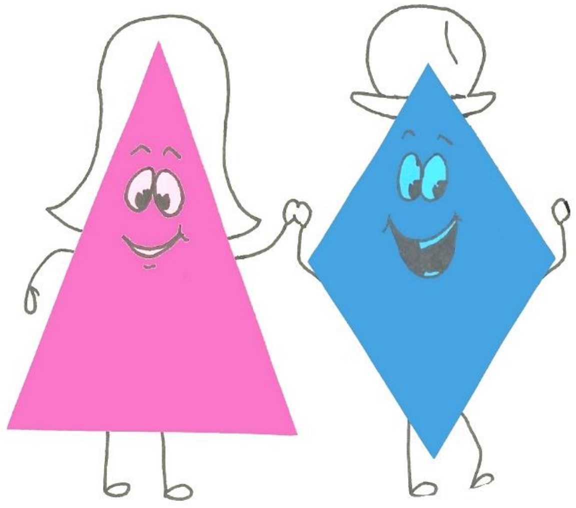
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler, die Freude an Mathematik haben.



Mit Frau Dreieck und Herrn Raute rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise: Für eine vollständige Lösung genügt es nicht, nur das Ergebnis anzugeben. Schreibe einen Antwortsatz, führe wenn möglich eine Probe und erkläre wie du die Lösung gefunden hast oder zeichne zur Begründung deine Lösung. Auf der Rückseite sind einige Hinweise für die Lösungsdarstellung angegeben.

Du kannst auch einsenden, wenn du nicht alle Aufgaben gelöst hast.

Schicke deine Lösungen bis spätestens **…** (Datum des Poststempels) an folgende Adresse:

MATHE LOGO
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Du darfst auch eher einsenden! Wenn du sogar schon bis … einsendest, schicken wir dir weitere Aufgaben zu.

Nach Einsendeschluss erhältst du eine Teilnahmeurkunde für diese Runde und die Aufgaben der nächsten Runde.

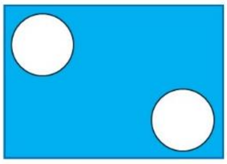
Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir das LOGO-Team.

Teil A: Im Fussball-Fieber

Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und Quadrato – verfolgten im Sommer die Spiele der Europameisterschaft im Fußball mit Interesse, denn auch Quadrato und Kreisa spielen in Mannschaften eines Fußball-Vereins.

Aufgabe 1. Quadrato bereitete sich auf ein Turnier vor und übt Torwandschießen. Wenn er den Fußball durch das Loch rechts unten schoss, erhielt er einen Punkt. Traf er dagegen das Loch links oben, erhielt er drei Punkte. Wenn er daneben schoss, gab es keinen Punkt. Jeden Tag schoss er dreimal und zählte die Trefferpunkt zusammen.



Am Montag schaffte er nur wenige Punkte. Am Dienstag waren es schon 4 Punkte mehr als am Vortag. Mittwoch war sein erfolgreichster Tag. Am Donnerstag gelangen ihm noch einmal halb so viele Trefferpunkte wie am Dienstag. Quadrato freute sich, dass er in der Summe der vier Tage mehr als 15 Trefferpunkte erreichte. Außerdem stellte er fest, dass diese Summe ein Vielfaches von 4 ist.

Kannst du ermitteln, wie viele Punkte Quadrato insgesamt an diesen vier Tagen schaffte? Begründe dein Ergebnis und zeige, dass bei diesen Aussagen nur dieses Ergebnis möglich ist!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – *Antwortsatz:* Quadrato schaffte insgesamt an diesen vier Tagen 20 Punkte. Dabei erreichte Quadrato am Montag 2, Trefferpunkte, am Dienstag 6 Trefferpunkte, am Mittwoch 9 Trefferpunkte und am Donnerstag 3 Trefferpunkte.

Probe: Am Dienstag waren es 4 Trefferpunkte mehr als am Montag: 6 = 2 + 4.
Am Donnerstag waren es halb so viele Trefferpunkte wie am Dienstag:
6 : 2 = 3. Am Mittwoch war der erfolgreichste Tag: 9 > 2, 9 > 6, 9 > 3.
Summe 2 + 6 + 9 + 3 = 20 > 15. 20 ist ein Vielfaches von 4: 20 : 4 = 5.

Herleitung: Du kannst diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Wenn du weißt, wie viele Trefferpunkte Quadrato am Montag schaffte, kannst du ermitteln, wie viele Trefferpunkte es an den anderen Wochentagen waren. Beachte dabei:

- Jeden Tag konnte er zwischen 0 (dreimal daneben) und 9 Punkte (dreimal links oben getroffen) erreichen.
- Weil Mittwoch sein erfolgreichster Tag war, erreichte er am Mittwoch mehr Punkte als an jedem anderen Tag.

Trage deine Erkenntnisse in einer Tabelle ein. Da Quadrato am Montag nur wenige Punkte erreichte, könntest du am Montag mit 1 Punkt beginnen.

Montag	Dienstag	Donnerstag	Mittwoch	Summe	Gesamtsumme
1	1 + 4 = 5	5 : 2 nicht möglich			
2	2 + 4 = 6	6 : 2 = 3	7	11	18, aber kein Vielfaches von 4
2	2 + 4 = 6	6 : 2 = 3	8	11	19, aber kein Vielfaches von 4
2	2 + 4 = ***6***	6 : 2 = ***3***	***9***	***11***	***20***
3	3 + 4 = 7	7 : 2 nicht möglich			
4	4 + 4 = 8	8 : 2 = 4	9	16	25, aber kein Vielfaches von 4

5	5 + 4 = 9	9 : 2 nicht möglich			
6	6 + 4 = 10 nicht möglich				

Da in der Tabelle angegeben ist, wie du die Zahlen ermittelst, ist die Probe enthalten.

Lösungsvariante: Du bemerkst, dass Quadrato am Dienstag eine gerade Trefferzahl erreicht haben muss (weil es am Donnerstag halb so viele Punkte wie am Dienstag waren).

- Wären es am Dienstag 0, 2 oder 4 Trefferpunkte gewesen, ist der Vergleich mit Montag nicht erfüllbar.
- Waren es am Dienstag 6 Trefferpunkte, findest du für Montag (6 – 4 =) 2 Punkte und für Donnerstag (6 : 2 =) 3 Punkte. An diesen drei Tagen sind es dann (2 + 6 + 3 =) 11 Punkte. Am Mittwoch müssen es mehr als 6 Punkte sein, aber höchstens 9 Punkte sein. Von den Möglichkeiten 7, 8 oder 9 Punkte erhältst du nur für 9 eine durch 4 teilbare Summe: 2 + 6 + 3 + 9 = 20.
- Es können am Dienstag nicht 8 Trefferpunkte gewesen sein, weil dieser Wert mit 3 Schuss nicht möglich ist.
- Es können auch nicht 10 oder mehr Treffer gewesen sein, weil mit 3 Schuss nur maximal 9 Trefferpunkte möglich sind.

****

Aufgabe 2. Im Fußball-Verein trainieren 3 Mannschaften (wir nennen sie A, B und C). Damit sie im Turnier gegeneinander gut zu unterscheiden sind, hat der Verein Trikots in den Farben weiß und blau sowie Hosen in den Farben rot und blau.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Mannschaft A (in der auch Quadrato spielt), Trikots und Hosen auszuwählen? Schreibe das Ergebnis in einer Tabelle auf!
b) Wie viele Möglichkeiten bleiben für die Mannschaften B und C für ihre Auswahl übrig, wenn sich Mannschaft A für weiße Trikots und schwarze Hosen entschieden hat?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a – *Antwortsatz:* 4 verschiedene Möglichkeiten hat Mannschaft A, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen.

Begründung: Kürze die Farben mit den Buchstaben B (blau), R (rot), S (schwarz) und W (weiß) ab. Nun kannst du alle Möglichkeiten aufschreiben:

Trikotfarbe	W	W	B	B
Hosenfarbe	R	S	R	S

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b – *Antwortsatz:* Die zweite Mannschaft hat noch 3 Möglichkeiten, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen. Die dritte Mannschaft hat noch 2 Möglichkeiten, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen.

Begründung: Wenn sich Mannschaft A für W/S entschieden hat, bleiben für die zweite Mannschaft noch 3 Möglichkeiten, denn in der Tabelle entfällt eine Möglichkeit:

Trikotfarbe	W	~~W~~	B	B
Hosenfarbe	R	~~S~~	R	S

Nach der Auswahl durch die zweite Mannschaft bleiben noch 2 Möglichkeiten für die dritte Mannschaft, denn in der Tabelle ist eine weitere Möglichkeit zu streichen (nämlich die der zweiten Mannschaft). Ob B oder C die zweite Mannschaft ist, kann nicht entschieden werden.

Hinweis: Es gibt 6 Kombinationen, wie die Mannschaften B und C ihre Farben auswählen könnten (aber dies war in der Aufgabe nicht gefragt):

Mannschaft B	WR	WR	BR	BR	BS	BS
Mannschaft C	BR	BS	WR	BS	WR	BR

****

Aufgabe 3. Am Turnier nahmen die 3 Jungen-Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft: A gegen B, A gegen C und B gegen C. Die Spielergebnisse wurden in eine Tabelle eingetragen: Für einen Sieg gab es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt und für ein verlorenes Spiel wurde kein Punkt eingetragen. Die Mannschaft A erreichte in der Tabelle die meisten Punkte und gewann das Turnier.

a) Wie sah die Tabelle nach dem Turnier aus, wenn Mannschaft B Zweiter wurde und keines der 3 Spiele Unentschieden endete?
b) Wie viele Tore hat Mannschaft A in seinen 2 Spielen höchstens geschossen, wenn in den 3 Spielen insgesamt 7 Tore fielen? Und wie viele Tore hat Mannschaft A in seinen 2 Spielen mindestens geschossen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – *Antwortsatz:* Mannschaft A erreichte 6 Punkte, Mannschaft B erhielt 3 Punkte und Mannschaft C bekam 0 Punkte.

Begründung: Es wurden insgesamt 9 Punkte vergeben, in jedem Spiel 3 Punkte (da kein Spiel unentschieden endete).

Mannschaft A musste nur zweimal antreten. Sie konnte also nur maximal 6 Punkte erreichen (wenn sowohl A gegen B als auch A gegen C gewinnt). Da auch das Spiel B gegen C einen Sieger hatte (der 3 Punkte erhielt) muss B als Zweiter drei Punkte haben. Es bleiben für Mannschaft C nur 0 Punkte übrig.

Mannschaft	Punkte
A	6
B	3
C	0

Wenn Mannschaft A weniger als 6 Punkte hätte, wären es 3 oder 0 Punkte. Dann ist es aber nicht wahr, dass diese Mannschaft die meisten Punkte erreichte.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – *Antwortsatz:* Mannschaft A hat mindestens 2 und höchstens 5 Tore geschossen haben. Mannschaft A kann aber auch insgesamt 3 oder 4 Tore geschossen haben.

Begründung: Weil Mannschaft A sowohl gegen B als auch gegen C gewonnen hat, muss Mannschaft A mindestens 2 Tore geschossen haben (in jedem Spiel mindestens 1 Tor). Weil Mannschaft B gegen C gewonnen hat, muss B mindestens 1 Tor geschossen haben, so dass Mannschaft A höchsten (6 – 1 =) 5 Tore geschossen hat. Es genügt bei dieser Aufgabenstellung, wenn du für jede ermittelte Anzahl von Toren eine Möglichkeit angibst, wie die drei Spiele ausgegangen sein könnten:

Tore Mannschaft A	2	3	4	5
A gegen B	1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0
B gegen C	4 : 0	3 : 0	2 : 0	1 : 0

Für jede Anzahl der Tore von Mannschaft A gibt es viele Möglichkeiten, wie die drei Spiele geendet haben.

Mannschaft A: 2 Tore		
A gegen B	1 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0
B gegen C	4 : 0	3 : 1

Mannschaft A: 3 Tore						
A gegen B	2 : 0	2 : 0	2 : 1	1 : 0	1 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0	1 : 0	2 : 0	2 : 0	2 : 1
B gegen C	3 : 0	2 : 1	2 : 0	3 : 0	2 : 1	2 : 0

Mannschaft A: 4 Tore							
A gegen B	3 : 0	3 : 1	2 : 0	2 : 1	2 : 0	1 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0	2 : 0	2 : 0	2 : 1	3 : 0	3 : 1
B gegen C	2 : 0	1 : 0	2 : 0	1 : 0	1 : 0	2 : 0	1 : 0

Mannschaft A: 5 Tore				
A gegen B	4 : 0	3 : 0	2 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0
B gegen C	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0

****

Aufgabe 4. Am Rande des Turniers durfte Familie Geometrie sich im Torwandschießen messen, wobei die Regeln aus Aufgabe 1 galten. Jeder schoss dreimal. Vorab spekulierten sie über die Punktzahlen, die sie erreichen könnten.

Quadrato prahlte: „Ich werde gewinnen."
Frau Dreieck meinte: „Ich schaffe bestimmt nur 3 Punkte".
Herr Raute frohlockte: „Ich war früher gut im Torwandschießen – ich erreiche mindestens halb so viele Punkte wie Quadrato und Frau Dreieck zusammen."
Schließlich sagte Kreisa: „Ich war schon einmal besser als Herr Raute – das wird mir heute wieder gelingen."

Ermittle die Anzahl der Trefferpunkte, die jeder der Familie Geometrie erreichte, wenn bekannt ist, dass alle 4 Aussagen richtig waren und kein Schuss ohne Punkte blieb!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – *Antwortsatz:* Quadrato erreichte 9 Punkte, Kreisa schaffte 7 Punkte, Herr Raute erhielt 5 Punkte, und Frau Dreieck kam auf 3 Punkte.

Herleitung: Du stellst fest, dass für jeden Schützen nach drei Schuss nur folgende Punktzahlen möglich sind:

- 3 Punkte: 3 Schüsse ins Loch rechts unten
- 5 Punkte: 2 Schüsse ins Loch rechts unten, 1 Schuss ins Loch links oben
- 7 Punkte: 1 Schuss ins Loch rechts unten, 2 Schüsse ins Loch links oben
- 9 Punkte: 3 Schüsse ins Loch links oben.

Frau Dreieck hat (wie von ihr behauptet) 3 Punkte.

Quadrato muss mehr als 3 Punkte haben, denn er ist der Beste und hat deshalb mehr Punkte als Frau Dreieck.

Quadrato kann nicht 5 Punkte haben. Da er der Beste ist, müssten alle anderen 3 Punkte haben – aber dann hat Kreisa nicht mehr Punkte als Herr Raute.

Es könnte also sein, dass Quadrato 7 Punkte hat. Da Kreisa weniger Punkte als Quadrato, aber mehr Punkte als Herr Raute hat, muss Kreisa 5 Punkte und Herr Raute 3 Punkte haben. Doch dann ist die Aussage von Herrn Raute falsch. Er konnte ja nicht (5 + 3) : 2 = 4 Punkte erreichen. Also kann Quadrato nicht 7 Punkte haben.

Es bleibt nun übrig, dass Quadrato 9 Punkte erreichte. Wir prüfen, ob in diesem Fall die Aussagen von Kreisa und Herrn Raute wahr sind:

Weil Kreisa mehr Punkte als Herr Raute hat, hat Kreisa mindestens 5 Punkte.

- Haben Kreisa 5 Punkte und Frau Dreieck 3 Punkte, müsste Herr Raute 4 Punkte haben – das ist nicht möglich.
- Haben Kreisa 7 Punkte, und Frau Dreieck 3 Punkte, hat Herr Raute 5 Punkte.
- Hat Kreis 9 Punkte, hätte sie so viele Punkte wie Quadrato – dann wäre Quadrato nicht der Beste.

Zusammenfassung: Es gibt nur die eine Möglichkeit (Quadrato 9 Punkte, Kreisa 7 Punkte, Herr Raute 5 Punkte, Frau Dreieck 3 Punkte), so dass alle vier Aussagen erfüllt sind.

Lösungsvariante:

- Frau Dreieck hat (wie von ihr behauptet) 3 Punkte.
- Kreisa kann nicht 3 Punkte haben, denn dann hätte Herr Raute (3 + 3) : 2 = 3 Punkte und Kreisa hätte nicht mehr Punkte als Herr Raute.
- Kreisa kann nicht 5 Punkte haben, denn dann hätte Herr Raute (5 + 3) : 2 = 4 Punkte. Das ist aber unmöglich.
- Kreisa kann 7 Punkte haben, denn dann hätte Herr Raute (7 + 3) : 2 = 5 Punkte und Quadrato müsste als Bester 9 Punkte haben.
- Kreisa kann nicht 9 Punkte haben, denn dann wäre Quadrato nicht der Beste,

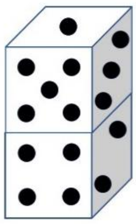
Zusammenfassung: Es gibt nur die eine Möglichkeit (Quadrato 9 Punkte, Kreisa 7 Punkte, Herr Raute 5 Punkte, Frau Dreieck 3 Punkte), so dass alle vier Aussagen erfüllt sind.

****

Teil B: Würfelspiele

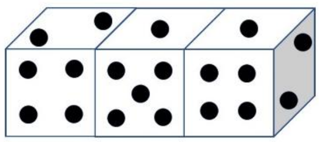
Kreisa und Quadrato spielen gern mit Spielwürfeln, auf deren sechs Würfelseiten wie gewöhnlich 1 bis 6 Punkte zu sehen sind. Hast du auch schon bemerkt, dass die Summe der Punkte auf den gegenüberliegenden Würfelseiten immer 7 ergibt?

Aufgabe 1a. Quadrato hat auf dem Tisch einen Würfel-Turm gebaut, also zwei Würfel wie in der Abbildung übereinandergelegt. Wie viele Punkte sieht er insgesamt auf allen sichtbaren Würfelseiten, wenn er um den Tisch herumläuft?



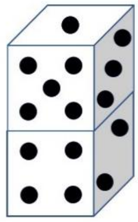
(Die Punkte auf der Seite unten und auf den sich berührenden Seiten beider Würfel sieht er natürlich nicht!)

Aufgabe 1b. Kreisa hat auf dem Tisch eine Würfel-Schlange aus drei Würfel gelegt, also drei Würfel wie in der Abbildung nebeneinandergelegt. Wie viele Punkte könnte sie jetzt insgesamt auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen, wenn sie um den Tisch herumläuft?



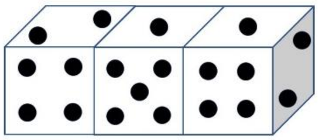
(Die Punkte auf den Seiten unten und auf den sich berührenden Seiten der Würfel sieht sie natürlich nicht!)

Wir bezeichnen die Blickrichtungen mit vorn, rechts, hinten, links und oben. Beachte. dass die Summe der Punkte auf den gegenüberliegenden Würfelseiten immer 7 ergibt.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1a – Antwortsatz: Wenn Quadrato um den Tisch herumläuft, sieht er auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt 29 Punkte.

Begründung: Egal, wie viele Punkte bei einem Würfel vorn zu sehen sind, vorn und hinten siehst du zusammen immer 7 Punkte. Ebenso siehst du rechts und links zusammen stets 7 Punkte. Insgesamt sind es deshalb bei einem Würfel-Turm aus zwei Würfeln (2 + 2) · 7 = 28 Punkte. Zusätzlich siehst du oben 1 Punkt, also insgesamt (28 + 1 =) 29 Punkte.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1b – Antwortsatz: Wenn Kreisa um den Tisch herumläuft, könnte sie auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt 28 oder 33 Punkte sehen.

Begründung: Bei den 3 Würfeln siehst du vorn und hinten zusammen (3 · 7 =) 21 Punkte. Oben siehst du (2 + 1 + 1 =) 4 Punkte. Schließlich sind rechts 2 Punkte zu sehen. Da du auf den Seiten des linken Würfels in der Abbildung die 2 und die 4 siehst, weißt du schon, dass hinten die 3 und unten die 5 steht. Von links ist also höchstens 1 Punkt oder 6 Punkte zu sehen.

Insgesamt könnte Kreisa (21 + 4 + 2 + 1 =) 28 Punkte oder (21 + 4 + 2 + 6 =) 33 Punkte sehen.

Hinweis: Hast du dein Ergebnis durch Experimentieren mit Spielwürfeln gefunden? Dann ist dir bestimmt aufgefallen: Einen Spielwürfel kannst du nur so drehen, dass

- Variante (A): vorn 4, oben 2, links 1 zu sehen ist

oder

- Variante (B): vorn 4, oben 2, links 6 zu sehen ist.

Beide Möglichkeiten kannst du mit einem Würfel nicht erreichen! Aber es gibt Würfel, mit denen nur die Variante (A) gelingt, und andere Würfel. mit denen nur die Variante (B) gelingt. Prüfe deine Würfel. Es könnte sogar sein, dass du deine Würfel nicht so legen kannst, dass er die Punkte wie der rechte Würfel zeigt.

Wenn du als Ergebnis nur 28 Punkte oder nur 33 Punkte angegeben hast, ist dies also auch korrekt!

Leider stand in der Aufgabenstellung das Wort „Turm-Schlange“, das gar nicht erklärt wurde. Es sollte „Würfel-Schlange“ (also nebeneinander liegende Würfel) heißen!

****

Aufgabe 2. Quadrato hat erneut einen Würfel-Turm aus zwei Würfeln gebaut. Kreisa hat daneben eine Turm-Schlange aus zwei Türmen gelegt. Erstaunt stellen sie fest, dass auf dem Turm insgesamt genauso viele Punkte zu sehen sind wie insgesamt auf der Schlange. Wie viele Punkte könnten sie sowohl auf dem Turm als auch auf der Schlange sehen? Finde alle Möglichkeiten!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Quadrato und Kreisa könnten sowohl auf dem Würfel-Turm als auch auf der Würfel-Schlange insgesamt 29, 30, 31, 32, 33 oder 34 Punkte sehen.

Begründung: Du weißt bereits aus der Lösung zu Aufgabe 1a, dass Quadrato auf seinem Würfel-Turm vorn, hinten, rechts und links insgesamt (4 · 7 =) 28 Punkte sieht. Dazu kommen noch die Punkte, die oben zu sehen sind, also 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Auf dem Würfelturm können deshalb (28 + 1 =) 29, (28 + 2 =) 30, (28 + 3 =) 31, (28 + 4 =) 32, (28 + 5 =) 33 oder (28 + 6 =) 34 Punkte zu sehen sein.

Bei einer Würfel-Schlange aus 2 Würfeln sind vorn und hinten zusammen (2 · 7 =) 14 Punkte zu sehen. Um auf der Schlange genauso viele Punkte wie auf dem Turm zu sehen, müssen oben, rechts und links zusammen mindestens (29 – 14 =) 15 Punkte, aber höchstens (34 – 14 =) 20 Punkte zu sehen sein. Das ist aber für jede Zahl 15, 16, 17, 18, 19 und 20 möglich:

oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
2 · 5 = 10	1	4	14	10 + 1 + 4 + 14 = 29
2 · 6 = 12	2	2	14	12 + 2 + 2 + 14 = 30
2 · 6 = 12	2	3	14	12 + 2 + 3 + 14 = 31
2 · 6 = 12	3	3	14	12 + 3 + 3 + 14 = 32
2 · 6 = 12	3	4	14	12 + 3 + 4 + 14 = 33
2 · 6 = 12	4	4	14	12 + 4 + 4 + 14 = 34

Beachte: Wenn oben nur 6 zu sehen ist, kann rechts oder links keine 1 zu sehen sein.

(Es gibt viele andere Möglichkeiten, die Würfel so in der Würfel-Schlange zu legen, dass eine Punktezahl wie beim Würfel-Turm zu sehen ist.)

Hinweis: Wenn du die Tabelle ergänzt, erkennst du, dass mit der Würfel-Schlange mindestens 28 Punkte und höchstens 36 Punkte erreicht werden können:

oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
2 · 5 = 10	1	3	14	10 + 1 + 3 + 14 = 28
2 · 6 = 12	4	5	14	12 + 4 + 5 + 14 = 35
2 · 6 = 12	5	5	14	12 + 5 + 5 + 14 = 36

Vielleicht hast du versucht, das Wort „Turm-Schlange“ wörtlich zu nehmen. Folgende Ideen sind gut:

Variante 1: Eine Turm-Schlange könnte aus zwei nebeneinander stehenden Würfel-Türmen bestehen. Dann siehst du vorn 4 Würfel, zusammen mit den Würfelseiten hinten ergeben diese bereits 4 · 7 = 28 Punkte. Nun sind rechts, oben und links noch 6 weitere Würfelseiten zu sehen, auf denen nicht gleichzeitig 1 zu sehen ist. Deshalb siehst du bei dieser Turm-Schlange mehr als (28 + 6 =) 34 Punkte.

Variante 2: Eine Turm-Schlange könnte aus zwei hintereinander liegenden Würfel-Türmen bestehen. Dann siehst du vorn 4 Würfel, zusammen mit den Würfelseiten hinten ergeben diese bereits 4 · 7 = 28 Punkte. Nun sind rechts, oben und links noch 6 weitere Würfelseiten zu sehen, auf denen nicht gleichzeitig 1 zu sehen ist. Deshalb siehst du bei dieser Turm-Schlange mehr als (28 + 6 =) 34 Punkte.

Variante 3: Eine Turm-Schlange könnte aus zwei nebeneinander liegenden Würfel-Türmen bestehen. Dann siehst du keine gegenüberliegende Würfelseiten. An jeder Ecke siehst du mindestens (1 + 2 + 3 =) 6 Punkte und höchstens (4 + 5 + 6 =) 15 Punkte. Es sind auch (1 + 2 + 4 =) 7 Punkte, (1 + 3 + 5 =) 9 Punkte, (1 + 4 + 5 =) 10 Punkte, (2 + 3 + 6 =) 11 Punkte, (2 + 4 + 6 =) 12 Punkte oder (3 + 5 + 6 =) 14 Punkte möglich. Da jeder Eckwürfel für sich gelegt werden kann, sind bei vier Eckwürfel folgende Summen möglich:

6 + 6 + 6 + 11 = 29 6 + 6 + 6 + 12 = 30 6 + 6 + 7 + 12 = 31
6 + 6 + 6 + 14 = 32 6 + 6 + 7 + 14 = 33 6 + 7 + 7 + 14 = 34

Für jeden Würfel-Turm aus 2 Würfel gibt es also eine solche Turm-Schlange.

Wenn du eine solche oder ähnliche „Turm-Schlange“ untersucht hast, konntest du auch die volle Punktzahl erreichen.

****

Aufgabe 3a. Quadrato hat einen Würfel-Turm aus einigen Würfeln gebaut. Er behauptet, insgesamt 45 Punkte auf allen sichtbaren Seitenflächen zu sehen. Wenn seine Aussage stimmt – wie viele Würfel hat er übereinandergelegt und welche Punktzahl ist oben zu sehen?

Aufgabe 3b. Kreisa hat eine Würfel-Schlange aus einigen Würfeln gelegt. Sie behauptet, insgesamt 50 Punkte auf allen sichtbaren Seitenflächen zu sehen. Wenn ihre Aussage stimmt – wie viele Würfel hat sie nebeneinandergelegt? Ist es möglich, dass für insgesamt 50 Punkten unterschiedlich viele Würfel gelegt werden können? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 3c. Quadrato hat nun einen neuen Würfel-Turm aus einigen Würfeln gebaut. Er behauptet, diesmal ebenfalls insgesamt 50 Punkte auf allen sichtbaren Seitenflächen zu sehen. Kreisa widerspricht: „Das kann nicht sein!“ Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – Antwortsatz: Quadrato hat einen Würfel-Turm aus 3 Würfeln gebaut.

Begründung: Du weißt bereits, dass bei jedem verwendeten Würfel im Würfel-Turm vorn und hinten sowie rechts und links insgesamt 14 Punkte zu sehen sind. Du kannst nun untersuchen, wie viele Punkte es bei unterschiedlich hohen Türmen sind.

Anzahl Würfel	1	2	**3**	4	5
Punkte von vorn, hinten, rechts und links	14	28	**42**	56	70
Punkte von oben	6	6	**3**	1	1
Punkte gesamt	20	34	**45**	57	71
Feststellung	< 45		**= 45**	> 45	

Nur wenn Quadrato einen Würfel-Turm aus 3 Würfeln baut, kann er insgesamt 45 Punkte sehen. Verwendet er weniger als 3 Türme, kann er nur weniger als 45 Punkte erreichen, selbst wenn oben 6 zu sehen ist. Verwendet er mehr als 3 Türme, kann er nur mehr als 45 Punkte erreichen, selbst wenn oben 1 zu sehen ist.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – Antwortsatz. Kreisa könnte eine Würfel-Schlange aus 4 Würfeln oder aus 5 Würfeln gelegt haben.

Begründung: Die größte Punktzahl wird sicherlich erreicht, wenn oben stets 6 und rechts und links jeweils 5 zu sehen ist. Mit 2 oder 3 Würfel ist die damit erreichbare Punktezahl jedoch kleiner als 50.

Würfel	oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
2	2 · 6 = 12	5	5	2 · 7 = 14	12 + 5 + 5 + 14 = 36
3	3 · 6 = 18	5	5	3 · 7 = 21	18 + 5 + 5 + 21 = 49

Verwendet Kreisa 4 Würfel, müssen oben, rechts und links insgesamt ($50 - 4 \cdot 7 =$) 22 Punkte zu sehen sein. Es gibt viele Möglichkeiten, ein solches Ergebnis zu erreichen, beispielsweise

Würfel	oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
4	$4 \cdot 5 = 20$	1	1	$4 \cdot 7 = 28$	$20 + 1 + 1 + 28 = 50$

Verwendet Kreisa 5 Würfel, müssen oben, rechts und links insgesamt ($50 - 5 \cdot 7 =$) 15 Punkte zu sehen sein. Es gibt auch dafür viele Möglichkeiten, ein solches Ergebnis zu erreichen, beispielsweise

Würfel	oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
5	$5 \cdot 2 = 10$	4	1	$5 \cdot 7 = 35$	$10 + 4 + 1 + 35 = 50$

Verwendet Kreisa 6 Würfel, müssen oben, rechts und links insgesamt ($50 - 6 \cdot 7 =$) 8 Punkte zu sehen sein. Da es aber oben, rechts und links insgesamt 8 Würfelflachen sind und nicht auf jeder eine 1 zu sehen sein kann, sind stets mehr als 50 Punkte zu sehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c – Antwortsatz: Bei einem Würfel-Turm können nicht insgesamt 50 Punkte zu sehen sein, denn bei drei verwendeten Würfeln sind maximal 48 Punkte möglich, und bei vier verwendeten Würfeln sind mindesten 57 Punkte zu sehen.

Begründung: In der Tabelle zur Lösung von Aufgabe 3a erkennst du bereits, dass es nur bei einer Turmhöhe von 3 Würfeln gelingen kann, insgesamt 50 Punkte zu sehen. Da aber die Gesamtzahl nur ($3 \cdot 14 + 6 =$) 48 wird, wenn oben 6 zu sehen ist, kann es keine Lösung mit 3 Würfeln geben.

Bei mehr als 4 Würfeln wird die sichtbare Punktezahl zu groß, selbst wenn oben 1 zu sehen ist: ($4 \cdot 14 + 1 =$) 57.

Bei mehr als 4 Würfeln wird die Punktezahl noch größer.

Teil A: Winter-Spaß

Es ist kalt geworden. Bald wird der erste Schnee fallen. Kreisa und Quadrato freuen sich schon darauf. Sie erinnern sich, wie sie im vergangenen Winter Schneemänner bauten.

Aufgabe 1. Kreisa baute damals viele Schneemänner, jeweils aus drei Kugeln. Dafür rollte sie im Januar 3 Kugeln mehr als im Dezember und im Februar halb so viele Kugeln wie im Dezember. Quadrato staunte und meinte: „Da hast du bestimmt über 50 Kugeln gerollt“. Doch Kreisa erwiderte: „Nein, es waren nicht über 50. Hätte ich aber Kugeln für einen Schneemann mehr gerollt, wären es über 50 Kugeln gewesen“.

Wie viele Schneemänner hatte Kreisa im vergangenen Winter gebaut? Erkläre, wie du dein Ergebnis gefunden hast!

Kreisa und Quadrato formten 6 verschieden große Kugeln mit 35 cm, 40 cm, 45 cm, 50 cm, 55 cm und 60 cm Durchmesser. Sie bauten daraus Schneemänner aus jeweils 3 Kugeln. Dabei achteten sie darauf, dass auf jede Kugel keine Kugel mit größerem Durchmesser gesetzt wurde.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Kreisa hatte im vergangenen Winter 16 Schneemänner gebaut.

Herleitung: Du kannst die Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Verwende dazu eine Tabelle, in der du für jede Anzahl der gerollten Kugeln im Dezember die Anzahl der Kugeln in den anderen Monaten ermittelst. Prüfe jeweils, ob Kreisas Aussage erfüllt wird.

Gerollte Kugeln im Dezember	Gerollte Kugeln im Januar	Gerollte Kugeln im Februar	Gesamtzahl < 50?	Gesamtzahl + 3 > 50?
3	3 + 3 = 6	3 : 2 n.l.		
6	6 + 3 = 9	6 : 2 = 3	6 + 9 + 3 = 18 < 50	18 + 3 = 21 < 50
9	9 + 3 = 12	9 : 3 n.l.		
12	12 + 3 = 15	12 : 2 = 6	12 + 15 + 6 = 33 < 50	33 + 3 = 36 < 50
18	**18 + 3 = 21**	**18 : 2 = 9**	**18 + 21 + 9 = 48 < 50**	**48 + 3 = 51 > 50**
24	24 + 3 = 27	24 : 2 = 12	24 + 27 + 12 = 53 > 50	

In der Tabelle erkennst du, dass die Anzahl der Kugeln im Dezember eine gerade Zahl sein muss, um die Anzahl der Kugeln im Februar berechnen zu können.

Nur wenn Kreisa im Dezember 18 Kugeln rollte, sind alle Aussagen der Aufgabe erfüllt. Dann waren es zusammen 48 Kugeln, aus denen sie (48 : 3 =) 16 Schneemänner bauen konnte. Die Probe ist in der Tabelle enthalten.

Lösungsvariante: Bestimmt hat Kreisa in jedem Monat so viele Kugeln gerollt, dass sie komplette Schneemänner bauen konnte. Deshalb muss in jedem Monat die Anzahl der gerollten Kugeln ein Vielfaches von 3 sein. Die Gesamtzahl aller Kugeln könnte deshalb beispielsweise 42, 45, 48, 51, 54 sein. Nur wenn es insgesamt 48 Kugeln waren, waren es weniger als 50 Kugeln und würden es mit 3 weiteren Kugeln über 50 Kugeln sein.

Probe: Bei diesem Lösungsweg ist eine Probe erforderlich, um zu prüfen, ob alle Aussagen der Aufgabenstellung erfüllt sind. Insbesondere musst du noch nachweisen, dass sich die 48 Kugel wie gefordert auf die drei Monate aufteilen lassen. Auch wenn du das richtige Ergebnis erraten hast, ist eine vollständige Probe erforderlich!

Lösungsvariante mit Variablen: Wenn du die Anzahl der Kugeln je Monat mit den Anfangsbuchstaben der Monate bezeichnest, gelten laut Aufgabentext folgende Zusammenhänge:

$J = D + 3$ $\quad F = D : 2$ oder $2 \cdot F = D$ $\quad D + J + F < 50$ $\quad D + J + F + 3 > 50$

Die Summe über die drei Monate kannst du nun durch F ausdrücken:

$$D + J + F = D + (D + 3) + F = (2 \cdot F) + (2 \cdot F + 3) + F = 5 \cdot F + 3 < 50$$

und

$$5 \cdot F + 3 + 3 > 50$$

Also muss das Fünffache von F kleiner als (50 – 3 =) 47 sein, aber gleichzeitig größer als (50 – 6 =) 44 sein. Aus der Fünferreihe erfüllt nur die Zahl 45 diese Aussagen. Damit erhältst du F = 45 : 5 = 9. Nun kannst du auch D = 2 · 9 = 18 und J = 18 + 3 = 21 ausrechnen.

****

Aufgabe 2a. Wie viele verschieden große Schneemänner ließen sich unter diesen Bedingungen aus den 6 Kugeln bauen? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2b. Wenn ein Schneemann komplett war, bauten sie aus den verbleibenden 3 Kugeln einen zweiten Schneemann. Quadrato fragte sich, ob dabei zwei gleichgroße Schneemänner entstehen könnten. Kannst du ihm diese Frage beantworten? Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast!

Lösungshinweise zur Aufgabe 2a – Antwortsatz: Sie konnten 20 verschiedene Schneemänner bauen, die 10 unterschiedliche Größen haben.

Herleitung: Schreibe alle Möglichkeiten auf, welche Schneemänner sie bauen könnten. Besonders übersichtlich wird es mit einer Tabelle:

	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm	55 cm	60 cm	Höhe
1	✓	✓	✓				(35 + 40 + 45 =) **120 cm**
2	✓	✓		✓			(35 + 40 + 50 =) **125 cm**
3	✓	✓			✓		(35 + 40 + 55 =) **130 cm**
4	✓	✓				✓	(35 + 40 + 60 =) **135 cm**
5	✓		✓	✓			(35 + 45 + 50 =) 130 cm
6	✓		✓		✓		(35 + 45 + 55 =) 135 cm
7	✓		✓			✓	(35 + 45 + 60 =) **140 cm**
8	✓			✓	✓		(35 + 50 + 55 =) 140 cm
9	✓			✓		✓	(35 + 50 + 60 =) **145 cm**
10	✓				✓	✓	(35 + 55 + 60 =) **150 cm**
11		✓	✓	✓			(40 + 45 + 50 =) 135 cm
12		✓	✓		✓		(40 + 45 + 55 =) 140 cm
13		✓	✓			✓	(40 + 45 + 60 =) 145 cm
14		✓		✓	✓		(40 + 50 + 55 =) 145 cm
15		✓		✓		✓	(40 + 50 + 60 =) 150 cm
16		✓			✓	✓	(40 + 55 + 60 =) **155 cm**
17			✓	✓	✓		(45 + 50 + 55 =) 150 cm
18			✓	✓		✓	(45 + 50 + 60 =) 155 cm
19			✓		✓	✓	(45 + 55 + 60 =) **160 cm**
20				✓	✓	✓	(50 + 55 + 60 =) **165 cm**

Lösungsvariante: Da jeder Kugeldurchmesser ein Vielfaches von 5 ist, wird auch die Schneemannhöhe ein Vielfaches von 5 sein.

- Der kleinste Schneemann entsteht, wenn er aus den drei kleinen Kugeln gebaut wird: Er ist (35 + 40 + 45 =) 120 cm hoch.
- Der größte Schneemann entsteht, wenn er aus den drei großen Kugeln gebaut wird: Er ist (50 + 55 + 60 =) 165 cm hoch.

Damit kann es höchstens Schneemänner der Höhen 120 cm, 125 cm, 130 cm, 135 cm, 140 cm, 145 cm, 150 cm, 155 cm, 160 cm und 165 cm geben, also 10 verschieden hohe Schneemänner. Allerdings musst du prüfen, ob es zu jeder dieser Höhen auch tatsächlich einen Schneemann gibt. Es genügt, für jede Höhe nur einen möglichen Schneemann anzugeben:

120 cm: 35 cm + 40 cm + 45 cm
125 cm: 35 cm + 40 cm + 50 cm
130 cm: 35 cm + 40 cm + 55 cm, 35 cm + 45 cm + 50 cm
135 cm: 35 cm + 40 cm + 60 cm, 35 cm + 45 cm + 55 cm, 40 cm + 45 cm + 50 cm
140 cm: 35 cm + 45 cm + 60 cm, 35 cm + 50 cm + 55 cm, 40 cm + 45 cm + 55 cm
145 cm: 40 cm + 45 cm + 60 cm, 40 cm + 50 cm + 55 cm, 35 cm + 50 cm + 60 cm
150 cm: 45 cm + 50 cm + 55 cm, 40 cm + 50 cm + 60 cm, 35 cm + 55 cm + 60 cm.
155 cm: 45 cm + 50 cm + 60 cm, 40 cm + 55 cm + 60 cm
160 cm: 45 cm + 55 cm + 60 cm
165 cm: 50 cm + 55 cm + 60 cm

Lösungshinweise zur Aufgabe 2b – Antwortsatz: Es ist nicht möglich, auf diese Weise zwei gleichgroße Schneemänner zu bauen.

Begründung: Wenn du die Höhe aus allen 6 Kugeln berechnest, erhältst du

(35 + 40 + 45 + 50 + 55 + 60 =) 285 cm

Da das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, kannst du es nicht in zwei gleichgroße Höhen zerlegen.

Lösungsvariante: Es gibt drei Kugeln, deren Maßzahl auf 5 enden, und es gibt drei Kugeln, deren Maßzahl auf 0 enden.

- Wenn der erste Schneemann aus 3 Kugeln besteht, deren Maßzahlen auf 5 enden, endet die Maßzahl der Gesamthöhe auf 5. Die Höhe des anderen Schneemanns endet aber auf 0.
- Wenn der erste Schneemann aus 2 Kugeln, deren Maßzahlen auf 5 enden und 1 Kugel, deren Maßzahl auf 0 endet, endet die Maßzahl der Gesamthöhe auf 0. Die Höhe des anderen Schneemanns endet aber auf 5.
- Wenn der erste Schneemann aus 1 Kugel, deren Maßzahl auf 5 endet, und 2 Kugeln, deren Maßzahlen auf 0 enden, endet die Maßzahl der Gesamthöhe auf 5. Die Höhe des anderen Schneemanns endet aber auf 0.
- Wenn der erste Schneemann aus 3 Kugeln besteht, deren Maßzahlen auf 0 enden, endet die Maßzahl der Gesamthöhe auf 0. Die Höhe des anderen Schneemanns endet aber auf 5.

****

Aufgabe 3. Einen dieser Schneemänner aus Aufgabe 2 ließen Kreisa und Quadrato stehen. Herr Raute fragte, wie groß dieser Schneemann geworden sei. Sie antworteten:

(1) Kreisa sagte: „Der Schneemann ist kleiner als 135 cm.“
(2) Quadrato ergänzte: „Wir haben nicht die kleinste Kugel verwendet.“
(3) Kreisa wusste noch: „Die Höhe des Schneemanns (angegeben in Zentimeter) ist kein Vielfaches von 10.“
(4) Schließlich meinte Quadrato: „Der Schneemann aus den anderen drei nicht verwendeten Kugeln ist um mehr als 20 cm größer als unser Schneemann.“

Herr Raute wunderte sich über diese Aussagen: „Eine dieser Antworten ist falsch“. Was ist Herrn Raute aufgefallen? Welche Aussage muss falsch sein? Kann Herr Raute die Größe des Schneemanns aus den Aussagen ermitteln, wenn die anderen drei Aussagen alle wahr sind? Ermittle auch du die Größe und erkläre, wie du dein Ergebnis gefunden hast!

****

Lösungshinweis zur Aufgabe 3 – Antwortsatz: Die Aussage von Quadrato ist falsch. Der gesuchte Schneemann ist 125 cm groß und wurde aus den Kugeln 35 cm, 40 cm und 50 cm gebaut.

Herleitung: (1) Kreisa sagte: „Der Schneemann ist kleiner als 135 cm.“

In der Auflistung aus Aufgabe 2 der möglichen Schneemänner gibt es nur 4 Möglichkeiten, so dass der Schneemann kleiner als 135 cm ist:

Nr.	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm	55 cm	60 cm	Höhe
1	✓	✓	✓				(35 + 40 + 45 =) 120 cm
2	✓	✓		✓			(35 + 40 + 50 =) 125 cm
3	✓	✓			✓		(35 + 40 + 55 =) 130 cm
4	✓		✓	✓			(35 + 45 + 50 =) 130 cm

Bei jeder dieser Möglichkeiten ist die kleinste Kugel zu verwenden.

Aber: (2) Quadrato ergänzte: „Wir haben nicht die kleinste Kugel verwendet.“

So hatte Herr Raute erkannt: Die Aussagen (/1) und (2) können nicht beide gleichzeitig wahr sein. Es muss also entweder die Aussage von Quadrato oder die Aussage von Kreisa falsch sein. Die Aussagen (3) und (4) sind aber immer richtig, weil ja drei Aussagen wahr sein sollen.

Fall 1: Angenommen, Quadratos Aussage ist falsch und Kreisas Aussage ist wahr.

Dann erfüllt aus der obigen Tabelle nur der Schneemann Nr. 2 die Aussage (3). Der andere Schneemann aus den drei anderen Kugeln ist (45 + 55 + 60 =) 160 cm groß. Er ist also (160 – 125 =) 35 cm größer. Es gilt: 35 cm > 20 cm. Somit ist auch die Aussage (4) wahr.

Es muss noch geprüft werden, dass Aussage (1) nicht falsch sein kann.
Fall 2: Angenommen, Kreisas Aussage ist falsch und Quadratos Aussage ist wahr.

Wir übernehmen aus der Auflistung zu Aufgabe 2 die Schneemänner, bei denen die kleinste Kugel nicht verwendet wurde. Aus der Liste sind wegen Aussage (3) noch alle Schneemänner zu streichen, deren Höhe auf 0 endet.

Um auch die Aussage (4) zu prüfen, ist die Höhe der Schneemänner zu berechnen, die aus den drei anderen Kugeln gebaut werden können.

40 cm	45 cm	50 cm	55 cm	60 cm	Höhe des Schneemanns	Höhe des anderen Schneemanns
✓	✓	✓			(40 + 45 + 50 =) 135 cm	(35 + 55 + 60 =) 150 cm
~~✓~~	~~✓~~		~~✓~~		~~(40 + 45 + 55 =) 140 cm~~	
✓	✓			✓	(40 + 45 + 60 =) 145 cm	(35 + 50 + 55 =) 140 cm
✓		✓	✓		(40 + 50 + 55 =) 145 cm	(35 + 45 + 60 =) 140 cm
~~✓~~		~~✓~~		~~✓~~	~~(40 + 50 + 60 =) 150 cm~~	
✓			✓	✓	(40 + 55 + 60 =) 155 cm	(35 + 45 + 50 =) 130 cm
	~~✓~~	~~✓~~	~~✓~~		~~(45 + 50 + 55 =) 150 cm~~	
	✓	✓		✓	(45 + 50 + 60 =) 155 cm	(35 + 40 + 55 =) 130 cm
	~~✓~~		~~✓~~	~~✓~~	~~(45 + 55 + 60 =) 160 cm~~	
		✓	✓	✓	(50 + 55 + 60 =) 165 cm	(35 + 40 + 45 =) 120 cm

Du stellst fest: In der ersten Zeile steht eine Möglichkeit, bei der der Schneemann aus den drei anderen Kugeln nur um 15 cm größer ist. In allen anderen Fällen ist der Schneemann aus den drei anderen Kugeln sogar kleiner. Die Aussage (4) kann also nicht erfüllt werden. Also kann Aussage (1) nicht falsch sein. Fall 1 ist die Lösung!

****

Aufgabe 4. Ein anderes Mal hatten Kreisa und Quadrato 6 gleichgroße Kugeln gerollt. Herr Raute hatte beobachtet, dass Kreisa für eine Kugel 5 Minuten benötigte und es bei Quadrato für jede Kugel 7 Minuten dauerte. Natürlich formte jeder seine begonnene Kugel allein bis zur geplanten Größe.

Frau Dreieck hatte angekündigt, dass sie um 12:00 Uhr zum Mittagessen rufen wird. Wann mussten Kreisa und Quadrato spätestens mit dem Kugelrollen beginnen, damit sie pünktlich fertig wurden?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa und Quadrato mussten spätestens 11:40 Uhr mit dem Kugelrollen beginnen, damit sie pünktlich 12:00 Uhr fertig wurden.

Begründung: Berechne jeweils die Dauer für das Rollen der 6 Kugeln, wenn die Anzahl auf Kreisa und Quadrato aufgeteilt werden. Beachte: Die Gesamtdauer wird durch die längere Zeit bestimmt.

Anzahl Kugel von Kreisa	Dauer	Anzahl Kugeln von Quadrato	Dauer	Gesamtdauer
6	30 min	6 – 6 = 0	0 min	30 min
5	25 min	6 – 5 = 1	7 min	25 min
4	**20 min**	**6 – 4 = 2**	**14 min**	**20 min**
3	15 min	6 – 3 = 3	21 min	21 min
2	10 min	6 – 2 = 4	28 min	28 min
1	5 min	6 – 1 = 5	35 min	35 min
0	0 min	6 – 0 = 6	42 min	42 min

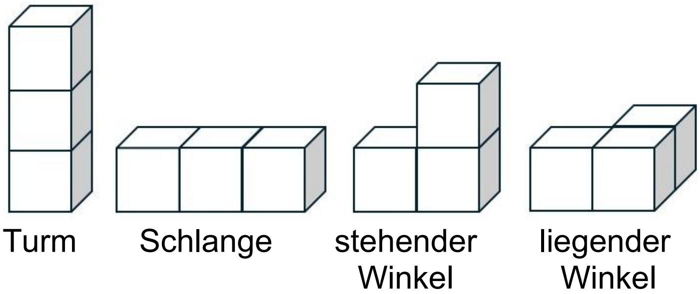
Wenn Kreisa 4 Kugeln und Quadrato 2 Kugeln rollt, ist die Gesamtdauer am kürzesten und dauert nur 20 Minuten. 20 min vor 12:00 Uhr ist 11:40 Uhr.

****

Teil B: Würfel-Figuren

Kreisa und Quadrato spielen wieder mit Spielwürfeln, auf deren sechs Würfelseiten wie gewöhnlich 1 bis 6 Punkte zu sehen sind. Dabei beträgt die Summe der Punkte auf den gegenüberliegenden Würfelseiten immer 7.

Quadrato stellt drei Würfel zu Figuren zusammen. Er findet vier verschiedene Möglichkeiten, bei denen sich die Würfel stets an den Würfelseiten vollständig berühren:



Aufgabe 1a. Gib an, wie viele Seitenflächen bei jeder dieser vier Figuren zu sehen sind!

Aufgabe 1b. Gib für jede dieser vier Würfel-Figuren an, wie groß die Punktsumme auf den sichtbaren Würfelseiten maximal werden kann. Erkläre, wie du für die maximale Punktsumme die Würfel anordnen musst!

Aufgabe 1c. Gib für jede dieser vier Würfel-Figuren an, wie groß die Punktsumme auf den sichtbaren Würfelseiten mindestens sein muss. Erkläre, wie du für die kleinste Punktsumme die Würfel anordnen musst!

(Die Punkte auf den Seiten unten und auf den sich berührenden Seiten der Würfel sind natürlich nicht zu sehen.)

Lösung zur Aufgabe 1a. Die Figuren haben 13 (Turm), 11 (Schlange, liegender Winkel) und 12 (stehender Winkel) Seitenflächen.

Begründung: Betrachte die Figuren von allen Seiten und zähle die sichtbaren Seitenflächen.

Figur	Anzahl der sichtbaren Seitenflächen					
	von vorn	von hinten	von links	von rechts	von oben	gesamt
Turm	3	3	3	3	1	13
Schlange	3	3	1	1	3	11
Stehender Winkel	3	3	2	2	2	12
Liegender Winkel	2	2	2	2	3	11

Lösungshinweise zur Aufgabe 1b. (Verwende die Eigenschaft, dass gegenüberliegende Würfelseiten stets die Augensumme 7 haben.)

Turm:

- Unterer Würfel: (7 + 7 =) 14 Punkte.
- Mittlerer Würfel: (7 + 7 =) 14 Punkte.
- Der obere Würfel kann so gedreht werden, dass oben 6 Punkte zu sehen sind deshalb: (6 + 7 + 7 =) 20 Punkte.

Insgesamt können höchstens (14 + 14 + 20 =) **48 Punkte** zu sehen sein.

Schlange:

- Der linke Würfel kann so gedreht werden, dass links 5 Punkte und oben 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (5 + 6 + 7 =) 18 Punkte.
- Der rechte Würfel kann so gedreht werden, dass rechts 5 Punkte und oben 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (5 + 6 + 7 =) 18 Punkte.
- Der mittlere Würfel kann so gedreht werden, dass oben 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (6 + 7 =) 13 Punkte.

Insgesamt können höchstens (18 + 18 + 13 =) **49 Punkte** zu sehen sein.

Stehender Winkel:

- Der linke Würfel kann so gedreht werden, dass links 5 Punkte und oben 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (5 + 6 + 7 =) 18 Punkte.
- Der untere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass rechts 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (6 + 7 =) 13 Punkte.
- Der obere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass oben 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (6 + 7 + 7 =) 20 Punkte.

Insgesamt können höchstens (18 + 13 + 20 =) **51 Punkte** zu sehen sein.

Liegender Winkel:

- Der linke Würfel kann so gedreht werden, dass links 5 Punkte und oben 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (5 + 6 + 7 =) 18 Punkte.
- Der vordere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass 5 Punkte, 6 Punkte und 4 Punkte zu sehen sind, deshalb: (4 + 5 + 6 =) 15 Punkte.
- Der hintere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass oben 5 Punkte und hinten 6 Punkte zu sehen sind, deshalb: (5 + 6 + 7 =) 18 Punkte.

Insgesamt können höchstens (18 + 15 + 18 =) **51 Punkte** zu sehen sein.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1c.

Turm:

- Unterer Würfel: (7 + 7 =) 14 Punkte.
- Mittlerer Würfel: (7 + 7 =) 14 Punkte.
- Der obere Würfel kann so gedreht werden, dass oben 1 Punkt zu sehen ist, deshalb: (1 + 7 + 7 =) 15 Punkte.

Insgesamt können mindestens (14 + 14 + 15 =) **43 Punkte** zu sehen sein.

Schlange:

- Der linke Würfel kann so gedreht werden, dass links 1 Punkt und oben 2 Punkte zu sehen sind, deshalb: (1 + 2 + 7 =) 10 Punkte.
- Der rechte Würfel kann so gedreht werden, dass rechts 1 Punkt und oben 2 Punkte zu sehen sind, deshalb: (1 + 2 + 7 =) 10 Punkte.
- Der mittlere Würfel kann so gedreht werden, dass oben 1 Punkt zu sehen ist, deshalb: (1 + 7 =) 8 Punkte.

Insgesamt können mindestens (10 + 10 + 8 =) **28 Punkte** zu sehen sein.

Stehender Winkel:

- Der linke Würfel kann so gedreht werden, dass links 1 Punkt und oben 2 Punkte zu sehen sind, deshalb: (1 + 2 + 7 =) 10 Punkte.
- Der untere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass rechts 1 Punkt zu sehen ist, deshalb: (1 + 7 =) 8 Punkte.
- Der obere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass oben 1 Punkt zu sehen ist, deshalb: (1 + 7 + 7 =) 15 Punkte.

Insgesamt können mindestens (10 + 8 + 15 =) **33 Punkte** zu sehen sein.

Liegender Winkel:

- Der linke Würfel kann so gedreht werden, dass links 1 Punkt und oben 2 Punkte zu sehen sind, deshalb: (1 + 2 + 7 =) 10 Punkte.
- Der vordere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass 1 Punkt, 2 Punkte und 3 Punkte zu sehen sind, deshalb: (1 + 2 + 3 =) 6 Punkte.
- Der hintere rechte Würfel kann so gedreht werden, dass oben 1 Punkt und hinten 2 Punkte zu sehen sind, deshalb: (1 + 2 + 7 =) 10 Punkte.

Insgesamt können mindestens (10 + 6 + 10 =) **26 Punkte** zu sehen sein.

Lösungsvariante zur Aufgabe 1c: Zähle die sichtbaren Seitenflächen und setze für jede darauf sichtbare Punktzahl den Wert (7 – Punktzahl) ein. Auf diese Weise findest du die Formel

Minimale Gesamt-Punktzahl = Anzahl der Seitenflächen · 7 – maximale Punktzahl

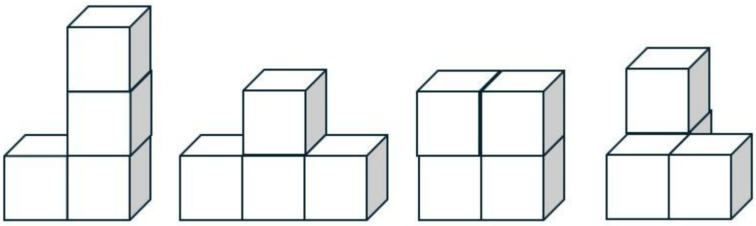
Turm	13 Seitenflächen: minimale Punktzahl = 13 · 7 – 48 = 43 Punkte.
Schlange	11 Seitenflächen: minimale Punktzahl = 11 · 7 – 49 = 28 Punkte.
stehender Winkel	12 Seitenflächen: minimale Punktzahl = 12 · 7 – 51 = 33 Punkte
liegender Winkel	11 Seitenflächen: minimale Punktzahl = 11 · 7 – 51 = 26 Punkte.

****

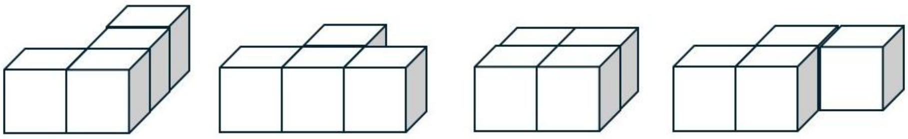
Aufgabe 2. Kreisa gestaltet Würfel-Figuren aus 4 Würfeln. Den Würfel-Turm und die Würfel-Schlange kennst du schon. Finde vier weitere Würfel-Figuren und achte darauf, dass sie sich untereinander in der Anzahl der sichtbaren Würfelseiten unterscheiden. Beschreibe, welche Würfel-Figuren du gefunden hast und gib jeweils die Anzahl der sichtbaren Würfelseiten an.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, vier Würfel zu Figuren zusammenzusetzen, z.B.:



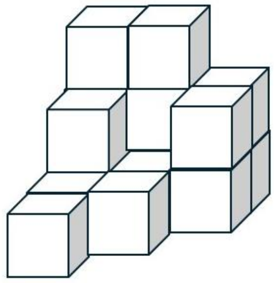
stehendes L — stehendes Podest — stehendes Quadrat — Ecke



liegendes L — liegendes Podest — liegendes Quadrat — liegende Treppe

Zähle jeweils die sichtbaren Seitenflächen:

Figur	Von vorn	Von hinten	Von links	Von rechts	Von oben	gesamt
stehendes Quadrat	4	4	2	2	2	12
liegendes Quadrat	2	2	2	2	4	12
stehendes Podest	4	4	2	2	3	13
liegendes Podest	3	3	2	2	4	14
liegendes L	2	2	3	3	4	14
liegende Treppe	3	3	2	2	4	14
Ecke	3	3	3	3	3	15
Stehendes L	4	4	3	3	2	16



Quadrato hat nun mehrere weiße Würfel verbaut, ohne auf die Punkte zu achten. Er freut sich über die abgebildete Figur.

Aufgabe 3a. Wie viele Würfel hat Quadrato verbaut? Begründe dein Ergebnis!

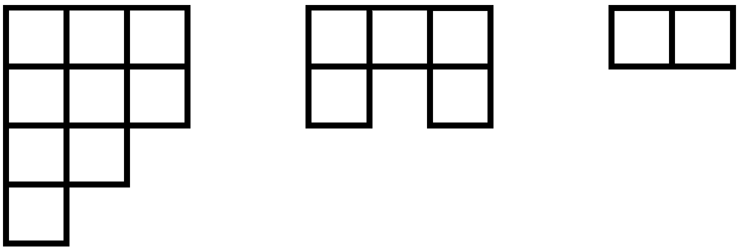
Aufgabe 3b. Wie viele Würfelflächen sieht Quadrato, wenn er um den Tisch herum läuft und auch von oben auf die Figur schaut?

Aufgabe 3c. Quadrato kam auf die Idee, alle sichtbaren Würfelseiten rot anzumalen. Als die Farbe getrocknet war, nahm er seine Figur auseinander und betrachtete jeden einzelnen Würfel auf allen seiner 6 Seiten.

- Wie viele dieser einzelnen Würfel sind auf allen Würfelseiten weiß?
- Wie viele dieser einzelnen Würfel haben 1 rote und 5 weiße Würfelseiten?
- Wie viele dieser einzelnen Würfel haben 2 rote und 4 weiße Würfelseiten?
- Kann es einzelne Würfel geben, die auf allen Würfelseiten rot sind?

Lösungshinweise zur Aufgabe 3a – **Antwortsatz:** Quadrato hat 16 Würfel verbaut.

Begründung: Zeichne die drei Schichten der Figur und zähle die Würfel in jeder Schicht.

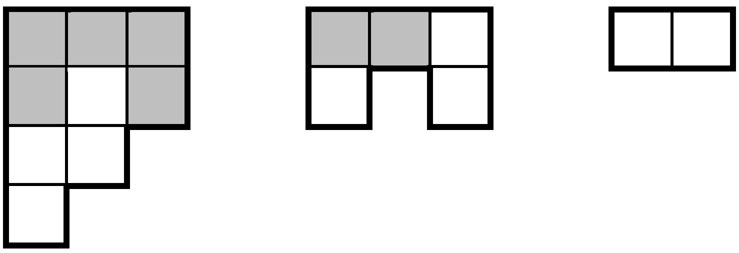


untere Schicht	mittlere Schicht	obere Schicht
9 Würfel	5 Würfel	2 Würfel

Lösungsvariante: Baue selbst so eine Figur (beispielsweise aus Spielwürfel oder Lego-Steinen) und zähle die verbauten Würfel.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3b – Antwortsatz: Quadrato sieht insgesamt 41 Würfelflächen.

Begründung: Du kannst die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen ganz einfach an einem Modell zählen. In den Schichten erkennst du aber auch, dass „rundherum“ alle Seitenflächen und von oben die nicht bedeckten (hier weißen) Seitenflächen zu sehen sind.



14 + 4	12 + 3	6 + 2
Seitenflächen	Seitenflächen	Seitenflächen

Gesamt (18 + 15 + 8 =) 41 Würfelflächen

Lösungshinweise zur Aufgabe 3c.

Herleitung: Trage in die Schichten bei jedem Würfel ein, wie viele Seitenflächen von diesem Würfel in der Figur zu sehen sind (nur diese werden rot gefärbt).

2	1	2
1	1	2
2	3	
4		

2	2	3
4		4

4	4

Du stellst fest:

- Kein Würfel ist auf allen Seiten weiß (**0 rote** und 6 weiße Würfelseiten), weil jeder der 16 verbauten Würfel mindestens mit einer Seitenfläche zu sehen ist.
- 3 Würfel haben **1 rote** und 5 weiße Würfelseiten.
- 6 Würfel haben **2 rote** und 4 weiße Würfelseiten.
- Kein Würfel ist auf allen Seiten rot (**6 rote** und 0 weiße Würfelseiten), weil jeder Würfel entweder auf dem Tisch oder auf einem anderen Würfel liegt.

Auch die weiteren Möglichkeiten lassen sich ermitteln:

- 2 Würfel haben **3 rote** und 3 weiße Würfelseiten.
- 5 Würfel haben **4 rote** und 2 weiße Würfelseiten.
- Kein Würfel hat **5 rote** und 1 weiße Würfelseiten.

Jetzt ist eine Probe möglich:

- Es werden $0 + 3 + 6 + 0 + 2 + 5 + 0 = 16$ Würfel berücksichtigt (wie Aufgabe 3a).
- Insgesamt sind $0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 41$ Seitenflächen rot (wie Aufgabe 3a).

Teil A: Fahrrad-Ausflug

Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und Quadrato – wollen auch dieses Frühjahr wieder einen Fahrradausflug unternehmen.

Aufgabe 1. Bei ihren Vorbereitungen erinnern sie sich an die Fahrt im vergangenen Jahr.

- Quadrato sagt: „Das waren damals insgesamt 23 km Fahrtstrecke“.
- Kreisa meint: „Es waren viel mehr, nämlich 32 km.“
- Schließlich behauptet Frau Dreieck: „Ich erinnere mich, dass wir 29 km gefahren sind.“

Herr Raute lacht: „Da irrt ihr euch. Im Vergleich zu der tatsächlichen Strecke ist eine Antwort um 2 km daneben, eine Antwort um 4 km daneben und eine Antwort sogar um 5 km daneben“

Kannst du aus diesen Antworten ermitteln, wie viele Kilometer die Familie letztes Jahr geradelt ist? Gib den Wert an und beschreibe, wie du ihn gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Die Strecke betrug 27 km.

Herleitung: Da wir nicht wissen, um wie viele Kilometer Quadrato mit seiner Angabe daneben lag, probieren wir alle Möglichkeiten. Wir schreiben unsere Überlegungen übersichtlich in eine Tabelle:

Angabe von Quadrato: 23 km	Tatsächliche Strecke	Angabe von Kreisa		Angabe von Frau Dreieck	
2 km zu wenig	23 + 2 = 25	32 – 25 = 7	7 km daneben nicht möglich	29 – 25 = 4	4 km daneben nicht möglich
2 km zu viel	23 – 2 = 21	32 – 21 = 9	9 km daneben nicht möglich	29 – 21 = 8	8 km daneben nicht möglich
4 km zu wenig	**23 + 4 = 27**	**32 – 27 = 5**	**5 km daneben möglich**	**29 – 27 = 2**	**2 km daneben möglich**
4 km zu viel	23 – 4 = 19	32 – 19 = 13	13 km daneben nicht möglich	29 – 19 = 10	10 km daneben nicht möglich
5 km zu wenig	23 + 5 = 28	32 – 28 = 4	4 km daneben möglich	29 – 28 = 1	1 km daneben nicht möglich
5 km zu viel	23 – 5 = 18	32 – 18 = 14	14 km daneben nicht möglich	29 – 18 = 11	11 km daneben nicht möglich

Nur wenn die tatsächliche Strecke 27 km lang war, hat Herr Raute mit seinen drei Aussagen recht.

****

Aufgabe 2. Vor Beginn des neuen Ausfluges beraten sie, in welcher Reihenfolge sie hintereinander fahren wollen.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der vier Radfahrenden?
b) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn Frau Dreieck nicht vorn fahren will?

c) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn zusätzlich Quadrato und Kreisa stets direkt hintereinander fahren wollen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2) Wir kürzen die Namen mit ihren Anfangs-buchstaben ab: Q (**Q**uadrato), K (**K**reisa), D (Frau **D**reieck) und R (Herr **R**aute).

Antwortsatz zu Aufgabe 2a) Es gibt 24 verschiedene Anordnungen.

Begründung: Wir schreiben alle Möglichkeiten auf, die 4 Buchstaben anzuordnen.

QKDR	QKRD	QDKR	QDRK	QRDK	QRKD
KQDR	KQRD	KDQR	KDRQ	KRDQ	KRQD
DKQR	DKRQ	DQKR	DQRK	DRQK	DRKQ
RKDQ	RKQD	RDKQ	RDQK	RQDK	RQKD

Antwortsatz zu Aufgabe 2b) Es gibt 18 verschiedene Anordnungen, wenn Frau Dreieck nicht vorn fahren will.

Begründung: Wir streichen alle Möglichkeiten, bei denen D an erster Stelle (also links) steht.

QKDR	QKRD	QDKR	QDRK	QRDK	QRKD
KQDR	KQRD	KDQR	KDRQ	KRDQ	KRQD
~~DKQR~~	~~DKRQ~~	~~DQKR~~	~~DQRK~~	~~DRQK~~	~~DRKQ~~
RKDQ	RKQD	RDKQ	RDQK	RQDK	RQKD

Antwortsatz zu Aufgabe 2c) Es gibt 8 verschiedene Anordnungen, wenn zusätzlich Quadrato und Kreisa stets direkt hintereinander fahren wollen.

Begründung: Wir streichen zusätzlich zur Teilaufgabe b) alle Möglichkeiten, bei denen Q und K nicht direkt nebeneinander stehen:

QKDR	**QKRD**	~~QDKR~~	~~QDRK~~	~~QRDK~~	~~QRKD~~
KQDR	**KQRD**	~~KDQR~~	~~KDRQ~~	~~KRDQ~~	~~KRQD~~
~~DKQR~~	~~DKRQ~~	~~DQKR~~	~~DQRK~~	~~DRQK~~	~~DRKQ~~
~~RKDQ~~	**RKQD**	**RDKQ**	**RDQK**	~~RQDK~~	**RQKD**

****

Aufgabe 3. Nach der ersten Rast fragt Quadrato, wie viele Kilometer sie denn noch fahren müssen, um wieder zu Hause anzukommen. Herr Raute antwortet: „Bis zur nächsten Rast sind es noch einmal so viele Kilometer, wie wir schon zurückgelegt haben. Danach fahren wir zum Museum, das 6 km von dort entfernt ist. Nach dem Museumsbesuch müssen wir nur noch halb so viele Kilometer radeln, wie wir bis zu unserem ersten Rastplatz gefahren sind.“ Frau Dreieck ergänzt: „Du weißt doch, dass unser Ausflug insgesamt 31 km lang sein wird.“

Mit diesen Angaben konnte sich Quadrato seine Frage beantworten – du auch? Gib an, wie viele Kilometer die Familie nach der ersten Rast bis nach Hause noch fahren muss. Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Sie müssen noch 21 Kilometer fahren, um wieder zu Hause anzukommen.

Herleitung: Wir lösen die Aufgabe durch systematisches Probieren. Dazu tragen wir in eine Tabelle die Ergebnisse ein, wenn wir die Anzahl der Kilometer bis zur ersten Rast raten. Gleich beim ersten Versuch erkennen wir, dass die Anzahl der Kilometer bis zur 1. Rast eine gerade Zahl sein muss, damit sich auch für den letzten Abschnitt eine ganze Anzahl von Kilometern ergibt.

Anzahl km bis zur 1. Rast	Anzahl km von 1. zur 2. Rast	Entfernung von 2. Rast zum Museum	Anzahl km für letzten Abschnitt	Summe	Vergleich mit 31 km
1	1	6	1 : 2 nicht ganzzahlig		
2	2	6	2 : 2 = 1	2 + 2 + 6 + 1 = 11	11 < 31
4	4	6	4 : 2 = 2	4 + 4 + 6 + 2 = 16	16 < 31
6	6	6	6 : 2 = 3	6 + 6 + 6 + 3 = 21	21 < 31
8	8	6	8 : 2 = 4	8 + 8 + 6 + 4 = 26	26 < 31
10	**10**	**6**	**10 : 2 = 5**	**10 + 10 + 6 + 5 = 31**	**31 = 31**
12	12	6	12 : 2 = 6	12 + 12 + 6 + 6 = 36	36 > 31

Nur wenn es bis zur 1. Rast 10 km weit war, ergeben sich für den gesamten Ausflug 31 km. Also mussten sie nach der ersten Rast noch (31 – 10 =) 21 km fahren, um zu Hause anzukommen.

In der Tabelle ist die Probe bereits ablesbar.

Lösungsvariante: Wir stellen eine Gleichung auf und bezeichnen mit x die Anzahl der Kilometer bis zur ersten Rast. Dann wissen wir aus den Angaben im Text:

Entfernung von 1. zur 2. Rast: x
Entfernung von 2. Rast zum Museum: 6
Entfernung Museum bis nach Hause: $\frac{1}{2}x$

Also gilt für die gesamte Strecke: $x + x + 6 + \frac{1}{2}x = 31$
$2x + \frac{1}{2}x = 31 - 6 = 25$
Daraus ermitteln wir (zum Beispiel durch Probieren) $x = 10$

Probe: (10 + 10 + 6 + 5 =) 31

****

Aufgabe 4. An Quadratos Fahrrad ist ein Kilometerzähler, auf dem die zurückgelegten Kilometer mit drei Ziffern angezeigt werden. Er führt zu Hause ein Rad-Tagebuch: Er schreibt nach jeder längeren Strecke den Kilometerstand vor Beginn und nach Ende einer Fahrt auf. Diesmal stellt er fest, dass der Kilometerstand vor Beginn vorwärts und rückwärts gelesen den gleichen Wert ergibt und der Kilometerstand nach Ende der Fahrt (also nach 31 km) aus lauter gleichen Ziffern besteht.

Finde alle Möglichkeiten, wie der aktuelle Kilometerstand nach diesem Ausflug sein könnte.

Hinweis: Du kannst zum Beispiel die Zahl 585 oder die Zahl 2442 vorwärts und rückwärts lesen. Eine Zahl mit dieser Eigenschaft heißt *Palindrom*.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Der aktuelle Kilometerstand nach diesem Ausflug kann 111 km oder 222 km gewesen sein.

Probe: Es gilt 111 – 31 = 80 (auf dem Kilometerzähler als 080 lesbar) und alle Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt. Es gilt 222 – 31 = 191 und alle Bedingungen der Aufgabe sind auch hierbei erfüllt.

Herleitung: Es gibt 9 dreistellige Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen. Von diesen subtrahieren wir 31.

111 – 31 = 80 (**= 080**) **222 – 31 = 191** 333 – 31 = 302 444 – 31 = 413

555 – 31 = 524 666 – 31 = 635 777 – 31 = 746 888 – 31 = 857

999 – 31 = 968

Lösungsvariante: Wenn vom Kilometerstand nach dem Ausflug 31 subtrahiert wird, verringert sich die Ziffer an der Einerstelle um 1. Weil vor dem Ausflug eine Palindromzahl stehen soll, muss sich bei Subtraktion mit 31 auch die Hunderter-Stelle um 1 verringern. Für Zahlen aus lauter gleichen Ziffern ist dies nur für 111 oder 222 möglich. Durch Probieren erkennen wir, dass 111 und 222 die einzige Möglichkeit ist, alle Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen.

Hinweis: Wer 111 – 31 = 80 richtig gerechnet hat und übersah, dass auf dem Kilometerzähler die Anzeige 080 steht, erhält dennoch voll Punktzahl. Da der Kilometerzähler nur drei Stellen anzeigt, könnte auch nach dem Ausflug 000 zu sehen sein, nämlich wenn nach 999 die Zahl 1000 nur als 000 angezeigt wird. Wegen 1000 – 31 = 969 finden wir eine weitere Lösung mit der Anzeige 000 auf dem Kilometerzähler.

Teil B: Schlangen und Rahmen aus Würfeln

Quadrato legt Würfel auf ein viereckiges Feld mit Kästchen. Jedes Kästchen ist so groß, dass darauf genau ein Würfel passt. Seinen ersten Würfel legt er in die untere linke Ecke. Den nächsten Würfel legt er so, dass er mindestens einen bereits liegenden Würfel an einer Seitenfläche vollständig berührt. Keine Würfel dürfen übereinander gestellt werden. Hat er alle Würfel gelegt, nummeriert er sie. Er nennt seine Figur *Würfel-Schlange*, wenn er die Nummern in aufsteigender Reihenfolge erreichen kann, ohne einen Würfel mehrfach zu berühren.

Beispiel: Quadrato hat ein 4x4-Feld mit insgesamt 16 Kästchen und 5 Würfel. Die Abbildung 1 zeigt keine Würfel-Schlange, denn um alle Nummern nacheinander zu erreichen, muss die Zahl 3 zweimal durchlaufen werden. Abbildung 2 ist eine Würfel-Schlange. Quadrato hätte die Würfel aber auch so wie in Abbildung 3 nummerieren können.

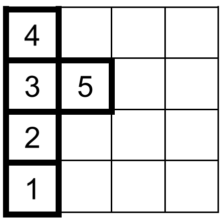


Abbildung 1

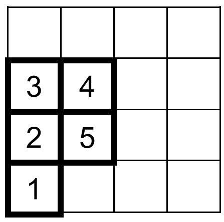


Abbildung 2

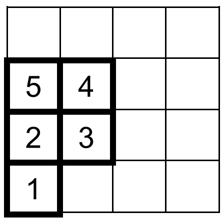


Abbildung 3

Aufgabe 1a. Quadrato hat ein 4x4-Feld und vier Würfel. Markiere auf diesem Feld alle Kästchen, auf denen der Würfel mit der Nummer 4 einer Würfel-Schlange liegen könnte.

Aufgabe 1b. Quadrato zeichnet sich nun ein 5x5-Feld und nimmt 7 Würfel. Er möchte eine Würfel-Schlange legen, so dass der Würfel mit der Nummer 7 mit einer Seitenfläche am Würfel mit der Nummer 1 anliegt. Probiere es auch – was stellst du fest? Beschreibe deine Beobachtung.

Aufgabe 1c. Nun nimmt Quadrato ein 6x6-Feld. Wie lang muss seine Würfel-Schlange mindestens sein, damit der Würfel mit der höchsten Nummer auf dem Kästchen rechts oben liegt?

Aufgabe 1d. Kreisa meint zum 6x6-Feld: „Die längste Würfel-Schlange, deren Würfel mit der höchsten Nummer auf dem Kästchen rechts oben liegt, berührt alle 36 Kästchen, ist also 36 Würfel lang.“ Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort und gib ein Beispiel für die längste Würfel-Schlange dieser Art an.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) Es gibt 6 Positionen auf dem 4x4-Feld, auf denen die Würfel-Schlange enden kann.

X			
	X		
O		X	
	X		O

Begründung: Wir legen 4 Würfel auf das Feld, wobei wir den 2. Würfel oberhalb des 1. Würfels legen. Auf diese Weise finden wir 4 Positionen, an denen die Würfel-Schlange enden kann (mit X markiert).

4			
3			
2			
1			

3	4		
2			
1			

	4		
2	3		
1			

2	3	4	
1			

2	3		
1	4		

Legen wir dagegen den 2. Würfel rechts neben den 1. Würfel, finden wir noch zwei zusätzliche Positionen, auf denen die Würfel-Schlange enden kann (mit O markiert).

1	2	3	4

		4	
1	2	3	

	4		
	3		
1	2		

	3	4	
1	2		

4	3		
1	2		

Es sind also genau die 6 markierten Positionen im 4x4-Feld möglich.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) Wir können alle möglicherweise passenden Würfel-Schlangen auflegen und stellen fest, dass der Würfel 7 nicht neben dem Startwürfel 1 liegen kann. Wir zeichnen den Würfel 7 bereits ein.

Legen wir die Würfel zunächst so weit wie möglich oberhalb vom Würfel 1 (Abbildung 1), so kann der Würfel 6 den Würfel 7 nicht berühren.

Legen wir die Würfel 2 bis 4 oberhalb vom Würfel 1 (Abbildung 2), so kann der Würfel 6 ebenfalls den Würfel 7 nicht berühren.

Legen wir nur die Würfel 2 und 3 oberhalb vom Würfel 1 (Abbildungen 3 und 4), so kann der Würfel 6 den Würfel 7 nur an einer Ecke berühren (und wird deshalb keine Würfel-Schlange).

5	6			
4				
3				
2				
1	7			

Abbildung 1

4	5			
3	6			
2				
1	7			

Abbildung 2

3	4			
2	5	6		
1	7			

Abbildung 3

3	4	5		
2		6		
1	7			

Abbildung 4

Auch wenn wir nur den Würfel 2 oberhalb vom Würfel 1 legen (Abbildungen 5 bis 7), finden wir keine Möglichkeit, dass sich die Würfel 6 und 7 an einer Seite berühren.

	4	5		
2	3	6		
1	7			

Abbildung 5

2	3	4	5	
1	7		6	

Abbildung 6

2	3	4		
1	7	5	6	

Abbildung 7

Ähnliche Beobachtungen ergeben sich, wenn wir statt „oberhalb von 1“ mit „rechts von 1“ beginnen. In keinem Fall können wir die Aufgabe lösen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) Die Würfel-Schlange muss mindestens 11 Würfel lang sein, damit der Würfel mit der höchsten Nummer auf dem Kästchen rechts oben liegt.

6	7	8	9	10	11
5					
4					
3					
2					
1					

Begründung: Es ist nicht schwer, mit einer Würfelschlange aus 11 Würfeln die rechte obere Ecke zu erreichen. Aber egal, wie die Würfelschlange gelegt wird: nach dem 1. Würfel links unten müssen mindestens 5 Würfel nach oben und mindestens 5 Würfel nach rechts gelegt werden. Es sind also immer mindestens (1 + 5 + 5 =) 11 Würfel erforderlich.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1d) Kreisa hat nicht recht.

Begründung: Es gelingt nicht, eine Würfel-Schlange aus 36 Würfeln auf das 6x6-Feld zu legen. Es bleibt immer das Feld links neben dem Feld links oben (mit X markiert) oder unterhalb des Feldes links oben frei. Die längste Würfel-Schlange hat also 35 Würfel (Achtung: Wir beginnen mit 1 immer links unten!).

6	7	18	19	X	35
5	8	17	20	33	34
4	9	16	21	32	31
3	10	15	22	29	30
2	11	14	23	28	27
1	12	13	24	25	26

Begründung: Wir nummerieren die Zeilen und Spalten des 6x6-Feldes und füllen die Felder wie eine Additionstabelle aus. Am Startfeld links unter beginnt die Würfel-Schlange mit einer geraden Zahl (2). Wird der nächste Würfel gelegt, so liegt er auf einer ungeraden Zahl. Das setzt sich so fort: Abwechselnd liegen die Würfel also auf einer geraden und einer ungeraden Zahl.

Besteht also die Würfel-Schlange aus einer geraden Anzahl von Würfel, so liegt der letzte Würfel auf einem Feld mit ungerader Zahl – das kann aber nicht links oben sein! Es können also nicht 36 Würfel sein. Eine Lösung mit 35 Würfeln haben wir bereits gefunden.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

****

Aufgabe 2a. Kreisa nennt eine Würfel-Schlange *Würfel-Rahmen*, wenn der Würfel mit der höchsten Nummer am Würfel mit der Nummer 1 an einer Seite anliegt. Sie fordert Quadrato auf, einen Würfel-Rahmen zu legen, so dass 3 Kästchen in dessen Mitte frei bleiben (umrahmt werden). Wie viele Würfel benötigt Quadrato, um die Aufgabe zu lösen. Zeichne eine mögliche Lösung.

Aufgabe 2b. Quadrato möchte Würfel-Rahmen legen, die 12 Kästchen umrahmen. Er vermutet, dass es verschiedene Rahmen gibt. Finde alle Möglichkeiten und gib jeweils an, wie viele Würfel für jede Möglichkeit benötigt werden.

Aufgabe 2c. Quadrato möchte mit 13 Würfeln möglichst viele Kästchen umrahmen. Es gelingt ihm nicht. Erkläre, warum diese Aufgabe nicht lösbar ist.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) Quadrato benötigt 12 Würfel, um einen Würfel-Rahmen mit 3 umrahmten Feldern zu legen.

Begründung: Die drei umrahmten Felder können nebeneinander (Abbildung links) oder im Eck (Abbildung Mitte) liegen. In beiden Fällen genügen 12 Würfel für den Würfel-Rahmen.

Von den umrahmten Feldern kann nicht ein Feld wie in der rechten Abbildung isoliert umrahmt werden, weil von Nr. 11 zu Nr. 12 das Feld mit der Nr. 10 im Rahmen noch einmal durchlaufen werden muss.

						10	9	8								
11	10	9	8	7		11		7	6		14	13	12	10	9	8
12				6		12			5		15			11		7
1	2	3	4	5		1	2	3	4		1	2	3	4	5	6

Ergänzung: Wenn aber Quadrato einzelne umrahmte Felder mit breiten Stegen abgrenzt, würden ebenfalls Würfel-Rahmen entstehen – aber Quadrato will natürlich möglichst wenige Würfel in seinen Würfel-Rahmen verbauen, so dass die folgenden Abbildungen nicht als Antwort erwartet werden.

17	16	15	14	11	10	9		23	22	21	18	17	16	13	12	11
18			13	12		8		24		20	19		15	14		10
1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7	8	9

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) Wir überlegen uns, wie viele Möglichkeiten es gibt, 12 Felder anzuordnen. Zunächst betrachten wir die 1x12-, 2x6- und 3x4-Rechtecke, denn es gilt $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

Um diese Rechtecke zu umrahmen, benötigen wir 30 Würfel (für Rahmen A), 20 Würfel (für Rahmen B) und 18 Würfel (für Rahmen C).

Es sind aber auch Rahmen möglich, die keine Rechtecke bilden. So können wir 11 Felder in eine Reihe legen und das 12. Feld oberhalb dieser Reihe anfügen (Rahmen D), Egal, wo wir dieses 12. Feld anfügen – es werden immer 30 Würfel für den Rahmen benötigt.

															18	17	16	15	14	13	12	11
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16		19							10
30	A												15		20	B						9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		1	2	3	4	5	6	7	8

										18	17	16			15	14	13	12	11	10		
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19		15			16					9		
30	D											14			17					8		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13			18	C				7		
															1	2	3	4	5	6		

Wenn wir nur 10 Felder in eine Reihe legen und zwei weitere Felder oberhalb dieser Reihe anfügen, so benötigen wir auch 30 Würfel, solange sich die zwei angefügten Felder nicht berühren. Liegen die zwei angefügten Felder aber direkt nebeneinander (Rahmen E), so werden nur noch 28 Würfel benötigt. Auf diese Weise finden wir auch Würfel-Rahmen mit 26 Würfel (Rahmen F), 24 Würfel (Rahmen G) und 22 Würfel (Rahmen H).

						20	19	18	17						20	19	18	17	16	15		
27	26	25	24	23	22	21			16	15	14		23	22	21					14	13	12
28	E										13		24	G								11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				20	19	18	17	16						19	18	17	16	15	14	13		
25	24	23	22	21				15	14	13			21	20						12	11	
26	F									12			22	H							10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Die Würfel-Rahmen können auch anders aussehen, es sind aber immer 18, 20, 22, 24, 26, 28 oder 30 Würfel erforderlich (wenn sich die umrahmten Felder berühren).

Lösungshinweise zu Aufgabe 2c) Wir finden beim Experimentieren keinen Würfel-Rahmen mit einer ungeraden Anzahl von Würfeln. Wir erkennen, dass es im Würfel-Rahmen

- zu jedem Würfel, der oberhalb seines Vorgängers gelegt wird, einen Würfel geben muss, der unterhalb seines Vorgängers gelegt wird, und
- zu jedem Würfel, der rechts seines Vorgängers gelegt wird, einen Würfel geben muss, der links seines Vorgängers gelegt wird.

Wir betrachten zum Beispiel den Würfel-Rahmen aus Aufgabe 2a. Wir vergleichen

1 – 2 nach rechts	und	9 – 10 nach links
2 – 3 nach rechts	und	8 – 9 nach links
3 – 4 nach rechts	und	6 – 7 nach links
4 – 5 nach oben	und	12 – 1 nach unten
5 – 6 nach oben	und	11 – 12 nach unten
7 – 8 nach oben	und	10 – 11 nach unten

10	9	8	
11		7	6
12			5
1	2	3	4

Somit gibt es zu jedem Würfel einen passenden anderen Würfel im Würfel-Rahmen. Die Anzahl der Würfel muss also eine gerade Zahl sein. Deshalb ist die Aufgabe, mit 13 Würfeln möglichst viele Kästchen vollständig zu umrahmen, nicht lösbar.

Aufgabe 3. Kreisa hat viele Würfel-Rahmen gelegt, mit denen eine Anzahl Kästchen umrahmt wurden. Sie vermutet, dass immer mehr Würfel für den Würfel-Rahmen benötigt werden, als Kästchen umrahmt werden können. Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3) Kreisa hat nicht recht. Es gibt Würfel-Rahmen, bei denen die Anzahl der Würfel kleiner als die Anzahl der umrahmten Felder ist.

Begründung: Zur Beantwortung der Frage genügt es, ein Beispiel anzugeben, das der Aussage von Kreisa widerspricht.

Wir betrachten als Beispiele quadratische Felder, die wir umrahmen wollen. Für kleine quadratische Felder ist die Aussage von Kreisa erfüllt.

Aber wenn ein 5x5-Feld (bestehend aus 5 · 5 = 25 Feldern) umrahmt werden soll, genügen bereits 24 Würfel für den Würfel-Rahmen.

																		19	18	17	16	15	14	13
											16	15	14	13	12	11		20						12
					13	12	11	10	9		17					10		21						11
10	9	8	7		14				8		18					9		22						10
11			6		15				7		19					8		23						9
12			5		16				6		20					7		24						8
1	2	3	4		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6	7

Rahmen 12	Rahmen 16	Rahmen 20		Rahmen 24
Inneres 4	Inneres 9	Inneres 16		Inneres 25
12 > 4	16 > 9	20 > 16	aber:	24 < 25