erst erfolgen kann, nachdem die Auslaßöffnung für die Verbrennungsgase und den restlichen Sauerstoff geöffnet worden ist.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den spezifischen Brennwert eines vorgegebenen Brennstoffes!
2. Geben Sie den relativen Fehler der ermittelten Temperaturdifferenz $\Delta\theta$ an, wenn die Temperaturmessungen auf 0,1 K, 0,01 K, 0,002 K genau erfolgen!

3. Weshalb ist der spezifische Heizwert immer kleiner als der spezifische Brennwert?
 4. Wieviel Kilogramm des geprüften Brennstoffs sind zur Erzeugung einer Elektroenergie von 1 kWh in einem Wärmekraftwerk notwendig? Es wird angenommen, daß der spezifische Heizwert nur 60% des spezifischen Brennwertes beträgt und der Wirkungsgrad des Kraftwerkes 22% ausmacht.

Versuchgeräte: Bombenkalorimeter mit Zubehör, Brennstoffe, Analysenwaage, Durchgangsprüfer, Stoppuhr

25. Spezifische Verdampfungswärme

G Grundlagen

Führt man einer Flüssigkeit Wärme zu, so erhöht sich ihre Temperatur. Zwischen der zugeführten Wärme Q , der Masse m der Flüssigkeit und der Temperaturänderung Δt besteht die Beziehung

$$Q = cm \Delta t. \quad (1)$$

Wird der *Siedepunkt* erreicht, so führt Wärmezufuhr zu keiner weiteren Temperaturerhöhung. Die zugeführte Wärme ist

erforderlich, um die Flüssigkeit zu verdampfen. Erst wenn die Flüssigkeit in Dampf verwandelt ist, steigt die Temperatur weiter an.

Die *spezifische Verdampfungswärme* r ist der Quotient aus der zur Verdampfung der Flüssigkeit notwendigen Wärme Q und der Masse m der Flüssigkeit:

$$r = \frac{Q}{m}. \quad (2)$$

Beim Kondensieren des Dampfes wird die gleiche Wärme Q wieder frei: Die spezifische Kondensationswärme ist gleich der spezifischen Verdampfungswärme.

V Versuchsdurchführung

Es soll die spezifische Verdampfungswärme von Wasser bestimmt werden. Wasserdampf wird in ein halb mit Wasser gefülltes Kalorimeter eingeleitet. Die Mischungstemperatur folgt aus dem Energieerhaltungssatz, nach dem die vom kälteren Körper aufgenommene Wärme gleich der vom wärmeren Körper abgegebenen Wärme ist. Bezeichnet man die Masse des eingeleiteten Wasserdampfes mit m_D , so gibt der Dampf beim Kondensieren nach Gl. (2) die Wärme

$$Q = rm_D \quad (3)$$

ab. Das Kondenswasser kühlt sich von der Siedetemperatur t_s auf die Mischungstemperatur t_m ab. Dabei wird nach Gl. (1) die Wärme

$$Q_1 = c_W m_D (t_s - t_m) \quad (4)$$

abgegeben.

Die Temperatur des Wassers (Masse m_W) im Kalorimeter erhöht sich von t auf t_m . Auch das Kalorimeter mit der Wärmekapazität C nimmt Wärme auf. Die gesamte Wärmeaufnahme ist daher

$$Q_2 = (cm_W + C) (t_m - t). \quad (5)$$

Nach dem Energiesatz gilt

$$Q_2 = Q + Q_1.$$

Mit Gln. (3), (4) und (5) folgt

$$(cm_W + C)(t_m - t) = rm_D + cm_D(t_s - t_m).$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{(cm_W + C)(t_m - t)}{m_D} - c(t_s - t_m). \quad (6)$$

Man bestimmt zunächst die Masse m_0 des leeren Kalorimeters und füllt es dann etwa zur Hälfte mit Wasser. Die anschließende Wägung ergibt m_1 . Daraus erhält man die Masse des Wassers:

$$m_W = m_1 - m_0. \quad (7)$$

Im Siedegefäß (ERLENMEYER-Kolben, Bild 54) bringt man Wasser zum Sieden. Wenn der Dampfleitung gleichmäßig Dampf entströmt, wird zunächst die Temperatur t des Wassers im Kalorimeter abgelesen, dann der Dampf eingeleitet und ständig umgerührt. Ist die Temperatur des Wassers im Kalorimeter auf etwa 40°C angestiegen, wird die Dampfzufuhr unterbrochen und die Temperatur t_m abgelesen, nachdem man das Wasser gut durchgerührt hat. Die anschließende Wägung ergibt m_2 . Der eingeleitete Dampf hat damit die Masse

$$m_D = m_2 - m_1. \quad (8)$$

Mit Gl. (7) und (8) erhält man aus Gl. (6)

$$r = \frac{[c(m_1 - m_0) + C](t_m - t)}{m_2 - m_1} - c(t_s - t_m). \quad (9)$$

Zur genauen Bestimmung der Temperaturen t und t_m wendet man zweckmäßig das in Versuch 20 beschriebene grafische Verfahren an. Man hat dazu die Temperatur im Kalorimeter in Abhängigkeit von der Zeit aufzunehmen. Die Temperatur wird in Abständen von 30 s gemessen. Begonnen wird mit den Messungen etwa 10 min vor dem Einleiten des Dampfes und beendet etwa 10 min nach der Unterbrechung der Dampfzufuhr.

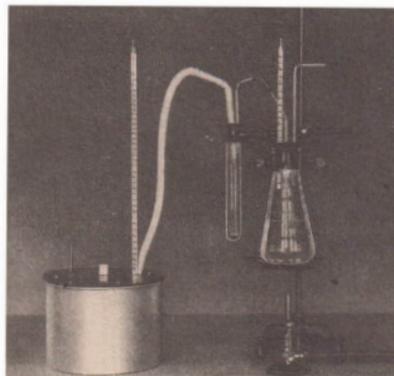


Bild 54

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifische Verdampfungswärme des Wassers!
2. Fehlerabschätzung
3. Woran kann es liegen, wenn der von Ihnen bestimmte Wert für r zu niedrig ausgefallen ist?

Versuchsgeräte: Kalorimeter, ERLENMEYER-Kolben, Reagenzglas, 2 durchbohrte Gummistopfen, Glasrohr, Asbestschnur, Stativmaterial, BUNSEN-Brenner, Dreifuß, Asbestdrahtnetz, Thermometer (0,1 K), Waage

26. Spezifische Schmelzwärme

G Grundlagen

Führt man einem festen Körper Wärmeenergie zu, so erhöht sich seine Temperatur. Wenn der *Schmelzpunkt* erreicht ist, erzielt man durch Wärmezufuhr keine weitere Temperaturerhöhung; die zugeführte Energie wird benutzt, um das Kristallgitter des festen Körpers zu zerstören, d. h., den Körper vom festen in den

flüssigen Aggregatzustand überzuführen. Wenn alle feste Substanz in Flüssigkeit verwandelt worden ist, steigt die Temperatur weiter an.

Die *spezifische Schmelzwärme* q ist der Quotient aus der zum Schmelzen der festen Substanz notwendigen Wärme Q und der Masse m der Substanz:

$$q = \frac{Q}{m}. \quad (1)$$

Beim Erstarren der Flüssigkeit wird die gleiche Wärme Q wieder frei.

V Versuchsdurchführung

Es soll die spezifische Schmelzwärme von Eis ermittelt werden. Wir benutzen Eis mit einer Temperatur von 0°C . Dieses Eis sieht durchsichtig aus. Zunächst ist die Masse m_0 des Kalorimeters zu bestimmen. Das Kalorimeter wird dann mit warmem Wasser (etwa 40°C) gefüllt und gewogen: $m_1 = m_0 + m_w$. Daraus folgt die Masse des Wassers:

$$m_w = m_1 - m_0. \quad (2)$$

Nachdem die Temperatur t_w des Wassers gemessen worden ist, wird das sorgfältig abgetrocknete Eis (Masse m_E) in das Kalorimeter gegeben. Mit dem Rührer wird umgerührt, bis die Temperatur nahezu konstant bleibt. Die Mischungstemperatur t_m ist abzulesen. Zum Schluß ist das gefüllte Kalorimeter nochmals zu wägen: $m_2 = m_1 + m_E$. Daraus folgt die Masse des Eises:

$$m_E = m_2 - m_1. \quad (3)$$

Das Wasser und das Kalorimeter (Wärmekapazität C) mit der Temperatur t_w kühlen sich auf die Mischungstemperatur t_m ab; Q_1 wird frei:

$$Q_1 = (cm_w + C)(t_w - t_m). \quad (4)$$

Zum Schmelzen des Eises ist nach (1) die Wärme

$$Q = qm_E \quad (5)$$

erforderlich. Das Schmelzwasser wird noch von 0°C auf die Mischungstemperatur t_m erwärmt. Dabei nimmt es die Wärmemenge

$$Q_2 = cm_E t_m \quad (6)$$

auf. Insgesamt gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$Q_1 = Q + Q_2.$$

Mit Gl. (4), (5) und (6) folgt

$$(cm_W + C)(t_W - t_m) = qm_E + cm_E t_m.$$

Daraus ergibt sich

$$q = \frac{(cm_W + C)(t_W - t_m)}{m_E} - ct_m.$$

Berücksichtigt man schließlich noch Gl. (2) und (3), so ergibt sich

$$q = \frac{[c(m_1 - m_0) + C](t_W - t_m)}{m_2 - m_1} - ct_m. \quad (7)$$

Zur genauen Bestimmung der Temperaturen t_W und t_m wird das in Versuch 20 beschriebene grafische Verfahren angewendet. Dazu ist es erforderlich, die Temperatur im Kalorimeter in Abhängigkeit von der Zeit aufzunehmen (etwa 10 min vor dem Einbringen des Eises bis 10 min nach beendetem Schmelzen in Abständen von 30 s).

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifische Schmelzwärme des Eises!
2. Fehlerabschätzung
3. Diskussion der Fehlerquellen

Versuchsgeräte: Waage, Kalorimeter, Becherglas, Dreifuß, Asbestdrahtnetz, BUNSEN-Brenner, Thermometer (0,1 K)

27. Kenngrößen einer Wärmepumpe

G Grundlagen

Wärmepumpen und Kältemaschinen funktionieren als reale linksläufige Kreisprozesse, d. h., mit Hilfe mechanischer Energie W wird einem Medium A bei tiefer Temperatur T_2 eine Wärmeenergie Q_2 entzogen und einem anderen Medium B bei einer höheren Temperatur T_1 in Form der Wärmeenergie Q_1 zugeführt. Ein Teil der vom Verdichter aufgenommenen mechanischen Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt. Sie trägt dazu bei, daß stets $|Q_1| > |Q_2|$ wird.

Die Wirtschaftlichkeit einer Wärmepumpenanlage gründet sich auf die Tatsache, daß die Leistungszahl ε_W als das Verhältnis von abgegebener Wärmeenergie Q_1 zu der erforderlichen Antriebsenergie W

$$\varepsilon_W = \left| \frac{Q_1}{W} \right|$$

je nach Größe und Bauart der Anlage Werte zwischen 2 und 5 annehmen kann. Im Gegensatz zur elektrischen Widerstandsheizung, wo Elektroenergie als reine Exergie „lediglich“ zu $\varepsilon = 1$ führt, wird der Vorteil der Wärmepumpenanlage deutlich sichtbar. Alle anderen Heizsysteme erreichen nur $\varepsilon < 1$.

Im Hinblick auf das Erhaltungsgesetz der Energie ist die Leistungszahl $\varepsilon_W > 1$ nur deshalb real, weil die oben aufgeführte Definition kein abgeschlossenes System notwendig macht. Man geht davon aus, daß von einem energetisch niedrigen, nicht anderweitig nutzbaren Niveau die Wärmeenergie Q_2 entzogen werden kann. Solche Wärmequellen können die Luft, das Wasser eines Sees bzw. Flusses, Grundwasser, Erdreich sowie Abluft und Abwässer technologischer Prozesse sein.

Betrachtet man die Arbeitsweise einer Wärmepumpe auf der Grundlage des Idealprozesses nach CARNOT, so sind alle Zustände des umlaufenden Energieträgers ausschließlich gasförmig. Um jedoch durch ein Minimum umgewälzter Energieträgermasse ein Maximum an transportierter Energie zu erreichen, benutzt man in der Praxis spezielle Kühlmittel, z. B. R 12 (Difluordichlormethan, CF_2Cl_2) oder R 22 (Difluormonochlormethan, CHF_2Cl). Diese bieten den Vorteil, daß bei entsprechend abgestimmten Innendrücken in der Wärmepumpe die Umwandlungspunkte zwischen flüssiger und gasförmiger Phase erreicht werden und damit die Umwandlungsenergie die tragende Rolle im Kreisprozeß übernimmt.

Damit lassen sich der prinzipielle Aufbau und die Wirkungsweise einer Wärmepumpenanlage auf der Grundlage des Bildes 55 erklären:

Mit Hilfe mechanischer Energie W saugt der Verdichter V_1 das Kältemittel (physikalisch präziser ist der Begriff Energieträger) in der gasförmigen Phase an und verdichtet es polytrop. Nach Verlassen des Verdichters kühlt es sich im Kondensator K (Verflüssiger) bei konstantem Druck auf die druckabhängige Verdampfungstemperatur ab, um anschließend zu kondensieren. Aus diesen beiden Teilprozessen geht die vom Kühlmittel an das Medium B abgegebene Wärmeenergie Q_1 hervor. Über das Filter F gelangt das flüssige Kältemittel zur Drosseldüse D , wo es bei konstanter Enthalpie entspannt wird. Dabei sinken Druck und Tempera-

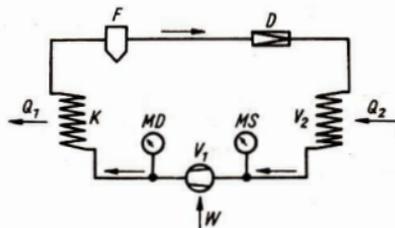


Bild 55

tur. Im Verdampfer V_2 geht das Kältemittel unter Wärmeaufnahme Q_2 bei konstantem Druck vom flüssigen in den gasförmigen Zustand über. Dadurch wird der anfängliche Zustand wieder erreicht, wodurch sich der Kreis schließen läßt.

Die beiden zusätzlich angeschlossenen Manometer MS bzw. MD gestatten die Ermittlung des Arbeitsdruckes auf der Saug- bzw. Druckseite des Verdichters. Bei entsprechender Skalenteilung der Manometer oder der Verwendung einer Dampfdruckkurve können die Kondensations- und Verdampfungstemperatur des Kühlmittels in der Anlage bestimmt werden.

Da wichtige Kenngrößen einer Wärmepumpenanlage aus dem äußeren energetischen Prozeß hervorgehen, kann hier auf die Beschreibung des inneren energetischen Prozesses verzichtet werden.

Zwischen der CARNOT-Leistungszahl ε_C mit

$$\varepsilon_C = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

und der realen Leistungszahl ε_W mit

$$\varepsilon_W = \left| \frac{Q_1}{W} \right|$$

besteht die Beziehung

$$\eta_C = \frac{\varepsilon_W}{\varepsilon_C},$$

die CARNOT-Gütegrad η_C genannt wird. Da die CARNOT-Leistungszahl die obere, theoretisch erreichbare Grenze darstellt, wird der CARNOT-Gütegrad stets $\eta_C < 1$ sein.

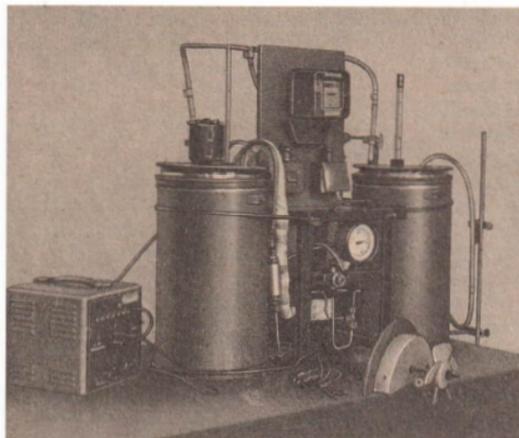


Bild 56

In die beiden Behälter, in denen sich die Rohrschlangen des Kondensators bzw. Verdampfers der Wärmepumpe befinden, werden definierte Wassermengen eingefüllt. Die Wassermassen m_A und m_B bilden dann in Verbindung mit den Wärmekapazitäten der Behälter (vgl. Versuch 19) die Medien *A* bzw. *B*, deren Gesamtwärmekapazitäten sich mit Hilfe

$$C = c_w m_w + C_{\text{Beh}}$$

bestimmen lassen. Um eine Temperaturschichtung innerhalb der Wassermengen zu vermeiden, sind in beiden Behältern die Rührwerke in Gang zu setzen. In die Behälter werden jeweils ein Thermometer zur Messung der Wassertemperaturen eingebracht und deren Anfangswerte protokolliert.

Der Elektrozuleitung des Verdichters ist ein Energiezähler bzw. ein Wirkleistungsmeßgerät vorzuschalten. Bei Verwendung eines Energiezählers ist dessen Anfangsstand zu protokollieren, und nach der Inbetriebnahme der Anlage kann sofort die von der Wärmepumpe im vorgegebenen Zeitintervall aufgenommene Elektroenergie abgelesen werden. Steht jedoch ein Wirkleistungsmeßgerät zur Verfügung, so muß zusätzlich die allgemeine Leistungsdefinition berücksichtigt werden.

Wenn alle vorhergenannten Arbeitsschritte erfüllt sind, holt der Praktikant sich vom Betreuer die Zustimmung zum Einschalten der Anlage ein. Am Ende gleichgroßer Zeitintervalle (3...5 min) können dann die für die Auswertung erforderlichen Größen abgelesen werden. Dazu gehören die Temperaturen auf der Verdampfer- und Kondensatorseite sowie die schon erwähnte Wirkenergie bzw. Wirkleistung. Die Meßwerte der Manometer, falls an der jeweiligen Anlage vorhanden, können informativ festgehalten werden. Die Meßreihe ist über mindestens 8 Intervalle zu führen. Dabei sollte darauf geachtet werden, daß der Wärmeentzug auf der Verdampferseite nicht zum Erstarren

des Wassers führt. Konkrete Bedingungen, die Anzahl der Intervalle betreffend, sind vom Betreuer zu erfragen.

Mit Hilfe der Beziehung

$$Q_i = C \Delta t_i$$

können dann die Wärmeenergien ermittelt werden, die dem Wasser auf der Verdampferseite entzogen bzw. auf der Kondensatorseite zugeführt wurden. Die Temperaturdifferenz Δt_i ist als Temperaturänderung im jeweiligen Zeitintervall i zu verstehen. Das Auswertungsprotokoll muß so angelegt werden, daß neben den beiden Temperaturdifferenzen auch (entsprechend Aufgabe 2) die aufgenommene und abgegebene Wärmeenergie sowie die aufgenommene Elektroenergie für jedes Zeitintervall anschaulich tabelliert werden können. Anhand dieser Tabelle ist es leicht möglich, den Unterschied zwischen den Größen „Wirkungsgrad“ und „Leistungszahl“ durch eine Diskussion herauszuarbeiten.

Die Berechnung der Kenngrößen CARNOT-Leistungszahl, reale Leistungszahl und CARNOT-Gütegrad werden für alle Intervalle innerhalb einer zweiten Tabelle empfohlen. Dafür verlangt die Berechnung der CARNOT-Leistungszahl eine vorherige Ermittlung der Mittelwerte der thermodynamischen Temperaturen auf der Kondensator- und Verdampferseite, nämlich \bar{T}_1 und \bar{T}_2 wiederum für jedes Zeitintervall. Zur Vereinfachung werden die Umwandlungstemperaturen des Kältemittels den Wassertemperaturen in den Behältern gleichgesetzt, da der innere energetische Prozeß einer Wärmepumpe bei dieser Versuchsdurchführung unberücksichtigt bleiben soll.

A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Wärmekapazitäten der Medien (Behälter plus Wasserfüllung) für die Kondensator- und Verdampferseite!
2. Bestimmen Sie für gleichbleibende Zeitintervalle die von der Wärmepumpe aufgenommene und abgegebene Wärmeenergie sowie die elektrische Energieaufnahme der Wärmepumpe!
3. Berechnen Sie für jedes Zeitintervall die CARNOT-Leistungszahl (Mittelwerte der Temperaturen für jedes Intervall bilden), die reale Leistungszahl sowie den CARNOT-Gütegrad der Wärmepumpenanlage!
4. Diskutieren Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse, unter welchen äußeren Bedingungen eine Wärmepumpenanlage effektiv betrieben werden kann!

Versuchsgeräte: Modell einer Wärmepumpenanlage, Wirkleistungsmesser oder Energiezähler, Thermometer, Meßglas oder Waage, Stoppuhr

28. Luftfeuchte

G Grundlagen

Der Wassergehalt der Luft, ihre Feuchte, ist von großer Bedeutung für die Meteorologie, spielt aber auch in vielen Industriezweigen, z. B. Papier-, Textil-, Lebens-

mittel- und Lackindustrie, eine bedeutende Rolle.

Ein Maß für den Wasserdampfgehalt der Luft ist die absolute Luftfeuchte f . Sie gibt an, welche Masse Wasserdampf in einem Luftvolumen enthalten ist. Es gilt:

$$f = \frac{m_D}{V} \quad (1)$$

Bei gegebener Temperatur kann die absolute Luftfeuchte einen bestimmten charakteristischen Wert, das *Sättigungsmaximum* oder die *maximale Luftfeuchte* f_0 , nicht überschreiten. Dieser Wert entspricht dem Wert der Dichte des gesättigten Wasserdampfes. Mit steigender Temperatur wächst die Fähigkeit der Luft, Wasserdampf aufzunehmen. Diese Tatsache benutzt man z. B. bei Trocknungsanlagen. Das Verhältnis der bei einer bestimmten Temperatur vorhandenen absoluten Luftfeuchte f zur maximalen Luftfeuchte f_0 nennt man die relative Luftfeuchte φ . Es gilt:

$$\varphi = \frac{f}{f_0}. \quad (2)$$

Um die Luftfeuchte zu bestimmen, sind verschiedene Verfahren möglich, die unter dem Namen *Hygrometrie* zusammengefaßt werden.

Im Versuch soll die relative Luftfeuchte mit dem *Taupunkthygrometer* und mit dem *Aspirations-Psychrometer* bestimmt werden. Die Werte für die Luftfeuchte und den Partialdruck des Wasserdampfes sind in Tabellen angegeben.

Das Taupunkthygrometer nach Lambrecht

Wird Luft, die nicht mit Wasserdampf gesättigt ist, abgekühlt, so ändert sich ihre absolute Feuchte zunächst nicht, bis die Temperatur so weit gesunken ist, daß absolute Feuchte und maximale Feuchte gleich sind. Die Temperatur, bei der das der Fall ist, nennt man den Taupunkt τ . Bei Abkühlung unter den Taupunkt kondensiert der überschüssige Wasserdampf.

Durch die Abkühlung der feuchten Luft während des Versuches von der Anfangstemperatur t auf die Taupunkttemperatur τ bei konstantem Druck verringert sich das Volumen der feuchten Luft, auf das nach Gl. (1) die absolute Feuchte bezogen ist, von V auf V_r . Dies bedeutet also, daß die absolute Luftfeuchte korrigiert werden muß. Da sich die Wasserdampfmenge m_D nicht geändert hat, ist

nach Gl. (1) $m_D = fV = f_r V_r$. Daraus folgt für die gesuchte absolute Luftfeuchte bei der Temperatur t

$$f = f_r \frac{V_r}{V}. \quad (3)$$

Wendet man die Zustandsgleichung auf beide Zustände an:

$$pV = \frac{m_D}{M} R(T_0 + t)$$

und

$$pV_r = \frac{m_D}{M} R(T_0 + \tau)$$

und vergleicht die beiden Ausdrücke miteinander, so ergibt sich

$$\frac{V_r}{V} = \frac{T_0 + \tau}{T_0 + t}. \quad (4)$$

Gl. (4) in Gl. (3) eingesetzt,

$$f = f_r \frac{T_0 + \tau}{T_0 + t}, \quad (5)$$

liefert den korrigierten Wert für die absolute Luftfeuchte.

Kennt man den Taupunkt, so kann man aus Tabellen die absolute Luftfeuchte nach Gl. (2) unter Beachtung von Gl. (5) errechnen, wenn die Umgebungstemperatur t bekannt ist.

Das Aspirations-Psychrometer nach Aßmann

Dieses Instrument besteht im wesentlichen aus zwei nebeneinanderstehenden, genau übereinstimmenden Thermometern. Das Gefäß des einen Thermometers wird mit einer feuchten Stoffhülle umgeben. Das andere Thermometer bleibt trocken und gibt die Temperatur der umgebenden Luft an. Ist diese mit Wasserdampf gesättigt, so zeigen die beiden Thermometer die gleiche Temperatur an. Andernfalls verdunstet das Wasser am befeuchteten Thermometer. Es entzieht die zum Verdunsten notwendige Wärmemenge seiner Umgebung, die sich demzufolge abkühlt. Das befeuchtete Thermometer zeigt eine

tiefere Temperatur an als das trockene. Strömt das Luftvolumen V am befeuchteten Thermometer vorüber, so gibt dieses eine Wärmemenge ab, und die angezeigte Temperatur sinkt von t auf t' . Der Dampfdruck des im vorüberströmenden Luftvolumen enthaltenen Wasserdampfes ändert sich durch Wasseraufnahme von p_D auf $p_{D'}$. Ist ϱ_D die Dichte des Wasserdampfes beim Luftdruck p , so folgt aus

$$p = \frac{\varrho RT}{M}$$

$$\varrho_1 = \frac{p_D}{p} \varrho_D \quad \text{bzw.} \quad \varrho_2 = \frac{p_{D'}}{p} \varrho_D.$$

Wegen $m = V\varrho$ mit $m = m_2 - m_1$ ist

$$m = (p_{D'} - p_D) \frac{\varrho_D V}{p}.$$

Die von der strömenden Luft aufgenommene Wasserdampfmenge multipliziert man mit der spezifischen Verdampfungswärme und erhält damit die zum Verdunsten benötigte Wärme Q :

$$Q = mr = (p_{D'} - p_D) \frac{\varrho_D V r}{p}.$$

Ist am befeuchteten Thermometer keine Temperaturänderung mehr feststellbar, so gibt die strömende Luft die Wärmemenge

$$Q' = \varrho_L V c_L (t - t')$$

ab. (ϱ_L Dichte der Luft bei der Temperatur t , c_L spez. Wärmekapazität der Luft) Aus der Gleichheit der Wärmemengen ergibt sich für den in der strömenden Luft herrschenden Partialdruck des Wasserdampfes

$$p_D = p_{D'} - kp(t - t'). \quad (6)$$

Die Größen ϱ_L , ϱ_D , c_L , r wurden zu einer Konstanten k zusammengefaßt. Die Konstante beträgt nach KOHLBAUSCH $k = 0,00066 \text{ K}^{-1}$.

Aus Gl. (6) erhält man den Partialdruck des Wasserdampfes p_D , aus Tabellen entnimmt man den zur Temperatur t gehörigen Sättigungsdruck p_s des Wasserdampfes. Die relative Luftfeuchte errechnet sich nach der Gleichung

$$\varphi = \frac{p_D}{p_s}. \quad (7)$$

V Versuchsdurchführung

1. Taupunkthygrometer

Die Gesamtansicht des Gerätes wird in Bild 57 gezeigt. In das Metallgefäß (1) wird etwas Ether gefüllt. Das Thermometer (2) muß dabei in den Ether eintauchen. Mit einem Gummigebläse (3) bläst man Luft durch den Ether und beschleunigt damit dessen Verdampfen. Dabei kühlen sich der Ether und die polierte Metallfläche (4) ab. Bei einer bestimmten Temperatur, dem Taupunkt, beschlägt die Metallfläche. Um das Beschlagen recht deutlich sichtbar zu machen, steht nur die obere Hälfte der polierten Metallfläche mit dem Ether in Berührung. Durch eine Glasscheibe (5) schützt man die polierte Metallfläche vor der Atemluft des Beobachters. Sobald sich Wasserdampf auf der polierten Metallfläche kondensiert, wird mit dem Abkühlen aufgehört und die Temperatur τ_1 abgelesen. Dann wird gewartet, bis das Kondensat verschwindet, und die etwas höhere Temperatur τ_2 abgelesen. Nach einiger Übung unterscheiden sich τ_1 und τ_2 nur noch wenig voneinander, und es kann

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

errechnet werden. Aus einer Tabelle entnimmt man den zu τ gehörigen Wert f_τ . Nach Gl. (2) und unter Beachtung von Gl. (5) wird die relative Luftfeuchte errechnet.

2. Aspirations-Psychrometer

Die Gesamtansicht des Gerätes wird in Bild 58 gezeigt. Nachdem man den kleinen Wasserbehälter (1) mit Wasser gefüllt hat und das Thermometer (2) so eingerichtet worden ist, daß der Tüllbeutel in den Wasserbehälter hineintaucht, wird der Tisch-

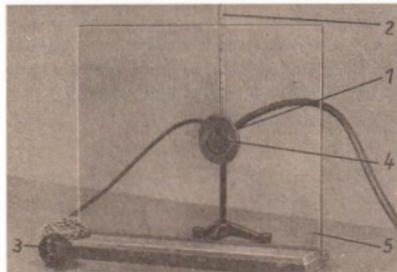


Bild 57

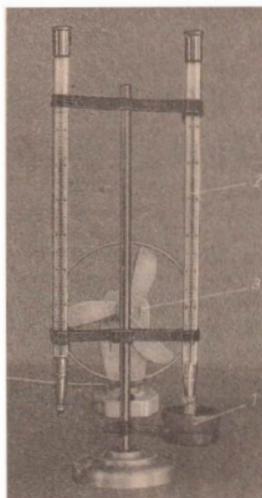


Bild 58

ventilator (3) eingeschaltet. Sobald sich die Temperatur t' nicht mehr ändert, werden die Temperaturen t und t' abgelesen. Aus der Tabelle werden die zu t und t' gehörigen Werte für p_s und p_D' entnommen. Nach Gl. (6) errechnet man p_D und mit Gl. (7) φ .

A Aufgaben

1. Berechnen Sie nach Gl. (2) die relative Luftfeuchte!
2. Bestimmen Sie das Sättigungsdefizit, d. h. die Wassermasse bezogen auf das Volumen, die bei der Temperatur t noch verdunsten kann!
3. Ermitteln Sie aus der Tabelle die absolute Feuchte auf Grund der Werte des Psychrometerversuches!
4. Bestimmen Sie aus der Tabelle den Taupunkt auf Grund des Psychrometerversuches!

5. Berechnen Sie nach Gl. (7) die relative Luftfeuchte!
 6. Erläutern Sie, weshalb eventuelle Unterschiede im Ergebnis nach Aufgabe 1 und 5 auftreten!

Versuchsgeräte: Taupunkthygrometer komplett, Schutzscheibe, Vorratsflasche mit Ether, Aspirations-Psychrometer komplett, Tischventilator, Glastrichter

29. Wärmetransportvorgänge

G Grundlagen

Viele Wärmetransportvorgänge beruhen auf Wärmeleitung, Wärmeübergang und -strahlung. Die *Wärmeleitung* ist der Energietransport durch die ungeordnete thermische Bewegung der Moleküle bzw. Atome. Die quantitative Beschreibung erfolgt in Analogie zur elektrischen Leitung (Bild 59). Unter der Voraussetzung

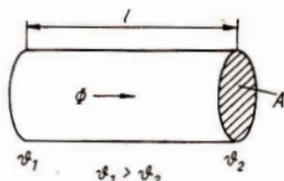


Bild 59

der thermischen Isolation der Mantelfläche kann man bei festen Endtemperaturen ϑ_1 und ϑ_2 den Wärmestrom Φ nach der dem OHMSchen Gesetz entsprechenden Beziehung

$$\Phi = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{th}}, \quad [\Phi] = W \quad (1)$$

berechnen. Dabei ist R_{th} der thermische Widerstand

$$R_{th} = \frac{l}{\lambda A}, \quad [R_{th}] = \frac{K}{W} \quad (2)$$

mit der für das Material charakteristischen Wärmeleitfähigkeit λ , $[\lambda] = W m^{-1} K^{-1}$. Die Voraussetzung der konstanten Endtemperaturen führt zur *stationären Wärmeleitung*. Findet außerdem keinerlei Wärmeabgabe durch die Mantelfläche statt, so

bildet sich längs der Strecke l ein lineares Temperaturgefälle aus (Bild 60, Kurve 1). Bei fehlender thermischer Isolation der Mantelfläche ist das Temperaturgefälle längs der Strecke l im stationären Fall zwar zeitlich, aber *nicht örtlich konstant* (Bild 60, Kurve 2).

Der *Wärmeübergang* (Bild 61) ist der Wärmetransport zwischen einem festen und einem flüssigen oder gasförmigen Medium, der durch die Begrenzungsfläche hindurch abläuft. Der thermische Widerstand beim Wärmeübergang wird dargestellt durch

$$R_{th} = 1/(\alpha A), \quad (3)$$

wobei α der Wärmeübergangskoeffizient ist, $[\alpha] = W m^{-2} K^{-1}$. Wärmeübergangskoeffizienten sind außer von den beiden

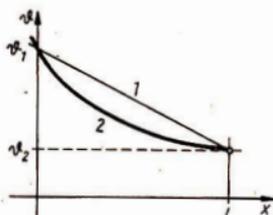


Bild 60

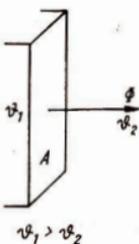


Bild 61

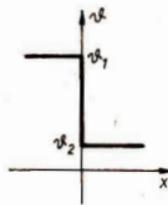


Bild 62

Medien stark von der Oberflächenbeschaffenheit und vom Bewegungszustand des flüssigen bzw. gasförmigen Mediums in der Nähe der Oberfläche des festen Körpers abhängig.

Der Temperaturverlauf wird durch einen Temperatursprung an der Übergangsstelle charakterisiert (Bild 62, idealisierter Verlauf), im Realfall ist der Kurvenverlauf abgerundet.

Die *Wärmestrahlung* ist der Wärmetransport in Form elektromagnetischer Wellen im Wellenlängenintervall $0,8 \mu\text{m}$ bis 1mm . Die Abhängigkeit des Strahlungsflusses von der Temperatur wird durch das STEFAN-BOLTZMANNsche Strahlungsgesetz wiedergegeben. Es besagt, daß der Strahlungsfluß eines Temperatur-

strahlers der 4. Potenz der thermodynamischen Temperatur proportional ist.

$$\Phi = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4). \quad (4)$$

Dabei bedeuten:

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ STEFAN-BOLTZMANN-Konstante,
 ε Emissionsgrad ($0 < \varepsilon < 1$).

Bei Temperaturdifferenzen zwischen der Zimmertemperatur und Temperaturen des Versuchskörpers bis etwa 100°C liegen die Wärmeabgabe durch Wärmeübergang und die Wärmeabgabe durch Wärmestrahlung in etwa der gleichen Größenordnung; bei höheren Temperaturen des Versuchskörpers überwiegt dagegen die Wärmestrahlung.

V Versuchsdurchführung

Zur Versuchsdurchführung werden Metallstäbe (z. B. Aluminium, Messing) von unterschiedlichem Querschnitt und verschiedenartiger Oberflächenbeschaffenheit eingesetzt (Bild 63).

An die Metallstäbe sind Kupferstege als Wärmeübertrager angeschraubt, die einen guten Wärmekontakt mit dem umgebenden Medium herstellen. Das eine Ende des Metallstabes wird jeweils auf eine feste hohe Temperatur (z. B. siedendes Wasser) gebracht, das andere Ende befindet sich auf Zimmertemperatur (Stativeinspannung). Mit einem Kontaktthermometer von möglichst geringer Wärmekapazität, das an den jeweils 5 cm voneinander entfernten Meßstellen aufgesetzt wird, erfaßt man die Temperaturverteilung längs des zu untersuchenden Stabes. Eine günstigere Variante stellt die Benutzung eines elektronischen „Multithermometers“ dar, bei dem die an den Meßstellen fest installierten Temperaturfühler durch einen Umschalter an das Meßinstrument geschaltet werden.

Aus der Temperaturverteilung längs des Stabes und dem thermischen Widerstand R_{th}

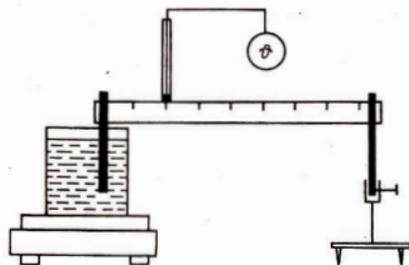


Bild 63

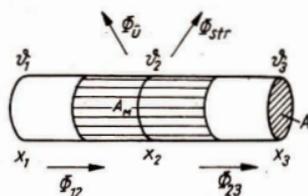


Bild 64

für einen Stababschnitt nach Gl. (2) wird die abnehmende Folge der Wärmeströme Gl. (1) zwischen den Meßstellen ermittelt. Die Differenz der Wärmeströme Φ_{12} und Φ_{23} gibt den durch Wärmeübergang (Konvektion) und durch Wärmestrahlung auf dem 5-cm-Abschnitt der Mantelfläche „verlorengangenen“ Wärmestrom an (Bild 64):

$$\Delta\Phi = \Phi_{12} - \Phi_{23} = \Phi_u + \Phi_{str.}$$

Im vorliegenden Fall soll näherungsweise angenommen werden, daß der Wärmestrom durch Wärmeübergang etwa doppelt so groß ist wie der Wärmestrom durch Wärmestrahlung. Damit ergibt sich für Φ_u

$$\Delta\Phi = \Phi_{12} - \Phi_{23} = \Phi_u + \frac{1}{2} \Phi_u = \frac{3}{2} \Phi_u = \frac{3}{2} \alpha A_M (\vartheta_2 - \vartheta_u)$$

und für den Wärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha = \frac{2(\Phi_{12} - \Phi_{23})}{3A_M(\vartheta_2 - \vartheta_u)}. \quad (5)$$

Andererseits kann für $\Phi_{str.}$ die Beziehung angegeben werden

$$\Delta\Phi = \Phi_{12} - \Phi_{23} = 2\Phi_{str.} + \Phi_{str.} = 3\Phi_{str.} = 3\sigma\epsilon\alpha A_M(T_2^4 - T_u^4),$$

so daß der Emissionsgrad berechnet werden kann:

$$\epsilon = \frac{\Phi_{12} - \Phi_{23}}{3\sigma A_M(T_2^4 - T_u^4)}. \quad (6)$$

A Aufgaben

- Nehmen Sie die Temperaturverteilung längs eines Aluminium/Messing-Stabes ohne/ mit thermischer Isolation (Schaumpolystyrol) der Mantelfläche auf
 - 2 min nach Einsetzen des Wärmeübertragers („heißes Ende“) in siedendes Wasser (nichtstationärer Zustand),
 - 12 min nach Einsetzen in siedendes Wasser (stationärer Zustand).
- Wie unterscheiden sich die Temperaturverteilungen in den einzelnen Fällen voneinander? Wie zeigt sich die Wirkung der thermischen Isolation in den aufgenommenen Diagrammen?
- Berechnen Sie den thermischen Widerstand R_{th} für einen Stababschnitt 5 cm. Geben Sie die Folge der Wärmeströme im stationären Zustand (1.2.) an. Bestimmen Sie (nur für die Stelle x_2) aus der Differenz $\Phi_{12} - \Phi_{23}$ nach Gl. (5) den Wärmeübergangskoeffizienten α .
- Führen Sie eine Fehlerabschätzung für die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten α aus!
- Nehmen Sie für den stationären Zustand die Temperaturverteilung längs zweier Aluminiumstäbe mit blanker/geschwätzter Oberfläche auf! Wie zeigt sich die Wirkung der unterschiedlichen Oberflächen bei den erhaltenen Kurven?

6. Berechnen Sie wiederum den thermischen Widerstand R_{th} für einen Stababschnitt 5 cm. Geben Sie die Folge der Wärmeströme an! Bestimmen Sie (nur für die Stelle x_2) aus der Differenz $\Phi_{12} - \Phi_{23}$ nach Gl. (6) den Emissionsgrad für beide Stäbe!

Versuchsgeräte: Stäbe für die Wärmeleitung (Aluminium, Messing) mit/ohne thermische Isolation, Stäbe für die Wärmeleitung mit blanker/geschwätzter Oberfläche, Siedegeß, Kochplatte, Kontaktthermometer (z. B. Thermistorkontaktthermometer PU 391), Zimmerthermometer, Glycerol (als Wärmekontaktflüssigkeit), Stoppuhr

30. Abkühlungsvorgänge

G Grundlagen

Bei der Abkühlung eines festen Körpers sinkt dessen Temperatur mit der Zeit ab, indem Wärmeenergie an eine flüssige oder gasförmige Umgebung niedriger Temperatur ϑ_U abgegeben wird (Bild 65). Der wesentliche Wärmetransportprozeß ist bei relativ niedrigen Temperaturen der *Wärmeübergang* von der festen Oberfläche des Körpers an das ihn umgebende Medium. Bei ausgedehnter Umgebung (und somit konstanter Umgebungstemperatur ϑ_U) und kleiner Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_U$ gilt für den von einem Körper abgegebenen Wärmestrom

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = -\alpha A(\vartheta - \vartheta_U), \quad (1)$$

wobei α den Wärmeübergangskoeffizienten und A die Oberfläche des Körpers darstellen.

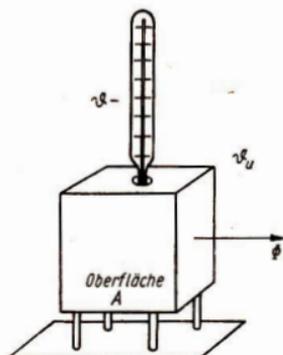


Bild 65

Wegen $Q = cm \Delta\vartheta = C \Delta\vartheta$ ist die Änderung der Wärmeenergie dQ zur Temperaturänderung proportional; der Proportionalitätsfaktor ist die Wärmekapazität C des Körpers

$$dQ = C d\vartheta. \quad (2)$$

Man erhält aus (1) und (2)

$$\frac{C d\vartheta}{dt} = -\alpha A(\vartheta - \vartheta_U)$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\alpha A}{C}(\vartheta - \vartheta_U)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -a(\vartheta - \vartheta_U), \quad (3)$$

d. h., die *Abkühlgeschwindigkeit* (zeitliche Änderung der Temperatur) ist der jeweils bestehenden Temperaturdifferenz proportional (NEWTONSches Abkühlungsgesetz). Dabei ist $a = \alpha A/C$ die *Abkühlkonstante*; es gilt $[a] = s^{-1}$.

Die Differentialgleichung (3) kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_U} = -a dt$$

$$\ln(\vartheta - \vartheta_U)|_{\vartheta_0}^{\vartheta} = -at|_0^t$$

$$\ln \frac{\vartheta - \vartheta_U}{\vartheta_0 - \vartheta_U} = -at$$

$$\frac{\vartheta - \vartheta_U}{\vartheta_0 - \vartheta_U} = e^{-at}.$$

Für die Temperatur ϑ des Körpers zur Zeit t ergibt sich somit

$$\vartheta = (\vartheta_0 - \vartheta_U) e^{-at} + \vartheta_U \quad (4)$$

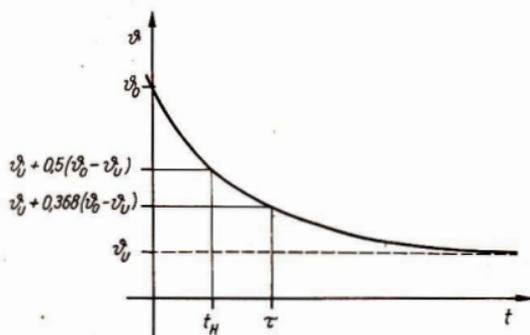


Bild 66

(ϑ_0 Anfangstemperatur des Körpers, ϑ_U Umgebungstemperatur). Es liegt also ein exponentielles Abnehmen der Temperaturdifferenz in Abhängigkeit von der Zeit vor, wobei die Stärke des Abnehmens durch die Abkühlkonstante a beschrieben wird. Der reziproke Wert von a ist die

Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{a}$. Nach Verstreichen der Zeit τ gilt für die Temperaturdifferenz

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta - \vartheta_U}{\vartheta_0 - \vartheta_U} &= e^{-a\tau} = e^{-\frac{1}{\tau} \cdot \tau} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} = 0,368. \end{aligned} \quad (5)$$

d. h., die noch bestehende Temperaturdifferenz beträgt 36,8% der anfänglichen Temperaturdifferenz (Bild 66).

Die Halbwertszeit t_H gibt die Zeit an, nach deren Verstreichen die noch bestehende Temperaturdifferenz 50% der anfänglichen Temperaturdifferenz beträgt.

Es gilt:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_U}{\vartheta_0 - \vartheta_U} = 0,50 = e^{-at_H},$$

folglich:

$$at_H = \ln 2$$

$$t_H = \frac{\ln 2}{a} = \tau \cdot \ln 2. \quad (6)$$

V Versuchsdurchführung

Der Versuchskörper wird in siedendem Wasser erhitzt (5 min). Mit einer Zange bringt man ihn anschließend auf einen geeigneten Ständer, der die Wärmeabgabe nach allen Seiten zulässt. In die vorhandene Bohrung wird ein Thermometer (Flüssigkeitsthermometer oder Meßfühler eines elektrischen Temperaturmeßgerätes) eingesetzt. Sobald am Thermometer die höchste Temperatur erreicht ist, beginnt die eigentliche Messung, die sich über 15 min erstreckt. Beginnend mit der Temperatur ϑ_0 zur Zeit $t = 0$ min werden zu allen vollen Minuten die erreichten Temperaturen abgelesen.

Die Wirkung der bei vielen technischen Abkühlvorgängen erforderlichen Zwangskonvektion wird durch einen Tischventilator erzielt, der im Abstand von etwa 10 cm vor dem Versuchskörper aufgestellt ist.

Die aufgenommenen Abkühlkurven sind grafisch darzustellen. Die Gültigkeit des NEWTONSchen Abkühlungsgesetzes Gl. (4) erkennt man am besten aus einer Darstellung der Temperaturdifferenz auf einfach-logarithmischem Koordinatenpapier. Zur Bestim-

mung der Abkühlkonstanten a dient die Gl. (4), aus der folgt:

$$\alpha = \frac{1}{t} \ln \frac{\vartheta_0 - \vartheta_U}{\vartheta - \vartheta_U}. \quad (7)$$

Obwohl beliebige Wertepaare (t, ϑ) zur Berechnung herangezogen werden können, ist es vorteilhaft, die *gesamte* Meßzeit 15 min und die dann vorliegende *Endtemperatur* zu benutzen.

Nachdem vom Versuchskörper noch die Wärmekapazität $C = cm$ und die Oberfläche A bestimmt wurden, kann gemäß

$$\alpha = \frac{-aC}{A} \quad (8)$$

der Wärmeübergangskoeffizient ermittelt werden. Für den Wärmeübergang Aluminium/Luft sind je nach den Abkühlungsbedingungen Wärmeübergangskoeffizienten von 10...50 W m⁻² K⁻¹ zu erwarten.

A Aufgaben

1. Nehmen Sie die Abkühlungskurven von zwei vorgegebenen Versuchskörpern (z. B. Al-Quader, Al-Kühlrippenkörper) unter verschiedenen Abkühlbedingungen auf!
2. Stellen Sie die Temperaturdifferenz in Abhängigkeit von der Zeit auf einfach-logarithmischem Koordinatenpapier dar und beurteilen Sie, ob das NEWTONSche Abkühlungsgesetz bei den vorliegenden Beispielen erfüllt ist!
3. Berechnen Sie jeweils die Abkühlkonstante a , die Zeitkonstante τ und die Halbwertszeit t_H !
Vergleichen Sie die für t_H rechnerisch erhaltenen mit den aus dem Diagramm hervorgehenden Werten!
4. Bestimmen Sie (gegebenenfalls näherungsweise) die Oberfläche A und die Wärmekapazität C der Probekörper und berechnen Sie jeweils den Wärmeübergangskoeffizienten!
5. Führen Sie für *einen* Versuch die Fehlerrechnung für a und τ aus!

Versuchsgeräte: Probekörper (Al-Quader, Al-Kühlrippenkörper) mit Bohrung, Thermometer (1-K.-Teilung), Zimmerthermometer, Kochplatte, Topf, Stoppuhr, Laborwaage, Wägestücke, Tischventilator

ELEKTRIK

31. Wirkungsgrad bei Erwärmung von Flüssigkeiten

G Grundlagen

In jedem Heizgerät wird elektrische Energie umgewandelt. Der *Wirkungsgrad* ist der Quotient aus der genutzten Wärmeenergie Q und der aufgenommenen elektrischen Energie W :

$$\eta = \frac{Q}{W}. \quad (1)$$

Die Wärmeenergie Q erhöht die Temperatur des Wassers um ΔT :

$$Q = cm \Delta T \quad (2)$$

c spezifische Wärmekapazität des Wassers,
 m Masse des Wassers.

Die elektrische Energie hängt ab von der Spannung U , der Stromstärke I und der Zeit t :

$$W = UIt. \quad (3)$$

Setzt man Gl. (2) und (3) in Gl. (1) ein, so folgt

$$\eta = \frac{cm \Delta T}{UIt}. \quad (4)$$

Die Wärmeenergie kann in allen Energieeinheiten gemessen werden (Joule, Kilojoule). Früher wurde die Kilokalorie verwendet, die definiert war als 1 kcal = 4,1868 kJ.

V Versuchsdurchführung

Im Versuch soll der Wirkungsgrad bei der Erwärmung von Wasser mit einer Heizplatte und einem Tauchsieder bestimmt werden.

Zunächst ist die Masse m_0 des Topfes festzustellen. Der Topf wird zu etwa 2/3 mit Wasser gefüllt und gewogen (m_1). Die Masse des Wassers ist damit

$$m = m_1 - m_0.$$

Die Schaltung ist nach dem Schaltbild (Bild 67) aufzubauen und *prüfen zu lassen*. Dann wird die Temperatur T_0 des Wassers gemessen und das Heizgerät eingeschaltet. In Abständen von 2 min sind Temperatur, Spannung und Stromstärke abzulesen. Wenn die Temperatur etwa 95°C erreicht hat, wird der Versuch abgebrochen. Der Wirkungsgrad ist nach Gl. (4) zu berechnen. Dabei sind Mittelwerte aus den Ablesungen für Stromstärke und Spannung zu bilden.

Der Versuch ist mit einem Tauchsieder zu wiederholen. In zwei weiteren Versuchen wird ein Deckel aufgelegt, der mit Öffnungen für Tauchsieder und Thermometer versehen ist.

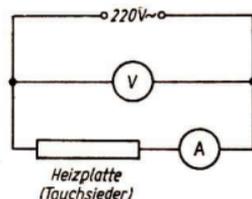


Bild 67

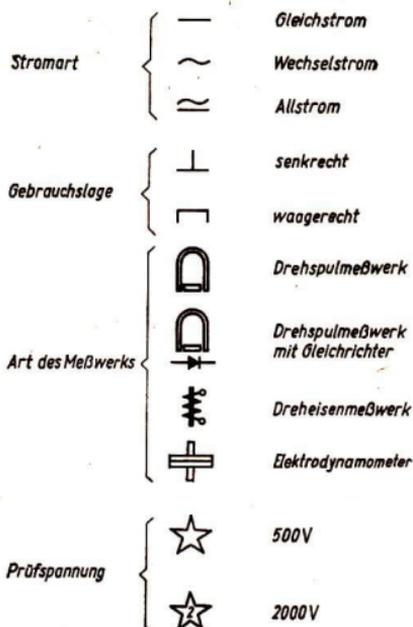


Bild 68

Neben dem Klassenzeichen (\rightarrow 2.4.) befinden sich auf jedem elektrischen Meßgerät noch einige Zeichen, deren wichtigste in Bild 68 erklärt werden. Die Angaben beziehen sich auf

- die Stromart*, für die das Meßgerät zu verwenden ist,
- die Gebrauchslage* des Gerätes — nur für die vorgeschriebene Gebrauchslage gilt die angegebene Klasse des Meßinstrumentes —,
- die Art des Meßwerkes*,
- die Prüfspannung* — sie macht Aussagen über die Isolation des Gerätes —,
- das Firmenzeichen des Herstellerbetriebes*.

A Aufgaben

1. Nehmen Sie die Temperatur-Zeit-Diagramme für folgende Anordnungen auf:
 - 1.1. Heizplatte, Topf ohne Deckel
 - 1.2. Tauchsieder, Topf ohne Deckel
 - 1.3. Tauchsieder, Topf mit Deckel
 - 1.4. Heizplatte, Topf mit Deckel
 Alle 4 Kurven sollen in *ein* Diagramm gezeichnet werden.

2. Berechnen Sie den Wirkungsgrad in allen 4 Fällen!

3. Fehlerabschätzung

4. Ausführliche Diskussion der Ergebnisse

Versuchsgeräte: Heizplatte und Tauchsieder gleicher Leistung, Klemmleiste, Topf mit Deckel, Thermometer, Stromstärkemesser, Spannungsmesser, Stoppuhr, Dreifuß, Waage

32. Wheatstonesche Brücke

G Grundlagen

Die Brückenschaltung ermöglicht die Bestimmung von Widerständen durch Vergleich mit bekannten Normalwiderständen. Die Widerstände sind nach Bild 69 geschaltet. Die Spannung wird an *A* und *B* gelegt. Zwischen *C* und *D* liegt ein empfindliches Galvanometer, ein Nullinstrument. (Ein Nullinstrument dient

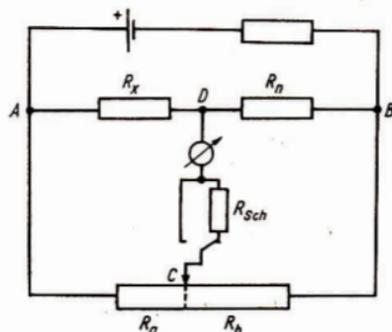


Bild 69

zum Nachweis der Stromlosigkeit; es braucht daher nicht geeicht zu sein. Der Nullpunkt befindet sich in der Mitte der Skale.) Vor dem Galvanometer liegt ein Schutzwiderstand R_{Sch} , der bei der Feinmessung kurzgeschlossen werden kann. In den Knotenpunkten *A* und *B* verzweigt sich der Strom. Wenn *C* und *D* auf gleichem Potential liegen, bleibt die Brücke *CD* stromlos. Das erfordert, daß die

Spannung zwischen *A* und *D* gleich der zwischen *A* und *C* ist. Dann sind auch die Spannungen zwischen *D* und *B* und zwischen *C* und *B* einander gleich:

$$U_{AD} = U_{AC} \quad (1)$$

$$U_{BD} = U_{BC}.$$

Nach dem OHMSchen Gesetz ist $U = IR$. Damit wird aus Gl. (1)

$$I_x R_x = I_a R_a \quad (2a)$$

$$I_n R_n = I_b R_b. \quad (2b)$$

Bei stromloser Brücke muß weiter gelten:

$$I_n = I_x$$

$$I_b = I_a.$$

Damit wird aus Gl. (2a) und (2b)

$$I_x R_x = I_a R_a$$

$$I_x R_n = I_a R_b.$$

Die Stromstärken können durch Division eliminiert werden. Man erhält

$$\frac{R_x}{R_n} = \frac{R_a}{R_b}. \quad (3)$$

Wie man aus Gl. (3) erkennt, geht in die Rechnung das Verhältnis R_a/R_b ein. Nach

$R = \rho \frac{l}{A}$ ist der Widerstand eines Drahtes der Drahtlänge proportional. Verwendet man für R_a und R_b einen Widerstandsdraht von überall gleichem Querschnitt, so kann man anstelle von Gl. (3) setzen:

$$R_x = R_n a/b. \quad (4)$$

Der Widerstandsdraht wird längs einer Skale aufgespannt. Auf ihm gleitet ein Schleifkontakt (Punkt C des Schaltbildes), der seine Länge im Verhältnis a/b teilt.

Für die Reihenschaltung zweier Widerstände gilt

$$R = R_1 + R_2, \quad (5)$$

für die Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

oder

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (6)$$

V Versuchsdurchführung

Die Schaltung ist nach Bild 69 aufzubauen und *prüfen zu lassen*. Da die Meßgenauigkeit in der Mitte der Brücke am größten ist, sollen a und b etwa gleich sein. Nach Gl. (4) setzt das voraus, daß der Normalwiderstand R_n etwa gleich dem zu messenden unbekanntem Widerstand ist. Man geht folgendermaßen vor:

Zunächst schaltet man das Galvanometer auf „grob“. Dadurch ist dem Galvanometer der Schutzwiderstand R_{Sch} vorgeschaltet. Dann stellt man den Schleifkontakt in Mittelstellung ($a/b = 1$), schaltet den Strom ein und verändert den Normalwiderstand, bis der Ausschlag des Nullinstrumentes möglichst klein ist. Jetzt wird die Brücke abgeglichen, d. h. der Schleifkontakt so eingestellt, daß die Brücke CD stromlos ist. Dann schließt man den Schutzwiderstand R_{Sch} kurz (Schalter auf „fein“) und gleicht die Brücke nochmals ab. R_n , a und b werden abgelesen und das *Galvanometer sofort wieder auf grob geschaltet*.

A Aufgaben

1. Berechnen Sie die Spannung, die angelegt werden kann, ohne daß eine Überlastung der Normalwiderstände eintritt!
2. Messen Sie die vorgelegten Widerstände mit der WHEATSTONESchen Brücke!



Bild 70

3. Widerstände von gleicher Größenordnung sind paarweise in Reihe und parallel zu schalten. Die Gln. (5) und (6) sind zu prüfen.
4. Fehlerabschätzung
5. Führen Sie für einige Widerstände eine Vergleichsmessung mit einer Kleinmeßbrücke durch (Bild 70)!
6. Weisen Sie rechnerisch nach, daß der Meßfehler in der Mitte der Brücke am kleinsten ist!

Versuchsgeräte: WHEATSTONEsche Brücke, Normalwiderstände verschiedener Größenordnung (Dekadenwiderstände), Galvanometer mit Schutzwiderstand, Klemmleiste, verschiedene Widerstände (Kohleschichtwiderstände), Kleinmeßbrücke

33. Innenwiderstand eines Akkumulators

G Grundlagen

Bei der Prüfung des Betriebszustandes von Batterien wird häufig der Fehler begangen, daß die Spannung der einzelnen Zellen mit einem Spannungsmesser gemessen wird, während keine anderen Verbraucher weiter angeschlossen sind. Die so gemessene Spannung sagt noch nicht alles über die Einsatzfähigkeit der Batterie aus.

Beim Anschluß eines Verbrauchers mit einem Widerstand von nur einigen Ohm kann die an den Anschlußklemmen gemessene Spannung erheblich tiefer liegen, als das im unbelasteten Zustand der Fall ist. Wenn lediglich der Spannungsmesser angeschlossen ist, darf die Spannungsquelle als unbelastet betrachtet werden, da dann nur Ströme von wenigen Milliampere fließen.

Der gegenüber dem unbelasteten Zustand eintretende Spannungsabfall ist nun keinesfalls eine Erscheinung, die nur bei nicht voll einsatzfähigen Batterien beobachtet werden kann. Spannungsquellen jeder Art weisen einen Unterschied zwischen *Leerlauf- und Betriebsspannung* auf. Es wird jedoch vom Hersteller angestrebt, diesen Unterschied bei normaler Belastung des Elementes oder auch des Generators möglichst klein zu halten.

Worauf ist der mit zunehmender Belastung größer werdende Abfall der an den An-

schlußklemmen der Spannungsquelle zur Verfügung stehenden Spannung zurückzuführen?

Die durch elektrochemische Vorgänge im Element erzeugte Spannung, als *Urspannung* U_0 bezeichnet, ruft bei geschlossenem Stromkreis einen Stromfluß hervor. Die Stärke des Stromes ergibt sich aus der vorhandenen Spannung und dem Gesamtwiderstand nach dem OHM'schen Gesetz:

$$I = \frac{U_0}{R}. \quad (1)$$

Die Elektronen wandern vom Minuspol durch die angeschlossenen Verbraucher zum Pluspol der Spannungsquelle. Von dort werden sie mit Hilfe chemischer Energie (im galvanischen Element) bzw. mechanischer Energie (im Generator) wieder zum Minuspol gebracht, wo sie ihren Weg von vorn beginnen. Das Elektrodenmaterial und der Elektrolyt im galvanischen Element bzw. die Spulenwicklung im Generator stellen nun aber ebenso elektrische Widerstände dar wie die Verbindungsdrähte, Widerstandsdrähte, Spulenwicklungen usw., die an die Spannungsquelle angeschlossen sind. Jeder Stromkreis stellt somit im Prinzip eine *Reihenschaltung* von zwei Widerständen, dem *inneren Widerstand* R_i der Spannungsquelle und dem *außen* angeschlossenen *Widerstand* R_a , dar (Bild 71).

Die zur Verfügung stehende Ursprungsspannung verteilt sich nun auf diese Widerstände entsprechend dem Verhältnis ihrer Größe.

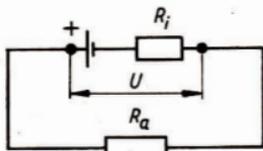


Bild 71

Die an den Anschlußklemmen vorhandene Spannung, sie wird als *Klemmenspannung* U bezeichnet, ist um den am *Innenwiderstand* auftretenden Spannungsabfall kleiner als die *Urspannung* U_0 :

$$U = U_0 - IR_i. \quad (2)$$

Mit zunehmender Stromstärke wächst der Unterschied von Klemmen- und Urspannung.

Die Klemmenspannung ist nahezu gleich der Urspannung, wenn der innere Widerstand der Spannungsquelle klein gegenüber dem Gesamtwiderstand der angeschlossenen Geräte ist. Beim Aufbau einer Spannungsquelle muß deshalb grundsätzlich angestrebt werden, den Innenwiderstand so klein wie möglich zu halten, um in den Grenzen der vorgesehenen Belastung nur unwesentliche Änderungen der Klemmenspannung zu verursachen.

V Versuchsdurchführung

Die Urspannung könnte nur genau gemessen werden, wenn die Spannungsquelle durch das Meßgerät nicht belastet würde. Bei Verwendung eines Drehspulinstrumentes mit einem Innenwiderstand $300 \Omega/V$ (Vielfachmeßgerät) beträgt das Verhältnis R_a zu R_i mindestens $1000:1$, wenn die Spannung einer Nicad- oder Bleizelle gemessen wird. Wird nur der Spannungsmesser angeschlossen, so darf die abgelesene Spannung als Urspannung betrachtet werden.

Nachdem die Urspannung U_0 gemessen wurde, kann man die Spannungsquelle stärker belasten (bis zu einigen Ampere). Dabei werden die Klemmenspannung und die Stromstärke gemessen. Aus Gl. (2) läßt sich R_i berechnen.

A Aufgaben

1. Messen Sie mit einem hochohmigen Spannungsmesser die Urspannung U_0 !
2. Stellen Sie mindestens 4 verschiedene Belastungsfälle (Bild 72) ein, so daß eine deutliche Verringerung der Klemmenspannung zu beobachten ist, und errechnen Sie jeweils den Innenwiderstand aus Urspannung, Klemmenspannung und Stromstärke!

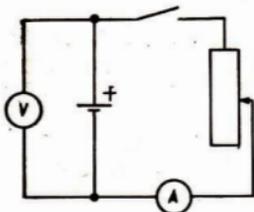


Bild 72

3. Begründen Sie, weshalb die an der Sekundärseite eines Transformators zur Verfügung stehende Spannung nicht gleich der sekundärseitig erzeugten Induktionsspannung ist, wenn der Transformator belastet wird!

Versuchsgeräte: Bleizelle oder Nicadzelle, Stromstärke- und Spannungsmesser, Schalter, regelbarer Widerstand (mit etwa 5 A belastbar)

34. Innenwiderstand von Stromstärke- und Spannungsmessern

G Grundlagen

Werden Stromstärke- oder Spannungsmesser in einen Stromkreis eingeschaltet, so ändern sich die ursprüngliche Stromstärke und die Spannungsverteilung. Beim Einschalten eines Stromstärkemessers sinkt die Stromstärke, und beim Einschalten des Spannungsmessers steigt die Stromstärke in den Zuleitungen. Um den

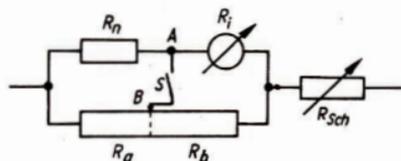


Bild 73

an einem Stromstärkemesser liegenden Spannungsabfall und den durch einen Spannungsmesser fließenden Strom bestimmen zu können, ist die Kenntnis des Meßgerätewiderstandes erforderlich. Das kann z. B. notwendig sein, um den wahren Wert eines Widerstandes bei strom- bzw. spannungsrichtiger Messung ausrechnen zu

V Versuchsdurchführung

Das zu untersuchende Meßgerät wird an die für den Anschluß des zu messenden Widerstandes vorgesehenen Klemmen der Meßbrücke angeschlossen. Statt des Brückeninstrumentes wird ein Schalter eingesetzt.

Beträgt z. B. die zur Verfügung stehende Spannung 2 V, so sollte der Schutzwiderstand zu Beginn des Versuchs auf 1000 Ω eingestellt sein. Nun kann durch Verschieben des Gleitkontaktes ein Widerstandsverhältnis $R_a:R_b$ eingeregelt werden, bei dem sich

können. Soll der Meßbereich eines Stromstärke- oder Spannungsmessers erweitert werden (s. Versuch 38), muß ebenfalls der Innenwiderstand des Gerätes bekannt sein.

Der Innenwiderstand eines Galvanometers läßt sich auf einfache Weise mit einer *Wheatstoneschen Brückenschaltung* bestimmen. Dabei ist das zu untersuchende Gerät gleichzeitig Anzeigegerät (Bild 73). Wie beim Versuch 32 bereits nachgewiesen wurde, fließt in der Brücke (zwischen den Punkten A und B) auch bei geschlossenem Schalter S kein Strom, wenn das Widerstandsverhältnis gilt:

$$\frac{R_n}{R_i} = \frac{R_a}{R_b} \quad (1)$$

Zwischen A und B besteht dann keine Spannung. Das bedeutet aber, daß es in diesem Falle völlig gleichgültig ist, ob der Schalter geschlossen oder offen ist. Ist die Brücke nicht abgeglichen, so ändert sich beim Schließen bzw. Öffnen des Schalters die Stromverteilung in der Brücke, und der Ausschlag des Meßgerätes wird größer oder kleiner. Der Widerstand R_{Sch} schützt das Gerät vor Überlastung und gestattet, ohne Veränderung der angelegten Spannung die Stromstärke im Meßgerät und damit den Ausschlag des Zeigers zu regeln.

beim Öffnen oder Schließen des Schalters der Ausschlag des Zeigers nur unwesentlich ändert. Durch Verringern des Schutzwiderstandes wird nunmehr ein möglichst großer Zeigerausschlag eingestellt, so daß beim Bedienen des Schalters noch auftretende Änderungen der Stromstärke im Meßgerät deutlicher erkennbar sind.

Bewirkt das Öffnen und Schließen der Brücke keine Änderungen des Zeigerausschlages mehr, dann kann nach Gl. (1) der Innenwiderstand des Gerätes bestimmt werden.

Der Vergleichswiderstand R_n ist auch hier so zu wählen, daß der Abgleich nicht bei Stellungen des Schleifkontaktes in der Nähe der Enden des Spannungsteilers $R_a R_b$ eintritt.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Innenwiderstand der zu untersuchenden Geräte!
2. Wiederholen Sie die Messung mit einem anderen Normalwiderstand R_n !
3. Weshalb sind Messungen bei Kontaktstellungen in der Nähe der Enden des Spannungsteilers nicht zweckmäßig?
4. Begründen Sie, weshalb Stromstärkemesser einen kleinen und Spannungsmesser einen großen Innenwiderstand haben müssen!

Versuchsgeräte: Meßbrücke mit verschiedenen Normalwiderständen, Drehspul- oder Dreheiseninstrumente, regelbarer Widerstand (1000 Ω), Schalter

35. Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Leitern und Halbleitern

G Grundlagen

Der spezifische Widerstand eines Materials wird von der Streuung der Ladungsträger im Gitter und von der Konzentration der Ladungsträger bestimmt. Sowohl bei den hier zu untersuchenden metallischen Leitern als auch bei den Halbleitern bedeutet Temperaturänderung eine verstärkte Molekularbewegung und folglich stärkere Streuung der Ladungsträger. Damit erfolgt eine Erhöhung des Widerstandes. Bei Metallen ist in dem hier zu untersuchenden Temperaturbereich die Konzentration der Ladungsträger konstant, während sie bei Halbleitern temperaturabhängig ist. Folglich überlagern sich bei Halbleitern bei Temperaturänderung zwei Einflußfaktoren auf den spezifischen Widerstand.

Während die relative Widerstandsände-

rung je Kelvin (*Temperaturkoeffizient*) bei Leitern bei einigen Promille liegt, beträgt er für Halbleiter einige Prozent. Bei speziellen Legierungen (*Widerstandslegierungen*) ist die Temperaturabhängigkeit sehr gering, z. B. für *Manganin* (etwa 82% Cu, 15% Mn, 2,4% Ni, 0,6% Fe) nur 10^{-6}K^{-1} .

Ebenso wie der Ausdehnungskoeffizient der verschiedenen Stoffe gilt auch der Temperaturkoeffizient nur für eine Bezugstemperatur. In dem hier zu untersuchenden Temperaturbereich von etwa 20...100°C kann mit genügender Genauigkeit angenommen werden, daß die Widerstandsänderung ΔR proportional der Temperaturänderung Δt ist. Da ΔR auch proportional dem ursprünglichen Widerstand R_0 ist, kann geschrieben werden: $\Delta R \sim R_0 \Delta t$.

Das Verhältnis aus ΔR und $R_0 \Delta t$ ist der *Temperaturkoeffizient*, bezogen auf die Temperatur, bei der R_0 gemessen wurde:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} \quad (1)$$

V Versuchsdurchführung

Eine Drahtspirale aus dem zu untersuchenden Material bzw. ein Halbleiterwiderstand wird in einen Behälter mit Öl getaucht. In den Behälter (z. B. Becherglas) ragen ein Thermometer und ein Rührwerk hinein (Bild 74).

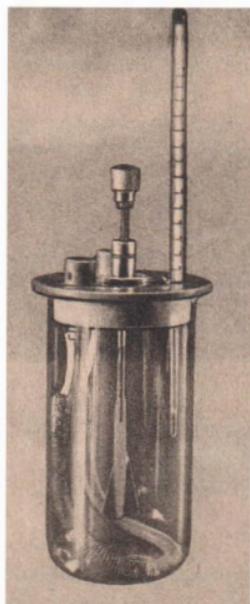


Bild 74

Verfahren 1

Die Flüssigkeit wird von außen erhitzt. Mit einer *Wheatstoneschen Brücke* wird der Widerstand zu Beginn des Versuches sowie nach jeweils 10 K Temperaturänderung gemessen.

Verfahren 2

An die Wendel oder den Halbleiterwiderstand wird eine solche Spannung gelegt, daß die Flüssigkeit durch die Stromstärke langsam erwärmt wird. Die angelegte Spannung und die Stromstärke werden zu Beginn des Versuches und nach jeweils 10 K Temperaturerhöhung gemessen und daraus die jeweiligen Widerstände errechnet.

Die nach Verfahren 1 oder 2 gewonnenen Werte für den Widerstand werden in Abhängigkeit von der Temperatur grafisch dargestellt. Aus Anfangs- und Endwert wird nach Gl. (1) der Temperaturkoeffizient bestimmt.

A Aufgaben

- Bestimmen Sie den Temperaturkoeffizienten eines Leiterwerkstoffes und einer Widerstandslegierung für eine Anfangstemperatur von 20°C sowie den mittleren Temperaturkoeffizienten eines Halbleiterwiderstandes im Bereich von 20 bis 100°C nach Verfahren 1 oder 2!
- Stellen Sie den Widerstandsverlauf in Abhängigkeit von der Temperatur grafisch dar!
- Wie ist der Einfluß der Temperatur auf den Widerstand von Leiter- und Halbleiterwerkstoffen zu erklären?

Versuchsgeräte: Gefäß mit Thermometer und Rührwerk, Wendeln aus Leiterwerkstoffen und Widerstandsmaterial, Halbleiter-Widerstand, Meßbrücke oder Stromstärke- und Spannungsmesser

36. Gedämpfte Schwingungen eines Galvanometers

G Grundlagen

Zur Messung kleiner Stromstärken und Spannungen benutzt man Instrumente, die keine für den Verwendungszweck kalibrierten Skalen haben. Man bezeichnet solche Instrumente als Galvanometer. Bild 75 zeigt ein solches Galvanometer in der Ausführung als Spiegelgalvanometer. Den verschiedenen Ausführungsformen der Galvanometer ist gemeinsam, daß ihre Wirkungsweise auf dem Drehspulprinzip beruht. Bild 76 zeigt die prinzipielle Ausführung des Meßwerkes. Zwischen den

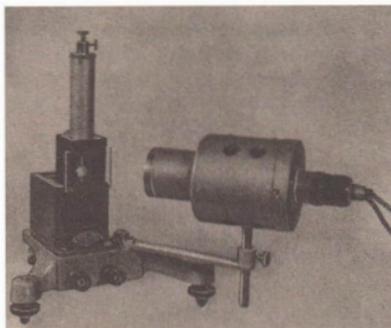


Bild 75

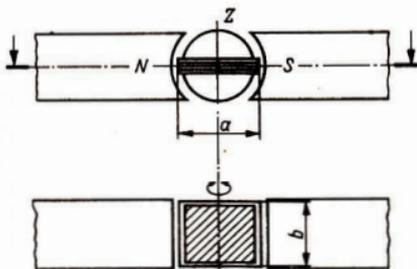


Bild 76

Polen eines Permanentmagneten befindet sich ein Zylinder Z aus Weicheisen, der vom Permanentmagneten magnetisch isoliert ist. In dem schmalen Luftspalt zwischen den Polen N und S und dem Zylinder Z bildet sich ein praktisch homogenes Magnetfeld der Stärke H aus, in dem sich die Drehspule des Galvanometers drehen kann. Diese Drehspule habe die Abmessungen ab und die Windungszahl N .

Fließt durch die Windungen der Drehspule ein Strom, so entsteht ein auf die Drehspule einwirkendes Drehmoment. Die Drehspule wird sich so einstellen, daß das mechanische Drehmoment gleich dem magnetischen Drehmoment ist. Die Drehspule stellt mechanisch gesehen einen schwingungsfähigen Körper dar, dessen Bewegungsgleichung aufzustellen ist. Die

Lösung dieser Gleichung ergibt die Bewegung der Drehspule und der mit dieser verbundenen Anzeigevorrichtung (Zeiger, Spiegel). Die Aufhängung der Drehspule bewirkt das Drehmoment

$$M_d = -k'\varphi$$

(k' Winkelrichtgröße). Durch die Wechselwirkung mit der Umgebung (Luftreibung) wird die Bewegung der Drehspule mechanisch gedämpft. Die Größe dieses Drehmomentes ist

$$M_r = -\beta\dot{\varphi}$$

(β Dämpfungskonstante). An der Drehspule wirkt das Drehmoment

$$M = J\ddot{\varphi}$$

(J Trägheitsmoment), welches im Moment des Stromflusses die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ erteilt.

Das Fließen eines Stromes der Stärke I in der Drehspule hat zur Folge, daß noch ein weiteres Drehmoment M_e wirksam wird. Dieses Drehmoment besteht aus zwei einander entgegenwirkenden Teilen M_{e1} und M_{e2} . Fließt in der Drehspule (Bild 76) ein Strom I , weil an den Klemmen des Galvanometers eine äußere Spannung U anliegt, und ist R_g der Widerstand der Drehspule, so fließt in ihr zunächst der Strom $I = U/R_g$. Auf die im Luftspalt senkrecht zum magnetischen Feld H befindlichen Spulenseiten b wirkt die Kraft $\mu_0 b I H$. Diese Kraft tritt als Kräftepaar mit dem Hebelarm $a/2$ auf. Besteht die Drehspule aus N Windungen, so wird insgesamt das Drehmoment

$$M_{e1} = 2\mu_0 N b I H \frac{a}{2}$$

wirksam. Faßt man die nichtstromabhängigen Größen zur dynamischen Galvanometerkonstanten $G = \mu_0 N a b H$ zusammen, so ist

$$M_{e1} = G I. \quad (1)$$

Sind die Klemmen über einen äußeren Kreis geschlossen, so wird in der Drehspule

bei der Bewegung im magnetischen Feld eine Spannung induziert, die einen Strom der Stärke I_1 hervorruft, der entsprechend der LENZschen Regel seiner Entstehungsursache entgegenwirkt. Nach dem Induktionsgesetz ist diese induzierte Spannung der zeitlichen Änderung des Drehwinkels der Drehspule proportional und hat die Größe

$$U_{\text{ind}} = -\mu_0 N a b H \dot{\varphi}.$$

Mit der Einführung von G ergibt sich

$$U_{\text{ind}} = -G\dot{\varphi}.$$

Der gesamte Stromkreis besteht aus den Widerständen R_g (Widerstand der Drehspule) und R_a (Widerstand des äußeren Kreises). In ihm fließt der Strom

$$I_1 = \frac{U_{\text{ind}}}{R_g + R_a}$$

und somit gilt für das Drehmoment

$$M_{e2} = G I_1 = -\frac{G^2}{R_g + R_a} \dot{\varphi}. \quad (2)$$

Das Gesamtdrehmoment ergibt sich zu $M_e = M_{e1} + M_{e2}$, und mit Gl. (1) und (2) wird

$$M_e = G I - \frac{G^2}{R_g + R_a} \dot{\varphi}. \quad (3)$$

Nunmehr kann aus der Summe aller auf die Drehspule einwirkenden Drehmomente

$$M = M_d + M_r + M_e \quad (4)$$

die Bewegungsgleichung der Drehspule aufgestellt werden. Diese lautet

$$J\ddot{\varphi} + \left(\beta + \frac{G^2}{R_g + R_a} \right) \dot{\varphi} + k'\varphi = G I \quad (5)$$

und stellt eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung dar. Unter der Voraussetzung, daß $R_a \neq \infty$ ist, hat die Drehspule also eine zusätzliche, von R_a abhängige Dämpfung, die den größten Wert bei $R_a = 0$ (Kurzschluß!) hat.

Die Bewegungsform der Drehspule bleibt unverändert, ob sie sich beim Fließen des Stromes I aus der Ruhelage in eine neue Gleichgewichtslage einstellt oder ob sie sich bei Stromlosigkeit wieder in die Nulllage bewegt. Wichtig ist nur, daß in beiden Fällen der Widerstand R_s konstant bleibt.

Der Fall $I = 0$, d. h. das Zurückschwingen in die Ruhelage, wird im folgenden zugrunde gelegt. Die Bewegungsgleichung (5) erhält dann die Form

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{J} \left(\beta + \frac{G^2}{R_s + R_2} \right) \dot{\varphi} + \frac{k'}{J} \varphi = 0. \quad (6)$$

Führt man die Abklingkonstante δ als Abkürzung in der Form

$$2\delta = \frac{1}{J} \left(\beta + \frac{G^2}{R_s + R_2} \right)$$

V Versuchsdurchführung

Das Galvanometer wird erschütterungsfrei aufgestellt und die Schaltung entsprechend Bild 77 aufgebaut. *Schaltung prüfen lassen!* Skale und Beleuchtungseinrichtung zur Erzeugung des Lichtzeigers werden justiert. Durch entsprechende Wahl der Widerstände R_1 und R_2 wird nach Schließen des Schalters S der Ausschlag so eingerichtet, daß er etwa $\frac{2}{3}$ des zur Verfügung stehenden Skalenbereiches beträgt. Der Nullpunkt soll möglichst senkrecht gegenüber dem Galvanometer und der Skalenmitte liegen. Er ist nach jeder Messung zu kontrollieren.

Nach Ablesung des Nullpunktes wird der Drehspule durch Schließen des Schalters S ein Ausschlag erteilt und gewartet, bis die Drehspule zur Ruhe gekommen ist. Es erfolgt die Ablesung. Der Schalter wird wieder geöffnet und damit das Galvanometer vom äußeren Stromkreis getrennt. Die nunmehr notwendigen Ablesungen hängen von der zu untersuchenden Bewegungsform der Drehspule ab.

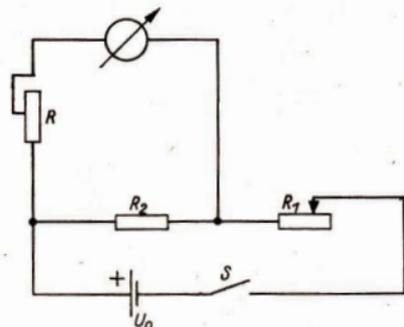


Bild 77

im Dämpfungsglied und für die Kreisfrequenz bei fehlender Dämpfung die Form $\omega_0 = \sqrt{k'/J}$ ein, so folgt für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (7)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung und die Diskussion der drei Fälle, die entscheidend für das Verhalten der Drehspule sind,

1. $\delta < \omega_0$: der Schwingfall,
2. $\delta > \omega_0$: der Kriechfall,
3. $\delta = \omega_0$: der aperiodische Grenzfall,

wurden bereits im Versuch 9 ausgeführt und diskutiert. Der Lösungsgang ist durchzuarbeiten, und die speziellen Kenngrößen des vorliegenden Versuches sind einzuführen.

1. Der Schwingfall

Es sind eine möglichst große Anzahl von Umkehrpunkten des Lichtzeigers links und rechts vom Nullpunkt und zuletzt der Nullpunkt selbst abzulesen. Die Umkehrpunkte sind auf den Nullpunkt zu beziehen. Hierzu wird auf die Ausführungen im Versuch 2 hingewiesen.

Die Periodendauer T der Drehspule wird mehrmals aus einer unterschiedlichen Anzahl von Schwingungen ermittelt, indem die Durchgänge durch den Nullpunkt beobachtet werden. Der gewonnene Mittelwert ist bei der grafischen Darstellung zu verwenden.

2. Der Kriechfall

Aus einer Vielzahl von Augenblickswerten des Ausschlages und den zugehörigen Zeiten werden die Werte ermittelt, die notwendig sind, um das Verhalten der Drehspule grafisch darzustellen. Begonnen wird mit dem größten Ausschlag, den der Lichtzeiger kurz vor dem Öffnen des Schalters erreicht hat.

3. Der Grenzfall

Hier ist grundsätzlich wie bei 2. zu verfahren. Um den Grenzfall einzustellen, ist es zweckmäßig, den Widerstand R zunächst so zu wählen, daß sich ein stark gedämpfter Schwingfall der Drehspule einstellt. Danach ist R systematisch so lange zu verändern, bis der Lichtzeiger bei Rückkehr in die Ruhelage den Nullpunkt gerade nicht mehr überschreitet.

A Aufgaben

1. Zeichnen Sie für je einen Versuch zu den drei Dämpfungsfällen die Bewegung des Lichtzeigers in einem Diagramm auf! Zum besseren Vergleich der darzustellenden Kurven werden die Ausschläge des Lichtzeigers — bei Verwendung eines Spiegelgalvanometers — normiert, indem der Nullpunkt φ_0 als Einheit gewählt wird. Wird ein Lichtzeigergalvanometer benutzt, erübrigt sich die Normierung, und Aufgabe 3. entfällt.
2. In der Schaltung Bild 77 wird eine Spannungsquelle mit der Klemmenspannung U_0 verwendet. Schätzen Sie die Spannung U über R_2 ab! Beachten Sie dabei den Nebenschluß $R_g + R!$
3. Wird ein Spiegelgalvanometer für den Versuch verwendet, so spielt die Entfernung der Skale eine Rolle. Man benutzt im allgemeinen eine gerade Skale. Schätzen Sie ab, wie weit die eingesetzte Skale höchstens entfernt sein darf, wenn bei festgelegtem Maximalausschlag des Lichtzeigers ($\frac{2}{3}$ der Skalenlänge) auf die Reduzierung des Bogens verzichtet wird und der Fehler nicht größer als 1,2% sein soll!
4. Berechnen Sie n und A aus mindestens drei verschiedenen Messungen und geben Sie den relativen Fehler an!
5. Erläutern Sie die praktische Bedeutung der Versuchsergebnisse und begründen Sie, welcher Fall zu bevorzugen ist!
6. Erläutern Sie, weshalb Drehspulgalvanometer direkt nur für Gleichstrom verwendbar sind!

Versuchsgeräte: Spiegelgalvanometer, Beleuchtungseinrichtung, Skale, Stöpselwiderstand, Widerstand R_2 , Regelwiderstand R_1 , Schalter, Akkumulator, Stoppuhr

37. Leistungsanpassung

G Grundlagen

Bei der Übertragung elektrischer Energie von einer Energiequelle zu den Bauelementen bzw. energieumwandelnden Geräten im Stromkreis ist stets darauf zu achten, daß nicht nur an den Verbraucherwiderständen R_V Spannung abfällt, sondern auch an den dazu in Reihe geschalteten Widerständen R_L der Leitungen und R_i der Energiequelle selbst (Bild 78).

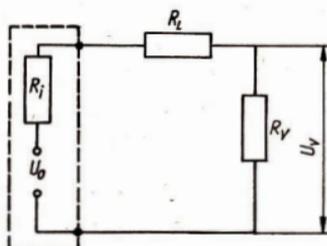


Bild 78

Aus $P_0 = I^2 R$ folgt

$$P_0 = I^2 (R_i + R_L + R_V).$$

In den Verbrauchern wird nur ein *Anteil* der von der Energiequelle bereitgestellten Leistung P_0 umgesetzt.

$$P_V = I^2 R_V.$$

Der Wirkungsgrad kann berechnet werden aus

$$\eta = \frac{P_V}{P_0} = \frac{R_V}{R_i + R_L + R_V}$$

bzw.

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i + R_L}{R_V}}.$$

Um einen hohen Wirkungsgrad zu erreichen, wie z. B. in Energieversorgungsnetzen, sollte $R_V \gg (R_i + R_L)$ sein.

In der Nachrichten- und Meßtechnik geht es bei gegebenen Werten für R_i und R_L häufig darum, einen Verbraucherwiderstand zu wählen, der bewirkt, daß ein *Maximum* an Leistung am Verbraucher zur Verfügung steht. Dabei kann in einem Fall der Innenwiderstand der Energie- bzw. Spannungsquelle gegenüber den Leitungswiderständen groß sein, so daß R_L zu vernachlässigen ist (Meßtechnik, Verstärkertechnik usw.) und im anderen Fall der Innenwiderstand der Spannungsquelle gegenüber den Leitungswiderständen klein sein (z. B. klassische Fernmeldetechnik).

Bei gegebenen Werten für $R_L + R_i$ fällt von der Ursprungung U_0 der Spannungsquelle ein um so geringerer Teil an R_V ab, je kleiner R_V ist. Dafür fließt dann ein größerer Strom durch den Verbraucher, als wenn R_V groß ist. Es muß ein Verhältnis $R_V : (R_L + R_i)$ geben, für das das Produkt aus Spannungsabfall am Verbraucher und Stromstärke, d. h. die Leistung P_V , ein *Maximum* erreicht.

Dieses Problem ist auch mathematisch lösbar.

Die an R_V umgesetzte Leistung beträgt

$$P_V = U_V I.$$

Da

$$\frac{U_V}{U_0} = \frac{R_V}{R_L + R_i + R_V}$$

und

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_i + R_V}$$

ist, folgt

$$P_V = U_0^2 \frac{R_V}{(R_L + R_i + R_V)^2}.$$

Soll nun die Abhängigkeit der Verbraucherleistung P_V vom Verbraucherwiderstand R_V untersucht und der günstigste Fall (*Maximalleistung*) gefunden werden, so ist P_V nach R_V zu differenzieren (U_0 , R_i , R_L sind konstante Größen) und nach den entsprechenden mathematischen Verfahren der Extremwert der Funktion $P_V = f(R_V)$ zu ermitteln und zu untersuchen.

V Versuchsdurchführung

Verfahren 1

An eine Spannungsquelle mit kleinem Innenwiderstand (Batterie) werden zwei in Reihe geschaltete Widerstände angeschlossen, wovon einer den Leistungswiderstand R_L und der andere den Verbraucherwiderstand R_V darstellen soll. Für zwei verschiedene Werte von R_L (z. B. 50 Ω , 100 Ω) wird jeweils der Widerstand von R_V verändert (in Stufen von 10 Ω , von 0 bis 200 Ω). Aus den Werten für den Spannungsabfall an R_V und der Stromstärke wird P_V errechnet und grafisch dargestellt. So kann ermittelt werden, welchen Widerstand der Verbraucher darstellen muß, um bei gegebenem Leitungswiderstand und zu vernachlässigendem Innenwiderstand der Spannungsquelle ein *Maximum* an Leistung aufzunehmen.

Die gefundene Beziehung zwischen R_V und R_L ist auch übertragbar auf R_V und R_i , für den Fall $R_L \ll R_V, R_i$.

Verfahren 2

An eine Spannungsquelle mit zu beachtendem Innenwiderstand (Stromversorgungsgerät, Sensor o. ä.) wird ein veränderbarer Widerstand angeschlossen. Achtung! Zunächst niedrigsten zulässigen Widerstand aus höchstzulässiger Belastung der Spannungsquelle berechnen! Aus Klemmenspannung und Stromstärke wird wieder die aufgenommene Leistung in Abhängigkeit von R_V bestimmt.

Unter Beachtung der aus der mathematischen Betrachtung oder der aus Verfahren 1 gewonnenen Erkenntnis kann auf den Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle geschlossen werden. R_L wird hier vernachlässigt.

A Aufgaben

1. Ermitteln Sie für zwei verschiedene Leitungswiderstände I und U_V in Abhängigkeit von R_V ! ($R_i \ll R_L, R_V$)
2. Errechnen Sie die am Verbraucher umgesetzte Leistung und stellen Sie diese in Abhängigkeit von R_V grafisch dar!
3. Vergleichen Sie die experimentell gefundenen Werte mit dem Ergebnis der mathematischen Lösung der Aufgabe und geben Sie das allgemeine Gesetz für die Leistungsanpassung an!
4. Überzeugen Sie sich von der Lastabhängigkeit der Klemmenspannung einer Spannungsquelle und ermitteln Sie aus der Kurve für die abgegebene Leistung $P = f(R_V)$ den Innenwiderstand!

Versuchsgesäte: Dekadenwiderstände, 2 Vielfachmeßgeräte, Batterie (Blei oder Nicad), Stromversorgungsgerät mit Innenwiderstand $\geq 100 \Omega$

38. Erweiterung des Meßbereichs von Stromstärke- und Spannungsmessern

G Grundlagen

Mitunter besteht in Labors, Versuchswerkstätten, Schulen usw. die Notwendigkeit, den Meßbereich eines vorhandenen Drehspulgerätes zu erweitern oder z. B. ein ursprünglich als Stromstärkemesser vorgesehenes Gerät zur Messung von Spannungen einzurichten. Die Berechnung der jeweils erforderlichen Widerstände soll hier beschrieben werden.

1. Meßbereichserweiterung beim Stromstärkemesser

Ein Stromstärkemesser ist immer *in Reihe* mit dem Gerät zu schalten, dessen Stromaufnahme gemessen werden soll (Bild 79); dann fließt durch den Stromstärkemesser und das zu prüfende Gerät der gleiche Strom.

Es wird angenommen, daß der Zeiger des Meßgerätes Vollausschlag zeigt, wenn die Drehspule von einem Strom der Stärke 2 mA durchflossen wird. Es sei der Kollektorstrom eines Transistors zu messen, der unter bestimmten Umständen 40 mA betragen soll;

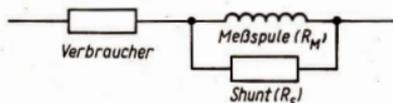


Bild 79

dann ist es zweckmäßig, den Meßbereich des Stromstärkemessers auf 50 mA, d. h. auf das 25fache zu erweitern. Durch den parallel zur Meßspule zu schaltenden Widerstand, den *Shunt* R_S , müssen bei Vollausschlag 48 mA fließen. Da sich bei Parallelschaltung die Stromstärken in den Zweigen umgekehrt verhalten wie die entsprechenden Zweigwiderstände, gilt

$$\frac{R_M}{R_S} = \frac{I_S}{I_M}$$

Folglich ist

$$R_S = R_M \frac{I_M}{I_S}$$

Im angenommenen Fall müßte $R_S = \frac{1}{24} \times R_M$ sein.

Bezeichnet man mit n den Faktor, um den der Meßbereich zu erweitern ist, so gilt die allgemeine Beziehung

$$R_S = \frac{1}{n-1} R_M \quad (1)$$

R_M soll hier sowohl den Widerstand der Meßspule als auch den evtl. dazu in Reihe geschalteten Widerstand zur Temperaturkompensation enthalten. Diesen Widerstand R_M mißt man ja auch, wenn nach Versuch 34 der Innenwiderstand eines Galvanometers ohne Shunt oder Vorwiderstand bestimmt wird.

2. Meßbereichserweiterung beim Spannungsmesser

Um die an einem elektrischen Gerät abfallende Spannung messen zu können, muß das Voltmeter *parallel* zu diesem geschaltet werden, da es dann an der gleichen Spannung liegt (Bild 80). Soll sich der Spannungsabfall durch das Einschalten des Meßgerätes nicht wesentlich ändern, muß der Widerstand des Spannungsmessers groß gegenüber dem des Gerätes sein; denn dann ist der Gesamtwiderstand nur unwesentlich kleiner geworden.

Das zur Messung von Stromstärken verwendete Meßwerk dient nun auch zur Messung von Spannungen. Wird der Spannungs-

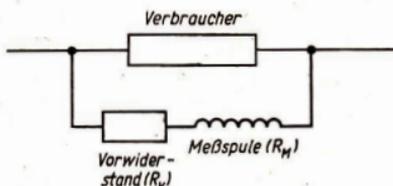


Bild 80

messer an die Meßstelle angeschlossen, so wird es von einem Strom durchflossen, dessen Stärke der Spannung proportional ist. Bei Kenntnis des Innenwiderstandes R_M des Gerätes und der Stromstärke kann die Spannung errechnet und somit die Skale in Volt kalibriert werden. Es wird angenommen, daß ein Spannungsmesser zur Messung von Spannungen bis 250 V eingerichtet werden soll. Der Zeiger ergebe Vollausschlag, wenn das Meßwerk von 2 mA durchflossen wird bzw. wenn eine Spannung von 100 mV anliegt. Der Widerstand R_M (s. Bemerkungen unter 1.) beträgt demnach 50 Ω . Nun soll der Zeiger voll ausschlagen, wenn eine Spannung von

250 V anliegt. Im Meßgerät muß dann ein Strom der Stärke 2 mA fließen. Dies wird erreicht, wenn im Meßzweig ein Widerstand

$$R = \frac{250 \text{ V}}{2 \text{ mA}} = 125 \text{ k}\Omega$$

vorhanden ist.

Zu dem Widerstand des Meßwerkes $R_M = 50 \Omega$ ist noch ein *Vorwiderstand* $R_V = 124950 \Omega$ in Reihe zu schalten. Bezeichnet man wieder mit n den Faktor, um den der Meßbereich zu erweitern ist, so gilt die allgemeine Beziehung

$$R_V = (n - 1) R_M. \quad (2)$$

V Versuchsdurchführung

1. Stromstärkemesser

Der Innenwiderstand des Stromstärkemessers wird mit Hilfe einer Meßbrücke bestimmt (s. Versuch 32). Entsprechend der vorgeschriebenen Erweiterung des Meßbereiches wird der erforderliche Shunt berechnet und mit Hilfe von Dekadenwiderständen zusammengestellt. Die Prüfung erfolgt durch Vergleich der Anzeige mit einem als Normalinstrument zur Verfügung gestellten Stromstärkemesser. Die prozentuale Abweichung von der Anzeige des Normalinstrumentes wird festgestellt und angegeben, worauf die Abweichung zurückgeführt werden kann.

Soll der Nebenwiderstand kleiner als 0,1 Ω sein, dann ist er aus dem zur Verfügung gestellten Draht anzufertigen. Die erforderliche Drahtlänge wird aus der Gleichung

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

überschläglich berechnet (Zugabe für Anschluß beachten). Der genaue Abgleich des Shunts erfolgt in diesem Falle durch Vergleich der Anzeige mit dem Normalinstrument.

2. Spannungsmesser

Die Bestimmung des Innenwiderstandes erfolgt wie bei Teil 1. Entsprechend der vorgeschriebenen Meßbereichserweiterung wird der erforderliche Vorwiderstand errechnet und mit Hilfe von Dekadenwiderständen zusammengestellt. Prüfung und Fehlerbestimmung wie bei Teil 1.

A Aufgaben

1. Erweitern Sie den Meßbereich eines Stromstärke- und eines Spannungsmessers!
2. Entwerfen Sie zweckmäßige Schaltungen zur Prüfung der Anzeige der von Ihnen verwendeten Meßgeräte!

3. Welche Auswirkungen haben Kontaktfehler beim Einbau des Shunts bzw. des Vorwiderstandes?
4. Weshalb soll der Meßbereich möglichst so gewählt werden, daß auf dem letzten Drittel der Skale gemessen wird?

Versuchsgeräte: Demonstrationsinstrumente bzw. Schalttafelgeräte, technische Dekadenwiderstände, Vielfachmeßgeräte, Meßbrücke, regelbarer Widerstand, Stromversorgungsgerät

39. Kapazität von Kondensatoren

G Grundlagen

Beim Anlegen einer Wechselspannung wird der Kondensator periodisch aufgeladen und entladen. Der Effektivwert des fließenden Stromes ist der angelegten Spannung direkt und dem Widerstand umgekehrt proportional. Der hier auftretende kapazitive Widerstand X_C ist von der Frequenz des Stromes und der Kapazität nach der Gleichung

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

abhängig. Es gilt also

$$I = \frac{U}{X_C} = 2\pi f C U.$$

Der gleichzeitig vorhandene Wirkwiderstand kann hier vernachlässigt werden.

1. Ermittlung der Kapazität durch Messung von Spannung und Stromstärke

Ein Kondensator stellt in einem Wechselstromkreis einen *Scheinwiderstand* dar. Wenn hier angenommen wird, daß es sich bei einem Kondensator um einen reinen *Blindwiderstand* handelt, so ist der Fehler viel kleiner als die durch das Einschalten und die Ungenauigkeit der Meßgeräte verursachte Unsicherheit. Der Blindwiderstand errechnet sich aus den Gleichungen

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad \text{und} \quad X_C = \frac{U}{I}.$$

Daraus folgt

$$C = \frac{I}{2\pi f U}.$$

2. Bestimmung der Kapazität von Kondensatoren mit der Wheatstoneschen Brücke

Mit der WHEATSTONESCHEN Brücke kann die Größe unbekannter Widerstände bestimmt werden. Bei Verwendung von Wechselspannung wird das Meßverfahren auch zur Ermittlung der Kapazität von Kondensatoren benutzt.

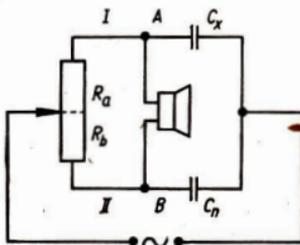


Bild 81

In der Brücke, zwischen den Punkten A und B (Bild 81), fließt kein Strom, wenn die Beziehung

$$X_x \cdot R_a = X_n \cdot R_b$$

erfüllt ist.

(Herleitung der Beziehung s. Versuch 32). Dann fällt z. B. über C_x und C_n die gleiche Spannung ab, so daß zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz besteht. Da $X_x = \frac{1}{2\pi f C_x}$ und $X_n = \frac{1}{2\pi f C_n}$

ist, ist die Brücke abgeglichen, wenn die

Proportion gilt:

$$C_n : C_x = R_a : R_b.$$

Es fließt nunmehr kein Strom in der Brücke, da in den Zweigen I und II auch die *Phasenverschiebung* gleich ist.

Beweis

$$\tan \varphi_I = \tan \varphi_{II},$$

wenn

$$\frac{1}{2\pi f C_x R_a} = \frac{1}{2\pi f C_n R_b},$$

d. h., wenn

$$\frac{C_n}{C_x} = \frac{R_a}{R_b}$$

ist.

V Versuchsdurchführung

Verfahren 1

Je nach den verwendeten Spannungen und den dabei fließenden Strömen sind Stromstärke- und Spannungsmesser so einzuschalten, daß die durch sie verursachte Störung möglichst gering ist (spannungs- bzw. stromrichtige Messung).

Die gewählte Schaltungsart ist zu begründen. Die Frequenz kann mit einem Zungenfrequenzmesser gemessen werden.

Verfahren 2

Bei Verwendung von 50 Hz Wechselspannung und einem genügend empfindlichen Wechselstrommesser (Vielfachmeßgerät) sind die Anweisungen bei Versuch 32 zu beachten. Wird eine Wechselspannung von etwa 2 V mit einer Frequenz von einigen 100 Hz angelegt, so eignet sich zum Feststellen der Stromlosigkeit in der Brücke sehr gut ein Kopfhörer (Lautstärkeminimum aufsuchen!). Als Normalkondensatoren sind Meßkondensatoren mit 0,5% Toleranz brauchbar.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Kapazität von Kondensatoren nach Verfahren 1 und 2! Bei Verfahren 1 sind verschiedene Spannungen zu verwenden.
2. Bei der Messung von ohmschen Widerständen können das Anzeigeinstrument in der Brücke und die Spannungsquelle ihre Plätze tauschen. Ist das bei der Messung von Kapazitäten auch möglich?

Versuchsgeräte: Tonfrequenzgeber (z. B. Schwebungssummer), Kapazitätsmeßbrücke, Kopfhörer, 2 Vielfachmeßgeräte, Frequenzmesser, Kondensatoren

40. Lade- und Entladungskurven bei Kondensatoren

G Grundlagen

Die Kenntnis des Stromstärke- und Spannungsverlaufes beim Einschalten von Stromkreisen, die Kondensatoren enthalten, sowie der Entladungsvorgänge beim Kurzschließen von Kondensatoren

ist Voraussetzung für das Verständnis vieler Vorgänge in Stromkreisen. Wir beschränken uns hier auf den *RC-Kreis*, in dem ein ohmscher Widerstand und ein Kondensator in Reihe geschaltet sind. Den Kondensator betrachten wir als verlustfrei, d. h., wir nehmen an, daß der Isolationswiderstand unendlich groß ist. Wird ein Kondensator über einen Widerstand an eine bestimmte Spannung an-

geschlossen, so lädt er sich in einer bestimmten Zeit auf diese Spannung auf. Die Stromstärke zu Beginn der Aufladung wird durch das Verhältnis U/R bestimmt. Sobald jedoch der Kondensator eine Ladung enthält, wird die Stromstärke geringer, da die von der Ladung erzeugte Spannung $u = q/C$ der angelegten Spannung entgegenwirkt. Die Stromstärke ist auf Null abgesunken, wenn der Kondensator auf die Spannung der Spannungsquelle aufgeladen ist.

Wird der Kondensator über einen Widerstand entladen, so kann der Anfangswert wiederum aus der Gleichung

$$i_0 = \frac{U}{R} \quad (1)$$

errechnet werden.

Da die Spannung mit fortschreitender Entladung absinkt, wird auch die Stromstärke geringer, bis schließlich der Kondensator völlig entladen ist.

Soll ein Kondensator mit der Kapazität C auf eine Spannung U aufgeladen werden, so ist eine Ladung $Q = CU$ unterzubringen. Es ist leicht einzusehen, daß der Vorgang um so länger dauert, je kleiner die mittlere Ladestromstärke, d. h. je größer der Widerstand R ist. Bei gegebenem R ist andererseits die Aufladezeit um so länger, je mehr Ladung unterzubringen ist, d. h. je größer die Kapazität ist. Das Produkt

$$RC = \tau \quad (2)$$

wird als Zeitkonstante bezeichnet.

V Versuchsdurchführung

Mit einem Stromstärkemesser soll der zeitliche Verlauf des Lade- bzw. Entladestromes eines Kondensators bestimmt werden. Dazu ist erforderlich, daß der Lade- bzw. Entladevorgang so langsam erfolgt, daß ein Ablesen des Stromstärkemessers in bestimmten Zeitabständen möglich ist. Diese werden durch das Ticken eines Metronoms (Bild 82)

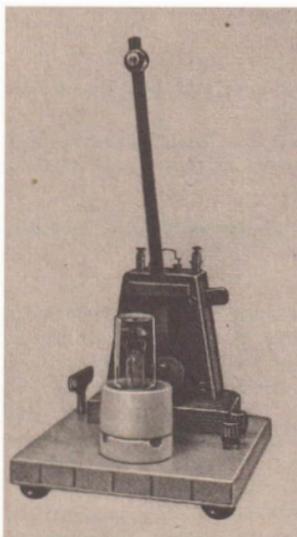


Bild 82

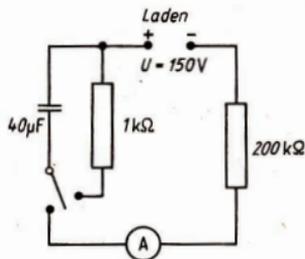


Bild 83

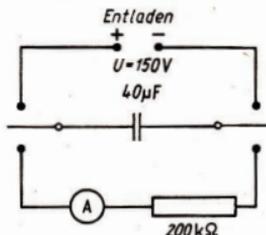


Bild 84

oder das periodische Aufleuchten einer Glimmlampe (Kippschaltung) markiert. Der Stromverlauf kann nach kurzer Übung gut verfolgt werden, wenn die Zeitkonstante des RC -Kreises größer als 6 s ist (z. B. $R = 200 \text{ k}\Omega$, $C = 40 \mu\text{F}$). Bei Zeitabständen von 2,5 s ergeben sich dann genügend Meßwerte, um die Lade- bzw. Entladekurve zeichnen zu können. Während ein Praktikant die Werte abliest, werden sie von einem zweiten notiert. Die Spannung ist so zu wählen, daß der verwendete Meßbereich (z. B. 1 mA) voll ausgenutzt wird.

Dabei muß beachtet werden, daß der Anfangswert jeweils nicht gemessen werden kann, da die Stromstärke bereits abgesunken ist, bevor der Zeiger des Stromstärkemessers voll ausgeschlagen hat. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Schalter (Bilder 83 und 84) zu betätigen, wenn das Metronom tickt, und die erste Ablesung beim folgenden Ticken vorzunehmen. Dieser Wert ist dann i_1 , während i_0 aus Gl. (1) errechnet bzw. bei kurzgeschlossenem Kondensator gemessen wird.

A Aufgaben

1. Messen Sie den Stromverlauf beim Entladen und Laden eines Kondensators über einen Widerstand (Bild 83 und 84)! Führen Sie nach einigen Probemessungen jeweils 3 Messungen aus! Stellen Sie den Stromverlauf beim Laden und Entladen grafisch dar (jeweils 3 Kurven einzeichnen)!

2. Der Spannungsverlauf am Kondensator beim Laden wird durch die Gleichung

$$u = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

und der Spannungsverlauf beim Entladen durch die Gleichung

$$u = U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

erfaßt. Stellen Sie den Spannungsverlauf am Kondensator beim Laden grafisch dar!

3. Wieviel Prozent der Endspannung sind beim Laden nach der Zeit τ erreicht? Wieviel Prozent der ursprünglichen Spannung liegen beim Entladen nach der Zeit 5τ noch am Kondensator?
4. Nach welcher Zeit (in Vielfachen von τ angeben) ist der Lade- bzw. Entladevorgang soweit abgeschlossen, daß nur noch weniger als 1% der Endspannung fehlen bzw. der Ausgangsspannung vorhanden sind?

5. Nach jeder Aufnahme der Ladekurve ist der Kondensator über den Widerstand 1 k Ω (Bild 83) zu entladen. Welche mittlere Entladestromstärke würde sich ergeben, wenn die Kapazität 40 μ F und die Spannung 150 V beträgt und die Anschlüsse durch einen Widerstand von z. B. 0,5 Ω (Kabel) überbrückt werden?

Versuchsgeräte: Stromversorgungsgerät, Kondensator (10 μ F...40 μ F), Vielfachmesser, Widerstand (150 k Ω ...600 k Ω), Umschalter, Zeitgeber (Metronom oder Kippsschaltung mit Glühlampe)

41. Bestimmung von Dielektrizitätszahlen

Mit $E = \frac{U}{d}$ folgt weiter

⊙ Grundlagen

Im homogenen Feld eines Plattenkondensators ist die *elektrische Verschiebung*

$$D = \frac{Q}{A}. \quad (1)$$

In Gl. (1) ist Q die Ladung auf den Platten und A die Plattenfläche. Zwischen der Verschiebung (hier gleich der Ladungsdichte auf den Platten) und der zwischen den Platten herrschenden Feldstärke E besteht die Beziehung

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E. \quad (2)$$

Die Verschiebung ist der Feldstärke proportional.

Der Faktor ϵ_0 wird als *elektrische Feldkonstante* bezeichnet und beträgt $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$. Das Einbringen eines Dielektrikums zwischen die Platten erhöht bei gleicher Feldstärke die elektrische Verschiebung um den Faktor ϵ_r (Dielektrizitätszahl).

Nach Gl. (1) und (2) kann geschrieben werden

$$\frac{Q}{A} = \epsilon_0 \epsilon_r E. \quad (3)$$

$$\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}. \quad (4)$$

Das Verhältnis Q/U ist aber definiert als Kapazität des Kondensators, so daß eine Materialgleichung für die Kapazität eines Plattenkondensators angegeben werden kann:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}. \quad (5)$$

In Gl. (4) und (5) ist d der Abstand der Kondensatorplatten.

Die in einem Metall-Papier-Kondensator zur Trennung der ladungstragenden Aluminiumfolien verwendeten und z. B. mit Paraffin getränkten Papierbahnen dienen nicht nur zur Isolation, sondern erhöhen gleichzeitig die Kapazität. Der Faktor, um den die Kapazität durch Verwendung eines Dielektrikums größer wird als im Vakuum, ist die oben eingeführte Dielektrizitätszahl. Werden Dielektrika mit hohen Dielektrizitätszahlen verwendet, so können bei kleinen Abmessungen des Kondensators große Kapazitätswerte erreicht werden.

⊙ Versuchsdurchführung

Die zu untersuchenden Stoffe (Glimmer, Hartpapier, verschiedene Plaste, Keramik, Glas usw.) werden in trockenem Zustand so zwischen die Platten eines Plattenkondensators gebracht, daß sie den Zwischenraum voll ausfüllen. Es ist außerdem dafür zu sorgen, daß beim Einführen entstandene Reibungselektrizität vor Beginn der Messung abgeleitet wird. Die Bestimmung der Dielektrizitätszahlen erfolgt durch einen Vergleich der Kapazität des Plattenkondensators mit Dielektrikum und ohne Dielektrikum.

Der Fall „ohne Dielektrikum“ ist erreicht, wenn sich Luft ($\epsilon_r = 1,0006$) zwischen den Platten befindet.

Werden die Werte für U , A und d konstant gehalten, so kann nach Gl. (4) der Kapazitätsvergleich auf einen Ladungsvergleich reduziert werden. Es ist dann

$$\epsilon_r = \frac{Q_{\text{mit}}}{Q_{\text{ohne}}}. \quad (6)$$

Schließlich kann die Messung noch weiter vereinfacht werden, wenn berücksichtigt wird, daß die Ausschläge des zur Ladungsmessung verwendeten ballistischen Galvano-

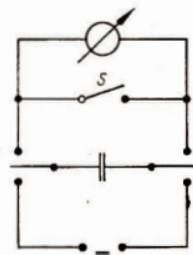


Bild 85

mers proportional der abfließenden Ladung sind. Es ergibt sich damit ϵ_r als Verhältnis der Ausschläge mit und ohne Dielektrikum. Zunächst ist eine Probemessung mit Dielektrikum durchzuführen, bei der man die Spannung so wählt, daß nahezu Vollausschlag des Galvanometers erzielt wird, um den relativen Meßfehler möglichst klein zu halten. Die Meßschaltung zeigt Bild 85.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Dielektrizitätszahl für verschiedene Werkstoffe! Der Mittelwert des Galvanometerausgangs ist jeweils aus mindestens 5 Messungen zu bestimmen.
2. Fehlerabschätzung
3. Wie ist der Einfluß des Dielektrikums auf die Kapazität zu erklären?

Versuchsgeräte: Plattenkondensator, ballistisches Galvanometer, verschiedene Dielektrika

42. Messung der Induktivität

stände. Eine Spule, die einen nach der Gleichung

G Grundlagen

$$R = \frac{eI}{A} \quad (1)$$

In den meisten elektrischen Anlagen treten Spulen neben Kondensatoren und Widerständen als wichtige elektrische Bauelemente auf. Wie die Kondensatoren sind auch Spulen *frequenzabhängige Wider-*

berechenbaren Widerstand von vielleicht weniger als 1Ω hat, kann in einem Wechselstromkreis einen Widerstand von einigen Kiloohm darstellen. Worauf ist dies zurückzuführen?

Wird eine Spule an eine Gleichspannung angeschlossen, so entsteht im Moment des Einsetzens des Stromflusses in der Spule infolge der Magnetflußänderung eine der angelegten Spannung entgegengerichtete *Induktionsspannung* u_i :

$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{Induktionsgesetz}). \quad (2)$$

In Gl. (2) ist N die Anzahl der Windungen der Spule, und $\frac{d\Phi}{dt}$ entspricht der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses. Da hier die Magnetflußänderung nur durch eine Änderung der Stromstärke hervorgerufen wird, schreibt man (2) zweckmäßigerweise in der Form:

$$u_i = -L \frac{di}{dt}. \quad (3)$$

In Gl. (3) ist $L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{A}{l}$, und $\frac{di}{dt}$ bedeutet die Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke. Das Minuszeichen weist darauf hin, daß die Induktionsspannung der den Stromfluß verursachenden Spannung entgegengerichtet ist. Die Größe L enthält die im Zusammenhang mit der Entstehung einer Selbstinduktionsspannung wichtigen Größen *Permeabilitätszahl* μ_r des Stoffes, in dem sich das Magnetfeld der Spule ausbreitet, *Windungszahl*, *Querschnitt* und *Länge* der Spule. Sie trägt die Bezeichnung *Eigeninduktivität*. Vielfach wird sie auch *Induktivität* der Spule genannt.

Entsteht durch die gleichmäßige Änderung der Stromstärke um 1 A s^{-1} zwischen den Enden einer Spule eine Spannung von 1 V , so hat die Spule die Induktivität $L = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ Henry}$ (H).

Beim Anschluß einer Spule an eine Wechselspannung ruft die dauernde Stromstärkeänderung auch eine ständige Selbstinduktionsspannung hervor, die einen Teil der angelegten Spannung aufhebt. Dadurch fließt ein geringerer Strom, als das

bei einer gleich großen Gleichspannung der Fall wäre. Die Verringerung der Stromstärke kann nun als die Folge einer Widerstandsvergrößerung gedeutet werden.

Den zusätzlichen Widerstand bezeichnet man als *induktiven Widerstand* X_L . Er ist von der *Frequenz* f des Wechselstromes und der *Induktivität* L nach der Beziehung

$$X_L = 2\pi f L = \omega L \quad (4)$$

abhängig.

Während der nach Gl. (1) berechenbare Widerstand eine Umwandlung der elektrischen Energie in Wärmeenergie verursacht, wird im induktiven Widerstand (4) die elektrische Energie nur vorübergehend in magnetische Energie verwandelt. Beim Absinken der Stromstärke in der Spule wandelt sich die magnetische wieder in elektrische Energie um, so daß im Zeitmittel am induktiven Widerstand keine Leistung umgesetzt wird. Der induktive Widerstand wird deshalb als *Blindwiderstand*, der nach Gl. (1) berechenbare als *Wirkwiderstand* bezeichnet.

Eine Spule stellt in einem Wechselstromkreis einen Blind- und auch einen Wirkwiderstand dar. Sie kann z. B. als Reihenschaltung aus beiden Widerstandsarten aufgefaßt werden (Bild 86).

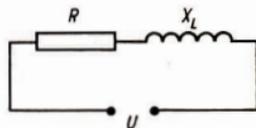


Bild 86

Die Spannungsabfälle an den beiden Widerständen erreichen nicht zur gleichen Zeit ihre Höchstwerte. Während am induktiven Widerstand Spannungs- und Stromstärkeverlauf eine Phasendifferenz von $\pi/2$ aufweisen, sind sie am Wirkwiderstand in Phase. Die Gesamtspannung ergibt sich hier nicht aus der algebraischen, sondern aus der *geometrischen Summe* der *Teilspannungen* (Bild 87).

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}.$$

Nach dem OHMSchen Gesetz ist

$$U = IZ, \quad U_R = IR \quad \text{und} \quad U_L = IX_L.$$

Folglich gilt auch

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (5)$$

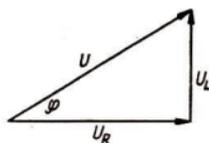


Bild 87

Dieser Gesamtwiderstand Z , der sich aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand zusammensetzt, bestimmt die Stromstärke, die bei einer gegebenen Spannung in einem Wechselstromkreis fließt. Er wird als *Scheinwiderstand* bezeichnet:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}. \quad (6)$$

Hat die Spule einen Kern aus ferromagnetischem Material, ($\mu_r \gg 1$), so stellt sie nicht nur einen Wirkwiderstand dar, weil in den Drähten Wärmeenergie entsteht, sondern auch weil im Kern durch *Ummagnetisieren* und *Induktionsströme* Energie verbraucht wird (Hysteresee- und Wirbelstromverluste). Der Wirkwiderstand bei Gleichstrom ist dann nicht identisch mit dem bei Wechselstrom.

Es ist aber nicht möglich, diesen Widerstand bei Wechselstrom getrennt vom Scheinwiderstand zu messen, wie das bei Spulen ohne Kern ($\mu_r = 1$) der Fall ist.

Wie kann eine Lösung gefunden werden?

1. Reihenschaltung von Spule mit Kern und induktionsfreiem Widerstand

Schaltet man einen *induktionsfreien* Widerstand (Normalwiderstand — bifilar gewickelt) mit der zu untersuchenden Spule (mit Kern) in Reihe, so können die Spannungen U_R , U_{Sp} und U gemessen werden (Bild 88). Sie ordnen sich im Zeigerdiagramm entsprechend Bild 89 an.

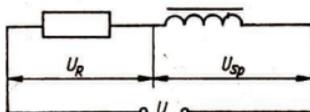


Bild 88

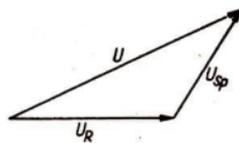


Bild 89

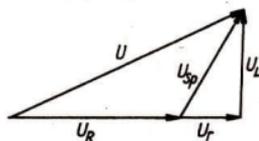


Bild 90

In Phase mit U_R liegt der Spannungsabfall U_r am Wirkwiderstand der Spule, 90° phasenverschoben dazu liegt der Spannungsabfall am Blindwiderstand der Spule. Die Lage beider Spannungen ist damit eindeutig bestimmt und folglich auch ihre Größe im Vergleich zu den anderen Spannungen (Bild 90).

Da $U_L = IX_L$ und $X_L = \omega L$, kann durch Messung von I und ω schließlich L ermittelt werden.

Der gefundene Wert gilt dann als Kennwert der Spule, wenn die Magnetisierung des Kernmaterials unterhalb der Sättigung erfolgt, d. h. im geraden Teil der Hysteresis-Kurve verbleibt.

2. Messung bei zwei verschiedenen Frequenzen

Wird der Scheinwiderstand Z der untersuchten Spule für zwei verschiedene Frequenzen bestimmt, so erhält man zwei Gleichungen mit den Unbekannten R und L .

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}; \quad Z_2 = \sqrt{R^2 + (\omega_2 L)^2}.$$

Daraus folgt

$$Z_1^2 - Z_2^2 = (\omega_1 L)^2 - (\omega_2 L)^2$$

und schließlich

$$L = \sqrt{\frac{Z_1^2 - Z_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}. \quad (7)$$

Unter der Voraussetzung, daß sich bei der Frequenzänderung der Widerstand R nicht verändert hat, kann so die Induktivität bestimmt werden.

3. Bestimmung der Frequenzkurve des Scheinwiderstandes

Stellt man den Scheinwiderstand als Funktion der Frequenz grafisch dar, so kann die Induktivität aus dem Anstieg der Kurve ermittelt werden.

Rechnerisch ergibt sich der Anstieg aus der Differentiation von $Z = f(\omega)$.

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{\omega L^2}{Z}. \quad (8)$$

Wird der Anstieg $\frac{\Delta Z}{\Delta \omega}$ in einem Kurvenpunkt (Z_1, ω_1) grafisch bestimmt (Bild 91), so kann L berechnet werden.

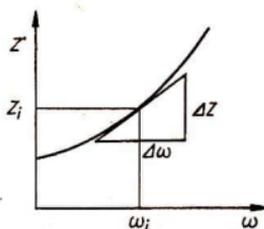


Bild 91

V Versuchsdurchführung

Bestimmung der Induktivität einer leeren Spule

Der Wirkwiderstand ist mit der WHEATSTONESCHEN BRÜCKE zu ermitteln. Danach wird die Spule an eine Wechselspannung angeschlossen, deren Frequenz man bestimmen kann. Das Verhältnis aus den Werten für Spannung und Stromstärke ergibt den Scheinwiderstand. Aus (6) kann die Induktivität ermittelt werden.

Bestimmung der Induktivität einer Spule mit Kern

1. Verfahren: Es werden die Spannung am induktionsfreien Widerstand und an der Spule sowie die Klemmenspannung gemessen (Bild 88). Aus diesen Werten ist das Zeigerdiagramm (Bild 89) zu konstruieren und grafisch U_L zu ermitteln (Bild 90). Dieser Wert wird durch die zu messende Stromstärke dividiert (ergibt X_L). Mit dem zu messenden Wert für f kann nunmehr L ermittelt werden.

2. Verfahren: Es wird der Scheinwiderstand bei zwei Frequenzen gemessen; danach der Wert für L nach Gl. (7) berechnet. Der Frequenzunterschied ist so zu wählen, daß einerseits die meßgerätebedingten systematischen Meßfehler gegenüber den Differenzbeträgen klein sind und andererseits die voneinander zu subtrahierenden Beträge Z_1^2 und Z_2^2 etwa die gleiche Größenordnung haben (Vorschlag: $\omega_1 \approx 1,5\omega_2$).

3. Verfahren: Es wird die Kurve für Z in Abhängigkeit von ω aufgenommen und der Anstieg an mehreren Kurvenpunkten nach (8) grafisch ermittelt. Die Induktivität ist als Mittelwert aus den Einzelwerten anzugeben.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Induktivität leerer Spulen!
2. Weshalb darf keine pulsierende Gleichspannung zur Bestimmung des Wirkwiderstandes der Spulen verwendet werden?
3. Ermitteln Sie die Induktivität von Spulen mit Kern nach wenigstens zwei der angegebenen Verfahren! Vergleichen Sie die Werte für die Induktivität einer Spule, die nach verschiedenen Verfahren ermittelt wurden!
4. Versuchen Sie, durch geeignete Wahl und Schaltung der Meßgeräte und durch günstige Maßstäbe bei der zeichnerischen Darstellung die Meßfehler klein zu halten! Begründen Sie Ihr Vorgehen! Vergleichen Sie die relativen Fehler, die durch die elektrischen Messungen entstehen, mit denen, die durch die grafische Methode verursacht werden!

Versuchsgeräte: Meßbrücke, Spannungs- und Stromstärkemesser, Frequenzmesser, Normalwiderstand, Spulen mit Kern, Spulen mit hoher Windungszahl ohne Kern

43. Kompensation der Blindleistung

G Grundlagen

In Energieversorgungsnetzen befinden sich meist neben Geräten, in denen elektrische Energie nur in mechanische, chemische oder Wärmeenergie umgewandelt wird, auch solche, in denen *Magnetfelder* entstehen. Handelt es sich dabei um Wechselstromnetze, so werden die Magnetfelder *periodisch auf- und abgebaut*.

Der Stromkreis kann wie in Versuch 42 als aus Wirk- und Blindwiderständen bestehend betrachtet werden. Wir wollen diese wieder als in Reihe geschaltet annehmen (Bild 92). Dann gilt für die Spannungszeiger Bild 93. Durch Multiplikation der Spannungszeiger mit der Stromstärke entsteht das *Zeigerdiagramm* für die *Leistungen* (Bild 94).

Die von der Spannungsquelle abzugebende und im Stromkreis zu übertragende Leistung (*Scheinleistung*) ist um so größer,

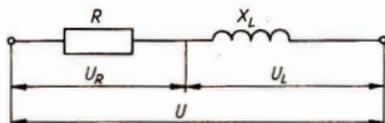


Bild 92

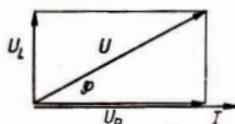


Bild 93

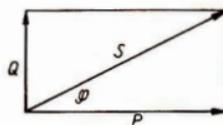


Bild 94

S Scheinleistung, Q Blindleistung, P Wirkleistung

je größer die *Blindleistung* ist. Spannungsquelle und Leitungen würden weniger belastet (geringere Stromstärke), wenn die z. B. für den Betrieb von Transformatoren, Motoren und anderen Geräten mit induktivem Widerstand notwendige Blindleistung nicht zwischen diesen Geräten und der u. U. hunderte Kilometer entfernten Spannungsquelle zu transportieren wäre. Im Idealfall (in Bild 94 $\varphi = 0$) brauchte die Spannungsquelle nur für die Wirkleistung P ausgelegt zu sein; die Leitungen könnten für entsprechend niedrigere Stromstärken bemessen werden.

Wodurch ist das zu erreichen?

Es muß ein Gerät eingeschaltet werden, das die *Phasenverschiebung* zwischen Strom und Spannung (Bild 93) verringert bzw. aufhebt. Dabei kann es sich nur um ein Gerät handeln, das eine zur induktiven entgegengesetzte Phasenverschiebung be-

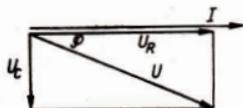


Bild 95

wirkt. Dies trifft für einen *Kondensator* zu. Sein *kapazitiver Widerstand* ruft eine Phasenverschiebung entsprechend Bild 95 hervor.

Die *kapazitive Blindleistung* kompensiert die induktive. Wird also ein Kondensator *parallel* zu den Geräten, die Spulen enthalten, geschaltet, so pendelt die Blindleistung zwischen Spule und Kondensator, ohne Spannungsquelle und Zuleitung zu belasten (Bild 96 und 97).

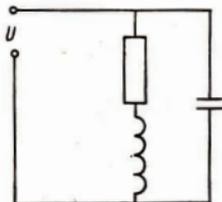


Bild 96

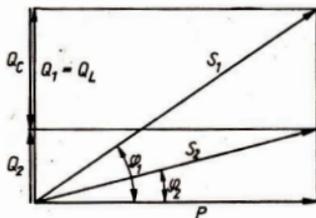


Bild 97

Der Blindwiderstand des Kondensators ergibt sich aus

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Die Blindleistung des Kondensators berechnet sich aus

$$Q_C = U_C I_C = \frac{U^2}{X_C} = \omega C U^2. \quad (1)$$

Diese verringert die Scheinleistung von S_1 auf S_2 , da die resultierende Blindleistung $Q_2 = Q_{L(1)} - Q_C$ ist. Der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ wird verbessert. Bei geeigneter Wahl der Kapazität kann $Q = 0$ und somit $\cos \varphi = 1$ werden. Die *Stromstärke* in den Zuleitungen erreicht dann einen *minimalen Wert*.

$$I_{\min} = \frac{P}{U} = \frac{I^2 R}{U}.$$

Die entsprechende Kapazität kann berechnet werden.

Dazu wird ein Weg vorgeschlagen, der den Meßmöglichkeiten angepaßt ist. Man geht davon aus, daß die ursprünglich (ohne Kondensator) aufgenommene induktive Blindleistung durch die kapazitive Blindleistung zu kompensieren ist.

$$Q_{L,R} = Q_C.$$

Es gilt $Q_L = I^2 X_L$, wobei $X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$. Z ist der Scheinwiderstand, der aus U und I ermittelt werden kann. Folglich gilt

$$Q_L = I^2 \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} \quad (2)$$

Gl. (1) mit (2) gleichgesetzt, ergibt

$$\omega C U^2 = I^2 \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2}$$

und somit

$$C_{Q=0} = \frac{I^2 \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2}}{2\pi f U^2}.$$

V Versuchsdurchführung

Eine Reihenschaltung aus einem Widerstand R und einer verlustarmen Spule mit Kern soll eine Gerätegruppe darstellen, die sowohl Wirk- als auch Blindwiderstände enthält (z. B. belastete Motoren und Transformatoren). Als Wirkwiderstand kann näherungsweise der Gleichstromwiderstand der Schaltung betrachtet werden (mit Meßbrücke bestimmen!).

Es wird eine Schaltung nach Bild 96 aufgebaut. Der noch einzuschaltende Strommesser soll die Stromstärke in der Zuleitung, der Spannungsmesser die Klemmenspannung messen.

Zunächst sind die Werte für U und I ohne eingeschalteten Kondensator zu messen. Dann wird in möglichst kleinen Stufen die einzuschaltende Kapazität verändert und jeweils bei konstant gehaltenem U die Stromstärke gemessen. Der Kapazitätsbereich muß solche Werte enthalten, bei denen das Stromstärkeminimum eindeutig erkennbar wird.

A Aufgaben

- Bestimmen Sie den Wirkwiderstand der R - L -Schaltung!
- Schließen Sie die R - L -Schaltung an Wechselspannung an und messen Sie U , I und f !
- Schätzen Sie den absoluten und relativen Fehler der Meßwerte für R , U , I und f ab!
- Berechnen Sie mit den gemessenen Werten die erforderliche Kapazität zur vollständigen Kompensation der Blindleistung sowie die zu erwartende Stromstärke!
- Berechnen Sie aus U , I die Scheinleistungen S für die verschiedenen Werte von C , und stellen Sie diese Abhängigkeit von C grafisch dar!
- Entnehmen Sie aus dem Diagramm die Kapazität C , für die ein Scheinleistungsmimum vorliegt. Vergleichen Sie mit dem errechneten Wert!
- Welche Beziehung müßte zwischen Scheinleistung $S_{\min} = UI_{\min}$ und Wirkleistung $P = I^2R$ bestehen? Vergleichen Sie die aus den gemessenen Werten berechenbaren Leistungen!
- Welchen Wert müßte $\cos \varphi$ im Falle der vollständigen Kompensation erreichen? Vergleichen Sie mit dem aus S_{\min} und P ermittelbaren Wert!
- Die Kompensation der Blindleistung kann auch durch eine Reihenschaltung von L und C erreicht werden. Weshalb eignet sich diese im praktischen Falle nicht?

Versuchsgeräte: Kleinmeßbrücke in WHEATSTONE-Schaltung, zwei Vielfachmeßgeräte, Zungenfrequenzmesser, ohmscher Widerstand, Vorschaltgerät (Drosselspule), Stelltransformator, Schalter, diverse Kondensatoren, die eine Kapazitätsabstufung von $0,5 \mu\text{F}$ gestatten

44. Resonanzerscheinungen in *RLC*-Schaltungen

G Grundlagen

Wir betrachten einen elektrischen Stromkreis, der eine Induktivität L , eine Kapazität C und einen Wirkwiderstand R ent-

hält (Bild 98). Wird der Kondensator einmal aufgeladen oder in der Spule ein einmaliger Spannungsstoß erzeugt, dann

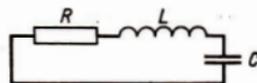


Bild 98

gilt nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz

$$-L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{Q}{C}.$$

Mit $I = \frac{dQ}{dt}$ folgt

$$-L \frac{d^2Q}{dt^2} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

oder

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (1)$$

Diese Differentialgleichung hat die gleiche Form wie Gl. (1) in Versuch 9 und beschreibt hier die *freie gedämpfte elektromagnetische Schwingung*. Wir führen hier analog Versuch 9 ein:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (2)$$

und

$$2\delta = \frac{R}{L}. \quad (3)$$

Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist nach Gl. (6) in Versuch 9

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (4)$$

Aus Gl. (4) folgt mit (2) und (3) die Frequenz der gedämpften elektromagnetischen Schwingung

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (5)$$

Ist außer dem Wirkwiderstand der Spule kein weiterer ohmscher Widerstand ein-

geschaltet, so ist gewöhnlich $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$,

und (5) geht über in die bekannte THOMSONsche Gleichung

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (6)$$

Die Zusammenschaltung einer Spule mit einem Kondensator ergibt stets einen

RLC-Kreis, wobei *R* vor allem den Wirkwiderstand der Spule darstellt, der die in Versuch 45 erläuterten Verluste hervorruft, während der Kondensator hier als verlustfrei angenommen werden kann. In einer derartigen Schaltung können sowohl freie gedämpfte elektromagnetische Schwingungen erzeugt als auch ungedämpfte Schwingungen erzwungen werden, deren Frequenz der Erreger bestimmt. Das Verhalten einer *RLC*-Schaltung bei Anschluß an eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz *f* soll hier beschrieben werden.

Reihenschaltung von *L(R)* und *C*

Die Reihenschaltung einer Spule mit einem Kondensator (Bild 99) kann rechnerisch erfaßt werden als Reihenschaltung

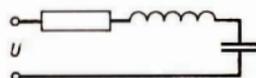


Bild 99

einer verlustfreien Kapazität und Induktivität mit einem kapazitäts- und induktivitätsfreien Widerstand *R*. Der Gesamtwiderstand (Scheinwiderstand *Z*) ergibt sich aus

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Der Betrag des Widerstandes ist folglich

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (7)$$

Bild 100 zeigt das Diagramm der Widerstände, das aus dem Diagramm der Spannungen (Bild 101) ableitbar ist. Aus Bild 100 ergibt sich

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (8)$$

Der Betrag des Scheinwiderstandes und die im Stromkreis auftretende Phasenverschiebung hängen also von der Fre-

quenz ab. Bei der Frequenz, für die kapazitiver und induktiver Widerstand gleich groß sind ($\omega L = \frac{1}{\omega C}$), fließt ein Strom, dessen Stärke nur von der angelegten Spannung U und dem Widerstand R abhängig ist. Die Spannungen am induktiven und kapazitiven Widerstand sind bei dieser Frequenz von gleicher Größe. Da sie jedoch entgegengesetzte Phasen haben, heben sie sich in ihrer Wirkung auf den Strom gegenseitig auf.

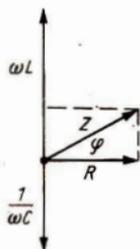


Bild 100

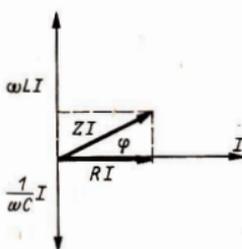


Bild 101

Es ist dann

$$Z = R \quad \text{und} \quad I = \frac{U}{R}.$$

Die Stromstärke erreicht einen Höchstwert, und die Phasenverschiebung zwischen U und I wird nach (8) Null.

Aus $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ folgt für diesen Resonanzfall

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

oder

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

Das ist die Resonanzfrequenz; sie ist gleich der Frequenz der freien Schwingung des ungedämpften Schwingkreises, vgl. Gl. (2).

Im Resonanzfall fällt die gesamte Spannung U über dem Wirkwiderstand R ab. Da dieser jedoch gewöhnlich klein gegen

die Blindwiderstände ist, alle Widerstände aber vom gleichen Strom durchflossen werden, ist der Spannungsabfall an X_C und X_L groß gegen den Spannungsabfall an R . Das bedeutet $U_{C,L} \gg U$. Diese Erscheinung, daß die Spannung an einzelnen Schaltgliedern größer als die Klemmenspannung ist, wird als *Spannungsüberhöhung* bezeichnet. Ihr Wert ergibt sich als Quotient aus Blind- und Wirkwiderstand:

$$\text{Überhöhung} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR}. \quad (10)$$

Die Spannung an der Spule ist im Resonanzfall etwas größer als die am Kondensator, da an der Spule die Summe aus U_R und U_L liegt (Bild 102).

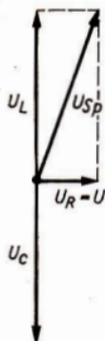


Bild 102

Parallelschaltung von $L(R)$ und C

In dieser Schaltung (Bild 103) fließt im Kondensatorzweig ein Strom, der der Spannung um 90° voreilt, während der Strom im Spulenzweig nacheilt. Jedoch

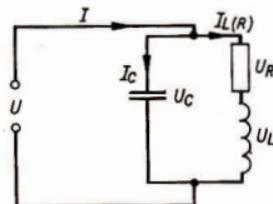


Bild 103

ist wegen des vorhandenen Wirkwiderstandes $\varphi_{Sp} < 90^\circ$ (Bild 104). Der Gesamtstrom ergibt sich als Summe beider Ströme. Aus Bild 104 ist zu erkennen, daß I um so kleiner ist, je kleiner der ohmsche Widerstand wird, da dann φ_{Sp} gegen 90° geht. Der Betrag von I erreicht ein Minimum, wenn I in Phase mit U ist. Nach Bild 105 ist das der Fall, wenn $I_{L(R)}$ wenig größer als I_C ist. In diesem Fall stellt der Schwingkreis den größten Widerstand dar.

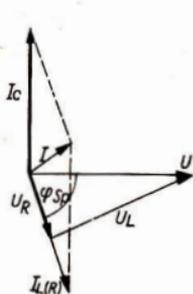


Bild 104

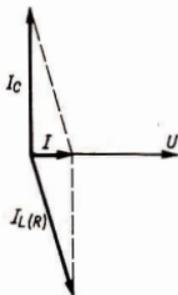


Bild 105

Er nimmt dann nur die Wirkleistung UI auf, während die viel größere Scheinleistung UI_C zwischen Kondensator und Spule pendelt. Das ist der *Resonanzfall* für den *Parallelschwingkreis*. Er ist ausgezeichnet durch das Minimum des Stromes in der Zuleitung. Das Verhältnis aus Schwingkreisstrom und Gesamtstrom wird als *Stromüberhöhung* bezeichnet.

Der Scheinwiderstand Z des Parallelschwingkreises ergibt sich aus

$$Z = \frac{Z_{L,R} X_C}{Z_{L,R} + X_C} = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Mit $\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$ folgt weiter

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Der Ausdruck wird mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitert:

$$Z = \frac{\frac{R}{\omega^2 C^2} - j \frac{1}{\omega C} \left(R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{L}{C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11)$$

Wie oben ausgeführt, sind im Resonanzfall U und I in Phase. Der Imaginärteil von Gl. (11) ist dann Null:

$$R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{L}{C} = 0.$$

Daraus kann die Resonanzfrequenz berechnet werden:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad (12)$$

Für $\left(\frac{R}{L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$ erhält man wieder als Näherung die THOMSONSche Gleichung (6).

Bei der Reihenschaltung von $L(R)$ und C ergibt sich für $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ein minimaler Widerstand, so daß I einen Maximalwert erreicht. Die Wechselspannung U hält dann eine Schwingung aufrecht, deren Amplituden \hat{U}_C und \hat{U}_L viel größer sind als \hat{U} . Man bezeichnet deshalb diese Erscheinung als *Spannungsresonanz*.

Bei der Parallelschaltung von $L(R)$ und C stellt der Schwingkreis bei

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

den maximalen Widerstand dar, so daß der Strom in der Zuleitung einen Minimalwert annimmt. Da dieser Strom I im Schwingkreis eine Schwingung mit viel größeren Amplituden \hat{I}_C und \hat{I}_L als \hat{I} aufrechterhält, wird dieser Effekt als *Stromresonanz* bezeichnet.

Das Maximum der Resonanzkurve für den Strom im Reihenschwingkreis (Bild 106) ist

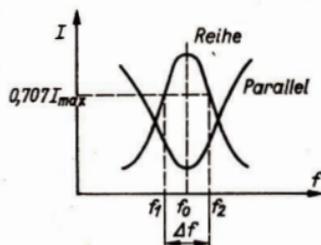


Bild 106

um so höher, je kleiner R ist, während sich beim Parallelkreis ihr Minimum mit kleiner werdendem R der f -Achse nähert. Ein weiteres Kennzeichen für einen Schwingkreis ist seine *Bandbreite* $\Delta f = f_2 - f_1$ (Bild 106). Sie gibt für den Reihenkreis den Frequenzbereich an, in

dem gilt $I \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} I_{\max}$. Für den Parallelkreis gibt sie den Bereich an, in dem $Z \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} Z_{\max}$ ist. Es gilt die Beziehung

$$\Delta f = \frac{\delta}{\pi} \quad (13)$$

mit $\delta = \frac{R}{2L}$ nach Gl. (3).

Je nach der Einordnung eines Reihen- oder Parallelschwingkreises in eine elektrische Schaltung, die mit Spannungen verschiedener Frequenzen gespeist wird, wird ein bestimmter Frequenzbereich hervorgehoben oder unterdrückt. Der ausgewählte Bereich ist um so kleiner, je geringer die Dämpfung des Kreises ist.

V Versuchsdurchführung

1. Reihenkreis

Eine Spule und ein Kondensator werden an einen Generator angeschlossen, der Spannungen in einem Frequenzbereich erzeugt, der die Resonanzfrequenz einschließt. Da derartige Generatoren gewöhnlich einen hohen Innenwiderstand haben, ist die Ausgangsspannung sehr belastungsabhängig. Die Spannung ist deshalb ständig auf den vorgesehenen Wert nachzuregulieren. Wegen der zu erwartenden Spannungsüberhöhung bei Resonanz sollte die Generatorspannung höchstens $\frac{1}{20}$ der für den Kondensator zulässigen Spannung betragen. Sie muß außerdem so gewählt werden, daß bei $f = f_0$ die zulässige Generatorausgangsleistung nicht überschritten wird. Für die Ermittlung der Resonanzkurve (Bild 106) ist zunächst die Resonanzfrequenz festzustellen, indem man das Stromstärkemaximum aufsucht. Danach wird die Frequenz in dem interessierenden Bereich variiert. Aus U und I_{\max} wird R errechnet.

2. Parallelkreis

Es wird zunächst die Kurve für die Stromstärke in Abhängigkeit von der Frequenz aufgenommen und daraus dann die Kurve für den Widerstand Z berechnet. Um den Einfluß des Wirkwiderstandes auf die Kurvenform sichtbar zu machen, führt man eine zweite Versuchsreihe durch, bei der in Reihe zur Spule ein zusätzlicher Widerstand von der Größe des bereits ermittelten Wirkwiderstandes geschaltet wird.

A Aufgaben

1. Vergleichen Sie Differentialgleichung (1) mit der entsprechenden in Versuch 9, stellen Sie analoge Größen zusammen und diskutieren Sie die Analogie!
2. Bestimmen Sie für Reihen- und Parallelkreis $I = f(f)$!

3. Ermitteln Sie für beide Schaltungen f_0 !
4. Bestimmen Sie aus f_0 und C beim Reihenkreis die Induktivität der Spule sowie aus U und I_{\max} bei Reihenresonanz den Wirkwiderstand R !
5. Ermitteln Sie die Spannungsüberhöhung bei Reihenresonanz und die Stromüberhöhung bei Stromresonanz experimentell und vergleichen Sie den Wert für die Spannungsüberhöhung mit dem nach Gl. (10) errechenbaren!
6. Zeichnen Sie die Kurve $Z = f(f)$ für den Parallelkreis und bestimmen Sie hieraus und aus der Stromkurve des Reihenkreises die Bandbreite! Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit den aus Gl. (13) errechenbaren!
7. Ermitteln Sie Resonanzfrequenz und Bandbreite für einen Parallelschwingkreis mit verdoppeltem Dämpfungswiderstand!

Versuchsgeräte: Generator, 2 Stromstärkemesser und 2 Spannungsmesser, die im zu untersuchenden Frequenzbereich verwendbar sind, Spule, Kondensator, Widerstand

45. Transformator

⚙ Grundlagen

Ein Transformator stellt sowohl einen *Wirkwiderstand* als auch einen *induktiven Blindwiderstand* dar. Die Blindkomponente des Transformator-Scheinwiderstandes rührt vor allem von der Induk-

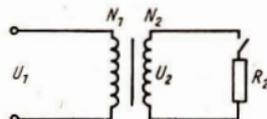


Bild 107

tionsspannung her, die in der Primärspule infolge des sich periodisch ändernden magnetischen Flusses entsteht. Sie ist außerdem um so größer, je größer die *Streuung* ist, d. h. je geringer der Anteil des primärseitig erzeugten magnetischen Flusses ist, der die Sekundärspule durchsetzt.

Die Wirkkomponente wird im *Leerlauf*, d. h. bei geöffnetem Sekundärkreis (Bild 107) bzw. $R_2 \rightarrow \infty$ von den Stromwärmeverlusten in den Windungen der Primär-

spule, den Wärmeverlusten durch Wirbelströme im Kern und durch Ummagnetisierungs- (Hysteres-) Verluste verursacht. Bei *Belastung* der Sekundärseite mit ohmschen Widerständen ist die sekundärseitig abzugebende Wirkleistung auch primärseitig aufzunehmen, folglich vergrößert sich dann die Wirkkomponente.

Bei Belastung (Sekundärstrom fließt) wird durch Rückwirkung auf die Primärseite die Selbstinduktionsspannung U_{11} verringert, so daß ein stärkerer Primärstrom fließen kann und folglich eine größere Leistung aufgenommen wird.

Für einen technischen Transformator ist bei einer Frequenz von 50 Hz der Wirkwiderstand im Leerlauf gewöhnlich klein gegenüber dem Blindwiderstand, so daß die Phasenverschiebung nahezu 90° beträgt, d. h., die dann aufgenommene Leistung ist vorwiegend Blindleistung, die zwischen Transformator und Spannungsquelle pendelt.

Im Leerlauf gilt für den streuungsfreien Transformator angenähert $U_2:U_1 = N_2:N_1$. Das Verhältnis der Windungszahlen $N_2:N_1$ wird als *Übersetzungsverhältnis* \ddot{u} bezeichnet. Bei Belastung kann u. a. infolge der Spannungsabfälle an den Spulenwindungen dieses Verhältnis nicht erreicht werden, d. h. $U_2 < U_1 \cdot \ddot{u}$.

V Versuchsdurchführung

1. Leerlauf

Ein Transformator wird sekundärseitig lediglich durch einen *hochohmigen* Spannungsmesser belastet. Primärseitig werden die Spannung U_1 , die Stromstärke I_1 und mit einem Leistungsmesser die aufgenommene Wirkleistung P_1 gemessen. Je nach Größe der aufgenommenen Primärstromstärke ist zu entscheiden, wie die Meßgeräte zu schalten sind, um den kleinsten systematischen Meßfehler zu verursachen. Die Primärspannung wird in geeigneten Stufen von Null bis zur vorgesehenen Betriebsspannung erhöht, die jeweils zugehörigen Werte für I_1 , P_1 und U_2 ermittelt.

Vorsicht! Zulässige Spannungen nicht überschreiten!

2. Ohmsche Belastung

Sekundärseitig wird ein veränderbarer ohmscher Widerstand eingeschaltet (R_2). Bei der Primärnennspannung des Transformators werden bei unterschiedlicher Belastung (R_2 von hohen Werten ausgehend verringern) Sekundärstrom I_2 , Sekundärspannung U_2 , Primärstrom I_1 und Primärleistung P_1 gemessen.

Vorsicht! Zulässige Stromstärken für die Transformatorwicklungen und den ohmschen Widerstand nicht überschreiten.

A Aufgaben

1. Bauen Sie die vollständige Meßschaltung für den belasteten Transformator auf, und lassen Sie diese überprüfen!
2. Ermitteln Sie für den unbelasteten Transformator (Schalter geöffnet — Bild 107) das Übersetzungsverhältnis der Spannungen $U_2:U_1$ in Abhängigkeit von U_1 und vergleichen Sie die erhaltenen Werte von \bar{u} !
3. Stellen Sie die aufgenommene Wirkleistung P_1 und die Scheinleistung S_1 in Abhängigkeit von U_1 grafisch dar!
4. Ermitteln Sie auch $\cos \varphi_1 = P_1:S_1$ für den unbelasteten Transformator in Abhängigkeit von U_1 !
5. Ermitteln Sie durch Veränderung von R_2 den Leistungsfaktor $\cos \varphi_1$ in Abhängigkeit von S_1 !
6. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad $\eta = P_2:P_1$ in Abhängigkeit von S_2 ! Bei rein ohmscher Belastung kann $S_2 = P_2$ gesetzt werden.
7. Bestimmen Sie das Spannungsverhältnis $U_2:U_1$ bei der auf dem Typenschild angegebenen Leistung! Vergleichen Sie mit dem Verhältnis bei Leerlauf!

Versuchsgeräte: Transformator, 2 Spannungsmesser, 2 Stromstärkemesser, regelbarer Widerstand, Leistungsmesser, Stelltrafo

46. Thermoelement

G Grundlagen

Wird aus zwei elektrischen Leitern L_1 und L_2 , die aus verschiedenen Metallen bestehen, ein geschlossener Kreis gebildet, indem man die zwei Leiter miteinander verlötet oder verschweißt (Bild 108), so

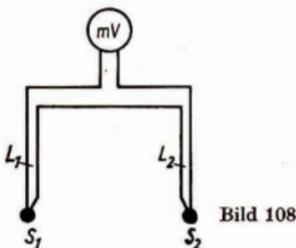


Bild 108

fließt durch diesen Kreis ein elektrischer Strom (Thermostrom), wenn die Temperaturen t_1 und t_2 an den Löt- bzw. Schweißstellen S_1 und S_2 unterschiedlich sind.

Bringt man in einen dieser Leiter ein empfindliches Galvanometer, so ist der elektrische Strom nachweisbar. Die Thermostromstärke wird durch die Temperatur der Schweißstellen bestimmt und kann nur kompensiert werden, wenn alle Schweiß- bzw. Verbindungsstellen gleiche Temperatur haben.

Zwei an ihrem einen Ende zusammen- gelötete oder -geschweißte Leiter werden als *Thermoelement* bezeichnet.

Die im Thermoelement auftretende Thermostromstärke I des im geschlossenen Kreis fließenden Stromes ausgedrückt werden:

$$U_{Th} = I(R_i + R_a), \quad (1)$$

V Versuchsdurchführung

Zur Einmessung eines Thermoelementes im Temperaturbereich $0 \dots 100^\circ\text{C}$ wird die eine Schweißstelle in einem DEWAR-Gefäß und die andere in einem Thermostaten angeordnet.

wobei R_i der innere Widerstand des Thermoelementes und R_a der äußere Widerstand des Kreises ist.

Ist der innere Widerstand des Thermoelementes $R_i \ll R_a$, auch bei Erwärmung, so kann man die Thermostromstärke als proportional der Thermostromstärke annehmen. Die Thermostromstärke nimmt aber mit zunehmender Temperaturdifferenz der Schweißstellen zu, und man kann für kleine Temperaturdifferenzen die Zunahme als proportional zu diesen annehmen. Es gilt damit

$$U_{Th} = \gamma(t_2 - t_1). \quad (2)$$

Der Proportionalitätsfaktor γ ist eine charakteristische Größe für die Metallkombination der Schweißstelle und aus Tabellen ersichtlich.

Wird bei einer Temperaturdifferenz $t_2 - t_1$ die Thermostromstärke mit einem Galvanometer gemessen, so ist der Ausschlag des Galvanometerzeigers wegen Gl. (1) der Thermostromstärke und wegen (2) auch der Temperaturdifferenz proportional.

Damit gilt unter Vernachlässigung von R_i (wegen $R_i \ll R_a$):

$$IR_a = \gamma(t_2 - t_1) \quad \text{und daraus folgt:}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{R_a}{\gamma} I. \quad (3)$$

Durch Messung der Thermostromstärke ist somit die Temperaturdifferenz bestimmt. Diese Art der Temperaturmessung bezeichnet man als *thermoelektrische Methode*. Sollen größere Temperaturbereiche gemessen werden, besteht die in Gl. (3) dargestellte Linearität nicht mehr.

Werden Thermoelemente zur Temperaturmessung verwendet, so müssen sie vorher *eingemessen* werden.

Sowohl im DEWAR-Gefäß als auch im Thermostaten befindet sich ein Eis-Wasser-Gemisch, so daß die Temperatur der beiden Schweißstellen $t_1 = t_2 = 0^\circ\text{C}$ beträgt. In diesem Fall darf am Galvanometer kein Ausschlag feststellbar sein. Das Blockschaltbild (Bild 109) zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau.

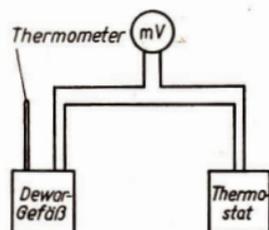


Bild 109

Die Temperatur t_1 im DEWAR-Gefäß wird während des Versuches konstant gehalten, so daß $t_1 = 0^\circ\text{C}$ ist (eventuell müssen Eisstückchen nachgefüllt werden). Am Thermostaten werden Heizung und Umwälzpumpe eingeschaltet und somit die Veränderung der Temperatur t_2 bis maximal 100°C eingeleitet.

Mit 0°C beginnend, werden am Thermometer des Thermostaten in 5-K-Schritten die Temperatur t_2 und der Ausschlag des Galvanometerzeigers abgelesen. Dabei ist darauf zu achten, daß die Temperatur t_2 nicht zu schnell ansteigt. Erforderlichenfalls muß die Heizung des Thermostaten kurzzeitig abgeschaltet werden.

Die Meßergebnisse sind in Tabellenform aufzuschreiben und anschließend grafisch darzustellen.

A Aufgaben

1. Messen Sie das vorgelegte Thermoelement ein, indem Sie die Temperatur über dem Galvanometerausschlag auftragen!
2. Diskutieren Sie die so ermittelte Kennlinie!
3. Überlegen Sie, welche wesentlichen Unterschiede zwischen Thermoelement und anderen Temperaturmeßgeräten bestehen!

Versuchsgерäte: Thermoelement, Gefäß, Thermostat, Galvanometer, Thermometer

47. Kennlinie von Halbleiter-Gleichrichterdioden

G Grundlagen

In den letzten Jahren haben die Halbleiter immer mehr an Bedeutung gewonnen. Als wichtigste Halbleiter kennt man heute Silizium, Germanium und Galliumarsenid sowie Selen.

Eigenleitung: Halbleiter sind bei tiefen Temperaturen Isolatoren, da alle Elektro-

nen fest gebunden sind (Atombindung). Bei höheren Temperaturen und bei Lichtwirkung werden im Kristallgitter Elektronen frei, die sich entgegen der Richtung der elektrischen Feldstärke bewegen. Jedes freigewordene Elektron hinterläßt eine Lücke, ein *Loch*, das von einem anderen Elektron, das sich ebenfalls der Feldstärkerichtung entgegenbewegt, ausgefüllt wird. Dieses andere Elektron hinterläßt aber ebenfalls ein *Loch*. Während also eine gewisse Anzahl von Elektronen der Feldstärkerichtung entgegenwandert, be-

wegt sich eine gleiche Anzahl von Defektelektronen, wie man diese Löcher nennt, in Richtung des elektrischen Feldes. Die Defektelektronen verhalten sich damit wie positive Ladungsträger. Die elektrische Leitfähigkeit eines Halbleiters nimmt im Gegensatz zu den Metallen bei Temperaturerhöhung zu.

Störstellenleitung: Setzt man reinstem Germanium Antimon zu, so wird im Gitter ein Germaniumatom durch ein Antimonatom ersetzt. Ge besitzt 4 Außenelektronen, Sb als fünfwertiges Element 5. Das 5. Elektron des Sb-Atoms ist lose gebunden und bei Zimmertemperatur schon frei beweglich. Im Gitter hinterläßt das wandernde Elektron kein Loch. Es treten daher keine Defektelektronen auf. Die Stromleitung erfolgt fast ausschließlich durch negative Ladungsträger; der so gestörte Halbleiter ist ein n-Leiter. Da Antimon Elektronen abgibt, wirkt es als Donator¹⁾.

Setzt man dem Germanium als Störstoff ein dreiwertiges Element zu (z. B. Gallium), so entsteht an dieser Stelle des Kristallgitters eine Bindungslücke, in die ein Valenzelektron eines benachbarten Germaniumatoms rücken kann. Dieses hinterläßt ein Defektelektron, das im elektrischen Feld wie ein positiver Ladungsträger wandert: es liegt p-Leitung vor. Da Gallium Elektronen bindet, wirkt es als Akzeptor²⁾.

Sperrschichtgleichrichter: Als Sperrschichtgleichrichter wird ein Schichtkristall verwendet, in dem zur Hälfte n-Leitung, zur anderen Hälfte p-Leitung vorliegt. Zwi-

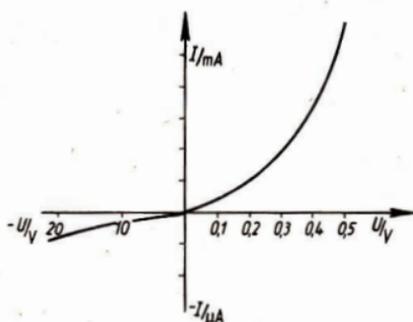


Bild 110

schen den beiden Gebieten bildet sich durch wechselseitige Diffusion von Ladungsträgern eine Übergangszone aus. In dieser Übergangszone befinden sich weniger Ladungsträger als an den anderen Stellen des Kristalls. Daher ist der Widerstand der Übergangszone groß; sie wird als Sperrschicht bezeichnet.

Legt man den Pluspol einer Spannungsquelle an das p-Gebiet des Kristalls und den Minuspol an das n-Gebiet, dann werden Ladungsträger von beiden Seiten in den Kristall und damit auch in die Sperrschicht hineingedrückt, so daß sich ihr Widerstand verringert. Bei umgekehrter Polung (Kathode an p-Gebiet, Anode an n-Gebiet) werden Elektronen und Defektelektronen abgesaugt, womit sich die Sperrschicht stark verbreitert. Ihr Widerstand wird so groß, daß in dieser Sperrrichtung kaum Strom fließt. Die Kennlinie eines Sperrschichtgleichrichters zeigt Bild 110. Die Durchlaßkennlinie liegt im 1. Quadranten, die Sperrkennlinie im 3. Quadranten. Man beachte die verschiedene Teilung der positiven und negativen Achsen.

¹⁾ donare (lat.) schenken, geben

²⁾ accipere (lat.) empfangen, erhalten

V Versuchsdurchführung

Zunächst soll nachgewiesen werden, daß der Widerstand der Germaniumdiode in einer Richtung viel größer ist als in der anderen. In der Schaltung Bild 111 wird die Stromstärke in beiden Richtungen gemessen.

In der Schaltung Bild 112 wird die Durchlaßkennlinie aufgenommen. Dabei dient der Widerstand R_{Sch} zur Begrenzung des Stromes. Es muß besonders auf die Polung der Meßgeräte geachtet werden.

Zur Aufnahme der Sperrkennlinie ist die Schaltung Bild 113 zu verwenden.

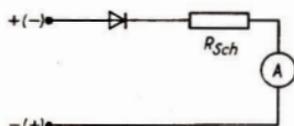


Bild 111

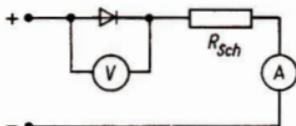


Bild 112

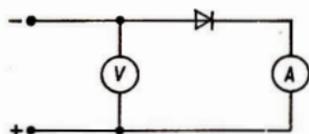


Bild 113

A Aufgaben

1. Aufbau der Schaltung nach Bild 111
2. Ermittlung von Durchlaßrichtung und Sperrichtung
3. Aufbau der Schaltung nach Bild 112
4. Aufnahme der Durchlaßkennlinie für eine Germanium- oder Siliziumdiode sowie einen Selengleichrichter
5. Aufbau der Schaltung nach Bild 113
6. Aufnahme der Sperrkennlinie für eine Germanium- oder Siliziumdiode sowie einen Selengleichrichter.
7. Diskussion der Ergebnisse
8. Weshalb ist die spannungsrichtige Schaltung der Meßgeräte (wie bei Schaltung Bild 112) bei Messung der Sperrstromstärke unbrauchbar?

Versuchsgeräte: Spannungsquelle (Stromversorgungsgerät), Germanium- oder Siliziumdiode, Selengleichrichter, Widerstand (etwa 10 Ω), 2 Vielfachmeßgeräte, Stromstärkemesser

48. Transistor

G Grundlagen

Transistoren enthalten zwei *pn-Übergänge*, von denen einer in Durchlaß- und der andere in Sperrichtung gepolt ist. Die Vorgänge an *pn-Übergängen* wurden in Versuch 47 beschrieben. Es sind entweder

zwei p-leitende Gebiete durch ein schwächer dotiertes n-Gebiet getrennt, oder es befindet sich zwischen zwei n-leitenden Gebieten ein schwächer dotiertes p-leitendes Gebiet. Der erste Typ wird als *pnp-Transistor*, der zweite als *npn-Transistor* bezeichnet.

In der Schaltung nach Bild 114 ist die Grenzschicht 1 des *pnp-Transistors* in Durchlaßrichtung gepolt, während über

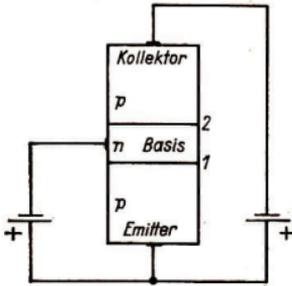


Bild 114

die Schicht 2 nur ein Sperrstrom fließen kann. Von dem unteren p-Gebiet diffundieren folglich Defektelektronen in das n-Gebiet, hier sind sie Minoritätsträger. Der Vorgang wird deshalb als *Minoritätsträger-Injektion* bezeichnet. In der entgegengesetzten Richtung diffundieren viel weniger Ladungsträger (Elektronen) aus der Mittelzone (*Basis*) in das die Defektelektronen emittierende Gebiet (*Emittor*), da die Konzentration der Majoritätsträger in

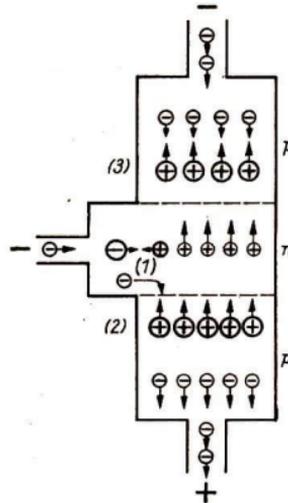


Bild 116

der Basis (freie Elektronen) um etwa drei Zehnerpotenzen geringer ist als im Emittor (Defektelektronen). Die in die Basis injizierten Defektelektronen rekombinieren wegen des Konzentrationsunterschiedes nur in geringem Maße mit den dort vorhandenen Majoritätsträgern. Die Rekombinationsrate (etwa 1%) ist zudem bedingt durch die sehr geringe Schichtdicke der Basis (z. T. weniger als $1\ \mu\text{m}$). So gelangt der größte Teil der injizierten Defektelektronen bis zur 2. Grenzschicht, die für sie „offen“ ist, so daß sie von der am Minuspol der Spannungsquelle angeschlossenen p-Schicht (*Kollektor*) aufgenommen werden können.

In den Bildern 115 und 116 sind die einzelnen Ladungsträgerbewegungen im pnp- und npn-Transistor schematisch wiedergegeben. In Bild 115 stellt (1) den Vorgang der Rekombination, (2) den Elektronendurchlaß- und (3) den Elektronensperrstrom dar. In Bild 116 symbolisiert (1) ebenfalls den Vorgang der Rekombination, während (2) den Defektelektronendurchlaß- und (3) den Defektelektronensperrstrom versinnbildlichen soll.

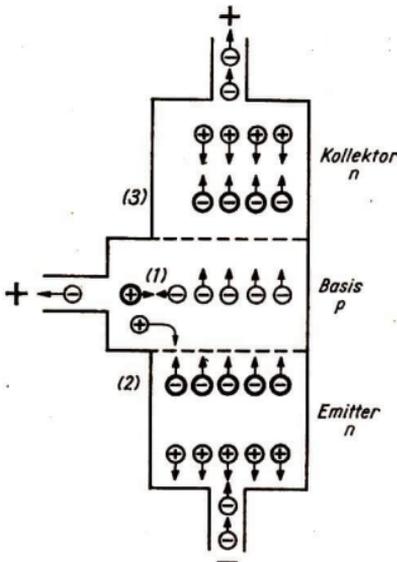


Bild 115

Für die Vorgänge im Transistor ist der Verlauf der Ladungsträgerdichte n

$$\left(\frac{\text{Anzahl der beweglichen Ladungsträger}}{\text{Volumen}} \right)$$

entscheidend. In Bild 117 ist er für einen pnp-Transistor beim Fehlen einer äußeren Spannung dargestellt. Durch Vertauschen der Bezeichnungen p und n ergibt sich der für einen npn-Transistor zutreffende Verlauf der Ladungsträgerdichte.

Beim Anlegen einer Spannung zwischen Emittter und Basis (U_{EB}) und zwischen Emittter und Kollektor (U_{EC}) mit der in Bild 114 angegebenen Polarität wird die Ladungsträgerdichte am Übergang Emittter—Basis erhöht (Durchlaßrichtung) und an dem in Sperrichtung gepolten Übergang Basis—Kollektor verringert (ausgezogene Kurve in Bild 118). In der Basis entsteht so das für einen Ladungstransport erforderliche Dichtegefälle. Die in die Basis injizierten Defektelektronen (beim pnp-Transistor) bzw. Elektronen (beim npn-Transistor) gelangen dadurch an den Übergang Basis—Kollektor.

Aus der Beschreibung der Vorgänge ergibt sich, daß der Strom im Kollektor—Emittter-Kreis (II in Bild 119) von den Vorgängen an der Emittter—Basis-Grenzschicht abhängt, d. h. von der Injektion der Minoritätsladungsträger in die Basis. Folglich

ist I_C abhängig von U_{EB} bzw. von I_B . Da in der Basis aus den oben erläuterten Gründen nur ein sehr kleiner Teil der vom Emittter kommenden Ladungsträger rekombiniert, ist $I_B \ll I_E \approx I_C$. Im „Steuerstromkreis“ I ist also die Stromstärke viel kleiner als im „Wirkstromkreis“ II (Bild 119).

Die Steuerwirkung des Eingangskreises I auf den Ausgangskreis II wird bei Änderungen der Eingangsspannung erkennbar, wenn z. B. U_{EB} mit einer Wechselspannung U_E überlagert wird (Bild 120). Dem von U_{EB} abhängigen Gleichstrom I_B überlagert sich dann der Wechselstrom i_B , der wiederum einen Wechselstrom i_C zur Folge

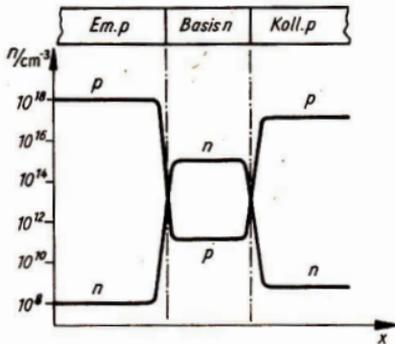


Bild 117

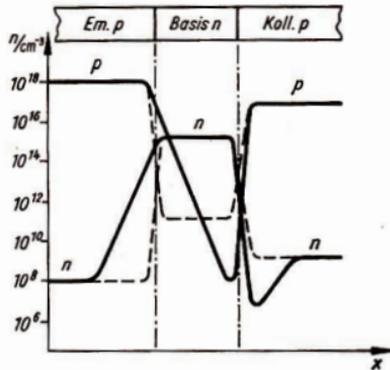


Bild 118

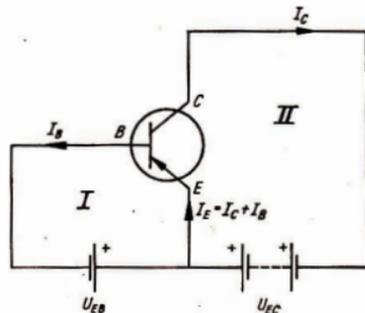


Bild 119

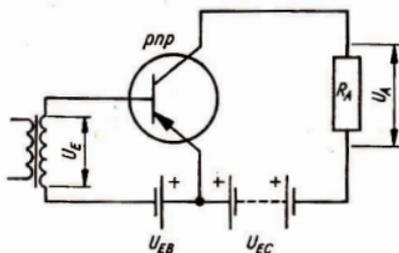


Bild 120

hat, der sich dem u. a. von U_{EC} abhängigen Gleichstrom I_C überlagert. Wir definieren als *Stromverstärkung*

$$v_i = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{i_C}{i_B}. \quad (1)$$

Da der Übergang Emittter-Basis in Durchlaßrichtung gepolt wird, stellt er einen relativ kleinen Widerstand dar, so

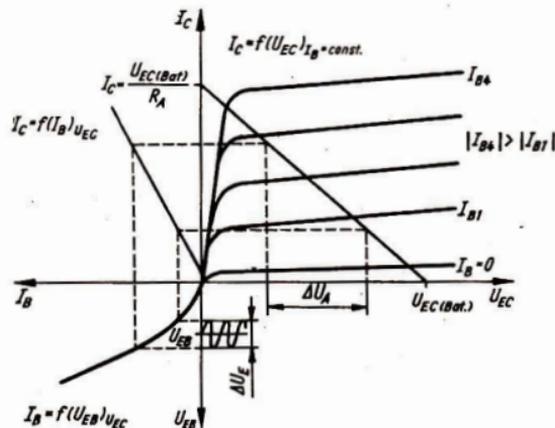


Bild 122

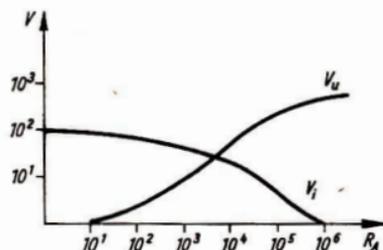


Bild 121

daß mit kleinen Spannungen U_{EB} gearbeitet werden kann und kleine Spannungsänderungen u_E bereits die gewünschten Stromänderungen i_B ergeben. Der Übergang Basis-Kollektor ist in Sperrichtung gepolt und deshalb höherohmig. Es kann folglich auch die Spannung U_{EC} wesentlich höher als U_{EB} gewählt werden, und das Einschalten eines *Arbeitswiderstandes* R_A in der Größenordnung bis 10 k Ω beeinflusst die Stromstärke nur geringfügig. Es kann aber an diesem Widerstand eine viel größere Wechselspannung u_A abfallen, als die Eingangswechselspannung u_E beträgt. Wir definieren als *Spannungsverstärkung*

$$v_u = \frac{\Delta U_A}{\Delta U_E} = \frac{u_A}{u_E}. \quad (2)$$

Die Stromverstärkung hat bei $R_A = 0$ ihren Höchstwert und fällt bei sehr großen Arbeitswiderständen ($R_A > 1 \text{ M}\Omega$) auf den Wert 1 ab. Die Spannungsverstärkung wächst mit zunehmenden Werten für R_A (Bild 121). Am Arbeitswiderstand ergibt sich folglich auch eine Leistungsverstärkung v_p , die bei mittleren Werten von R_A ihren Höchstwert erreicht. Es gilt

$$v_p = \frac{u_A^2 C}{u_E^2 B} = v_u v_i. \quad (3)$$

Der Transistor ist in der hier besprochenen, häufig angewandten Schaltung, in der

der Emitter Bezugsbasis für beide Stromkreise ist (*Emitterschaltung*), Verstärker für eingangsseitige Spannungs- oder Stromänderungen (v_u und $v_i > 1$). Damit ist er auch Verstärker einer eingangsseitig zugeführten Wechselstromleistung.

Um eine verzerrungsarme Signalverstärkung zu ermöglichen, muß das Kennlinienfeld bekannt sein und dann der Arbeitswiderstand (Widerstandsgerade in Bild 122) so gewählt werden, daß die an R_A auftretende Spannungsschwankung in einem Bereich oberhalb der Kniespannung U_{EC-K} erfolgt (Bild 122).

V Versuchsdurchführung

Bei allen Messungen am Transistor sind zunächst die aus dem Datenblatt ersichtlichen Grenzwerte für die Spannungen, Stromstärken und die Leistung zu beachten. Im Unterschied zu Elektronenröhren wirkt bei Transistoren der Ausgangskreis auf den Eingangskreis zurück. Dieser Effekt wurde hier nicht gesondert beschrieben. Er macht es notwendig, bei Veränderungen der Werte im Ausgangskreis die Werte des Eingangskreises nachzuregulieren. Es ist eine Schaltung aufzubauen, die das gleichzeitige Messen von I_B , I_C und U_{EC} gestattet. Zur Messung der Spannungsverstärkung wird eine Schaltung nach Bild 120 verwendet. Für die Eingangswechselspannung u_E wird ein möglichst kleiner

Wert gewählt, um das Signal verzerrungsfrei zu verstärken, so daß für $\frac{\Delta U_A}{\Delta U_E}$ der Quotient $\frac{u_A}{u_E}$ gesetzt werden kann. Zur Feststellung der Verzerrungsfreiheit soll hier der Vergleich des zeitlichen Verlaufs von u_E und u_A mit dem Oszillografen ausreichen.

Wie aus Bild 122 zu ersehen ist, kann der Bereich von $\Delta U_A = 2\sqrt{2}u_A$ (für sinusförmige Spannungen) außer durch Verminderung von $\Delta U_E = 2\sqrt{2}u_E$ noch durch Änderung von U_{EB} auf Werte über die Kniespannung U_{EC-K} eingeregelt werden. Die Ausgangswechselspannung u_A sollte etwa 1/10 von U_{EC} betragen.

Falls kein Röhrenvoltmeter zur zuverlässigen Messung von u_E zur Verfügung steht, wird eine mit Universalmeßgeräten noch zuverlässig gut meßbare Wechselspannung an den Eingang eines Spannungsteilers mit bekanntem Teilungsverhältnis (z. B. 1:10) oder eines Transformators mit bekanntem Übersetzungsverhältnis gelegt. Der Spannungsteiler ist so zu bemessen, daß durch den Eingangswiderstand des Transistors (etwa 1 k Ω bei Emitterschaltung) das eingestellte und mit einem Spannungsmesser ermittelte Teilungsverhältnis nicht wesentlich verändert wird.

Bei Messungen von u_A an R_A ist zu beachten, daß der Gleichspannungsabfall nicht gemessen werden darf. Falls das verwendete Meßgerät das Abtrennen der Gleichspannung nicht selbst vornimmt, ist eine geeignete Schaltung zu entwerfen, die es gestattet, nur die Wechselspannung an R_A zu messen.

Informieren Sie sich, welcher Transistortyp zu untersuchen ist!

A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Abhängigkeit des Kollektorstroms I_C von der Spannung U_{EC} für $I_B = 0$ (Kollektorreststrom) und für einen weiteren Wert von I_B ! (Rückwirkung beachten!)
2. Bestimmen Sie die Abhängigkeit des Kollektorstroms I_C vom Basisstrom I_B für einen Wert von U_{EC} bei $R_A = 0, 10 \text{ k}\Omega, 100 \text{ k}\Omega$! Ermitteln Sie aus den Kennlinien die jeweiligen Stromverstärkungen nach (1)!
3. Bestimmen Sie die Spannungsverstärkung bei den im Datenblatt angegebenen Werten für U_{EB} und U_{EC} in Abhängigkeit von R_A ($1 \text{ k}\Omega \dots 100 \text{ k}\Omega$)!
4. Berechnen Sie die Leistungsverstärkung für $R_A = 10 \text{ k}\Omega$ und $100 \text{ k}\Omega$!
5. Entwerfen Sie eine Schaltung, in der die Basis Bezugselektrode beider Stromkreise ist (Basisschaltung)! Äußern Sie sich über die mit dieser Schaltung erreichbare Stromverstärkung!
Kann damit auch eine Spannungs- und eine Leistungsverstärkung erzielt werden?
6. Arbeitet ein Transistor mit einem Wirkungsgrad $\eta > 1$, wenn die Leistungsverstärkung $v_p > 1$ ist?

Versuchsgeräte: 3 Meßgeräte (davon 1 Röhrenvoltmeter), Elektronenstrahl-Oszillograf, Spannungsteiler oder Transformator, Wechselspannungsquelle mit Ausgangsspannung kleiner als 1 V, pnp- oder npn-Transistor

49. Frequenzbestimmung mit dem Elektronenstrahl-Oszillografen

G Grundlagen

Mit Hilfe von Elektronenstrahl-Oszillografen kann die Frequenz jeder Art von Schwingungen festgestellt werden, sofern diese durch geeignete Wandler in elektrische Schwingungen umwandelbar sind und solange der Elektronenstrahl diesen Schwingungen noch folgen kann. Die hier zu beschreibenden Verfahren beruhen auf dem Vergleich einer bekannten Frequenz (Normalfrequenz f_n) mit der zu ermittelnden Frequenz f_x , so daß der Bereich der bestimmbaren Frequenzen noch durch den Bereich der Normalfrequenzen eingeschränkt wird.

Hellsteuerung eines Oszillogramms

Vom Oszillografen wird der Verlauf der zu untersuchenden Schwingung (Frequenz f_x) aufgezeichnet, während eine Spannung

mit der Normalfrequenz f_n so an die Elektronenstrahlröhre gelegt wird, daß sie die Helligkeit des Kurvenbildes moduliert.

In Bild 123 entfallen auf 1 Periode der zu untersuchenden Schwingung 5 Perioden der Vergleichsschwingung. Es gilt hier

$$T_x = 5T_n \quad \text{und folglich} \quad f_x = \frac{1}{5} f_n.$$

In Bild 124 ist

$$2T_x = 2,5T_n \quad \text{und damit} \quad f_x = \frac{4}{5} f_n.$$

Bei großen Unterschieden zwischen f_x und f_n wird die Bestimmung der auf eine Periode der zu untersuchenden Schwin-

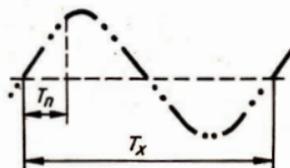


Bild 123

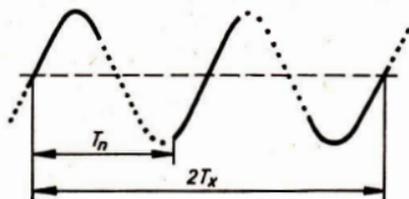


Bild 124

genz entfallenden Anzahl der Perioden der Vergleichsschwingung unsicherer. Es bietet sich dann ein Verfahren an, das die Helligkeitsmodulation eines geschlossenen Kurvenzuges ermöglicht.

Hellsteuerung eines Kreises

Bei diesem Verfahren zeichnet die zu untersuchende Schwingung einen Kreis auf den Oszillografenschirm, dessen Helligkeit danach wieder durch eine Spannung mit bekannter Frequenz moduliert wird. Ein Kreis entsteht auf dem Schirm dann, wenn Horizontal- und Vertikalablenkspannung von zwei um 90° phasenverschobenen, gleichfrequenten und sinusförmigen Spannungen bewirkt werden und bei gleicher Ablenkempfindlichkeit in vertikaler und horizontaler Richtung die Spannungen an den Ablenkplatten gleich groß sind. Als einfache Schaltung zur Erzeugung der Phasenverschiebung bietet sich ein Aufbau nach Bild 125 an, da hier die Spannungsabfälle über ohmschem und kapazitivem Widerstand nahezu um 90° phasenverschoben sind. Dabei darf jedoch keiner der Ausgänge des die Frequenz f_x erzeugenden Generators eine leitende Ver-

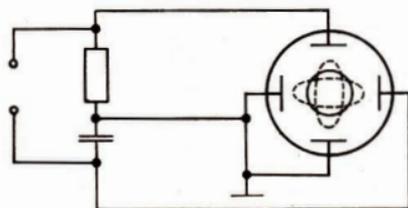


Bild 125

bindung mit der Masse des Oszillografen haben.

Wird der auf dem Schirm entstehende geschlossene Kurvenzug mit der Normalfrequenz moduliert, dann ergeben sich besonders leicht auswertbare Bilder. Der gesamte Kurvenzug (hier Kreisumfang) entspricht einer Periode der zu untersuchenden Schwingung, so daß die Anzahl der Aufhellungen des stehenden Bildes direkt den Faktor darstellt, um den die Frequenz $f_n = f_{\text{mod}}$ der modulierenden Spannung größer ist als die Frequenz der den Kreis zeichnenden Spannung ($f_x = f_{\text{Kr}}$).

So ist in Bild 126 $f_{\text{mod}} = f_{\text{Kr}}$; in Bild 127



Bild 126



Bild 127

$f_{\text{mod}} = 6f_{\text{Kr}}$. Die Modulationsfrequenz ist dann und nur dann ein ganzzahliges Vielfaches der „Kreisfrequenz“, wenn die hellen und dunklen Kreisbögen gleich lang sind. Sind die hellen Bögen länger als die dunklen Abschnitte, so sind die Frequenzverhältnisse nicht ganzzahlig und unsicher bestimmbar.

Auf dem Oszillografenschirm können bei diesem Verfahren bis zu 50 Aufhellungen ausgezählt werden. Bedenkt man, daß einmal die Spannung mit der zu ermittelnden Frequenz f_x und einmal die Vergleichsspannung mit der Frequenz f_n den Kreis zeichnen kann, so ist mit einer Vergleichsfrequenz ein Frequenzbereich mit einem Verhältnis 1:2500 zwischen unterer und oberer Frequenz erfaßbar.

Bei beiden Verfahren können die zu untersuchende Spannung und die Spannung mit bekannter Frequenz vertauscht werden.

Frequenzvergleich mit Hilfe von Lissajous-Figuren

Werden an den x - und y -Eingang eines Oszillografen sinusförmige Wechselspannungen gelegt, so entstehen solche Bilder, wie sie sich auch durch grafische Addition

zweier Schwingungen mit senkrecht zueinander stehenden Schwingungsrichtungen ergeben (LISSAJOUS-Figuren). Dabei ist die Gestalt der Figuren vom Frequenzverhältnis und der Phasendifferenz der verglichenen Spannungen abhängig.

Ist $f_x = f_y$, so entstehen bei $U_x = U_y$ Schirmbilder wie in Bild 128. Die Gerade bzw. die Ellipse ist nach links geneigt, wenn $\Delta\varphi = 180^\circ$ bzw. $90^\circ < \Delta\varphi < 180^\circ$. Bei $f_x:f_y = 1:2$ entstehen Figuren nach Bild 129 und bei $f_x:f_y = 1:3$ nach Bild 130.

Ist $f_x:f_y = 2:1$, so ergibt sich eine Figur wie in Bild 131.

Bei ungeradzahligem, aber rationalen Frequenzverhältnissen entstehen mehrfach verschlungene Figuren, wie z. B. in Bild 132. Wird die Phasendifferenz so eingestellt, daß *geschlossene* Kurvenzüge entstehen, dann braucht man bei allen hier erwähnten Frequenzverhältnissen nur die Berührungspunkte der Figur mit dem umschriebenen gedachten Rechteck auszuzählen und das Verhältnis zu bilden. Die Be-

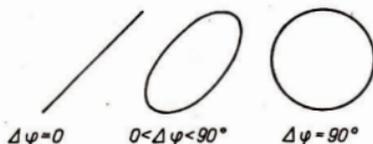


Bild 128

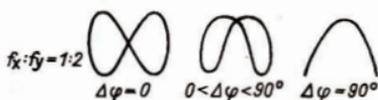


Bild 129



Bild 130

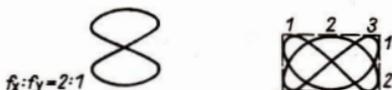


Bild 131

Bild 132

rührungspunkte des Kurvenzuges mit den vertikalen Seiten des Rechtecks stellen die Umkehrpunkte der Horizontalschwingung (U_x) dar; die Anzahl der Vertikal-schwingungen, die in der gleichen Zeit ablaufen, ist gleich der Anzahl der Berührungspunkte mit den horizontalen Seiten des Rechtecks. Das Frequenzverhältnis ist somit eindeutig bestimmbar (in Bild 132 ist $f_x:f_y = 2:3$).

Weitere Verfahren der Frequenzbestimmung mit Elektronenstrahl-Oszillografen sind in den Fachbüchern über Oszillografen-Meßtechnik angegeben.

V Versuchsdurchführung

Hellsteuerung eines Oszillogramms

Man erzeugt ein stehendes Bild der zu untersuchenden Schwingung (beliebiger zeitlicher Verlauf). Die Kippfrequenz des Oszillografen wird so eingestellt, daß möglichst wenige Perioden dargestellt werden. An den Eingang für die Helligkeitsmodulation wird die Spannung mit der Vergleichsfrequenz gelegt. Dabei wird f_n so eingeregelt, daß sich ein ganzzahliges Vielfaches von $T_n/2$ mit einem ganzzahligen Vielfachen von $T_x/2$ deckt. Durch Übertragung der anhand von Bild 123 angestellten Überlegungen auf den vorgefundenen Fall kann die gesuchte Frequenz berechnet werden.

Hellsteuerung eines Kreises

Das RC-Glied wird so ausgelegt, daß für eine in der Mitte des zu erwartenden Bereiches liegende Frequenz $R \approx X_C$ ist. Mit Hilfe der Horizontal- bzw. Vertikalverstärkung

wird ein Kreis eingestellt. Je nach den gegebenen Bedingungen wird der Kreis entweder von der zu untersuchenden oder von der die Vergleichsfrequenz liefernden Spannung erzeugt werden. Bei Messung der Frequenz von RC -Generatoren oder Multivibratoren ist zu prüfen, in welchem Maße eine Frequenzverfälschung durch das RC -Glied eintreten kann bzw. ob die zu untersuchende Schwingung überhaupt zur Erzeugung eines Kreises auf dem Oszillografenschirm geeignet ist. Aus den Geräteunterlagen des Oszillografen können Widerstand und Kapazität für den Eingang zur Helligkeitsmodulation entnommen und daraus die Rückwirkung auf den angeschlossenen Generator abgeschätzt werden.

Lissajous-Figuren

Durch Ausschalten des Kippgenerators des Oszillografen und Anschluß der beiden zu vergleichenden Spannungen an den x - bzw. y -Eingang erhält man die beschriebenen Figuren. Das Verhältnis von Höhe und Länge des umschriebenen Rechtecks wird so eingestellt, daß eine eindeutige Auswertung der Figuren möglich ist. Liefert der Meßgenerator eine Spannung mit $f_n = f_x$, so erübrigen sich Berechnungen der Frequenzverhältnisse, es entstehen Kreis, Ellipse oder Gerade.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Frequenzen der zu untersuchenden Schwinger nach allen drei behandelten Verfahren!
2. Stellen Sie bei allen drei Verfahren mindestens drei verschiedene zur Ausmessung geeignete Oszillogramme ein! Vertauschen Sie außerdem, wenn möglich, die f_x und f_n erzeugenden Spannungen!
3. Geben Sie den Meßwert als Mittelwert aus wenigstens 5 unterschiedlichen Messungen an (verschiedene Verfahren und Einstellungen)!
4. Stellen Sie im Protokoll einige zur Auswertung verwendete Figuren dar oder fotografieren Sie diese Schirmbilder!
5. Wodurch wird die Genauigkeit der Frequenzermittlung bestimmt?

Versuchsgeräte: Meßgenerator, Elektronenstrahl-Oszillograf mit Kameratubus, Kamera, Generatoren zur Erzeugung der zu untersuchenden Schwingung

50. Brechzahlbestimmung mit dem Refraktometer

G Grundlagen

Tritt ein Lichtstrahl aus einem optisch dünneren Medium 1, in dem er die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_1 hat, in ein optisch dichteres Medium 2 ein, in dem er die kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeit c_2 hat, so erfährt er eine Richtungsänderung; d. h., $\beta < \alpha$ (Bild 133), der Lichtstrahl

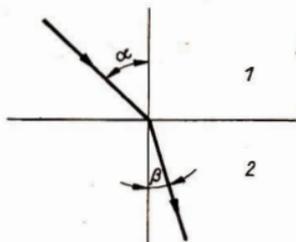


Bild 133

wird *gebrochen*. Sind die beiden Medien *isotrop*, so liegen der einfallende Lichtstrahl, das Einfallslot und der gebrochene Lichtstrahl in einer Ebene, und es gilt das von SNELLIUS (1621) gefundene Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const.} \quad (1)$$

Andererseits folgt aus dem HUYGENSSchen Prinzip (1690)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad (2)$$

Bezieht man sich auf das Vakuum, weil dort $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ eine Konstante für alle Wellenlängen des Lichtes ist, so gilt $c_0 = n_{01}c_1 = n_{02}c_2$. Hierbei sind n_{01} und n_{02} Materialkonstanten des lichtdurchlässigen Mediums, bezogen auf das Vakuum, die als *absolute Brechzahlen* bezeichnet werden. Da $c_1, c_2 < c_0$ sind, müssen $n_{01}, n_{02} > 1$ sein. Führt man diese Festlegungen in Gl. (2) ein, so ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_{02}}{n_{01}} \quad (3)$$

Bezieht man die Brechzahlen auf Luft ($c_L \approx c_0$), so schreibt man Gl. (3) in der Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (4)$$

Die *Brechzahl* n_{12} zwischen den beiden Medien 1 und 2 ist somit aus den auf Luft reduzierten Brechzahlen berechenbar. Tritt das Licht aus dem optisch dichteren Medium 2 in das optisch dünnere Medium 1 (Bild 134), so erhält die Gl. (4) die Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} \quad (5)$$

Aus Gln. (4) und (5) folgt

$$n_{12}n_{21} = 1$$

und (5) kann in der Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n_{12}} \quad (6)$$

geschrieben werden.

Auf Gl. (6) gründen sich die von ABBE ent-

wickelten Methoden zur Bestimmung der Brechzahlen fester und flüssiger Stoffe. Die Meßmethode besteht darin, daß der *Grenzwinkel der Totalreflexion* beim Austritt des Lichtes aus dem Medium 2 erreicht wird. In Gl. (6) wird dann wegen $\beta = 90^\circ$ $\sin 90^\circ = 1$, und man erhält $\sin \alpha_G = 1/n_{12}$ (α_G : Grenzwinkel der Totalreflexion), woraus folgt

$$n_{12} = \frac{1}{\sin \alpha_G}. \quad (7)$$

Wegen $c_0 = \lambda_0 f$ sind die Brechzahlen und damit auch die Brechungsverhältnisse wesentlich von der Wellenlänge des Lichtes (Dispersion!) abhängig.

Zur Kennzeichnung lichtdurchlässiger Stoffe werden neben anderen Kenngrößen die Brechzahlen, bezogen auf die von FRAUNHOFER (1841) entdeckte D-Linie des Sonnenspektrums, benutzt. Sie liegt etwa in der Mitte des sichtbaren Spektralbereiches (390 nm bis 760 nm). Die D-Linie des Sonnenspektrums wird dargestellt

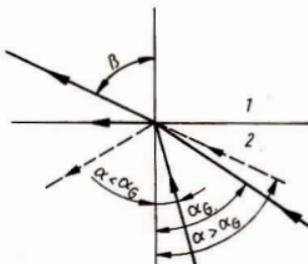


Bild 134

durch das Emissionsspektrum des Natriums (gelbe Linie) und hat eine mittlere Wellenlänge $\lambda_0 = 589,3$ nm. Mit $n_{12} = n_D$ wird speziell festgelegt, daß das Licht der Wellenlänge λ_D aus Luft in das Medium eintritt, dessen Brechzahl zu bestimmen ist.

Die Brechzahlen von Flüssigkeiten sind von der Temperatur wesentlich abhängig. Es ist üblich, in diesem Fall die Meßtemperatur t stets mit anzugeben. Gl. (7) er-

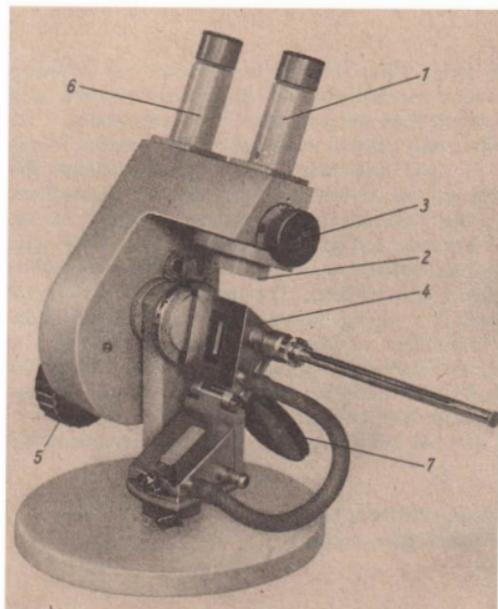


Bild 135

hält damit die Form

$$n_D^t = \frac{1}{\sin \alpha_G}. \quad (8)$$

Geräte, mit denen man die Brechzahlen messen kann, werden als *Refraktometer* bezeichnet. In Bild 135 ist ein *ABBE-Refraktometer* dargestellt.

Das Refraktometer hat eine geneigte Aufstellung, um in bequemer Haltung messen zu können. Die Lichtquelle (Natriumdampflampe mit Vorschaltgerät oder Mikroskopierleuchte) wird so vor dem Spiegel (7) aufgestellt, daß das Licht nach der Reflexion in den heizbaren Prismenkörper (4) eintreten kann. Der Prismenkörper enthält das Beleuchtungs- und Meßprisma sowie Anschlüsse zur Beheizung durch einen Thermostaten. Untersucht man eine Flüssigkeit, so werden einige Tropfen zwischen die Hypotenusenflächen der Prismen gebracht. Plastische Stoffe und

Gläser müssen eine polierte ebene Fläche von etwa 10 mm × 25 mm haben und werden auf das Meßprisma aufgesetzt. Das Beleuchtungsprisma wird in diesem Falle aufgeklappt. Im Einstellfernrohr (1) wird die Grenzlinie der Totalreflexion beobachtet. Am Einstellfernrohr ist der Dispersions-Kompensator angebaut, durch den der Farbsaum bei Verwendung von Glühlicht an der Grenzlinie der Totalreflexion zum Verschwinden gebracht wird. Hierzu ist der Triebknopf (3) zu betätigen, der den Kompensator (2) bewegt. Durch Drehen am Triebknopf (5) wird die Grenzlinie auf den Schnittpunkt des Fadenkreuzes im Einstellfernrohr eingestellt. Dieser Triebknopf ist mit einem beleuchteten Teilkreis gekoppelt, der die Meßskale enthält. Auf der Meßskale sind die n_D -Werte aufgetragen, die mit dem Ablesemikroskop (6) direkt abgelesen werden.

V Versuchsdurchführung

Zum Versuch werden das in Bild 135 dargestellte *ABBE-Refraktometer* mit Beleuchtungseinrichtung und, falls die Brechzahlen von Flüssigkeiten zu bestimmen sind, noch der Universal-Thermostat nach *WOBSE*r zur Temperierung der Probe verwendet.

Mit einer Saugpipette oder einem Proberstab werden zunächst einige Tropfen Monobromnaphthalin ($C_{10}H_7Br$) mit $n_D^{20^\circ C} = 1,657$ zwischen die Hypotenusenflächen der Prismen gebracht. Der Wert 1,657 wird auf der Meßskale eingestellt und kontrolliert, ob die Grenzlinie genau auf der Mitte des Fadenkreuzes erscheint. Eventuell ist abzuwarten, bis die Temperierung der Prismen erfolgt ist. Stimmen Grenzlinie und Fadenkreuz nicht überein, ist mit dem Justierschlüssel am Tubusansatz nachzustellen. Die Prismenflächen sind nach jeder Messung zu säubern. Die justierte Meßskale kann nunmehr zur Bestimmung der Brechzahl der vorgegebenen Probe verwendet werden. Sind die Brechzahlen stark gefärbter Lösungen zu messen, so muß die Messung im reflektierten Licht erfolgen. In diesem Fall nimmt man den Deckel vom Meßprisma ab und läßt das Licht direkt einfallen. Es tritt dann das Licht direkt von der mit der Lösung benetzten Fläche des Meßprismas in das Fernrohr ein.

Plastische Stoffe und Gläser können nur bei aufgeklapptem Beleuchtungsprisma gemessen werden.

Achtung! Spektrallampe nur mit Vorschaltgerät betreiben!
Die Prismenflächen nicht mit harten Gegenständen berühren!

A Aufgaben

1. Justieren Sie das Refraktometer unter Verwendung von Monobromnaphthalin!
2. Bestimmen Sie die Brechzahl der vorgelegten Probe je fünfmal durch Kompen-sationsmessung!
3. Ermitteln Sie aus der Meßreihe die Standardabweichung und den Vertrauensbe-reich für eine statistische Sicherheit $P = 68,3\%$; vergleichen Sie mit der Meßge-nauigkeit des Refraktometers, die vom Hersteller mit $1 \cdot 10^{-4}$ angegeben wird!
4. Erläutern Sie, welche Bedingungen die Brechzahl der Probe erfüllen muß, damit ihre Bestimmung mit dem Refraktometer überhaupt möglich ist!
5. Worauf beruht die Wirkung des Dispersions-Kompensators (auch AMICI-Prisma ge-nannt)?

Versuchsgeräte: ABBE-Refraktometer (komplett), Natriumdampf-lampe mit Vorschaltgerät oder Mikroskopierleuchte, Thermostat (komplett), Reinigungs-lampen, Proben

51. Brennweite von Linsen und Linsen-systemen

G Grundlagen

Die Beziehungen zwischen der *Brennweite* einer dünnen Linse, der *Gegenstandsweite* und der *Bildweite* sind in der geometrischen Optik abgeleitet worden. Bestimmt man die Gegenstandsweite und die Bildweite, so ist die Brennweite für viele Fälle mit ausreichender Genauigkeit berechen-bar.

Unter einer dünnen Linse wird eine solche verstanden, bei der die Dicke der Linse im Vergleich zu den Krümmungsradien ihrer Begrenzungsflächen und damit auch zur Brennweite klein ist.

Werden Gegenstände durch Linsen ab-bildet, so entstehen reelle oder virtuelle Bilder. Reelle Bilder kann man durch einen geeigneten Auffangschirm (z. B. Mattscheibe) sichtbar machen, virtuelle dagegen nicht.

Zur geometrischen Konstruktion der Bil-der benutzt man ausgezeichnete Strahlen, diese sind: Brenn-, Parallel- und Mittel-punktstrahl (Bild 136).

Aus den Ähnlichkeitsätzen folgt:

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b} = \frac{f}{b-f} \quad (1)$$

und nach Umformung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \quad (2)$$

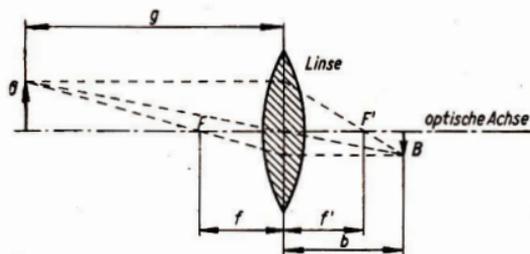


Bild 136

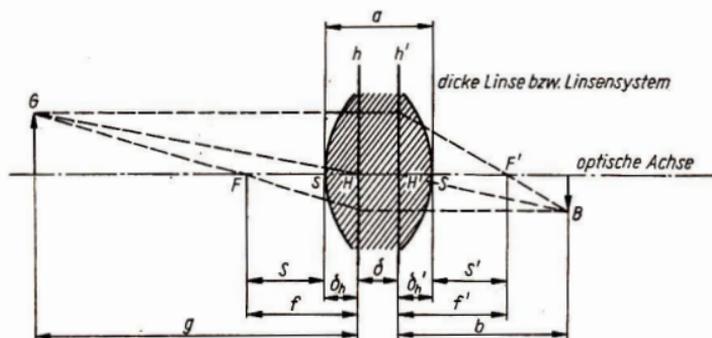


Bild 137

Gl. (2) gilt auch für Zerstreuungslinsen. In diesem Fall sind dann $b < 0$ und $f < 0$ einzusetzen.

In der praktischen Optik bezeichnet man den reziproken Wert der Brennweite als *Brechkwert* D mit der Einheit Dioptrie:

$$D = \frac{1}{f}, \quad [D] = \text{dpt} = \text{m}^{-1}. \quad (3)$$

Für ein zentriertes Linsensystem, das aus zwei dünnen Linsen besteht, welche den Abstand d voneinander haben, gilt für den Brechkwert

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (4)$$

Hierbei sind f_1 und f_2 die Brennweiten der Linsen, die das Linsensystem bilden.

Aus Gl. (4) resultiert eine Methode zur Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse durch Kombination mit einer Sammellinse bekannter Brennweite.

Ist der Abstand a der beiden *Linsenscheitel* S und S' (Bild 137) gegenüber den Krümmungsradien nicht mehr klein (bei einer dünnen ist demnach $a = 0$ angenommen), dann wird zwar ebenfalls von einem Gegenstand ein Bild erzeugt, aber man kann nicht mehr davon ausgehen, daß die Lichtstrahlen nur in einer Ebene gebrochen werden. Vielmehr sind die Brennweiten f und f' von den zugehörigen

Hauptpunkten H und H' aus zu bestimmen. Die beiden Brennweiten sind gleich groß, sofern sich die Linse bzw. das Linsensystem beiderseits im gleichen Medium (z. B. in Luft) befindet. Die Hauptpunkte H und H' sollen den Abstand δ haben. Es werden auch hier für die Abbildung des Gegenstandes die ausgezeichneten Strahlen benutzt. Jedoch sind sie auf die *Hauptebenen* h und h' zu beziehen.

Die Hauptebenen sind Bezugsebenen, die in den Hauptpunkten senkrecht auf der optischen Achse errichtet werden. Ihre Lage ist von den Krümmungsradien, der Dicke und Brechzahl der Linse bzw. der Linsenordnung im Linsensystem abhängig. Es sei ohne weiteren Beweis angeführt, daß die Hauptpunkte (Hauptebenen) in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit den brechenden Flächen stehen. Die Hauptpunkte (Hauptebenen) sind zweckmäßig eingeführte Bezugspunkte (Bezugsebenen), die es ermöglichen, bei dicken Linsen bzw. Linsensystemen die Abbildung zu beschreiben.

Man überzeugt sich an Hand von Bild 137 leicht vom Zusammenhang zwischen Gegenstands-, Bild- und Brennweite, wie er in Gl. (1) und (2) angegeben ist. Dabei ist zu beachten, daß Brenn-, Gegenstands- und Bildweite auf die zugeordneten Hauptebenen zu beziehen sind.

V Versuchsdurchführung

1. Bestimmung der Brennweite von dünnen Sammellinsen durch Messung der Bild- und Gegenstandsweite

Zur Messung der Bild- und der Gegenstandsweite wird eine optische Bank benutzt. Auf dieser sind die Reiter (Halter für die Linsen, den Gegenstand und Auffangschirm) verschiebbar angeordnet. Die Reiter haben eine Markierung, so daß ihre Stellung in bezug auf einen an der optischen Bank angebrachten Maßstab bestimmt werden kann. Mit einer Beleuchtungseinrichtung wird der Gegenstand G , meist ein in eine Metallscheibe eingeschnittenes Kreuz, sichtbar gemacht. Das Bild B des Gegenstandes G wird mit Hilfe der Linse L auf einer Mattscheibe entworfen. Man verschiebt nun L so lange, bis auf der Mattscheibe ein scharfes Bild entsteht. Dann liest man g und b ab und errechnet mit Hilfe von (2) die Brennweite f . Der Versuch wird mit verschiedenen Linsen- und Mattscheibeneinstellungen wiederholt.

Die Meßgenauigkeit prüft man, indem die zusammengehörigen Wertepaare von b und g auf den Achsen eines Koordinatensystems abgetragen und die Punkte durch eine Gerade verbunden werden (Bild 138). Alle diese Geraden sollen sich in A schneiden. Fällt man von A aus Lote auf die Koordinatenachsen, so ist deren Länge gleich der Brennweite f .

2. Bestimmung der Brennweite von Sammellinsen und Linsensystemen nach der Methode von Bessel

Verändert man bei fester Stellung von Gegenstand und Bild die Stellung der Linse bzw. des Linsensystems so, daß die Bild- und Gegenstandsweite miteinander vertauscht werden, so erhält man ebenfalls ein scharfes Bild des Gegenstandes. Ist $b > g$, so ist $B > G$ (vergrößertes Bild). Vertauscht man b und g , d. h., ist $g > b$, so ist $B < G$ (verkleinertes Bild). Die Stellungen der Linse sind in bezug auf Bild und Gegenstand symmetrisch (Bild 139).

Wird der Abstand der beiden Einstellungen mit d , die Entfernung Gegenstand—Bild mit e bezeichnet, dann ist, da $g_1 = b_{II}$ und $b_1 = g_{II}$,

$$g + b = e$$

$$g - b = d.$$

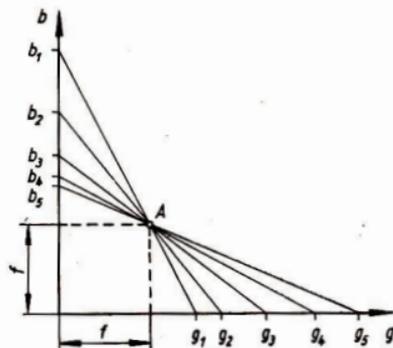


Bild 138

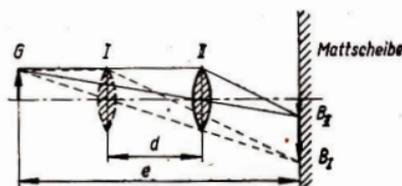


Bild 139

Durch Addition und Subtraktion erhält man

$$g = \frac{1}{2} (e + d)$$

$$b = \frac{1}{2} (e - d). \quad (5)$$

Setzt man die Gl. (5) in (2) ein, so entsteht

$$f = \frac{1}{4} \left(e - \frac{d^2}{e} \right). \quad (6)$$

Der Vorteil der BESSELSchen Methode liegt darin, daß die Voraussetzung der dünnen Linse nicht mehr aufrechterhalten zu werden braucht.

3. Bestimmen der Brennweite einer dünnen Zerstreuungslinse

In den Versuchsanleitungen 1 und 2 wurden zur Brennweitenbestimmung reelle Bilder verlangt. Die Zerstreuungslinsen entwerfen jedoch virtuelle Bilder. Kombiniert man eine Zerstreuungslinse mit einer Sammellinse bekannter Brennweite in der Weise, daß der Gesamtbrechwert des entstandenen Linsensystems positiv ist, so entsteht ein reelles Bild. Aus Gl. (4) ergibt sich

$$f_z = \frac{f(f_s - d)}{f_s - f}. \quad (7)$$

Es bedeuten:

- f Brennweite des Linsensystems (wird nach Versuchsanleitung 1 oder 2 ermittelt),
- f_s Brennweite der Sammellinse (wurde bereits bestimmt),
- f_z gesuchte Brennweite der Zerstreuungslinse,
- d Abstand der beiden Linsen.

4. Bestimmung der Brennweite und der Lage der Hauptebenen einer dicken Linse bzw. eines Linsensystems

Da bei einer dicken Linse bzw. einem Linsensystem die Bild-, Gegenstands- und Brennweite von den zugehörigen Hauptpunkten (Hauptebenen) aus zu rechnen sind, ist es erforderlich, die Lage der Hauptpunkte (Hauptebenen) zu bestimmen. Wie bereits erwähnt, stehen die als Bezugsflächen eingeführten Hauptebenen in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit den brechenden Flächen und können insbesondere bei Linsensystemen auch außerhalb des Linsensystems liegen. Aus Bild 137 entnimmt man für die Lage der Hauptebenen $\delta_h = f - s$ und $\delta_{h'} = f - s'$, wobei für die gegenstandsseitige Schnittweite $s = \overline{FS}$ und für die bildseitige Schnittweite $s' = \overline{F'S'}$ gilt. Für die Bestimmung der Brennweite $f = f'$ (es wird vorausgesetzt, daß das umgebende Medium gleich ist, z. B. Luft) wendet man die Methode von BESSEL an (siehe Versuchsanleitung 2).

Zur Ermittlung der Schnittweiten s bzw. s' wird auf der optischen Bank ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr vor der Linse bzw. dem Linsensystem angebracht.

Die Einstellung des Fernrohres auf Unendlich erfolgt in der Weise, daß man einen weit entfernten Gegenstand anvisiert und sein vom Fernrohrobjektiv entworfenes Bild mit dem Okular scharf einstellt. Sieht man Bild und Okularfadenkreuz (oder Strich-

markierung) gleichzeitig scharf, so darf keine Parallaxe auftreten. Die Kontrolle erfolgt, indem mit dem Auge die sogenannte „Schlüssellochbewegung“ durchgeführt wird. Fadenkreuz und weit entfernter Gegenstand dürfen sich dabei nicht zueinander verschieben. Das so eingestellte Fernrohr ist ein Indikator für paralleles Licht.

Nun wird der Gegenstand so vor der Linse bzw. dem Linsensystem verschoben, bis er parallaxenfrei und scharf im Fernrohr gesehen wird. Ist dies erreicht, befindet sich der Gegenstand in der Brennebene der Linse bzw. des Linsensystems. Der Abstand Linsenscheitel S bzw. S' bis zum Gegenstand G ist die gesuchte Schnittweite s bzw. s' . Die Einstellungen sind mehrmals durchzuführen. Man beachte die Lage der Linsenscheitel S bzw. S' in bezug auf die Reitermarkierung.

A Aufgaben

1. Die Brennweiten von Sammellinsen sind durch Messung von Bild- und Gegenstandsweite aus mindestens 3 Stellungen zu bestimmen.
2. Die Brennweiten von Sammellinsen sind nach der Methode von BESSEL zu ermitteln.
3. Die Brennweite der Kombination einer Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse ist durch Messung der Bild- und Gegenstandsweite zu bestimmen.
 - 3.1. Die Brennweite der Zerstreuungslinse ist mit Gl. (7) auf Grund der Meßwerte zu errechnen.
 - 3.2. Unter welcher Voraussetzung kann man $d = 0$ setzen?
4. Es ist die dem Verfahren nach Bild 138 zugrunde liegende Behauptung zu beweisen.
5. Es sind die Bildkonstruktion für eine Zerstreuungslinse durchzuführen und der funktionale Zusammenhang zwischen Bildweite (Bildgröße) und Gegenstandsweite (Gegenstandsgröße) zu erläutern.
6. Für die dicke Linse bzw. das Linsensystem sind Brennweite f , Schnittweite s und s' , Hauptebenenabstand δ_h und δ_h' mit ihren maximalen absoluten Fehlern anzugeben.
 - 6.1. Aus Bild 137 ist eine Beziehung für den Hauptebenenabstand δ abzuleiten und der Wert mit dem absoluten maximalen Fehler anzugeben.
 - 6.2. Mit den ermittelten Werten ist eine Skizze analog Bild 137 anzufertigen.

Versuchsgeräte: Optische Bank, Lichtquelle mit Gegenstand, Fernrohr, Transparenzschirm, Reiter, Linsenhalter, Linsen, Meßschieber, Tiefenmaß

52. Mikroskop

G Grundlagen

Vergrößerung eines Mikroskops

Ein Mikroskop ist ein aus zwei Linsensystemen bestehendes Gerät. Das dem Auge zugekehrte System wird als *Okular*

und das dem Beobachtungsobjekt zugewandte als *Objektiv* bezeichnet.

Die Bildentstehung geschieht im Prinzip auf folgende Weise: Das Objektiv erzeugt ein *vergrößertes, umgekehrtes, reelles* Bild, wenn sich der Gegenstand G zwischen einfacher und doppelter Brennweite befindet (Bild 140). Dieses *Zwischenbild* ZB erscheint innerhalb der einfachen Brenn-

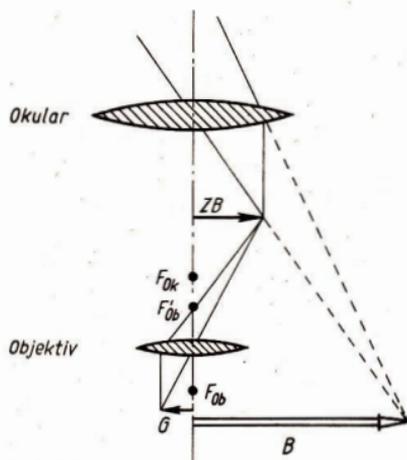


Bild 140

weite des Okulars. Damit kann es mit dem Okular wie mit einer Lupe betrachtet werden. Es wird dabei nochmals vergrößert. Das beobachtete Bild B ist ein *virtuelles* Bild, das gegenüber dem Gegenstand *umgekehrt* ist.

Der *Vergrößerungsfaktor* eines optischen Gerätes ist definiert als das Verhältnis

$$v = \frac{\text{Schwinkel mit Instrument}}{\text{Schwinkel ohne Instrument}}$$

Auflösungsvermögen eines Mikroskops

Die mit einem Mikroskop erzielbare Vergrößerung kann Werte bis über 1000 er-

reichen. Die an der Objektivöffnung entstehenden Beugungseffekte lassen dann jedoch die tatsächlichen Konturen der betrachteten Gegenstände nicht mehr deutlich erkennen. Benachbarte Einzelobjekte sind bei zu großer Vergrößerung infolge der Überlagerung der Beugungsbilder nicht mehr getrennt wahrnehmbar. Das *Auflösungsvermögen* des Mikroskops ist dann überschritten. Die *nutzbare* oder *förderliche Vergrößerung* ($v \approx 1000$) wird durch das Auflösungsvermögen begrenzt, das abhängig ist vom Öffnungswinkel 2α des von einem Punkt des Objekts ausgehenden und in das Objektiv eintretenden Lichtbündels, von der Brechzahl n des zwischen Gegenstand und Objektiv befindlichen Mediums und von der Wellenlänge λ des vom Gegenstand ausgehenden bzw. reflektierten Lichts. Nach **ABBE** gilt für die Auflösungsgrenze, d. h. für den minimalen Abstand zweier getrennt wahrnehmbarer Objekte,

$$d_{\min} = \frac{0,61\lambda}{n \sin \alpha} \quad (1)$$

Das Produkt $n \sin \alpha$ wird als numerische Apertur¹⁾ bezeichnet. Aus Gl. (1) folgt, daß beim Übergang zu kürzeren Wellenlängen die Auflösungsgrenze verbessert werden kann. Das gleiche geschieht auch, wenn das Objekt in eine Flüssigkeit mit einer Brechzahl $n > 1$ eingebettet wird (Immersionsobjektiv).

¹⁾ Apertur: Öffnung

V Versuchsdurchführung

1. Bestimmung der Vergrößerung

Da die Schwinkel hier nicht meßbar sind, muß der Vergrößerungsfaktor eines Mikroskops auf andere Weise bestimmt werden. Eine Möglichkeit bietet der Vergleich des vergrößerten Bildes eines in seinen Abmessungen bekannten Gegenstandes mit einem Maßstab (Millimeterteilung).

Der zu vergrößernde Gegenstand sei ein *Objektmikrometer* mit einer $1/100$ -mm-Teilung, das im Mikroskop scharf eingestellt wird. Sein Bild befindet sich dann in der deutlichen Sehweite (etwa 25 cm). Direkt über dem Okular wird ein um 45° geneigter *halbdurchlässiger Spiegel* (1) angebracht (Bild 141). In gleicher Weise eignet sich ein

einfacher Spiegel, bei dem die reflektierende Schicht so entfernt ist, daß ein „Loch“ mit einem Durchmesser von etwa 2,5 mm entsteht. Stehen zwei rechtwinklige Prismen zur Verfügung, so kann die auftretende Totalreflexion zur Spiegelung ausgenutzt werden. Die vergrößerte Skale wird sichtbar, wenn ein kleiner Tropfen Durobalsam zwischen die sich berührenden Prismenflächen gebracht wurde. Es besteht dann wieder ein „Loch“ in der spiegelnden Fläche.

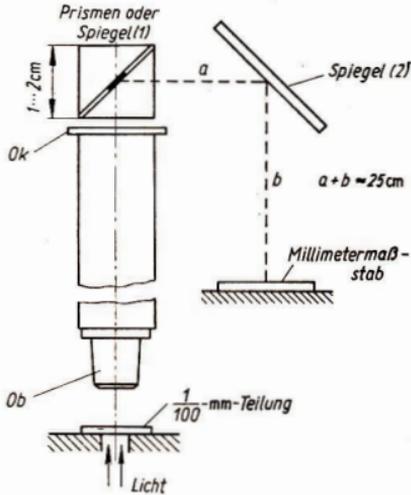


Bild 141

In 25 cm Entfernung vom Spiegel wird ein Maßstab mit Millimeterteilung so aufgestellt, daß sein Bild und die vergrößerte Skale des Objektmikrometers gleichzeitig zu sehen sind (Bild 141).

Decken sich z_1 Skalenteile der $\frac{1}{100}$ -mm-Teilung mit z_2 Skalenteilen des Millimetermaßstabes, so ist die Vergrößerung

$$v = 100 \frac{z_2}{z_1}. \quad (2)$$

Wird der Vergleichsmaßstab auf einen dunklen Untergrund gelegt und für das Mikroskopbild eine Dunkelfeldbeleuchtung gewählt, so ist das Vergleichen der Skalen besonders günstig.

Ein ungenaueres Verfahren besteht darin, daß die vergrößerte Teilung des Objektmikrometers auf 25 cm vom Auge entferntes Papier gezeichnet wird. Das Abzeichnen muß mehrfach unbeeinflusst durch die vorherige Zeichnung erfolgen. Bezeichnen wir die durchschnittliche Länge in mm von z_1 Skalenteilen der Zeichnung mit z_2 , so kann nach Gl. (2) die Vergrößerung berechnet werden.

2. Kalibrierung einer Okularskale

Um die Länge von Gegenständen, die mit dem Mikroskop untersucht werden, bestimmen zu können, wird an die Stelle, an der im Mikroskop das Zwischenbild erscheint, eine Glasskale gebracht. Zur Scharfeinstellung dieser Skale ist die Augenlinse

des Okulars verstellbar. Die Okularskale ist für jedes Objektiv neu zu kalibrieren. Wir vergleichen sie mit der vergrößerten Skale des Objektmikrometers. Decken sich z_1 Strichabstände der vergrößerten $1/100$ -mm-Teilung mit z_2 Strichabständen der Okularskale, so ist

$$1 \text{ Skalenteil} = \frac{z_1}{100z_2} \text{ mm.}$$

3. Bestimmung der Auflösungsgrenze

Das Mikroskop wird auf eine Lochblende (Durchmesser 1 mm) scharf eingestellt. Die Blende befindet sich damit an der Stelle, an der auch andere Objekte sind. Um den Öffnungswinkel 2α (Bild 142) zu ermitteln, wird zunächst das Okular entfernt und unterhalb der Blende eine Skale mit Millimeterteilung aufgestellt (etwa auf den Be-

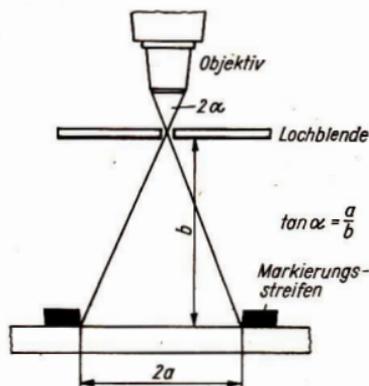


Bild 142

leuchtungspiegel gelegt). Das verkleinerte Bild eines Skalenausschnitts stellt sich dann oberhalb des Objektivs ein. Schwarze Markierungen werden auf der Skale so verschoben, daß sie gerade am Rande des Gesichtsfeldes erscheinen. Anhand von Bild 142 kann der Öffnungswinkel 2α ermittelt werden. Ist die Wellenlänge des verwendeten Lichtes bekannt, so wird nach Gl. (1) die Auflösungsgrenze bestimmt. Für weißes Licht kann als Mittelwert $\lambda = 550 \text{ nm}$ eingesetzt werden.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Vergrößerung eines Mikroskops bei 4 verschiedenen Kombinationen von Objektiv und Okular nach einem der angegebenen Verfahren!
2. Kalibrieren Sie eine Okularskale für 2 verschiedene Objektive!
3. Ermitteln Sie mit Hilfe der Okularskale Breite bzw. Abstände von Leiterbahnen in Bausteinen der Mikroelektronik, Korngrößen in Fe-C-Legierungen, Abmessungen von Blütenstaub (Pollen), Dicke von Haaren.
4. Bestimmen Sie die Auflösungsgrenze für 2 unterschiedliche Objektive!

5. Überzeugen Sie sich vom Einfluß der Wellenlänge auf die Auflösungsgrenze, indem Sie ein Strichgitter betrachten, dessen Teilung bei weißem Licht gerade noch aufgelöst wird! Beobachten Sie anschließend das Gitter in rotem und in blauem Licht!
6. Wie ist die höhere Auflösung bei Licht mit kürzerer Wellenlänge erklärbar?
7. Aus welchen Gründen besteht das Objektiv aus mehreren Linsen?

Versuchsgeräte: Mikroskop mit verschiedenen Objektiven und Okularen, Okular mit Skale, Objektmikrometer, Millimeterskala, Lochblende, 2 Spiegel oder 1 Spiegel und 2 Prismen

53. Gitterkonstante eines Reflexionsgitters

G Grundlagen

Die Wellennatur des Lichtes läßt sich mit einer Vielzahl von Versuchen nachweisen. Die Erscheinungen der *Interferenz* des Lichtes an dünnen Schichten bei Durchgang oder Reflexion, die *Beugung* an Kanten, engen Spalten und schmalen Hindernissen u. a. deuten auf die Wellennatur hin. Das Zustandekommen von Interferenz- und Beugungserscheinungen ist jedoch nicht nur an die wellenförmige Ausbreitung der Energie gebunden. Die sich überlagernden Wellenzüge müssen *kohärent* sein. Kohärentes Licht kann man aber nur erhalten, wenn eine Versuchsanordnung vorhanden ist, bei der das Licht, das von einer Lichtquelle ausgesandt wird, auf zwei verschiedenen Wegen zur Beobachtungsstelle kommt.

Mit Beugungsgittern gelingt es, sowohl für durchtretendes wie auch für reflektiertes Licht die genannte Voraussetzung einzuhalten und das zu untersuchende Licht zu analysieren. Im vorliegenden Versuch sollen die Kenngrößen *Gitterkonstante* und *Auflösungsvermögen* eines *ebenen Reflexionsgitters* ermittelt werden. Der Versuch wird mit monochromatischem Licht durchgeführt.

Wie auch im Versuch 54 ausgeführt wird, verstärken sich alle Wellenzüge, die einen Gangunterschied $\Delta s = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) haben. Die Lagen der Hauptmaxima sind bestimmt durch

$$k\lambda = g \sin \alpha_k. \quad (1)$$

In Gl. (1) bedeuten k die Ordnung der Hauptmaxima der Beugungserscheinung, λ die Lichtwellenlänge, α_k der zum k -ten Hauptmaximum gehörige Beugungswinkel und g die Gitterkonstante. Die Schärfe der Beugungserscheinung hängt von der Anzahl der sich überlagernden kohärenten Wellenzüge ab. Hat ein Beugungsgitter N parallele Spalte (Bild 145), so überlagern sich am Beobachtungsort alle N Maxima der unter dem Winkel α_k gebeugten Wellenzüge. Alle diese Maxima ergeben eine Beugungserscheinung großer Intensität, die man als *Spektrallinie* bezeichnet. Die Spektrallinien haben die gleiche Richtungsordnung wie die Spalte des Beugungsgitters. Für $k = 0$ und $\alpha_k = 0^\circ$ wird Gl. (1) für alle Wellenlängen λ erfüllt, d. h., man beobachtet einen hellen Streifen. Die Beugungserscheinungen für alle anderen k -Werte liegen links und rechts vom zentralen hellen Streifen. Wegen $\sin \alpha_k \leq 1$ ist die höchste Zahl der möglichen Beugungserscheinungen, die man mit einem Beugungsgitter erhalten kann, durch $k \leq g/\lambda$ festgelegt. Aus Gl. (1) folgt für die Bestimmung der Gitterkonstanten

$$g = \frac{k\lambda}{\sin \alpha_k}. \quad (2)$$

Das Auflösungsvermögen eines Beugungsgitters gibt Auskunft darüber, ob zwei verschiedene Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ noch deutlich voneinander getrennte Spektrallinien ergeben; denn alle Spektrallinien sind Maxima von Interferenzfiguren und haben eine endliche Breite, auch wenn man voraussetzt, daß das verwendete Licht monochromatisch ist. **RAYLEIGH** gibt als prinzipielle Bedingung hierzu an,

daß zwei Spektrallinien dann aufgelöst werden, d. h. einzeln sichtbar sind, wenn das Maximum der einen Spektrallinie auf das erste Minimum der zweiten fällt. Es gilt dann

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = kN. \quad (3)$$

Hat das Beugungsgitter die Breite B und wird es in der gesamten Breite ausgeleuchtet, dann ist $N = B/g$ und damit

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{kB}{g} \quad (4)$$

berechenbar.

V Versuchsdurchführung

Zur Durchführung des Versuches wird die in Bild 143 dargestellte Versuchsanordnung verwendet. Die Spektrallampe (1) liefert das monochromatische Licht, das durch den Kondensator (2) zur Ausleuchtung des etwa 0,3 mm breiten Spaltes (3) benötigt wird.

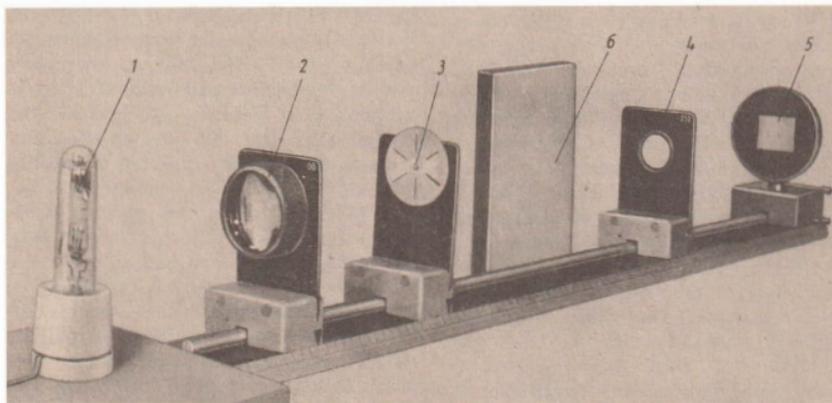


Bild 143

Die Anordnung Spektrallampe—Kondensator ist so zu wählen, daß schwach konvergentes Licht zum Spalt gelangt. Mit der Abbildungslinse (4), deren Brennweite 100 mm bis 250 mm betragen soll, bildet man den Spalt über das Reflexionsgitter (5) auf den Schirm (6) scharf ab. Dabei sind der Abstand Spalt—Abbildungslinse die Gegenstandsweite und der Abstand Abbildungslinse—Schirm die Bildweite. Bei senkrechtem Licht einfall auf das Beugungsgitter muß die Beugungerscheinung 0. Ordnung auf den Spalt reflektiert werden. Durch Drehung des Gitterkonstanten nach Gl. (2) muß α_k bestimmt werden. Nach Bild 144 ist $\sin \alpha_k = d_k/a$.

Es werden mit einem Maßstab mit mm-Teilung die zur Beugungerscheinung k -ter Ordnung gehörigen Werte für d_k und a in den Stellungen I und II gemessen. Vor jeder Messung ist durch Verschieben der Abbildungslinse der Spalt auf den Schirm abzubilden. Die Gegenstandsweite ist so zu wählen, daß das Ausmessen von d_k und a mit dem geringsten relativen Fehler erfolgen kann.

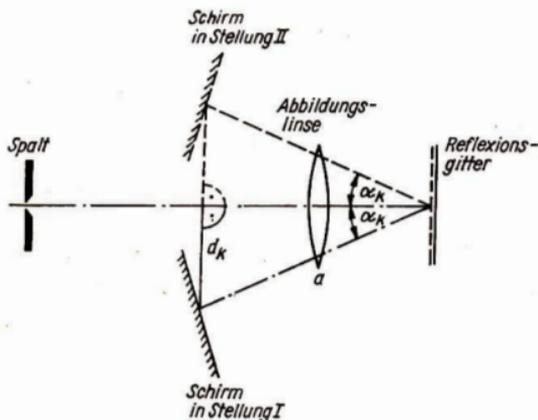


Bild 144

Achtung! Spektrallampe nur mit Vorschaltgerät betreiben!

Den Schutzdeckel des Reflexionsgitters nur zur Messung abnehmen! Das Reflexionsgitter nicht berühren oder abwischen!

A Aufgaben

1. Messen Sie jeweils in den Stellungen I und II mehrmals d_k und a ! Beachten Sie dabei k !
2. Tragen Sie in einer Tabelle die gemessenen und errechneten Werte ein!
3. Fehlerabschätzung
4. Berechnen Sie das Auflösungsvermögen des verwendeten Reflexionsgitters nach Gl. (3) oder (4) und erläutern Sie den gefundenen Wert!
5. Kontrollieren Sie, ob die Bedingung $k \leq g/\lambda$ durch den Versuch bestätigt wird!

Versuchsgeräte: Spektrallampe mit Vorschaltgerät, Kondensator, Spalt, Abbildungslinse, Reflexionsgitter, Schirm, Maßstab, optische Bank, Reiter

54. Wellenlängenmessung mit dem Gitterspektralapparat

G Grundlagen

Wird die ungestörte Ausbreitung des Lichtes durch Hindernisse beeinträchtigt, so treten unter bestimmten Voraussetzungen Erscheinungen auf, die mit der Wellennatur des Lichtes zusammenhängen (vgl.

Grundlagen zu Versuch 55). In diesem Versuch soll die Beugung des Lichtes angewendet werden. Die Beugung kann beobachtet werden, wenn das Licht durch eine Öffnung (Spalt) tritt, deren Größe im Vergleich zur Wellenlänge des verwendeten Lichtes klein ist. Nach dem HUYGENSschen Prinzip ist jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Trifft monochromatisches Licht auf einen Spalt, so breitet sich von jedem

Punkt in der Spaltöffnung Licht nach allen Seiten aus. Diese von den einzelnen Punkten des Spaltes ausgehenden Lichtbündel interferieren miteinander. Die Interferenzerscheinungen sind in bestimmten Richtungen wahrnehmbar. Auf einem Aufgangsschirm läßt sich ein System heller und dunkler Interferenzstreifen nachweisen.

Verwendet man statt eines Spaltes eine Anordnung paralleler Spalte, die im Abstand g voneinander angebracht sind, so spricht man von einem *Beugungsgitter*. Der Abstand g der parallelen Spalte wird als *Gitterkonstante* bezeichnet. Trifft paralleles Licht auf das Gitter (Bild 145), so breitet sich von jedem Punkt jeder Spaltöffnung Licht nach allen Richtungen aus. Die an den Stellen A_1, A_2, A_3, \dots der einzelnen Spalte des Gitters in der Richtung α zur Gitternormalen parallel zueinander austretenden sekundären Lichtbündel haben die Gangunterschiede $A_1B_1 = A_2B_2 = \dots$. Beträgt der Gangunterschied zweier Wellenzüge eine ganze Wellenlänge (z. B. $A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = \lambda$) oder ein ganzzahliges Vielfaches (z. B. $A_1C_1 = 2\lambda$), so verstärken sich die Wellenzüge. Dieser Gangunterschied ist vom Winkel α ab-

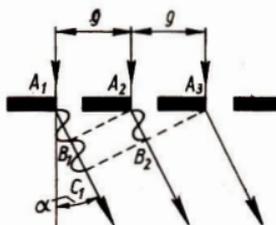


Bild 145

hängig. Betrachtet man das Dreieck $A_1B_1A_2$, so folgt für den Ablenkwinkel α , wenn $A_1B_1 = \lambda$ ist:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{g}.$$

Beträgt der Gangunterschied $A_1B_1 = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), dann ist

$$\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{g}. \quad (1)$$

Aus Gl. (1) resultiert wegen der Bedingung für k nicht nur ein Beugungsspektrum, sondern für jeden Wert von k ein besonderes Spektrum. Diese Spektren bezeichnen man als Spektren 0., 1., 2., 3., ... Ordnung.

V Versuchsdurchführung

Zur Untersuchung des Beugungsspektrums wird ein Spektroskop verwendet, wie es im Versuch 56 beschrieben ist. Das Prisma tauscht man gegen ein Beugungsgitter aus.

Beim Einsetzen des Gitters ist darauf zu achten, daß die geritzte Seite dem Fernrohr zugewandt ist.

Das Skalenrohr wird hier nicht benötigt. Die Fernrohrjustierung erfolgt wie im Versuch 56 beschrieben. Die prinzipielle Anordnung des Gitterspektralapparates zeigt Bild 146.

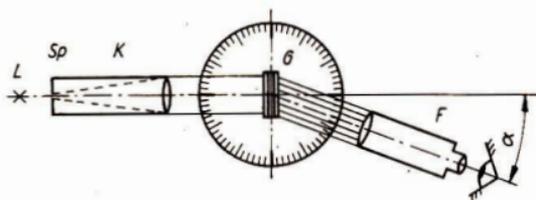


Bild 146

Mit dem justierten Fernrohr F werden unmittelbar die Beugungsbilder k -ter Ordnung beobachtet. Dies geschieht zu beiden Seiten des Beugungsbildes nullter Ordnung. Am Teilkreis des Spektrometers ist der Winkel α ablesbar, unter dem das Beugungsbild k -ter Ordnung erscheint. Aus Gl. (1) ist dann bei Kenntnis der Wellenlänge des bekannten Lichtes die Gitterkonstante errechenbar. Andererseits ist es möglich, mit einem Gitter bekannter Gitterkonstante die Wellenlänge des verwendeten Lichtes zu überprüfen.

1. Messung der Gitterkonstanten

Der Spalt wird mit einer monochromatischen Lichtquelle bekannter Wellenlänge beleuchtet. Es werden die Ablenkungswinkel der Beugungsbilder k -ter Ordnung des monochromatischen Lichtes und aus Gl. (1) g als Mittelwert aus mehreren Messungen bestimmt.

Spektrallampen nur mit Vorschalt-drossel betreiben!

2. Bestimmung eines Stoffes mit Hilfe der Spektralanalyse

Der Spalt wird nun mit einer Lichtquelle beleuchtet, deren leuchtender Stoff durch Spektralanalyse bestimmt werden soll.

Die Spektralröhre wird mit der Sekundärspannung eines Funkeninduktors zum Leuchten angeregt. Die Ablenkungswinkel der einzelnen Spektrallinien werden gemessen. Die Messungen sind mehrmals zu wiederholen und die Mittelwerte für die Auswertung zu benutzen.

A Aufgaben

1. Bei aufgesetztem Gitter ist die Beugung nullter Ordnung und damit die Nullstellung des Spektroskops festzustellen.
2. Mit der monochromatischen Lichtquelle ist die Gitterkonstante zu bestimmen.
3. Die Spektrallinien sind von links und rechts anzumessen. Aus beiden Messungen ist der Mittelwert zu bilden. (Beachten Sie, daß die Spektrallinien eine endliche Breite haben!)
4. Bestimmung der Wellenlängen des zu untersuchenden Stoffes. Messungen wie bei Aufgabe 3.
5. Aus Tabellen ist durch Vergleichen mit den gemessenen Wellenlängen der Stoff zu bestimmen.
6. Erläutern Sie, weshalb es nicht möglich ist, Beugungserscheinungen beliebig hoher Ordnung mit dieser Versuchsanordnung auszuwerten!
Benutzen Sie zu diesen Erläuterungen Ihre Beobachtungen während des Versuches!
7. Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen Prismen- und Beugungsspektrum?

Versuchsgeräte: Spektroskopisch, Natriumdampflampe mit Drossel, Gitter, Spektralröhre, Funkeninduktor

55. Newtonsche Ringe

G Grundlagen

Zum Nachweis der Wellennatur des Lichtes dienen die Interferenzerscheinungen. Diese treten auf, wenn sich zwei kohärente Lichtbündel im gleichen Raumpunkt überlagern. Die wahrnehmbare Erscheinung in diesem Punkt hängt von den Phasenbeziehungen zwischen den beiden Lichtbündeln ab. Bei Phasengleichheit verstärken sie sich gegenseitig, bei einem Gangunterschied von $\lambda/2$ und gleicher Intensität löschen sie sich gegeneinander vollkommen aus. Interferenzerscheinungen werden in zunehmendem Maße meßtechnisch ausgenutzt.

Im vorliegenden Versuch sollen die Interferenzerscheinungen dazu benutzt werden, den Krümmungsradius einer plankonvexen Linse zu bestimmen. Ein paralleles Lichtstrahlbündel falle auf eine keilförmige Schicht, deren Brechzahl von der des benachbarten Mediums verschieden ist (Bild 147). Strahl 1 wird an der Stelle A gebrochen, bei B reflektiert und beim Austritt an der Stelle C abermals gebrochen. Strahl 2 wird an der Stelle C reflektiert. Sollen der zweimal gebrochene und einmal im Innern reflektierte Strahl 1' und der unmittelbar reflektierte Strahl 2' miteinander interferieren, so müssen die divergierenden Strahlen vereinigt werden. Dies geschieht mit Hilfe des Auges unter Zwischenschaltung optischer Instrumente. Die Phasenbeziehung zwischen Strahl 1' und 2' ist abhängig von der Dicke d der Schicht. Da sich die Dicke d jedoch ändert, sieht man bei parallelem monochromatischem Licht ein System von hellen und dunklen

Streifen. Jedem dieser Streifen entspricht die Dicke d des Keiles an der Stelle, an der der Streifen zu sehen ist. Solche Interferenzerscheinungen bezeichnet man als *Interferenzen gleicher Dicke*.

Diese eben beschriebene Interferenzerscheinung tritt bei den *Newton'schen Ringen* auf. NEWTON'sche Ringe entstehen, wenn monochromatisches Licht auf eine Luftschicht trifft, die sich zwischen einer Glasplatte und einer auf diese aufgelegten Linse befindet. Diese Luftschicht ist praktisch als keilförmig zu betrachten, wenn der Krümmungsradius der Linse groß ist.

Der Durchmesser der NEWTON'schen Ringe und der Krümmungsradius der Linse stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang. Fällt Licht senkrecht auf die Linse auf, so wird es an der oberen und unteren Oberfläche des keilförmigen Luftspaltes reflektiert. Dabei tritt zwischen den reflektierten Lichtbündeln ein Gangunterschied von $2d$ auf, der zu den Interferenzerscheinungen führt. Mit d soll die Dicke der keilförmigen Luftschicht bezeichnet werden. Außerdem tritt wegen der Reflexion am optisch dichteren Medium (Glasplatte) ein Phasensprung von π auf. Der gesamte Gangunterschied beträgt demzufolge $\delta = 2d + \lambda/2$. Als notwendige Bedingung für eine Auslöschung durch Interferenz gilt $\delta = (2k + 1) \lambda/2$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$. Nimmt in der Luftschicht die Dicke d ständig zu, so ändert sich d von einem dunklen Interferenzring zum benachbarten hellen um $\lambda/2$. Wird die zu untersuchende plankonvexe Linse mit ihrer gekrümmten Seite auf eine Planglasplatte gelegt, so erscheint bei genügender Sauberkeit an der Berührungsstelle als Interferenzerscheinung der „schwarze Fleck“, Ordnungszahl $k = 0$. Zur Auswertung werden zwei dunkle Interferenzringe mit den Ordnungszahlen $k = m$ und $k = n$ betrachtet. Sie mögen die Radien r_m und r_n haben (Bild 148). Der Unterschied der Radien der beiden Ringe entspricht einem Dickenunterschied der Luftschicht

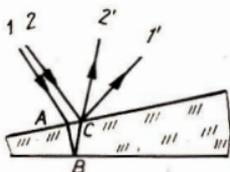


Bild 147

$$\Delta d = (n - m) \lambda/2. \quad (1)$$

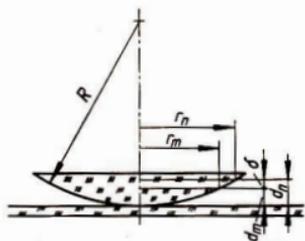


Bild 148

Zwischen dem Radius r eines Interferenzringes, der Dicke d der Luftschicht an dieser Stelle und dem Krümmungsradius R der Linse besteht der Zusammenhang

$$d = \frac{r^2}{2R}. \quad (2)$$

Gl. (2) wird aus Bild 148 abgeleitet unter der Voraussetzung, daß der Radius der Linse im Vergleich zum Radius der Interferenzringe groß ist. Wird Gl. (2) für zwei dunkle Interferenzringe der Ordnung $k = m$ und $k = n$ angewendet, so ergibt sich eine weitere Beziehung für den Dickenunterschied der Luftschicht:

$$\Delta d = \frac{r_n^2 - r_m^2}{2R}. \quad (3)$$

Werden Gln. (1) und (3) gleichgesetzt, so errechnet sich der gesuchte Krümmungsradius der Linse zu

$$R = \frac{r_n^2 - r_m^2}{(n - m) \lambda}. \quad (4)$$

V Versuchsdurchführung

Auf den Tisch des Meßmikroskops (Bild 149) werden eine Planplatte aus Schwarzglas und darauf die zu untersuchende Linse gelegt. (Achten Sie auf größte Sauberkeit zwischen Planplatte und Linse!) Am Tubus des Mikroskops ist eine Beleuchtungs-



Bild 149

einrichtung angebracht, durch die von einer Lichtquelle ausgestrahltes monochromatisches Licht über eine unter 45° geneigte Glasplatte auf die Linse reflektiert wird. Als Lichtquelle dient eine Spektrallampe, die nach einigen Minuten Einbrenndauer monochromatisches Licht ausstrahlt.

Achtung! Spektrallampen dürfen nur mit Vorschaltdrossel benutzt werden!

Das Mikroskop wird auf die NEWTONSchen Ringe scharf eingestellt. Der „schwarze Fleck“ ist mit dem Fadenkreuz in Übereinstimmung zu bringen. Dies geschieht, indem mit Hilfe der am Mikroskoptisch angebrachten Meßschrauben der Mikroskoptisch so verstellt wird, bis Fadenkreuz und Mitte des „schwarzen Flecks“ übereinstimmen,

Ableseung: r_0 . Erscheint der „schwarze Fleck“ nicht, so deutet dies darauf hin, daß die Berührungsstelle Planplatte—Linse unsauber ist. Nachdem Beleuchtungseinrichtung, Mikroskop und Linse justiert sind, wird durch Drehen an einer Meßschraube die Mitte eines dunklen Interferenzringes mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht. Ableseung der Meßschraube: r_1 . Durch weiteres Drehen an derselben Meßschraube wird erneut auf die Mitte eines dunklen Interferenzringes eingestellt, Ableseung der Meßschraube: r_2 . Durch Differenzbildung erhält man $r_m = r_1 - r_0$ und $r_n = r_2 - r_0$. Zwischen den Ableseungen r_1 und r_2 zählt man $n - m$ Interferenzringe. Mehrfache Wiederholung des Versuches ergibt einen guten Mittelwert für den Krümmungsradius der zu untersuchenden Linse, den man nach Gl. (4) errechnet.

A Aufgaben

1. Mikroskop-Linse justieren. r_0 an der Meßschraube ablesen.
2. Durch Verstellen der Meßschraube auf beliebig gewählten m -ten dunklen Ring einstellen. Die Zahl m beim Verstellen auszählen. Es wird am „schwarzen Fleck“ mit $k = 0$ begonnen. r_1 an der Meßschraube ablesen.
3. Meßschraube weiter verstellen, bis zum n -ten dunklen Ring. Die Zahl n notieren, r_2 an der Meßschraube ablesen.
4. Die Aufgaben 1, 2, 3 mehrmals mit verschiedenen m und n wiederholen.
5. Nach Gl. (4) den Krümmungsradius errechnen.
6. Fehlerbetrachtung durchführen.
7. Erläutern Sie den Unterschied in der Entstehung von Interferenzen gleicher Dicke und gleicher Neigung!

Versuchsgeräte: Meßmikroskop, monochromatische Lichtquelle mit Vorschaltrossel, Spiegelvorsatz zum Mikroskop, Schwarzglasplatte, Linse

56. Dispersionskurve eines Prismenspektroskops

G Grundlagen

Spektrometer verwendet man zur Untersuchung von Spektren, aus denen weitgehende Schlüsse über die Zusammensetzung der sie erzeugenden Körper, über den Bau ihrer Moleküle und Atome gezogen werden können. Glühende feste und flüssige Körper geben kontinuierliche, zum Leuchten angeregte Gase und Dämpfe Linienpektren. In den letzteren treten die Farben teils als mehr oder weniger scharfe Linien, teils als breitere sogenannte Banden auf. Linienpektren werden durch Atome, Bandenspektren durch Moleküle

hervorgerufen. (Das Aussehen der Spektren hängt außer von den Elementen und Verbindungen auch von Temperatur und Druck ab.)

Beobachtet werden nicht nur Emissions-, sondern auch Absorptionsspektren. Nach dem KIRCHHOFFSchen Gesetz absorbiert ein Körper die Strahlenart, die er emittiert. Erzeugt man also ein kontinuierliches Spektrum und bringt in den Beobachtungsweg Gase und Dämpfe, so treten die durch diese erzeugten Spektrallinien als schwarze Linien im zu untersuchenden Spektrum auf (FRAUNHOFERSche Linien im Sonnenspektrum).

Das Spektroskop, das hier zur Untersuchung dienen soll, besitzt im allgemeinen die im Bild 150 wiedergegebene Anordnung. Das Spaltrohr K (Kollimator)

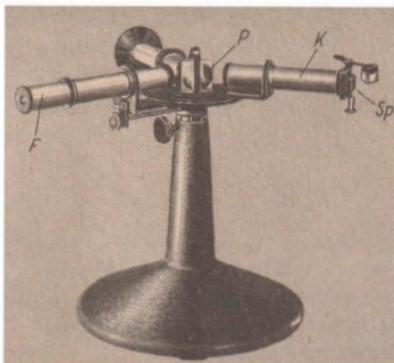


Bild 150

hat den Zweck, das vom Spalt Sp ausgehende divergente Lichtbündel parallel zu richten. Das Fernrohr F soll die Betrachtung der Linien erleichtern. Der Hauptteil des Apparates ist das Prisma P . Hier wird die Tatsache, daß die Brechzahl nicht konstant ist, sondern von der Wellenlänge abhängt, benutzt, um verschiedenfarbiges Licht, also Licht verschiedener Wellenlänge, in seine Komponenten zu zerlegen. Hierbei wird sich ein Prisma, bei welchem sich die Gesamtablenkung stark mit der Wellenlänge ändert, sehr gut zum Trennen der Komponenten eignen, weil die farbigen Spaltbilder (d. h. die Spektrallinien) dann sehr

weit auseinander liegen. Bevor man das Spektroskop zur Analyse unbekannter Substanzen verwenden kann, muß es mit Hilfe bekannter Spektren kalibriert werden. Zu diesem Zweck wird eine Skale in den Strahlengang eingespiegelt. Den einzelnen Skalenwerten, an denen die Spektrallinien erscheinen, ordnet man die betreffende Wellenlänge zu.

Jedes Element hat auf Grund seines Atomaufbaues die Fähigkeit, die bei der Anregung aufgenommene Energie in bestimmten Energiequanten $W = hf$ und wegen $c = \lambda f$ nur als Licht bestimmter Wellenlängen wieder abzugeben. Jedes Element besitzt durch seinen unterschiedlichen Atomaufbau bestimmte, ihm eigene Wellenlängen, die genau bekannt sind. Verwendet man bekannte Elemente, so ist die Wellenlänge ihrer Linien einfach aus Tabellen zu entnehmen und über den zugehörigen Skalenwerten aufzutragen. Aus der so erhaltenen Dispersionskurve können dann die Wellenlängen unbekannter Substanzen bestimmt werden. Sind mehrere Linien vorhanden, so kann man auf Grund der Farbe diesen je einen Skalenwert zuordnen. Auf diese Weise ist es möglich, einzelne Punkte der *Dispersionskurve* (Wellenlängen, aufgetragen über Skalenwerte) zu fixieren. Durch Interpolation können dazwischenliegende Werte unbekannter Substanzen mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden.

V Versuchsdurchführung

Zur Justierung eines Spektroskops entfernt man das Fernrohr F aus seiner Halterung auf dem Spektroskopisch. Nun richtet man das Fernrohr auf einen sehr entfernten Gegenstand und bewirkt mit dem Auszug, daß das Bild des Gegenstandes im Gesichtsfeld scharf erscheint. Danach setzt man das Fernrohr wieder in den Spektroskopisch ein und richtet das auf unendlich eingestellte Fernrohr so auf das Prisma, daß der durch die Spektrallampe gut ausgeleuchtete Spalt Sp im Gesichtsfeld erscheint. Das Skalenrohr dient dazu, in der Bildebene des Fernrohres, mit Hilfe der Prismenfläche als Spiegel, ein reelles Bild einer im Skalenrohr angebrachten Skale zu entwerfen, damit man die Lage der verschiedenfarbigen Spektrallinien zahlenmäßig fixieren kann. Die Skale wird durch eine Skalenlampe von außen beleuchtet. Mit Hilfe eines Funkeninduktors werden Elemente zum Leuchten angeregt. Das Licht wird durch die Dispersion im Prisma in die einzelnen, für jedes Element charakteristischen Spektral-

linien zerlegt. Diese werden mit Hilfe der Skale fixiert. Aus der Tabelle entnimmt man unter Beachtung der Farbe der Spektrallinie deren Wellenlänge und erhält so die für die grafische Darstellung der Dispersionskurve des Spektroskops erforderlichen Werte.

Beachten Sie, daß die Anordnung Spaltrohr, Prisma, Fernrohr, Skalenrohr während des Versuches nicht verändert wird!

A Aufgaben

1. Die Dispersion des Prismas ist als gemittelte Kurve (Wellenlänge über Skalenteile) grafisch darzustellen. Dazu sind mindestens 2 Spektralröhren auszumessen.
2. Das Spektrum eines unbekanntes Stoffes (Spektralröhre) ist aufzunehmen, und die Wellenlängen der Spektrallinien sind aus der Dispersionskurve zu entnehmen.
3. Der Strahlengang des Spektroskops ist in einer Skizze darzustellen.
4. Die Einflußgrößen der Wellenlängenbestimmung sind zu erläutern.

Versuchsgeräte: Spektroskop, Skalenlampe mit Halter, Akkumulator, Spektralröhren mit Halter, Dreifuß, Funkeninduktor

57. Polarimeter

G Grundlagen

Unter Licht versteht man einen elektromagnetischen Wellenvorgang eines bestimmten Frequenzbereiches (Größenordnung 10^{14} Hz). Der Nachweis der Wellennatur des Lichtes gelingt mit Hilfe von Interferenz, Beugung und Polarisation. Insbesondere durch die *Polarisation* wird nachgewiesen, daß das Licht ein räumlicher transversaler Wellenvorgang ist. Die durch die Ausbreitungs- und Schwingungsrichtung festgelegte Ebene heißt Schwingungsebene des Lichtes.

Die von einer natürlichen Lichtquelle ausgestrahlten Lichtwellen schwingen bezüglich der Beobachtungsdauer in sehr kurzen Zeiten in allen Richtungen und in völlig unregelmäßigem Wechsel. Dies ist darauf zurückzuführen, daß das natürliche Licht aus einem Gemisch von Lichtwellen besteht, die die verschiedensten Schwingungsrichtungen aufweisen. Läßt man das Licht durch Polarisatoren treten, so werden die vielen Schwingungsrichtungen bis auf eine ausgeschaltet (Bild 151). Ein auf diese Weise verändertes Licht wird als *linear polarisiertes Licht* bezeichnet.

Polarisiertes Licht stellt man u. a. durch *Doppelbrechung* im Kalkspat (NICOLsches

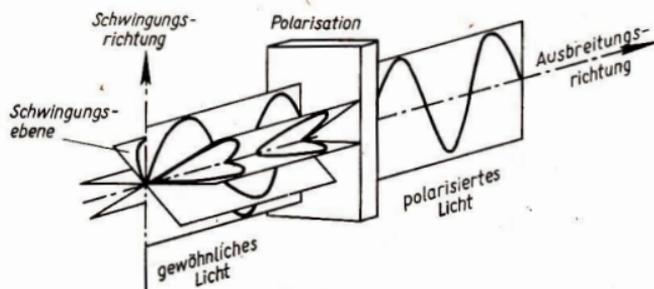


Bild 151

Prisma) oder durch Ausnutzung des *Dichroismus* (Polarisationsfilter) der Kristalle her.

Nicolsches Prisma: Ein in ein Kalkspatprisma eintretender Lichtstrahl wird durch Doppelbrechung in zwei linear polarisierte Teilstrahlen zerlegt, deren Schwingungsebenen senkrecht zueinander stehen. Der dem Brechungsgesetz gehorchende Teilstrahl wird als ordentlicher Strahl (*o*), der andere Teilstrahl, der dem Brechungsgesetz nicht gehorcht, als außerordentlicher Strahl (*ao*) bezeichnet.

Im Nicolschen Prisma (Bild 152), das aus zwei gleichen, mit Durobalsam zusammengekitteten Kalkspatprismen besteht, wird der ordentliche Strahl (*o*) nach der Totalreflexion am Durobalsam an der Prismenfassung absorbiert. Der außerordentliche Strahl (*ao*) erfährt durch Brechung in der Durobalsamschicht nur eine geringe Parallelversetzung.

Polarisationsfilter: Diese werden in modernen Polarisationsapparaten verwendet. Sie bestehen aus zwei Glasplatten, zwischen die eine Trägerfolie gelegt ist, auf der sich eine dünne Chinin-Iod-Verbindung befindet. Die Polarisation des Lichtes findet durch Dichroismus statt. Man versteht darunter die Eigenschaft von einachsigen Kristallen, entweder den ordentlichen

oder den außerordentlichen Strahl hindurchzulassen. Die Absorption längs der Kristallachse ist eine andere als senkrecht zu ihr und äußert sich in einem Farbunterschied.

Läßt man polarisiertes Licht durch einen zweiten Polarisator, den man als Analysator bezeichnet und der senkrecht zur Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes angeordnet ist, hindurchtreten, so tritt Auslöschung des Lichtes ein (Bild 153).

Bringt man zwischen Polarisator und Analysator einen Stoff, der die Eigenschaft hat, die Schwingungsrichtung des durch ihn hindurchtretenden linear polarisierten Lichtes zu drehen, so wird die Auslöschung aufgehoben. Stoffe, die diese Eigenschaften besitzen, bezeichnet man als optisch aktiv. Die meisten optisch aktiven Substanzen sind organische Stoffe, deren Moleküle mindestens ein „asymmetrisches Kohlenstoffatom“, d. h. ein mit vier verschiedenen Atomen oder Atomgruppen verbundenes C-Atom enthalten. Die Drehung der Schwingungsrichtung des linear polarisierten Lichtes ist von der

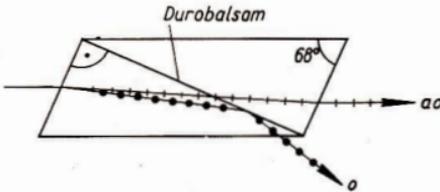


Bild 152

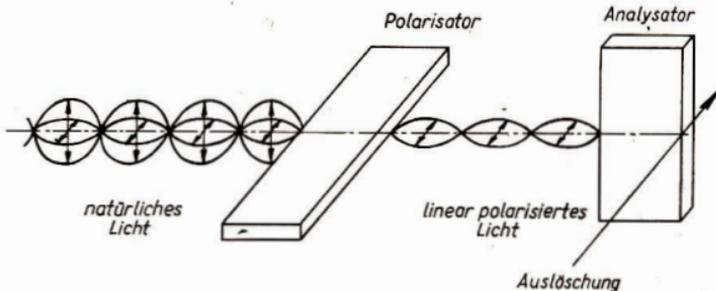


Bild 153

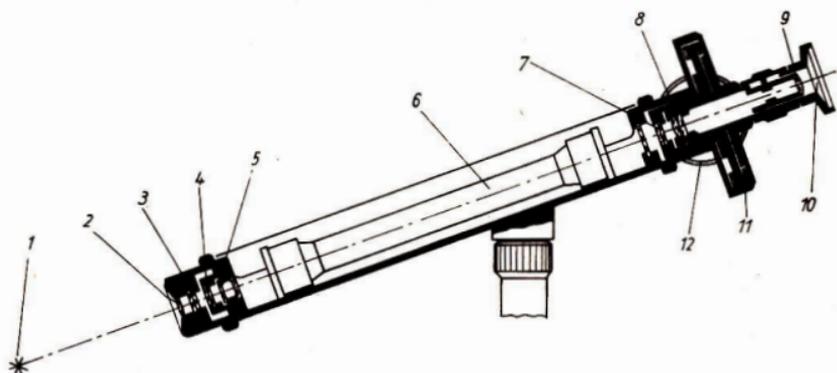


Bild 154

Wellenlänge des Lichtes, der Konzentration und Schichtdicke des optisch aktiven Stoffes abhängig. Geräte, mit denen man die Drehung der Schwingungsrichtung messen kann, werden als *Polarimeter* bezeichnet. In Bild 154 ist das Schema der Wirkungsweise eines Polarimeters wiedergegeben.

Das Polarimeter hat eine geeignete Aufstellung, um in zwangloser Haltung messen zu können. Die Lichtquelle, eine Natriumdampflampe, ist durch eine Haltevorrichtung mit dem Polarimeter verbunden. Eine Justierung der Lampe ist nicht erforderlich. Das von der Lichtquelle (1) ausgehende Licht verläuft hinter der Beleuchtungslinse (2) parallel, durchdringt ein Lichtfilter (3) und wird durch ein Polarisationsfilter (4) linear polarisiert. Die LAURENTSche Platte (5) bewirkt eine Dreiteilung des Sehfeldes. Der zu messende optisch aktive Stoff, der sich in der Beobachtungsröhre (6) befindet, dreht entsprechend seiner Beschaffenheit und Konzentration die Schwingungsebene des Lichtes. Durch ein zweites, als Analysator wirkendes Polarisationsfilter (7) gelangt dann das Licht in das Fernrohr (8, 9). Mit Hilfe des seitlich am Polarimeter angebrachten Triebes (12) wird der Analysator gedreht. Durch die Drehung des Analysators erfahren die beiden äußeren Teile des Seh-

feldes eine gleichzeitige, gleichmäßige Abdunklung oder Aufhellung, die man so lange beobachtet, bis Helligkeitsgleichheit mit dem mittleren Teil des Sehfeldes, in dem sich die Helligkeitsänderung im entgegengesetzten Sinne vollzieht, erreicht ist. Das Ablesen des Drehwinkels erfolgt an der mit dem Analysator fest verbundenen Kreisteilung und den feststehenden Nonien (11). Zwei in der Okularmuschel angebrachte Lupen (10) erleichtern das Ablesen. Das Meßprinzip zur Konzentrationsbestimmung optisch aktiver Substanzen (z. B. Zuckerlösungen, Öle usw.) besteht darin, daß die Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes um einen bestimmten Winkel verdreht wird. Die Größe dieses Winkels ist eine Funktion der Konzentration der in der Lösung befindlichen Substanz und der Lösungsmenge. Es gilt

$$\varphi = kcl \quad (1)$$

- mit φ Nachdrehwinkel des Analysators,
 c Konzentration der Lösung,
 l Länge der vom Licht durchsetzten Lösungsmenge im Beobachtungsröhre,
 k Proportionalitätsfaktor.

Ist k bekannt, so kann aus Gl. (1) die Konzentration errechnet werden.

V Versuchsdurchführung

Zum Versuch wird das in Bild 155 dargestellte Kreispolariometer mit Natriumdampf-
lampe verwendet. Die Natriumdampf-
lampe darf nur mit der vorgesehenen Vorschalt-
einrichtung betrieben werden. Nach dem Einschalten des Stromes dauert es einige
Minuten, bis die Natriumdampf-
lampe eingebrannt ist.

Die Beobachtungsröhre „200“ wird mit einer Lösung bekannter Konzentration gefüllt,
mit Deckglas, Dichtungsring und Abschlußkappe verschlossen. Zu starker Druck beim
Verschließen verursacht Spannung im Deckglas und damit Meßfehler. Derselbe Ver-



Bild 155

such wird mit der Beobachtungsröhre „100“ durchgeführt. Durch diesen Vorversuch
mit einer Lösung bekannter Konzentration erhält man einen Nachdrehwinkel φ , und
aus Gl. (1) läßt sich der Proportionalitätsfaktor errechnen.

Nach dem Reinigen der Beobachtungsröhren wird dann das Experiment mit der
Lösung unbekannter Konzentration durchgeführt. Durch den Vorversuch wurde k be-
stimmt. Der Versuch mit der Lösung unbekannter Konzentration ergibt einen bestimm-
ten Wert für den Nachdrehwinkel φ . Aus Gl. (1) kann damit die Konzentration errechnet
werden. Es ist zu beachten, daß vor jeder Messung das Okular auf die Trennungslinien,
die das Sehfeld in drei Teile teilen, scharf einzustellen ist, da sich die Scharfeinstellung
beim Einlegen der gefüllten Beobachtungsröhren gegenüber der leer eingeführten
Beobachtungsröhre ändert. Weiter ist vor jeder Messung die Nullstellung abzulesen,
denn sie hängt von der verwendeten Lichtart und von individuellen Eigenschaften
des Beobachters ab.

A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor k für die zur Verfügung gestellte Lösung und erläutern Sie seine physikalische Bedeutung!
2. Bestimmen Sie die Konzentration der zweiten Lösung!
3. Führen Sie den Vorversuch und die Konzentrationsbestimmung mit der Normalbeleuchtungseinrichtung durch!
4. Erläutern Sie die Ergebnisse des gesamten Versuches unter Beachtung der Genauigkeit der Noniusanzeige!

Versuchsgeräte: Kreispolarmeter, Natriumdampfampe mit Vorschaltvorrichtung, Normalbeleuchtungseinrichtung, Gefäß mit Lösung bekannter Konzentration, Gefäß mit Lösung unbekannter Konzentration, Bechergläser, Reinigungsplatten

58. Fotometrische Messungen

G Grundlagen

Die Fotometrie berücksichtigt die unterschiedliche Bewertung verschiedenfarbigen Lichtes durch das Auge (visuelle Fotometrie). Da das Auge unmittelbare Lichtmessungen nicht ausführen kann, bedient man sich besonderer Verfahren, bei denen zwei benachbarte Flächen auf gleichen Helligkeitszustand eingestellt werden müssen.

Ersetzt man das Auge durch einen lichtelektrischen Empfänger, dessen Empfindlichkeitscharakteristik derjenigen des Auges (spektraler Hellempfindlichkeitsgrad) angepaßt ist, so sind objektive fotometrische Messungen ausführbar (physikalische Fotometrie). Ein lichtelektrischer Empfänger, der diese Forderung etwa erfüllt, ist der CdS-Fotowiderstand. Für Meßaufgaben, bei denen keinerlei Abhängigkeit von der Wellenlänge besteht (z. B. Beleuchtungsstärkegesetz, Lichtverteilungskurve), können auch andere lichtelektrische Empfänger eingesetzt werden, z. B. eine Ge-Fotodiode oder ein Si-Fototransistor.

Der Fotowiderstand ist ein Halbleiterwiderstand, in dem bei Lichteinfall zusätzliche Ladungsträger freigesetzt werden. Der Widerstand sinkt; es wird ein Dunkel/Hell-Widerstandsverhältnis bis $10^6:1$ erreicht. In einem weiten Bereich besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Beleuchtungsstärke und Leitwert. Da Fotowiderstände relativ träge arbeiten, können Beleuchtungsstärkeänderungen über 1 kHz nicht erfaßt werden. Die spektrale Empfindlichkeit des CdS-Fotowiderstandes liegt zwischen $0,4 \mu\text{m}$ und $0,7 \mu\text{m}$, das Maximum bei etwa $0,55 \mu\text{m}$ (Bild 156 b).

Die Fotodiode ist eine Halbleiterdiode, in

deren Sperrschicht durch den Lichteinfall Ladungsträgerpaare erzeugt werden. Eine Fotodiode wird normalerweise als Fotowiderstand in Sperrichtung betrieben, die Stärke des zustande kommenden Fotostromes ist der Beleuchtungsstärke proportional. Fotodioden haben eine große Empfindlichkeit und geringe Trägheit, so daß sie für hohe Frequenzen einsetzbar sind. Die spektrale Empfindlichkeit der Ge-Fotodiode hat ihr Maximum im Ultraroten bei etwa $1,5 \mu\text{m}$ (Bild 156 b).

Durch den Einsatz geeigneter Filter kann man den zu den Messungen herangezogenen Spektralbereich für bestimmte Zwecke auf einen schmaleren Bereich einengen (Bild 156 c). Auf der Ordinatenachse ist der Transmissionsgrad τ ($0 \leq \tau \leq 1$; → Versuch 59) aufgetragen.

Die von einer Lichtquelle im sichtbaren Bereich abgegebene Strahlungsleistung nennt man den *Lichtstrom* Φ ; er wird in der Einheit Lumen (lm) gemessen. Zur Charakterisierung eines Raumsektors benutzt man den *Raumwinkel* Ω , der in Analogie zum ebenen Winkel festgelegt wird.

Es gilt (Bild 157):

$$\Omega = \frac{A}{r^2}, \quad [\Omega] = \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = \text{sr}. \quad (1)$$

Der Raumwinkel wird in der Einheit Steradian (sr) angegeben. Von besonderer Bedeutung ist der Vollraumwinkel, er beträgt:

$$\Omega_0 = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr} = 12,56 \text{ sr}.$$

Zur Bewertung des Lichtstromes, der in einem vorgegebenen Raumwinkel eingestrahlt wird, dient die *Lichtstärke*. Die Lichtstärke ist definiert durch

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}, \quad [I] = \text{cd (Candela)}. \quad (2)$$

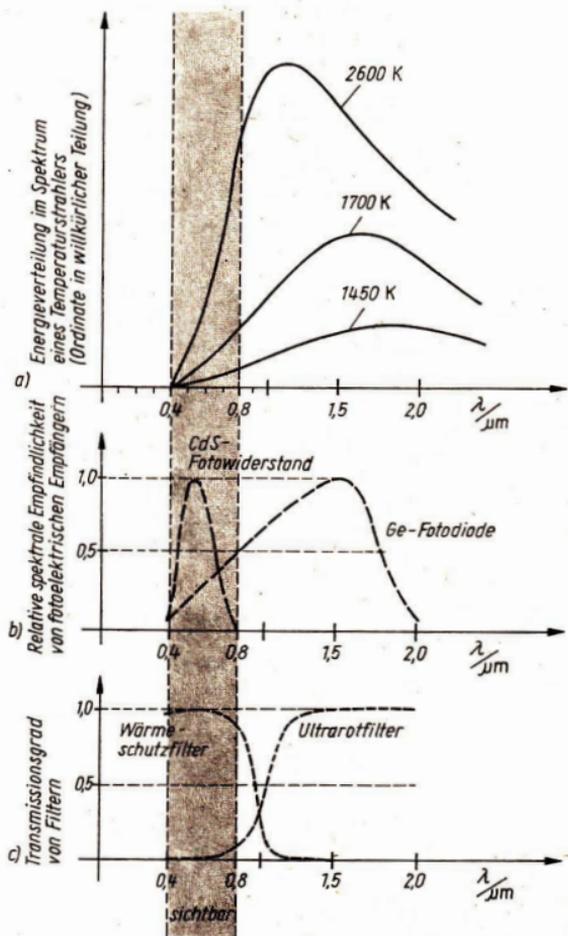


Bild 156

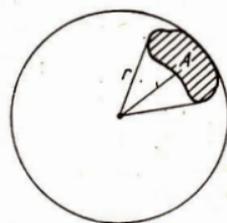


Bild 157

Wenn die Lichtstärke in allen Raumrichtungen den gleichen Wert hat, so liegt eine kugelsymmetrische Lichtverteilung vor (punktförmige Lichtquelle).

Ist die Lichtstärke nicht in allen Raumrichtungen die gleiche, so muß die *Lichtverteilungskurve*, die die Lichtstärke in einer bestimmten Ebene in Abhängigkeit

vom Winkel anzeigt (Polardiagramm der Lichtstärke), angegeben werden.

Die *Beleuchtungsstärke* ist der Quotient des auf eine Fläche treffenden Lichtstromes und der Fläche,

$$E = \frac{\Phi}{A}; [E] = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx}. \quad (3)$$

Die Einheit der Beleuchtungsstärke ist das Lux (lx). Unter Verwendung von Gln. (1), (2) und (3) erhält man

$$E = \frac{I\Omega}{A} = \frac{IA}{Ar^2} = \frac{I}{r^2}. \quad (4a)$$

Somit ist die Beleuchtungsstärke dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional (Beleuchtungsstärkegesetz bei senkrechtem Strahleneinfall).

Die für alle praktischen Berechnungen zu verwendende zugeschnittene Größengleichung lautet

$$E/lx = \frac{I/cd}{(r/m)^2}. \quad (4b)$$

Unter der *Lichtausbeute* versteht man das Verhältnis des von einer Glühlampe emittierten Lichtstromes und der aufgenommenen elektrischen Leistung.

$$\eta = \frac{\Phi}{P_{el}}; [\eta] = \frac{\text{lm}}{\text{W}}. \quad (5)$$

Da die Energieverteilung im Spektrum einer Glühlampe von deren Temperatur abhängt (PLANCKSches Strahlungsgesetz, Bild 156a), ist die Lichtausbeute von der jeweils zugeführten elektrischen Leistung abhängig.

Eine markante Eigenschaft des Lichtes ist seine *Polarisierbarkeit*. Von einem Polarisator (z. B. Turmalinkristall, Polarisationsfolie) wird nur eine einzige Schwingungsebene hindurchgelassen. Läßt man polarisiertes Licht einen zweiten Polarisator passieren, so tritt bei gekreuzten Durchlaßrichtungen völlige Auslöschung ein, während bei Parallelstellung maximale Helligkeit wahrzunehmen ist. Bei beliebigem Winkel φ zwischen den Durchlaß-

richtungen der Polarisatoren (Bild 158) verkleinert sich die Amplitude auf

$$y_1 = y_0 \cos \varphi.$$

Die Energie bzw. Leistung ist dem Quadrat der Amplitude proportional, deshalb gilt für die Durchlässigkeit der gegeneinander verdrehten Polarisatoren:

$$D = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{y_1^2}{y_0^2} = \cos^2 \varphi \\ = \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Die Polarisationswirkung der meisten Polarisatoren ist auf einen bestimmten Spektralbereich beschränkt; in anderen Bereichen kann man keine oder nur eine unvollständige Polarisation feststellen.

Der *Reflexionsgrad* eines Körpers entspricht dem Verhältnis von reflektiertem Lichtstrom Φ_r zum einfallenden Lichtstrom Φ_0 :

$$\rho = \frac{\Phi_r}{\Phi_0}.$$

Werden dünne Glasplatten (Diagläser) verwendet, bei denen die Absorption vernachlässigbar klein ist, so kann ρ aus der Messung des hindurchgehenden (Φ_{i+1}) und des einfallenden Lichtstromes Φ_i auch wie folgt ermittelt werden:

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{\Phi_{i+1}}{\Phi_i}}. \quad (7)$$

Die *Brechzahl* gibt das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit in dem einen Körper umgebenden Medium (Vakuum, Luft) zur Lichtgeschwindigkeit im Körper an

$$n = \frac{c_0}{c_K}.$$

Meist wird der Brechungsindex über das Brechungsgesetz aus Winkelmessungen bestimmt. Unter Benutzung der FRESNELSchen Gleichung für senkrechten Strahleneinfall kann n aber auch aus dem Reflexionsgrad ρ ermittelt werden:

$$n = \frac{1 + \sqrt{\rho}}{1 - \sqrt{\rho}}. \quad (8)$$

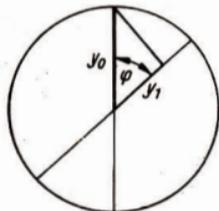


Bild 158

V Versuchsdurchführung

Alle Messungen dieses Versuches werden mit der *Wechsellichtmethode* ausgeführt. Zwischen Lichtquelle und Empfänger rotiert eine Sektorblende, die den Lichtstrom „zerhackt“. Das entstehende elektrische Signal kann daher mit einem Wechselspannungs-Meßverstärker so verstärkt werden, daß ein normales Vielfachmeßgerät zur Anzeige benutzt werden kann. Der große Vorteil dieses Meßprinzips liegt darin, daß die fotometrischen Messungen im unverdunkelten Raum ausgeführt werden können. Das Tageslicht und die Raumbelichtung sind nicht moduliert; der dadurch hervorgerufene Gleichspannungsanteil des Signals wird nicht verstärkt und kommt somit nicht zur Anzeige.

Die Messungen sind im Prinzip Relativmessungen. Statt der eigentlich gesuchten Größe (E , I , Φ_{ges}) wird jeweils nur der auf den Empfänger gelangende Teil des Lichtstromes für die Messung wirksam. Die Empfindlichkeit des Empfängers, die Verstärkung durch den Meßverstärker sowie die Tatsache der Messung der nichtsinusförmigen Wechselspannung mit dem für sinusförmige Wechselspannung geeichten Vielfachmeßgerät brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Die Proportionalität der vom Meßgerät angezeigten Ausgangsspannung zu dem auf den Empfänger fallenden Lichtstrom kann vorausgesetzt werden.

Der Aufbau der Versuchsanordnung ist aus Bild 159 ersichtlich.

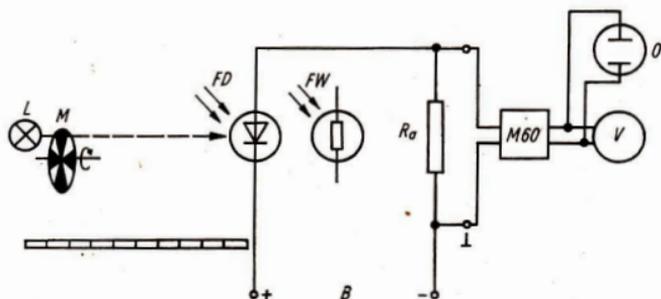


Bild 159

L Glühlampe (6 V, 5 A), M Modulator (rotierende Sektorblende), FD/FW Fotodiode (Ge)/Fotowiderstand (CdS), R_a Arbeitswiderstand, B Batterie, M 60 Meßverstärker, V Vielfachmeßgerät, O Oszilloskop

A Aufgaben

- Messen Sie die Abhängigkeit der Beleuchtungsstärke von der Entfernung zwischen Lichtquelle und lichtelektrischem Empfänger (Fotodiode), und stellen Sie die gewonnene Funktion in normalem und auf doppeltlogarithmischem Koordinatenpapier grafisch dar! Auf welche Weise zeigt sich die Gültigkeit des Beleuchtungsstärkegesetzes?
- Für eine drehbar angeordnete Glühlampe (horizontale/vertikale Drehebene) ist bei festem Abstand zum Empfänger (Fotodiode) die Abhängigkeit der Lichtstärke vom Drehwinkel zu erfassen und im Polarkoordinatenpapier darzustellen! Welche charakteristischen Stellen weist die erhaltene Lichtverteilungskurve auf?

3. Für eine Glühlampe ist die Abhängigkeit der Lichtausbeute von der zugeführten elektrischen Leistung unter Verwendung des Fotowiderstandes zu erfassen.
Die Einstellung der verschiedenen Leistungen erfolgt z. B. durch einen dem Beleuchtungstrafo vorgeschalteten Stelltrafo, die Leistungsmessung wird mit einem elektrodynamischen Meßgerät oder mit zwei Vielfachmeßgeräten realisiert. Begründen Sie den erhaltenen Kurvenverlauf!
4. Die Durchlässigkeit von zwei gegeneinander gedrehten Polarisatoren ist unter Verwendung des Fotowiderstandes zu ermitteln. Zum Vergleich ist die Messung mit der Fotodiode zu wiederholen. Schlußfolgerung?
5. Ermitteln Sie den Reflexionsgrad von Glas! Bringen Sie dazu nacheinander 0, 1, 2, 3, ..., 10 Diagläser in den Strahlengang und messen Sie mit der Fotodiode oder dem Fotowiderstand jeweils den hindurchgehenden Lichtstrom!
Bilden Sie alle 10 Quotienten $x_i = \Phi_{i+1}/\Phi_i$ und führen Sie eine vollständige Auswertung der so erhaltenen Meßreihe x_i aus (Mittelwert, Standardabweichung, Vertrauensbereich des Mittelwertes)!
Bestimmen Sie den Reflexionsgrad nach $\varrho = 1 - \sqrt{x}$ und geben Sie den relativen und absoluten Fehler von ϱ an!
6. Berechnen Sie aus Aufgabe 5. nach Gl. (8) die Brechzahl n ! Ermitteln Sie den relativen und absoluten Fehler von n !

Versuchsgeräte: Optische Schiene mit Meßplatte, Lichtquelle (Lampenhaut), dreh- und schwenkbare Lampenhalterung, Modulator (Sektorblende), Beleuchtungstrafo 6 V, Stelltrafo, Meßverstärker M 60, Flachbatterie 4,5 V; Vielfachmeßgerät, Oszilloskop, Leistungsmesser, Ge-Fotodiode, CdS-Fotowiderstand, Diaglashalterung und 10 Diagläser, 2 Polarisationsfilter

59. Lichtreflexion und -absorption

G Grundlagen

Fällt ein Lichtbündel (Lichtstrom Φ_0) auf einen durchsichtigen Körper, so wird es an der Grenzfläche teils reflektiert (Lichtstrom Φ_r), ein weiterer Teil (Lichtstrom Φ_a) wird von dem optischen Medium absor-

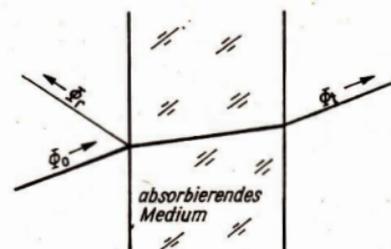


Bild 160

biert, der Rest (Lichtstrom Φ_t) geht durch den Körper hindurch; er wird transmittiert (Bild 160).

Man definiert den

$$\text{Reflexionsgrad} \quad \varrho = \frac{\Phi_r}{\Phi_0},$$

$$\text{Absorptionsgrad} \quad \alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}, \quad (1)$$

$$\text{Transmissionsgrad} \quad \tau = \frac{\Phi_t}{\Phi_0}.$$

Der Energiesatz fordert

$$\Phi_0 = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t. \quad (2)$$

Daraus folgt mit Gl. (1)

$$\varrho + \alpha + \tau = 1. \quad (3)$$

Wir betrachten nun die Vorgänge innerhalb des absorbierenden Mediums (Bild 161). Ist Φ_i der in das Medium eindringende,

Φ_e der aus dem Medium austretende Lichtstrom, so nennt man

$$\alpha_i = \frac{\Phi_i - \Phi_e}{\Phi_i} = 1 - \frac{\Phi_e}{\Phi_i} \quad (4)$$

den Reinabsorptionsgrad.

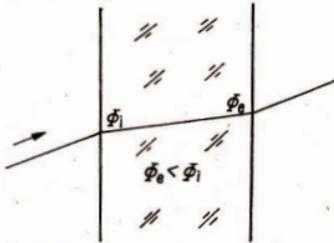


Bild 161

Beachten Sie, daß der Absorptionsgrad auf den *auf treffenden* Lichtstrom Φ_0 , der Reinabsorptionsgrad aber auf den *ein dringenden* Lichtstrom Φ_1 bezogen ist! Der in Gl. (4) auftretende Quotient Φ_e/Φ_1 heißt Reintransmissionsgrad:

$$\vartheta = \frac{\Phi_e}{\Phi_1} \quad (5)$$

Im absorbierenden Medium ändert sich der Lichtstrom Φ längs des Wegelements dx um $d\Phi$. $d\Phi$ ist dem Lichtstrom Φ und dem Wegdifferential dx proportional:

$$d\Phi = -m_n \Phi dx.$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß der Lichtstrom abnimmt. Trennung der Veränderlichen und Integration über die Schichtdicke d ergibt:

$$\int_{\Phi_1}^{\Phi_e} \frac{d\Phi}{\Phi} = -m_n \int_0^d dx$$

$$\ln \frac{\Phi_e}{\Phi_1} = -m_n d \quad (6)$$

oder

$$\Phi_e = \Phi_1 e^{-m_n d} \quad (7)$$

m_n heißt natürlicher Extinktionsmodul. Bild 162 stellt den Verlauf der Funktion (7) dar.

Ersetzt man in Gl. (6) den natürlichen Logarithmus durch den dekadischen ($\ln x = 2,3 \lg x$):

$$\lg \frac{\Phi_e}{\Phi_1} = -\frac{m_n}{2,3} d$$

und führt den dekadischen Extinktionsmodul $m = \frac{m_n}{2,3}$ ein, so erhält man

$$\Phi_e = \Phi_1 \cdot 10^{-md} \quad (8)$$

Das Produkt $m_n d$ heißt natürliche Extinktion E_n . Entsprechend bezeichnet man md als dekadische Extinktion E .

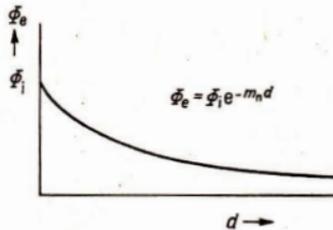


Bild 162

Die Extinktion in einer planparallelen Glasplatte kann nicht direkt aus Gl. (7) oder (8) bestimmt werden, da Φ_1 und Φ_e nicht bekannt sind. Es muß die Reflexion an den Grenzflächen berücksichtigt werden. Der Reflexionsgrad ϱ aus Gl. (1) läßt sich für eine planparallele Platte bei senkrechtem Lichteinfall nach FRESNEL berechnen:

$$\varrho = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (9)$$

Er hängt also nur von den Brechzahlen n_2 der Platte und n_1 des umgebenden Mediums (Luft) ab.

Vereinfachend soll angenommen werden, daß keine Mehrfachreflexion stattfindet, daß also von dem an der zweiten Grenz-

schicht reflektierten Licht [in Bild 163 $\varrho(1 - \varrho) \vartheta \Phi_0$] nicht noch einmal ein Teil an der ersten Grenzschicht reflektiert wird. In Bild 163 sind die Lichtströme eingetragen, die sich unter dieser Voraussetzung ergeben. Φ_0 und Φ_1 können gemessen werden. Nach Bild 163 ist

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \vartheta. \quad (10)$$

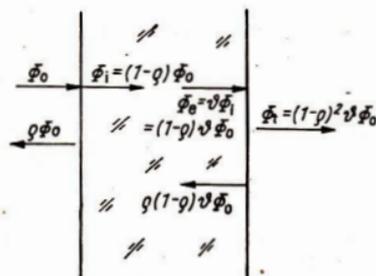


Bild 163

Werden dünne Glasplatten (etwa Diagonalgläser) verwendet, so kann die Extinktion vernachlässigt und der Reinttransmissionsgrad $\vartheta \approx 1$ gesetzt werden. Anstelle von Gl. (10) gilt dann

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2. \quad (10')$$

Werden mehrere dünne Glasplatten hintereinandergesetzt (Bild 164), so erhält

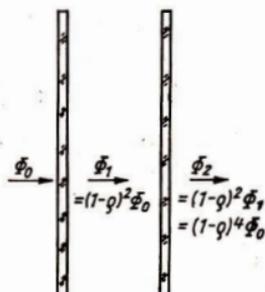


Bild 164

man

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_2} = \dots = (1 - \varrho)^2.$$

Daraus kann der Reflexionsgrad ermittelt werden zu

$$\varrho = 1 - \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} = 1 - \sqrt{\frac{\Phi_2}{\Phi_1}} = \dots \quad (11)$$

Zur Berechnung des Extinktionsmoduls m folgt zunächst aus Gl. (5) und (8)

$$\vartheta = 10^{-md}$$

mit d als Dicke der Glasplatte. Setzt man das in Gl. (10) ein, so erhält man

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \cdot 10^{-md}.$$

Daraus läßt sich m berechnen:

$$m = \frac{1}{d} \left[2 \lg(1 - \varrho) + \lg \frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right]. \quad (12)$$

V Versuchsdurchführung

Zur Messung des Lichtstroms bzw. der Lichtstärke wird eine Vakuumfotозelle verwendet. Den Versuchsaufbau zeigt Bild 165. Die Entfernung Lichtquelle—Fotозelle wird während des Versuches nicht geändert. Dann ist die Stärke des Fotostroms dem Lichtstrom proportional. Der Glasplattenhalter kann bis zu 4 Diagonalgläser aufnehmen.

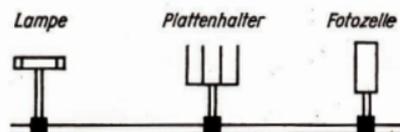


Bild 165

Nachdem die Stromstärke I_0 der Fozelle gemessen worden ist, wenn sich keine Gläser im Strahlengang befinden, werden nacheinander 1, 2, 3 und 4 Diaglaser eingesetzt und die elektrische Stromstärke gemessen.

Zur Bestimmung der Extinktion werden quaderförmige Glaskörper von verschiedener Länge und bekannter Brechzahl in den Strahlengang gebracht und die jeweiligen Stromstärken der Fozelle gemessen. Aus der Brechzahl wird nun nach Gl. (9) der Reflexionsgrad und damit nach Gl. (12) der Extinktionsmodul errechnet.

A Aufgaben

1. Es ist der Reflexionsgrad der vorgelegten Diaglaser zu ermitteln.
2. Aus Gl. (9) ist die Brechzahl der Diaglaser zu berechnen.
3. Für die Glaskörper sind dekadischer und natürlicher Extinktionsmodul zu bestimmen.
4. Berechnen Sie dekadische und natürliche Extinktion!
5. Berechnen Sie den Reinabsorptionsgrad der Glaskörper!
6. Fehlerabschätzung

Versuchsgeräte: Vakuumfotозelle mit Gehäuse, Glühlampe mit Gehäuse, Galvanometer, Spannungsmesser, Potentiometer, Spannungstabilisator, optische Bank mit Reitern und Maßstab, Glasplatten mit Halter, Glaskörper mit Halter, Blenden

60. Charakteristik eines Geiger-Müller-Zählrohrs

G Grundlagen

Das GEIGER-MÜLLER-Zählrohr ist ein *Strahlungsdetektor*, d. h. ein Gerät zum Nachweis radioaktiver Strahlung. Nach der äußeren Form unterscheidet man Zylinderzählrohre (zum Nachweis harter Strahlung) und Glockenzählrohre besonders zum Nachweis weicher Strahlung. Den schematischen Aufbau eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohres zeigt Bild 166. In einem Rohr (Glas mit innerem Metallbelag) befindet sich in der Längsachse ein dünner Draht. Metallbelag und Draht

sind gegeneinander isoliert und dienen als Elektroden. Im Rohr befindet sich ein Gas (meist Argon oder Luft) unter niedrigem Druck. Legt man nun an die beiden Elektroden eine Spannung von etwa 1 kV, so entsteht ein starkes elektrisches Feld; eine selbständige Entladung findet aber noch nicht statt. Fällt jedoch radioaktive Strahlung ein, so werden Gasatome ionisiert. Infolge der hohen elektrischen Feldstärke bewirken die freigesetzten Elektronen Stoßionisation weiterer Gasatome, so daß eine selbständige Gasentladung eingeleitet wird. Bei den heute fast ausschließlich verwendeten „selbstlöschenden“ Zählrohren wird dem Gas ein Löschgas (meist Ethanolampf) zugesetzt, das die Energie der beschleunigten Ionen und Elektronen aufnimmt, so daß die Gasentladung schnell wieder unterbrochen wird. Je kürzer die Zeit ist, die bis zum Abklingen eines von einem Teilchen oder Strahlungsquant ausgelösten Stromstoßes vergeht (Totzeit), um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß jedes einzelne Teilchen oder Quant gezählt wird. Die

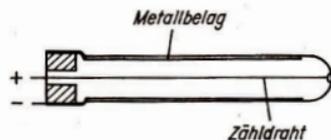


Bild 166

Stromstöße werden nach Verstärkung von einer Zählanlage registriert oder durch einen Lautsprecher hörbar gemacht.

Ein Glockenzählrohr zeigt Bild 167. Das Zählrohr ist durch eine dünne Glimmerschicht abgeschlossen, die auch von energieärmerer Strahlung durchdrungen werden kann.

Das Prinzipschaltbild eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohres zeigt Bild 168.

Zählrohrcharakteristik

Unter der Zählrohrcharakteristik versteht man die Abhängigkeit der *Zählrate* z von der Zählrohrspannung U bei konstanter Bestrahlung (Bild 169). Die Zählrate ist der Quotient aus der Anzahl n der von der Apparatur gezählten Impulse und der Zeit t :

$$z = \frac{n}{t}. \quad (1)$$

Von einer bestimmten Spannung U_E (Einsatzspannung) an registriert der Zähler Teilchen oder Quanten. Die Zählrate steigt stark an, bleibt dann aber über einen Bereich von 200 V bis 300 V nahezu konstant. Dieser Teil der Charakteristik wird *Plateau* genannt. Die Plateaulänge wird in Volt gemessen. Bei weiterer Erhöhung der Spannung wächst die Zählrate wieder stark an; es kommt schließlich zur Dauerentladung und zur Zerstörung des Zählrohres. Die Arbeitsspannung U_A des Zählrohres wählt man bei etwa 100 V über der Einsatzspannung.

Auch wenn kein radioaktives Präparat in der Nähe ist, registriert ein Zählrohr eine gewisse Anzahl von Teilchen oder Quanten, die aus der Höhenstrahlung oder der Radioaktivität des Raumes stammen. Die sich hieraus ergebende Zählrate heißt *Nulleffekt*. Jede Messung wird vom Nulleffekt überlagert.

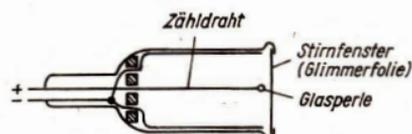


Bild 167

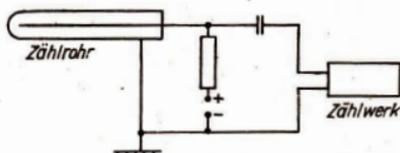


Bild 168

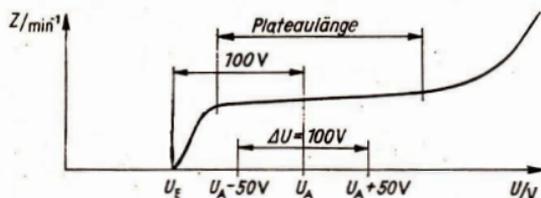


Bild 169

V Versuchsdurchführung

Das radioaktive Präparat wird in einer Entfernung von etwa 10 cm bis 20 cm vom Zählrohr angeordnet. Zur Aufnahme der Zählrohrcharakteristik wird die Spannung zunächst in Schritten von etwa 50 V erhöht und die Einsatzspannung gemessen. Von der Einsatzspannung an wird die Spannung nur noch in Schritten von 10 V erhöht; die Zählraten werden bei jeder Spannung gemessen (mindestens 1000 Impulse). Die

Messungen werden bei etwa 200 V über der Einsatzspannung abgebrochen. Die Plateau-Steigung s wird aus der Gleichung

$$s = \frac{z_{U_A+50V} - z_{U_A-50V}}{z_{U_A} \cdot 100 \text{ V}}$$

berechnet. Es ist üblich, die PlateauSteigung in %/100 V anzugeben.

Ein Zählrohr ist unbrauchbar, wenn sich die Plateaulänge auf 150 V verkürzt und die PlateauSteigung sich auf 15%/100 V erhöht hat.

Achtung! Beachten Sie die Hinweise zum Strahlenschutz beim Umgang mit umschlossenen Strahlenquellen!

A Aufgaben

1. Nehmen Sie die Zählrohrcharakteristik des vorgelegten Zählrohres auf!
2. Bestimmen Sie die Einsatzspannung und den Plateauanfang!
3. Legen Sie die Arbeitsspannung fest!
4. Berechnen Sie die PlateauSteigung!
5. Beurteilen Sie die Einsatzfähigkeit des Zählrohres!

Versuchsgeräte: GEIGER-MÜLLER-Zählrohr mit Netzgerät und Zählleinrichtung, radioaktives Präparat, Stoppuhr, Tiegelszange, Stativmaterial

61. Absorption von Gammastrahlung

G Grundlagen

Radionuklide sind nach der Emission von α - bzw. β -Teilchen noch angeregt und emittieren ihren Energieüberschuß in Form von γ -Strahlung. Die γ -Strahlung ist eine elektromagnetische Wellenstrahlung, die aus einzelnen Quanten bestimmter Energie besteht. Sie breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die von einem Radionuklid emittierte γ -Strahlung ist für dieses charakteristisch, da sie sich nicht über ein kontinuierliches Energiespektrum verteilt, sondern die einzelnen Quanten ganz bestimmte diskrete Energie haben. Da die γ -Quanten im Gegensatz zu den α - und β -Teilchen weder Ruhmasse noch eine elektrische Ladung besitzen, ist ihre Wechselwirkung mit einem Stoff (Absorber) auch anders geartet.

Geben die α - und β -Teilchen ihre Energie

portionsweise in einzelnen Ionisationsprozessen an die Hüllenelektronen ab, so übertragen die γ -Quanten ihre gesamte Energie entweder in einem Akt oder in wenigen Wechselwirkungsprozessen. Die Energie der γ -Quanten ist im Vergleich zur Energie der Licht-/Röntgenstrahlen um Größenordnungen größer, folglich ist auch ihr Durchdringungsvermögen stärker. Von materiellen Medien wird γ -Strahlung nur schwach absorbiert. Bei der Durchdringung eines Stoffes (Absorbers) verlieren die γ -Quanten durch Wechselwirkung ihre Energie auf dreierlei Art:

- durch den *Fotoeffekt* (lichtelektrische Absorption), der darin besteht, daß ein γ -Quant von einem Hüllenelektron absorbiert und im Ergebnis dieses Wechselwirkungsprozesses seine Energie vollkommen verbraucht wird. Ein Teil der Energie des γ -Quants dient als Ablösearbeit W des Elektrons, der andere Teil wird dem Elektron als Bewegungsenergie übertragen. Jedes

absorbierte γ -Quant löst beim Fotoeffekt primär ein Elektron ab. Für diesen Vorgang gilt:

$$W_{\gamma} = W_{\text{kin}} + W.$$

- durch den *Compton-Effekt* (inelastischer Stoß mit Elektronen), hierbei findet eine Wechselwirkung zwischen γ -Quant und einem quasifreien Hüllenelektron statt. Das stoßende γ -Quant überträgt dabei nur einen Teil seiner Energie als Ablösearbeit W und kinetische Energie W_{kin} und wird selbst aus seiner Richtung abgelenkt. Es entsteht eine Streustrahlung. Beim *Compton-Effekt* treten gleichzeitig ein gestreutes Quant mit W_{γ}' und ein Rückstoßelektron auf. Für diesen Vorgang gilt:

$$W_{\gamma} = W_{\text{kin}} + W + W_{\gamma}'.$$

- durch den *Paarbildungseffekt*, der darin besteht, daß sich ein γ -Quant der Energie $W_{\gamma} > 1,02 \text{ MeV}$ im *Coulomb-Feld* eines Atomkerns in ein Elektronenpaar, d. h. ein Elektron mit negativer Ladung (Negatron) und ein Elektron mit positiver Ladung (Positron) umwandelt. Die Energie des γ -Quants tritt nach der Umwandlung in Form der Ruhenergie des Elektronenpaares und dessen kinetischer Energie auf. Das Positron gibt seine Energie über Stoßprozesse ab und vereinigt sich mit einem Elektron, wobei die gesamte Masse zerstrahlt (Vernichtungsstrahlung). Für den Vorgang der Paarbildung gilt:

$$W_{\gamma} = \frac{m}{2} (v_{+}^2 + v_{-}^2) + 2m_0c^2.$$

Der Anteil jeder dieser Effekte bei der Absorption hängt von der Kernladungszahl des absorbierenden Mediums und der Energie der γ -Quanten ab. Bei niedrigen Energien $W_{\gamma} < 0,6 \text{ MeV}$ erfolgt die Absorption vorwiegend durch den Fotoeffekt, im mittleren Energiebereich $0,5 \text{ MeV} < W_{\gamma} < 1,5 \text{ MeV}$ überwiegt der *Compton-Effekt*, während der *Paarbildungseffekt* erst oberhalb $1,02 \text{ MeV}$ wirksam zu werden beginnt. Die Gesamtabsorption von γ -Quanten, womit die von ihnen abgegebene Energie gemeint ist, die für alle drei Prozesse benötigt wird, verläuft nach einem Exponentialgesetz.

Nach dem Durchdringen eines Absorbers der Dicke d wird die Energieflußdichte \dot{F}_0 eines Stromes monoenergetischer γ -Quanten auf

$$\dot{F} = \dot{F}_0 \exp(-\mu d) \quad (1)$$

geschwächt. Der die Schwächung charakterisierende lineare Schwächungskoeffizient μ ist abhängig von der Energieflußdichte der γ -Quanten und der Kernladungszahl des Absorbermaterials. Hat man μ für ein bestimmtes Absorbermaterial bestimmt, so kann man diejenige Schichtdicke $d_{1/2}$ (Halbwerttdicke) dieses Materials angeben, die nötig ist, um eine beliebige Energieflußdichte \dot{F}_0 der γ -Strahlung zur Hälfte zu absorbieren. Hierfür gilt:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,693}{\mu}. \quad (2)$$

μ und $d_{1/2}$ sind Kenngrößen Absorbermaterials.

V Versuchsdurchführung

Der prinzipielle Aufbau der Versuchsanordnung zur Bestimmung des linearen Schwächungskoeffizienten μ ist in Bild 170 dargestellt. Der Abstand Strahlungsquelle-Zählrohr wird vorgegeben und ist während der Versuchsdurchführung nicht zu verändern. Zur Vorbereitung ist der Versuch 61 (GEIGER-MÜLLER-Zählrohr) durchzuarbeiten. Nach Fertigstellung des Versuchsaufbaus wird die Strahlungsquelle entfernt und das Zählrohr auf vorgeschriebene Arbeitsspannung gebracht. Danach schaltet man das

Zählgerät an. Die sich ergebende Zählrate z_0 wird als Nulleffekt bezeichnet. Er überlagert sich jeder Messung. Der Nulleffekt ist vor und nach dem Versuch zu bestimmen. Die Meßzeit soll mindestens 2 Minuten betragen.

Die Strahlungsquelle wird wieder in den Versuchsaufbau angeordnet und das Absorbermaterial der Stärke d zwischen Strahlungsquelle und Zählrohr gebracht. Nun bestimmt man die Zählrate z . Die Meßzeit soll ebenfalls mindestens 2 Minuten betragen. Entsprechend der zur Verfügung stehenden Zeit sind die Messungen mit gleichem Absorbermaterial, jedoch veränderter Dicke mehrmals zu wiederholen.

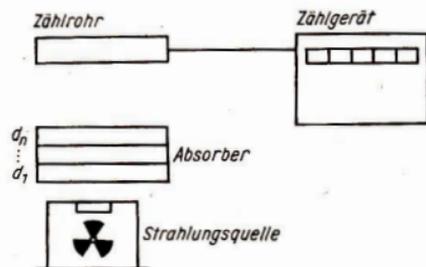


Bild 170

Löst man Gl. (1) nach μ auf (Auflösung zur Übung durchführen!), so erhält man

$$\mu = \frac{\ln \frac{\dot{F}_0}{\dot{F}}}{d}. \quad (3)$$

Sowohl \dot{F}_0 ist der Zählrate ($z_{\text{ohne}} - z_0$) ohne Absorber, wie auch der Zählrate ($z - z_0$) mit Absorber proportional. Die Zählraten werden wie oben ausgeführt mit dem Zählrohr gemessen. Unter Berücksichtigung des Nulleffektes z_0 ergibt sich aus Gl. (3)

$$\mu = \frac{1}{d} \ln \frac{z_{\text{ohne}} - z_0}{z - z_0}. \quad (4)$$

Achtung! Beachten Sie die Hinweise über den Umgang mit radioaktiven Präparaten.

A Aufgaben

1. Darstellung von $(z - z_0) = f(d)$ auf halblogarithmischem Funktionspapier
2. Ermittlung von $d_{1/2}$ aus der grafischen Darstellung
3. Bestimmung von μ aus den Messungen nach Gl. (4)
4. Berechnen Sie den Schwächungskoeffizienten k nach der Gleichung $k = 2^{-\frac{d}{d_{1/2}}}$
5. Berechnung von $d_{1/2}$ nach Gl. (2)

Versuchsgeräte: GEIGER-MÜLLER-Zählrohr mit Netzgerät und Zählgerät, Strahlungsquelle, Stoppuhr, Absorbermaterial, Stativmaterial

62. Aktivitätskonzentration

G Grundlagen

Für die Strahlenschutzmeßtechnik ist die Kenntnis der spezifischen Aktivität eines radioaktiven Nuklids bzw. die Aktivitätskonzentration eines kontaminierten¹⁾ Stoffes von Bedeutung.

Die Aktivität A ist definiert als Quotient aus der Anzahl der in der Zeit Δt zerfallenden Kerne ΔN und dieser Zeit:

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{dN}{dt}. \quad (1)$$

Daraus ergibt sich für die Aktivität die SI-Einheit Becquerel (Bq), also

$$[A] = 1/s = \text{Bq}.$$

Aus dem Zerfallsgesetz $N = N_0 \cdot \exp(-\lambda t)$ und der Zerfallskonstanten λ oder der Halbwertszeit $T_{1/2}$ wird

$$A = \lambda N = (\ln 2) \frac{N}{T_{1/2}},$$

wobei N die Anzahl der Kerne bedeutet. Über die Masse m , die molare Masse M und die AVOGADRO-Konstante N_A erhält man schließlich

$$A = \lambda m \frac{N_A}{M}.$$

Die spezifische Aktivität a ist der Quotient aus der Aktivität A und der Masse m des strahlenden Stoffes:

$$a = \frac{A}{m}. \quad (2)$$

Mit der vorigen Gleichung ergibt sich

$$a = \lambda \frac{N_A}{M}.$$

Die SI-Einheit der spezifischen Aktivität ist Bq/kg.

Für kontaminierte Stoffe wird $a = \frac{A}{m}$

Aktivitätskonzentration genannt. Für die *experimentelle* Bestimmung der Aktivität bzw. der spezifischen Aktivität gibt es direkte (absolute) und relative Meßverfahren.

Absolute Messungen ergeben genauere Meßwerte, erfordern jedoch eine komplizierte Meßanordnung und eine umfangreiche Korrektur der Meßwerte.

Relative Meßverfahren werden deshalb vorgezogen, weil sie leichter durchführbar sind und es oft nur auf einen Aktivitätsvergleich ankommt. Liegt als Vergleichsquelle eine Strahlenquelle bekannter Aktivität vor, können auch relative Messungen der Aktivitätskonzentration zu recht genauen Ergebnissen führen.

In diesem Versuch soll die Aktivitätskonzentration einer β -Strahlenquelle gemessen werden. Dazu sind nur Proben mit sehr geringer Aktivität zu verwenden, die für den Menschen bei richtigem Umgang ungefährlich sind. Vergleichsquelle (Standardquelle) und Proben liegen als kontaminierte Flüssigkeiten vor, die sich in der Aktivität nur wenig unterscheiden. Der Ablauf des Versuches erfolgt so, daß gleiche Volumina V der Standardflüssigkeit mit der Aktivitätskonzentration a_{St} und der zu untersuchenden Flüssigkeit von unbekannter Aktivitätskonzentration a mit der genetzten Zählleinrichtung unter gleichen geometrischen Bedingungen verglichen werden.

Ist $z = n/t$ die mit der Zählapparatur gemessene *Bruttoimpulsrate* der unbekanntesten Flüssigkeit (n ist die in der Zeit t registrierte Impulszahl), $z_{St} = n_{St}/t_{St}$ die Bruttoimpulsrate der Standardlösung und $z_0 = n_0/t_0$ die Nulleffektrate (Nulleffekt) des verwendeten Auslösezählrohrs, so gilt bei geringem Aktivitätsunterschied und gleicher Dichte der Flüssigkeiten

$$\frac{z - z_0}{z_{St} - z_0} = \frac{a}{a_{St}}$$

¹⁾ Kontaminierte Stoffe sind durch bewußte oder unbewußte Verunreinigung mit radioaktivem Material selbst radioaktiv, d. h., sie senden Kernstrahlung aus.

und hieraus

$$a = a_{st} \frac{z - z_0}{z_{st} - z_0} \quad (3)$$

Wegen der geringen Aktivität der Flüssigkeiten und den daraus resultierenden geringen Impulsraten ist eine Korrektur der Totzeit des Zählrohres nicht erforderlich.

V Versuchsdurchführung

Beim Umgang mit radioaktivem Material sind äußerste Vorsichtsmaßnahmen geboten. Obwohl nur sehr kleine Aktivitäten bei den zu untersuchenden Stoffen vorhanden sind und die Flüssigkeiten nur geringe Radiotoxizität (Toxizitätsgruppe 3 bzw. 4) haben, ist darauf zu achten, daß auch *unbewußt keine* strahlenden Substanzen in den Körper gelangen.

Daher sind unbedingt die am Arbeitsplatz vorhandenen Arbeitsschutzhinweise und Verhaltensregeln zu beachten und vor der Versuchsdurchführung zu studieren!

Vor jeder Messung sind Meßzylinder und Flüssigkeitszählrohr gründlich abzuspuhlen (zu dekontaminieren), damit keine radioaktiven Substanzen des vorangegangenen Versuches anhaften. Anschließend sind in jedem Fall die Hände gründlich zu waschen. Entsprechend den gleichfalls am Arbeitsplatz vorliegenden *Bedienhinweisen* ist das Zählrohr an das Strahlungsmeßgerät anzuschließen.

Die Arbeitsspannung wird eingestellt, der Meßzylinder mit dem vorgesehenen Volumen V an destilliertem Wasser gefüllt, das Flüssigkeitszählrohr auf den Zylinder gesteckt (Zylinder und Zählrohr haben den gleichen Schliff) und somit in die Flüssigkeit getaucht (Bild 171). Nun wird der *Nulleffekt* gemessen. Um hierbei und bei den folgenden Versuchen den relativen Fehler nicht größer als 3% zu erhalten, sind wenigstens 10^3 Impulse (also $n \geq 10^3$) zu zählen, denn der relative statistische Fehler bei Strahlungsmessungen ist

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Die im Strahlungsmeßgerät vorgesehene *Impulsvorwahl* ist einzustellen, und die für die Registrierung dieser eingestellten Impulszahl benötigte Zeit t_0 wird abgelesen. Unter der Annahme, daß die im Gerät eingebaute elektronische Uhr fehlerfrei mißt, gilt auch

$$\frac{\Delta n_0}{n_0} = \frac{\Delta z_0}{z_0} = \frac{1}{\sqrt{n_0}}$$

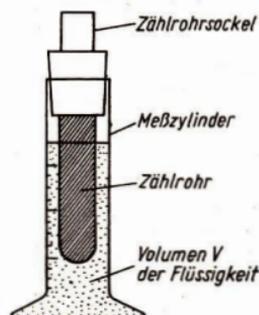


Bild 171



Bild 172

Danach wird in den Meßzylinder das gleiche Volumen V der Standardflüssigkeit eingefüllt, so daß nach Aufstecken des Zählrohres die gleichen geometrischen Bedingungen wie bei der Messung des Nulleffekts vorhanden sind. Unter Beachtung der gleichen Genauigkeitsanforderungen wie bei der vorigen Messung wird n_{st} vorgewählt und die zugehörige Zeit t_{st} gemessen. Man erhält unmittelbar $z_{st} = n_{st}/t_{st}$. Als Standardflüssigkeit kann eine 24%ige KCl-Lösung verwendet werden, deren Aktivitätskonzentration $a_{st} = (3,7 \pm 0,1) \text{ kBq kg}^{-1}$ beträgt.

Nach Reinigung von Meßzylinder und Zählrohr wird das gleiche Volumen V der zu untersuchenden Flüssigkeit eingefüllt, das Zählrohr aufgesteckt und wie bei den vorangegangenen Versuchen n und t gemessen. Daraus ergibt sich die Bruttoimpulsrate $z = n/t$. Nach Gl. (3) kann jetzt die Aktivitätskonzentration a berechnet werden.

Um die Umgebungsstrahlung, die die Strahlungsmessungen beeinflusst, zu reduzieren, ist es günstig, bei jeder Messung Meßzylinder und Zählrohr in eine Abschirmkammer zu bringen (Bild 172).

Achtung! Die am Arbeitsplatz liegenden Arbeitsschutzhinweise sind unbedingt einzuhalten!

A Aufgaben

1. Einsatz- und Arbeitsspannung des Zählrohres sind zu kontrollieren und die Arbeitsspannung einzustellen.
2. Die Nulleffektrate (Nulleffekt) der Meßanordnung ist zu ermitteln.
3. Unter gleichen geometrischen Bedingungen ist die Bruttoimpulsrate der Vergleichsflüssigkeit (Standardflüssigkeit) zu messen.
4. Entsprechend Aufgabe 3. ist die Bruttoimpulsrate zweier kontaminierter Flüssigkeiten zu bestimmen.
5. Nach Gl. (3) ist für beide Flüssigkeiten die Aktivitätskonzentration zu berechnen.
6. Für beide Meßergebnisse sind der relative und der absolute Fehler abzuschätzen.

Versuchsgeräte: Strahlungsmeßgerät, Flüssigkeitszählrohr, Zählrohrsonde, Abschirmkammer, Untersatz für die Abschirmkammer, Meßzylinder mit zum Flüssigkeitszählrohr passendem Schliff

Thermodynamik	
Temperatur	K
Wärmekapazität	J/K
spezifische Wärmekapazität	J/(kg K)
Ausdehnungskoeffizienten	1/K
Wärmestrom	W
Wärmeleitfähigkeit	W/(m K)
Wärmeübergangskoeffizient	W/(m ² K)
spezifischer Heizwert, spezifischer Brennwert	J/kg
Stoffmenge	mol
molare Masse	kg/mol
Optik — Atomphysik	
Raumwinkel	sr
Lichtstärke	cd
Lichtstrom	lm
Beleuchtungsstärke	lx
Leuchtdichte	cd/m ²
Aktivität	Bq
Energiedosis	Gy
Energiedosisleistung	Gy/s

Mechanik	
Länge	m
Zeit	s
Geschwindigkeit	m/s
Beschleunigung	m/s ²
ebener Winkel	rad
Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz	1/s
Winkelbeschleunigung	1/s ²
Frequenz	Hz
Masse	kg
Dichte	kg/m ³
Kraft	N
Arbeit, Energie	J
Leistung	W
Impuls	kg m/s
Drehmoment	N m
Trägheitsmoment	kg m ²
Druck, Spannung	Pa
Kompressionsmodul	Pa
Elastizitätsmodul	Pa
Schubmodul	Pa

