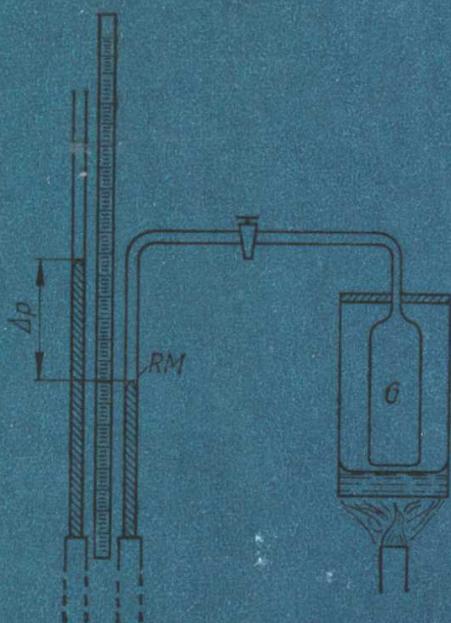
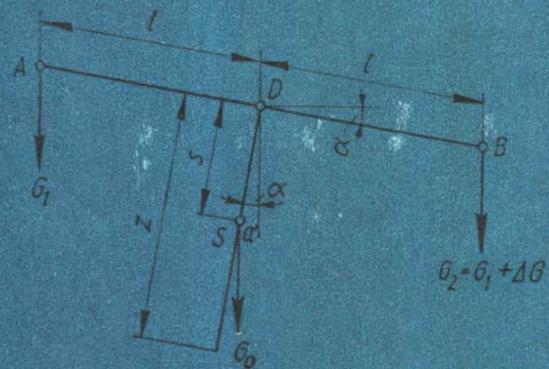


Kretschmar  
Mende  
Wollmann

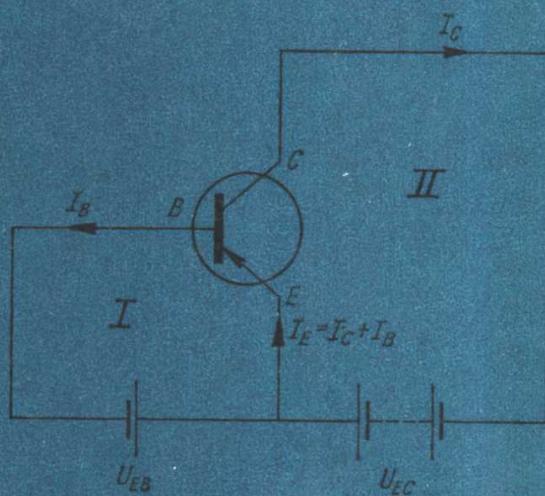
# Physikalisches PRAKTIKUM



MECHANIK

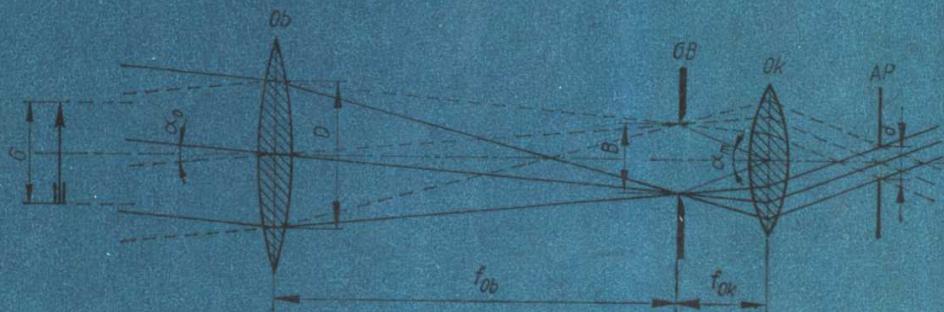


THERMODYNAMIK



ELEKTRIK

OPTIK



# **Physikalisches Praktikum**

Verfaßt von

**Dr. Werner Kretschmar**

**Dietmar Mende**

**Hermann Wollmann**

---

**7., verbesserte Auflage**

**Mit 62 Versuchsanleitungen und 171 Bildern**



**VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG**

Als Arbeitsbuch für die Ausbildung an Ingenieur- und Fachschulen anerkannt

Berlin, Oktober 1977

Minister für Hoch- und Fachschulwesen

*Federführung:*

Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Ingenieurschule für Walzwerk- und Hüttentechnik, Riesa

*Autoren:*

Dr. rer. nat. Werner Kretschmar, Friedrich-Schiller-Universität, Jena

Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Ingenieurschule für Walzwerk- und Hüttentechnik, Riesa

Dipl.-Phys. Hellmut Wollmann, Ingenieurschule für Feinwerktechnik, Glashütte

© VEB Fachbuchverlag 1978

7. Auflage

Lizenzennummer 114-210/18/78

LSV 1103

Verlagslektor: Dipl.-Phys. Klaus Vogelsang

Typografie: Gottfried Leonhardt

Einband: Dieter Weise

Printed in GDR

Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, 74 Altenburg

Redaktionsschluß: 15. 11. 1977

Bestellnummer: 545 081 4

DDR 7,80 M

# **Geleitwort**

---

Die Lehrprogramme für das Lehrgebiet Physik an den Ingenieurschulen der Deutschen Demokratischen Republik sehen als unerlässlichen Bestandteil des Physikunterrichts die Durchführung eines physikalischen Praktikums vor.

Im Praktikum lernen die Studenten, das im Unterricht erworbene Wissen komplex anzuwenden und die Erkenntnisse der verschiedenen Teilgebiete der Physik zu verbinden. Hier wird ihr physikalisches Verständnis vertieft und gefestigt. Die selbständige Arbeit im Praktikum verlangt vom Studenten gründliches Durcharbeiten und Aneignen des Stoffes. Der Student gewinnt darüber hinaus Einblick in physikalische Untersuchungsmethoden und meßtechnische Verfahren; er erwirbt experimentelles Geschick und bereitet sich auf die nachfolgenden Praktika in den technischen Lehrgebieten sowie auf seine Tätigkeit in der beruflichen Praxis vor.

Die vorliegende Auflage des seit Jahren bewährten Lehrbuchs zeichnet sich durch konsequente Verwendung der SI-Einheiten aus. Es wird den Studenten der Ingenieurschulen eine gute Hilfe beim Studium sein. Doch kann das Buch auch Studenten anderer Bildungseinrichtungen sowie Lehrern an den allgemeinbildenden Schulen nützlich sein.

Wir wünschen den Benutzern des Buches viel Erfolg bei der Durchführung ihres Praktikums.

*Institut für Fachschulwesen  
der Deutschen Demokratischen Republik  
Karl-Marx-Stadt*

## **Vorwort**

---

Das Buch enthält neben einer allgemeinen Aufgabenstellung eine Einführung in die Fehlerrechnung und 62 Versuchsanleitungen mit zahlreichen Abbildungen der Versuchsanordnungen. Auf die in früheren Auflagen im Anhang beigefügten Tabellen wurde verzichtet, da diese auch in zahlreichen anderen Werken enthalten sind. (Wir empfehlen das im gleichen Verlag erschienene Buch „Physik · Gleichungen und Tabellen“ von D. MENDE und G. SIMON.) Die Auswahl der Versuche wurde erweitert; verschiedene Versuche zum gleichen Problemkreis wurden zu jeweils einem Versuch mit mehreren meßtechnischen Varianten zusammengefaßt. Dadurch konnten zahlreiche Versuche hauptsächlich zur Halbleitertechnik und Optik neu aufgenommen werden. Damit wird dem unterschiedlichen Umfang Rechnung getragen, den das physikalische Praktikum in den einzelnen Grundstudienrichtungen an den Ingenieur- und Fachschulen einnimmt, und darüber hinaus die Verwendung an weiterführenden Bildungseinrichtungen ermöglicht.

Für die kritische Durchsicht des Manuskripts und ihre konstruktiven Hinweise danken wir den Herren Dipl.-Phys. PETER LEISSNER, Leipzig, und Dipl.-Phys. GÜNTER SIMON, Apolda. Den Betrieben VEB Carl Zeiss Jena, VEB Polytechnik Karl-Marx-Stadt, MLW Prüfgerätewerk Medingen VEB, Sitz Freital, und VEB Waagenfabrik Oschatz sei für die Überlassung von Bildern gedankt.

*Verfasser und Verlag*

# **Inhaltsverzeichnis**

---

<b>1.</b>	<b>Aufgaben des physikalischen Praktikums</b>	<b>11</b>
<b>2.</b>	<b>Einführung in die Fehlerrechnung</b>	<b>13</b>
2.1.	Definition des Fehlers . . . . .	13
2.2.	Arten der Fehler . . . . .	13
2.2.1.	Systematische Fehler . . . . .	13
2.2.2.	Zufällige Fehler . . . . .	14
2.3.	Rechnerische Erfassung der zufälligen Fehler . . . . .	14
2.4.	Absoluter und relativer Fehler . . . . .	17
2.5.	Fehlerabschätzung . . . . .	17
2.5.1.	Fehlerabschätzung ohne Differentialrechnung . . . . .	18
2.5.2.	Fehlerabschätzung mit Differentialrechnung . . . . .	22
2.5.3.	Beispiel für die Auswertung . . . . .	27
<b>3.</b>	<b>Versuchsanleitungen</b>	<b>28</b>
<b>MECHANIK</b>		
1.	Flächenmessung mit dem Polarplanimeter . . . . .	28
2.	Waage . . . . .	32
3.	Dichtebestimmung mit dem Pyknometer . . . . .	37
4.	Reversionspendel . . . . .	39
5.	Federkonstante einer Schraubenfeder . . . . .	43
6.	Trägheitsmoment . . . . .	45
7.	Gekoppelte Pendel . . . . .	48
8.	Gedämpfte Pendelschwingungen . . . . .	54
9.	Oberflächenspannung von Flüssigkeiten . . . . .	59
10.	Bestimmung der Dichte von festen Körpern aus dem Auftrieb in Flüssigkeiten . . . . .	62
11.	Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten mit der MOHR-WESTPHALSchen Waage . . . . .	65
12.	Viskosität von Flüssigkeiten . . . . .	67

13.	Strömungsgeschwindigkeit und Widerstandszahl . . . . .	70
14.	Schallgeschwindigkeit und Elastizitätsmodul . . . . .	74
15.	Resonanzrohr . . . . .	77

## THERMODYNAMIK

16.	Längenausdehnungskoeffizient fester Körper . . . . .	80
17.	Wärmekapazität eines Kalorimeters . . . . .	82
18.	Spezifische Wärmekapazität fester Körper . . . . .	85
19.	Spezifische Wärmekapazität von Flüssigkeiten . . . . .	88
20.	Dichte von Luft und Kohlendioxid . . . . .	90
21.	Dampfdichte . . . . .	94
22.	Gasdichtebestimmung nach BUNSEN . . . . .	98
23.	Ausdehnungskoeffizient von Gasen . . . . .	101
24.	Spezifische Verdampfungswärme . . . . .	103
25.	Spezifische Schmelzwärme . . . . .	105
26.	Siedepunktserhöhung von Lösungen . . . . .	107
27.	Gefrierpunktserniedrigung von Lösungen . . . . .	110
28.	Luftfeuchte . . . . .	112

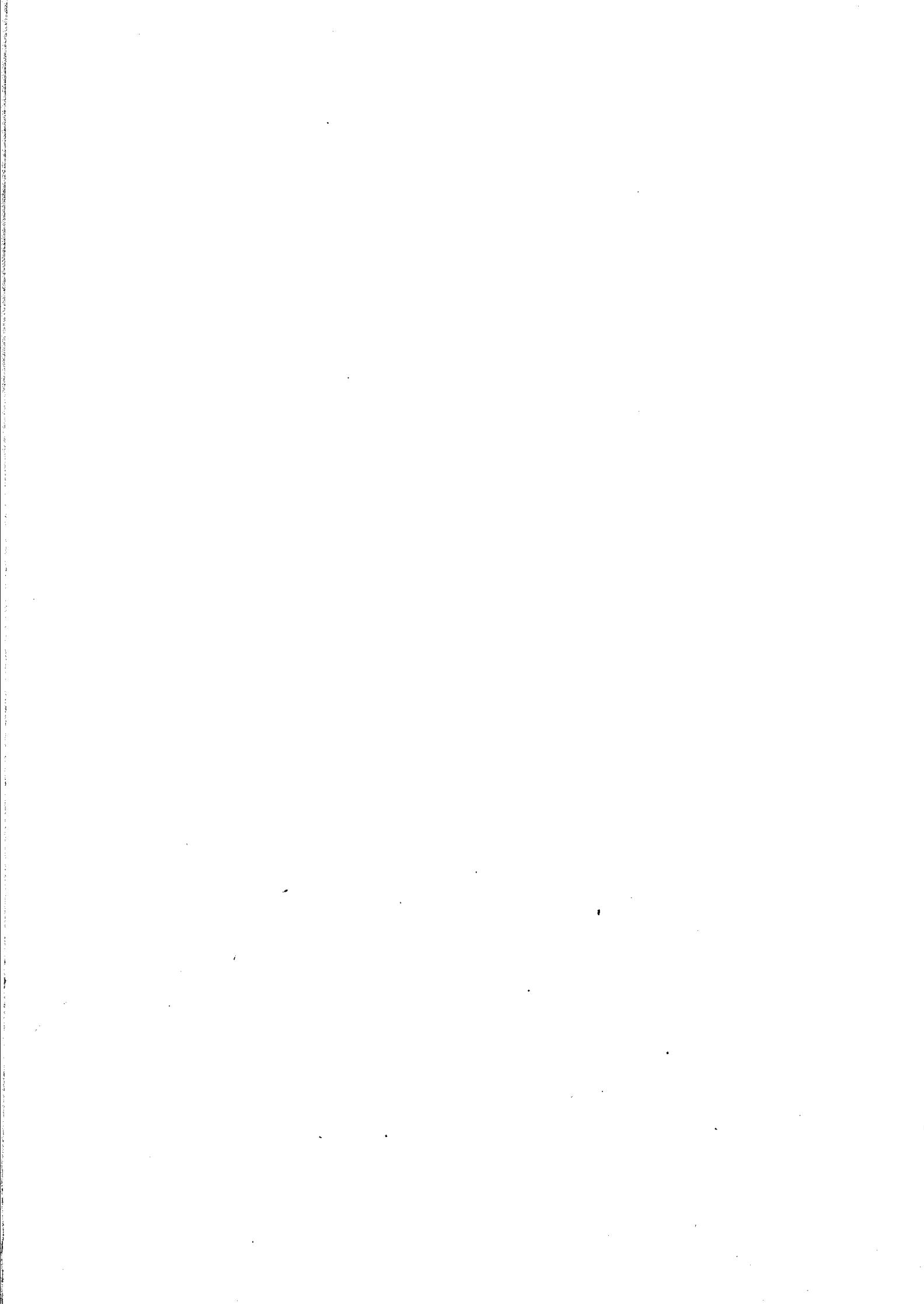
## ELEKTRIK

29.	Wirkungsgrad bei Erwärmung von Flüssigkeiten . . . . .	117
30.	WHEATSTONESche Brücke . . . . .	119
31.	Innenwiderstand eines Akkumulators . . . . .	122
32.	Innenwiderstand von Stromstärke- und Spannungsmessern . . . . .	124
33.	Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Leitern und Halbleitern . . . . .	126
34.	Gedämpfte Schwingungen eines Galvanometers . . . . .	128
35.	Kapazitätsmessung mit dem ballistischen Galvanometer . . . . .	133
36.	Erweiterung des Meßbereichs von Stromstärke- und Spannungsmessern . . . . .	135
37.	Leistungsanpassung . . . . .	138
38.	Kapazität von Kondensatoren . . . . .	140
39.	Lade- und Entladekurven bei Kondensatoren . . . . .	142
40.	Bestimmung von Dielektrizitätszahlen . . . . .	145
41.	Induktivität von Spulen . . . . .	147
42.	Thermoelement . . . . .	149
43.	HALL-Sonde . . . . .	152
44.	Kennlinie eines Sperrschichtgleichrichters . . . . .	155
45.	Transistor . . . . .	158
46.	Spannungsstabilisierung . . . . .	164
47.	Frequenzbestimmung mit dem Elektronenstrahl-Oszillografen . . . . .	169
48.	Resonanzerscheinungen in RLC-Schaltungen . . . . .	173
49.	Transformator . . . . .	179

## OPTIK -- ATOMPHYSIK

50.	Brechzahlbestimmung mit dem Refraktometer . . . . .	185
51.	Brennweite von Linsen . . . . .	189
52.	Vergrößerung eines Fernrohres . . . . .	193
53.	Mikroskop . . . . .	196

54.	NEWTONSche Ringe . . . . .	201
55.	Gitterkonstante eines Reflexionsgitters . . . . .	204
56.	Wellenlängenmessung mit dem Gitterspektralapparat . . . . .	207
57.	Dispersionskurve eines Prismenspektrometers . . . . .	209
58.	Polarimeter . . . . .	212
59.	Bestimmung der spezifischen Ladung eines Elektrons . . . . .	216
60.	Fotometrie . . . . .	220
61.	Lichtreflexion und -absorption . . . . .	224
62.	Charakteristik eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohrs . . . . .	229



# **1. Aufgaben des physikalischen Praktikums**

---

Das physikalische Praktikum ist an allen Lehranstalten untrennbarer Bestandteil der Ausbildung im Fach Physik geworden. Hier erhält der Studierende die Möglichkeit, das im Unterricht oder in der Vorlesung Gelernte anzuwenden und sein Wissen zu festigen und zu vertiefen. Das physikalische Praktikum ist gleichzeitig eine gute Vorbereitung auf die Praktika in technischen Fächern und auf die Tätigkeit in Labors, in Betrieben oder Instituten; denn allen naturwissenschaftlich-technischen Messungen liegen physikalische Meßverfahren zugrunde.

Die Lösung der Praktikumsaufgaben erfordert vielfach das gleichzeitige Beachten von Gesetzmäßigkeiten aus verschiedenen Teilgebieten der Physik. Der Student erarbeitet sich dadurch einen besseren Überblick und erkennt die dialektischen Zusammenhänge der physikalischen Erscheinungen. Er gewinnt so dauerhaftere Kenntnisse von den Vorgängen, als das bei der vorwiegend theoretischen Aneignung des Wissens der Fall sein kann. Das physikalische Praktikum trägt in hohem Maße dazu bei, daß die Studierenden gut fundierte, anwendungsbereite Kenntnisse erlangen und daß ihr materialistisches Weltbild gefestigt wird.

Die physikalischen Übungen wecken in vielen Fällen das Interesse an einem eingehenderen Studium physikalischer Zusammenhänge. Sie fördern die Fähigkeiten der Studenten bzw. der Schüler im Umgang mit empfindlichen Apparaturen und elektrischen Meßgeräten.

Indem der Student dazu angehalten wird, alle Messungen mit der erforderlichen Sorgfalt auszuführen und die Meßergebnisse mit Hilfe der Fehlerrechnung kritisch auszuwerten, lernt er die Methoden der experimentellen Forschung kennen. Gleichzeitig wird er sowohl vor einer Überschätzung als auch einer Unterbewertung der Genauigkeit seiner Messungen bewahrt.

Es kommt im physikalischen Praktikum nicht darauf an, möglichst viele verschiedene Versuche durchführen zu lassen. Es soll vielmehr erreicht werden, daß der Studierende anhand einer sorgfältigen Auswahl von Versuchen die Methoden der experimentellen Untersuchung physikalischer Zusammenhänge so kennenernt, daß er später selbstständig Untersuchungen auf ähnlichen Gebieten anstellen kann.

So wie bei jeder wissenschaftlichen Untersuchung müssen auch im physikalischen Praktikum die gemessenen Werte sorgfältig registriert werden. Das über jeden Versuch anzufertigende Protokoll soll alle Meßwerte und Rechnungen in übersichtlicher Form enthalten. Die grafische Darstellung der Meßergebnisse erleichtert in vielen Fällen ihre Auswertung, d. h. das Erkennen der funktionalen Zusammenhänge. Im Protokoll sind die verwendeten Geräte und die besonderen Versuchsbedingungen so zu beschreiben, daß auch noch zu einem späteren Zeitpunkt eine Auswertung der Messungen möglich ist.

Für den Erfolg des Praktikums ist die Vorbereitung des Studierenden auf die Lösung der ihm gestellten Aufgaben von entscheidender Bedeutung. Bevor mit der experimentellen Arbeit begonnen werden darf, müssen die theoretischen Grundlagen und das Ziel des Versuches bekannt sein. Der Student soll sich selbstständig diese Voraussetzungen schaffen. Das vorliegende Buch enthält zu den einzelnen Versuchen die wichtigsten Grundlagen. Zur Beantwortung zusätzlich gestellter Fragen werden diese Angaben jedoch vielfach nicht ausreichen, so daß der Studierende noch andere Lehrbücher bzw. seine Aufzeichnungen verwenden muß. Nur wenn der Student sich sorgfältig auf jeden Versuch vorbereitet, kann das physikalische Praktikum so wertvoll für die Ausbildung unserer Jugend sein, wie es hier geschildert wurde.

## **2. Einführung in die Fehlerrechnung**

---

### **2.1. Definition des Fehlers**

Mißt man eine physikalische Größe, so stimmt aus verschiedenen Gründen der Meßwert nicht vollkommen mit dem wahren Wert der Größe überein. Obwohl der wahre Wert in den meisten Fällen unbekannt ist, soll zunächst angenommen werden, daß dieser *Sollwert* bekannt sei. Die einzelnen *Meßwerte* weichen von diesem Sollwert ab; sie sind mit einem *Fehler* behaftet. Dieser wird wie folgt definiert:

Fehler = Istanzeige minus Sollanzeige

oder auch Fehler = Meßwert minus wahrer Wert der Meßgröße

$$\Delta x = x - x_s \quad (1)$$

Der Fehler ist also positiv, wenn der Meßwert zu groß ausgefallen ist ( $x > x_s$ ); er ist negativ, wenn der Meßwert zu klein ist ( $x < x_s$ ).

### **2.2. Arten der Fehler**

Es ist zwischen systematischen und zufälligen Fehlern zu unterscheiden.

Während systematische Fehler ihre Ursache meist in Unvollkommenheiten der Meßgeräte haben, werden zufällige Fehler häufig vom Beobachter verursacht.

#### **2.2.1. Systematische Fehler**

Systematische Fehler treten bei gleichen Meßbedingungen immer in gleicher Größe und mit gleichem Vorzeichen auf. Sie haben ihre Ursache in der Unvollkommenheit der Meßgeräte, der Meßverfahren oder der Maßverkörperungen (z. B. der Wägestücke). Systematische Fehler ergeben sich, wenn Längen mit einem zu kurzen Maßstab

gemessen werden, wenn Wägestücke zu leicht sind oder Stromstärkemesser eine ungenau geeichte Skale haben. Jedem Meßgerät ist ein gewisser systematischer Fehler eigen, der bei Präzisionsinstrumenten sehr klein gehalten wird. Die obere Grenze des systematischen Fehlers (*Fehlergrenze*) wird auf Meßgeräten zuweilen vermerkt, z. B. bei Thermometern (0,1 K, 0,5 K usw.).

Auf den elektrischen Meßinstrumenten ist das Klassenzeichen angegeben (0,2; 0,5; 1,0; 1,5 oder 2,5). Daraus kann die Fehlergrenze berechnet werden. So bedeutet z. B. 1,5: Die Fehlergrenze beträgt 1,5% vom *Endausschlag* des Instrumentes. Handelt es sich in unserem Beispiel um einen Spannungsmesser mit einem Endausschlag von 250 V, ist die Fehlergrenze mit 3,75 V anzusetzen.

Sind über die Fehlergrenzen keine Angaben gemacht, dann kann im allgemeinen 1 Skalenteil als Meßunsicherheit angesehen werden.

Vor Beginn eines Versuches sollte man sich über die Beträge der zu erwartenden systematischen Fehler der einzelnen Größen klar werden, die von verschiedener Größenordnung sein können. Es hat aber keinen Zweck, die relativen Fehler (vgl. 2.4.) der ungenauesten meßbaren Größe bei den anderen Meßgrößen wesentlich zu unterschreiten. Wenn etwa eine Temperaturdifferenz mit einem Fehler von 2% meßbar ist, so wäre es unnützer Aufwand, wollte man eine gleichzeitig erforderliche Längenmessung mit einer Meßunsicherheit von vielleicht nur 0,001% durchführen.

Durch Überprüfung des Meßverfahrens bzw. Einsatz genauerer Meßinstrumente kann der systematische Fehler klein gehalten werden.

## 2.2.2. Zufällige Fehler

Führt man eine Messung (Längen- oder Zeitmessung, Wägung usw.) unter gleichen Bedingungen mehrmals durch, so wird man selten immer das gleiche Ergebnis erhalten. Die Resultate werden voneinander abweichen. Sie streuen um den wahren Wert der gemessenen Größe. Zufällige Fehler werden hervorgerufen von meßtechnisch nicht zu erfassenden und nicht zu beeinflussenden Änderungen der Maßverkörperungen, der Meßgeräte, des Meßgegenstandes und der Umwelt sowie durch den Beobachter.

## 2.3. Rechnerische Erfassung der zufälligen Fehler

Um den Einfluß zufälliger Fehler möglichst gering zu halten, nimmt man eine *Meßreihe* auf und bildet aus den einzelnen Meßwerten  $x_i$  das arithmetische Mittel. Sind

$$x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

die einzelnen Meßwerte, so gilt für den Mittelwert  $\bar{x}$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \\ \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned} \tag{2}$$

Da der wahre Wert der Meßgröße nur in den seltensten Fällen bekannt ist, setzt man an seiner Stelle den so gewonnenen Mittelwert  $\bar{x}$  in (1) ein. Damit erhält man als *absoluten Fehler*  $\Delta x_i$

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1a)$$

Bildet man die Summe aller Fehler

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x},$$

so folgt, da nach (2)

$$\begin{aligned} n\bar{x} &= \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n \Delta x_i &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

*Die Summe aller absoluten Fehler ist Null.* Dabei sind selbstverständlich die Vorzeichen bei der Summenbildung zu berücksichtigen. Die Erfüllung der Gleichung (3) kann als Rechenkontrolle sowohl für die Richtigkeit des Mittelwertes als auch der berechneten Fehler dienen.

Als *Standardabweichung*  $s$  definiert man

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}} \quad (4)$$

Für eine sehr große Anzahl von Messungen liegt ein einzelner Meßwert  $x_i$  der Meßreihe mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P &= 68,3\% \text{ zwischen } \bar{x} - s \text{ und } \bar{x} + s, \\ P &= 95,4\% \text{ zwischen } \bar{x} - 2s \text{ und } \bar{x} + 2s, \\ P &= 99,7\% \text{ zwischen } \bar{x} - 3s \text{ und } \bar{x} + 3s. \end{aligned}$$

Als *Vertrauensbereich*  $\bar{s}$  des Mittelwertes (auch als *mittlerer Fehler des Mittelwertes* bezeichnet) gilt

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (5)$$

$$x = \bar{x} \pm \bar{s} \quad (6)$$

heißen obere bzw. untere *Vertrauengrenze*.

(5) und (6) gelten wieder für eine statistische Sicherheit von 68,3%. Mit dieser Sicherheit ist der wahre Wert der Meßgröße zwischen den beiden Vertrauengrenzen zu erwarten.

Überlegen Sie sich, wie (5) und (6) verändert werden müssen, wenn eine höhere statistische Sicherheit gefordert wird!

Die Auswertung der Meßreihe nimmt man zweckmäßig in Form einer Tabelle vor:

1	2	3		4
i	$x_i$	$\Delta x_i$		$(\Delta x_i)^2$
		+	-	
1	10,2		0,06	0,0036
2	10,3	0,04		0,0016
3	10,3	0,04		0,0016
4	10,4	0,14		0,0196
5	10,1		0,16	0,0256
6	10,2		0,06	0,0036
7	10,3	0,04		0,0016
8	10,1		0,16	0,0256
9	10,4	0,14		0,0196
10	10,3	0,04		0,0016
	10,26	0,44	0,44	0,1040
	$= \bar{x}$	$\sum_{i=1}^{10} \Delta x_i = 0$		$\sum_{i=1}^{10} (\Delta x_i)^2$

Nach (4) ist

$$s = \sqrt{\frac{0,1040}{9}} = \sqrt{0,0116}$$

$$\underline{s = 0,108}$$

Aus (5) ergibt sich

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{0,1040}{90}} = \sqrt{0,0012}$$

$$\underline{\bar{s} = 0,035}$$

Das Ergebnis dieser Meßreihe wäre also nach (6)

$$x = 10,26 \pm 0,04$$

Es wurde 0,035 auf 0,04 aufgerundet. Der Fehler wird in der Regel mit einer zählenden Stelle angegeben. Falls  $\bar{x}$  mit größerer Stellenzahl als  $\bar{s}$  vorliegt, so ist auf die Stellenzahl von  $\bar{s}$  zu runden.

Ein Ergebnis ist um so zuverlässiger, je mehr Einzelmessungen dem Mittelwert zugrunde liegen. Eine sehr hohe Anzahl von Messungen ist jedoch auch nicht sinnvoll, da  $\bar{s}$  nur sehr langsam kleiner wird. Es ist immer zweckmäßiger, eine geringere Anzahl Messungen sorgfältig als eine große Zahl oberflächlich auszuführen.

## 2.4. Absoluter und relativer Fehler

Der *absolute Fehler*, von dem bisher gesprochen wurde, gibt noch keinen Aufschluß über die Güte einer Messung. Diese kann erst beurteilt werden, wenn man die Größe des Fehlers in Beziehung zur Größe des Meßwertes setzt. Man führt deshalb den *relativen Fehler*  $f$  ein. Es wird der Absolutfehler auf den wahren Wert der zu messenden Größe bezogen. Da dieser aber in den seltensten Fällen bekannt ist, kann man an seiner Stelle auch den Mittelwert  $\bar{x}$  oder auch einen Meßwert nehmen, da diese drei Werte nicht wesentlich voneinander abweichen sollten. Man definiert als relativen Fehler  $f$  den Quotienten

$$f = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \quad (7)$$

Der relative Fehler ist eine reine Zahl, die auch in Prozenten angegeben werden kann.

Für das Beispiel erhält man als relativen Fehler nach (7) mit  $\Delta x = \bar{s}$

$$f = \frac{0,04}{10,26} = 0,0039$$

Auch dieses Ergebnis wird man zweckmäßig auf 0,004 aufrunden:

$$f = 0,004 = 0,4\%$$

## 2.5. Fehlerabschätzung

Oft kann die gesuchte physikalische Größe nicht unmittelbar gemessen werden, sondern ist aus anderen, unmittelbar meßbaren Größen zu berechnen. Die Meßfehler der Eingangsgrößen beeinflussen das Ergebnis. Es soll nun untersucht werden, wie sich die Meßfehler der Eingangsgrößen auf das Ergebnis auswirken. Dabei ist noch zu bedenken, daß nicht für alle Meßgrößen Meßreihen aufgenommen werden können. Man muß sich dann mit *einem* Meßwert begnügen und den Fehler anhand des verwendeten Meßgerätes (z. B. Amperemeter, Thermometer) *abschätzen*.

Im folgenden sollen die Meßwerte mit  $x, y, u, v, w$  und die zugehörigen Meßfehler (gleichgültig, ob geschätzt oder aus Fehlerrechnung) mit  $\Delta x, \Delta y, \dots$  bezeichnet werden. Die zu errechnende Größe wird mit  $z$ , ihr Fehler mit  $\Delta z$  bezeichnet.

Es ist denkbar, daß die Fehler sich gegenseitig z.T. ausgleichen. Wird z. B. eine Durchschnittsgeschwindigkeit nach der Gleichung  $v = s/t$  berechnet, wobei sowohl  $s$  als auch  $t$  zu groß gemessen wurden, dann gleichen sich die Meßfehler z.T. gegenseitig aus, da ein zu groß gemessener Weg  $s$  die Geschwindigkeit  $v$  zu groß, eine zu groß gemessene Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v$  zu klein erscheinen läßt. Die Fehler wirken auch gegeneinander, wenn  $s$  und  $t$  zu klein gemessen werden.  $v$  wird mit dem größten Fehler behaftet sein, wenn eine der beiden Eingangsgrößen zu groß, die andere zu klein ausgefallen ist. Bei den folgenden Fehlerabschätzungen für einige häufig vorkommende Funktionen interessiert der Größtfehler, mit dem das Ergebnis (im ungünstigsten Falle) behaftet sein kann infolge der fehlerbehafteten Eingangsgrößen.

## 2.5.1. Fehlerabschätzung ohne Differentialrechnung

Folgende Funktionen sollen untersucht werden:

### 2.5.1.1. Die Summe $z = x + y$

Die Eingangswerte  $x$  und  $y$  sind mit den Fehlern  $\Delta x$  und  $\Delta y$  behaftet. Es interessiert die Auswirkung auf das Ergebnis  $z$ , also der Fehler  $\Delta z$ . Man erhält

$$z \pm \Delta z = x \pm \Delta x + y \pm \Delta y$$

Subtrahiert man die Gleichung  $z = x + y$ , so bleibt

$$\pm \Delta z = \pm \Delta x \pm \Delta y$$

Es ist leicht zu erkennen, daß  $\Delta z$  den größten Wert annimmt, wenn  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gleiche Vorzeichen haben, wenn sich die Beträge der beiden Fehler also addieren. Für den möglichen *Größtfehler* ergibt sich daher

$$\underline{\underline{|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|}} \quad (8)$$

**Der Absolutfehler einer Summe ist gleich der Summe der Beträge der Absolutfehler der einzelnen Summanden.**

### 2.5.1.2. Die Differenz $z = x - y$

Führt man die entsprechende Rechnung wie für eine Summe durch, so erhält man

$$\pm \Delta z = \pm \Delta x \mp \Delta y$$

Der Größtfehler tritt hier auf, wenn  $\Delta x$  und  $\Delta y$  verschiedene Vorzeichen haben. Dann gilt

$$\underline{\underline{|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|}} \quad (8)$$

wie für eine Summe.

Der obige Satz für eine Summe kann daher erweitert werden:

**Der Absolutfehler einer algebraischen Summe ist gleich der Summe der Beträge der Absolutfehler der einzelnen Summanden.**

### 2.5.1.3. Das Produkt $z = xy$

Die Meßergebnisse  $x \pm \Delta x$  und  $y \pm \Delta y$  werden eingesetzt:

$$\begin{aligned} z \pm \Delta z &= (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y) \\ z \pm \Delta z &= xy \pm x\Delta y \pm y\Delta x \pm \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Beachtet man, daß  $z = xy$  und daß das Produkt  $\Delta x \Delta y$  so klein ist, daß es vernachlässigt werden kann, so bleibt

$$\pm \Delta z = \pm x\Delta y \pm y\Delta x$$

Dividiert man die linke Seite der Gleichung durch  $z$  und die rechte Seite durch  $xy$  ( $z = xy!$ ), so erhält man

$$\pm \frac{\Delta z}{z} = \pm \frac{\Delta x}{x} \pm \frac{\Delta y}{y}$$

Der Größtfehler des Produktes tritt auf, wenn  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gleiche Vorzeichen haben.  
Daher gilt

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \quad (9)$$

**Der Relativfehler eines Produktes ist gleich der Summe der Beträge der Relativfehler der einzelnen Faktoren.**

#### 2.5.1.4. Die Potenz $z = x^2$

Setzt man in (9)  $x = y$ , so erhält man

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \quad (10)$$

**Der Relativfehler eines Quadrates ist gleich dem doppelten Relativfehler der Basis.**

Überlegen Sie sich selbst, wie groß der Relativfehler einer 3., 4., ...,  $n$ -ten Potenz ist!

#### 2.5.1.5. Der Quotient $z = x/y$

Setzt man die Meßwerte ein, so erhält man

$$z \pm \Delta z = \frac{x \pm \Delta x}{y \pm \Delta y}$$

Erweitert man diesen Bruch mit  $y \mp \Delta y$ , so folgt

$$z \pm \Delta z = \frac{(x \pm \Delta x)(y \mp \Delta y)}{(y \pm \Delta y)(y \mp \Delta y)}$$

$$z \pm \Delta z = \frac{xy \pm y\Delta x \mp x\Delta y - \Delta x\Delta y}{y^2 - (\Delta y)^2}$$

Vernachlässigt man wieder die Quadrate und Produkte kleiner Größen, so bleibt

$$z \pm \Delta z = \frac{xy \pm y\Delta x \mp x\Delta y}{y^2}$$

$$z \pm \Delta z = \frac{x}{y} \pm \frac{\Delta x}{y} \mp \frac{x\Delta y}{y^2}$$

Beachtet man  $z = x/y$  und dividiert dann die linke Seite der Gleichung durch  $z$ , die rechte durch  $x/y$ , dann erhält man

$$\pm \frac{\Delta z}{z} = \pm \frac{\Delta x}{x} \mp \frac{\Delta y}{y}$$

Der Relativfehler erhält hier offenbar seinen größten Wert, wenn  $\Delta x$  und  $\Delta y$  entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dann ist

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \quad (11)$$

**Der Relativfehler eines Quotienten ist gleich der Summe der Beträge der Relativfehler von Dividend und Divisor.**

Überlegen Sie sich, wie groß der Relativfehler für die Funktion

$$z = \frac{xyv}{uw}$$

ist!

#### 2.5.1.6. Die Funktion $z = \sin x$

Mit den Meßwerten ist

$$z \pm \Delta z = \sin(x \pm \Delta x)$$

Für die rechte Seite der Gleichung wird ein Additionstheorem verwendet. Dann ist

$$z \pm \Delta z = \sin x \cos \Delta x \pm \cos x \sin \Delta x$$

Da  $\Delta x$  klein ist, unterscheidet sich  $\cos \Delta x$  nicht wesentlich von 1, und  $\sin \Delta x$  kann durch  $\Delta x$  ersetzt werden. Dann wird

$$z \pm \Delta z = \sin x \pm \Delta x \cos x$$

Da  $z = \sin x$  ist, folgt

$$\pm \Delta z = \pm \Delta x \cos x$$

oder

$$\underline{\underline{|\Delta z| = |\Delta x \cos x|}} \quad (12)$$

#### 2.5.1.7. Die Funktion $z = \cos x$

Die entsprechende Rechnung liefert

$$z \pm \Delta z = \cos(x \pm \Delta x)$$

$$z \pm \Delta z = \cos x \cos \Delta x \mp \sin x \sin \Delta x$$

$$z \pm \Delta z = \cos x \mp \Delta x \sin x$$

$$\pm \Delta z = \mp \Delta x \sin x$$

$$\underline{\underline{|\Delta z| = |\Delta x \sin x|}} \quad (13)$$

### 2.5.1.8. Die Funktion $z = \tan x$

Es ist

$$z \pm \Delta z = \tan(x \pm \Delta x)$$

Nach dem Additionstheorem für die Tangensfunktion erhält man

$$z \pm \Delta z = \frac{\tan x \pm \tan \Delta x}{1 \mp \tan x \tan \Delta x}$$

Für kleine Werte  $\Delta x$  kann  $\tan \Delta x$  durch  $\Delta x$  ersetzt werden:

$$z \pm \Delta z = \frac{\tan x \pm \Delta x}{1 \mp \Delta x \tan x}$$

Erweitert man den Ausdruck auf der rechten Seite mit  $1 \pm \Delta x \tan x$ , so folgt

$$z \pm \Delta z = \frac{\tan x \pm \Delta x \pm \Delta x \tan^2 x + (\Delta x)^2 \tan x}{1 - (\Delta x)^2 \tan^2 x}$$

Die Quadrate kleiner Größen werden vernachlässigt:

$$\begin{aligned} z \pm \Delta z &= \tan x \pm \Delta x \pm \Delta x \tan^2 x \\ \pm \Delta z &= \pm \Delta x (1 + \tan^2 x) \end{aligned}$$

Beachtet man schließlich

$$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x,$$

so erhält man

$$\underline{\underline{|\Delta z| = \left| \frac{\Delta x}{\cos^2 x} \right|}} \quad (14)$$

### 2.5.1.9. Die Funktion $z = \cot x$

Die Rechnung verläuft analog der in 2.5.1.8.:

$$z \pm \Delta z = \cot(x \pm \Delta x)$$

Additionstheorem:

$$z \pm \Delta z = \frac{\cot x \cot \Delta x \mp 1}{\cot \Delta x \pm \cot x}$$

Für kleine Werte  $\Delta x$  wird  $\cot \Delta x$  ersetzt durch  $\frac{1}{\Delta x}$ :

$$z \pm \Delta z = \frac{\frac{\cot x}{\Delta x} \mp 1}{\frac{1}{\Delta x} \pm \cot x} = \frac{\cot x \mp \Delta x}{1 \pm \Delta x \cot x}$$

Erweitern mit  $1 \mp \Delta x \cot x$ :

$$z \pm \Delta z = \frac{\cot x \mp \Delta x \mp \Delta x \cot^2 x + (\Delta x)^2 \cot x}{1 - (\Delta x)^2 \cot^2 x}$$

Vernachlässigen der Quadrate kleiner Größen:

$$\begin{aligned} z \pm \Delta z &= \cot x \mp \Delta x \mp \Delta x \cot^2 x \\ \pm \Delta z &= \mp \Delta x(1 + \cot^2 x) \\ \pm \Delta z &= \mp \Delta x / \sin^2 x \\ |\Delta z| &= \boxed{\left| \frac{\Delta x}{\sin^2 x} \right|} \end{aligned} \tag{15}$$

## 2.5.2. Fehlerabschätzung mit Differentialrechnung

Wie schon im vorigen Abschnitt mehrfach erwähnt wurde, sind die Meßfehler allgemein klein gegenüber den gemessenen Größen. Man kann daher in der Fehlerabschätzung die Fehler näherungsweise durch Differentiale ersetzen. (Über das Differential vgl. die Lehrbücher der Höheren Mathematik.)

### 2.5.2.1. Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x)$

Ist  $z = f(x)$ , so ist nach den Regeln der Differentialrechnung

$$dz = f'(x) dx \tag{16}$$

Damit lassen sich die Gleichungen (12) bis (15) leicht herleiten: Für die Funktion

$$z = \sin x$$

ist

$$dz = \cos x dx \tag{12a}$$

Aus

$$z = \cos x$$

folgt

$$dz = -\sin x dx$$

und

$$|dz| = |\sin x dx| \tag{13a}$$

Für die Funktion

$$z = \tan x$$

ist

$$dz = \frac{dx}{\cos^2 x} \tag{14a}$$

Schließlich ist für die Funktion

$$z = \cot x$$

$$dz = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

und

$$|dz| = \left| \frac{dx}{\sin x^2} \right| \quad (15a)$$

### 2.5.2.2. Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x; y)$

#### Totales Differential

Dieser Fall liegt in der Fehlerrechnung meist vor; denn die gesuchte Größe ist im allgemeinen aus mehreren Einflußgrößen, von denen Meßwerte vorliegen, zu berechnen. Wir beschränken uns zunächst auf zwei unabhängige Veränderliche  $x$  und  $y$ , werden aber sehen, daß sich die für diesen Fall gefundenen Ergebnisse leicht auf mehrere unabhängige Veränderliche erweitern lassen. Ist also  $z = f(x; y)$ , so kann die Funktion (Differenzierbarkeit vorausgesetzt) nach den beiden unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $y$  differenziert werden:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Diese *partiellen Ableitungen* werden nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung gebildet, wobei man  $y$  bei der Ableitung  $\frac{\partial z}{\partial x}$  als Konstante zu betrachten hat. Entsprechend ist bei der partiellen Differentiation nach  $y$  die Veränderliche  $x$  als Konstante anzusehen.

Das *totale Differential*  $dz$  hängt von  $x$ ,  $y$ ,  $dx$  und  $dy$  ab:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (17a)$$

In der Fehlerrechnung stellen  $dx$  und  $dy$  wie im vorigen Abschnitt die Meßfehler der Einflußgrößen  $x$  und  $y$  dar.  $dz$  ist der Fehler der errechneten Größe. Die Erweiterung auf beliebig viele unabhängige Veränderliche liegt auf der Hand:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw + \dots \quad (17)$$

Als einfache Beispiele sollen zunächst die Gleichungen (8), (9) und (11) hergeleitet werden:

Für die Funktion  $z = x + y$  ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Setzt man diese Werte in (17a) ein, so folgt

$$dz = dx + dy \quad (8a)$$

Für das Produkt  $z = xy$  ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

In (17a) eingesetzt:

$$dz = y dx + x dy$$

Das ist der Absolutfehler des Produktes. Für den Relativfehler ist die linke Seite der Gleichung durch  $z$ , die rechte durch  $xy$  ( $z = xy$ ) zu dividieren:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

Für den größtmöglichen Fehler gilt

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| \quad (9a)$$

Für den Quotienten  $z = \frac{x}{y}$  ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

In (17a) eingesetzt:

$$dz = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

Zur Bildung des Relativfehlers ist die linke Seite der Gleichung durch  $z$ , die rechte durch  $x/y$  zu dividieren:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$$

Da, wie bereits früher ausgeführt, der Relativfehler seinen größten Wert annimmt, wenn  $dx$  und  $dy$  ungleiche Vorzeichen haben, wird

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| \quad (11a)$$

Das Verfahren sei noch an einer etwas umfangreicheren Funktion vorgeführt:  
In Versuch 6 tritt die Gleichung

$$J = mr^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2} \quad (18)$$

auf. In ihr sollen die Größen

$m$	mit der Meßunsicherheit	$\Delta m$
$r$	„ „ „	$\Delta r$
$T$	„ „ „	$\Delta T$
$T'$	„ „ „	$\Delta T'$

behaftet sein. Es ist gemäß (17), wenn die Differentiale durch die entsprechenden Meßunsicherheiten ersetzt werden:

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial J}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial J}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial J}{\partial T'} \Delta T' \quad (19)$$

Es sind zunächst die partiellen Ableitungen zu bilden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial m} &= r^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2} \\ \frac{\partial J}{\partial r} &= 2mr \frac{T^2}{T'^2 - T^2} \\ \frac{\partial J}{\partial T} &= mr^2 \frac{2TT'^2}{(T'^2 - T^2)^2} \\ \frac{\partial J}{\partial T'} &= -mr^2 \frac{2T^2T'}{(T'^2 - T^2)^2}\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen werden in (19) eingesetzt:

$$\Delta J = \frac{1}{(T'^2 - T^2)^2} [T^2(T'^2 - T^2) r^2 \Delta m + 2mrT^2(T'^2 - T^2) \Delta r \\ + 2mr^2TT'^2\Delta T - 2mr^2T^2T'\Delta T']$$

Der größte Fehler tritt auf, wenn  $\Delta T$  und  $\Delta T'$  ungleiche Vorzeichen haben. Dann ist

$$|\Delta J| = \frac{1}{(T'^2 - T^2)^2} [T^2(T'^2 - T^2) r^2 |\Delta m| + 2mrT^2(T'^2 - T^2) |\Delta r| + 2mr^2TT'^2 |\Delta T| + 2mr^2T^2T' |\Delta T'|] \quad (20)$$

Der Relativfehler wird gebildet, indem die linke Seite von (20) durch  $J$ , die rechte Seite durch die rechte Seite von (18) dividiert wird:

$$\left| \frac{\Delta J}{J} \right| = \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + 2 \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + 2 \left| \frac{T'^2 \Delta T}{T(T'^2 - T^2)} \right| + 2 \left| \frac{T' \Delta T'}{T'^2 - T^2} \right| \quad (21)$$

## *Logarithmische Differentiation*

Vielfach erreicht man eine Vereinfachung der Rechnung dadurch, daß man die Funktion logarithmiert und anschließend differenziert. Aus

$$z = \ln x$$

folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

$$d \ln x = \frac{dx}{x} \quad (22)$$

Das Verfahren liefert daher sofort den *relativen Fehler*. Bei umfangreicheren Ausdrücken muß die Kettenregel angewendet werden.

Die Gleichungen (9a) und (11a) sollen auf diese Weise hergeleitet werden:

$$z = xy$$

wird logarithmiert:

$$\ln z = \ln x + \ln y$$

Differentiation ergibt

$$d \ln z = d \ln x + d \ln y$$

Wendet man (22) an, so erhält man

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

und für den größtmöglichen Fehler

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| \quad (9a)$$

Entsprechend ergibt sich für die Funktion

$$z = \frac{x}{y}$$

$$\ln z = \ln x - \ln y$$

und

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$$

Für ungleiche Vorzeichen von  $dx$  und  $dy$  hat der Relativfehler seinen größten Wert. Dann ist:

$$\left| \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| \quad (11a)$$

An dem Beispiel aus Versuch 6 wird der Vorteil des Verfahrens besonders deutlich:

$$J = mr^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

wird logarithmiert:

$$\ln J = \ln m + 2 \ln r + 2 \ln T - \ln (T'^2 - T^2)$$

Differentiation:

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dr}{r} + 2\frac{dT}{T} - \frac{2T' dT' - 2T dT}{T'^2 - T^2}$$

Durch elementare Umformungen läßt sich dieser Ausdruck auf die Form (21) bringen:

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dr}{r} + 2\frac{dT}{T} - \frac{2T' dT'}{T'^2 - T^2} + \frac{2T dT}{T'^2 - T^2}$$

Zusammenfassung der Glieder mit  $dT$ :

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dr}{r} + \frac{2(T'^2 - T^2) dT + 2T^2 dT}{T(T'^2 - T^2)} - \frac{2T' dT}{T'^2 - T^2}$$

$$\frac{dJ}{J} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dr}{r} + 2\frac{T'^2 dT}{T(T'^2 - T^2)} - 2\frac{T' dT'}{T'^2 - T^2}$$

Haben  $dT$  und  $dT'$  ungleiche Vorzeichen, ergibt sich nach Übergang auf endliche Differenzen wieder (21).

### 2.5.3. Beispiel für die Auswertung

Im Versuch 6 seien folgende Meßwerte festgestellt worden:

$$m = 500 \text{ g}$$

$$\Delta m = \pm 1 \text{ g}$$

$$r = 30,0 \text{ cm}$$

$$\Delta r = \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$T = 1,82 \text{ s}$$

$$\Delta T = \pm 0,005 \text{ s}$$

$$T' = 5,85 \text{ s}$$

$\Delta T' = \pm 0,005 \text{ s}$  } aus 20 Schwingungen

Aus der in Versuch 6 abgeleiteten Gleichung (7) folgt zunächst

$$J = 500 \text{ g} \cdot 900 \text{ cm}^2 \cdot \frac{3,312 \text{ s}^2}{30,910 \text{ s}^2} = 48,2 \text{ kg cm}^2$$

Aus (21) ergibt sich

$$\left| \frac{\Delta J}{J} \right| = \frac{1}{500} + 2 \frac{0,1}{30} + 2 \frac{34,22 \cdot 0,005}{1,82 \cdot 30,91} + 2 \frac{5,85 \cdot 0,005}{30,91}$$

$$\left| \frac{\Delta J}{J} \right| = 0,002 + 0,007 + 0,006 + 0,002$$

An dieser Stelle lassen sich die Fehler der einzelnen Einflußgrößen vergleichen. Wir stellen hier z. B. fest, daß die Masse am genauesten,  $T$  aber am unsichersten bestimmt wurde.

$$\left| \frac{\Delta J}{J} \right| = 0,017 = 1,7\%$$

Daraus folgt der Absolutfehler

$$|\Delta J| = 0,017 J = 0,017 \cdot 48,2 \text{ kg cm}^2 = 0,8 \text{ kg cm}^2$$

Das Endergebnis lautet dann nach (6)

$$\underline{\underline{J = (48,2 \pm 0,8) \text{ kg cm}^2}}$$

### **3. Versuchsanleitungen**

---

## **Mechanik**

### **1. Flächenmessung mit dem Polarplanimeter**

#### **G Grundlagen**

Zur Ermittlung des Flächeninhaltes besonders solcher Flächen, deren Begrenzungsfunktion nicht analytisch bestimmbar ist, wird ein Planimeter verwendet. Das gebräuchlichste Planimeter ist das von AMSELER 1854 angegebene *Polarplanimeter*. Man bestimmt eine Fläche, indem man sie mit dem Planimeter umfährt.

#### *Gerätebeschreibung*

Der Polarm (4) trägt an einem Ende den Polkörper (6) mit der Nadel (3). Die Nadel soll ein unbeabsichtigtes Verrücken des Poles auf der Meßfläche verhindern. Am anderen Ende des Polarmes befindet sich ein Kugelzapfen (1), der in eine Bohrung des Meßkopfes (9) eingesetzt wird und damit den Meßkopf, der Träger des Meßwerkes ist, mit dem Polarm gelenkig verbindet. Die Laufrolle (2) stützt den Meßkopf. Im Meßkopf steckt der Fahrarm (16), dessen Längenteilung am Glasnonius (10) in  $\frac{1}{10}$ -Intervallen abgelesen wird. Der Fahrarm wird mit der Feinstellschraube (15) eingestellt und mit Klemmschrauben festgestellt.

Das Umfahren der zu planimetrierenden Fläche erfolgt mit dem Fahrstift (5), der am Ende des Fahrarmes sitzt. Die Bedienung erfolgt durch ein Griffchen. Die Stützschraube (7) verhindert, daß die Spitze des Fahrstiftes auf der Unterlage entlanggleitet und diese verletzt. Der gesamte Fahrstifthalter kann gegen eine Planglasplatte (8) mit Ringmarke ausgewechselt werden.

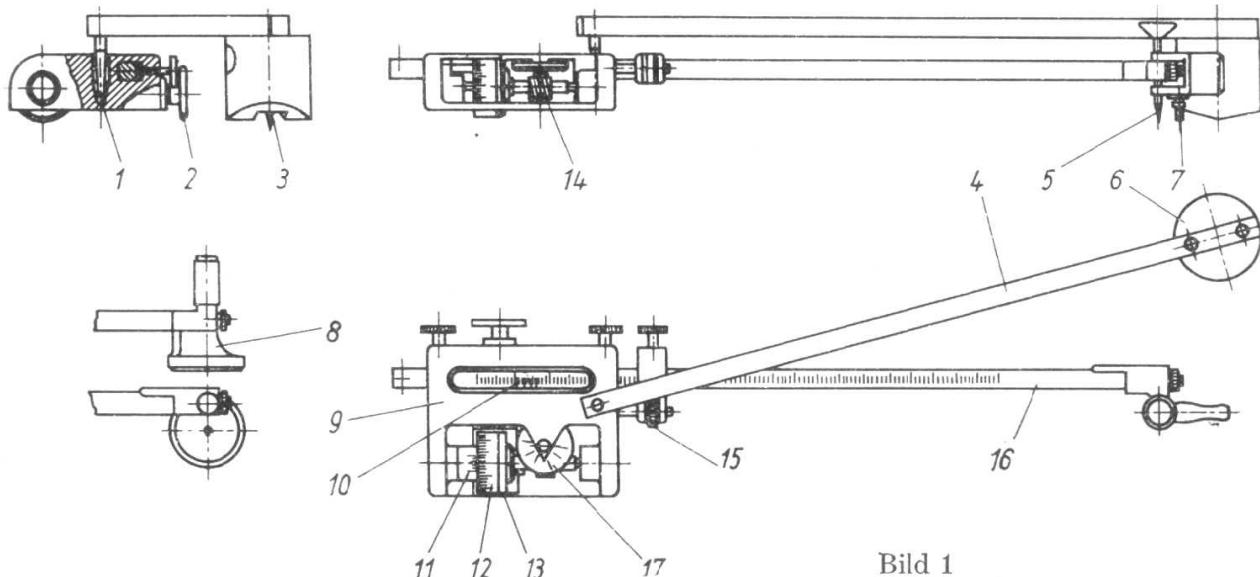


Bild 1

Im Meßkopf befindet sich das Meßwerk, bestehend aus der in Spitzen gelagerten Spindel (14) und Meßrolle (13) mit Meßtrommel (12). Die Meßtrommel trägt auf ihrem Umfang 100 Teilstriche und ist von 0...9 beziffert. Sie bewegt sich beim Drehen der Meßrolle an dem am Meßkopf befestigten Nonius (11) vorbei. Die Umdrehungen der Meßrolle werden durch eine von 0...9 bezifferte Zahlscheibe (17) angezeigt, die sich bei 10 Umdrehungen der Meßrolle einmal dreht.

*Hinweis:* Die Meßrolle ist der empfindlichste Teil des Planimeters! Sie soll grundsätzlich nicht angefaßt werden! Hartes Aufsetzen ist zu vermeiden! Das Planimetrieren ist auf einer ebenen Unterlage (Reißbrett) durchzuführen.

#### Aufstellung des Planimeters

Der Fahrstift wird in die Mitte der zu planimetrierenden Fläche gestellt und der Pol nach Augenmaß in die verlängerte Meßrollenebene gelegt (Bild 2). Als Anfangspunkt

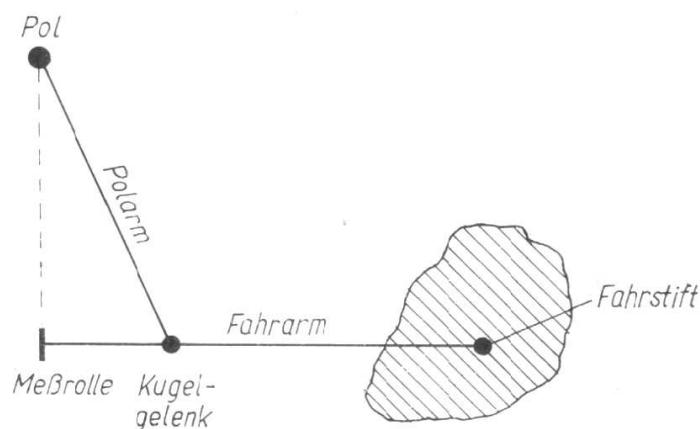


Bild 2

zum Umfahren wählt man einen beliebigen Punkt auf der Begrenzungslinie der Fläche. Anschließend ist die Fläche grob zu umfahren, um festzustellen, ob die Meßrolle dabei auf der Papierunterlage bleibt.

## V Versuchsdurchführung

Der Fahrstift wird auf einen beliebigen Anfangspunkt eingestellt und die dazugehörige Meßrollenstellung  $u_1$  an Zählscheibe und Trommel vierstellig abgelesen. Das vorliegende Flächenstück wird nun im Uhrzeigersinn umfahren, bis man wieder auf den Ausgangspunkt kommt; die neue Meßrollenstellung  $u_2$  wird abgelesen. Beim Umfahren verfolgt man die Fahrstiftspitze möglichst in der Bewegungsrichtung, um einen durch Parallaxe auftretenden Fehler auszuschalten. Aus diesem Grunde ist auch das Entlangfahren an einem Lineal bei geradliniger Begrenzung nicht zu empfehlen. Die durch das Hin- und Herschwanken bei freiem Entlangfahren entstehenden Fehler gleichen sich mit großer Wahrscheinlichkeit aus. Mit Hilfe der Integralrechnung läßt sich die *Planimetergleichung* aufstellen:

$$A = 2\pi\varrho l(u_2 - u_1)$$

Dabei bedeutet:

- $A$  Größe des umfahrenen Flächenstückes
- $\varrho$  Radius der Meßrolle
- $l$  Länge des Fahrarmes
- $u_2 - u_1$  Zahl der Meßrollenumdrehungen

Für eine bestimmte Fahrarmlänge erhält man mit  $k = 2\pi\varrho l$

$$A = k(u_2 - u_1)$$

$k$  wird als *Planimeterkonstante* bezeichnet. Diese muß durch einen Vorversuch ermittelt werden. Sie hat die Dimension einer Fläche.

Die Ermittlung der *Planimeterkonstante*  $k = 2\pi\varrho l$  kann immer nur für eine bestimmte Fahrarmeinstellung erfolgen. Dazu umfährt man eine Fläche von bekannter Größe, etwa einen Kreis, weil hier gewisse bevorzugte Stellungen der Meßrollenachse zur Meßrollenfortbewegungsrichtung im Durchschnitt am besten kompensiert werden. Will man die vom Hersteller beigelegte Planimeterkonstante benutzen, dann empfiehlt sich deren Nachprüfung mit dem beiliegenden Kontroll-Lineal.

Kompensationsmessung<sup>1</sup>). Das vorliegende Planimeter ist ein *Kompensationsplanimeter*. Die Verbindung zwischen Pol- und Fahrarm wird hier durch ein auseinandernehmbares Kugelgelenk hergestellt. Bei dieser Verbindung vermeidet man einen Fehler, der dadurch in die Messung kommen kann, daß das Scharnier zwischen beiden Planimeterarmen nicht senkrecht zur Zeichenebene steht. Außerdem kann und soll man nach einem Umfahren unter Festhalten des Poles und des Fahrstiftes das Instrument im Kugelgelenk auseinandernehmen, beide Arme nach der Seite hin

---

<sup>1)</sup> F. A. WILLERS, Methoden der Praktischen Analysis, Berlin 1950

durchschlagen und in dieser neuen Lage des Planimeters ein zweites Umfahren im gleichen Umlaufsinn vornehmen (Bild 3). Bildet man aus den beiden so gefundenen Maßzahlen das Mittel, so eliminiert man dadurch den Einfluß eines zweiten Planimeterfehlers, der darin zu sehen ist, daß die Achse der Meßrolle nicht parallel zum Fahrarm sein könnte.

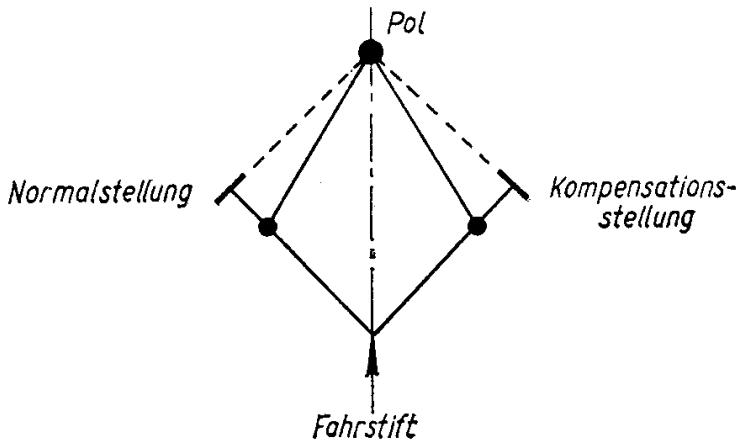


Bild 3

## A Aufgaben

1. Das Planimeter wird entsprechend der Anleitung zusammengesetzt und aufgestellt. Durch mehrfaches Umfahren der auszumessenden Fläche macht man sich mit der Funktion der Meßrolle und des Meßwerkes vertraut und übt sich im Umfahren von Flächen.
2. Es ist die Planimeterkonstante  $k$  durch 10maliges Umfahren der Eichfläche (Kreis!) in Normal- und Kompensationsstellung zu ermitteln. Die Planimeterkonstante ergibt sich als Mittelwert

$$k = \frac{k_N + k_K}{2}$$

Die Fahrarmeinstellung wird vom Praktikumsleiter angegeben.

3. Fehlerrechnung für  $k$
4. Die Flächeninhalte der auf der Vorlage dargestellten Flächen sind zu bestimmen (je 5 Messungen).
5. Fehlerabschätzung für alle gemessenen Flächeninhalte.
6. Durch Integration sind die Flächeninhalte der Flächen zu kontrollieren, deren Begrenzungskurven analytisch bekannt sind.
7. Es ist der relative Fehler

$$\left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{A_{\text{Planimeter}} - A_{\text{Integral}}}{A_{\text{Integral}}} \right|$$

zu ermitteln.

**Versuchsgeräte:** Polarimeter, Vorlage, Reißbrett

## 2. Waage

### Beschreibung der Waage

Die Waage ist eines der wichtigsten Feinmeßinstrumente. Sie dient zur Bestimmung der Masse eines Körpers. Bei der Wägung wird die Masse des Körpers mit der Masse von *Wägestücken* verglichen.

Die Kenntnis der Wirkungsweise der Waage und ihrer Bedienung wird bei jeder experimentellen Arbeit vorausgesetzt. In Bild 4 ist eine Analysenwaage dargestellt. Diese ist in einem Glasgehäuse untergebracht und wird so gegen übermäßige Verschmutzung, Luftbewegung und mechanische Beschädigung geschützt. Wichtigster Teil der Waage ist der Waagebalken (1). Sein Auflager wird aus einer Schneide (2) gebildet, die in der Mitte des Waagebalkens eingesetzt ist. Die Schneide liegt auf

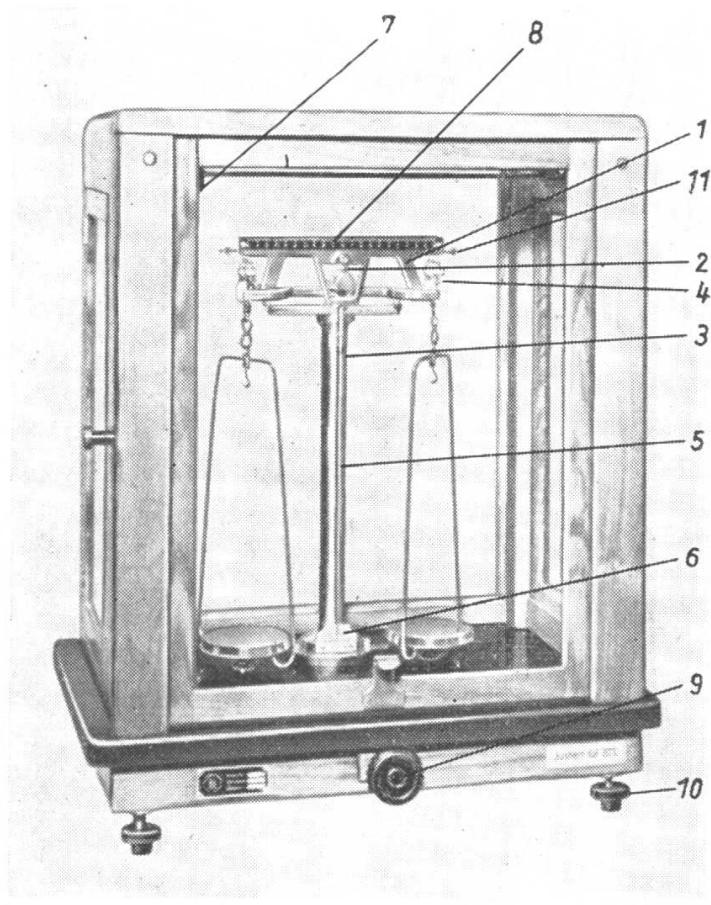


Bild 4

einem polierten Achatplättchen auf, welches am oberen Ende der Säule (3) angebracht ist. An den beiden Enden des Waagebalkens befinden sich die Vorrichtungen zum Aufhängen der Waagschalen (4). Im allgemeinen sind diese Vorrichtungen ebenfalls Schneidenlager. Zur Ermittlung der Stellung des Waagebalkens dient der Zeiger (5). Das Ende des Zeigers bewegt sich beim Wägen vor einer Skale (6), die an der Säule

befestigt ist. In Ruhestellung der Waage muß der Zeiger nicht unbedingt auf die Mitte der Skale zeigen. Um die Benutzung sehr kleiner Wägestücke zu vermeiden, werden sogenannte Reiter verwendet. Dies sind Drahthäkchen von bekannter Masse. Diese Reiter werden mittels eines verschiebbaren Auflegers (7) auf den Waagebalken aufgesetzt. Der Waagebalken ist durch eine Skale (8) gleichmäßig unterteilt, im allgemeinen in 10 Teile auf jeder Seite. Jedem Teilstrich entspricht dann beim Auflegen des Reiters ein Wägestück  $\Delta m = nm/10$ , wenn  $n$  die Masse des Reiters ist und  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ .

Die Arretierung der Waage geschieht durch eine spezielle Einrichtung, die durch Drehen des Knopfes (9) betätigt wird. Dadurch werden die Schneiden der Waagschalen und des Waagebalkens von den Kissen abgehoben und gleichzeitig der Waagebalken entlastet.

Jede Waage ist für eine bestimmte Höchstbelastung konstruiert. Diese ist angegeben und darf nicht überschritten werden. Jeder Waage ist ein Satz Wägestücke beigegeben. Die Gesamtmasse der Wägestücke entspricht der Höchstbelastung.

### *Aufstellung der Waage*

Die Säule der Waage muß vertikal und erschütterungsfrei stehen. Dies wird mittels eines an der Säule angebrachten Lotes oder einer Dosenlibelle überprüft. Die Justierung erfolgt durch die an der Grundplatte befindlichen Standschrauben (10). Bei richtiger Justierung der Waage im unbelasteten Zustand soll das Ende des Zeigers ungefähr auf die Mitte der Skale zeigen. Ist eine Abweichung von mehr als 3 Skalenteilen vorhanden, so wird durch Verdrehen der Justierschrauben (11) an den Enden des Waagebalkens ausgeglichen.

### **Regeln für die Benutzung von Waagen**

1. Zum Auflegen des Wägeguts und der Wägestücke sind *nur die Seitentüren* des Gehäuses zu öffnen.
2. Wägestücke dürfen auf die Waagschalen nur aufgelegt oder entfernt werden, wenn die Waage arretiert ist. Die Wägestücke sollen so auf der Waagschale liegen, daß der gemeinsame Schwerpunkt unter der Aufhängung liegt.
3. Wägestücke dürfen nicht mit der Hand angefaßt werden. *Pinzette benutzen!*  
*Nach der Benutzung gehören die Wägestücke in das Aufbewahrungskästchen.*
4. Der Waagebalken darf nicht vollständig enttarriert werden, solange die Waagschalen noch wenig abgeglichen sind. Die Arretierung wird nur so weit gelöst, daß man beurteilen kann, nach welcher Seite der Zeiger ausschlägt, d. h., welche der Waagschalen noch leichter ist. Dann wird sofort wieder arretiert, und die Wägestücke werden vermehrt oder vermindert. Bei geringem Unterschied zwischen der Masse des zu wägenden Körpers und der Masse der Wägestücke fängt der Waagebalken nach Enttarriertierung an zu schwingen.
5. Nach jeder Wägung ist die Waage zu arretieren, und das Wägegut und die Wägestücke sind von den Waagschalen zu entfernen. Die Türen des Glasgehäuses sind zu schließen.

## G Grundlagen

Zu den wichtigsten Kenngrößen einer Waage gehören

- die Ruhestellung und
- die Empfindlichkeit der unbelasteten Waage.

Diese Größen sind durch die physikalischen Eigenschaften der Waage als schwungsfähiges System miteinander verknüpft und sollen nachfolgend erläutert werden.

### *Die Bestimmung der Ruhestellung*

Wird die Arretierung der Waage vorsichtig gelöst, so pendelt der Zeiger vor der Skale hin und her. Um die Ruhestellung der Waage zu bestimmen, wartet man nicht, bis der Zeiger zur Ruhe kommt, sondern ermittelt die Ruhestellung aus den Umkehrpunkten der Schwingungen, wobei Zehntel-Skalenteile geschätzt werden können.

**Das Unterbrechen der Schwingungen durch Anhalten des Zeigers führt zu Beschädigungen der Waage und muß auf jeden Fall unterbleiben!**

Die Waage führt gedämpfte Schwingungen aus, deren Amplituden (Ausschlagweiten des Zeigers) also abnehmen. Bei der geringen Dämpfung der Analysenwaagen (sofern die Waage keine zusätzliche Dämpfungseinrichtung hat) nehmen die Amplituden praktisch bei jeder Schwingung um den gleichen Betrag ab. In Bild 5 ist der zeitliche Ablauf einiger aufeinanderfolgender Schwingungen dargestellt. Durch die Bestimmung der Umkehrpunkte  $U_1, U_2, U_3, \dots$  ist es möglich, die Ruhestellung der Waage

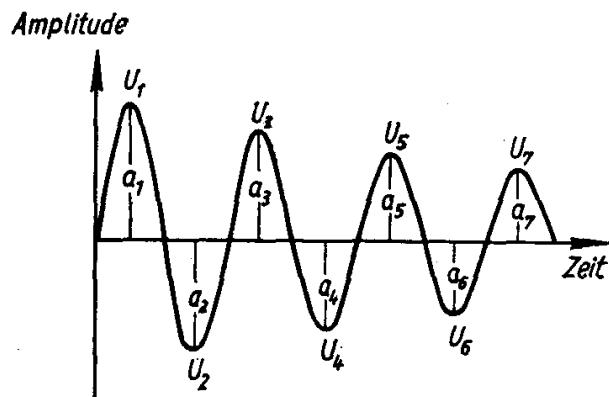


Bild 5

aus dem Schwingungszustand heraus zu bestimmen. Die Umkehrpunkte werden in Skalenteilen angegeben. Würden zur Bestimmung der Ruhestellung die Ausschläge  $a_1$  und  $a_2$  benutzt, so läge die Ruhestellung, gebildet aus dem Mittelwert von Ausschlag  $a_1$  und  $a_2$ , zu weit nach  $U_1$  zu, der Mittelwert von  $a_2$  und  $a_3$  dagegen zu weit nach  $U_2$  zu. Mittelt man die beiden Werte nochmals, so ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit die wirkliche Ruhestellung der Waage. Wird die Ruhestellung mit  $a_0$  bezeichnet, so ist:

$$a_0 = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2}}{2} = \frac{1}{4} (a_1 + 2a_2 + a_3) \quad (1)$$

Der Versuch ist mehrmals zu wiederholen.

Die Bestimmung der Ruhestellung ist also nur aus einer ungeraden Anzahl aufeinanderfolgender Umkehrpunkte möglich.

Das Verfahren lässt sich auf eine größere Anzahl von Umkehrpunkten erweitern. Die Ruhestellung der Waage ist nach jeder Wägung zu kontrollieren bzw. neu zu bestimmen.

### Die Empfindlichkeit der Waage

Die Waage stellt prinzipiell einen zweiseitigen Hebel dar, für dessen Gleichgewicht  $\sum M_i = 0$  gilt. Der Schwerpunkt  $S$  des Waagebalkens und der Waagschalen liegt im belasteten Zustand unter dem Drehpunkt  $D$  (Bild 6). Legt man auf die eine Schale der im Gleichgewicht befindlichen Waage ein Zusatzwägestück mit der Masse  $\Delta m$  ( $\Delta m \ll m_1$ ), so kommt der Waagebalken nach Drehung um den Winkel  $\alpha$  zur Ruhe. Es tritt außer den beiden Drehmomenten der an den Enden  $A$  und  $B$  des Waagebalkens wirkenden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$  (es wird vorausgesetzt, daß  $A$ ,  $B$  und  $D$  in einer Geraden liegen) noch ein drittes Drehmoment auf, welches den Schwerpunkt in die Ruhelage zurückzudrehen versucht. Im Schwerpunkt greift das Ge-

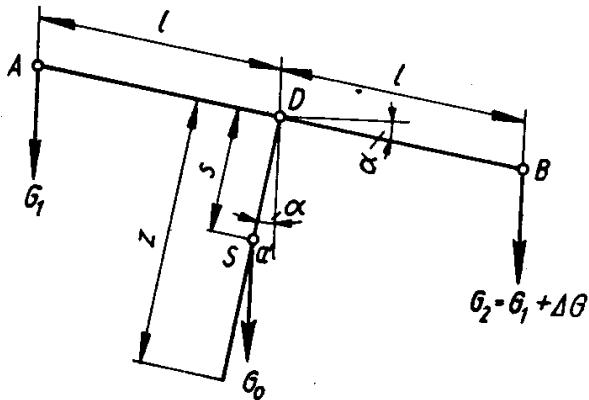


Bild 6

wicht  $G_0$  des Waagebalkens an und wirkt am Hebelarm  $a'$ . Entsprechend der Gleichgewichtsbedingung gilt:  $M_1 + M_0 - M_2 = 0$  mit  $M_1 = G_1 a$ ,  $M_2 = G_2 a$  und  $M_0 = G_0 a'$ . Setzt man voraus, daß  $\overline{AD} = \overline{BD} = l$  ist, so erhält man  $a = l \cos \alpha$ . Führt man für  $\overline{SD} = s$  ein, so ist  $a' = s \sin \alpha$ . Beachtet man weiterhin, daß ganz allgemein  $G = mg$  gilt, so erhält die Momentengleichung die Form

$$m_1 gl \cos \alpha + m_0 gs \sin \alpha - m_2 gl \cos \alpha = 0$$

Nach der Division durch  $g \cos \alpha$  und Elimination  $m_2 - m_1 = \Delta m$  ergibt sich

$$\frac{\tan \alpha}{\Delta m} = \frac{l}{m_0 s} \quad (2)$$

Da sich bei einem Massenunterschied  $\Delta m$  die Waage nur sehr wenig aus der Ruhestellung dreht, kann  $\tan \alpha \approx \alpha$  gesetzt werden. Führt man noch die Zeigerlänge  $z$

ein, so gilt  $\alpha = \Delta a/z$ . Setzt man diese Beziehung in Gleichung (2) ein und löst nach  $\Delta a/\Delta m$  auf, so erhält man

$$E = \frac{\Delta a}{\Delta m} = \frac{zl}{m_0 s} \quad (3)$$

Der Quotient  $E = \Delta a/\Delta m$  wird als die *Empfindlichkeit* einer Waage bezeichnet. Die Ausschlagsänderung  $\Delta a$  ist die Differenz aus der Ruhestellung  $a_0'$  des Zeigers bei Belastung der Waage mit einem kleinen Zusatzmassestück  $\Delta m$  und der Ruhestellung  $a_0$  ohne Belastung.

Die Größen  $z$ ,  $l$ ,  $m_0$  und  $s$  in Gleichung (3) sind der Messung im allgemeinen nicht zugänglich. Infolgedessen bestimmt man die Empfindlichkeit einer Waage durch Feststellung des Ausschlagsunterschiedes  $\Delta a$  des Zeigers bezüglich der Skale bei einem Belastungsunterschied durch die Massendifferenz  $\Delta m$ .

## V Versuchsdurchführung

Nach sorgfältiger Durcharbeitung der *Regeln für die Benutzung von Waagen* wird die Ruhestellung der zu untersuchenden Waage im unbelasteten Zustand ermittelt. Diese Bestimmung ist mehrmals mit unterschiedlicher Anzahl von Umkehrpunkten durchzuführen und der Mittelwert zu bilden.

Ermittlung der Empfindlichkeit der Waage im unbelasteten Zustand mit dem Reiter (oder einem Wägestück) der Masse  $\Delta m$ .

Die Ermittlung der Empfindlichkeit im belasteten Zustand ist mit den standardisierten Wägestücken durchzuführen. Zu verwenden sind Wägestücke mit den Gesamtmassen 5 g, 10 g, 20 g, 30 g, 50 g und 100 g. Bei jeder Belastung ist die Ruhelage zu bestimmen und der Ausschlag durch Verschieben des Reiters herbeizuführen.

## A Aufgaben

1. Erläutern Sie, weshalb bei der Bestimmung der Ruhestellung der Waage die Mittelwertbildung erlaubt ist! Wenden Sie hierzu Ihre Kenntnisse aus der Mathematik und der Schwingungslehre an!
2. Entwickeln Sie eine der Gleichung (1) entsprechende Form aus 5, 7 und  $2n + 1$  aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten für  $a_0$ !
3. Berechnen Sie  $a_0$  aus 3, 5, 7 und 9 Umkehrpunkten!
4. Berechnen Sie die Empfindlichkeit der untersuchten Waage im unbelasteten Zustand nach Gleichung (3)!
5. Berechnen Sie die Empfindlichkeit der untersuchten Waage im belasteten Zustand für die einzelnen Belastungsfälle!
6. Erläutern Sie, welche Größen auf die Empfindlichkeitsbestimmung nach Aufgabe 5 wesentlichen Einfluß haben!
7. Stellen Sie die ermittelten Empfindlichkeitswerte über der Belastung grafisch dar!
8. Diskutieren Sie die grafische Darstellung der Empfindlichkeit!

**Versuchsgeräte:** Analysenwaage, Wägestücke mit Pinzette im Behälter, Reiter

### 3. Dichtebestimmung mit dem Pyknometer

#### G Grundlagen

Die Dichte ist der Quotient aus der Masse und dem Volumen eines Körpers:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Sie kann daher aus Masse und Volumen des Körpers berechnet werden. Die Bestimmung der Masse ist durch Wägung sehr genau möglich. Schwierigkeiten bereitet hingegen die Bestimmung des Volumens, besonders bei unregelmäßig geformten Körpern.

Die bekannte Volumenbestimmung mit dem Überlaufgefäß liefert ungenaue Werte und kann daher nur für Überschlagsrechnungen verwendet werden. Man ist bestrebt, auch die Volumenbestimmung auf Wägungen zurückzuführen. Dies wird z. B. erreicht, wenn man ein *Pyknometer* verwendet.

Das Pyknometer ist ein Glasfläschchen mit einem eingeschliffenen Glasstopfen, der kapillar durchbohrt ist (Bild 7). Das Pyknometer (Masse  $m_0$ ) wird mit Wasser gefüllt

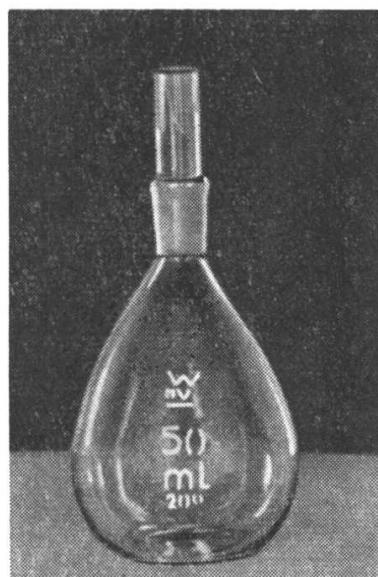


Bild 7

(Masse des mit Wasser gefüllten Pyknometers  $m_1$ ). Dann bringt man den Probekörper (Masse  $m$ ) in das Pyknometer und füllt wieder mit Wasser auf (Masse des Pyknometers mit Probekörper und verringelter Wassermenge  $m_2$ ).

Es lässt sich nun das Volumen des Probekörpers wie folgt bestimmen:

Die Masse des ursprünglich im Pyknometer enthaltenen Wassers ist

$$m_1 - m_0$$

Die Masse der verringerten Wassermenge ist

$$m_2 - m_0 - m$$

Die Masse  $m_w$  des vom Probekörper verdrängten Wassers ist daher gleich der Differenz

$$m_w = (m_1 - m_0) - (m_2 - m_0 - m) = m_1 + m - m_2$$

Das Ergebnis ist also unabhängig von  $m_0$ , der Masse des Pyknometers.  $m_0$  braucht daher auch nicht bestimmt zu werden.

Nach (1) läßt sich nun das Volumen des verdrängten Wassers berechnen:

$$V = \frac{m_w}{\varrho_w} = \frac{m_1 + m - m_2}{\varrho_w} \quad (2)$$

Dabei ist  $\varrho_w$  die Dichte des Wassers. Es ist zu beachten, daß  $\varrho_w$  temperaturabhängig ist.

Das Volumen des Probekörpers ist gleich dem Volumen des verdrängten Wassers. Es ist daher (2) in (1) einzusetzen, und es folgt

$$\varrho = \frac{m}{m + m_1 - m_2} \varrho_w \quad (3)$$

Damit ist die Dichtebestimmung auf drei Wägungen zurückgeführt:

$m$  Masse des Probekörpers

$m_1$  Masse des Pyknometers mit Wasser

$m_2$  Masse des Pyknometers mit Probekörper und Wasser

## V Versuchsdurchführung

Zunächst ist der Probekörper zu wägen (Masse  $m$ ). Dann wird die Temperatur  $t$  des destillierten Wassers festgestellt. Das Pyknometer wird mit dem destillierten Wasser, das Raumtemperatur haben soll, gefüllt. Man benutzt dazu zweckmäßig eine Pipette oder Spritzflasche. Es ist darauf zu achten, daß sich keine Luftblasen im Pyknometer befinden, wenn der Glasstopfen aufgesetzt ist. Das Wasser steigt in der Kapillare auf und quillt heraus. Das Pyknometer ist mit Fließpapier gut abzutrocknen. Das Wasser soll die Kapillare bis oben hin füllen, aber auf dem Glasstopfen keine Kuppe bilden. Damit sich die Temperatur des eingefüllten Wassers durch die Handwärme nicht ändert, darf das Pyknometer nur am Hals angefaßt werden. Zweckmäßig ist es, einen Reagenzglashalter zu verwenden. Das Pyknometer ist mit Wasser zu wägen ( $m_1$ ). Dann bringt man den Probekörper in das Pyknometer und füllt wie beschrieben mit destilliertem Wasser auf. Die anschließende Wägung ergibt  $m_2$ .

**Die Regeln für die Benutzung von Waagen (S. 33) sind genau zu beachten!**

## A Aufgaben

1. Berechnen Sie nach (3) die Dichte der vorgelegten Probekörper!

2. Fehlerabschätzung

Versuchegeräte: Pyknometer, Thermometer, Spritzflasche oder Pipette, Reagenzglashalter, Waage, Versuchskörper (Stahlkugeln, Schrot, Kupferdrahtstücke, Glasperlen, Quarzsand o. ä.)

## 4. Reversionspendel

### G Grundlagen

Zur Bestimmung der Fallbeschleunigung dient ein physisches Pendel. Dies kann ein beliebig gestalteter Körper sein, der um die Achse  $A$  drehbar angeordnet ist (Bild 8).

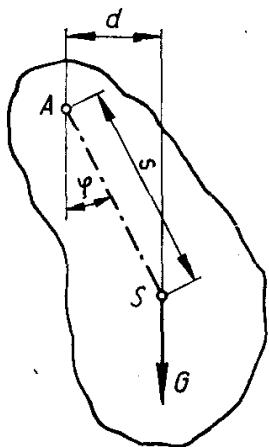


Bild 8

Hat der Schwerpunkt  $S$  den Abstand  $s$  von der Drehachse, so wirkt bei einer Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  aus der Ruhelage das rücktreibende Drehmoment

$$M = -mgs \sin \varphi$$

Für kleine Auslenkungswinkel gilt  $\sin \varphi \approx \varphi$  und damit

$$M = -mg s \varphi$$

Das rücktreibende Drehmoment ist Ursache einer beschleunigten Drehbewegung für diese gilt

$$M = J_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J_A \ddot{\varphi}$$

(NEWTONSche Bewegungsgleichung für Drehung um die Achse  $A$ ).

Durch Gleichsetzen der beiden Drehmomente erhält man

$$J_A \ddot{\varphi} + mgs\varphi = 0$$

Dies stellt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, die den Schwingungsvorgang des physischen Pendels beschreibt. Da es sich unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungswinkel um eine harmonische Schwingung handelt, muß der Lösungsansatz

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \beta)$$

die Differentialgleichung identisch erfüllen. Durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit und Einsetzen wird dies bestätigt.

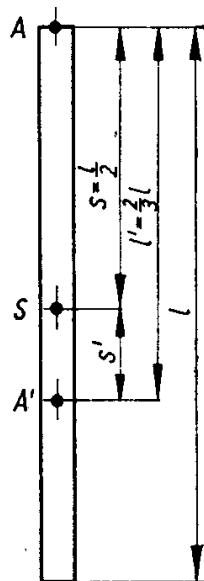


Bild 9

Die Periodendauer des physischen Pendels ergibt sich aus

$$\omega^2 = \frac{mgs}{J_A}$$

mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}}$$

Verwendet man als physisches Pendel jedoch einen Stab und legt die Drehachse A durch den Endpunkt der Länge l (Bild 9), so kann man das Massenträgheitsmoment  $J_A$  leicht bestimmen. Unter Anwendung des STEINERSchen Satzes ergibt sich

$$J_A = \frac{1}{3} ml^2$$

Damit erhält man für die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}$$

Das Stabpendel hat demnach die gleiche Periodendauer wie ein mathematisches Pendel von  $\frac{2}{3}$  seiner Länge.

Die Pendellänge  $l'$  des mathematischen Ersatzpendels gleicher Periodendauer nennt man *reduzierte Pendellänge*. Trägt man die reduzierte Pendellänge  $l'$  auf dem physischen Pendel der Länge  $l$  vom Drehpunkt  $A$  aus ab, so erhält man einen zweiten

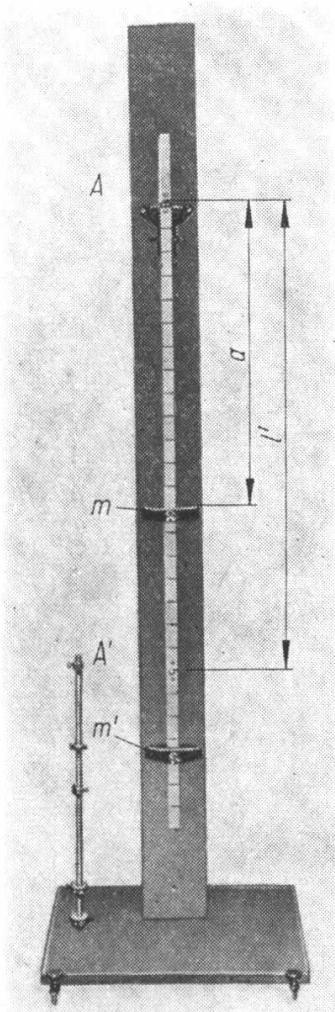


Bild 10

Drehpunkt  $A'$ , in bezug auf den das Pendel die gleiche Periodendauer  $T$  haben muß (Bild 10). Der neue Drehpunkt  $A'$  wird als *Schwingungsmittelpunkt* bezeichnet.

Wird bei einem physischen Pendel der Drehpunkt  $A$  mit dem Schwingungsmittelpunkt  $A'$  vertauscht, so bleibt die reduzierte Pendellänge  $l'$  unverändert.

Diese Erkenntnis hat zur Konstruktion des *Reversionspendels* geführt.

Mit Hilfe des Reversionspendels ist man in der Lage, die Fallbeschleunigung an jedem beliebigen Ort zu bestimmen. Aus der Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

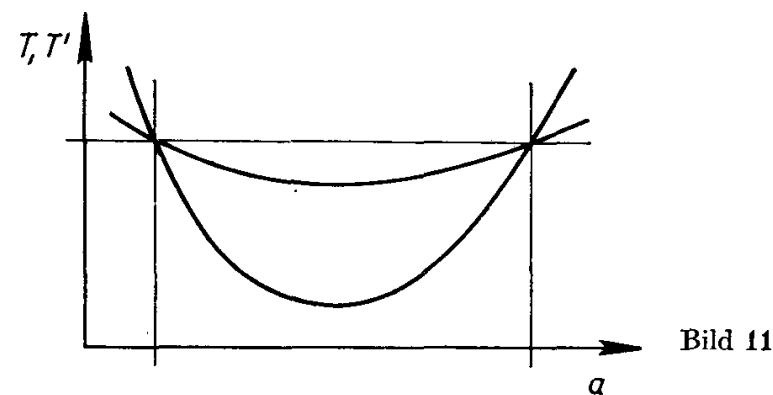
folgt

$$g = l' \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad (1)$$

Da es Schwierigkeiten bereitet, den Drehpunkt  $A$  genau am Stabende anzubringen, legt man eine Länge  $l'$  zwischen zwei beliebigen Drehpunkten  $A$  und  $A'$  fest. Es gelingt dann immer, durch Verschieben zweier Zusatzmassenstücke  $m$  und  $m'$  (Bild 10) für  $A$  und  $A'$  als Drehpunkte die gleiche Periodendauer zu ermitteln. Wird  $l'$  bestimmt (dies kann genau genug durchgeführt werden), so läßt sich  $g$  unschwer ermitteln.

## V Versuchsdurchführung

Mit einer Dosenlibelle ist die Pendelaufhängung zu loten. Durch Lösen der Auflagerschraube entnimmt man den Pendelstab der Haltevorrichtung. Mit einem Maßstab wird der Abstand der beiden Schneiden festgestellt. Damit ist  $l'$  bestimmt. Nun sind die beiden Massenstücke so einzustellen, daß die Periodendauer  $T$ , die sich bei Schwingungen um Punkt  $A$  ergibt, gleich der Periodendauer  $T'$  bei Schwingung um  $A'$  ist. Um ein langwieriges planloses Probieren zu vermeiden, wird das



Massenstück  $m'$  fest eingestellt und nur die Strecke  $a$ , der Abstand des Massenstücks  $m$  vom Drehpunkt  $A$  (Bild 10), verändert. Für etwa 8 verschiedene Werte  $a$  wird  $T$  (aus 20 Schwingungen) bestimmt. Anschließend wird der Pendelstab umgehängt; für die gleichen Entfernungen  $a$  (ebenfalls von Schneide  $A$  aus gemessen, die sich jetzt unten befindet) wird  $T'$  ermittelt. Die Werte sind in ein Diagramm (Bild 11) einzutragen. Die Schnittpunkte der beiden Kurven geben die Werte  $a$  an, für die  $T$  und  $T'$  einander gleich sind. Nun ist die aus dem Diagramm gefundene Entfernung  $a$  am Reversionspendel einzustellen.  $T$  und  $T'$  werden aus 50 (besser 100) Schwingungen bestimmt. Sollten die Werte  $T$  und  $T'$  voneinander abweichen, so ist der Mittelwert zu bilden.

Mit  $\pi$ ,  $l'$  und  $T$  errechnet man aus (1) die Fallbeschleunigung  $g$ .

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung mit dem Reversionspendel!
2. Fehlerabschätzung
3. Es ist die Abweichung des Ergebnisses vom Normwert der Fallbeschleunigung des Ortes, an dem die Messung stattfand, zu begründen.
4. Mit welcher Stellenzahl ist  $\pi$  mindestens einzusetzen, damit der Fehler von  $\pi$  das Ergebnis nicht beeinflußt?
5. Fertigen Sie ein mathematisches Pendel mit der Pendellänge  $l'$  an und kontrollieren Sie, ob die Aussage über die Periodendauer stimmt!
6. Wovon hängt der Unterschied zwischen  $T$  und  $T'$  im wesentlichen ab, und unter welchen Voraussetzungen ist  $T = T'$ ?
7. Weisen Sie nach, daß für ein beliebiges physisches Pendel die Gleichung  $l' = s + s'$  (Bild 9) gilt!

Versuchsgeräte: Reversionspendel komplett, Dosenlibelle, Stahlmaß 100 cm, Stoppuhr

## 5. Federkonstante einer Schraubenfeder

### G Grundlagen

Die Längenänderung einer Schraubenfeder ist proportional der einwirkenden Kraft (HOOKESches Gesetz). Die von einer bestimmten Kraft hervorgerufene Längenänderung ist abhängig vom Material und den Abmessungen der Feder. Materialeigenschaften und Federabmessungen bestimmen das Verhältnis von wirkender Kraft und erzielter Längenänderung; es wird als *Federkonstante* oder *Richtgröße* bezeichnet.

$$\left| \frac{F}{\Delta l} \right| = k \quad (1)$$

Wird ein an einer Schraubenfeder hängender Körper in der Längsrichtung der Feder angestoßen, so führt er Schwingungen aus. Die auf den senkrecht schwingenden Körper wirkende resultierende Kraft ist der Entfernung des Körpers von der Mittellage (der Elongation  $y$ ) proportional und immer zur Mittellage gerichtet:

$$F = -ky$$

Mit  $F = m\ddot{y}$  erhält man die Differentialgleichung  $m\ddot{y} = -ky$  oder

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (2)$$

Das ist die Differentialgleichung der *ungedämpften harmonischen Schwingung*.

$\frac{k}{m}$  ist das Quadrat der Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

Daraus folgt die Periodendauer der Schwingung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

Bei der Längenänderung der Schraubenfeder wird das Material vorwiegend auf Torsion beansprucht. Die elastischen Eigenschaften einer solchen Feder werden deshalb außer von den äußeren Abmessungen vom Torsionsmodul des Federwerkstoffs bestimmt. Dabei besteht zwischen der Federkonstanten  $k$ , dem Drahtdurchmesser  $d$ , dem mittleren Windungsdurchmesser  $D_m$ , der Anzahl der federnden Windungen  $N$  und dem Torsionsmodul  $G$  die Beziehung

$$k = \frac{Gd^4}{8ND_m^3} \quad (5)$$

## V Versuchsdurchführung

### 1. Bestimmung der Federkonstanten aus dem Verhältnis von Kraft- und Längenänderung

Auf eine an die Federwaage gehängte Waagschale werden nacheinander solche Wägeteile gelegt, daß jeweils eine Dehnung der Feder um einige Zentimeter eintritt. Die Längenänderung der Feder lässt sich am besten mit einer Spiegelskale feststellen (Verfahren nach JOLLY). Die Proportionalitätsgrenze der Feder darf nicht überschritten werden.

### 2. Bestimmung der Federkonstanten aus Periodendauer und Masse des angehängten Körpers

Die Masse des anzuhangenden Körpers soll möglichst groß sein gegenüber der Masse der Feder und mindestens eine Periodendauer von 0,5 s ergeben. Der Körper muß frei schwingen können. Es ist jeweils die Dauer von 10 oder 20 Schwingungen zu messen, um den Fehler bei der Bestimmung von  $T$  möglichst klein zu halten.

## A Aufgaben

1. Von drei Schraubenfedern ist die Federkonstante zu bestimmen,
  - 1.1. aus dem Verhältnis  $F/\Delta l$ , indem  $F = F(\Delta l)$  in ein Diagramm eingetragen wird,
  - 1.2. aus Periodendauer und Masse des angehängten Körpers.

2. Fehlerabschätzung
3. Untersuchen Sie den Einfluß der Masse der Feder auf die Periodendauer!
4. Berechnen Sie den Torsionsmodul des Federmaterials!
5. Ein Körper soll an zwei gleichen Schraubenfedern der Federkonstante  $k$  aufgehängt sein; die Federn seien einmal „parallelgeschaltet“, zum andern „in Reihe“. Überlegen Sie sich, welchen Wert dann jeweils die Federkonstante des Systems annimmt!

*Versuchsgeräte:* Spiegelskale mit Millimeterteilung, Schraubenfedern, Wägestücke und Waagschale, Stoppuhr, Meßlehre, Meßschraube

## 6. Trägheitsmoment

### G Grundlagen

Das NEWTONSche *Grundgesetz der Dynamik*  $F = ma$  nimmt für die Rotation die Form

$$M = J\alpha \quad (1)$$

an. Darin ist  $M$  das Drehmoment,  $J$  das Trägheitsmoment und  $\alpha$  die Winkelbeschleunigung. Das Trägheitsmoment ist definiert als

$$J = \int r^2 dm \quad (2)$$

Mit ihm wird die *Massenverteilung* des Körpers um die Drehachse erfaßt. Für unregelmäßige Körper muß das Trägheitsmoment experimentell – meist aus Schwingungen – bestimmt werden. Der Probekörper hängt an einem Draht (Bild 12) oder wird auf

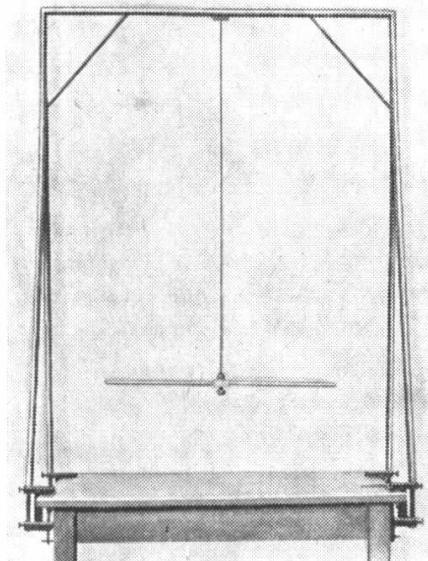


Bild 12

eine Drillachse montiert (Bild 13). Bringt man den Körper aus seiner Ruhelage, indem man den Draht verdrillt bzw. die Spiralfeder spannt, so entsteht ein rücktreibendes Moment

$$M = -k' \varphi \quad (3)$$

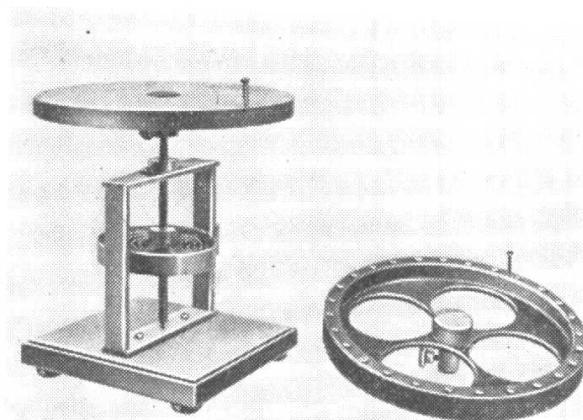


Bild 13

Dabei ist  $k'$  die Winkelrichtgröße und  $\varphi$  der Auslenkwinkel. Gibt man den Körper frei, so führt er am Draht Torsionsschwingungen bzw. auf der Drillachse Drehschwingungen mit der Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k'}} \quad (4)$$

aus.

## V Versuchsdurchführung

### Torsionsschwingungen

Die Winkelrichtgröße braucht nicht bekannt zu sein, wenn man das folgende Verfahren anwendet:

Am Probekörper werden 2 Zusatzkörper (Masse je  $m/2$ ) angebracht (Bild 14). Damit wird das Trägheitsmoment um

$$J' = mr^2 \quad (5)$$

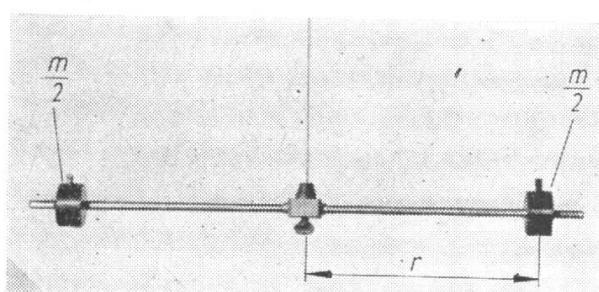


Bild 14

( $r$  Abstand der Zusatzmassenstücke von der Drehachse) größer. Das Gesamträgheitsmoment beträgt nun  $J + J'$ . Die Periodendauer wird jetzt größer und beträgt

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J + J'}{k'}} \quad (6)$$

Dividiert man (6) durch (4), so folgt

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{J + J'}{J}}$$

Diese Gleichung wird nach  $J$  aufgelöst, und man erhält mit (5)

$$J = mr^2 \frac{T^2}{T'^2 - T^2} \quad (7)$$

Es wird zunächst die Periodendauer  $T$  gemessen, mit der der Probekörper am Draht schwingt. Zur Bestimmung von  $T$  sollen mindestens 20 Schwingungen beobachtet werden.

Zwei Zusatzmassenstücke (je  $m/2$ ) werden am Probekörper im Abstand  $r$  von der Drehachse angebracht. Infolge des vergrößerten Trägheitsmoments schwingt das System aus Probekörper und Zusatzmassenstücken jetzt mit der größeren Periodendauer  $T'$ . Diese Periodendauer wird ebenfalls aus mindestens 20 Schwingungen bestimmt. Das Trägheitsmoment  $J$  des Probekörpers wird nach (7) berechnet.

### *Drehschwingungen*

Der zu untersuchende Körper wird auf eine dünne Achse montiert. An der Achse ist eine Spiralfeder befestigt, die am anderen Ende an einem Rahmen angeschraubt ist (Bild 13). Der Körper wird in Schwingungen versetzt und die Periodendauer gemessen. Je nach der Dämpfung des Schwingungsvorganges können etwas mehr oder weniger als 5 Schwingungen beobachtet werden. Die Messung ist mehrfach zu wiederholen. Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße der Spiralfeder wird diese um einen bestimmten Winkel (z. B.  $\pi/2, \pi$ ) verdreht. Die Federwaage wird dabei in einen Haken einge-hängt, der an dem zu untersuchenden Körper angebracht ist. Sie muß senkrecht zum Radius der vom Haken beschriebenen Kreisbahn gehalten werden. Die Winkelrichtgröße  $k'$  kann dann aus der Federkraft  $F$ , dem Abstand  $r$  des Hakens von der Drehachse und dem Drehwinkel  $\varphi$  nach (3) berechnet werden:

$$k' = \frac{|F| r}{\varphi} \quad (8)$$

Auch die Bestimmung von  $k'$  sollte mehrfach und bei verschiedenen Auslenkwinkeln erfolgen. Der Mittelwert kann für die weitere Auswertung verwendet werden.  $J$  wird aus (4) berechnet.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines Probekörpers aus Torsionsschwingungen! Verwenden Sie 2 Paar verschiedene Massenstücke in je 3 verschiedenen Abständen von der Drehachse!
2. Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße der Spiralfeder!
3. Ermitteln Sie das Trägheitsmoment verschiedener Körper aus Drehschwingungen!
4. Fehlerabschätzung
5. Überlegen Sie, welchen Einfluß das Eigenträgheitsmoment von Spiralfeder und Achse auf die Messung hat!

*Versuchsgeräte:* Stativ mit Torsionsdraht und Probekörper, 2 Paar Massenstücke, Maßstab, Waage; Aufspannvorrichtung mit Spiralfedern, Meßlehre, Federwaage, Winkelmesser, Probekörper, Stoppuhr

## 7. Gekoppelte Pendel

### G Grundlagen

Zwei Stangenpendel sind durch eine *Koppelfeder* miteinander verbunden (Bild 15). Das Trägheitsmoment  $J$  des Stangenpendels (Bild 16) lässt sich als Summe aus dem Trägheitsmoment  $J_1$  der Stange

$$J_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \quad (1)$$

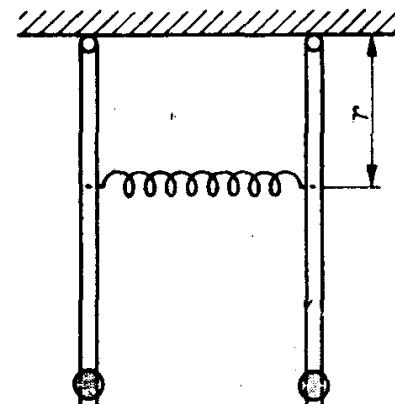


Bild 15

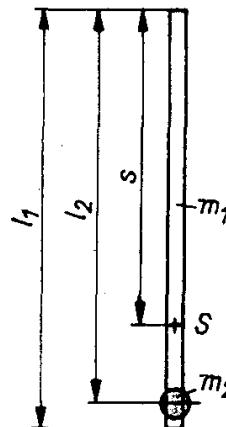


Bild 16

und dem Trägheitsmoment  $J_2$  der Kugel, die wir als Massenpunkt ansehen wollen,

$$J_2 = m_2 l_2^2 \quad (2)$$

berechnen:

$$J = J_1 + J_2 \quad (3)$$

Die Gesamtmasse des Pendels ist  $m = m_1 + m_2$ , sein Schwerpunkt  $S$  hat den Abstand  $s$  vom Aufhängepunkt (Bild 16).

Aus der Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} \quad (4)$$

des Pendels läßt sich  $s$  errechnen.

Durch die Kopplung werden Kräfte von einem Pendel auf das andere übertragen und damit die Bewegungen (Amplituden und Frequenzen) verändert. Die Reibung soll vernachlässigt werden, es sollen also ungedämpfte Schwingungen mit kleiner Amplitude ( $\tan \varphi \approx \varphi \approx \sin \varphi$ ) vorausgesetzt werden. Das Problem soll weiter dadurch vereinfacht werden, daß die Koppelfeder bei gleichem Ausschlag der Pendel keine Kraft

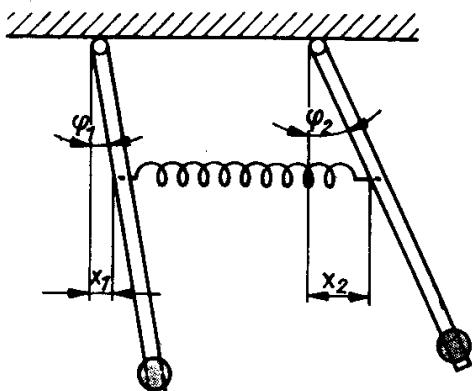


Bild 17

überträgt. Im Ruhezustand hängen die beiden Pendel also senkrecht; die Feder ist entspannt. Die Feder soll an beiden Pendeln im Abstand  $r$  von der Drehachse angreifen.

Wir betrachten nun einen beliebigen Bewegungszustand der Pendel: Pendel 1 sei um den Winkel  $\varphi_1$ , Pendel 2 um den Winkel  $\varphi_2$  aus der Ruhelage ausgelenkt (Bild 17). Die Feder übt dann auf Pendel 1 die Kraft

$$F = k(x_2 - x_1), \quad (5)$$

auf Pendel 2 nach dem Gegenwirkungsprinzip die Kraft

$$-F = -k(x_2 - x_1) \quad (6)$$

aus. (Winkel, Strecken und Kräfte sollen nach rechts positiv, nach links negativ gezählt werden.)

Für die ungedämpfte Schwingung des physischen Pendels gilt für kleine Amplituden ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) nach Versuch 4 die Differentialgleichung

$$J\ddot{\varphi} + mgs\varphi = 0 \quad (7)$$

Diese Differentialgleichung ist noch um das Moment zu erweitern, das die Feder auf die Pendel ausübt:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + mgs\varphi_1 &= M_1 \\ J\ddot{\varphi}_2 + mgs\varphi_2 &= M_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Aus  $M = Fr$  folgt mit (5) für Pendel 1

$$M_1 = k(x_2 - x_1) r$$

und für Pendel 2

$$M_2 = k(x_1 - x_2) r$$

Führen wir noch ein

$$\begin{aligned} x_1 &= r\varphi_1 \\ x_2 &= r\varphi_2 \end{aligned} \quad (9)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} M_1 &= k(\varphi_2 - \varphi_1) r^2 \\ M_2 &= k(\varphi_1 - \varphi_2) r^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Aus (8) folgt mit (10)

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + mgs\varphi_1 &= k(\varphi_2 - \varphi_1) r^2 \\ J\ddot{\varphi}_2 + mgs\varphi_2 &= k(\varphi_1 - \varphi_2) r^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Mit den Abkürzungen

$$mgs = D \quad (12)$$

und

$$kr^2 = C \quad (13)$$

wird

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 &= C(\varphi_2 - \varphi_1) \\ J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 &= C(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (14)$$

Dies ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen. Es kann entkoppelt werden, wenn wir die neuen Variablen

$$u = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (15)$$

$$v = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (16)$$

einführen. Durch Addition der beiden Gleichungen (14) folgt mit der Substitution (15)

$$J\ddot{u} + Du = 0 \quad (17)$$

Subtraktion der beiden Gleichungen (14) ergibt mit der Substitution (16)

$$J\ddot{v} + (D + 2C)v = 0 \quad (18)$$

(17) stimmt mit der bekannten Differentialgleichung (7) überein und stellt die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillatator dar. Seine Kreisfrequenz ist (vgl. Versuch 4)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (19)$$

Daraus ergibt sich die Periodendauer zu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (20)$$

(18) ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{J} + \frac{2C}{J}} \quad (21)$$

und der Periodendauer

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D + 2C}} \quad (22)$$

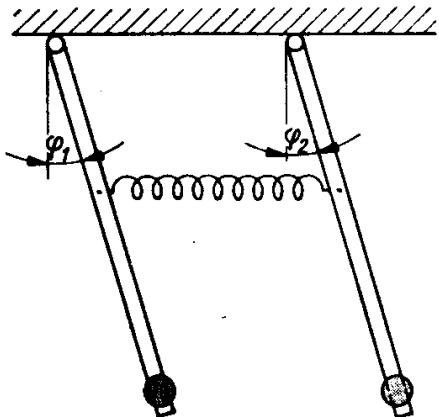


Bild 18

Zwei Bewegungsformen sind besonders einfach zu übersehen. Ist nämlich  $v = 0$ , so ist nach (16) zu jeder Zeit

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

(Bild 18), und das System schwingt mit der Kreisfrequenz  $\omega_1$ . Es gilt dann

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t \quad (23)$$

Ist andererseits  $u = 0$ , so ist nach (15) zu jeder Zeit

$$\varphi_1 = -\varphi_2$$

(Bild 19), und das System schwingt mit der Kreisfrequenz  $\omega_2$ . Dann gilt

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t \quad (24)$$

Die in Bild 18 und 19 dargestellten Schwingungen werden als *Eigenschwingungen* oder *Normalschwingungen* bezeichnet, die zugehörigen Frequenzen heißen *Eigenfrequenzen* oder *Normalfrequenzen*.

An gekoppelten Pendeln lassen sich auch Schwebungen beobachten. Hält man Pendel 2 in der Ruhelage fest, lenkt Pendel 1 aus und gibt dann beide Pendel gleichzeitig frei,

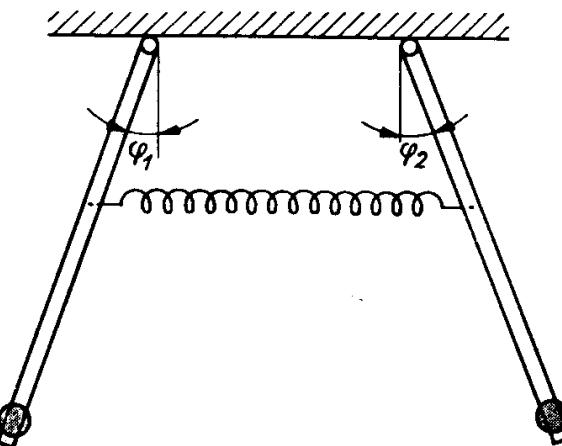


Bild 19

so beobachtet man, daß die Amplituden von Pendel 1 rasch abnehmen und Pendel 2 zu schwingen beginnt. Die Energie wandert zwischen den beiden Pendeln hin und her. Diese Bewegungsform entsteht durch Überlagerung der beiden oben beschriebenen Eigenschwingungen.

Aus der Addition von (15) und (16) folgt  $u + v = 2\varphi_1$  oder

$$\varphi_1(t) = \frac{u + v}{2} = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_2 t$$

Nach einem Additionstheorem kann dafür geschrieben werden

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (25)$$

Für Pendel 2 gilt wegen der anderen Anfangsbedingungen und der sich daraus ergebenden Phasenverschiebung

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (26)$$

Im Falle schwacher Kopplung ist  $\omega_1 \approx \omega_2$ , also  $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$ .

Man kann  $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$  bzw.  $\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$  als zeitliche Änderung der Amplitude auffassen:

$$\omega_s = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (27)$$

ist dann die Kreisfrequenz der *Schwebung*, während

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (28)$$

die Kreisfrequenz der Schwingung ist. Aus (27) lässt sich die Periodendauer  $T_s$  der Schwebung berechnen:

$$T_s = 2 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)^{-1} \quad (29)$$

Die Schwebungsdauer ist damit doppelt so groß wie die Zeitdauer von einem Stillstand zum andern. In Bild 20 ist der zeitliche Verlauf der Schwingungen der beiden Pendel dargestellt.

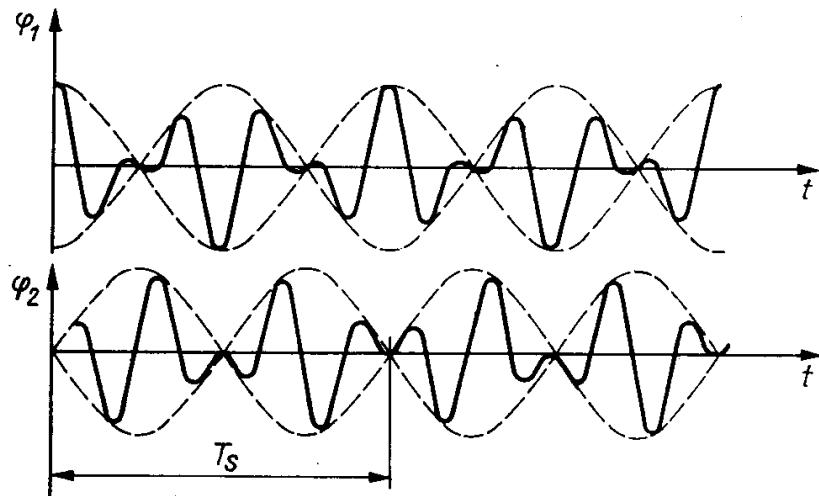


Bild 20

Als *Kopplungsgrad*  $\kappa$  wird definiert

$$\kappa = \frac{C}{C + D} \quad (30)$$

Aus (19) folgt  $D = J\omega_1^2$ , aus (21)  $C = \frac{1}{2} (J\omega_2^2 - D)$ . Damit wird (rechnen Sie nach!) mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\kappa = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad (31)$$

## V Versuchsdurchführung

Zunächst werden die in Bild 16 eingetragenen Werte ermittelt:  $l_1, l_2, r, m_1, m_2$ . Der Schwerpunktabstand  $s$  wird aus  $l_1, l_2, m_1$  und  $m_2$  berechnet, das Trägheitsmoment aus (1), (2) und (3). Die Federkonstante der Koppelfeder ist entweder gegeben oder muß nach einem der in Versuch 5 beschriebenen Verfahren bestimmt werden. Aus mindestens 20 Schwingungen kleiner Amplitude wird die Periodendauer  $T_1$  gemessen. Der Schwerpunktabstand ist daraus nach (4) zu berechnen und mit dem oben bestimmten Wert zu vergleichen. Dann wird die Koppelfeder eingehängt. Man überzeugt sich, daß bei gleichsinnigen Eigenschwingungen die gleiche Periodendauer auftritt wie bei der Schwingung des einzelnen Pendels. Dann werden die Pendel zu gegensinnigen Eigenschwingungen angeregt; aus mindestens 20 Schwingungen wird die Periodendauer  $T_2$  bestimmt. Schließlich sind die Pendel zu Schwebungen anzuregen und die Schwebungsdauer zu messen.

## A Aufgaben

1. Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden Stangenpendel, den Schwerpunkt- abstand und die Konstanten  $D$  und  $C$ !
2. Messen Sie die Periodendauer des ungekoppelten Pendels!
3. Messen Sie die Periodendauer der gekoppelten Pendel bei gegensinnigen Eigen- schwingungen!
4. Messen Sie die Schwebungsdauer!
5. Berechnen Sie die Periodendauer-Werte  $T_1$  und  $T_2$  nach (20) und (22), vergleichen Sie mit den Meßwerten und diskutieren Sie Abweichungen!
6. Berechnen Sie die Schwebungsdauer nach (29) und vergleichen Sie mit dem Meß- wert!
7. Berechnen Sie den Kopplungsfaktor aus (30) und (31) und vergleichen Sie diese Werte!
8. Fehlerabschätzung zum Kopplungsfaktor

*Versuchsgeräte:* Stativ, 2 Stangenpendel, Koppelfeder, Maßstab, Waage, Stoppuhr

## 8. Gedämpfte Pendelschwingungen

## G Grundlagen

Für die ungedämpfte Schwingung des physischen Pendels gilt bei kleinen Amplituden ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) die Differentialgleichung

$$J\ddot{\varphi} + k'\varphi = 0$$

( $J$  Trägheitsmoment,  $k'$  Winkelrichtgröße)

Für die gedämpfte Schwingung muß diese Gleichung um das rücktreibende Moment erweitert werden, das durch die Reibung verursacht wird. Dieses Moment ist der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  proportional. Damit lautet die Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + k'\varphi = 0$$

$\beta$  ist die Dämpfungskonstante oder der Dämpfungskoeffizient. Division durch  $J$  ergibt

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{J}\dot{\varphi} + \frac{k'}{J}\varphi = 0 \quad (1)$$

Wir setzen  $\frac{\beta}{J} = 2\delta$  ( $\delta$  Abklingkonstante) und  $\frac{k'}{J} = \omega_0^2$  ( $\omega_0$  ist die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung [Versuch 7]). Damit wird

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (2)$$

Das ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die durch den Ansatz

$$\varphi = C e^{\lambda t} \quad (3)$$

gelöst wird:

Aus (3) folgt

$$\dot{\varphi} = \lambda C e^{\lambda t}$$

und

$$\ddot{\varphi} = \lambda^2 C e^{\lambda t} \quad (4)$$

(3) und (4) in (2):

$$\lambda^2 C e^{\lambda t} + 2\delta\lambda C e^{\lambda t} + \omega_0^2 C e^{\lambda t} = 0$$

Division durch  $C e^{\lambda t}$  liefert die (quadratische) *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (5)$$

Für die Lösung der charakteristischen Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

1.  $\delta < \omega_0$ : Schwingfall
2.  $\delta > \omega_0$ : Kriechfall
3.  $\delta = \omega_0$ : aperiodischer Grenzfall

## 1. Der Schwingfall

Für  $\delta < \omega_0$  wird die Lösung der charakteristischen Gleichung komplex. Führt man die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (6)$$

ein, so folgt

$$\lambda = -\delta \pm j\omega^2$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

also

$$\varphi = e^{-\delta t} (C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})$$

Mit der EULERSchen Gleichung  $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$  ergibt sich

$$\varphi = e^{-\delta t} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + j(C_1 - C_2) \sin \omega t]$$

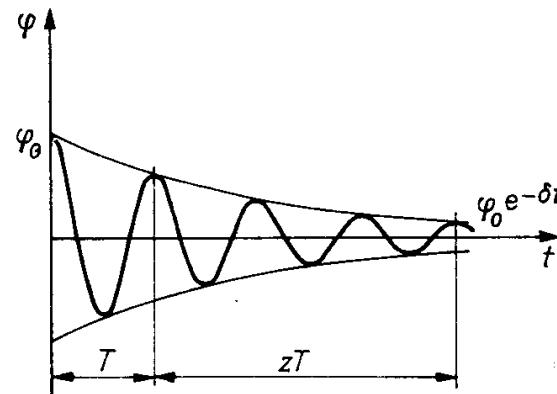


Bild 21

Mit den neuen Konstanten  $A = C_1 + C_2$  und  $B = j(C_1 - C_2)$  folgt schließlich

$$\varphi = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (7)$$

$A$  und  $B$  lassen sich aus den Anfangsbedingungen ( $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  für  $t = 0$ ) berechnen. Ist z. B. zu Beginn das Pendel maximal ausgelenkt, dann gilt

$$t = 0: \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Durch Einsetzen findet man  $A = \varphi_0$  und  $B = \frac{\delta}{\omega} \varphi_0$ . (7) lautet dann

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (8)$$

Diese Gleichung ist eine Lösung der Differentialgleichung (2).  $e^{-\delta t}$  beschreibt die exponentielle Abnahme der Amplituden (Bild 21).

Zur Bestimmung von  $\delta$  betrachten wir zwei Umkehrpunkte auf derselben Seite, zwischen denen das Pendel  $z$  Vollschwingungen ausführt. Es ergibt sich aus (8)

$$\varphi_t = \varphi_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (9a)$$

$$\varphi_{t+zT} = \varphi_0 e^{-\delta(t+zT)} \left[ \cos \omega(t+zT) + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega(t+zT) \right] \quad (9b)$$

Der Ausschlag geht während dieser Zeit  $zT$  auf den  $n$ -ten Teil zurück. Es gilt also

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_{t+zT}} = n \quad (10)$$

Dividiert man andererseits die linken und rechten Seiten von (9a) und (9b) durcheinander, so erhält man

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_{t+zT}} = e^{\delta zT} \quad (11)$$

Vergleich von (10) und (11) liefert

$$e^{\delta zT} = n$$

oder

$$\delta zT = \ln n$$

$$\delta = \frac{\ln n}{zT} \quad (12)$$

Als *logarithmisches Dekrement  $\Lambda$*  definiert man

$$\Lambda = \delta T \quad (13)$$

Aus (6) lässt sich die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der zugehörigen ungedämpften Schwingung berechnen:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$$

Mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und (12) ergibt sich

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{\ln n}{zT}\right)^2} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln n}{2\pi z}\right)^2} \quad (14)$$

Für die Periodendauer  $T_0$  der ungedämpften Schwingung ( $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ) folgt daraus

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln n}{2\pi z}\right)^2}} \quad (15)$$

## 2. Der Kriechfall

Für  $\delta > \omega_0$  ist die Lösung der charakteristischen Gleichung reell. Mit der Abkürzung  $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  kommt man auf ähnlichem Wege zu der Lösung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} \left( \cosh \gamma t + \frac{\delta}{\gamma} \sinh \gamma t \right) \quad (16)$$

Bei großer Dämpfung kriecht das Pendel auf die Ruhelage zu; es führt eine aperiodische Bewegung aus.

## 3. Der Grenzfall

Man kann vom Schwingfall ausgehen. Für  $\delta = \omega_0$  ist nach (6)  $\omega = 0$ . Mit

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$$

ergibt sich aus (8)

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t) \quad (17)$$

Diese Gleichung beschreibt ebenfalls eine aperiodische Bewegung; das Pendel kehrt in kürzester Zeit in die Ruhelage zurück, ohne aber diese zu überschreiten.

## V Versuchsdurchführung

Wir verwenden ein Stangenpendel, an das Platten verschiedener Größe angeklemmt werden können, um verschiedene Dämpfungen zu erzielen. Große Dämpfungen werden erreicht, wenn man die Platten in Flüssigkeit eintauchen lässt. An einer Skale können die Amplituden abgelesen werden (Bild 22). Zunächst wird das Stangenpendel ohne Platte verwendet. Es wird die Periodendauer der gedämpften Schwingung ge-

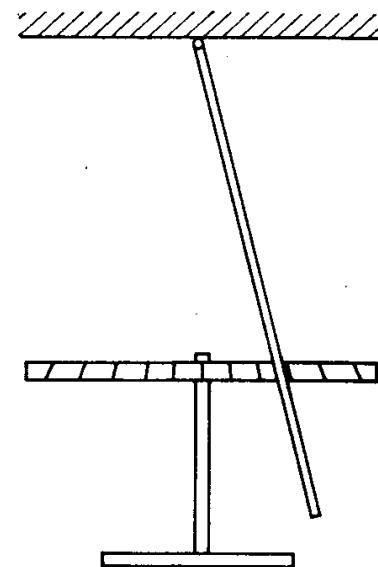


Bild 22

messen. Dann stellt man fest, auf welchen Bruchteil  $\frac{1}{n}$  die Amplitude nach  $z$  Schwingungen abfällt. Dabei soll  $z$  so groß wie möglich gewählt werden.  
An das Stangenpendel werden dann nacheinander die verschiedenen Platten angeklemmt und die genannten Größen bestimmt.

## A Aufgaben

1. Weisen Sie nach, daß die Gleichungen (8), (16) und (17) die Differentialgleichung (2) erfüllen!
2. Der Schwingfall ist bei drei verschiedenen Dämpfungen zu untersuchen.
  - 2.1. Berechnen Sie Abklingkonstante und logarithmisches Dekrement!
  - 2.2. Berechnen Sie Kreisfrequenz und Periodendauer der zugehörigen ungedämpften Schwingung!
3. Für den Kriechfall ist bei verschiedenen Dämpfungen der Ausschlag des Pendels in Abhängigkeit von der Zeit aufzunehmen und grafisch darzustellen.
4. Es ist der Grenzfall zu suchen und wie in Aufgabe 3 das  $\varphi, t$ -Diagramm aufzunehmen.

*Versuchsgeräte:* Stativ mit Pendel und verschiedenen Platten, Schalen mit Flüssigkeiten verschiedener Viskosität, Maßstab, Stoppuhr

## 9. Oberflächenspannung von Flüssigkeiten

### G Grundlagen

Die Oberfläche einer Flüssigkeit wirkt wie eine gespannte dünne Haut, denn es ist eine Kraft erforderlich, um die Oberfläche einer Flüssigkeit zu deformieren oder zu durchstoßen. Die Spannung der Flüssigkeitsoberfläche hat ihre Ursache in den

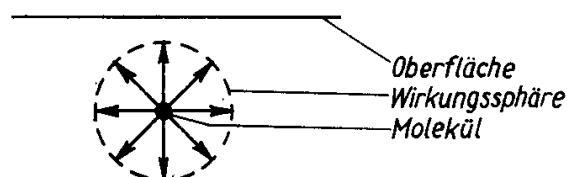


Bild 23

Kräften, die zwischen den Flüssigkeitsmolekülen wirken. Diese Kräfte werden als Kohäsionskräfte bezeichnet. Sie haben einen Wirkungsbereich, der auch Wirkungssphäre genannt wird.

Befindet sich ein Flüssigkeitsmolekül im Inneren der Flüssigkeit (Bild 23), so heben

sich diese Kräfte auf, da allseitig gleich große Gegenkräfte, die von den Molekülen in der Umgebung herrühren, wirksam werden. Befindet sich jedoch ein Molekül in der Oberfläche oder in einem Abstand darunter, der kleiner ist als die Wirkungssphäre, so resultiert eine in das Innere der Flüssigkeit gerichtete Kraft (Bild 24); denn die in der Oberfläche befindlichen Moleküle sind nur zum Teil von anderen

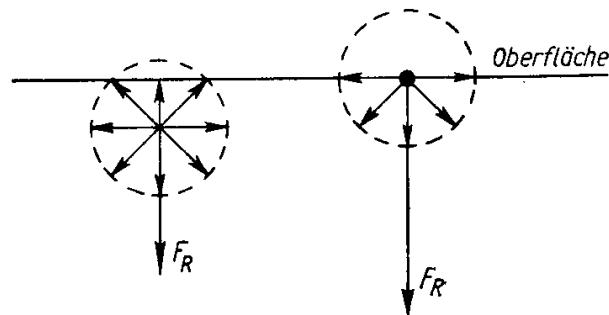


Bild 24

Molekülen umgeben. Da die Flüssigkeitsmoleküle relativ leicht verschiebbar sind, werden die Moleküle der nach innen gerichteten Kraft so lange nachgeben, bis die Oberfläche den kleinstmöglichen Wert annimmt.

Sollen Moleküle aus dem Inneren der Flüssigkeit in die Oberfläche gebracht werden, d. h., soll die Oberfläche der Flüssigkeit vergrößert werden, so ist eine Arbeit zu verrichten. Dieser Arbeitsaufwand ist spezifisch für jede Flüssigkeit und kann zur Bestimmung der *Oberflächenspannung* der Flüssigkeit benutzt werden.

Legt man auf die Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit einen völlig benetzten, sehr dünnen Draht der Länge  $l$ , so bildet sich um den Draht eine Flüssigkeitshaut (Bild 25). Hebt man den Draht um die Strecke  $\Delta s$  hoch, so haftet die Flüssigkeit an

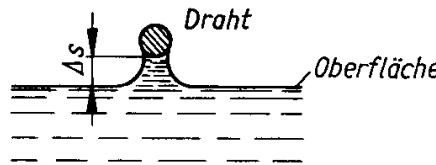


Bild 25

dem Draht, und die Oberfläche der Flüssigkeit wird um den Betrag  $\Delta A = 2l\Delta s$  vergrößert. Um diese Oberflächenvergrößerung durchzuführen, ist eine Arbeit  $\Delta W$  erforderlich:

$$\Delta W = \sigma \Delta A$$

$$\Delta W = \sigma 2l\Delta s$$

Die zur Oberflächenvergrößerung erforderliche Arbeit hängt außer von der Oberflächenvergrößerung noch von einer für die Flüssigkeit charakteristischen Größe ab. Diese Größe nennt man die *Oberflächenspannung* (auch spezifische Oberflächenenergie oder Grenzflächenenergie). Sie hat die Dimension Arbeit/Fläche oder Kraft/Länge. Ihre Einheit ist  $[\sigma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Die Arbeit  $\Delta W$  ist genausogroß wie die

mechanische Arbeit, die erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht zu heben. Diese beträgt

$$\Delta W = F \Delta s$$

Durch Gleichsetzen erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{F}{2l} \quad (1)$$

## V Versuchsdurchführung

Zur Messung der Oberflächenspannung wird ein in einem Bügel ausgespannter dünner Draht der Länge  $l$ , der an einer Waage hängt, dicht unter die Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit getaucht. Der Drahtbügel ist vorher einige Minuten in Alkohol zu tauchen und anschließend durch Schwenken zu trocknen, so daß er in kurzer Zeit von der Flüssigkeit benetzt wird. Nach dem Eintauchen des Drahtes wird die Waage in den Gleichgewichtszustand gebracht. Vor dem Versuchsbeginn ist die Ruhestellung der Waage zu bestimmen. Durch weiteres Auflegen von Wägestücken bildet sich eine Flüssigkeitslamelle aus, die am Draht haftet und mit zunehmender Belastung länger wird. Bei einer bestimmten Belastung reißt die Lamelle ab. Durch mehrfache Wiederholung ist diese Kraft  $F$  möglichst genau zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß die Größe der Kraft  $F$  abhängig ist vom Auftrieb, den der in die Flüssigkeit eintauchende Teil des Drahtbügels erfährt.

## A Aufgaben

1. Die Ruhestellung der Waage ist zu bestimmen. Wird eine Torsionswaage benutzt, so ist diese nach besonderer Vorschrift zu eichen.
2. Durch mehrmalige Versuchsdurchführung ist ein Mittelwert von  $F$  zu bilden.
3. Berechnen Sie den relativen Fehler, der entsteht, wenn der Auftrieb des eintauchenden Teiles des Drahtbügels nicht berücksichtigt wird!
4. Nach (1) ist die Oberflächenspannung zu berechnen.
5. Vergleichen Sie mit den in Tabellen angeführten Werten und erläutern Sie auftretende Abweichungen!

*Versuchsgeräte:* Waage, Wägestücke, PETRI-Schale, Meßlehre, Drahtbügel

## **10. Bestimmung der Dichte von festen Körpern aus dem Auftrieb in Flüssigkeiten**

### **G Grundlagen**

Um die als Quotient aus *Masse* und *Volumen* definierte *Dichte* eines Körpers zu bestimmen, muß man die Größen Masse und Volumen ermitteln können.

Die Masse läßt sich mit den üblichen Waagen bis auf 10 mg genau messen. Zum Feststellen des Volumens können verschiedene Verfahren angewandt werden. Hier soll beschrieben werden, wie das Volumen mit Hilfe des Auftriebes, den der Körper in einer Flüssigkeit erfährt, gefunden wird.

Das *Prinzip von ARCHIMEDES* besagt:

Auf einen in eine Flüssigkeit getauchten Körper wirkt eine Auftriebskraft, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

Das bedeutet, daß der zum Erdmittelpunkt gerichteten Schwerkraft, die zwischen der Masse des Körpers und der Masse der Erde wirksam ist, eine Kraft entgegenwirkt, die als Auftriebskraft  $F_A$  bezeichnet wird. Sie ist eine Folge des Druckunterschiedes zwischen Ober- und Unterseite des in die Flüssigkeit getauchten Körpers:

$$F_A = V_{\text{Fl}} \varrho_{\text{Fl}} g \quad (1)$$

In Gleichung (1) ist  $V_{\text{Fl}}$  das Volumen,  $\varrho_{\text{Fl}}$  die Dichte der verdrängten Flüssigkeit und  $g$  die Fallbeschleunigung.

Da das Volumen des eingetauchten Körpers gleich dem Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist, gilt nach (1)

$$V = \frac{F_A}{\varrho_{\text{Fl}} g}$$

Wegen  $V = \frac{m}{\varrho}$  ist auch

$$\frac{m}{\varrho} = \frac{F_A}{\varrho_{\text{Fl}} g};$$

somit kann die gesuchte *Dichte* nach der Gleichung

$$\varrho = \frac{mg}{F_A} \varrho_{\text{Fl}} \quad (2)$$

berechnet werden. Das Produkt  $mg$  ist das Gewicht des Körpers in Luft ( $G_L$ ). Die Auftriebskraft  $F_A$  wird aus der Differenz der Gewichte in Luft und in der Flüssigkeit bestimmt:

$$\varrho = \frac{G_L}{G_L - G_{F1}} \varrho_{F1} \quad (3)$$

Somit wird die Volumenbestimmung eines Körpers auf zwei Gewichtsbestimmungen bzw. Wägungen zurückgeführt. Da die Meßfehler beim Wägen gewöhnlich sehr klein sind, handelt es sich hier um ein recht genaues Verfahren.

## V Versuchsdurchführung

1. Mit Hilfe einer *hydrostatischen Waage* (Bild 26) wird das Gewicht des Probekörpers in Luft bestimmt. Darauf wird er in Wasser eingetaucht und die Gewichtsverminderung, d. h. der Auftrieb, festgestellt.

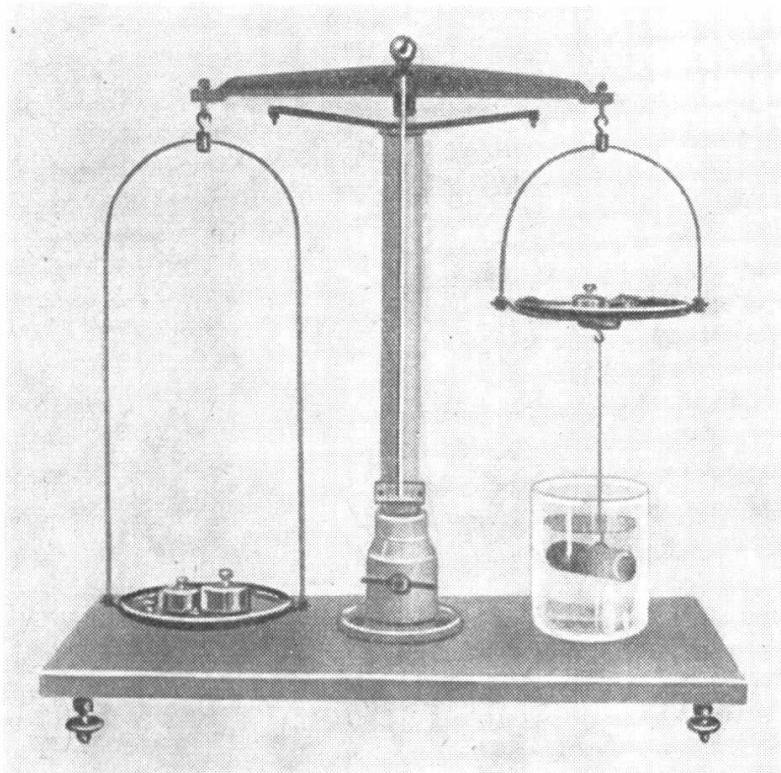


Bild 26

2. Steht keine hydrostatische Waage zur Verfügung, so kann auch eine normale *Feinwaage* (Bild 27) verwendet werden. Der Probekörper wird auf eine Waagschale gelegt und sein Gewicht in Luft festgestellt. Nunmehr wird auf eine Waagschale ein Becherglas mit Wasser gestellt und die Waage ins Gleichgewicht gebracht. Das

Gewicht des gefüllten Becherglases braucht nicht bestimmt zu werden, das Austarieren kann mit Schrotkugeln erfolgen. Der inzwischen an einem dünnen Faden an einem Stativ befestigte Körper wird in das Wasser getaucht. Dabei senkt sich die Waagschale mit dem Becherglas. Nachdem die Waage wieder austariert wurde, kann aus der scheinbaren Gewichtszunahme des gefüllten Becherglases die Auftriebskraft bestimmt werden.

Bei beiden Methoden ist sorgfältig darauf zu achten, daß beim Eintauchen der Probekörper keine Luftbläschen an ihnen haften.

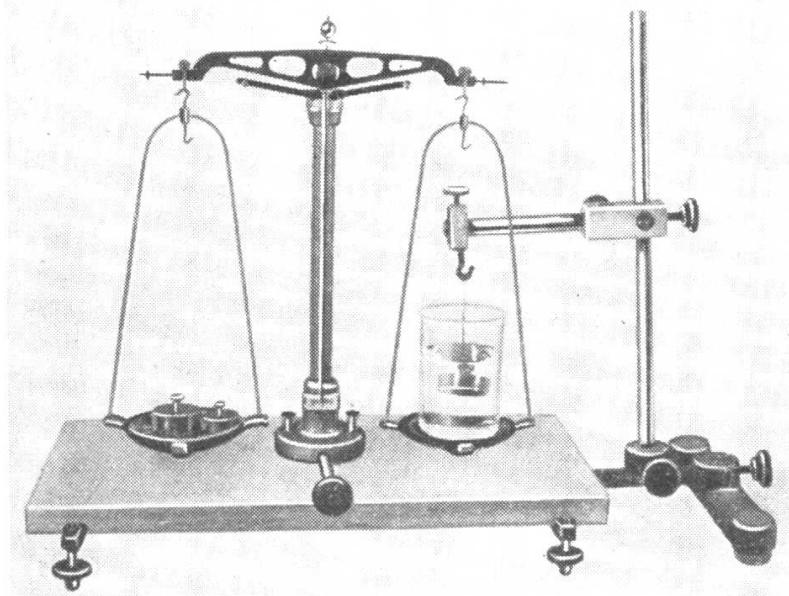


Bild 27

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie nach Verfahren 1 oder 2 die Dichte verschiedener Probekörper!
2. Entscheiden Sie, ob für die Dichte des Wassers  $1,000 \text{ g cm}^{-3}$  eingesetzt werden kann! Prüfen Sie auch, ob die Vernachlässigung des Auftriebes in Luft zulässig ist!
3. Weshalb sinkt bei Verfahren 2 die Waagschale mit dem gefüllten Becherglas, wenn der Probekörper eingetaucht wird?
4. Erläutern Sie, wieso mit Hilfe der vorgeschlagenen Balkenwaagen die Gewichte  $G_L$  und  $G_{F1}$  der Probekörper gefunden werden können, obwohl mit diesen Waagen im Grunde nur ein Massenvergleich erfolgt!

*Versuchsgeräte:* Hydrostatische Waage oder Feinwaage, Becherglas, Stativmaterial, verschiedene Probekörper

## 11. Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten mit der Mohr-Westphalschen Waage

### G Grundlagen

Das Prinzip der MOHR-WESTPHALSchen Waage besteht darin, daß der *Auftrieb*, den ein Meßkörper in einer zu untersuchenden Flüssigkeit erfährt, verglichen wird mit dem Auftrieb im Wasser.

Die MOHR-WESTPHALSche Waage (Bild 28) besteht aus einem Stativkörper mit einem Waagebalken, der auf einer Schneide ruht. Während die eine Seite des Balkens durch Kerben in 10 gleiche Teile geteilt ist und am Ende einen Haken trägt, an dem ein Meßkörper aus Glas mit einem eingebauten Thermometer hängt, läuft die andere

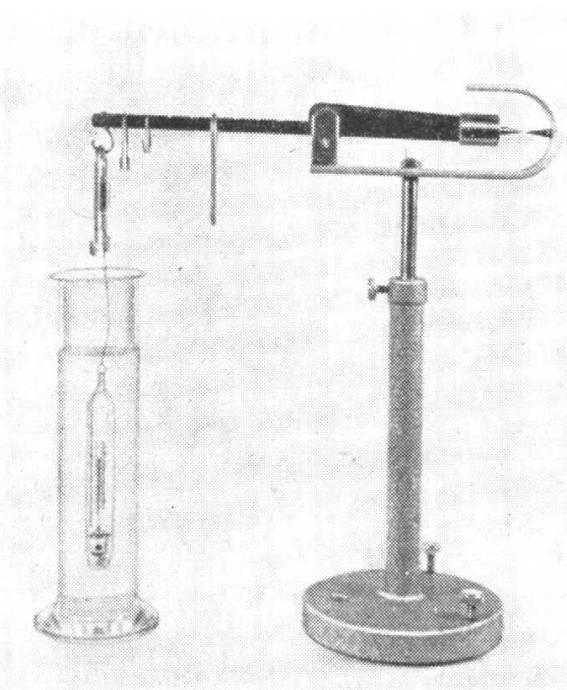


Bild 28

Seite des Waagebalkens in einen spitzen Dorn aus. Dieser Teil des Waagebalkens stellt das Gleichgewicht her, wenn der Meßkörper von Luft umgeben ist. Die Dornspitze und die am Stativ angebrachte Spitze stehen sich dann gegenüber.

Zur Waage gehören noch Reiter, deren Massen sich wie  $1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100}$  verhalten. Sie werden im folgenden Text als Reiter 1, Zehntelreiter und Hundertstelreiter bezeichnet. Reiter 1 ist doppelt vorhanden. Das Gewicht von Reiter 1 ist so gewählt, daß es am oben erwähnten Haken hängend ungefähr Gleichgewicht hervorruft, wenn der Meßkörper in eine Flüssigkeit mit der Dichte  $1,000 \text{ g cm}^{-3}$  getaucht wird.

Angenommen, die Dornspitzen stehen sich gegenüber, wenn der Meßkörper in eine Flüssigkeit mit der Dichte von  $1,000 \text{ g cm}^{-3}$  eintaucht und ein Reiter 1 am Haken (im folgenden mit Kerbe 10 bezeichnet) hängt. Die Auftriebskraft ist in diesem Fall

gleich dem Gewicht von Reiter 1. Die Auftriebskraft erzeugt dasselbe Drehmoment wie der Reiter 1. Gleichgewicht würde an dem Hebel auch herrschen, wenn zwei Reiter 1 auf Kerbe 5 hingen. Ist die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit nun z. B. 1,547 mal so groß wie die der Vergleichsflüssigkeit, so erfährt der Meßkörper auch einen um den Faktor 1,547 größeren Auftrieb.

Im angenommenen Fall muß mit Hilfe der Reiter das Gegendrehmoment auf den 1,547fachen Wert gebracht werden, um wieder Gleichgewicht herzustellen. Das ist der Fall, wenn ein Reiter 1 auf Kerbe 10, ein Reiter 1 auf Kerbe 5, der Zehntelreiter auf Kerbe 4 und der Hundertstelreiter auf Kerbe 7 hängt.

Wenn die Dichte der Vergleichsflüssigkeit  $1,000 \text{ g cm}^{-3}$  betrug und die Dornspitzen sich nach dem Eintauchen des Meßkörpers in die zu untersuchende Flüssigkeit gegenüberstehen, wenn ein Reiter 1 auf Kerbe 8, der Zehntelreiter auf Kerbe 1 und der Hundertstelreiter auf Kerbe 5 hängt, so ist das durch den Auftrieb verursachte Drehmoment nur das 0,815fache des Auftriebes in der Vergleichsflüssigkeit. Das bedeutet aber, daß die gesuchte Dichte  $0,815 \text{ g cm}^{-3}$  beträgt.

Nun ist aber die Dichte z. B. von Wasser bei Zimmertemperatur nicht  $1,000 \text{ g cm}^{-3}$ , wie bisher angenommen wurde. Außerdem erfährt der Aufhängedraht des Meßkörpers einen Auftrieb, der von der Eintauchtiefe abhängig ist.

Wir nehmen an, daß als Vergleichsflüssigkeit Wasser mit einer Temperatur von  $18^\circ\text{C}$  verwendet wird und die Waage einspielt, wenn ein Reiter 1 und der Zehntelreiter auf Kerbe 9 und der Hundertstelreiter auf Kerbe 7 sitzen. Die Dichte  $\varrho_w$  von Wasser hat bei  $18^\circ\text{C}$  den Wert  $0,9986 \text{ g cm}^{-3}$ . Das bedeutet nun, daß 0,997 Reitergewicht einer Dichte von  $0,9986 \text{ g cm}^{-3}$  entsprechen.

Reiter 1 wird mit 1,0, der Zehntelreiter mit 0,1 und der Hundertstelreiter mit 0,01 bewertet, wenn sie auf Kerbe 10 (Haken) hängen.

Stehen sich die Dornspitzen gegenüber, wenn die zu untersuchende Flüssigkeit mit der Dichte  $\varrho_{F1}$  einen Auftrieb verursacht, der durch  $a_{F1}$  Reitergewichte ausgeglichen wird, während der Auftrieb im Wasser durch  $a_w$  Reitergewichte kompensiert wurde, so ist die gesuchte Dichte

$$\varrho_{F1} = \frac{\varrho_w a_{F1}}{a_w} \quad (1)$$

Die hohe Genauigkeit des Verfahrens ausnützend, verwendet man die MOHR-WESTPHALSche Waage auch zur Bestimmung der *Dichte fester Körper* ( $\varrho = 0,9 \dots 2,5 \text{ g cm}^{-3}$ ). Es wird davon ausgegangen, daß ein fester Körper in einer Flüssigkeit schwebt. Der Auftrieb und das Gewicht des Körpers sind an jeder Stelle der Flüssigkeit gleich groß, wenn die Dichte des Körpers und der Flüssigkeit übereinstimmen. Gelingt es nun, diesen Schwebezustand zu erreichen, dann kann mit der MOHRSchen Waage die Dichte des festen Körpers bestimmt werden.

## V Versuchsdurchführung

Nachdem die Waage so eingestellt wurde, daß sich die Dornspitzen gegenüberstehen, wird der Meßkörper in Wasser getaucht, dessen Temperatur gemessen wird. Die Eintauchtiefe ist zu beachten und bei den folgenden Messungen einzuhalten. Mit

Hilfe der Reiter wird der Auftrieb kompensiert und die Reiterstellung notiert. Nachdem der Glaskörper von anhaftendem Wasser befreit wurde, wird er in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Aus der nunmehr zum Ausgleich des Auftriebes erforderlichen Reiterstellung, der für das Wasser zutreffenden Stellung und dem aus, der Tabelle entnommenen Wert für die Dichte des Wassers wird die Dichte der Flüssigkeit errechnet.

## A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Dichte von drei verschiedenen Flüssigkeiten!
2. Bestimmen Sie die Dichte eines festen Körpers nach der Schwebemethode!
3. Wie weit taucht ein schwimmender Körper in eine Flüssigkeit ein?

**Versuchsgeräte:** MOHR-WESTPHALSCHE Waage, verschiedene Flüssigkeiten (z. B. Toluol, Benzol, Tetrachlormethan, Petroleum, Xylol, Salzwasser), Körper aus Hartgummi oder Dederon, Thermometer

## 12. Viskosität von Flüssigkeiten

### G Grundlagen

Bewegt man einen Körper durch eine Flüssigkeit, so muß man eine Kraft aufwenden. Bei kleinen Geschwindigkeiten herrscht *laminare Strömung*: Dem Körper haftet eine Flüssigkeitsschicht an, die sich gegenüber der nächsten Schicht verschiebt. Die dazu erforderliche Kraft ist proportional dem Geschwindigkeitsgefälle  $dv/ds$  und der Berührungsfläche  $A$ . Der Proportionalitätsfaktor  $\eta$  ist ein Materialwert und heißt *dynamische Viskosität*:

$$F = \eta A \frac{dv}{ds} \quad (1)$$

Die dynamische Viskosität ist stark temperaturabhängig.

Die kohärente Einheit der dynamischen Viskosität ergibt sich aus (1) zu

$$[\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pa s}$$

Gebräuchlich war früher die Einheit Poise:  $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa s}$  bzw.  $1 \text{ cP} = \text{mPa s}$ . Der Quotient aus der dynamischen Viskosität  $\eta$  und der Dichte  $\varrho$  der Flüssigkeit heißt *kinematische Viskosität*:

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho} \quad (2)$$

Aus (2) folgt die SI-Einheit der kinematischen Viskosität:

$$[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Als SI-fremde Einheit wurde früher das Stokes verwendet:  $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  und  $1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Um die dynamische Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen, lässt man Kugeln in dieser Flüssigkeit sinken. Für die laminare Umströmung einer Kugel gilt das **STOKES**-sche Gesetz:

$$F_R = 6\pi\eta rv \quad (3)$$

Auf die Kugel, die in der Flüssigkeit sinkt, wirken drei Kräfte: die Gewichtskraft  $G$  nach unten, die Auftriebskraft  $F_A$  und die Reibungskraft  $F_R$  nach oben. Die Kugel führt zunächst eine beschleunigte Bewegung aus, dann fällt sie mit konstanter Geschwindigkeit; zwischen den drei Kräften muß also dann Gleichgewicht bestehen:

$$G = F_A + F_R \quad (4)$$

Dabei ist

$$G = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_K g, \quad (5)$$

$$F_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho g \quad (6)$$

Setzt man (3), (5) und (6) in (4) ein und löst nach  $\eta$  auf, so erhält man

$$\eta = \frac{2r^2g(\varrho_K - \varrho)}{9v}$$

Bei gleichförmiger Bewegung ist die Geschwindigkeit  $v$  der Quotient aus dem zurückgelegten Weg  $s$  und der Zeit  $t$ :

$$\eta = \frac{2r^2g(\varrho_K - \varrho)t}{9s} \quad (7)$$

Kennzeichnend für das Verhalten einer Strömung ist die **REYNOLDSSCHE ZAHL**

$$Re = \frac{\varrho v l}{\eta} \quad (8)$$

Hier bedeutet  $l$  eine Vergleichslänge; bei der umströmten Kugel kann  $l = 2r$  ( $r$  Kugelradius) gesetzt werden. Laminare Umströmung der Kugel liegt vor, wenn  $Re \ll 1$  ist. Oberhalb einer *kritischen* REYNOLDSSchen Zahl wird die Strömung turbulent, d. h., es bilden sich Wirbel.

## V

## Versuchsdurchführung

Mit der Meßschraube werden zunächst die Durchmesser der verschiedenen Kugeln gemessen. Die Kugeldichten  $\rho_K$  lassen sich aus den Massen und den Volumina der Kugeln berechnen. Mit der MOHR-WESTPHALSchen Waage (Versuch 11) kann die Dichte der Versuchsflüssigkeit gemessen werden.

Ein hoher Standzylinder, dessen Radius groß gegen den Kugelradius ist, enthält die Versuchsflüssigkeit. Am Zylinder sind zwei Marken angebracht, die voneinander den Abstand  $s$  haben (Bild 29). Die obere Marke muß so weit von der Flüssigkeitsober-

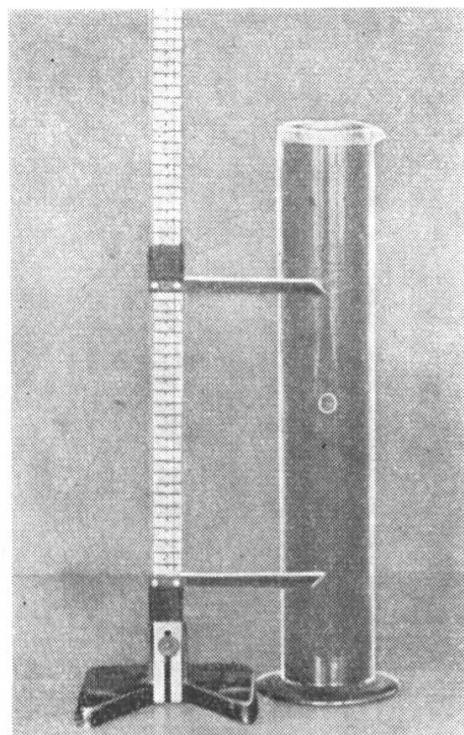


Bild 29

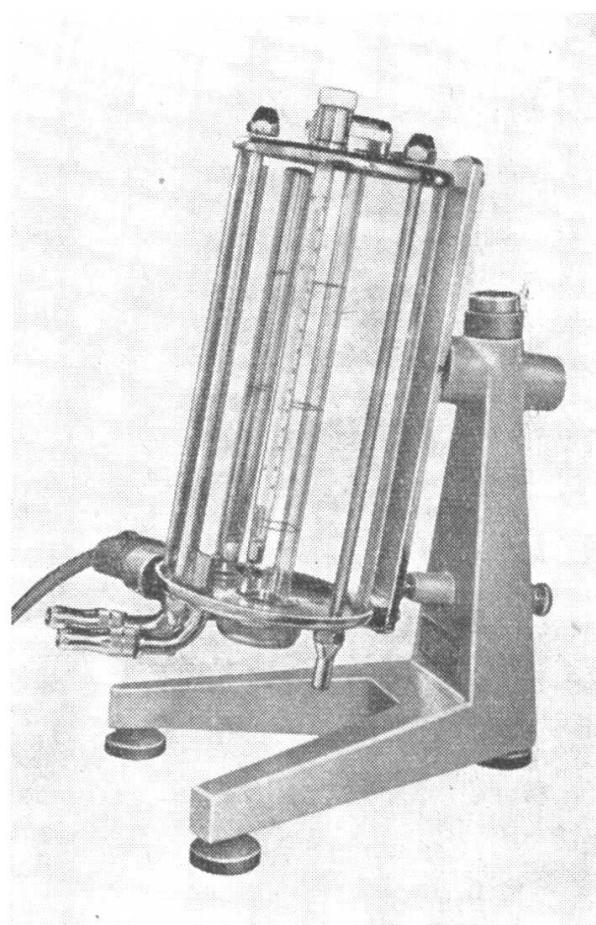


Bild 30

fläche entfernt sein, daß sich die Kugel an dieser Stelle bereits in gleichförmiger Bewegung befindet. Es wird die Zeit  $t$  gemessen, in der die Kugel von einer Marke zur andern gelangt.

Technisch wird die dynamische Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen mit dem HÖPPLER-Viskosimeter bestimmt. Hier befindet sich die Versuchsflüssigkeit in einem Rohr, das etwa  $5^\circ$  gegen die Vertikale geneigt ist (Bild 30). In dem Rohr fällt eine Kugel, deren Durchmesser nur wenig kleiner als der Rohrdurchmesser ist. Das

STOKESSche Reibungsgesetz lässt sich auf die Bewegung der Kugel nicht anwenden, sondern es gilt die Beziehung

$$\eta = K(\varrho_K - \varrho)t \quad (9)$$

Darin ist  $K$  der „Kugelfaktor“, der der Bedienungsanleitung des Gerätes zu entnehmen ist.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die dynamische Viskosität der Versuchsflüssigkeit! Messen Sie dazu für jede Kugel zehnmal die Fallzeit!
2. Fehlerabschätzung für  $\eta$
3. Berechnen Sie die kinematische Viskosität der Versuchsflüssigkeit!
4. Berechnen Sie für die Bewegung aller Kugeln die REYNOLDSSche Zahl! Ist in allen Fällen die Voraussetzung laminarer Umströmung der Kugel erfüllt?
5. Skizzieren Sie das  $v,t$ -Diagramm für die Bewegung der Kugel und erläutern Sie diese Bewegung!

**Versuchsgeräte:** Standzylinder mit Versuchsflüssigkeit, Kugeln mit verschiedenem Durchmesser und verschiedener Dichte, MOHR-WESTPHALSche Waage, Meßschraube, Waage, Vertikalmaßstab, Stoppuhr, Thermometer, Phosphorlöffel, HÖPPLER-Viskosimeter

## 13. Strömungsgeschwindigkeit und Widerstandszahl

## G Grundlagen

Strömt Luft mit einer Geschwindigkeit, die *klein* gegenüber der *Schallgeschwindigkeit* ist, so kann man die Luft als *inkompressibel* bezeichnen. Das ist für Strömungsgeschwindigkeiten bis etwa  $70 \text{ m s}^{-1}$  der Fall. Wird weiterhin die *innere Reibung* vernachlässigt, so spricht man von einer *idealen Strömung*.

Betrachtet man in dieser strömenden Luft einen Ausschnitt, der als *Stromröhre* bezeichnet werden soll (Bild 31), so ist Arbeit zu verrichten, wenn die Luft von Niveau 1 nach dem Niveau 2 strömen soll. Strömt die Luft mit der Geschwindigkeit  $v_1$  durch den Querschnitt  $A_1$ , so hat die Luft vom Volumen  $dV$  in der Zeit  $dt$  den Weg  $v_1 dt$  zurückgelegt. Da aus der Stromröhre die Luft nur aus dem Querschnitt  $A_2$  austreten kann, gilt für das Luftvolumen  $dV = A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$ , d. h.,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als *Kontinuitätsgleichung*. Damit die Luft vom Niveau 1 nach dem Niveau 2 strömt, ist eine Arbeit zu verrichten, die die kinetische und potentielle Energie der strömenden Luft verändert:

$$dW = dW_{\text{kin}} + dW_{\text{pot}} \quad (1)$$

Die an der Luft zu verrichtende Arbeit ergibt sich aus folgender Überlegung: die Luft vom Volumen  $dV$  wird quasistatisch vom Niveau 1 nach dem Niveau 2 gebracht. Dazu ist die Arbeit  $dW$  erforderlich. Diese Arbeit wird durch eine Kraft  $F$  längs des Weges

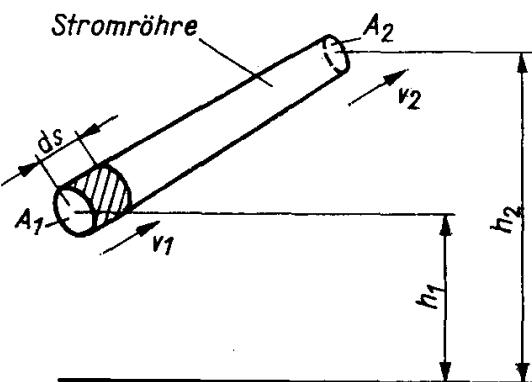


Bild 31

$ds$  ausgeführt, so daß  $dW = F ds$  gilt. Mit  $F = pA$  wird  $dW = pA ds = p dV$ . Diese Arbeit ist aufzubringen, um die kinetische Energie  $dW_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm v^2$  und die potentielle Energie  $dW_{\text{pot}} = dmgh$  zu ändern. Wendet man (1) auf die beiden Niveaus an, so wird

$$(p_2 - p_1) dV = \frac{1}{2} dm(v_1^2 - v_2^2) + dm(g(h_1 - h_2))$$

Beachtet man, daß  $dm = \rho dV$  ist, und ordnet die vorstehende Gleichung, so ist

$$p_1 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 + \rho dV g h_1 = p_2 dV + \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 + \rho dV g h_2$$

und man erhält nach Division durch  $dV$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (2)$$

Wird der Versuch so durchgeführt, daß die Luft waagerecht strömt, dann ist  $h_1 = h_2$ , und (2) erhält die Form

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (3)$$

d. h., in einer horizontal strömenden Luftmenge ist die Summe aus statischem und Staudruck konstant. (3) wird auch als **BERNOULLISche Gleichung** bezeichnet.

Bringt man die strömende Luft eine *Drucksonde* (Bild 32), so kann man den statischen Druck  $p_1$  im Inneren der mit der Geschwindigkeit  $v_1$  strömenden Luft messen. Wird in die strömende Luft ein *PITOT-Rohr* gebracht (Bild 33), so wird in diesem die strömende Luft gestaut. Die Geschwindigkeit  $v_2$  wird Null. Der statische Druck  $p_1$

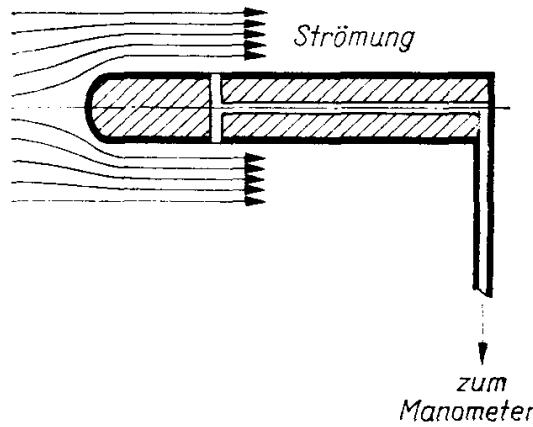


Bild 32

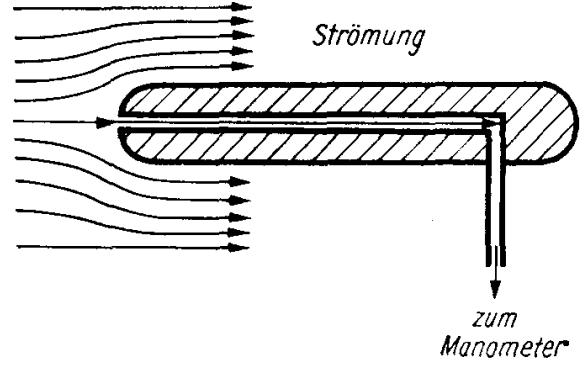


Bild 33

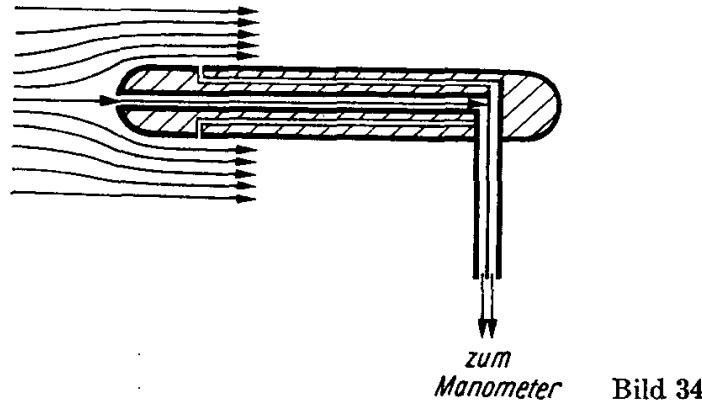


Bild 34

ist gleich dem Gesamtdruck  $p_2 = p_0$ . Kombiniert man Drucksonde und PITOT-Rohr zum *Staurohr* nach PRANDTL (Bild 34), so ist es möglich, den Staudruck als Differenz von Gesamtdruck  $p_0$  und statischem Druck  $p_1$  zu messen. Nach (3) ist

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_0$$

und daraus die Strömungsgeschwindigkeit  $v_1$  der Luft

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p_1)} \quad (4)$$

berechenbar.

Wird in die strömende Luft ein Körper gebracht, so wird die Strömung in Abhängigkeit von der Form des Körpers gestaut. Der Körper bietet der strömenden Luft einen Widerstand. Für diese Widerstandskraft  $F$  gilt

$$F = c \frac{\rho}{2} v_1^2 A \quad (5)$$

In (5) bedeuten:  $c$  Widerstandszahl,  $\rho$  Dichte der Luft,  $A$  Querschnittsfläche des Körpers,  $v_1$  Strömungsgeschwindigkeit der Luft.

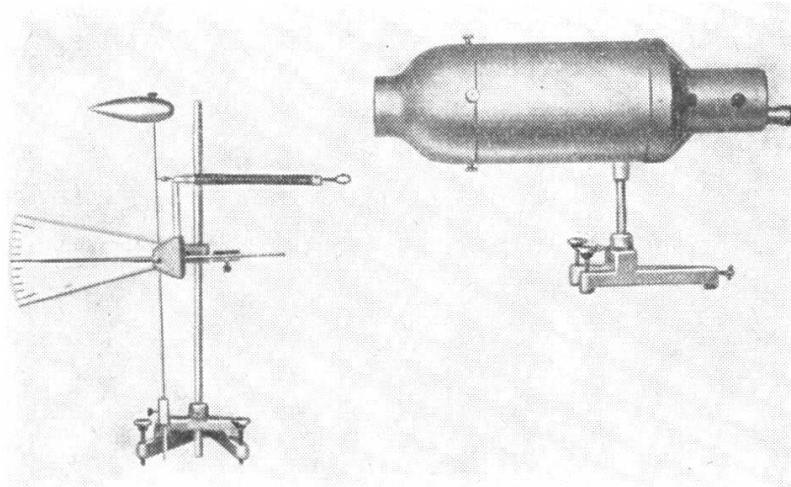


Bild 35

Die Abhängigkeit der Widerstandskraft von der Körperform ist nachweisbar, wenn Körper verschiedener Form mit gleichem Querschnitt in die mit der Geschwindigkeit  $v_1$  strömende Luft gebracht werden und mit einem *Winddruckmeßgerät* die Widerstandskraft  $F$  gemessen wird (Bild 35).

## V Versuchsdurchführung

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit der strömenden Luft wird der Luftstromerzeuger so aufgestellt, daß die strömende Luft in axialer Richtung waagerecht austreten kann. Der Motor wird über einen Einstellwiderstand an die Spannung angeschlossen. Durch Einstellung der Spannung (z. B. 0, 20, 40, 60, ... V) wird die Strömungsgeschwindigkeit erhöht. Vor die Ausströmdüse des Luftstromerzeugers wird das Staurohr angeordnet und mit dem Druckmeßgerät (Mikromanometer, Ringwaage) verbunden. Zu jeder Spannungs- (Drehfrequenz-) Stufe wird am Druckmesser die Druckdifferenz abgelesen und nach (4) die zugehörige Strömungsgeschwindigkeit errechnet.

Zur Ermittlung der Widerstandszahlen wird vor dem Luftstromerzeuger das Winddruckmeßgerät, eine Einkomponentenwaage, angebracht (Bild 35). Das Gewicht des jeweils zu untersuchenden Probekörpers ist durch eine Ausgleichsmasse vor dem Einsetzen des Luftstromes auszugleichen. Besonders zu beachten ist, daß der Hebel, an dem sich der zu untersuchende Probekörper befindet, vor dem Anblasen senkrecht steht. Die beim Anblasen des Probekörpers auftretende Widerstandskraft ist

mit der Federwaage auszugleichen und die Größe der Kraft abzulesen. Beim Ausgleichen muß der Zeiger des Winddruckmeßgerätes in die Nullage einspielen. Die Messungen sind mit den vorgegebenen Probekörpern bei jeweils zwei Geschwindigkeiten durchzuführen. Nach (5) ist die Widerstandszahl zu errechnen.

## A Aufgaben

1. Messen Sie mit dem Staurohr die Druckdifferenz im gesamten Drehfrequenzbereich des Luftstromerzeugers!
2. Stellen Sie  $v = f(p_0 - p_1)$  grafisch dar!
3. Bestimmen Sie die Widerstandszahlen der vorgelegten Probekörper bei zwei verschiedenen Geschwindigkeiten!
4. Begründen Sie eventuelle Abweichungen!
5. Beziehen Sie die gefundenen Widerstandszahlen auf den Wert, der für die Kreisscheibe ermittelt wurde!
6. Welche Bedeutung kommt der Widerstandszahl bei der Entwicklung von Fahrzeugen (z. B. PKW, Lokomotiven) zu?

**Versuchsgeräte:** Windstromerzeuger, Einstellwiderstand, Spannungsmesser, Staurohr, Druckmesser, Winddruckmeßgerät, Verbindungsschläuche, Stativmaterial

## 14. Schallgeschwindigkeit und Elastizitätsmodul

### G Grundlagen

Wird mit einer Schallquelle ein Ton erzeugt, so breitet er sich mit der Geschwindigkeit  $c = \lambda f$  aus, wobei  $f$  die Frequenz des Tones und  $\lambda$  die Wellenlänge im betreffenden Medium ist. Tritt die Schallwelle in ein anderes Medium über, so ändern sich Schallgeschwindigkeit und Wellenlänge, während die Frequenz  $f$  unverändert bleibt. Für die beiden Medien gelten die Gleichungen

$$c = \lambda f \quad \text{und} \quad c' = \lambda' f$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich

$$\frac{c}{c'} = \frac{\lambda}{\lambda'}, \tag{1}$$

d. h., in zwei verschiedenen Medien verhalten sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer Welle wie ihre Wellenlängen. Wird die Wellenlänge in beiden Medien gemessen

und ist die Schallgeschwindigkeit in dem einen bekannt, so ist die andere aus obiger Gleichung bestimbar.

Für den Versuch sei die Schallgeschwindigkeit in Luft gegeben. Sie hängt von der Temperatur ab und beträgt

$$c' = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} \quad (2)$$

mit dem Adiabatenexponenten  $\gamma$  ( $\gamma = 1,4$  für zweiatomige Gase), der Gaskonstanten  $R = 8,314 \text{ J/mol K}$  und der molaren Masse  $M$  ( $[M] = \text{kg/mol}$ ). Für Luft gilt die zugeschnittene Größengleichung

$$c'/\text{m s}^{-1} = 331,6 + 0,6 t/\text{°C} \quad (3)$$

## V Versuchsdurchführung

### 1. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Ein Stab aus dem Material, für welches die Schallgeschwindigkeit bestimmt werden soll, wird genau in der Mitte fest eingeklemmt. Durch Reiben des Stabes in der Längsrichtung mit einem mit Kolophonium bestreuten Lappen werden stehende Longitudinalwellen erzeugt, wodurch hohe Quietschläufe entstehen. Die festgeklemmte Stelle ist ein Schwingungsknoten, die beiden Stabenden sind Schwingungs-

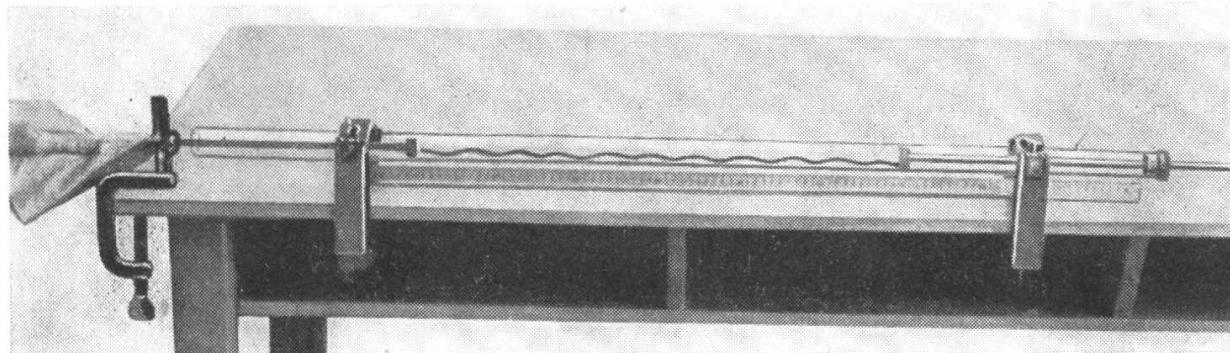


Bild 36

bäuche. Da die Entfernung zweier benachbarter Schwingungsbäuche gleich der halben Wellenlänge ist, ergibt sich für die Wellenlänge  $\lambda$  der Stabschwingung die doppelte Stablänge:

$$\lambda = 2l \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Wellenlänge  $\lambda'$  in Luft dient eine lange Glasröhre (KUNDTsche Röhre), die an einem Ende mit einem verschiebbaren Stempel versehen ist und in deren anderes Ende der zum Schwingen erregte Stab hineinragt (Bild 36). Um die Longitudinalschwingung des Stabes gut auf die Luftsäule im Glasrohr zu übertragen, ist der Stab mit einer Endplatte (Korkscheibe) versehen, die die Stabschwingungen

mitmacht. Die von der Endplatte ausgehenden Schallwellen werden am geschlossenen Ende der Glasröhre reflektiert, so daß sich in der Luftsäule stehende Wellen ausbilden. Um sie sichtbar zu machen, verteilt man wenig trockenes Korkpulver in der Glasröhre, so daß das Pulver einen langen, gleichmäßig dünnen Strich unten in der Röhre bildet. Ganz vorsichtig wird das Korkpulver durch Drehen der Röhre um ihre Achse etwas gehoben. Bilden sich nun in der Glasröhre stehende Wellen, so ist die Luft an den Knotenstellen dauernd in Ruhe, und das Korkpulver bleibt an diesen

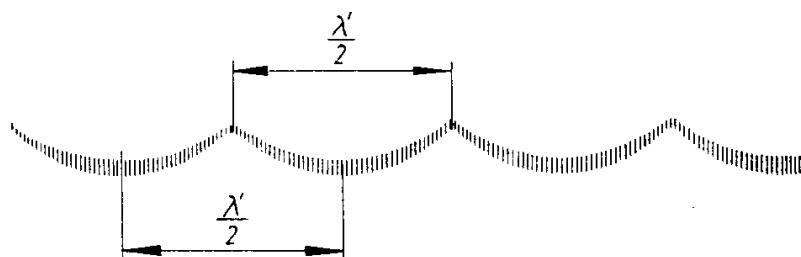


Bild 37

Stellen liegen. An den Stellen starker Luftbewegung, den Schwingungsbäuchen, fällt das Korkpulver an der Glaswand herunter, und es entstehen girlandenartige Bögen (Bild 37).

Die stehende Welle bildet sich nur dann scharf aus, wenn die Luftsäule in der Röhre eine bestimmte Länge hat, d. h. auf die Röhrenlänge eine ganzzahlige Anzahl von halben Wellenlängen entfällt. Das erreicht man durch Probieren, indem man den Stempel verschiebt. Der Abstand zweier benachbarter Schwingungsknoten ist gleich der halben Wellenlänge in Luft. Die Messung der Wellenlänge  $\lambda'$  in Luft geschieht folgendermaßen:

Man mißt den Abstand  $a$  zwischen zwei gut ausgeprägten Schwingungsknoten und teilt diesen Abstand durch die Anzahl  $n$  der zwischen ihnen liegenden Bögen. Somit erhält man

$$\lambda' = \frac{2a}{n}$$

Diese Messungen werden 5- bis 10mal mit jedesmal neu erzeugten Staubfiguren wiederholt.

Die Gleichungen (2), (3) und (4) liefern sämtliche Größen, die zur Berechnung der gesuchten Schallgeschwindigkeit benötigt werden, denn aus (1) folgt:

$$c = \frac{\lambda}{\lambda'} c'$$

## 2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Bei einer longitudinalen Welle breiten sich die Verdichtungen und Verdünnungen aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird also von der Zusammendrückbarkeit und Dehnbarkeit des Mediums, d. h. von seinem Elastizitätsmodul  $E$  abhängen. Außer-

dem spielt die Dichte  $\rho$  eine Rolle, da bei großer Dichte die in Bewegung zu setzende träge Masse größer ist. Es gilt die Beziehung

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Hat man die Schallgeschwindigkeit  $c$  bestimmt und kennt man die Dichte des Stoffes, so ergibt sich für den Elastizitätsmodul:

$$E = c^2 \rho \quad (5)$$

## A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen in einem Metallstab!
2. Der Elastizitätsmodul des Metallstabes ist nach (5) zu errechnen.
3. Fehlerabschätzung
4. Die Entstehung stehender Wellen ist zu erläutern.
5. Leiten Sie (3) aus (2) ab!

**Versuchsgeräte:** KUNDTsches Rohr mit Haltevorrichtung, Korkpulver, Kolophonium, Lappen, Maßstab, Metallstab

## 15. Resonanzrohr

## G Grundlagen

Der Schall breitet sich in Gasen als *Longitudinalwelle* aus: Die Teilchen schwingen in der Ausbreitungsrichtung der Welle.

Als *Eigenfrequenz* eines schwingungsfähigen Gebildes (eines *Oszillators*) bezeichnet man die Frequenz, mit der der Oszillator schwingt, wenn er nach einmaliger Anregung sich selbst überlassen bleibt.

Das Resonanzrohr ist ein Glasrohr und enthält eine Luftsäule, deren Länge verändert werden kann. Diese Luftsäule wird zu Schwingungen angeregt, wenn man z. B. eine Stimmgabel anschlägt, die über der Öffnung des Rohres angebracht ist. Dabei werden im Resonanzrohr *erzwungene* Schwingungen erzeugt: Die Teilchen schwingen mit der Frequenz, die ihnen von der Stimmgabel „aufgezwungen“ wird. Die Wellen laufen bis zum Ende der Luftsäule, das durch eine Wasserfläche gebildet wird, und werden dort reflektiert. Einfallende Welle und reflektierte Welle inter-

ferieren miteinander, so daß sich im Rohr stehende Wellen ausbilden. Ändert man die Länge der Luftsäule durch Heben und Senken der Niveauflasche F (Bild 38), so gibt es Stellen, an denen die Lautstärke besonders anschwillt. Es besteht Resonanz zwischen Stimmgabel und Luftsäule im Rohr. Diese Resonanz tritt ein, wenn die Luftsäule so lang ist, daß sich an der Wasseroberfläche ein Schwingungsknoten, an

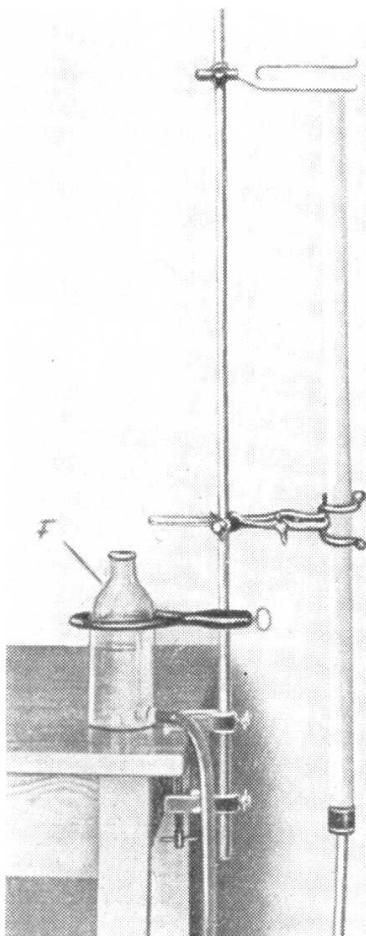


Bild 38

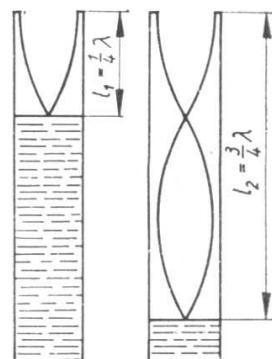


Bild 39

der Öffnung des Rohres aber ein Schwingungsbauch befindet (stehende Welle, Bild 39). Die Luftsäulenlänge muß ein ungeradzahliges Vielfaches eines Viertels der Wellenlänge sein:

$$l_1 = \frac{1}{4} \lambda, \quad l_2 = \frac{3}{4} \lambda, \quad l_3 = \frac{5}{4} \lambda, \quad \dots, \quad (1)$$

$$l_n = \frac{2n - 1}{4} \lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Die Wellenlänge ist mit der Frequenz über die Gleichung

$$c = \lambda f \quad (2)$$

verbunden. Dabei ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft, die von der Temperatur abhängt:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} \quad (3)$$

mit dem Adiabatenexponenten  $\gamma$  ( $\gamma = 1,4$  für zweiatomige Gase), der Gaskonstanten  $R = 8,314 \text{ J/mol K}$  und der molaren Masse  $M$ .

Für Luft gilt die zugeschnittene Größengleichung

$$c/\text{m s}^{-1} = 331,6 + 0,6 t/\text{°C} \quad (4)$$

## V Versuchsdurchführung

Über dem Resonanzrohr wird eine Stimmgabel eingespannt. Die Niveauflasche wird so weit gehoben, daß das Resonanzrohr vollständig mit Wasser gefüllt ist. Nachdem man mit dem Gummihammer die Stimmgabel angeschlagen hat, wird der Wasserspiegel gesenkt, bis ein deutliches Anschwellen des Tones zu hören ist. Der Wassersstand ist zu markieren (Kreide, Ölstift). Nachdem die Länge  $l_1$  gemessen ist, wird der Wasserspiegel weiter bis zur nächsten Resonanzstelle gesenkt; die Messung ergibt  $l_2$ . Alle weiteren Resonanzstellen sind ebenfalls auszumessen ( $l_3, l_4, \dots$ ). Aus (1) folgt

$$l_2 - l_1 = l_3 - l_2 = l_n - l_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

Der Abstand zweier Resonanzstellen ist gleich der halben Wellenlänge. Es empfiehlt sich, diese Differenzbildung vorzunehmen, da man damit den störenden Einfluß der Luftteilchen zwischen Stimmgabel und oberem Rand des Rohres ausschaltet. Bei hohen Frequenzen ist es zweckmäßig, zwei weit auseinanderliegende Resonanzstellen zugrunde zu legen. Dabei muß selbstverständlich die Zahl der dazwischenliegenden Maxima beachtet werden.

## A Aufgaben

1. Leiten Sie (4) aus (3) her!
2. Berechnung der Wellenlänge nach (5)
3. Berechnung der Schallgeschwindigkeit nach (3) oder (4)
4. Berechnung der Frequenz der Stimmgabel nach (2)
5. Für die anderen Stimmgabeln sind die Messungen ebenfalls auszuführen.
6. Fehlerrechnung für  $\lambda$
7. Fehlerabschätzung für  $f$

**Versuchsgeräte:** Resonanzrohr, Stutzenflasche, Gummischlauch, Stativ mit Kreuzmuffen und Klemmen, Maßstab, Stimmgabeln, Gummihammer

# Thermodynamik

## 16. Längenausdehnungskoeffizient fester Körper

### G Grundlagen

Ein Körper erfährt durch Erwärmung im allgemeinen eine allseitige Volumenzunahme. Wir wollen hier jedoch nur die Ausdehnung stabförmiger fester Körper in ihrer Längsrichtung messen.

Bei den zu untersuchenden Stoffen und dem vorgesehenen Temperaturbereich ist die Längenänderung der Temperaturänderung proportional. Kann sich der Körper ungehindert ausdehnen (trifft für Schienenanlagen nicht zu), so ändert sich die Länge jedes Teilstückes um den gleichen Betrag, und die Längenänderung ist folglich auch proportional der ursprünglichen Länge  $l_0$ .

$$\Delta l \sim l_0 \Delta t,$$

d. h.,

$$\frac{\Delta l}{l_0 \Delta t} = \text{konstant}$$

Das Verhältnis  $\frac{\Delta l}{l_0 \Delta t}$  wird als *Längenausdehnungskoeffizient*  $\alpha$  bezeichnet:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t} \quad (1)$$

### V Versuchsdurchführung

Um den Längenausdehnungskoeffizienten bestimmter Stoffe zu ermitteln, müssen die Ausgangslänge, die Längenänderung und die Temperaturänderung gut meßbar sein. Zur Messung dienen Glas- bzw. Metallrohre, deren Enden verschlossen sind und die zwei seitliche Anschlußöffnungen haben. Die Länge der Rohre beträgt z. B. 50 cm (Bild 40).

Es wird jeweils ein Rohr mit den angeschlossenen Schläuchen in die Aufnahmeverrichtung gelegt und an den Anschlagbolzen angedrückt. Danach wird der Reiter mit der *Meßuhr* so weit herangeschoben, daß sich der Zeiger der Meßuhr bereits ein Stück bewegt. Durch Verdrehen der Skale wird der Zeiger über den Nullstrich gestellt.

Sobald nun der im Glaskolben erzeugte Wasserdampf in das Rohr eintritt, dehnt es sich aus, und der Zeiger der Meßuhr dreht sich. Der Versuch ist beendet, wenn die Bewegung des Zeigers aufgehört hat. Dann strömt aus dem am anderen Ende an-

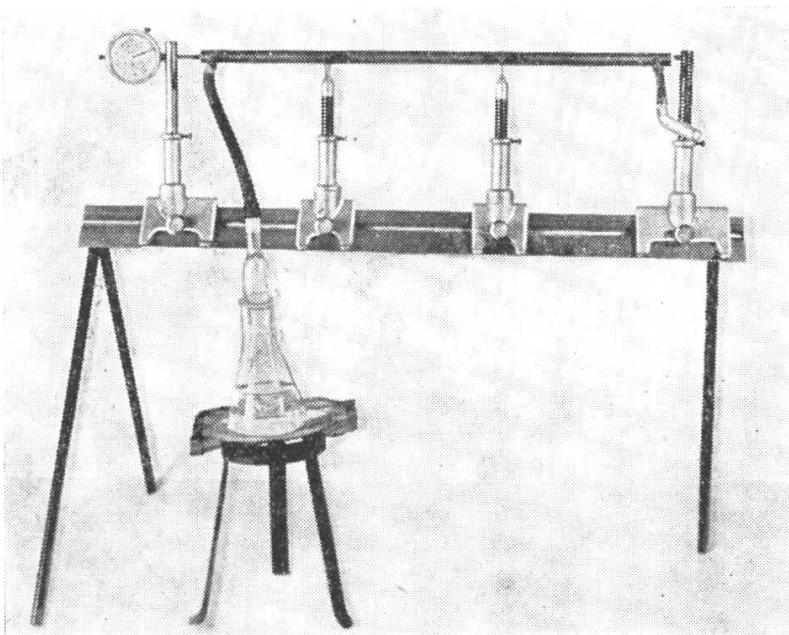


Bild 40

geschlossenen Schlauch Dampf aus. Das Rohr hat dann die Temperatur des Dampfes. Das Kondenswasser muß ungehindert auslaufen können, was durch Schrägstellen des Rohres erreicht werden kann.

Mit einem Thermometer mit Zehntelgrad-Einteilung werden die Zimmertemperatur (Anfangstemperatur) und die Dampftemperatur (Endtemperatur) gemessen. Die Dampftemperatur wird am Ende des gesamten Versuches gemessen. Zu diesem Zweck wird das Thermometer dicht über die Wasseroberfläche gebracht, um die Temperatur des gesättigten Dampfes zu messen. Durch die heißen Gefäßwände kann der Dampf überhitzt werden. Der an den Rohrwandungen seine Wärme abgebende Dampf ist aber wieder gesättigter Dampf. Wenn der an der Ausströmöffnung angebrachte Schlauch eine genügende lichte Weite besitzt, dann empfiehlt es sich, durch Einführen des Thermometers in diesen Schlauch die Temperatur des ausströmenden Dampfes zu messen. Der Dampf muß am Thermometer vorbeiströmen können, damit kein Überdruck entsteht.

Die gemessenen Werte können in (1) eingesetzt werden, um den Längenausdehnungskoeffizienten zu bestimmen.

## A Aufgaben

1. Es sind nacheinander die Längenänderungen von 4 verschiedenen Stoffen zu bestimmen (z. B. Glas, Aluminium, Stahl, Messing oder Kupfer). Als Ausgangstemperatur ist die Zimmertemperatur und als Endtemperatur die Temperatur des aus dem Rohr ausströmenden Dampfes zu betrachten.
2. Nach (1) werden die jeweiligen Längenausdehnungskoeffizienten errechnet.

3. Fehlerabschätzung
4. Bestimmte Glassorten vertragen plötzliche örtliche Abkühlung oder Erhitzung, ohne zu zerspringen. Worauf ist dies zurückzuführen?

*Versuchsgeräte:* Führungsschiene (z. B. von der optischen Bank), vier Reiter zur Aufnahme eines Anschlages, der beiden Führungswinkel und der Meßuhr, Rohre aus Glas, Aluminium, Stahl, Kupfer und Messing, Glaskolben mit passendem Schlauchanschluß, BUNSEN-Brenner und Dreifuß

*Bemerkung:* Die Aufnahmeverrichtung für die Rohre soll möglichst so gestaltet sein, daß keine Wärmeübertragung auf die Schiene erfolgt.

## 17. Wärmekapazität eines Kalorimeters

### G Grundlagen

Bei der Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester oder flüssiger Stoffe tritt immer die Frage auf, in welcher Weise das verwendete Gefäß die Vorgänge und damit die Meßergebnisse beeinflußt.

In keinem Falle darf bei einer halbwegs exakten Messung die Wärmeenergie übersehen werden, die das Kalorimeter z. B. während eines Mischungsvorganges aufnimmt oder abgibt. Zufuhr von Wärmeenergie führt nicht nur zu einer Erhöhung der Temperatur des Wassers, sondern erwärmt auch das Gefäß mit. Die erhaltenen Werte können einen Fehler von mehr als 10% aufweisen, wenn die vom Kalorimeter aufgenommene Wärmemenge nicht berücksichtigt würde.

Die vom Gefäß bei Temperaturerhöhung aufgenommene Wärmemenge  $Q$  errechnet sich nach der Gleichung

$$Q = cm\Delta t$$

Der Quotient aus dieser Wärmemenge und der Temperaturdifferenz  $\Delta t$  wird als **Wärmekapazität  $C$**  bezeichnet.

$$C = \frac{Q}{\Delta t}$$

Der Quotient aus Wärmekapazität und Masse heißt *spezifische Wärmekapazität c*:

$$c = \frac{C}{m}$$

Auf rechnerischem Wege kann die Wärmekapazität nur ermittelt werden, wenn es sich um ein Metallgefäß handelt, das sich gleichmäßig erwärmt. Von dem Gefäß-

material muß außerdem die spezifische Wärmekapazität bekannt sein. Es wird vielfach ein Versuchsgerät verwendet, das während des Versuchs nur wenig Wärmeenergie an die Umgebung abgibt oder aus ihr aufnimmt. Als Kalorimeter dient deshalb oft ein *Thermosgefäß* (auch als DEWAR-Gefäß bezeichnet, Bild 41). Von diesem kann die Wärmekapazität nur experimentell bestimmt werden.

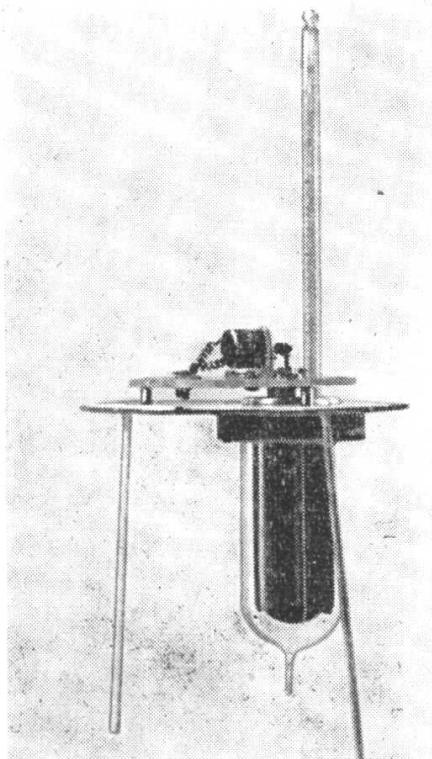


Bild 41

Die Bestimmung der Wärmekapazität kann nicht Selbstzweck sein, sondern wird immer einem anderen Versuch zur Wärmelehre vorausgehen. Da ein Thermosgefäß infolge der geringen Wärmeleitfähigkeit nur teilweise die Temperatur der enthaltenen Flüssigkeit annimmt, ist seine Wärmekapazität vom *Füllstand* abhängig. Mit größer werdender Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Gefäßwand steigt auch die Wärmekapazität. Soll diese bestimmt werden, so muß im Gefäß so viel Flüssigkeit enthalten sein, wie bei dem anschließenden Versuch etwa zur Bestimmung einer spezifischen Wärmekapazität.

## V Versuchsdurchführung

Es wird angenommen, daß z. B. die spezifische Wärmekapazität bestimmt werden soll. Der Versuch sei mit 200 g Wasser durchzuführen. Dann muß vorher die Wärmekapazität des Kalorimeters bei einem Füllstand untersucht werden, wie er durch 200 g Wasser erreicht wird. Außerdem ist darauf zu achten, daß die zuerst im Gefäß befindliche Flüssigkeit möglichst Zimmertemperatur hat, da nur dann gewähr-

leistet ist, daß das Kalorimeter an allen Stellen die gleiche Temperatur aufweist. Andernfalls nehmen die bereits vom Wasser mit einer Temperatur von vielleicht 12 °C berührten Teile mehr Energie auf als die auf Zimmertemperatur befindlichen anfangs nicht mit Flüssigkeit bedeckten Teile.

In das Thermosgefäß werden in dem angenommenen Fall etwa 100 g Wasser ( $m_1$ ) von Zimmertemperatur ( $t_1$ ) gebracht. Danach werden weitere 100 g Wasser ( $m_2$ ) mit einer Temperatur von etwa 50 °C ( $t_2$ ) zugegossen. Rührer und Thermometer bleiben während des Versuchs im Gefäß. Die Vermischung ist vollständig, wenn die Flüssigkeit am Boden und an der Oberfläche die gleiche Temperatur aufweist. Nunmehr kann die Mischungstemperatur ( $t_m$ ) festgestellt werden.

Nach dem Energieerhaltungssatz muß folgende Beziehung gelten:

$$m_1 c_1 (t_m - t_1) + C(t_m - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t_m)$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} C &= \frac{m_2 c_2 (t_2 - t_m) - m_1 c_1 (t_m - t_1)}{t_m - t_1} \\ C &= m_2 c_2 \frac{t_2 - t_m}{t_m - t_1} - m_1 c_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Die spezifische Wärmekapazität  $c_1$  ist gleich  $c_2$ , nämlich gleich  $4,18 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Die ermittelte Wärmekapazität gilt nur für den Füllstand, der bei dem Versuch vorlag. Es ist gleichzeitig die Wärmekapazität von Thermometer und Rührwerk mit erfaßt.

Um das Kalorimeter jederzeit bei verschiedenen Füllständen verwenden zu können, ohne jedesmal erst die entsprechende Wärmekapazität ermitteln zu müssen, wird eine *Kennlinie* aufgenommen, die  $C$  in Abhängigkeit vom Füllstand angibt. Um diese Kennlinie zu bekommen, sind Messungen bei wenigstens 4 verschiedenen Füllständen erforderlich.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Wärmekapazität eines als Kalorimeter vorgesehenen Thermosgefäßes bei 4 verschiedenen Füllständen!
2. Stellen Sie die Wärmekapazität in Abhängigkeit vom Füllstand grafisch dar!
3. Bestimmen Sie die Wärmekapazität eines Metallkalorimeters!
4. Fehlerabschätzung
5. Weshalb kann die Wärmekapazität eines metallischen Gefäßes aus seiner Masse und spezifischen Wärmekapazität errechnet werden, und warum ist dies bei Dewar-Gefäßen nicht möglich?

**Versuchsgeräte:** Kalorimeter, Thermometer mit Zehntelgrad-Teilung, Waage, Becherglas

## 18. Spezifische Wärmekapazität fester Körper

### G Grundlagen

Die Wärmemenge  $Q$ , die zur Erhöhung der Temperatur eines Körpers aufgebracht werden muß, ist der Temperaturerhöhung  $\Delta T$  und der Masse  $m$  des Körpers proportional:

$$Q = cm\Delta T^1 \quad (1)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $c$  heißt *spezifische Wärmekapazität* und ist materialabhängig.

Die spezifische Wärmekapazität fester Körper kann nach der Mischmethode bestimmt werden. Man beobachtet den Austausch der Wärmeenergie zwischen zwei Körpern mit verschiedener Temperatur. Der Probekörper, dessen spezifische Wärmekapazität  $c_1$  gesucht ist, hat die Masse  $m_1$  und wird auf die Temperatur  $T_1$  erhitzt. Er wird in ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter mit der Wärmekapazität  $C$  und der Temperatur  $T_2$  gebracht. Dabei kühlt er sich auf die *Mischungstemperatur*  $T_m$  ab, während sich Wasser und Kalorimeter auf diese Temperatur  $T_m$  erwärmen. Nach dem Energiesatz ist die vom Körper abgegebene Energie  $Q = c_1 m_1 (T_1 - T_m)$  gleich der vom wassergefüllten Kalorimeter aufgenommenen Energie  $Q = C(T_m - T_2)$ :

$$c_1 m_1 (T_1 - T_m) = C(T_m - T_2)$$

Daraus:

$$c_1 = \frac{C}{m_1} \frac{T_m - T_2}{T_1 - T_m} \quad (2)$$

Wird ein Messing- oder Aluminiumkalorimeter benutzt, so nimmt das gesamte innere Gefäß infolge seiner guten Wärmeleitfähigkeit die Temperatur des Wassers an. Die Wärmekapazität  $C$  des *gefüllten* Kalorimeters setzt sich zusammen aus der Wärmekapazität  $C_1$  des Gefäßes:

$$C_1 = c_K m_K$$

und der Wärmekapazität  $C_2$  der Wasserfüllung:

$$C_2 = c_W m_W$$

---

<sup>1)</sup> Obgleich das für die thermodynamische Temperatur übliche Symbol  $T$  (wegen Zeit  $t$ ) benutzt wird, braucht hier nicht auf Kelvin umgerechnet zu werden. Weshalb?

Hinzu kommt noch ein kleiner Betrag  $C_3 = 4 \text{ J/K}$  für Thermometer und Rührer, so daß sich die Wärmekapazität  $C$  berechnet zu

$$C = c_K m_K + c_W m_W + C_3 \quad (3)$$

Weicht die Temperatur des Wassers im Kalorimeter wesentlich von der Temperatur der Umgebung ab, so erfolgt trotz der Wärmeisolation ein Wärmeaustausch mit der Umgebung. Um diesen Einfluß auszuschalten, wendet man für Metallkalorimeter ein grafisches Verfahren an. Bild 42 zeigt die Temperatur  $T$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ :

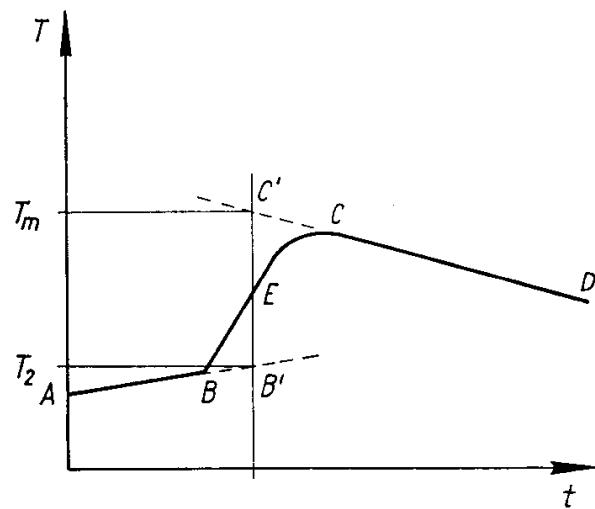


Bild 42

Von  $A$  bis  $B$  steigt die Temperatur im Kalorimeter linear an. An der Stelle  $B$  wird der Probekörper ins Kalorimeter gebracht. Dadurch steigt die Temperatur steil bis  $C$  an und fällt dann nach  $D$  wieder steil ab. Man kann auf unendlich schnellen Temperaturausgleich extrapoliieren, indem man das Kurvenstück  $AB$  vorwärts, das Kurvenstück  $CD$  rückwärts verlängert. Eine Senkrechte, die die Verlängerungen in  $B'$  und  $C'$  schneidet, wird so gelegt, daß die Flächenstücke  $BB'E$  und  $CC'E$  einander etwa gleich sind. Dem Diagramm können die Temperaturen  $T_2$  und  $T_m$  entnommen werden.

## V Versuchsdurchführung

Zur Berechnung der Wärmekapazität nach (3) ist zunächst das innere Kalorimetergefäß zu wägen ( $m_K$ ) und dann etwa zur Hälfte mit Wasser zu füllen. Die Masse  $m_W$  des eingefüllten Wassers ist festzustellen. Die spezifische Wärmekapazität  $c_K$  des Kalorimeters ist am Arbeitsplatz angegeben. Der Körper, dessen spezifische Wärmekapazität bestimmt werden soll, wird auf die Temperatur  $T_1$  gebracht. Das kann in einem besonderen Dampfheizkörper (Bild 43) geschehen, in den Wasserdampf eingeleitet wird. Man erzeugt den Wasserdampf in einem Siedegefäß und führt ihn dem Dampfheizkörper zu. Der Probekörper wird in den Heizkörper gebracht. Seine Bohrung nimmt ein Thermometer auf. Ändert sich die Temperatur des Probekörpers nicht mehr, so wird während 5 min die Temperatur im Kalorimeter in Abständen

von 30 s abgelesen und in das Diagramm (Bild 42) eingetragen. Dann wird der Schieber geöffnet. Der Probekörper fällt in das Kalorimeter. Das Wasser ist kräftig umzurühren. Die Temperatur wird jetzt in Abständen von 10 s abgelesen, bis der Tem-

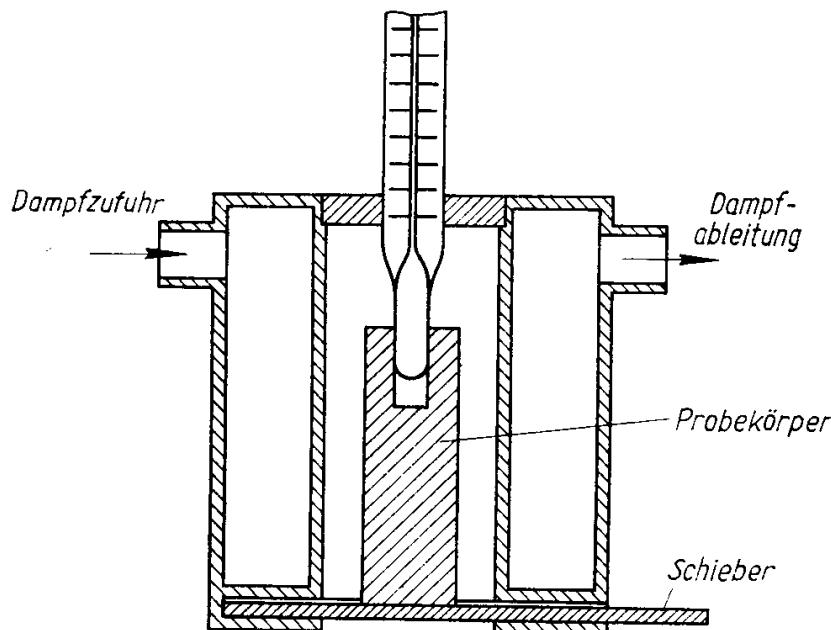


Bild 43

peraturausgleich zwischen Körper und Wasser beendet ist. Dann ist noch etwa 10 min lang der Temperaturverlauf aufzunehmen (Messungen in Abständen von 30 s). Aus dem Diagramm werden  $T_2$  und  $T_m$  entnommen.

Steht ein Dampfheizkörper nicht zur Verfügung, erfolgt das Erhitzen des Probekörpers im Wasserbad. Der Körper verbleibt etwa 15 min auf einem Rost in siedendem Wasser. Dann hat der Probekörper bestimmt die Temperatur des siedenden Wassers angenommen. Mit einer Zange wird der Körper schnell (damit Wärmeverluste möglichst vermieden werden) in das Kalorimeter gebracht. Die Aufnahme der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit erfolgt wie oben beschrieben (die Aufnahme 5 min vor dem Einbringen des Probekörpers beginnen).

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität zweier Probekörper!
2. Diskutieren Sie ausführlich die Fehlerquellen!
3. Fehlerabschätzung

**Versuchsgeräte:** Kalorimeter, 2 Probekörper aus Metall, Dampfheizkörper mit Siedegefäß (oder Becherglas mit Rost), Dreifuß, BUNSEN-Brenner, Thermometer (1-K-Teilung), Thermometer (0,1-K-Teilung), Asbestdrahtnetz, Tiegelzange

## 19. Spezifische Wärmekapazität von Flüssigkeiten

### G Grundlagen

Führt man einem Körper Wärmeenergie zu, so erhöht sich im allgemeinen seine Temperatur. Zwischen der zugeführten Wärmeenergie  $Q$ , der Masse  $m$  des Körpers und der Temperaturerhöhung  $\Delta t$  besteht die Beziehung

$$Q = cm\Delta t \quad (1)$$

Der in (1) auftretende Proportionalitätsfaktor  $c$  ist von der speziellen Eigenschaft des Körpers abhängig und wird als spezifische Wärmekapazität bezeichnet. Um die spezifische Wärmekapazität einer Flüssigkeit zu bestimmen, benutzt man einen „Wärmeträger“ (*Thermophor*). Der Thermophor besteht aus einem kugelförmigen Glasgefäß mit angesetztem Steigrohr (Bild 44). Die Kugel ist mit einer

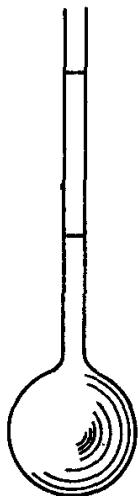


Bild 44

gefärbten Flüssigkeit gefüllt, die sich bei Erwärmung ausdehnt und im Rohr emporsteigt. Am Rohr sind zwei Marken angebracht. Wird dem Thermophor Wärmeenergie zugeführt, so steigt die Flüssigkeit in dem Steigrohr bis zu einer oberen Marke. Bei einem ersten Versuch wird der Thermophor in einem Kalorimeter mit Wasserfüllung so weit abgekühlt, bis die Flüssigkeit im Steigrohr die untere Marke erreicht hat. Bei einem zweiten Versuch wird der Thermophor im gleichen Kalorimeter, welches nun mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist, ebenfalls bis zur unteren Marke abgekühlt. Dann ist bei beiden Versuchen die gleiche Wärmeenergie an das Wasser bzw. an die zu untersuchende Flüssigkeit abgegeben worden.

### V Versuchsdurchführung

Das innere Gefäß des Kalorimeters wird gewogen:  $m_1$ . Das etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllte Kalorimeter hat die Masse  $m_2$ . Damit ist die Masse des Wassers  $m_w = m_2 - m_1$ . Die Temperatur  $t_1$  des Wassers im Kalorimeter wird gemessen.

Den Thermophor erwärmt man im Wasserbad so lange, bis die gefärbte Flüssigkeit im Steigrohr etwas über der oberen Marke steht. Dann wird der Thermophor aus dem Wasserbad genommen, abgetrocknet und in dem Moment in das Kalorimeter getaucht, in dem die Flüssigkeitssäule an der oberen Marke steht. Unter langsamem Bewegen des Thermophors gibt dieser an das Wasser und das Kalorimeter die Wärmeenergie ab, die notwendig ist, damit die Flüssigkeitssäule die untere Marke am Steigrohr erreicht. Dann wird der Thermophor entfernt und die Temperatur  $t_2$  des Wassers gemessen.

Das Wasser nimmt die Wärmeenergie

$$Q_w = c_w m_w (t_2 - t_1) \quad (2)$$

und das Kalorimeter die Wärmeenergie

$$Q_k' = C(t_2 - t_1) \quad (3)$$

auf. Ist  $Q$  die vom Thermophor abgegebene Wärmeenergie, dann gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$Q = Q_w + Q_k' \quad (4)$$

Die Wärmekapazität  $C$  des Kalorimeters ist eine Gerätekonstante und wird zu Beginn des Versuches durch den Praktikumsleiter bekanntgegeben.

Das Wasser wird nunmehr aus dem Kalorimeter entfernt, letzteres gut ausgetrocknet und der Versuch in der gleichen Reihenfolge mit der zu untersuchenden Flüssigkeit durchgeführt. Die Masse der Flüssigkeit sei  $m_{fl}$ , die Temperaturen  $t_3$  vor und  $t_4$  nach dem Eintauchen des Thermophors in die Flüssigkeit.

Die Flüssigkeit nimmt die Wärmeenergie

$$Q_{fl} = c_{fl} m_{fl} (t_4 - t_3) \quad (5)$$

und das Kalorimeter die Wärmeenergie

$$Q_k'' = C(t_4 - t_3) \quad (6)$$

auf. Für die abgegebene Wärmeenergie gilt dann

$$Q = Q_{fl} + Q_k'' \quad (7)$$

Da die Wärmemengen  $Q$  gleich sind, gilt

$$Q_w + Q_k' = Q_{fl} + Q_k'' \quad (8)$$

In Gleichung (8) setzt man die Gleichungen (2), (3), (5) und (6) ein und erhält

$$c_w m_w (t_2 - t_1) + C(t_2 - t_1) = c_{fl} m_{fl} (t_4 - t_3) + C(t_4 - t_3)$$

Daraus errechnet man für die gesuchte spezifische Wärmekapazität  $c_{fl}$  der Flüssigkeit

$$c_{fl} = \frac{c_w m_w (t_2 - t_1) + C(t_2 - t_1 - t_4 + t_3)}{m_{fl} (t_4 - t_3)} \quad (9)$$

Nach dem Versuch sind das Kalorimeter, der Thermophor und das Thermometer gut zu reinigen.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifischen Wärmekapazitäten der gegebenen Flüssigkeiten nach Gleichung (9)!
2. Führen Sie eine Fehlerabschätzung durch!
3. Vergleichen Sie die durch Versuch ermittelten Werte mit Tabellenwerten und erläutern Sie die Abweichungen!

*Versuchsgeräte:* Kalorimeter, Thermophor, Thermometer, Becherglas, Dreibein, Drahtnetz, BUNSEN-Brenner, Reinigungslappen, Versuchsflüssigkeit

## 20. Dichte von Luft und Kohlendioxid

### G Grundlagen

Die Dichte ist definiert als Quotient aus Masse und Volumen eines Körpers:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Bei Gasen ist die Dichte stark von Druck und Temperatur abhängig. Aus der *Zustandsgleichung*

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (2)$$

folgt

$$\frac{m}{V} = \varrho = \frac{pM}{RT} \quad (3)$$

Hierin ist

$R = 8,314 \text{ J/mol K}$  die Gaskonstante,

$M$  die molare Masse ( $[M] = \text{kg/mol}$ ),

$p$  der Druck,

$T$  die Temperatur ( $T/\text{K} = t/\text{°C} + 273,15$ ).

Um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu haben, bezieht man Gasdichten auf *Normalbedingungen*:

$$p_0 = 101,325 \text{ kPa} \text{ und}$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K} (t_0 = 0^\circ\text{C}).$$

Damit ist

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0} \quad (3a)$$

Durch Division von (3a) und (3) erhält man

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{p_0 T}{p T_0} \quad (4)$$

## V Versuchsdurchführung

1. Es soll die Dichte von Luft und von Kohlendioxid bestimmt werden. Dazu werden zunächst Luftdruck und Zimmertemperatur gemessen. Während des Versuches müssen diese beiden Größen laufend überprüft werden.

Zur Volumenbestimmung wird der Meßkolben (Masse  $m_0$ , Volumen  $V_0$ ) mit Luft, möglichst auf 1 mg genau, gewogen ( $m_1$ ):

$$m_1 = m_0 + V_0 \varrho_L \quad (5)$$

Dann wird der Meßkolben durch einen Schlauch mit dem Krippschen Gasentwickler verbunden und Kohlendioxid von unten in den Meßkolben eingeleitet. Die Luft kann durch den oberen Hahn entweichen. Die CO<sub>2</sub>-Zufuhr wird beendet, wenn ein brennendes Streichholz, das unmittelbar über den oberen Hahn gehalten wird, erlischt. Zunächst ist der untere Hahn zu schließen, dann der obere. Der mit CO<sub>2</sub> gefüllte Meßkolben ist auf 1 mg genau zu wägen ( $m_2$ ):

$$m_2 = m_0 + V_0 \varrho_{CO_2} \quad (6)$$

Durch den Kolben wird Luft angesaugt; dann wird der Kolben evakuiert (Bild 45) und, ebenfalls auf 1 mg genau, gewogen:  $m_3$ .

Danach taucht man den Kolben in luftfreies, d. h. abgekochtes Wasser von Zimmertemperatur und öffnet unter Wasser den unteren Hahn: Der Kolben füllt sich zum großen Teil mit Wasser. Den Kolben taucht man so weit ein, daß das Wasser innen und außen gleich hoch steht, schließt den Hahn, nimmt den Kolben aus dem Wasser, trocknet ihn ab und wähgt ihn auf 1 g genau ( $m_4$ ). Das eingeströmte Wasser hat das gleiche Volumen wie die abgesaugte Luft. Dieses Volumen ergibt sich nach (1) zu

$$V = \frac{m_W}{\varrho_W} = \frac{m_4 - m_3}{\varrho_W}$$

Die Masse der Luft ist

$$m_L = m_1 - m_3$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so erhält man

$$\varrho_L = \frac{m_L}{V} = \frac{m_1 - m_3}{m_4 - m_3} \varrho_W \quad (7)$$

Dabei ist  $\varrho_W$  temperaturabhängig und kann Tabellen entnommen werden.

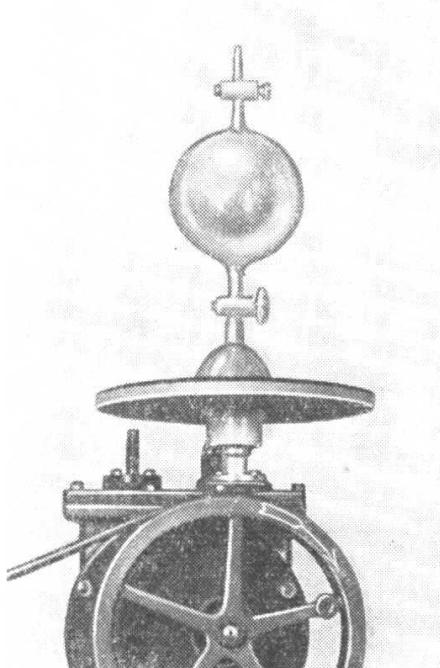


Bild 45

Zur Bestimmung der Dichte von  $\text{CO}_2$  muß noch das Volumen des gesamten Kolbens bekannt sein. Deshalb wird der Kolben vollkommen mit Wasser gefüllt. Die anschließende Wägung ergibt  $m_5$  (auf 1 g genau):

$$m_5 = m_0 + V_0 \varrho_W \quad (8)$$

Nach (5) und (8) ist

$$\begin{aligned} m_1 &= m_0 + V_0 \varrho_L \\ m_5 &= m_0 + V_0 \varrho_W \\ m_5 - m_1 &= V_0 (\varrho_W - \varrho_L) \end{aligned} \quad (9)$$

Nach (5) und (6) gilt

$$\begin{aligned} m_1 &= m_0 + V_0 \varrho_L \\ m_2 &= m_0 + V_0 \varrho_{\text{CO}_2} \\ m_2 - m_1 &= V_0 (\varrho_{\text{CO}_2} - \varrho_L) \end{aligned} \quad (10)$$

Eliminiert man  $V_0$  aus (9) und (10), so erhält man

$$\frac{m_2 - m_1}{m_5 - m_1} = \frac{\varrho_{CO_2} - \varrho_L}{\varrho_W - \varrho_L}$$

Daraus ergibt sich

$$\varrho_{CO_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_5 - m_1} (\varrho_W - \varrho_L) + \varrho_L \quad (11)$$

2. Soll nur die Dichte von Luft bestimmt werden, so ist es zweckmäßig, zur Volumenbestimmung einen zweiten Kolben zu verwenden, in den man das Wasser einströmen lässt. Es bleibt dann der Luftkolben trocken, und das Experiment kann sofort mehrmals wiederholt werden.

Der Versuch läuft dann wie folgt: Es ist noch die Masse eines zweiten Kolbens (des Wasserkolbens) zu bestimmen:  $m_6$ . Nachdem der Luftkolben evakuiert und gewogen worden ist, taucht man den Wasserkolben bei geöffneten Hähnen bis in die Höhe des unteren Hahnes in das Wasser. Dann verbindet man mit einem Vakumschlauch den Luftkolben mit dem Wasserkolben (Bild 46). Der untere Hahn des Luftkolbens wird

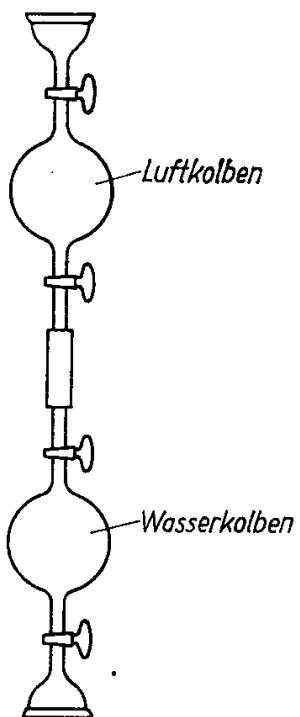


Bild 46

langsam geöffnet; das Wasser dringt in den Wasserkolben ein. Man verfährt dann sinngemäß wie unter 1., trennt die beiden Kolben voneinander und stellt die Masse des wassergefüllten Kolbens fest:  $m_7$ . Anstelle von (7) erhält man nun

$$\varrho_L = \frac{m_1 - m_3}{m_7 - m_6} \varrho_W \quad (12)$$

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie nach (7) bzw. (12) die Dichte der Luft!
2. Nach (11) ist die Dichte von Kohlendioxid zu ermitteln.
3. Rechnen Sie diese Dichten nach (4) auf Normalbedingungen um!
4. Berechnen Sie die molaren Massen von Luft und CO<sub>2</sub> nach (3a)!
5. Fehlerabschätzung
6. Weshalb muß nach dem Einleiten von CO<sub>2</sub> in den Kolben zunächst der untere Hahn geschlossen werden?
7. Weshalb kann bei m<sub>4</sub>, m<sub>5</sub>, m<sub>6</sub> und m<sub>7</sub> ein Fehler von 1 g hingenommen werden (gegenüber 1 mg bei m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub> und m<sub>3</sub>)?

*Versuchsgeräte:* 2 Kolben mit 2 Hähnen (Bild 45), KIPPScher Apparat, Barometer, Thermometer, Waage (1 mg), Waage (1 g), Luftpumpe, Wasserbehälter

## 21. Dampfdichte

### G Grundlagen

Die Dampfdichte ist der Quotient aus der Masse und dem Volumen des Dampfes:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Die Dampfdichte ist stark von Druck und Temperatur abhängig, da sich das Volumen mit dem Druck und der Temperatur ändert. Es gilt näherungsweise die Zustandsgleichung

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad (2)$$

Hierbei ist V<sub>0</sub> das Volumen des Gases unter *Normalbedingungen* (p<sub>0</sub> = 101,325 kPa; T<sub>0</sub> = 273,15 K).

Die Dampfdichte unter Normalbedingungen ist nach (1) und (2)

$$\varrho_0 = \frac{m T p_0}{p V T_0} \quad (3)$$

Oft bildet man das *Dampfdichteverhältnis*, den Quotienten aus Dampfdichte und Luftpumpe (beide unter Normalbedingungen):

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_L} = \frac{m T p_0}{\varrho_L p V T_0} \quad (4)$$

$\varrho_L = 1,293 \text{ kg/m}^3$  ist dabei die Luftpumpe unter Normalbedingungen.

Die Messung der Dampfdichte dient sehr oft zur Bestimmung der molaren

Masse. Die molaren Massen verhalten sich wie die Dampf- bzw. Gasdichten:

$$\frac{M_D}{M_L} = \frac{\varrho_0}{\varrho_L} \quad (5)$$

Daraus kann  $M_D$  berechnet werden, da  $M_L = 29,0 \text{ g/mol}$  bekannt ist.

## V Versuchsdurchführung

### Dampfdichtheitbestimmung nach Meyer

Die Apparatur besteht aus einem Glasrohr, das unten erweitert ist und als Verdampfungsraum dient. Der Boden des Verdampfungsraums ist mit Asbestfasern bedeckt, damit das Glasfläschchen, das später eingeworfen wird, den Boden nicht durchschlägt. Das Glasrohr ist oben mit einem Gummistopfen verschlossen und trägt seitlich ein Ansatzrohr, das unter einem mit Wasser gefüllten Meßzylinder endet, der in einer pneumatischen Wanne steht (Bild 47). Ein Heizmantel, der mit Wasser gefüllt ist, umgibt den Verdampfungsraum.

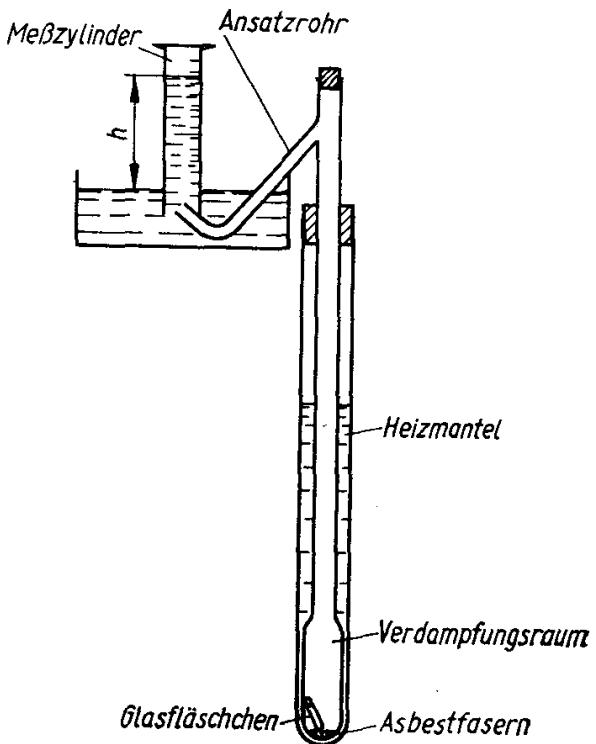


Bild 47

Zunächst ist das Glasfläschchen leer zu wägen ( $m_0$ ). Dann füllt man die Versuchsfüssigkeit ein und wägt wieder ( $m_1$ ). Dann ist

$$m = m_1 - m_0$$

die Masse der Versuchssubstanz.

Der Heizmantel wird mit Wasser gefüllt, das Verdampfungsgefäß eingesetzt und erhitzt, bis aus dem seitlichen Ansatzrohr, das unter Wasser endet, keine Luftblasen

mehr entweichen. Dann befestigt man den mit Wasser (keine Luftblasen!) gefüllten Meßzylinder über dem Ansatzrohr und wirft das Fläschchen mit der Versuchsflüssigkeit in den Verdampfungsraum. Es ist darauf zu achten, daß der Stopfen sofort wieder fest aufgesetzt wird. Die verdampfende Substanz verdrängt Luft, die im Meßzylinder aufgefangen wird. Sie hat dann Zimmertemperatur; ihr Druck ist der äußere Luftdruck  $p_L$ , vermindert um den Schweredruck der Wassersäule im Zylinder ( $p_s$ ) und den Dampfdruck  $p_w$  des Wassers bei Zimmertemperatur  $T$ :

$$p = p_L - p_s - p_w \quad (6)$$

Wenn keine Luftblasen mehr im Meßzylinder aufsteigen, werden das Volumen  $V$  der aufgefangenen Luft, die Höhe  $h$  der Wassersäule zur Berechnung des Schweredrucks  $p_s$ , die Zimmertemperatur  $T$  und der Luftdruck  $p_L$  gemessen. Der Dampfdruck  $p_w$  des Wassers wird einer Tabelle entnommen.

Am Ende des Versuches ist zunächst der Meßzylinder abzunehmen, der Gummistopfen zu entfernen und dann erst der BUNSEN-Brenner zu löschen. So wird verhindert, daß Wasser in das Verdampfungsgefäß eindringt.

### *Dampfdichtebestimmung nach Dumas*

Der Kolben (Bild 48) ist auf 1 mg genau zu wägen:  $m_1$ . Einige Kubikzentimeter der Versuchsflüssigkeit werden in den Kolben eingebracht. Nachdem die Zimmertemperatur  $T_z$  gemessen worden ist, wird der Kolben in das Stativ eingespannt und im Wasserbad erhitzt. Dabei muß darauf geachtet werden, daß der Kolben vollständig in das Wasser eintaucht.

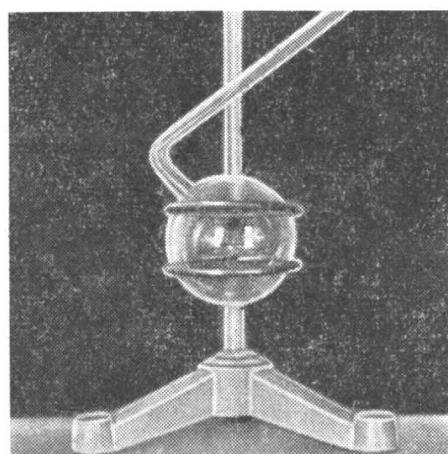


Bild 48

Wenn alle Flüssigkeit verdampft ist und der Dampf die Luft aus dem Kolben vollständig verdrängt hat, wird der Kolben mit einer Stichflamme zugeschmolzen und die Badtemperatur  $T_w$  abgelesen. Der Kolben wird aus dem Wasserbad genommen, abgetrocknet und seine Masse  $m_2$  auf 1 mg genau festgestellt. Dabei muß das abgeschmolzene Stück Glasrohr mit auf die Waage gelegt werden. Die Zimmertemperatur  $T_z$  ist zu überprüfen. Der Kolben wird in luftfreies Wasser getaucht und die Spitze unter Wasser mit dem Glasrohrschnieder kurz abgeschnitten. Das eindringende Wasser füllt den Kolben fast vollständig. Der wassergefüllte Kolben (mit abgeschmolzenem Glasrohr und abgebrochener Glasspitze) ist auf 1 mg genau zu wägen ( $m_3$ ).

**Auswertung:** Zu Beginn enthält der Kolben Luft mit der Masse

$$m_L = \rho_L V \quad (7)$$

Die Masse  $m_1$  ergibt sich als Summe aus der Kolbenmasse  $m_0$  und der Masse  $m_L$  der Luft im Kolben:

$$m_1 = m_0 + \rho_L V \quad (8)$$

Bei der zweiten Wägung ist der Kolben mit Dampf der Dichte  $\rho_D'$  gefüllt, daher

$$m_2 = m_0 + \rho_D' V \quad (9)$$

Für die Masse des wassergefüllten Kolbens gilt

$$m_3 = m_0 + \rho_W V \quad (10)$$

Das Volumen des Kolbens kann aus (8) und (10) errechnet werden. Durch Subtraktion erhält man

$$m_3 - m_1 = V(\rho_W - \rho_L)$$

und

$$V = \frac{m_3 - m_1}{\rho_W - \rho_L} \quad (11)$$

Subtrahiert man (8) von (9), so ergibt sich

$$m_2 - m_1 = V(\rho_D' - \rho_L)$$

und mit (11)

$$m_2 - m_1 = \frac{m_3 - m_1}{\rho_W - \rho_L} (\rho_D' - \rho_L)$$

Daraus folgt

$$\rho_D' = \frac{(m_2 - m_1) \rho_W + (m_3 - m_2) \rho_L}{m_3 - m_1} \quad (12)$$

Es ist dabei zu beachten, daß die Luiddichte  $\rho_L$  sich auf die Zimmertemperatur  $T_z$  bezieht, während die Dampfdichte  $\rho_D'$  für die Temperatur  $T_w$  des Wasserbades gilt. Der Druck ist in beiden Fällen der gleiche. Rechnet man die Dampfdichte  $\rho_D'$  auf Zimmertemperatur um, so gilt nach GAY-LUSSAC

$$\rho_D = \rho_D' \frac{T_w}{T_z} \quad (13)$$

Für das Dampfdichteverhältnis gilt dann mit (12) und (13)

$$\frac{\rho_D}{\rho_L} = \frac{(m_2 - m_1) \frac{\rho_W}{\rho_L} + m_3 - m_2}{m_3 - m_1} \frac{T_w}{T_z} \quad (14)$$

## A Aufgaben

1. Leiten Sie die Gleichung (5) ab!
2. Bestimmen Sie nach einem der beiden Verfahren die Dampfdichte der vorgelegten Versuchsflüssigkeit!
3. Bestimmen Sie das Dampfdichteverhältnis!
4. Berechnen Sie die molare Masse der Versuchsflüssigkeit!
5. Fehlerabschätzung

*Versuchsgeräte:* Apparatur nach MEYER, Stativmaterial, Meßzylinder, pneumatische Wanne (großes Becherglas), Waage (1 mg)

oder

Glaskolben, Stativ, Topf für Wasserbad, Waage (1 mg); Glasrohrschnieder, BUNSEN-Brenner, Dreifuß, Asbestdrahtnetz, Thermometer

## 22. Gasdichtebestimmung nach Bunsen

### G Grundlagen

Soll ein Gas aus einem Behälter mit dem Öffnungsquerschnitt  $A$  ausströmen und herrscht im Behälter der Druck  $p$ , während im Außenraum der Druck  $p_0$  vorhanden ist, so muß  $p > p_0$  sein. Der Druckunterschied sei  $p - p_0 = dp$ . Betrachtet man ein Massenelement des Gases  $\Delta m = \rho_G A \Delta s$ , welches in der Zeit  $t$  durch den Öffnungsquerschnitt der Ausströmöffnung tritt, so wirkt auf dieses die Druckkraft  $dF = A dp$ . Diese Druckkraft verrichtet an dem Massenelement die Arbeit  $dW = -dF \Delta s$ , wenn mit  $\Delta s$  die Verschiebungsstrecke bezeichnet wird. Diese Arbeit verändert die kinetische Energie  $dW_{\text{kin}} = d\left(\frac{1}{2} \Delta m v^2\right)$  des Massenelementes des Gases.

Aus  $dW = dW_{\text{kin}}$  folgt nach Einsetzen der obigen Gleichungen und Kürzen

$$d(v^2) = -\frac{2}{\rho_G} dp$$

$$\int_{v_0}^v d(v^2) = -\frac{2}{\rho_G} \int_p^{p_0} dp$$

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2}{\rho_G} (p - p_0)$$

Ruht zu Beginn des Versuches das Gas, so ist  $v_0 = 0$ . Bezeichnet man weiter den Druckunterschied mit  $\Delta p = p - p_0$ , so erhält man die Gleichung

$$v^2 = \frac{2}{\rho_G} \Delta p, \quad (1)$$

die dem Ausströmversuch zugrunde liegt.

Zur Ableitung der Gleichung (1) wurde angenommen, daß die Dichte  $\rho_G$  des Gases konstant bleibt. Dies entspricht nicht dem tatsächlichen Geschehen, denn beim Ausströmen tritt eine Volumenvergrößerung auf. Demzufolge nimmt die Gasdichte ab. Weiterhin werden die Reibungskräfte vernachlässigt und angenommen, daß die Strömung stationär verläuft. Beschränkt man sich bei der Versuchsdurchführung auf Vergleichsmessungen, so durchlaufen die zu untersuchenden Gase in den einzelnen Versuchsphasen die gleichen Zustände, so daß die geringen Fehler etwa gleich groß sind und sich aufheben. Strömen insbesondere die gleichen Gasvolumina bei im Mittel konstanter Geschwindigkeit aus, so ist wegen  $v = s/t$

$$\frac{s^2}{t^2} = \frac{2}{\rho_G} \Delta p$$

und damit

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\rho_{G1}}{\rho_{G2}} \quad (2)$$

Gleichung (2) ist das BUNSENSche Ausströmungsgesetz.

## V Versuchsdurchführung

Wirkt auf eine Gasmenge, die sich in einem Zylinder Z befindet, der Überdruck  $p$ , so strömt das Gas aus der Düse D aus (Bild 49). Der Überdruck  $p$  ist durch die Flüs-

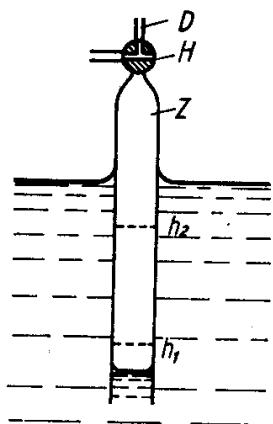


Bild 49

sigkeit gegeben, in welche der mit Gas gefüllte Zylinder eintaucht. In dem Zylinder sind zwei Marken  $h_1$  und  $h_2$  eingeritzt. Es ist die Zeit zu messen, in der das Gas austströmt, d. h. der Flüssigkeitsspiegel die Marken passiert. Der Zylinder wird durch einen Dreiegehahn H verschlossen. Der Hahn kann den Zylinder

1. mit dem Außenraum und der Gasvorratsflasche verbinden,
2. vom Außenraum absperren,
3. mit der Ausströmdüse verbinden.

Mit der Wasserstrahlpumpe wird über die Hahnstellung 1 (Bild 50) das restliche Gas aus dem Zylinder abgesaugt. Steht die Flüssigkeitssäule etwa 1 cm unter dem Hahn, ist dieser in Stellung 2 zu drehen. Die Wasserstrahlpumpe wird belüftet und

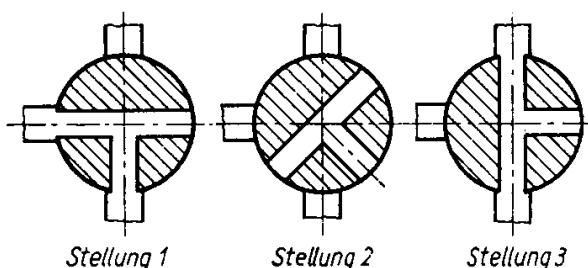


Bild 50

abgestellt. Der Anschluß zur Gasvorratsflasche ist hierzustellen, der Hahn in Stellung 1 zu drehen. So lange Gas einströmen lassen, bis die Flüssigkeitssäule unter der Marke  $h_1$  steht! Hahn über Stellung 2 in Stellung 3 drehen und die Zeit  $t$  messen, die die Flüssigkeitssäule benötigt, um die beiden Marken  $h_1$  und  $h_2$  zu passieren! Der Versuch ist mindestens dreimal durchzuführen.

**Wird als Sperrflüssigkeit Wasser benutzt, so ist es zweckmäßig, durch eine Wartezeit von etwa 5 Minuten die Sättigung des Gases mit Wasserdampf abzuwarten.**

## A Aufgaben

1. Zimmertemperatur und Luftdruck sind festzustellen.
2. Aus einer Tabelle ist die Dichte der Luft zu entnehmen.
3. Die Bestimmung der Ausströmzeiten ist so lange zu wiederholen, bis die Werte einer Versuchsserie hinreichend konstant sind. Warum?
4. Fehlerabschätzung
5. Vergleichen Sie die ermittelten Dichtewerte mit den Tabellenwerten und erläutern Sie die eventuell vorhandenen Abweichungen!

**Versuchsgeräte:** Ausströmröhre mit Dreiegehahn und Kapillare, Batterieglas, Gasvorratsflasche mit Reduziventil, Stoppuhr, Haltevorrichtung, Wasserstrahlpumpe

## 23. Ausdehnungskoeffizient von Gasen

### G Grundlagen

Die Festlegung einer Temperaturskale unter Anwendung der Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten führt zu unterschiedlichen Skalen auf Grund der spezifischen Eigenchaften der Flüssigkeiten.

Die Gase zeigen ein einfacheres Verhalten insbesondere dann, wenn die Untersuchungen in einem Temperaturbereich geführt werden, der vom Siedepunkt des betreffenden Gases hinreichend weit entfernt ist.

Soll der Temperaturbegriff von den spezifischen Eigenschaften der Thermometersubstanz unabhängig sein, so läßt sich mit der thermischen Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (1)$$

eine Temperaturskale definieren. Diese Temperaturskale wird als *thermodynamische Temperaturskale* bezeichnet. Aus (1) ist zu erkennen, daß die Untersuchung einer abgeschlossenen Gasmenge auf zwei Wegen durchgeführt werden kann. Wird das Volumen des Gases konstant gehalten, so sind Druck und thermodynamische Temperatur einander proportional. Hält man den Druck konstant, so sind Volumen und thermodynamische Temperatur einander proportional.

(2) gibt den Zusammenhang der Zustandsvariablen  $p$ ,  $V$ ,  $T$  für zwei Zustände der abgeschlossenen Menge des idealen Gases an:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (2)$$

Zwischen der nach (1) definierten thermodynamischen Temperaturskale und der CELSIUS-Skale besteht der Zusammenhang  $T = \frac{1}{\gamma} + t$ , wobei  $\gamma$  der *Raumausdehnungs- bzw. Spannungskoeffizient* ist. Damit erhält (2) die Form

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \frac{(1 + \gamma t_2)}{(1 + \gamma t_1)} \quad (3)$$

Im vorliegenden Versuch soll das Volumen des zu untersuchenden Gases konstant gehalten werden, also  $V_1 = V_2$ . Das Gas wird vom Zustand  $p_1, t_1$  in den Zustand  $p_2, t_2$  gebracht. Aus (3) erhält man den Ausdehnungskoeffizienten

$$\gamma = \frac{p_2 - p_1}{p_1 t_2 - p_2 t_1} \quad (4)$$

Gleichung (4) liegt dem durchzuführenden Versuch zugrunde.

## V Versuchsdurchführung

Der mit dem zu untersuchenden Gas gefüllte Glaskolben G (Bild 51) hat das Volumen  $V$  und ist durch ein Glasrohr mit einem Quecksilbermanometer verbunden. In dem Glasrohr befindet sich ein Dreiwegehahn, der es ermöglicht, ein anderes Gas einzufüllen. Die Quecksilberoberflächen des Manometers werden so eingestellt, daß die des rechten Schenkels stets mit der Ringmarkierung RM übereinstimmt.

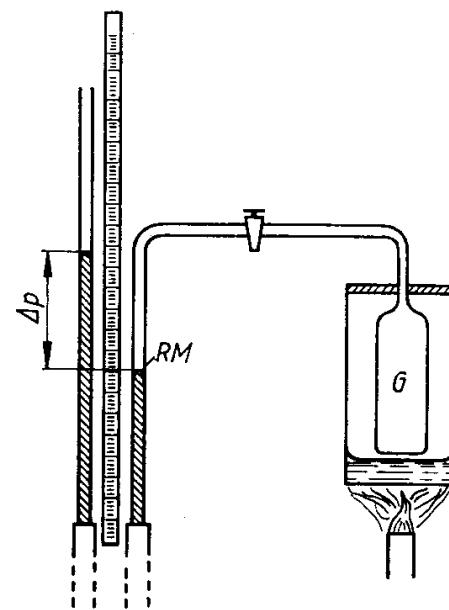


Bild 51

Der Glaskolben wird so lange mit Eiswasser begossen, bis die Druckanzeige am Manometer konstant bleibt. Der Druckunterschied  $\Delta p_0$  wird abgelesen. Beträgt der Außendruck  $p_0$ , so ist der absolute Druck des im Glaskolben eingeschlossenen Gases bei der Temperatur  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  des schmelzenden Eises  $p_1 = p_0 + \Delta p_0$ . Nunmehr wird der Glaskolben in ein Erhitzungsgefäß mit Wasser gebracht. *Dabei ist darauf zu achten, daß der Glaskolben nicht in das Wasser eintaucht, da sonst durch den hydrostatischen Auftrieb das Verbindungsglasrohr auf Biegung beansprucht wird und bricht.* Mit einem BUNSEN-Brenner wird das Wasser im Erhitzungsgefäß zum Sieden gebracht. Der Glaskolben befindet sich im Wasserdampf der Temperatur  $t_2$ . Die Siedetemperatur des Wassers wird aus der Tabelle entnommen. Am Manometer wird der Druck  $\Delta p$  abgelesen und mit dem Außendruck  $p_0$  der absolute Druck des eingeschlossenen Gases  $p_2 = p_0 + \Delta p$  bestimmt. Nach (2) kann nunmehr  $\gamma$  errechnet werden.

**Nach dem Versuch ist der Dreiweghahn am Verbindungsglasrohr zu öffnen und Niveaugleichheit der Quecksilberkuppen herzustellen.**

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Ausdehnungskoeffizienten nach (4)!
2. Fehlerabschätzung
3. Begründen Sie, warum die Wärmeausdehnung des Glaskolbens nicht mit berücksichtigt wird!

- Schätzen Sie den Fehler ab, der entsteht, wenn sich im Glaskolben bei 0°C ein Wassertropfen von 1 mg Masse befindet!
- Warum muß nach dem Versuch der Dreiwegehahn am Verbindungsglasrohr geöffnet werden?

*Versuchsgeräte:* Stativ mit Glaskolben und Quecksilberthermometer, Stativ mit Siedegerät und BUNSEN-Brenner, große Schale, Becherglas

## 24. Spezifische Verdampfungswärme

### G Grundlagen

Führt man einer Flüssigkeit Wärme zu, so erhöht sich ihre Temperatur. Zwischen der zugeführten Wärmemenge  $Q$ , der Masse  $m$  der Flüssigkeit und der Temperaturänderung  $\Delta t$  besteht die Beziehung

$$Q = cm\Delta t \quad (1)$$

Wird der *Siedepunkt* erreicht, so führt Wärmezufuhr zu keiner weiteren Temperaturerhöhung. Die zugeführte Wärme ist erforderlich, um die Flüssigkeit zu verdampfen. Erst wenn die Flüssigkeit vollkommen in Dampf verwandelt ist, steigt die Temperatur weiter an.

Die *spezifische Verdampfungswärme*  $r$  ist der Quotient aus der zur Verdampfung der Flüssigkeit notwendigen Wärmemenge  $Q$  und der Masse  $m$  der Flüssigkeit:

$$r = \frac{Q}{m} \quad (2)$$

Beim Kondensieren des Dampfes wird die gleiche Wärmemenge  $Q$  wieder frei; Die spezifische Kondensationswärme ist gleich der spezifischen Verdampfungswärme.

### V Versuchsdurchführung

Es soll die spezifische Verdampfungswärme von Wasser bestimmt werden. Wasserdampf wird in ein halb mit Wasser gefülltes Kalorimeter eingeleitet. Die Mischungstemperatur folgt aus dem Energieerhaltungssatz, nach dem die vom kälteren Körper aufgenommene Wärmemenge gleich der vom wärmeren Körper abgegebenen Wärmemenge ist. Bezeichnet man die Masse des eingeleiteten Wasserdampfes mit  $m_D$ , so gibt der Dampf beim Kondensieren nach (2) die Wärmemenge

$$Q = rm_D \quad (3)$$

ab. Das Kondenswasser kühlt sich von der Siedetemperatur  $t_s$  auf die Mischungstemperatur  $t_m$  ab. Dabei wird nach (1) die Wärmemenge

$$Q_1 = c_w m_D (t_s - t_m) \quad (4)$$

abgegeben.

Die Temperatur des Wassers (Masse  $m_w$ ) im Kalorimeter erhöht sich von  $t$  auf  $t_m$ . Auch das Kalorimeter mit der Wärmekapazität  $C$  nimmt Wärme auf. Die gesamte Wärmeaufnahme ist daher

$$Q_2 = (c m_w + C) (t_m - t) \quad (5)$$

Nach dem Energiesatz gilt nunmehr

$$Q_2 = Q + Q_1$$

Mit (3), (4) und (5) folgt

$$(c m_w + C) (t_m - t) = r m_D + c m_D (t_s - t_m)$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{(c m_w + C) (t_m - t)}{m_D} - c (t_s - t_m) \quad (6)$$

Man bestimmt zunächst die Masse  $m_0$  des leeren Kalorimeters und füllt es dann etwa zur Hälfte mit Wasser. Die anschließende Wägung ergibt  $m_1$ . Daraus erhält man die Masse des Wassers:

$$m_w = m_1 - m_0 \quad (7)$$

Im Siedegefäß (ERLENMEYER-Kolben, Bild 52) bringt man Wasser zum Sieden. Wenn der Dampfleitung gleichmäßig Dampf entströmt, wird zunächst die Temperatur  $t$  des Wassers im Kalorimeter abgelesen, dann der Dampf eingeleitet und laufend um-

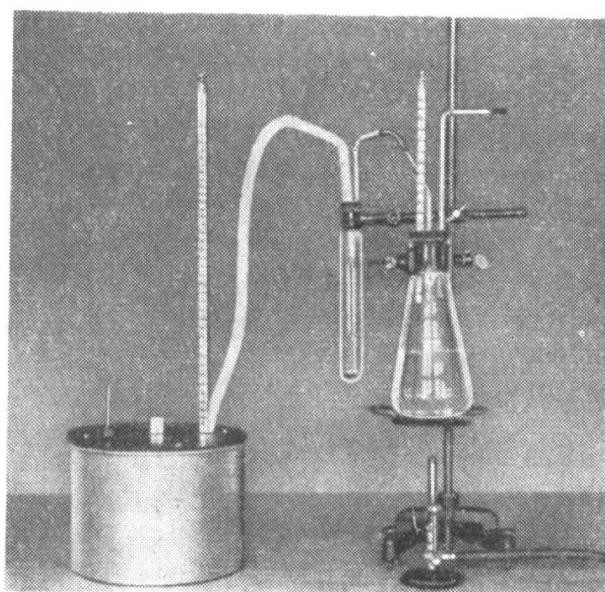


Bild 52

gerührt. Wenn die Temperatur des Wassers im Kalorimeter auf etwa  $40^{\circ}\text{C}$  angestiegen ist, wird die Dampfzufuhr unterbrochen und die Temperatur  $t_m$  abgelesen, nachdem man das Wasser gut durchgerührt hat. Die anschließende Wägung ergibt  $m_2$ . Der eingeleitete Dampf hat damit die Masse

$$m_D = m_2 - m_1 \quad (8)$$

Mit (7) und (8) erhält man aus (6)

$$r = \frac{[c(m_1 - m_0) + C](t_m - t)}{m_2 - m_1} - c(t_s - t_m) \quad (9)$$

Zur genauen Bestimmung der Temperaturen  $t$  und  $t_m$  wendet man zweckmäßig das in Versuch 18 beschriebene grafische Verfahren an. Man hat dazu die Temperatur im Kalorimeter in Abhängigkeit von der Zeit aufzunehmen. Die Temperatur wird in Abständen von 30 s gemessen. Man beginnt etwa 10 min vor dem Einleiten des Dampfes und beendet die Messungen etwa 10 min nach der Unterbrechung der Dampfzufuhr.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifische Verdampfungswärme des Wassers!
2. Fehlerabschätzung
3. Woran kann es liegen, wenn der von Ihnen bestimmte Wert für  $r$  zu niedrig ausgefallen ist?

**Versuchsgeräte:** Kalorimeter, ERLENMEYER-Kolben, Reagenzglas, 2 durchbohrte Gummistopfen, Glasrohr, Asbestschnur, Stativmaterial, BUNSEN-Brenner, Dreifuß, Asbestdrahtnetz, Thermometer ( $0,1\text{ K}$ ), Waage

## 25. Spezifische Schmelzwärme

## G Grundlagen

Führt man einem festen Körper Wärmeenergie zu, so erhöht sich seine Temperatur. Wenn der *Schmelzpunkt* erreicht ist, erzielt man durch Wärmezufuhr keine weitere Temperaturerhöhung; die zugeführte Energie wird benutzt, um das Kristallgitter des festen Körpers zu zerstören, d. h. den Körper vom festen in den flüssigen Aggregatzustand überzuführen. Wenn alle feste Substanz in Flüssigkeit verwandelt worden ist, steigt die Temperatur weiter an.

Die spezifische Schmelzwärme  $q$  ist der Quotient aus der zum Schmelzen der festen Substanz notwendigen Wärmemenge  $Q$  und der Masse  $m$  der Substanz:

$$q = \frac{Q}{m} \quad (1)$$

Beim Erstarren der Flüssigkeit wird die gleiche Wärmemenge  $Q$  wieder frei.

## V Versuchsdurchführung

Es soll die spezifische Schmelzwärme von Eis bestimmt werden. Wir benutzen Eis mit einer Temperatur von  $0^\circ\text{C}$ . Dieses Eis sieht durchsichtig aus. Zunächst ist die Masse  $m_0$  des Kalorimeters zu bestimmen. Das Kalorimeter wird dann mit warmem Wasser (etwa  $40^\circ\text{C}$ ) gefüllt und gewogen:  $m_1 = m_0 + m_w$ . Daraus folgt die Masse des Wassers:

$$m_w = m_1 - m_0 \quad (2)$$

Nachdem die Temperatur  $t_w$  des Wassers gemessen worden ist, wird das sorgfältig abgetrocknete Eis (Masse  $m_E$ ) in das Kalorimeter gebracht. Mit dem Rührer wird umgerührt, bis die Temperatur nahezu konstant bleibt. Die Mischungstemperatur  $t_m$  ist abzulesen. Zum Schluß ist das gefüllte Kalorimeter nochmals zu wägen:  $m_2 = m_1 + m_E$ . Daraus folgt die Masse des Eises:

$$m_E = m_2 - m_1 \quad (3)$$

Das Wasser und das Kalorimeter (Wärmekapazität  $C$ ) mit der Temperatur  $t_w$  kühlen sich auf die Mischungstemperatur  $t_m$  ab;  $Q_1$  wird frei:

$$Q_1 = (cm_w + C)(t_w - t_m) \quad (4)$$

Zum Schmelzen des Eises ist nach (1) die Wärmemenge

$$Q = qm_E \quad (5)$$

erforderlich. Das Schmelzwasser wird noch von  $0^\circ\text{C}$  auf die Mischungstemperatur  $t_m$  erwärmt. Dabei nimmt es die Wärmemenge

$$Q_2 = cm_E t_m \quad (6)$$

auf. Insgesamt gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$Q_1 = Q + Q_2$$

Mit (4), (5) und (6) folgt

$$(cm_w + C)(t_w - t_m) = qm_E + cm_E t_m$$

Daraus ergibt sich

$$q = \frac{(cm_w + C)(t_w - t_m)}{m_E} - ct_m$$

Berücksichtigt man schließlich noch (2) und (3), so erhält man

$$q = \frac{[c(m_1 - m_0) + C](t_w - t_m)}{m_2 - m_1} - ct_m \quad (7)$$

Zur genauen Bestimmung der Temperaturen  $t_w$  und  $t_m$  wird das in Versuch 18 beschriebene grafische Verfahren angewendet. Dazu ist es erforderlich, die Temperatur im Kalorimeter in Abhängigkeit von der Zeit aufzunehmen (etwa 10 min vor dem Einbringen des Eises bis 10 min nach beendetem Schmelzen in Abständen von 30 s).

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die spezifische Schmelzwärme des Eises!
2. Fehlerabschätzung
3. Diskussion der Fehlerquellen

*Versuchsgeräte:* Waage, Kalorimeter, Becherglas, Dreifuß, Asbestdrahtnetz, BUNSEN-Brenner, Thermometer (0,1 K)

## 26. Siedepunktserhöhung von Lösungen

### G Grundlagen

Eine Lösung siedet bei höherer Temperatur als das reine Lösungsmittel. Dabei hängt die Siedepunktserhöhung nicht von der Art des gelösten Stoffes ab. Nach dem RAOULT-schen Gesetz ist die Siedepunktserhöhung proportional der Anzahl der gelösten Teilchen, und damit der Stoffmenge  $n$ , und indirekt proportional der Masse  $m_L$  des Lösungsmittels. Der Proportionalitätsfaktor  $E$  heißt *ebullioskopische Konstante*:

$$\Delta T = E \frac{n}{m_L} \quad (1)$$

$[n] = \text{mol}$

$E$  hängt von der Art des Lösungsmittels ab und beträgt für

Wasser:  $E = 520 \text{ K g/mol}$

Äthanol:  $E = 1040 \text{ K g/mol}$

Propanon (Azeton):  $E = 1480 \text{ K g/mol}$

Äthansäure (Essigsäure):  $E = 3070 \text{ K g/mol}$

Führt man anstelle der Stoffmenge  $n$  über die Gleichung

$$n = \frac{m}{M} \quad (2)$$

die Masse  $m$  und die molare Masse  $M$  des gelösten Stoffes ein, so folgt aus (1)

$$\Delta T = E \frac{m}{M m_L} \quad (3)$$

Für Elektrolyte ergeben sich höhere Werte für  $\Delta T$ , da sich ein Teil der Moleküle in Ionen aufspaltet. Daher ist die Anzahl der gelösten Teilchen größer. Als *Dissoziationsgrad* definiert man den Quotienten aus der Anzahl  $a$  der dissoziierten Moleküle und der Gesamtzahl  $N$  der Moleküle:

$$\alpha = \frac{a}{N} \quad (4)$$

Spaltet sich das Molekül in  $z$  Ionen auf, so ist die Zahl der Ionen  $za$  und die Zahl der undissoziierten Moleküle  $N - a$ , die Gesamtzahl der Teilchen also

$$N' = N - a + za$$

Aus (4) folgt  $a = \alpha N$ . Damit wird

$$\begin{aligned} N' &= N - \alpha N + z\alpha N \\ N' &= N[1 + (z - 1)\alpha] \end{aligned} \quad (5)$$

Die Teilchenzahl  $N'$  ist daher um den Faktor  $[1 + (z - 1)\alpha]$  größer als bei einem Nichtelektrolyten. Für einen Elektrolyten gilt deshalb anstelle von (2)

$$\Delta T = E \frac{m}{M m_L} [1 + (z - 1)\alpha]$$

Der Dissoziationsgrad kann daraus berechnet werden zu

$$\alpha = \frac{1}{z - 1} \left( \frac{\Delta T M m_L}{E m} - 1 \right) \quad (6)$$

## V Versuchsdurchführung

In ein 400-ml-Becherglas werden Siedesteine eingelegt (zur Vermeidung des Siedeverzuges) und ein Uhrglas aufgelegt. Die Gesamtmasse  $m_0$  wird auf 0,1 g genau bestimmt. Das Becherglas wird etwa zur Hälfte mit destilliertem Wasser gefüllt und das Wasser zum Sieden gebracht.

Zur genauen Messung der Temperaturdifferenz dient das BECKMANN-Thermometer (Bild 53). Es umfaßt einen Meßbereich von etwa 5 K; die Teilung beträgt  $10^{-2}$  K. Mit einer Lupe können  $10^{-3}$  K noch abgelesen werden. Damit die Messung von Tempe-

raturdifferenzen bei verschiedenen Temperaturen möglich ist, kann der Quecksilberinhalt verändert werden. Bei niedrigen Temperaturen wird aus dem oberen Vorratsgefäß Quecksilber nachgefüllt; bei höheren Temperaturen wird Quecksilber in das obere Gefäß gebracht. An der oberen Hilfsskale kann die Temperatur abgelesen werden,

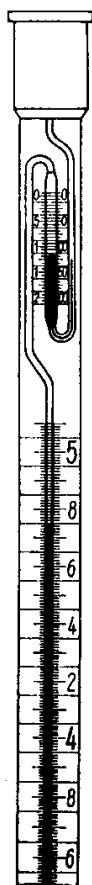


Bild 53

bei der das Thermometer meßbereit ist. Man stellt das BECKMANN-Thermometer nun so ein, daß die Siedetemperatur des reinen Wassers im unteren Teil der Skale angezeigt wird. Diese Temperatur ist abzulesen ( $T_0$ ). Dann werden  $m \approx 10 \text{ g}$  (auf 10 mg genau wägen) der Versuchssubstanz 1 (Nichtelektrolyt) in das destillierte Wasser eingebracht. Die Siedetemperatur steigt auf  $T_1$ . Nachdem  $T_1$  abgelesen ist, wird sofort das Uhrglas aufgelegt, damit kein Wasser mehr verdampfen, die Konzentration sich also nicht mehr ändern kann. Die Wägung ergibt  $m_1 = m_0 + m + m_L$ . Daraus ist die Masse des Lösungsmittels zu bestimmen:

$$m_L = m_1 - m_0 - m \quad (7)$$

Die Temperaturdifferenz ergibt sich zu

$$\Delta T = T_1 - T_0 \quad (8)$$

Aus (3) kann die molare Masse  $M$  berechnet werden.

Im zweiten Teil des Versuches soll der Dissoziationsgrad eines Elektrolyten (Versuchssubstanz 2) bestimmt werden. Wir verwenden Kochsalz (NaCl) mit der molaren

Masse 58,43 g/mol. Kochsalz dissoziiert nach der Gleichung



Es ist daher  $z = 2$ . Der Versuch läuft wie beschrieben. Nach (6) kann der Dissoziationsgrad  $\alpha$  berechnet werden.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie nach (3) die molare Masse der Versuchssubstanz 1!
2. Bestimmen Sie nach (6) den Dissoziationsgrad der Versuchssubstanz 2!
3. Fehlerabschätzung

*Versuchsgeräte:* BECKMANN-Thermometer, Becherglas mit Uhrglas, Siedesteine, Stativmaterial, BUNSEN-Brenner, Dreifuß, Asbestdrahtnetz, Waage.

## 27. Gefrierpunktserniedrigung von Lösungen

## G Grundlagen

Eine Lösung erstarrt bei niedrigerer Temperatur als das reine Lösungsmittel. Wie die Siedepunktserhöhung (vgl. Versuch 26) ist auch dieser Effekt nicht abhängig von der Art des gelösten Stoffes, sondern nur von der molaren Konzentration. Entsprechend den in Versuch 26 abgeleiteten Beziehungen gelten für die Gefrierpunktserniedrigung folgende Gleichungen:

$$M = \frac{Km}{\Delta T m_L} \quad (1)$$

mit

$$\Delta T = T_0 - T_1 \quad (2)$$

Darin bedeuten:

$m$  Masse des gelösten Stoffes

$m_L$  Masse des Lösungsmittels

$M$  molare Masse

$T_0$  Gefrierpunkt des Lösungsmittels

$T_1$  Gefrierpunkt der Lösung

$K$  kryoskopische Konstante

$K$  beträgt für

Wasser:  $K = 1860 \text{ K g/mol}$  Trichlormethan:  $K = 29800 \text{ K g/mol}$

Benzol:  $K = 5070 \text{ K g/mol}$  Äthansäure (Essigsäure):  $K = 3900 \text{ K g/mol}$

Für den Dissoziationsgrad von Elektrolyten gilt entsprechend Versuch 26, Gleichung (6):

$$\alpha = \frac{1}{z - 1} \left( \frac{\Delta T M m_L}{K_m} - 1 \right) \quad (3)$$

## V Versuchsdurchführung

Es wird der *Beckmannsche Apparat* (Bild 54) verwendet. Dieser besteht aus einem weiten Reagenzglas R, das das Lösungsmittel aufnimmt. Das Reagenzglas ist mit einem durchbohrten Stopfen St verschlossen, durch den das BECKMANN-Thermometer B (Bild 54) und der Rührer Rü eingeführt werden. Seitlich trägt das Reagenzglas

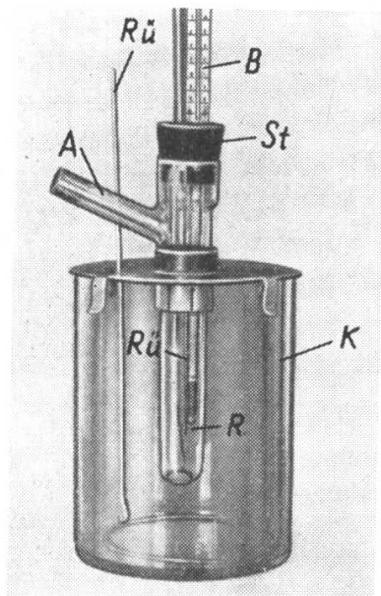


Bild 54

einen Rohransatz A, durch den die Versuchssubstanz eingebracht wird. Das Reagenzglas R befindet sich in einem etwas weiteren Glas, so daß es von einem Luftmantel, der ungleichmäßige Abkühlung verhindern soll, umgeben ist. (Bei einfacheren Apparaturen, auch in Bild 54, wird zuweilen auf diesen Luftmantel verzichtet.) Das Ganze wird in ein Gefäß K gehängt, das die Kältemischung (Eis mit Viehsalz) enthält.

Die Arbeitsweise des BECKMANN-Thermometers wurde in Versuch 26 beschrieben. In einem Vorversuch bringt man das BECKMANN-Thermometer in ein Becherglas mit schmelzendem Eis und stellt es so ein, daß die Schmelztemperatur des Eises im *oberen* Teil der Skale angezeigt wird, damit eine spätere Gefrierpunktterniedrigung abgelesen werden kann.

Dann füllt man mit einer Meßpipette destilliertes Wasser (Masse  $m_L$ ) in das Reagenzglas R und zerstoßenes Eis mit Viehsalz in das Gefäß K. Das BECKMANN-Thermometer wird in das Reagenzglas R eingesetzt. Unter ständigem Rühren beobachtet man das Sinken der Temperatur bis zum Gefrierpunkt  $T_0$ . Meist tritt eine *Unter-*

*kühlung* auf: Das Wasser bleibt auch unterhalb des Gefrierpunktes flüssig. Dann erfolgt plötzlich (bei energischem Rühren) eine Ausscheidung von Eis, und die Temperatur steigt auf  $T_0$  an. Diese Temperatur ist zu notieren. Sodann erwärmt man das Reagenzglas R vorsichtig, bis alles Eis geschmolzen ist, und bringt durch den Rohrabsatz A die Versuchssubstanz, deren Masse vorher auf 10 mg genau bestimmt worden ist, in das Reagenzglas R und läßt abkühlen. Auch hierbei tritt meist wieder eine Unterkühlung auf. Die Temperatur steigt nach Aufhebung der Unterkühlung unter Ausscheidung fester Substanz auf die Temperatur  $T_1$ , den Gefrierpunkt der Lösung, an. Durch Ausfrieren eines Teiles des Lösungsmittels sinkt die Gefriertemperatur der Lösung allmählich weiter ab, da die Konzentration der Lösung steigt. Es ist daher die Temperatur zu notieren, die bei der Bildung der *ersten* festen Substanz herrscht.

## A Aufgaben

1. Messen Sie die Gefrierpunktserniedrigung für einen Nichtelektrolyten (Versuchssubstanz 1), und berechnen Sie nach (1) die molare Masse!
2. Der Versuch ist für einen Elektrolyten bekannter chemischer Zusammensetzung (Versuchssubstanz 2) zu wiederholen. Nach (3) ist der Dissoziationsgrad zu berechnen.
3. Fehlerabschätzung

*Versuchsgeräte:* BECKMANNscher Apparat, Meßpipette, Becherglas, Waage

## 28. Luftfeuchte

### G Grundlagen

Der Wasserdampfgehalt der Luft, ihre Feuchte, ist von großer Bedeutung für die Meteorologie, spielt aber auch in vielen Industriezweigen, z. B. Papier-, Textil-, Lebensmittel- und Lackindustrie, eine bedeutende Rolle.

Ein Maß für den Wasserdampfgehalt der Luft ist die absolute Luftfeuchte  $f$ . Sie gibt an, welche Masse Wasserdampf in einem Luftvolumen enthalten ist. Es gilt:

$$f = \frac{m_D}{V} \quad (1)$$

Bei gegebener Temperatur kann die absolute Luftfeuchte einen bestimmten charakteristischen Wert, das *Sättigungsmaximum* oder die *maximale Luftfeuchte*  $f_0$ , nicht überschreiten. Dieser Wert entspricht dem Wert der Dichte des gesättigten Wasserdampfes. Mit steigender Temperatur wächst die Fähigkeit der Luft, Wasserdampf aufzunehmen. Diese Tatsache benutzt man z. B. bei Trocknungsanlagen.

Das Verhältnis der bei einer bestimmten Temperatur vorhandenen absoluten Luftfeuchte  $f$  zur maximalen Luftfeuchte  $f_0$  nennt man die relative Luftfeuchte  $\varphi$ . Es gilt:

$$\varphi = \frac{f}{f_0} \quad (2)$$

Um die Luftfeuchte zu bestimmen, sind verschiedene Verfahren möglich, die unter dem Namen *Hygrometrie* zusammengefaßt werden.

Im Versuch soll die relative Luftfeuchte mit dem *Taupunkthygrometer* und mit dem *Aspirations-Psychrometer* bestimmt werden. Die Werte für die Luftfeuchte und den Partialdruck des Wasserdampfes sind in Tabellen angegeben.

### *Das Taupunkthygrometer nach Lambrecht*

Wird Luft, die nicht mit Wasserdampf gesättigt ist, abgekühlt, so ändert sich ihre absolute Feuchte zunächst nicht, bis die Temperatur so weit gesunken ist, daß absolute Feuchte und maximale Feuchte gleich sind. Die Temperatur, bei der das der Fall ist, nennt man den Taupunkt  $\tau$ . Bei Abkühlung unter den Taupunkt kondensiert der überschüssige Wasserdampf. Dabei wird, worauf RECKNAGEL<sup>1)</sup> hinweist, sich die Dichte der abgekühlten feuchten Luft ändern; denn die Abkühlung findet bei konstantem Druck statt. Dann muß wegen  $pV = \frac{m}{M} RT$  mit  $m = V\varrho$  die Dichte der Luft größer werden. Dies bedeutet also, daß die absolute Luftfeuchte korrigiert werden muß. Da sich die Wasserdampfmenge  $m_D$  nicht geändert hat, ist nach Gleichung (1)  $m_D = fV = f_\tau V_\tau$ . Daraus folgt für die gesuchte absolute Luftfeuchte bei der Temperatur  $t$

$$f = f_\tau \frac{V_\tau}{V} \quad (3)$$

Wendet man die Zustandsgleichung auf beide Zustände an:

$$pV = \frac{m_D}{M} R(T_0 + t)$$

und

$$pV_\tau = \frac{m_D}{M} R(T_0 + \tau)$$

und vergleicht die beiden Ausdrücke miteinander, so ergibt sich

$$\frac{V_\tau}{V} = \frac{T_0 + \tau}{T_0 + t} \quad (4)$$

<sup>1)</sup> A. RECKNAGEL: Physik II. Berlin: VEB Verlag Technik

(4) in (3) eingesetzt:

$$f = f_r \frac{T_0 + \tau}{T_0 + t} \quad (5)$$

liefert den korrigierten Wert für die absolute Luftfeuchte.

Kennt man den Taupunkt, so kann man aus Tabellen die absolute Luftfeuchte nach (2) unter Beachtung von (5) errechnen, wenn die Umgebungstemperatur  $t$  bekannt ist.

### *Das Aspirations-Psychrometer nach Aßmann*

Dieses Instrument besteht im wesentlichen aus zwei nebeneinanderstehenden, genau übereinstimmenden Thermometern. Das Gefäß des einen Thermometers wird mit einer feuchten Stoffhülle umgeben. Das andere Thermometer bleibt trocken und gibt die Temperatur der umgebenden Luft an. Ist diese mit Wasserdampf gesättigt, so zeigen die beiden Thermometer die gleiche Temperatur an. Andernfalls verdunstet das Wasser am befeuchteten Thermometer. Es entzieht die zum Verdunsten notwendige Wärmemenge seiner Umgebung, welche sich demzufolge abkühlt. Das befeuchtete Thermometer zeigt eine tiefere Temperatur an als das trockene. Strömt das Luftvolumen  $V$  am befeuchteten Thermometer vorüber, so gibt dieses eine Wärmemenge ab, und die angezeigte Temperatur sinkt von  $t$  auf  $t'$ . Der Dampfdruck des im vorüberströmenden Luftvolumen enthaltenen Wasserdampfes ändert sich durch Wasser- aufnahme von  $p_D$  auf  $p_D'$ . Ist  $\varrho_D$  die Dichte des Wasserdampfes beim Luftdruck  $p$  so folgt aus  $p = \frac{\varrho_D RT}{M}$

$$\varrho_1 = \frac{p_D}{p} \varrho_D \quad \text{bzw.} \quad \varrho_2 = \frac{p_D'}{p} \varrho_D$$

Wegen  $m = V\varrho$  mit  $m = m_2 - m_1$  ist

$$m = (p_D' - p_D) \frac{\varrho_D V}{p}$$

Die von der strömenden Luft aufgenommene Wasserdampfmenge multipliziert man mit der spezifischen Verdampfungswärme und erhält damit die zum Verdunsten benötigte Wärmemenge  $Q$ :

$$Q = mr = (p_D' - p_D) \frac{\varrho_D V r}{p}$$

Ist am befeuchteten Thermometer keine Temperaturänderung mehr feststellbar, so gibt die strömende Luft die Wärmemenge

$$Q' = \varrho_L V c_L (t - t')$$

ab. ( $\varrho_L$  Dichte der Luft bei der Temperatur  $t$ ,  $c_L$  spez. Wärmekapazität der Luft.) Aus der Gleichheit der Wärmemengen ergibt sich für den in der strömenden Luft herrschenden Partialdruck des Wasserdampfes

$$p_D = p_D' - kp(t - t') \quad (6)$$

Die Größen  $\varrho_L$ ,  $\varrho_D$ ,  $c_L$ ,  $r$  wurden zu einer Konstanten  $k$  zusammengefaßt. Die Konstante erhält nach KOHLRAUSCH den Wert  $k = 0,00066 \text{ K}^{-1}$ .

Aus (6) erhält man den Partialdruck des Wasserdampfes  $p_D$ , aus Tabellen entnimmt man den zur Temperatur  $t$  gehörigen Sättigungsdruck  $p_s$  des Wasserdampfes und errechnet die relative Luftfeuchte nach der Gleichung

$$\varphi = \frac{p_D}{p_s} \quad (7)$$

## V Versuchsdurchführung

### Taupunkthygrometer

Die Gesamtansicht des Gerätes wird in Bild 55 gezeigt. In das Metallgefäß (1) wird etwas Äther gefüllt. Das Thermometer (2) muß dabei in den Äther eintauchen. Mittels Gummibläses (3) bläst man Luft durch den Äther und beschleunigt damit

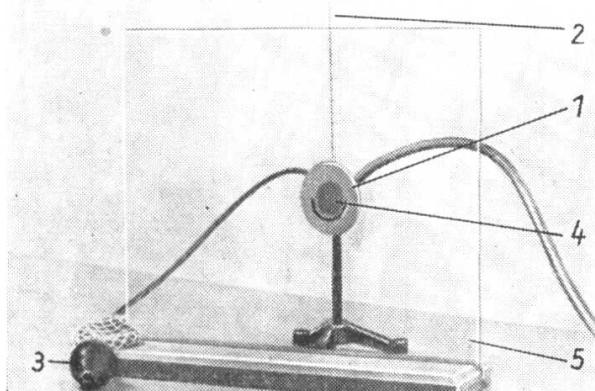


Bild 55

das Verdampfen desselben. Dabei kühlen sich der Äther und die polierte Metallfläche (4) ab. Bei einer bestimmten Temperatur, dem Taupunkt, beschlägt die Metallfläche. Um das Beschlagen recht deutlich sichtbar zu machen, steht nur die obere Hälfte der polierten Metallfläche mit dem Äther in Berührung. Durch eine Glasscheibe (5) wird die polierte Metallfläche vor der Atemluft des Beobachters geschützt. Sobald sich Wasserdampf auf der polierten Metallfläche kondensiert, wird mit dem Abkühlen aufgehört und die Temperatur  $\tau_1$  abgelesen. Dann wird gewartet, bis das Kondensat verschwindet, und die etwas höhere Temperatur  $\tau_2$  abgelesen.

Nach einiger Übung unterscheiden sich  $\tau_1$  und  $\tau_2$  nur noch wenig voneinander, und es kann

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

errechnet werden. Aus einer Tabelle entnimmt man den zu  $\tau$  gehörigen Wert  $f_r$ . Nach (2) und unter Beachtung von (5) wird die relative Luftfeuchte errechnet.

### *Aspirations-Psychrometer*

Die Gesamtansicht des Gerätes wird in Bild 56 gezeigt. Nachdem man den kleinen Wasserbehälter (1) mit Wasser gefüllt hat und das Thermometer (2) so eingerichtet worden ist, daß der Tüllbeutel in den Wasserbehälter hineintaucht, wird der Tischventilator (3) eingeschaltet. Nachdem die Temperatur  $t'$  sich nicht mehr ändert, werden die Temperaturen  $t$  und  $t'$  abgelesen. Aus der Tabelle werden die zu  $t$  und  $t'$  gehörigen Werte für  $p_s$  und  $p_{D'}$  entnommen. Nach (6) errechnet man  $p_D$  und mit (7)  $\varphi$ .

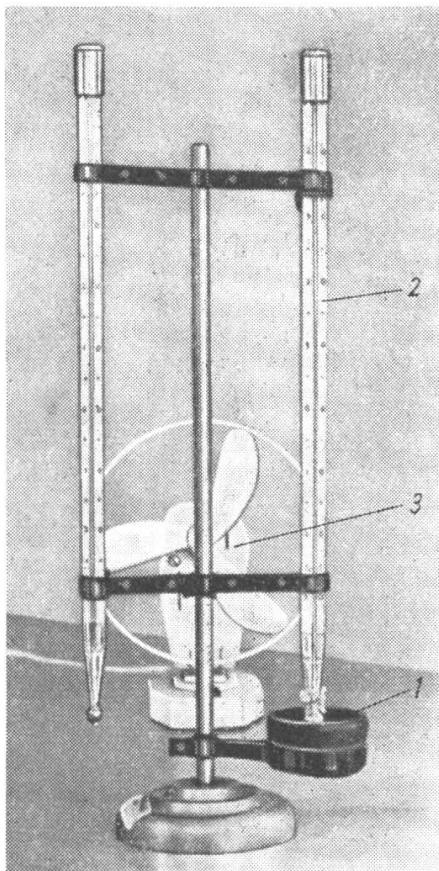


Bild 56

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie nach (2) die relative Luftfeuchte!
2. Bestimmen Sie das Sättigungsdefizit, d. h. die Wassermasse bezogen auf das Volumen, die bei der Temperatur  $t$  noch verdunsten kann!
3. Bestimmen Sie aus der Tabelle die absolute Feuchte auf Grund der Werte des Psychrometerversuches!
4. Bestimmen Sie aus der Tabelle den Taupunkt auf Grund des Psychrometerversuches!
5. Bestimmen Sie nach (7) die relative Luftfeuchte!
6. Erläutern Sie, warum eventuell Unterschiede im Ergebnis nach Aufgabe 1 und 5 auftreten!

*Versuchsgeräte:* Taupunkthygrometer komplett, Schutzscheibe, Vorratsflasche mit Äther, Aspirations-Psychrometer komplett, Tischventilator, Glastrichter

# **Elektrik**

## **29. Wirkungsgrad bei Erwärmung von Flüssigkeiten**

### **G Grundlagen**

In jedem Heizgerät wird elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Der *Wirkungsgrad* ist der Quotient aus der genutzten Wärmeenergie  $Q$  und der aufgenommenen elektrischen Energie  $W$ :

$$\eta = \frac{Q}{W} \quad (1)$$

Die Wärmeenergie  $Q$  erhöht die Temperatur des Wassers um  $\Delta T$ :

$$Q = cm\Delta T \quad (2)$$

$c$  spezifische Wärmekapazität des Wassers  
 $m$  Masse des Wassers

Die elektrische Energie hängt ab von der Spannung  $U$ , der Stromstärke  $I$  und der Zeit  $t$ :

$$W = UIt \quad (3)$$

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so folgt

$$\eta = \frac{cm\Delta T}{UIt} \quad (4)$$

Die Wärmeenergie kann in allen Energieeinheiten gemessen werden (Joule, Kilojoule). Früher wurde die Kilokalorie verwendet, die definiert war als  $1 \text{ kcal} = 4,1868 \text{ kJ}$

### **V Versuchsdurchführung**

Im Versuch soll der Wirkungsgrad bei der Erwärmung von Wasser mit einer Heizplatte und einem Tauchsieder bestimmt werden.

Zunächst ist die Masse  $m_0$  des Topfes festzustellen. Der Topf wird zu etwa 2/3 mit Wasser gefüllt und gewogen ( $m_1$ ). Die Masse des Wassers ist damit

$$m = m_1 - m_0$$

Die Schaltung ist nach dem Schaltbild (Bild 57) aufzubauen und *prüfen zu lassen*. Dann wird die Temperatur  $T_0$  des Wassers gemessen und das Heizgerät eingeschaltet. In Abständen von 2 min sind Temperatur, Spannung und Stromstärke abzulesen. Wenn die Temperatur etwa  $95^\circ\text{C}$  erreicht hat, wird der Versuch abgebrochen. Der Wirkungs-

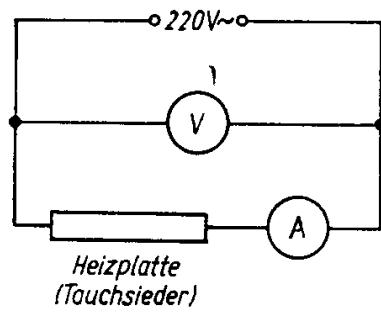


Bild 57

<i>Stromart</i>	{	Gleichstrom Wechselstrom Allstrom
<i>Gebrauchslage</i>	{	senkrecht waagerecht
<i>Art des Meßwerkes</i>	{	Drehspulmeßwerk Drehspulmeßwerk mit Gleichrichter Dreheisenmeßwerk Hitzdrahtmeßwerk
<i>Prüfspannung</i>	{	500V 2000V

Bild 58

grad ist nach (4) zu berechnen. Dabei sind Mittelwerte aus den Ablesungen für Stromstärke und Spannung zu bilden.

Der Versuch wird mit einem Tauchsieder wiederholt. In zwei weiteren Versuchen wird ein Deckel aufgelegt, der mit Öffnungen für Tauchsieder und Thermometer versehen ist.

Neben dem Klassenzeichen (vgl. [2.2.1.]) befinden sich auf jedem elektrischen Meßgerät noch einige Zeichen, deren wichtigste in Bild 58 erklärt werden. Die Angaben beziehen sich auf

- die *Stromart*, für die das Meßgerät zu verwenden ist,
- die *Gebrauchslage* des Gerätes — nur für die vorgeschriebene Gebrauchslage gilt die angegebene Klasse des Meßinstrumentes —,
- die *Art des Meßwerkes*,
- die *Prüfspannung* — sie macht Aussagen über die Isolation des Gerätes —,
- das *Firmenzeichen des Herstellerbetriebes*.

## A Aufgaben

1. Nehmen Sie die Temperatur-Zeit-Diagramme für folgende Anordnungen auf:
  - 1.1. Heizplatte, Topf ohne Deckel
  - 1.2. Tauchsieder, Topf ohne Deckel
  - 1.3. Tauchsieder, Topf mit Deckel
  - 1.4. Heizplatte, Topf mit DeckelAlle 4 Kurven sollen in *ein* Diagramm gezeichnet werden.
2. Berechnen Sie den Wirkungsgrad in allen 4 Fällen!
3. Fehlerabschätzung
4. Ausführliche Diskussion der Ergebnisse

*Versuchsgeräte:* Heizplatte und Tauchsieder gleicher Leistung, Klemmleiste, Topf mit Deckel, Thermometer, Stromstärkemesser, Spannungsmesser, Stoppuhr, Dreifuß, Waage

## 30. Wheatstonesche Brücke

### G Grundlagen

Die Brückenschaltung ermöglicht die Bestimmung von Widerständen durch Vergleich mit bekannten Normalwiderständen. Die Widerstände sind nach Bild 59 geschaltet. Die Spannung wird an *A* und *B* gelegt. Zwischen *C* und *D* liegt ein empfindliches Galvanometer, ein Nullinstrument. (Ein Nullinstrument dient zum Nachweis der

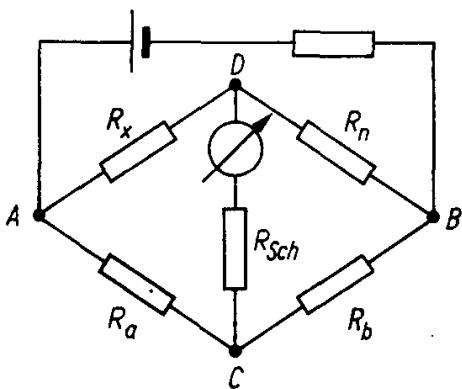


Bild 59

Stromlosigkeit; es braucht daher nicht geeicht zu sein. Der Nullpunkt befindet sich in der Mitte der Skale.) Vor dem Galvanometer liegt ein Schutzwiderstand  $R_{Sch}$ , der bei der Feinmessung kurzgeschlossen werden kann. In den Knotenpunkten *A* und *B* verzweigt sich der Strom. Wenn *C* und *D* auf gleichem Potential liegen, bleibt die Brücke *CD* stromlos. Das erfordert, daß die Spannung zwischen *A* und *D* gleich der

zwischen  $A$  und  $C$  ist. Dann sind auch die Spannungen zwischen  $D$  und  $B$  und zwischen  $C$  und  $B$  einander gleich:

$$U_{AD} = U_{AC} \quad (1)$$

$$U_{BD} = U_{BC}$$

Nach dem OHM'schen Gesetz ist  $U = IR$ . Damit wird aus (1)

$$I_x R_x = I_a R_a \quad (2 \text{ a})$$

$$I_n R_n = I_b R_b \quad (2 \text{ b})$$

Bei stromloser Brücke muß weiter gelten:

$$I_n = I_x$$

$$I_b = I_a$$

Damit wird aus (2 a) und (2 b)

$$I_x R_x = I_a R_a$$

$$I_x R_n = I_a R_b$$

Die Stromstärken können durch Division eliminiert werden. Man erhält

$$\frac{R_x}{R_n} = \frac{R_a}{R_b} \quad (3)$$

Wie man aus (3) erkennt, geht in die Rechnung das Verhältnis  $R_a/R_b$  ein. Nach  $R = \rho \frac{l}{A}$  ist der Widerstand eines Drahtes der Drahtlänge proportional. Verwendet man für  $R_a$  und  $R_b$  einen Widerstandsdräht von überall gleichem Querschnitt, so kann man anstelle von (3) setzen:

$$R_x = R_n a/b \quad (4)$$

Der Widerstandsdräht wird längs einer Skale aufgespannt. Auf ihm gleitet ein Schleifkontakt (Punkt  $C$  des Schaltbildes), der seine Länge im Verhältnis  $a/b$  teilt. Für die Reihenschaltung zweier Widerstände gilt

$$R = R_1 + R_2, \quad (5)$$

für die Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

oder

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (6)$$

## V Versuchsdurchführung

Die Schaltung ist nach Bild 59 aufzubauen und *prüfen zu lassen*. Da die Meßgenauigkeit in der Mitte der Brücke am größten ist, sollen  $a$  und  $b$  etwa gleich sein. Nach (4) setzt das voraus, daß der Normalwiderstand  $R_n$  etwa gleich dem zu messenden unbekannten Widerstand ist. Man geht folgendermaßen vor:

Zunächst schaltet man das Galvanometer auf „grob“. Dadurch ist dem Galvanometer der Schutzwiderstand  $R_{Sch}$  vorgeschaltet. Dann stellt man den Schleifkontakt in Mittelstellung ( $a/b = 1$ ), schaltet den Strom ein und verändert den Normalwiderstand, bis der Ausschlag des Nullinstrumentes möglichst klein ist. Jetzt wird die Brücke abgeglichen, d. h., der Schleifkontakt wird so eingestellt, daß die Brücke  $CD$  stromlos wird. Dann schließt man den Schutzwiderstand  $R_{Sch}$  kurz (Schalter auf „fein“) und gleicht die Brücke nochmals ab.  $R_n$ ,  $a$  und  $b$  werden abgelesen und das *Galvanometer sofort wieder auf grob geschaltet*.

## A Aufgaben

1. Berechnen Sie die Spannung, die angelegt werden kann, ohne daß eine Überlastung der Normalwiderstände eintritt!
2. Messen Sie die vorgelegten Widerstände mit der WHEATSTONESchen Brücke!
3. Widerstände von gleicher Größenordnung sind paarweise in Reihe und parallel zu schalten. Die Gleichungen (5) und (6) sind zu prüfen.
4. Fehlerabschätzung
5. Führen Sie für einige Widerstände eine Vergleichsmessung mit einem Ohmmeter durch! (Bild 60)

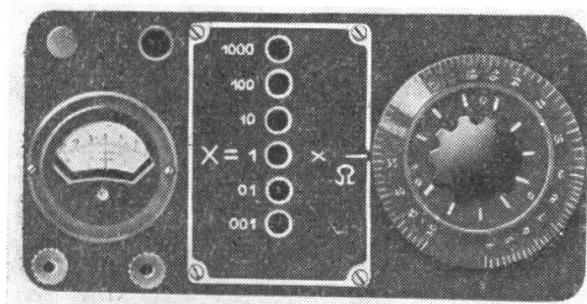


Bild 60

6. Weisen Sie rechnerisch nach, daß der Meßfehler in der Mitte der Brücke am kleinsten ist!

*Versuchsgeräte:* WHEATSTONESche Brücke, Normalwiderstände verschiedener Größenordnung (Dekadenwiderstände), Galvanometer mit Schutzwiderstand, Klemmleiste, verschiedene Widerstände (Kohleschichtwiderstände), Ohmmeter

## 31. Innenwiderstand eines Akkumulators

### G Grundlagen

Bei der Prüfung des Betriebszustandes von Batterien wird häufig der Fehler begangen, daß die Spannung der einzelnen Zellen mit einem Voltmeter gemessen wird, während keine anderen Verbraucher weiter angeschlossen sind. Die so gemessene Spannung sagt noch nicht alles über die Einsatzfähigkeit der Batterie aus.

Beim Anschluß eines Verbrauchers mit einem Widerstand von nur einigen Ohm kann die an den Anschlußklemmen gemessene Spannung erheblich tiefer liegen, als das im unbelasteten Zustand der Fall ist. Wenn lediglich der Spannungsmesser angeschlossen ist, darf die Spannungsquelle als unbelastet betrachtet werden, da dann nur Ströme von wenigen Milliampere fließen.

Der gegenüber dem unbelasteten Zustand eintretende Spannungsabfall ist nun keinesfalls eine Erscheinung, die nur bei nicht voll einsatzfähigen Batterien beobachtet werden kann. Spannungsquellen jeder Art weisen einen Unterschied zwischen *Leerlauf- und Betriebsspannung* auf. Es wird jedoch vom Hersteller angestrebt, diesen Unterschied bei normaler Belastung des Elementes oder auch des Generators möglichst klein zu halten.

Worauf ist der mit zunehmender Belastung größer werdende Abfall der an den Anschlußklemmen der Spannungsquelle zur Verfügung stehenden Spannung zurückzuführen?

Die durch elektrochemische Vorgänge im Element erzeugte Spannung, als Ursprung  $U_0$  bezeichnet, ruft bei geschlossenem Stromkreis einen Stromfluß hervor. Die Stärke des Stromes ergibt sich aus der vorhandenen Spannung und dem Gesamtwiderstand nach dem OHMSchen Gesetz:

$$I = \frac{U_0}{R} \quad (1)$$

Die Elektronen wandern vom Minuspol durch die angeschlossenen Verbraucher zum Pluspol der Spannungsquelle. Von dort werden sie mit Hilfe von chemischer Energie (im galvanischen Element) bzw. von mechanischer Energie (im Generator) wieder zum Minuspol gebracht, von wo aus sie ihren Weg von vorn beginnen. Das Elektrodenmaterial und der Elektrolyt im galvanischen Element bzw. die Spulenwicklung im Generator stellen nun aber ebenso elektrische Widerstände dar wie die Verbindungsdrähte, Widerstandsdrähte, Spulenwicklungen usw., die an die Spannungsquelle angeschlossen sind. Jeder Stromkreis stellt somit im Prinzip eine *Reihenschaltung* von zwei Widerständen, dem *inneren Widerstand*  $R_i$  der Spannungsquelle und dem *außen angeschlossenen Widerstand*  $R_a$ , dar (Bild 61).

Die zur Verfügung stehende Ursprungspannung verteilt sich nun auf diese Widerstände entsprechend dem Verhältnis ihrer Größe. Die an den Anschlußklemmen zur Verfügung stehende Spannung, als *Klemmenspannung*  $U$  bezeichnet, ist um den am *Innenwiderstand* auftretenden Spannungsabfall kleiner als die *Ursprungspannung*  $U_0$ :

$$U = U_0 - IR_i \quad (2)$$

Mit zunehmender Stromstärke wächst der Unterschied von Klemmen- und Urspannung.

Die Klemmenspannung ist nahezu gleich der Urspannung, wenn der innere Widerstand der Spannungsquelle klein gegenüber dem Gesamtwiderstand der angeschlossenen Geräte ist. Beim Aufbau einer Spannungsquelle muß deshalb grund-

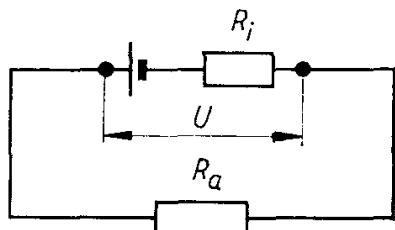


Bild 61

sätzlich angestrebt werden, den Innenwiderstand so klein wie möglich zu halten, um in den Grenzen der vorgesehenen Belastung nur unwesentliche Änderungen der Klemmenspannung zu verursachen.

## V Versuchsdurchführung

Die Urspannung könnte nur genau gemessen werden, wenn die Spannungsquelle durch das Meßgerät nicht belastet würde. Bei Verwendung eines Drehspulinstruments mit einem Innenwiderstand  $300 \Omega/V$  (Vielfachmeßgerät) beträgt das Verhältnis  $R_a$  zu  $R_i$  mindestens  $1000:1$ , wenn die Spannung einer Nicad- oder Bleizelle gemessen wird. Wird nur der Spannungsmesser angeschlossen, so darf die abgelesene Spannung als Urspannung betrachtet werden.

Nachdem die Urspannung  $U_0$  gemessen wurde, wird die Spannungsquelle stärker belastet (bis zu einigen Ampere). Dabei werden die Klemmenspannung und die Stromstärke gemessen. Aus (2) läßt sich  $R_i$  berechnen.

## A Aufgaben

1. Messen Sie mit einem hochohmigen Voltmeter die Urspannung  $U_0$ !
2. Stellen Sie mindestens 4 verschiedene Belastungsfälle (Bild 62) ein, so daß eine deutliche Verringerung der Klemmenspannung zu beobachten ist, und errechnen Sie jeweils den Innenwiderstand aus Urspannung, Klemmenspannung und Stromstärke!

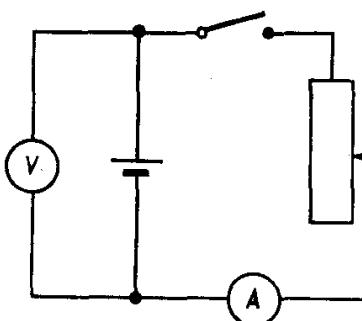


Bild 62

3. Begründen Sie, weshalb die an der Sekundärseite eines Transformators zur Verfügung stehende Spannung nicht gleich der sekundärseitig erzeugten Induktionsspannung ist, wenn der Transformator belastet wird!

**Versuchsgeräte:** Bleizelle oder Nicadzelle, Stromstärke- und Spannungsmesser, Schalter, regelbarer Widerstand (mit etwa 5 A belastbar)

## 32. Innenwiderstand von Stromstärke- und Spannungsmessern

### G Grundlagen

Werden Stromstärke- oder Spannungsmesser in einen Stromkreis eingeschaltet, so ändern sich die ursprüngliche Stromstärke und die Spannungsverteilung. Beim Einschalten eines Stromstärkemessers sinkt die Stromstärke, und beim Einschalten des Spannungsmessers steigt die Stromstärke in den Zuleitungen. Um den an einem Stromstärkemesser liegenden Spannungsabfall und den durch ein Voltmeter fließenden Strom bestimmen zu können, ist die Kenntnis des Meßgerätewiderstandes erforderlich. Das kann z. B. notwendig sein, um den wahren Wert eines Widerstandes

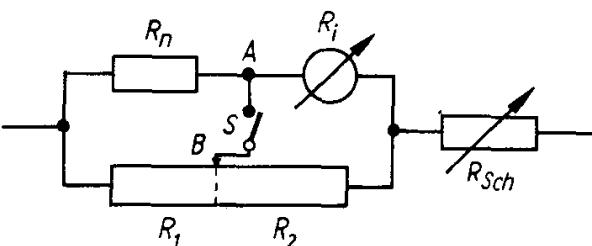


Bild 63

bei strom- bzw. spannungsrichtiger Messung ausrechnen zu können. Soll der Meßbereich eines Ampere- oder Voltmeters erweitert werden (s. Versuch 36), muß ebenfalls der *Innenwiderstand* des Gerätes bekannt sein.

Der Innenwiderstand eines Galvanometers lässt sich auf einfache Weise mit einer *Wheatstoneschen Brückenschaltung* bestimmen. Dabei ist das zu untersuchende Gerät gleichzeitig Anzeigegerät (Bild 63). Wie bei Versuch 30 bereits nachgewiesen wurde, fließt in der Brücke (zwischen den Punkten A und B) auch bei geschlossenem Schalter S kein Strom, wenn das Widerstandsverhältnis gilt:

$$\frac{R_n}{R_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$

Zwischen A und B besteht dann keine Spannung. Das bedeutet aber, daß es in diesem Falle völlig gleichgültig ist, ob der Schalter geschlossen oder offen ist. Ist die Brücke nicht abgeglichen, so ändert sich beim Schließen bzw. Öffnen des Schalters die Strom-

Verteilung in der Brücke, und der Ausschlag des Meßgerätes wird größer oder kleiner. Der Widerstand  $R_{\text{Sch}}$  schützt das Gerät vor Überlastung und gestattet, ohne Veränderung der angelegten Spannung die Stromstärke im Meßgerät und damit den Ausschlag des Zeigers zu regeln.

## V Versuchsdurchführung

Das zu untersuchende Meßgerät wird an die für den Anschluß des zu messenden Widerstandes vorgesehenen Klemmen der Meßbrücke angeschlossen. Statt des Brückeninstrumentes wird ein Schalter eingesetzt.

Beträgt z. B. die zur Verfügung stehende Spannung 2 V, so sollte der Schutzwiderstand zu Beginn des Versuchs auf  $1000 \Omega$  eingestellt sein. Nun kann durch Verschieben des Gleitkontakte ein Widerstandsverhältnis  $R_1 : R_2$  eingeregelt werden, bei dem sich beim Öffnen oder Schließen des Schalters der Ausschlag des Zeigers nur unwesentlich ändert. Durch Verringern des Schutzwiderstandes wird nunmehr ein möglichst großer Zeigerausschlag eingestellt, so daß beim Bedienen des Schalters noch auftretende Änderungen der Stromstärke im Meßgerät deutlicher erkennbar sind.

Bewirkt das Öffnen und Schließen der Brücke keine Änderungen des Zeigerausschlages mehr, dann kann nach (1) der Innenwiderstand des Gerätes bestimmt werden.

Der Vergleichswiderstand  $R_n$  ist auch hier so zu wählen, daß der Abgleich nicht bei Stellungen des Schleifkontakte in der Nähe der Enden des Spannungsteilers  $R_1 R_2$  eintritt.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Innenwiderstand der zu untersuchenden Geräte!
2. Wiederholen Sie die Messung mit einem anderen Normalwiderstand  $R_n$ !
3. Weshalb sind Messungen bei Kontaktstellungen in der Nähe der Enden des Spannungsteilers nicht zweckmäßig?
4. Begründen Sie, weshalb Stromstärkemesser einen kleinen und Spannungsmesser einen großen Innenwiderstand haben müssen!

**Versuchsgeräte:** Meßbrücke mit verschiedenen Normalwiderständen, Drehspul- oder Dreheiseninstrumente, regelbarer Widerstand ( $1000 \Omega$ ), Schalter

### 33. Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Leitern und Halbleitern

#### G Grundlagen

Die spezifischen Widerstände der Leiter- und Halbleiterwerkstoffe sind in unterschiedlichem Maße von der Temperatur abhängig. Die verstärkte Molekularbewegung bei Erwärmung beeinflußt die Leitfähigkeit aller Stoffe. Der in Tabellen angegebene spezifische Widerstand gilt nur für eine bestimmte Temperatur.

Während die relative Widerstandsänderung je Kelvin bei *Halbleiterstoffen* in der Größenordnung von einigen Prozent und bei *reinen Metallen* von einigen Promille liegt, ist sie bei vielen *Widerstandslegierungen* kleiner als  $4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . So beträgt sie z. B. für die Legierungen *Manganin* (ungefähr 82% Cu, 15% Mn, 2,4% Ni, 0,6% Fe) und *Novokonstant* (ungefähr 83% Cu, 4% Al, 1% Fe, 12% Mn) nur  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

Ebenso wie der Ausdehnungskoeffizient der verschiedenen Stoffe gilt auch der Temperaturkoeffizient nur für eine Bezugstemperatur. In dem hier zu untersuchenden Temperaturbereich von etwa 20...100°C kann mit genügender Genauigkeit angenommen werden, daß die Widerstandsänderung  $\Delta R$  proportional der Temperaturänderung  $\Delta t$  ist. Da  $\Delta R$  auch proportional dem ursprünglichen Widerstand  $R_0$  ist, kann geschrieben werden:  $\Delta R \sim R_0 \Delta t$ .

Das Verhältnis aus  $\Delta R$  und  $R_0 \Delta t$  ist der *Temperaturkoeffizient*, bezogen auf die Temperatur, bei der  $R_0$  gemessen wurde:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} \quad (1)$$

#### V Versuchsdurchführung

Eine Drahtspirale aus dem zu untersuchenden Material bzw. ein Halbleiterwiderstand wird in einen Behälter mit Öl getaucht. In den Behälter (z. B. Becherglas) ragen ein Thermometer und ein Rührwerk hinein (Bild 64).

1. Die Flüssigkeit wird von außen erhitzt. Mit einer *Wheatstoneschen Brücke* wird der Widerstand zu Beginn des Versuches sowie nach jeweils 10 K Temperaturänderung gemessen.
2. An die Wendel oder den Halbleiterwiderstand wird eine solche Spannung gelegt, daß die Flüssigkeit durch die Stromwärme langsam erwärmt wird. Die angelegte Spannung und die Stromstärke werden zu Beginn des Versuches und nach jeweils 10 K Temperaturerhöhung gemessen und daraus die jeweiligen Widerstände errechnet.

Die nach Verfahren 1 oder 2 gewonnenen Werte für den Widerstand werden in Abhängigkeit von der Temperatur grafisch dargestellt. Aus Anfangs- und Endwert wird nach (1) der Temperaturkoeffizient bestimmt.

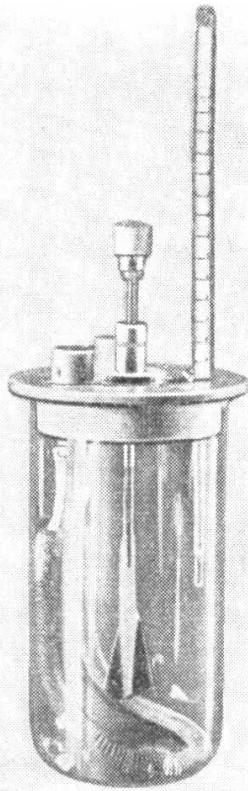


Bild 64

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Temperaturkoeffizienten eines Leiterwerkstoffes und einer Widerstandslegierung für eine Anfangstemperatur von  $20^{\circ}\text{C}$  sowie den mittleren Temperaturkoeffizienten eines Halbleiterwiderstandes im Bereich von  $20$  bis  $100^{\circ}\text{C}$  nach Verfahren 1 oder 2!
2. Stellen Sie den Widerstandsverlauf in Abhängigkeit von der Temperatur grafisch dar!
3. Wie ist der Einfluß der Temperatur auf den Widerstand von Leiter- und Halbleiterwerkstoffen zu erklären?
4. Wofür werden Halbleiterwiderstände (Heißleiter) verwendet?

*Versuchsgeräte:* Gefäß mit Thermometer und Rührwerk, Wendeln aus Leiterwerkstoffen und Widerstandsmaterial, Halbleiter-Widerstand, Meßbrücke oder Stromstärke- und Spannungsmesser

## 34. Gedämpfte Schwingungen eines Galvanometers

### G Grundlagen

Zur Messung kleiner Stromstärken und Spannungen benutzt man Instrumente, die keine für den Verwendungszweck geeichten Skalen haben. Man bezeichnet solche Instrumente als Galvanometer. Bild 65 zeigt ein solches Galvanometer in der Ausführung als Spiegelgalvanometer. Den verschiedenen Ausführungsformen der Galvanometer ist gemeinsam, daß ihre Wirkungsweise auf dem Drehspulprinzip beruht.

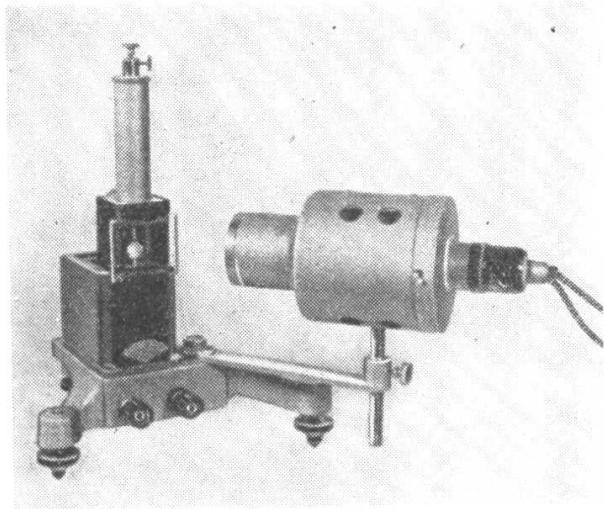


Bild 65

Bild 66 zeigt die prinzipielle Ausführung des Meßwerkes. Zwischen den Polen eines Permanentmagneten befindet sich ein Zylinder Z aus Weicheisen, der vom Permanentmagneten magnetisch isoliert ist. In dem schmalen Luftspalt zwischen den Polen N und S und dem Zylinder Z bildet sich ein praktisch homogenes Magnetfeld der

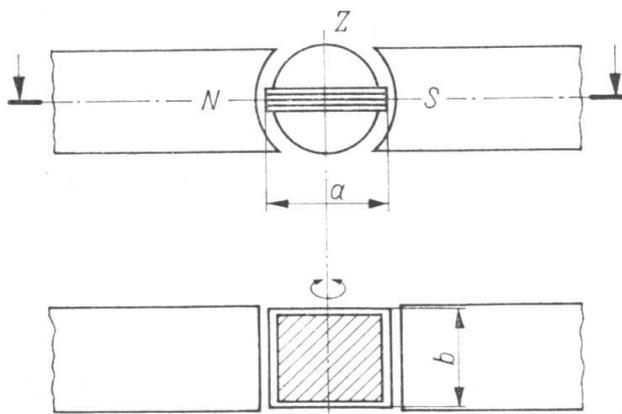


Bild 66

Stärke  $H$  aus, in dem sich die Drehspule des Galvanometers drehen kann. Diese Drehspule habe die Abmessungen  $ab$  und die Windungszahl  $N$ . Fließt durch die Windungen der Drehspule ein Strom, so entsteht ein auf die Drehspule einwirkendes Drehmoment. Die Drehspule wird sich so einstellen, daß das

mechanische Drehmoment gleich dem magnetischen Drehmoment ist. Die Drehspule stellt mechanisch gesehen einen schwingungsfähigen Körper dar, dessen Bewegungsgleichung aufzustellen ist. Die Lösung dieser Gleichung ergibt die Bewegung der Drehspule und der mit dieser verbundenen Anzeigevorrichtung (Zeiger, Spiegel). Die Aufhängung der Drehspule bewirkt das Drehmoment

$$M_d = -k' \varphi$$

( $k'$  Winkelrichtgröße). Durch die Wechselwirkung mit der Umgebung (Luftreibung) wird die Bewegung der Drehspule mechanisch gedämpft. Die Größe dieses Drehmomentes ist

$$M_r = -\beta \dot{\varphi}$$

( $\beta$  Dämpfungskonstante). An der Drehspule wirkt das Drehmoment

$$M = J \ddot{\varphi}$$

( $J$  Massenträgheitsmoment), welches im Moment des Stromflusses die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  erteilt.

Das Fließen eines Stromes der Stärke  $I$  in der Drehspule hat zur Folge, daß noch ein weiteres Drehmoment  $M_e$  wirksam wird. Dieses Drehmoment besteht aus zwei einander entgegenwirkenden Teilen  $M_{e1}$  und  $M_{e2}$ . Fließt in der Drehspule (Bild 66) ein Strom  $I$ , weil an den Klemmen des Galvanometers eine äußere Spannung  $U$  anliegt, und ist  $R_g$  der Widerstand der Drehspule, so fließt in ihr zunächst der Strom  $I = U/R_g$ . Auf die im Luftspalt senkrecht zum magnetischen Feld  $H$  befindlichen Spulenseiten  $b$  wirkt die Kraft  $\mu_0 b I H$ . Diese Kraft tritt als Kräftepaar mit dem Hebelarm  $a/2$  auf. Besteht die Drehspule aus  $N$  Windungen, so wird insgesamt das Drehmoment

$$M_{e1} = 2\mu_0 N b I H \frac{a}{2}$$

wirksam. Faßt man die nichtstromabhängigen Größen zur dynamischen Galvanometerkonstanten  $G = \mu_0 N a b H$  zusammen, so ist

$$M_{e1} = GI \quad (1)$$

Sind die Klemmen über einen äußeren Kreis geschlossen, so wird in der Drehspule bei der Bewegung im magnetischen Feld eine Spannung induziert, die einen Strom der Stärke  $I_1$  hervorruft, der entsprechend der LENZSchen Regel seiner Entstehungsursache entgegenwirkt. Nach dem Induktionsgesetz ist diese induzierte Spannung der zeitlichen Änderung des Drehwinkels der Drehspule proportional und hat die Größe

$$U_{\text{ind}} = -\mu_0 N a b H \dot{\varphi}$$

Mit der Einführung von  $G$  ergibt sich

$$U_{\text{ind}} = -G \dot{\varphi}$$

Der gesamte Stromkreis besteht aus den Widerständen  $R_g$  (Widerstand der Drehspule) und  $R_a$  (Widerstand des äußeren Kreises). In diesem Stromkreis fließt der Strom

$$I_1 = \frac{U_{\text{ind}}}{R_g + R_a}$$

und somit gilt für das Drehmoment

$$M_{e2} = GI_1 = -\frac{G^2}{R_g + R_a} \dot{\varphi} \quad (2)$$

Das Gesamtdrehmoment ergibt sich zu  $M_e = M_{e1} + M_{e2}$ , und mit (1) und (2) wird

$$M_e = GI - \frac{G^2}{R_g + R_a} \dot{\varphi} \quad (3)$$

Nunmehr kann aus der Summe aller auf die Drehspule einwirkenden Drehmomente

$$M = M_d + M_r + M_e \quad (4)$$

die Bewegungsgleichung der Drehspule aufgestellt werden. Diese lautet

$$J\ddot{\varphi} + \left( \beta + \frac{G^2}{R_g + R_a} \right) \dot{\varphi} + k'\varphi = GI \quad (5)$$

und stellt eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung dar. Unter der Voraussetzung, daß  $R_a \neq \infty$  ist, hat die Drehspule also eine zusätzliche, von  $R_a$  abhängige Dämpfung, die den größten Wert bei  $R_a = 0$  (Kurzschluß!) hat.

Die Bewegungsform der Drehspule bleibt unverändert, ob sie sich beim Fließen des Stromes  $I$  aus der Ruhelage in eine neue Gleichgewichtslage einstellt oder ob sie sich bei Stromlosigkeit wieder in die Nullage bewegt. Wichtig ist nur, daß in beiden Fällen der Widerstand  $R_a$  konstant bleibt.

Es wird der Fall  $I = 0$ , d. h., das Zurückschwingen in die Ruhelage, im folgenden zugrunde gelegt. Die Bewegungsgleichung (5) erhält dann die Form

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{J} \left( \beta + \frac{G^2}{R_g + R_a} \right) \dot{\varphi} + \frac{k'}{J} \varphi = 0 \quad (6)$$

Führt man die Abklingkonstante  $\delta$  als Abkürzung in der Form

$$2\delta = \frac{1}{J} \left( \beta + \frac{G^2}{R_g + R_a} \right)$$

im Dämpfungsglied und für die Kreisfrequenz bei fehlender Dämpfung die Form  $\omega_0 = \sqrt{k'/J}$  ein, so folgt für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (7)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung und die Diskussion der drei Fälle, die entscheidend für das Verhalten der Drehspule sind,

1.  $\delta < \omega_0$ : der Schwingfall
2.  $\delta > \omega_0$ : der Kriechfall
3.  $\delta = \omega_0$ : der aperiodische Grenzfall,

wurden bereits im Versuch 8 ausgeführt und diskutiert. Der Lösungsgang ist durchzuarbeiten, und die speziellen Kenngrößen des vorliegenden Versuches sind einzuführen.

## V Versuchsdurchführung

Das Galvanometer wird erschütterungsfrei aufgestellt und die Schaltung entsprechend Bild 67 aufgebaut. *Schaltung prüfen lassen!* Skale und Beleuchtungseinrichtung zur Erzeugung des Lichtzeigers werden justiert. Durch entsprechende Wahl der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  wird nach Schließen des Schalters S der Ausschlag so

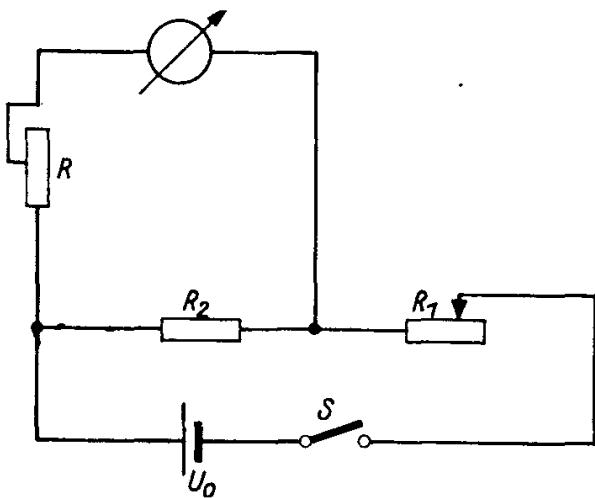


Bild 67

eingerichtet, daß er etwa  $\frac{2}{3}$  des zur Verfügung stehenden Skalenbereiches beträgt. Der Nullpunkt soll möglichst senkrecht gegenüber dem Galvanometer und der Skalenmitte liegen. Er ist nach jeder Messung zu kontrollieren.

Nach Ablesung des Nullpunktes wird der Drehspule durch Schließen des Schalters S ein Ausschlag erteilt und gewartet, bis die Drehspule zur Ruhe gekommen ist. Es erfolgt die Ablesung. Der Schalter wird wieder geöffnet und damit das Galvanometer vom äußeren Stromkreis getrennt. Die nunmehr notwendigen Ablesungen hängen von der zu untersuchenden Bewegungsform der Drehspule ab

### 1. Der Schwingfall

Es sind eine möglichst große Anzahl von Umkehrpunkten des Lichtzeigers links und rechts vom Nullpunkt und zuletzt der Nullpunkt selbst abzulesen. Die Umkehrpunkte sind auf den Nullpunkt zu beziehen. Hierzu wird auf die Ausführungen im Versuch 2 hingewiesen.

Die Periodendauer  $T$  der Drehspule wird mehrmals aus einer unterschiedlichen Anzahl von Schwingungen ermittelt, indem die Durchgänge durch den Nullpunkt beobachtet werden. Der gewonnene Mittelwert ist bei der grafischen Darstellung zu verwenden.

### 2. Der Kriechfall

Aus einer Vielzahl von Augenblickswerten des Ausschlages und den zugehörigen Zeiten werden die Werte ermittelt, die notwendig sind, um das Verhalten der Drehspule grafisch darzustellen. Begonnen wird mit dem größten Ausschlag, den der Lichtzeiger kurz vor dem Öffnen des Schalters erreicht hat.

### 3. Der Grenzfall

Hier ist grundsätzlich wie bei 2. zu verfahren. Um den Grenzfall einzustellen, ist es zweckmäßig, den Widerstand  $R$  zunächst so zu wählen, daß sich ein stark gedämpfter Schwingfall der Drehspule einstellt. Danach ist  $R$  systematisch so lange zu verändern, bis der Lichtzeiger bei Rückkehr in die Ruhelage den Nullpunkt gerade nicht mehr überschreitet.

## A Aufgaben

1. Stellen Sie für die drei Versuche die Bewegung des Lichtzeigers in einem Diagramm dar!  
Zum besseren Vergleich der darzustellenden Kurven werden die Ausschläge des Lichtzeigers — bei Verwendung eines Spiegelgalvanometers — normiert, indem der Nullpunkt  $\varphi_0$  als Einheit gewählt wird. Wird ein Lichtzeigergalvanometer verwendet, erübrigt sich die Normierung, und Aufgabe 3. entfällt.
2. In der Schaltung Bild 67 wird eine Spannungsquelle mit der Klemmenspannung  $U_0$  verwendet. Schätzen Sie die Spannung  $U$  über  $R_2$  ab! Beachten Sie dabei den Nebenschluß  $R_g + R$ !
3. Wird ein Spiegelgalvanometer für den Versuch verwendet, so spielt die Entfernung der Skale eine Rolle. Man benutzt im allgemeinen eine gerade Skale. Schätzen Sie ab, wie weit die verwendete Skale höchstens entfernt sein darf, wenn bei festgelegtem Maximalausschlag des Lichtzeigers ( $\frac{2}{3}$  der Skalenlänge) auf die Reduzierung des Bogens verzichtet wird und der Fehler nicht größer als 1,2% sein soll!
4. Berechnen Sie  $n$  und  $A$  aus mindestens drei verschiedenen Messungen und geben Sie den relativen Fehler an!
5. Erläutern Sie die praktische Bedeutung der Versuchsergebnisse und begründen Sie, welcher Fall zu bevorzugen ist!
6. Erläutern Sie, weshalb Galvanometer nur für Gleichstrom verwendbar sind!

**Versuchsgeräte:** Spiegelgalvanometer, Beleuchtungseinrichtung, Skale, Stöpselwiderstand, Widerstand  $R_2$ , Regelwiderstand  $R_1$ , Schalter, Akkumulator, Stoppuhr

## 35. Kapazitätsmessung mit dem ballistischen Galvanometer

### G Grundlagen

Ein ballistisches Galvanometer ist ein empfindliches Drehspulmeßgerät, bei dem die Periodendauer der beweglichen Teile mehrere Sekunden beträgt. Das Gerät wird gewöhnlich als *Drehspiegel-Galvanometer* (Bild 65) ausgeführt sein. Die Winkelrichtgröße der Aufhängevorrichtung der Drehspule ist sehr gering. Somit ergibt sich eine sehr hohe Empfindlichkeit, aber gleichzeitig auch eine große Periodendauer. Bei Drehspulgeräten ist das auf die Drehspule wirkende Drehmoment proportional der Stromstärke in der Spule ( $M \sim I$ ). Die Winkelgeschwindigkeit, die ein drehbares System erreicht, ist proportional dem Drehimpuls ( $\omega \sim Mt$ ). Damit ist aber auch die Winkelgeschwindigkeit proportional dem Stromstoß:

$$\omega \sim It \quad (1)$$

Dabei ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit, die die Drehspule nach dem Aufhören des Drehimpulses erreicht. Bei einer Spule mit einer Periodendauer von mehreren Sekunden ist die Drehspule kaum aus der Ruhelage gebracht, wenn die größte Winkelgeschwindigkeit bereits erreicht ist, so daß die Spule praktisch in freier Torsionsschwingung pendelt.

Wird der Stromstoß  $It$  z. B. durch die Entladung eines Kondensators mit einer Kapazität  $C = 4\mu F$  über den Innenwiderstand  $R_i = 1 k\Omega$  eines Galvanometers hervorgerufen, so ist die Zeitkonstante

$$\tau = RC = 4 \text{ ms}$$

In dieser Zeit sind bereits 63,2% der Ladung des Kondensators abgeflossen. In der Zeit  $5\tau = 20 \text{ ms}$  ist der Kondensator praktisch entladen. Bei einer angenommenen Periodendauer von  $T = 4 \text{ s}$  beträgt die Beschleunigungsdauer nur 2% eines Viertels der Periodendauer der Galvanometerspule.

Nun führt die Drehspule aber harmonische Schwingungen aus, deren Amplitude proportional der Geschwindigkeit des schwingenden Systems beim Durchgang durch die Ruhelage ist. Das bedeutet, daß der Zeiger- bzw. Lichtmarken-Ausschlag proportional der Winkelgeschwindigkeit und damit nach (1) proportional dem Stromstoß, d. h. der durch die Meßspule fließenden *Ladungsmenge*, ist.

### V Versuchsdurchführung

#### 1. Eichung der Skale eines ballistischen Galvanometers

Die zu einem Drehspiegelgalvanometer gehörige Skale ist zu eichen. Zu diesem Zweck wird ein Kondensator mit bekannter Kapazität an eine bekannte Gleichspannung angeschlossen. Aus

$$Q = CU \quad (2)$$

kann die aufgenommene Ladung berechnet werden. Der Kondensator wird von der Spannungsquelle abgetrennt (doppelpoligen Umschalter oder Stromwippe verwenden, Bild 68) und über das Spiegelgalvanometer kurzgeschlossen. Der maximale Zeiger-

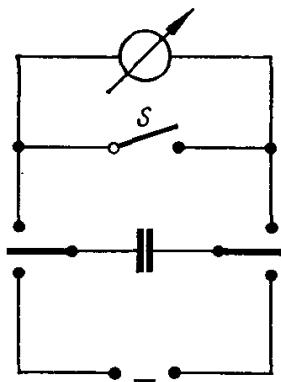


Bild 68

ausschlag wird notiert. Die Ladespannung wird so gewählt, daß die Skale beim Entladen möglichst vollständig überstrichen wird.

### Vorsicht! Mit niedrigster Spannung beginnen!

Mit dem Mittelwert der Zeigerausschläge und der errechneten Ladungsmenge nach (2) kann die Skale des Galvanometers geeicht werden.

Die Gerätekonstante  $k$  ergibt sich als Quotient aus Ladung und Zeigerausschlag; ihre Einheit ist daher

$$[k] = \frac{C}{Skt}$$

### 2. Messung von Kapazitäten

Das ballistische Galvanometer mit der geeichten Skale wird nunmehr zur Bestimmung der unbekannten *Kapazität* eines Kondensators benutzt. Wir verwenden die gleiche Schaltung wie in Bild 68. Der Kondensator wird mit einer bekannten Spannung aufgeladen und anschließend über das Galvanometer entladen. Die Spannung ist wieder so zu wählen, daß möglichst die gesamte Skale überstrichen wird. Der Zeigerausschlag kann nunmehr in Ladungseinheiten (C) umgerechnet werden. Aus (2) wird die unbekannte Kapazität ermittelt.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Periodendauer der Drehspule des verwendeten Galvanometers, und errechnen Sie die Zeitkonstante für den Entladevorgang! Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit den Angaben im Abschnitt „Grundlagen“!
2. Geben Sie den Eichwert in Coulomb/Skalenteil an! Er soll aus mindestens 10 Messungen als Mittelwert bestimmt werden.

3. Ermitteln Sie die Kapazität eines Kondensators nach dem oben angegebenen Verfahren! Geben Sie den relativen Fehler der ermittelten Kapazität an, indem Sie annehmen, daß die Eichung der Skale fehlerfrei war! Der mittlere absolute Fehler für die Ladungsmenge wird aus der Meßreihe (10 Messungen) und der Fehler für die Spannung aus den Daten des Spannungsmessers entnommen.
4. Erklären Sie den Vorgang der Dämpfung der Galvanometerschwingung beim Schließen des Schalters S!

**Versuchsgeräte:** Spiegelgalvanometer mit Skale, Meßkondensator, Kondensator mit unbekannter Kapazität, Batterie, Spannungsmesser, doppelpoliger Umschalter (auch 2 einfache Umschalter verwendbar)

## 36. Erweiterung des Meßbereichs von Stromstärke- und Spannungsmessern

### G Grundlagen

Mitunter besteht in Labors, Versuchswerkstätten, Schulen usw. die Notwendigkeit, den Meßbereich eines vorhandenen Drehspulgerätes zu erweitern oder z. B. ein ursprünglich als Stromstärkemesser vorgesehenes Gerät zur Messung von Spannungen einzurichten. Die Berechnung der jeweils erforderlichen Widerstände soll hier beschrieben werden.

#### 1. Meßbereichserweiterung beim Stromstärkemesser

Ein Stromstärkemesser ist immer *in Reihe* mit dem Gerät zu schalten, dessen Stromaufnahme gemessen werden soll (Bild 69); dann fließt durch das Amperemeter und das zu prüfende Gerät der gleiche Strom.

Es wird angenommen, daß der Zeigér des Meßgerätes Vollausschlag zeigt, wenn die Drehspule von einem Strom der Stärke 2 mA durchflossen wird. Es sei der Anodenstrom von Elektronenröhren zu messen, der unter bestimmten Umständen 40 mA betragen soll;

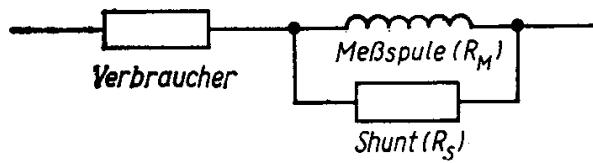


Bild 69

dann wird es zweckmäßig sein, den Meßbereich des Amperemeters auf 50 mA, d. h. auf das 25fache zu erweitern. Durch den parallel zur Meßspule zu schaltenden Widerstand, den *Shunt*  $R_s$ , müssen bei Vollausschlag 48 mA fließen. Da sich bei

Parallelschaltung die Stromstärken in den Zweigen umgekehrt verhalten wie die entsprechenden Zweigwiderstände, gilt

$$\frac{R_M}{R_S} = \frac{I_S}{I_M}$$

Folglich ist

$$R_S = R_M \frac{I_M}{I_S}$$

Im angenommenen Fall müßte  $R_S = \frac{1}{24} R_M$  sein.

Bezeichnet man mit  $n$  den Faktor, um den der Meßbereich zu erweitern ist, so gilt die allgemeine Beziehung

$$R_S = \frac{1}{n-1} R_M \quad (1)$$

$R_M$  soll hier sowohl den Widerstand der Meßspule als auch den evtl. dazu in Reihe geschalteten Widerstand zur Temperaturkompensation enthalten. Diesen Widerstand  $R_M$  mißt man ja auch, wenn nach Versuch 32 der Innenwiderstand eines Galvanometers ohne Shunt oder Vorwiderstand bestimmt wird.

## 2. Meßbereichserweiterung beim Spannungsmesser

Um die an einem elektrischen Gerät abfallende Spannung messen zu können, muß das Voltmeter *parallel* zu diesem geschaltet werden, da es dann an der gleichen Spannung liegt (Bild 70). Soll sich der Spannungsabfall durch das Einschalten des Meßgerätes nicht wesentlich ändern, muß der Widerstand des Spannungsmessers groß gegenüber

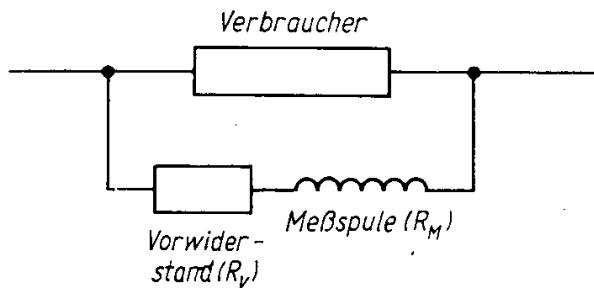


Bild 70

dem des Gerätes sein; denn dann ist der Gesamtwiderstand nur unwesentlich kleiner geworden.

Das zur Messung von Stromstärken verwendete Meßwerk dient nun auch zur Messung von Spannungen. Wird das Voltmeter an die Meßstelle angeschlossen, so wird es von einem Strom durchflossen, dessen Stärke der Spannung proportional ist. Bei Kenntnis des Innenwiderstandes  $R_M$  des Gerätes und der Stromstärke kann die Spannung errechnet werden. Die Skale kann somit auch in Volt geeicht werden. Angenommen, ein Spannungsmesser soll zur Messung von Netzspannungen eingerichtet werden und der Meßbereich 0...250 V betragen. Der Zeiger ergebe Vollausschlag, wenn das Meßwerk von 2 mA durchflossen wird bzw. wenn eine Spannung

von 100 mV anliegt. Der Widerstand  $R_M$  (s. Bemerkungen unter 1.) beträgt demnach  $50 \Omega$ . Nun soll der Zeiger voll ausschlagen, wenn eine Spannung von 250 V anliegt. Im Meßgerät muß dann ein Strom der Stärke 2 mA fließen. Dies wird erreicht, wenn im Meßzweig ein Widerstand

$$R = \frac{250 \text{ V}}{2 \text{ mA}} = 125 \text{ k}\Omega$$

vorhanden ist.

Zu dem Widerstand des Meßwerkes  $R_M = 50 \Omega$  ist noch ein *Vorwiderstand*  $R_V = 124\,950 \Omega$  in Reihe zu schalten.

Bezeichnet man wieder mit  $n$  den Faktor, um den der Meßbereich zu erweitern ist, so gilt die allgemeine Beziehung

$$R_V = (n - 1) R_M \quad (2)$$

## V Versuchsdurchführung

### 1. Stromstärkemesser

Der Innenwiderstand des Stromstärkemessers wird mit Hilfe einer Meßbrücke bestimmt (s. Versuch 30). Entsprechend der vorgeschriebenen Erweiterung des Meßbereiches wird der erforderliche Shunt berechnet und mit Hilfe von Dekadenwiderständen zusammengestellt. Die Prüfung erfolgt durch Vergleich der Anzeige mit einem als Normalinstrument zur Verfügung gestellten Amperemeter. Die prozentuale Abweichung von der Anzeige des Normalinstruments wird festgestellt und angegeben, worauf die Abweichung zurückgeführt werden kann.

Soll der Nebenwiderstand kleiner als  $0,1 \Omega$  sein, dann ist er aus dem zur Verfügung gestellten Draht anzufertigen. Die erforderliche Drahtlänge wird aus der Gleichung

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

überschlägig berechnet (Zugabe für Anschluß beachten). Der genaue Abgleich des Shunts erfolgt in diesem Falle durch Vergleich der Anzeige mit dem Normalinstrument.

### 2. Spannungsmesser

Die Bestimmung des Innenwiderstandes erfolgt wie bei Teil 1. Entsprechend der vorgeschriebenen Meßbereichserweiterung wird der erforderliche Vorwiderstand errechnet und mit Hilfe von Dekadenwiderständen zusammengestellt. Prüfung und Fehlerbestimmung wie bei Teil 1.

## A Aufgaben

1. Erweitern Sie den Meßbereich eines Stromstärke- und eines Spannungsmessers!
2. Entwerfen Sie zweckmäßige Schaltungen zur Prüfung der Anzeige der von Ihnen verwendeten Meßgeräte!

3. Welche Auswirkungen haben Kontaktfehler beim Einbau des Shunts bzw. des Vorwiderstandes?
4. Weshalb soll der Meßbereich möglichst so gewählt werden, daß auf dem letzten Drittel der Skale gemessen wird?

**Versuchsgeräte:** Demonstrationsinstrumente bzw. Schalttafelgeräte, technische Dekadenwiderstände, Vielfachmeßgeräte, Meßbrücke, regelbarer Widerstand, Stromversorgungsgerät

## 37. Leistungsanpassung

### G Grundlagen

Bei der Übertragung elektrischer Energie in Leitungen, z. B. im Fernmeldewesen, kommt es darauf an, am Verbraucher ein *Maximum an Leistung* zur Verfügung zu haben. Da es sich hier um eine Reihenschaltung von Leitungs- und Verbraucherwiderstand handelt, verteilt sich die Generatorenspannung auf beide Widerstände, und die Stromstärke ergibt sich aus der Generatorenspannung und dem Gesamtwiderstand der Anlage. Der Innenwiderstand des Generators soll hier unberücksichtigt bleiben, da er klein gegenüber den Außenwiderständen ist.

Bei konstantem Leitungswiderstand wird mit zunehmendem Verbraucherwiderstand der Spannungsabfall an letzterem steigen, aber die Stromstärke abnehmen, während bei einem kleinen Verbraucherwiderstand wohl ein höherer Strom fließt, aber dafür eine geringere Spannung abfällt.

In elektronischen Schaltungen sind die Leitungswiderstände zu vernachlässigen, jedoch ist hier der Innenwiderstand der jeweiligen Generatoren oder der Ausgangswiderstand von Verstärkerschaltungen zu berücksichtigen. Diese Widerstände ( $R_i$ ) sind ebenfalls in Reihe mit den Verbraucherwiderständen geschaltet, so daß die oben angestellten Überlegungen auch hier zutreffen.

Bei gegebenem Innenwiderstand bzw. Leitungswiderstand wird bei einem bestimmten Verbraucherwiderstand das Produkt aus Spannungsabfall am Verbraucher und Stromstärke, d. h. die am Verbraucher umgesetzte Leistung, ein Maximum erreichen. Es gilt nun diesen Verbraucherwiderstand zu finden.

### V Versuchsdurchführung

An eine Spannungsquelle mit kleinem Innenwiderstand (Batterie) werden 2 in Reihe geschaltete Widerstände angeschlossen (Bild 71).  $R_L$  stellt den Leitungswiderstand und  $R_V$  den Verbraucherwiderstand dar. Der Spannungsabfall an  $R_V$  und die Stromstärke werden gemessen. Während der Leitungswiderstand  $R_L$  auf  $50\Omega$  oder  $100\Omega$  eingestellt ist, wird der Verbraucherwiderstand in Stufen von  $10\Omega$  von 0 bis  $200\Omega$

geregelt. Aus den Werten für den Spannungsabfall an  $R_V$  und der Stromstärke wird die an  $R_V$  umgesetzte Leistung  $P$  errechnet. Die Leistung  $P$  wird in Abhängigkeit von  $R_V$  grafisch dargestellt. So kann ermittelt werden, welchen Widerstand der Ver-

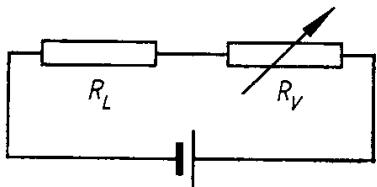


Bild 71

braucher darstellen muß, um bei einem gegebenen Leitungswiderstand und einer festgelegten Klemmenspannung ein Maximum an Leistung aufzunehmen.

#### *Hinweise zur mathematischen Lösung der Aufgabe*

Die an  $R_V$  umgesetzte Leistung beträgt

$$P = U_V I$$

Da

$$\frac{U_V}{U} = \frac{R_V}{R_L + R_V} \quad \text{und} \quad I = \frac{U}{R_L + R_V}$$

ist, folgt

$$P = U^2 \frac{R_V}{(R_L + R_V)^2}$$

Soll nun die Abhängigkeit der Verbraucherleistung  $P$  vom Verbraucherwiderstand  $R_V$  untersucht und der günstigste Fall (*Maximalleistung*) gefunden werden, so ist  $P$  nach  $R_V$  zu differenzieren ( $U$  und  $R_L$  sind hier konstante Größen).

Da die Gesetzmäßigkeit, die für das Problem „Anpassung an einen Leitungswiderstand“ gilt, auf die Anpassung an den Innenwiderstand von Generatoren übertragbar ist, gelten die oben abgeleiteten Beziehungen auch für diesen Fall. Es ist nur  $R_L$  durch  $R_i$  zu ersetzen.

## A Aufgaben

1. Ermitteln Sie für zwei verschiedene Leitungswiderstände  $I$  und  $U_V$  in Abhängigkeit von  $R_V$ !
2. Errechnen Sie die am Verbraucher umgesetzte Leistung und stellen Sie diese in Abhängigkeit von  $R_V$  grafisch dar!
3. Vergleichen Sie die experimentell gefundenen Werte mit dem Ergebnis der mathematischen Lösung der Aufgabe und geben Sie das allgemeine Gesetz für die Leistungsanpassung an!

**Versuchsgeräte:** 3 Dekadenwiderstände ( $0 \dots 100 \Omega$ ), 2 Vielfachmeßgeräte, Batterie ( $2 \text{ V} \dots 4 \text{ V}$ )

## 38. Kapazität von Kondensatoren

### G Grundlagen

Beim Anlegen einer Wechselspannung wird der Kondensator periodisch aufgeladen und entladen. Der Effektivwert des fließenden Stromes ist der angelegten Spannung direkt und dem Widerstand umgekehrt proportional. Der hier auftretende kapazitive Widerstand  $X_C$  ist von der Frequenz des Stromes und der Kapazität nach der Gleichung

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

abhängig. Es gilt also

$$I = \frac{U}{X_C} = 2\pi U f C$$

Der gleichzeitig vorhandene Wirkwiderstand ist klein gegenüber  $X_C$  und wird hier vernachlässigt.

#### 1. Ermittlung der Kapazität durch Messung von Spannung und Stromstärke

Ein Kondensator stellt in einem Wechselstromkreis einen *Scheinwiderstand* dar. Die Wirkkomponente ist jedoch gewöhnlich sehr klein gegenüber dem *Blindwiderstand*. Wenn hier angenommen wird, daß es sich bei einem Kondensator um einen reinen Blindwiderstand handelt, so ist der Fehler viel kleiner als die durch das Einschalten und die Ungenauigkeit der Meßgeräte verursachte Unsicherheit. Der Blindwiderstand errechnet sich aus den Gleichungen

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad \text{und} \quad X_C = \frac{U}{I}$$

Daraus folgt

$$C = \frac{I}{2\pi f U}$$

#### 2. Bestimmung der Kapazität von Kondensatoren mit der Wheatstoneschen Brücke

Mit der WHEATSTONESchen Brücke kann die Größe unbekannter Widerstände bestimmt werden. Bei Verwendung von Wechselspannung wird das Meßverfahren auch zur Ermittlung der Kapazität von Kondensatoren benutzt.

In der Brücke, zwischen den Punkten A und B (Bild 72), fließt kein Strom, wenn die Beziehung

$$X_x : R_a = X_n : R_b$$

erfüllt ist.

(Herleitung der Beziehung s. Versuch 30).

Dann fällt z. B. über  $C_x$  und  $C_n$  die gleiche Spannung ab, so daß zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz besteht. Da  $X_x = \frac{1}{2\pi f C_x}$  und  $X_n = \frac{1}{2\pi f C_n}$  ist, ist die Brücke abgeglichen, wenn die Proportion gilt:

$$C_n : C_x = R_a : R_b$$

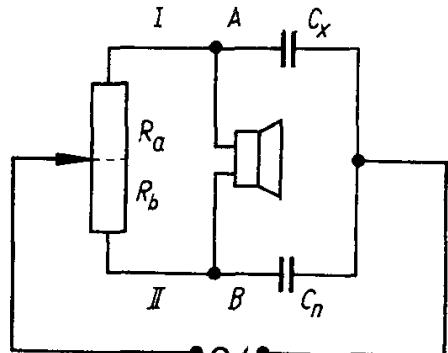


Bild 72

Es fließt nunmehr kein Strom in der Brücke, da in den Zweigen I und II auch die Phasenverschiebung gleich ist.

#### Beweis

$$\tan \varphi_I = \tan \varphi_{II},$$

wenn

$$\frac{1}{2\pi f C_x R_a} = \frac{1}{2\pi f C_n R_b},$$

d. h., wenn

$$\frac{C_n}{C_x} = \frac{R_a}{R_b}$$

ist.

## V Versuchsdurchführung

**Verfahren 1:** Je nach den verwendeten Spannungen und den dabei fließenden Strömen sind Stromstärke- und Spannungsmesser so einzuschalten, daß die durch sie verursachte Störung möglichst gering ist (spannungs- bzw. stromrichtige Messung).

Die gewählte Schaltungsart ist zu begründen. Die Frequenz kann mit einem Zungenfrequenzmesser gemessen werden.

**Verfahren 2:** Bei Verwendung von 50 Hz Wechselspannung und einem genügend empfindlichen Wechselstrommesser (Vielfachmeßgerät) sind die Anweisungen bei Versuch 30 zu beachten. Wird eine Wechselspannung von etwa 2 V mit einer Frequenz von einigen 100 Hz angelegt, so eignet sich zum Feststellen der Stromlosigkeit in der Brücke sehr gut ein Kopfhörer (Lautstärkeminimum aufsuchen!). Als Normalkondensatoren eignen sich Meßkondensatoren mit 0,5% Toleranz.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Kapazität von Kondensatoren nach Verfahren 1 und 2! Bei Verfahren 1 sind verschiedene Spannungen zu verwenden.
2. Bei der Messung von ohmschen Widerständen können das Anzeigegerät in der Brücke und die Spannungsquelle ihre Plätze tauschen. Ist das bei der Messung von Kapazitäten auch möglich?

Versuchsgeräte: Tonfrequenzgeber (z. B. Schwebungssumme), Kapazitätsmeßbrücke (Bild 73), Kopfhörer, 2 Vielfachmeßgeräte, Frequenzmesser, Kondensatoren

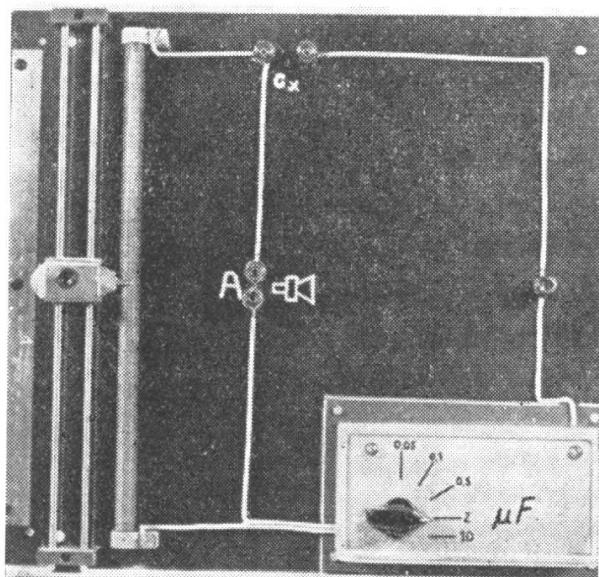


Bild 73

## 39. Lade- und Entladekurven bei Kondensatoren

### G Grundlagen

Die Kenntnis des Stromstärke- und Spannungsverlaufes beim Einschalten von Stromkreisen, die Kondensatoren enthalten, sowie der Entladungsvorgänge beim Kurzschließen von Kondensatoren ist Voraussetzung für das Verständnis vieler Vorgänge in Stromkreisen. Wir beschränken uns hier auf den *RC-Kreis*, in dem ein ohmscher Widerstand und ein Kondensator in Reihe geschaltet sind. Den Kondensator betrachten wir als verlustfrei, d. h., wir nehmen an, daß der Isolationswiderstand unendlich groß ist.

Wird ein Kondensator über einen Widerstand an eine bestimmte Spannung angeschlossen, so lädt er sich in einer bestimmten Zeit auf diese Spannung auf. Die Stromstärke zu Beginn der Aufladung wird durch das Verhältnis  $U/R$  bestimmt. Sobald jedoch der Kondensator eine Ladung enthält, wird die Stromstärke geringer, da die von der Ladung erzeugte Spannung  $U = Q/C$  der angelegten Spannung entgegen-

wirkt. Die Stromstärke ist auf Null abgesunken, wenn der Kondensator auf die Spannung der Spannungsquelle aufgeladen ist.

Wird der Kondensator über einen Widerstand entladen, so kann der Anfangswert wiederum aus der Gleichung

$$i_0 = \frac{U}{R} \quad (1)$$

errechnet werden.

Da die Spannung mit fortschreitender Entladung absinkt, wird auch die Stromstärke geringer, bis schließlich der Kondensator völlig entladen ist.

Soll ein Kondensator mit der Kapazität  $C$  auf eine Spannung  $U$  aufgeladen werden, so ist eine Ladung  $Q = CU$  unterzubringen. Es ist leicht einzusehen, daß der Vorgang um so länger dauert, je kleiner die mittlere Ladestromstärke, d. h. je größer der Widerstand  $R$  ist. Bei gegebenem  $R$  ist andererseits die Aufladezeit um so länger, je mehr Ladung unterzubringen ist, d. h. je größer die Kapazität ist. Das Produkt

$$RC = \tau \quad (2)$$

wird als Zeitkonstante bezeichnet.

## V Versuchsdurchführung

Mit einem Stromstärkemesser soll der zeitliche Verlauf des Lade- bzw. Entladestromes eines Kondensators bestimmt werden. Dazu ist erforderlich, daß der Lade- bzw. Entladevorgang so langsam erfolgt, daß ein Ablesen des Stromstärkemessers in bestim-

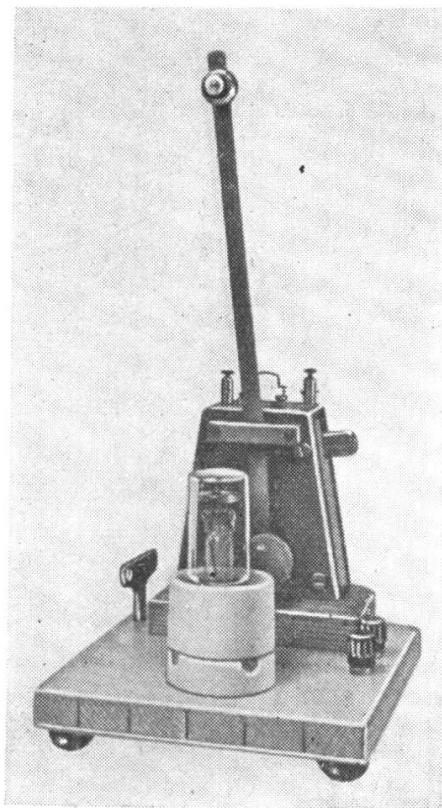


Bild 74

ten Zeitabständen möglich ist. Die Zeitabstände werden durch das Ticken eines Metronoms (Bild 74) oder das periodische Aufleuchten einer Glimmlampe (Kippschaltung) markiert. Der Stromverlauf kann nach kurzer Übung gut verfolgt werden, wenn die Zeitkonstante des  $RC$ -Kreises größer als 6 s ist (z. B.  $R = 200 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 40 \mu\text{F}$ ). Bei Zeitabständen von 2,5 s ergeben sich dann genügend Meßwerte, um die Lade- bzw. Entladekurve zeichnen zu können. Während ein Praktikant die Werte abliest,

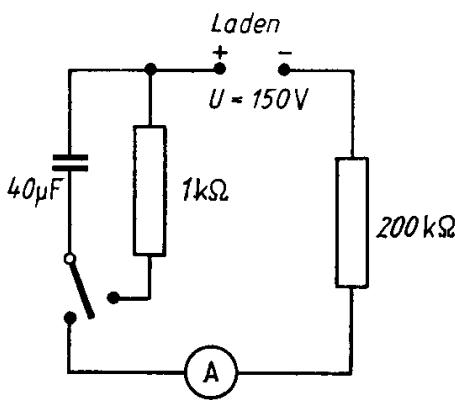


Bild 75

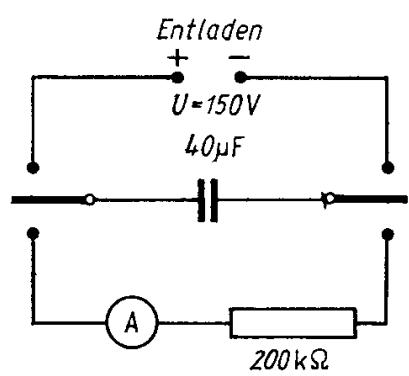


Bild 76

werden sie von einem zweiten notiert. Die Spannung ist so zu wählen, daß der verwendete Meßbereich (z. B. 1 mA) voll ausgenutzt wird.

Dabei muß beachtet werden, daß der Anfangswert jeweils nicht gemessen werden kann, da die Stromstärke bereits abgesunken ist, bevor der Zeiger des Stromstärkemessers voll ausgeschlagen hat. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Schalter (Bilder 75 und 76) zu betätigen, wenn das Metronom tickt, und die erste Ablesung beim folgenden Ticken vorzunehmen. Dieser Wert ist dann  $i_1$ , während  $i_0$  aus (1) errechnet wird.

## A Aufgaben

1. Messen Sie den Stromverlauf beim Entladen und Laden eines Kondensators über einen Widerstand (Bild 75 und 76)! Führen Sie nach einigen Probemessungen jeweils 3 Messungen aus! Stellen Sie den Stromverlauf beim Laden und Entladen grafisch dar (jeweils 3 Kurven einzeichnen)!
2. Der Spannungsverlauf am Kondensator beim Laden wird durch die Gleichung

$$u = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

und der Spannungsverlauf beim Entladen durch die Gleichung

$$u = U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

erfaßt. Stellen Sie den Spannungsverlauf am Kondensator beim Laden grafisch dar!

3. Wieviel Prozent der Endspannung sind beim Laden nach der Zeit  $\tau$  erreicht? Wieviel Prozent der ursprünglichen Spannung liegen beim Entladen nach der Zeit  $5\tau$  noch am Kondensator?
4. Nach welcher Zeit (in Vielfachen von  $\tau$  angeben) ist der Lade- bzw. Entladevorgang soweit abgeschlossen, daß nur noch weniger als 1% der Endspannung fehlen bzw. der Ausgangsspannung vorhanden sind?
5. Nach jeder Aufnahme der Ladekurve ist der Kondensator über den Widerstand 1 k $\Omega$  (Bild 75) zu entladen? Welche mittlere Entladestromstärke würde sich ergeben, wenn die Kapazität 40  $\mu\text{F}$  und die Spannung 150 V beträgt und die Anschlüsse durch einen Widerstand von z. B. 0,5  $\Omega$  (Kabel) überbrückt werden?

**Versuchsgeräte:** Stromversorgungsgerät, Kondensator (10  $\mu\text{F}$  ... 40  $\mu\text{F}$ ), Vielfachmesser, Widerstand (150 k $\Omega$  ... 600 k $\Omega$ ), Umschalter, Zeitgeber (Metronom oder Kippschaltung mit Glimmlampe)

## 40. Bestimmung von Dielektrizitätszahlen

### G Grundlagen

Im homogenen Feld eines Plattenkondensators ist die *elektrische Verschiebung*

$$D = \frac{Q}{A} \quad (1)$$

In (1) ist  $Q$  die Ladung auf den Platten und  $A$  die Plattenfläche. Zwischen der Verschiebung (hier gleich der Ladungsdichte auf den Platten) und der zwischen den Platten herrschenden Feldstärke  $E$  besteht die Beziehung

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E \quad (2)$$

Die Verschiebung ist der Feldstärke proportional.

Der Faktor  $\epsilon_0$  wird als *elektrische Feldkonstante* bezeichnet und beträgt  $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ As/Vm}$ . Das Einbringen eines Dielektrikums zwischen die Platten ändert bei gleicher Feldstärke die elektrische Verschiebung um den Faktor  $\epsilon_r$  (Dielektrizitätszahl).

Nach (1) und (2) kann geschrieben werden

$$\frac{Q}{A} = \epsilon_0 \epsilon_r E \quad (3)$$

Mit  $E = \frac{U}{d}$  folgt weiter

$$\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (4)$$

Das Verhältnis  $Q/U$  ist aber definiert als Kapazität des Kondensators. Folglich kann eine Materialgleichung für die Kapazität eines Plattenkondensators angegeben werden:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (5)$$

In (4) und (5) ist  $d$  der Abstand der Kondensatorplatten.

Die in einem Metall-Papier-Kondensator zur Trennung der ladungstragenden Aluminiumfolien verwendeten und z. B. mit Paraffin getränkten Papierbahnen dienen nicht nur zur Isolation, sondern erhöhen gleichzeitig die Kapazität. Der Faktor, um den die Kapazität durch Verwendung eines Dielektrikums größer wird als im Vakuum, ist die oben eingeführte Dielektrizitätszahl. Werden Dielektrika mit hohen Dielektrizitätszahlen verwendet, so können bei kleinen Abmessungen des Kondensators große Kapazitätswerte erreicht werden.

## V Versuchsdurchführung

Die zu untersuchenden Stoffe (Glimmer, Hartpapier, verschiedene Plaste, Keramik, Glas usw.) werden in trockenem Zustand so zwischen die Platten eines Plattenkondensators gebracht, daß sie den Zwischenraum voll ausfüllen. Es ist außerdem dafür zu sorgen, daß beim Einführen entstandene Reibungselektrizität vor Beginn der Messung abgeleitet wird. Die Bestimmung der Dielektrizitätszahlen erfolgt durch einen Vergleich der Kapazität des Plattenkondensators mit Dielektrikum und ohne Dielektrikum. Der Fall „ohne Dielektrikum“ ist erreicht, wenn sich Luft ( $\epsilon_r = 1,0006$ ) zwischen den Platten befindet.

Werden die Werte für  $U$ ,  $A$  und  $d$  konstant gehalten, so kann nach (4) der Kapazitätsvergleich auf einen Ladungsvergleich reduziert werden. Es ist dann

$$\epsilon_r = \frac{Q_{\text{mit}}}{Q_{\text{ohne}}} \quad (6)$$

Schließlich kann die Messung noch weiter vereinfacht werden, wenn berücksichtigt wird, daß die Ausschläge des zur Ladungsmessung verwendeten ballistischen Galvanometers proportional der abfließenden Ladung sind (Versuch 35). Es ergibt sich damit  $\epsilon_r$  als Verhältnis der Ausschläge mit und ohne Dielektrikum. Es ist zunächst eine Probemessung mit Dielektrikum durchzuführen, bei der die Spannung so gewählt wird, daß nahezu Vollausschlag des Galvanometers erzielt wird, damit der relative Meßfehler möglichst klein gehalten wird. Die Meßschaltung zeigt Bild 68.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Dielektrizitätszahl für verschiedene Werkstoffe! Der Mittelwert des Galvanometerausschlags ist jeweils aus mindestens 5 Messungen zu bestimmen.
2. Fehlerabschätzung
3. Wie ist der Einfluß des Dielektrikums auf die Kapazität zu erklären?

**Versuchsgeräte:** Plattenkondensator, ballistisches Galvanometer, verschiedene Dielektrika

## 41. Induktivität von Spulen

### G Grundlagen

In den meisten elektrischen Anlagen treten Spulen neben Kondensatoren und Widerständen als wichtige elektrische Bauelemente auf. Wie die Kondensatoren sind auch Spulen *frequenzabhängige Widerstände*. Eine Spule, die einen nach der Gleichung

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (1)$$

berechenbaren Widerstand von vielleicht weniger als  $1\Omega$  hat, kann in einem Wechselstromkreis einen Widerstand von einigen Kiloohm darstellen. Worauf ist dies zurückzuführen?

Wird eine Spule an eine Gleichspannung angeschlossen, so entsteht im Moment des Einsetzens des Stromflusses in der Spule infolge der Magnetflußänderung eine der angelegten Spannung entgegengerichtete *Induktionsspannung*  $u_i$ :

$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \text{ (Induktionsgesetz)} \quad (2)$$

In (2) ist  $N$  die Anzahl der Windungen der Spule, und  $\frac{d\Phi}{dt}$  entspricht der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses. Da hier die Magnetflußänderung nur durch eine Änderung der Stromstärke hervorgerufen wird, schreibt man (2) zweckmäßigerweise in der Form:

$$u_i = -L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

In (3) ist  $L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{A}{l}$ , und  $\frac{di}{dt}$  bedeutet die Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke. Das Minuszeichen deutet darauf hin, daß die Induktionsspannung der den Stromfluß verursachenden Spannung entgegengerichtet ist.

Die Größe  $L$  enthält die im Zusammenhang mit der Entstehung einer Selbstinduktionsspannung wichtigen Größen *Permeabilitätszahl*  $\mu_r$  des Stoffes, in dem sich das Magnetfeld der Spule ausbreitet, *Windungszahl*, *Querschnitt* und *Länge* der Spule. Sie trägt die Bezeichnung *Eigeninduktivität*. Vielfach wird sie auch *Induktivität* der Spule genannt.

Entsteht durch die gleichmäßige Änderung der Stromstärke um  $1\text{ A/s}$  zwischen den Enden einer Spule eine Spannung von  $1\text{ V}$ , so hat die Spule die Induktivität  $L = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1\text{ Henry (H)}$ .

Beim Anschluß einer Spule an eine Wechselspannung ruft die dauernde Stromstärkeänderung auch eine ständige Selbstinduktionsspannung hervor, die einen Teil der angelegten Spannung aufhebt. Dadurch fließt ein geringerer Strom, als das bei

einer gleich großen Gleichspannung der Fall wäre. Die Verringerung der Stromstärke kann nun als die Folge einer Widerstandsvergrößerung gedeutet werden. Den zusätzlichen Widerstand bezeichnet man als *induktiven Widerstand*  $X_L$ . Er ist von der *Frequenz*  $f$  des Wechselstromes und der *Induktivität*  $L$  nach der Beziehung

$$X_L = 2\pi f L = \omega L \quad (4)$$

abhängig.

Während der nach (1) berechenbare Widerstand eine Umwandlung der elektrischen Energie in Wärmeenergie verursacht, wird im induktiven Widerstand (4) die elektrische Energie nur vorübergehend in magnetische Energie verwandelt. Beim Absin-

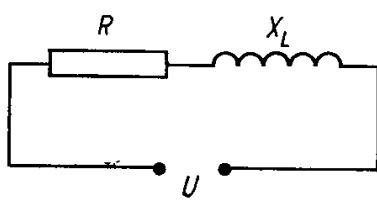


Bild 77

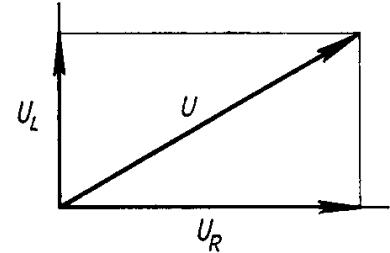


Bild 78

ken der Stromstärke in der Spule wandelt sich die magnetische wieder in elektrische Energie um. Der induktive Widerstand wird deshalb als *Blindwiderstand*, der nach (1) berechenbare als *Wirkwiderstand* bezeichnet.

Eine Spule stellt in einem Wechselstromkreis einen Blind- und auch einen Wirkwiderstand dar. Sie kann z. B. als Reihenschaltung aus beiden Widerstandsarten aufgefaßt werden (Bild 77).

Die Spannungsabfälle an den beiden Widerständen erreichen nicht zur gleichen Zeit ihre Höchstwerte. Während am induktiven Widerstand Spannungs- und Stromstärkeverlauf eine Phasendifferenz von  $\pi/2$  aufweisen, sind sie am Wirkwiderstand in Phase. Die Gesamtspannung ergibt sich hier nicht aus der algebraischen, sondern aus der *geometrischen Summe* der *Teilspannungen* (Bild 78). Den Nachweis hierfür zu bringen, würde den Rahmen dieses Buches überschreiten:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

Nach dem *OHMSCHEN* Gesetz ist

$$U = IZ, \quad U_R = IR \quad \text{und} \quad U_L = IX_L$$

Folglich gilt auch

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (5)$$

Dieser Gesamtwiderstand  $Z$ , der sich aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand zusammensetzt, bestimmt die Stromstärke, die bei einer gegebenen Spannung in einem Wechselstromkreis fließt. Er wird als *Scheinwiderstand* bezeichnet:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (6)$$

## V Versuchsdurchführung

Der Wirkwiderstand der zu untersuchenden Spulen wird mit Hilfe der WHEATSTONE-schen Brückenschaltung bestimmt. Danach werden die Spulen an eine Wechselspannung angeschlossen, deren Frequenz gemessen werden kann. Das Verhältnis aus den Werten für Spannung und Stromstärke ergibt den Scheinwiderstand der Spulen. Aus (6) kann nunmehr die Induktivität für jede Spule ermittelt werden.

## A Aufgaben

1. Von drei Spulen ist die Induktivität zu bestimmen.
2. Entscheiden Sie, ob die spannungs- oder stromrichtige Schaltung der Meßgeräte bei der Bestimmung des Scheinwiderstandes den kleineren Meßfehler verursacht! Begründen Sie Ihre Entscheidung!
3. Weshalb darf keine pulsierende Gleichspannung bei der Ermittlung des Wirkwiderstandes verwendet werden?
4. Kann das Verfahren auch zur Bestimmung der Induktivität einer Spule mit Eisenkern angewandt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Versuchsgeräte:** Meßbrücke, Spannungs- und Stromstärkemesser, Frequenzmesser, 3 Spulen

## 42. Thermoelement

### G Grundlagen

Wird aus zwei elektrischen Leitern  $L_1$  und  $L_2$ , die aus verschiedenen Metallen bestehen, ein geschlossener Kreis gebildet, indem man die zwei Leiter miteinander verlötet oder verschweißt (Bild 79), so fließt durch diesen Kreis ein elektrischer Strom (Thermostrom), sofern die Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  an den Löt- bzw. Schweißstellen  $S_1$  und  $S_2$  unterschiedlich sind.

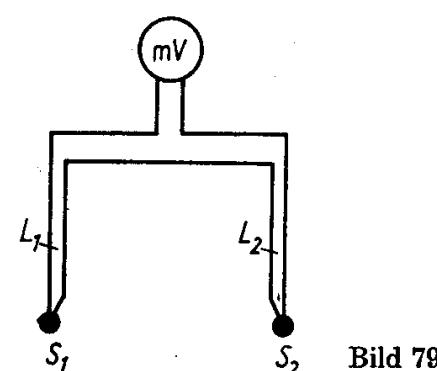


Bild 79

Bringt man in einen dieser Leiter ein empfindliches Galvanometer, so ist der elektrische Strom nachweisbar. Die Thermostromstärke wird durch die Temperatur der Schweißstellen bestimmt und kann *nur kompensiert* werden, wenn *alle* Schweiß- bzw. Verbindungsstellen *gleiche* Temperatur haben.

Zwei an ihrem einen Ende zusammengelötete oder -geschweißte Leiter werden als *Thermoelement* bezeichnet.

Die im Thermoelement auftretende Thermospannung  $U_{\text{Th}}$  kann durch die Stromstärke  $I$  des im geschlossenen Kreis fließenden Stromes ausgedrückt werden:

$$U_{\text{Th}} = I(R_i + R_a) \quad (1)$$

wobei  $R_i$  der innere Widerstand des Thermoelementes und  $R_a$  der äußere Widerstand des Kreises ist.

Ist der innere Widerstand des Thermoelementes  $R_i \ll R_a$ , auch bei Erwärmung, so kann man die Thermostromstärke als proportional der Thermospannung annehmen. Die Thermospannung nimmt aber mit *zunehmender* Temperaturdifferenz der Schweißstellen *zu*, und man kann für *kleine* Temperaturdifferenzen die Zunahme als proportional zu diesen annehmen. Es gilt damit

$$U_{\text{Th}} = \gamma(t_2 - t_1) \quad (2)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\gamma$  ist eine charakteristische Größe für die Metallkombination der Schweißstelle und ist aus Tabellen ersichtlich.

Wird bei einer Temperaturdifferenz  $t_2 - t_1$  die Thermostromstärke mit einem Galvanometer gemessen, so ist der Ausschlag des Galvanometerzeigers wegen (1) der Thermostromstärke und wegen (2) auch der Temperaturdifferenz proportional.

Damit gilt unter Vernachlässigung von  $R_i$  (wegen  $R_i \ll R_a$ ):

$$IR_a = \gamma(t_2 - t_1)$$

und daraus folgt:

$$t_2 - t_1 = \frac{R_a}{\gamma} I \quad (3)$$

Durch Messung der Thermostromstärke ist somit die Temperaturdifferenz bestimmt. Diese Art der Temperaturmessung bezeichnet man als *thermoelektrische* Methode.

Sollen größere Temperaturbereiche gemessen werden, besteht die in (3) dargestellte Linearität nicht mehr.

Werden Thermoelemente zur Temperaturmessung verwendet, so müssen sie vorher geeicht werden.

## V , Versuchsdurchführung

Zur Eichung eines Thermoelementes im Temperaturbereich 0...100°C wird die eine Schweißstelle in einem DEWAR-Gefäß und die andere in einem Thermostaten angeordnet.

Sowohl im DEWAR-Gefäß als auch im Thermostaten befindet sich ein Eis-Wasser-Gemisch, so daß die Temperatur der beiden Schweißstellen  $t_1 = t_2 = 0^\circ\text{C}$  beträgt. In diesem Fall darf am Galvanometer kein Ausschlag feststellbar sein. Das Blockschaltbild (Bild 80) zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau.

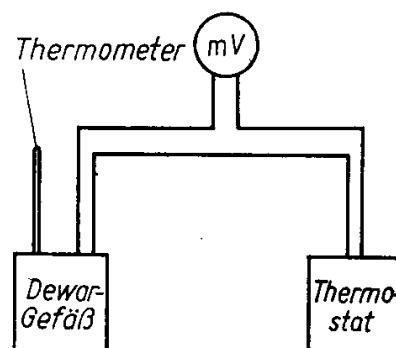


Bild 80

Die Temperatur  $t_1$  im DEWAR-Gefäß wird während des Versuches konstant gehalten, so daß  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  ist (eventuell müssen Eisstückchen nachgefüllt werden). Am Thermostaten werden Heizung und Umlzpumpe eingeschaltet, und somit wird die Veränderung der Temperatur  $t_2$  bis maximal  $100^\circ\text{C}$  eingeleitet.

Mit  $0^\circ\text{C}$  beginnend, werden am Thermometer des Thermostaten in 5-K-Schritten die Temperatur  $t_2$  und der Ausschlag des Galvanometerzeigers abgelesen. Dabei ist darauf zu achten, daß die Temperatur  $t_2$  nicht zu schnell ansteigt. Erforderlichenfalls muß die Heizung des Thermostaten kurzzeitig abgeschaltet werden.

Die Meßergebnisse sind in Tabellenform aufzuschreiben und werden anschließend grafisch dargestellt.

## A Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Eichkurve des untersuchten Thermoelementes, indem Sie die Temperatur über dem Galvanometerausschlag auftragen!
2. Diskutieren Sie die ermittelte Eichkurve!
3. Überlegen Sie, welche wesentlichen Unterschiede zwischen Thermoelement und anderen Temperaturmeßgeräten bestehen!

*Versuchsgeräte:* Thermoelement, Gefäß, Thermostat, Galvanometer, Thermometer

## 43. Hall-Sonde

### G Grundlagen

Die HALL-Sonde ist ein Plättchen aus einem elektrisch leitfähigem Material, das von einem Strom der Stärke  $I$  durchflossen wird (Bild 81). Die sperrsichtfreien Kontakte  $K_1$  und die Homogenität des Materials gewährleisten eine *gleichmäßige Stromdichte*  $J$  an allen Stellen des Plättchens und somit *gleiches Potential* an den einander gegenüberliegenden Kontakten  $K_2$ .

Wird das Plättchen von einem Magnetfeld der magnetischen Induktion  $B$  durchsetzt, so tritt eine Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Strom und dem Magnetfeld ein. Auf die bewegten Ladungsträger wirkt die LORENTZ-Kraft, die die

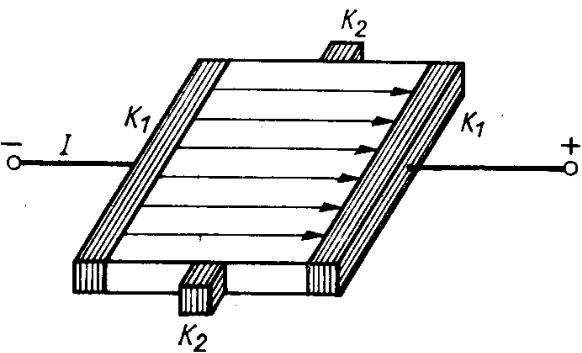


Bild 81

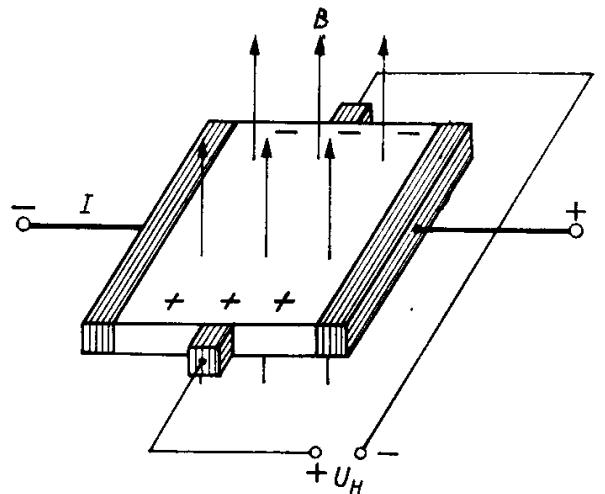


Bild 82

gleichmäßige Ladungsverteilung im Plättchen aufhebt. Diese Erscheinung wird HALL-Effekt genannt. Sie ist die Folge der Wechselwirkung zwischen dem Magnetfeld des Stromes und dem äußeren Magnetfeld.

Bei Bewegung negativer Ladung in Pfeilrichtung und einer Magnetfeldrichtung, wie sie in Bild 82 dargestellt ist, ergibt sich die dort eingezeichnete Ladungsverteilung. Zwischen den Kontakten  $K_2$  liegt nun eine Spannung, die HALL-Spannung  $U_H$ .

Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Stromstärke  $I$ , der magnetischen Induktion  $B$  und der HALL-Spannung  $U_H$  ergibt sich aus den folgenden Überlegungen: Die LORENTZ-Kraft  $F_L$ , die die Ablenkung bewirkt, ist

$$F_L = -e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (1)$$

Der Betrag  $F_L$  kann bei einem *senkrecht* das Plättchen durchsetzenden Magnetfeld berechnet werden zu

$$F_L = evB \quad (2)$$

Dabei ist  $e$  die elektrische Elementarladung,  $v$  die Geschwindigkeit der Ladungsträger.

Die durch die LORENTZ-Kraft bewirkte Ladungsverteilung erzeugt ein elektrisches Feld mit der Feldstärke  $E$ , das der Ablenkung der Ladungsträger entgegenwirkt. Es

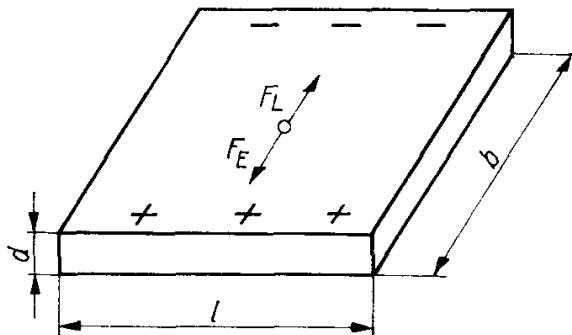


Bild 83

stellt sich ein Zustand ein, bei dem die LORENTZ-Kraft  $F_L$  und die vom elektrischen Feld bewirkte Gegenkraft  $F_E$  gleichen Betrag haben (Bild 83):

$$F_E = F_L$$

$$eE = evB$$

(3)

Da die Potentialdifferenz  $U_H$  längs der Breite  $b$  des Plättchens entsteht, ist die Feldstärke

$$E = \frac{U_H}{b} \quad (4)$$

Setzt man (4) in (3) ein, so ergibt sich

$$eU_H = evB \quad (5)$$

Um die Abhängigkeit der HALL-Spannung von der Stromstärke zu finden, führen wir die Ladungsträgerdichte  $n$  als Quotient aus der Anzahl  $N$  der Ladungsträger und dem Volumen  $V = lbd$  (Bild 83) ein:

$$n = \frac{N}{lbd} \quad (6)$$

Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist

$$v = \frac{l}{t} \quad (7)$$

Aus (6) und (7) wird  $l$  eliminiert; man erhält

$$v = \frac{N}{tnbd} \quad (8)$$

(8) in (5) ergibt ( $\vartheta$  gekürzt):

$$eU_H = \frac{Ne}{t} \frac{B}{nd} \quad (9)$$

$\frac{Ne}{t}$  ist aber die elektrische Stromstärke. Damit folgt aus (9):

$$U_H = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} \quad (10)$$

Noch deutlicher werden die Zusammenhänge, wenn wir die Stromdichte  $J = I/A = I/bd$  einführen. Mit  $I = Jbd$  wird

$$U_H = \frac{1}{en} JBb \quad (11)$$

(11) gilt strenggenommen für unendlich lange Plättchen und punktförmige Elektroden zur Abnahme der HALL-Spannung. Je nach Ausführungsform müssen Korrekturfaktoren ermittelt werden, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

Wie aus (10) bzw. (11) hervorgeht, ist die HALL-Spannung proportional der Stromstärke bzw. der Stromdichte in der Sonde und proportional der magnetischen Induktion. Nach diesen Gleichungen ist die HALL-Spannung der Ladungsträgerdichte indirekt proportional. Halbleiter ergeben deshalb höhere HALL-Spannungen als Metalle. Jedoch müssen diese Halbleiter eine gute *Beweglichkeit*  $u = v/E$  der Ladungsträger aufweisen, wenn die Sonde mit relativ geringen Spannungen betrieben werden soll, d. h., wenn nur geringe Leistungen umgesetzt werden sollen. Diese Bedingung muß aber gefordert werden, da wegen des negativen Temperaturkoeffizienten der Halbleiter größere Stromwärme das Einstellen einer konstanten Stromstärke nicht gestatten würde. Als geeignete Werkstoffe für HALL-Sonden erwiesen sich z. B. Gallium- und Indiumarsenid.

## V Versuchsdurchführung

Die HALL-Sonde wird zwischen die Pole eines Elektromagneten gebracht und über einen Stromstärkemesser an eine Gleichspannungsquelle mit stufenlos regelbarer Spannung angeschlossen (ggf. Regelwiderstand verwenden!). Es ist zunächst zu prüfen, ob ohne Einwirkung des Magnetfeldes bei Erhöhung der Stromstärke bis zum zulässigen Höchstwert bereits eine Spannung zwischen den HALL-Kontakten  $K_2$  liegt. Ist das infolge von Inhomogenitäten der Fall, so ist eine Kurve  $U_H = f(I)$  bei  $B = 0$  aufzunehmen. Diese Nullwerte sind bei den Messungen mit  $B > 0$  von den Meßwerten zu subtrahieren. Es wird nunmehr für konstante Werte von  $B$  die HALL-Spannung in Abhängigkeit von der Stromstärke  $I$  in der Sonde aufgenommen. Die Abhängigkeit der HALL-Spannung von der magnetischen Induktion  $B$  kann nur direkt ermittelt werden, wenn eine geeichte Sonde (Magnetometer) zur Verfügung steht. Andernfalls bietet sich nur die Möglichkeit,  $U_H$  in Abhängigkeit vom Erregerstrom des Elektromagneten aufzunehmen. Der Kurvenlauf  $U_H = f(I_{err})$  veranschaulicht den Zusammenhang  $U_H = f(B)$  in dem Bereich, für den  $B \sim I_{err}$  (gerader Teil der Magnetisierungskurve).

## A Aufgaben

1. Nehmen Sie den Zusammenhang zwischen  $U_H$  und der Stromstärke  $I$  im Plättchen auf für zwei verschiedene magnetische Induktionen bzw. Erregerstromstärken! Berücksichtigen Sie die  $U_H$ -Werte für  $B = 0$ !
2. Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen  $U_H$  und der magnetischen Induktion  $B$  bzw. der Erregerstromstärke  $I_{err}$  für zwei verschiedene Stromstärken  $I$ !
3. Prüfen Sie, ob die HALL-Spannung bei Stromrichtung und Feldrichtung entsprechend Bild 82 die dort eingezeichnete Polarität aufweist! Unter welchen Umständen wäre die Polarität bei gleicher Strom- und Feldrichtung umgekehrt?
4. Welche Auswirkung müßte eine Änderung des Winkels zwischen Plattenoberfläche und Feldrichtung von  $90^\circ$  auf  $45^\circ$  haben?

Versuchsgeräte: HALL-Sonde, Magnetometer, 2 Stromstärkemesser, Spannungsmesser, Elektromagnet, regelbarer Widerstand, Stromversorgungsgerät

## 44. Kennlinie eines Sperrsichtgleichrichters

### G Grundlagen

In den letzten Jahren haben die Halbleiter immer mehr an Bedeutung gewonnen. Wichtigste Halbleiter sind heute Silizium, Germanium und Galliumarsenid sowie Selen.

**Eigenleitung:** Halbleiter sind bei tiefen Temperaturen Isolatoren, da alle Elektronen fest gebunden sind (Atombindung). Bei höheren Temperaturen und bei Lichteinwirkung werden im Kristallgitter Elektronen frei, die sich entgegen der Richtung der elektrischen Feldstärke bewegen. Jedes freigewordene Elektron hinterläßt eine Lücke, ein *Loch*, das von einem anderen Elektron, das sich ebenfalls der Feldstärkerichtung entgegenbewegt, ausgefüllt wird. Dieses andere Elektron hinterläßt aber ebenfalls ein Loch. Während also eine gewisse Anzahl von Elektronen der Feldstärkerichtung entgegenwandert, bewegt sich eine gleiche Anzahl von *Defektelektronen*, wie man diese Löcher nennt, in Richtung des elektrischen Feldes. Die Defektelektronen verhalten sich damit wie positive Ladungsträger. Die elektrische Leitfähigkeit eines Halbleiters nimmt bei Temperaturerhöhung zu, im Gegensatz zu den Metallen.

**Störstellenleitung:** Setzt man reinstem Germanium Antimon zu, so wird im Gitter ein Germaniumatom durch ein Antimonatom ersetzt. Ge besitzt 4 Außenelektronen, Sb als fünfwertiges Element 5. Das 5. Elektron des Sb-Atoms ist lose gebunden und bei Zimmertemperatur schon frei beweglich. Im Gitter hinterläßt das wandernde Elektron kein Loch. Es treten daher keine Defektelektronen auf. Die Stromleitung

erfolgt fast ausschließlich durch negative Ladungsträger; der so gestörte Halbleiter ist ein n-Leiter. Da Antimon Elektronen abgibt, wirkt es als Donator<sup>1)</sup>. Setzt man dem Germanium als Störstoff ein dreiwertiges Element zu (z. B. Gallium), so entsteht an dieser Stelle des Kristallgitters eine Bindungslücke, in die ein Valenzelektron eines benachbarten Germaniumatoms rücken kann. Dieses hinterläßt ein Defektelektron, das im elektrischen Feld wie ein positiver Ladungsträger wandert: es liegt p-Leitung vor. Da Gallium Elektronen bindet, wirkt es als Akzeptor<sup>2)</sup>.

**Sperrsichtgleichrichter:** Als Sperrsichtgleichrichter wird ein Schichtkristall verwendet, in dem zur Hälfte n-Leitung, zur anderen Hälfte p-Leitung vorliegt. Zwischen den beiden Gebieten bildet sich durch wechselseitige Diffusion von Ladungsträgern eine Übergangszone aus. In dieser Übergangszone befinden sich weniger Ladungsträger als an den anderen Stellen des Kristalls. Daher ist der Widerstand der Übergangszone groß; sie wird als Sperrsicht bezeichnet.

Legt man den Pluspol einer Spannungsquelle an das p-Gebiet des Kristalls und den Minuspol an das n-Gebiet, so werden Ladungsträger von beiden Seiten in den Kristall und damit auch in die Sperrsicht hineingedrückt, so daß sich ihr Widerstand ver-

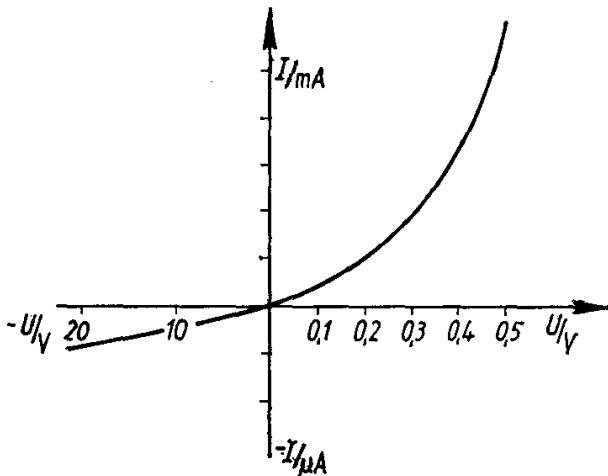


Bild 84

ringert. Bei umgekehrter Polung (Katode an p-Gebiet, Anode an n-Gebiet) werden Elektronen und Defektelektronen abgesaugt, so daß sich die Sperrsicht stark verbreitert. Ihr Widerstand wird so groß, daß in dieser *Sperrichtung* kaum Strom fließt. Die Kennlinie eines Sperrsichtgleichrichters zeigt Bild 84. Die *Durchlaßkennlinie* liegt im 1. Quadranten, die *Sperrkennlinie* im 3. Quadranten. Man beachte die verschiedene Teilung der positiven und negativen Achsen.

## V Versuchsdurchführung

Zunächst soll nachgewiesen werden, daß der Widerstand der Germaniumdiode in einer Richtung viel größer ist als in der anderen. In der Schaltung Bild 85 wird die Stromstärke in beiden Richtungen gemessen.

<sup>1)</sup> *donare* (lat.) schenken, geben

<sup>2)</sup> *accipere* (lat.) empfangen, erhalten

In der Schaltung Bild 86 wird die Durchlaßkennlinie aufgenommen. Dabei dient der Widerstand  $R_{Sch}$  zur Begrenzung des Stromes. Es muß besonders auf die Polung der Meßgeräte geachtet werden.

Zur Aufnahme der Sperrkennlinie ist die Schaltung Bild 87 zu verwenden.

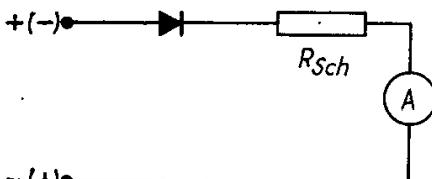


Bild 85

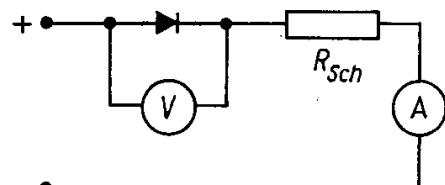


Bild 86

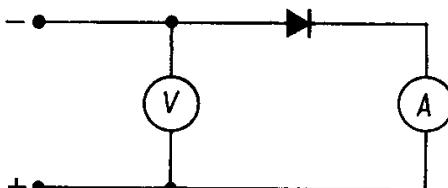


Bild 87

## A Aufgaben

1. Aufbau der Schaltung nach Bild 85
2. Ermittlung von Durchlaßrichtung und Sperrichtung
3. Aufbau der Schaltung nach Bild 86
4. Aufnahme der Durchlaßkennlinie für eine Germanium- oder Siliziumdiode sowie einen Selengleichrichter
5. Aufbau der Schaltung nach Bild 87
6. Aufnahme der Sperrkennlinie für eine Germanium- oder Siliziumdiode sowie einen Selengleichrichter
7. Diskussion der Ergebnisse
8. Weshalb ist die spannungsrichtige Schaltung der Meßgeräte (wie bei Schaltung Bild 86) bei Messung der Sperrstromstärke unbrauchbar?

**Versuchsgeräte:** Spannungsquelle (Stromversorgungsgerät), Germanium- oder Siliziumdiode, Selengleichrichter, Widerstand (etwa  $10\Omega$ ), 2 Vielfachmeßgeräte, Mikroamperemeter

## 45. Transistor

### G Grundlagen

Transistoren enthalten zwei *pn*-Übergänge, von denen einer in Durchlaß- und der andere in Sperrrichtung gepolt ist. Die Vorgänge an pn-Übergängen wurden in Versuch 44 beschrieben. Es sind entweder zwei p-leitende Gebiete durch ein schwächer dotiertes n-Gebiet getrennt, oder es befindet sich zwischen zwei n-leitenden Gebieten ein schwächer dotiertes p-leitendes Gebiet. Der erste Typ wird als *pnp-Transistor*, der zweite als *npn-Transistor* bezeichnet.

In der Schaltung nach Bild 88 ist die Grenzschicht 1 des pnp-Transistors in Durchlaßrichtung gepolt, während über die Schicht 2 nur ein Sperrstrom fließen kann. Von dem unteren p-Gebiet diffundieren folglich Defektelektronen in das n-Gebiet, in wel-

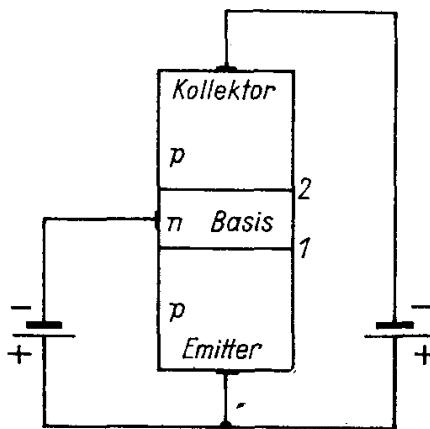


Bild 88

chem sie Minoritätsträger sind. Der Vorgang wird deshalb als *Minoritätsträger-Injektion* bezeichnet. In der entgegengesetzten Richtung diffundieren viel weniger Ladungsträger (Elektronen) aus der Mittelzone (*Basis*) in das die Defektelektronen emittierende Gebiet (*Emitter*), da die Konzentration der Majoritätsträger in der Basis (freie Elektronen) um etwa drei Zehnerpotenzen geringer ist als im Emitter (Defektelektronen). Die in die Basis injizierten Defektelektronen rekombinieren wegen des Konzentrationsunterschiedes nur in geringem Maße mit den dort vorhandenen Majoritätsträgern. Die geringe Rekombinationsrate (etwa 1%) ist zudem bedingt durch die sehr geringe Schichtdicke der Basis (z. T. weniger als  $1 \mu\text{m}$ ). So gelangt der größte Teil der injizierten Defektelektronen bis zur 2. Grenzschicht, die für sie „offen“ ist, so daß sie von der am Minuspol der Spannungsquelle angeschlossenen p-Schicht (*Kollektor*) aufgenommen werden können.

In den Bildern 89 und 90 sind die einzelnen Ladungsträgerbewegungen im pnp- und npn-Transistor schematisch wiedergegeben. In Bild 89 stellt (1) den Vorgang der Rekombination, (2) den Elektronendurchlaß- und (3) den Elektronensperrstrom dar. In Bild 90 symbolisiert (1) ebenfalls den Vorgang der Rekombination, während (2) den Defektelektronendurchlaß- und (3) den Defektelektronensperrstrom versinnbildlichen soll.

Für die Vorgänge im Transistor ist der Verlauf der *Ladungsträgerdichte*  $n$

$$\left( \frac{\text{Anzahl der beweglichen Ladungsträger}}{\text{Volumen}} \right)$$

entscheidend. In Bild 91 ist er für einen pnp-Transistor beim Fehlen einer äußeren Spannung dargestellt. Durch Vertauschen der Bezeichnungen p und n ergibt sich der für einen npn-Transistor zutreffende Verlauf der Ladungsträgerdichte.

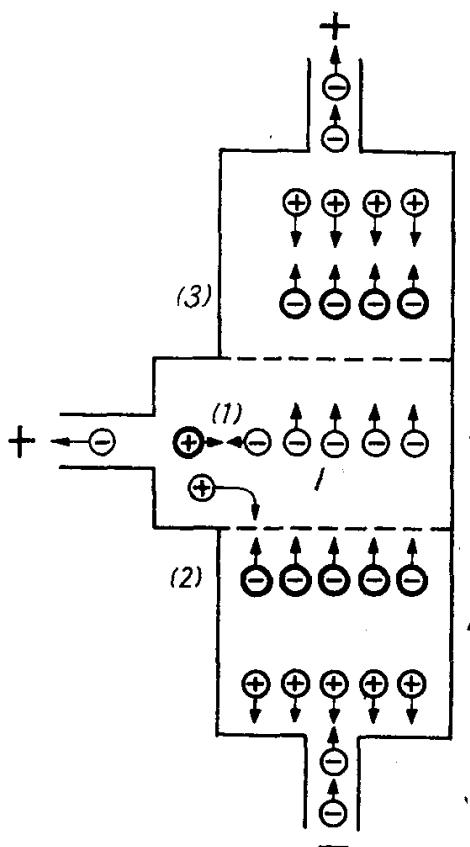


Bild 89

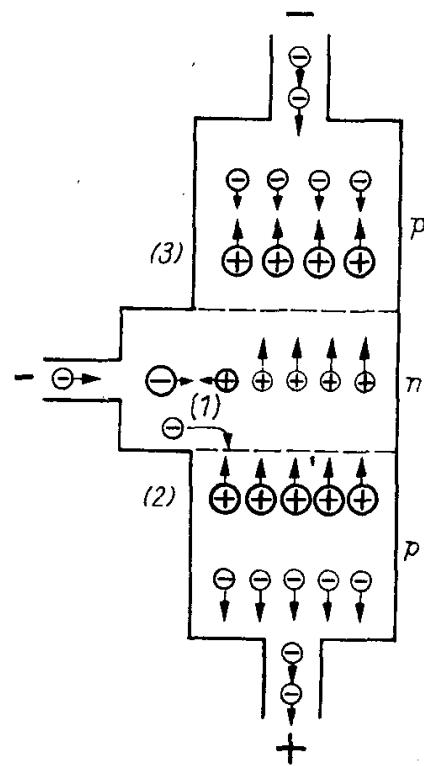


Bild 90

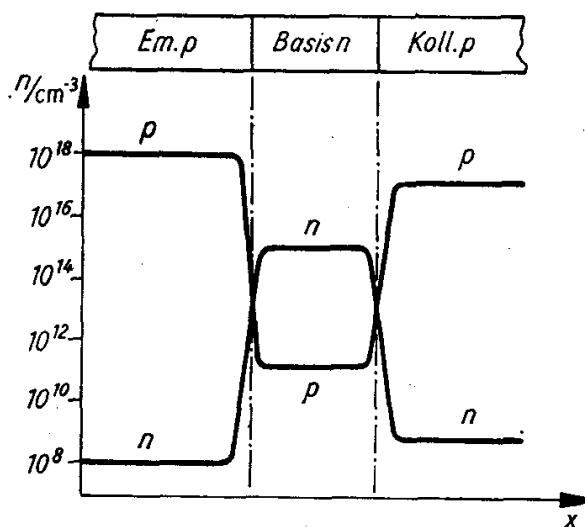


Bild 91

Beim Anlegen einer Spannung zwischen Emitter und Basis ( $U_{EB}$ ) und zwischen Emitter und Kollektor ( $U_{EC}$ ) mit der in Bild 88 angegebenen Polarität wird die Ladungsträgerdichte am Übergang Emitter—Basis erhöht (Durchlaßrichtung) und an dem in Sperrichtung gepolten Übergang Basis—Kollektor verringert (ausgezogene Kurve in Bild 92). In der Basis entsteht so das für einen Ladungstransport erforderliche *Dichtegefälle*. Die in die Basis injizierten Defektelektronen (beim pnp-Transistor)

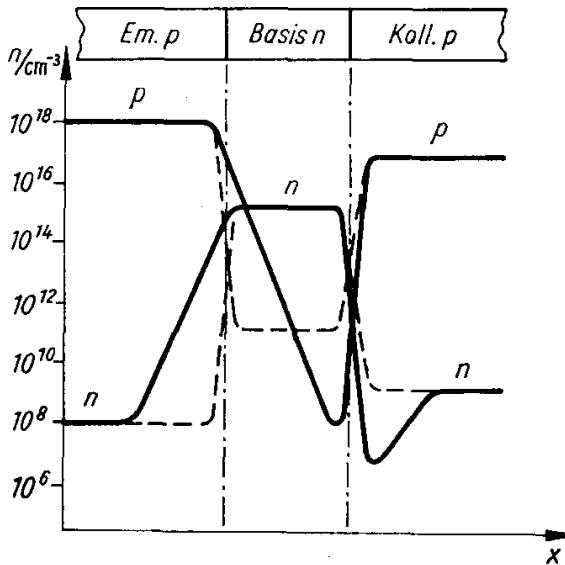


Bild 92

bzw. Elektronen (beim npn-Transistor) gelangen dadurch an den Übergang Basis—Kollektor.

Aus der Beschreibung der Vorgänge ergibt sich, daß der Strom im Kollektor-Emitter-Kreis (II in Bild 93) von den Vorgängen an der Emitter-Basis-Grenzschicht abhängt, d. h. von der Injektion der Minoritätsladungsträger in die Basis. Folglich

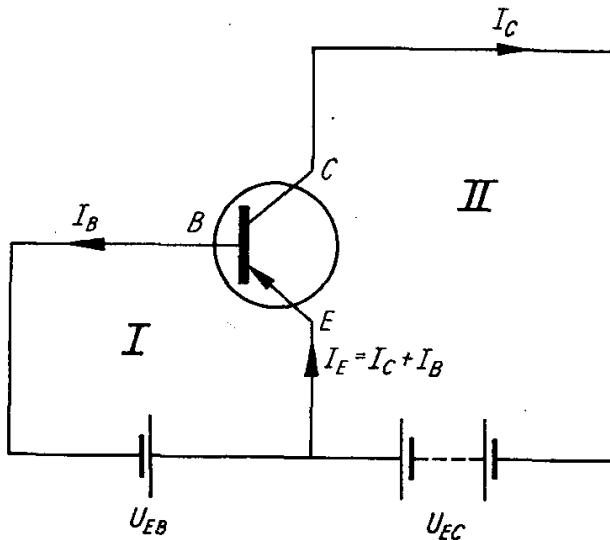


Bild 93

ist  $I_C$  abhängig von  $U_{EB}$  bzw. von  $I_B$ . Da in der Basis aus den oben erläuterten Gründen nur ein sehr kleiner Teil der vom Emitter kommenden Ladungsträger rekombiniert, ist  $I_B \ll I_E \approx I_C$ . Im „Steuerstromkreis“ I ist also die Stromstärke viel kleiner als im „Wirkstromkreis“ II (Bild 93).

Die Steuerwirkung des *Eingangskreises I* auf den *Ausgangskreis II* wird bei Änderungen der Eingangsspannung erkennbar, wenn z. B.  $U_{EB}$  mit einer Wechselspannung  $U_E$  überlagert wird (Bild 94). Dem von  $U_{EB}$  abhängigen Gleichstrom  $I_B$  über-

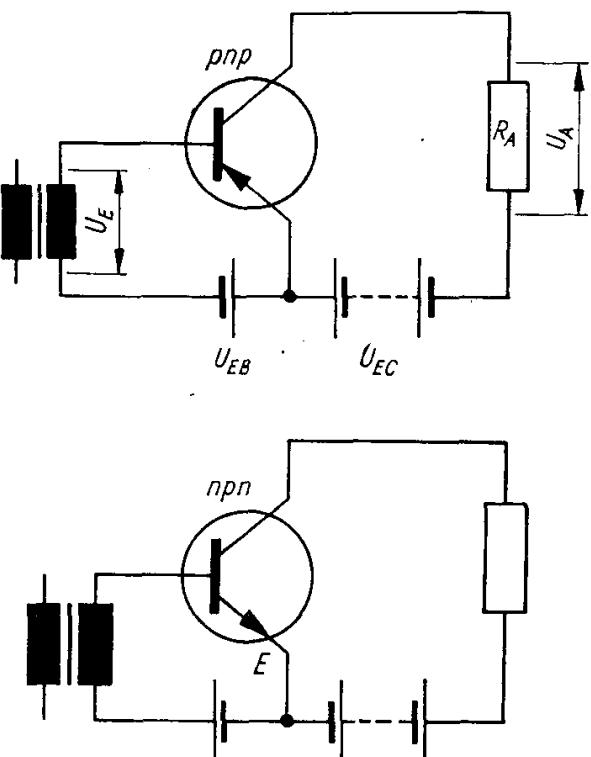


Bild 94

lagert sich dann der Wechselstrom  $i_B$ , der wiederum einen Wechselstrom  $i_C$  zur Folge hat, der sich dem u. a. von  $U_{EC}$  abhängigen Gleichstrom  $I_C$  überlagert. Wir definieren als *Stromverstärkung*

$$v_i = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{i_C}{i_B} \quad (1)$$

Da der Übergang Emitter–Basis in Durchlaßrichtung gepolt wird, stellt er einen relativ kleinen Widerstand dar, so daß mit kleinen Spannungen  $U_{EB}$  gearbeitet werden kann und kleine Spannungsänderungen  $u_E$  bereits die gewünschten Stromänderungen  $i_B$  ergeben. Der Übergang Basis–Kollektor ist in Sperrichtung gepolt und deshalb höherohmig. Es kann folglich auch die Spannung  $U_{EC}$  wesentlich höher als  $U_{EB}$  gewählt werden, und das Einschalten eines *Arbeitswiderstandes*  $R_A$  in der Größenordnung bis  $10 \text{ k}\Omega$  beeinflußt die Stromstärke nur geringfügig. Es kann aber an diesem Widerstand eine viel größere Wechselspannung  $u_A$  abfallen, als die Eingangswechselspannung beträgt. Wir definieren als *Spannungsverstärkung*

$$v_u = \frac{\Delta U_A}{\Delta U_E} = \frac{u_A}{u_E} \quad (2)$$

Die Stromverstärkung hat bei  $R_A = 0$  ihren Höchstwert und fällt bei sehr großen Arbeitswiderständen ( $R_A > 1 \text{ M}\Omega$ ) auf den Wert 1 ab. Die Spannungsverstärkung

wächst mit zunehmenden Werten für  $R_A$  (Bild 95). Am Arbeitswiderstand ergibt sich folglich auch eine Leistungsverstärkung  $v_p$ , die bei mittleren Werten von  $R_A$  ihren Höchstwert erreicht. Es gilt

$$v_p = \frac{u_A i_C}{u_E i_B} = v_u v_i \quad (3)$$

Der Transistor ist in der hier besprochenen, häufig angewandten Schaltung, in der der Emitter Bezugsbasis für beide Stromkreise ist (*Emitterschaltung*), Verstärker für

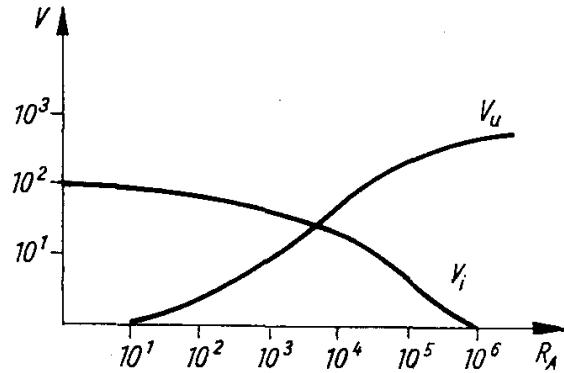


Bild 95

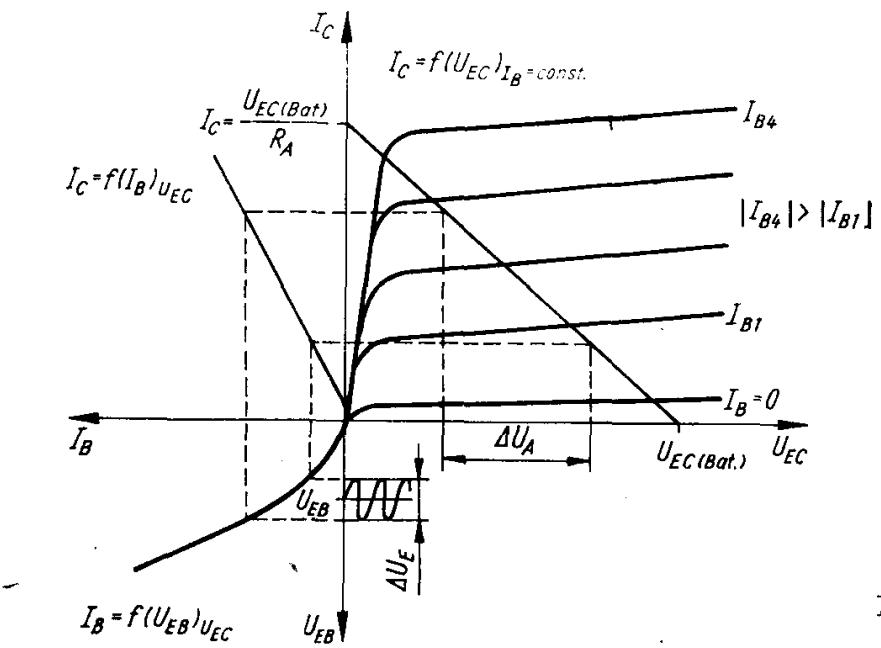


Bild 96

eingangsseitige Spannungs- oder Stromänderungen ( $v_u$  und  $v_i > 1$ ). Damit ist er auch Verstärker einer eingangsseitig zugeführten Wechselstromleistung.

Um eine verzerrungsarme Signalverstärkung zu ermöglichen, muß das Kennlinienfeld bekannt sein und dann der Arbeitswiderstand (Widerstandsgrenze in Bild 96) so gewählt werden, daß die an  $R_A$  auftretende Spannungsschwankung in einem Bereich oberhalb der Kniespannung  $U_{EC-K}$  erfolgt (Bild 96).

## V Versuchsdurchführung

Bei allen Messungen am Transistor sind zunächst die aus dem Datenblatt ersichtlichen Grenzwerte für die Spannungen, Stromstärken und die Leistung zu beachten. Im Unterschied zu Elektronenröhren wirkt bei Transistoren der Ausgangskreis auf den Eingangskreis zurück. Dieser Effekt wurde hier nicht gesondert beschrieben. Er macht es notwendig, bei Veränderungen der Werte im Ausgangskreis die Werte des Eingangskreises nachzuregeln. Es ist eine Schaltung aufzubauen, die das gleichzeitige Messen von  $I_B$ ,  $I_C$  und  $U_{EC}$  gestattet. Zur Messung der Spannungsverstärkung wird eine Schaltung nach Bild 94 verwendet. Für die Eingangswechselspannung  $u_E$  wird ein möglichst kleiner Wert gewählt, um das Signal verzerrungsfrei zu verstärken, so daß für  $\frac{\Delta U_A}{\Delta U_F}$  der Quotient  $\frac{u_A}{u_E}$  gesetzt werden kann. Zur Feststellung der Verzerrungsfreiheit soll hier der Vergleich des zeitlichen Verlaufs von  $u_E$  und  $u_A$  mit dem Oszilloskop ausreichen.

Wie aus Bild 96 zu ersehen ist, kann der Bereich von  $\Delta U_A = 2\sqrt{2} u_A$  (für sinusförmige Spannungen) außer durch Verminderung von  $\Delta U_E = 2\sqrt{2} u_E$  noch durch Änderung von  $U_{EB}$  auf Werte über die Kniespannung  $U_{EC-K}$  eingeregelt werden. Die Ausgangswechselspannung  $u_A$  sollte etwa 1/10 von  $U_{EC}$  betragen.

Falls kein Röhrenvoltmeter zur zuverlässigen Messung von  $u_E$  zur Verfügung steht, wird eine mit Universalmeßgeräten noch zuverlässig gut messbare Wechselspannung an den Eingang eines Spannungsteilers mit bekanntem Teilungsverhältnis (z. B. 1 : 10) oder eines Transformators mit bekanntem Übersetzungsverhältnis gelegt. Der Spannungsteiler ist so zu bemessen, daß durch den Eingangswiderstand des Transistors (etwa 1 kΩ bei Emitterschaltung) das eingestellte und mit einem Voltmeter ermittelte Teilungsverhältnis nicht wesentlich verändert wird.

Bei Messungen von  $u_A$  an  $R_A$  ist zu beachten, daß der Gleichspannungsabfall nicht gemessen werden darf. Falls das verwendete Meßgerät das Abtrennen der Gleichspannung nicht selbst vornimmt, ist eine geeignete Schaltung zu entwerfen, die es gestattet, nur die Wechselspannung an  $R_A$  zu messen.

Informieren Sie sich, welcher Transistortyp zu untersuchen ist!

## A Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Abhängigkeit des Kollektorstroms  $I_C$  von der Spannung  $U_{EC}$  für  $I_B = 0$  (Kollektorreststrom) und für einen weiteren Wert von  $I_B$ ! (Rückwirkung beachten!)
2. Bestimmen Sie die Abhängigkeit des Kollektorstroms  $I_C$  vom Basisstrom  $I_B$  für einen Wert von  $U_{EC}$  bei  $R_A = 0, 10 \text{ k}\Omega, 100 \text{ k}\Omega$ ! Ermitteln Sie aus den Kennlinien die jeweiligen Stromverstärkungen nach (1)!
3. Bestimmen Sie die Spannungsverstärkung bei den im Datenblatt angegebenen Werten für  $U_{EB}$  und  $U_{EC}$  in Abhängigkeit von  $R_A$  ( $1 \text{ k}\Omega \dots 100 \text{ k}\Omega$ )!
4. Berechnen Sie die Leistungsverstärkung für  $R_A = 10 \text{ k}\Omega$  und  $100 \text{ k}\Omega$ !

5. Entwerfen Sie eine Schaltung, in der die Basis Bezugselektrode beider Stromkreise ist (Basisschaltung)! Äußern Sie sich über die mit dieser Schaltung erreichbare Stromverstärkung!  
Kann damit auch eine Spannungs- und eine Leistungsverstärkung erzielt werden?
6. Arbeitet ein Transistor mit einem Wirkungsgrad  $\eta > 1$ , wenn die Leistungsverstärkung  $v_p > 1$  ist?

*Versuchsgeräte:* 3 Meßgeräte (davon 1 Röhrenvoltmeter), Elektronenstrahl-Oszilloskop, Spannteiler oder Transformator, Wechselspannungsquelle mit Ausgangsspannung kleiner als 1 V, pnp- oder npn-Transistor

## 46. Spannungsstabilisierung

### G Grundlagen

Die Aufgabe einer Schaltung zur Spannungsstabilisierung besteht darin, Änderungen einer Eingangsspannung  $U_E$  nur in stark abgeschwächter Form an einem zu versorgenden Gerät mit dem Widerstand  $R_A$  (Bild 97) wirksam werden zu lassen. Wir fordern also  $\Delta U_A \ll \Delta U_E$ .

Das wäre immer möglich, wenn  $R_2 \ll R_1$ , da dann  $U_A \ll U_1 \approx U_E$ . In diesem Fall würde aber der größte Teil der aufgenommenen Leistung am Vorwiderstand  $R_1$  um-

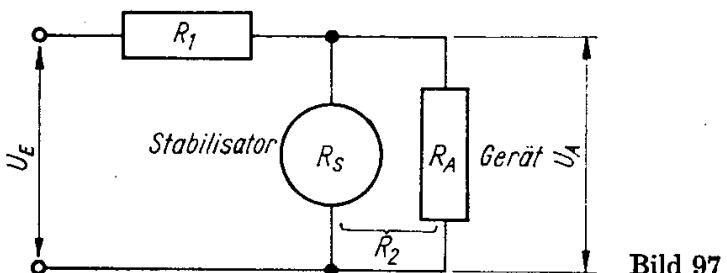


Bild 97

gesetzt. Außerdem wären hohe Eingangsspannungen erforderlich. Es soll  $R_2 (= R_A \parallel R_S)$  in der Größenordnung von  $R_1$  liegen, so daß  $U_A \approx U_1$ , aber bei Änderungen von  $U_E$  soll dennoch  $\Delta U_A \ll \Delta U_E$  sein.

Die Aufgabe wird lösbar, wenn parallel zu dem Gerät (mit Widerstand  $R_A$ ), dessen Spannung stabilisiert werden soll, ein elektronisches Bauelement (Stabilisator) geschaltet wird, dessen (Gleichstrom-) Widerstand bei der Spannung  $U_A$  in der Größenordnung von  $R_A$  liegt oder viel größer ist, das aber auf Spannungsänderungen wie ein sehr viel kleinerer Widerstand reagiert.

Dieser Stabilisator darf folglich keine lineare  $I, U$ -Charakteristik aufweisen, sondern muß in der Umgebung des Arbeitspunktes  $U_A$  durch eine wesentlich größere Steigung der  $I, U$ -Kennlinie als für das zu stabilisierende Gerät gekennzeichnet sein.

Im angenommenen Fall (Bild 98) ist bei  $U = U_A$  der Widerstand  $R_A = \frac{U_A}{I_A}$  und  $R_S = \frac{U_A}{I_S}$ , d. h.  $R_S > R_A$ . Betrachtet man aber das Verhältnis aus der angenommenen Spannungsänderung  $\Delta U$  und der in den Widerständen erfolgenden Stromänderung  $\Delta I$ , so ergibt sich  $\frac{\Delta U}{\Delta I_S} < \frac{\Delta U}{\Delta I_A}$ . Bezeichnen wir diese Quotienten als *differentielle Widerstände*  $r$ , so ist

$$r_S < r_A, \quad \text{wobei } r_A = R_A = \text{const} \quad \text{und} \quad r_S = f(U).$$

Die bei Schwankungen der Eingangsspannung  $U_E$  an  $R_A$  auftretende Spannungsänderung  $\Delta U_A$  ist dann klein gegen  $\Delta U_E$  (auch bei  $R_S \approx R_A \approx R_1$ ), wenn  $r_S \ll R_A$  ist. In diesem Fall ist  $R_2$  (Bild 97) nahezu gleich  $r_S$ . Es gilt dann angenähert

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} = \frac{R_1 + r_S}{r_S} = 1 + \frac{R_1}{r_S} \quad (1)$$

Eine exaktere Aussage über die Glättungswirkung der Schaltung nach Bild 97 erhält man, wenn die Absolutwerte von Ein- und Ausgangsspannung berücksichtigt werden.

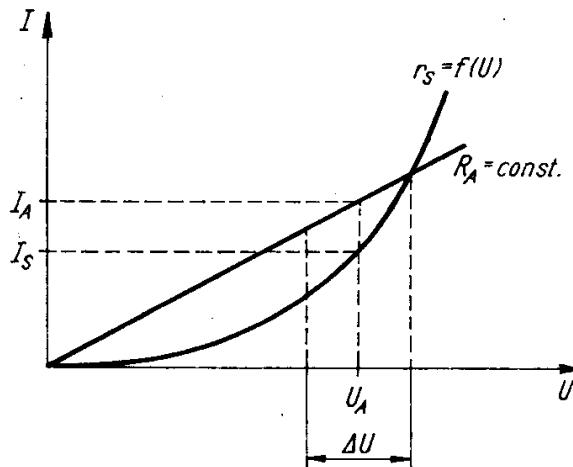


Bild 98

den, d. h., wenn das Verhältnis der *relativen* Änderungen von  $U_E$  und  $U_A$  angegeben wird.

$$\frac{\Delta U_E/U_E}{\Delta U_A/U_A} = \left(1 + \frac{R_1}{r_S}\right) \frac{U_A}{U_E} \quad (2)$$

Der Quotient auf der linken Seite von (2) wird als *Glättungs- bzw. Stabilisierungsfaktor* bezeichnet. Gilt die Voraussetzung  $r_S \ll R_A$  nicht, so ist dieser Faktor zu berechnen nach

$$\frac{\Delta U_E/U_E}{\Delta U_A/U_A} = \left[1 + R_1 \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{r_S}\right)\right] \frac{U_A}{U_E} \quad (3)$$

### Spannungsstabilisierung mit Z-Diode

Z-Dioden haben in Sperrrichtung gepolt eine  $I, U$ -Charakteristik, wie sie für ein zur Spannungsstabilisierung zu verwendendes Bauelement gefordert werden muß (Bild 99). Während am Schnittpunkt der  $I, U$ -Kennlinien für den mit der stabilisierten

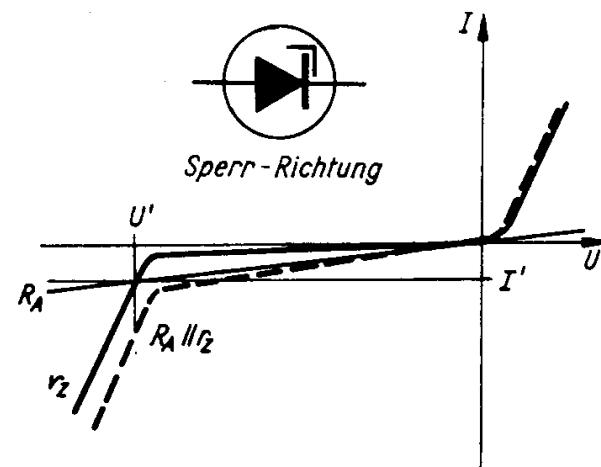


Bild 99

Spannung zu versorgenden Verbraucher und des Stabilisators (Z-Diode) beide den gleichen Widerstand darstellen ( $R_A = r_z = \frac{U'}{I'}$ ), verhalten sich beide bei Spannungsänderung völlig verschieden ( $r_z \ll R_A$ ; denn  $\Delta I_z \gg \Delta I_A$ ).

Die resultierende  $I, U$ -Kennlinie für die Parallelschaltung aus Z-Diode und Gerät ergibt sich aus der Addition der jeweiligen  $I$ -Werte (gestrichelte Kurve in Bild 99). Die Aufteilung der Eingangsspannung  $U_E$  auf den Vorwiderstand  $R_A$  und die Parallelschaltung  $r_z \parallel R_A$  erkennt man beim Einzeichnen der Widerstandsgeraden (Bild 100).

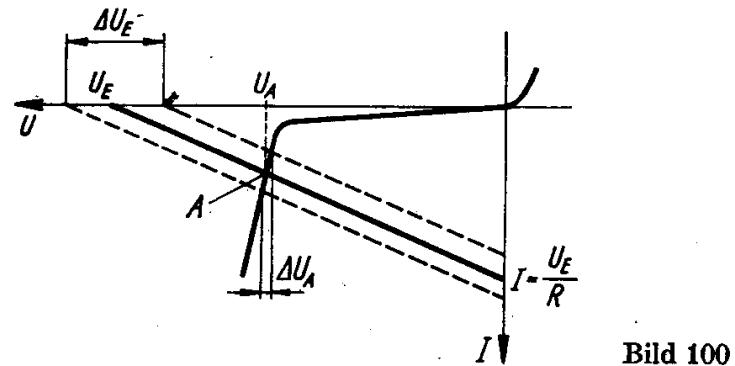


Bild 100

Mit Hilfe von  $R_A$  wird der Arbeitspunkt A und damit  $U_A$  bzw.  $U_1 = U_E - U_A$  festgelegt. Die Änderungen von  $U_E$  ergeben nahezu gleich große Änderungen von  $U_1$ , während  $\Delta U_A \ll \Delta U_E$ .

### Spannungsstabilisierung mit Gasentladungsrohre (Glimmlampe)

In Gasentladungsrohren setzt der Stromfluß erst bei Erreichen der Zündspannung  $U_{za}$  ein. Für das Aufrechterhalten des Stromflusses ist dann die geringere Spannung  $U_{min}$  ausreichend (Bild 101). Geringe Erhöhungen der Spannung ergeben starke Strom-

stärkeänderungen, d. h., eine derartige Röhre hat in der Umgebung der *mittleren Brennspannung*  $U_B$  einen geringen *differentiellen Widerstand*  $r$ , während ihr Gleichstromwiderstand sehr viel größer ist. Sie eignet sich folglich als *Stabilisatorröhre*. Zur Ermittlung geeigneter Werte für Vorwiderstand  $R_1$  und Eingangsspannung  $U_E$  ist wieder zunächst die resultierende Kennlinie für  $R_A \parallel R_{\text{Stab}}$  zu ermitteln und dann

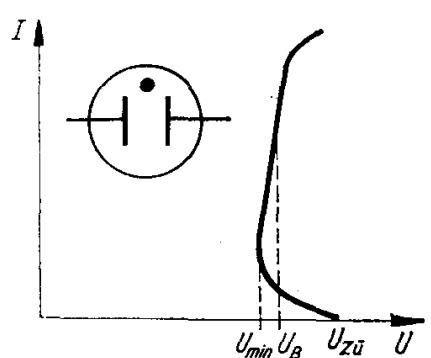


Bild 101

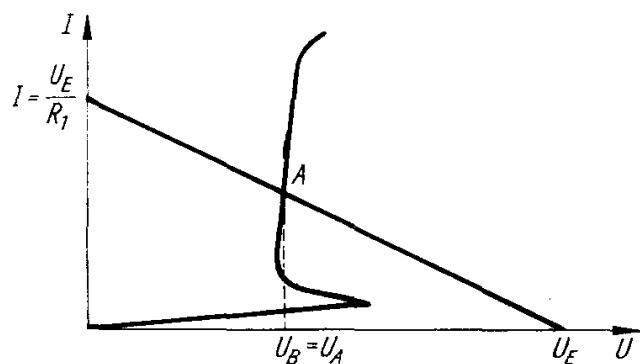


Bild 102

die Widerstandsgerade für  $R_1$  so einzuzeichnen, daß der Arbeitspunkt bei der mittleren Brennspannung  $U_B$  liegt (Bild 102).

## V Versuchsdurchführung

### Z-Diode

Für den Aufbau der Stabilisierungsschaltung mit einer Z-Diode ist die Kenntnis der  $I, U$ -Kennlinie in Sperrrichtung erforderlich. Ist diese nicht vorgegeben, so wird sie mit Hilfe von Stromstärke- und Spannungsmesser aufgenommen.

**Achtung! Zulässige Verlustleistung nicht überschreiten!**

Danach wird die resultierende Kennlinie (in Bild 99 gestrichelt) gezeichnet. Nach der Entscheidung, welche Spannungsschwankung  $\Delta U_E$  geglättet werden soll, kann der Arbeitspunkt festgelegt werden.  $U_E$  und  $R_1$  werden so gewählt, daß sich ein günstiger Stabilisierungs- (Glättungs-) Faktor ergibt, gleichzeitig aber auch die Verlustleistung an  $R_1$  nicht zu groß wird ( $U_E \approx 2U_A$ ). Der Stabilisierungsfaktor kann aus der grafischen Darstellung (analog Bild 100), nach (2) bzw. (3) oder mit Hilfe einer Meßschaltung nach Bild 103 bestimmt werden.

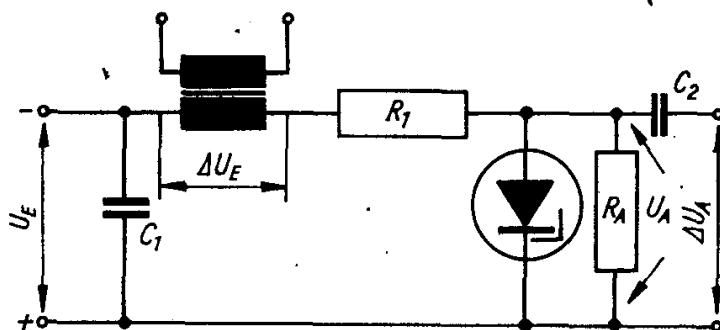


Bild 103

In der Meßschaltung muß der Gleichstromwiderstand der Sekundärspule des Übertragers klein gegen  $R_1$  sein.  $C_1$  soll verhindern, daß am Innenwiderstand der Spannungsquelle eine mit  $\Delta U_A$  vergleichbare Wechselspannung abfällt. Bei Messungen mit einem Röhrenvoltmeter kann eine  $\Delta U_A$  proportionale Spannung direkt an  $R_A$  abgenommen werden, ebenso bei Vergleich von  $\Delta U_E$  und  $\Delta U_A$  mit einem Elektronenstrahl-Oszilloskop mit  $RC$ -Eingang. Stehen nur einfache Vielfachmesser oder Oszilloskopen mit Gleichspannungseingang zur Verfügung, so ist eine  $\Delta U_A$  proportionale Spannung nur über  $C_2$  feststellbar, wobei  $C_2$  den Gleichspannungsanteil abtrennt.  $X_{C_2}$  muß klein gegen den Innenwiderstand des Meßgerätes sein.

### *Stabilisatorröhre*

Aus der Kennlinie der Röhre sind die Werte für  $U_{ZU}$ ,  $U_B$  und  $I_{max}$  zu entnehmen. Nach Konstruktion der resultierenden Kennlinie für Stabilisator und zu versorgendes Gerät kann für eine Eingangsspannung  $U_E \approx (2 \dots 3) U_B$  ein geeigneter Wert für  $R_1$  ermittelt werden, so daß  $U_A = U_B$  wird. Aus der Kennlinie kann weiterhin entnommen werden, in welchem Bereich  $U_E$  schwanken darf, so daß die für das Aufrechterhalten des Stromflusses notwendige Spannung  $U_{min}$  nicht unterschritten und die zulässige Stromstärke  $I_{max}$  nicht überschritten wird. Der Stabilisierungsfaktor kann mit der Schaltung nach Bild 103 bestimmt werden.

## **A Aufgaben**

1. Bestimmen Sie den Stabilisierungsfaktor einer Schaltung nach Bild 97
  - 1.1. mit Z-Diode,
  - 1.2. mit Stabilisatorröhre  
mit Hilfe der Meßschaltung Bild 103!
2. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit den Faktoren, die sich durch Auswertung der Kennlinien und Berechnung nach (2) bzw. (3) ergeben!  
Geben Sie eine Begründung für auftretende Abweichungen!
3. Inwiefern sind die in der Meßschaltung mit einem Spannungsmesser gemessenen Wechselspannungen nicht gleich  $\Delta U_E$  bzw.  $\Delta U_A$ ? Mit welchem Faktor  $k$  müssen bei sinusförmigen Spannungsschwankungen die Meßwerte multipliziert werden, um  $\Delta U_E$  bzw.  $\Delta U_A$  zu erhalten? Wann ist  $k_A = k_E$ ?
4. Entscheiden Sie, ob bei Aufnahme der Kennlinien die strom- oder spannungsrichtige Schaltung der Meßgeräte anzuwenden ist, um den kleinsten systematischen Meßfehler zu verursachen?
5. Wieso kann eine Z-Diode nicht in Durchlaßrichtung als Stabilisator verwendet werden? In diesem Fall ist doch der differentielle Widerstand ebenfalls gering.
6. Begründen Sie die von Ihnen gewählten Werte für  $U_E$  und  $R_1$  sowie für  $C_1$  und ggf.  $C_2$ !
7. Weshalb sind die besprochenen Stabilisierungsschaltungen nur für kleine Verbraucherleistungen geeignet?

**Versuchsgesetze:** Z-Diode und Stabilisatorröhre, Sortiment von Widerständen und Kondensatoren, Röhrenvoltmeter oder Vielfachmesser, Elektronenstrahl-Oszilloskop

## 47. Frequenzbestimmung mit dem Elektronenstrahl-Oszillografen

### G Grundlagen

Mit Hilfe von Elektronenstrahl-Oszillografen kann die Frequenz jeder Art von Schwingungen festgestellt werden, sofern diese durch geeignete Wandler in elektrische Schwingungen umwandelbar sind und solange der Elektronenstrahl diesen Schwingungen noch folgen kann. Die hier zu beschreibenden Verfahren beruhen auf dem Vergleich einer bekannten Frequenz (Normalfrequenz  $f_n$ ) mit der zu ermittelnden Frequenz  $f_x$ , so daß der Bereich der bestimmbaren Frequenzen noch durch den Bereich der Normalfrequenzen eingeschränkt wird.

#### Hellsteuerung eines Oszilloskopograms

Vom Oszilloskop wird der Verlauf der zu untersuchenden Schwingung (Frequenz  $f_x$ ) aufgezeichnet, während eine Spannung mit der Normalfrequenz  $f_n$  so an die Elektronenstrahlröhre gelegt wird, daß sie die Helligkeit des Kurvenbildes moduliert.

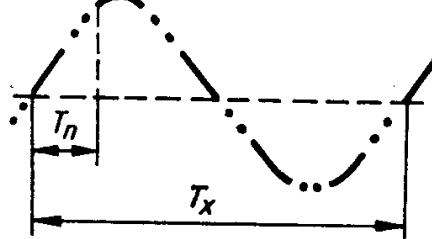


Bild 104

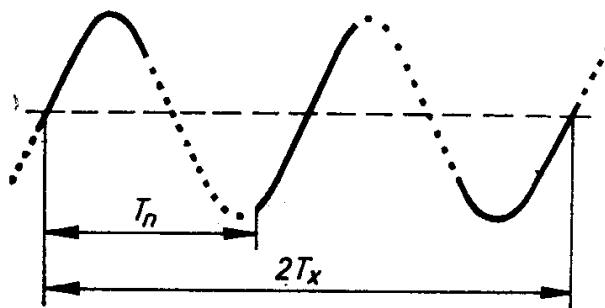


Bild 105

In Bild 104 entfallen auf 1 Periode der zu untersuchenden Schwingung 5 Perioden der Vergleichsschwingung. Es gilt hier

$$T_x = 5T_n \quad \text{und folglich} \quad f_x = \frac{1}{5} f_n$$

In Bild 105 ist

$$2T_x = 2,5T_n \quad \text{und damit} \quad f_x = \frac{4}{5} f_n$$

Bei großen Unterschieden zwischen  $f_x$  und  $f_n$  wird die Bestimmung der auf eine Periode der zu untersuchenden Schwingung entfallenden Anzahl der Perioden der Vergleichsschwingung unsicherer. Es bietet sich dann ein Verfahren an, das die Helligkeitsmodulation eines geschlossenen Kurvenzuges ermöglicht.

#### Hellsteuerung eines Kreises

Bei diesem Verfahren zeichnet die zu untersuchende Schwingung einen Kreis auf den Oszilloskopschirm, dessen Helligkeit dann wieder durch eine Spannung mit bekannter Frequenz moduliert wird.

Ein Kreis entsteht auf dem Schirm dann, wenn Horizontal- und Vertikalablenkspannung von zwei um  $90^\circ$  phasenverschobenen, gleichfrequenten und sinusförmigen Spannungen bewirkt werden und bei gleicher Ablenkempfindlichkeit in vertikaler und horizontaler Richtung die Spannungen an den Ablenkplatten gleich groß sind. Als einfache Schaltung zur Erzeugung der Phasenverschiebung bietet sich ein Aufbau nach Bild 106 an, da hier die Spannungsabfälle über ohmschem und kapazitivem Wider-

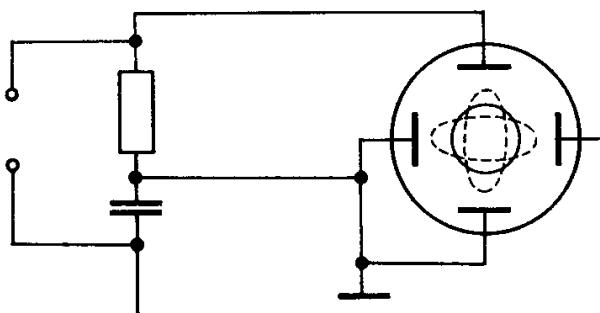


Bild 106

stand nahezu um  $90^\circ$  phasenverschoben sind. Dabei darf jedoch keiner der Ausgänge des die Frequenz  $f_x$  erzeugenden Generators eine leitende Verbindung mit der Masse des Oszillografen haben.

Wird der auf dem Schirm entstehende geschlossene Kurvenzug mit der Normalfrequenz moduliert, dann ergeben sich besonders leicht auswertbare Bilder. Der gesamte Kurvenzug (hier Kreisumfang) entspricht einer Periode der zu untersuchenden Schwingung, so daß die Anzahl der Aufhellungen des *stehenden Bildes* direkt den Faktor darstellt, um den die Frequenz  $f_n = f_{\text{mod}}$  der modulierenden Spannung größer ist als die Frequenz der den Kreis zeichnenden Spannung ( $f_x = f_{K_r}$ ). So ist in Bild 107  $f_{\text{mod}} = f_{K_r}$ ; in Bild 108 ist  $f_{\text{mod}} = 6f_{K_r}$ . Die Modulationsfrequenz ist dann und nur dann ein ganzzahliges Vielfaches der „Kreisfrequenz“, wenn die

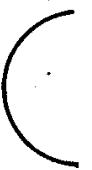


Bild 107



Bild 108

hellen und dunklen Kreisbögen *gleich lang* sind. Sind die hellen Bögen länger als die dunklen Abschnitte, dann sind die Frequenzverhältnisse nicht ganzzahlig und unsicher bestimmbar.

Auf dem Oszillografenschirm können bei diesem Verfahren bis zu 50 Aufhellungen ausgezählt werden. Bedenkt man, daß einmal die Spannung mit der zu ermittelnden Frequenz  $f_x$  und einmal die Vergleichsspannung mit der Frequenz  $f_n$  den Kreis zeichnen kann, so ist mit einer Vergleichsfrequenz ein Frequenzbereich mit einem Verhältnis  $1 : 2500$  zwischen unterer und oberer Frequenz erfaßbar.

Bei beiden Verfahren können die zu untersuchende Spannung und die Spannung mit bekannter Frequenz vertauscht werden.

#### *Frequenzvergleich mit Hilfe von Lissajous-Figuren*

Werden an den  $x$ - und  $y$ -Eingang eines Oszillografen sinusförmige Wechselspannungen gelegt, so entstehen solche Bilder, wie sie sich auch durch grafische Addition zweier

Schwingungen mit senkrecht zueinander stehenden Schwingungsrichtungen ergeben (LISSAJOUS-Figuren). Dabei ist die Gestalt der Figuren vom Frequenzverhältnis und der Phasendifferenz der verglichenen Spannungen abhängig.

Ist  $f_x = f_y$ , so entstehen bei  $U_x = U_y$  Schirmbilder wie in Bild 109. Die Gerade bzw. die Ellipse ist nach links geneigt, wenn  $\Delta\varphi = 180^\circ$  bzw.  $90^\circ < \Delta\varphi < 180^\circ$ .

Bei  $f_x : f_y = 1 : 2$  entstehen Figuren nach Bild 110 und bei  $f_x : f_y = 1 : 3$  nach Bild 111.

Ist  $f_x : f_y = 2 : 1$ , so entsteht eine Figur wie in Bild 112.

Bei ungeradzahligen, aber rationalen Frequenzverhältnissen entstehen mehrfach verschlungene Figuren, wie z. B. in Bild 113. Wird die Phasendifferenz so eingestellt,

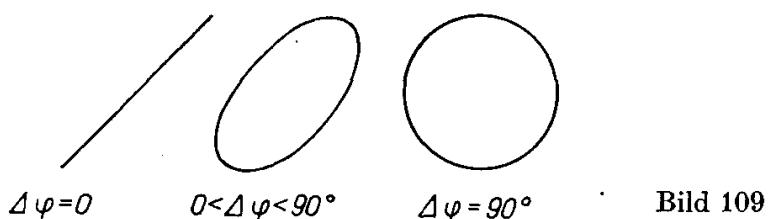


Bild 109

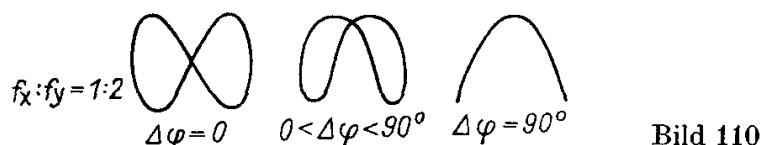


Bild 110

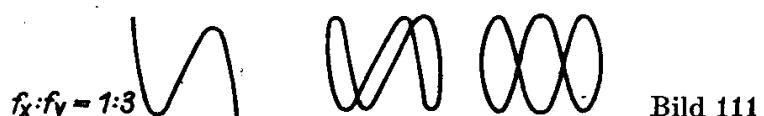


Bild 111



Bild 112

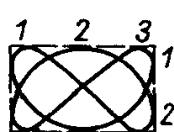


Bild 113

dass geschlossene Kurvenzüge entstehen, dann braucht man bei allen hier erwähnten Frequenzverhältnissen nur die Berührungs punkte der Figur mit dem umschriebenen Rechteck auszuzählen und das Verhältnis zu bilden. Die Berührungs punkte des Kurvenzuges mit den vertikalen Seiten des Rechtecks stellen die Umkehrpunkte der Horizontalschwingung ( $U_x$ ) dar; die Anzahl der Vertikalschwingungen, die in der gleichen Zeit ablaufen, ist gleich der Anzahl der Berührungs punkte mit den horizontalen Seiten des Rechtecks. Das Frequenzverhältnis ist somit eindeutig bestimmbar (in Bild 113 ist  $f_x : f_y = 2 : 3$ ).

Weitere Verfahren der Frequenzbestimmung mit Elektronenstrahl-Oszilloskop en sind in den Fachbüchern über Oszilloskop en-Meßtechnik angegeben.

## V Versuchsdurchführung

### Hellsteuerung eines Oszillogramms

Man erzeugt ein stehendes Bild der zu untersuchenden Schwingung (beliebiger zeitlicher Verlauf). Die Kippfrequenz des Oszillografen wird so eingestellt, daß möglichst wenige Perioden dargestellt werden. An den Eingang für die Helligkeitsmodulation wird die Spannung mit der Vergleichsfrequenz gelegt. Dabei wird  $f_n$  so eingeregelt, daß sich ein ganzzahliges Vielfaches von  $T_n/2$  mit einem ganzzahligen Vielfachen von  $T_x/2$  deckt. Durch Übertragung der anhand von Bild 104 angestellten Überlegungen auf den vorgefundenen Fall kann die gesuchte Frequenz berechnet werden.

### Hellsteuerung eines Kreises

Das  $RC$ -Glied wird so ausgelegt, daß für eine in der Mitte des zu erwartenden Bereiches liegende Frequenz  $R \approx X_C$  ist. Mit Hilfe der Horizontal- bzw. Vertikalverstärkung wird ein Kreis eingestellt. Je nach den gegebenen Bedingungen wird der Kreis entweder von der zu untersuchenden oder von der die Vergleichsfrequenz liefernden Spannung erzeugt. Bei Messung der Frequenz von  $RC$ -Generatoren oder Multivibratoren ist zu prüfen, in welchem Maße eine Frequenzverfälschung durch das  $RC$ -Glied eintreten kann bzw. ob die zu untersuchende Schwingung überhaupt zur Erzeugung eines Kreises auf dem Oszillografenschirm geeignet ist. Aus den Geräteunterlagen des Oszillografen können Widerstand und Kapazität für den Eingang zur Helligkeitsmodulation entnommen und daraus die Rückwirkung auf den angeschlossenen Generator abgeschätzt werden.

### Lissajous-Figuren

Durch Ausschalten des Kippgenerators des Oszillografen und Anschluß der beiden zu vergleichenden Spannungen an den  $x$ - bzw.  $y$ -Eingang erhält man die beschriebenen Figuren. Das Verhältnis von Höhe und Länge des umschriebenen Rechtecks wird so eingestellt, daß eine eindeutige Auswertung der Figuren möglich ist. Liefert der Meßgenerator eine Spannung mit  $f_n = f_x$ , so erübrigen sich Berechnungen der Frequenzverhältnisse, es entstehen Kreis, Ellipse oder Gerade.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Frequenzen der zu untersuchenden Schwinger nach allen drei behandelten Verfahren!
2. Stellen Sie bei allen drei Verfahren mindestens drei verschiedene zur Ausmessung geeignete Oszillogramme ein! Vertauschen Sie außerdem, wenn möglich, die  $f_x$  und  $f_n$  erzeugenden Spannungen!
3. Geben Sie den Meßwert als Mittelwert aus wenigstens 5 verschiedenen Messungen an (verschiedene Verfahren und Einstellungen)!
4. Stellen Sie im Protokoll einige zur Auswertung verwendete Figuren dar oder fotografieren Sie diese Schirmbilder!
5. Wodurch wird die Genauigkeit der Frequenzermittlung bestimmt?

**Versuchsgeräte:** Meßgenerator, Elektronenstrahl-Oszillograf mit Kameratubus, Kamera, Generatoren zur Erzeugung der zu untersuchenden Schwingung

## 48. Resonanzerscheinungen in RLC-Schaltungen

### G

#### Grundlagen

Wir betrachten einen elektrischen Stromkreis, der eine Induktivität  $L$ , eine Kapazität  $C$  und einen Wirkwiderstand  $R$  enthält (Bild 114). Wird der Kondensator einmal

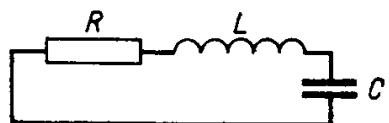


Bild 114

aufgeladen oder in der Spule ein einmaliger Spannungsstoß erzeugt, dann gilt nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz

$$-L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{Q}{C}$$

Mit  $I = \frac{dQ}{dt}$  folgt

$$-L \frac{d^2Q}{dt^2} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

oder

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (1)$$

Diese Differentialgleichung hat die gleiche Form wie (1) in Versuch 8 und beschreibt hier die *freie gedämpfte elektromagnetische Schwingung*. Wir führen hier analog Versuch 8 ein:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (2)$$

und

$$2\delta = \frac{R}{L} \quad (3)$$

Die Frequenz der gedämpften Schwingung ist nach (6) in Versuch 8

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (4)$$

Aus (4) folgt mit (2) und (3) die Frequenz der gedämpften elektromagnetischen Schwingung

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (5)$$

Ist außer dem Wirkwiderstand der Spule kein weiterer ohmscher Widerstand eingeschaltet, so ist gewöhnlich  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$ , und (5) geht über in die bekannte THOMSONSche Gleichung

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (6)$$

Die Zusammenschaltung einer Spule mit einem Kondensator ergibt stets einen *RLC*-Kreis, wobei *R* vor allem den Wirkwiderstand der Spule darstellt, der die in Versuch 49 erläuterten Verluste hervorruft, während der Kondensator hier als verlustfrei angenommen werden kann. In einer derartigen Schaltung können sowohl freie gedämpfte elektromagnetische Schwingungen erzeugt als auch ungedämpfte Schwingungen erzwungen werden, deren Frequenz der Erreger bestimmt. Das Verhalten einer *RLC*-Schaltung bei Anschluß an eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz *f* soll hier beschrieben werden.

#### *Reihenschaltung von L(R) und C*

Die Reihenschaltung einer Spule mit einem Kondensator (Bild 115) kann rechnerisch erfaßt werden als Reihenschaltung einer verlustfreien Kapazität und Induktivität

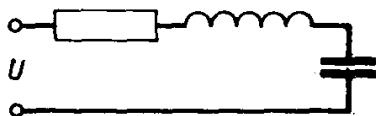


Bild 115

mit einem kapazitäts- und induktivitätsfreien Widerstand *R*. Der Gesamtwiderstand (Scheinwiderstand *Z*) ergibt sich aus

$$Z = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Der Betrag des Widerstandes ist folglich

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (7)$$

Bild 116 zeigt das Diagramm der Widerstände, das aus dem Diagramm der Spannungen (Bild 117) ableitbar ist. Aus Bild 116 ergibt sich

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (8)$$

Der Betrag des Scheinwiderstandes und die im Stromkreis auftretende Phasenverschiebung hängen also von der Frequenz ab. Bei der Frequenz, für die kapazitiver und induktiver Widerstand gleich groß sind ( $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ), fließt ein Strom, dessen Stärke

nur von der angelegten Spannung  $U$  und dem Widerstand  $R$  abhängig ist. Die Spannungen am induktiven und kapazitiven Widerstand sind bei dieser Frequenz von

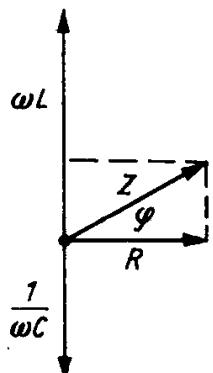


Bild 116

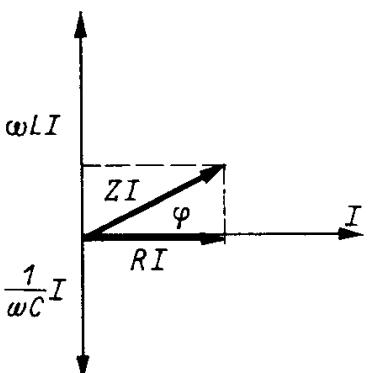


Bild 117

gleicher Größe. Da sie jedoch entgegengesetzte Phasen haben, heben sie sich in ihrer Wirkung auf den Strom gegenseitig auf. Es ist dann

$$Z = R \quad \text{und} \quad I = \frac{U}{R}$$

Die Stromstärke erreicht einen Höchstwert, und die Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$  wird nach (8) Null.

Aus  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  folgt für diesen *Resonanzfall*

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

oder

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (9)$$

Das ist die Resonanzfrequenz; sie ist gleich der Frequenz der freien Schwingung des ungedämpften Schwingkreises, vgl. (2).

Im Resonanzfall fällt die gesamte Spannung  $U$  über dem Wirkwiderstand  $R$  ab. Da dieser jedoch gewöhnlich klein gegen die Blindwiderstände ist, alle Widerstände aber vom gleichen Strom durchflossen werden, ist der Spannungsabfall an  $X_C$  und  $X_L$  groß gegen den Spannungsabfall an  $R$ . Das bedeutet  $U_{C,L} \gg U$ . Diese Erscheinung, daß die Spannung an einzelnen Schaltgliedern größer als die Klemmenspannung ist, wird als *Spannungsüberhöhung* bezeichnet. Ihr Wert ergibt sich als Quotient aus Blind- und Wirkwiderstand:

$$\text{Überhöhung} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR} \quad (10)$$

Die Spannung an der Spule ist im Resonanzfall etwas größer als die am Kondensator, da an der Spule die Summe aus  $U_R$  und  $U_L$  liegt (Bild 118).

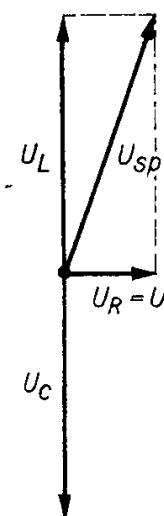


Bild 118

### Parallelschaltung von $L(R)$ und $C$

In dieser Schaltung (Bild 119) fließt im Kondensatorzweig ein Strom, der gegenüber der Spannung um  $90^\circ$  voreilt, während der Strom im Spulenzweig nacheilt. Jedoch ist wegen des vorhandenen Wirkwiderstandes  $\varphi_{Sp} < 90^\circ$  (Bild 120). Der Gesamtstrom ergibt sich als Summe beider Ströme. Aus Bild 120 ist zu erkennen, daß  $I$  um so kleiner ist, je kleiner der ohmsche Widerstand wird, da dann  $\varphi_{Sp}$  gegen  $90^\circ$  geht. Der Betrag von  $I$  erreicht ein Minimum, wenn  $I$  in Phase mit  $U$  ist. Nach Bild 121 ist

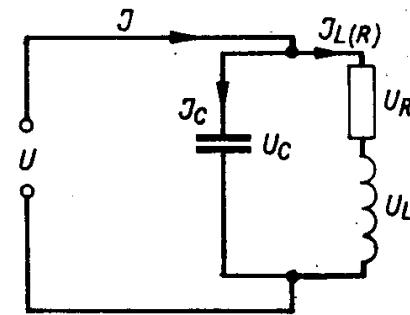


Bild 119

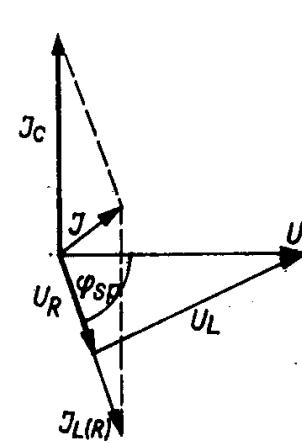


Bild 120

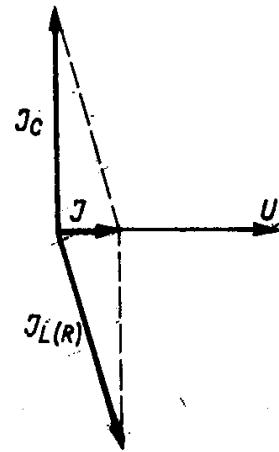


Bild 121

das der Fall, wenn  $I_{L(R)}$  wenig größer als  $I_C$  ist. In diesem Fall stellt der Schwingkreis den größten Widerstand dar. Er nimmt dann nur die Wirkleistung  $UI$  auf, während die viel größere Scheinleistung  $UI_C$  zwischen Kondensator und Spule pendelt. Das ist der *Resonanzfall* für den *Parallelschwingkreis*. Er ist ausgezeichnet durch das Minimum des Stromes in der Zuleitung. Das Verhältnis aus Schwingkreisstrom und Gesamtstrom wird als *Stromüberhöhung* bezeichnet.

Der Scheinwiderstand  $Z$  des Parallelschwingkreises ergibt sich aus

$$Z = \frac{Z_{L,R}X_C}{Z_{L,R} + X_C} = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Mit  $\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$  folgt weiter

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Der Ausdruck wird mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitert:

$$Z = \frac{\frac{R}{\omega^2 C^2} - j \frac{1}{\omega C} \left(R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{L}{C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11)$$

Wie oben ausgeführt, sind im Resonanzfall  $U$  und  $I$  in Phase. Der Imaginärteil von (11) ist dann Null:

$$R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{L}{C} = 0$$

Daraus kann die Resonanzfrequenz berechnet werden:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \\ f_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Für  $\left(\frac{R}{L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$  erhält man wieder als Näherung die **THOMSONSche Gleichung (6)**.

Bei der Reihenschaltung von  $L(R)$  und  $C$  ergibt sich für  $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$  ein minimaler

Widerstand, so daß  $I$  einen Maximalwert erreicht. Die Wechselspannung  $U$  hält dann eine Schwingung aufrecht, deren Amplituden  $\hat{U}_C$  und  $\hat{U}_L$  viel größer sind als  $\hat{U}$ . Man bezeichnet deshalb diese Erscheinung als *Spannungsresonanz*.

Bei der Parallelschaltung von  $L(R)$  und  $C$  stellt der Schwingkreis bei  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$  den maximalen Widerstand dar, so daß der Strom in der Zuleitung einen Minimalwert annimmt. Da dieser Strom  $I$  im Schwingkreis eine Schwingung mit viel größeren

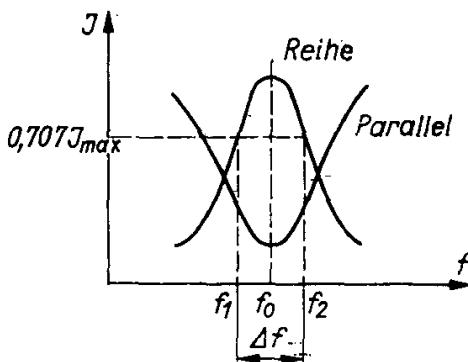


Bild 122

Amplituden  $\hat{I}_c$  und  $\hat{I}_L$  als  $\hat{I}$  aufrechterhält, wird dieser Effekt als *Stromresonanz* bezeichnet.

Das Maximum der Resonanzkurve für den Strom im Reihenkreis (Bild 122) ist um so höher, je kleiner  $R$  ist, während sich beim Parallelkreis ihr Minimum mit kleiner werdendem  $R$  der  $f$ -Achse nähert.

Ein weiteres Kennzeichen für einen Schwingkreis ist seine *Bandbreite*  $\Delta f = f_2 - f_1$  (Bild 122). Sie gibt für den Reihenkreis den Frequenzbereich an, in dem gilt  $I \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} I_{\max}$ . Für den Parallelkreis gibt sie den Bereich an, in dem  $Z \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} Z_{\max}$  ist. Es gilt die Beziehung

$$\Delta f = \frac{\delta}{\pi} \quad (13)$$

mit  $\delta = \frac{R}{2L}$  nach (3).

Je nach der Einordnung eines Reihen- oder Parallelschwingkreises in eine elektrische Schaltung, die mit Spannungen verschiedener Frequenzen gespeist wird, wird ein bestimmter Frequenzbereich hervorgehoben oder unterdrückt. Der ausgewählte Bereich ist um so kleiner, je geringer die Dämpfung des Kreises ist.

## V Versuchsdurchführung

### *Reihenkreis*

Eine Spule und ein Kondensator werden an einen Generator angeschlossen, der Spannungen in einem Frequenzbereich erzeugt, der die Resonanzfrequenz einschließt. Da derartige Generatoren gewöhnlich einen hohen Innenwiderstand haben, ist die Ausgangsspannung sehr belastungsabhängig. Die Spannung ist deshalb ständig auf den vorgesehenen Wert nachzuregeln. Wegen der zu erwartenden Spannungsüber-

höhung bei Resonanz sollte die Generatorenspannung höchstens  $\frac{1}{20}$  der für den Kondensator zulässigen Spannung betragen. Sie muß außerdem so gewählt werden, daß bei  $f = f_0$  die zulässige Generatorenleistung nicht überschritten wird. Für die Ermittlung der Resonanzkurve (Bild 122) wird zunächst die Resonanzfrequenz festgestellt, indem das Stromstärkemaximum aufgesucht wird. Danach wird die Frequenz in dem interessierenden Bereich variiert. Aus  $U$  und  $I_{\max}$  wird  $R$  errechnet.

### Parallelkreis

Es wird zunächst die Kurve für die Stromstärke in Abhängigkeit von der Frequenz aufgenommen und daraus dann die Kurve für den Widerstand  $Z$  berechnet. Um den Einfluß des Wirkwiderstandes auf die Kurvenform sichtbar zu machen, wird eine zweite Versuchsreihe durchgeführt, bei der in Reihe zur Spule ein zusätzlicher Widerstand von der Größe des bereits ermittelten Wirkwiderstandes geschaltet wird.

## A Aufgaben

1. Vergleichen Sie Differentialgleichung (1) mit der entsprechenden in Versuch 8, stellen Sie analoge Größen zusammen und diskutieren Sie die Analogie!
2. Bestimmen Sie für Reihen- und Parallelkreis  $I = f(f)$ !
3. Ermitteln Sie für beide Schaltungen  $f_0$ !
4. Bestimmen Sie aus  $f_0$  und  $C$  beim Reihenkreis die Induktivität der Spule sowie aus  $U$  und  $I_{\max}$  bei Reihenresonanz den Wirkwiderstand  $R$ !
5. Ermitteln Sie die Spannungsüberhöhung bei Reihenresonanz und die Stromüberhöhung bei Stromresonanz experimentell und vergleichen Sie den Wert für die Spannungsüberhöhung mit dem nach (10) errechenbaren!
6. Zeichnen Sie die Kurve  $Z = f(f)$  für den Parallelkreis und bestimmen Sie hieraus und aus der Stromkurve des Reihenkreises die Bandbreite! Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit den aus (13) errechenbaren!
7. Ermitteln Sie Resonanzfrequenz und Bandbreite für einen Parallelenschwingkreis mit verdoppeltem Dämpfungswiderstand!

*Versuchsgeräte:* Generator, 2 Stromstärkemesser und 2 Spannungsmesser, die im zu untersuchenden Frequenzbereich verwendbar sind, Spule, Kondensator, Widerstand

## 49. Transformator

### G Grundlagen

Beim Anlegen einer Wechselspannung  $U_1$  an die Primärwicklung eines Transformatormodells (Bild 123), dessen Sekundärseite *unbelastet* ist ( $R_2 \rightarrow \infty$ ), wird bereits eine elektrische Leistung umgesetzt. Ein Teil der Energie dient zum Ummagnetisieren des

Eisens (*Hystereseverluste*), und ein weiterer Teil wird infolge der Wirbelströme im Kern in Wärme umgewandelt (*Wirbelstromverluste*).

Der sich periodisch ändernde magnetische Fluß erzeugt in der Primärspule eine Selbstinduktionsspannung  $U_{i1}$ , die gegenüber dem Magnetisierungsstrom  $I_M$  um

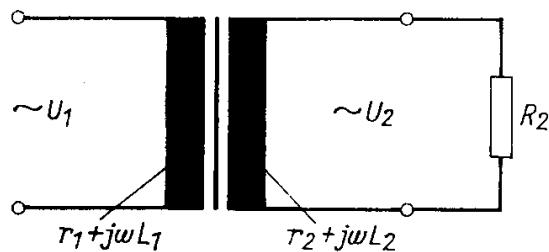


Bild 123

$90^\circ$  vorausseilt (Bild 124), während die Wirbelstromverluste ein Strom  $I_w$  deckt, der in Phase mit  $U_{i1}$  ist. Die Summe beider Ströme ergibt den *Leerlaufstrom*  $I_0$ , der im ohmschen Widerstand  $R_1$  den Spannungsabfall  $I_0 R_1$  hervorruft ( $I_0^2 R_1 = \text{Stromwärmeverlust}$ ). Dieser Spannungsabfall ist in Phase mit  $I_0$ .

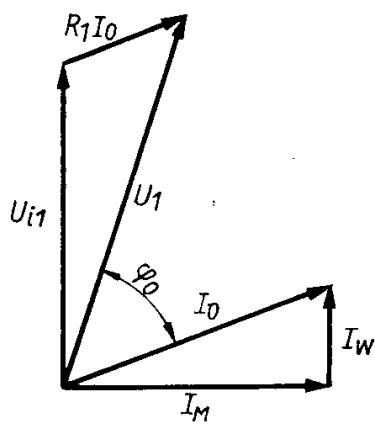


Bild 124

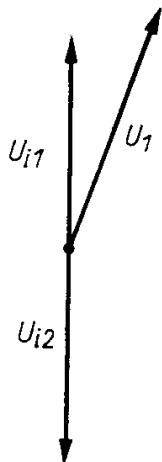


Bild 125

Die angelegte Spannung  $U_1$  ist gleich der vektoriellen Summe von Selbstinduktionsspannung und Spannungsabfall an  $R_1$  (Bild 124):

$$U_1 = (j\omega L_1 + R_1) I_0 \quad (1)$$

Für einen technischen Transformator ist bei  $f = 50 \text{ Hz}$  gewöhnlich  $R_1 \ll |j\omega L_1|$  und  $I_w \ll I_M$ , so daß die Phasenverschiebung im Leerlauf nahezu  $90^\circ$  beträgt ( $\cos \varphi_0 \rightarrow 0$ ), d. h., die aufgenommene Leistung ist vorwiegend Blindleistung, die zwischen Transformator und Spannungsquelle pendelt.

Bei einem unbelasteten Transformator ohne Streuung des magnetischen Flusses ( $\Phi_2 = \Phi_1$ , Kopplungsfaktor  $k = 1$ ) und einem Windungsverhältnis  $N_2:N_1 = \dot{u} = 1$  entsteht in der Sekundärspule eine Induktionsspannung  $U_{i2} = -U_{i1}$  (Bild 125).

Durchsetzt nicht der gesamte von  $I_M$  in der Primärspule erzeugte Magnetfluß die Sekundärspule, d. h., tritt eine Streuung  $s_1$  auf ( $\Phi_2 < \Phi_1$ ), so wirkt sich dies wie ein

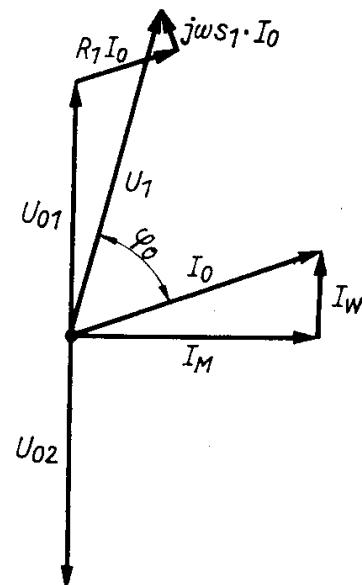


Bild 126

zusätzlicher induktiver Widerstand aus, der in Reihe mit  $R_1$  und  $j\omega L_1$  geschaltet ist. Der daran auftretende Spannungsabfall eilt  $I_0$  um  $90^\circ$  voraus (Bild 126). Die Streuung ergibt sich aus

$$s_1 = L_1 - M, \quad (2)$$

wobei  $M$  die Gegeninduktivität ist:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (3)$$

Wenn Streuung auftritt, dann ist der Kopplungsfaktor  $k < 1$ . Bei konstanter Spannung  $U_1$  sinkt mit zunehmender Streuung  $s_1$  die Selbstinduktionsspannung  $U_{11}$ . Bild 126 stellt das vollständige *Leerlaufdiagramm* eines Transformators dar:

$$U_1 = (j\omega L_1 + R_1 + j\omega s_1) I_0 \quad (4)$$

#### *Belasteter Transformator (ohmsche Belastung)*

Beim Anschluß eines Widerstandes an die Sekundärseite des Transformators fließt ein Strom der Stärke  $I_2$ . Das Magnetfeld, das dieser Strom im Transformator erzeugt, ruft einen magnetischen Fluß hervor, der dem von  $I_0$  erzeugten Erregerfluß entgegenwirkt (LENZSche Regel). Es tritt jedoch keine Schwächung des Flusses ein, da mit dem Anwachsen der sekundären Stromstärke  $I_2$  auch die Primärstromstärke  $I_1$  größer wird. Der Wert für  $I_1$  stellt sich so ein, daß die vektorielle Summe von  $I_1$  und  $I_2$  weiterhin  $I_0$  ergibt (Bild 127).

Durch die Rückwirkung der Sekundär- auf die Primärseite sinkt die Gegenspannung  $U_{11}$ , so daß der größere Primärstrom fließen kann. Es steigt dabei der Spannungsabfall an  $R_1$  und  $j\omega s_1$ . Vergleichen Sie Bild 128 mit Bild 126, oberer Teil!

Die sekundärseitig zur Verfügung stehende Klemmenspannung  $U_2$  ist kleiner als  $U_{12}$ , da sowohl an der sekundärseitigen Streuinduktivität  $s_2 = L_2 - M$  als auch am ohmschen Widerstand  $R_2$  Spannungsabfall auftritt. Der Spannungsabfall an  $R_2$  ist in Phase mit  $I_2$ , während der Spannungsabfall an  $j\omega s_2$  um  $90^\circ$  voreilt (Bild 128).

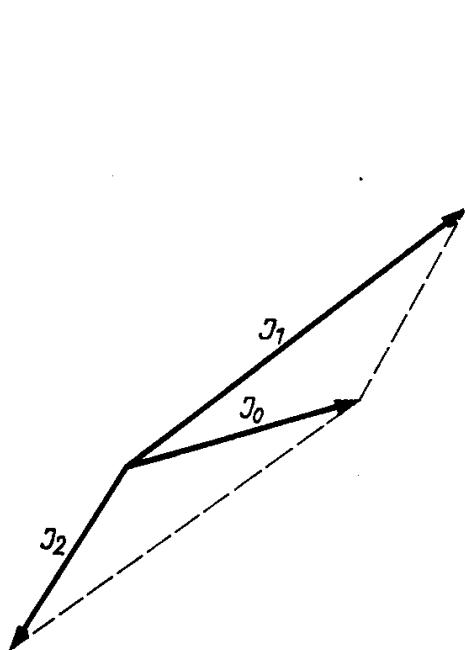


Bild 127

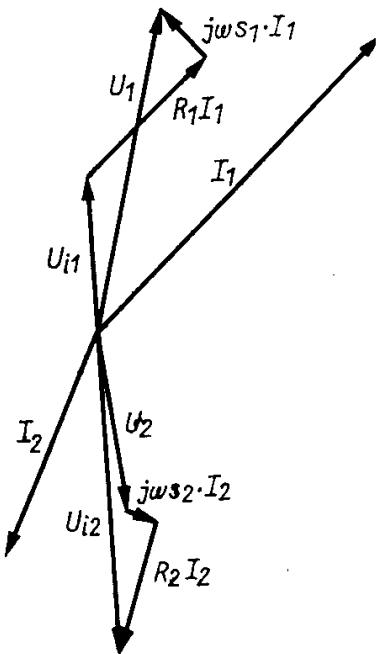


Bild 128

Die Ausgangsspannung  $U_2$  ergibt sich somit als vektorielle Differenz  $U_{12}$  und  $I_2 R_2$  sowie  $j\omega s_2 I_2$ :

$$U_2 = U_{12} - (R_2 + j\omega s_2) I_2 \quad (5)$$

Die Übertragung der bisher entwickelten Vorstellungen über die Widerstände, Spannungen und Stromstärken in eine Schaltung zeigt das *Ersatzschaltbild* (Bild 129). Der Widerstand  $R_E$  symbolisiert hier die durch Hysterese und Wirbelströme auf-

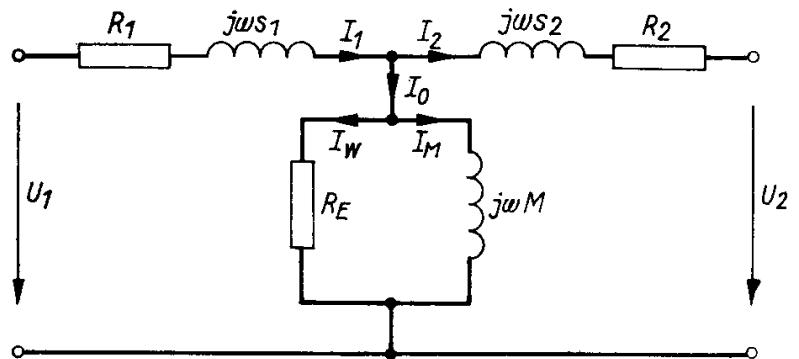


Bild 129

tretenden Verluste im Kern, und  $j\omega M$  stellt den reinen induktiven Widerstand beider streuungsfrei gekoppelten Spulen dar. Vergleichen Sie das vollständige Zeigerdiagramm des belasteten Transformators (Bild 130) mit dem Ersatzschaltbild!

Bei den durchzuführenden Untersuchungen sollen die Streuverluste unberücksichtigt bleiben. Der dadurch entstehende Fehler ist zu vernachlässigen, wenn zur Unter-

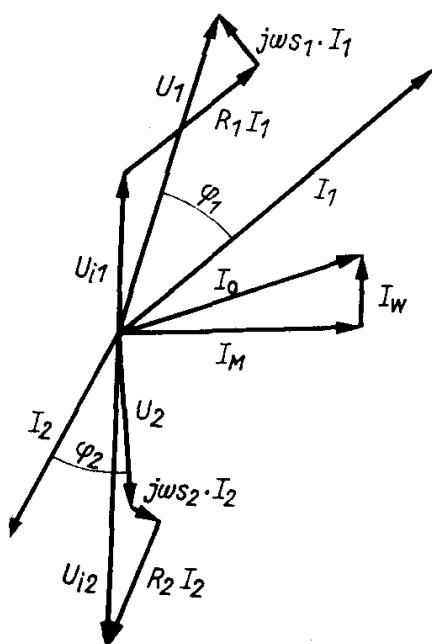


Bild 130

suchung ein Manteltransformator verwendet wird. Die Streuinduktivität ist dann sehr gering. Der Gesamtstreufaktor

$$s = \frac{L_1 L_2 - M}{L_1 L_2} \quad (6)$$

ist hier kleiner als 0,01.

## V Versuchsdurchführung

### Leerlauf

Ein Transformator mit  $\dot{u} = 1$  wird an eine bis zur vorgesehenen Höchstspannung regelbare Wechselspannung angeschlossen. Die Sekundärseite wird lediglich durch einen hochohmigen Spannungsmesser ( $U_2 = U_{i2}$ ) belastet. Auf der Primärseite wird zu einem Spannungsmesser ( $U_1$ ) und einem Stromstärkemesser ( $I_0$ ) noch ein Leistungsmesser geschaltet, der die aufgenommene Wirkleistung  $P_{w1}$  mißt. Je nach der Größe von  $I_0$  und der Stromaufnahme von Spannungs- und Leistungsmesser ist zu entscheiden, wie die Meßgeräte zu schalten sind, um den kleinsten systematischen Meßfehler zu verursachen.

### Ohmsche Belastung

Sekundärseitig werden zusätzlich Stromstärkemesser und Leistungsmesser sowie ein regelbarer ohmscher Widerstand eingeschaltet. Der Spannungsmesser soll direkt die Klemmenspannung der Sekundärspule messen.

**Vorsicht! Zulässige Sekundärstromstärke nicht überschreiten!**

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die ohmschen Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  der Primär- und Sekundärwicklung!
2. Entwerfen Sie die Meßschaltungen für den belasteten und unbelasteten Transformator, und begründen Sie die Anordnung der Meßgeräte!
3. Ermitteln Sie für den unbelasteten Transformator das Verhältnis  $U_2:U_1$  in Abhängigkeit von  $U_1$  (grafische Darstellung)!
4. Zeichnen Sie maßstäblich das Zeigerdiagramm entsprechend Bild 125 für die Meßwerte, die sich beim größten Wert von  $U_1$  ergeben! Ermitteln Sie daraus die Werte für  $U_{i1}$ ,  $I_M$  und  $I_E$ ! Bedenken Sie, daß Sie aus den Werten  $U_1$ ,  $I_0$  und  $P_{w1}$  den Wert für  $\cos \varphi_0$  und damit für  $\varphi_0$  errechnen können!
5. Belasten Sie den Transformator stufenweise bis zur zulässigen sekundären Scheinleistung  $P_{s2}$  und stellen Sie die Abhängigkeit des Übersetzungsverhältnisses  $U_2:U_1$  von  $P_{s2}$  dar! Bestimmen Sie für drei Meßpunkte  $\cos \varphi_1$  und  $\cos \varphi_2$  sowie das Verhältnis  $P_{w2}:P_{w1}$ , und begründen Sie die erkennbare Tendenz!
6. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm entsprechend Bild 128 (ohne Streuverluste) für die Meßwerte, die sich beim größten Wert von  $P_{s2}$  ergeben! Ermitteln Sie daraus  $U_{i1}$  und  $U_{i2}$ ! Den Winkel zwischen  $I_1$  und  $I_2$  finden Sie bei Berücksichtigung der in Bild 127 dargestellten Zusammenhänge.
7. Unter welchen Bedingungen nähert sich das Verhältnis  $U_2:U_1$  dem Übersetzungsverhältnis  $\dot{u} = N_2:N_1$ , und wann wird  $I_1:I_2 \approx N_2:N_1$ ?

**Versuchsgeräte:** Transformator ( $\dot{u} = 1$ ), 2 Spannungsmesser, 2 Stromstärkemesser, 2 Leistungsmesser, regelbarer Widerstand, Stromversorgungsgerät (Regeltrafo)

# Optik – Atomphysik

## 50. Brechzahlbestimmung mit dem Refraktometer

### G Grundlagen

Tritt ein Lichtstrahl aus einem optisch dünneren Medium 1, in dem er die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_1$  hat, in ein optisch dichteres Medium 2 ein, in dem er die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_2$  hat, so erfährt er eine Richtungsänderung; d. h.,  $\beta < \alpha$  (Bild 131), der Lichtstrahl wird *gebrochen*. Sind die beiden Medien *isotrop*, so

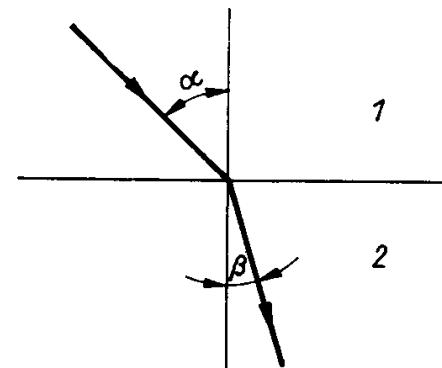


Bild 131

liegen der einfallende Lichtstrahl, das Einfallslot und der gebrochene Lichtstrahl in einer Ebene, und es gilt das von SNELLIUS (1621) gefundene Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const} \quad (1)$$

Andererseits folgt aus dem HUYGENSSchen Prinzip (1690)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad (2)$$

Bezieht man sich auf das Vakuum, weil dort  $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  eine Konstante für alle Wellenlängen des Lichtes ist, so gilt  $c_0 = n_{01}c_1 = n_{02}c_2$ . Hierbei sind  $n_{01}$  und  $n_{02}$  Materialkonstanten des lichtdurchlässigen Mediums, bezogen auf das Vakuum, die als *absolute Brechzahlen* bezeichnet werden. Da  $c_1, c_2 < c_0$  sind, müssen  $n_{01}, n_{02} > 1$  sein. Führt man diese Festlegungen in Gleichung (2) ein, so ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_{02}}{n_{01}} \quad (3)$$

Bezieht man die Brechzahlen auf Luft ( $c_L \approx c_0$ ), so schreibt man (3) in der Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (4)$$

Die *Brechzahl*  $n_{12}$  zwischen den beiden Medien 1 und 2 ist somit aus den auf Luft reduzierten Brechzahlen berechenbar. Tritt das Licht aus dem optisch dichteren Medium 2 in das optisch dünneren Medium 1 (Bild 132), so erhält die Gleichung (4) die Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} \quad (5)$$

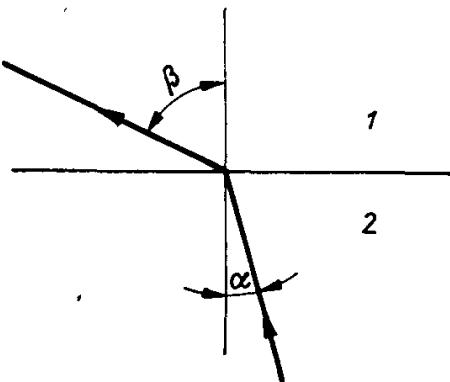


Bild 132

Aus (4) und (5) folgt

$$n_{12} n_{21} = 1$$

und (5) kann in der Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n_{12}} \quad (6)$$

geschrieben werden.

Auf (6) gründen sich die von ABBE entwickelten Methoden zur Bestimmung der Brechzahlen fester und flüssiger Stoffe. Die Meßmethode besteht darin, daß der *Grenzwinkel der Totalreflexion* beim Austritt des Lichtes aus dem Medium 2 erreicht wird. In Gleichung (6) wird dann wegen  $\beta = 90^\circ \sin 90^\circ = 1$ , und man erhält  $\sin \alpha_G = 1/n_{12}$  ( $\alpha_G$ : Grenzwinkel der Totalreflexion), woraus folgt

$$n_{12} = \frac{1}{\sin \alpha_G} \quad (7)$$

Wegen  $c_0 = \lambda_0 f$  sind die Brechzahlen und damit auch die Brechungsverhältnisse wesentlich von der Wellenlänge des Lichtes (Dispersion!) abhängig.

Zur Kennzeichnung lichtdurchlässiger Stoffe werden neben anderen Kenngrößen die Brechzahlen, bezogen auf die von FRAUNHOFER (1841) entdeckte D-Linie des Sonnen-Spektrums, benutzt. Diese liegt etwa in der Mitte des sichtbaren Spektralbereiches

(390 nm bis 760 nm). Die D-Linie des Sonnenspektrums wird dargestellt durch das Emissionsspektrum des Natriums (gelbe Linie) und hat eine mittlere Wellenlänge  $\lambda_0 = 589,3$  nm. Mit  $n_{12} = n_D$  wird speziell festgelegt, daß das Licht der Wellenlänge  $\lambda_D$  aus Luft in das Medium eintritt, dessen Brechzahl zu bestimmen ist. Die Brechzahlen von Flüssigkeiten sind von der Temperatur wesentlich abhängig. Es ist üblich, in diesem Fall die Meßtemperatur  $t$  stets mit anzugeben. (7) erhält damit die Form

$$n_D^t = \frac{1}{\sin \alpha_G} \quad (8)$$

Geräte, mit denen man die Brechzahlen messen kann, werden als *Refraktometer* bezeichnet. In Bild 133 ist ein ABBE-Refraktometer dargestellt.

Das Refraktometer hat eine geneigte Aufstellung, um in bequemer Haltung messen zu können. Die Lichtquelle (Natriumdampflampe mit Vorschaltgerät oder Mikro-

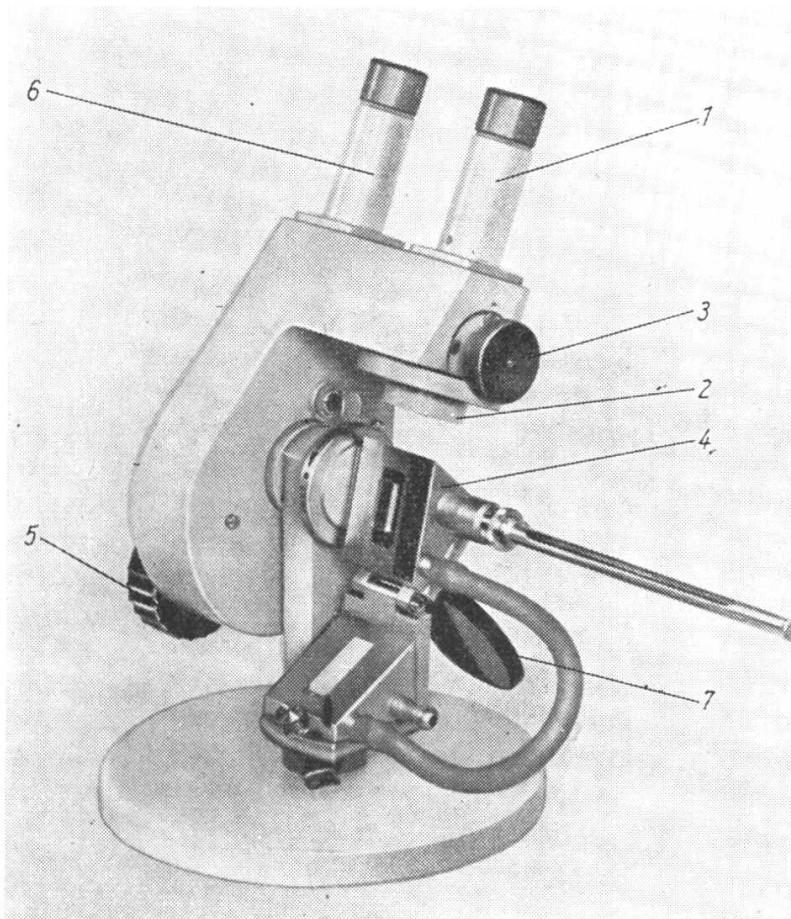


Bild 133

skopierleuchte) wird so vor dem Spiegel (7) aufgestellt, daß das Licht nach der Reflexion in den heizbaren Prismenkörper (4) eintreten kann. Der Prismenkörper enthält das Beleuchtungs- und Meßprisma sowie Anschlüsse zur Beheizung mittels Thermostaten. Wird eine Flüssigkeit untersucht, so werden einige Tropfen zwischen die Hypotenusenflächen der Prismen gebracht. Plastische Stoffe und Gläser müssen eine polierte ebene Fläche von etwa 10 mm × 25 mm haben und werden auf das

Meßprisma aufgesetzt. Das Beleuchtungsprisma wird in diesem Falle aufgeklappt. Im Einstellfernrohr (1) wird die Grenzlinie der Totalreflexion beobachtet. Am Einstellfernrohr ist der Dispersions-Kompensator angebaut, durch den der Farbsaum bei Verwendung von Glühlicht an der Grenzlinie der Totalreflexion zum Verschwinden gebracht wird. Hierzu ist der Triebknopf (3) zu betätigen, der den Kompensator (2) bewegt. Durch Drehen am Triebknopf (5) wird die Grenzlinie auf den Schnittpunkt des Fadenkreuzes im Einstellfernrohr eingestellt. Dieser Triebknopf ist mit einem beleuchteten Teilkreis gekoppelt, der die Meßskale enthält. Auf der Meßskale sind die  $n_D$ -Werte aufgetragen, die mit dem Ablesemikroskop (6) direkt abgelesen werden.

## V Versuchsdurchführung

Zum Versuch werden das in Bild 133 dargestellte ABBE-Refraktometer mit Beleuchtungseinrichtung und, falls die Brechzahlen von Flüssigkeiten zu bestimmen sind, noch der Universal-Thermostat nach WOBSEER zur Temperierung der Probe verwendet.

Mit einer Saugpipette oder einem Probierstab werden zunächst einige Tropfen Monobromnaphthalin ( $C_{10}H_7Br$ ) mit  $n_D^{20^\circ C} = 1,657$  zwischen die Hypotenusenflächen der Prismen gebracht. Der Wert 1,657 wird auf der Meßskale eingestellt und kontrolliert, ob die Grenzlinie genau auf der Mitte des Fadenkreuzes erscheint. Eventuell ist abzuwarten, bis die Temperierung der Prismen erfolgt ist. Stimmen Grenzlinie und Fadenkreuz nicht überein, ist mit dem Justierschlüssel am Tubusansatz nachzustellen. Die Prismenflächen sind nach jeder Messung zu säubern. Die justierte Meßskale kann nunmehr zur Bestimmung der Brechzahl der vorgegebenen Probe verwendet werden. Sind die Brechzahlen stark gefärbter Lösungen zu messen, so muß die Messung im reflektierten Licht erfolgen. In diesem Fall nimmt man den Deckel vom Meßprisma ab und läßt das Licht direkt einfallen. Es tritt dann das Licht direkt von der mit der Lösung benetzten Fläche des Meßprismas in das Fernrohr ein. Plastische Stoffe und Gläser können nur bei aufgeklapptem Beleuchtungsprisma gemessen werden.

**Achtung!**  
**Spektrallampe nur mit Vorschaltgerät betreiben!**  
**Die Prismenflächen nicht mit harten Gegenständen berühren!**

## A Aufgaben

1. Justieren Sie das Refraktometer unter Verwendung von Monobromnaphthalin!
2. Bestimmen Sie die Brechzahl der vorgelegten Probe je fünfmal durch Kompensationsmessung!
3. Ermitteln Sie aus der Meßreihe den mittleren Fehler des Mittelwertes und vergleichen Sie mit der Meßgenauigkeit des Refraktometers, die vom Hersteller mit  $1 \dots 2 \cdot 10^{-4}$  angegeben wird!

- Erläutern Sie, welche Bedingungen die Brechzahl der Probe erfüllen muß, damit seine Bestimmung mit dem Refraktometer überhaupt möglich ist!
- Worauf beruht die Wirkung des Dispersions-Kompensators (auch Amici-Prisma genannt)?

**Versuchsgeräte:** ABBE-Refraktometer (komplett), Natriumdampflampe mit Vorschaltgerät oder Mikroskopierleuchte, Thermostat (komplett), Reinigungslappen, Proben

## 51. Brennweite von Linsen

### G Grundlagen

Die Beziehungen zwischen der *Brennweite* einer Linse, der *Gegenstandsweite* und der *Bildweite* sind in der geometrischen Optik abgeleitet worden. Bestimmt man die Gegenstandsweite und die Bildweite, so ist die Brennweite mit für die meisten Fälle ausreichender Genauigkeit berechenbar.

Werden Gegenstände durch Linsen abgebildet, so entstehen reelle oder virtuelle Bilder. Reelle Bilder kann man durch einen geeigneten Auffangschirm (z. B. Mattscheibe) sichtbar machen, virtuelle dagegen nicht.

Zur geometrischen Konstruktion der Bilder benutzt man ausgezeichnete Strahlen. Diese sind: Brennstrahl, Parallelstrahl und Mittelpunktsstrahl (Bild 134).

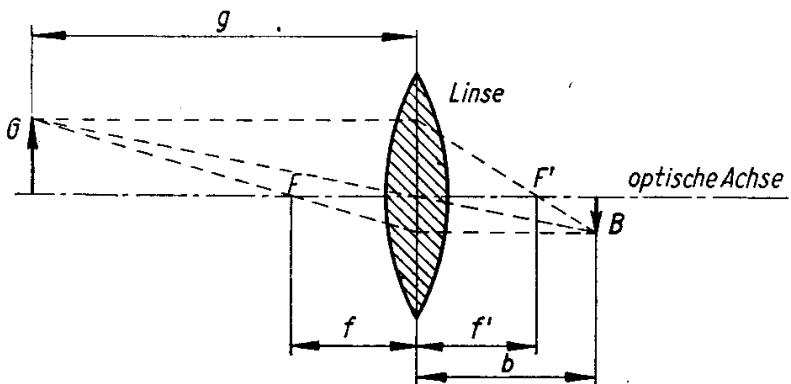


Bild 134

Aus den Ähnlichkeitssätzen folgt:

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b} \quad (1)$$

$$\frac{G}{B} = \frac{f}{b - f} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man nach Umformung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (3)$$

Es sei bemerkt, daß (3) nur für Paraxialstrahlen und unter der Voraussetzung gilt, daß die Dicke der Linse im Vergleich zu  $g$ ,  $b$  und  $f$  klein ist.

(3) gilt auch für Zerstreuungslinsen. In diesem Fall sind dann  $b < 0$  und  $f < 0$  einzusetzen.

In der praktischen Optik bezeichnet man den reziproken Wert der in Metern gemessenen Brennweite als die *Brechkraft* mit der Einheit Dioptrie. Es gilt dann:

$$D/\text{dpt} = \frac{1}{f/\text{m}} \quad (4)$$

Die Gesamtbrechkraft eines Linsensystems ist dann

$$D = \sum_{s=1}^n D_s, \quad (5)$$

d. h. gleich der algebraischen Summe der Brechkräfte der einzelnen Linsen.

Aus (5) resultiert eine Methode zur Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse durch Kombination mit einer Sammellinse bekannter Brennweite.

## V Versuchsdurchführung

### 1. Bestimmung der Brennweite von Sammellinsen durch Messung der Bild- und Gegenstandsweite

Zur Messung der Bildweite und der Gegenstandsweite wird eine optische Bank benutzt. Auf dieser sind die Reiter (Halter für die Linsen, den Gegenstand und den Auffangschirm) verschiebbar angeordnet. Die Reiter besitzen eine Markierung, so daß ihre Stellung in bezug auf einen an der optischen Bank angebrachten Maßstab bestimmt werden kann. Mit einer Beleuchtungseinrichtung wird der Gegenstand  $G$ , meist ein in eine Metallscheibe eingeschnittenes Kreuz, sichtbar gemacht. Das Bild  $B$  des Gegenstandes  $G$  wird mit Hilfe der Linse  $L$  auf einer Mattscheibe entworfen. Man verschiebt nun  $L$  so lange, bis auf der Mattscheibe ein scharfes Bild entsteht. Dann liest man  $g$  und  $b$  ab und errechnet mit Hilfe von (3) die Brennweite  $f$ . Der Versuch wird mit verschiedenen Linsen- und Mattscheibeneinstellungen wiederholt.

Die Meßgenauigkeit prüft man, indem man die zusammengehörigen Wertepaare von  $b$  und  $g$  auf den Achsen eines Koordinatensystems abträgt und die Punkte durch eine Gerade verbindet (Bild 135). Alle diese Geraden sollen sich in  $A$  schneiden. Fällt man von  $A$  aus Lote auf die Koordinatenachsen, so ist deren Länge gleich der Brennweite  $f$ .

## 2. Bestimmung der Brennweite von Sammellinsen nach der Methode von Bessel

Verändert man bei fester Stellung von Gegenstand und Bild die Stellung der Linse so, daß Bildweite und Gegenstandsweite miteinander vertauscht werden, so erhält man ebenfalls ein scharfes Bild des Gegenstandes. Ist  $b > g$ , so ist  $B > G$  (vergrößertes Bild). Vertauscht man  $b$  und  $g$ , d. h., ist  $g > b$ , so ist  $B < G$  (verkleinertes Bild). Die Stellungen der Linse sind in bezug auf Bild und Gegenstand symmetrisch (Bild 136).

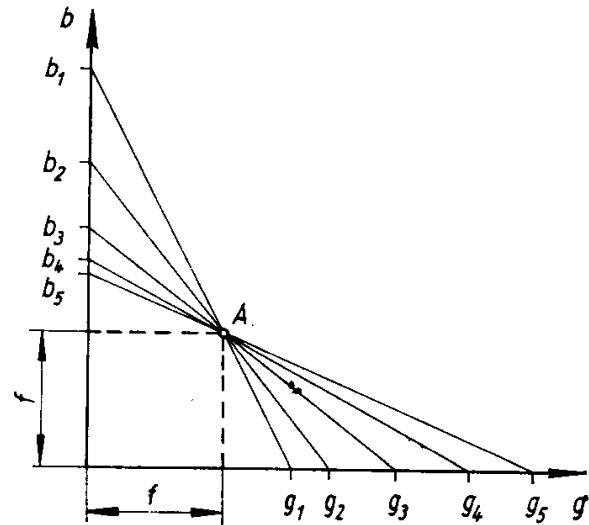


Bild 135

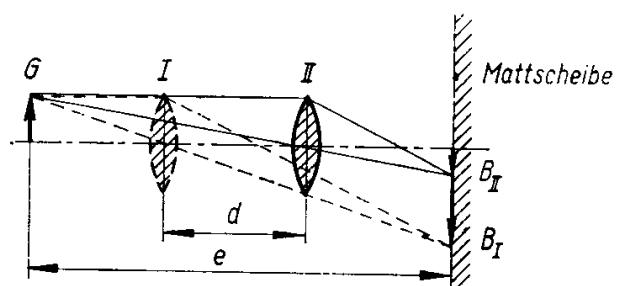


Bild 136

Bezeichnet man den Abstand der beiden Einstellungen mit  $d$ , die Entfernung Gegenstand-Bild mit  $e$ , dann ist, da  $g_I = b_{II}$  und  $b_I = g_{II}$ ,

$$g + b = e$$

$$g - b = d$$

Durch Addition und Subtraktion erhält man

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} (e + d) \\ b &= \frac{1}{2} (e - d) \end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man die Gleichungen (6) in (3) ein, so erhält man

$$f = \frac{1}{4} \left( e - \frac{d^2}{e} \right) \tag{7}$$

Der Vorteil der BESSELSchen Methode liegt darin, daß die Voraussetzung der dünnen Linse nicht mehr aufrechterhalten zu werden braucht.

### *3. Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse*

Bekanntlich wird auf Grund der Festlegung die Brennweite einer Zerstreuungslinse negativ angegeben. Demzufolge ist auch die Brechkraft  $D$  negativ. Aus (5) folgt, daß bei Linsenkombinationen die Gesamtbrechkraft des Systems gleich der Summe der Einzelbrechkräfte ist.

Die bisherigen Brennweitebestimmungen verlangen ein reelles Bild. Die Zerstreuungslinsen entwerfen jedoch virtuelle Bilder. Schaltet man zur Zerstreuungslinse eine Sammellinse bekannter Brechkraft so vor, daß die Gesamtbrechkraft des Systems positiv ist, so erhält man ein reelles Bild. Aus (5) folgt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_s} + \frac{1}{f_z}$$

$f$  Brennweite des Gesamtsystems, wird nach Methode 1 oder 2 ermittelt,  
 $f_s$  Brennweite der Sammellinse, wurde bereits bestimmt,  
 $f_z$  gesuchte Brennweite der Zerstreuungslinse.

Für die Brennweite der Zerstreuungslinse ergibt sich:

$$f_z = \frac{f_s f}{f_s - f} \quad (8)$$

## **A Aufgaben**

1. Die Brennweiten von Sammellinsen sind durch Messung von Bild- und Gegenstandsweite aus mindestens 3 Stellungen zu bestimmen.
2. Die Brennweite von Sammellinsen ist nach der Methode von BESSEL zu bestimmen.
3. Die Brennweite der Kombination einer Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse ist durch Messung von Gegenstands- und Bildweite zu bestimmen.
4. Die Brennweite der Zerstreuungslinse ist mit (8) auf Grund der Meßwerte zu errechnen.
5. Es ist die dem Verfahren nach Bild 135 zugrunde liegende Behauptung zu beweisen.
6. Die Bildkonstruktion für eine Zerstreuungslinse ist durchzuführen und der funktionale Zusammenhang zwischen Bildweite (Bildgröße) und Gegenstandsweite (Gegenstandsgröße) ist zu erläutern.

**Versuchsgeräte:** Optische Bank, Lichtquelle mit Gegenstand, Transparentschirm, Reiter, Linsenhalter, Sammellinsen im Halter, Zerstreuungslinse im Halter

## 52. Vergrößerung eines Fernrohres

### G Grundlagen

Wird ein Gegenstand  $G$  direkt mit dem Auge betrachtet, so wird er vom optischen Mittelpunkt des Auges unter dem Winkel  $\alpha$  gesehen. Dieser Winkel wird als *Sehwinkel* bezeichnet. Aus Bild 137 erkennt man auf Grund dieser Definition

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{G}{2g}$$

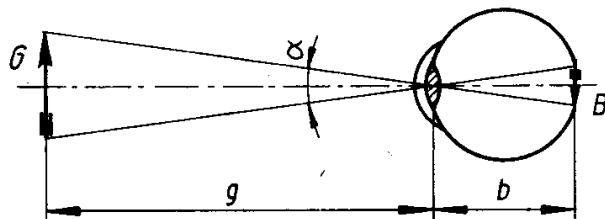


Bild 137

Betrachtet man sehr weit entfernte Gegenstände, so ist  $g \gg G$ , und man kann mit hinreichender Genauigkeit  $\tan \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$  setzen. Damit erhält man

$$\alpha = \frac{G}{g}$$

Wird der Gegenstand dem Auge genähert, so vergrößert sich der Sehwinkel. Ist ein kleiner Gegenstand zu betrachten, wird er dem Auge bis in die Entfernung der deutlichen Sehweite genähert. Die *deutliche Sehweite* ist die Entfernung, auf die ein gesundes Auge ohne Anstrengung akkommodiert. Im Durchschnitt beträgt diese Entfernung 25 cm.

Hilfsmittel zur Vergrößerung des Sehwinkels sind optische Instrumente wie die Lupe, das Fernrohr und das Mikroskop. Als Vergrößerung  $v$  dieser Instrumente wird der Quotient aus dem Sehwinkel mit Instrument  $\alpha_m$  und dem Sehwinkel ohne Instrument  $\alpha_0$  definiert:

$$v = \frac{\alpha_m}{\alpha_0} \quad (1)$$

Diese Definition setzt voraus, daß die Sehwinkel auf die gleiche Entfernung des Gegenstandes und des Bildes vom Auge bezogen werden. Das Fernrohr dient zur Betrachtung ferner Punkte, deren Lichtbündel nahezu parallel (aus dem Unendlichen kommend) in das Fernrohr eintreten. Das Bild dieser fernen Punkte des Gegenstandes soll ebenfalls im Unendlichen entworfen werden, d. h., die parallel eintretenden Strahlen verlassen das Fernrohr ebenfalls parallel. Der Strahlengang hierzu ist in Bild 138 dargestellt.

Im Bild 139 ist der Strahlengang eines astronomischen Fernrohres (KEPLERSCHES Fernrohr) für einen sehr weit entfernten Gegenstand angegeben. Es werden zwei Strahlenbündel, die von den Endpunkten des Gegenstandes  $G$  kommen, betrachtet. Diese Strahlenbündel treffen unter dem Winkel  $\alpha_0$  auf das Objektiv  $Ob$  auf. Die

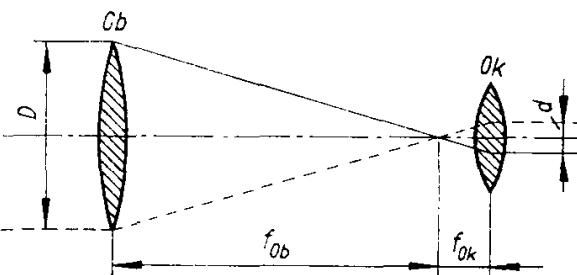


Bild 138

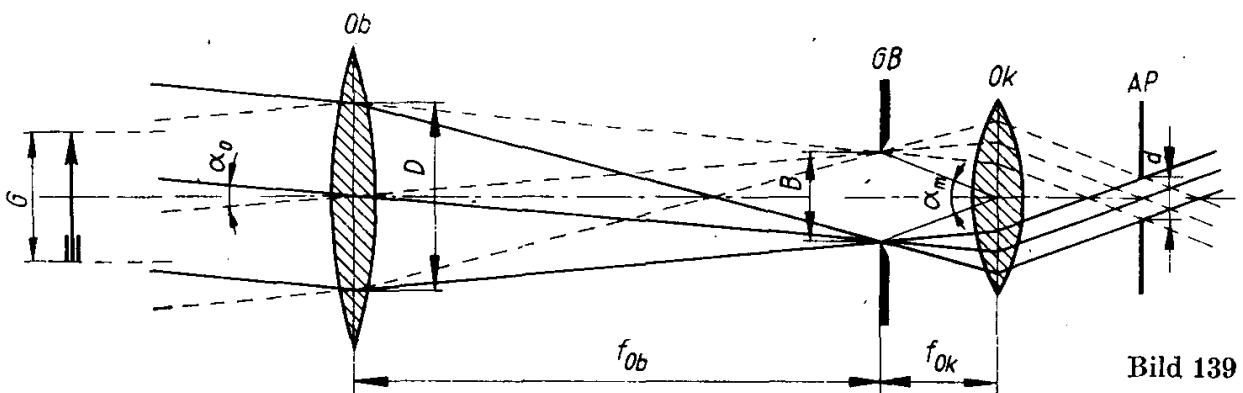


Bild 139

Brennweite des Objektivs sei  $f_{ob}$ , sein Durchmesser  $D$ . Das Objektiv bildet den entfernten Gegenstand  $G$  an der Stelle  $GB$  ab. Sein Bild  $B$  ist ein reelles, verkleinertes und umgekehrtes und wird als Zwischenbild bezeichnet. Dieses Zwischenbild wird mit dem Okular  $Ok$ , welches die Brennweite  $f_{ok}$  hat, betrachtet. Das Zwischenbild wird zum Gegenstand für das Okular. Wird das Okular so eingestellt, daß das Zwischenbild in der Brennebene des Okulars liegt, so verlassen die Lichtbündel das Fernrohr wieder parallel. Sollen alle Lichtbündel, die in das Fernrohr eintreten und durch die Gesichtsfeldblende hindurchtreten, in das Auge gelangen, so muß man dieses an die Stelle bringen, an der die Lichtbündel am meisten eingeengt sind. Diese Stelle bezeichnet man als Austrittspupille  $AP$ . Soll mit dem Auge das Bild eines Gegenstandes wahrgenommen werden, so muß es auf unendlich akkommodieren. Wie aus Bild 139 zu ersehen ist, hat das eintretende Lichtbündel den Durchmesser  $D$  (Objektivdurchmesser) und das austretende Lichtbündel an der Stelle der Austrittspupille  $AP$  den Durchmesser  $d$ . Es lassen sich folgende Beziehungen aufstellen:

$$\tan \frac{\alpha_0}{2} = \frac{B}{2f_{ob}} \quad \tan \frac{\alpha_m}{2} = \frac{B}{2f_{ok}}$$

Für die vorliegenden kleinen Winkel kann der Tangensfunktionswert gleich dem Winkel gesetzt werden. Damit ist:

$$\alpha_0 = \frac{B}{f_{ob}} \quad \alpha_m = \frac{B}{f_{ok}}$$

Damit ist es möglich, auf Grund der Definition der Vergrößerung diese nach (1) zu berechnen. Es gilt:

$$v = \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \quad (2)$$

Aus (2) ist zu folgern: Ein Fernrohr mit starker Vergrößerung besitzt ein Objektiv mit großer und ein Okular mit kleiner Brennweite. Die Baulänge eines Fernrohrs beträgt  $l = f_{ob} + f_{ok}$ , hängt also im wesentlichen von der Objektivbrennweite ab. Wird aus der Gesamtheit aller durch das Fernrohr gehenden Lichtbündel ein achsenparallel eintretendes betrachtet, so kann dieses höchstens den Durchmesser  $D$  des Objektivs haben (Bild 138). Dieses Lichtbündel konvergiert nach dem gemeinsamen Brennpunkt von Objektiv und Okular. Es verlässt das Fernrohr auch wieder als achsenparalleles Lichtbündel durch das Okular. Der Durchmesser dieses Lichtbündels sei  $d$ . Aus Bild 138 lässt sich folgende Proportion aufstellen:

$$\frac{f_{ob}}{f_{ok}} = \frac{D}{d} \quad (3)$$

Entspricht der Durchmesser  $D$  des gegenstandsseitigen Lichtbündels der Eintrittspupille (Objektivfassung), so entspricht der Durchmesser  $d$  des bildseitigen Lichtbündels der Austrittspupille. Unter dieser Voraussetzung kann (3) in (2) eingesetzt werden, und es ergibt sich für die Vergrößerung

$$v = \frac{D}{d} \quad (4)$$

## V Versuchsdurchführung

### 1. Bestimmung der Vergrößerung mit einem Maßstab

Das Fernrohr wird auf einen senkrecht stehenden, etwa 10 m entfernten Maßstab scharf eingestellt. Den Maßstab beobachtet man mit dem einen Auge durch das Fernrohr und gleichzeitig mit dem anderen Auge, indem man am Fernrohr vorüberschaut.

Nach einiger Übung ist man in der Lage, den Gegenstand direkt und sein im Fernrohr entstehendes vergrößertes Bild miteinander zu vergleichen. Dann zählt man ab, wieviel Teilstriche des Maßstabes auf einen Teilstrich des vergrößerten Bildes kommen. Decken sich  $n$  Teilstriche des direkt gesehenen Maßstabes mit  $N$  Teilstrichen des vergrößerten Maßstabes, so ist

$$v = \frac{n}{N} \quad (5)$$

### 2. Bestimmung der Vergrößerung durch Messung der Lichtbündeldurchmesser

Der Durchmesser des eintretenden Lichtbündels stimmt mit dem Durchmesser des Objektivs (Eintrittspupille) überein. Der Durchmesser des Objektivs  $D$  wird mit der Meßlehre bestimmt. Den Durchmesser der Austrittspupille erhält man, indem

man das Fernrohr etwa 25 cm vom Auge entfernt gegen den Himmel richtet. Betrachtet man jetzt das Okular, so sieht man ein helles Scheibchen, die Austrittspupille. Mit der Meßlehre kann deren Durchmesser  $d$  bestimmt werden.

## A Aufgaben

1. Ermitteln Sie, wie in der Versuchsdurchführung Teil 1 angegeben,  $N$  und  $n$ ! Führen Sie diese Messung mehrmals durch!
2. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen  $N$ ,  $n$  und  $f_{ob}$ ,  $f_{ok}$  her!
3. Berechnen Sie die Vergrößerung des untersuchten Fernrohres nach (2)!
4. Erläutern Sie, weshalb es nicht notwendig ist, den Gegenstand in der Entfernung „unendlich“ aufzustellen! Schätzen Sie den Fehler ab, der bei der Bestimmung der Vergrößerung bei Verwendung eines Gegenstandes in etwa 10 m Entfernung begangen wird!
5. Ermitteln Sie, wie in der Versuchsdurchführung Teil 2 angegeben,  $D$  und  $d$ ! Führen Sie diese Messungen mehrmals durch!
6. Berechnen Sie die Vergrößerung des untersuchten Fernrohres nach (4)!
7. Was ist die Ursache, daß die nach (2) und (4) errechneten Vergrößerungen unterschiedlich sind?
8. Erläutern Sie die Bedeutung der in der Zwischenbildebene angebrachten Gesichtsfeldblende GB!

*Versuchsgeräte:* Fernrohr, Stativ mit Haltevorrichtung, Maßstab, Beleuchtungseinrichtung, Meßlehre

## 53. Mikroskop

### G Grundlagen

#### *Vergrößerung eines Mikroskops*

Ein Mikroskop ist ein aus zwei Linsensystemen bestehendes Gerät. Das dem Auge zugekehrte System wird als *Okular* und das dem Beobachtungsobjekt zugewandte als *Objektiv* bezeichnet.

Die Bildentstehung geschieht im Prinzip auf folgende Weise: Das Objektiv erzeugt ein *vergrößertes, umgekehrtes, reelles* Bild, wenn sich der Gegenstand  $G$  zwischen einfacher und doppelter Brennweite befindet (Bild 140). Dieses *Zwischenbild ZB* erscheint innerhalb der einfachen Brennweite des Okulars. Damit kann es mit dem

Okular wie mit einer Lupe betrachtet werden. Es wird dabei nochmals vergrößert. Das beobachtete Bild  $B$  ist ein *virtuelles* Bild, das gegenüber dem Gegenstand *umgekehrt* ist.

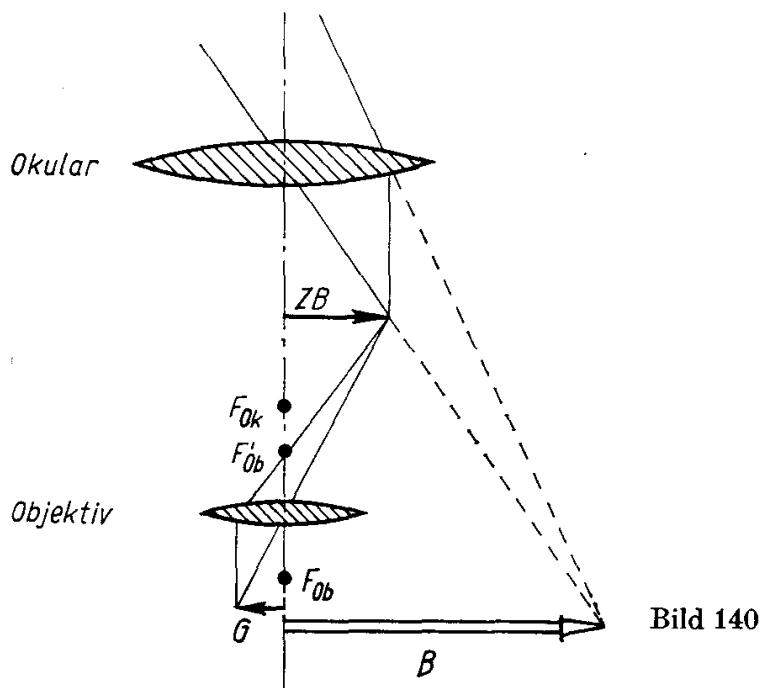


Bild 140

Der *Vergrößerungsfaktor* eines optischen Gerätes ist definiert als das Verhältnis

$$v = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

#### *Auflösungsvermögen eines Mikroskops*

Die mit einem Mikroskop erzielbare Vergrößerung kann Werte bis über 1000 erreichen. Die an der Objektivöffnung entstehenden Beugungseffekte lassen dann jedoch die tatsächlichen Konturen der betrachteten Gegenstände nicht mehr deutlich erkennen. Benachbarte Einzelobjekte sind bei zu großer Vergrößerung infolge der Überlagerung der Beugungsbilder nicht mehr getrennt wahrnehmbar. Das *Auflösungsvermögen* des Mikroskops ist dann überschritten. Die *nutzbare* oder *förderliche Vergrößerung* ( $v \approx 1000$ ) wird durch das Auflösungsvermögen begrenzt, das abhängig ist vom Öffnungswinkel  $2\alpha$  des von einem Punkt des Objekts ausgehenden und in das Objektiv eintretenden Lichtbündels, von der Brechzahl  $n$  des zwischen Gegenstand und Objektiv befindlichen Mediums und von der Wellenlänge  $\lambda$  des vom Gegenstand ausgehenden bzw. reflektierten Lichts. Nach ABBE gilt für die Auflösungsgrenze, d. h. für den minimalen Abstand zweier getrennt wahrnehmbarer Objekte,

$$d_{\min} = \frac{0,61 \lambda}{n \sin \alpha} \quad (1)$$

Das Produkt  $n \sin \alpha$  wird als numerische Apertur<sup>1)</sup> bezeichnet. Aus (1) folgt, daß beim Übergang zu kürzeren Wellenlängen die Auflösungsgrenze verbessert werden kann. Das gleiche geschieht auch, wenn das Objekt in eine Flüssigkeit mit einer Brechzahl  $n > 1$  eingebettet wird (Immersionsobjektiv).

## V Versuchsdurchführung

### Bestimmung der Vergrößerung

Da die Sehwinkel hier nicht meßbar sind, muß der Vergrößerungsfaktor eines Mikroskopes auf andere Weise bestimmt werden. Eine Möglichkeit bietet der Vergleich des vergrößerten Bildes eines in seinen Abmessungen bekannten Gegenstandes mit einem Maßstab (Millimeterteilung).

Der zu vergrößernde Gegenstand sei ein *Objektmikrometer* mit einer  $1/100$ -mm-Teilung, das im Mikroskop scharf eingestellt wird. Sein Bild befindet sich dann in der deut-

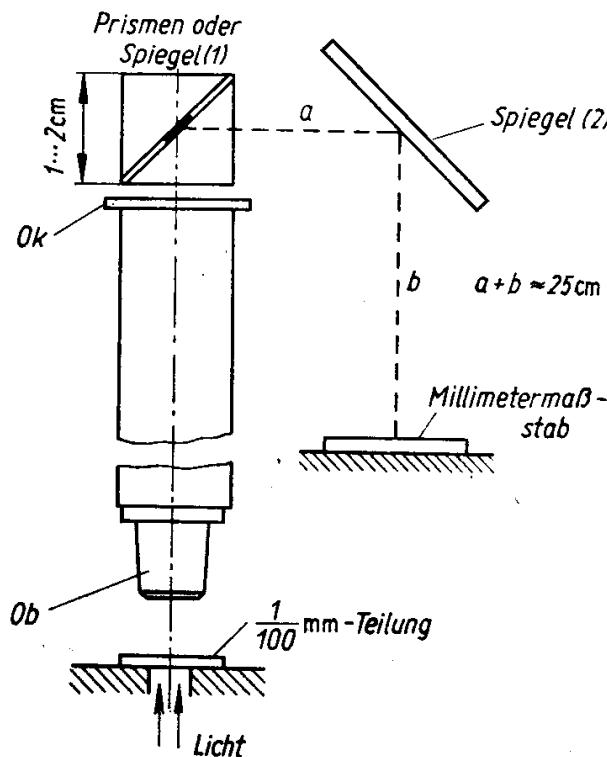


Bild 141

lichen Schweite (etwa 25 cm). Direkt über dem Okular wird ein um  $45^\circ$  geneigter halbdurchlässiger Spiegel (1) angebracht (Bild 141). In gleicher Weise eignet sich ein einfacher Spiegel, bei dem die reflektierende Schicht so entfernt ist, daß ein „Loch“ mit einem Durchmesser von etwa 2,5 mm entsteht. Stehen zwei rechtwinklige Prismen zur Verfügung, so kann die auftretende Totalreflexion zur Spiegelung ausgenutzt werden. Die vergrößerte Skale wird sichtbar, wenn ein kleiner Tropfen Durobalsam zwischen die sich berührenden Prismenflächen gebracht wurde. Es besteht dann wieder ein „Loch“ in der spiegelnden Fläche.

<sup>1)</sup> Apertur: Öffnung

In 25 cm Entfernung vom Spiegel wird ein Maßstab mit Millimeterteilung so aufgestellt, daß sein Bild und die vergrößerte Skale des Objektmikrometers gleichzeitig zu sehen sind (Bild 141).

Decken sich  $z_1$  Skalenteile der  $1/100$ -mm-Teilung mit  $z_2$  Skalenteilen des Millimetermaßstabes, so ist die Vergrößerung

$$v = 100 \frac{z_2}{z_1} \quad (2)$$

Wird der Vergleichsmaßstab auf einen dunklen Untergrund gelegt und für das Mikroskopbild eine Dunkelfeldbeleuchtung gewählt, so ist das Vergleichen der Skalen besonders günstig.

Ein ungenaueres Verfahren besteht darin, daß die vergrößerte Teilung des Objektmikrometers auf 25 cm vom Auge entferntes Papier gezeichnet wird. Das Zeichnen muß mehrfach unbeeinflußt durch die vorherige Zeichnung erfolgen. Bezeichnen wir die durchschnittliche Länge in mm von  $z_1$  Skalenteilen der Zeichnung mit  $z_2$ , so kann nach (2) die Vergrößerung berechnet werden.

#### *Eichung einer Okularskale*

Um die Länge von Gegenständen, die mit dem Mikroskop untersucht werden, bestimmen zu können, wird an die Stelle, an der im Mikroskop das Zwischenbild erscheint, eine Glasskale gebracht. Zur Scharfeinstellung dieser Skale ist die Augenlinse des Okulars verstellbar. Die Okularskale ist für jedes Objektiv neu zu eichen. Wir vergleichen sie mit der vergrößerten Skale des Objektmikrometers. Decken sich  $z_1$  Strichabstände der vergrößerten  $1/100$ -mm-Teilung mit  $z_2$  Strichabständen der Okularskale, so ist

$$1 \text{ Skalenteil} = \frac{z_1}{100 z_2} \text{ mm}$$

#### *Bestimmung der Auflösungsgrenze*

Das Mikroskop wird auf eine Lochblende (Durchmesser 1 mm) scharf eingestellt. Die Blende befindet sich damit an der Stelle, an der sich auch andere Objekte befinden würden. Um den Öffnungswinkel  $2\alpha$  (Bild 142) zu ermitteln, wird zunächst das Oku-

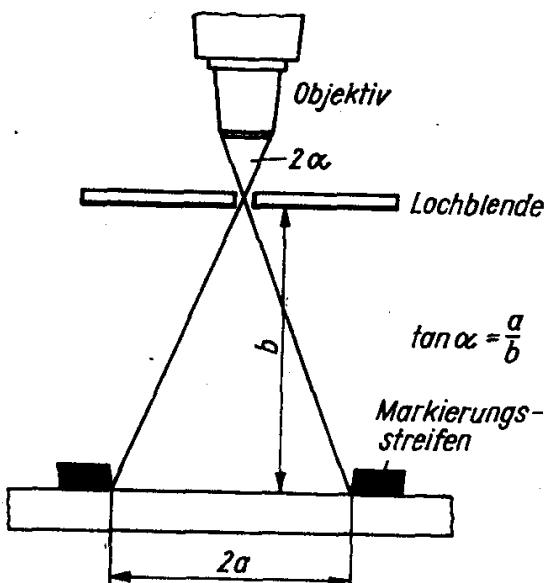


Bild 142

lar entfernt und unterhalb der Blende eine Skale mit Millimeterteilung aufgestellt (etwa auf den Beleuchtungsspiegel gelegt). Das verkleinerte Bild eines Skalenausschnitts erscheint dann oberhalb des Objektivs. Schwarze Markierungen werden auf der Skale so verschoben, daß sie gerade am Rande des Gesichtsfeldes erscheinen. Anhand von Bild 142 kann der Öffnungswinkel  $2\alpha$  ermittelt werden. Ist die Wellenlänge des verwendeten Lichtes bekannt, so kann nach (1) die Auflösungsgrenze bestimmt werden. Für weißes Licht kann als Mittelwert  $\lambda = 550 \text{ nm}$  eingesetzt werden.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Vergrößerung eines Mikroskops bei 4 verschiedenen Kombinationen von Objektiv und Okular nach einem der angegebenen Verfahren!
2. Eichen Sie eine Okularskale für 2 verschiedene Objektive!
3. Bestimmen Sie die Auflösungsgrenze für 2 verschiedene Objektive!
4. Überzeugen Sie sich vom Einfluß der Wellenlänge auf die Auflösungsgrenze, indem Sie ein Strichgitter betrachten, dessen Teilung bei weißem Licht gerade noch aufgelöst wird! Beobachten Sie anschließend das Gitter in rotem und in blauem Licht!
5. Wie ist die höhere Auflösung bei Licht mit kürzerer Wellenlänge erklärbar?
6. Aus welchen Gründen besteht das Objektiv aus mehreren Linsen?

*Versuchsgeräte:* Mikroskop mit verschiedenen Objektiven und Okularen, Okular mit Skale, Objektmikrometer, Millimeterskale, Lochblende, 2 Spiegel oder 1 Spiegel und 2 Prismen

## 54. Newtonsche Ringe

## G Grundlagen

Zum Nachweis der Wellennatur des Lichtes dienen die Interferenzerscheinungen. Diese treten auf, wenn sich zwei kohärente Lichtbündel im gleichen Raumpunkt überlagern. Die wahrnehmbare Erscheinung in diesem Punkt hängt von den Phasenbeziehungen zwischen den beiden Lichtbündeln ab. Bei Phasengleichheit verstärken sie sich gegenseitig, bei einem Gangunterschied von  $\lambda/2$  und gleicher Intensität löschen sie sich gegenseitig vollkommen aus. Interferenzerscheinungen werden in zunehmendem Maße meßtechnisch ausgenutzt.

Im vorliegenden Versuch sollen die Interferenzerscheinungen dazu benutzt werden, den Krümmungsradius einer plankonvexen Linse zu bestimmen. Ein paralleles Lichtstrahlbündel falle auf eine keilförmige Schicht, deren Brechzahl von der des begren-

zenden Mediums verschieden ist (Bild 143). Strahl 1 wird an der Stelle A gebrochen, bei B reflektiert und beim Austritt an der Stelle C abermals gebrochen. Strahl 2 wird an der Stelle C reflektiert. Sollen der zweimal gebrochene und einmal im Innern reflektierte Strahl 1' und der unmittelbar reflektierte Strahl 2' miteinander interferieren, so müssen die divergierenden Strahlen vereinigt werden. Dies geschieht mit

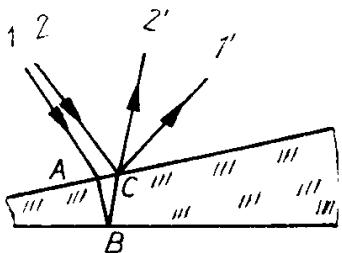


Bild 143

Hilfe des Auges unter Zwischenschaltung optischer Instrumente. Die Phasenbeziehung zwischen Strahl 1' und 2' ist abhängig von der Dicke  $d$  der Schicht. Da sich die Dicke  $d$  jedoch ändert, sieht man bei parallelem monochromatischem Licht ein System von hellen und dunklen Streifen. Jedem dieser Streifen entspricht die Dicke  $d$  des Keiles an der Stelle, an der der Streifen zu sehen ist. Solche Interferenzerscheinungen bezeichnet man als *Interferenzen gleicher Dicke*.

Diese eben beschriebene Interferenzerscheinung tritt bei den *Newtonischen Ringen* auf.

**NEWTONSche Ringe** entstehen, wenn monochromatisches Licht auf eine Luftsicht trifft, die sich zwischen einer Glasplatte und einer auf diese aufgelegten Linse befindet. Diese Luftsicht ist praktisch als keilförmig zu betrachten, wenn der Krümmungsradius der Linse groß ist.

Der Durchmesser der **NEWTONSchen Ringe** und der Krümmungsradius der Linse stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang. Fällt Licht senkrecht auf die Linse auf, so wird es an der oberen und unteren Oberfläche des keilförmigen Luftpaltes reflektiert. Dabei tritt zwischen den reflektierten Lichtbündeln ein Gangunterschied von  $2d$  auf, der zu den Interferenzerscheinungen führt. Mit  $d$  soll die Dicke der keilförmigen Luftsicht bezeichnet werden. Außerdem tritt wegen der Reflexion am optisch dichten Medium (Glasplatte) ein Phasensprung von  $\pi$  auf. Der gesamte Gangunterschied beträgt demzufolge  $\delta = 2d + \lambda/2$ . Als notwendige Bedingung für eine Auslöschung durch Interferenz gilt  $\delta = (2k + 1)\lambda/2$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ . Nimmt in der Luftsicht die Dicke  $d$  ständig zu, so ändert sich  $d$  von einem dunklen Interferenzring zum benachbarten hellen um  $\lambda/2$ . Wird die zu untersuchende plankonvexe Linse mit ihrer gekrümmten Seite auf eine Planglasplatte gelegt, so erscheint bei genügender Sauberkeit an der Berührungsstelle als Interferenzerscheinung der „schwarze Fleck“, Ordnungszahl  $k = 0$ . Zur Auswertung werden zwei dunkle Interferenzringe mit den Ordnungszahlen  $k = m$  und  $k = n$  betrachtet. Sie mögen die Radien  $r_m$  und  $r_n$  haben (Bild 144). Der Unterschied der Radien der beiden Ringe entspricht einem Dickenunterschied der Luftsicht

$$\Delta d = (n - m)\lambda/2 \quad (1)$$

Zwischen dem Radius  $r$  eines Interferenzringes, der Dicke  $d$  der Luftsicht an dieser Stelle und dem Krümmungsradius  $R$  der Linse besteht der Zusammenhang

$$d = \frac{r^2}{2R} \quad (2)$$

(2) wird aus Bild 144 abgeleitet unter der Voraussetzung, daß der Radius der Linse groß ist im Vergleich zum Radius der Interferenzringe. Wird (2) für zwei dunkle Interferenzringe der Ordnung  $k = m$  und  $k = n$  angewendet, so ergibt sich eine weitere Beziehung für den Dickenunterschied der Luftsicht:

$$\Delta d = \frac{r_n^2 - r_m^2}{2R} \quad (3)$$

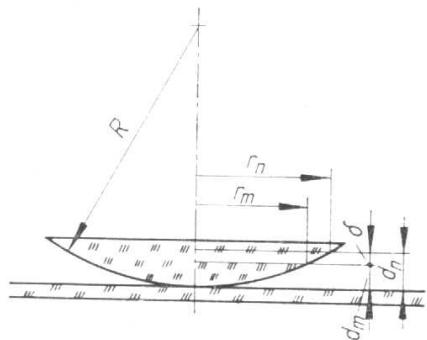


Bild 144

Werden (1) und (3) gleichgesetzt, so errechnet sich der gesuchte Krümmungsradius der Linse zu

$$R = \frac{r_n^2 - r_m^2}{(n - m) \lambda} \quad (4)$$

## V Versuchsdurchführung

Auf den Tisch des Meßmikroskops (Bild 145) werden eine Planplatte aus Schwarzglas und darauf die zu untersuchende Linse gelegt. (Beachten Sie größte Sauberkeit zwischen Planplatte und Linse!) Am Tubus des Mikroskops ist eine Beleuchtungs-

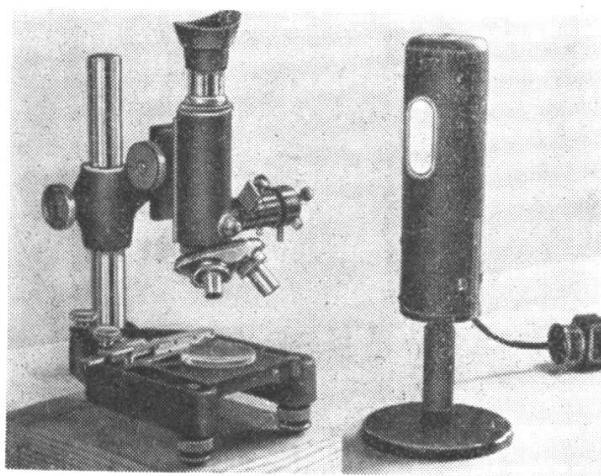


Bild 145

einrichtung angebracht, durch welche von einer Lichtquelle ausgestrahltes monochromatisches Licht über eine unter  $45^\circ$  geneigte Glasplatte auf die Linse reflektiert

wird. Als Lichtquelle dient eine Spektrallampe, die nach einigen Minuten Einbrenndauer monochromatisches Licht ausstrahlt.

**Achtung! Spektrallampen dürfen nur mit Vorschaltdrossel benutzt werden!**

Das Mikroskop wird auf die NEWTONSchen Ringe scharf eingestellt. Der „schwarze Fleck“ ist mit dem Fadenkreuz in Übereinstimmung zu bringen. Dies geschieht, indem mit Hilfe der am Mikroskopisch angebrachten Meßschrauben der Mikroskopisch so verstellt wird, bis Fadenkreuz und Mitte des „schwarzen Flecks“ übereinstimmen, Ablesung:  $r_0$ . Erscheint der „schwarze Fleck“ nicht, so deutet dies darauf hin, daß die Berührungsstelle Planplatte – Linse unsauber ist. Nachdem Beleuchtungseinrichtung, Mikroskop und Linse justiert sind, wird durch Drehen an einer Meßschraube die Mitte eines dunklen Interferenzringes mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht. Ablesung der Meßschraube:  $r_1$ . Durch weiteres Drehen an derselben Meßschraube wird erneut auf die Mitte eines dunklen Interferenzringes eingestellt, Ablesung der Meßschraube:  $r_2$ . Durch Differenzbildung erhält man  $r_m = r_1 - r_0$  und  $r_n = r_2 - r_0$ . Zwischen den Ablesungen  $r_1$  und  $r_2$  zählt man  $n - m$  Interferenzringe. Mehrfache Wiederholung des Versuches ergibt einen guten Mittelwert für den Krümmungsradius der zu untersuchenden Linse, den man nach (4) errechnet.

## **A Aufgaben**

1. Mikroskop-Linse justieren.  $r_0$  an der Meßschraube ablesen.
2. Durch Verstellen der Meßschraube auf beliebig gewählten  $m$ -ten dunklen Ring einstellen. Die Zahl  $m$  beim Verstellen auszählen. Es wird am „schwarzen Fleck“ mit  $k = 0$  begonnen.  $r_1$  an der Meßschraube ablesen.
3. Meßschraube weiter verstehen, bis zum  $n$ -ten dunklen Ring. Die Zahl  $n$  notieren,  $r_2$  an der Meßschraube ablesen.
4. Die Aufgaben 1, 2, 3 mehrmals mit verschiedenen  $m$  und  $n$  wiederholen.
5. Nach (4) den Krümmungsradius errechnen.
6. Fehlerbetrachtung durchführen.
7. Erläutern Sie den Unterschied in der Entstehung von Interferenzen gleicher Dicke und gleicher Neigung!

**Versuchsgeräte:** Meßmikroskop, monochromatische Lichtquelle mit Vorschaltdrossel, Spiegelvorsatz zum Mikroskop, Schwarzglasplatte, Linse

## 55. Gitterkonstante eines Reflexionsgitters

### G Grundlagen

Die Wellennatur des Lichtes läßt sich mit einer Vielzahl von Versuchen nachweisen. Die Erscheinungen der *Interferenz* des Lichtes an dünnen Schichten bei Durchgang oder Reflexion, die *Beugung* an Kanten, engen Spalten und schmalen Hindernissen u. a. deuten auf die Wellennatur hin. Das Zustandekommen von Interferenz- und Beugungerscheinungen ist jedoch nicht nur an die wellenförmige Ausbreitung der Energie gebunden. Die sich überlagernden Wellenzüge müssen *kohärent* sein. Kohärentes Licht kann man aber nur erhalten, wenn eine Versuchsanordnung vorhanden ist, bei der das Licht, das von einer Lichtquelle ausgesandt wird, auf zwei verschiedenen Wegen zur Beobachtungsstelle kommt.

Mit Beugungsgittern gelingt es, sowohl für durchtretendes wie auch für reflektiertes Licht die genannte Voraussetzung einzuhalten und das zu untersuchende Licht zu analysieren. Im vorliegenden Versuch sollen die Kenngrößen *Gitterkonstante* und *Auflösungsvermögen* eines *ebenen Reflexionsgitters* ermittelt werden. Der Versuch wird mit monochromatischem Licht durchgeführt.

Wie auch im Versuch 56 ausgeführt wird, verstärken sich alle Wellenzüge, die einen Gangunterschied  $\Delta s = k\lambda$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) haben. Die Lagen der Hauptmaxima sind bestimmt durch

$$k\lambda = g \sin \alpha_k \quad (1)$$

In Gleichung (1) bedeuten  $k$  die Ordnung der Hauptmaxima der Beugungerscheinung,  $\lambda$  die Lichtwellenlänge,  $\alpha_k$  der zum  $k$ -ten Hauptmaximum gehörige Beugungswinkel und  $g$  die Gitterkonstante. Die Schärfe der Beugungerscheinung hängt von der Anzahl der sich überlagernden kohärenten Wellenzüge ab. Hat ein Beugungsgitter  $N$  parallele Spalte (Bild 148), so überlagern sich am Beobachtungsort alle  $N$  Maxima der unter dem Winkel  $\alpha_k$  gebeugten Wellenzüge. Alle diese Maxima ergeben eine Beugungerscheinung großer Intensität, die man als *Spektrallinie* bezeichnet. Die Spektrallinien haben die gleiche Richtungsordnung wie die Spalte des Beugungsgitters. Für  $k = 0$  und  $\alpha_k = 0^\circ$  wird (1) für alle Wellenlängen  $\lambda$  erfüllt, d. h., man beobachtet einen hellen Streifen. Die Beugungerscheinungen für alle anderen  $k$ -Werte liegen links und rechts vom zentralen hellen Streifen. Wegen  $\sin \alpha_k \leq 1$  ist die höchste Zahl der möglichen Beugungerscheinungen, die man mit einem Beugungsgitter erhalten kann, durch  $k \leq g/\lambda$  festgelegt. Aus (1) folgt für die Bestimmung der Gitterkonstanten

$$g = \frac{k\lambda}{\sin \alpha_k} \quad (2)$$

Das Auflösungsvermögen eines Beugungsgitters gibt Auskunft darüber, ob zwei verschiedene Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  noch deutlich voneinander getrennte Spektrallinien ergeben; denn alle Spektrallinien sind Maxima von Interferenzfiguren und haben eine endliche Breite, auch wenn man voraussetzt, daß das verwendete Licht monochro-

matisch ist. RAYLEIGH gibt als prinzipielle Bedingung hierzu an, daß zwei Spektrallinien dann aufgelöst werden, d. h. einzeln sichtbar sind, wenn das Maximum der einen Spektrallinie auf das erste Minimum der zweiten fällt. Es gilt dann

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = kN \quad (3)$$

Hat das Beugungsgitter die Breite  $B$  und wird es in der gesamten Breite ausgeleuchtet, dann ist  $N = B/g$  und damit

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{kB}{g} \quad (4)$$

berechenbar.

## V Versuchsdurchführung

Zur Durchführung des Versuches wird die in Bild 146 dargestellte Versuchsanordnung verwendet. Die Spektrallampe (1) liefert das monochromatische Licht, welches durch den Kondensor (2) zur Ausleuchtung des etwa 0,3 mm breiten Spaltes (3) benötigt

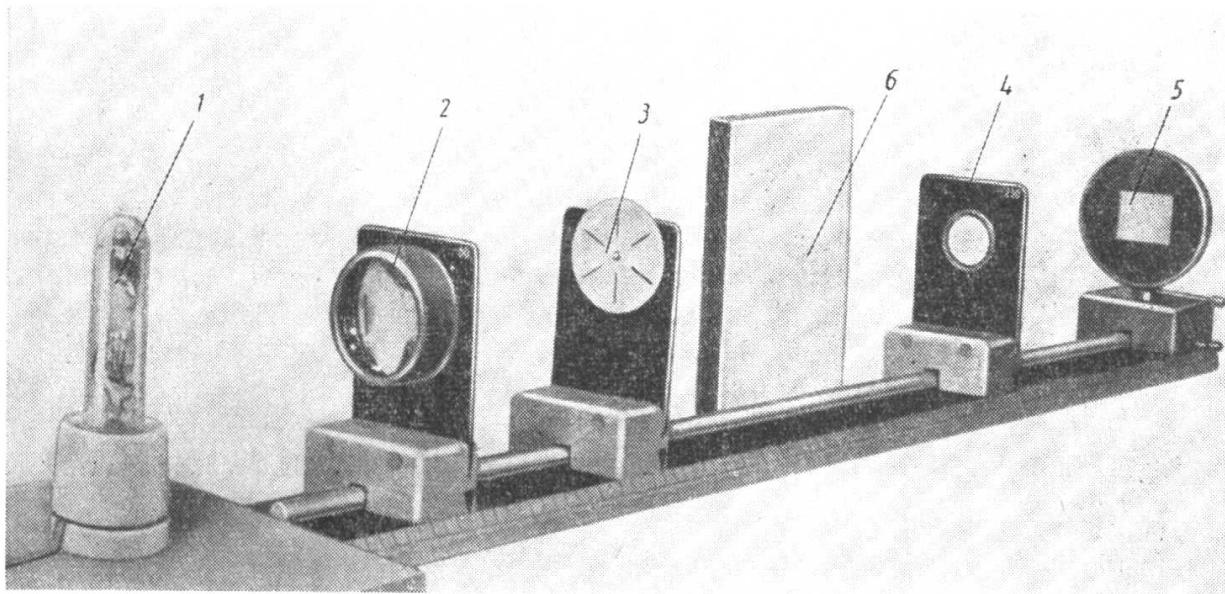


Bild 146

wird. Die Anordnung Spektrallampe-Kondensor ist so zu wählen, daß schwach konvergentes Licht zum Spalt gelangt. Mit der Abbildungslinse (4), deren Brennweite 100 mm bis 250 mm betragen soll, bildet man den Spalt über das Reflexionsgitter (5) auf den Schirm (6) scharf ab. Dabei sind der Abstand Spalt—Abbildungslinse die Gegenstandsweite und der Abstand Abbildungslinse—Schirm die Bildweite. Bei senkrechtem Lichteinfall auf das Beugungsgitter muß die Beugungerscheinung 0. Ordnung auf den Spalt reflektiert werden. Durch Drehung des Beugungsgitters ist diese Justierung einfach durchzuführen. Zur Errechnung der Gitterkonstanten nach (2) muß  $\alpha_k$  bestimmt werden. Nach Bild 147 ist  $\sin \alpha_k = d_k/a$ .

Es werden mit einem Maßstab mit mm-Teilung die zur Beugungerscheinung  $k$ -ter Ordnung gehörigen Werte für  $d_k$  und  $a$  in den Stellungen I und II gemessen. Vor jeder Messung ist durch Verschieben der Abbildungslinse der Spalt auf den Schirm abzubilden. Die Gegenstandsweite ist so zu wählen, daß das Ausmessen von  $d_k$  und  $a$  mit dem geringsten relativen Fehler erfolgen kann.

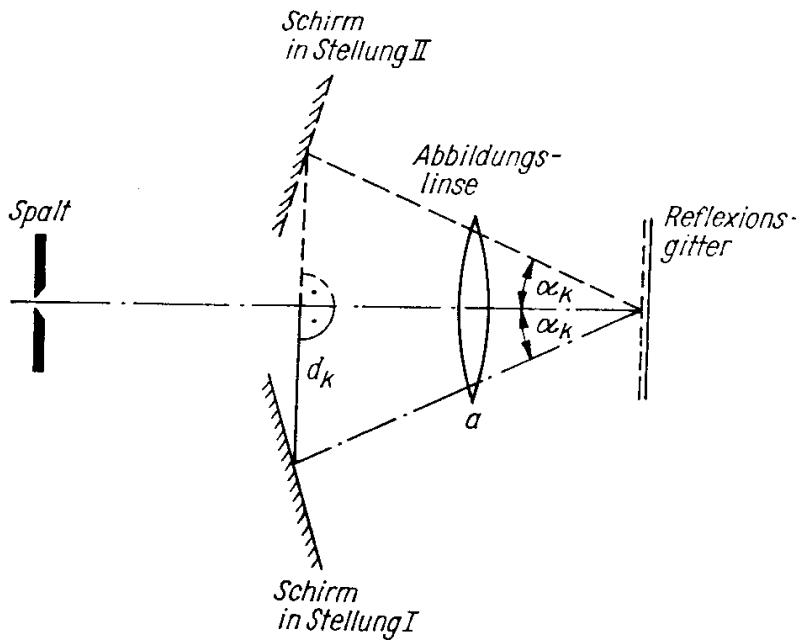


Bild 147

**Achtung!**

**Spektrallampe nur mit Vorschaltgerät betreiben!**

**Den Schutzdeckel des Reflexionsgitters nur zur Messung abnehmen! Das Reflexionsgitter nicht berühren oder abwischen!**

## A Aufgaben

1. Messen Sie jeweils in den Stellungen I und II mehrmals  $d_k$  und  $a$ ! Beachten Sie dabei  $k$ !
2. Tragen Sie in einer Tabelle die gemessenen und errechneten Werte ein!
3. Fehlerabschätzung
4. Berechnen Sie das Auflösungsvermögen des verwendeten Reflexionsgitters nach (3) oder (4) und erläutern Sie den gefundenen Wert!
5. Kontrollieren Sie, ob die Bedingung  $k \leq g/\lambda$  durch den Versuch bestätigt wird!

**Versuchsgeräte:** Spektrallampe mit Vorschaltgerät, Kondensor, Spalt, Abbildungslinse, Reflexionsgitter, Schirm, Maßstab, optische Bank, Reiter

## 56. Wellenlängenmessung mit dem Gitterspektralapparat

### G Grundlagen

Wird die ungestörte Ausbreitung des Lichtes durch Hindernisse beeinträchtigt, so treten unter bestimmten Voraussetzungen Erscheinungen auf, die mit der Wellennatur des Lichtes zusammenhängen (vgl. Grundlagen zu Versuch 54). In diesem Versuch soll die Beugung des Lichtes angewendet werden. Die Beugung kann beobachtet werden, wenn das Licht durch eine Öffnung (Spalt) tritt, deren Größe klein im Vergleich zur Wellenlänge des verwendeten Lichtes ist. Nach dem HUYGENSSchen Prinzip ist jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Trifft monochromatisches Licht auf einen Spalt, so breitet sich von jedem Punkt in der Spaltöffnung Licht nach allen Seiten aus. Diese von den einzelnen Punkten des Spaltes ausgehenden Lichtbündel interferieren miteinander. Die Interferenzerscheinungen sind in bestimmten Richtungen wahrnehmbar. Auf einem Auffangschirm lässt sich ein System heller und dunkler Interferenzstreifen nachweisen.

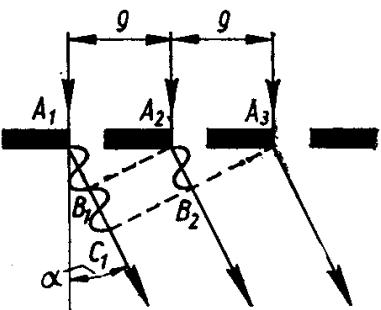


Bild 148

Verwendet man statt eines Spaltes eine Anordnung paralleler Spalte, die im Abstand  $g$  voneinander angebracht sind, so spricht man von einem *Beugungsgitter*. Der Abstand  $g$  der parallelen Spalte wird als *Gitterkonstante* bezeichnet. Trifft paralleles Licht auf das Gitter (Bild 148), so breitet sich von jedem Punkt jeder Spaltöffnung Licht nach allen Richtungen aus. Die an den Stellen  $A_1, A_2, A_3, \dots$  der einzelnen Spalte des Gitters in der Richtung  $\alpha$  zur Gitternormalen parallel zueinander austretenden sekundären Lichtbündel haben die Gangunterschiede  $A_1B_1 = A_2B_2 = \dots$ . Beträgt der Gangunterschied zweier Wellenzüge eine ganze Wellenlänge (z. B.  $A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = \lambda$ ) oder ein ganzzahliges Vielfaches (z. B.  $A_1C_1 = 2\lambda$ ), so verstärken sich die Wellenzüge. Dieser Gangunterschied ist vom Winkel  $\alpha$  abhängig. Betrachtet man das Dreieck  $A_1B_1A_2$ , so folgt für den Ablenkinkel  $\alpha$ , wenn  $A_1B_1 = \lambda$  ist:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{g}$$

Beträgt der Gangunterschied  $A_1B_1 = k\lambda$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), dann ist

$$\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{g} \quad (1)$$

Aus (1) resultiert wegen der Bedingung für  $k$  nicht nur *ein* Beugungsspektrum, sondern für jeden Wert von  $k$  ein besonderes Spektrum. Diese Spektren bezeichnet man als Spektren 0., 1., 2., 3., ... Ordnung.

## V Versuchsdurchführung

Zur Untersuchung des Beugungsspektrums wird ein Spektrometer verwendet, wie es im Versuch 57 beschrieben wird. Das Prisma ist gegen ein Beugungsgitter auszutauschen.

**Beim Einsetzen des Gitters ist darauf zu achten, daß die geritzte Seite dem Fernrohr zugewandt ist.**

Das Skalenrohr wird hier nicht benötigt. Die Fernrohrjustierung erfolgt wie im Versuch 57 beschrieben. Die prinzipielle Anordnung des Gitterspektralapparates ist aus Bild 149 ersichtlich.

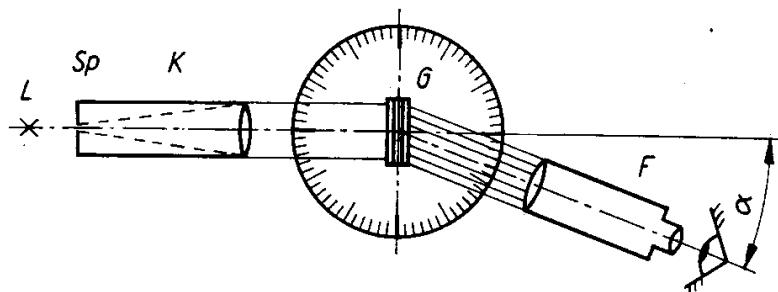


Bild 149

Mit dem justierten Fernrohr F werden unmittelbar die Beugungsbilder  $k$ -ter Ordnung beobachtet. Dies geschieht zu beiden Seiten des Beugungsbildes nullter Ordnung. Am Teilkreis des Spektrometers ist der Winkel  $\alpha$  ablesbar, unter dem das Beugungsbild  $k$ -ter Ordnung erscheint. Aus (1) ist dann bei Kenntnis der Wellenlänge des bekannten Lichtes die Gitterkonstante erreichbar. Andererseits ist es möglich, mit einem Gitter bekannter Gitterkonstante die Wellenlänge des verwendeten Lichtes zu bestimmen.

### *Messung der Gitterkonstanten*

Der Spalt wird mit einer monochromatischen Lichtquelle bekannter Wellenlänge beleuchtet. Es werden die Ablenkungswinkel der Beugungsbilder  $k$ -ter Ordnung des monochromatischen Lichtes und aus (1)  $g$  als Mittelwert aus mehreren Messungen bestimmt.

**Spektrallampen nur mit Vorschaltdrossel betreiben!**

### *Bestimmung eines Stoffes mit Hilfe der Spektralanalyse*

Der Spalt wird nun mit einer Lichtquelle beleuchtet, deren leuchtender Stoff durch Spektralanalyse bestimmt werden soll.

Die Spektralröhre wird mit der Sekundärspannung eines Funkeninduktors zum Leuchten angeregt. Die Ablenkwinkel der einzelnen Spektrallinien werden gemessen.

Die Messungen sind mehrmals zu wiederholen und die Mittelwerte für die Auswertung zu benutzen.

## A Aufgaben

1. Bei aufgesetztem Gitter ist die Beugung nulter Ordnung und damit die Nullstellung des Spektrometers festzustellen.
2. Mit der monochromatischen Lichtquelle ist die Gitterkonstante zu bestimmen.
3. Die Spektrallinien sind von links und rechts anzumessen. Aus beiden Messungen ist der Mittelwert zu bilden. (Beachten Sie, daß die Spektrallinien eine endliche Breite haben!)
4. Bestimmung der Wellenlängen des zu untersuchenden Stoffes. Messungen wie bei Aufgabe 3.
5. Aus Tabellen ist durch Vergleichen mit den gemessenen Wellenlängen der Stoff zu bestimmen.
6. Erläutern Sie, weshalb es nicht möglich ist, Beugungserscheinungen beliebig hoher Ordnung mit dieser Versuchsanordnung auszuwerten!  
Benutzen Sie zu diesen Erläuterungen Ihre Beobachtungen während des Versuches!
7. Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen Prismen- und Beugungsspektrum?

*Versuchsgereate:* Spektrometertisch, Natriumdampflampe mit Drossel, Gitter, Spektralröhre, Funkeninduktor

## 57. Dispersionskurve eines Prismenspektrometers

## G Grundlagen

Spektrometer verwendet man zur Untersuchung von Spektren, aus denen weitgehende Schlüsse über die Zusammensetzung der sie erzeugenden Körper, über den Bau ihrer Moleküle und Atome gezogen werden können. Glühende feste und flüssige Körper geben kontinuierliche, zum Leuchten angeregte Gase und Dämpfe Linienspektren. In den letzteren treten die Farben teils als mehr oder weniger scharfe Linien, teils als breitere sogenannte Banden auf. Linienspektren werden durch Atome, Bandenspektren durch Moleküle hervorgerufen. (Das Aussehen der Spektren hängt außer von den Elementen und Verbindungen auch von Temperatur und Druck ab.)

Beobachtet werden nicht nur Emissions-, sondern auch Absorptionsspektren. Nach dem KIRCHHOFFSchen Gesetz absorbiert ein Körper die Strahlenart, die er emittiert. Erzeugt man also ein kontinuierliches Spektrum und bringt in den Beobachtungsweg Gase und Dämpfe, so treten die durch diese erzeugten Spektrallinien als schwarze Linien im zu untersuchenden Spektrum auf (FRAUNHOFERSche Linien im Sonnenspektrum).

Das Spektrometer, welches hier untersucht werden soll, besitzt im allgemeinen die im Bild 150 wiedergegebene Anordnung. Das Spaltrohr K (Kollimator) hat den Zweck, das vom Spalt Sp ausgehende divergente Lichtbündel parallel zu richten. Das Fernrohr F soll die Betrachtung der Linien erleichtern. Der Hauptteil des Apparates ist das Prisma P. Hier wird die Tatsache, daß die Brechzahl nicht konstant ist, sondern von der Wellenlänge abhängt, benutzt, um verschiedenfarbiges Licht, also Licht verschiedener Wellenlänge, in seine Komponenten zu zerlegen. Hierbei wird sich ein

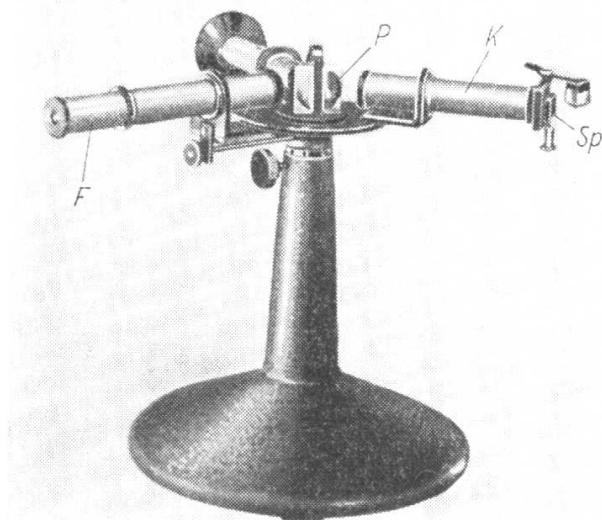


Bild 150

Prisma, bei welchem sich die Gesamtablenkung stark mit der Wellenlänge ändert, sehr gut zum Trennen der Komponenten eignen, weil die bunten Spaltbilder dann sehr weit auseinander liegen. Bevor man das Spektrometer zur Analyse unbekannter Substanzen verwenden kann, muß es mit Hilfe bekannter Spektren geeicht werden. Zu diesem Zweck wird eine Skale in den Strahlengang eingespiegelt. Den einzelnen Skalenwerten, an denen die Spektrallinien erscheinen, ordnet man die betreffende Wellenlänge zu.

Bekannte Werte für Wellenlängen gewinnt man auf folgende Weise: Jedes Element besitzt auf Grund seines Atomaufbaues die Fähigkeit, die bei der Anregung aufgenommene Energie in bestimmten Energiequanten  $W = hf$  und wegen  $c = \lambda f$  nur als Licht bestimmter Wellenlängen wieder abzugeben. Jedes Element besitzt vermöge seines unterschiedlichen Atomaufbaues bestimmte, ihm eigene Wellenlängen, die genau bekannt sind. Verwendet man bekannte Elemente, so kann die Wellenlänge ihrer Linien einfach aus Tabellen entnommen werden. Sind mehrere Linien vorhanden, so kann man auf Grund der Farbe diesen je einen Skalenwert zuordnen. Auf diese Weise ist es möglich, einzelne Punkte der *Dispersionskurve* (Wellenlängen, aufgetragen über Skalenwerte) zu fixieren. Durch Interpolation können dazwischenliegende Werte unbekannter Substanzen mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden.

## V Versuchsdurchführung

Zur Justierung eines Spektrometers entfernt man das Fernrohr F aus seiner Halterung auf dem Spektrometertisch. Dann richtet man das Fernrohr auf einen sehr entfernten Gegenstand und bewirkt mit dem Auszug, daß das Bild des Gegenstandes im Gesichtsfeld scharf erscheint. Danach setzt man das Fernrohr wieder in den Spektrometertisch ein und richtet das auf unendlich eingestellte Fernrohr so auf das Prisma, daß der durch die Spektrallampe gut ausgeleuchtete Spalt Sp im Gesichtsfeld erscheint. Das Skalenrohr dient dazu, in der Bildebene des Fernrohres, mit Hilfe der Prismenfläche als Spiegel, ein reelles Bild einer im Skalenrohr angebrachten Skale zu entwerfen, damit man die Lage der verschiedenfarbigen Spektrallinien zahlenmäßig fixieren kann. Die Skale wird durch eine Skalenlampe von außen beleuchtet. Mit Hilfe eines Funkeninduktors werden Elemente zum Leuchten angeregt. Das Licht wird durch die Dispersion im Prisma in die einzelnen, für jedes Element charakteristischen Spektrallinien zerlegt. Diese werden mit Hilfe der Skale fixiert. Aus der Tabelle entnimmt man unter Beachtung der Farbe der Spektrallinie deren Wellenlänge und erhält so die für die grafische Darstellung der Dispersionskurve des Spektrometers erforderlichen Werte.

**Beachten Sie, daß die Anordnung Spaltrohr, Prisma, Fernrohr, Skalenrohr während des Versuches nicht verändert wird!**

## A Aufgaben

1. Die Dispersion des Prismas ist als gemittelte Kurve (Wellenlänge über Skalenteile) grafisch darzustellen. Dazu sind mindestens 2 Spektralröhren auszumessen.
2. Das Spektrum eines unbekannten Stoffes (Spektralröhre) ist aufzunehmen, und die Wellenlängen der Spektrallinien sind aus der Dispersionskurve zu entnehmen.
3. Der Strahlengang des Spektrometers ist in einer Skizze darzustellen.
4. Die Einflußgrößen der Wellenlängenbestimmung sind zu erläutern.

**Versuchsgeräte:** Spektrometer, Skalenlampe mit Halter, Akkumulator, Spektralröhren mit Halter, Dreifuß, Funkeninduktor

## 58. Polarimeter

### G Grundlagen

Unter Licht versteht man einen elektromagnetischen Wellenvorgang eines bestimmten Frequenzbereiches (Größenordnung  $10^{14}$  Hz). Der Nachweis der Wellennatur des Lichtes gelingt mit Hilfe von Interferenz, Beugung und Polarisation. Insbesondere durch die *Polarisation* wird nachgewiesen, daß das Licht ein räumlicher transversaler Wellenvorgang ist. Die durch die Ausbreitungs- und Schwingungsrichtung festgelegte Ebene heißt Schwingungsebene des Lichtes. Die von einer natürlichen Lichtquelle ausgestrahlten Lichtwellen schwingen bezüglich der Beobachtungsdauer in sehr kurzen Zeiten in allen Richtungen und in völlig unregelmäßigem Wechsel. Dies ist darauf zurückzuführen, daß das natürliche Licht aus einem Gemisch von Lichtwellen besteht, die die verschiedensten Schwingungsrichtungen aufweisen. Läßt man das Licht durch Polarisatoren treten, so werden die vielen Schwingungsrichtungen bis auf eine ausgeschaltet (Bild 151). Ein auf diese Weise verändertes Licht wird als *linear polarisiertes* Licht bezeichnet.

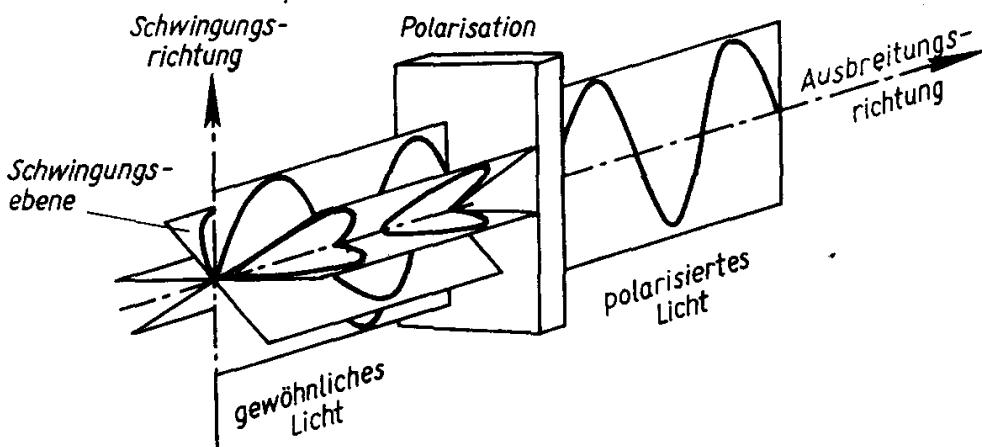


Bild 151

Polarisiertes Licht stellt man u. a. durch *Doppelbrechung* im Kalkspat (NICOLsches Prisma) oder durch Ausnutzung des *Dichroismus* (Polarisationsfilter) der Kristalle her.

**NICOLsches Prisma:** Ein in ein Kalkspatprisma eintretender Lichtstrahl wird durch Doppelbrechung in zwei linear polarisierte Teilstrahlen zerlegt, deren Schwingungsebenen senkrecht zueinander stehen. Der dem Brechungsgesetz gehorchende Teilstrahl wird als ordentlicher Strahl (o), der andere Teilstrahl, der dem Brechungsgesetz nicht gehorcht, als außerordentlicher Strahl (ao) bezeichnet. Im NICOLschen Prisma (Bild 152), das aus zwei gleichen, mit Durobalsam zusammengekitteten Kalkspatprismen besteht, wird der ordentliche Strahl (o) nach der Totalreflexion am Durobalsam an der Prismenfassung absorbiert. Der außerordentliche Strahl (ao) erfährt durch Brechung in der Durobalsamschicht nur eine geringe Parallelversetzung.

**Polarisationsfilter:** Diese werden in modernen Polarisationsapparaten verwendet. Sie bestehen aus zwei Glasplatten, zwischen die eine Trägerfolie gelegt ist, auf der sich eine dünne Chinin-Jod-Verbindung befindet. Die Polarisation des Lichtes findet durch Dichroismus statt. Man versteht darun-

ter die Eigenschaft von einachsigen Kristallen, entweder den ordentlichen oder den außerordentlichen Strahl hindurchzulassen. Die Absorption längs der Kristallachse ist eine andere als senkrecht zu ihr und äußert sich in einem Farbunterschied.

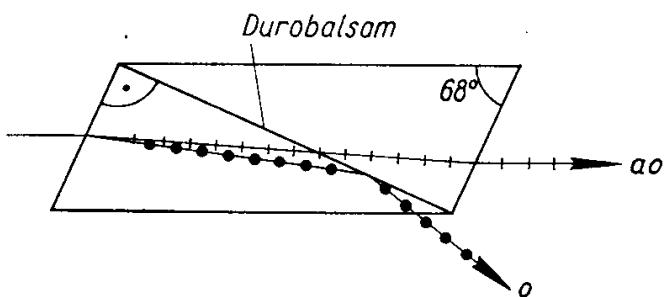


Bild 152

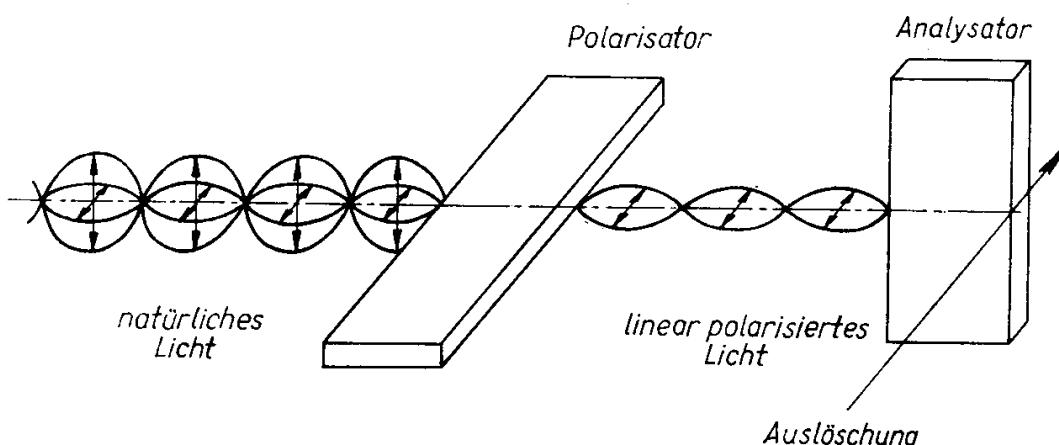


Bild 153

Läßt man polarisiertes Licht durch einen zweiten Polarisator, den man als Analysator bezeichnet und der senkrecht zur Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes angeordnet ist, hindurchtreten, so tritt Auslöschung des Lichtes ein (Bild 153). Bringt man zwischen Polarisator und Analysator einen Stoff, der die Eigenschaft hat, die Schwingungsrichtung des durch ihn hindurchtretenden linear polarisierten Lichtes zu drehen, so wird die Auslöschung aufgehoben. Stoffe, die diese Eigenschaften besitzen, bezeichnet man als optisch aktiv.

Die Drehung der Schwingungsrichtung des linear polarisierten Lichtes ist von der Wellenlänge des Lichtes, der Konzentration und Schichtdicke des optisch aktiven Stoffes abhängig. Geräte, mit denen man die Drehung der Schwingungsrichtung messen kann, werden als *Polarimeter* bezeichnet. In Bild 154 ist das Schema der Wirkungsweise eines Polarimeters wiedergegeben.

Das Polarimeter hat eine geneigte Aufstellung, um in zwangloser Haltung messen zu können. Die Lichtquelle, eine Natrium dampflampe, ist durch eine Haltevorrichtung mit dem Polarimeter verbunden. Eine Justierung der Lampe ist nicht erforderlich. Das von der Lichtquelle (1) ausgehende Licht verläuft hinter der Beleuchtungslinse (2) parallel, durchdringt ein Lichtfilter (3) und wird durch ein Polarisationsfilter (4) linear polarisiert. Die LAURENTSche Platte (5) bewirkt eine Dreiteilung des Sehfeldes. Der zu messende optisch aktive Stoff, der sich in der Beobachtungs röhre (6) befindet, dreht entsprechend seiner Beschaffenheit und Konzentration die Schwingungsebene des Lichtes. Durch ein zweites, als Analysator wirkendes Polarisationsfilter (7) gelangt dann das Licht in das Fernrohr (8, 9). Mit Hilfe des seitlich am Polarimetergehäuse angebrachten Triebes (12) wird der Analysator gedreht.

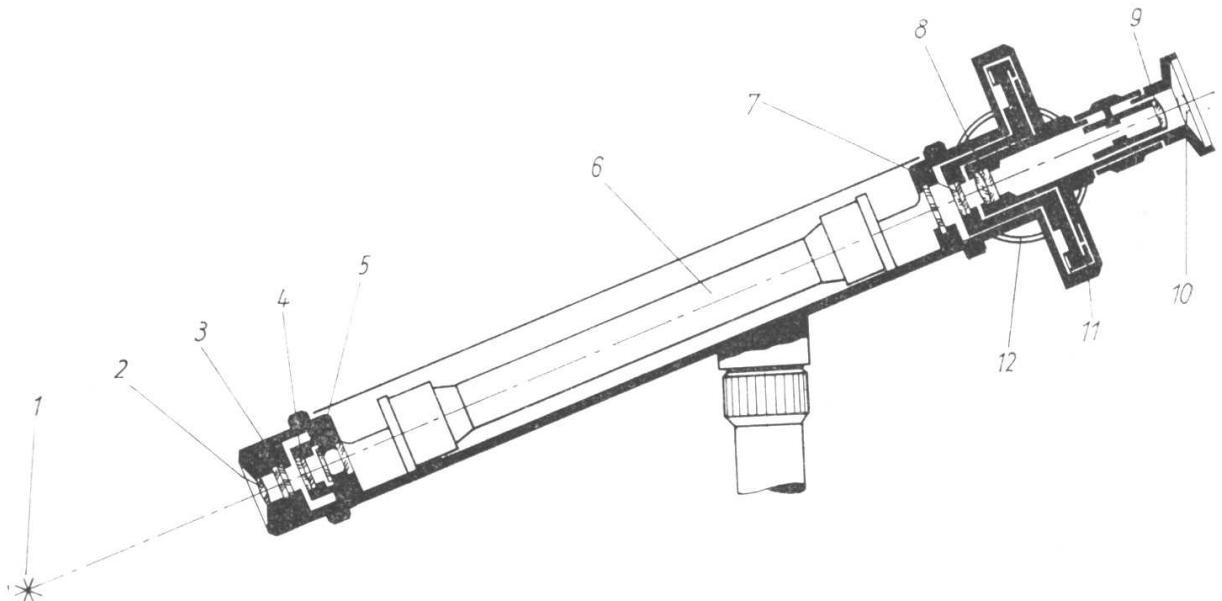


Bild 154

Durch die Drehung des Analysators erfahren die beiden äußeren Teile des Sehfeldes eine gleichzeitige, gleichmäßige Abdunklung oder Aufhellung, die man so lange beobachtet, bis Helligkeitsgleichheit mit dem mittleren Teil des Sehfeldes, in dem sich die Helligkeitsänderung im entgegengesetzten Sinne vollzieht, erreicht ist. Das Ablesen des Drehwinkels erfolgt an der mit dem Analysator fest verbundenen Kreisteilung und den feststehenden Nonien (11). Zwei in der Okularmuschel angebrachte Lupen (10) erleichtern das Ablesen. Das Meßprinzip zur Konzentrationsbestimmung optisch aktiver Substanzen (z. B. Zuckerlösungen, Öle usw.) besteht darin, daß die Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes um einen bestimmten Winkel verdreht wird. Die Größe dieses Winkels ist eine Funktion der Konzentration der in der Lösung befindlichen Substanz und der Lösungsmenge.

Es gilt

$$\varphi = kcl \quad (1)$$

mit  $\varphi$  Nachdrehwinkel des Analysators,

$c$  Konzentration der Lösung,

$l$  Länge der vom Licht durchsetzten Lösungsmenge im Beobachtungsrohr,

$k$  Proportionalitätsfaktor.

Ist  $k$  bekannt, so kann aus (1) die Konzentration errechnet werden.

## V Versuchsdurchführung

Zum Versuch wird das in Bild 155 dargestellte Kreispolarimeter mit Natriumdampflampe verwendet. Die Natriumdampflampe darf nur mit der vorgesehenen Vorschalteinrichtung betrieben werden. Nach dem Einschalten des Stromes dauert es einige Minuten, bis die Natriumdampflampe eingebrennt ist.

Die Beobachtungsrohre „200“ wird mit einer Lösung bekannter Konzentration gefüllt, mit Deckglas, Dichtungsring und Abschlußkappe verschlossen. Zu starker Druck beim Verschließen verursacht Spannung im Deckglas und damit Meßfehler. Derselbe Versuch wird mit der Beobachtungsrohre „100“ durchgeführt. Durch

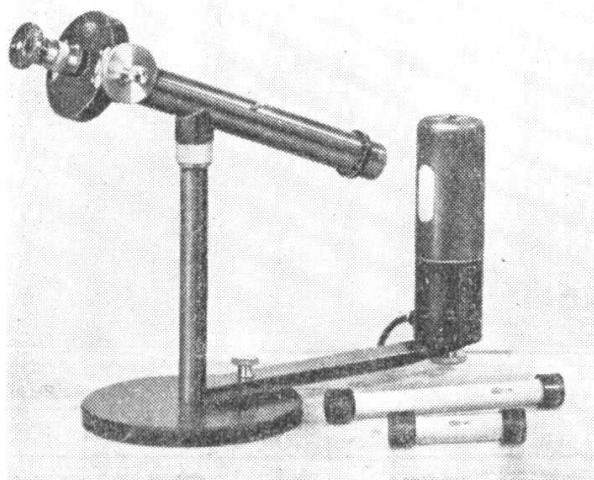


Bild 155

diesen Vorversuch mit einer Lösung bekannter Konzentration erhält man einen Nachdrehwinkel  $\varphi$ , und aus (1) läßt sich der Proportionalitätsfaktor errechnen. Nach dem Reinigen der Beobachtungsrohren wird dann der Versuch mit der Lösung unbekannter Konzentration durchgeführt. Durch den Vorversuch wurde  $k$  bestimmt. Der Versuch mit der Lösung unbekannter Konzentration ergibt einen bestimmten Wert für den Nachdrehwinkel  $\varphi$ . Aus (1) kann damit die Konzentration errechnet werden. Es ist zu beachten, daß vor jeder Messung das Okular auf die Trennungslien, die das Sehfeld in drei Teile teilen, scharf einzustellen ist, da sich die Scharfeinstellung beim Einlegen der gefüllten Beobachtungsrohren gegenüber der leer eingeführten Beobachtungsrohre ändert. Weiter ist vor jeder Messung die Nullstellung abzulesen, denn sie hängt von der verwendeten Lichtart und von individuellen Eigenschaften des Beobachters ab.

## A Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor  $k$  für die zur Verfügung gestellte Lösung und erläutern Sie seine physikalische Bedeutung!
2. Bestimmen Sie die Konzentration der zweiten Lösung!
3. Führen Sie den Vorversuch und die Konzentrationsbestimmung mit der Normalbeleuchtungseinrichtung durch!
4. Erläutern Sie die Ergebnisse des gesamten Versuches unter Beachtung der Genauigkeit der Noniusanzeige!

*Versuchsgeräte:* Kreispolarimeter, Natriumdampflampe mit Vorschalteinrichtung, Normalbeleuchtungseinrichtung, Gefäß mit Lösung bekannter Konzentration, Gefäß mit Lösung unbekannter Konzentration, Bechergläser, Reinigungslappen

## 59. Bestimmung der spezifischen Ladung eines Elektrons

### G Grundlagen

Wird die Temperatur eines im Vakuum befindlichen Leiters so stark erhöht, daß Leitungselektronen die zum Austritt aus dem festen Stoff notwendige Energie aufnehmen können, so treten diese Elektronen als *frei bewegliche Ladungsträger* in das Vakuum über. Die bei diesem als *Glühemission* bezeichneten Vorgang freigesetzten Elektronen können in einem elektrischen Feld zwischen der negativen Glühelektrode (Glühkatode) und einer dieser gegenüber positiven Elektrode (Anode) beschleunigt werden.

Für die Kraftwirkung des elektrischen Feldes der Stärke  $E = U/d$  ( $U$  Spannung,  $d$  Elektrodenabstand) gilt

$$F_{el} = eE$$

Zwischen der erzielten Beschleunigung  $a$  längs der Strecke  $d$  und der Endgeschwindigkeit  $v$  besteht die Beziehung  $a = v^2/2d$ . Für die beschleunigende Kraft kann folglich auch

$$F = m \frac{v^2}{2d}$$

gesetzt werden.

Wegen  $F_{el} = F$  und  $E = U/d$  folgt für die Endgeschwindigkeit der Elektronen

$$v = \sqrt{2U \frac{e}{m}} \quad (1)$$

Das in (1) auftretende Verhältnis  $e/m$  wird als spezifische Ladung des Elektrons bezeichnet. Es ist eine charakteristische Größe, die z. B. nach der folgenden Methode bestimmt werden kann. Treten die Elektronen durch eine Bohrung in der Anode und ist der Raum hinter der Anode frei von einem elektrischen Feld, so bewegen sich die Elektronen mit der erreichten Endgeschwindigkeit weiter. Wirkt nun senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen ein homogenes magnetisches Feld (Bild 156) der

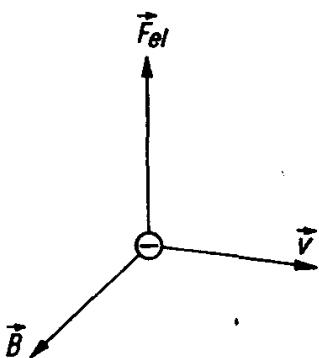


Bild 156

Induktion  $\mathbf{B}$ , so wirkt auf die Elektronen eine Kraft, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zum magnetischen Feld gerichtet ist. Diese Kraft (LORENTZ-Kraft)

$$\mathbf{F}_{\text{magn}} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

bewirkt eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit der Elektronen. Diese durch das Magnetfeld auf die Elektronen ausgeübte Kraft wirkt stets senkrecht zur Bahntangente, ist also zum Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtet. Da das Magnetfeld homogen ist, ist  $F_{\text{magn}} = \text{const}$ , und die Elektronenbahn ist eine Kreisbahn. Für die Radialkraft gilt  $F_r = mv^2/r$ , und folglich gilt auch

$$evB = m \frac{v^2}{r}$$

Die Bahngeschwindigkeit des Elektrons ergibt sich somit zu

$$v = \frac{e}{m} Br \quad (2)$$

Da die magnetische Kraft  $F_{\text{magn}}$  senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons wirkt, ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht. Vergleich von (1) und (2) liefert

$$\sqrt{2U} \frac{e}{m} = \frac{e}{m} Br$$

daraus folgt

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} \quad (3)$$

Gelingt es, in (3) die Größen  $U, B, r$  zu bestimmen, so lässt sich die spezifische Ladung eines Elektrons errechnen.

Nach der *speziellen Relativitätstheorie* (EINSTEIN) ist die Masse eines Körpers von der Geschwindigkeit dieses Körpers abhängig. Für diese Abhängigkeit gilt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

( $m$  Masse des bewegten Körpers,  $m_0$  Ruhmasse,  $v$  Geschwindigkeit des Körpers,  $c$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)

Setzt man voraus, daß  $v \ll c$  ist, so ist es möglich, die Masse  $m$  des Elektrons bei Kenntnis der Elementarladung  $e$  zu errechnen. Dieser Wert von  $m$  kann auf Grund der Annahme  $v \ll c$  als Ruhmasse  $m_0$  betrachtet werden.

## V Versuchsdurchführung

Das aus einem kugelförmigen Glaskörper (1) bestehende Fadenstrahlrohr (Bild 157) wird auf ein Gehäuse (2) aufgesteckt. In dem Gehäuse sind die Anschlußbuchsen für Heizspannung ( $U_H = 6,3 \text{ V} \simeq$ ) und Anodenspannung ( $U_A = 0 \dots 400 \text{ V}$ ) ange-

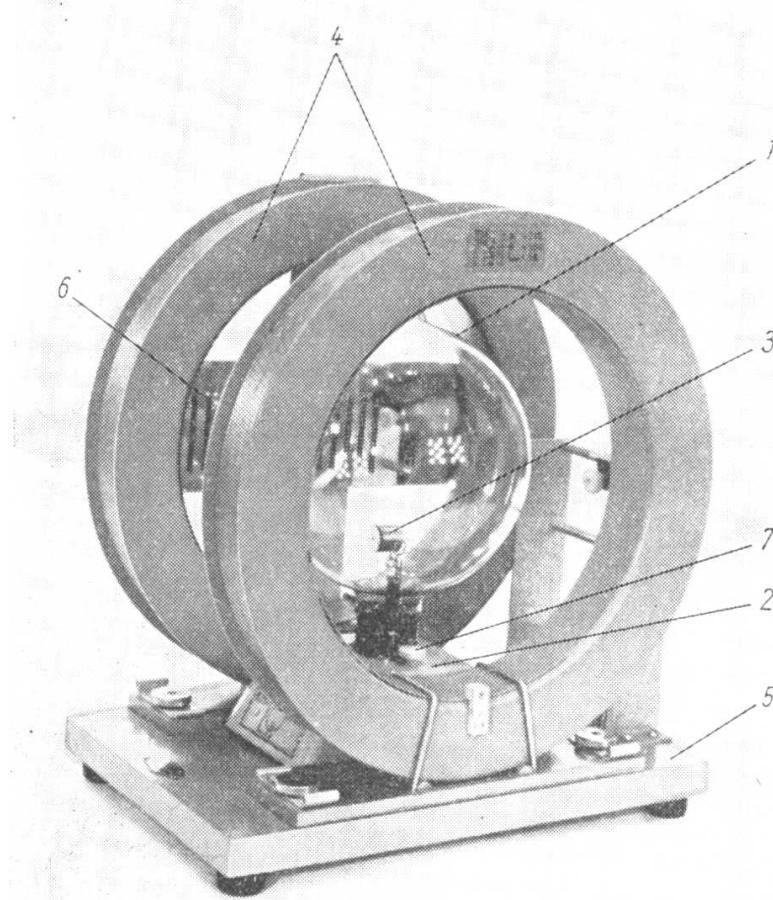


Bild 157

bracht. Von der Katode werden durch Glühemission frei bewegliche Ladungsträger emittiert, die durch ein elektrisches Feld von der Katode zur Anode (3) beschleunigt werden und dort durch eine kreisförmige Öffnung austreten können. Das Gehäuse mit dem Fadenstrahlrohr wird zwischen den beiden Erregerspulen (4) auf dem Grundbrett (5) des Induktionsgerätes eingesetzt. Zur Erregung des Magnetfeldes ist eine Spannung  $U = 18 \text{ V}$  notwendig.

Der Erregerstrom kann über einen Schiebewiderstand bis zum Maximalwert von 6 A geregelt werden. Die geometrischen Abmessungen der Erregerspulen entsprechen der HELMHOLTZ-Bedingung, und es gilt für die Induktion

$$B = 0,572 \pi \mu_0 \frac{NI}{D} \quad (5)$$

In (5) bedeuten  $N$  Windungszahl,  $I$  Erregerstrom der Spulen,  $D$  Windungsdurchmesser der Erregerspulen. In eine der Erregerspulen wird die Spiegelskale (6) mit Halterung eingesetzt. Nach Fertigstellung des Versuchsaufbaues werden Heiz- und Anodenspannung eingeschaltet. Die Anodenspannung wird dabei, mit 100 Volt beginnend, so lange geregelt, bis der Elektronenstrahl sichtbar ist. Dann wird der Erregerstrom für das Magnetfeld so eingestellt, daß der Elektronenstrahl auf einer Kreisbahn verläuft. Um die Bahn des Elektronenstrahls genau senkrecht zum magnetischen Feld stellen zu können, ist die Fassung der Fadenstrahlröhre mit zwei Rändelschrauben (7) im Gehäuse befestigt. Nach deren Lösen kann die Fassung nachjustiert werden.

Der Elektronenstrahl ist deutlich sichtbar, wenn im abgedunkelten Raum gearbeitet wird. Nach Ermittlung aller notwendigen Größen ist nach (4) und (5) der Wert für die spezifische Ladung eines Elektrons erreichbar.

**Achtung! Schaltung erst prüfen lassen!**

## **A Aufgaben**

1. Welchen Einfluß hat die Veränderung der Anodenspannung bei  $I = 0$ ?
2. Welchen Einfluß hat die Veränderung des Erregerstromes bei  $U_A = \text{const}$ ?
3. Bestimmen Sie mindestens fünf verschiedene Werte von  $r$ !
4. Berechnen Sie  $e/m$  und ermitteln Sie den Vertrauensbereich!
5. Führen Sie eine Fehlerabschätzung durch!
6. Vergleichen Sie das Ergebnis der Aufgabe 5 mit dem Vertrauensbereich des Mittelwertes und geben Sie hierzu eine Erläuterung!
7. Berechnen Sie mit dem Versuchsergebnis die Ruhmasse des Elektrons und vergleichen Sie mit dem Tabellenwert!
8. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Elektronen und prüfen Sie, ob die Bedingung  $v \ll c$  eingehalten wurde! Schätzen Sie dann ab, ob der Ansatz  $m = m_0$  berechtigt war!

**Versuchsgeräte:** Fadenstrahlrohr mit Gehäuse, Induktionsgerät, Stromversorgungsgerät, Vielfachmeßgerät, Spiegelskale, Schiebewiderstand

## 60. Fotometrie

### G Grundlagen

Das menschliche Auge empfindet elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen  $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 750 \text{ nm}$  als Licht (sichtbare Strahlung). Verschiedene Wellenlängen bedeuten verschiedene Farben (z. B. 400 nm violett, 550 nm gelbgrün, 750 nm rot), verschiedene Strahlungsleistungen rufen verschiedene Helligkeitswerte hervor.

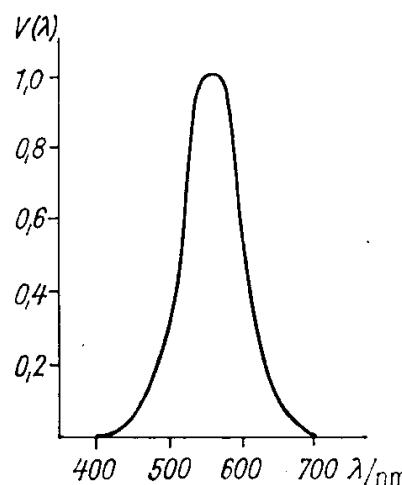


Bild 158

Die Empfindlichkeit des Auges für Strahlungen verschiedener Wellenlängen ist verschieden (Bild 158). Das Maximum der Empfindlichkeit liegt bei 555 nm. Nach kürzeren und größeren Wellenlängen hin nimmt die Empfindlichkeit bis auf Null ab. Diese Tatsache wird durch den spektralen Hellempfindlichkeitsgrad  $V(\lambda)$  berücksichtigt, der für 555 nm mit 1,000 festgesetzt wird und folgende Werte annimmt:

$\lambda/\text{nm}$	400	500	555	600	700
$V(\lambda)$	0,0004	0,323	1,000	0,631	0,0041

### Fotometrische Größen

Im Gegensatz zu den strahlungsphysikalischen Größen Strahlungsfluß  $\Phi_e$  und Strahlstärke  $I_e$  berücksichtigen die fotometrischen Größen Lichtstrom  $\Phi_v$  und Lichtstärke  $I_v$  die unterschiedliche Bewertung verschiedenfarbigen Lichts durch das Auge.

Zwischen Strahlungsfluß und Strahlstärke besteht die Beziehung

$$\Phi_e = \int I_e d\Omega \quad (1)$$

mit  $\Omega$  als Raumwinkel.

Der Raumwinkel wird folgendermaßen definiert: Man denkt sich um die punktförmige Strahlungsquelle als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius  $r$  gelegt. Der Quotient aus der Fläche  $A$ , die der Lichtkegel aus der Kugelfläche ausschneidet, und dem Quadrat des Kugelradius  $r$  ist der Raumwinkel  $\Omega$  (Bild 159):

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad (2)$$

Diese Definition ist ähnlich der des ebenen Winkels  $\varphi = \frac{s}{r}$ . Obwohl der Raumwinkel die Einheit  $\text{m}^2/\text{m}^2 = 1$  hat, nennt man diese Einheit Steradian (sr):

$$[\Omega] = \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = \text{sr}$$

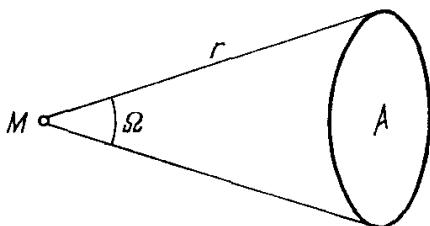


Bild 159

Ist die Strahlstärke  $I_e$  konstant, so vereinfacht sich (1) zu

$$\Phi_e = I_e \Omega \quad (3)$$

Der Strahlungsfluß stellt die von der Strahlungsquelle abgestrahlte Leistung dar, daher

$$[\Phi_e] = \text{W}$$

Aus (3) ergibt sich dann

$$[I_e] = \frac{\text{W}}{\text{sr}}$$

Zwischen Lichtstrom und Lichtstärke besteht eine ganz entsprechende Gleichung:

$$\Phi_v = I_v \Omega \quad (4)$$

Für die fotometrischen Größen ist eine besondere Grundeinheit eingeführt worden, die Candela (cd) als Einheit der Lichtstärke:

$$[I_v] = \text{cd}$$

Für die Einheit des Lichtstromes folgt dann aus (4)

$$[\Phi_v] = \text{cd sr}$$

Diese Einheit wird als Lumen (lm) bezeichnet.

Zwischen Lichtstrom  $\Phi_v$  und Strahlungsfluß  $\Phi_e$  besteht für monochromatisches Licht die Beziehung

$$\Phi_v = K_m V(\lambda) \Phi_e \quad (5)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $K_m = 680 \text{ lm/W}$  heißt *maximales fotometrisches Strahlungsäquivalent*.

Eine entsprechende Gleichung besteht zwischen Strahlstärke und Lichtstärke:

$$I_v = K_m V(\lambda) I_e \quad (6)$$

Die Beleuchtungsstärke  $E_v$  bezieht sich auf den Empfänger, und es gilt mit  $A$  als Empfängerfläche

$$E_v = \frac{\Phi_v}{A} \quad (7)$$

Die Einheit der Beleuchtungsstärke ergibt sich daraus zu

$$[E_v] = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$$

Diese Einheit heißt Lux (lx).

Fällt der Lichtstrom nicht senkrecht auf die Empfängerfläche, bildet also die Strahlrichtung mit der Flächennormalen den Winkel  $\alpha$  (Bild 160), so besteht zwischen der Empfängerfläche  $A$ , der Querschnittsfläche  $A_\perp$  des Lichtstromes und dem Winkel  $\alpha$  die Beziehung

$$A_\perp = A \cos \alpha \quad (8)$$

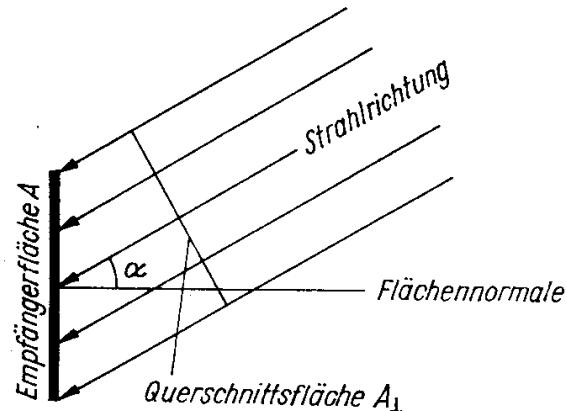


Bild 160

Setzt man nach (4)  $\Phi_v = I_v \Omega$ , nach (2)  $\Omega = \frac{A_\perp}{r^2}$  und nach (8)  $\frac{A_\perp}{A} = \cos \alpha$ , so folgt

$$E_v = \frac{I_v}{r^2} \cos \alpha \quad (9)$$

Steht die Empfängerfläche auf der Strahlrichtung senkrecht ( $\alpha = 0; \cos \alpha = 1$ ), so erzeugt eine punktförmige Lichtquelle der Lichtstärke  $I_v$  im Abstand  $r$  eine Beleuchtungsstärke  $E = \frac{I}{r^2}$ . (Sind Verwechselungen ausgeschlossen, wird in der Fotometrie auf den Index v meist verzichtet.)

Lichtstärken werden so bestimmt, daß zwei verschiedene Lichtquellen auf einem Schirm die gleiche Beleuchtungsstärke erzeugen. Dann muß gelten

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}$$

oder

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad (10)$$

Diese Beziehung wird als *fotometrisches Grundgesetz* oder *fotometrisches Entfernungsge setz* bezeichnet.

Als Lichtausbeute wird der Quotient aus dem emittierten Lichtstrom  $\Phi_v$  und der Leistung  $P$ , die zu seiner Erzeugung aufgewendet werden muß, definiert:

$$\eta = \frac{\Phi_v}{P} \quad (11)$$

Die Einheit der Lichtausbeute ergibt sich zu

$$[\eta] = \frac{\text{lm}}{\text{W}}$$

## V Versuchsdurchführung

Bei der subjektiven Fotometrie wird eine Lichtquelle mit einer Normallampe verglichen, indem man auf zwei Flächen gleiche Beleuchtungsstärken erzeugt. Die einfachste Anordnung ist das Fotometer von BUNSEN (sog. Fettfleckfotometer), das leicht selbst hergestellt werden kann. Man tropft auf einen Papierschirm Stearin, so daß ein „Fettfleck“ entsteht. Der Schirm wird von beiden Seiten mit je einer Lichtquelle bestrahlt. Sind die Beleuchtungsstärken auf beiden Seiten gleich, dann soll der Fettfleck unsichtbar werden. Man hat die Abstände so einzurichten, daß sich der Fettfleck möglichst wenig von seiner Umgebung abhebt.

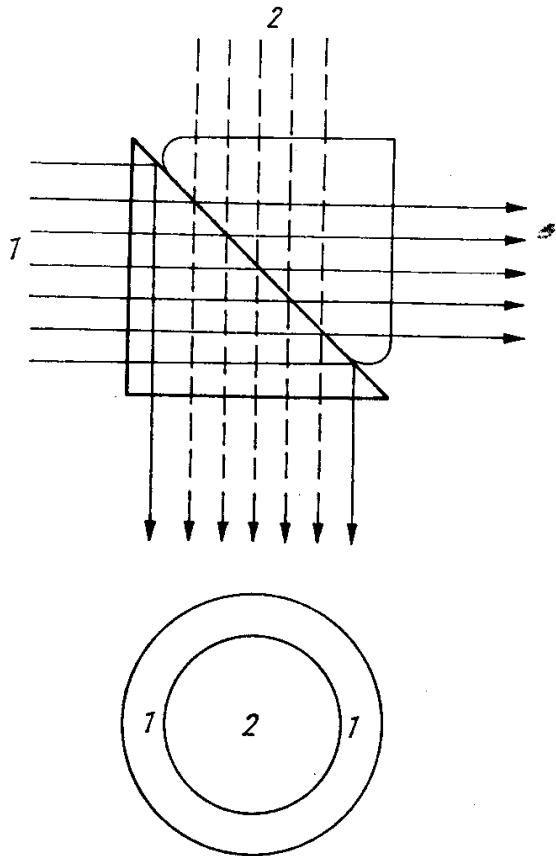


Bild 161

Genauere Ergebnisse werden mit dem Fotometerwürfel von LUMMER und BRODHUN erzielt. Er besteht aus zwei Prismen, die nach Bild 161 miteinander verkittet sind. Aus dem Bild ist zu erkennen, daß die Kanten des einen Prismas rund geschliffen sind. Die Strahlen, die auf die verkittete Fläche fallen, können diese ohne Ablenkung durchdringen. Für die Strahlen jedoch, die weiter außen auftreffen, tritt Totalreflexion ein, da der Grenzwinkel der Totalreflexion für den Übergang Glas—Luft überschritten ist. Wie aus Bild 161 zu erkennen, wird das Gesichtsfeld durch beide Lichtquellen ausgeleuchtet, durch  $L_1$  der äußere Ring, durch  $L_2$  das Innenfeld. Voraussetzung für den Vergleich mit dem Auge ist, daß beide Lichtquellen gleichfarbiges Licht aussenden.

Die zu messende Lichtquelle, das Fotometer und die Normallampe befinden sich auf einer optischen Bank, die das Ausmessen der Entfernung erleichtert.

## A Aufgaben

1. Die Lichtstärken der vorgegebenen Glühlampen sind mit dem Fettfleckfotometer zu bestimmen.
2. Die Messungen sind mit dem Fotometerwürfel zu wiederholen.
3. Fehlerabschätzung zu 1. und 2.; Vergleich der Ergebnisse
4. Berechnen Sie den Lichtstrom aller Lampen! Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die gemessene Lichtstärke der Mittelwert der Lichtstärken für alle Raumrichtungen ist.
5. Die Lichtausbeute aller Lampen ist zu berechnen.

*Versuchsgeräte:* Optische Bank mit Reitern, Fettfleckfotometer, Fotometerwürfel, Normallampe, verschiedene Glühlampen, Farbfilter, Blenden

## 61. Lichtreflexion und -absorption

## G Grundlagen

Fällt ein Lichtbündel (Lichtstrom  $\Phi_0$ ) auf einen durchsichtigen Körper, so wird es an der Grenzfläche teils reflektiert (Lichtstrom  $\Phi_r$ ), ein weiterer Teil (Lichtstrom  $\Phi_a$ ) wird von dem optischen Medium absorbiert, der Rest (Lichtstrom  $\Phi_t$ ) geht durch den Körper hindurch; er wird transmittiert (Bild 162).

Man definiert den

Reflexionsgrad	$\varrho = \frac{\Phi_r}{\Phi_0}$
Absorptionsgrad	$\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}$
Transmissionsgrad	$\tau = \frac{\Phi_t}{\Phi_0}$

(1)

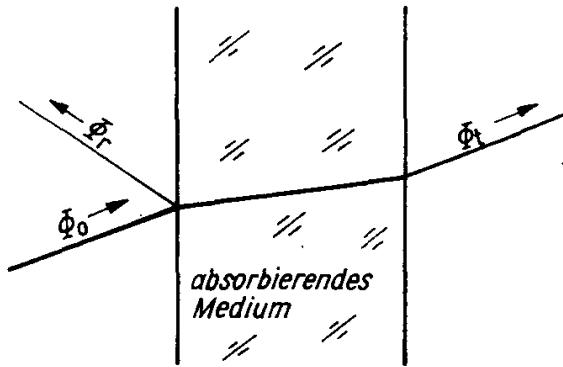


Bild 162

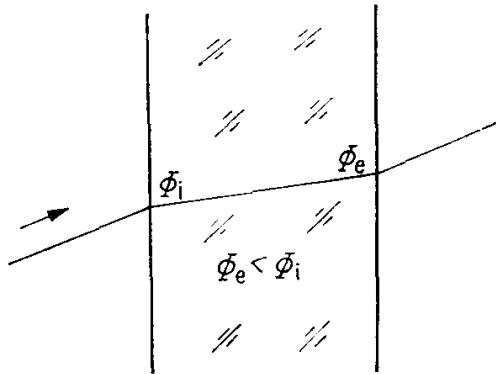


Bild 163

Der Energiesatz fordert

$$\Phi_0 = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t \quad (2)$$

Daraus folgt mit (1)

$$\varrho + \alpha + \tau = 1 \quad (3)$$

Wir betrachten nun die Vorgänge innerhalb des absorbierenden Mediums (Bild 163). Ist  $\Phi_i$  der in das Medium eindringende,  $\Phi_e$  der aus dem Medium austretende Lichtstrom, so nennt man

$$\alpha_i = \frac{\Phi_i - \Phi_e}{\Phi_i} = 1 - \frac{\Phi_e}{\Phi_i} \quad (4)$$

den Reinabsorptionsgrad.

Beachten Sie, daß der Absorptionsgrad auf den *auf treffenden* Lichtstrom  $\Phi_0$ , der Reinabsorptionsgrad aber auf den *eindringenden* Lichtstrom  $\Phi_i$  bezogen ist!

Der in (4) auftretende Quotient  $\Phi_e/\Phi_i$  heißt Reintransmissionsgrad:

$$\vartheta = \frac{\Phi_e}{\Phi_i} \quad (5)$$

Im absorbierenden Medium ändert sich der Lichtstrom  $\Phi$  längs des Wegelements  $dx$  um  $d\Phi$ .  $d\Phi$  ist dem Lichtstrom  $\Phi$  und dem Wegdifferential  $dx$  proportional:

$$d\Phi = -m_n \Phi dx$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß der Lichtstrom abnimmt. Trennung der Veränderlichen und Integration über die Schichtdicke  $d$  ergibt:

$$\int_{\Phi_i}^{\Phi_e} \frac{d\Phi}{\Phi} = -m_n \int_0^d dx$$

$$\ln \frac{\Phi_e}{\Phi_i} = -m_n d \quad (6)$$

oder

$$\Phi_e = \Phi_i e^{-m_n d} \quad (7)$$

$m_n$  heißt natürlicher Extinktionsmodul. Bild 164 stellt den Verlauf der Funktion (7) dar.

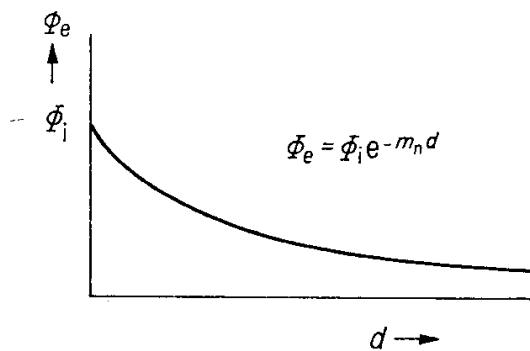


Bild 164

Ersetzt man in (6) den natürlichen Logarithmus durch den dekadischen ( $\ln x = 2,3 \lg x$ ):

$$\lg \frac{\Phi_e}{\Phi_i} = -\frac{m_n}{2,3} d$$

und führt den dekadischen Extinktionsmodul  $m = \frac{m_n}{2,3}$  ein, so erhält man

$$\Phi_e = \Phi_i 10^{-md} \quad (8)$$

Das Produkt  $m_n d$  heißt natürliche Extinktion  $E_n$ . Entsprechend bezeichnet man  $md$  als dekadische Extinktion  $E$ .

Die Extinktion in einer planparallelen Glasplatte kann nicht direkt aus (7) oder (8) bestimmt werden, da  $\Phi_i$  und  $\Phi_e$  nicht bekannt sind. Es muß die Reflexion an den Grenzflächen berücksichtigt werden. Der Reflexionsgrad  $\varrho$  aus (1) läßt sich für eine planparallele Platte bei senkrechtem Lichteinfall nach FRESNEL berechnen:

$$\varrho = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (9)$$

Er hängt also nur von den Brechzahlen  $n_2$  der Platte und  $n_1$  des umgebenden Mediums (Luft) ab.

Vereinfachend soll angenommen werden, daß keine Mehrfachreflexion stattfindet, daß also von dem an der zweiten Grenzschicht reflektierten Licht (in Bild 165:  $\varrho(1 - \varrho)\vartheta\Phi_0$ ) nicht noch einmal ein Teil an der ersten Grenzschicht reflektiert wird.

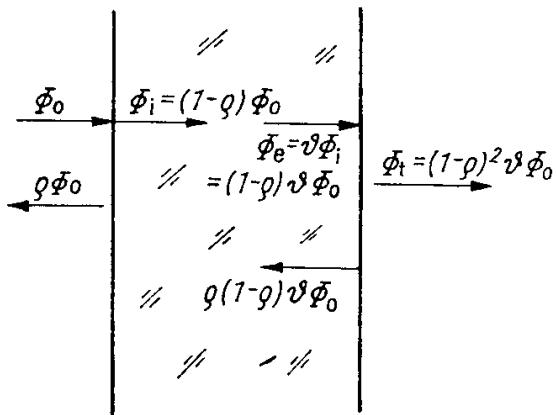


Bild 165

In Bild 165 sind die Lichtströme eingetragen, die sich unter dieser Voraussetzung ergeben.  $\Phi_0$  und  $\Phi_t$  können gemessen werden. Nach Bild 165 ist

$$\frac{\Phi_t}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \vartheta \quad (10)$$

Werden dünne Glasplatten (etwa Diagläser) verwendet, so kann die Extinktion vernachlässigt und der Reintransmissionsgrad  $\vartheta \approx 1$  gesetzt werden. Anstelle von (10) gilt dann

$$\frac{\Phi_t}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \quad (10')$$

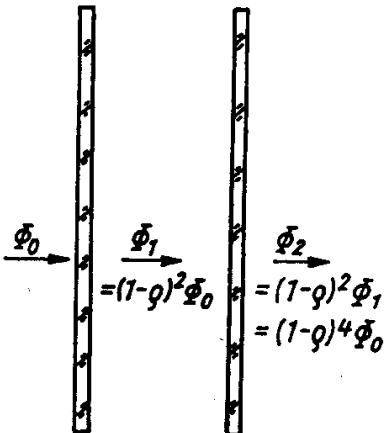


Bild 166

Werden mehrere dünne Glasplatten hintereinandergesetzt (Bild 166), so erhält man

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_2} = \dots = (1 - \varrho)^2$$

Daraus kann der Reflexionsgrad ermittelt werden zu

$$\varrho = 1 - \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} = 1 - \sqrt{\frac{\Phi_2}{\Phi_1}} = \dots \quad (11)$$

Zur Berechnung des Extinktionsmoduls  $m$  folgt zunächst aus (5) und (8)

$$\vartheta = 10^{-md}$$

mit  $d$  als Dicke der Glasplatte. Setzt man das in (10) ein, so erhält man

$$\frac{\Phi_t}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \cdot 10^{-md}$$

Daraus lässt sich  $m$  berechnen:

$$m = \frac{1}{d} \left[ 2 \lg (1 - \varrho) + \lg \frac{\Phi_0}{\Phi_t} \right] \quad (12)$$

## V Versuchsdurchführung

Zur Messung des Lichtstroms bzw. der Lichtstärke wird eine Vakuumfotozelle verwendet. Den Versuchsaufbau zeigt Bild 167. Die Entfernung Lichtquelle—Fotozelle wird während des Versuches nicht geändert. Dann ist die Stärke des Fotostroms dem Lichtstrom proportional. Der Glasplattenhalter kann bis zu 4 Diagläser aufnehmen.

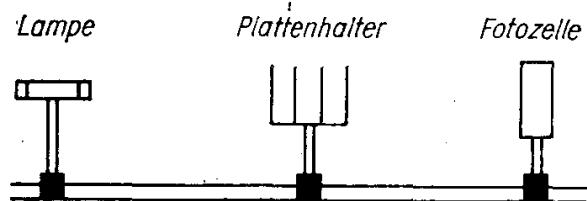


Bild 167

Nachdem die Stromstärke  $I_0$  der Photodiode gemessen worden ist, wenn sich keine Gläser im Strahlengang befinden, werden nacheinander 1, 2, 3 und 4 Diagläser eingesetzt und die elektrische Stromstärke gemessen.

Zur Bestimmung der Extinktion werden quaderförmige Glaskörper von verschiedener Länge und bekannter Brechzahl in den Strahlengang gebracht und die jeweiligen Stromstärken der Photodiode gemessen. Aus der Brechzahl kann nach (9) der Reflexionsgrad und damit nach (12) der Extinktionsmodul bestimmt werden.

## A Aufgaben

1. Es ist der Reflexionsgrad der vorgelegten Diagläser zu bestimmen.
2. Aus (9) ist die Brechzahl der Diagläser zu berechnen.

3. Für die Glaskörper sind dekadischer und natürlicher Extinktionsmodul zu bestimmen.
4. Berechnen Sie dekadische und natürliche Extinktion!
5. Berechnen Sie den Reinabsorptionsgrad der Glaskörper!
6. Fehlerabschätzung

**Versuchsgeräte:** Vakuumfotozelle mit Gehäuse, Glühlampe mit Gehäuse, Galvanometer, Spannungsmesser, Potentiometer, Spannungsstabilisator, optische Bank mit Reitern und Maßstab, Glasplatten mit Halter, Glaskörper mit Halter, Blenden

## 62. Charakteristik eines Geiger-Müller-Zählrohrs

### G Grundlagen

Das GEIGER-MÜLLER-Zählrohr ist ein *Strahlungsdetektor*, d. h. ein Gerät zum Nachweis radioaktiver Strahlung. Nach der äußeren Form unterscheidet man Zylinderzählrohre (zum Nachweis harter Strahlung) und Glockenzählrohre besonders zum Nachweis weicher Strahlung.

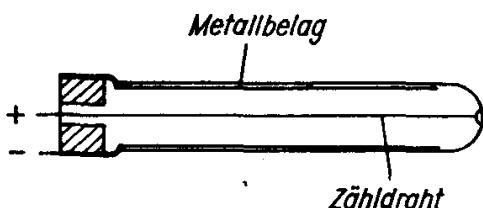


Bild 168

Den schematischen Aufbau eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohres zeigt Bild 168. In einem Rohr (Glas mit innerem Metallbelag) befindet sich in der Längsachse ein dünner Draht. Metallbelag und Draht sind gegeneinander isoliert und dienen als Elektroden. Im Rohr befindet sich ein Gas (meist Argon oder Luft) unter niedrigem Druck. Legt man nun an die beiden Elektroden eine Spannung von etwa 1 kV, so entsteht ein starkes elektrisches Feld; eine selbständige Entladung findet aber noch nicht statt. Fällt jedoch radioaktive Strahlung ein, so werden Gasatome ionisiert. Infolge der hohen elektrischen Feldstärke bewirken die freigesetzten Elektronen Stoßionisation weiterer Gasatome, so daß eine selbständige Gasentladung eingeleitet wird. Bei den heute fast ausschließlich verwendeten „selbstlöschenden“ Zählrohren wird dem Gas ein Löschgas (meist Äthanoldampf) zugesetzt, das die Energie der beschleunigten Ionen und Elektronen aufnimmt, so daß die Gasentladung schnell wieder unterbrochen wird. Je kürzer die Zeit ist, die bis zum Abklingen eines von einem Teilchen oder Strahlungsquant ausgelösten Stromstoßes vergeht (Totzeit), um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß jedes einzelne Teilchen oder Quant gezählt wird. Die Strom-

stoße werden nach Verstärkung von einer Zählanlage registriert oder durch einen Lautsprecher hörbar gemacht.

Ein Glockenzählrohr zeigt Bild 169. Das Zählrohr ist durch eine dünne Glimmerschicht abgeschlossen, die auch von energieärmerer Strahlung durchdrungen werden kann.

Das Prinzipschaltbild eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohres zeigt Bild 170.

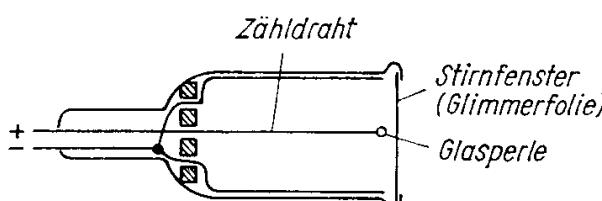


Bild 169

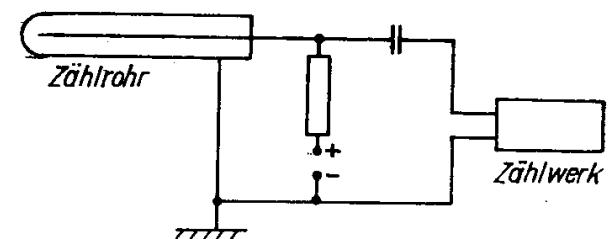


Bild 170

### Zählrohrcharakteristik

Unter der Zählrohrcharakteristik versteht man die Abhängigkeit der *Zählrate*  $z$  von der Zählrohrspannung  $U$  bei konstanter Bestrahlung (Bild 171). Die Zählrate ist der Quotient aus der Anzahl  $N$  der von der Apparatur gezählten Impulse und der Zeit  $t$ :

$$z = \frac{N}{t} \quad (1)$$

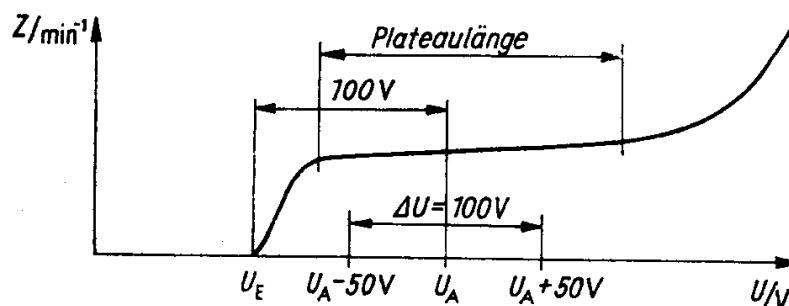


Bild 171

Von einer bestimmten Spannung  $U_E$  (Einsatzspannung) an registriert der Zähler Teilchen oder Quanten. Die Zählrate steigt stark an, bleibt dann aber über einen Bereich von 200 V bis 300 V nahezu konstant. Dieser Teil der Charakteristik wird *Plateau* genannt. Die Plateaulänge wird in Volt gemessen. Bei weiterer Erhöhung der Spannung wächst die Zählrate wieder stark an; es kommt schließlich zur Dauerentladung und zur Zerstörung des Zählrohres. Die Arbeitsspannung  $U_A$  des Zählrohres wählt man bei etwa 100 V über der Einsatzspannung.

Auch wenn kein radioaktives Präparat in der Nähe ist, registriert ein Zählrohr eine gewisse Anzahl von Teilchen oder Quanten, die aus der Höhenstrahlung oder der Radioaktivität des Raumes stammen. Die sich hieraus ergebende Zählrate heißt *Nulleffekt*. Jede Messung wird vom Nulleffekt überlagert.

## V Versuchsdurchführung

Das radioaktive Präparat wird in einer Entfernung von etwa 10 cm bis 20 cm vom Zählrohr angeordnet. Zur Aufnahme der Zählrohrcharakteristik wird die Spannung zunächst in Schritten von etwa 50 V erhöht und die Einsatzspannung gemessen. Von der Einsatzspannung an wird die Spannung nur noch in Schritten von 10 V erhöht; die Zählraten werden bei jeder Spannung gemessen (Zeit 1 min). Die Messungen werden bei etwa 200 V über der Einsatzspannung abgebrochen. Die Plateausteigung s wird aus der Gleichung

$$s = \frac{z_{U_A+50V} - z_{U_A-50V}}{z_{U_A} \cdot 100 \text{ V}}$$

berechnet. Es ist üblich, die Plateausteigung in %/100 V anzugeben. Ein Zählrohr ist unbrauchbar, wenn sich die Plateaulänge auf 150 V verkürzt und die Plateausteigung sich auf 15% / 100 V erhöht hat.

## A Aufgaben

1. Nehmen Sie die Zählrohrcharakteristik des vorgelegten Zählrohres auf!
2. Bestimmen Sie die Einsatzspannung und den Plateauanfang!
3. Legen Sie die Arbeitsspannung fest!
4. Berechnen Sie die Plateausteigung!
5. Beurteilen Sie die Einsatzfähigkeit des Zählrohres!

*Versuchsgeräte:* GEIGER-MÜLLER-Zählrohr mit Netzgerät und Zähleinrichtung, radioaktives Präparat, Stoppuhr, Tiegelzange, Stativmaterial