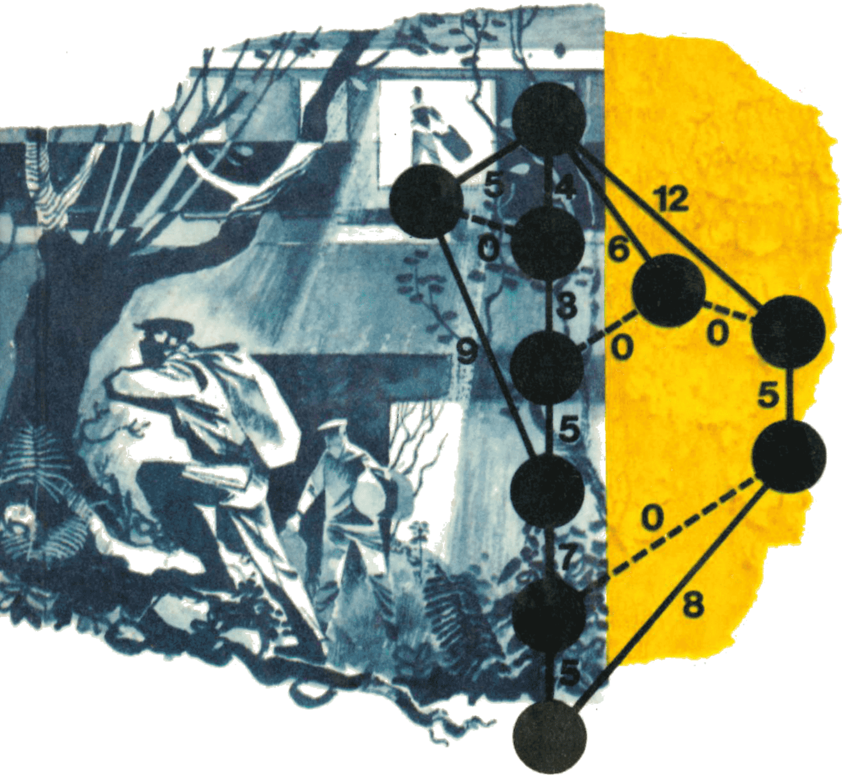
Christian Heermann

Das Einmaleins genügt nicht mehr

REGEN
BOGEN
REIHE



Regenbogenreihe

Christian Heermann

Das Einmaleins genügt nicht mehr

Mathematik im Alltag

Illustrationen von Rudolf Schultz-Debowski

Der Kinderbuchverlag Berlin

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 304–270/76/73-(40)
Gesamtherstellung: Interdruck, Leipzig · 1. Auflage
ES 9 F · Preis 3,–

Mathematik und Leben

Ein barbarischer Eindringling

Man schrieb das Jahr 1803. Seit fast zehn Jahren residierte in Neustrelitz ein Großherzog namens Karl. Er herrschte über achtzigtausend Untertanen, führte ein fröhliches Leben auf ihre Kosten und hatte besondere Freude, wenn seine Grenadiere mit klingendem Spiel und zackigen Schritten über den Marktplatz der Residenzstadt marschierten. Von den Strapazen des Zuschauens erholte er sich dann in seinem Lustschloß. Und dort kam ihm eines Tages eine Idee. Noch am gleichen Tage bestellte er den Minister zu sich.

„Höre Er zu!" sagte Großherzog Karl. „Ich möchte erfahren, wie es in den Schulen meines Landes aussieht. Beauftrage Er zwei Inspektoren. Sie sollen von Dorf zu Dorf fahren und feststellen, was die Kinder meiner Untertanen lernen!"

Schon einen Tag später machten sich die beiden Inspektoren auf den Weg. Sie fuhren nach Feldberg und nach Stargard und auf mehrere kleine Dörfer. Es dauerte nicht lange, da hatten sie das kleine Großherzogtum bereist und einige Schulen „visitiert", wie es in der Amtssprache hieß.

Was die Männer dabei sahen und erlebten, können wir uns heute kaum vorstellen. Schlimme Zustände herrschten damals in den Dorfschulen.

Von fünfhundertsiebenundfünfzig Schülern, die die Inspektoren kontrollierten, konnten beispielsweise nur *zwei* rechnen. Kinder jeden Alters, von den Abc-Schützen bis zu den Vierzehnjährigen, saßen in einer Klasse, oft über fünfzig Schüler, und nur ein einziger Lehrer unterrichtete sie. In vielen Dörfern waren die Schulen während des ganzen Sommers geschlossen. Die Kinder mußten auf

den Feldern der adligen Rittergutsbesitzer arbeiten. Nur im Winter besuchten sie den Unterricht. Sie lernten wenig, etwas Lesen und Schreiben, aber eine große Menge von Kirchenliedern und Bibelsprüchen.
Über die Schulen der damaligen Zeit bestimmten die Feudalherren und von der Kirche eingesetzte Beamte. Den Herren lag nichts daran, daß den Kindern ein umfangreiches Wissen vermittelt wurde. Auch Großherzog Karls Auftrag war mehr einer Laune entsprungen als echtem Interesse, denn ihm wie den anderen Feudalherren erschien die Unwissenheit der Menschen als ein sicheres Mittel, die Herrschaft des Adels für alle Zeiten zu erhalten. Wer wenig gelernt hat, so sagten sie, kann nicht viel denken und glaubt, daß das armselige Leben auf dem Dorfe immer so bleiben müsse. Von Physik oder Chemie oder Mathematik erfuhren die Kinder nichts, und gerade die Mathematik fördert ja das Denkvermögen in hohem Maße. Das Denken kommt den Menschen bei allen Gelegenheiten zugute, nicht nur beim Knobeln an einer mathematischen Aufgabe, sondern immer dann, wenn sie den Ursachen eines bestimmten Problems auf den Grund gehen wollen.
So wird es uns verständlich, weshalb in früherer Zeit in den Dorfschulen die Kinder nicht einmal das einfachste Rechnen lernten und weshalb von den fünfhundertsiebenundfünfzig Schülern in Mecklenburg nur zwei mit Zahlen umgehen konnten. Jene beiden hatten das Rechnen sicherlich nicht in der Schule gelernt.
Nun existierten damals nicht nur die Dorfschulen. Sah es in den Städten nicht doch etwas anders aus?
Die Volksschulen unterschieden sich allerdings kaum von den Schulen auf dem Lande. Daneben gab es aber „höhere Schulen", die Gymnasien. Sie wurden von Kindern besucht, deren Eltern in der Lage waren, das Schulgeld zu

2
+3
5
$\sqrt[2]{35}$

bezahlen, und für den Besuch dieser Schulen mußte viel Geld bezahlt werden. Da die Gymnasiasten später auf den Universitäten studieren sollten, lernten sie wesentlich mehr als die Kinder der Armen. Aber von Mathematik erfuhren auch sie wenig. An den meisten Gymnasien gab es in der damaligen Zeit keine Mathematiklehrer. Manchmal war es der Schulschreiber, ein anderes Mal der Kirchendiener, der eine Rechenstunde durchführte.
So sah es nicht nur in Mecklenburg, sondern überall aus. Zu den bekanntesten höheren Bildungsanstalten zählte die Thomasschule in Leipzig. Sie existiert noch heute und ist jetzt eine moderne sozialistische Schule. Damals aber, vor mehr als anderthalb Jahrhunderten, war es selbst an einem so bekannten Gymnasium schlecht um die Mathematik bestellt. Die Teilnahme am Unterricht in diesem Fach war freiwillig. Wer von den Schülern Lust verspürte, besuchte die Mathematikstunde, und die anderen gingen nach Hause. Doch bald war es auch mit solchen bescheidenen Anfängen wieder vorbei. Als ein neuer Direktor an diese Schule kam, erschien ihm diese wenige Mathematik noch zu viel. Kurzerhand verbot jener Mann namens Fischer den Unterricht in diesem Fach. In einem alten Buch heißt es dazu, daß er „die Mathematik davongejagt hat, wie es einem barbarischen Eindringling geziemte". Viele solcher Beispiele sind bekannt. Heute erscheint uns das als beinahe unglaubhaft.
In den damaligen Gymnasien war der größte Teil der Zeit für den Unterricht in Latein und Griechisch vorgesehen. Obgleich die meisten Schüler später mit den alten Sprachen nicht viel anfangen konnten, galten diese dennoch als Krone aller Bildung. In solche heiligen Gefilde war also die Mathematik eingedrungen, und deshalb wurde sie verjagt. Vor mehr als anderthalb Jahrhunderten war es also an den Schulen schlecht um die Mathematik bestellt.

Noch nie so viel wie heute

Allerdings gab es schon damals fortschrittliche Lehrer und Pädagogen, die sich für eine Einführung des Mathematikunterrichtes einsetzten. Allmählich wurde dieses Fach auch an allen Schulen gegeben. Doch fragt einmal eure Großeltern, die vor einigen Jahrzehnten die Schule besuchten, was sie im Rechen- oder Mathematikunterricht lernten. Sie werden antworten, daß sie viel weniger damit zu tun hatten als ihr heute. Sie lernten zwar Rechnen, aber an den Volksschulen gab es vor dem Jahr 1945 keinen richtigen Mathematikunterricht. Von vielen Dingen, die ihr heute lernt – von Ungleichungen und Relationen, von Mengen und exakten Beweisen –, hörten selbst eure Eltern während ihrer Schulzeit noch nichts.

Zieht man solche und ähnliche Vergleiche zur Vergangenheit, so ergibt sich eine Tatsache: Schon vom ersten Schuljahr ab lernt ihr heute wesentlich mehr Mathematik und dringt tiefer in diese Wissenschaft ein als viele Schülergenerationen vor euch.

Oft hört man die Frage: Weshalb nimmt heute die Mathematik einen solchen wichtigen Platz in den Lehrplänen ein?

Mit diesem Buch geben wir darauf eine Antwort.

Weshalb gerade diese Fächer?

Nach welchen Gesichtspunkten werden eigentlich die Unterrichtsfächer festgelegt?

Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Geographie, Geschichte und andere Lehrstoffe haben ihr Vorbild in Wissenschaften, die den gleichen Namen tragen. Die Schule vermittelt euch davon wichtige Grundlagen. Nun gibt es heute Hunderte verschiedener Wissenschaftsdisziplinen. Die Mikroklimatologie beispielsweise befaßt sich mit dem Klima in der Luftschicht unmittelbar über dem

Erdboden. Die Raumfahrtmedizin untersucht den Gesundheitszustand von Kosmonauten vor, während und nach ihren kosmischen Flügen. Die Charakterologie beschäftigt sich mit der Untersuchung des Charakters in Abhängigkeit von den gesellschaftlichen Verhältnissen. Diese drei Wissenschaften sind ohne Zweifel sehr wichtig. Trotzdem stehen sie nicht im Lehrplan der Schulen. Weshalb werden diese Fächer nicht unterrichtet?
Alle drei Disziplinen untersuchen jeweils nur ein eng begrenztes Gebiet. Die Zahl der Wissenschaftler, die sich damit befassen, ist nicht allzu groß. Es handelt sich hier um spezielle Kenntnisse, mit denen nur die Fachleute arbeiten. Nicht jeder Mensch benötigt ein tieferes Wissen über solche Gebiete.
Anders sieht es bei den Wissenschaften aus, die in den Schulen gelehrt werden. Kenntnisse aus der Physik braucht man überall. Sie sind notwendig, wenn man die Arbeitsweise eines Telefons, des Radioapparates oder eines Kraftfahrzeugmotors verstehen will. Ohne Physik ist weder das Entstehen eines Gewitters noch eine so einfache Sache wie das Sprudeln einer geöffneten Selterswasserflasche zu erklären. Am Unterrichtstag in der Produktion begegnen euch viele moderne Maschinen und Anlagen, an denen ihr das Wirken physikalischer oder chemischer Gesetze beobachtet. Diejenigen unter euch, die am Unterrichtstag in eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft gehen, sehen, daß man dort ohne biologische Kenntnisse nicht auskommt. Ungezählte Beispiele aus allen Bereichen unseres Lebens lassen sich aufzählen, bei denen Physik, Chemie oder Biologie eine Rolle spielen.
Sehr entscheidend dafür, ob eine Wissenschaft in der Schule unterrichtet wird, ist somit die Anwendung ihrer Erkenntnisse und Gesetze in vielen Gebieten der Praxis, im täglichen Leben und in der Umwelt des Menschen. Die

Physik ist eine Grundlage der Technik und damit der modernen Produktion. Auf der Chemie baut unsere gesamte chemische Industrie auf. Für Landwirtschaft, Gartenbau und Medizin ist die Biologie unerläßlich. Ohne Geschichte kann man die Entwicklung der Gesellschaft, das Entstehen und Wachsen unserer Republik und unseren Weg in die Zukunft nicht verstehen. Deshalb stehen diese Fächer auf dem Stundenplan.
Einen noch breiteren Raum nimmt jedoch die Mathematik ein. Dafür muß es besondere Gründe geben. Sie dringt heute in nahezu alle Bereiche unseres Lebens ein. In vielen Berufen kommt man ohne mathematische Kenntnisse nicht mehr aus. Von Anfang an war diese Wissenschaft mit der Praxis verbunden. Solche und ähnliche Gründe sichern ihr eine besondere Rolle an den Schulen.

Wie die Mathematik entstand

Es begann mit dem Kerbholz
Dieses Buch erzählt keine Geschichte der Mathematik. Um jedoch die Behauptung zu beweisen, daß sie von Anfang an mit der Praxis verbunden war, halten wir einen kurzen historischen Rückblick. Schon das Entstehen des Zählens und Rechnens zeigt uns, wie eng die Verbindung zum Leben der Menschen war.
Die Mathematik gehört zu den ältesten Wissenschaften. Sie entstand aus Bedürfnissen, die sich schon in der Urgemeinschaft im Verkehr der Menschen untereinander ergaben. Die Anfänge bildeten sich während großer Zeiträume in verschiedenen Gebieten der Erde, in denen Menschen siedelten, gleichzeitig heraus. In der Urgemeinschaft arbeiteten alle Menschen in gleichem Umfang. Sie sammelten beispielsweise gemeinsam Früchte.

Um die Anzahl der Körbe zu registrieren, wurden Einkerbungen auf einem Holzstab vorgenommen. Jeder Sammler hatte dann etwas auf dem Kerbholz. Heute erinnert daran eine Redensart, die aber nicht mehr dem ursprünglichen Sinn entspricht. Wenn wir sagen, jemand hat etwas auf dem Kerbholz, so ist damit gemeint, daß der Betreffende etwas Verbotenes getan hat. Tatsächlich ist aber mit dem Kerbholz die Entstehung des Zählens verbunden.

Auf einer höheren Entwicklungsstufe der Menschheit kam es zur ersten gesellschaftlichen Arbeitsteilung, es gab nunmehr Ackerbauern und Viehzüchter. Damit bildeten sich auch Tausch- und Handelsgeschäfte heraus. Die Notwendigkeit des Zählens nahm zu. Die Mengen der ausgetauschten Dinge wie Früchte oder Muscheln wurden verglichen. Durch Zählen bestimmte man die Größe einer Menge. Langsam aber lösten sich die Menschen von den benannten Zahlen. Es entstanden abstrakte Zahlen, bei denen der konkrete Inhalt der abgezählten Dinge unberücksichtigt blieb.

Unser heutiges Zahlensystem, das Dezimalsystem, entwickelte sich dadurch, daß die zehn Finger der beiden Hände die Größe einer Menge veranschaulichten. Das Zählen zog bald die Addition und Subtraktion als erste Rechenoperationen nach sich. Als Hilfsmittel dienten kleine Steinchen, auf lateinisch calculi genannt. Heute sprechen wir von Kalkülen als den Rechenmethoden in der Mathematik und von Kalkulationen als Berechnungen oder Kostenanschlägen.

Auch die Wurzeln dieser beiden Begriffe reichen also weit in die Geschichte zurück.

Subtraktionen erfolgten anfangs nur im Bereich der natürlichen Zahlen. Es wurde immer eine kleinere positive Zahl von einer größeren positiven Zahl abgezogen. Erst

viel später kamen die Vorstellungen von den negativen Zahlen auf.
Die Multiplikation und die Division entstanden im Zusammenhang mit größeren Arbeiten wie etwa dem Bau der Pyramiden im alten Ägypten. Hier kam es beispielsweise darauf an, die Sklaven auf einzelne Bauabschnitte aufzuteilen.
Erste wissenschaftliche Grundlagen der Mathematik entwickelten sich in China, Indien und Ägypten. Das älteste schriftliche Dokument dieser Wissenschaft, der Papyrus des ägyptischen Königsschreibers Ahmes, stammt etwa aus dem Jahre 1800 vor unserer Zeitrechnung. Am Anfang des Werkes stehen die Worte:
„Vorschrift, zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge und Geheimnisse, welche in den Gegenständen enthalten sind."
Der Königsschreiber Ahmes sagt in seinem Papyrus, daß er es nach alten Schriften, die weitere fünfhundert Jahre zurückliegen, gestaltet hat. Wenn wir von heute aus rückwärts rechnen, dann ist das die Zeit vor viertausenddreihundert Jahren. Mindestens so alt ist also die Mathematik.
Als Rechenzeichen für Addition und Subtraktion benutzt Ahmes ein Symbol, das die Beine eines laufenden Menschen darstellt. Die Schrittrichtung gibt die Art der Rechenoperation an:
Vorwärtslaufen bedeutet Addieren, Rückwärtslaufen Subtrahieren.
Im Papyrus des Königsschreibers werden Aufgaben aus der Arithmetik einschließlich der Bruchrechnung und aus der Geometrie zur Berechnung von Flächen und Volumen beschrieben.
Eine Aufgabe aus diesem ältesten Rechenbuch der Erde sollt ihr selbst lösen!

● Von Katzen und Mäusen
Sieben Menschen besitzen sieben Katzen. Jede Katze frißt sieben Mäuse. Jede Maus frißt sieben Ähren Gerste. Aus sieben Ähren Gerste können sieben Maß Getreide entstehen. Wieviel Maß sind das?

Bei den Erbauern der Pyramiden
Für das Entstehen der Geometrie gibt es sehr einleuchtende Gründe: In den Niederungen des Nils, des Euphrats und Tigris, des Indus und des Hwanghos kam es jedes Jahr regelmäßig zu Überschwemmungen. Danach mußten die Felder neu vermessen werden, und dabei entwickelten sich unabhängig voneinander in verschiedenen Gebieten der Erde erste geometrische Kenntnisse.
Sehr fördernd wirkte auch das Errichten größerer Bauwerke. In den Städten verwendete man Lehmziegel für den Häuserbau. Sie ließen sich am besten aufeinanderfügen, wenn die Seiten der einzelnen Ziegel rechtwinklig zueinander standen. Wahrscheinlich wurde auf diese Weise der rechte Winkel entdeckt. Zur Konstruktion dieses Winkels benutzten die alten Ägypter eine Schnur aus drei Teilen. Mit der Länge von drei, vier und fünf Einheiten ließ sich daraus ein rechtwinkliges Dreieck legen. Nach dem Satz des Pythagoras, der erst später entdeckt wurde und der nur für die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks gilt, ergibt sich die Beziehung $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Mit Methoden, die der Integralrechnung – einem Teilgebiet der heutigen Mathematik – schon sehr ähnlich waren, berechneten ägyptische Mathematiker das Volumen der großen Pyramiden. Für den Bau dieser Pharaonengräber benutzten sie vor viertausend Jahren Unterlagen,

Mit einem Seil, das in drei Abschnitte mit der Länge von 3, 4 und 5 Einheiten unterteilt war, konstruierten die Ägypter einen rechten Winkel.


3
4
5

die wir heute als mathematische Bauablaufpläne bezeichnen können. Außer Grundrißzeichnungen enthielten sie Angaben über die geplante Zeit, die einzusetzenden Sklaven und deren Verpflegung und über das Baumaterial.
Die Mathematik hatte also schon vor Tausenden von Jahren sehr enge Beziehungen zur Technik.
Bedeutendes für die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft vollbrachten zur gleichen Zeit auch die Babylonier, Inder und Chinesen. Allerdings haben sie selten exakte Beweise für die von ihnen entdeckten Gesetze und Regeln erarbeitet. Sie begnügten sich meist mit bestimmten Vorschriften zur Berechnung von Aufgaben, die sich aus dem täglichen Leben ergaben.

Der Detektiv von Syrakus

Die Mathematik als eine strenge, exakte Wissenschaft, in der jedes Gesetz genau bewiesen wird, entwickelte sich in Griechenland etwa vom Jahre 600 vor unserer Zeitrechnung an. Große Wissenschaftler waren daran beteiligt: Thales und Pythagoras, Platon und Aristoteles, Archimedes und Euklid und viele andere.
Archimedes gilt als der größte Mathematiker, Physiker und Techniker des Altertums. Er lebte in den Jahren zwischen 287 und 212 vor unserer Zeitrechnung und entwickelte zahlreiche Formeln zur Bestimmung der Größe verschiedener Flächen und Körper, mit denen wir noch heute rechnen. Auch das Hebelgesetz und andere Regeln der Mechanik wurden von ihm entdeckt. Über diesen bedeutenden Gelehrten sind viele Anekdoten erzählt worden. Am bekanntesten ist diese:
Hieron II., König von Syrakus, hegte einst den Verdacht, ein unredlicher Goldschmied habe das Gold einer Krone mit Silber versetzt. Der am Hofe des Königs lebende Archimedes wurde beauftragt, den Betrug nachzuweisen.

Er dachte angestrengt nach, erwog diese und jene Möglichkeit, doch der richtige Gedanke kam ihm erst, als er in eine mit Wasser gefüllte Badewanne stieg. Dabei bemerkte er nämlich, daß das Wasser in gleichem Maße aus der Wanne floß wie sein Körper darin eintauchte. Da wurde ihm klar, wie er das Volumen der Krone, dieses unregelmäßig gestalteten Körpers, bestimmen konnte und daß es ihm diese Entdeckung möglich machen würde, die Untersuchung durchzuführen.

Archimedes, hocherfreut über seine Erkenntnis, sprang aus dem Bad, lief splitternackt durch die Straßen von Syrakus zu seinem Haus und rief mit lauter Stimme: „Heureka! Heureka!" Auf deutsch heißt das: „Ich habe es gefunden!" So ist es zu lesen in einer alten Schrift des römischen Baumeisters Vitruvius Pollio.

Diese Legende haben wir nicht aufgeschrieben, weil es besonders lustig ist, wenn ein Wissenschaftler vor lauter Begeisterung nackt durch die Straßen läuft, sondern weil in ihr vielmehr einige tiefere Erkenntnisse stecken.

Die Chance, eine neue wissenschaftliche Entdeckung überhaupt oder recht schnell zu machen, hängt ganz wesentlich von den Bedürfnissen der Menschen nach dieser neuen Erkenntnis ab und von dem Auftrag, den sie den Forschern erteilt haben. War es bei Archimedes nur das Verlangen des Königs, einem Betrug auf die Spur zu kommen, so wird später der Einfluß der menschlichen Gesellschaft auf das Zustandekommen neuer Entdeckungen noch viel deutlicher. Jahrhunderte nach Archimedes hat das Friedrich Engels in die treffenden Worte gekleidet: „Hat die Gesellschaft ein technisches Bedürfnis, so hilft das der Wissenschaft mehr voran als zehn Universitäten." Die Geschichte der Wissenschaft und Technik hat diese Feststellung tausendfach bestätigt.

Mit seiner klaren Formulierung physikalischer Gesetze

schuf Archimedes die Voraussetzung, diese auch in der Sprache der Mathematik auszudrücken.
Für die nachfolgende Entwicklung der mathematischen Wissenschaft haben wir damit eine sehr wichtige Tatsache gefunden. Die Physik war die erste Wissenschaft, in der mit mathematischen Mitteln gearbeitet wurde.

Was heißt Mathematisierung?

Auf den Schultern von Riesen
Als erstes Teilgebiet der Physik entwickelte sich die Mechanik zu hoher Blüte, und in diesem Bereich kam es auch zum ersten festen Bündnis mit der Mathematik. Da nun die Mechanik ihrerseits die älteste Grundlage der Technik darstellt, wurde die Mathematik auch schon zeitig zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für alle technischen Wissenschaften. Heute gibt es in der Physik und in der Technik kein Gesetz, das nicht in der Sprache der Mathematik dargestellt wird. Schlagt euer Physik-Lehrbuch auf, und auf jeder Seite findet ihr mathematische Formeln. Kein Ingenieur kann ohne mathematische Berechnungen seine Aufgaben erfüllen.
Die Mathematisierung der Mechanik war schon vor zweihundertfünfzig Jahren abgeschlossen. Der Engländer Isaac Newton, der von 1642 bis 1727 lebte, war es, der diese Arbeit vollendete. Aber das wurde ihm nur möglich, nach dem er ein neues Teilgebiet der Mathematik, die Differential- und Integralrechnung, entwickelt hatte. Er hatte nämlich festgestellt, daß die Mathematik seiner Zeit noch nicht zur Darstellung aller Gesetze der Mechanik ausreichte. Noch heute nimmt die Infinitesimalrechnung, wie man dieses Teilgebiet der Mathematik nennt, einen wichtigen Platz in der gesamten Mathematik ein.

Über seine eigenen Leistungen sagte Newton einmal: „Wenn ich etwas weiter sah als andere, so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stand." Er meinte damit, daß schon andere Forscher vor ihm vieles entdeckt hatten, worauf er seine Untersuchungen aufbauen konnte, so besonders auf der Arbeit von Johannes Kepler, des Erforschers der Planetenbahnen, und von Galileo Galilei, der die Gesetze des freien Falls und viele andere Naturerscheinungen entdeckte. Unabhängig von Newton entwickelte zur gleichen Zeit in Deutschland Gottfried Wilhelm Leibniz ebenfalls die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung. Beispiele solcher unabsichtlichen Doppelarbeit sind in der Wissenschaft nicht selten und heute sogar noch häufiger als damals. Deshalb darf man darin keinen Zufall sehen. Die Wissenschaft hatte zur Zeit von Newton und Leibniz einen solchen Stand erreicht, daß für die Weiterentwicklung die Differential- und Integralrechnung einfach notwendig wurde. Beide Forscher erkannten unabhängig voneinander diese Aufgabe und lösten sie. Wir sehen daran, daß sich die Wissenschaft selbst gesetzmäßig entwickelt.
Von Leibniz wollen wir noch erwähnen, daß er im Jahre 1700 die Kurfürstlich-Brandenburgische Sozietät der Wissenschaften zu Berlin gründete, die nach einer wechselvollen Geschichte heute als Akademie der Wissenschaften der DDR das Zentrum der Wissenschaften in unserer Republik darstellt. Sicherlich ist es auch interessant zu erfahren, daß viele unserer heutigen mathematischen Symbole und Zeichen von Leibniz stammen, beispielsweise der Multiplikationspunkt und das Divisionszeichen. Dieser große deutsche Forscher konstruierte vor über 250 Jahren eine der ersten Rechenmaschinen für die vier Grundrechenarten.

Worte und Formeln vom Pendel

Nach der Mechanik breitete sich die Mathematik auch auf die anderen Gebiete der Physik aus. Vor zwei Jahrhunderten sagte der große deutsche Philosoph Immanuel Kant zu dieser Mathematisierung: „In jeder besonderen Naturlehre kann nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden, als darin Mathematik anzutreffen ist."

Welche Gedanken drückte er damit aus? Unter einer besonderen Naturlehre verstand Kant beispielsweise die Physik. Die Erkenntnisse und Gesetze in diesen Gebieten sind erst dann richtig erforscht und gelten als Teile der Wissenschaft, meinte er, wenn man sie mit mathematischen Formeln beschreiben kann.

Dafür ein Beispiel: Mit einem Pendel kann man interessante Versuche anstellen. Einmal angestoßen, schwingt es eine gewisse Zeit und kommt dann zur Ruhe. Weshalb? Beim Anstoß wurde dem Pendel eine bestimmte Menge von Energie übertragen. Während des Schwingens reibt sich das Pendel mit der umgebenden Luft, die dadurch ein klein wenig, für uns aber nicht spürbar, erwärmt wird. Nach Umsetzung der gesamten Bewegungsenergie in Wärmeenergie bleibt das Pendel stehen. Mißt man mit einer Stoppuhr die Schwingungsdauer, das heißt die Zeit für eine volle Hin- und Rückschwingung des Pendels, so findet man ein überraschendes Resultat: Die Ausschläge und die Bewegungsgeschwindigkeit nehmen zwar allmählich ab, für jede Schwingung benötigt das Pendel aber die gleiche Zeit.

Die Schwingungsdauer hängt nicht davon ab, wie stark das Pendel anfangs angestoßen wurde. Nur die Pendellänge macht ihren Einfluß geltend: Kurze Pendel schwingen schneller als lange Pendel. Immanuel Kant drückt mit dem zitierten Satz aus, daß man über Naturerscheinungen nicht nur in Worten – wie wir jetzt eben über das Pendel –

sprechen, sondern daß man die beobachteten Gesetze in der Sprache der Mathematik festhalten soll. Für die Beobachtung des Einflusses der Pendellänge l auf die Schwingungsdauer T heißt dieses Gesetz:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\pi = 3{,}14$ ist hierbei die euch aus dem Mathematikunterricht bekannte Zahl, und g steht als Symbol für eine Naturkonstante, für die Erdbeschleunigung.

Eine Rechnung mit Erbsen

Zur Zeit Kants war nur die Physik eine mathematische Wissenschaft. Später drang die Mathematik auch in die Chemie und in die Biologie ein. Friedrich Engels mußte zwar noch für die Zeit vor hundert Jahren feststellen: „Anwendung der Mathematik in der Biologie = 0." Heute hat sich das grundlegend geändert. Für die Chemie und die Biologie wurde die Mathematik genauso zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel wie für die Physik.
Die gesamte Naturwissenschaft kommt ohne Mathematik nicht mehr aus.
Eines der ersten Beispiele für die Anwendung der Mathematik in der Biologie lieferte Johann Gregor Mendel, als er im letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts die Gesetzmäßigkeiten der Vererbung entdeckte. Er führte zahlreiche Kreuzungsversuche mit Pflanzen durch und brachte die Ergebnisse in eine mathematische Form.
Die nach dem Forscher benannten „Mendelschen Regeln" besagen, daß es bei der Kreuzung von Pflanzen mit verschiedenen Merkmalen in der ersten Generation Nachkommen gibt, die die Eigenschaften nur eines „Elternteils" tragen. Erst bei der Kreuzung der Pflanzen dieser ersten Generation untereinander kommt es zu einer Aufspaltung der Merkmale. Die Pflanzen der zweiten Generation sind

nicht mehr gleichartig. Sie verfügen über Eigenschaften, die zum Teil von beiden „Großeltern" herrühren. Die Häufigkeit der Nachkommen mit bestimmten Merkmalen kann man nach einem mathematischen Gesetz berechnen. Wir erläutern es an einem Beispiel:
Zwei Erbsensorten, eine mit gelb-glatten und eine mit grün-runzelhäutigen Früchten werden miteinander gekreuzt. Die Eigenschaften der gelb-glatten Pflanze sind stärker ausgeprägt als die der anderen Erbsensorte. In der ersten Generation tragen die Pflanzen deshalb nur glatt-gelbe Früchte. Nach erneuter Kreuzung spalten sich in der zweiten Generation aber diese Eigenschaften auf. Es existieren vier verschiedene Erbsensorten: mit gelb-glatten, runzelig-gelben, glatt-grünen und runzelig-grünen Früchten. Ihre Häufigkeit ist durch das Zahlenverhältnis 9:3:3:1 bestimmt.
Johann Gregor Mendel legte auf diese mathematischen Berechnungen so großen Wert, daß sogar behauptet wurde, er sei nur ein mäßiger Biologe, aber ein guter Mathematiker gewesen. Auf alle Fälle ist er durch die Anwendung der Mathematik wichtigen Naturgesetzen auf die Spur gekommen. Viele andere Biologen bestätigten durch ihre Arbeit die Nützlichkeit solcher mathematischer Untersuchungen. Heute werden in der Biologie viele Dinge vorausberechnet: die günstigsten Methoden bei Zuchtversuchen; die Anzahl der Versuche, bis ein bestimmtes

Oben: Kreuzung einer gelb-glattfrüchtigen Pflanze mit einer grün-runzelhäutigen
Mitte: In der ersten Generation tragen die Pflanzen nur gelb-glatte Früchte.
Unten: In der zweiten Generation spalten sich diese Eigenschaften auf: Es existieren gelb-glatte Früchte, gelb-runzelige, grün-glatte und grün-runzelige Früchte. Ihre Häufigkeit ist durch das Zahlenverhältnis 9:3:3:1 bestimmt.

Ziel erreicht ist; die Geschwindigkeit, mit der sich der Bestand an Tieren einer Gattung verändert; die Häufigkeit, mit der Schädlinge auftreten; die zu erwartenden Ernteerträge in der Landwirtschaft und vieles andere mehr.
Der im Jahre 1912 geborene sowjetische Mathematiker Boris Wladimirowitsch Gnedenko, der heute zu den bekanntesten Wissenschaftlern der UdSSR zählt, schrieb über den Zusammenhang zwischen Biologie und Mathematik: „Das weitere Eindringen der Mathematik in die Biologie wird nicht nur die Anwendung der Mathematik auf die Bedürfnisse der Biologie betreffen, auch die Mathematik wird sich unter dem Einfluß der Biologie erheblich verändern und entwickeln. Das hat es schon in der Vergangenheit gegeben."
Die Mathematik hilft nicht nur der Biologie, sondern dabei entstehen auch Gedanken, wie neue Gebiete der Mathematik weiterentwickelt werden können. Ein solches Verhältnis der gegenseitigen Hilfe und Anregung existiert nicht nur mit der Biologie, sondern auch mit allen anderen Wissenschaften, in denen die Mathematik angewandt wird. Schon am Beispiel der Begründung der Differential- und Integralrechnung durch Isaac Newton sahen wir das.

Karl Marx als Mathematiker

Jeder junge Mensch, der sich heute für das Studium eines naturwissenschaftlichen oder technischen Faches entscheidet, weiß, daß er sich sehr gründlich mit der Mathematik beschäftigen muß. Aber auch auf dem Stundenplan der künftigen Ökonomen, Juristen und Philosophen stehen mathematische Vorlesungen. In nahezu allen Wissenschaften spielt heute die Mathematik eine Rolle. Den Satz, den Immanuel Kant vor 200 Jahren für die Naturwissenschaften prägte, wurde vor 100 Jahren von Karl Marx auf alle Wissenschaften erweitert:

„Eine Wissenschaft ist erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können."

Die Mathematisierung aller Naturwissenschaften und in unserer Zeit auch der Gesellschaftswissenschaften hat Marx recht gegeben.

Nur wenig bekannt ist die Tatsache, daß sich Karl Marx selbst sehr intensiv mit der Mathematik beschäftigte und sogar bedeutende Arbeiten auf diesem Gebiet schrieb. Friedrich Engels bekam sie immer als erster zu lesen. Einmal war er von einem mathematischen Manuskript von Karl Marx so begeistert, daß er ihm am nächsten Tag schrieb: „Die Sache hat mich so erfaßt, daß sie mir nicht nur den ganzen Tag im Kopf herumgeht, sondern ich auch vorige Nacht im Traum einem Kerl meine Hemdsknöpfe zum Differenzieren gab und dieser mir damit durchbrannte."

Das Wort „differenzieren" gebraucht Friedrich Engels hier nicht im Sinne von teilen, sondern als mathematischen Begriff. Differenzieren ist die grundlegende Operation der Differentialrechnung. Das war ein Teil des von Isaac Newton entwickelten Gebietes der Mathematik. Karl Marx schrieb dazu eine historische Abhandlung und äußerte Gedanken, die erst vierzig Jahre später die Mathematiker wieder aufgriffen.

Sehr oft befaßte sich Marx mit Mathematik, wenn er von anderen Arbeiten, von philosophischen und ökonomischen Studien ausruhen wollte. Um sich nach geistigen Anstrengungen zu erholen, gibt es verschiedene Mittel. Man geht spazieren oder treibt Sport, man liest ein interessantes Buch oder befaßt sich mit einem anderen Fach. Sicherlich habt ihr schon festgestellt, daß man nach dem „Büffeln" russischer Vokabeln mathematische Aufgaben lösen kann, ohne sich zu überanstrengen. Eine abwechslungsreiche

Reihenfolge der Hausaufgaben in verschiedenen Fächern verhindert durchaus eine Ermüdung. Wenn zwischendurch noch körperliche Bewegung und Sport zu ihrem Recht kommen, kann man an einem Tag allerhand leisten. Deshalb hatte auch die Mathematik in dem abwechslungsreichen wissenschaftlichen Programm von Karl Marx ihren festen Platz. Doch sie war für ihn noch mehr als nur eine Quelle der Erholung.
Im Jahre 1860 war die Frau von Karl Marx plötzlich erkrankt. Einem gefährlichen Nervenfieber folgten kurz darauf auch noch Pocken. Ohne Rücksicht auf die große Ansteckungsgefahr wich er nicht von ihrer Seite, pflegte sie aufopferungsvoll und rettete so ihr Leben. An seinen Freund Friedrich Engels schrieb er in diesen schweren Tagen: „Die einzige Beschäftigung, wodurch ich den nötigen seelischen Gleichmut aufrechterhalten kann, ist Mathematik."

Später berichtete Paul Lafargue, der Schwiegersohn von Karl Marx: „Die Algebra gewährte ihm sogar einen moralischen Trost, zu ihr nahm er Zuflucht in den schmerzlichsten Momenten seines bewegten Lebens. Während der letzten Krankheit seiner Frau war es ihm unmöglich, sich in gewohnter Weise mit seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu beschäftigen; er konnte dem Druck, den die Leiden seiner Gefährtin auf sein Gemüt ausübten, nur entfliehen, wenn er sich in die Mathematik versenkte."
Unter solchen tragischen Umständen vollbrachte Karl Marx trotzdem große Leistungen. In seinem Hauptwerk „Das Kapital" enthüllte er die ökonomischen Gesetze des Kapitalismus. Er zeigte, daß diese ungerechte Gesellschaftsordnung keinen dauernden Bestand hat und durch die sozialistische abgelöst wird. Dabei deckte er auch die Ursachen der Krisen auf, die die kapitalistische Wirtschaft in bestimmten Abständen immer wieder schwer er-

schüttern. Die Arbeitslosigkeit erweist sich dabei als eine der schlimmsten Folgen für die Werktätigen. In diesem Zusammenhang schrieb Karl Marx am 31. Mai 1873 an Friedrich Engels: „Ich habe verschiedenemal versucht, zur Analyse der Krisen diese Auf- und Abwärtsbewegungen als unregelmäßige Kurven zu berechnen und geglaubt, ... daraus die Hauptgesetze der Krisen mathematisch zu bestimmen."

Diese Aufgabe war sehr schwierig zu lösen. Karl Marx stellte sie zurück, und in dem Werk „Das Kapital" verzichtete er darauf, die Erkenntnisse mathematisch darzustellen. Vor allem Gründe der Verständlichkeit waren dafür ausschlaggebend. Die internationale Arbeiterklasse mußte mit den Entwicklungsgesetzen des Kapitalismus vertraut gemacht werden, um sie für künftige Klassenschlachten zu rüsten. Deshalb wählte Marx eine allgemeinverständliche Ausdrucksform. Er war aber davon überzeugt, daß in späterer Zeit auch die ökonomischen Gesetze mathematisch ausgedrückt werden, und er schuf die Grundlagen für das heutige enge Bündnis zwischen Mathematik und Ökonomie.

Lawine neuer Erkenntnisse

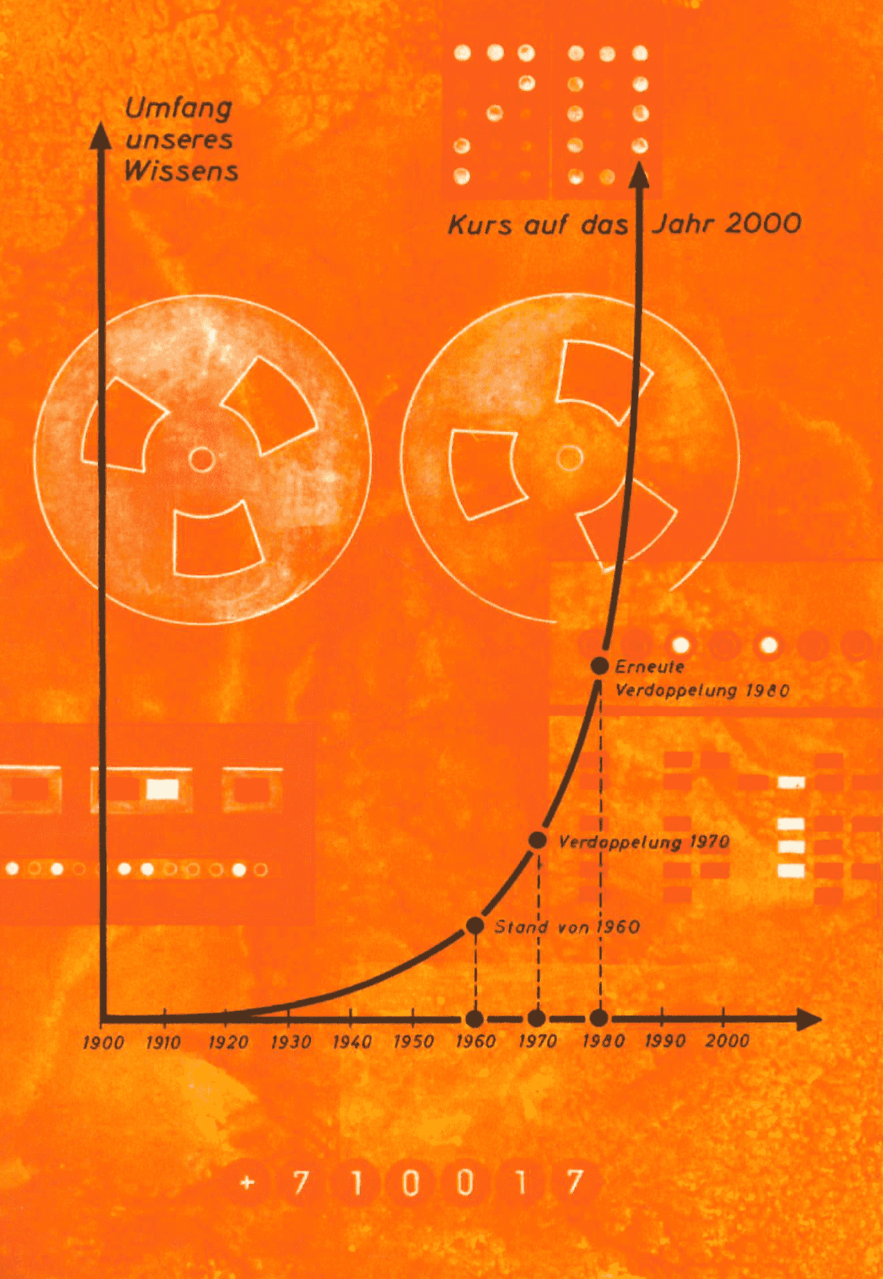
Das von Karl Marx vorausgesagte Eindringen der Mathematik in alle Wissenschaften hängt sehr eng mit dem enormen Tempo der wissenschaftlichen Entwicklung zusammen. Noch zu keiner Zeit machte die Wissenschaft so große und schnelle Fortschritte wie heute. Täglich werden in aller Welt neue Erkenntnisse gewonnen und Tausende von Erfindungen gemeldet. Die wissenschaftlichen Kenntnisse der gesamten Menschheit verdoppeln sich heute in acht bis zehn Jahren. In manchen Bereichen, beispielsweise in der Raumfahrt, beträgt diese Zeit sogar nur fünf Jahre. Auf dem Gebiet der Physik war die Menge der

Erkenntnisse 1970 doppelt so groß wie im Jahre 1960. Vor wenigen Jahrzehnten noch dauerte es dreißig Jahre, bis sich das Wissen verdoppelte. Natürlich beziehen sich solche Zahlen nicht auf einen einzelnen Menschen, sondern auf die Gesamtheit der Wissenschaftler.
Wie wird das Tempo gemessen? Was haben wir in den nächsten Jahrzehnten zu erwarten? Welche Rolle spielt hierbei die Mathematik?
Neue wissenschaftliche Erkenntnisse werden vor allem in Zeitschriften, Büchern und Patentschriften dargelegt. Die erste wissenschaftliche Zeitschrift erschien im Jahre 1665. Seitdem wuchs die Anzahl der in aller Welt gedruckten Heftserien enorm an. Diese Entwicklung verlief folgendermaßen:

Jahr	Anzahl der verschiedenen wissenschaftlichen Zeitschriften in aller Welt
1665	1
1750	10
1800	100
1850	1000
1900	10000
1960	100000

Im Jahre 1960 berichteten also einhunderttausend verschiedene Zeitschriften über wissenschaftliche Fortschritte. Dazu druckten sie rund vier Millionen verschiedene Aufsätze. Diese Zahlen stiegen weiter an. Für 1970 sind sie noch nicht genau ermittelt. Wird dieses Tempo bei der Gründung wissenschaftlicher Zeitschriften beibehalten,

In vielen Wissenschaften verdoppeln sich die Erkenntnisse alle zehn Jahre. Die Mathematisierung beschleunigt dieses Tempo.


Umfang
unseres
Wissens
Kurs auf das Jahr 2000
Erneute
Verdoppelung 1980
Verdoppelung 1970
Stand von 1960
1900
1910
1920
1930
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000
+ 7 1 0 0 1 7

so existieren im Jahre 2000 in allen Ländern ungefähr eine Million verschiedener Heftserien, die monatlich oder sogar wöchentlich erscheinen und über neue Entdeckungen berichten.
Ist ein solcher Zustand erstrebenswert? Sicherlich nicht. Kein Wissenschaftler kann auch nur jene Aufsätze sich besorgen oder gar lesen, die sein Arbeitsgebiet betreffen. Schon heute müßte ein Gelehrter, der nur auf einem sehr eng begrenzten Spezialgebiet forscht, jeden Tag mehr als einhundert Seiten lesen, wenn er auf dem laufenden bleiben wollte. Dadurch würde er erfahren, was seine Kollegen in anderen Instituten oder anderen Ländern Neues entdeckten. Aber schon mit dem Lesen dieser einhundert Seiten wäre der Tag eines Forschers ausgefüllt, und Zeit, selbst etwas Neues zu finden, bliebe nicht mehr.
Der englische Wissenschaftler Professor John D. Bernal, der jahrelang als Präsident des Weltfriedensrates wirkte, schrieb über diese Situation: „Auf vielen Gebieten ist es schon heute leichter, neue Tatsachen zu finden oder neue Theorien zu entwickeln, als festzustellen, ob sie vielleicht schon entdeckt beziehungsweise aufgestellt worden sind."

Ausweg durch Computer

Stellen wir uns folgendes vor: Die Kumpel in einem unserer Braunkohlentagebaue stoßen plötzlich auf ein Flöz, das mit den üblichen Baggern nicht abgebaut werden kann. Ein Forschungsinstitut erhält den Auftrag, einen Bagger zu verändern, um damit auch von dem neuen Flöz Braunkohle zu fördern. Die Wissenschaftler nehmen sich zunächst Bücher und Zeitschriften vor, die in ihrem Institut vorhanden sind. Doch nirgends finden sie einen Hinweis, der die Lösung der ihnen gestellten Aufgabe betrifft. So beginnen sie mit der Arbeit. Sie führen Messungen im Braunkohlentagebau durch, berechnen die not-

wendigen Veränderungen der Förderanlage, konstruieren neue Teile, lassen diese in einem Maschinenbaubetrieb anfertigen und überprüfen ihre Verwendbarkeit. Nach einigen Wochen ist der Bagger umgebaut, und von dem Flöz rollen die ersten Waggons in die Brikettfabrik.
Wenige Tage später besucht eine bulgarische Delegation das Institut. Die Wissenschaftler unterhalten sich über ihre Aufgaben und über die Arbeit in der letzten Zeit. Es stellt sich heraus, daß die bulgarischen Kollegen ein halbes Jahr zuvor die gleiche Aufgabe gestellt bekamen wie die Wissenschaftler aus der DDR. „Im nächsten Monat erscheint bei uns eine neue Fachzeitschrift", sagte der Leiter der bulgarischen Delegation, „die über unsere Arbeit berichtet."
Die gleiche Sache wurde also zweimal erfunden.
Auf einem internationalen Kongreß der Zahnärzte berichteten japanische Forscher über eine neue Bohrmaschine, die den Patienten bei der Behandlung nur noch geringe Schmerzen bereitet. Nach diesem Referat bat ein polnischer Wissenschaftler um das Wort und legte dar, daß ähnliche Anlagen in seinem Land schon seit zwei Jahren erprobt werden. Die Japaner verglichen beide Geräte und stellten fest, daß die polnische Konstruktion besser ist: Hier erleiden die Patienten überhaupt keine Schmerzen mehr.
Diese Beispiele sind erfunden. Ähnliche Situationen kommen aber in der Wirklichkeit sehr oft vor.
So berichteten beispielsweise im Jahre 1961 amerikanische Wissenschaftler über einen von ihnen entdeckten neuen Strahlungsgürtel der Erde. Kurz danach erfuhren sie, daß der gleiche Strahlungsgürtel schon von sowjetischen Forschern gefunden worden war.
Wie lassen sich solche Doppelentdeckungen oder Mehrfacherfindungen verhindern? Die Berichte in Zeitschriften

und die Diskussionen auf wissenschaftlichen Kongressen reichen offenbar nicht aus, um schnell und umfassend über alle neuen wissenschaftlichen Erkenntnisse zu informieren.
Den Ausweg zeigt die Mathematik, und zwar in Gestalt der großen elektronischen Rechenautomaten. Sie nehmen sich in den nächsten Jahrzehnten dieser Aufgabe an. Nach einem sinnvoll durchdachten System werden in den Datenverarbeitungsanlagen die wichtigsten Angaben über neue Entdeckungen und Erfindungen gespeichert. Wird nunmehr einem Forscherkollektiv eine bestimmte Aufgabe gestellt, so befragen die Forscher zuerst den Computer, der ihnen angibt, welche Tatsachen zu dem Thema schon bekannt sind. Das langwierige Suchen in Zeitschriften und Büchern entfällt.
In der Sowjetunion bereiten Mathematiker und andere Wissenschaftler Rechenautomaten für diesen Einsatz vor. Auf drei Gebieten – Raumfahrt, Chemie und Medizin – werden schon ab 1975 die Forscher durch Computer unterstützt. Nach und nach kommen weitere Bereiche hinzu.

Neunzig Prozent aller Wissenschaftler leben heute

Interessante Hinweise für die Geschwindigkeit der wissenschaftlichen Entwicklung ergeben sich auch durch die Anzahl der in aller Welt tätigen Forscher. Kurz vor der Jahrhundertwende lebten und arbeiteten ungefähr fünfzigtausend Wissenschaftler. Heute ist die Zahl bis weit über zweieinhalb Millionen gestiegen. Neunzig Prozent aller Wissenschaftler, die jemals auf der Erde lebten, gehören unserer Zeit an.
Außer den Forschern sind in den Instituten noch zahlreiche andere Menschen tätig, deren Arbeit ebenfalls sehr wichtig ist. Laboranten führen Experimente aus. Mechani-

ker bauen neue Apparate. In landwirtschaftlichen Stationen betreuen Pfleger und Wärter die Versuchstiere. Die Büchereien werden von Bibliothekaren verwaltet. Für die Bedienung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen ist ein umfangreiches Personal erforderlich: zum Aufstellen der Rechenprogramme, für das Überwachen der komplizierten Technik und für viele andere Aufgaben. Im Bereich der Wissenschaft arbeiten insgesamt etwa zehn Millionen Menschen.

Die Anzahl der Ingenieure verdoppelt sich alle fünf Jahre. Vor zehn Jahren gab es nur ein Viertel der heute arbeitenden Ingenieure. Wir erinnern uns, daß sich kein technisches Problem ohne Mathematik lösen läßt. Die rasche Zunahme der Ingenieure zeigt uns somit auch, in welchem Maße sich die Arbeit mit mathematischen Mitteln ausbreitet.

Besonders eindrucksvoll entwickelte sich die Wissenschaft in der Sowjetunion. Aus dem rückständigen Rußland entstand in der Zeit seit der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution die führende Wissenschaftsmacht der Welt. Alle sieben Jahre verdoppelte sich die Anzahl der Sowjetwissenschaftler. 1966 ergab eine Berechnung, daß schon damals jeder vierte Forscher der Welt in der UdSSR arbeitete.

Hunderte von künstlichen Erdsatelliten, leistungsstarke Atomkraftwerke, modernste Industriebetriebe, superschnelle Rechenautomaten und andere Großtaten künden von der Leistungsfähigkeit der sowjetischen Wissenschaft. Auf zahlreichen Gebieten der Mathematik wird das Weltniveau von sowjetischen Gelehrten bestimmt. Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow, Leonid Witalewitsch Kantorowitsch und Boris Wladimirowitsch Gnedenko sind heute die berühmtesten von ihnen. In allen modernen Lehrbüchern der Mathematik tauchen ihre Namen auf.

Das Ohr der Meduse

Vor den Wissenschaftlern unserer Tage stehen gewaltige Aufgaben. Die Hälfte aller wissenschaftlichen Erkenntnisse wurde in den letzten fünfzehn Jahren gewonnen. Die heutige Forschergeneration muß in den kommenden fünfzehn Jahren genausoviel leisten wie alle Wissenschaftler vor ihr. Als besonders wichtig erweist sich dabei das ständige Weiterlernen. Berechnungen ergaben, daß heute das einmal erworbene Wissen mit einer Geschwindigkeit von zehn bis zwanzig Prozent im Jahr veraltet. Wer nichts für die eigene Weiterbildung tut, hat spätestens nach fünf bis zehn Jahren den Anschluß verloren. Diese Gefahr besteht vor allem deshalb, weil heute viele Aufgaben nicht mehr durch Verbesserungen von bekannten, sondern durch neue Methoden gelöst werden. Und gerade dabei spielt die Mathematik häufig eine entscheidende Rolle. Eindrucksvolle Beispiele dafür, wie wichtig es ist, sich ständig weiterzubilden, um über neue wissenschaftliche Entwicklungen unterrichtet zu sein, liefert die Bionik. Das ist eine neue Wissenschaft, die erst vor ungefähr zehn Jahren entstand. Sie untersucht Lebensvorgänge und einzelne Organe von Tieren, um dadurch Anregungen für neue technische Geräte zu erhalten. Die Mathematik stellt dabei gewissermaßen ein Bindeglied zwischen Biologie und Technik dar.

Am Anfang einer Forschungsaufgabe der Bionik stand beispielsweise folgende Frage: Auf welche Weise finden Mücken eigentlich immer den geeigneten Platz für einen Stich? Die Wissenschaftler gingen dieser Sache nach und stellten fest, daß diese Tiere ein Organ besitzen, mit dem sie kleinste Temperaturunterschiede registrieren können. Schon auf Differenzen von nur einem tausendstel Grad spricht dieses „Mücken-Präzisionsthermometer" an, und damit finden jene lästigen Stecher ihre Opfer. Jetzt kam es darauf an, dieses Organ gründlich zu erforschen. Die gewonnenen Erkenntnisse wurden durch mathematische Formeln ausgedrückt. Nur so war es möglich, für eine technische Nachbildung exakte Grundlagen zu schaffen. Techniker berechneten und konstruierten schließlich ein Gerät, das nach dem gleichen Prinzip wie das Organ der Mücke arbeitete. Es reagierte ebenso empfindlich bei geringsten Temperaturschwankungen, arbeitete zuverlässig und verbrauchte nur sehr wenig Energie. Noch ein anderes Beispiel. Einige sowjetische Wissenschaftler erhielten den Auftrag zur Entwicklung eines Gerätes, das an Meeresküsten das Aufkommen von Stürmen oder Orkanen anzeigt.

Den Wissenschaftlern war das sonderbare Verhalten der Medusen bekannt. Diese Meeresquallen verlassen etwa fünfzehn Stunden vor einem Sturm die Nähe der Küste und bewegen sich ins offene Meer hinaus. So entgehen sie stets der Gefahr, durch die aufgepeitschten Meereswogen an den Strand gespült zu werden. In irgendeiner Weise stellen die Medusen also fest, wann ein Sturm bevorsteht. Die sowjetischen Forscher fanden bei den Tieren ein Organ, mit dem diese Infrarotstrahlen registrieren. Solche Strahlen entstehen beim Zusammentreffen von Sturmböen mit ruhiger Luft. Sie breiten sich mit höchster Geschwindigkeit, nämlich mit Lichtgeschwindigkeit aus und künden Stunden vorher einen Sturm an.

Nach gründlichen Untersuchungen und Berechnungen konstruierten die sowjetischen Wissenschaftler ein technisches „Ohr der Meduse" und erfüllten damit ihren Auftrag.

Zahlreiche weitere bionische Geräte wurden entwickelt. Bei einem neuartigen Kreiselkompaß stand ein Organ der Stubenfliege Pate. Die Bionik untersucht auch Eigenschaften des menschlichen Gehirns, um dadurch Erkennt-

nisse zur Verbesserung der großen Rechenautomaten zu gewinnen.
Wir stellten fest, daß heute die Wissenschaftler ständig lernen müssen, um nach neuesten Grundsätzen arbeiten zu können. Einer solchen modernen Richtung, der Bionik, gingen wir kurz nach. Dabei stießen wir wieder auf die Tatsache, daß die Mathematik überall eine wichtige Rolle spielt.

Formeln vom menschlichen Körper

Die wissenschaftliche Entwicklung verläuft heute in zwei Hauptrichtungen: in die Breite und in die Tiefe.
Die Breite zeigt sich in der Zunahme der verschiedenen Disziplinen. Noch um die Jahrhundertwende gab es kaum mehr als zehn wissenschaftliche Fachrichtungen. Heute existieren nahezu zweitausend verschiedene Wissenschaften.
Sehr häufig entstehen neue Gebiete dadurch, daß Randgebiete vorhandener Fachbereiche miteinander verschmelzen. In den letzten Jahrzehnten entwickelte sich beispielsweise die Biophysik als ein Bündnis von Teilen der Physik, Technik, Mathematik, Biologie, Medizin und einiger weiterer Wissenschaften. Sie untersucht unter anderem Vorgänge im menschlichen Körper unter physikalischen Gesichtspunkten. So lassen sich wertvolle Hinweise über den Blutkreislauf durch Anwendung der physikalischen Strömungslehre gewinnen. Daß solche Erkenntnisse mathematisch dargestellt werden, wie in der Physik üblich, ist selbstverständlich.
Die Biophysik erforscht auch die Reaktionen des Organismus auf physikalische Einwirkungen. Das Verhalten des menschlichen Körpers bei Bestrahlung oder unter dem Einfluß von Kälte oder Wärme wird erkundet.
Noch viele andere Aufgaben sind dieser neuen Wissen-

schaft gestellt worden, und immer bestand das Ziel im Finden quantitativer Gesetze, das heißt mathematisch begründeter Aussagen.
Als weitere Beispiele neuer Wissenschaften, die aus Randgebieten verschiedener Disziplinen entstanden, nennen wir noch die Biochemie, die Astrobiologie, die Geochemie, die physikalische Chemie und die Agrophysik.

Mathematische Genauigkeit in allen Bereichen
Dieser Weg der Wissenschaften in die Breite ist eng verbunden mit dem Vordringen in die Tiefe. Die Forscher erkunden die Gesetzmäßigkeiten in Natur und Gesellschaft in immer vollkommenerer Weise, präziser und gründlicher, als es je in früheren Zeiten möglich war. Die Forschungsmethoden und die Theorien werden exakter. Deshalb müssen heute fast alle Wissenschaften das Rüstzeug benutzen, das ihnen die Mathematik liefert.
Um neue Theorien zu begründen, wird zuerst immer das Wesentliche vom Unwesentlichen getrennt und danach das Wesentliche sehr tiefgründig erforscht. Beim gegenwärtigen Tempo der Entwicklung der Wissenschaft ist die mathematische Darstellung ein unerläßliches Mittel, um sich auf das Wesentliche zu konzentrieren. Keine andere Methode ist geeignet, Vorgänge in Natur und Gesellschaft so präzis und gleichzeitig mit so wenig Aufwand darzustellen, wie die Mathematik.
Das wichtigste Ziel der Wissenschaft ist das Anwenden ihrer Erkenntnisse in der Praxis unseres Lebens. Alle Beispiele, die wir bisher anführten, beweisen das. Noch nie vorher war das Bündnis zwischen Wissenschaft und Praxis so eng wie heute.
Elektronik! Woran denkt ihr bei diesem Wort? An ein modernes Gebiet der Wissenschaft? Oder an einen wichtigen Zweig unserer Volkswirtschaft, an die Produktion

von Fernsehgeräten und Datenverarbeitungsanlagen? Beides ist richtig. Wissenschaft und Produktion lassen sich hier nicht mehr genau abgrenzen. So ist die Situation auf vielen Gebieten. Die Wissenschaft wurde zur Grundlage der modernen Industrie, zur unmittelbaren Produktivkraft. Viele in der Produktion auftretende Probleme regen zu neuen Forschungen an und bringen so die Wissenschaft weiter vorwärts. In keiner Phase dieser gegenseitigen Unterstützung kommt man heute ohne Mathematik aus.
Den Wissenschaftler früherer Epochen stellte man sich als einen einsamen Gelehrten vor, der in seiner Studierstube saß oder in einem Laboratorium für sich experimentierte. Heute bewältigen große Kollektive von Forschern gemeinsam die gewaltigen Aufgaben der Wissenschaft. Sie arbeiten nach einem exakt abgestimmten Plan, in dem auch die Zeiten für die einzelnen Etappen einer Untersuchung genau vorgegeben sind. Die Forschungsarbeit wird mit modernen mathematischen Methoden präzise geplant. Eine Methode lernen wir im nächsten Kapitel kennen.
Die Mathematisierung anderer Wissenschaften begann mit der Physik. Vor einigen Jahrzehnten begann dieser Prozeß auch im Bereich der Ökonomie. Das gilt sowohl für das Eindringen der Mathematik in die ökonomischen Wissenschaften als auch für die exakte Planung und Leitung unserer Wirtschaft mit neuen mathematischen Verfahren.
Ein kurzer Blick auf die Wirtschaft der DDR zeigt, wie wichtig exakte Planungsmethoden geworden sind. Unsere Industrie produzierte 1970 beinahe fünfmal soviel wie im Jahre 1950. Die Investitionen zum Bau neuer Fabriken und anderer Einrichtungen stiegen auf das Zwölffache an.
Das sind Ergebnisse der angestrengten Arbeit unserer

Werktätigen. Damit wir alle einen bestmöglichen Nutzen haben, müssen die Investitionen genau geplant werden. In der Industrie kommt es darauf an, die Produktion so zu organisieren, daß die Kosten gering sind. Solche Aufgaben existieren in allen Bereichen unserer Wirtschaft. Sie lassen sich nur mit der Mathematik lösen.

Die Mathematik spielt, wie wir gesehen haben, in allen Bereichen unseres Lebens eine entscheidende Rolle. Deshalb nimmt sie im Lehrplan der Schulen einen so hervorragenden Platz ein.
Der große sowjetische Staatsmann Michail Iwanowitsch Kalinin (1875–1946), der sich bedeutende Verdienste um die Erziehung der Jugend erwarb, gab vor drei Jahrzehnten Moskauer Schülern den Rat, der noch heute für uns aktuell ist: „Welche Wissenschaft ihr auch studiert, in welche Hochschule ihr auch eintretet, auf welchem Gebiet ihr auch arbeitet, überall braucht man mathematische Kenntnisse, wenn ihr auch nur die geringste Spur eures Wirkens hinterlassen wollt."

Der kritische Weg

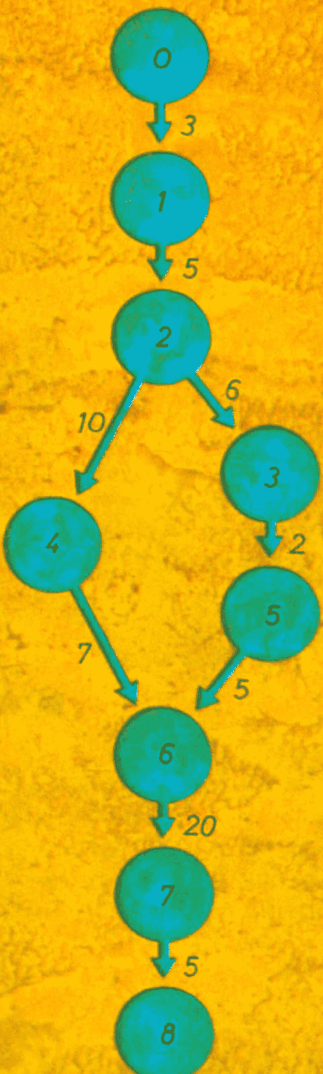
Mathematischer Plan für das Frühstück
Zu den jüngsten mathematischen Methoden gehört die Netzplantechnik. Sie ist noch keine fünfzehn Jahre alt. Trotzdem eroberte sie sich schon große Gebiete für ihre Anwendung. Im Bauwesen, in Industrie und Landwirtschaft, bei der Planung der Forschung, ja selbst im Theaterwesen und bei der Arbeit der Kriminalpolizei wurden mit ihrer Hilfe schon beachtliche Erfolge erzielt. Die Netzplantechnik, die auch „Methode des kritischen Weges" genannt wird, ist so vielseitig, daß wir damit sogar unser

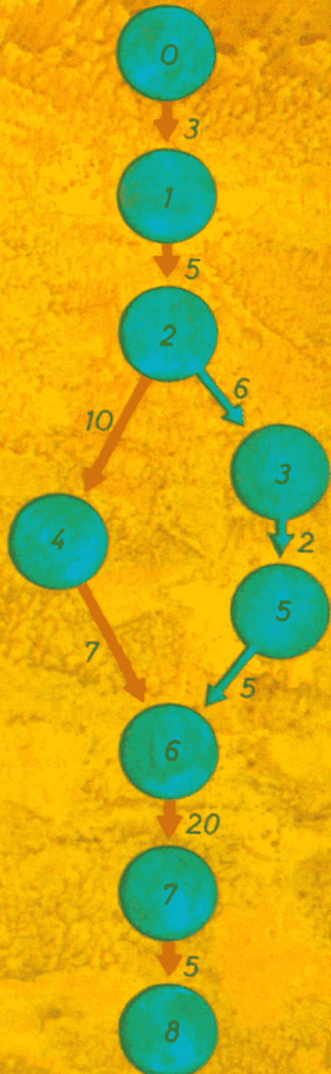
Aufstehen, das Frühstück, kurz, alle morgendlichen Vorbereitungen planen können, die es uns ermöglichen, ordentlich und pünktlich in der Schule zu erscheinen.
Wir nehmen einmal an, daß wir frühmorgens alle Arbeiten selbst ausführen. Den Morgentee brühen wir selbst, und wir lassen uns auch beim Vorbereiten des Frühstücks nicht helfen. Verschiedene Tätigkeiten können wir nur hintereinander ausführen: das Waschen erst nach dem Aufstehen und das Frühstücken erst nach dem Waschen. Wir legen Wert auf Hygiene und setzen uns selbstverständlich nicht ungewaschen oder gar im Schlafanzug an den Frühstückstisch. Andere Tätigkeiten lassen sich parallel abwickeln. Das Teewasser kann sich beispielsweise erwärmen, während wir die Morgentoilette erledigen.
Diese Zusammenhänge stellen wir übersichtlich in einem Netzplan dar und verwenden dazu jene Begriffe, die die Mathematiker für diese Methode gebrauchen.
Unser Netzplan besteht aus Pfeilen und Kreisen. Die Pfeile symbolisieren die einzelnen Tätigkeiten, die wir ausführen, also Waschen, Zähneputzen, Teewasser zum Kochen bringen und ähnliches. In der Netzplantechnik wird dafür außer dem Begriff „Tätigkeit" auch das Wort „Vorgang" benutzt. Die Zahlen an den Pfeilen geben die erforderlichen Zeiten in Minuten an.
Die Kreise stellen die Übergänge von einer Tätigkeit zu einer anderen dar. Der Fachausdruck dafür heißt „Ereignis". Zur besseren Übersicht numerieren wir sie vom Anfang bis zum Abschluß durch. Das Startereignis, in unserem Beispiel das Erwachen, trägt die Zahl 0. Die größte von allen Zahlen in den Kreisen ist hier die 8. Sie symbolisiert das Zielereignis, die Beendigung aller vor Antritt des Schulweges zu erledigenden Tätigkeiten. Die einzelnen Tätigkeiten stellen wir in einer Tabelle zusammen.

Tätigkeit	Erläuterung	Zeitdauer in Minuten
(0–1)	Erwachen, zweimal gähnen, aufstehen	3
(1–2)	Morgengymnastik	5
(2–3)	Waschen	6
(2–4)	Teewasser zum Kochen bringen, Aufbrühen	10
(3–5)	Zähne putzen	2
(4–6)	Tee ziehen lassen	7
(5–6)	Ankleiden	5
(6–7)	Frühstücken und Schnitten für die Schule vorbereiten	20
(7–8)	Schulmappe kontrollieren	5

Aus dem Netzplan ersehen wir, daß am Ereignis 2 (Beendigung der Morgengymnastik) zwei Vorgänge starten. Während das Teewasser zum Kochen gebracht wird, beginnen wir gleichzeitig mit dem Waschen, dem sich das Putzen der Zähne anschließt.
Am Ereignis 6 müssen zwei Vorgänge beendet sein: Wir haben uns angezogen, und die Teezubereitung ist abgeschlossen. Erst dann beginnt mit dem Frühstücken die nächste Tätigkeit.
Welche Zeit benötigen wir vom Erwachen bis zum Antritt des Schulweges?
Vom Startereignis 0 bis zum Zielereignis 8 führen zwei Wege.

Links: Netzplan für die Vorbereitung des Schulweges. – Aus Platzgründen wurden hier und im folgenden – entgegen der in der Fachliteratur üblichen Darstellungsweise – die Netzwerke von oben nach unten verlaufend dargestellt.
Rechts: Netzplan mit kritischem Weg (rote Pfeile).


0
3
1
5
2
6
10
3
4
2
5
7
5
6
20
7
5
8


0
3
1
5
2
6
10
3
4
2
5
7
5
6
20
7
5
8

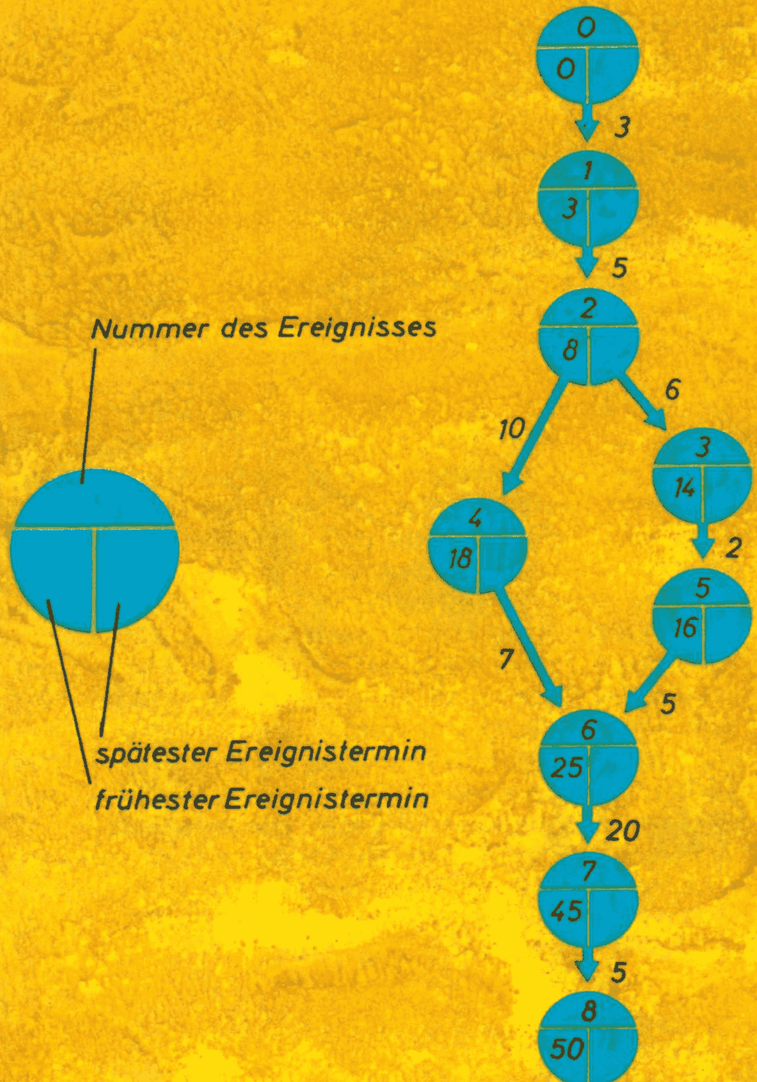
Erster Weg: 0 — 1 — 2 — 3 — 5 — 6 — 7 — 8
Zeitdauer: 3 + 5 + 6 + 2 + 5 + 20 + 5 = 46 Minuten.
Zweiter Weg: 0 — 1 — 2 — 4 — 6 — 7 — 8
Zeitdauer: 3 + 5 + 10 + 7 + 20 + 5 = 50 Minuten.

Der zweite Weg erfordert eine längere Zeit. Da alle auf ihm liegenden Tätigkeiten nur nacheinander ausgeführt werden, geben diese 50 Minuten die Zeit an, die wir vom Erwachen bis zum Verlassen der Wohnung beanspruchen.
Unser bisheriger Netzplan stellt nur ein sehr einfaches Beispiel dar. Wir lernen auf den späteren Seiten noch kompliziertere Netzpläne kennen. Dort existieren zwischen Startereignis und Zielereignis wesentlich mehr als nur zwei Wege. Einer von diesen hat immer eine längste zeitliche Ausdehnung. Er heißt in der Sprache der Netzplantechnik „kritischer Weg". Wird nämlich ein Vorgang auf dem kritischen Weg nicht in der vorgesehenen Zeit beendet, so gerät die geplante Gesamtdauer in Gefahr.
Für unseren Netzplan bedeutet das beispielsweise: Dehnen wir unsere Morgengymnastik über die 5 Minuten aus oder kocht nach 10 Minuten das Teewasser noch nicht, so benötigen wir mehr als 50 Minuten, bis wir den Schulweg antreten können.

Was sind Pufferzeiten?

Bei einem Vorhaben, das nach der Netzplantechnik geplant wird, müssen alle Tätigkeiten des kritischen Weges in der vorgesehenen Zeit ausgeführt werden. Für Vorgänge auf nichtkritischen Wegen gibt es hingegen sogar zeitliche Reserven. In der Fachsprache nennt man sie Pufferzeiten.
In unserem Beispiel ist lediglich der Teilabschnitt vom

Links: Unterteilung des Ereigniskreises.
Rechts: Netzplan mit frühesten Ereignisterminen.


Nummer des Ereignisses
spätester Ereignistermin
frühester Ereignistermin
0
0
3
1
3
5
2
8
10
6
3
14
4
18
2
5
16
7
5
6
25
20
7
45
5
8
50

Ereignis 2 über die Ereignisse 3 und 5 zum Ereignis 6 nicht kritisch. Die dafür erforderliche Zeit beträgt 6 + 2 + 5 = 13 Minuten. Parallel dazu verläuft eine kritische Wegstrecke mit der Zeit von 10 + 7 = 17 Minuten. Für den nichtkritischen Abschnitt ergibt sich somit eine Pufferzeit von insgesamt 17 — 13 = 4 Minuten. Die Tätigkeiten Waschen, Zähneputzen und Ankleiden können wir um 4 Minuten ausdehnen. Es ist auch möglich, vor oder zwischen diesen Vorgängen eine Pause von 4 Minuten einzulegen. Wir benutzen sie, um vielleicht sogar noch ganz rasch einige Bücher, die umherliegen, in das Regal zu stellen.

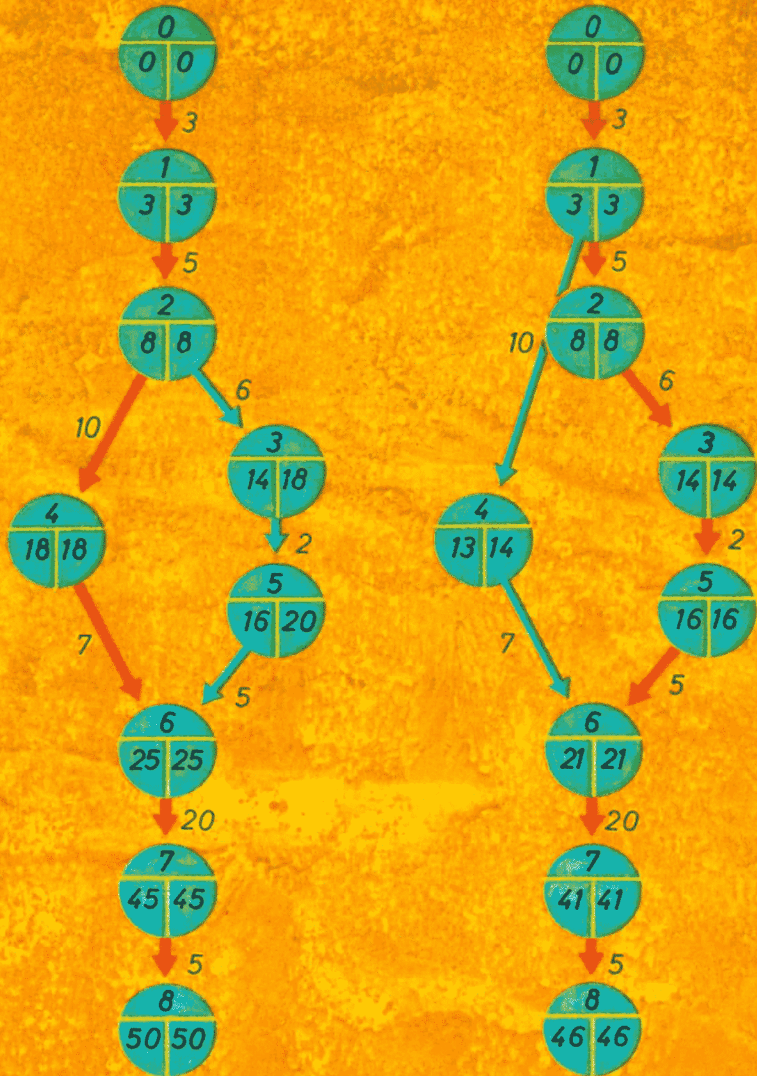
Größere Netzpläne lassen sich nicht so einfach überschauen wie unser Beispiel. Der kritische Weg und die Pufferzeiten für nichtkritische Vorgänge werden deshalb nach einem systematischen Verfahren berechnet. Dazu führen wir für die Ereignisse noch zwei Begriffe ein, den frühesten und den spätesten Ereignistermin.

Um beide Angaben im Netzplan festzuhalten, unterteilen wir die Ereigniskreise in drei Sektoren (s. S. 45).

Der früheste Termin für jedes Ereignis ergibt sich durch Addition der Zeiten jener Vorgänge, die vor diesem Ereignis liegen. Er kann erst dann eintreten, wenn alle vorhergehenden Tätigkeiten abgeschlossen sind. Führen mehrere Wege zu einem Ereignis, so bestimmt die Dauer des längsten Weges den frühesten Ereignistermin.

Zur Berechnung setzen wir den frühesten Termin für das Startereignis mit 0 an. Dann addieren wir dazu schrittweise die Zeitwerte der Vorgänge, für Ereignis 1 0 + 3 = 3, für Ereignis 2 3 + 5 = 8 und so weiter.

Links: Netzplan mit frühesten und spätesten Ereignisterminen und mit kritischem Weg (rote Pfeile).
Rechts: Veränderter Netzplan mit neuem kritischem Weg.


0
0 0
3
1
3 3
5
2
8 8
10
6
3
14 18
2
4
18 18
5
16 20
7
5
6
25 25
20
7
45 45
5
8
50 50
0
0 0
3
1
3 3
5
2
8 8
10
6
3
14 14
2
4
13 14
5
16 16
7
5
6
21 21
20
7
41 41
5
8
46 46

Kommen an einem Ereignis mehrere Pfeile an, so stellt von den verschiedenen Möglichkeiten stets die größte Summe den gesuchten frühesten Ereignistermin dar. In unserem Beispiel tritt dieser Fall nur einmal ein. Am Ereignis 6 laufen die Vorgänge (4–6) und (5–6) zusammen.

Vom Ereignis 4 ausgehend ergibt sich 18 + 7 = 25.

Bei Ausgang vom Ereignis 5 berechnet man 16 + 5 = 21.

Der früheste Termin für Ereignis 6 beträgt also 25 Minuten.

Bei Fortsetzung der Additionen erhalten wir für Ereignis 7 25 + 20 = 45 und schließlich für das Zielereignis 8 45 + 5 = 50 Minuten (s. S. 47, links).

Da wir unser Vorhaben tatsächlich in 50 Minuten abschließen wollen, setzten wir den spätesten Termin für das Zielereignis 8 gleichfalls mit 50 Minuten an. Die weitere Berechnung der spätesten Ereignistermine verläuft dann rückwärts. Schrittweise subtrahieren wir die Zeitwerte der Vorgänge. Für Ereignis 7 ergibt sich 50 – 5 = 45, für Ereignis 6 45 – 20 = 25, für Ereignis 5 25 – 5 = 20, für Ereignis 4 25 – 7 = 18 und so weiter.

Gehen von einem Ereignis, für das wir den spätesten Termin berechnen, mehrere Pfeile aus, so tragen wir von den verschiedenen Möglichkeiten die kleinste Differenz ein. Das trifft hier für Ereignis 2 zu.

Von Ereignis 4 kommend, ergibt sich 18 – 10 = 8.

Beim Rückwärtslaufen von Ereignis 3 aus wird 18 – 6 = 12 gerechnet.

Die kleinere der beiden Differenzen, die 8, ist der späteste Termin für Ereignis 2.

Für das Startereignis 0 muß sich natürlich auch für den spätesten Termin der Wert 0 ergeben.

Was sagen die so berechneten Termine aus?

Der früheste Ereignistermin gibt an, wann von diesem Ereignis ausgehende Vorgänge frühestens starten *können.*

Der späteste Ereignistermin legt fest, wann diese Tätigkeiten spätestens starten *müssen*.
Sind frühester und spätester Ereignistermin gleich, dann liegt das betreffende Ereignis auf dem kritischen Weg. Damit fanden wir das Verfahren zum Berechnen des kritischen Weges.
Bei unterschiedlichen Werten für frühesten und spätesten Termin gibt ihre Differenz die Pufferzeit an. Sie beträgt für Ereignis 3 18 – 14 = 4 Minuten und für Ereignis 5 20 – 16 = 4 Minuten. Zur zeitlichen Ausdehnung eines Vorganges oder für das Einlegen einer Pause darf sie aber nur einmal in Anspruch genommen werden. Diese 4 Minuten beziehen sich, wie wir schon feststellten, auf den gesamten Teilabschnitt zwischen den Ereignissen 2, 3, 5 und 6.

Auf der Suche nach 5 Minuten

Planen wir ein Vorhaben mit der Methode des kritischen Weges, so können wir einen Abschlußtermin früher als vorgesehen erreichen. An einem bestimmten Tag müssen wir auf dem Schulweg noch etwas erledigen und deshalb das Haus 5 Minuten früher als sonst verlassen. Statt 50 stehen uns nur 45 Minuten zur Verfügung, falls wir nicht einfach 5 Minuten früher aufstehen.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Zeit auf 45 Minuten zu verkürzen. Betrachten wir den kritischen Weg, so erkennen wir rasch solche Vorgänge, bei denen Zeit eingespart werden kann. Statt 20 Minuten veranschlagen wir für das Frühstück nur 17 Minuten, und die Schulmappe kontrollieren wir nicht 5, sondern nur 3 Minuten lang. So verkürzen sich die Tätigkeiten (6–7) und (7–8) um die gesuchten 5 Minuten. Bei den anderen kritischen Vorgängen wollen wir nichts verändern. Die Morgengymnastik ist mit 5 Minuten schon knapp bemessen, und

das Teewasser läßt sich nicht zwingen, früher zu kochen. Wir sehen leicht ein, daß es nur sinnvoll ist, Tätigkeiten auf dem kritischen Weg zu verkürzen.
Eine zweite Möglichkeit, Zeit zu sparen, besteht in einer anderen Organisation der Vorgänge. Da ein Netzplan stets eine gute Übersicht über alle Teilarbeiten liefert, erkennt man auch jene Stellen, die verändert werden können. Setzen wir das Teewasser nicht nach, sondern schon vor der Morgengymnastik auf den Gasherd, so ergibt sich ein neuer Netzplan. Aus dem Vorgang (2–4) wird die Tätigkeit (1–4). Zur Übung berechnen wir in dem veränderten Netzplan für alle Ereignisse nochmals den frühesten und den spätesten Termin (s. S. 47, rechts).
Die Lage des kritischen Weges ändert sich. Seine Länge beträgt mit den ursprünglich vorgesehenen Zeiten jetzt nur noch 46 Minuten. Verkürzen wir nunmehr das Frühstück lediglich um eine Minute, so kommen wir zu den gewünschten 45 Minuten.
Die bisherigen Erkenntnisse fassen wir zusammen: Die Netzplantechnik ist ein Verfahren zur Planung von Vorhaben oder Projekten, die aus zahlreichen Teilprozessen bestehen. Diese Vorgänge oder Tätigkeiten verlaufen teils zeitlich parallel, teils hintereinander. Von allen Wegen zwischen Start und Zielereignis hat der kritische Weg die längste zeitliche Ausdehnung. Die auf ihm liegenden Vorgänge stellen die störanfälligen Teile des Projektes dar. Gibt es auf dem kritischen Weg Verzögerungen, so wird ein geplanter Endtermin überschritten.
Nichtkritische Vorgänge sind durch Pufferzeiten gekennzeichnet, die für zeitliche Ausdehnungen oder Pausen genutzt werden können. Die Gesamtzeit für ein Projekt kann durch Verkürzung der Vorgänge auf dem kritischen Weg oder durch Umstellungen im Netzplan verkleinert werden.

Kontrolle auf der Baustelle

Betrachten wir jetzt weitere Anwendungen der Methode des kritischen Weges.

In unserer Republik gibt es zahlreiche Großbaustellen. Neue Wohngebiete entstehen in vielen Städten. Innerhalb weniger Wochen des Jahres 1969 wuchs in Leipzig das neue Universitätshochhaus bis zur stattlichen Höhe von 134 Metern. Das Tempo der Bauarbeiten am Alexanderplatz in Berlin beeindruckte alle Besucher unserer Hauptstadt. Ähnliche Beispiele lassen sich aus vielen Städten nennen: Dresden, Halle, Karl-Marx-Stadt, Hoyerswerda, Rostock, Neubrandenburg, Magdeburg und Eisenhüttenstadt, um nur einige zu nennen. Überall entstanden neue und moderne Bauwerke, und vielerorts sind die Bauarbeiten in vollem Gange.

Sicherlich habt ihr schon einmal eine Großbaustelle betrachtet. Auf den ersten Blick entsteht der Eindruck eines wilden Durcheinanders. Die mächtigen Ausleger der Kräne heben und schwenken die vorgefertigten Bauelemente. Überall stehen Betonmischmaschinen, die sich krächzend drehen. An einigen Orten transportieren Spezialfahrzeuge industriell gefertigten Beton von außerhalb auf die Baustellen. Große Dumper sind zur gleichen Zeit für Straßenbauarbeiten zwischen den entstehenden Gebäuden eingesetzt. Während die Bagger für manche Häuser erst die Baugruben ausheben, arbeiten in benachbarten Bauten schon die Handwerker an der Innengestaltung. An anderen Stellen des Bauplatzes legen Gleisbauarbeiter neue Schienen für die Straßenbahn.

Hunderte oder sogar Tausende von Teilarbeiten sind erforderlich, bis das Projekt einer Großbaustelle abgeschlossen ist. Einen genauen Überblick zu den parallel ablaufenden oder hintereinander durchzuführenden Vorgängen kann nur die Netzplantechnik geben. Kein Bau-

leiter weiß ohne dieses Verfahren, wo die störanfälligen Stellen des Projektes liegen. Die Ermittlung des kritischen Weges gibt ihm darüber Auskunft. Er kontrolliert dann, ob diese kritischen Vorgänge in der vorgesehenen Zeit ablaufen, damit der Endtermin nicht in Gefahr gerät.
Oftmals muß ein Projekt vorfristig abgeschlossen werden. Früher, ohne Netzplantechnik, wurden dann alle Teilarbeiten etwas beschleunigt. Die Verkürzung nichtkritischer Tätigkeiten bringt aber keinerlei Gewinn. Nur eine schnellere Arbeit auf dem kritischen Weg hilft.
Deshalb gelangte die Netzplantechnik gerade im Bauwesen zu besonderer Bedeutung. Heute werden viele Bauvorhaben mit dieser Methode geplant und kontrolliert.
Ein Netzplan für eine Großbaustelle enthält viele hundert und manchmal sogar mehr als tausend Vorgänge. Zur Ermittlung des kritischen Weges werden elektronische Rechenautomaten eingesetzt. Obwohl als mathematische Operationen nur Addition und Subtraktion in Frage kommen, verliert man in sehr großen Netzplänen leicht die Übersicht bei den Berechnungen. Deshalb übernehmen Computer diese Aufgabe.
Am Beispiel eines kleineren Netzplanes für den Bau einer Fabrikhalle lernen wir, wie die Methode des kritischen Weges im Bauwesen angewandt wird. Zuerst stellt man alle Vorgänge übersichtlich in einer Tabelle zusammen, um danach den Netzplan zu konstruieren (s. S. 55, links).

Vorgang	Erläuterung	Zeitdauer in Wochen
(0–1)	Projektierung, vorbereitende Besprechungen	10
(1–2)	Ausschachtungen für die Baugrube	5
(1–4)	Straßenrohbau	5
(1–5)	Lieferfrist der Maschinen	8

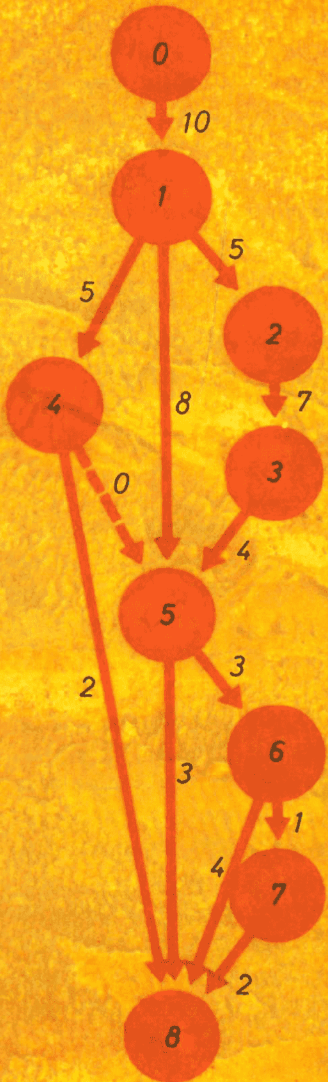
(2–3)	Bau der Fundamente und Mauern	7
(3–5)	Dacharbeiten	4
(4–5)	Scheinvorgang	0
(4–8)	Fertigstellung der Straße	2
(5–6)	Aufstellen der Maschinen	3
(5–8)	Außenputzarbeiten	3
(6–7)	Maschinenanschlüsse	1
(6–8)	Innenarbeiten	4
(7–8)	Probebetrieb	2

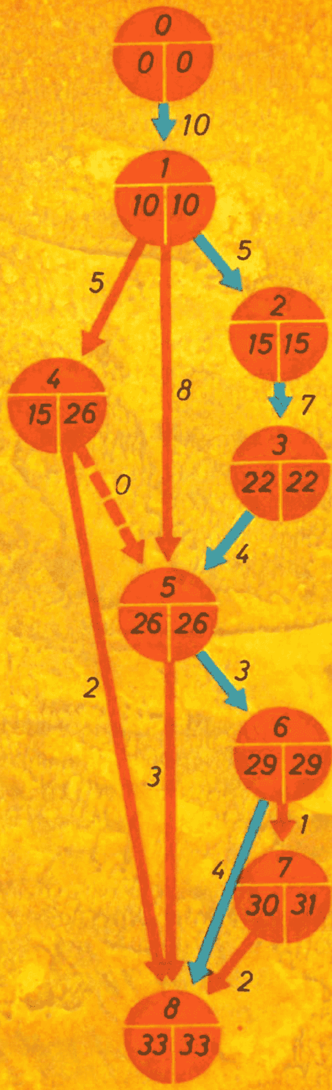
Der Vorgang (4–5) mit dem gestrichelten Pfeil ist ein sogenannter Scheinvorgang. Er erfordert keine Zeit, sondern gibt nur einen logischen Zusammenhang an: Die Aufstellung der Maschinen, das heißt der Vorgang (5–6), kann erst beginnen, wenn durch den Straßenrohbau, Vorgang (1–4), die Möglichkeit geschaffen wurde, die Maschinen zur Fabrikhalle zu transportieren.
Bei diesem Netzplan fällt es schon schwerer, sofort den kritischen Weg zu erkennen. Wir berechnen ihn nach dem uns bekannten Verfahren. Zuerst bestimmen wir alle frühesten und danach alle spätesten Ereignistermine. Bei Gleichheit beider Zahlen liegt das betreffende Ereignis auf dem kritischen Weg (s. S. 55, rechts).
Die Ermittlung dieser Werte bereitet etwas mehr Mühe. Um den frühesten Termin für Ereignis 5 zu bestimmen, müssen beispielsweise schon drei Zahlen verglichen werden. Es ergeben sich für Vorgang (1–5) $10 + 8 = 18$, für Vorgang (3–5) $22 + 4 = 26$ und für Vorgang (4–5) $15 + 0 = 15$. Von den drei Summen ist die 26 am größten und deshalb bei Ereignis 5 eingetragen.
Wir erläutern auch die Berechnung der spätesten Termine nochmals und wählen dafür Ereignis 1. Rückwärts schreitend kommen wir zu Ereignis 1 auf drei verschiede-

nen Wegen: von den Ereignissen 2, 4 und 5 aus. Entsprechend subtrahieren wir 15 – 5 = 10, 26 – 5 = 21 und 26 – 8 = 18. Die kleinste dieser drei Differenzen, die 10, ist der gesuchte späteste Termin für Ereignis 1.
Der kritische Weg verläuft über die Ereignisse 0 – 1 – 2 – 3 – 5 – 6 – 8 und hat eine Länge von 33 Wochen. Diese Zeit vergeht von Beginn der Projektierung bis zur Übergabe der Fabrikhalle, falls es keine Verzögerungen bei den kritischen Vorgängen gibt. Die Bauleitung wird diese Tätigkeiten besonders überwachen. Tritt beispielsweise beim Bau der Fundamente und Mauern eine Verzögerung von 2 Wochen auf, dann wird die gesamte Fabrikhalle erst nach 35 Wochen fertiggestellt. Wenn es hingegen gelingt, die Dacharbeiten von 4 auf 3 Wochen zu verkürzen, dann nimmt die Fabrikhalle statt nach 33 Wochen schon nach 32 Wochen die Produktion auf.
Die Tabelle zeigt sämtliche Wege, die vom Start- zum Zielereignis führen, und ihre zeitliche Länge.

Wege über die Ereignisse	Zeitdauer in Wochen	
0–1–2–3–5–6–7–8	10 + 5 + 7 + 4 + 3 + 1 + 2	= 32
0–1–2–3–5–6–8	10 + 5 + 7 + 4 + 3 + 4	= 33
0–1–2–3–5–8	10 + 5 + 7 + 4 + 3	= 29
0–1–5–6–7–8	10 + 8 + 3 + 1 + 2	= 24
0–1–5–6–8	10 + 8 + 3 + 4	= 25
0–1–5–8	10 + 8 + 3	= 21
0–1–4–5–6–7–8	10 + 5 + 0 + 3 + 1 + 2	= 21
0–1–4–5–6–8	10 + 5 + 0 + 3 + 4	= 22
0–1–4–5–8	10 + 5 + 0 + 3	= 18
0–1–4–8	10 + 5 + 2	= 17

Links: Netzplan für den Bau einer Fabrikhalle.
Rechts: Netzplan mit Ereignisterminen und kritischem Weg (blaue Pfeile).


0
10
1
5
5
8
2
7
4
3
0
4
5
3
2
3
6
1
4
7
2
8


0
0 0
10
1
10 10
5
5
8
2
15 15
7
4
15 26
3
22 22
0
4
5
26 26
3
2
3
6
29 29
1
4
7
30 31
2
8
33 33

Wir erkennen aus den Zeitwerten, daß für viele Wege beträchtliche Pufferzeiten vorliegen. Am größten sind diese für den Teilabschnitt zwischen den Ereignissen 1, 4 und 8 des letztgenannten Weges. Wird beispielsweise der Straßenrohbau (Vorgang 1–4) zum frühestmöglichen Termin, also nach 15 Wochen, abgeschlossen, dann kann bei den Straßenarbeiten eine Pause von

$$33 - 2 - 15 = 16 \text{ Wochen}$$

eintreten. Die Straßenbaubrigade arbeitet in dieser Zeit an einem anderen Ort und kehrt erst 2 Wochen vor Abschluß des Projektes zurück, um die Straße fertigzustellen (Vorgang 4–8). Auch über solche Möglichkeiten gibt der Netzplan Auskunft.

Vom Schiff bis zur Oper

In unserer Republik wurde die Netzplantechnik erstmals im Jahre 1963 für die Planung des Bau- und Montageablaufs der Rohöldestillation II im VEB Petrolchemisches Kombinat Schwedt angewandt. Der Netzplan bestand aus 368 Ereignissen und etwa der gleichen Anzahl von Vorgängen. Das Rechenzentrum der Karl-Marx-Universität ermittelte den kritischen Weg und übernahm die anderen mathematischen Untersuchungen. Man setzte dafür den Elektronenrechner ZRA 1 ein. Durch die Netzplantechnik wurde in Schwedt der ursprünglich geplante Zeitaufwand von eintausendzweihundert Arbeitstagen auf sechshundertfünfzig Arbeitstage verkürzt.

Wenig später plante und kontrollierte eine Bauleitung in Dessau die Errichtung eines Hochhauses mit der Methode des kritischen Weges. Bei einem Objektwert von zehn Millionen Mark wurden hunderttausend Mark eingespart.

Heute existieren für fast alle Großbauprojekte Netzpläne,

mit denen der Ablauf der Arbeiten geleitet und kontrolliert wird. Ähnliche Situationen wie auf Großbaustellen liegen auch in vielen anderen Bereichen vor.
Eine sehr komplizierte Aufgabe wurde im Jahre 1968 der Bezirksdirektion Leipzig der Deutschen Post übertragen. Bei voller Weiterführung des Fernsprechverkehrs sollte das Bezirksnetz auf den automatischen Selbstwählverkehr umgestellt werden. Von der Vorbereitung bis zum Ende der Umbauten und des Umschaltens vergingen achtzig Wochen, und im Oktober 1969 war das Automatisierungsvorhaben abgeschlossen. Innerhalb des Bezirkes Leipzig, und das gilt auch für zahlreiche Städte anderer Bezirke, wählt man Ortskennzahl und Rufnummer – und schon ist der gewählte Partner am Apparat. Nur mit der Methode des kritischen Weges waren die geplanten Termine einzuhalten.
Die VVB Schiffbau organisiert schon seit mehreren Jahren ihre langfristige Produktion mit der Netzplantechnik. Heute gibt es für jedes Schiff einen solchen Plan. Gegenüber früheren Methoden ging die Produktionszeit um fünfzehn Prozent zurück.
Eine Vielzahl von Teilaufgaben fallen in der wissenschaftlichen Forschung an: Beschaffung und Studium von Büchern und Zeitschriften, Konstruktion und Bau von großen Versuchsanlagen, umfangreiche und langwierige Experimente und Messungen, Auswertung der erhaltenen Daten mit einem Computer, Vergleiche mit bekannten Erkenntnissen und vieles andere mehr. Wir sprachen an einer anderen Stelle schon von den großen Kollektiven von Wissenschaftlern, die solche Aufgaben gemeinsam in Angriff nehmen. Mit der Netzplantechnik stimmen sie alle Arbeiten aufeinander ab. Bei sehr großen Projekten enthält ein Plan etwa 500 bis 1 000 Vorgänge. Den kritischen Weg ermittelt auch hier ein Computer. Vergleiche ergaben, daß

bei Forschungsvorhaben durch die Netzplantechnik Zeiteinsparungen zwischen acht und dreißig Prozent möglich sind.
In manchen Betrieben begannen FDJ-Grundorganisationen, ihr Studienjahr mit der Netzplantechnik vorzubereiten und durchzuführen. In der Tabelle für die Vorgänge standen beispielsweise solche Aufgaben: Anleitung durch die Kreisleitung der FDJ, Gespräche mit den Jugendlichen über ihre Einstufung in einen bestimmten Zirkel, Bestellen der Literatur, Gewinnen von Zirkelleitern, Raumverteilung für die Zirkel, Vorbereiten der Mitgliederversammlung, Durchführen des ersten Zirkels und anschließende Auswertung und so weiter. Viele dieser Tätigkeiten laufen parallel, andere nacheinander. Deshalb kann die Methode des kritischen Weges angewandt werden. Ganz ähnlich liegen die Dinge beim Vorbereiten einer größeren Ausstellung.

In der Sowjetunion wendet man die Netzplantechnik in vielen Bereichen der Wirtschaft an. Große Industrieanlagen und neue Wohnkomplexe werden damit vorbereitet und während des Baues überwacht. Interessante Berichte liegen aus der Volksrepublik Polen zur Planung des Unterrichtes an den Schulen mit dieser Methode vor. Die einzelnen Fächer wurden noch besser aufeinander abgestimmt.

Im Bereich der Medizin gibt es Versuche, Operationen mit der Netzplantechnik vorzubereiten, um die Zeit der Narkose zu verkürzen. Auch Operninszenierungen wurden schon mit der Methode des kritischen Weges geleitet.

Netzplan gegen Posträuber

Einmal allerdings versagte die Netzplantechnik. Diese Sache begann in den Morgenstunden des 8. August 1963, einige Minuten nach drei Uhr. Ein britischer Postzug, auf

dem Kurs Glasgow–London, fuhr durch die Nacht. Der zweite Wagen führte wertvolle Fracht mit sich: Geldsäcke, gefüllt mit unansehnlich gewordenen Pfundnoten.
Wenige Meilen vor London standen die Signale auf Rot. Der Zug stoppte. Kein Eisenbahnstellwerk hatte den Halt veranlaßt, sondern die Gangsterbande des Majors Reynolds. Das weitere Geschehen lief mit gespenstiger Schnelligkeit ab. Die maskierten Gangster trennten die beiden vorderen Wagen vom übrigen Zug, schlugen den Lokomotivführer zuerst nieder und zwangen ihn dann, mit den zwei Wagen bis zu einer nahe gelegenen Brücke zu fahren. Dort drangen sie in den Geldwagen ein und überwältigten die vier Wachmänner. Es dauerte nicht länger als fünf Minuten, bis einhundertvierundzwanzig Geldsäcke auf ein Lastauto unter der Brücke umgeladen waren. Dann preschte der LKW davon.
Der größte Postraub in der englischen Kriminalgeschichte war vorerst geglückt. Die Bande hatte umgerechnet etwa dreißig Millionen Mark erbeutet.
Scotland Yard, die Londoner Kriminalpolizei, übernahm die Ermittlungen. Für Hinweise aus der Bevölkerung wurde eine Belohnung in der Höhe von drei Millionen Mark ausgesetzt. Doch von den Gangstern war eine Woche nach dem Überfall noch keiner verhaftet. Zahlreiche Zeitungen veröffentlichten bissige Kommentare und warfen der Polizei Unfähigkeit vor. Daraufhin gab Scotland Yard bekannt, daß die weitere Fahndung nach den Gangstern mit der Netzplantechnik organisiert würde. Alle Maßnahmen der Kriminalpolizei würden jetzt mit mathematischer Genauigkeit geplant, und am Ende eines kurzen kritischen Weges stände die Festnahme der Gangster und die Sicherstellung der Beute.
Doch es kam anders, als es sich die Detektive vorstellten. Die Mathematik half ihnen wenig.

Einige Mitglieder der Bande wurden zwar gefaßt und auch verurteilt. Zwei konnten jedoch bald danach wieder aus dem Gefängnis ausbrechen. Bandenchef Major Reynolds wurde erst 1968, mehr als fünf Jahre nach dem Postraub, verhaftet. Von der Beute fehlen noch heute weit mehr als achtzig Prozent.

Weshalb versagte die Netzplantechnik bei der Jagd nach den Gangstern und den geraubten Millionen?

Die Mitglieder der Bande mußten ihren Chef stets mit Major anreden. Darauf legte Reynolds besonderen Wert, erinnerte ihn dieser Dienstgrad doch an die für ihn glanzvollsten Jahre. Reynolds war früher Mitarbeiter des britischen Geheimdienstes und hatte es dort in kurzer Zeit bis zum Major gebracht. Offiziell schied er zwar aus dieser dunklen Organisation aus, doch niemand glaubte, daß er sich völlig davon gelöst hatte. Die Kriminalpolizei ließ ihn jedenfalls länger als fünf Jahre in Ruhe, und das erschien mehr als sonderbar. Selbst englische Zeitungen vermuteten, daß Reynolds vom Geheimdienst geschützt wurde. Der Bandenchef hielt sich zeitweise im Ausland auf und lebte dann in einer eleganten Villa. Im Zentrum von London verursachte er einen schweren Verkehrsunfall, wurde dabei verletzt und in das Polizeikrankenhaus von Scotland Yard gebracht. Die Detektive behaupteten später, ihn nicht erkannt zu haben.

In den imperialistischen Ländern kommt es häufig vor, daß sich einzelne Machtorgane des Staates gegenseitig behindern oder sogar bekämpfen. Der Geheimdienst verfügt über wesentlich mehr Einfluß als die Kriminalpolizei. So verwundert es nicht, daß Reynolds und andere Gangster lange Zeit ungeschoren blieben. Außerdem besaß der Geheimdienst-Major gute Kenntnisse von den Arbeitsmethoden der Polizei. Den Raub bereitete er sehr gründlich vor. Später durchschaute er manche Aktionen der Detek-

tive. Er richtete sein Verhalten danach ein und sicherte den größten Teil der Beute vor dem Zugriff der Polizei. Netzplantechnik und Mathematik konnten dagegen nichts ausrichten.
Das war eine Panne; beim Anwenden der Methode des kritischen Weges auf die vielfältigen Prozesse in unserer Wirtschaft bewies jedoch die Netzplantechnik ihre tatsächliche Leistungsfähigkeit.
Eine Aufgabe, die ihr selbständig lösen sollt, zeigt das erneut.

● *Der Plan der Agronomen*
Die Landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft „Thomas Müntzer" bereitet für sechs Schläge die Hackfruchternte und die Herbstbestellung vor. In der Feldbaubrigade werden die einzelnen Arbeiten besprochen, und am Beginn der Beratung gibt der Vorsitzende der LPG folgenden Hinweis:
„Im vergangenen Jahr", sagte er, „war in unserer LPG die Feldwirtschaft schlecht organisiert. Die Ernte der Hackfrüchte und die Bestellung der Schläge mit Wintergetreide zogen sich über mehr als sieben Wochen hin. Am Schluß überraschten uns starke Regenfälle und die ersten Bodenfröste. Wir verbuchten einige Verluste, und unsere Arbeitseinheiten erreichten nicht die Höhe, die wir uns wünschten. In diesem Jahr darf das nicht wieder vorkommen. Wir stellen uns das Ziel, den geplanten Wert der Arbeitseinheit nicht nur zu erreichen, sondern sogar zu überbieten. Mit gesundem Menschenverstand und mit Routine allein kommen wir nicht weiter. Nur die Mathematik ermöglicht uns, tiefer in alle Zusammenhänge einzudringen und die Arbeit besser zu planen. Unser Agronom hat sein Studium an der Hochschule für Landwirtschaft und Nahrungsgüterwirtschaft in Bernburg absolviert und

dabei die Netzplantechnik kennengelernt. Mit dieser Methode organisieren wir jetzt die Hackfruchternte und die Herbstbestellung. Den Netzplan für unsere Arbeit wird er in diesem Jahr noch allein aufstellen. Im kommenden Winter studieren wir alle an unserer Dorfakademie jene moderne Planungsmethode, und im nächsten Jahr organisieren wir sämtliche Arbeiten unserer LPG nach diesem Verfahren. Alle wirken dann an der Planung mit. Unsere zukünftigen Netzpläne werden deshalb noch besser und vollkommener sein. Jetzt aber wollen wir die Hackfruchternte und die Herbstbestellung in weniger als dreißig Arbeitstagen abschließen."

Danach erläutert der Agronom die einzelnen Arbeitsgänge und entwickelt die Grundgedanken des Netzplanes. Ohne seine ganze Rede zu zitieren, nennen wir nur die wichtigsten Tatsachen.

Die sechs in Frage kommenden Schläge nennen wir einfach A, B, C, D, E und F. Das Feld A ist schon abgeerntet, auf den Schlägen B und C sind Kartoffeln und auf den Flächen D, E und F Zuckerrüben zu roden.

Die LPG setzt drei Gruppen von landwirtschaftlichen Maschinen ein: für die Rodung der Kartoffeln, für die Rodung von Zuckerrüben und für die Bestellung der freien Schläge mit Wintergetreide. Diese drei Gruppen von Maschinen können ihre speziellen Aufgaben nur hintereinander ausführen, aber selbstverständlich unabhängig voneinander parallel arbeiten.

Chemische Untersuchungen ergaben, daß auf den Schlägen E und F die Zuckerrüben noch nicht den erforderlichen Zuckergehalt erreichten. Eine mehrtägige Reifezeit ist erforderlich. Hingegen kann auf D die Zuckerrübenernte sofort einsetzen. Parallel dazu beginnt die Kartoffelrodung, zuerst auf B, dann auf C. Und gleichzeitig setzt die Bestellung der freien Fläche A mit Wintergerste ein.

Die Bearbeitung und Aussaat der anderen Schläge hängt von deren unverzüglicher Räumung von den Hackfrüchten ab.
Dabei ergibt sich diese Reihenfolge: Nach der Bestellung des Schlags B mit Roggen erfolgt die Weizenaussaat auf den Schlägen D, C und E.
„Organisieren wir unsere Arbeit in dieser Weise", so schließt der Agronom seine Rede, „dann benötigen wir dafür tatsächlich weniger als dreißig Tage. Ich stelle alle Tätigkeiten zur besseren Übersicht in einer Tabelle zusammen. Dort sind die erfahrungsgemäß benötigten Zeiten enthalten. Der Netzplan, den wir aufstellen, beginnt mit dem Startereignis Null und endet mit dem Zielereignis Neun."

Vorgang	Erläuterung	Zeitdauer in Tagen
(0–1)	Kartoffelernte auf Schlag B	5
(0–2)	Gerstebestellung auf Schlag A	4
(0–3)	Zuckerrübenernte auf Schlag D	6
(0–4)	Reifezeit für Zuckerrüben auf den Schlägen E und F	12
(1–2)	Scheinvorgang	0
(1–7)	Kartoffelernte auf Schlag C	9
(2–6)	Roggenbestellung auf Schlag B	3
(3–4)	Scheinvorgang	0
(3–6)	Scheinvorgang	0
(4–5)	Zuckerrübenernte auf Schlag E	5
(5–8)	Scheinvorgang	0
(5–9)	Zuckerrübenernte auf Schlag F	8
(6–7)	Weizenbestellung auf Schlag D	5
(7–8)	Weizenbestellung auf Schlag C	7
(8–9)	Weizenbestellung auf Schlag E	5

Die Scheinvorgänge geben wiederum nur logische Zusammenhänge an: Vorgang (1–2) besagt, daß auf Schlag B die Roggenbestellung als Vorgang (2–6) erst beginnen kann, wenn dort die Tätigkeit (0–1) der Kartoffelrodung abgeschlossen ist. Die Scheinvorgänge (3–4) und (3–6) sagen aus, daß erst nach Abschluß der Zuckerrübenernte auf Schlag D die entsprechende Technik auf E eingesetzt werden kann und daß das Räumen von D Voraussetzung für die Bestellung mit Weizen ist.
Folgende Aufgaben sind jetzt zu lösen:
1) Stelle auf der Grundlage der Erläuterungen des Agronomen und der Tabelle den Netzplan für die Hackfruchternte und die Herbstbestellung der LPG auf!
2) Berechne in diesem Netzplan für jedes Ereignis den frühesten und den spätesten Termin und ermittle den kritischen Weg!
3) Wieviel Tage benötigt die LPG bis zum Abschluß aller Arbeiten?
4) Wieviel Wege existieren in diesem Netzplan?
Stelle sie übersichtlich zusammen und berechne die dafür erforderlichen Zeiten!

Eine Methode aus Ungarn

Wer geht zum Nordplatz?
Irgendwo in unserer Republik gibt es eine Produktionsgenossenschaft des Klempnerhandwerks. Zwanzig Handwerker arbeiten dort. Jeden Tag führen sie an verschiedenen Stellen der Stadt Reparaturen aus.
Kurz vor Arbeitsschluß treffen sich diese Handwerker in ihrer Werkstatt und besprechen die Arbeit für den nächsten Tag. Der Meister verliest die Auftragsliste:
Karl-Marx-Straße Nr. 42: Reparatur eines Rohrbruches.

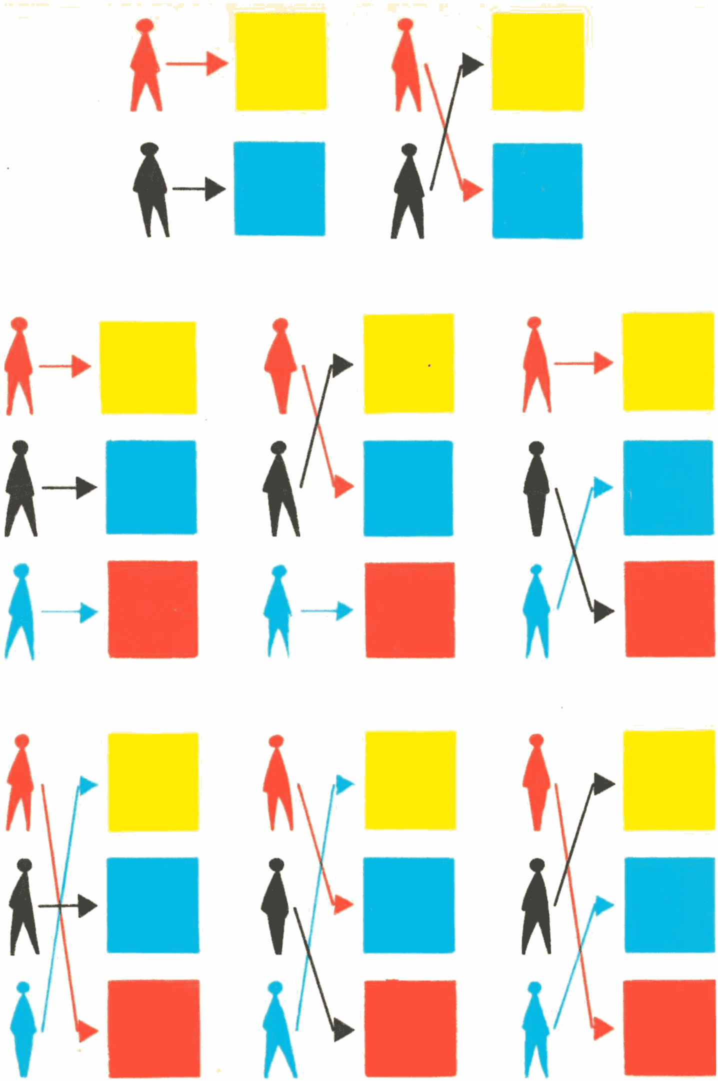
Nordplatz Nr. 5: Warmwasserspeicher anbringen.
Leninallee-Neubau, Block 4: Gasleitung verlegen.
So geht es weiter, eine lange Liste. In den verschiedenen Teilen der Stadt gibt es für die PGH Aufträge zu erledigen. Jeder Handwerker geht am Morgen, um sieben Uhr, direkt von seiner Wohnung in eines der Häuser, aus dem der Auftrag für eine Reparatur oder für eine andere Arbeit vorliegt. Der Plan dazu wurde am Vortage besprochen. Dabei ist es natürlich günstig, wenn jeder Handwerker in dem Haus die Reparaturen ausführt, das seiner Wohnung am nächsten ist. Der Weg zur Arbeitsstelle kann für einige Kollegen dennoch beträchtlich weit sein. Hinzu kommt noch, daß in einer größereren Stadt die Handwerker verschiedene Verkehrsmittel benutzen.
Manche Mitglieder der PGH arbeiten sicherlich ganz in der Nähe ihrer eigenen Wohnung, andere Kollegen legen jedoch am Morgen einen umständlichen Weg zurück.
Wie sieht nun der optimale, das heißt der günstigste „Einsatzplan" aus?
Wenn zwanzig verschiedene Aufträge vorliegen, gibt es für jeden Handwerker im Prinzip zwanzig verschiedene Einsatzmöglichkeiten. Jeder Handwerker benötigt bis zur Einsatzstelle eine bestimmte Zeit: fünf Minuten, fünfundvierzig Minuten oder irgendeine andere Zeit. Wenn man für alle zwanzig Handwerker diese Zeiten zusammenzählt, so ist der Plan mit der kleinsten Summe am günstigsten. Alle haben davon einen Vorteil. Von der Arbeitszeit geht nur ein kleiner Teil für den Weg verloren. Wie kann man einen solchen optimalen Plan finden?

Erst in 77000 Jahren?

Für 2 Handwerker ist das leicht. Nehmen wir an, sie heißen Herr Groß und Herr Klein. Zwei Aufträge liegen vor: In der Wilhelm-Pieck-Straße Nr. 2 und in der Karl-Lieb-

knecht-Straße Nr. 8. Herr Groß benötigt, um zur Wilhelm-Pieck-Straße zu gelangen, 40 Minuten, und zur Karl-Liebknecht-Straße 10 Minuten. Für Herrn Klein betragen diese Zeiten 20 und 10 Minuten.
Es gibt jetzt zwei Pläne:
1) Herr Groß geht in die Wilhelm-Pieck-Straße (40 Minuten Weg), und Herr Klein arbeitet in der Karl-Liebknecht-Straße (10 Minuten Weg). Die Gesamtheit der beiden Wege beträgt also 40 + 10 = 50 Minuten.
2) Herr Groß geht in die Karl-Liebknecht-Straße (10 Minuten Weg), und Herr Klein arbeitet in der Wilhelm-Pieck-Straße (20 Minuten Weg). Jetzt beträgt die Gesamtzeit für beide Wege 10 + 20 = 30 Minuten.
Dieser zweite Plan ist also günstiger, obwohl Herr Klein den für ihn längeren Weg von 20 Minuten zurücklegt. Ein Plan für 3 Handwerker bereitet schon mehr Schwierigkeiten. Da gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten.
Bei 4 Handwerkern steigt diese Zahl auf 24 an, und bei 5 liegen schon 120 verschiedene Möglichkeiten vor. Wenn wir nun für die 20 Handwerker der PGH die verschiedenen Einsatzmöglichkeiten errechnen wollen, so erhalten wir die unwahrscheinlich große Zahl 2432902008176640000. Das sind mehr als zwei Trillionen verschiedene Pläne. Da kann man sich nicht mehr mit Papier und Bleistift hinsetzen und ausrechnen, welcher Plan der günstigste ist.
Könnte das nicht eine superschnelle Rechenmaschine erledigen? Wenn ein solcher Automat in jeder Sekunde genau eine Million von den Plänen ausrechnete und miteinander vergliche, und wenn dieser Automat ununterbrochen im Einsatz wäre, so hätte er die Berechnung nach 77147 Jahren abgeschlossen. Das geht natürlich nicht.

Oben: Für 2 Handwerker sind nur 2 Pläne möglich.
Unten: Für 3 Handwerker gibt es schon 6 verschiedene Pläne.



Man kann unmöglich alle Pläne berechnen und miteinander vergleichen.
Hier hilft ein neues Gebiet der Mathematik – die Zuordnungstheorie. Mit einem Verfahren dieser Theorie kann man in einigen Minuten ermitteln, welcher Einsatzplan am günstigsten ist. Wir wollen an einem Beispiel für 5 Handwerker kennenlernen, wie ein solcher optimaler Einsatzplan mathematisch berechnet wird.
Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Namen der 5 Mitarbeiter mit den Buchstaben A, B, C, D und E. Sie haben Aufträge an 5 verschiedenen Stellen der Stadt zu erledigen. Diese Einsatzorte nennen wir einfach S, T, U, V und W. Arbeitet Herr A an dem Ort S, so braucht er für den Weg 15 Minuten. Geht er nach T, dann beträgt die Zeit für den Weg 30 Minuten. Für jeden der 5 Handwerker sind die Zeiten bekannt, die er benötigt, um von seiner Wohnung zu den Einsatzorten zu gelangen. In einer Tabelle stellen wir diese Zeiten zusammen.

	S	T	U	V	W
A	15	30	25	5	15
B	40	15	45	20	35
C	30	25	35	12	40
D	25	35	20	10	20
E	12	20	15	8	10

Wegezeit-Tabelle

Durch den optimalen Einsatzplan soll die Summe der Wegezeiten für alle 5 Handwerker ein Minimum, das heißt so klein wie möglich werden. Diese Lösung muß für jeden Kollegen den Einsatzort nennen.

Was ist eine Matrix?

Wird ein solches Problem mathematisch gelöst, so interessiert es uns während der Berechnungen nicht, daß wir von Zeitangaben ausgegangen sind. Wir operieren mit den Zahlen, ohne uns laufend ihre konkrete Bedeutung vorzustellen. Erst am Schluß beantworten wir mit der mathematischen Lösung die Fragen der Aufgabe.

Der ungarische Mathematiker König entwickelte wichtige Grundlagen des Verfahrens der Zuordnungstheorie, das wir jetzt kennenlernen. Es heißt deshalb „Ungarische Methode". Die Theorie dazu ist kompliziert. Deshalb wollen wir nicht erklären, weshalb wir diesen oder jenen Schritt gehen, sondern nur zeigen, wie man die Lösung erhält.

In der Sprache der Mathematik bezeichnen wir ein Schema von Zahlen, wie es durch die Wegezeit-Tabelle dargestellt ist, als Matrix. Für die Zahlen verwenden wir den allgemeinen Begriff Elemente. Sie sind in waagerechten Zeilen und senkrechten Spalten angeordnet. Je zwei senkrechte Striche links und rechts der Elemente weisen noch besonders darauf hin, daß es sich um eine Matrix handelt.

$$\begin{Vmatrix} 15 & 30 & 25 & 5 & 15 \\ 40 & 15 & 45 & 20 & 35 \\ 30 & 25 & 35 & 12 & 40 \\ 25 & 35 & 20 & 10 & 20 \\ 12 & 20 & 15 & 8 & 10 \end{Vmatrix}$$

Mit den Elementen dieser Matrix führen wir folgende Rechenoperationen durch:

1) Wir bestimmen in jeder *Zeile* das kleinste Element und markieren es durch einen Kreis. Dann subtrahieren wir es von allen anderen Elementen dieser Zeile.

Beispielsweise rechnen wir in der ersten Zeile:
$15 - 5 = 10$; $30 - 5 = 25$; $25 - 5 = 20$; $5 - 5 = 0$;
$15 - 5 = 10$
In der ersten Zeile der neuen Matrix heißen nunmehr die Elemente 10, 25, 20, 0 und 10.

$$\begin{Vmatrix} 15 & 30 & 25 & 5 & 15 \\ 40 & 15 & 45 & 20 & 35 \\ 30 & 25 & 35 & 12 & 40 \\ 25 & 35 & 20 & 10 & 20 \\ 12 & 20 & 15 & 8 & 10 \end{Vmatrix} \longrightarrow \begin{Vmatrix} 10 & 25 & 20 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 30 & 5 & 20 \\ 18 & 13 & 23 & 0 & 28 \\ 15 & 25 & 10 & 0 & 10 \\ 4 & 12 & 7 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine neue Matrix. An den Stellen der kleinsten Elemente stehen jetzt Nullen.

2) Mit den *Spalten* der neuen Matrix führen wir die gleichen Operationen aus. Das kleinste Element jeder Spalte wird wieder durch einen Kreis markiert und von den anderen Elementen der gleichen Spalte subtrahiert. Dabei bleiben die Spalten, die schon eine oder mehrere Nullen enthalten, unverändert. Hier trifft das auf die zweite und vierte Spalte zu. Nunmehr ergibt sich wieder eine neue Matrix.

$$\begin{Vmatrix} 10 & 25 & 20 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 30 & 5 & 20 \\ 18 & 13 & 23 & 0 & 28 \\ 15 & 25 & 10 & 0 & 10 \\ 4 & 12 & 7 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \longrightarrow \begin{Vmatrix} 6 & 25 & 13 & 0 & 8 \\ 21 & 0 & 23 & 5 & 18 \\ 14 & 13 & 16 & 0 & 26 \\ 11 & 25 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

3) Jetzt versehen wir die Zeilen und Spalten, die Nullen enthalten, mit Decklinien. Dabei kommt es darauf an, alle Nullen zu erfassen und mit der kleinsten Anzahl solcher Decklinien auszukommen.
Mit drei Linien können wir alle Nullen unserer Matrix zudecken.

$$\begin{Vmatrix} 6 & 25 & 13 & 0 & 8 \\ 21 & 0 & 23 & 5 & 18 \\ 14 & 13 & 16 & 0 & 26 \\ 11 & 25 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Anstelle der zweiten Zeile hätten wir auch die zweite Spalte zudecken können.
Von allen Elementen, die nicht unter einer Decklinie stehen, bestimmen wir wieder das kleinste.
Das ist hier die Zahl 3, die durch einen Kreis hervorgehoben wurde. Dieses kleinste Element wird
- von allen nicht zugedeckten Elementen subtrahiert und
- zu den im Schnittpunkt zweier Decklinien stehenden Elementen addiert.
- Die anderen Elemente unter den Decklinien bleiben unverändert.

$$\begin{Vmatrix} 3 & 22 & 10 & 0 & 5 \\ 21 & 0 & 23 & 8 & 18 \\ 11 & 10 & 13 & 0 & 23 \\ 8 & 22 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

4) Dieser dritte Schritt wird so oft wiederholt, bis zum Abdecken aller Nullen unbedingt so viele Linien erforderlich sind, wie die Matrix Zeilen beziehungsweise Spalten enthält, also fünf.
Wir können zwar schon in dieser Matrix fünf Decklinien einzeichnen, und zwar eine über jede Zeile. Aber die Nullen sollen stets mit der kleinstmöglichen Anzahl von Linien zugedeckt werden.
Bei der zuletzt berechneten Matrix reichen schon vier Decklinien aus.

$$\begin{Vmatrix} 3 & 22 & 10 & 0 & 5 \\ 21 & 0 & 23 & 8 & 18 \\ 11 & 10 & 13 & 0 & 23 \\ 8 & 22 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Das kleinste nicht überdeckte Element heißt hier wiederum 3. Wir wiederholen die bekannten Operationen: Subtrahieren der 3 von allen nicht zugedeckten Elementen, Addieren der 3 zu den Elementen in den Schnittpunkten der Decklinien und unveränderte Übernahme der anderen zugedeckten Elemente.

$$\begin{Vmatrix} 0 & 19 & 7 & 0 & 2 \\ 21 & 0 & 23 & 11 & 18 \\ 8 & 7 & 10 & 0 & 20 \\ 8 & 22 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$$

Um jetzt alle Nullen zu erfassen, brauchen wir unbedingt fünf Decklinien.

$$\begin{Vmatrix} 0 & 19 & 7 & 0 & 2 \\ 21 & 0 & 23 & 11 & 18 \\ 8 & 7 & 10 & 0 & 20 \\ 8 & 22 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$$

5) Die mathematische Lösung erhalten wir, indem wir von allen Nullen der Matrix fünf so auswählen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte nur eine Null markiert wird. Dieser Lösung stellen wir jene Tabelle gegenüber, von der wir ausgegangen sind. Hier werden die entsprechenden Elemente durch Kreise hervorgehoben.

$$\begin{Vmatrix} 0 & 19 & 7 & 0 & 2 \\ 21 & 0 & 23 & 11 & 18 \\ 8 & 7 & 10 & 0 & 20 \\ 8 & 22 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix} \rightarrow$$

	S	T	U	V	W
A	15	30	25	5	15
B	40	15	45	20	35
C	30	25	35	12	40
D	25	35	20	10	20
E	12	20	15	8	10

In jeder Zeile oder Spalte darf deshalb nur eine Null markiert sein, da jeder Handwerker nur einen Auftrag übernimmt und weil an jedem Einsatzort nur ein Kollege arbeitet. Die rechte Tabelle gibt an, welchen Auftrag jeder Handwerker übernimmt. So sieht der optimale Plan aus:

A geht nach S und benötigt				15 Minuten.
B „ „	T	„	„	15 Minuten.
C „ „	V	„	„	12 Minuten.
D „ „	U	„	„	20 Minuten.
E „ „	W	„	„	10 Minuten.

Die Summe der fünf Wegezeiten beträgt 72 Minuten.

Jeder andere Einsatzplan erfordert eine höhere Gesamtzeit für die Wege. Wir wollen zum Vergleich einen weiteren Plan aufstellen, indem wir in der Tabelle neue Zuordnungen angeben. Dabei erscheint es zunächst günstig, Herrn A den Auftrag am Ort V zuzuteilen, da er schon nach 5 Minuten diese Einsatzstelle erreicht. Die anderen Handwerker erhalten dann der Reihe nach von den noch zu vergebenden Aufträgen stets jenen, der für sie mit dem kürzesten Weg verbunden ist.

	S	T	U	V	W
A	15	30	25	5	15
B	40	15	45	20	35
C	30	25	35	12	40
D	25	35	20	10	20
E	12	20	15	8	10

Die Summe der Wegezeiten beträgt jetzt

$$5 + 15 + 30 + 20 + 10 = 80 \text{ Minuten.}$$

Das sind 8 Minuten mehr als bei dem optimalen Plan.

Der Vergleich mit den Kugeln

Mit der „Ungarischen Methode", die wir kennenlernten, lassen sich noch andere Probleme lösen. Wir wollen diesen Sachverhalt allgemein formulieren.

Das Verfahren wird immer dann angewandt, wenn mit vorhandenen Mitteln bestimmte Ziele erreicht werden sollen, wobei der Aufwand für jedes Mittel unterschiedlich ist. In unserem Beispiel waren die Handwerker die Mittel. Die Aufträge stellten die Ziele dar. Der unterschiedliche Aufwand drückte sich in den verschiedenen Wegezeiten aus.

Ganz ähnlich sieht es bei folgender Aufgabe aus: Auf 6 Baustellen steht je ein Kran. Da man sie dort nicht mehr benötigt, sollen sie an 6 andere Baustellen gebracht werden. Statt der Wegezeiten sind jetzt die Entfernungen zwischen den alten und den neuen Baustellen gegeben. Da der Transport von Kränen kompliziert ist, soll die Summe aller zurückgelegten Kilometer möglichst klein sein.

Etwas anders scheint uns zunächst folgendes Beispiel zu sein: In einer Abteilung einer Fabrik stehen 4 Drehmaschinen von unterschiedlicher Leistungsfähigkeit. Der Betrieb hat den Auftrag bekommen, ein Sortiment aus 4 verschiedenen Einzelteilen herzustellen und möglichst viel zu produzieren. Auch hier läßt sich mit der Zuordnungstheorie berechnen, welches Einzelteil jeder Maschine zur Bearbeitung zugeordnet wird, um die Leistungsfähigkeit der Maschinen voll auszunutzen und um in kurzer Zeit viel zu produzieren.

Wenn wir noch daran denken, daß in großen Industriebetrieben oft mehr als 100 Maschinen stehen und daß dort Hunderte oder sogar Tausende von Werktätigen arbeiten, dann sieht man sofort ein: Für solche Betriebe sind optimale Pläne noch wichtiger als bei den Aufgaben, mit denen wir uns bisher beschäftigt haben. Ohne die neuen

Gebiete der Mathematik kann man derartige Pläne nicht bestimmen. Der sowjetische Professor Viktor Nowoshilow drückte das einmal mit folgenden Worten aus: „Ohne Anwendung der Mathematik einen optimalen Plan aufstellen zu wollen, ist so aussichtslos wie der Versuch, aufs Geradewohl aus einer Urne mit einer roten Kugel und einer Milliarde weißen Kugeln die rote herauszufinden."
Professor Nowoshilow hat sich seit vielen Jahren mit der Entwicklung neuer mathematischer Methoden für die Planung in der Wirtschaft der UdSSR beschäftigt. Im Jahre 1965 wurde er dafür mit dem Leninpreis ausgezeichnet.
Wir wollen noch eine weitere Aufgabe formulieren, die sich mit der „Ungarischen Methode" lösen läßt.

● Fußballer rechnen

Pionierfreundschaften aus 8 Städten – Dresden, Erfurt, Freiberg, Halle, Karl-Marx-Stadt, Leipzig, Weimar und Zwickau – haben beschlossen, mit ihren Fußballmannschaften um einen „Pokal der Freundschaft" zu spielen. Sie einigten sich auf folgenden Austragungsmodus:
Für die erste Runde werden 4 Heimmannschaften ausgelost. Die 4 anderen Mannschaften reisen mit der Eisenbahn in jeweils eine dieser 4 Städte. Die Spiele sollen so angesetzt werden, daß die Summe aller Reisewege ein Minimum wird. Über die Gegner der Heimmannschaften bestimmt also die Mathematik.
Die Verlierer dieser ersten Runde scheiden aus. Bei einem Unentschieden wird das Spiel wiederholt. Aus den 4 Gewinnern bestimmt das Los wiederum 2 Heimmannschaften, deren Gegner wie in der ersten Runde berechnet werden. Nach dieser zweiten Runde stehen die beiden Mannschaften fest, die das Endspiel bestreiten.
Die Pioniere aus Erfurt (E), Leipzig (L), Karl-Marx-Stadt (K) und Weimar (W) hatten das Glück, für die erste Runde

das Los als Heimmannschaft zu ziehen. Ihr sollt jetzt berechnen, in welche Städte die Fußballspieler aus Dresden (D), Freiberg (F), Halle (H) und Zwickau (Z) reisen, wenn die Summe der Reisewege so klein wie möglich sein soll. Die Entfernungen zwischen den Städten entnehmen wir dem Kursbuch der Deutschen Reichsbahn und stellen sie in einer Tabelle zusammen.

	Heimmannschaften			
	E	L	K	W
D	237	120	81	216
F	214	122	41	192
H	109	38	119	88
Z	140	90	49	119

Entfernungs-Tabelle

Versuche die Gegner der ersten Runde des „Pokals der Freundschaft" zu berechnen!

Die Sache mit der Rundfahrt

Welchen Weg wählt das Postauto?
Kann die Mathematik beim Leeren von Briefkästen helfen? Im ersten Moment erscheint das eine unsinnige Frage zu sein. Trotzdem antworten wir darauf mit ja.
Natürlich geht es nicht darum, zu berechnen, wieviel Briefe und Karten wohl in dem Kasten liegen oder wie schnell sie in den Postsack fallen. Die Mathematik hilft hier auf ganz andere Art.
In jeder Stadt gibt es eine große Zahl von Briefkästen. Sie sind so verteilt, daß niemand erst einen langen Weg

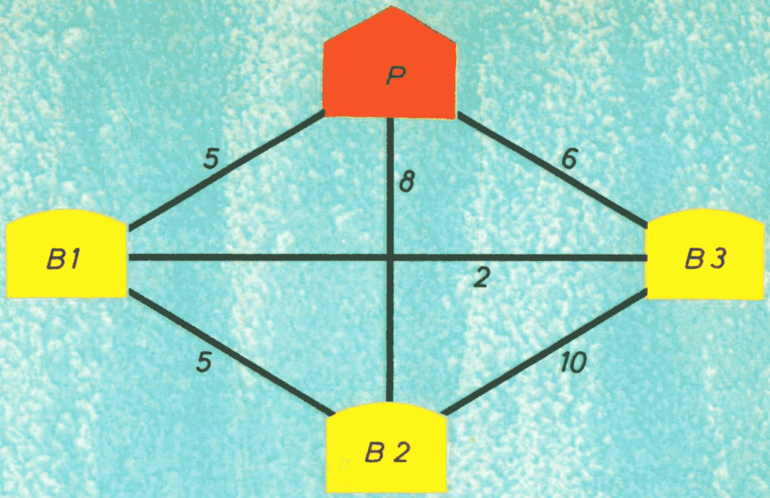
zurücklegen muß, wenn er einen Brief absenden will. Es sind in Berlin, Leipzig oder Dresden bestimmt Hunderte von Briefkästen zu finden.
Mehrmals am Tage fahren Autos der Deutschen Post durch die Straßen, um die Briefkästen zu leeren. Eine solche Rundfahrt beginnt am Postamt, sie führt an jedem Briefkasten vorbei und endet wieder am Postamt. Bei einer großen Anzahl von Briefkästen gibt es nun sehr viele Möglichkeiten für solche Touren. Wenn das Postauto nur 3 Kästen zu leeren hat, kann der Fahrer schon zwischen 6 verschiedenen Wegen auswählen.
Für welchen entscheidet er sich? Sicherlich für den kürzesten Weg, für den er die wenigste Zeit braucht. Wie findet man diesen? Führt vielleicht folgende Überlegung zum Erfolg? Das Auto fährt zuerst zu dem Briefkasten, der dem Postamt am nächsten ist. Und nach dem gleichen Prinzip geht es dann weiter. Der Fahrer entscheidet sich stets für den Briefkasten als nächstes Ziel, der ihm jeweils am nahesten liegt. Ob auf diese Weise der kürzeste Weg gefunden wird, das zeigen die folgenden Untersuchungen.
Die Zahlen an den Verbindungswegen zwischen dem Postamt (P) und den 3 Briefkästen (B1, B2, B3) geben die Fahrzeit für das Postauto in Minuten an.
Aus der Abbildung S. 81 oben lesen wir die Touren ab und berechnen für jede Rundfahrt die Gesamtzeit.

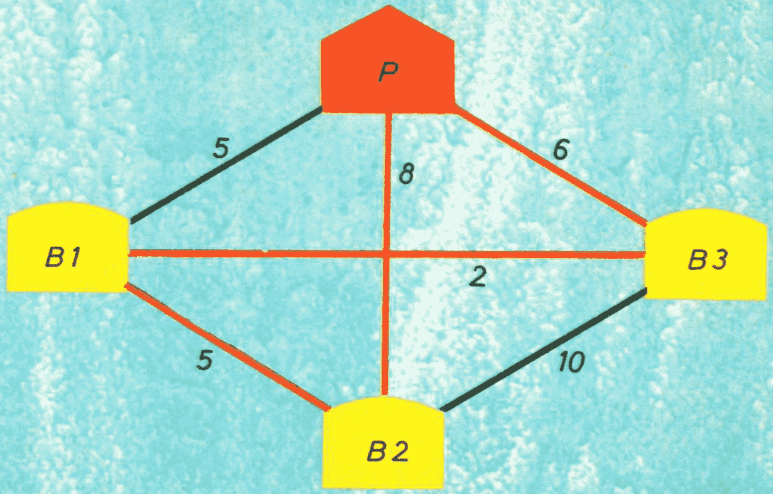
	Rundfahrt	Fahrzeit
Tour 1	P → B1 → B2 → B3 → P	5 + 5 + 10 + 6 = 26 Minuten
Tour 2	P → B1 → B3 → B2 → P	5 + 2 + 10 + 8 = 25 Minuten
Tour 3	P → B2 → B1 → B3 → P	8 + 5 + 2 + 6 = 21 Minuten
Tour 4	P → B2 → B3 → B1 → P	8 + 10 + 2 + 5 = 25 Minuten
Tour 5	P → B3 → B1 → B2 → P	6 + 2 + 5 + 8 = 21 Minuten
Tour 6	P → B3 → B2 → B1 → P	6 + 10 + 5 + 5 = 26 Minuten

Als kürzeste Fahrzeit erhalten wir 21 Minuten für die Touren 3 und 5. Vergleichen wir beide, so stellen wir fest, daß es sich im Grunde um die gleiche Rundfahrt handelt. Nur die Richtung ist umgekehrt.
Das gleiche gilt übrigens auch für die Touren 1 und 6 beziehungsweise 2 und 4 (s. S. 81, unten).
Unsere Vermutung, daß das Postauto dann die kürzeste Tour fährt, wenn es stets den am nächsten gelegenen Briefkasten ansteuert, war also falsch. Diese Rundfahrt würde von P über B1, B3 und B2 verlaufen und dann nach P zurückführen und 25 Minuten beanspruchen (Tour 2).

Achtung Einbahnstraße!
Von den 6 Touren, die wir fanden, hatten jeweils 2 die gleiche Länge. Wir gingen davon aus, daß die Fahrzeit vom Briefkasten B1 nach B2 genau so groß ist wie die Zeit bei umgekehrter Fahrtrichtung, also von B 2 nach B1. In den Städten gibt es aber nun zahlreiche Einbahnstraßen. An manchen Kreuzungen ist das Linksabbiegen verboten. Durch solche und ähnliche Einschränkungen führt häufig der Weg von B2 nach B1 durch ganz andere Straßen als bei der Fahrt von B1 nach B2. Für die Fahrzeiten gibt es dann auch unterschiedliche Werte. Wir berücksichtigen das, indem wir bei den folgenden Berechnungen alle Touren als voneinander verschieden ansehen. Tatsächlich gehört es bei einer größeren Anzahl von Briefkästen schon zu den Ausnahmen, wenn eine Tour in beiden Richtungen in der gleichen Zeit gefahren werden kann. Bei einer längeren Fahrt durch eine Stadt kommt man bestimmt durch eine oder sogar mehrere Einbahnstraßen.

Oben: Postamt und 3 Briefkästen
Unten: Kürzeste Tour für das Postauto (rote Strecken). Sie kann in beiden Richtungen durchfahren werden.


P
5
8
6
B1
B3
2
5
10
B 2


P
5
8
6
B1
B3
2
5
10
B2

Wieder 77 000 Jahre

Wir sehen schon an diesem kleinen Beispiel, daß es gar nicht so einfach ist, sofort die kürzeste Rundfahrt zu erkennen. Bei 100 Briefkästen ist das noch viel komplizierter. Hier kann man sich auch nicht mehr dadurch helfen, daß man alle Möglichkeiten für Rundfahrten einfach aufschreibt und miteinander vergleicht. Solche Tabellen nehmen dann unvorstellbar große Ausmaße an.

Schon bei 15 Briefkästen gibt es mehr als eine Billion, nämlich 1 307 674 368 000 verschiedene Touren. Selbst wenn wir die Berechnung der Fahrzeit für jede Tour und den Vergleich durch einen Rechenautomaten vornehmen, ist uns nicht viel geholfen.

Nehmen wir an, der Automat berechnet und vergleicht in jeder Sekunde eine Million Möglichkeiten und er ist täglich ununterbrochen 24 Stunden in Betrieb, dann würde das Ergebnis erst nach 15 Tagen vorliegen.

Erhöht sich die Anzahl der Briefkästen auf 20, dann rechnet der Automat länger als 77 000 Jahre, ehe er die kürzeste Tour gefunden hat.

Schon im vorigen Kapitel begegnete uns im Zusammenhang mit den 20 Handwerkern diese unwahrscheinlich lange Rechenzeit, die wir jetzt einmal nachprüfen wollen.

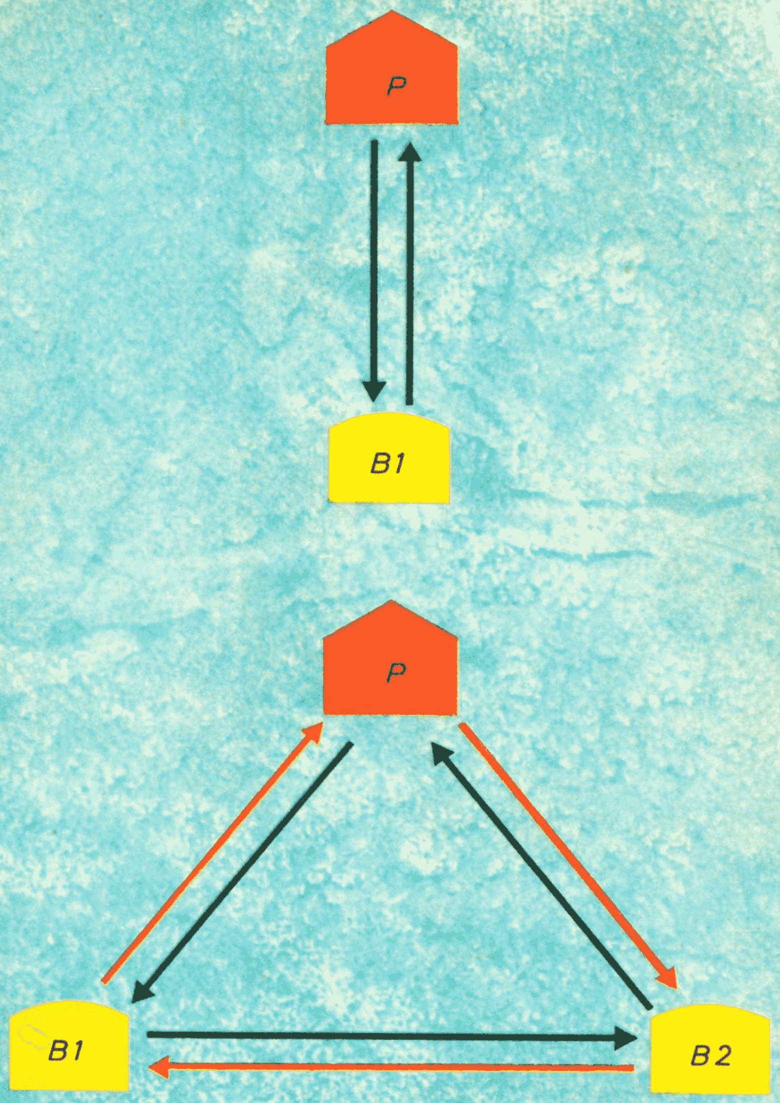
Unsere Frage lautet: Welche Zeit benötigt ein elektronischer Rechenautomat, um alle denkbaren Touren eines Postautos zwischen einem Postamt und 20 Briefkästen auszurechnen und miteinander zu vergleichen?

Überlegen wir zunächst, nach welchem Gesetz die Anzahl der verschiedenen Rundfahrten bestimmt wird.

Bei einem Briefkasten gibt es nur eine Möglichkeit.

$$P \rightarrow B1 \rightarrow P$$

Oben: Postamt und 1 Briefkasten: 1 Tour.
Unten: Postamt und 2 Briefkästen: 2 Touren.


P
B1
P
B1
B2

Für 2 Briefkästen sind 2 verschiedene Touren denkbar.

P → B1 → B2 → P oder

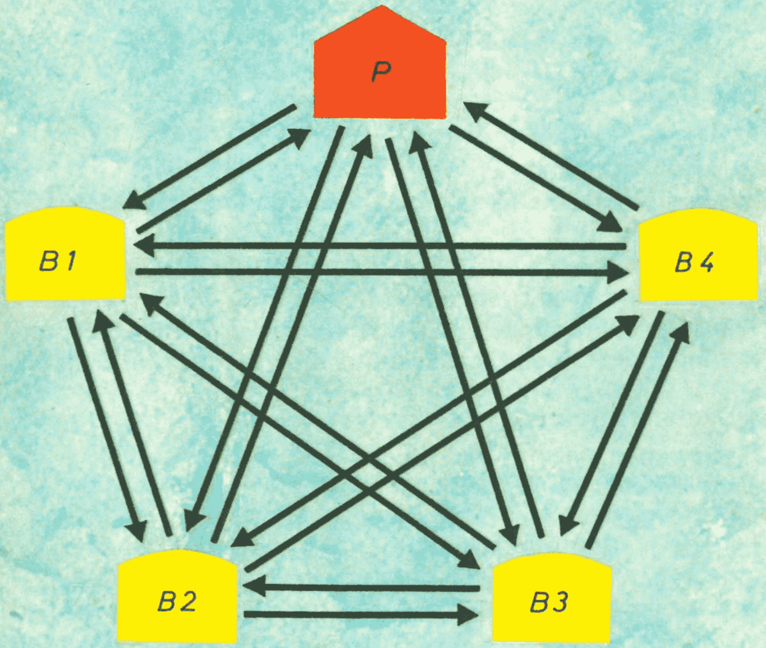
P → B2 → B1 → P

Die Anzahl der Rundfahrten bei 3 Briefkästen hatten wir bereits bestimmt. Sie betrug 6.

Mit 4 Briefkästen steigt die Anzahl der Touren schon beträchtlich an. Wir schreiben die 24 verschiedenen Möglichkeiten der Reihe nach auf:

Tour 1	P → B1 → B2 → B3 → B4 → P
Tour 2	P → B1 → B2 → B4 → B3 → P
Tour 3	P → B1 → B3 → B2 → B4 → P
Tour 4	P → B1 → B3 → B4 → B2 → P
Tour 5	P → B1 → B4 → B2 → B3 → P
Tour 6	P → B1 → B4 → B3 → B2 → P
Tour 7	P → B2 → B1 → B3 → B4 → P
Tour 8	P → B2 → B1 → B4 → B3 → P
Tour 9	P → B2 → B3 → B1 → B4 → P
Tour 10	P → B2 → B3 → B4 → B1 → P
Tour 11	P → B2 → B4 → B1 → B3 → P
Tour 12	P → B2 → B4 → B3 → B1 → P
Tour 13	P → B3 → B1 → B2 → B4 → P
Tour 14	P → B3 → B1 → B4 → B2 → P
Tour 15	P → B3 → B2 → B1 → B4 → P
Tour 16	P → B3 → B2 → B4 → B1 → P
Tour 17	P → B3 → B4 → B1 → B2 → P
Tour 18	P → B3 → B4 → B2 → B1 → P
Tour 19	P → B4 → B1 → B2 → B3 → P
Tour 20	P → B4 → B1 → B3 → B2 → P
Tour 21	P → B4 → B2 → B1 → B3 → P
Tour 22	P → B4 → B2 → B3 → B1 → P
Tour 23	P → B4 → B3 → B1 → B2 → P
Tour 24	P → B4 → B3 → B2 → B1 → P

Postamt und 4 Briefkästen: 24 Touren.


P
B1
B4
B2
B3

Unsere bisherigen Ergebnisse fassen wir in einer Tabelle zusammen.

	Anzahl der Rundfahrten
Postamt und 1 Briefkasten	$1 = 1$
Postamt und 2 Briefkästen	$2 = 1 \cdot 2$
Postamt und 3 Briefkästen	$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$
Postamt und 4 Briefkästen	$24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

Aus der Zerlegung der Werte für die Anzahl der Rundfahrten kann man eine Gesetzmäßigkeit vermuten: Bei 5 Briefkästen gibt es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ verschiedene Touren, für 6 Briefkästen sind $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Möglichkeiten vorhanden und so weiter.

Für solche Produkte aus den natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge schreibt man in der Mathematik zur Abkürzung ein besonderes Symbol:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 = 6!$

Gesprochen wird es als „Sechs Fakultät".

Statt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ heißt es abgekürzt $5!$ („Fünf Fakultät"). Fragen wir nach der Anzahl der möglichen Rundfahrten bei 20 Briefkästen, so finden wir rasch die Antwort: $20!$ („Zwanzig Fakultät"). Die Ausrechnung dieses Wertes bereitet allerdings etwas mehr Mühe:

$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 2432902008176640000$

Wie wird diese Zahl gelesen?

„2 Trillionen, 432 Billiarden, 902 Billionen, 8 Milliarden, 176 Millionen 640 Tausend."

Bevor wir ausrechnen, formulieren wir ein allgemeines Gesetz:

Führt eine Rundfahrt von einem Postamt über n Briefkästen und dann wieder zu dem Postamt zurück, so existieren n! („n Fakultät") verschiedene Möglichkeiten von Touren.

Jetzt ermitteln wir die Zeit, die ein Rechenautomat benötigt, um diese 20! Möglichkeiten zu berechnen und zu vergleichen. Untersucht er in jeder Sekunde eine Million solcher Rundfahrten, so benötigt er insgesamt eine Zeit von

2 432 902 008 176 640 000 : 1 000 000

= 2 432 902 008 177 Sekunden.

Da eine Stunde 3 600 Sekunden hat, dividieren wir durch 3 600 und erhalten für die Rechenzeit

2 432 902 008 177 : 3 600 = 675 806 113 Stunden.

Eine weitere Division dieses Ergebnisses durch 24 ergibt die Zeit in Tagen.

675 806 113 : 24 = 28 158 588 Tage.

Um die Rechenzeit in Jahren zu erhalten, dividieren wir noch durch 365.

28 158 588 : 365 = 77 147 Jahre.

Die Zahl, die wir vor unseren Berechnungen nannten, hat sich damit bestätigt.

Selbst der schnellste Rechenautomat ist zu langsam, um in einer zumutbaren Zeit für ein Postauto den kürzesten Weg für die Rundfahrt zur Briefkastenleerung zu finden. Und wir erinnern uns noch daran, daß wir nur mit 20 Briefkästen gerechnet hatten. Bei 100 anzufahrenden Punkten wächst die Anzahl der möglichen Touren in unvorstellbarem Maße. Alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100 müssen miteinander multipliziert werden!

Die Aufgabe, aus einer Vielzahl möglicher Rundfahrten die kürzeste herauszufinden, existiert nicht nur bei der Leerung von Briefkästen. Solche Rundfahrtprobleme ergeben sich in gleicher Weise bei der Landpost. Von einem größeren Ort aus fährt ein Postauto eine Tour über mehrere Dörfer, um den dortigen Poststellen Pakete, Briefe,

Zeitungen und anderes zuzustellen und die abgehenden Sendungen abzuholen. Auch hier soll während der kürzesten Rundfahrt jedes Dorf nur einmal berührt werden.
Als weitere Beispiele für Rundfahrtprobleme nennen wir die Auslieferung von Waren an mehrere Verkaufsstellen, die Frei-Haus-Lieferung von Fernsehgeräten, Waschmaschinen oder Möbeln durch Fahrzeuge des Kundendienstes, die täglichen Fahrten zwischen den verschiedenen Betrieben eines Kombinates und die Reisen von Künstlergruppen durch mehrere Städte der DDR. Bei solchen Touren ist immer nach dem kürzesten Gesamtweg gefragt.
Seit vielen Jahren suchten Mathematiker nach einem Verfahren zur Lösung des Rundfahrtproblems, mit dem man schnell aus der Vielzahl der möglichen Touren die kürzeste bestimmt. Dabei entwickelten sie ungefähr fünfzig verschiedene Methoden, die aber meist nur zu angenäherten Lösungen führten.
Was bedeutet eine „angenäherte Lösung"?
Aus der Menge aller denkbaren Rundfahrten wird eine herausgefunden, die nicht die kürzeste ist, sich aber von dieser nur sehr wenig unterscheidet. Vor allen Dingen kommt es darauf an, eine solche Tour sehr rasch zu ermitteln. Man begnügt sich mit einer guten Lösung, auch wenn es nicht die allerbeste ist, wenn nur der Zeitaufwand für die Berechnung niedrig bleibt.
Erst im Jahre 1963 entwickelten die Mathematiker ein Verfahren, das mit Sicherheit zur optimalen Lösung, das heißt zur kürzesten Tour führt. Da aber diese Methode kompliziert ist, gehen wir hier nicht weiter darauf ein. Wir behandeln anschließend ein Verfahren, das auf einfachem Wege schnell eine angenäherte Lösung ergibt. Oft erhält man damit sogar die exakte Lösung für die kürzeste Tour.

Berechnung der kürzesten Tour

An dem einfachen Beispiel einer Rundfahrt über 5 Orte A, B, C, D und E erklären wir die Methode. Beispielsweise können A ein Postamt und B, C, D, E die Briefkästen darstellen. Im vorigen Kapitel lernten wir bereits, daß es bei der mathematischen Behandlung nicht mehr auf die konkrete Bedeutung der Buchstaben und Zahlen ankommt. Deshalb sprechen wir jetzt einfach von jenen 5 Orten A, B, C, D und E.

Die Grundlage unserer Berechnungen sind die Zeiten, die beispielsweise ein Postauto benötigt, um von einem Ort zu einem anderen zu fahren. Von A nach B dauert die Fahrt 5 Minuten, nach C 10, nach D 14 und nach E 16 Minuten. Für die Fahrten, die von B, C, D und E nach den anderen Orten führen, sind diese Zeiten ebenfalls gegeben. Alle Zeitangaben fassen wir zu einer Tabelle zusammen.

von \ nach	A	B	C	D	E
A	–	5	10	14	16
B	5	–	6	11	8
C	11	8	–	2	3
D	9	12	5	–	13
E	14	10	5	8	–

Zeit-Tabelle (Angaben in Minuten)

In fünf Feldern dieser Tabelle stehen Striche, da von A nach A oder von C nach C keine Fahrt führen kann.

Wir sehen, daß das Postauto nur eine einzige Strecke, die von A nach B, in der gleichen Zeit von 5 Minuten auch in der umgekehrten Richtung von B nach A durchfahren kann. Für alle anderen Verbindungen zwischen zwei Orten

sind die Fahrzeiten in beiden Richtungen ganz unterschiedlich.
Von D nach E fährt das Auto in 13, von E nach D aber in 8 Minuten. Das hängt, wie wir schon erläuterten, mit Einbahnstraßen, dem Verbot des Linksabbiegens an manchen Kreuzungen und anderen Verkehrseinschränkungen zusammen.
Anstelle der Zeitangaben für die Fahrt zwischen zwei Orten könnten in der Tabelle auch die jeweiligen Entfernungen stehen. Fährt das Auto mit einer Geschwindigkeit von 30 Kilometern in der Stunde, dann legt es in einer Minute 0,5 Kilometer zurück. Multiplizieren wir alle Zahlen der Zeit-Tabelle mit dem Faktor 0,5, so erhalten wir die Entfernungstabelle.

von \ nach	A	B	C	D	E
A	–	2,5	5	7	8
B	2,5	–	3	5,5	4
C	5,5	4	–	1	1,5
D	4,5	6	2,5	–	6,5
E	7	5	2,5	4	–

Entfernungs-Tabelle (Angaben in Kilometern)

Lösung durch Streichen
Für die mathematische Lösung der Aufgabe ist es gleichgültig, ob wir von der Zeit- oder von der Entfernungstabelle ausgehen. Das Ergebnis ist in beiden Fällen dasselbe. Wir entscheiden uns für die Berechnung mit der Zeit-Tabelle und beginnen damit, zunächst das größte Element in der Tabelle zu streichen. Das ist die Zahl 16.

nach / von	A	B	C	D	E
A	–	5	10	14	~~16~~
B	5	–	6	11	8
C	11	8	–	2	3
D	9	12	5	–	13
E	14	10	5	8	–

Von den übrig gebliebenen Elementen streichen wir anschließend wiederum das größte. Tritt dieses mehrfach in der Tabelle auf – wie es hier mit der Zahl 14 der Fall ist – so gehen wir Zeile für Zeile durch, streichen überall dieses Element. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis in irgendeiner Zeile oder irgendeiner Spalte nur noch *ein* Element übriggeblieben ist. Diese Zahl nennen wir Lösungselement. Sie gibt uns eine Teilstrecke der Gesamttour an. Mit einem Kreis wird dieses Element markiert.
Nach der 16 streichen wir also die Zahlen 14 (zweimal), 13 (einmal), 12 (einmal), 11 (zweimal) und 10 (zweimal). In der ersten Zeile steht nur noch ein Element, die Zahl 5. Vom Ort A wird somit zum Ort B gefahren.

nach / von	A	B	C	D	E
A	–	5	~~10~~	~~14~~	~~16~~
B	5	–	6	~~11~~	8
C	~~11~~	8	–	2	3
D	9	~~12~~	5	–	~~13~~
E	~~14~~	~~10~~	5	8	–

Da der Ort B nur einmal angefahren werden soll, streichen wir in der zweiten Spalte das noch offene Element 8, um eine Fahrt vom Ort C zum gleichen Ort B auszuschalten. Ebenfalls gestrichen wird in der ersten Spalte das Element 5, das sich auf eine Fahrt vom Ort B zum Ort A bezieht. Diese Strecke darf nicht befahren werden, da schon der Weg vom Ort A zum Ort B in der Tour enthalten ist.

nach / von	A	B	C	D	E
A	–	5	~~10~~	~~14~~	~~16~~
B	~~5~~	–	6	~~11~~	8
C	~~11~~	~~8~~	–	2	3
D	9	~~12~~	5	–	~~13~~
E	~~14~~	~~10~~	5	8	–

Nach diesen beiden Streichungen enthält die erste Spalte nur noch ein offenes Element. Die Zahl 9 markieren wir jetzt als weiteres Lösungselement. In der Tour ist somit auch die Teilstrecke vom Ort D zum Ort A enthalten. Um eine Fahrt vom Ort D zum Ort C auszuschalten, streichen wir anschließend in der vierten Zeile das Element 5.

nach / von	A	B	C	D	E
A	–	5	~~10~~	~~14~~	~~16~~
B	~~5~~	–	6	~~11~~	8
C	~~11~~	~~8~~	–	2	3
D	9	~~12~~	~~5~~	–	~~13~~
E	~~14~~	~~10~~	5	8	–

Mit den noch offenen Elementen verfahren wir genauso wie am Anfang. Die größte Zahl ist die 8, die zweimal auftritt. Schon das Streichen der Zahl 8 in der zweiten Zeile führt dazu, daß in dieser Zeile und auch in der fünften Spalte nur noch ein Element übrigbleibt. Wir erhalten so die Lösungselemente 6 und 3 für die Teilstrecken vom Ort B zum Ort C bzw. vom Ort C zum Ort E.

von \ nach	A	B	C	D	E
A	–	5	~~10~~	~~14~~	~~16~~
B	~~5~~	–	6	~~11~~	~~8~~
C	11	~~8~~	–	2	3
D	9	~~12~~	~~5~~	–	~~13~~
E	~~14~~	~~10~~	5	8	–

Da in jeder Zeile und in jeder Spalte nur ein Lösungselement stehen darf, streichen wir in der dritten Spalte die noch offene Zahl 5 und in der dritten Zeile die Zahl 2. Übrig bleibt eine offene Zahl. Diese 8 ist ein weiteres Lösungselement. Sie legt eine Fahrt vom Ort E zum Ort D fest.

von \ nach	A	B	C	D	E
A	–	5	~~10~~	~~14~~	~~16~~
B	~~5~~	–	6	~~11~~	~~8~~
C	~~11~~	~~8~~	–	~~2~~	3
D	9	~~12~~	~~5~~	–	~~13~~
E	~~14~~	~~10~~	~~5~~	8	–

Mit diesen fünf Lösungselementen wird eine Rundfahrt festgelegt. Sie führt vom Ort A über Ort B, C, E und D wieder zum Ort A zurück. Ihre Dauer beträgt

$$5 + 6 + 3 + 8 + 9 = 31 \text{ Minuten.}$$

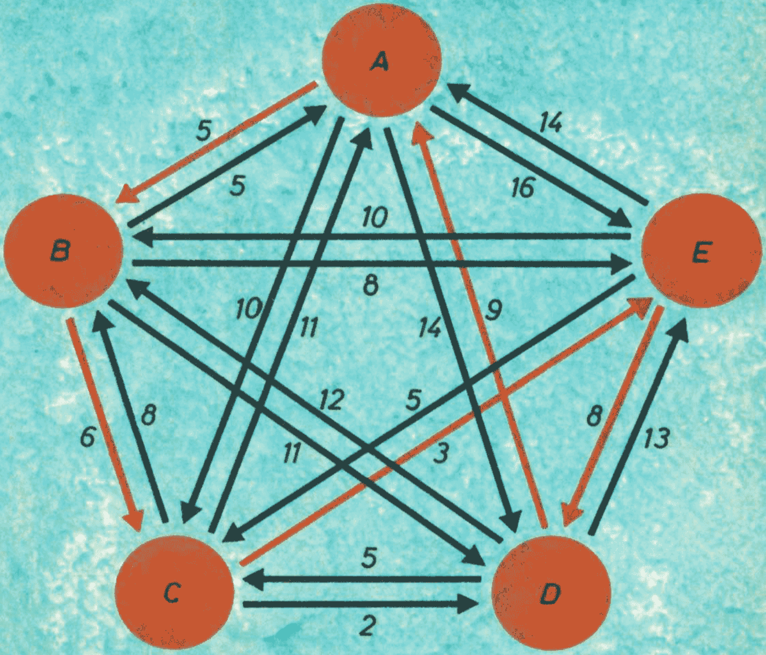
Bei einer Geschwindigkeit von 30 Kilometern in der Stunde legt das Auto dabei eine Entfernung von 15,5 Kilometern zurück.

580000 Mark gespart

Mit den mathematischen Verfahren zur Lösung von Rundfahrtproblemen lassen sich auch Aufgaben bearbeiten, die gar nichts mehr mit Fahrten zu tun haben. Stellen wir uns einen Maschinenbaubetrieb vor, der innerhalb eines Monats Serien von 8 verschiedenen Erzeugnissen produziert. Für jedes dieser Produkte müssen die Maschinen besonders vorbereitet werden. In einigen Fällen kann der Wechsel von einer Produktionsserie zur anderen schnell und mit niedrigen Kosten erfolgen. In anderen Fällen ist mit diesem Übergang ein beträchtlicher Aufwand an Zeit und Arbeit und damit an Kosten verbunden. Hier kommt es darauf an, für die 8 Produktionsserien eine solche Reihenfolge zu ermitteln, daß die Summe der Kosten für alle Umstellungen von einer auf die nächste Serie minimal wird. An die Stelle der Zeit- oder Entfernungstabelle tritt eine Kosten-Tabelle. Deren Elemente geben an, was der Übergang von einer Serie auf eine andere kostet.

Mit dem Rundfahrtproblem wurden schon beachtliche Erfolge erzielt. Die Deutsche Post untersuchte damit die Touren der Landpost und berechnete für diese Rundfahrten kürzere Wege. In jedem Jahr werden damit

Schnellste Tour zwischen 5 Orten (rote Pfeile).



A
B
C
D
E
5
5
14
16
10
8
10
11
14
9
12
5
8
6
11
3
8
13
5
2

1,5 Millionen Fahrtkilometer und 580000 Mark eingespart. Außerdem sind 31 Postautos und 19 Arbeitskräfte weniger erforderlich. Das ist nur ein Beispiel von vielen. Abschließend formulieren wir eine Aufgabe, die ihr wiederum selbständig lösen sollt.

● Möbelauto auf schnellem Kurs

Ein CENTRUM-Warenhaus liefert seinen Kunden die gekauften Möbel frei Haus. Bei einer Rundfahrt durch die Stadt werden den Familien A, B, C, D und E Einrichtungsgegenstände zugestellt. Die Tour beginnt und endet am Warenhaus W. In einer Zeit-Tabelle sind die Fahrzeiten des Möbelautos vom Warenhaus zu den 5 Kunden und zwischen den Wohnungen der Kunden zusammengestellt. Welche Tour muß das Möbelauto fahren, damit die Summe der reinen Fahrzeiten so minimal wie möglich wird? Die Zeiten für das Ausladen der Möbelstücke bleiben unberücksichtigt.

nach / von	W	A	B	C	D	E
W	–	16	25	8	20	32
A	21	–	18	12	25	10
B	25	23	–	20	24	11
C	10	18	19	–	17	28
D	23	19	15	27	–	24
E	30	14	13	24	22	–

Von Nußknackern und Räuchermännern

Was ist lineare Optimierung?

Viele Menschen haben Freude an den schönen bunten Holzfiguren, die im Erzgebirge und auch in einigen Gegenden des Thüringer Waldes produziert werden, den Förstern, Bergleuten und den Königen als Nußknacker oder als Räuchermänner. Verschiedene Betriebe stellen diese Figuren in vielfältigen Formen her.

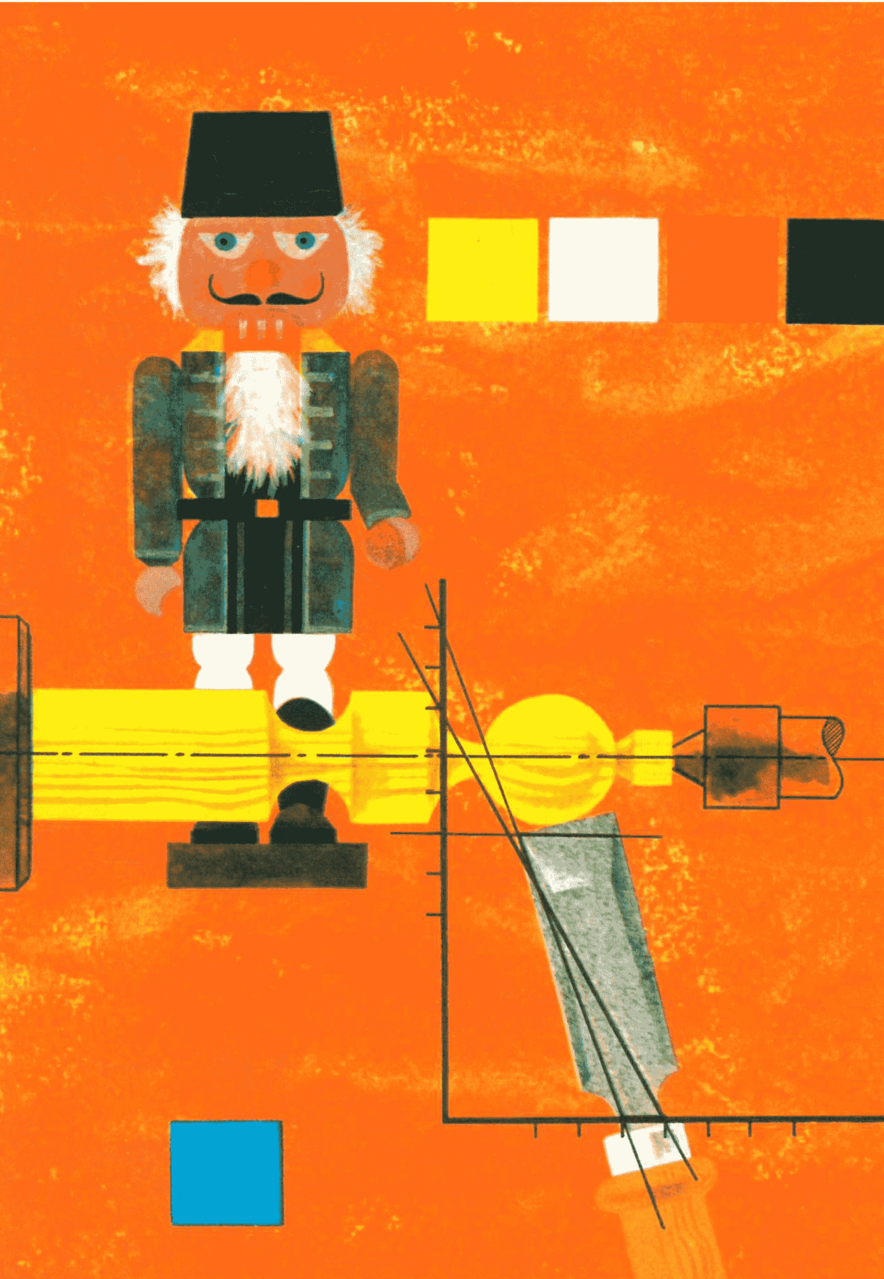
Schauen wir uns die Arbeit an. Zuerst entstehen an der Drehbank unter den geschickten Händen der Drechsler die Einzelteile, aus denen dann die Nußknacker oder Räuchermänner zusammengesetzt und geleimt werden. Mit dem Schnitzmesser erhalten die Gesichter schließlich noch besonders grimmige oder auch freundliche Züge. Danach bekommen die Figuren mit dem Pinsel ihr buntes Kleid aufgemalt. Kleine Fellstücke, als Bart oder als Haarschopf aufgeklebt, vervollständigen das lustige Aussehen.

Diese Herstellung können wir in zwei wesentliche Vorgänge einteilen. Zuerst die gesamte Holzbearbeitung, dann die Malarbeiten. Die dafür erforderlichen Zeiten sind unterschiedlich. Für einen Nußknacker dauern beide Vorgänge länger als für einen Räuchermann. Wenn wir einen Nußknacker kaufen, zahlen wir auch einen höheren Preis.

Nach welchen Gesichtspunkten wird die Arbeit in der Abteilung eines Spielwarenbetriebes, die nur Nußknacker und Räuchermänner herstellt, organisiert?

Wir untersuchen jetzt, wie der Plan für eine solche Produktion aufgestellt wird. Es geht hier nicht nur darum, so viele Figuren zu produzieren, wie vom Handel bestellt sind. Der Betrieb legt seinem Plan noch eine Reihe weiterer Ziele zugrunde. Er strebt beispielsweise an, mit niedrigsten

Kosten und höchstem Gewinn zu arbeiten und seine Maschinen und das Material vollständig auszulasten.
Da wir nicht irgendeinen beliebigen, sondern den bestmöglichen Plan suchen, kann uns nur die Mathematik helfen.
Allerdings ist es sehr kompliziert, die Berechnungen für alle denkbaren Gesichtspunkte gleichzeitig auszuführen. Wir entscheiden uns deshalb für ein einziges Ziel und fragen: Wie ist die Produktion in der Abteilung zu organisieren, damit ein maximaler, das heißt möglichst großer Gewinn erzielt wird?
Das mathematische Verfahren, das uns eine Antwort auf diese Frage liefert, heißt „Lineare Ogtimierung". Erläutern wir zunächst diesen Begriff!
Aus dem Lateinischen stammt das Wort „Optimum", auf Deutsch „das Beste". Für unsere Aufgabe bedeutet das: Wir berechnen bestmögliche Werte für die Produktion von Nußknackern und Räuchermännern. Diese beiden Zahlen geben an, wieviel Figuren von der einen und wieviel von der anderen Sorte täglich herzustellen sind, damit der Gewinn maximal wird. Der Zusatz „linear" beschreibt Eigenschaften der verwendeten mathematischen Beziehungen. Wir können beispielsweise die optimale Lösung auf zeichnerischem Wege bestimmen und arbeiten dabei nur mit linearen, das heißt geradlinigen Darstellungen.
Für die Anwendung der linearen Optimierung stellt unser Beispiel mit den Nußknackern und Räuchermännern nur eine sehr einfache Aufgabe dar. Bei der Produktionsplanung in großen Abteilungen oder ganzen Fabriken, die eine Vielzahl von Erzeugnissen herstellen, ist dieses mathematische Verfahren noch viel wichtiger, denn auf anderem Wege läßt sich ein bestmöglicher Plan nicht aufstellen.



Die ersten Methoden der linearen Optimierung entwickelte im Jahre 1939 der schon erwähnte sowjetische Mathematiker Leonid Witalewitsch Kantorowitsch. Bereits im Alter von 22 Jahren wurde er zum Professor ernannt. Er arbeitete viele Jahre an der Universität Leningrad und ist heute in dem neu errichteten Forschungszentrum in Nowosibirsk tätig. Professor Kantorowitsch stellte ein großes Programm von verschiedenen mathematischen Methoden zur Planung der Produktion in der Sowjetunion auf. Im Jahre 1965 wurde er dafür mit dem Leninpreis geehrt.
Bevor wir uns dem Plan für die Abteilung des Spielzeugbetriebes zuwenden, erläutern wir noch einige Maßnahmen, die immer durchzuführen sind, wenn man die lineare Optimierung für die Produktionsplanung anwendet.
Unsere Arbeit unterteilen wir in vier Schritte.

Erster Schritt: Wir einigen uns über das Ziel
Zuerst untersuchen Ökonomen, Techniker, Mathematiker und andere Fachleute gemeinsam den Betrieb oder die Abteilung, um alle Zahlen für die Berechnungen zu bestimmen. Sie ermitteln beispielsweise die Leistungsfähigkeit der Maschinen, das notwendige Rohmaterial, den Verbrauch an Elektroenergie und ähnliche Tatsachen. Sie berücksichtigen auch die vorliegenden Bestellungen. Das ist eine Aufgabe, die nicht von den Mathematikern allein gelöst werden kann. Schließlich einigen sich die Fachleute und die Betriebsleitung über die Ziele, für die dann die Mathematiker die bestmöglichen Bedingungen berechnen. Solche Ziele sind, wie wir bereits feststellten, niedrigste Kosten, vollständige Auslastung der Maschinen und des Materials und höchster Gewinn. Die Aufgaben des Volkswirtschaftsplanes haben dabei entscheidenden Einfluß.
Den Begriff des Gewinnes erklären wir noch etwas genauer.

Wenn wir eine Ware kaufen – sei es ein Nußknacker, ein Hemd, ein Brot, ein Fahrrad oder etwas anderes –, so bezahlen wir dafür den Endverbraucherpreis (EVP). Dieser setzt sich aus mehreren Teilen zusammen.
Jeder Betrieb wendet für die Produktion außer den Lohnkosten noch Selbstkosten auf. Diese entstehen durch das verbrauchte Material, die benötigte Energie und die Kosten für Maschinen und Gebäude. Sie hängen aber auch sehr wesentlich von der Organisation der Produktion ab. Für seine Erzeugnisse erhält der Betrieb den Industrieabgabepreis (IAP), und die Differenz zu den Kosten ist sein Gewinn.
Die Summe von Industrieabgabepreis und einer Handelsspanne führt schließlich zum Endverbraucherpreis. Die Handelsspanne umfaßt dabei alle Kosten und den Gewinn der Handelsbetriebe.
Fassen wir diese Tatsachen zusammen, so erhalten wir folgende Formeln:

Endverbraucherpreis = Industrieabgabepreis + Handelsspanne
Industrieabgabepreis = Kosten + Gewinn
Gewinn = Industrieabgabepreis — Kosten
Kosten = Lohnkosten + Selbstkosten

Gewinn = Industrieabgabepreis — Lohnkosten — Selbstkosten

Industrieabgabepreise und Löhne sind gesetzlich festgelegt. Einen hohen Gewinn kann der Betrieb nur durch Senkung der Selbstkosten erzielen, denn aus der letzten Formel erkennen wir sofort:
Je niedriger die Selbstkosten, desto höher der Gewinn!
An hohen Gewinnen der Betriebe sind wir alle sehr interessiert. Sie werden für den Bau neuer Fabriken und Schulen,

für Stipendien der Studenten, für Theater und Sportstätten, für Renten und für viele weitere nützliche Zwecke verwendet. Natürlich hat auch der Betrieb von seinem Gewinn selbst einen großen Nutzen. Die Arbeiter erhalten Jahresendprämien, die sozialen Einrichtungen werden verbessert und erweitert und neue moderne Maschinen angeschafft, die es dem Betrieb ermöglichen, seine Produktion zu steigern.
Für die Abteilung des Spielwarenbetriebes wurde deshalb als Ziel ein maximaler Gewinn festgelegt.
Die Untersuchungen ergaben folgende Tatsachen:
Jeder Nußknacker bringt einen Einzelgewinn von 5 Mark. Bei den Räuchermännern liegt dieser Wert bei 2 Mark.
Die Kapazität der Holzbearbeitung reicht aus, um täglich entweder 50 Nußknacker oder 100 Räuchermänner herzustellen. Natürlich ist in diesen Grenzen auch eine gemischte Produktion beider Figuren möglich, beispielsweise gleichzeitig 25 Nußknacker und 50 Räuchermänner.
Die mit dem Bemalen beschäftigten Kollegen können je Tag entweder 40 Nußknacker oder 120 Räuchermänner oder eine gemischte Produktion fertigstellen.
Aufgrund der Bestellungen sollen täglich nicht mehr als 80 Räuchermänner produziert werden. Für die Nußknacker gibt es eine solche Beschränkung nicht.
Diese Zahlen stellen wir noch in einer Tabelle zusammen.

	Nußknacker	Räuchermänner
Gewinn pro Figur	5 Mark	2 Mark
Kapazität der Holzbearbeitung	50 Stück	100 Stück
Kapazität der Bemalung	40 Stück	120 Stück
Höchstgrenze der Produktion	–	80 Stück

Zweiter Schritt: Wir stellen ein Modell auf

In einem zweiten Schritt werden das angestrebte Ziel und die vorhandenen Bedingungen und Einschränkungen in die Sprache der Mathematik übertragen. Wir bezeichnen diesen Schritt als Modellierung und das Resultat als mathematisches Modell. Während bei dem ersten Schritt Fachleute aus verschiedenen Gebieten mitarbeiteten, ist die Modellierung vorwiegend Aufgabe der Mathematiker. Für unser Beispiel geschieht das folgendermaßen:

Wir bezeichnen mit x die Zahl der täglich hergestellten Nußknacker und mit y die Zahl der Räuchermänner. Je Nußknacker ergibt sich ein Gewinn von 5 Mark, für x Figuren somit $5 \cdot x$ Mark. Entsprechend gilt für die Räuchermänner $2 \cdot y$ Mark. Der Gesamtgewinn G setzt sich aus beiden Teilen zusammen.

$$G = 5 \cdot x + 2 \cdot y$$

Er soll so groß wie nur möglich werden, also ein Maximum annehmen, und wir schreiben deshalb

$$G = 5 \cdot x + 2 \cdot y \rightarrow \text{Maximum!}$$

Diese Beziehung heißt Zielfunktion (ZF).

Die für die Holzbearbeitung, Bemalung und Höchstgrenze der Produktion bestehenden Beschränkungen werden wie folgt modelliert: Die Kapazität der Holzbearbeitung ermöglicht es, täglich 50 Nußknacker herzustellen. Für eine Figur wird somit $\frac{1}{50}$ dieser Kapazität und für x Stück das x-fache von $\frac{1}{50}$, also $x \cdot \frac{1}{50} = \frac{x}{50}$ in Anspruch genommen. Entsprechend benötigt man $\frac{1}{100}$ der

Holzbearbeitungskapazität für einen Räuchermann und $y \cdot \frac{1}{100} = \frac{y}{100}$ für y Stück.

Die Gesamtkapazität der Holzbearbeitung darf durch die x Nußknacker und y Räuchermänner nicht überschritten werden. Deshalb schreiben wir

$$\frac{x}{50} + \frac{y}{100} \leqq 1$$

Die bei der Bearbeitung beider Figuren benötigte Kapazität ist kleiner oder höchstens gleich der Gesamtkapazität. Wir vereinfachen diese Ungleichung, indem wir mit dem Faktor 100 multiplizieren und erhalten

$$100 \cdot \frac{x}{50} + 100 \cdot \frac{y}{100} \leqq 100 \cdot 1$$

Es ergibt sich $$2x + y \leqq 100$$

Diese Ungleichung nennen wir erste Nebenbedingung (NB 1). Auf ähnliche Weise kommen wir für das Bemalen zur zweiten Nebenbedingung (NB 2):

$$\frac{x}{40} + \frac{y}{120} \leqq 1$$

Hier multiplizieren wir mit dem Faktor 120.

$$120 \cdot \frac{x}{40} + 120 \cdot \frac{y}{120} \leqq 120 \cdot 1$$

Es ergibt sich $$3x + y \leqq 120$$

Die Tatsache, daß täglich nicht mehr als 80 Räuchermänner herzustellen sind, drücken wir durch eine dritte Nebenbedingung (NB 3) aus:

$$y \leqq 80$$

Auf der linken Seite dieser Ungleichung steht nur y. Da wir später auch die beiden ersten Nebenbedingungen nach y auflösen, haben wir diese hier schon entsprechend vereinfacht.
Wir sagten schon an anderer Stelle, daß während der mathematischen Lösung praktischer Aufgaben der konkrete Sachverhalt unbeachtet bleibt. Für die Berechnungen gelten lediglich die Gesetze der Mathematik. Deshalb müssen alle Bedingungen vorher genau überlegt werden. Sinnvoll sind bei unserer Aufgabe nur positive Werte für x und y. Was würde beispielsweise $x = -3$ bedeuten? Es sind keine Nußknacker zu produzieren, sondern drei Stück zu zerstören! Das ist natürlich großer Unsinn. Um solchen Ergebnissen vorzubeugen, formulieren wir noch zwei Nichtnegativitätsbedingungen (NNB1 und NNB2):

$$x \geqq 0$$
$$y \geqq 0$$

Diese beiden Ungleichungen orientieren auf positive Werte. Die in ihnen auch enthaltenen Möglichkeiten $x = 0$ oder $y = 0$ besagen, daß ein maximaler Gewinn eventuell durch das Herstellen von nur einer Sorte von Figuren erzielt werden kann. Die Ergebnisse der Modellierung stellen wir übersichtlich zusammen:

1. Zielfunktion	$G = 5x + 2y \rightarrow$ Maximum!	(ZF)
2. Nebenbedingungen	$2x + y \leqq 100$	(NB1)
	$3x + y \leqq 120$	(NB2)
	$y \leqq 80$	(NB3)
3. Nichtnegativitätsbedingungen	$x \geqq 0$	(NNB1)
	$y \geqq 0$	(NNB2)

Diese drei Teile – Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen – ergeben das mathematische Modell.

Dritter Schritt: Wir konstruieren die Lösung

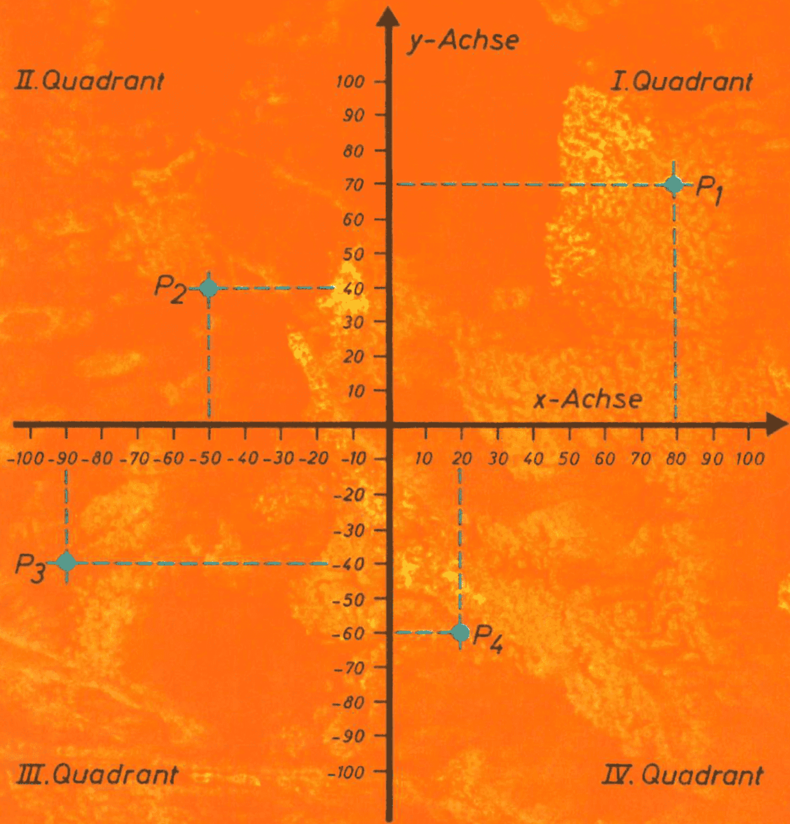
Bei der Lösung kommt es jetzt darauf an, für x und für y je eine Zahl zu finden, so daß G einen maximalen Wert annimmt und die Nebenbedingungen eingehalten werden. Nur nichtnegative Zahlen kommen in Betracht.

Es existieren sehr viele Wertepaare (x; y), die die Nebenbedingungen erfüllen. Aber nur ein Wertepaar sichert den größten Gewinn. Diese optimalen Werte für x und für y wollen wir finden. Wir verwenden dazu ein zeichnerisches Verfahren. Die Grundlage unserer Darstellung ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Jedem Wertepaar (x; y) entspricht genau ein Punkt in diesem Achsenkreuz. Und umgekehrt wird jeder Punkt genau durch ein Wertepaar beschrieben. Die x-Achse und die y-Achse teilen die Fläche in vier Quadranten.

Beim genauen Betrachten der Quadranten erkennen wir leicht eine Gesetzmäßigkeit über die Vorzeichen von x und y:

	Vorzeichen von	
	x	y
im I. Quadranten	positiv	positiv
im II. Quadranten	negativ	positiv
im III. Quadranten	negativ	negativ
im IV. Quadranten	positiv	negativ

Koordinatensystem mit den 4 Quadranten.
Zum Punkt P_1 gehört das Wertepaar (x; y) = (80; 70).
Zum Punkt P_2 gehört das Wertepaar (x; y) = (–50; 40).
Zum Punkt P_3 gehört das Wertepaar (x; y) = (–90; –40).
Zum Punkt P_4 gehört das Wertepaar (x; y) = (20; –60).



y-Achse
II. Quadrant
I. Quadrant
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
P1
P2
x-Achse
-100 -90 -80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
P3
P4
III. Quadrant
IV. Quadrant

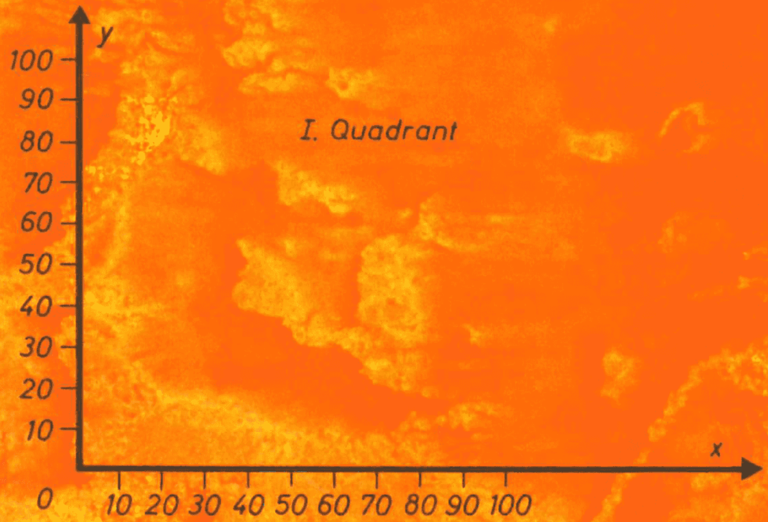
Lediglich im ersten Quadranten sind sowohl x als auch y positiv. Auf Grund der Nichtnegativitätsbedingungen $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ kommen für die Lösung somit nur die Punkte dieses ersten Quadranten in Frage. Da auch $x = 0$ oder $y = 0$ zulässig sind, gehören auch der rechte Teil der x-Achse und der obere Teil der y-Achse dazu.
Die drei Nebenbedingungen schränken den Bereich des ersten Quadranten weiter ein. Wir wollen uns jetzt die Darstellung der ersten Nebenbedingung genau anschauen.
Wir lösen $2x + y \leqq 100$ zuerst nach y auf. Diese Ungleichung $y \leqq 100 - 2x$ enthält auch den Fall der Gleichung $y = 100 - 2x$. Wir stellen diese Gleichung graphisch dar.
Wir wählen verschiedene x-Werte, setzen sie in die Gleichung ein und berechnen die zugehörigen y-Werte. In einer Tabelle halten wir die Ergebnisse fest:

$y = 100 - 2x$

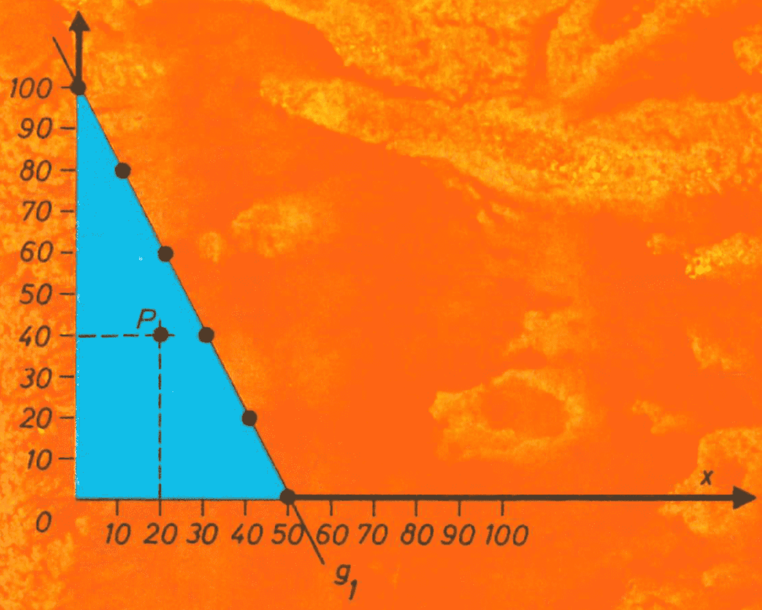
x	0	10	20	30	40	50
y	100	80	60	40	20	0

Die zusammengehörenden Paare der x-Werte und y-Werte tragen wir als Punkte in das Achsenkreuz ein. Die Verbindung aller Punkte ergibt dann eine Gerade, die wir mit g_1 bezeichnen wollen.
Die x-Werte und y-Werte von Punkten auf dieser Geraden erfüllen die Gleichung $y = 100 - 2x$.
Wir können uns leicht davon überzeugen, daß für alle Punkte unterhalb der Geraden $y < 100 - 2x$ gilt. Zum Beispiel gehören zum Punkt P die Werte $x = 20$ und

Oben: Alle Punkte des ersten Quadranten einschließlich der beiden Achsenteile erfüllen die Nichtnegativitätsbedingung $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$.
Unten: Die erste Nebenbedingung schränkt den Lösungsbereich (blau) schon beträchtlich ein.



y
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
I. Quadrant
x
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100



100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
P
x
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
g_1

$y = 40$. Setzen wir beide Zahlen in die Ungleichung ein, so erhalten wir $40 < 100 - 2 \cdot 20$ oder $40 < 60$. Diese Relation ist zweifelsohne richtig.

Die beiden Nichtnegativitätsbedingungen und die erste Nebenbedingung (NB 1) ergeben zusammen alle Punkte des blauen Dreiecks in Abbildung S. 109 unten.

Bei Hinzunahme der nächsten Bedingung (NB 2) verkleinert sich dieser Bereich noch weiter.

Zur Gleichung $y = 120 - 3x$ gehört folgende Tabelle:

x	0	10	20	30	40
y	120	90	60	30	0

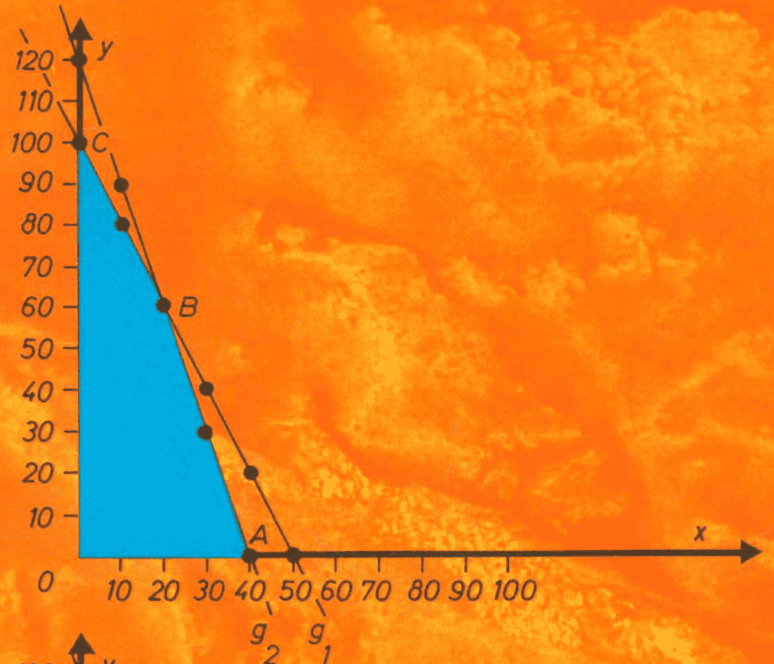
Wir tragen die entsprechenden Punkte wieder in das Achsenkreuz ein. Ihre Verbindung führt zur Geraden g_2. Alle Punkte, die auf oder unterhalb von g_2 liegen, erfüllen die Ungleichung $y \leqq 120 - 3x$. Vom bisherigen Bereich wird durch die neue Gerade ein Stück abgeschnitten, so daß jetzt die Fläche 0ABC übrigbleibt.

Schließlich berücksichtigen wir noch die dritte Nebenbedingung (NB 3) $y \leqq 80$. Sie wird durch alle Punkte erfüllt, die auf oder unterhalb der Geraden g_3 liegen. Als endgültiger Bereich, in dem wir die optimale Lösung suchen, ergibt sich jetzt die fünfeckige Fläche 0ABDE.

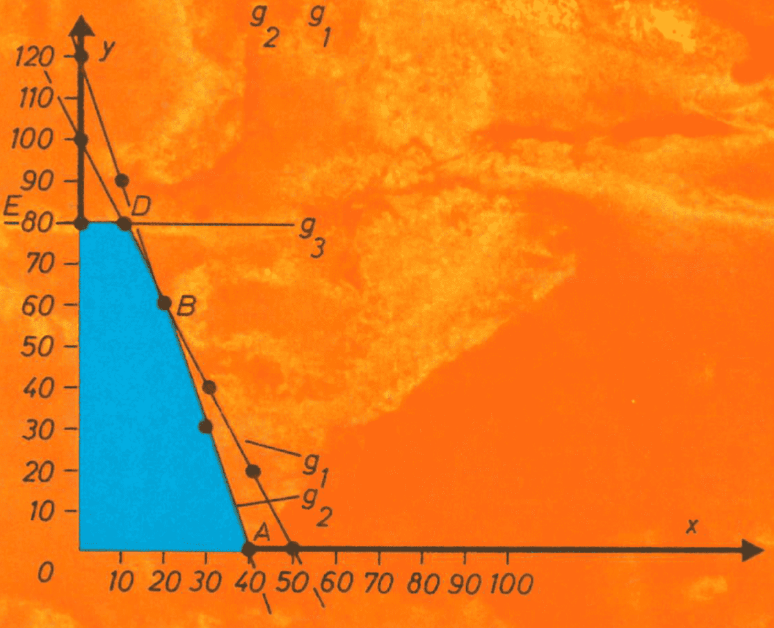
Blicken wir kurz zurück, so wird uns die Bedeutung der Nebenbedingungen klar. Sie legen einen Bereich fest, aus dem ein Punkt mit seinen Werten x und y die optimale Lösung darstellt. Jede weitere Nebenbedingung schränkte diesen Bereich weiter ein.

Oben: Die zweite Nebenbedingung führt zu einer weiteren Verkleinerung des Lösungsbereiches.

Unten: Durch alle drei Nebenbedingungen ist der Bereich, in dem wir die optimale Lösung suchen, endgültig festgelegt.



y
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
C
B
A
x
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
g_2
g_1



y
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
E
D
g_3
B
g_1
g_2
A
x
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Wie finden wir nun die optimale Lösung?
Wir benutzen dazu die Zielfunktion $G = 5x + 2y$ und setzen für G irgendeine willkürlich gewählte Zahl ein, beispielsweise $G = 100$. Aus $G = 5x + 2y$ entsteht $100 = 5x + 2y$.
Diese Funktion lösen wir nach y auf:

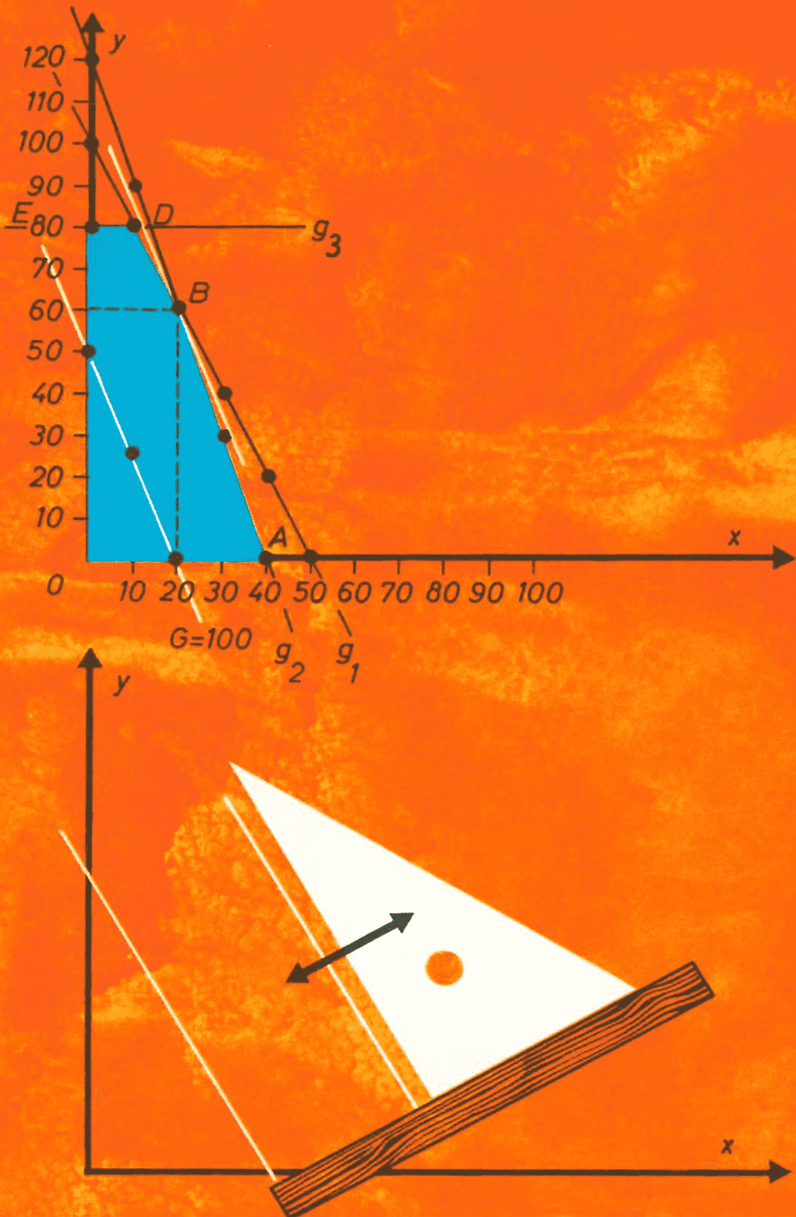
$$2y = 100 - 5x \text{ oder}$$
$$y = 50 - \frac{5}{2}x$$

Jetzt berechnen wir für $y = 50 - \frac{5}{2}x$ wieder eine Tabelle:

x	0	10	20
y	50	25	0

Diese Punkte tragen wir ebenfalls in das Achsenkreuz ein, verbinden sie und kennzeichnen die erhaltene Gerade (weiß) mit $G = 100$.
Da die Zielfunktion ein Maximum annehmen soll, verschieben wir diese Gerade zu sich parallel so weit nach außen, bis sie gerade noch den blauen Bereich berührt (s. S. 113, oben).
Die Werte für x und y jenes äußersten Punktes geben die optimale Lösung an.
Anstelle von $G = 100$ hätten wir auch jede andere Zahl wählen und einsetzen können. Das Resultat wäre eine Parallele zur Geraden für $G = 100$ gewesen, die wir in gleicher Weise parallel bis zum Punkt B verschieben würden.

Oben: Die Gerade der Zielfunktion berührt den Lösungsbereich im Punkt B. Seine Werte bestimmen die optimale Lösung.
Unten: Parallelverschiebung einer Geraden mit beweglichem Zeichendreieck und festgehaltenem Lineal.



y
120
110
100
90
E
80
D
g_3
70
B
60
50
40
30
20
10
A
x
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
G=100
g_2
g_1
y
x

Aus der graphischen Darstellung in Abbildung S. 113 lesen wir ab: Die optimale Lösung liebt beim Punkt B. Er hat die Werte $x = 20$ und $y = 60$.
Der maximale Gewinn läßt sich leicht berechnen. Wir setzen diese beiden Werte in die Zielfunktion

$$G = 5 \cdot x + 2 \cdot y$$

ein und erhalten: $G = 5 \cdot 20 + 2 \cdot 60$ oder $G = 220$

Vierter Schritt: Wir erklären die Ergebnisse
Beziehen wir diese mathematischen Ergebnisse auf unsere Aufgabe, so heißt das: Die Abteilung erzielt täglich einen maximalen Gewinn von 220 Mark, wenn sie 20 Nußknacker und 60 Räuchermänner produziert.
Ist dieses Resultat erstaunlich? Immerhin werden ja von den Nußknackern, die pro Stück einen höheren Gewinn als die Räuchermänner erbringen, bedeutend weniger hergestellt.
Wenn es keine Einschränkungen durch die Nebenbedingungen gibt, so produziert der Betrieb natürlich nur die einträglicheren Nußknacker. Aber die vorhandenen Kapazitätsgrenzen bedingen, daß ein gemischtes Programm günstiger ist. Die 60 Räuchermänner tragen mit nur je 2 Mark Gewinn sogar einen höheren Anteil (120 Mark) zu diesem Gesamtgewinn bei als die 20 Nußknacker ($20 \cdot 5 = 100$ Mark).
Überprüfen wir noch, wie die Kapazitäten der Abteilung ausgelastet sind.
Für die Holzarbeiten hatte sich $\frac{x}{50} + \frac{y}{100} \leqq 1$ ergeben.
Setzen wir $x = 20$ und $y = 60$ ein, erhalten wir

$$\frac{20}{50} + \frac{60}{100} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$

In der Nebenbedingung gilt also das Gleichheitszeichen. Die holzverarbeitenden Kapazitäten werden im vollen Umfang genutzt.
Genauso ist es für die Malarbeiten. Die Ungleichung $\frac{x}{40} + \frac{y}{120} \leqq 1$ geht mit $x = 20$ und $y = 60$ in eine Gleichung über:

$$\frac{20}{40} + \frac{60}{120} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Auch hier gibt es keine ungenutzten Reserven.
Ein Produktionsplan, der alle vorhandenen Kapazitäten auslastet, ist immer wünschenswert. Dieser Erfolg hat sich zusätzlich zu dem angestrebten höchsten Gewinn ergeben.
Bemerken wir abschließend noch, daß auch die dritte Nebenbedingung erfüllt wird. Mit $y = 60$ Stück bleibt die Herstellung der Räuchermännner unterhalb der zulässigen Höchstgrenze von 80 Stück.

Computer für große Modelle
Unsere Aufgabe mit den Nußknackern und Räuchermännern stellt nur ein sehr einfaches Beispiel der linearen Optimierung dar. Für das Modell genügen die beiden Unbekannten x und y. Deshalb konnten wir die Lösung zeichnerisch ermitteln.
Die Zeichenebene verfügt über zwei Dimensionen: Breite und Höhe. Für jede unserer beiden Unbekannten x und y benötigten wir bei der Darstellung jeweils eine Dimension.
Bei Modellen mit mehr als zwei Unbekannten kann man die Lösung daher nicht mehr auf zeichnerischem Wege finden. Die Mathematiker arbeiten in solchen Fällen mit rechnerischen Verfahren, die aber viel Mühe erfordern.

Die meisten Betriebe erzeugen mehr als zwei Produkte. Modelle für ihren Produktionsplan enthalten oft einige Hundert Unbekannte und Nebenbedingungen. Die Suche nach der optimalen Lösung wird dann einem Rechenautomaten übertragen. Er erledigt die Arbeit, an der Mathematiker einige Wochen sitzen würden, in einer Stunde.
Vor einigen Jahren untersuchte die Deutsche Reichsbahn den bestmöglichen Einsatz der Bahnpostwagen. Das mathematische Modell umfaßte sechshundertfünfzig Nebenbedingungen und etwa achttausend Unbekannte. Probleme von solcher Größe kann nur ein Computer lösen.
Abschließend formulieren wir wieder eine Aufgabe, die ihr selbständig lösen sollt. Im Gegensatz zu unserem ersten Beispiel beschreiben wir den Sachverhalt jetzt wesentlich allgemeiner. Es handelt sich dabei um Fragen, wie sie in jedem Betrieb auftreten. Wir beschränken uns wiederum auf nur zwei Erzeugnisse, um die Lösung zeichnerisch bestimmen zu können.

● Zwei Produkte auf drei Maschinen

Ein Betrieb produziert die beiden wertvollen Erzeugnisse E_1 und E_2. Sie werden auf 3 verschiedenen Arten von Maschinen M_1, M_2 und M_3 bearbeitet. Die Tageskapazitäten dieser 3 maschinellen Anlagen betragen 80, 100 und 64 Stunden.
Was bedeuten diese Zahlen? Nehmen wir an, die Arbeitszeit in dem Betrieb beträgt 8 Stunden und von der Maschinenart M_1 stehen 10 Stück zur Verfügung. Eine Maschine weist somit eine Tageskapazität von 8 Stunden auf. Für 10 Maschinen von der Art M_1 beträgt die Kapazität dann $10 \cdot 8 = 80$ Stunden. Auf ähnliche Weise er-

klären sich auch die Angaben von 100 beziehungsweise 64 Stunden.
Jedes einzelne Produkt von E_1 wird auf M_1 4, auf M_2 10 und auf M_3 8 Stunden bearbeitet. Jede erzeugte Einheit von E_2 wird 8 Stunden auf M_1 und 4 Stunden auf M_2 bearbeitet. Der Einsatz der dritten Maschinenart M_3 ist für das Erzeugnis E_2 nicht erforderlich.
Für jedes Produkt von E_1 beträgt der Gewinn 600 Mark, für jedes Stück von E_2 200 Mark.
Wieviel Einheiten müssen von den beiden Erzeugnissen täglich hergestellt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird? Gemeinsam stellen wir noch das Modell auf. Zuerst fassen wir die im Text genannten Zahlen zu zwei Tabellen zusammen.

	E_1	E_2
Gewinn pro Einheit	600	200

	Erforderliche Kapazität für jede Einheit von E_1	Erforderliche Kapazität für jede Einheit von E_2	Vorhandene Tageskapazität der Maschinenarten
Maschinenart M_1	4	8	80
Maschinenart M_2	10	4	100
Maschinenart M_3	8	0	64

Wir bezeichnen die täglich produzierten Mengen von E_1 mit x und von E_2 mit y. Aus der ersten Tabelle ergeben sich die Gewinne. Sie betragen für E_1 $600 \cdot x$ Mark und für E_2 $200 \cdot y$ Mark. Somit heißt die Zielfunktion für den Gesamtgewinn G:

$$G = 600 \cdot x + 200 \cdot y \rightarrow \text{Maximum!} \qquad \text{(ZF)}$$

Die Nebenbedingungen stellen wir mit Hilfe der zweiten Tabelle auf, und zwar getrennt für jede Maschinenart. Eine Einheit von E_1 beansprucht 4 Stunden der Kapazität von M_1. Damit benötigen x Stück von E_1 eine Kapazität von $4 \cdot x$ Stunden. Ähnliches gilt für E_2; y Einheiten nehmen $8 \cdot y$ Stunden der Kapazität von M_1 in Anspruch. Die erforderliche Gesamtkapazität der Maschinenart M_1 beträgt somit $4 \cdot x + 8 \cdot y$. Sie darf nicht größer sein als die vorhandene Kapazität von 80 Stunden. Aus dieser Tatsache folgt für die erste Nebenbedingung die Ungleichung

$$4 \cdot x + 8 \cdot y \leqq 80 \qquad \text{(NB1)}$$

Durch ähnliche Überlegungen gelangen wir zur zweiten und dritten Nebenbedingung für die Maschinenarten M_2 und M_3.

$$10 \cdot x + 4 \cdot y \leqq 100 \qquad \text{(NB2)}$$
$$8 \cdot x + 0 \cdot y \leqq 64 \qquad \text{(NB3)}$$

Wir fassen diese Ergebnisse zum Modell zusammen und fügen natürlich die auch hier geltenden Nichtnegativitätsbedingungen hinzu:

1. Zielfunktion: $G = 600 \cdot x + 200 \cdot y \rightarrow \text{Maximum!}$ (ZF)

2. Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x + 8 \cdot y &\leqq 80 & \text{(NB1)} \\ 10 \cdot x + 4 \cdot y &\leqq 100 & \text{(NB2)} \\ 8 \cdot x &\leqq 64 & \text{(NB3)} \end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} x &\geqq 0 & \text{(NNB1)} \\ y &\geqq 0 & \text{(NNB2)} \end{aligned}$$

Ermittelt für dieses Modell auf zeichnerischem Wege die optimale Lösung! Berechnet dann den maximalen Gewinn und überprüft mit Hilfe der Nebenbedingungen die Auslastung der drei Maschinenarten!

Die Wissenschaft der Warteschlangen

Herr Erlang rechnet mit Telefonen

Für einige der modernen mathematischen Methoden entstanden die Grundlagen schon vor längerer Zeit. Aber erst heute werden sie in großem Umfang angewandt.

Mit der Theorie der Warteschlangen begann es schon vor über sechzig Jahren. In Kopenhagen, der Hauptstadt Dänemarks, erhielt im Jahre 1908 der Ingenieur Agner Krarup Erlang (1878–1929) den Auftrag, einen Plan für die beste Gestaltung des Fernsprechnetzes auszuarbeiten.

Überlegen wir einmal, welche Möglichkeiten es dafür gibt:

1. Jeder Telefonbesitzer wird mit jedem anderen durch eine besondere Leitung verbunden. Daß es so nicht geht, sieht man sofort ein. Denken wir nur an die Riesenmenge von Leitungsdrähten, an das unübersehbare Gewirr von Telefonleitungen und an die Kosten dafür.

Berechnen wir einmal, wieviel Leitungen für hundert Telefone erforderlich sind. Um eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen, betrachten wir in unserer Abbildung den Fall mit 5 Telefonen. Wir stellen uns vor, daß diese Leitungen neu gelegt werden. Die Techniker beginnen am Apparat 1 und stellen folgende Verbindungen her:

1–2
1–3
1–4 Das sind vier Leitungen.
1–5

Danach gehen die Monteure zum Apparat 2. Die Verbindung zu Apparat 1 besteht schon, und sie legen noch folgende Leitungen:

2–3	
2–4	Das sind drei
2–5	weitere Verbindungen.

Vom Apparat 3 aus sind dann nur noch zwei Verbindungen erforderlich:

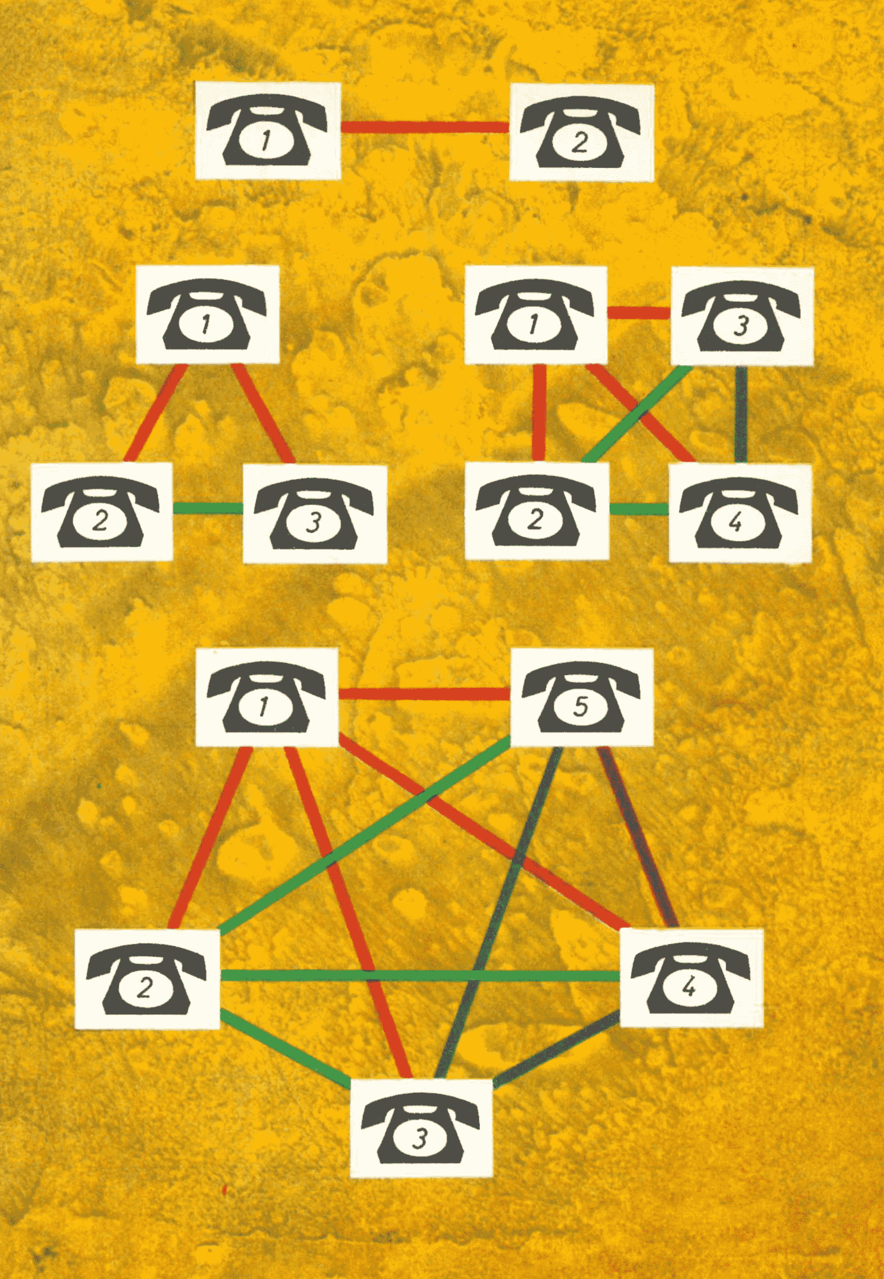
3–4
3–5

Schließlich wird vom Apparat 4 aus noch eine Verbindung zum Teilnehmer 5 geschaltet:

4–5

Alle 5 Apparate sind miteinander verbunden. Die Anzahl der Leitungen beträgt $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.
Nach dem gleichen Prinzip berechnet man die Leitungen für eine andere Anzahl von Apparaten:
Bei 6 Telefonen: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$
Bei 7 Telefonen: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$
Für 100 Apparate berechnen wir
$99 + 98 + 97 + \ldots + 3 + 2 + 1$.
Um nicht diese 99 verschiedenen Zahlen addieren zu müssen, überlegen wir folgende Vereinfachung. Wir fassen $99 + 1 = 100$, $98 + 2 = 100$, $97 + 3 = 100$ und so weiter zusammen und setzen das fort bis $51 + 49 = 100$. Damit ergibt sich 49mal die Summe 100. Übrig bleibt

Oben: 2 Telefone – 1 Leitung
Mitte links: 3 Telefone – 3 Leitungen
Mitte rechts: 4 Telefone – 6 Leitungen
Unten: 5 Telefone – 10 Leitungen


1
2
1
2
3
1
3
2
4
1
5
2
4
3

noch die Zahl 50. Somit erhalten wir bei der Addition aller natürlichen Zahlen von 1 bis 99

$$49 \cdot 100 + 50 = 4950.$$

So groß ist die Zahl der Leitungen bei nur 100 Telefonen in einer Stadt.
Stellt euch diese Zahl für eine Großstadt vor, in der es einige Zehntausend Fernsprecher gibt.

2. Jeder Fernsprechteilnehmer wird mit einer Zentrale, mit dem Fernsprechamt, verbunden. Früher stellten dort Telefonistinnen die gewünschten Verbindungen her. Jetzt geschieht das meist automatisch.

3. Nicht von jedem Telefonanschluß führt eine Leitung bis zum Fernsprechamt, sondern von der Zentrale führen zunächst Leitungen zu Zwischenstationen in den verschiedenen Teilen der Stadt. Von dort verlaufen die Leitungen zu den einzelnen Teilnehmern.
Diese dritte Variante erweist sich als die günstigste. Damit ist aber die Aufgabe noch nicht gelöst. Unbeantwortet bleibt zunächst die Frage, wieviel Vermittlungsstellen im Fernsprechamt arbeiten und wieviel Zwischenstationen in der Stadt eingerichtet werden sollen.
Ist die Anzahl dieser Stellen, Stationen und Leitungen zu klein, kommt es zu vielen Störungen im Fernsprechverkehr. Und das sieht dann so aus.

Oben: 6 Telefone – 15 Leitungen
Unten: 7 Telefone – 21 Leitungen
Ist jeder Fernsprechteilnehmer mit jedem anderen durch eine eigene Leitung verbunden, ergibt sich rasch ein unüberschaubares Durcheinander.


1
2
6
3
5
4


1
2
7
3
6
4
5

Die Leitung ist besetzt

Herr Weiß will Herrn Schwarz anrufen. Er schaut im Telefonbuch nach und liest die Rufnummer von Herrn Schwarz: 35702. Herr Weiß wählt mit der Drehscheibe 3–5–7–, und plötzlich ertönt das Besetztzeichen. Herr Schwarz telefoniert in diesem Moment gar nicht. Durch viele Gespräche anderer Fernsprechteilnehmer gerade in diesem Augenblick sind jedoch die Vermittlungsstellen, Zwischenstationen und Leitungen überlastet. Herr Weiß ist nur bis zur dritten Ziffer „durchgekommen".

Geschieht so etwas sehr oft, vielleicht immer gerade dann, wenn Herr Weiß telefonieren will, so ist das sehr ärgerlich. Die Anzahl der Vermittlungsstellen und der Telefonleitungen reicht dann offenbar nicht aus.

Bei einer zu großen Anzahl solcher Stellen wird der Bau des Telefonnetzes und der Vermittlungszentrale aber sehr teuer. Hinzu kommt noch, daß Techniker ständig die Telefonanlagen überwachen, damit diese immer einwandfrei funktionieren. Auch das kostet Geld. In einem Fernsprechnetz mit zu vielen Vermittlungsstellen, Zwischenstationen und Leitungen bleiben einige der Anlagen die meiste Zeit unbenutzt. Das Geld für den Bau und die Überprüfung wurde teilweise umsonst ausgegeben.

Der Ingenieur Erlang berechnete nun die günstigste Anzahl der Vermittlungsstellen und Telefonleitungen: Die große Anlage des Fernsprechnetzes kostet so wenig wie möglich, und jeder Anrufer erreicht den gewünschten Gesprächspartner möglichst sofort ohne Verzögerungen durch besetzte Leitungen.

Unsere heutigen Telefonanlagen werden nach Berechnungen des Ingenieurs Erlang gebaut.

Damit begründete der dänische Wissenschaftler ein Gebiet der Mathematik, das wir heute Bedienungstheorie nennen. Die sowjetischen Professoren Gnedenko, Chintchin und Kolmogorow entwickelten in den letzten Jahrzehnten die mathematischen Grundlagen auf diesem Gebiet weiter. Deshalb kann man heute viele Aufgaben besser lösen als früher.

Mathematik im Schuhexpreß

In verschiedenen Städten gibt es Werkstätten, die Schuhe für Kunden reparieren, die es sehr eilig haben, den „Schuhexpreß". Auch auf manchen Bahnhöfen existieren solche Dienstleistungsbetriebe.

Die Einrichtung eines „Schuhexpreß" ist gar keine so einfache Sache. Wieviel Handwerker sollen dort arbeiten? Ist ihre Anzahl sehr klein, so werden viele Kunden nicht bedient und sind verärgert. Wer verpaßt schon gern seinen Zug wegen eines verlorenen Absatzes? Betritt ein Reisender eine solche Werkstatt und sieht eine Schlange von vielleicht acht Kunden, die schon auf Bedienung warten, dann verzichtet er auf die Reparatur.

Andererseits können in einer Werkstatt auch nicht so viele Handwerker tätig sein, daß für jeden Kunden, der den „Schuhexpreß" betritt, sofort ein Fachmann bereitsteht. Zu vielen Zeiten warten die Handwerker auf neue Kunden, weil keine Arbeit vorliegt. Das ist zu kostspielig.

Offenbar liegen hier zwei Wünsche vor, die, wie es den Anschein hat, sich zunächst nicht miteinander vereinbaren lassen: der Wunsch der Kunden, sofort ohne Wartezeiten bedient zu werden, und der Wunsch des Betriebes, durch volle Auslastung rentabel zu arbeiten.

Hier liegt das gleiche Problem wie bei der Gestaltung des Fernsprechnetzes vor. Es geht darum, die Bedienungsanlage mit niedrigen Kosten zu betreiben und trotzdem die Kunden so schnell wie möglich zu bedienen. Die Anzahl der dafür notwendigen Handwerker wird mit der Bedienungstheorie berechnet.

Wichtig ist hierbei die Zahl der auf Bedienung wartenden Kunden. Der Fachausdruck dafür heißt Warteschlange. Deshalb nennt man dieses Gebiet der Mathematik auch die Warteschlangentheorie.

Der Überseedampfer als Kunde

Die Worte „Kunde" und „Bedienung" darf man nicht ganz wörtlich nehmen. Wenn unser Frachtschiff „Trattendorf" von großer Fahrt aus Kuba zurückkommt und im Rostocker Überseehafen seine Ladung löscht, so gilt dieses Schiff als Kunde.

Mit der Bedienungstheorie wird die günstigste Anzahl von Schiffsliegeplätzen berechnet: Um jedes in den Hafen einlaufende Schiff möglichst sofort zu be- und entladen, muß dafür jeweils ein Anlegeplatz frei sein. Gibt es aber im Hafen zu viele dieser Plätze, dann bleibt ein großer Teil davon unbenutzt. Ein solcher Hafenbau kostet unnütz Geld. Hier hilft ebenfalls die mathematische Theorie der Warteschlangen.

Man kann mit der Bedienungstheorie auch berechnen, wieviel Taxis in einer Stadt eingesetzt werden müssen, damit jeder Kunde möglichst sofort ein freies Taxi vorfindet. Hat aber der VEB Taxi zu viele Autos in Betrieb, dann stehen sie zu lange an den Taxihaltestellen oder fahren ungenutzt durch die Stadt. Wartungs- und Benzinkosten und Fahrerlohn fallen trotzdem an.

Mit Hilfe der Warteschlangentheorie kann man weiterhin die günstigste Anzahl von Betten für ein Krankenhaus berechnen. Um jeden Kranken sofort aufnehmen zu können, müssen Betten frei sein. Andererseits aber sollen nicht zu viele Betten leer stehen. Das kostet wieder unnütz Geld.

So trägt die Bedienungstheorie in vielen Fällen dazu bei, die Arbeit auf die beste Weise zu organisieren. Beispiels-

weise gibt dieses mathematische Gebiet Antworten auch auf folgende Fragen:
Wieviel Eilboten müssen in einem Postamt arbeiten?
Wieviel Kassen sind für eine Kaufhalle erforderlich?
Welche Anzahl von Generatoren ist in einem Elektrizitätswerk am günstigsten?
Wieviel Lastkraftwagen benötigt ein Speditionsbetrieb?
Unsere Feststellungen für den „Schuhexpreß" gelten auch für andere Dienstleistungsbetriebe, zum Beispiel für Reparaturwerkstätten für Fernsehgeräte oder Kraftfahrzeuge, für Waschanstalten und für Friseursalons. Für solche Bedienungseinrichtungen werden optimale Zahlen der Mitarbeiter und der notwendigen technischen Geräte berechnet.
Allerdings ist das wesentlich schwieriger als bei unseren Beispielen in den vorhergehenden Kapiteln. Dort stützten wir uns auf konkret vorgegebene Zahlen. Hier ist das aber nicht mehr der Fall.
Das Eintreffen des Kunden in einer Bedienungseinrichtung erfolgt zufällig. Man kann nicht voraussagen, wie viele Reisende an einem Vormittag den „Schuhexpreß" auf dem Bahnhof aufsuchen oder wie viele Anrufer das Fernsprechamt in Anspruch nehmen werden. Auch die Dauer der Bedienung ist bei jedem Kunden unterschiedlich lang. Durch längere Beobachtungen in den Bedienungsanlagen werden dafür Durchschnittswerte ermittelt. Sie bilden die Grundlage für komplizierte Berechnungen.

Wir ziehen Bilanz

Blicken wir noch einmal zurück. Wir lernten fünf neue Gebiete der Mathematik kennen, die bei der Planung in unserer Wirtschaft angewandt werden.

Für Vorhaben im Bauwesen und für andere Projekte, die aus vielen Teilarbeiten bestehen und bei denen die Zeit eine Rolle spielt, sahen wir in der Netzplantechnik eine günstige Methode zur Vorbereitung und Kontrolle. Einsparungen an Zeit und damit auch an Kosten bewiesen den großen Nutzen dieses Verfahrens.
Die Zuordnungstheorie befaßte sich mit der bestmöglichen Anordnung von bestimmten Mitteln zur Lösung gegebener Aufgaben. In der ungarischen Methode lernten wir ein Verfahren dieser Theorie kennen. Aus Milliarden von möglichen Plänen für ein bestimmtes Vorhaben wurde innerhalb von kurzer Zeit der beste Plan herausgefunden.
Mit der Rundfahrttheorie war es möglich, aus Milliarden denkbarer Touren zwischen verschiedenen Orten die kürzeste zu bestimmen. Und wiederum erforderte das nur eine sehr kurze Rechenzeit.
Wir zeigten, wie mit Hilfe der linearen Optimierung jener optimale Plan für die Produktion eines Betriebes berechnet wird, der einen maximalen Gewinn garantiert.
Schließlich gewannen wir einen kleinen Einblick in die Theorie der Warteschlangen. Für die vielfältigsten Bedienungseinrichtungen ermittelt sie optimale Bedingungen.
Allen fünf Verfahren war gemeinsam, daß ihre Anwendung in verschiedenen und ganz unterschiedlichen Bereichen erfolgt. Aber immer ging es darum, bestimmte Aufgaben mit geringstem Aufwand, hohem Nutzen oder in kurzer Zeit zu lösen.
Wir erläuterten konkrete Beispiele und lösten Aufgaben. Ganz bestimmt war das keine leichte Arbeit. Und trotzdem müssen wir feststellen: Wir berechneten bisher nur einfache Dinge. Im letzten Abschnitt und an anderen Stellen des Buches erwähnten wir, daß viele Aufgaben in der Praxis umfangreicher sind und kompliziertere Methoden

erfordern. Oft kommt man nur mit großen Rechenautomaten zu einem Ergebnis. Wäre alles so einfach und glatt wie bei unseren Beispielen, dann hätten die Mathematiker diese neuen Theorien schon früher und nicht erst in den allerletzten Jahren oder Jahrzehnten entdeckt. Allerdings war die Zeit dafür erst jetzt herangereift. Auf vielen Gebieten der Praxis kann man heute ohne Mathematik nicht mehr erfolgreich arbeiten.

Wir beschränkten uns vorwiegend auf Fragen aus der Wirtschaft. Beispiele aus den Bereichen Philosophie, Sprachwissenschaften, moderne Naturwissenschaft oder Medizin erwähnten wir nicht oder nur sehr kurz. Aber auch hier spielt heute die Mathematik eine entscheidende Rolle. Die Betrachtung aller Bereiche, in die die Mathematik eindringt, ist in einem kleinen Buch gar nicht möglich.

Selbst für den Wirtschaftsbereich lernten wir nur einen kleinen Teil der Methoden kennen, die heute angewandt werden. Der Vorrat an mathematischen Methoden für die Planung ist wesentlich größer, und ständig entwickeln die Wissenschaftler neue Verfahren. So dringt die Mathematik immer tiefer in die Ökonomie und in andere Bereiche ein.

Auf die Frage „Was heißt Mathematisierung?" findet ihr jetzt eine noch bessere Antwort als jene, die wir in einem der ersten Kapitel gaben.

Der Prozeß der Mathematisierung bleibt nicht auf die Wissenschaft beschränkt. Wir sahen, daß er alle Bereiche unseres Lebens erfaßt. Deshalb ist mathematische Bildung nicht nur für wenige Spezialisten, sondern für immer breitere Kreise unserer Werktätigen notwendig. Mathematische Denkweisen werden schon in naher Zukunft zum täglichen Rüstzeug der Beschäftigten in Industrie, Landwirtschaft und Handel gehören. Bereits ab 1975 ergreift

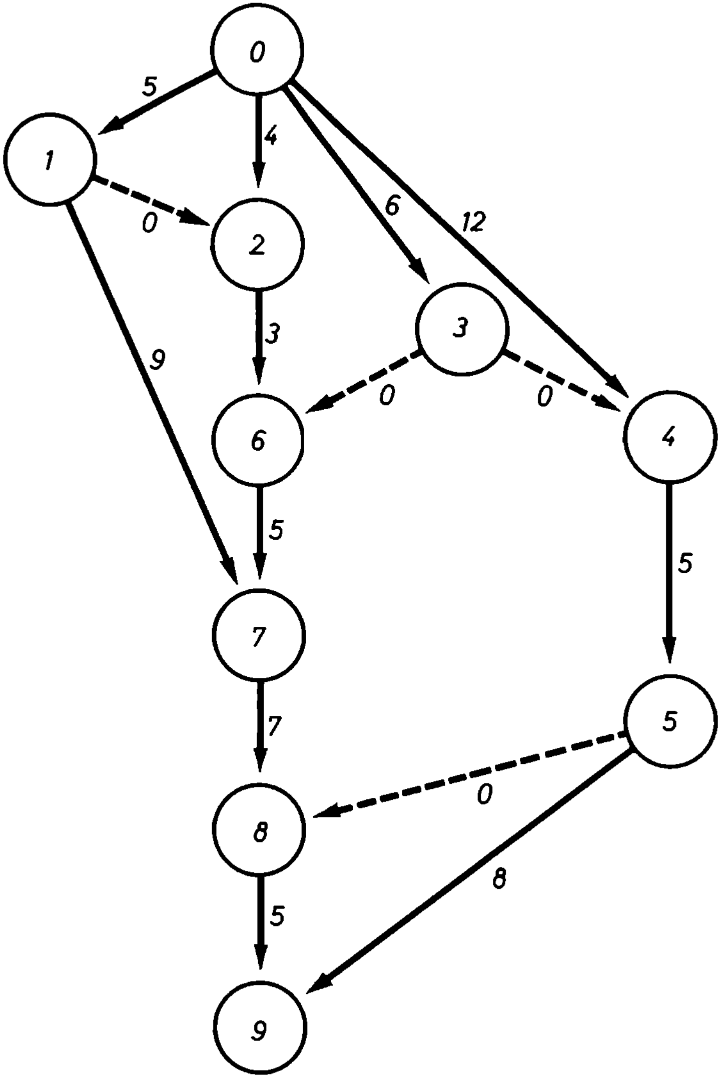
der überwiegende Teil der künftigen Schulabgänger einen Beruf, in dem die Mathematik eine Rolle spielt.
Die Antwort auf die Frage, weshalb ihr in der Schule „so viel Mathematik" lernt, ergibt sich damit von selbst. Und daß man künftig in den meisten Berufen nur Großes leisten kann, wenn man über gute mathematische Kenntnisse verfügt, brauchen wir auch nicht näher zu erläutern. Die Mathematik war von Anfang an mit der Praxis verbunden. Noch nie war aber dieses Bündnis so eng wie heute.

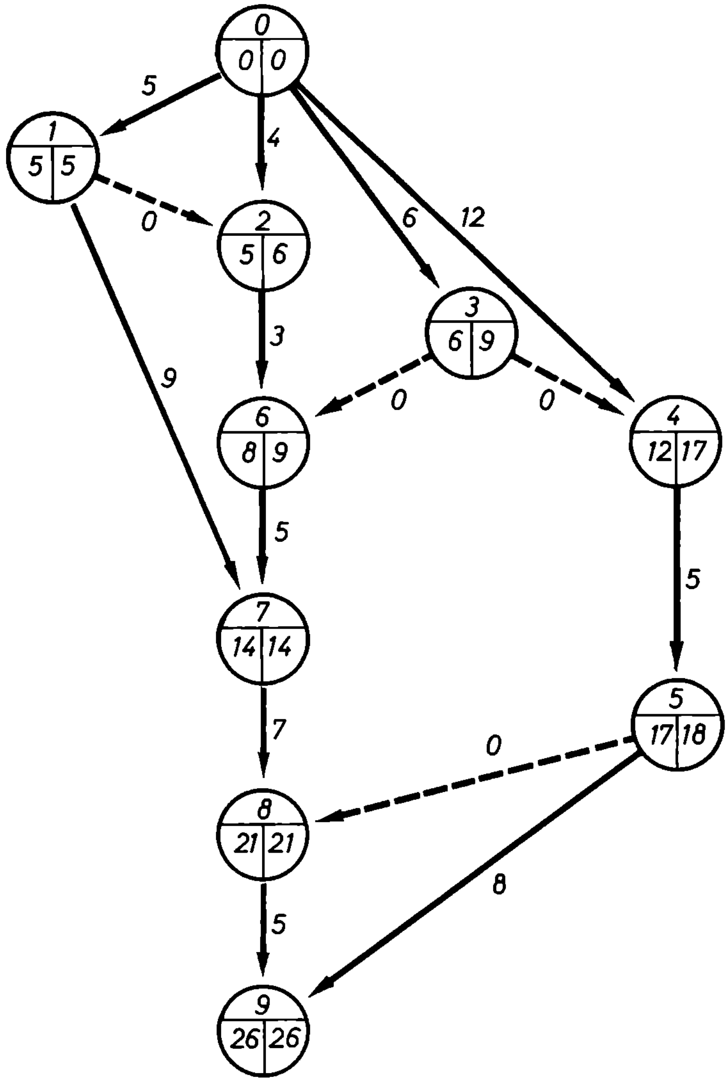
Lösungen

Seite 14: *Von Katzen und Mäusen*
Das ist eine Aufgabe aus der Potenzrechnung. Wenn aus einer Ähre Gerste sieben Maß Getreide entstehen können, so sind es aus sieben Ähren 7^2 Maß. Berücksichtigen wir die Angaben zu den Mäusen, Katzen und Menschen, so potenzieren wir die Basis 7 mit dem Exponenten 5. Es können also $7^5 = 16\,807$ Maß Gerste entstehen.

Seite 61: *Der Plan des Agronomen*
1) Siehe Seite 131
2) Siehe Seite 132
3) Die LPG „Thomas Müntzer" benötigt für alle Arbeiten zur Hackfruchternte und Herbstbestellung 26 Tage. Diesen Wert erhalten wir als frühesten und spätesten Termin für Ereignis 9.
4) Im Netzplan existieren acht verschiedene Wege zwischen Start- und Zielereignis

Netzplan der LPG für Hackfruchternte und Herbstbestellung.


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
4
6
12
0
3
9
0
0
5
5
7
0
8
5



0
0 0
1
5 5
2
5 6
3
6 9
4
12 17
5
17 18
6
8 9
7
14 14
8
21 21
9
26 26
5
4
6
12
0
3
9
0
0
5
5
7
0
8
5

Wege über die Ereignisse	Zeitdauer in Tagen	
0–4–5–9	12 + 5 + 8	= 25
0–4–5–8–9	12 + 5 + 0 + 5	= 22
0–3–4–5–8	6 + 0 + 5 + 8	= 19
0–3–4–5–8–9	6 + 0 + 5 + 0 + 5	= 16
0–3–6–7–8–9	6 + 0 + 5 + 7 + 5	= 23
0–2–6–7–8–9	4 + 3 + 5 + 7 + 5	= 24
0–1–2–6–7–8–9	5 + 0 + 3 + 5 + 7 + 5	= 25
0–1–7–8–9	5 + 9 + 7 + 5	= 26

Der letztgenannte Weg ist der kritische Weg.

Seite 76: *Fußballer rechnen*
Die Lösung ermitteln wir in fünf Schritten:
1) Wir schreiben die Entfernungstabelle als Matrix, bestimmen in jeder Zeile das kleinste Element und subtrahieren es von den anderen Elementen.

$$\left\| \begin{matrix} 237 & 120 & 81 & 216 \\ 214 & 122 & 41 & 192 \\ 109 & 38 & 119 & 88 \\ 140 & 90 & 49 & 119 \end{matrix} \right\| \rightarrow \left\| \begin{matrix} 156 & 39 & 0 & 135 \\ 173 & 81 & 0 & 151 \\ 71 & 0 & 81 & 50 \\ 91 & 41 & 0 & 70 \end{matrix} \right\|$$

2) In den Spalten, die noch keine Nullen enthalten, wird das kleinste Element von den anderen subtrahiert.

Netzplan der LPG für Hackfruchternte und Herbstbestellung mit kritischem Weg (rote Pfeile).

$$\begin{Vmatrix} 156 & 39 & 0 & 135 \\ 173 & 81 & 0 & 151 \\ 71 & 0 & 81 & 50 \\ 91 & 41 & 0 & 70 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 85 & 39 & 0 & 85 \\ 102 & 81 & 0 & 101 \\ 0 & 0 & 81 & 0 \\ 20 & 41 & 0 & 20 \end{Vmatrix}$$

3) Mit einer kleinsten Anzahl von Decklinien erfassen wir alle Nullen dieser Matrix, bestimmen von den nicht überdeckten Elementen das kleinste, subtrahieren es von allen anderen nicht überdeckten Elementen und addieren es zu den doppelt abgedeckten Zahlen.

$$\begin{Vmatrix} 85 & 39 & 0 & 85 \\ 102 & 81 & 0 & 101 \\ 0 & 0 & 81 & 0 \\ 20 & 41 & 0 & 20 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 65 & 19 & 0 & 65 \\ 82 & 61 & 0 & 81 \\ 0 & 0 & 101 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

4) Den dritten Schritt wiederholen wir, bis zum Abdecken aller Nullen unbedingt vier Decklinien erforderlich sind.

$$\begin{Vmatrix} 65 & 19 & 0 & 65 \\ 82 & 61 & 0 & 81 \\ 0 & 0 & 101 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 46 & 0 & 0 & 46 \\ 63 & 42 & 0 & 62 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 21 & 19 & 0 \end{Vmatrix}$$

5) In der zuletzt berechneten Matrix sind vier Decklinien erforderlich. Wir wählen von allen Nullen vier Elemente aus, daß in jeder Spalte und Zeile genau eine markiert wird.

Dieser Matrix stellen wir die Entfernungstabelle gegenüber und lesen die Paarungen der ersten Spielrunde ab.

$$\left\| \begin{matrix} 46 & 0 & 0 & 46 \\ 63 & 42 & 0 & 62 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 21 & 19 & 0 \end{matrix} \right\| \rightarrow$$

	E	L	K	W
D	237	120	81	216
F	214	122	41	192
H	109	38	119	88
Z	140	90	49	119

Die Mannschaft aus Dresden fährt nach Leipzig und legt 120 Kilometer zurück.
Die Mannschaft aus Freiberg fährt nach Karl-Marx-Stadt und legt 41 Kilometer zurück.
Die Mannschaft aus Halle fährt nach Erfurt und legt 109 Kilometer zurück.
Die Mannschaft aus Zwickau fährt nach Weimar und legt 119 Kilometer zurück.
Für eine Fahrt beträgt die Summe der Reisewege 389 Kilometer.
Wir sehen, daß es für die Auswahl der vier markierten Nullen noch eine andere Möglichkeit gibt, die zu einer zweiten Lösung führt.

$$\left\| \begin{matrix} 46 & 0 & 0 & 46 \\ 63 & 42 & 0 & 62 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 21 & 19 & 0 \end{matrix} \right\| \rightarrow$$

	E	L	K	W
D	237	120	81	216
F	214	122	41	192
H	109	38	119	88
Z	140	90	49	119

Die Mannschaft aus Dresden fährt nach Leipzig und legt 120 Kilometer zurück.
Die Mannschaft aus Freiberg fährt nach Karl-Marx-Stadt und legt 41 Kilometer zurück.
Die Mannschaft aus Halle fährt nach Weimar und legt 88 Kilometer zurück.
Die Mannschaft aus Zwickau fährt nach Erfurt und legt 140 Kilometer zurück.
Für eine Fahrt beträgt die Summe der Reisewege 389 Kilometer.
Beide Lösungen weisen das gleiche Minimum für die Summe der Reisewege auf. Ob die Mannschaften aus Halle beziehungsweise Zwickau gegen Erfurt oder Weimar spielen, müßte durch ein Los entschieden werden.

Seite 96: *Möbelauto auf schnellem Kurs*

nach / von	W	A	B	C	D	E
W	–	16	25	8	20	~~32~~
A	21	–	18	12	25	10
B	25	23	–	20	24	11
C	10	18	19	–	17	28
D	23	19	15	27	–	24
E	30	14	13	24	22	–

In der Zeittabelle streichen wir zuerst die 32 als größtes Element und dann von den übrigbleibenden Zahlen schrittweise immer die größte. Das sind die Elemente 30, 28, 27 (je einmal), 25, 24 (je dreimal), 23 (zweimal), 22 und 21 (je einmal). In der ersten Spalte steht nur noch eine Zahl. Die 10 wird Lösungselement. In der Rundfahrt ist die Strecke von C nach W enthalten.

von \ nach	W	A	B	C	D	E
W	–	16	~~25~~	8	20	~~32~~
A	~~21~~	–	18	12	~~25~~	10
B	~~25~~	~~23~~	–	20	~~24~~	11
C	10	18	19	–	17	~~28~~
D	~~23~~	19	15	~~27~~	–	~~24~~
E	~~30~~	14	13	~~24~~	~~22~~	–

Wir streichen die Gegenrichtung dieser Strecke, die Fahrt von W nach C (Element 8 in der ersten Zeile), und alle Elemente in der vierten Zeile. Jetzt enthält die fünfte Spalte mit der Zahl 20 nur ein Element, das das nächste Lösungselement darstellt und die Fahrt von W nach D angibt.

von \ nach	W	A	B	C	D	E
W	–	16	~~25~~	~~8~~	20	~~32~~
A	~~21~~	–	18	12	~~25~~	10
B	~~25~~	~~23~~	–	20	~~24~~	11
C	10	~~18~~	~~19~~	–	~~17~~	~~28~~
D	~~23~~	19	15	~~27~~	–	~~24~~
E	~~30~~	14	13	~~24~~	~~22~~	–

Nach dem Streichen des noch offenen Elementes 16 in der ersten Zeile suchen wir von den verbleibenden Elementen wiederum das größte. Das ist die Zahl 20. Wir streichen und stellen fest, daß jetzt die dritte Zeile nur noch ein offenes Element enthält. Diese Zahl 11 wird ein weiteres Lösungselement. Sie bezieht die Strecke von B nach E in die Rundfahrt ein.

von \ nach	W	A	B	C	D	E
W	–	~~16~~	~~25~~	8	20	~~32~~
A	~~21~~	–	18	12	~~25~~	10
B	~~25~~	~~23~~	–	~~20~~	~~24~~	11
C	10	18	19	–	17	~~28~~
D	~~23~~	19	15	~~27~~	–	~~24~~
E	~~30~~	14	13	~~24~~	~~22~~	–

Wir streichen in der sechsten Spalte das noch offene Element 10 und in der sechsten Zeile das Element 13, das sich auf die Fahrt von E nach B (Gegenrichtung zur Strecke von B nach E) bezieht. Danach ergibt sich mit der 14 als einziger in der sechsten Zeile noch offenen Zahl das nächste Lösungselement (Fahrt von E nach A).

von \ nach	W	A	B	C	D	E
W	–	~~16~~	~~25~~	~~8~~	20	~~32~~
A	~~21~~	–	18	12	~~25~~	~~10~~
B	~~25~~	~~23~~	–	~~20~~	~~24~~	11
C	10	~~18~~	19	–	~~17~~	~~28~~
D	~~23~~	19	15	~~27~~	–	~~24~~
E	~~30~~	14	~~13~~	~~24~~	~~22~~	–

In der zweiten Spalte wird das noch offene Element 19 gestrichen. Die Zahl 15 als nächstes Lösungselement bezieht die Strecke von D nach B in die Tour ein.

von \ nach	W	A	B	C	D	E
W	–	~~16~~	~~25~~	~~8~~	20	~~32~~
A	~~21~~	–	18	12	~~25~~	~~10~~
B	~~25~~	~~23~~	–	~~20~~	~~24~~	11
C	10	~~18~~	~~19~~	–	~~17~~	~~28~~
D	~~23~~	19	15	~~27~~	–	~~24~~
E	~~30~~	14	~~13~~	~~24~~	~~22~~	–

Schließlich streichen wir das letzte offene Element der dritten Spalte, die Zahl 18. In der zweiten Zeile ergibt sich mit der 12 das letzte Lösungselement.

von \ nach	W	A	B	C	D	E
W	–	~~16~~	~~25~~	~~8~~	20	~~32~~
A	~~21~~	–	~~18~~	12	~~25~~	~~10~~
B	~~25~~	~~23~~	–	20	~~24~~	11
C	10	~~18~~	~~19~~	–	~~17~~	~~28~~
D	~~23~~	19	15	~~27~~	–	~~24~~
E	~~30~~	14	~~13~~	~~24~~	~~22~~	–

Die Rundfahrt des Möbelautos führt von W über D, B, E, A und C wieder nach W zurück. Ihre Dauer beträgt

$$20 + 15 + 11 + 14 + 12 + 10 = 82 \text{ min.}$$

Seite 116: *Zwei Produkte auf drei Maschinen*

Wegen der Nichtnegativitätsbedingung suchen wir die Lösung im ersten Quadranten. Die drei Nebenbedingungen schränken den Bereich ein.

Für die erste Nebenbedingung (NB 1) sei der Weg nochmals erklärt.

Zur Ungleichung $4 \cdot x + 8 \cdot y \leqq 80$ (NB 1)

gehört auch die Gleichung $4 \cdot x + 8 \cdot y = 80$.

Diese lösen wir nach y auf:

$$8y = -4x + 80$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Durch Einsetzen verschiedener Zahlen für x kommen wir zu folgender Tabelle:

x	0	5	10	15	20
y	10	$7\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$	0

Die zugehörigen Punkte tragen wir in ein Achsenkreuz ein, verbinden sie und erhalten die Gerade g_1.

Alle Punkte unterhalb dieser Geraden erfüllen die Ungleichung

$$4 \cdot x + 8 \cdot y \leqq 80$$

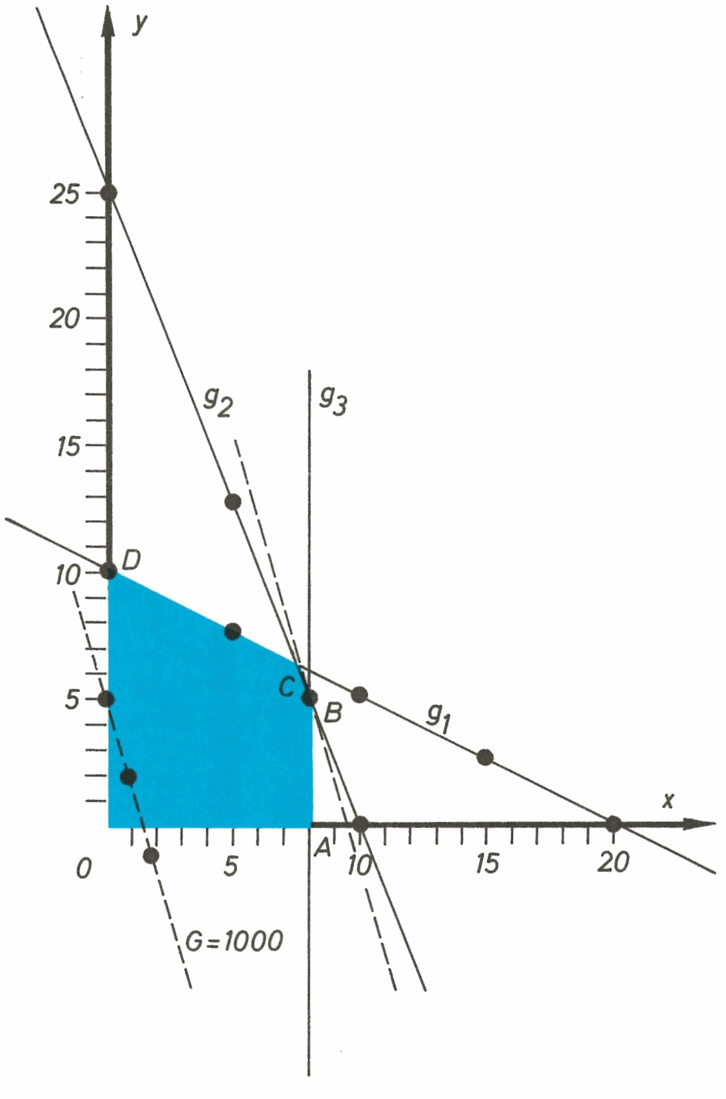
In ähnlicher Weise verfahren wir mit den beiden anderen Nebenbedingungen:

$$10 \cdot x + 4 \cdot y \leqq 100 \qquad \text{(NB 2)}$$

Zugehörige Gleichung: $10 \cdot x + 4 \cdot y = 100$

Aufgelöst nach y: $y = -\frac{5}{2}x + 25$

Die Gerade der Zielfunktion berührt den Lösungsbereich im Punkt B. Seine Werte (x; y) = (8; 5) bestimmen die optimale Lösung.



y
x
25
20
15
10
5
0
5
10
15
20
g_1
g_2
g_3
A
B
C
D
G=1000

Tabelle:

x	0	5	10
y	25	$12\frac{1}{2}$	0

Wir erhalten die Gerade g_2. Alle unterhalb von ihr liegenden Punkte erfüllen die Ungleichung NB 2.

$$8 \cdot x \leqq 64 \qquad \text{(NB 3)}$$

Zugehörige Gleichung: $8 \cdot x = 64$
Aufgelöst nach x: $x = 8$

Die Gerade g_3 verläuft parallel zur y_l-Achse im Abstand $x = 8$. Alle links von dieser Geraden liegenden Punkte erfüllen die Ungleichung NB 3.
Als Bereich, in dem die optimale Lösung liegt, erhalten wir die fünfeckige Fläche 0ABCD.
Um die Zielfunktion zu zeichnen, nehmen wir für G einen willkürlichen Wert an, beispielsweise G = 1 000. Diese Zahl setzen wir in

$$G = 600 \cdot x + 200 \cdot y \qquad \text{(ZF)}$$

ein und erhalten $1\,000 = 600 \cdot x + 200 \cdot y$.
Wir lösen nach y auf: $200y = -600x + 1\,000$

$$y = -3x + 5$$

Auch für diese Funktion stellen wir eine Tabelle auf:

x	0	1	2
y	5	2	−1

Wir übertragen die zugehörigen Punkte in das Achsenkreuz und kennzeichnen die erhaltene Gerade mit G = 1 000. Wir verschieben sie parallel zu sich selbst so weit wie möglich nach außen. Im Punkt B berührt sie dann gerade noch den Bereich. Die zu diesem Punkt gehörenden Werte bestimmen die optimale Lösung. Wir lesen aus der Zeichnung für Punkt B ab:

$$x = 8 \qquad y = 5$$

Vom Erzeugnis E_1 werden täglich acht und vom Erzeugnis E_2 fünf Einheiten produziert.
Mit der Zielfunktion berechnen wir den maximalen Gewinn. In den Ausdruck

$$G = 600 \cdot x + 200 \cdot y \quad \text{(ZF)}$$

setzen wir die optimalen Werte für x und y ein.

$$G = 600 \cdot 8 + 200 \cdot 5 = 5800$$

Der Tagesgewinn des Betriebes beträgt 5800 Mark.
Die Auslastung der Maschinen überprüfen wir, indem die optimalen Werte $x = 8$ und $y = 5$ in die drei Nebenbedingungen eingesetzt werden:

NB 1: $4 \cdot x + 8 \cdot y \leqq 80 \rightarrow 4 \cdot 8 + 8 \cdot 5 = 72 < 80$
Bei Maschine M_1 bleiben $80 - 72 = 8$ Stunden der Tageskapazität ungenutzt.

NB 2: $10 \cdot x + 4 \cdot y \leqq 100 \rightarrow 10 \cdot 8 + 4 \cdot 5 = 100 = 100.$
Die Maschinenart M_2 ist vollständig ausgelastet.

NB 3: $8 \cdot x \leqq 64 \rightarrow 8 \cdot 8 = 64 = 64$
Die Maschinenart M_3 hat keine ungenutzten Kapazitäten.

Inhalt

Heute mehr denn je hilft die Mathematik dem Menschen bei der besseren Beherrschung vieler gesellschaftlicher Prozesse. Dieses Buch macht junge Leser erstmalig mit dazu notwendigen modernen mathematischen Methoden bekannt.

9

26|26