Р. М. Федоров
А. Я. Канель-Белов
А. К. Ковальджи
И. В. Ященко

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

1993—2005 г.

Под редакцией В. М. Тихомирова

Москва
Издательство МЦНМО
2006

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
М82

Авторы:
Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи,
И. В. Ященко

Под редакцией В. М. Тихомирова

Издание осуществлено при поддержке
Департамента образования г. Москвы
и Московского института открытого образования.

М82 **Московские математические олимпиады 1993—2005 г.** / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.

ISBN 5-94057-232-4

В книге собраны задачи Московских математических олимпиад 1993—2005 г. с ответами, указаниями и подробными решениями. В дополнениях приведены основные факты, используемые в решении олимпиадных задач, и избранные задачи Московских математических олимпиад 1937—1992 г.

Все задачи в том или ином смысле нестандартные. Их решение требует смекалки, сообразительности, а иногда и многочасовых размышлений.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков, школьников старших классов, студентов педагогических специальностей. Книга будет интересна всем любителям красивых математических задач.

ББК 74.200.58:22.1

Авторы просят сообщать о замеченных ошибках
и опечатках по адресу mmobook@mccme.ru.

Спасибо!

ISBN 5-94057-232-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед вами сборник задач Московских математических олимпиад с 1993 по 2005 год. Он содержит около трехсот задач с подробными решениями. Многие задачи снабжены указаниями (подсказками). Все задачи в том или ином смысле «нестандартны» — их решение требует смекалки, сообразительности, а часто и многочасового размышления. Некоторые из этих задач доступны большинству школьников, другие же столь сложны, что немногие обладатели высшего математического образования смогут их решить.

С другой стороны, важная особенность олимпиадных задач состоит в том, что для их решения не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы. Конечно, это верно лишь в некотором приближении — такие «нешкольные» методы, как принцип математической индукции, уже давно не смущают составителей вариантов.

Но если олимпиадные задачи не требуют специальных знаний, то что же тогда отличает олимпиаду по математике от соревнования по разгадыванию головоломок? Наше убеждение состоит в том, что, в отличие от головоломок, хорошие математические задачи глубоко связаны с важными разделами современной математики, иллюстрируют основополагающие математические принципы. Московская олимпиада всегда славилась такими связями — например, задачи 93.8.2 и 96.11.4 связаны с древним вопросом о представлении чисел суммами квадратов, а задача 99.10.5 связана с так называемыми *сжимающими отображениями*. Вот еще несколько задач, в которых эти связи наиболее заметны: 93.10.4, 95.10.6, 97.11.3, 99.10.5, 00.10.3, 01.10.5, 02.11.6, 03.10.6, 04.9.3, 04.10.3, 05.8.5, 05.10.6. В этой книге мы всегда старались упомянуть о таких связях в комментариях к решению.

Для многих математиков (включая некоторых авторов этой книги) сборники задач Московских математических олимпиад [58] и [63] были одними из первых книг по математике. Мы хотим пожелать нашим юным читателям, чтобы эта книга помогла им прикоснуться к очарованию нашей любимой науки.

Сложность задач. По традиции составители варианта стараются упорядочить задачи по возрастанию сложности. В «идеальном» варианте первую задачу решает от четверти до половины участников, а последнюю задачу — несколько человек. Задачи, которые (по нашему мнению) слишком сложны для своего места, мы отмечали звездочками. Например, задача 97.10.1 показалась нам слишком сложной для первой задачи — будь она второй, мы не стали бы снабжать ее звездочкой. И уж конечно из того, что задача 97.10.6 не отмечена звездочкой, не следует, что она проще, чем 97.10.1. В тех случаях, когда нам удалось разыскать статистику решения задач, мы пытались привести наши звездочки в соответствие со статистикой.

Решения. Мы всегда старались привести решения, не выходящие за рамки школьной программы, и в большинстве случаев нам это удалось. Однако в некоторых задачах мы приводим второй способ решения, в котором используются нешкольные понятия и утверждения. Иногда второй способ изложен очень кратко — в этом случае мы называем его «идея другого способа» или «набросок». Иногда второй способ является лишь незначительной модификацией первого, тогда мы называли его «вариант решения». В этом случае мы считали, что читатель уже изучил основной способ, но не прочь узнать и более элегантное решение.

Основные факты. В этом разделе собраны понятия и теоремы, которые наиболее часто встречались в решениях задач данной книги. Мы старались не включать факты, имеющиеся в большинстве школьных учебников, хотя некоторые, плохо, по нашему мнению, изучаемые в школе, присутствуют. Для каждого факта приведен список задач, в которых он используется. Встретив ссылку на факт, порешайте другие задачи, в которых также используется этот факт.

Указания. Мы старались давать указания так, чтобы «не раскрыть всех секретов задачи», поэтому не следует думать, что после прочтения указания вы сразу решите задачу. Если задача все равно не решается, то посмотрите ответ, если и это не помогает — прочитайте начало решения.

Избранные задачи. В дополнении В приведены (без решений) избранные задачи Московских математических олимпиад 1935—1992 годов. Подборка сделана на основе списка, подготовленного замечательным задачным композитором Н. Б. Васильевым. Их решения можно найти в сборниках задач [58], [63] и на сайте `www.mccme.ru`. Мы надеемся, что в ближайшие годы будут изданы подробные решения задач всех московских математических олимпиад.

Благодарности. Эта книга — плод коллективной работы многих людей. Во-первых, это авторы задач, без них ни одна олимпиада не могла бы состояться. Их список приведен в конце книги. Мы также должны упомянуть о титаническом труде тех, кто составлял варианты, проводил олимпиады, проверял работы... Наконец, олимпиады не имели бы никакого смысла, если бы на них не приходили школьники. Нам приятно отметить, что многие из тех, кто на олимпиадах решал задачи опубликованные в этой книге, стали профессиональными математиками.

После каждой олимпиады оргкомитет издавал «книжечку с решениями», которая раздавалась участникам на закрытии олимпиады. Мы брали решения из этих книжечек за основу, исправляли ошибки (и добавляли новые), придумывали новые решения, редактировали их и делали более подробными. Мы хотели бы выразить признательность всем тем, кто участвовал в написании «книжечек».

Автору часто трудно оценить понятность собственного текста, мы благодарны А. Д. Блинкову, Т. И. Голенищевой-Кутузовой, А. В. Манучаровой, Д. Д. Мухиной, А. М. Федоровой и ученикам класса в-2008 школы № 57 г. Москвы за указания на непонятные места.

Многие ценные замечания были высказаны А. В. Акопяном, В. Д. Арнольдом, Т. В. Караваевой, А. А. Кустаревым, С. В. Маркеловым. Тексты В. В. Прасолова были использованы при написании раздела «Основные факты».

Текст книги внимательно прочитали и сделали много замечаний и предложений В. В. Прасолов и А. В. Семенов. Решения стали гораздо более наглядными благодаря замечательным рисункам, сделанным Н. Шиховой и В. Радионовым. Отдельная благодарность В. Радионову за прекрасный макет книги и указания ряда неточностей в решениях.

РАЗМЫШЛЕНИЯ
о Московских математических олимпиадах

В. М. Тихомиров

Краткий экскурс в историю. В 2005 году исполнилось 70 лет со времени проведения первой Московской математической олимпиады. Она была организована по инициативе Московского математического общества Наркомпросом, Московским государственным университетом и школьным отделом гороно (министерства в те годы назывались наркоматами, Наркомпрос — это в переводе на современный язык — министерство просвещения; гороно — городской отдел народного образования). В организационный комитет первой олимпиады вошли многие видные ученые: члены-корреспонденты Академии наук СССР Павел Сергеевич Александров, президент Московского математического общества, избранный членом-корреспондентом в первые академические выборы советского периода в 1929 году (он был председателем оргкомитета олимпиады), Сергей Львович Соболев и Лев Генрихович Шнирельман (избранные во вторые выборы в 1933 году, когда Сергею Львовичу исполнилось только 25 лет, и он стал самым молодым членом Академии), профессор Андрей Николаевич Колмогоров, директор Института математики и механики при МГУ (уже тогда воспринимавшийся как один из крупнейших математиков современности) и другие. Отметим, что большинству членов оргкомитета, в частности тем, кто был назван выше, не исполнилось тогда и сорока лет.

Олимпиада проводилась в два тура. В первом туре, состоявшемся 30 марта 1935 года, участвовали 227 школьников и 65 рабфаковцев, остальные — готовящиеся к поступлению в вуз, всего 314 человек; во втором туре участвовало 120 человек. Победителями первой олимпиады были признаны трое: Игорь Зверев, Коля Коробов и Аня Мышкис.

Зачем нужны олимпиады? Председатель оргкомитета первой олимпиады — Павел Сергеевич Александров — писал об этом так:

«Основная забота о будущем советской науки требует, чтобы ни одно математическое дарование [...] не затерялось зря. Каждому из наших подрастающих талантов обеспечено полное внимание, полная и всесторонняя помощь и поддержка со стороны советского государства и всего социалистического общества нашей страны». И далее: «Одной из наиболее действенных форм нашей помощи самым молодым дарованиям является организация олимпиады, т. е. широкого состязания, широкого социалистического соревнования всех наших школьников, одаренных математически и интересующихся математикой. Это состязание должно заставить лучших из них почувствовать себя уже настоящими математиками, будущими учеными. Оно должно укрепить их веру в себя, зажечь их научный энтузиазм и в то же время заставить их почувствовать, что лишь длинный путь упорной работы приведет их к цели, к участию в качестве квалифицированных математиков, а иногда и больших самостоятельных ученых в той громадной стройке социализма, которая развернулась в нашей стране».

Многие понятия, которыми оперировал П. С. Александров, ныне ушли в прошлое, но я постараюсь выделить из сказанного им то содержание, которое, по моему мнению, должно сохраниться на все времена.

Наука — великое достояние человечества, и для развития науки человечеству разумно озаботиться тем, чтобы ни одно математическое дарование не пропало бы.

Одаренные люди могут принести пользу своему отечеству, и потому государству следовало бы обеспечить полное внимание, полную и всестороннюю помощь и поддержку каждому из подрастающих талантов.

Безусловной истиной является и то, что одной из наиболее действенных форм содействия молодым дарованиям является организация олимпиад, т. е. широкого состязания школьников, интересующихся математикой; это состязание призвано укрепить их веру в себя и зажечь в них научный энтузиазм. Итак, олимпиады могут принести пользу Личности, Стране и Миру.

...Как-то в 2005 году на одном из представительных собраний энтузиастов олимпиадного движения я задал всем тот же вопрос: зачем нужны олимпиады? Он не так-то уж прост, как может показаться на первый взгляд. Когда я предоставил слово А. — ветерану движения и одному из самых ревностных его энтузиастов, тот не нашелся, что сказать. На некоторое время установилась тишина, а потом у многих загорелись глаза, и началось бурное обсуждение. Было высказано много замечательных мыслей, но мотивы государства и человечества в них не фигурировали — время сменило приоритеты и на первый план вышли интересы личности. Одни говорили, что участие в олимпиадах определило их жизненный выбор, другие — что оно дало возможность общения с хорошими людьми; было сказано, что участие в олимпиадах дало бесценное ощущение свободы... Все восхваляли олимпиады и благодарили их. Но все же...

Pro и contra. По отношению к Николаю Николаевичу Константинову термин «ветеран олимпиадного движения» лишь в самой слабой степени отражает его несравненную роль в организации и проведении олимпиад и различных турниров для школьников. В первом номере третьей серии «Математического просвещения» (за 1997 год) Николай Николаевич поместил статью, вступительная часть которой, озаглавленная «Чем хорошо и чем плохо соревнование», посвящена теме, которую я собираюсь обсудить. Приведу без купюр три абзаца (первый, второй и четвертый) этой замечательной статьи.

«Наука — арена нескольких видов борьбы. Это — и борьба человечества с незнанием, и борьба ученых со своими заблуждениями, и стремление принести пользу людям, и поиск красоты мира, и стремление к славе, и делание собственной карьеры, и заработок. Чтобы наука жила полноценно, нужно, чтобы ее поддерживали различные стимулы — внутренние и внешние. Каждого ученого какой-то стимул подтолкнул в сторону науки. И если этот стимул антинаучный и низменный, большой беды в этом нет. Важно только, чтобы своевременно возникли другие стимулы, соответствующие высшему назначению науки.

Математические олимпиады используют в качестве стимула дух соперничества — в этом сила и слабость математических олимпиад. Сила потому, что в детском возрасте призыв посоревноваться находит отклик в душе почти каждого человека. Этим и объясняется огромный успех олимпиад. Они настолько понравились, что за сто лет их существования стиль их проведения почти не изменился.

В то же время вред духа соревнования очевиден. Прежде всего наука — поприще настолько широкое, что людям на нем никогда не будет тесно. Дух же соревнования сталкивает людей на одну узкую тропинку. Человек в науке ценен своей уникальностью, между тем дух соревнования толкает людей подчиняться критериям прошлой эпохи и гнаться за чужой славой, стараясь ее повторить, вместо того, чтобы занять свое уникальное место. Школьник, увлекшийся олимпиадами, тратит на них все годы своей учебы в старших классах. Даже если он достигает в них прекрасных результатов, их цена оказывается слишком высокой, так как на это уходит заметная часть его творческой жизни».

Я согласен со всем сказанным Николаем Николаевичем, и от себя скажу лишь несколько слов. Сама идея рейтингования человеческих достоинств (все более и более популярная в последнее время) не представляется мне плодотворной. Мне хотелось бы, чтобы в разумном обществе личность не была бы поставлена в такое положение, при котором ей постоянно приходилось бы утверждать себя в конкурентной борьбе.

Приведу еще одну цитату, с которой я солидарен: «Своим успехам на олимпиаде естественно радоваться и даже гордиться ими. Неудачи же на олимпиадах не должны чрезмерно огорчать»,— так писал Андрей Николаевич Колмогоров. Далее он продолжал: «Для успеха на олимпиаде необходимы некоторые специальные типы одаренности, которые вовсе не обязательны для успешной исследовательской работы. Уже само наличие назначенного очень ограниченного срока для решения задач многих делает совершенно беспомощными. Но существуют и такие математические проблемы, которые могут быть решены лишь в результате очень длительного и спокойного размышления и формирования новых понятий. Много такого рода проблем было решено замечательным советским топологом П. С. Александровым. И не случайно Павел Сергеевич говорил, что если бы во времена его юности были математические олимпиады, он, возможно, не сделался бы математиком: его главные достижения в математике явились не плодом быстро работающей *изобретательности*, а итогом длительного и углубленного *созерцания*».

Коротко об эволюции олимпиад. Если для проведения первой олимпиады был образован организационный комитет, возглавлявшийся крупными учеными и выдающимися деятелями просвещения, то потом все упростилось. Московское математическое общество стало выделять лишь одного своего представителя в качестве председателя организационного комитета (увы, им, как правило, далеко за сорок), а далее формируется команда энтузиастов из старых и молодых олимпиадников, а также студентов и аспирантов, которые и проводят олимпиады. Московское математическое общество принимало участие в организации всех олимпиад, кроме тех, что проходили в 1981—1992 годах. Что послужило причиной отстранения Общества от олимпиад на этот период, пусть объяснит кто-то другой, я этого никогда не мог понять. Скажу только, что этот исторический прецедент возымел неожиданное побочное и положительное влияние на развитие олимпиадного движения. Вместе с Матобществом был отстранен от проведения олимпиад и Н. Н. Константинов, патриарх движения. Но Николай Николаевич принадлежит к числу тех личностей, чей энтузиазм преодолевает все препятствия. Им был организован Турнир городов, в котором Николай Николаевич постарался, среди прочего, приглушить «соревновательную компоненту». Этот турнир стал разрастаться, приобретя международный характер. Николай Николаевич стал желанным гостем во многих странах мира. Ему принадлежат также идеи московского турнира Ломоносова, различных летних конференций и многого другого.

В 2005 году состоялась шестьдесят восьмая Московская математическая олимпиада (в трудные военные годы — в 1942 и 1943 — часть университета была эвакуирована, и олимпиады в Москве не проводились). Олимпиада-2005 была организована Департаментом образования города Москвы, Советом ректоров учебных заведений Москвы и Московской области, Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, механико-математическим факультетом, Московским математическим обществом, Московским институтом открытого образования и Московским центром непрерывного математического образования. Мы видим, что число покровителей олимпиады возросло.

Олимпиада проходила в один тур отдельно для 6 и 7 классов (это состязание, называемое «Математический праздник», — новый вид соревнования, организуемый МЦНМО по инициативе Д. Ботина, А. Спивака и И. Ященко, проводится в один день; в 2005 году Матпраздник состоялся 13 февраля, в нем приняло участие около 1500 школьников), олимпиада 8—11 классов проходила 27 февраля, показ и разбор задач состоялся 13 марта. В олимпиаде приняли участие около двух с половиной тысяч школьников.

Еще некоторые сопоставления. К моменту проведения первой математической олимпиады в Москве существовал лишь один школьный математический кружок. Им руководил 21-летний доцент И. Гельфанд. Ныне Израиль Моисеевич Гельфанд — один из самых выдающихся математиков современности. Сейчас в Москве действует множество школьных кружков в разных местах. Интересно было бы посмотреть через 70 лет, много ли среди нынешних руководителей кружков окажется математиков, сравнимых с И. М. Гельфандом.

Сразу же посде олимпиады 1935 года были организованы новые кружки в МГУ. Первое время доклады на них делали руководители кружков и школьники. Решительная перестройка кружковой работы связана с именем студента МГУ Д. Шклярского, бывшего в числе победителей 2-й олимпиады 1936 года, талантливого математика и блестящего преподавателя, руководившего работой кружков в 1938—1941 годах. Друзья вспоминают, что Шклярский был фанатично предан математике. Он мог без конца говорить о ней. Очень любил возиться со школьниками. Шклярский изменил стиль работы кружков. Заменил доклады школьников на решение задач. С тех пор так и повелось. Теперь такая форма кружковой работы стала доминирующей.

Хочу сказать несколько слов о судьбах победителей первых олимпиад. Все они стали студентами мехмата. Все участвовали в Великой Отечественной войне. Анна Вениаминовна Мышкис и Давид Оскарович Шклярский погибли, Игорь Николаевич Зверев и Николай Михайлович Коробов вернулись с войны и всю жизнь потом были связаны с мехматом.

Хотелось бы надеяться, что участникам олимпиад, которые проводились в прошлом и будут проводиться в нашем веке, не доведется испытать ужасов войны.

О задачах. На первой олимпиаде задачи были разделены на три группы. Первую группу составляли геометрические задачи, вторую — алгебраические, третью — комбинаторные. Возможно, это было связано с пожеланием А. Н. Колмогорова, который выделял три вида математических способностей, присоединяя к вообразительным (геометрическим) и логическим способностям (соответствующим разделению мозга на левую и правую половины) еще и способности алгебраические (способности делать выкладки и преобразования). Эксперимент с тремя группами задач не был поддержан в дальнейшем, и в последние годы олимпиадные задачи допускают, как мне кажется, такую классификацию: простенькие головоломки, простенькие геометрические задачи, сложные головоломки, сложные геометрические задачи и трудно разрешимые задачи, часто берущиеся из каких-то серьезных исследований. Всякий раз, когда я участвовал в организации олимпиад, я предлагал вводить понемногу задачи анализа, и иногда они включались в варианты. Я был очень рад, когда Николай Борисович Васильев — организатор и участник множества олимпиад и необыкновенно светлая личность, — встретив меня как-то, сказал радостно, что, вспомнив мои пожелания, он придумал красивую задачу из анализа (задачу «о вишенке» на олимпиаде 1994 года, 11.3). Задачи анализа способны приоткрыть необъятный мир поразительной красоты, ибо анализ связан с объяснением окружающей нас действительности, и олимпиадные задачи могут стимулировать интерес к изучению анализа в школе.

Среди олимпиадных задач я бы выделил особую группу — *задач на все времена*, задач, обладающих особой прелестью, которые можно предлагать кому угодно, и в которых запрятано богатое содержание. Здесь все зависит от личного вкуса. На первой олимпиаде такой задачей для меня была задача о раскраске куба. Ее тогда не решил никто. Основываясь на одном воспоминании, я подозреваю, что это задача Гельфанда.

В заключительной части дополнения А обсуждается «задача о мухе», предложенная Игорем Федоровичем Шарыгиным. Это тоже, по моему мнению, задача на все времена. Сама же тема «олимпиадные задачи» далеко не исчерпана.

Мальчики и девочки. На протяжении едва ли не всей культурной истории мужчины стараются обосновать суждение, что они умнее женщин. Один из аргументов: ведь среди женщин нет великих математиков. Спор на эту тему завел бы нас слишком далеко, скажу только, что особенно убедительных аргументов в пользу интеллектуального превосходства мужчин над женщинами я лично не слышал. То, что девочки в меньшем, чем мальчики, числе участвуют в олимпиадах, можно объяснять социологическими причинами, не связанными с уровнем интеллекта. Но в двух олимпиадах последних лет (в 1993 и 2005 годах) оба раза первое место (в одном из классов) единолично занимали именно девочки. Это Лена Бунина — лауреат первой премии по 11 классам олимпиады 1993 года — и Маша Илюхина — лауреат первой премии по девятым классам олимпиады 2005 года. Хочу пожелать им и другим участницам олимпиадного движения счастливой научной судьбы.

И последнее:

Несколько слов об этой книге. На протяжении семидесяти лет было издано несколько книг, посвященных московским олимпиадам. Назову три: это небольшая книжка Р. Н. Бончковского «Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг.» (ее автор погиб на войне), книга А. А. Лемана [63] и книга Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго [58] (вышедшая невиданным по нашим временам тиражом в 600 000 экземпляров и ставшая библиографической редкостью). Возникла идея подвести итоги семидесятилетней истории московских математических олимпиад. Читатель держит сейчас в руках книгу, которой мы начинаем реализацию этого замысла. В ней отражены последние тринадцать олимпиад — от олимпиады-1993 до олимпиады-2005.

Я с большим удовольствием вспоминаю олимпиады, в организации которых я принимал участие, особенно олимпиаду 1993 года. Как я уже сказал, она проводилась после двенадцатилетнего периода, когда Математическое общество было отстранено от участия в олимпиадах. Многие истосковались по олимпиадам. В проведении той олимпиады по моей просьбе приняло участие много моих коллег старшего поколения (в их числе победители олимпиад разных лет — профессора университета Ю. С. Ильяшенко, А. А. Кириллов, В. П. Паламодов), очень активное участие в составлении задач принял Игорь Федорович Шарыгин (в частности, задачи 9.1, 9.6, 10.6 и задача о мухе принадлежат ему). Олимпиады хороши, в частности, и тем, что объединяют очень хороших людей и оставляют самые теплые воспоминания.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1993 год (LVI олимпиада)

8 класс

1. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр натурального числа x. Решить уравнения:

а) $x+S(x)+S(S(x))=1993$;

б)* $x+S(x)+S(S(x))+S(S(S(x)))=1993$.

2*. Известно, что число n является суммой квадратов трех натуральных чисел. Показать, что число n^2 тоже является суммой квадратов трех натуральных чисел.

3. На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

4. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

Комментарий. Стрелки часов движутся с постоянной скоростью.

5. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита.

Комментарий. *Словом* мы называем любую последовательность букв русского алфавита, не обязательно осмысленную, *подсловом* называется любой фрагмент слова. Например, АБВШГАБ — слово, а АБВ, Ш, ШГАБ — его подслова.

6. Окружность с центром D проходит через точки A, B и центр O вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Доказать, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

9 класс

1. Для двух данных различных точек плоскости A и B найдите геометрическое место таких точек C, что треугольник ABC остроугольный, а его угол A — средний по величине.

Комментарий. Под *средним по величине* углом мы понимаем угол, который *не больше* одного из углов, и *не меньше* другого. Так, например, мы считаем, что у равностороннего треугольника любой угол — средний по величине.

2. Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, и при любом натуральном $n \geqslant 3$ x_n — наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

3. Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

4. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

5. Каждой паре чисел x и y поставлено в соответствие некоторое число $x * y$. Найдите $1993 * 1935$, если известно, что для любых трех чисел x, y и z выполнены тождества: $x * x = 0$ и $x * (y * z) = (x * y) + z$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$. Докажите, что AM — биссектриса угла BMC.

10 класс

1. При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода числа $A + B$?

2. Дед барона К. Ф. И. фон Мюнхгаузена построил квадратный замок, разделил его на 9 квадратных залов и в центральном разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из 8 оставшихся залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах устроил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных квадратных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную (в каждой стене между двумя соседними жилыми комнатами проделана дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

3. От любой точки на любом из двух берегов реки можно доплыть до другого берега, проплыв не более одного километра. Всегда ли лоцман может провести корабль вдоль реки так, чтобы находиться все время на расстоянии не более чем а) 700 метров, б)* 800 метров от каждого из берегов?

Примечание. Известно, что река соединяет два круглых озера радиусом 10 километров каждое, а береговые линии состоят из отрезков и дуг окружностей. Корабль следует считать точкой.

Комментарии. 1°. Считайте, что островов на реке нет.

2°. Расстояние от точки на реке до берега можно понимать двояко: как минимальное расстояние до берега по прямой (при этом прямая может пересекать другой берег), или как длину кратчайшего пути по воде. Эти расстояния могут быть различными, если мыс одного берега загораживает другой берег (рис. 1). В задаче используется расстояние во *втором* смысле.

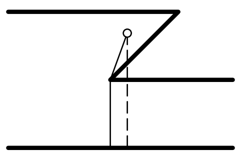


Рис. 1

4. Для каждой пары действительных чисел a и b рассмотрим последовательность чисел $p_n=[2\{an+b\}]$. Любые k подряд идущих членов этой последовательности назовем словом. Верно ли, что любой упорядоченный набор из нулей и единиц длины k будет словом последовательности, заданной некоторыми a и b при $k=4$; при $k=5$?

Примечание: $[c]$ — целая часть, $\{c\}$ — дробная часть числа c.

5. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.

6. На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен квадрат с центром O. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно a и b. Найти максимум суммы $OM+ON$, когда угол ACB меняется.

11 класс

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=p$, $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=q$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

2. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратиков (размеры которых могут различаться). Может ли сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 1993?

Комментарий. Если квадратик пересекается с диагональю по одной точке, это тоже считается пересечением.

3. Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

4. В ящиках лежат камни. За один ход выбирается число k, затем камни в ящиках делятся на группы по k штук и остаток менее, чем из k штук. Оставляют по одному камню из каждой группы и весь остаток. Можно ли за 5 ходов добиться, чтобы в ящиках осталось ровно по одному камню, если в каждом из них а) не более 460 камней; б) не более 461 камня?

5. а) Известно, что область определения функции $f(x)$ — отрезок $[-1;\ 1]$, и $f(f(x))=-x$ при всех x, а ее график является объединением конечного числа точек и интервалов. Нарисовать график функции $f(x)$.

б) Можно ли это сделать, если область определения функции — интервал $(-1;\ 1)$? Вся числовая ось?

Комментарии. 1°. В пункте «а» достаточно нарисовать график какой-нибудь такой функции.

2°. Напомним, что интервал не содержит своих концов. Впрочем, это не существенно, так как отрезок есть объединение интервала и двух точек.

6*. Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром a. Какое наименьшее расстояние она должна пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?

1994 год (LVII олимпиада)

8 класс

1. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

2. Ученик не заметил знак умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

3. В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC.

4. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

5. Придворный астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата (стрелки вращаются на общей оси и не делают скачков). Какого времени в сутках больше, хорошего или плохого?

6. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

9 класс

1. Существует ли невыпуклый пятиугольник, никакие две из пяти диагоналей которого не имеют общих точек (кроме вершин)?

2. У Коли есть отрезок длины k, а у Лёвы — отрезок длины l. Сначала Коля делит свой отрезок на три части, а потом Лёва делит на три части свой отрезок. Если из получившихся шести отрезков можно сложить два треугольника, то выигрывает Лёва, а если нет — Коля. Кто из играющих, в зависимости от отношения k/l, может обеспечить себе победу, и как ему следует играть?

3. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P — на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

5*. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

6. В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что

а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;

б)* если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

10 класс

1. Ученик не заметил знака умножения между двумя семизначными числами и написал одно четырнадцатизначное число, которое оказалось в три раза больше их произведения. Найдите эти числа.

2. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1}=1-|1-2x_n|$, причем $0\leqslant x_1\leqslant 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, если x_1 рационально.

3. Каждый из 1994 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно составить парламентскую комиссию из 665 человек, члены которой не выясняли отношений между собой указанным выше способом.

4. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD, ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

5. Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый).

а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на равновеликие части?

б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше, чем 1/3 площади многоугольника.

(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику, включая контур.)

Комментарий. Заметим, что хорда, проходящая через вершины многоугольника, может разрезать его более, чем на две части. Тем не менее, в пункте «а» имеется в виду: можно ли разрезать многоугольник хордой на *две* равновеликие части, см. также комментарий к решению.

6*. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $(P(x))^n$, $n>1$, — положительные?

11 класс

1. Придумайте многогранник, у которого нет трех граней с одинаковым числом сторон.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y=x^4$, опускают вишенку — шар радиуса r. При каком наибольшем r шар коснется нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \geqslant x^4$ и содержащего начало координат?)

4. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).

5*. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.

6. Докажите, что для любого $k > 1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = \ldots 96$, $2^{53} = \ldots 992$.)

1995 год (LVIII олимпиада)

8 класс

1. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20 %, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20 %?

2. Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка O внутри него. Известно, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$, $AO = OB$ и $CO = OD$. Пусть K, L и M — середины отрезков AB, BC и CD соответственно. Докажите, что а) $KL = LM$; б) треугольник KLM — правильный.

4. Достаточно ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки, вмещающей не менее 1995 единичных кубиков, а) 962; б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

5. Несколько населенных пунктов соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех населенных пунктов. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

6. Прямая отсекает треугольник AKN от правильного шестиугольника $ABCDEF$ так, что $AK+AN=AB$. Найдите сумму углов, под которыми отрезок KN виден из вершин шестиугольника ($\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+\angle KEN+ +\angle KFN$).

9 класс

1. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

2. Дан равносторонний треугольник ABC. Для произвольной точки P внутри треугольника рассмотрим точки A' и C' пересечения прямых AP с BC и CP с BA соответственно. Найдите геометрическое место точек P, для которых отрезки AA' и CC' равны.

3. Прямоугольник размером $1\times k$ при всяком натуральном k будем называть полоской. При каких натуральных n прямоугольник размером $1995\times n$ можно разрезать на попарно различные полоски?

4. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab=cd$. Может ли число $a+b+c+d$ быть простым?

5. Первоначально даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.

6. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на банках стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может всем это доказать (т. е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашках. Докажите, что ему для этой цели

а) достаточно четырех взвешиваний;

б) недостаточно трех взвешиваний.

Комментарий. Отметим еще раз, что завхоз должен обосновать, что в какой банке находится для *всех* 80 банок.

10 класс

1. Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin\frac{\alpha}{2}$, б)* $\sin\frac{\alpha}{3}$?

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. На боковых сторонах трапеции, как на диаметрах, построены окружности. Точка K лежит вне этих окружностей. Докажите, что длины касательных, проведенных к этим окружностям из точки K, равны.

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5*. Целые числа a, b и c таковы, что числа $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

6. На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

11 класс

1. Докажите, что

$$|x|+|y|+|z|\leqslant|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|,$$

где x, y, z — действительные числа.

2. Можно ли ребра n-угольной призмы раскрасить в 3 цвета так, чтобы на каждой грани были все 3 цвета и в каждой вершине сходились ребра разных цветов, если а) $n=1995$; б) $n=1996$.

3. В треугольнике ABC AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, что $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

4*. Разрезать отрезок $[-1; 1]$ на черные и белые отрезки так, чтобы интегралы любой а) линейной функции; б) квадратного трехчлена по белым и черным отрезкам были равны.

5. Для какого наибольшего n можно придумать две бесконечные в обе стороны последовательности A и B такие, что любой кусок последовательности B длиной n содержится в A, A имеет период 1995, а B этим свойством не обладает (непериодична или имеет период другой длины)?

Комментарий. Последовательности могут состоять из произвольных символов. Речь идет о минимальном периоде.

6*. Доказать, что существует бесконечно много таких составных n, что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n.

7. Существует ли такой многогранник и точка вне него, что из этой точки не видно ни одной из его вершин?

1996 год (LIX олимпиада)

8 класс

1. Известно, что $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$. Верно ли, что $a = b$?

2. По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

3. В узлах клетчатой бумаги живут садовники, а вокруг них повсюду растут цветы. За каждым цветком должны ухаживать 3 ближайших к нему садовника. Один из садовников хочет узнать, за каким участком он должен ухаживать. Нарисуйте этот участок.

4. Дан равносторонний треугольник ABC. Сторона BC разделена на три равные части точками K и L, а точка M делит сторону AC в отношении $1:2$, считая от вершины A. Докажите, что сумма углов AKM и ALM равна 30°.

5. В углу шахматной доски размером $n\times n$ полей стоит ладья. При каких n, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, она может за n^2 ходов побывать на всех полях доски и вернуться на место? (Учитываются только поля, на которых ладья останавливалась, а не те, над которыми она проносилась во время хода. За каждым горизонтальным ходом должен следовать вертикальный, а за каждым вертикальным — горизонтальный.)

6. а) Восемь школьников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что найдутся такие два школьника, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

б) Если каждую задачу решили 4 ученика, то может оказаться, что таких двоих не найдется (приведите пример).

9 класс

1. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших 170°.

2. Докажите, что если для чисел a, b и c выполняются неравенства $|a-b|\geqslant|c|$, $|b-c|\geqslant|a|$, $|c-a|\geqslant|b|$, то одно из этих чисел равно сумме двух других.

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность и через точки A и B проведены касательные, которые пересекаются в точке M. Точка N лежит на стороне BC, причем прямая MN параллельна стороне AC. Докажите, что $AN=NC$.

4. Целые числа от 1 до n записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и записанного под ним есть точный квадрат а) при $n=9$, б) при $n=11$, в) при $n=1996$.

5. Пусть A и B — точки, лежащие на окружности. Они разбивают окружность на две дуги. Найдите геометрическое место середин всевозможных хорд, концы которых лежат на разных дугах AB.

Комментарий. Из условия не вполне ясно, годятся ли хорды, проходящие через точки A и B. Мы будем считать, что такие хорды *не* годятся. То есть рассматриваются середины хорд, концы которых лежат на разных *открытых* дугах AB.

6. Али-Баба и разбойник делят клад, состоящий из 100 золотых монет, разложенных в 10 кучек по 10 монет. Али-Баба выбирает 4 кучки, ставит около каждой из них по кружке, откладывает в каждую кружку по несколько монет (не менее одной, но не всю кучку). Разбойник должен как-то переставить кружки, изменив их первоначальное расположение, после чего монеты высыпаются из кружек в те кучки, около которых оказались кружки. Далее Али-Баба снова выбирает 4 кучки из 10, ставит около них кружки, и т. д. В любой момент Али-Баба может уйти, унеся с собой любые три кучки по выбору. Остальные монеты достаются разбойнику. Какое наибольшее число монет сможет унести Али-Баба, если разбойник тоже старается получить побольше монет?

10 класс

1. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2-ab=c^2$. Докажите, что $(a-c)(b-c)\leqslant 0$.

2. В клетчатом квадрате 10×10 отмечены центры всех единичных квадратиков (всего 100 точек). Какое наименьшее число прямых, не параллельных сторонам квадрата, нужно провести, чтобы вычеркнуть все отмеченные точки?

3. Точки P_1, P_2, $\ldots$, P_{n-1} делят сторону BC равностороннего треугольника ABC на n равных частей: $BP_1=P_1P_2=\ldots=P_{n-1}C$. Точка M выбрана на стороне AC так, что $AM=BP_1$. Докажите, что $\angle AP_1M+\angle AP_2M+\ldots+\angle AP_{n-1}M=30^\circ$, если а) $n=3$; б) n — произвольное натуральное число (рис. 2).

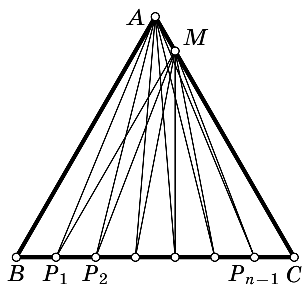


Рис. 2

4. В углу шахматной доски размером $m\times n$ полей стоит ладья. Двое по очереди передвигают ее по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?

5. В стране, дома жителей которой представляют собой точки плоскости, действуют два закона:

1) Человек может играть в баскетбол, лишь если он выше ростом большинства своих соседей.

2) Человек имеет право на бесплатный проезд в транспорте, лишь если он ниже ростом большинства своих соседей.

В каждом законе соседями человека считаются все люди, живущие в круге некоторого радиуса с центром в доме этого человека. При этом каждый человек сам выбирает себе радиус для первого закона и радиус (не обязательно такой же) для второго закона. Может ли в этой стране не менее 90 % людей играть в баскетбол и не менее 90 % людей иметь право на бесплатный проезд в транспорте?

6. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, ..., $P(k+1996)$ будут составными, если а) $n=1$; б) n — произвольное натуральное число.

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+$ $+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$.

3. В пространстве даны восемь параллельных плоскостей таких, что расстояния между каждыми двумя соседними равны. На каждой из плоскостей выбирается по точке. Могут ли выбранные точки оказаться вершинами куба.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, а числа $n-1$ и $n+1$ — нет.

5. Точка X, лежащая вне непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 такова, что отрезки касательных, проведенных из X к ω_1 и ω_2, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника, образованного точками касания, совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2.

6. В таблице $2^n \times n$ были выписаны всевозможные строки длины n из чисел 1 и -1. Затем часть чисел заменили нулями. Докажите, что можно выбрать несколько строк, сумма которых есть строка из нулей. (Суммой строк называется строка, элементы которой являются суммами соответствующих элементов слагаемых.)

1997 год (LX олимпиада)

8 класс

1. В некоторых клетках шахматной доски стоят фигуры. Известно, что на каждой горизонтали стоит хотя бы одна фигура, причем в разных горизонталях — разное число фигур. Докажите, что всегда можно отметить 8 фигур так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали стояла ровно одна отмеченная фигура.

2. От вулканостанции до вершины вулкана Стромболи надо идти 4 часа по дороге, а затем — 4 часа по тропинке. На вершине расположено два кратера. Первый кратер 1 час извергается, потом 17 часов молчит, потом опять 1 час извергается, и т. д. Второй кратер 1 час извергается, 9 часов молчит, 1 час извергается, и т. д. Во время извержения первого кратера опасно идти и по тропинке, и по дороге, а во время извержения второго опасна только тропинка. Ваня увидел, что ровно в 12 часов оба кратера начали извергаться одновременно. Сможет ли он когда-нибудь подняться на вершину вулкана и вернуться назад, не рискуя жизнью?

3. Внутри острого угла XOY взяты точки M и N так, что $\angle XON = \angle YOM$. На отрезке OX выбирается точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на отрезке OY выбирается точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

4. Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку остается составным. Существует ли такое 1997-значное число?

5*. В ромбе $ABCD$ величина угла B равна 40°, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.

6. Банкир узнал, что среди одинаковых на вид монет одна — фальшивая (более легкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причем потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

9 класс

1. В треугольнике одна сторона в 3 раза меньше суммы двух других. Докажите, что противолежащий ей угол — наименьший угол треугольника.

2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

3. В выпуклом шестиугольнике $AC_1BA_1CB_1$ дано: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ и $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$.

Докажите, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.

4. По окружности в одном направлении на равных расстояниях курсируют n поездов. На этой дороге в вершинах правильного треугольника расположены станции A, B и C (обозначенные по направлению движения). Ира входит на станцию A и одновременно Лёша входит на станцию B, чтобы уехать на ближайших поездах. Известно, что если они входят на станции в тот момент, когда машинист Рома проезжает лес, то Ира сядет в поезд раньше Лёши, а в остальных случаях Лёша — раньше Иры или одновременно с ней. Какая часть дороги проходит по лесу?

5. $2n$ спортсменов дважды провели круговой турнир (в круговом турнире каждый встречается с каждым, за победу начисляется одно очко, за ничью — $1/2$, за поражение — 0). Докажите, что если сумма очков каждого изменилась не менее, чем на n, то она изменилась ровно на n.

6. Пусть $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = F(x)G(x)$, где F и G — многочлены, коэффициенты которых — нули и единицы. Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1+x+x^2+\ldots+x^k)T(x)$, где T — также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k>0$).

10 класс

1*. Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, ортогональные проекции которого на некоторые три попарно перпендикулярные плоскости являются кругами?

2. Докажите, что среди четырехугольников с заданными длинами диагоналей и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

3*. а) Каждую сторону четырехугольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами квадрата. Докажите, что исходный четырехугольник — квадрат.

б) Докажите, что если в результате той же процедуры из n-угольника получится правильный n-угольник, то и исходный n-угольник — правильный.

4. Даны действительные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$ такие, что

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3,$$

$$a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=b_1b_2+b_2b_3+b_1b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \leqslant b_1$, то $a_3 \leqslant b_3$.

5. В круговом турнире не было ничьих, за победу присуждалось 1 очко, за поражение — 0. Затем был определен коэффициент каждого участника. Он равнялся сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициенты равны. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.

6. Рассмотрим степени пятерки:

$$1,\ 5,\ 25,\ 125,\ 625,\ \ldots$$

Образуем последовательность их первых цифр:

$$1,\ 5,\ 2,\ 1,\ 6,\ \ldots$$

Докажите, что любой кусок этой последовательности, записанный в обратном порядке, встретится в последовательности первых цифр степеней двойки (1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, ...).

11 класс

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$$\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA'}{4R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC (рис. 3).

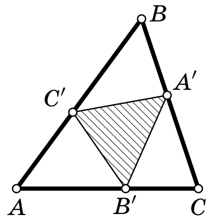


Рис. 3

2. Вычислите

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\,dx.$$

3. На доске написаны три функции:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = (x-1)^2.$$

Можно складывать, вычитать и перемножать эти функции (в том числе возводить в квадрат, в куб, ...), умножать их на произвольное число, прибавлять к ним произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями. Получите таким образом функцию $1/x$. Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $1/x$ невозможно.

4. Можно ли разбить правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длины ребер каждого из которых меньше 1/100?

5*. Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leqslant 1.$$

6. На плоскости дано конечное число полос, сумма ширин которых равна 100, и круг радиуса 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они вместе покрыли круг.

1998 год (LXI олимпиада)

8 класс

1. Найдутся ли натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $28x+30y+31z=365$?

2. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

3. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M лежит на прямой AB, причем $\angle AMO=\angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

4. Некоторые из чисел a_1, a_2, ..., a_{200} написаны синим карандашом, а остальные — красным. Если стереть все красные числа, то останутся все натуральные числа от 1 до 100, записанные в порядке возрастания. Если же стереть все синие числа, то останутся все натуральные числа от 100 до 1, записанные в порядке убывания. Докажите, что среди чисел a_1, a_2, ..., a_{100} содержатся все натуральные числа от 1 до 100 включительно.

5. За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые любого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что любые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.

6. Красный квадрат покрывают 100 белых квадратов. При этом все квадраты одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

Комментарий. Во фразе «все квадраты одинаковы» имеется в виду, что все белые квадраты имеют тот же размер, что и красный.

9 класс

1. Является ли число $4^9+6^{10}+3^{20}$ простым?

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и CE. Построили квадрат $ACPQ$ и прямоугольники $CDMN$ и $AEKL$, у которых $AL=AB$, $CN=CB$. Докажите, что площадь квадрата $ACPQ$ равна сумме площадей прямоугольников $AEKL$ и $CDMN$.

3. Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил, какую долю от всех жителей селения составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

4*. В стране Нашии есть военные базы, соединенные дорогами. Набор дорог называется *важным*, если после закрытия этих дорог найдутся две базы, не соединенные путем. Важный набор называется *стратегическим*, если он не содержит меньшего важного набора. Докажите, что множество дорог, каждая из которых принадлежит ровно одному из двух различных стратегических наборов, образует важный набор.

5. Точка O лежит внутри ромба $ABCD$. Угол DAB равен 110°. Углы AOD и BOC равны 80° и 100° соответственно. Чему может быть равна величина угла AOB?

6*. На отрезке [0; 1] отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

10 класс

1. Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a+30b+31c=365$. Докажите, что $a+b+c=12$.

2. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники, у каждого из которых отметили одну сторону. Докажите, что сумма длин всех отмеченных сторон не может быть меньше 1.

3. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

4. Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

5. На пол положили правильный треугольник ABC, выпиленный из фанеры. В пол вбили три гвоздя (по одному вплотную к каждой стороне треугольника) так, что треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении $1:3$, считая от вершины A, второй делит сторону BC в отношении $2:1$, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону AC третий гвоздь?

6. Натуральные числа от 1 до n расставляются в ряд в произвольном порядке (число n фиксировано). Расстановка называется *плохой*, если в ней можно отметить 10 чисел (не обязательно стоящих подряд), идущих в порядке убывания. Остальные расстановки называются *хорошими*. Докажите, что количество хороших расстановок не превосходит 81^n.

11 класс

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x+y+z-2(xy+yz+xz)+4xyz=\frac{1}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $1/2$.

2. Про непрерывную функцию f известно, что:

1) f определена на всей числовой прямой;

2) f в каждой точке имеет производную (и, таким образом, график f в каждой точке имеет единственную касательную);

3) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая — иррациональна.

Следует ли отсюда, что график f — прямая?

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы BAK и CBL равны 30°. Найдите углы треугольника ABC.

4. Решите в натуральных числах уравнение $3^x+4^y=5^z$.

5. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из 61 одинаковых согласованно вращающихся шестеренок так, чтобы углы между сцепленными шестеренками были не меньше 150°? При этом:

1) для простоты шестеренки считаются кругами;

2) шестеренки сцеплены, если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную;

3) угол между сцепленными шестеренками — это угол между радиусами их окружностей, проведенными в точку касания;

4) первая шестеренка должна быть сцеплена со второй, вторая — с третьей, и т. д., 61-я — с первой, а другие пары шестеренок не должны иметь общих точек.

6. См. задачу 6 для 10 класса.

1999 год (LXII олимпиада)

8 класс

1. Сравнив дроби $x = \frac{111110}{111111}$, $y = \frac{222221}{222223}$, $z = \frac{333331}{333334}$, расположите их в порядке возрастания.

2. Покажите, как любой четырехугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией).

3. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

4. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC — точка N так, что угол MON — прямой. Докажите, что $AM^2 + CN^2 = MN^2$.

6. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

9 класс

1. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня. (Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим — число $\frac{2}{1/a+1/b}$.)

2. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считаться ходом). После того, как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O, B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O, C, касается прямой CD.

4*. Найдите все такие целые положительные k, что число

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2000}-\underbrace{2\ldots2}_{1001}$$

является квадратом целого числа.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC ($AB>BC$) в точках P и Q соответственно, RS — средняя линия, параллельная AB, T — точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника.

6. В соревнованиях по n-борью участвуют 2^n человек. Для каждого спортсмена известна его сила в каждом из видов программы. Соревнования проходят следующим образом: сначала все спортсмены участвуют в первом виде программы, и лучшая половина из них выходит в следующий круг. Эта половина принимает участие в следующем виде, и половина из них выходит в следующий круг, и т. д., пока в n-м виде программы не будет определен победитель. Назовем спортсмена «возможным победителем», если можно так расставить виды спорта в программе, что он станет победителем.

а) докажите, что может так случиться, что хотя бы половина спортсменов является «возможными победителями»;

б) докажите, что всегда число «возможных победителей» не превосходит $2^n - n$;

в)* докажите, что может так случиться, что «возможных победителей» ровно $2^n - n$.

10 класс

1. Известно, что $(a+b+c)c<0$. Докажите, что $b^2>4ac$.

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в точках A, B, а вторую — в точках C и D (рис. 4). Докажите, что углы AQD и BQC равны.

Комментарий. Во избежание рассмотрения случаев эта задача предлагалась участникам олимпиады только для расположения точек, указанного на рисунке. Тем не менее, утверждение верно всегда.

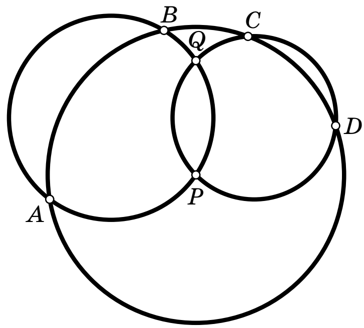


Рис. 4

3*. Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что x^3+y и y^3+x делятся на x^2+y^2.

4. $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, записываются те же числа и таким же образом, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n.

5. Кузнечик прыгает по отрезку $[0; 1]$. За один прыжок он может попасть из точки x либо в точку $\frac{x}{\sqrt{3}}$, либо в точку $\frac{x}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. На отрезке $[0; 1]$ выбрана точка a. Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше $1/100$ от точки a.

6*. Для чисел 1, ..., 1999, расставленных по окружности, вычисляется сумма произведений всех наборов из 10 чисел, идущих подряд. Найдите расстановку чисел, при которой полученная сумма наибольшая.

11 класс

1. a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3.$$

2. Плоская выпуклая фигура ограничена отрезками AB и AC и дугой BC некоторой окружности (рис. 5). Постройте какую-нибудь прямую, которая делит пополам: а) периметр этой фигуры; б) ее площадь.

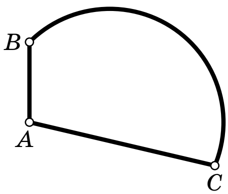


Рис. 5

3. Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и черный цвет. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

4. На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину квадрата и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

5. Граф — это набор вершин, причем некоторые из них соединены ребрами (каждое ребро соединяет ровно две вершины графа). Раскраска вершин графа называется правильной, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, причем его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.

6*. Решите в натуральных числах уравнение $(1+n^k)^l = 1+n^m$, где $l>1$.

7. Докажите, что первые цифры чисел вида 2^{2^n} образуют непериодическую последовательность.

Из трех последних задач 11 класса в зачет шли две.

2000 год (LXIII олимпиада)

8 класс

1. Два различных числа x и y (не обязательно целых) таковы, что $x^2-2000x=y^2-2000y$. Найдите сумму чисел x и y.

2. В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5 % избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т. е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т. п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом Партия любителей математики набрала 25 % голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (Ответ объясните.)

3. Длины оснований трапеции равны m см и n см (m и n — натуральные числа, $m \neq n$). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники.

4. В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC. На продолжениях сторон BA и AC выбраны точки D и E соответственно так, что выполняются равенства $AD = AB$ и $CE = CM$ (рис. 6). Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны.

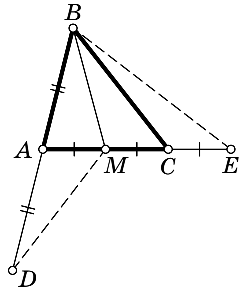


Рис. 6

5. В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет ее в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя.

6. Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 клеток так, чтобы каждый из них бил ровно двух других? (Приведите пример и объясните, почему больше коней расставить нельзя.)

9 класс

1. Решите уравнение

$$(x+1)^{63} + (x+1)^{62}(x-1) + (x+1)^{61}(x-1)^2 + \ldots + (x-1)^{63} = 0.$$

2*. В строку выписано 23 натуральных числа (не обязательно различных). Докажите, что между ними можно так расставить скобки, знаки сложения и умножения, что значение полученного выражения будет делиться на 2000 нацело.

3. Дана окружность и точка A внутри ее. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$, где точки B и D лежат на окружности.

4. Гриша записал в клетки шахматной доски числа 1, 2, 3, ..., 63, 64 в некотором порядке. Он сообщил Лёше только сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Лёша может точно определить, в какой клетке какое число записано.

5*. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M, отличной от точки пересечения диагоналей четырехугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C, вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB, в точке K, а окружность, проходящая через точки B, M и D, вторично пересекает ту же прямую в точке L. Докажите, что $|MK-ML|=|AB-CD|$.

6*. Система укреплений состоит из блиндажей. Некоторые из блиндажей соединены траншеями, причем из любого блиндажа можно перебежать в какой-нибудь другой. В одном из блиндажей спрятался пехотинец. Пушка может одним выстрелом накрыть любой блиндаж. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец обязательно перебегает по одной из траншей в соседний блиндаж (даже если по соседнему блиндажу только что стреляла пушка, пехотинец может туда перебежать). Назовем систему надежной, если у пушки нет гарантированной стратегии поражения пехотинца (т. е. такой последовательности выстрелов, благодаря которой пушка поразит пехотинца независимо от его начального местонахождения и последующих передвижений).

а) Докажите, что система укреплений, изображенная на рисунке 7, надежна.

б) Найдите все надежные системы укреплений, которые перестают быть надежными после разрушения любой из траншей.

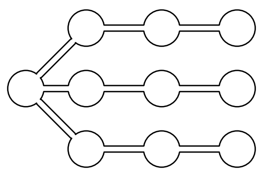


Рис. 7

10 класс

1. Точки A и B взяты на графике функции $y=1/x$, $x>0$. Из них опущены перпендикуляры на ось абсцисс, основания перпендикуляров — H_A и H_B; O — начало координат. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямыми OA, OB и дугой AB, равна площади фигуры, ограниченной прямыми AH_A, BH_B, осью абсцисс и дугой AB.

2. Пусть $f(x)=x^2+12x+30$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x)))))=0.$$

3. На бумаге «в клеточку» нарисован выпуклый многоугольник, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идет по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри многоугольника.

4*. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Последовательность x_1, x_2, ..., x_n, ... будем обозначать $\{x_n\}$. Из имеющихся последовательностей $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ (возможно, $\{b_n\}$ совпадает с $\{c_n\}$) разрешается получать последовательности $\{b_n+c_n\}$, $\{b_n-c_n\}$, $\{b_n\cdot c_n\}$ и $\{b_n/c_n\}$ (если все c_n отличны от 0). Кроме того, из любой имеющейся последовательности можно получить новую, вычеркнув несколько начальных членов. Сначала есть только последовательность $\{a_n\}$. Можно ли получить из нее описанными выше операциями последовательность $\{n\}$, т. е. 1, 2, 3, 4, ..., если: а) $a_n=n^2$; б) $a_n=n+\sqrt{2}$; в) $a_n=\dfrac{n^{2000}+1}{n}$?

6. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали Грише и Лёше по 3 карты, а оставшуюся карту а) спрятали; б) отдали Коле.

Гриша и Лёша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из тех карт, которых он не видит? (Гриша и Лёша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят *открытым текстом*.)

11 класс

1. Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД чисел $m+2000n$ и $n+2000m$?

2. Вычислите

$$\int_0^{\pi}(|\sin 1999x|-|\sin 2000x|)\,dx.$$

3. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K. Пусть M и N — центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD соответственно. Докажите, что $OM=KN$.

4. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

5. В круговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым один раз. Назовем партию неправильной, если выигравший ее шахматист в итоге набрал очков меньше, чем проигравший. (Победа дает 1 очко, ничья — 1/2, поражение — 0.)

Могут ли неправильные партии составлять

а) более 75 % от общего количества партий в турнире;

б)* более 70 %?

6. Можно ли расположить бесконечное число равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, так, чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных?

2001 год (LXIV олимпиада)

8 класс

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 200 и высотой 100 клеток. Его закрашивают по клеткам, начав с левой верхней и идя по спирали (дойдя до края или уже закрашенной части, поворачивают направо, рис. 8). Какая клетка будет закрашена последней? (Укажите номер ее строки и столбца. Например, нижняя правая клетка стоит в 100-й строке и 200-м столбце.)

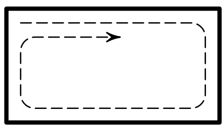


Рис. 8

2. Можно ли поставить на плоскости 100 точек (сначала первую, потом вторую и так далее до сотой) так, чтобы никакие три точки не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

3. Даны шесть слов: ЗАНОЗА, ЗИПУНЫ, КАЗИНО, КЕФАЛЬ, ОТМЕЛЬ, ШЕЛЕСТ. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую (например, за один шаг можно получить из слова ЗАНОЗА слово ЗКНОЗА). Сколько шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются бессмысленные)? Приведите пример и докажите, что меньшим числом шагов обойтись нельзя.

4. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK, медиана BL и высота CM. Треугольник KLM равносторонний. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

5. Лёша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Считается, что он отгадал, если одну цифру он назвал правильно, а в другой ошибся не более чем на единицу (например, если задумано число 65, то 65, 64 и 75 подходят, а 63, 76 и 56 — нет). Придумайте способ, гарантирующий Грише успех за 22 попытки (какое бы число ни задумал Лёша).

6. (Продолжение.) Покажите, что нет способа, гарантирующего Грише успех за 18 попыток.

9 класс

1. Можно ли расставить на футбольном поле четырех футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

2. В некоторой стране суммарная зарплата 10 % самых высокооплачиваемых работников составляет 90 % зарплаты всех работников. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится эта страна, зарплата любых 10 % работников составляет не более 11 % всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

3. Внутри угла с вершиной M отмечена точка A. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке B, затем от другой стороны в точке C и вернулся в A («угол падения» равен «углу отражения», рис. 9). Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника BCM, лежит на прямой AM.

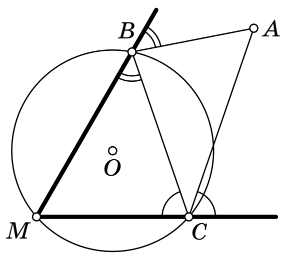


Рис. 9

4. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

5. Натуральное число N в $\underbrace{999\ldots99}_{k\text{ штук}}$ раз больше суммы своих цифр. Укажите все возможные значения k и для каждого из них приведите пример такого числа.

6*. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника A было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков) и коэффициент силы по формуле: сумма очков тех участников, у кого A выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл.

а) Могут ли коэффициенты силы всех участников быть больше 0?

б) Могут ли коэффициенты силы всех участников быть меньше 0?

10 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена такие, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух трехчленов не имеет корней?

2. Можно ли расставить охрану вокруг точечного объекта так, чтобы ни к объекту, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться? (Каждый часовой стоит неподвижно и видит на 100 м строго вперед.)

3. Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого выполняется тождество

$$P(x)+P(1-x)=1.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B и CH_C. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

5. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

6. В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый свой город армия захватывает с воздуха, а каждым следующим ходом она может захватить любой город, соединенный дорогой с каким-нибудь уже занятым этой армией городом. Если таких городов нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая армия свои действия продолжает).

Найдется ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая армия? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

11 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена такие, что каждый из них имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух трехчленов не имеет действительных корней?

2. Дана геометрическая прогрессия. Известно, что ее первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что ее двадцатый член также является натуральным числом?

3. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I' — центр окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CB и CA; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', $I'L$ и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.

5*. Докажите, что в пространстве существует расположение 2001 выпуклого многогранника, такое что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (т. е. имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

6. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

Комментарий. В пункте «б» можно брать камни из любой коробочки, не только той, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе.

2002 год (LXV олимпиада)

8 класс

1. На острове $2/3$ всех мужчин женаты и $3/5$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

2. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A.

3. Дана окружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в A пересекает отрезок AB в точке C, причем $AC < \frac{1}{2}AB$. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB.

4*. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB а) прямой; б) острый, то $AC+BC>3AB$.

6*. В клетчатом прямоугольнике $m\times n$ каждая клетка может быть либо живой, либо мертвой. Каждую минуту одновременно все живые клетки умирают, а те мертвые, у которых было нечетное число живых соседей (по стороне), оживают. Укажите все пары $(m,\ n)$, для которых найдется такая начальная расстановка живых и мертвых клеток, что жизнь в прямоугольнике будет существовать вечно (т. е. в каждый момент времени хотя бы одна клетка будет живой).

9 класс

1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $a^3+b^3+3abc>c^3$.

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC соответственно в точках F и G. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ — ромб.

4. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^4-2y^2=1$.

5. В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки одновременно меняют состояние по следующему правилу. Те лампочки, которые горели на прошлой минуте, гаснут. Те, которые на прошлой минуте не горели и соседствовали ровно с одной горящей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

6. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шаге выбирали любую из уже имеющихся частей и разрезали ее (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

10 класс

1. Тангенсы углов треугольника — натуральные числа. Чему они могут быть равны?

2. Про положительные числа a, b, c известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant a+b+c$. Докажите, что $a+b+c\geqslant 3abc$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF и EF делят четырехугольник на 4 треугольника, площади которых равны последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD?

4. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своем месте. Билетер может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места?

5. В городе Удоеве выборы мэра проходят следующим образом. Если в очередном туре голосования никто из кандидатов не набрал больше половины голосов, то проводится следующий тур с участием всех кандидатов, кроме последнего по числу голосов. (Никогда два кандидата не набирают голосов поровну; если кандидат набрал больше половины голосов, то он становится мэром и выборы заканчиваются.) Каждый избиратель в каждом туре голосует за одного из кандидатов. Если этот кандидат вышел в следующий тур, то избиратель снова голосует за него. Если же кандидат выбыл, то все его избиратели голосуют за одного и того же кандидата из числа оставшихся.

На очередных выборах баллотировалось 2002 кандидата. Мэром стал Остап Бендер, занявший в первом туре k-е место по числу голосов. Определите наибольшее возможное значение k, если Остап был избран а) в 1002-м туре; б)* в 1001-м туре.

6. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в черный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек также были подобны друг другу (возможно с различными коэффициентами подобия).

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Докажите, что на графике функции $y=x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y=x^3+|x|+1$ — такую точку B, что расстояние AB не превысит $\frac{1}{100}$.

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдется некоторое число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих.

5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C — центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны.

6. См. задачу 5 для 10 класса.

2003 год (LXVI олимпиада)

8 класс

1. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход всей семьи возрастет на 5 %, если вместо этого маме удвоят зарплату — то на 15 %, если же зарплату удвоят папе — то на 25 %. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

2. Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей, такое, что при прибавлении к нему произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр.

3. Можно ли покрасить некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 5 закрашенных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 (вертикальном или горизонтальном) — ровно 4 закрашенные клетки?

4. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты точки X и Y такие, что $\angle ABX=\angle YAC$, $\angle AYB=\angle BXC$, $XC=YB$. Найдите углы треугольника ABC.

5. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

6. Боря задумал целое число, большее чем 100. Кира называет целое число, большее чем 1. Если Борино число делится на это число, Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа названное, и Кира называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее. Если Борино число станет отрицательным, Кира проигрывает. Есть ли у нее выигрышная стратегия?

9 класс

1. Хулиганы Джей и Боб на уроке черчения нарисовали головастиков (четыре окружности на рис. 10 одного радиуса, треугольник равносторонний, горизонтальная сторона этого треугольника — диаметр окружности). Какой из головастиков имеет бóльшую площадь?

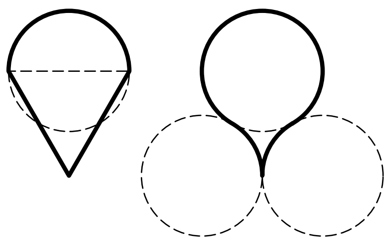


Рис. 10

2. Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

3. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина — на третий;

2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа — на второй или на третий?

Комментарий. До открытия и после закрытия покупателей в магазине не было. Покупатели перемещаются между этажами только на лифте.

4. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, не содержащей точку A, N — середина отрезка AC, M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90^\circ$.

6. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им:

«Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной.

Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут, — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.»

Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

10 класс

1. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что у каждого из уравнений

$$ax^2+bx+c=0, \qquad ax^2+bx-c=0,$$
$$ax^2-bx+c=0, \qquad ax^2-bx-c=0$$

оба корня — целые?

2. По ребрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечетным числом сторон нечетно.

3. Пусть $P(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел a_1, a_2, a_3, ... такова, что $P(a_1)=0$, $P(a_2)=a_1$, $P(a_3)=a_2$, и т. д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь $P(x)$?

4. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. На перпендикулярах, опущенных из M на стороны BC, AC и AB, взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причем $A_1B_1 \perp MC$ и $A_1C_1 \perp MB$. Докажите, что M является точкой пересечения медиан и в треугольнике $A_1B_1C_1$.

5. В стране несколько городов, соединенных дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путем, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.

6. Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x) = f_2(f_1(f_2(x)))$)?

11 класс

1. Для положительных чисел x, y, z выполнено равенство
$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$
Докажите, что хотя бы два из чисел x, y, z равны между собой.

2. Дан многочлен $P(x)$ степени 2003 с действительными коэффициентами, причем старший коэффициент равен 1. Имеется бесконечная последовательность целых чисел a_1, a_2, a_3, ... такая, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, и т. д. Докажите, что не все числа в последовательности a_1, a_2, a_3, ... различны.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точки P и Q симметричны точке C относительно прямых AB и AD соответственно. Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) H треугольника ABD.

4. По периметру круглого торта диаметром n/π метров расположены n вишенок. Если на концах некоторой дуги находятся вишенки, то количество остальных вишенок на этой дуге меньше, чем длина дуги в метрах. Докажите, что торт можно разрезать на n равных секторов так, что в каждом куске будет по вишенке.

5. У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?

6. На берегу круглого острова Гдетотам расположено 20 деревень, в каждой живет по 20 борцов. Был проведен турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня А считается сильнее деревни Б, если хотя бы k поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни А. Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может иметь k? (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.)

7. Дано равенство

$$(a^{m_1}-1)\dots(a^{m_n}-1)=(a^{k_1}+1)\dots(a^{k_l}+1),$$

где a, n, l и все показатели степени — натуральные числа, причем $a>1$. Найдите все возможные значения числа a.

2004 год (LXVII олимпиада)

8 класс

1. У квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

2. Разрежьте изображенную на рис. 11 трапецию на три части и сложите из них квадрат.

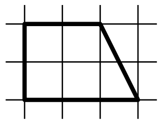


Рис. 11

3. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L соответственно такие, что $KA=AC=$ $=CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.

4. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12^{00} повышается или понижается на n процентов, где n — фиксированное целое положительное число, меньшее 100 (курс не округляется). Существует ли n, для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение?

5. а) Из картона вырезали семь выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые шесть из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все семь нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

б)* Из картона вырезали восемь выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые семь из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все восемь — нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

Комментарий. Считайте, для простоты, что гвоздь, вбитый на границе многоугольника, тоже прибивает его к столу (см. также комментарий к решению).

6*. На шахматную доску произвольным образом уложили 32 доминошки (прямоугольника 1×2), так что доминошки не перекрываются. Затем к доске добавили одну клетку, как показано на рис. 12. Разрешается вынимать любую доминошку, а затем класть ее на две соседние пустые клетки. Докажите, что можно расположить все доминошки горизонтально.

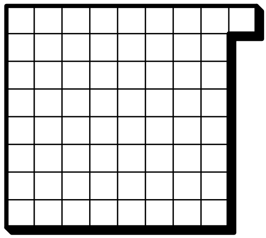


Рис. 12

9 класс

1. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12^{00} повышается или понижается на 17 процентов (курс не округляется). Может ли курс акций дважды принять одно и то же значение?

2. У квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

3. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины с (внутренним) углом в 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.

4*. Пусть l_a, l_b и l_c — длины биссектрис углов A, B и C треугольника ABC, а m_a, m_b и m_c — длины соответствующих медиан. Докажите, что

$$\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}>1.$$

5. Назовем натуральное число *разрешенным*, если оно имеет не более 20 различных простых делителей. В начальный момент имеется куча из 2004! (т. е. $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2004$)

камней. Два игрока по очереди забирают из кучи некоторое разрешенное количество камней (возможно, каждый раз новое). Побеждает тот, кто заберет последние камни. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Перед экстрасенсом лежит колода из 36 карт рубашкой вверх (четыре масти, по девять карт каждой масти). Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают и показывают ему. После этого экстрасенс называет масть следующей карты, и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большее число раз.

Рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из двух положений лежит верхняя карта. Помощник экстрасенса знает порядок карт в колоде, не может менять его, но может расположить рубашку каждой из карт тем или иным образом.

Мог ли экстрасенс так договориться с помощником, когда тот еще не знал порядок карт, чтобы обеспечить угадывание масти не менее чем а) 19 карт; б) 23 карты?

Если вы придумали способ угадывания другого количества карт, большего 19, то тоже напишите.

10 класс

1. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n — также степень двойки.

2. Существует ли тетраэдр, все грани которого — равные прямоугольные треугольники?

3. Назовем *белыми* числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где a и b — целые числа, не равные нулю. Аналогично, назовем *черными* числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где c и d — целые, не равные нулю числа. Может ли черное число равняться сумме нескольких белых?

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу окружности, касающейся стороны AB в точке C' и продолжений двух других сторон в точках A' и B'. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот) треугольника $A'B'C'$.

6. См. задачу 6 для 9 класса.

11 класс

1. Докажите, что любой квадратный трехчлен можно представить в виде суммы двух квадратных трехчленов с нулевыми дискриминантами.

2. Верно ли, что для любых четырех попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а)* трапеции, б) параллелограмма?

3. Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.

4. Треугольник ABC с острым углом $\angle A = \alpha$ вписан в окружность. Диаметр этой окружности проходит через основание высоты треугольника, проведенной из вершины B, и делит треугольник ABC на две части одинаковой площади. Найдите величину угла B.

5. Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0;\, 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + A_2 \sin k_2 x = 0,$$

где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{R}$.

6. Вдоль стены круглой башни по часовой стрелке ходят два стражника, причем первый из них — вдвое быстрее второго. В этой стене, имеющей длину 1, проделаны бойницы. Система бойниц называется *надежной*, если при некотором начальном расположении стражников в каждый последующий момент времени хотя бы один из них находится возле бойницы.

а) Какую наименьшую длину может иметь бойница, если система, состоящая только из этой бойницы, надежна?

б) Докажите, что суммарная длина бойниц любой надежной системы больше $1/2$.

в)* Докажите, что для любого числа $s > 1/2$ существует надежная система бойниц с суммарной длиной, меньшей s.

2005 год (LXVIII олимпиада)

8 класс

1. Найдите хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005.$$

2. Клетчатый бумажный квадрат 8×8 согнули несколько раз по линиям клеток так, что получился квадратик 1×1. Его разрезали по отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон квадратика. На сколько частей мог при этом распасться квадрат?

3. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны.

4. По кругу расставлены 2005 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа такие, что после их выкидывания оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой.

5. Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них.

6. На плоскости даны 2005 точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Каждые две точки соединены отрезком. Тигр и Осёл играют в следующую игру. Осёл помечает каждый отрезок одной из цифр, а затем Тигр помечает каждую точку одной из цифр. Осёл выигрывает, если найдутся две точки, помеченные той же цифрой, что и соединяющий их отрезок, и проигрывает в противном случае. Доказать, что при правильной игре Осёл выиграет.

9 класс

1. Дискриминанты трех приведенных квадратных трехчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

2. Существует ли 2005 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число?

3. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Из точки C, лежащей на ω_1, проведены касательные к ω_2, вторично пересекающие ω_1 в точках A и B. Докажите, что отрезок AB перпендикулярен прямой, проходящей через центры окружностей.

4. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат?

5. На окружности расставлено n цифр, ни одна из которых не 0. Сеня и Женя переписывают себе в тетрадки $n-1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n-1)$-значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа.

6. Дан остроугольный треугольник ABC и точка P, не совпадающая с точкой пересечения его высот. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников PAB, PAC, PBC и ABC, а также окружность, проходящая через проекции точки P на стороны $\triangle ABC$, пересекаются в одной точке.

10 класс

1. Существует ли плоский четырехугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

Комментарий. Прямоугольник не годится, так как тангенсы его углов не определены.

2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

3. На сторонах треугольника ABC вовне построены квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 также во внешнюю сторону от $\triangle AA_1A_2$ и $\triangle BB_1B_2$ построены квадраты $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Докажите, что $A_3B_4 \parallel AB$.

4. Конструктор состоит из набора прямоугольных параллелепипедов. Все их можно поместить в одну коробку, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. В бракованном наборе одно из измерений каждого параллелепипеда оказалось меньше стандартного. Всегда ли у коробки, в которую укладывается набор, тоже можно уменьшить одно из измерений (параллелепипеды укладываются в коробку так, что их ребра параллельны ребрам коробки)?

5. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + \ldots + 5^n$. Существуют ли 5 идущих подряд ее членов, делящихся на 2005?

6. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. В распоряжении двух игроков имеются краски k цветов. Первый игрок красит каждый отрезок в один из k цветов, затем второй игрок красит в один из тех же цветов каждую точку. Если найдутся две точки и отрезок между ними, окрашенные в один цвет, выигрывает первый игрок, в противном случае второй. Докажите, что первый может гарантировать себе выигрыш, если а) $k = 7$, б) $k = 10$.

11 класс

Вариант А

1. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

2. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все ее члены увеличить на 1 или все ее члены увеличить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина $n^2 d$, где d — разность прогрессии, а n — число ее членов?

3. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами 1, 2, ... так, что на расстоянии, меньшем 10, от любой незанумерованной клетки найдется занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 150, которые занумерованы числами, различающимися более, чем на 23. Расстояние между клетками — это расстояние между их центрами.

4. С выпуклым четырехугольником $ABCD$ проделывают следующую операцию: одну из данных вершин меняют на точку, симметричную этой вершине относительно серединного перпендикуляра к диагонали (концом которой она не является), обозначив новую точку прежней буквой. Эту операцию последовательно применяют к вершинам A, B, C, D, A, B, $\ldots$ — всего n раз. Назовем четырехугольник допустимым, если его стороны попарно различны и после применения любого числа операций он остается выпуклым. Существует ли:

а) допустимый четырехугольник, который после $n<5$ операций становится равным исходному;

б) такое число n_0, что любой допустимый четырехугольник после $n=n_0$ операций становится равным исходному?

5. К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трех исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел.

6. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает n точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n+1)^2$ попыток?

Вариант Б

1. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \cos x = ax + b, \\ \sin x + a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

2. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 250. Если все ее члены уменьшить на 1 или все ее члены уменьшить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 250. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d, где d — разность прогрессии, а n — число ее членов?

3. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами 1, 2, ... так, что на расстоянии, меньшем 5, от любой незанумерованной клетки найдется занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 100, которые занумерованы числами, различающимися более, чем на 34. Расстояние между клетками — это расстояние между их центрами.

4. См. задачу 4 варианта А.

5. См. задачу 5 варианта А.

6. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Коля мысленно выбирает n точек, а Миша пытается их разгадать. За одну попытку Миша указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Коля сообщает Мише расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Миша умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Миша наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n+1)^2$ попыток?

ОТВЕТЫ

1993 год

8 класс. **1.** а) Решений нет; б) 1963. **3.** Нельзя. **4.** Хорошего и плохого времени в сутках поровну. **5.** Существует.

9 класс. **1.** См. рис. 13. Условию задачи удовлетворяют точки, находящиеся в заштрихованных областях, и точки на сплошных линиях, но не точки на пунктирных линиях. **2.** $x_{1000}=\frac{1000\cdot1003}{2}=501500$. **3.** Нет, не может. **4.** У Пети 14 друзей. **5.** 58.

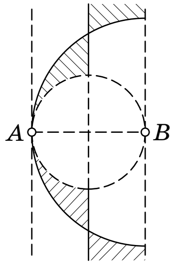


Рис. 13

10 класс. **1.** 12 или 4. **2.** Могут. **3.** а) Не всегда; б) всегда. **4.** При $k=4$ верно, при $k=5$ неверно. **6.** Максимум $OM+ON$ достигается при $\angle ACB=135^\circ$ и равен $\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

11 класс. **2.** Может. **3.** n прямых при $n>2$, 1 прямая при $n=2$. **4.** а) Можно; б) нет, не всегда. **5.** б) Нет, нельзя. **6.** Длина кратчайшего пути равна $\frac{4}{\sqrt{10}}a$.

1994 год

8 класс. **1.** Хватит на 15 банок. **2.** 143 и 143. **5.** Больше хорошего. **6.** Выиграет первый.

9 класс. **1.** Существует. **2.** Если $k>l$, то выигрывает Коля, если $k\leqslant l$, то выигрывает Лёва. **5.** Число 180625, которое после вычеркивания цифры 8 уменьшается в 17 раз.

10 класс. **1.** 3333334 и 1666667. **5.** а) Такой хорды может не существовать. **6.** Существует.

11 класс. **3.** $r=\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$.

1995 год

8 класс. **1.** Денежки на квас хватит. **4.** а), б), в) Да, достаточно. **6.** 240°.

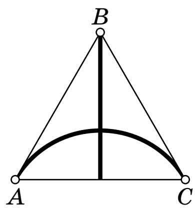


Рис. 14

9 класс. **2.** Высота треугольника ABC, выходящая из вершины B, а также дуга окружности с концами A и C и величиной 120°, лежащая внутри треугольника ABC (рис. 14). **3.** При $n\leqslant 998$ и при $n\geqslant 3989$. **4.** Не может.

10 класс. **1.** а) 4 значения; б) 3 значения. **2.** См. ответ задачи 2 для 9 класса. **4.** См. ответ задачи 5 для 9 класса.

11 класс. **2.** а) Можно; б) нельзя. **5.** 1994. **7.** Существует.

1996 год

8 класс. **1.** Да, верно. **3.** См. рис. 15. **5.** При четных n.

9 класс. **4.** а) Может; б) не может; в) может. **5.** Пусть O — центр окружности. Рассмотрим круги, построенные на отрезках AO и BO как на диаметрах. Искомое ГМТ представляет собой внутренность этих кругов, за исключением их общей части (рис. 16). **6.** 72 монеты.

10 класс. **2.** 18. **4.** При $m=n=1$ выигрывает второй. Во всех остальных случаях выигрывает первый. **5.** Да, может.

11 класс. **2.** Например, x^5-5x^3+5x-4. **3.** Могут.

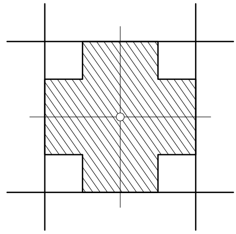


Рис. 15

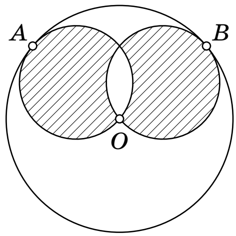


Рис. 16

1997 год

8 класс. **2.** Сможет. Например, Ваня может выйти в начале 38-го часа. **4.** Да, существует. **5.** 110°. **6.** $2n^2+1$ монет.

9 класс. **2.** Да, всегда. **4.** Если n делится на 3, то лес отсутствует; если n при делении на 3 дает остаток 1, то лес составляет 2/3 дороги; если n при делении на 3 дает остаток 2, то лес составляет 1/3 дороги.

10 класс. **1.** Да, существует.

11 класс. **2.** $\pi/2$. **3.** $1/x=f_1(x)-(f_2(x)-f_3(x)+1)/2$. **4.** Можно.

1998 год

8 класс. **1.** Да, найдутся. Например, $x=1$, $y=4$, $z=7$. **2.** Да, можно. **6.** Не всегда.

9 класс. **1.** Нет, не является. **3.** 1/2. **5.** 80° или 100°.

10 класс. **3.** 1998. **4.** Не существует. **5.** В отношении $5:7$, считая от вершины A.

11 класс. **2.** Нет, не следует. **3.** $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = \arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$, $\angle A = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **4.** Единственное решение: $x = y = z = 2$. **5.** Можно.

1999 год

8 класс. **1.** $x < z < y$. **3.** Например, $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 3$. **4.** 498 долларов.

9 класс. **1.** 2. **2.** Может. **4.** $k = 2$.

10 класс. **3.** $x = 1$, $y = 1$. **6.** Искомая расстановка изображена на рис. 17 (или получается из нее поворотом или симметрией).

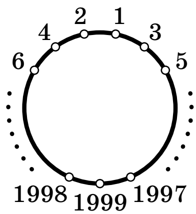


Рис. 17

11 класс. **4.** Сможет. **6.** Единственное решение уравнения: $n = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$.

2000 год

8 класс. **1.** $x + y = 2000$. **2.** 50 мест. **6.** 16 коней.

9 класс. **1.** $x = 0$. **3.** Обозначим через O центр окружности в условии задачи. Тогда искомое ГМТ есть окружность с центром в точке O и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$. **6.** б) Такими (минимальными) надежными системами укреплений являются трилистник, изображенный в условии пункта «а», и все системы, состоящие ровно из одного цикла блиндажей (рис. 18).

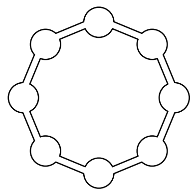


Рис. 18

10 класс. **2.** $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$. **5.** а), в) Можно; б) нельзя. **6.** а), б) Могут.

11 класс. **1.** $2000^2 - 1$. **2.** 0. **4.** Может. **5.** а) Не могут; б) могут. **6.** Можно.

2001 год

8 класс. **1.** Клетка, расположенная в 51-й строке и 50-м столбце. **2.** Да, можно. **3.** 25.

9 класс. **1.** Да, можно. **2.** Да, может. **4.** Нет, нельзя. **5.** Такое число существует для любого k. **6.** а), б) Нет, не могут.

10 класс. **1.** Да, существуют. **2.** Да, можно. **3.** Например, $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2001}+\frac{1}{2}$. **5.** Не могут. **6.** Да, найдется.

11 класс. **1.** Да, существуют. **2.** Да, верно.

2002 год

8 класс. **1.** $\frac{12}{19}$ населения острова. **2.** 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31. **4.** Выигрывает второй. **6.** Все пары чисел (m, n), кроме пар $(1, 1)$, $(1, 3)$ и $(3, 1)$.

9 класс. **1.** Всегда. **4.** $x=1$, $y=0$ или $x=-1$, $y=0$. **5.** При всех n, кроме 1 и 3. **6.** Не могут.

10 класс. **1.** Тангенсы углов треугольника равны 1, 2 и 3. **3.** 6. **4.** Всегда. **5.** а) $k=2001$; б) $k=1$. **6.** Можно.

11 класс. **1.** См. ответ задачи 1 для 10 класса. **3.** См. ответ задачи 4 для 10 класса. **6.** См. ответ задачи 5 для 10 класса.

2003 год

8 класс. **1.** На 55 %. **2.** Например, 1111111613. **3.** Нельзя. **4.** Треугольник равносторонний, все углы по 60°. **5.** 21 авиалиния. **6.** Есть.

9 класс. **1.** Площади головастиков равны. **2.** Например, 2, 2, 2, 2, $-1/15$ или 5, 6, 7, 8, -1. **3.** С первого на третий этаж за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй. **4.** Если число n является простым, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок.

10 класс. **1.** Да, например, $a=1$, $b=5$, $c=6$. **3.** Степень многочлена может равняться только 1. **6.** Всегда существует.

11 класс. **5.** Многогранник является тетраэдром и у него 4 грани. **6.** 290. **7.** 2 и 3.

2004 год

8 класс. **1.** Например, $x^2+3x+2=0$. **2.** Пример необходимого разрезания изображен на рис. 19. **4.** Не существует.

9 класс. **1.** Нет, не может. **2.** Да, могло. **5.** При правильной игре выигрывает второй игрок. **6.** а), б) Да, мог.

10 класс. **2.** Нет, не существует. **3.** Да, может. **4.** См. ответ в задаче 5 для 9 класса. **6.** См. ответ в задаче 6 для 9 класса.

11 класс. **2.** а) Да, верно; б) нет, не верно. **4.** $\pi-2\alpha$ или $\frac{\pi}{2}-\alpha$. **5.** $2k_0$. **6.** а) $\frac{2}{3}$.

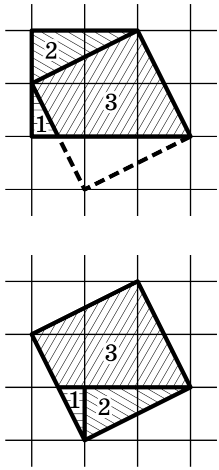


Рис. 19

2005 год

8 класс. **1.** Например, $a=2$, $b=20$. **2.** На 9 частей.

9 класс. **2.** Да, существуют. Например 1, 2, 3, 6, 12, 24, ..., $3\cdot 2^{2003}$. **4.** Нет, не верно.

10 класс. **1.** Да, существует. **4.** Нет, не всегда. **5.** Нет, не существуют.

11 класс. **2.** *Вариант А*: ± 400; *вариант Б*: ± 1000. **4.** а) Да, существует; б) Да, существует. Например, $n_0=6$. **5.** 9, 11, 25. **6.** Может.

УКАЗАНИЯ

1993 год

8 класс

1. а) Используйте признак делимости на 3. б) Оцените x снизу и найдите остаток от деления x на 9.

2. Преобразуйте выражение $(a^2+b^2+c^2)^2$.

3. Рассмотрите все пары фишек из которых левая — красная, а правая — синяя.

4. Если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот.

5. Проведите индукцию по количеству букв в алфавите.

6. Докажите, что $\angle ADB = \angle ACB$.

9 класс

2. Выпишите $x_n - x_{n-1}$ для небольших n.

3. Подумайте, из каких треугольников мог получиться треугольник с углами 20°, 20°, 140°.

4. Рассмотрите того из Петиных одноклассников, у кого больше всего друзей, и того, у кого меньше всего друзей.

6. Рассмотрите точку, симметричную точке B относительно прямой AM.

10 класс

1. Докажите, что один из периодов дроби $A+B$ (возможно не минимальный) равен 12.

4. Изобразите числа $\{an+b\}$ точками на окружности единичной длины.

5. Оцените суммарное число различий между всеми парами растений по всем признакам.

11 класс

4. Пусть в ящиках лежит 1, 2, ..., n камней. Выразите максимальное число камней в кучке после хода через n и k. Выясните, при каком k это число будет минимальным.

5. График такой функции должен переходить в себя при повороте на 90° вокруг начала координат.

6. Пусть P и Q — середины сторон KL и MN пространственного четырехугольника $KLMN$. Тогда

$$PQ \leqslant \frac{1}{2}(KN+LM).$$

1994 год

8 класс

1. Выразите объем банки через объем бидона.

2. Если x и y — искомые трехзначные числа, то $7x \cdot y = 1000x + y$.

3. Продлите перпендикуляры до пересечения с прямой AC.

4. Кузнечики прыгают по узлам квадратной сетки.

5. Через целое число часов положение минутной и секундной стрелок будет таким же.

6. Используйте осевую симметрию прямоугольника.

9 класс

2. Лёве нужно попытаться сложить равнобедренные треугольники.

3. Сделайте подстановку $z = -x$.

4. Достаточно доказать, что равны треугольники AQN и AMP. Докажите, что они подобны и что дуги AQ и MA равны.

6. б) Чтобы доказать, что можно поставить очередной корабль 1×3 расположите 8 вспомогательных кораблей 1×3 так, чтобы корабль 1×4 или 1×3 мог задеть не более двух из них.

10 класс

1. Пусть x, y — искомые семизначные числа, тогда $3x \cdot y = 10^7 x + y$.

2. а) Посмотрите, что происходит со знаменателями членов последовательности.

б) Попробуйте понять, как выражается x_{n+k} через x_n, если раскрыть все модули.

3. Докажите, что найдется депутат, получивший не более одной пощечины.

4. $AK = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

5. б) Попробуйте провести некоторую хорду и двигать ее параллельно самой себе.

6. Достаточно, чтобы условие выполнялось при $n = 2$ и $n = 3$. Если у $P(x)$ есть нулевой коэффициент, а у $P^2(x)$ и

$P^3(x)$ все коэффициенты положительны (и никакие промежуточные коэффициенты не равны нулю), то можно чуть-чуть «пошевелить» многочлен $P(x)$, чтобы он давал решение задачи.

11 класс

1. Попробуйте составить шестигранник.

3. Постройте окружность с центром на оси y, которая касается оси x, и выясните при каком наименьшем радиусе r она имеет с кривой $y=x^4$ общую точку, отличную от начала координат.

4. Сделайте гомотетию с центром в точке A и коэффициентом 2, затем докажите, что все 8 многогранников лежат внутри растянутого.

5. Используйте факт 25.

6. Достаточно найти такое m, что 2^m «чуть-чуть» меньше, чем некоторая степень десятки. Для этого достаточно найти такое n, что 2^n+1 делится на достаточно большую степень пятерки.

1995 год

8 класс

2. Рассмотрите разность соседних чисел.

3. Рассмотрите поворот на 120° вокруг точки O.

5. Есть два пути решения: 1) сравнить стоимость перевозок, маршруты которых почти совпадают, и 2) написать явную формулу для стоимости перевозки.

6. Поверните все интересующие нас углы так, чтобы их вершины совпали с точкой A.

9 класс

1. См. указание к задаче 2 для 8 класса.

2. Для фиксированной точки A' найдутся ровно две таких точки C', что $AA'=CC'$.

3. Решите сначала аналогичную задачу для прямоугольника $5\times n$.

5. Порядок, в котором разрезали треугольники, не важен.

6. а) Пусть завхоз положит 27 самых легких банок на левую чашу. б) Используйте факт 1.

10 класс

1. б) Используйте формулу синуса тройного угла.

2. См. указание к задаче 2 для 9 класса.

3. Квадрат касательной равен произведению отрезка секущей на ее внешнюю часть.

4. См. указание к задаче 5 для 9 класса.

5. Пусть p — простой делитель числа a. Приведите каждую из дробей к общему знаменателю. Рассмотрите максимальную степень p, делящую числитель и максимальную степень p, делящую знаменатель.

6. Докажите, что все лампочки, кроме любой одной, можно погасить (индукция по числу лампочек).

11 класс

1. Модуль суммы не превосходит суммы модулей.

3. Достройте треугольник BAC до параллелограмма и используйте обобщенную теорему Фалеса.

4. Если $f(x)$ — многочлен степени n, то $f(x)-f(x-d)$ — многочлен степени $n-1$ (при фиксированном $d\neq 0$).

6. Попробуйте искать n в виде 3^b-2^b.

1996 год

8 класс

1. Равенство можно делить на *ненулевой* множитель.

2. Пусть m_i — масса i-й гирьки, тогда $(m_1-m_2)+$ $+(m_2-m_3)+\ldots+(m_9-m_{10})+(m_{10}-m_1)=0$.

3. Рассмотрите некоторый цветок и выясните, какие садовники за ним ухаживают.

6. а) Рассмотрите два случая: 1) найдется школьник, решивший 6 задач, и 2) каждый школьник решил не более 5 задач.

9 класс

1. Используйте формулу для суммы углов выпуклого многоугольника.

3. Используйте факт 15.

4. в) Сведите задачу к аналогичной для меньшего n.

6. Сначала докажите, что разбойник может действовать так, чтобы не было кучек, содержащих менее 4 монет. Затем покажите, что Али-Баба может добиться, чтобы в 7 кучках лежало не более, чем по 4 монеты.

10 класс

2. Рассмотрите квадратики, расположенные по периметру большого квадрата.

3. Выразите требуемые углы через углы при вершинах A и M.

5. Рассмотрите страну, в которой живет 10 человек, причем их дома расположены на одной прямой.

6. Если k делит $x-y$, то k делит $P(x)-P(y)$.

11 класс

2. Вычислите $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$.

3. Напишите уравнения параллельных плоскостей, проходящих через вершины единичного куба, так чтобы расстояния между соседними плоскостями были равны.

5. Используйте теорему синусов и факт 17.

1997 год

8 класс

2. Достаточно, чтобы к началу движения по дороге перестал извергаться первый кратер, а спустя 4 часа, к началу движения по тропинке, перестал извергаться второй кратер.

3. Рассмотрите точки, симметричные точке M относительно прямых OX и OY.

5. Продолжите прямые DE и AB до пересечения.

6. Пусть банкир разрешает класть на весы монеты не более одного раза. Из какого наибольшего числа монет можно выделить более легкую за k взвешиваний?

9 класс

1. Против меньшей стороны треугольника расположен его меньший угол.

2. Достаточно разрезать самый большой кусочек.

4. Если расстояние между точками кратно расстоянию между поездами, то либо в обеих точках лес, либо в обеих точках нет леса.

5. Разделите участников турнира на тех, кто набрал во втором турнире больше очков, чем в первом, и тех, кто набрал в первом турнире больше очков, чем во втором.

6. Пусть коэффициент многочлена $F(x)$ при x равен единице. Рассмотрим такое наименьшее m, что коэффициент $F(x)$ при x^m равен нулю. Тогда можно взять $k=m-1$.

10 класс

2. Перенесите четырехугольник $ABCD$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

3. Пусть при указанной процедуре многоугольник $A_1\ldots A_n$ перешел в многоугольник $B_1\ldots B_n$. Докажите, что многоугольник $A_1\ldots A_n$ однозначно восстанавливается по многоугольнику $B_1\ldots B_n$.

4. Используйте обратную теорему Виета.

5. Предположите, что это неверно, и рассмотрите участников, выигравших наибольшее количество партий, и участников, выигравших наименьшее количество партий.

6. Покажите, что для любого k существует степень двойки, десятичная запись которой имеет вид

$$1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}}y.$$

11 класс

2. Представьте интеграл в виде суммы двух интегралов и сделайте замену $y=\frac{\pi}{2}-x$ в одном из слагаемых.

3. Из многочленов можно получить только многочлен, поэтому нельзя обойтись без f_1. Для доказательства необходимости f_2 рассмотрите производные функций в точке 1. Для доказательства необходимости f_3 нужно воспользоваться комплексными числами.

5. Пусть $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$.

1998 год

8 класс

1. В году 365 дней.

2. Используйте разложение числа на простые множители.

3. Соедините середины сторон AB и CD параллелограмма.

5. Если у человека есть знакомые, сидящие рядом друг с другом, то этот человек знаком со всеми.

9 класс

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

3. Представьте себе, что все правдивые жители стали лжецами, а все лжецы «исправились».

4. При закрытии всех дорог стратегического набора множество баз распадется ровно на две не соединенные друг с другом части, причем ни одна из дорог внутри каждой из этих частей не закрыта.

5. Докажите, что таких точек O ровно две.

6. Эта задача требует некоторого знания линейной алгебры (точнее, алгоритма Гаусса). Об этом можно прочитать в [72], см. также факт 25.

10 класс

1. Попробуйте доказать это от противного.

2. Чему равна сумма площадей всех прямоугольников?

3. Если отрезки, освещенные двумя фонарями, пересекаются, то эти фонари — соседние.

4. Придумайте признак делимости на 999.

5. Пусть на границе треугольника вбит гвоздь. Выясните, вокруг каких точек треугольник можно повернуть по часовой стрелке, а вокруг каких — против.

6. Если расстановка хорошая, то числа в ряду можно раскрасить в девять цветов так, чтобы числа каждого цвета шли в порядке возрастания.

11 класс

1. Разложите разность правой и левой частей на множители.

2. Задайте функцию одной формулой при $x>1$, и другой — при $x\leqslant 1$.

4. Исследуйте переменные на четность.

6. См. указание к задаче 6 для 10 класса.

1999 год

8 класс

1. Рассмотрите числа $1-x$, $1-y$ и $1-z$.

3. Если $ab=cd$, то $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ являются полными квадратами.

4. И 300, и 198 делятся на 6.

5. Рассмотрите точку, симметричную точке N относительно точки O.

6. Если утверждение задачи неверно, то найдется участник, выигравший все партии белыми, и участник, не выигравший ни одной партии белыми.

9 класс

1. Произведение чисел на доске не меняется.

2. Попробуйте делать палиндром «с середины» — сначала так, чтобы 1000 и 1001 буквы образовывали палиндром, затем 999, 1000, 1001 и 1002 и т. д.

3. Воспользуйтесь теоремой об угле между касательной и хордой.

4. Точный квадрат оканчивается на четное число нулей; ближайший к числу n^2 точный квадрат — это n^2-2n+1.

5. Докажите, что $ST=BS$.

10 класс

1. Если $f(x)=ax^2+bx+c$, то $a+b+c=f(1)$, $c=f(0)$.

3. $x(x^2+y^2)-(x^3+y)=y(xy-1)$.

4. Рассмотрите два равных числа, расстояние между которыми наименьшее.

5. Оба отображения «сжимают» отрезок $[0;1]$ в $\sqrt{3}$ раз.

11 класс

1. Примените неравенство треугольника.

2. Рассмотрите середину дуги BC.

3. Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры.

4. Разделите квадрат на 4^n маленьких квадратиков и докажите по индукции, что кузнечик может попасть в любой из них.

5. Если вершины цвета 2, которые не соседствуют с вершинами цвета 1, перекрасить в цвет 1, то опять получится правильная раскраска.

6. Используйте бином Ньютона.

7. Рассмотрите на окружности длины 1 полуинтервалы $[0; \lg 2)$, ..., $[\lg 9; 0)$. Тогда первая цифра числа 2^k определяется тем, в какой из этих полуинтервалов попадает дробная часть числа $\lg(2^k) = k \cdot \lg 2$.

2000 год

8 класс

1. Перенесите $2000x$ в правую часть, а y^2 — в левую.

3. Продолжите стороны трапеции до пересечения.

4. Рассмотрите треугольник KBE, где K — точка, симметричная M относительно точки A.

5. Используйте полуинвариант (см. факт 2).

6. Число коней, стоящих на белых клетках, равно числу коней, стоящих на черных клетках.

9 класс

1. Используйте формулу для $a^n - b^n$.

2. Пусть имеется семь чисел: четыре числа, делящихся на два, и три числа, делящихся на пять, тогда их произведение делится на 2000.

3. Примените теорему Пифагора несколько раз.

4. Для любых клеток одного цвета Лёша может определить разность чисел, записанных в этих клетках.

5. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников AMC и BMD. Спроецируйте O_1, O_2 и середину отрезка O_1O_2 на прямую, упоминающуюся в условии задачи.

6. Рассмотрите блиндажи, в которых может оказаться пехотинец после четного числа выстрелов пушки.

10 класс

1. Площади треугольников OAH_A и OBH_B равны 1/2.

2. Выделите полный квадрат.

4. См. указание к задаче 5 для 9 класса.

5. б) Все последовательности, которые можно получить из $\{n+\sqrt{2}\}$, имеют вид $\left\{\frac{P(n+\sqrt{2})}{Q(n+\sqrt{2})}\right\}$, где P и Q — многочлены с целыми коэффициентами.

в) Рассмотрите преобразование, которое последовательность $\{a_n\}$ переводит в $\{a_{n+1}-a_n\}$. Примените это преобразование к исходной последовательности многократно.

6. а) Подумайте сначала, как Гриша может сообщить Лёше свои карты, чтобы Коля при этом ничего не узнал.

б) Пусть Гриша и Лёша занумеруют карты числами от 1 до 7.

11 класс

1. НОД$(dm, dn)=d$ для любого d.

3. Либо точки O, M, K, N лежат на одной прямой, либо четырехугольник $OMKN$ — параллелограмм.

4. Подберите длины палочек так, чтобы после каждой операции отношение длин палочек не менялось.

5. а) Пусть в турнире учавствовали $2M$ игроков. Игроков, занявших первые M мест, назовем *сильными*, а остальных — *слабыми*. Рассмотрите три типа партий: сильные с сильными, сильные со слабыми и слабые со слабыми.

б) Постройте таблицу такого турнира, что у всех игроков равное количество очков, и число единиц над главной диагональю приблизительно равно четверти всех партий.

2001 год

8 класс

2. Расставляйте точки на окружности.

3. Число замен будет наименьшим, если в каждой колонке сохранить наиболее частую букву.

4. Используйте факт 14.

5, 6. Расположите двузначные числа в клетках прямоугольника высоты 9 и ширины 10.

9 класс

1. Расставьте футболистов на одной прямой.

3. Используйте факт 14.

4. Пусть количество камней в каждой кучке делится на нечетное число a.

6. Обозначим сумму очков, набранных участником A, через S_A, а его коэффициент силы — через F_A. Рассмотрите $\sum\limits_A S_A F_A$.

10 класс

1. Рассмотрите трехчлены с нулевыми дискриминантами.

3. Сделайте замену переменных.

4. Рассмотрите точку, симметричную ортоцентру треугольника AH_BH_C относительно середины стороны H_BH_C.

5. Разбейте все возможные расположения фишек на два типа.

11 класс

1. Решите сначала задачу 1 для 10 класса.

2. Докажите, сначала, что знаменатель прогрессии рационален. Затем используйте факт 9.

3. Рассмотрите гомотетию, переводящую вписанную окружность во вневписанную.

4. Пусть такой многочлен существует. Чему может быть равен его свободный член?

6. Рассмотрите ориентированный граф вершинами которого являются состояния системы, а ребрами — возможные ходы.

2002 год

8 класс

1. Обозначьте число супружеских пар через N и выразите через N население острова.

2. Сумма цифр числа A меньше шести.

3. Пусть E — точка касания второй окружности с общей касательной. Докажите, что треугольники DEA и DCA равны.

4. Без ограничения общности можно считать, что первая шашка поставлена в среднюю вертикаль, но не в центр доски.

5. Пусть F — середина BM. Тогда $AF = AE$ в пункте «а» и $AF \leqslant AE$ в пункте «б».

6. Рассмотрите сначала случай прямоугольника $1 \times n$.

9 класс

2. Используйте формулу суммы кубов и неравенство треугольника.

3. Отразите симметрично треугольник ABC относительно прямой DE.

4. Запишите уравнение в виде $x^4 - 1 = 2y^2$ и используйте такое утверждение: если произведение взаимно простых чисел есть точный квадрат, то каждое из чисел есть точный квадрат.

6. Проследите за количеством острых углов у различных частей.

10 класс

1. Рассмотрите наименьший угол треугольника.

2. Используйте неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

4. Занумеруйте зрителей и используйте математическую индукцию.

5. б) Кандидат, занявший первое место в первом туре, не мог выбыть в первой тысяче туров.

6. Впишите круг в квадрат, затем меньший квадрат в круг и т. д.

11 класс

1. См. указание к задаче 1 для 10 класса.

1. См. указание к задаче 4 для 10 класса.

4. Обозначим n-й член последовательности через a_n, а сумму первых n членов через S_n. Рассмотрите частное от деления S_{n-1} на a_n.

5. Докажите, что $T_B O_A \perp AB$.

6. См. указание к задаче 5 для 10 класса.

2003 год

8 класс

1. Если Маше удвоят стипендию, то семейный доход возрастет в точности на размер этой стипендии.

2. Найдите сначала трехзначное число, обладающее нужным свойством.

3. Подсчитайте разными способами число закрашенных клеток.

4. Докажите, что $\angle BAX = \angle YCA$.

5. Если 15 городов соединены авиалиниями так, что можно добраться от любого города до любого другого, то авиалиний не меньше 14.

6. Рассмотрите остатки от деления Бориного числа на 12.

9 класс

1. Попробуйте разрезать одного головастика на несколько частей и сложить второго головастика.

2. Первые четыре числа можно брать почти произвольными.

4. Действуйте по аналогии с алгоритмом Евклида.

5. Центр данной окружности и точки A, E, C лежат на одной окружности.

6. Пусть *выключает* свет только один из узников.

10 класс

1. Подберите коэффициенты, пользуясь теоремой Виета.

2. Подумайте, четна или нечетна сумма числа сторон на всех гранях одной части.

3. Если степень $P(x)$ больше единицы, то для достаточно больших x выполняется неравенство $|P(x)| > |x|$.

4. Перепишите условие задачи, используя векторы и скалярное произведение.

5. Действуйте по индукции, пользуясь следующей леммой. Пусть множество городов M таково, что из каждого из них можно проехать в каждый город этого множества. Пусть дорога $X \to Y$ такова, что $X \in M$, $Y \notin M$. Тогда из Y по городам из M нельзя проехать ни в какой город из M, минуя город X.

6. Рассмотрите функции $P_n(\operatorname{tg} x)$.

11 класс

1. Перенеся все слагаемые в левую часть и освободившись от знаменателя, мы получим выражение, которое делится на $x - y$.

3. Рассмотрите точки, симметричные точке H относительно прямых AB и AD.

4. Отметьте точку на окружности и напишите около каждой вишенки число, равное разности расстояния от отмеченной точки до этой вишенки и ее номера.

5. Угол между любыми двумя внешними нормалями к граням такого многогранника тупой или развернутый.

6. Упорядочите борцов в каждой деревне по силе и сравните борцов, имеющих один и тот же номер в разных деревнях.

7. Докажите, что $a-1$ — степень двойки.

2004 год

8 класс

2. Вычислите длину стороны квадрата и подумайте, как квадрат с такой стороной может располагаться на клетчатой бумаге.

3. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

4. Пусть курс акций повышался k раз и понижался l раз. Во сколько раз он изменился?

5. а, б) Рассмотрите правильный семиугольник.

6. Поворачивайте вертикальные доминошки, пока это возможно. Где после этого окажется пустая клетка? Затем уложите доминошки «змейкой».

9 класс

1. См. указание к задаче 4 для 8 класса.

3. Угол между любой из сторон бильярда и отрезками пути шара постоянен.

4. Любой отрезок внутри треугольника не превосходит наибольшей стороны.

5. Рассмотрите наименьшее неразрешенное число.

6. а) Двумя рубашками можно закодировать масть карты. Экстрасенс всегда может угадать масти последних двух карт.

б) Среди карт, лежащих на нечетных местах, имеется не менее пяти карт одной масти. Используйте этот факт, чтобы придумать стратегию для угадывания 22 карт.

10 класс

1. Используйте формулу для суммы членов арифметической прогрессии.

3. Ищите черное число в виде суммы двух «сопряженных» белых чисел.

4. См. указание к задаче 5 для 9 класса.

5. Пусть A' лежит на луче CB. Докажите, что центры окружностей, упоминающихся в условии задачи, и точки A и A' являются вершинами равнобочной трапеции.

11 класс

1. К какому простейшему виду можно привести квадратный трехчлен преобразованием $f(x) \mapsto Af(ax+b)$?

2. а) Нетрудно выбрать точки A, B, C, D на указанных прямых, чтобы отрезки AB и CD были параллельны. Сложнее исключить случай параллелограмма. Основная сложность — исключить случай четырех точек, лежащих на одной прямой. Для этого переведите первые три прямые аффинным преобразованием в прямые, лежащие на гиперболоиде $x^2+y^2-z^2=1$ или на параболоиде $xy=z$.

5. Пусть F — функция с периодом 2π. Число ее нулей на полуинтервале $[0;\,2\pi)$ не превосходит числа нулей ее производной на том же полуинтервале.

6. а) Какое расстояние пройдет первый стражник за время, за которое второй стражник пройдет вдоль бойницы?

б) Пусть второй стражник обходит вокруг стены за час. Рассмотрите суммарное время, проведенное стражниками около бойниц в течении часа.

в) Было бы достаточно разбить отрезок $[0;\,1]$ на такие множества A и B, состоящие из отрезков, что если $t\in A$, то $\{2t\}\in B$, а если $t\in B$, то $\{2t\}\in A$. К сожалению, это невозможно, поэтому постройте множества A и B, для которых эти условия выполнены «с точностью до $s-1/2$».

2005 год

8 класс

1. Разложите левую часть уравнения на множители.

3. Используйте факт 14.

4. Если все числа четны, поделите их на 2.

5. Разбейте вначале круг на шесть равных частей дугами окружностей того же радиуса, проходящими через центр исходного круга.

6. Попробуйте решить задачу, если точек всего 8, и можно использовать только цифры 0, 1 и 2.

9 класс

1. $x_1 - x_2 = \sqrt{D}$.

2. Если к любому набору чисел, обладающему нужным нам свойством, добавить их сумму, то мы опять получим набор, обладающий нужным нам свойством.

4. Рассмотрите очень длинный и тонкий треугольник.

5. Рассмотрите минимальное число, при повороте на которое все цифры переходят в равные им.

6. Рассмотрите окружность девяти точек треугольника APB.

10 класс

1. Из равенства тангенсов не следует равенство углов.

2. Перенесите начало координат в одну из точек, упоминающихся в условии задачи.

3. Используйте факт 18.

5. $m^4 - 1$ делится на 5 для любого m, не делящегося на 5.

6. а) См. указание к задаче 6 для 8 класса.

11 класс

1. *Вариант А.* Докажите, что прямая $y = bx - a$ касается графика функции $y = \sin x$.

2. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — наша прогрессия. Тогда функция

$$S(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \ldots + |a_n - x|$$

принимает в трех точках одинаковые значения.

4. а) Рассмотрите вписанный четырехугольник; б) Рассмотрите точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям.

6. Угадайте за $2n + 1$ попытку одну точку.

РЕШЕНИЯ

1993 год

8 класс

1. а) Согласно признаку делимости на 3 (см. факт 6), числа x и $S(x)$ дают одинаковые остатки от деления на 3. Такой же остаток будет и у числа $S(S(x))$. Значит, сумма

$$x+S(x)+S(S(x))$$

делится на 3 (так как это сумма трех чисел с одинаковыми остатками от деления на 3). Однако, 1993 на 3 не делится, поэтому решений нет.

б) Ясно, что $x<1993$. Нетрудно видеть, что среди чисел, меньших 1993, наибольшую сумму цифр 27 имеют числа 1989 и 999. Значит, $S(x)\leqslant 27$. Далее, $S(S(x))\leqslant \leqslant S(19)=10$. Наконец, $S(S(S(x)))\leqslant 9$. Из уравнения следует, что

$$x=1993-S(x)-S(S(x))-S(S(S(x)))\geqslant \geqslant 1993-27-10-9=1947.$$

Аналогично пункту «а», все числа x, $S(x)$, $S(S(x))$, $S(S(S(x)))$ дают одинаковые остатки при делении на 9, а 1993 дает остаток 4, поэтому число x должно давать остаток 1 (см. комментарий). Среди чисел от 1947 до 1993 остаток 1 при делении на 9 дают 1954, 1963, 1972, 1981, 1990. Проверив эти числа, убеждаемся, что подходит только 1963.

Комментарий. Мы использовали такое утверждение: если сумма четырех чисел с одинаковым остатком от деления на 9 дает при делении на 9 остаток 4, то каждое из этих чисел дает остаток 1. Это можно строго доказать либо перебором, либо так: обозначим искомый остаток через x. Тогда $4x$ дает остаток 4 при делении на 9. То есть $4(x-1)=4x-4$ делится на 9, и, значит, $x-1$ делится на 9. То есть $x=1$, см. факт 7.

2. Пусть

$$n=a^2+b^2+c^2.$$

Тогда

$$n^2=(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2.$$

Преобразуем это выражение:

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=$$
$$=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)+4b^2c^2+4a^2c^2=$$
$$=(a^2+b^2-c^2)^2+(2bc)^2+(2ac)^2.$$

Можно считать, что $a\geqslant b\geqslant c$, тогда $a^2+b^2-c^2>0$. Следовательно, мы представили число n^2 в виде суммы квадратов трех натуральных чисел.

Комментарии. 1°. Попробуйте доказать аналогичное утверждение для суммы четырех и более квадратов.

2°. Для суммы двух квадратов утверждение не всегда верно: $(1^2+1^2)^2=4$ не представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, хотя есть аналогичное тождество: $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$.

3°. Любое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Это знаменитая теорема Лагранжа. (Заметим, что квадраты целых чисел — это квадраты натуральных чисел и еще число $0=0^2$.)

4°. Есть числа, которые не представимы суммой квадратов трех целых чисел, например, число 7. Оказывается, число не представимо суммой трех квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет вид $(8k+7)\cdot 4^m$.

5°. По поводу сумм двух квадратов см. комментарий к задаче 4 для 11 класса олимпиады 1996 г.

6°. Фактически, представимость результата в заданном виде мы доказываем не для чисел, а для многочленов от нескольких переменных, выписывая тождество. Можно задать такой вопрос: *при каких k произведение*

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)$$

можно представить в виде

$$P_1^2+\ldots+P_k^2,$$

где $P_1,\ \ldots,\ P_k$ — многочлены от переменных $a_1,\ \ldots,\ a_k,\ b_1,\ \ldots,\ b_k$? Приведем соответствующие формулы при $k=1,\ 2,\ 4$.

$n=1$: $a^2\cdot b^2=(ab)^2$;

$n=2$ (тождество Диофанта):

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2;$$

$n=4$ (тождество Эйлера):

$$(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2)(a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+(a_1b_2+c_1d_2+a_2b_1-c_2d_1)^2+$$
$$+(a_1c_2+a_2c_1+b_2d_1-b_1d_2)^2+(a_1d_2+a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)^2.$$

Существует аналогичное тождество для $n=8$. Для n, отличного от 1, 2, 4 и 8, таких тождеств не существует (хотя доказать это очень не просто)! Чтобы окончательно заинтриговать читателя, скажем, что первое тождество связано с действительными числами, второе — с комплексными, третье — с кватернионами, а невыписанное тождество ($n = 8$) с октавами Кэли.

Прочитать об этом можно в книге [31].

3. Первый способ. Будем называть две фишки, из которых левая — красная, а правая — синяя, *инверсией*. Рассмотрим число всех инверсий (например, на рис. 20 число инверсий равно 3). Оказывается, четность этого показателя не может измениться (см. факт 23).

Рис. 20

Действительно, пусть, например, мы вставили две красные фишки так, что справа от них будет k синих фишек. Тогда число инверсий увеличится на $2k$, и его четность не изменится. Аналогично разбираются три других случая (добавление двух синих фишек, удаление двух красных и удаление двух синих). Итак, четность числа инверсий является *инвариантом* (см. факт 2).

Теперь заметим, что в исходной ситуации число инверсий равно 1, т. е. нечетно, а в желаемой — равно нулю, т. е. четно. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

Комментарий. Иначе этот инвариант можно описать, как четность числа красных фишек, справа от которых стоит нечетное число синих.

Второй способ (выходящий за рамки программы 8-го класса). Рассмотрим прямую (эта прямая не имеет отношения к прямой, на которой стоят фишки) и две различных точки A и B на этой прямой. Поставим в соответствие каждому расположению фишек некоторое преобразование этой прямой. Это преобразование не будет изменяться при разрешенных операциях, т. е. будет инвариантом.

Преобразование строится так: мы двигаемся по прямой, на которой стоят фишки, слева направо. Когда встречается красная фишка, мы производим симметрию относительно точки A, а когда встречается синяя фишка — симметрию относительно точки B. Итак, последовательности фишек соответствует композиция симметрий.

Нетрудно видеть, что каждая операция над фишками не меняет композицию симметрий. Например, добавление двух красных фишек соответствует двум одинаковым симметриям, но композиция двух одинаковых симметрий — тождественное преобразование. Остальные случаи (добавление двух синих фишек, удаление двух красных и удаление двух синих фишек) аналогичны.

Итак, эта композиция является инвариантом, в то время как начальному и конечному расположению фишек соответствуют разные композиции — параллельные переносы на векторы 2 и -2 соответственно. Последнее утверждение можно проверить, введя координаты на прямой.

Комментарии. 1°. Эта задача родилась из известной теоремы: два непрерывных пути внутри квадрата, соединяющие противоположные вершины, пересекаются. Дадим набросок доказательства.

Допустим, что пути не пересекаются. Тогда их можно заменить ломаными, которые тоже не пересекаются и звенья которых не параллельны сторонам квадрата. Покрасим одну ломаную в красный цвет, а другую — в синий. Будем параллельно передвигать прямую от одной стороны квадрата к другой. Прямая будет пересекать ломаную по набору красных и синих точек, с которым будет происходить то же самое, что с фишками в задаче (вставкам и удалениям фишек соответствует прохождение прямой через некоторые внутренние точки звеньев ломаной, рис. 21).

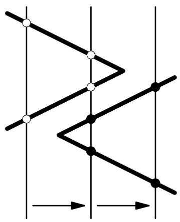


Рис. 21

2°. Доказанное утверждение тесно связано с теоремой Жордана, которая утверждает, что всякая замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость на две части. Это интуитивно ясное утверждение отнюдь не просто доказать — дело в том, что кривая может не иметь ни одного гладкого участка, так что непонятно даже, как выбрать две точки по разные стороны от кривой.

Неэлементарный комментарий. Рассмотрим группу, порожденную двумя образующими a и b и соотношениями $a^2 = b^2 = 1$. Поставим в соответствие красной фишке элемент a, синей — элемент b, а последовательности фишек — элемент этой группы, который получается произведением слева направо соответствующих всем фишкам образующих a и b. Ясно, что элемент группы не меняется при разрешенных операциях (в силу соотношений). Более того, из одной последовательности фишек можно получить другую тогда и только тогда, когда соответствующие элементы группы совпадают.

Можно проверить, что эта группа изоморфна полупрямому произведению групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Она некоммутативна, а расположения фишек из условия задачи соответствуют элементам ab и ba.

4. Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот.

Рассмотрим положение стрелок в два момента времени: через некоторый промежуток времени t после полуночи сегодня, и за время t до полуночи вчера. Нетрудно понять, что соответствующие положения стрелок зеркально симметричны относительно вертикального диаметра часов.

Нетрудно убедиться, что из этих двух моментов времени одно хорошее, а другое — плохое. Например, на рис. 22 время 1 ч 15 мин 22 с (слева) — хорошее, а время 10 ч 44 мин 38 с (справа) — плохое.

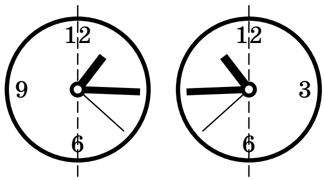


Рис. 22

Итак, каждому хорошему моменту сегодня соответствует плохой момент вчера. Сутки разбиваются на интервалы хорошего и плохого времени, причем интервалу хорошего времени сегодня соответствует интервал плохого времени вчера (той же длины). Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 5 для 8 класса олимпиады 1994 г.

2°. Казалось бы, зачем рассматривать вчерашнее время, если каждому положению стрелок можно поставить в соответствие зеркальное положение? Ведь моментам хорошего времени будут соответствовать моменты плохого и наоборот? Но в таком рассуждении есть пробел, поскольку не очевидно, что после зеркального отражения стрелок получится нечто осмысленное, ибо не всякому положению стрелок соответствует время суток. (Приведите пример положения стрелок, которого не бывает на правильно идущих часах.)

3°. Установить соответствие между моментами плохого и хорошего времени в сутках недостаточно для доказательства равенства количеств плохого и хорошего времени. Но от школьников не требовалось устанавливать соответствие между интервалами плохого и хорошего времени, поскольку в данной задаче это интуитивно очевидно (см. комментарий к задаче 5 для 8 класса олимпиады 1994 г.).

5. Рассмотрим последовательность слов:

А, АБА, АБАВАБА, АБАВАБАГАБАВАБА, ...

Следующее слово получается из предыдущего так: пишется предыдущее слово, затем первая из букв, которых в нем нет, а затем это же слово еще раз.

Докажем методом полной индукции (см. факт 24) следующее утверждение: *в n-м слове нет соседних одинаковых подслов, но если к нему приписать любую из первых n букв алфавита, то такие подслова появятся.* Тогда 33-е слово является требуемым (в русском алфавите 33 буквы).

База индукции. Для $n=1$ утверждение очевидно.

Шаг индукции. Пусть утверждение справедливо для всех слов с номерами от 1 до $n-1$. Рассмотрим n-е слово. В нем n-я буква алфавита стоит в центре и разбивает слово на два одинаковых подслова, совпадающих с $(n-1)$-м словом.

Если бы нашлись два соседних одинаковых подслова, то, по предположению индукции, они не могли бы располагаться оба в $(n-1)$-м слове. Значит, одно из них содержит n-ю букву алфавита. Но эта буква только одна, и в соседнем подслове ее нет. Противоречие. Следовательно, в n-м слове тоже нет соседних одинаковых подслов.

Если приписать к n-му слову n-ю букву алфавита, то слово разобьется на два одинаковых подслова. Если приписать букву с номером $k<n$, то k-е слово, которое является началом и концом n-го слова, даст два соседних одинаковых подслова (по предположению индукции).

Комментарии. 1°. Длина искомого 33-го слова равна $2^{33}-1$, что составляет примерно 10 миллиардов букв!

2°. Построенные слова играют важную роль в комбинаторике и теории полугрупп. Определим последовательность слов Z_n равенствами: $Z_1=x_1$; $Z_{n+1}=Z_n x_{n+1} Z_n$, где x_i — переменные (вместо которых можно подставлять слова). Попытайтесь доказать, что при любом n в любой бесконечной последовательности букв конечного алфавита встретится слово вида Z_n, где вместо $x_1, \ldots, x_n$ подставлены некоторые слова. Например, встретится слово вида $x_1x_2x_1$, где x_1, x_2 — слова.

6. Пусть α, β, γ — углы при вершинах $\triangle ABC$ (рис. 23), тогда

$$\angle BAO=\frac{\alpha}{2}, \quad \angle CBO=90^\circ-\frac{\beta}{2}$$

(поскольку точка O лежит на биссектрисе угла A и на биссектрисе внешнего угла при вершине B, см. факт 16),

$$\angle ABO = \beta + \angle CBO = 90^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Из $\triangle AOB$: $\angle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ (поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$). С другой стороны: $\angle AOB = \frac{\angle ADB}{2}$ как вписанный в окружность с центром D. Значит, $\angle ADB = \gamma$.

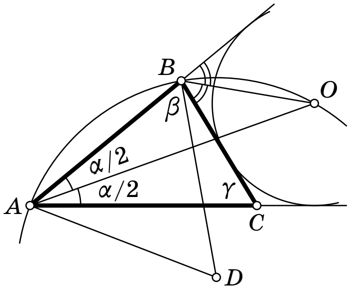


Рис. 23

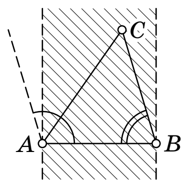
Итак, $\angle ADB = \angle ACB$, так что A, B, C и D лежат на одной окружности по обратной теореме о вписанных углах.

Комментарии. 1°. Точки O, C, D лежат на одной прямой, поскольку $\angle AOC = \frac{\beta}{2}$ и $\angle AOD = \frac{\beta}{2}$ (докажите).

2°. Утверждение верно и для вписанной окружности (докажите).

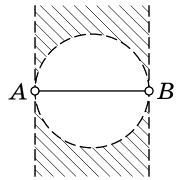
9 класс

1. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную отрезку AB. Ясно, что $\angle BAC < 90^\circ$ тогда и только тогда, когда точки B и C лежат по одну сторону от этой прямой. Теперь понятно, что множество таких точек, что $\angle A < 90^\circ$ и $\angle B < 90^\circ$, есть полоса, границы которой проходят через точки A и B и перпендикулярны отрезку AB (рис. 24, *а*).



а)

Построим окружность на отрезке AB как на диаметре. Если точка C лежит на этой окружности, то $\angle ACB = 90^\circ$ (см. факт 14), если внутри, то этот угол тупой, если снаружи — острый. Значит, геометрическое место таких точек C, что треугольник ABC остроугольный, совпадает с множеством, заштрихованным на рис. 24, *б*.



б)

Рис. 24

Условие, что угол A средний по величине, можно записать как $\angle B \leqslant \angle A \leqslant \angle C$ или $\angle C \leqslant \angle A \leqslant \angle B$.

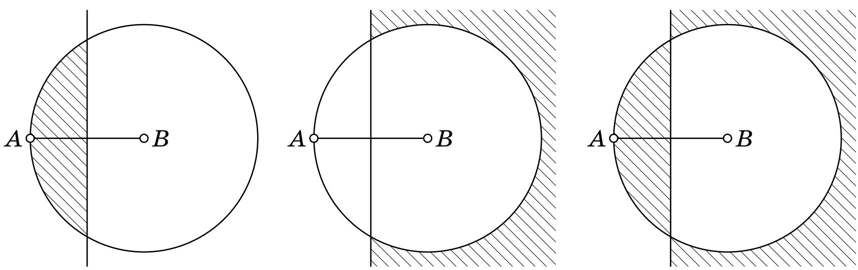
Так как против большего угла лежит большая сторона, условие $\angle B \leqslant \angle A \leqslant \angle C$ эквивалентно условию

$$AC \leqslant BC \leqslant AB. \qquad (1)$$

Рассмотрим серединный перпендикуляр к отрезку AB. Точки этого перпендикуляра равноудалены от точек A и B. Точки, лежащие по ту же сторону от перпендикуляра, что и точка A, ближе к точке A, чем к точке B. Значит, геометрическое место таких точек C, что $AC \leqslant BC$, есть полуплоскость, отсекаемая серединным перпендикуляром, и содержащая точку A.

Рассмотрим круг, с центром в точке B и радиусом AB. Условие $BC \leqslant AB$ равносильно тому, что точка C лежит внутри этого круга. Итак, геометрическое место точек, удовлетворяющих условию (1), есть множество, изображенное на рис. 25, *а*.

Аналогично, условие $\angle C \leqslant \angle A \leqslant \angle B$ эквивалентно условию $AB \leqslant BC \leqslant AC$, и соответствующее геометрическое место точек изображено на рис. 25, *б*. Объединяя множества, изображенные на рис. 25, *а* и *б*, получим геометрическое место таких точек C, что в треугольнике ABC угол A — средний по величине (рис. 25, *в*). Осталось нарисовать пересечение ГМТ на рис. 25, *в* с ГМТ на рис. 24, *б*.



а) *б*) *в*)

Рис. 25

2. Выпишем несколько первых членов последовательности: x_3 — наименьшее составное число, большее, чем $2x_2 - x_1 = 8$, т. е. $x_3 = 9$; x_4 — наименьшее составное число, большее, чем $2x_3 - x_2 = 12$, т. е. $x_4 = 14$ (потому что 13 — не составное число). Продолжая в том же духе, получим $x_5 = 20$, $x_6 = 27$, ... Посмотрим, на сколько следующий член последовательности отличается от предыдущего:

$$x_3 = 9,\quad x_4 = 14 = x_3 + 5,\quad x_5 = 20 = x_4 + 6,\quad x_6 = 27 = x_5 + 7,\quad \ldots$$

Возникает гипотеза, что при $n \geqslant 4$

$$x_n = x_{n-1} + n + 1.$$

Если эта гипотеза верна, то

$$\begin{aligned}
&x_5 = x_4 + 6 = x_3 + 5 + 6,\\
&x_6 = x_3 + 5 + 6 + 7,\\
&x_7 = x_3 + 5 + 6 + 7 + 8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = x_3 + 5 + \ldots + n + (n+1) =\\
&\quad = 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство — это формула для суммы арифметической прогрессии. Докажем формулу

$$x_n = \frac{n(n+3)}{2} \tag{1}$$

методом полной индукции (см. факт 24).

База индукции. При $n = 4$ формула верна.

Шаг индукции. Пусть она верна для $x_4, \ldots, x_n$.

Докажем, что тогда $x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Действительно:

$$2x_n - x_{n-1} = 2 \cdot \frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1.$$

По условию, x_{n+1} — первое составное число, большее, чем $\frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$. Но число $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ составное. Действительно, если n нечетно, то

$$\frac{(n+1)(n+4)}{2} = (n+4) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Каждый из сомножителей в скобках — целое число, большее 2. Аналогично рассматривается случай четного n.

Итак,

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2},$$

и формула (1) доказана по индукции. Подставляя в (1) $n=1000$, получаем $x_{1000}=\frac{1000\cdot 1003}{2}$.

3. От противного. Предположим, что на каком-то шаге мы получили треугольник, подобный исходному. Заметим, что все его углы кратны 20°.

Лемма. *У всех предыдущих треугольников углы кратны* 20°.

Доказательство. Пусть треугольник с углами α, β и γ получился из треугольника с углами α_1, β_1 и γ_1 разрезанием по биссектрисе угла α_1. Тогда мы можем считать, что $\alpha_1=2\alpha$. Один из углов разрезанного треугольника совпадает с углом полученного треугольника (рис. 26), так что можно считать, что $\beta=\beta_1$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, получаем

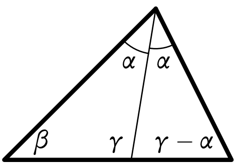


Рис. 26

$$\gamma_1=180^\circ-\alpha_1-\beta_1=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)-2\alpha-\beta=\gamma-\alpha.$$

Понятно, что если α, β и γ кратны 20°, то α_1, β_1 и γ_1 — тоже кратны 20° (см. факт 5). Но тогда и на предыдущем шаге был треугольник с углами, кратными 20°. Значит, и за 2 шага до этого был треугольник с углами, кратными 20° и т. д. Лемма доказана.

Теперь нетрудно получить противоречие: уже после первого разрезания получится треугольник с углом, некратным 20°. Значит, треугольник, подобный исходному, получить нельзя.

Комментарии. 1°. Можно так выбрать исходный треугольник и так его резать, что первый подобный ему треугольник получится после заданного числа разрезаний.

2°. Сравните с задачей 4 для 9 класса олимпиады 2001 г.

4. У одноклассников Пети может быть 0, 1, 2, ..., 28 друзей — всего 29 вариантов. Но, если кто-то дружит со всеми, то у всех не меньше одного друга. Поэтому либо есть такой, кто дружит со всеми, либо есть такой, кто не дружит ни с кем. В обоих случаях остается 28 вариантов: 1, 2, ..., 28 или 0, 1, ..., 27.

Обозначим того, у кого больше всего друзей через A, а того, у кого их меньше всего — через B. В первом случае A дружит со всеми, а B — только с одним человеком, т. е. только с A. Во втором случае B не дружит ни с кем, а A дружит со всеми, кроме одного, т. е. со всеми, кроме B.

Итак, в каждом из случаев A дружит с Петей, а B — нет. Переведем A и B в другой класс. Как мы уже видели, A дружит со всеми из оставшихся, а B — ни с кем из оставшихся. Поэтому после перевода у каждого стало на одного друга меньше (среди одноклассников). Значит, у оставшихся Петиных одноклассников снова будет разное число друзей среди одноклассников.

Теперь снова переведем самого «дружелюбного» и самого «нелюдимого» в другой класс и т. д.

Повторяя эти рассуждения 14 раз, мы переведем в другой класс 14 пар школьников, в каждой из которых ровно один Петин друг. Итак, друзей у Пети 14.

Комментарии. 1°. В решении «работают» несколько идей: симметрия дружбы, принцип крайнего, индуктивный спуск.

2°. Есть очень короткое, но неправильное решение: пусть у Пети x друзей. Поссорим всех друзей, а тех, кто не был друзьями подружим, тогда у Петиных одноклассников снова будет разное число друзей, и значит, у Пети снова x друзей. Получаем уравнение $x=28-x$. Где ошибка? Если бы было доказано, что ответ в задаче единственен, то рассуждение было бы верным. Тем не менее, это рассуждение позволяет угадать ответ.

3°. Решите задачу, если у Пети 27 одноклассников.

4°. Эта задача является продолжением другой известной задачи: докажите, что в любой компании найдутся двое, у которых одинаковое число друзей в этой компании (возможно, ни одного).

5. Возьмем $y=z$ во втором тождестве. Тогда получим

$$(x*y)+y=x*(y*y)=x*0.$$

Итак, $x*y=x*0-y$. Осталось вычислить $x*0$. Для этого возьмем во втором тождестве $x=y=z$:

$$x*0=x*(x*x)=x*x+x=0+x=x.$$

Итак, $x*y=x*0-y=x-y$. Поэтому $1993*1935=1993-1935=58$.

Комментарий. Проверьте, что если взять $x*y=x-y$, то оба тождества действительно выполняются.

6. П е р в ы й с п о с о б. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно прямой AM (рис. 27). Тогда $AB = AB'$, $\angle BAB' = 60^\circ$, и треугольник ABB' — равносторонний. Значит, точки A, C и B' лежат на окружности с центром B. Угол $\angle ACB'$ — вписанный и равен половине угла $\angle ABB'$, т. е. $\angle ACB' = 30^\circ$. Поскольку $\angle ACM = 150^\circ$, то точка B' лежит на прямой MC. По построению AM — биссектриса угла $\angle BMB'$, а значит, и угла $\angle BMC$.

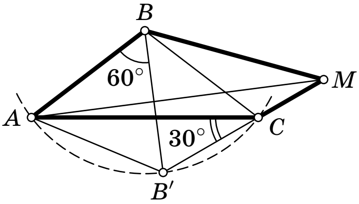


Рис. 27

В т о р о й с п о с о б. Проведем окружность с центром O через точки A, C и M (рис. 28). Так как $\angle ACM = 150^\circ$, дуга AM равна 60°, поэтому треугольник MAO — равносторонний. Точка B лежит на его оси симметрии, так как $\angle BAM = 30^\circ$. Значит,

$$\angle AMB = \angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AMC.$$

Второе равенство следует из того, что треугольники ABO и CBO равны.

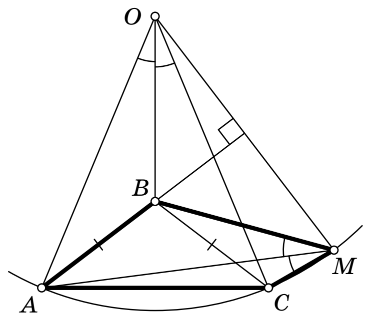


Рис. 28

10 к л а с с

1. Как известно, длина минимального периода дроби является делителем длины любого другого ее периода, см. факт 4 (длину минимального периода к о н е ч н о й десятичной дроби мы будем считать равной единице).

Докажем следующее утверждение: *если k — длина одного из периодов* (*не обязательно минимального*) *каждой из дробей A и B, то k будет длиной некоторого периода дробей $A+B$ и $A-B$.*

Докажем утверждение для $A+B$ (доказательство для $A-B$ аналогично). Периодическую дробь A с длиной пе-

риода k можно представить в виде
$$A=\frac{X}{10^l(10^k-1)},$$
где X — целое число (см. факт 13). Аналогично можно записать $B=\frac{Y}{10^m(10^k-1)}$. Без ограничения общности можно считать, что $l\geqslant m$. Тогда
$$A+B=\frac{X+10^{l-m}Y}{10^l(10^k-1)}.$$
Это число такого же вида, так что соответствующая дробь имеет период длины k. Утверждение доказано.

Пусть дробь A имеет период длины 6, а дробь B — период длины 12. Из доказанного утверждения следует, что 12 — длина некоторого периода дроби $A+B$. Значит, длина минимального периода дроби $A+B$ является делителем числа 12.

С другой стороны, длина периода дроби $A+B$ не может равняться 6 — иначе дробь $B=(A+B)-A$ имела бы период длины 6. Значит, длина *минимального* периода дроби $A+B$ не может равняться 6, 3, 2 и 1.

Остаются два варианта: 12 и 4. Покажем, что оба эти варианта возможны:
$$A=0{,}(000001),\quad B=0{,}(000000000001),$$
$$A+B=0{,}(000001000002);$$
$$A=0{,}(000001),\quad B=0{,}(011100110110),\quad A+B=0{,}(0111).$$

Комментарии. 1°. Покажем как придумать пример дробей с длинами минимальных периодов 6 и 12, сумма которых имеет минимальный период длины 4. Надо из любой дроби с минимальным периодом длины 4 вычесть дробь с минимальным периодом длины 6, получим дробь с минимальны периодом длины 12.

2°. Опишем все возможные длины минимальных периодов дроби $A+B$ в общем случае. Пусть m, n и k — длины минимальных периодов дробей A, B и $A+B$. Тогда k является делителем наименьшего общего кратного чисел m и n. Аналогично, m — делитель НОК(n, k), и n — делитель НОК(m, k). Пусть p_1, ..., p_s — все простые делители НОК(m, n), причем
$$m=p_1{}^{\alpha_1}\ldots p_s{}^{\alpha_s},\quad n=p_1{}^{\beta_1}\ldots p_s{}^{\beta_s},$$
где α_i, β_j могут равняться нулю (см. факт 10). Тогда из предыдущего следует, что $k=p_1{}^{\gamma_1}\ldots p_s{}^{\gamma_s}$, где $\gamma_i=\max(\alpha_i, \beta_i)$, при $\alpha_i\neq\beta_i$, и γ_i — любое число от 0 до α_i, при $\alpha_i=\beta_i$. Можно показать и обратное: любое такое k является длиной минимального периода некоторой дроби

$A+B$, где длина минимального периода дроби A равна m, а длина минимального периода дроби B равна n.

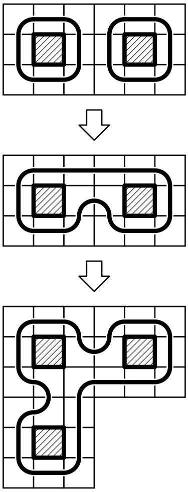


Рис. 29

2. Сначала обойдем один холл, например, по часовой стрелке (рис. 29, сверху). Рассмотрим соседний с ним холл и обойдем его аналогично. Для того чтобы обойти оба холла, достаточно поменять направление движения в двух парах клеток вдоль границы холлов (рис. 29, в центре). Рассмотрим следующий холл, который граничит с уже обойденными. Поменяв направление движения аналогично предыдущему, получим способ обхода трех холлов (рис. 29, внизу). Добавляя новые холлы по одному и меняя направление движения указанным образом, мы сумеем обойти весь замок.

Комментарий. Из решения следует, что обойти можно любой замок, состоящий из холлов, в котором холлы образуют связное множество (т. е. из любого холла можно пройти в любой другой, пересекая общие границы холлов).

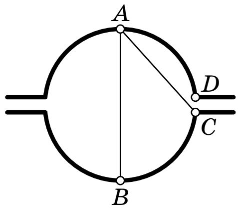


Рис. 30

3. а) Пример приведен на рис. 30. Здесь $AC = 1000$ м, $AB > 1400$ м, $CD = 1$ м. Маршрут корабля должен пересекать отрезок AB, но расстояние от любой точки AB до одного из берегов больше 700 м.

б) Эта задача оказалась неожиданно сложной. Сформулируем сначала две леммы:

Лемма 1. *В условиях задачи, не существует круга радиуса 750 м с центром в реке и лежащего целиком на воде.*

Лемма 2. *Пусть расстояние от точки O на реке до одного из берегов* (*по воде*) *не меньше 750 м, тогда расстояние до другого берега не превосходит 750 м.*

Мы докажем лемму 1 и выведем из нее лемму 2. Доказательства непросты, но основная сложность состоит не в них, а в том, чтобы построить искомый путь корабля. Для этого приходится рассматривать множество точек на воде, расстояние от которых до левого берега не превосходит 750 м, и плыть по границе этого множества (тогда из леммы 2 следует, что расстояние до каждого берега не превосходит 750 м). Проблема состоит в том, что граница множества может быть устроена очень плохо. Приведенное решение следует рассматривать как пример небольшого научного исследования. Мы вынесли его в дополнение Б.

4. Будем изображать числа точками на окружности единичной длины (числам с одинаковой дробной частью соответствует одна и та же точка окружности, см. комментарий к решению задачи 6 для 10 класса олимпиады 1997 г.). Тогда последовательности $x_n = \{an+b\}$ соответствует последовательность точек на окружности, получаемых из $\{b\}$ n-кратным поворотом на дугу $\{a\}$. При этом $p_n = [2x_n]$.

Нетрудно видеть, что если $x_n \in [0;\ 1/2)$, т. е. точка x_n лежит на верхней полуокружности, то $p_n = 0$; если x_n лежит на нижней полуокружности, то $p_n = 1$.

а) Построим последовательности p_n, в которых встречаются все слова длины 4, начинающиеся с нуля. Таких слов восемь. Остальные восемь слов можно получить заменой $(a,\ b)$ на $(a,\ b+1/2)$. Действительно, при такой замене точки x_n заменятся на диаметрально противоположные, так что p_n заменится на $1-p_n$.

П р и м е р ы: Рассмотрим a и b, при которых последовательность x_n образует правильные фигуры (см. таблицу).

Правильные фигуры	a	b	Нужные слова из $p_n = [2x_n]$
восьмиугольник	1/8	0	0000, 0001, 0011, 0111
квадрат	1/4	0	0110
«двуугольник»	1/2	0	0101
треугольник	1/3	0	0010

б) Докажем, что слово 00010 не реализуется ни при каких a и b. Пусть это слово реализуется. Рассмотрим три подряд идущих члена последовательности x_n, x_{n+1} и x_{n+2}.

Если точки x_n и x_{n+2} диаметрально противоположные, то следующая точка получается из предыдущей поворотом на 90°, и очевидно, что в последовательности p_n не могут встретиться три нуля подряд.

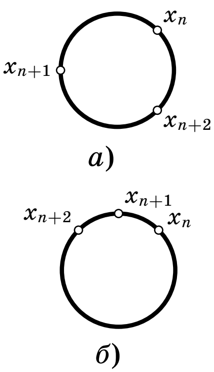


Рис. 31

Если точки x_n и x_{n+2} не диаметрально противоположные, то они делят окружность на две различные дуги. Возможны две ситуации: x_{n+1} лежит на большей дуге (как на рис. 31, *а*), и x_{n+1} лежит на меньшей дуге (как на рис. 31, *б*).

Пусть x_{n+1} лежит на большей дуге, тогда любые другие точки x_m, x_{m+1} и x_{m+2} расположены так же, так как они получаются из точек x_n, x_{n+1} и x_{n+2} поворотом на один и тот же угол. Но тогда три такие точки не могут оказаться на верхней полуокружности, а значит, в последовательности p_n слово 000 не встретится — противоречие.

Пусть x_{n+1} лежит на меньшей дуге $\overset{\frown}{x_n x_{n+2}}$. Тогда любые точки x_m, x_{m+1} и x_{m+2} расположены так же, поэтому если x_m и x_{m+2} лежат на верхней полуокружности, то и точка x_{m+1} лежит там же, а значит, в последовательности p_n не встретится слово 010.

Итак, мы разобрали все варианты, и доказали, что слово 00010 не может встретиться.

К о м м е н т а р и й. Если разбить p_n на куски, состоящие только из нулей или только из единиц (причем за куском из нулей идет кусок из единиц, а за куском из единиц — кусок из нулей), то длины любых двух таких кусков будут отличаться не больше, чем на 1. Эта задача относится к символической динамике, о чем рассказано в статье [82].

5. Пусть m — количество растений в хорошем определителе. Оценим суммарное количество различий между всеми парами растений по всем признакам. Количество пар растений равно $\frac{m(m-1)}{2}$, и каждая пара различается не меньше, чем по 51 признаку, поэтому общее число различий $S \geqslant 51\frac{m(m-1)}{2}$.

Оценим S другим способом. Пусть m_i — количество растений, обладающих признаком i, тогда число пар растений, которые i-й признак различает, равно $m_i(m-m_i)$, и общее число различий между растениями равно:

$$S = m_1(m-m_1) + m_2(m-m_2) + \ldots + m_{100}(m-m_{100}).$$

В силу известного неравенства (см. факт 26), $m_i(m-m_i) \leqslant \leqslant \frac{m^2}{4}$. Поэтому

$$S \leqslant 100\frac{m^2}{4} = 25m^2.$$

Значит, $51\frac{m(m-1)}{2} \leqslant S \leqslant 25m^2$, откуда $m \leqslant 51$.

Осталось доказать, что $m \neq 51$. Допустим, что $m = 51$, тогда получаем строгое неравенство $m_i(m-m_i) < \frac{m^2}{4}$ (так как слева стоит целое число, а справа — дробное), и $51\frac{m(m-1)}{2} \leqslant S < 25m^2$, откуда $m < 51$. Противоречие. Значит, $m \leqslant 50$.

К о м м е н т а р и и. 1°. Напрашивается предположение, что в хорошем определителе может быть описано 50 растений. Однако это не так. Давайте добавим к описанию растений еще один признак — четность числа имеющихся у данного растения признаков. Получим определитель, в котором для описания используется уже 101 признак, причем любые описания различаются по крайней мере по 52 признакам (если исходные описания различались только по 51 признаку, то четности числа имеющихся у этих растений признаков различны).

Действуя тем же методом, что и в решении исходной задачи, получаем: $52\frac{m(m-1)}{2} \leqslant S \leqslant 101\frac{m^2}{4}$, откуда $m \leqslant 34$. Итак, в новом определителе, а значит, и в исходном, описано не больше 34 растений.

2°. Эта задача связана с кодами, исправляющими ошибки. Вместо растений рассматриваются сообщения, а вместо описаний — последовательности из нулей и единиц заданной длины n; минимальное число различий двух последовательностей называется кодовым расстоянием d (в нашей задаче $d = 51$), а сам определитель называется кодом. Заметим, что если исказить любое сообщение произвольным образом, но не больше, чем в $\frac{d-1}{2}$ позициях, то его можно отличить от любого другого сообщения в коде. Именно это свойство и понимается под исправлением ошибок.

Общая задача определения максимального размера (т. е. числа различных сообщений) кода длины n с кодовым расстоянием d до сих пор не решена.

Однако в теории кодов известна теорема Плоткина—Левенштейна. Она устанавливает границу для размера кода с большим кодовым расстоянием d $(2d > n)$ и утверждает, что при некотором естественном предположении есть коды соответствующего размера. В условии нашей задачи $n = 100$, $d = 51$, и решение демонстрирует оценку Плоткина для этих параметров: размер кода не превышает 34. Оказывается, что эта оценка достижима: можно придумать код из 34 сообщений.

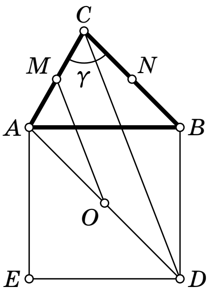


Рис. 32

6. Пусть D и E — остальные вершины квадрата $ABDE$ и $\gamma = \angle ACB$ (рис. 32).

Тогда (по теореме о средней линии треугольника) из $\triangle ACD$ получаем: $CD = 2OM$. Аналогично, $CE = 2ON$. Поэтому достаточно найти максимум $CD + CE = 2(OM + ON)$.

Первый способ. На стороне BC треугольника ABC построим внешним образом квадрат CBD_1E_1 (рис. 33). Треугольники ABD_1 и DBC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит $CD = AD_1$.

В треугольнике ACD_1 две стороны известны: $AC = b$, $CD_1 = a\sqrt{2}$. Кроме того, $\angle ACD_1 = \gamma + 45°$. Третья сторона AD_1 принимает максимальное значение, когда треугольник вырождается в отрезок. Поэтому

$$\max(CD) = \max(AD_1) = b + a\sqrt{2}$$

при $\gamma = 135°$. Аналогично, $\max(CE) = a + b\sqrt{2}$ при $\gamma = 135°$.

Итак, каждая из величин OM, ON достигает максимума при $\gamma = 135°$. Значит, и их сумма максимальна при $\gamma = 135°$:

$$\max(OM + ON) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(a + b).$$

Второй способ. Обозначим $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $c = AB$, $d = CD$, $e = CE$.

По теореме косинусов для треугольника ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

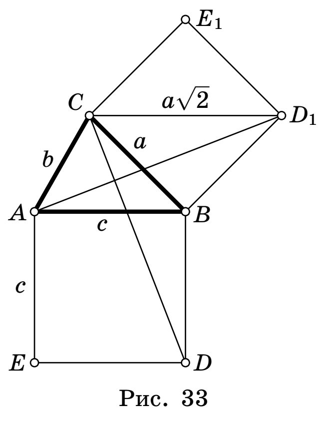


Рис. 33

По теореме косинусов для треугольника AEC:

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \sin\alpha$$

(мы воспользовались формулой приведения).

Подставим c^2 из первой формулы во вторую:

$$e^2 = 2b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + 2bc \cdot \sin\alpha.$$

Из теоремы синусов для треугольника ABC следует, что $\sin\alpha = \frac{a}{c} \sin\gamma$.

Получаем:

$$e^2 = 2b^2 + a^2 + 2ab \cdot (\sin\gamma - \cos\gamma).$$

Аналогично получаем: $d^2 = 2a^2 + b^2 + 2ab \cdot (\sin\gamma - \cos\gamma)$.

Отсюда следует, что максимум d и e достигается одновременно с максимумом выражения $\sin\gamma - \cos\gamma$ при $\gamma = 135^\circ$. Значит, и $d + e$ максимально при $\gamma = 135^\circ$.

11 класс

1. Если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ определен, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Произведение тангенсов связано с p и q следующим образом:

$$q = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

Из (2) получаем, что p и q либо одновременно равны нулю, либо одновременно не равны.

1°. Если $p = 0$ и $q = 0$, то из (1) получаем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 0$. При этом надо проверить, что знаменатель в (1) не равен нулю. Действительно:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta \;\Rightarrow\; 1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha > 0.$$

2°. Если $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p \neq q$, то из (2) получаем $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{p}{q}$ и из (1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{pq}{q-p}$.

3°. Если $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p = q$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ не определен.

4°. Если $p = 0$ или $q = 0$, но $p \neq q$, то условие задачи противоречиво.

2. Разобьем единичный квадрат на 4 равных квадратика. Квадратики, пересекающиеся с диагональю только

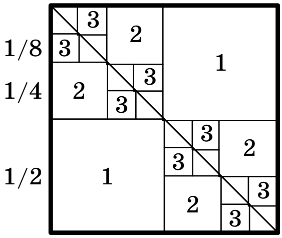


Рис. 34

по вершине, назовем «квадратиками первого уровня». Каждый из оставшихся квадратиков разобьем на 4 квадратика. Квадратики, пересекающиеся с диагональю по вершине, назовем «квадратиками второго уровня». Снова разобьем каждый из оставшихся квадратиков на 4 квадратика и т. д. (рис. 34). Проведем эту операцию 500 раз.

Мы получили 2^k квадратиков k-го уровня. Сторона каждого из таких квадратиков равна 2^{-k}. Значит, их суммарный периметр равен 4. Значит, суммарный периметр всех квадратиков всех уровней равен $4\cdot 500$, что больше, чем 1993.

Комментарии. 1°. Формулировку задачи можно усилить. Существует разбиение квадрата на квадратики такое, что сумма периметров квадратиков, имеющих общую *внутреннюю точку* с диагональю квадрата, больше 1993.

Идея решения в следующем: возьмем квадратики предыдущего разбиения, лежащие ниже диагонали, затем стороны квадратиков «чуть-чуть» увеличим, но так, чтобы они имели рациональную длину. (Рациональность нужна для того, чтобы оставшуюся часть квадрата можно было разбить на равные квадратики.)

2°. Эта задача возникла на лекции известного математика Н. Н. Лузина, когда он захотел короче доказать теорему Коши (он любил импровизировать). Лузин предположил, что кривая ограниченной длины, содержащаяся в единичном квадрате, может пересечь квадратики разбиения только ограниченного суммарного периметра. Будущий академик А. Н. Колмогоров слушал эту лекцию и вскоре построил контрпример.

3. Случай $n=2$ тривиален, так что будем считать, что $n\geqslant 3$.

Укажем расположение точек, при котором будет ровно n попарно непараллельных прямых, — это набор вершин правильного n-угольника. Докажем, что непараллельных прямых столько же, сколько осей симметрии.

Поставим в соответствие каждой стороне и каждой диагонали ее серединный перпендикуляр (это ось симметрии n-угольника). У параллельных сторон и диагоналей серединные перпендикуляры совпадают. Верно и обратное: для каждой оси симметрии найдется перпендикулярная ей сторона или диагональ. Рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n, убеждаемся, что правильный n-угольник имеет ровно n осей симметрии.

Теперь докажем, что для $n \geqslant 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, всегда найдутся n различных попарно непараллельных прямых. Легко найти $n-1$ прямую: возьмем произвольную точку и рассмотрим все прямые, через нее проходящие. Труднее найти еще одну.

Выберем среди данных точек *крайнюю*. Для этого рассмотрим их выпуклую оболочку. Иными словами, рассмотрим выпуклый многоугольник, содержащий все данные точки, с вершинами в некоторых из этих точек (это минимальный выпуклый многоугольник, содержащий все точки).

Пусть O — вершина этого выпуклого многоугольника (рис. 35), A и B — соседние с ней вершины. Тогда все лучи, соединяющие O с остальными точками, проходят внутри угла AOB. Прямая AB пересекает их все и, значит, ее можно взять в качестве n-й прямой.

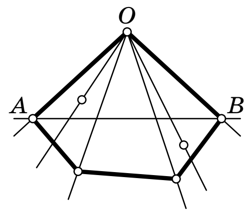


Рис. 35

Комментарий. Условие общего положения точек нельзя заменить на более слабое: «не все точки лежат на одной прямой». Например, для вершин правильного $2k$-угольника и его центра найдутся лишь $2k$ попарно непараллельных прямых.

4. Заметим, что если выбрано число k, то после хода в ящике, в котором было m камней, будет $q+r$ камней, где q и r — частное и остаток от деления m на k соответственно (см. факт 7).

Ясно, что достаточно рассмотреть ситуацию, когда в первом ящике лежит 1 камень, во втором — 2 камня и т. д. вплоть до n-го ящика, в котором лежит n камней (где $n=460$ в пункте «а» и $n=461$ в пункте «б»).

1°. *Пусть в ящиках лежат* $1, 2, \ldots, n$ *камней, где* n *— некоторое натуральное число. Пусть выбрано число* k *и сделан ход. Пусть* $f(n, k)$ *— максимальное число камней в ящике (после хода). Тогда для любого числа камней* $1 \leqslant j \leqslant f(n, k)$ *найдется ящик, в котором лежит*

j камней. Иначе говоря, числа камней в ящиках снова будут образовывать начальный отрезок натурального ряда. Докажем это обратной индукцией по j (см. факт 24). Пусть найдется ящик с j камнями. Тогда найдется такое число m $(1 \leqslant m \leqslant n)$, что $j = q + r$, где q и r — частное и остаток от деления m на k. Если $r \neq 0$, то в ящике, в котором был $m-1$ камень, станет $j-1$ камень. Если $r = 0$, то нужно рассмотреть ящик, в котором было $m-k$ камней. Утверждение доказано.

2°. Пусть частное от деления $n+1$ на k равно q. Рассмотрим ящик, в котором лежит $(q-1)k + (k-1)$ камней. В нем останется $q+k-2$ камня. Нетрудно видеть, что это будет самый большой ящик (впрочем, если $n+2$ делится на k, то будет еще ровно один ящик с таким же числом камней). Итак,

$$f(n,\, k) = q + k - 2 = \left[\frac{n+1}{k}\right] + k - 2. \qquad (1)$$

3°. *Оптимальное значение k (при котором $f(n, k)$ достигает минимума) равно* $[\sqrt{n+1}] + 1$.

Доказательство. Имеем

$$f(n,\, k) = \left[\frac{n+1}{k} + k\right] - 2.$$

Функция $\dfrac{n+1}{x} + x$ убывает на интервале $(0;\, \sqrt{n+1})$ и возрастает на интервале $(\sqrt{n+1};\, n]$. Так как $[x]$ — неубывающая функция, $f(n, k)$ достигает минимума либо при $k = [\sqrt{n+1}]$, либо при $k = [\sqrt{n+1}] + 1$.

Осталось доказать, что всегда

$$f(n,\, [\sqrt{n+1}] + 1) \leqslant f(n,\, [\sqrt{n+1}]).$$

Пусть $[\sqrt{n+1}] = s$. Тогда

$$s^2 \leqslant n + 1 < (s+1)^2. \qquad (2)$$

В силу (1) достаточно доказать, что

$$\left[\frac{n+1}{s+1}\right] < \left[\frac{n+1}{s}\right].$$

Из (1) следует, что

$$\left[\frac{n+1}{s+1}\right] \leqslant s, \quad \text{а} \quad \left[\frac{n+1}{s}\right] \geqslant s.$$

Значит, достаточно доказать, что обе части не могут равняться s. Но

$$\left[\frac{n+1}{s}\right] = s \Rightarrow \frac{n+1}{s} < s+1 \Rightarrow \frac{n+1}{s+1} < s \Rightarrow \left[\frac{n+1}{s+1}\right] < s.$$

Утверждение доказано.

4°. Пусть

$$g(n) = f(n, [\sqrt{n+1}] + 1).$$

Тогда, начиная с ящиков с 1, 2, ..., n камнями, мы при оптимальном выборе k (за один ход) получим ящики с 1, 2, ..., $g(n)$ камнями. Осталось убедиться прямым вычислением, что $g(g(g(g(g(460))))) = 1$, а $g(g(g(g(g(461))))) = 2$.

Последовательность ходов для $n = 460$ приведена в таблице:

ход	1	2	3	4	5	
n	460	40	10	4	2	1
k	22	7	4	3	2	

Изложим рассуждение при $n = 461$ более подробно: из доказанного следует, что если в ящиках содержатся все наборы камней от 1 до 461, то после первого хода останутся, по крайней мере, все наборы от 1 до $g(461) = f(461, 22) = 41$; после второго — все наборы от 1 до $g(41) = 11$; затем — от 1 до 5; от 1 до 3; и, наконец, от 1 до 2. Итак, при $n = 461$ не всегда можно оставить 1 камень во всех ящиках.

Комментарии. 1°. Вместо того чтобы доказывать неравенство

$$f(n, [\sqrt{n+1}] + 1) \leqslant f(n, [\sqrt{n+1}]),$$

можно было бы просто перебрать различные варианты.

2°. Задача возникла у программистов. Обрабатывался текст, содержащий более одного пробела между некоторыми словами. Нужно было так обработать текст, чтобы оставить между словами ровно один пробел. При этом применялась следующая операция: выбиралось число k и при последовательном просмотре текста каждая группа из k пробелов подряд заменялась на один пробел.

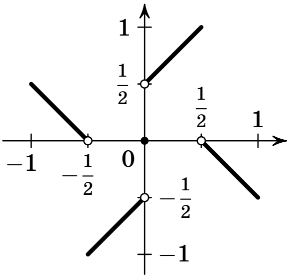


Рис. 36

5. а) Можно взять, например:

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}-x & \text{при } x\in\left[-1;\ -\dfrac{1}{2}\right); \\ x-\dfrac{1}{2} & \text{при } x\in\left[-\dfrac{1}{2};\ 0\right); \\ 0 & \text{при } x=0; \\ x+\dfrac{1}{2} & \text{при } x\in\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right]; \\ \dfrac{1}{2}-x & \text{при } x\in\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 36.

б) Допустим, что существует такая функция f, определенная на интервале $(-1;\ 1)$ (случай функции, определенной на всей числовой оси, аналогичен).

1°. График функции $f(x)$ переходит в себя при поворотах на 90°, 180° и 270°. Действительно, пусть $(x;\ y)$ — точка на графике. Тогда $y=f(x)$, значит, $f(y)=-x$. Поэтому точка $(y;\ -x)$ тоже лежит на графике. Но эта точка как раз получается из точки $(x;\ y)$ поворотом на 90° по часовой стрелке. Значит, график переходит в себя при таком повороте. Но тогда он переходит в себя и при поворотах на 180° и 270°.

2°. $f(0)=0$ и $f(x)\neq 0$, если $x\neq 0$. Действительно, если $f(0)=y\neq 0$, то точка $(0;\ y)$ лежит на графике. Тогда по доказанному и точка $(0;\ -y)$, которая получается из нее поворотом на 180°, лежит на графике, что противоречит определению функции.

Если же $f(x)=0$, где $x\neq 0$, то точка $(x;\ 0)$ лежит на графике. Поворачивая эту точку на 90° и 270°, приходим к противоречию.

3°. По условию, график есть объединение конечного числа точек и интервалов, значит, часть графика, расположенную в положительном квадранте $\{x>0,\ y>0\}$, можно представить в виде:

$$I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n\cup P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_m.$$

При этом можно считать, что разные интервалы I_k не пересекаются, а точки P_l различны и не принадлежат интервалам I_k. Заметим также, что в силу 2° ни один из интервалов, составляющих график функции, не пересекает осей координат.

Пусть J_k — интервал, который получается из I_k поворотом на 90° по часовой стрелке. По доказанному все эти интервалы лежат на графике; все они лежат в четвертом квадранте. Далее, пусть Q_l — точка, получающаяся из P_l поворотом на 90° по часовой стрелке.

Нетрудно видеть, что интервалы J_k и точки Q_l составляют пересечение графика с четвертым квадрантом.

Итак, часть графика, расположенная в правой полуплоскости, представляет собой объединение интервалов I_k, J_k и точек P_l, Q_l ($k=1, \ldots, n$, $l=1, \ldots, m$). Значит, проекции этих интервалов и точек на ось абсцисс разбивают интервал (0; 1) на $2n$ интервалов и $2m$ точек. Но интервал нельзя разбить на четное число интервалов четным числом точек! Противоречие.

6. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Пусть муха побывала на каждой из граней тетраэдра и вернулась в исходную точку. Без ограничения общности можно считать, что муха сначала побывала на грани ABC, потом — на грани BCD, затем — на DAB, и, наконец, на ACD. Обозначим соответствующие точки на гранях, в которых побывала муха, через E, F, G и H (рис. 37). Ясно, что минимальное расстояние, которое муха могла пролететь, равно периметру пространственного четырехугольника $EFGH$.

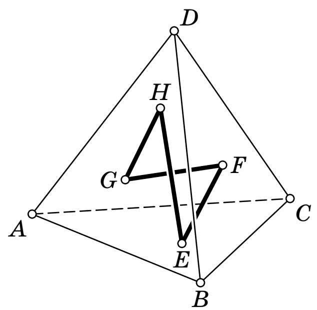


Рис. 37

1°. Проведем через DC плоскость, перпендикулярную AB (плоскость симметрии тетраэдра $ABCD$) и рассмотрим четырехугольник $E_1F_1G_1H_1$, симметричный $EFGH$ относительно этой плоскости. (Вершины E_1 и G_1 останутся на тех же гранях, что E и G соответственно, F_1 попадет на одну грань с H, а H_1 — на одну грань с F.) Периметры четырехугольников $EFGH$ и $E_1F_1G_1H_1$ равны.

2°. Лемма. *Рассмотрим любой пространственный четырехугольник $KLMN$* (рис. 38). *Пусть P и Q — середины сторон KL и MN. Тогда*

$$PQ \leqslant \frac{1}{2}(KN + LM).$$

Доказательство. Обозначим через R середину диагонали LN. Имеем $PR = \frac{1}{2}KN$, $RQ = \frac{1}{2}LM$. Таким образом,

$$PQ \leqslant PR + RQ = \frac{1}{2}(KN + LM).$$

Лемма доказана.

Обозначим через E_2, F_2, G_2 и H_2 середины отрезков EE_1, FH_1, GG_1 и HF_1 соответственно. Вершины этого четырехугольника тоже лежат на гранях тетраэдра, и, согласно лемме, периметр четырехугольника $E_2F_2G_2H_2$ не больше периметра $EFGH$. Кроме того, вершины E_2 и G_2 (середины EE_1 и GG_1) будут лежать в плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через CD, т. е. на медианах CT и DT граней ABC и ABD (рис. 39).

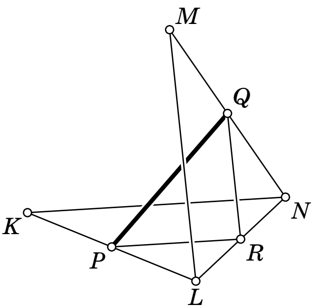


Рис. 38

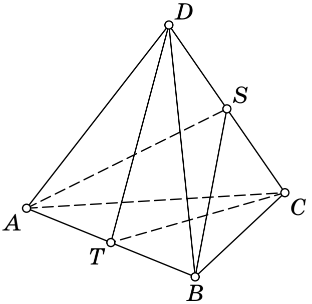


Рис. 39

Исходя из четырехугольника $E_2F_2G_2H_2$, точно так же построим $E_3F_3G_3H_3$, симметричный ему относительно плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через AB, а затем, взяв середины отрезков, соединяющих вершины этих четырехугольников, лежащих в одной грани, получим $E_4F_4G_4H_4$, все вершины которого лежат в объединении двух плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$, проходящих через CD и AB. Иными словами, вершины E_4 и G_4 лежат на отрезках CT и DT, а вершины F_4 и H_4 — на медианах AS и BS граней ACD и BCD.

При этом периметр $E_4F_4G_4H_4$ не превосходит периметра $EFGH$. Значит, периметр $EFGH$ не меньше, чем $4d$, где d — расстояние между прямыми CT и BS.

3°. Осталось построить путь длины $4d$ и найти d. Пусть E_0 и F_0 — основания общего перпендикуляра к прямым CT и BS, причем E_0 лежит на CT, а F_0 — на BS. Обозначим через G_0 точку, симметричную точке E_0 относительно плоскости ABS. Из симметрии ясно, что F_0G_0 — общий перпендикуляр к прямым BS и DT. Аналогично строится точка H_0, при этом G_0H_0 и H_0E_0 являются общими перпендикулярами соответственно к DT и AS и к AS и CT. Значит, периметр четырехугольника $E_0F_0G_0H_0$ равен $4d$. Заметим, что нужно еще проверить, что основания этих общих перпендикуляров лежат на гранях тетраэдра, а не на их продолжениях, это будет сделано ниже (нам еще нужно вычислить d).

4°. Проведем через AB плоскость, перпендикулярную CT и спроецируем на нее наш тетраэдр. Получим треугольник ABD' (рис. 40), в котором $AB=a$, $D'T=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$ (по формуле для длины высоты правильного тетраэдра). Точка S перейдет в S' — середину $D'T$. Искомое расстояние d равно расстоянию от точки T до прямой BS' (поскольку общий перпендикуляр параллелен плоскости проекции). Кроме того, очевидно, что основание перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую BS', лежит на отрезке BS', а не на его продолжении, значит, точка F_0 лежит на отрезке BS. Аналогично доказывается, что и остальные вершины четырехугольника лежат на медианах, а не на их продолжениях.

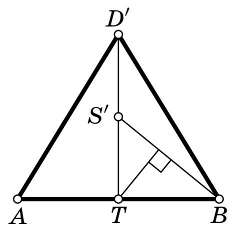


Рис. 40

В прямоугольном треугольнике BTS' известны катеты $BT=\frac{a}{2}$, $TS'=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Значит, $BS'=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$; $d=\frac{BT\cdot TS'}{BS'}=\frac{a}{\sqrt{10}}$.

Комментарии. 1°. Из решения задачи видно, что искомых траекторий ровно три (почему?).

2°. Известна аналогичная задача для плоскости: жук ползает внутри треугольника со сторонами a, b, c. Какое наименьшее расстояние он может проползти, чтобы побывать на каждой стороне и вернуться в исходную точку? В случае остроугольного треугольника эта задача называется *задачей Фаньяно*.

Оказывается, что кратчайший путь в случае остроугольного треугольника соединяет основания высот треугольника (см. [42], гл. 4, § 5), а в случае прямо- или тупоугольного треугольника вырождается в двойной отрезок высоты. См. [51], задача 70.

1994 год

8 класс

1. Первый способ. На банку напитка уходит $\frac{1}{6}$ бидона яблочного и $\frac{1}{10}$ бидона виноградного сока, значит, объем банки равен

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$$

объема бидона.

После изменения рецептуры на банку напитка уходит $\frac{1}{5}$ бидона яблочного и $\frac{1}{x}$ бидона виноградного сока, значит, объем банки равен

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x}$$

объема бидона. Итак, мы получаем уравнение:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x}=\frac{4}{15}.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{15}-\frac{1}{5}=\frac{1}{15}.$$

Значит, $x=15$.

Второй способ. На 30 банок было затрачено 5 бидонов яблочного и 3 бидона виноградного сока. Итого 8 бидонов. По новой рецептуре на 30 банок затратят 6 бидонов яблочного сока. Значит, виноградного сока затратят 2 бидона. Итак, бидона виноградного сока хватит на 15 банок.

2. Первый способ. Пусть x, y — искомые трехзначные числа. Если к числу x приписать три нуля, то получится число $1000x$, если приписать y, то получится $1000x+y$ (см. факт 11).

Итак, ученик написал число $1000x+y$. По условию это число в семь раз больше, чем $x \cdot y$. Получается равенство

$$7x \cdot y = 1000x + y. \tag{1}$$

Разделим обе части равенства (1) на x:

$$7y = 1000 + \frac{y}{x}.$$

Число $\frac{y}{x}$ положительно и меньше 10, так как $y \leqslant 999$, $x \geqslant 100$. Поэтому

$$1000 < 7y < 1010.$$

Деля это неравенство на 7, получаем

$$142\frac{6}{7} < y < 144\frac{2}{7}.$$

Так как y — целое число, y — либо 143, либо 144. Пусть $y = 143$. Подставляя это значение y в равенство (1), получаем:

$$7x \cdot 143 = 1000x + 143.$$

Решая это уравнение, находим $x = 143$. Если $y = 144$, то аналогичное уравнение дает $x = 18$, что не годится, потому что x — число из трех цифр.

Второй способ. Перепишем равенство (1) в виде $1000x = (7x-1)y$. Нетрудно видеть, что x и $7x-1$ не имеют общих делителей, отличных от 1 и -1. Действительно, если d — общий делитель чисел x и $7x-1$, то d является делителем числа $7x$, а значит, и делителем числа $1 = 7x - (7x-1)$ (см. факт 5). Но 1 делится только на 1 и -1.

Итак, число $7x-1$ — делитель произведения $1000 \cdot x$ и взаимно просто со вторым множителем. Тогда, по известной теореме (см. факт 9), число $7x-1$ — делитель числа 1000. Но

$$7x - 1 \geqslant 7 \cdot 100 - 1 = 699,$$

поэтому $7x - 1 = 1000$ (единственный делитель числа 1000, больше либо равный 699 — это само число 1000), откуда $x = 143$. Подставляя $x = 143$ в исходное уравнение, находим $y = 143$.

Комментарий. Сравните с задачей 1 для 10 класса.

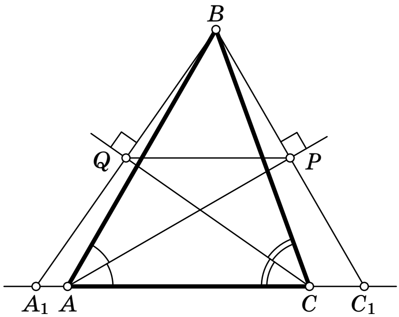


Рис. 41

3. Продолжим отрезки BQ и BP до пересечения с прямой AC в точках A_1 и C_1 соответственно. В треугольнике ABC_1 отрезок AP является биссектрисой и высотой (рис. 41). Значит, этот треугольник равнобедренный ($AB = AC_1$). Тогда отрезок AP является, также, и медианой: $BP = C_1P$. Аналогично, отрезок CQ является медианой треугольника CBA_1, т. е. $BQ = QA_1$. Следовательно, PQ — средняя линия треугольника A_1BC_1, значит, отрезок PQ параллелен A_1C_1, но тогда он параллелен и AC.

4. 1°. Представим себе, что квадрат, в вершинах которого сидят кузнечики — это квадрат клетчатой бумаги (размер квадрата — 1×1). Заметим, что кузнечики всегда прыгают по вершинам клеток: если на клетчатой бумаге поместить кузнечиков в вершины клеток (эти вершины называются *узлами квадратной сетки*), то после каждого прыжка каждый кузнечик снова попадет в некоторый узел квадратной сетки (рис. 42). Дело в том, что прыжок эквивалентен центральной симметрии одного кузнечика относительно другого, а квадратная сетка центрально симметрична относительно любого своего узла.

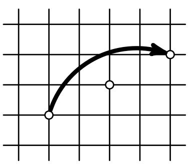


Рис. 42

2°. Предположим, что кузнечики сумели попасть в вершины большего квадрата, тогда, прыгая в обратном порядке, они должны попасть в вершины меньшего. Но, начиная прыгать из вершин большего квадрата, они всегда будут попадать в узлы сетки, состоящей из больших квадратов. Иначе говоря, расстояние между ними не может быть меньше, чем сторона большого квадрата. Противоречие.

Комментарий. Если сначала кузнечики находились в вершинах произвольного параллелограмма, то они всегда будут прыгать по сетке из таких же параллелограммов.

5. Сделаем несколько замечаний, каждое из которых очевидно.

1°. Любые две стрелки определяют «плохой» сектор между их продолжениями, попав в который, третья стрелка создает плохой момент времени. Этот сектор не превосходит 180° — см. рис. 43.

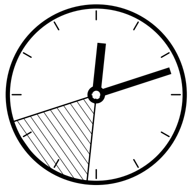


Рис. 43

2°. Через целое число часов положение минутной и секундной стрелок будет таким же.

3°. Через 6 часов после каждого плохого момента будет хороший (так как часовая стрелка повернется на 180° и попадет из плохого сектора в хороший).

4°. Бывают хорошие моменты, через 6 часов после которых будет опять хороший момент.

5°. Теперь можно разбить сутки на интервалы хорошего и плохого времени, так что каждому интервалу плохого времени соответствует интервал хорошего времени *такой же длины* (при сдвиге на 6 часов), поэтому хорошего времени не меньше, чем плохого. Кроме того, некоторым интервалам хорошего времени соответствуют опять хорошие интервалы. Так, например, интервалу 3:00:00—3:00:05 соответствует интервал 9:00:00—9:00:05. Оба интервала — хорошие. Значит, хорошего времени больше, чем плохого.

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 4 для 8 класса олимпиады 1993 г.

2°. Почему не достаточно установить соответствие между моментами плохого и хорошего времени? — Потому что плохих моментов бесконечно много, и говорить, что хороших моментов больше, некорректно. Более того, можно установить *взаимно однозначное соответствие* между точками отрезков разной длины: например, отображение $x \mapsto 2x$ устанавливает соответствие между точками отрезка [0; 1] и точками отрезка [0; 2]. Это соответствие *взаимно однозначно*, т. е. каждой точке первого отрезка соответствует единственная точка второго отрезка и наоборот. Однако отрезки имеют разную длину!

Вопрос о том, когда между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, очень интересен и глубок. Если множества конечны, то ответ прост — соответствие можно установить тогда и только тогда, когда множества содержат одинаковое количество элементов. Для бесконечных множеств ситуация гораздо сложнее. Приведем несколько утверждений (подробнее об этом можно прочитать в [28]):

а) можно установить взаимно однозначное соответствие между целыми и натуральными числами;

б) можно установить взаимно однозначное соответствие между рациональными и натуральными числами;

в) не существует взаимно однозначного соответствия между рациональными и иррациональными числами;

г) существует взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата.

6. Первый закрашивает квадрат 18×18, примыкающий к большей стороне прямоугольника, так, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпадали (см. рис. 44 для доски размером 7×14). Тогда относительно этой общей оси остаток прямоугольника распадется на две одинаковые части. Теперь на каждый ход второго игрока первый отвечает симметричным ходом, причем у первого ход всегда найдется, поскольку второй не может закрасить квадрат, пересекающий ось симметрии.

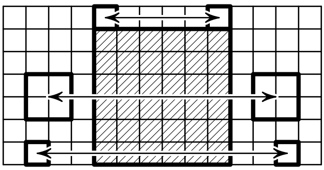


Рис. 44

9 класс

1. Пусть пять точек A, B, C, D и E, из которых две D и E лежат внутри треугольника ABC, попарно соединены отрезками. Эти 10 отрезков можно разбить на две несамопересекающихся ломаных из 5 звеньев каждая (рис. 45). Любую из этих ломаных можно взять в качестве пятиугольника. Тогда вторая ломаная соответствует его диагоналям.

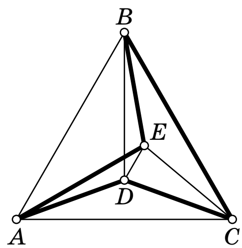


Рис. 45

2. П е р в ы й с л у ч а й. Если $k > l$, то выигрывает Коля: ему достаточно отрезать от k часть, которая будет больше суммы всех остальных.

Например, можно разрезать k на части (рис. 46)

$$l + \frac{2}{3}(k-l),\ \frac{1}{6}(k-l),\ \frac{1}{6}(k-l).$$

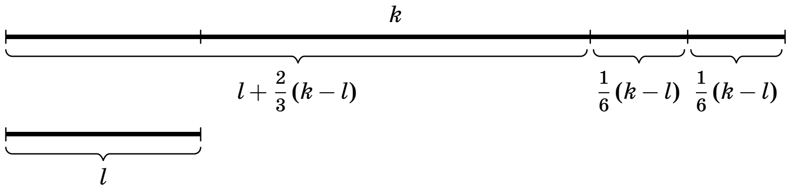


Рис. 46

Тогда самая большая часть $l+\frac{2}{3}(k-l)$ не может быть стороной никакого треугольника: по неравенству треугольника сумма длин двух остальных сторон должна быть больше, но сумма длин *всех* остальных отрезков (равная $l+\frac{1}{3}(k-l)$) меньше длины этой части.

Второй случай. Если $k \leqslant l$, то выигрывает Лёва. Пусть Коля разрезал k на части $k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3$. Тогда Лёва разрежет l так, чтобы его большая часть равнялась большей части отрезка Коли, а две другие были равными между собой (рис. 47):

$$l = k_1 + \frac{l-k_1}{2} + \frac{l-k_1}{2}.$$

Тогда получатся два равнобедренных треугольника:

$$(k_1,\ k_1,\ k_2), \qquad \left(\frac{l-k_1}{2},\ \frac{l-k_1}{2},\ k_3\right)$$

Действительно, из отрезков a, a, b можно сложить равнобедренный треугольник тогда и только тогда, когда $b<2a$. Очевидно, что $k_2<2k_1$. С другой стороны,

$$2\cdot\frac{l-k_1}{2} = l-k_1 > k_3,$$

так как $k_1+k_3<k\leqslant l$.

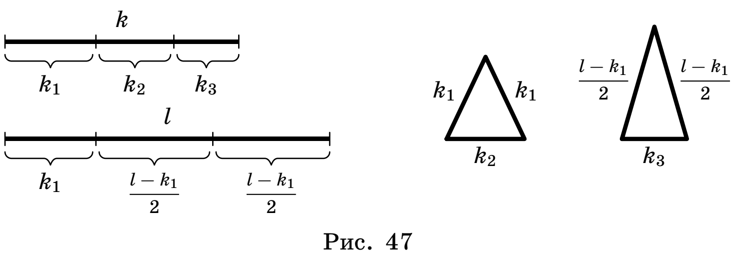


Рис. 47

3. Например: $x=k(2k^2+1)$, $y=2k^2+1$, $z=-k(2k^2+1)$.

Как додуматься до этих формул? Избавимся от двух кубов с помощью подстановки $z=-x$. Получим уравнение $2x^2+y^2=y^3$, $2x^2=(y-1)y^2$. Если $\frac{y-1}{2}=k^2$ — точный квадрат, то решение найдется:

$$y=2k^2+1, \quad x=k(2k^2+1).$$

4. Первый способ. Пусть окружности расположены как на рис. 48. Случай другого расположения окружностей разбирается аналогично (см. комментарий).

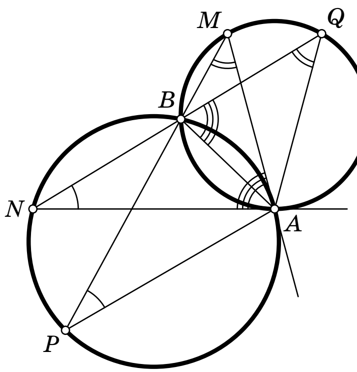


Рис. 48

Достаточно доказать, что равны треугольники AQN и AMP. Для этого докажем, что они подобны, и что у них равны соответственные стороны AQ и AM.

По теореме о вписанных углах $\angle P=\angle N$ и $\angle Q=\angle M$, следовательно, треугольники AQN и AMP подобны.

Чтобы доказать равенство отрезков AQ и AM, докажем равенство дуг AQ и MA (дуги измеряются против часовой стрелки). Заметим, что угол ABQ равен половине дуги AQ, а угол MAN равен половине дуги AM (см. факт 15). Итак, достаточно доказать равенство углов ABQ и MAN.

Угол ABQ — внешний угол треугольника ABN, поэтому $\angle ABQ=\angle ANB+\angle BAN$. Угол MAN состоит из двух углов BAM и BAN, но $\angle ANB=\angle BAM$ (каждый из них равен половине дуги AB окружности, проходящей через точки A, B и N), поэтому

$$\angle MAN=\angle ANB+\angle BAN=\angle ABQ.$$

Задача решена.

Второй способ. По теореме о секущей и касательной, проведенных из одной точки, получаем:

$$MP=\frac{AM^2}{MB}, \quad NQ=\frac{AN^2}{NB}.$$

То есть достаточно доказать, что

$$\frac{AM^2}{AN^2} = \frac{MB}{NB}. \qquad (1)$$

Применяя теорему об угле между касательной и хордой, видим, что треугольники AMB и NAB подобны (рис. 49). Значит,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{NB}, \quad \text{и} \quad \frac{AM}{AN} = \frac{MB}{AB}.$$

Перемножая эти равенства, получаем равенство (1).

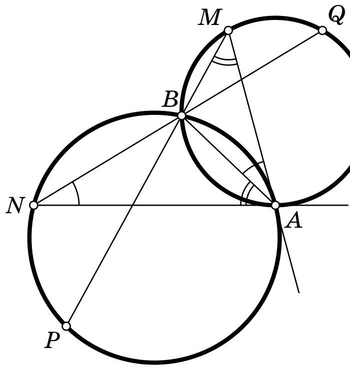


Рис. 49

Комментарий. Если центр одной из окружностей расположен внутри другой окружности, то картинка получается другой. Если центр каждой из окружностей находится внутри другой окружности, то получается третья картинка. В этих случаях, в первом доказательстве вместо равенства углов ABQ и MAN, нужно доказать, что эти углы составляют в сумме 180°. Второй способ решения остается без изменений. Читатель может самостоятельно провести эти рассуждения.

5. Пусть x — вычеркнутая цифра, a — часть числа слева от x, c — часть числа справа от x, тогда число имеет вид $\overline{axc}$, см. факт 11. Пусть цифра x стоит на $(n+1)$-м месте (считая справа). Тогда

$$\overline{axc} = a \cdot 10^{n+1} + x \cdot 10^n + c.$$

После вычеркивания цифры x получится число $\overline{ac} = a \cdot 10^n + c$. Рассмотрим отношение исходного числа к полученному

$$r = \frac{a \cdot 10^{n+1} + x \cdot 10^n + c}{a \cdot 10^n + c}, \quad \text{где } c < 10^n. \qquad (2)$$

Вычитая 10 из обеих частей равенства (2), и производя несложные преобразования, получим

$$r - 10 = \frac{x \cdot 10^n - 9c}{a \cdot 10^n + c} \leqslant \frac{x}{a} \leqslant \frac{9}{a} \leqslant 9.$$

Обозначим $l = r - 10$. Умножая последнее равенство на знаменатель и приводя подобные члены, получим:

$$(x - la) \cdot 10^n = (l + 9)c. \qquad (3)$$

Если $l \leqslant 0$, то левая часть последнего равенства положительна, значит, $l+9>0$. Итак,

$$-8 \leqslant l \leqslant 9.$$

Ясно также, что $l \neq 0$ (иначе десятичная запись числа c оканчивается нулем).

Лемма. *a — цифра (иными словами, $a<10$).*

Доказательство. Рассмотрим два случая: $l>0$ и $l<0$.

Пусть $l>0$. Из равенства (3) следует, что $x-la>0$, значит,

$$a<\frac{x}{l} \leqslant \frac{9}{l} \leqslant 9.$$

Пусть $l<0$, тогда

$$x-la=\frac{(l+9)c}{10^n}<\frac{9\cdot 10^n}{10^n}=9,$$

откуда $-la<9$, так что $a<9$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что десятичная запись числа $\overline{axc}$ состоит из $n+2$ цифр. Поэтому, чтобы найти максимальное исходное число, нужно найти максимальное n.

Число c по условию не оканчивается нулем, поэтому разложение c на простые множители (см. факт 10) либо не содержит двоек, либо не содержит пятерок.

1°. Пусть разложение числа c не содержит двоек. Рассмотрим правую часть равенства (3). Так как $1 \leqslant l+9 \leqslant 18$, число $l+9$ может делиться на 4-ю степень двойки ($l+9=16$), но не может делиться на 5-ю ($2^5=32>18$). Поэтому $n \leqslant 4$. Пусть $n=4$, тогда $l+9=16$, и равенство (3) перепишется в виде

$$(x-7a)\cdot 5^4=c.$$

Поскольку x — это цифра, то $a=1$, $x=8$ или $x=9$. При $x=9$ число c оканчивается нулем, и потому не подходит. При $x=8$ получаем $c=625$ и ответ

$$\overline{axc}=180625.$$

2°. Пусть число c не содержит пятерок. Число $l+9$ делится на степень пятерки не выше первой, поэтому $n \leqslant 1$, и число заведомо не будет максимальным.

6. В задаче «б» легко привести пример «непродолжаемой» расстановки девяти кораблей (рис. 50, *а*).

В задаче «а» есть «подводный камень»: казалось бы достаточно доказать, что найдется место последнему одноклеточному кораблю. Но, на самом деле, нужно доказать, что в процессе расстановки найдется место каждому очередному кораблю.

Корабль 1×4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1×3 поместится. Для этого отметим 8 вспомогательных кораблей 1×3, параллельных друг другу, с интервалом две клетки (рис. 50, *б*). Каждый из поставленных кораблей может задеть (пересечь или коснуться) не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетым отмеченный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1×3.

Пусть уже расставлены следующие корабли: 1×4, два 1×3 и меньше трех 1×2. Докажем, что еще один корабль 1×2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1×2, параллельных друг другу, с интервалом две клетки (рис. 50, *в*). Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетым отмеченный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1×1 с интервалом две клетки (рис. 50, *г*). Поставленные корабли задевают не больше 15 отмеченных.

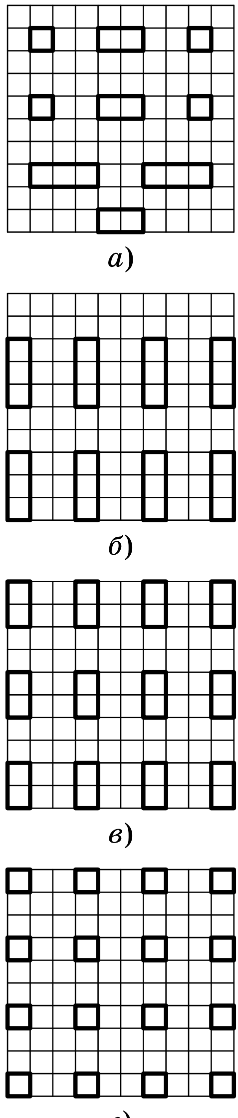


Рис. 50

Комментарий. Интересно найти максимальное число одинаковых кораблей, например, 1×4, которые заведомо поместятся.

10 класс

1. Похожая задача была в 8-м классе (задача 2). Там приведены более подробные решения.

Первый способ. Пусть x и y — искомые числа, тогда можно составить уравнение: $3\cdot x\cdot y=10^7x+y$ (см. факт 11), $3y=10^7+\frac{y}{x}$. Поскольку $\frac{y}{x}$ — число в пределах от 0 до 10, имеем $10^7<3y<10^7+10$, следовательно $3333333\frac{1}{3}<y<3333336\frac{2}{3}$. Теперь можно либо рассмотреть три варианта: $y=3333334$, $y=3333335$ и $y=3333336$, либо заметить, что
$$\frac{y}{x}\leqslant\frac{3333336}{1000000}<4,$$
значит, $10^7+1\leqslant 3y<10^7+4$. Лишь одно число в этом интервале делится на 3 — это 10^7+2. Тогда $3y=10^7+2$, $y=3333334$, $x=1666667$.

Второй способ. $10^7x=(3x-1)y$. Поскольку x и $(3x-1)$ не имеют общих делителей, то $3x-1$ — делитель 10^7 (см. факты 9 и 5). Но $3x-1\geqslant 3\cdot 10^6-1$, поэтому либо $3x-1=5\cdot 10^6$, либо $3x-1=10^7$. Подходит только $3x-1=5\cdot 10^6$, откуда $x=1666667$. Из первого уравнения получаем: $y=3333334$.

2. а) Если $0\leqslant x_n\leqslant 1$, то $0\leqslant x_{n+1}\leqslant 1$. Действительно,
$$0\leqslant x_n\leqslant 1 \;\Rightarrow\; -1\leqslant 1-2x_n\leqslant 1 \;\Rightarrow\; 0\leqslant |1-2x_n|\leqslant 1 \;\Rightarrow\; 0\leqslant x_{n+1}\leqslant 1.$$

Если x_n рациональное, то x_{n+1} рациональное, причем со знаменателем не большим чем у x_n. Действительно, пусть $x_n=\frac{p_n}{q_n}$ — несократимая дробь. Тогда
$$x_{n+1}=1-\left|\frac{q_n-2p_n}{q_n}\right|=\frac{q_n-|q_n-2p_n|}{q_n}.$$
Если эта дробь несократима, то ее знаменатель такой же, как и у x_n, если она сократима, то после сокращения знаменатель уменьшится.

Итак, все члены последовательности — рациональные числа, заключенные между 0 и 1, т. е. правильные дроби. Но правильных дробей со знаменателями, не большими заданной величины q, — конечное число. Поэтому какие-то члены последовательности повторятся, и с этого момента последовательность будет периодической.

б) Первый способ. Раскрывая модуль в $x_{n+1}=1-|1-2x_n|$, получим либо $x_{n+1}=2x_n$, либо $x_{n+1}=2-2x_n$. Поэтому $x_{n+1}=a_1+2b_1x_n$, где a_1 — целое число, $b_1=\pm 1$. Аналогично, $x_{n+2}=a_2+4b_2x_n$. Продолжая этот процесс, получим, что

$$x_{n+k}=a_k+2^kb_kx_n,$$

где a_k — целое число, $b_k=\pm 1$.

Допустим, что $x_{n+k}=x_n$. Тогда x_n — решение линейного уравнения с целыми коэффициентами $a_k+2^kb_kx_n=x_n$. Это уравнение имеет единственное решение, так как $2^kb_k=\pm 2^k\neq 1$. Это решение рационально, так что x_n — рациональное число. Но тогда x_{n-1} — рациональное число, x_{n-2} — рациональное число и т. д. Значит, x_1 — тоже рациональное число.

Второй способ. Запишем число x_1 в двоичной системе счисления (см. факт 12):

$$x_n=0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

Если $a_1=0$, то двоичная запись числа x_{n+1} получается из двоичной записи числа x_n сдвигом (проверьте!):

$$x_{n+1}=0{,}a_2a_3a_4\ldots$$

Если же $a_1=1$, то двоичная запись числа x_{n+1} получается из двоичной записи числа x_n сдвигом с заменой всех единиц на нули, а нулей — на единицы (назовем это инверсией). Докажем, что если x_n периодична, то a_n тоже периодична. Если $x_{n+k}=x_n$ и между ними произошло четное число инверсий, то $a_{n+k}=a_n$. Если между x_n и x_{n+k} произошло нечетное число инверсий, то $a_{n+2k}=1-a_{n+k}=a_n$. В обоих случаях a_n периодична. Но число, двоичная запись которого периодична, — рационально (см. факт 13).

Комментарии. 1°. Заметим, что функция $y=f(x)=1-|1-2x|$ линейна на каждом из отрезков [0; 1/2] и [1/2; 1]:

$$y=\begin{cases}2x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 2-2x & \text{при } 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Аналогично, функция

$$y = f_n(x) = \underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{n \text{ раз}},$$

переводящая x_1 в x_n, линейна на каждом из отрезков $\left[\frac{k}{2^n};\ \frac{k+1}{2^n}\right]$. Графики функций $y = f(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ показаны на (рис. 51).

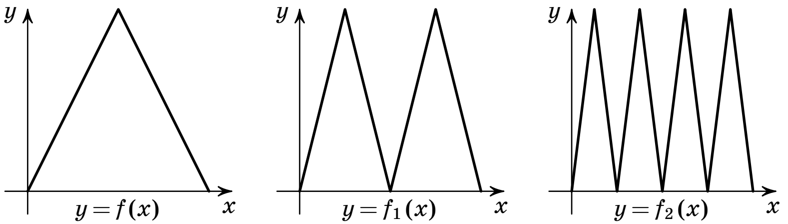


Рис. 51

2°. Для каждого $T = 2, 3, \ldots$ существует по крайней мере одна точка с периодом T — это, например, абсцисса последней точки пересечения отрезка $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, с графиком функции $y = f_T(x)$, $x_1 = 2^T/(2^T + 1)$.

Подумайте над вопросом: сколько существует периодических траекторий для каждого периода T (или, что почти то же самое, — точек x, для которых $x = f_T(x)$, причем $x \neq f_k(x)$, если $k < T$)?

3°. Задача возникла из символической динамики. Функция $f(x) = 1 - |1 - 2x|$ называется «палаточным отображением».

3. Первый способ. Назовем депутатов врагами, если один другого бил. Индукцией по n (см. факт 24) докажем следующее утверждение: *если в парламенте $M \geqslant 3n - 2$ депутатов, и каждый дал пощечину ровно одному коллеге, то можно составить парламентскую комиссию из n человек, в которой нет врагов.* При $n = 665$ из этого будет следовать утверждение задачи, так как $1994 > 1993 = 3 \cdot 665 - 2$.

База индукции ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции: Так как число депутатов равно числу пощечин (равно M), по принципу Дирихле (см. факт 1) найдется депутат, получивший не более одной пощечины. У него не более двух врагов (его враги — тот, кто его бил и тот, кого он бил). Отправим этого депутата в комиссию, а его врагов (которых не больше двух) выведем из парламента. В парламенте осталось $M - 3 \geqslant 3(n - 1) - 2$

депутатов. По предположению индукции, из них можно создать комиссию из $n-1$ депутатов, не бивших друг друга. Вместе с уже выбранным депутатом они составят комиссию из n депутатов. Ясно, что в этой комиссии никто никого не бил.

Второй способ. Рассмотрим ориентированный граф Γ (см. факт 3), вершины которого — депутаты, а ребра — пощечины (т. е. ребро, ведущее от одного депутата к другому, означает, что первый депутат дал второму пощечину).

Ориентированным деревом будем называть граф следующего вида: имеется одна вершина уровня 1 (корень), в нее ведут стрелки из вершин уровня 2, в вершины уровня 2 — стрелки из вершин уровня 3, причем из каждой вершины выходит ровно одна стрелка, и т. д. вплоть до вершин некоторого уровня k.

Мы утверждаем, что компоненты связности графа Γ выглядят следующим образом: ориентированный цикл, к вершинам которого «подвешены» (попарно непересекающиеся) ориентированные деревья (рис. 52). Действительно, выйдем из произвольной вершины и будем двигаться по ребрам (в направлении стрелок), пока не придем в вершину, в которой мы уже были. Это обязательно произойдет, так как вершин конечное число (1994). Значит, в каждой компоненте графа есть цикл.

Возьмем любую вершину цикла. В нее входит стрелка из единственной вершины цикла, и, возможно, из других вершин. Назовем эти другие вершины вершинами уровня 2. В них могут входить стрелки из вершин, которые мы назовем вершинами уровня 3, и т. д.

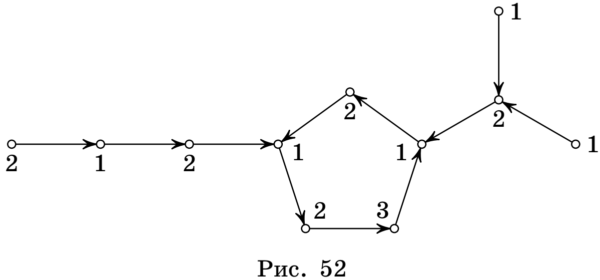


Рис. 52

Теперь раскрасим граф в 3 цвета так, чтобы концы любого ребра были разного цвета. В цикле четной длины покрасим депутатов через одного. Если цикл имеет нечетную длину, покрасим одного из депутатов в 3-й цвет, а остальных — через одного.

С деревьями поступим так. Пусть, например, корень покрашен в 1-й цвет. Тогда вершины второго уровня покрасим во 2-й цвет, 3-го уровня — снова в 1-й и т. д. Понятно, что граф Γ будет раскрашен не более чем в 3 цвета.

Ясно, что вершин некоторого цвета не меньше трети, т. е. не меньше, чем 667. Достаточно создать комиссию из депутатов этого цвета.

Комментарии. 1°. Если бы все циклы содержали четное число депутатов, то хватило бы двух цветов (третий цвет нужен для циклов нечетной длины).

2°. Приведите пример ситуации, когда комиссию из 668 депутатов создать не удастся.

3°. Более общий факт состоит в следующем. Пусть каждый депутат дал своим коллегам ровно k пощечин. Тогда найдется «приличная» комиссия, содержащая не менее, чем $\frac{n}{2k+1}$ депутатов. Идея решения та же: у наименее битого депутата не больше $2k$ врагов (k из них бил он и не более k били его). Отправим его в комиссию, а его врагов выведем из парламента.

4. Попробуем угадать, чему равна длина отрезка AK. Рассмотрим предельный случай, когда точка D стремится к C, тогда вторая окружность сжимается в точку, а отрезок AK превращается в отрезок касательной к первой окружности. Легко видеть, что в этом случае $AK = \frac{AB+AC-BC}{2}$. Докажем, что эта формула верна всегда (а не только в предельном случае).

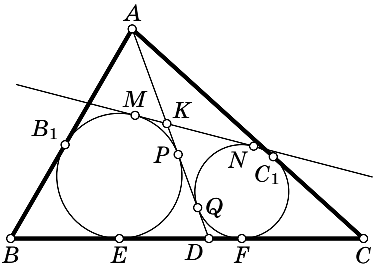


Рис. 53

Обозначим точки касания, как показано на рис. 53.

Заметим, что $AB_1 = AP$, $AC_1 = AQ$, $KM = KP$, $KN = KQ$ (это отрезки касательных, проведенных из одной точки).

Кроме того, $MN = EF$ — отрезки общих касательных к окружностям (см. факт 17). Преобразуем наш гипотетический ответ (удвоенный), учитывая эти равенства:

$$AB + AC - BC = AB_1 + AC_1 - EF = AB_1 + AC_1 - MN =$$
$$= AP + AQ - MN = AP + AQ - (MK + KN) =$$
$$= (AP - KP) + (AQ - KQ) = 2AK.$$

Значит,

$$AK = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Задача решена.

5. Первый способ. а) Примером служит многоугольник, состоящий из трех одинаковых квадратов (залов), соединенных тонкими изогнутыми коридорами (рис. 54). Докажем, что такая конструкция дает решение, т. е. никакая хорда не делит многоугольник на две равновеликие части.

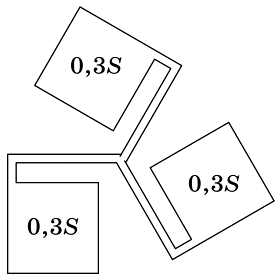


Рис. 54

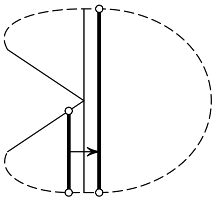
Пусть S — площадь многоугольника, $0{,}3S$ — площадь одного зала ($0{,}1S$ — суммарная площадь всех коридоров). Если хорда пересекает только коридор, то по одну сторону от нее расположены два зала, и их площадь больше половины площади многоугольника. Если хорда пересекает один из залов, то она не пересекает «перекрестка» трех коридоров, а тогда опять в одной части расположены два зала.

б) Идея состоит в том, чтобы двигать хорду по контуру многоугольника в ту сторону, в которую площадь меньшей части увеличивается.

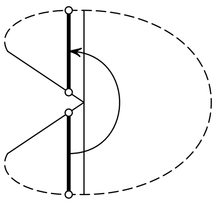
Выберем направление хорды, не параллельное сторонам и диагоналям многоугольника, и будем считать это направление вертикальным. Тогда хорда может проходить не более чем через одну вершину многоугольника. Если ни одна внутренняя точка хорды не является вершиной многоугольника, то хорда делит многоугольник ровно на 2 части, в противном случае — ровно на 3.

Если площадь меньшей части больше или равна $S/3$, то задача решена. В противном случае, будем двигать хорду перпендикулярно вертикали в ту сторону, в которую площадь меньшей части многоугольника растет. При движении хорда может «натолкнуться» на внутреннюю вершину (но не на 2 вершины сразу).

Если хорда не встречает препятствий на своем пути, площадь наименьшей части изменяется непрерывно (см. комментарий к решению задачи 4 для 11 класса олимпиады 2000 г.). Если в какой-то момент она достигнет $S/3$, то задача решена. В противном случае, хорда натолкнется на внутреннюю вершину. В этом месте могут сходиться или расходиться два коридора (рис. 55, *а*), тогда хорда, выходя из коридора, скачком увеличится или, входя в коридор, скачком уменьшится (или «перепрыгнет» в другую часть многоугольника, как на рис. 55, *б*). Что произойдет с площадями?



а)



б)

Рис. 55

Из трех образовавшихся частей многоугольника самая большая должна иметь площадь больше $S/3$. Направим вертикальную хорду в наибольшую часть, тогда две меньшие части объединятся. Если их площадь станет больше или равна $S/3$, то задача решена. В противном случае продолжаем двигать хорду, пока она не натолкнется на следующую вершину, и т. д.

Мы утверждаем, что этот процесс рано или поздно завершится, т. е. площадь меньшей части достигнет $S/3$. Действительно, площадь меньшей части все время растет, поэтому мы не можем пройти два раза через одну и ту же внутреннюю вершину. Но внутренних вершин — конечное число, значит, процесс завершится. См. также факт 2.

В т о р о й с п о с о б (набросок). б) Любой многоугольник можно разбить на треугольники диагоналями, лежащими внутри него (триангулировать). Рассмотрим такую триангуляцию. Каждая из диагоналей триангуляции разбивает многоугольник на две части. Пусть AB — та из диагоналей триангуляции, для которой площадь меньшей части максимальна. Пусть ABC — треугольник триангуляции, примыкающий к AB со стороны большей части.

Обозначим через S_{AB}, S_{BC} и S_{AC} площади частей, примыкающих к соответствующим сторонам треугольника ABC и не содержащих этого треугольника. Тогда

$$S = S_{AB} + S_{BC} + S_{AC} + S_{ABC}.$$

Можно считать, что $S_{BC} \geqslant S_{AC}$. Теперь из условия максимальности, наложенного на хорду, можно вывести, что

$$S_{AB} \geqslant S_{BC} \geqslant S_{AC}.$$

Из этих неравенств можно вывести, что $S_{AB} + S_{ABC} \geqslant S/3$. Если $S_{AB} \geqslant S/3$, то задача решена, в противном случае пусть X — такая точка на стороне AC, что $S_{AB} + S_{ABX} = S/3$. Проверьте, что хорда, проходящая через B и X, удовлетворяет условию задачи.

Комментарии. 1°. В пункте «а» остается вопрос: нельзя ли разрезать этот многоугольник хордой на *три или более* равновеликие части (см. комментарий к условию). Нетрудно так подправить размеры залов, чтобы это было невозможно. Пусть, например, площади залов равны $0{,}3S$, $0{,}33S$ и $0{,}36S$. Докажите сами, что такой многоугольник нельзя разрезать (одной хордой) ни на какое количество равновеликих частей.

2°. Можно нарисовать такое многоугольное кольцо, которое нельзя разделить хордой на два многоугольника, площадь меньшего из которых не меньше $S/3$. В чем здесь дело? А дело в определении многоугольника: границей многоугольника служит одна ломаная. Иначе говоря, многоугольное кольцо — это не многоугольник. Заметим также, что не всякая хорда делит кольцо на части.

3°. Второй способ решения пункта «б» показывает, что искомую хорду всегда можно выбрать проходящей через одну из вершин.

6. Важное наблюдение состоит в том, что достаточно найти такой многочлен, что коэффициенты его квадрата и куба положительны. Любая другая степень представима в виде произведения квадратов и кубов.

Назовем многочлен

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

положительным, если все его коэффициенты положительны: $a_i > 0$ при $i = 0, \ldots, n$.

Рассмотрим многочлен $f(x)=x^4+x^3+x+1$. Нетрудно видеть, что $(f(x))^2$ и $(f(x))^3$ — положительные многочлены, но сам многочлен $f(x)$ не является положительным: коэффициент при x^2 равен нулю. Однако нам нужен многочлен с отрицательным коэффициентом. Идея состоит в том, чтобы немного «пошевелить» многочлен $f(x)$.

Рассмотрим многочлен $g(x)=f(x)-\varepsilon x^2$ при достаточно малом $\varepsilon>0$. Коэффициенты многочленов $(g(x))^2$ и $(g(x))^3$ близки к коэффициентам многочленов $(f(x))^2$ и $(f(x))^3$ и, значит, положительны. Последнее утверждение может показаться нестрогим человеку, не знакомому с математическим анализом. В этом случае предлагается взять, например, $\varepsilon=\frac{1}{125}$ и проверить «руками», что соответствующие многочлены положительны.

Итак, ответ дается многочленом

$$g(x)=f(x)-\varepsilon x^2=x^4+x^3-\varepsilon x^2+x+1$$

при достаточно малом $\varepsilon>0$.

Комментарий. При $\varepsilon=0$ коэффициенты многочлена $f(x)=x^4+x^3-\varepsilon x^2+x+1$ можно записать как число: 11011, тогда коэффициенты $(f(x))^2$ и $(f(x))^3$ можно записать в виде последовательности цифр $11011^2=121242121$ и $11011^3=1334996994331$ (многочлены перемножаются «столбиком» так же, как многозначные числа).

11 класс

1. Будем искать многогранник с наименьшим числом граней. Из двух треугольников и двух квадратов нельзя составить многогранник.

Шестигранник с двумя треугольными, двумя четырехугольными и двумя пятиугольными гранями сделать можно: расположим два пятиугольника с общим ребром в виде открытой ракушки, а щель заполним двумя треугольниками (по краям) и двумя четырехугольниками (рис. 56).

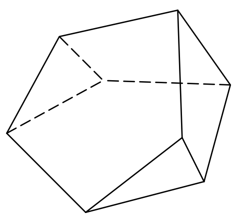


Рис. 56

Такой многогранник получится, если у тетраэдра срезать две соседние вершины. Другое решение — срезать две соседние вершины у куба.

К о м м е н т а р и и. 1°. На московской олимпиаде 1973 г. в 10 классе была родственная задача: «Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.»

2°. Подумайте над такой задачей: «Докажите, что в любом $10n$-граннике найдутся n граней с одинаковым числом сторон».

2. См. решение задачи 2 для 10 класса.

3. Решим сначала другую задачу: построим окружность с центром на оси y, которая касается оси x и выясним, при каком наименьшем радиусе r она имеет с кривой $y=x^4$ общую точку, отличную от начала координат (рис. 57). Иначе говоря, при каком наименьшем r система уравнений

$$y=x^4, \quad x^2+(y-r)^2=r^2$$

имеет ненулевое решение. Интуитивно ясно, что эти задачи эквивалентны, позже мы докажем это строго.

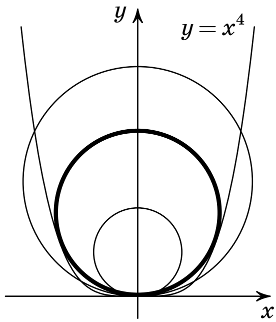


Рис. 57

Подставим $y=x^4$ в уравнение окружности. Приведем подобные члены и сократим на x^2 $(x>0)$:

$$x^6-2rx^2+1=0$$

Выразим r через x:

$$r(x)=\frac{1}{2}\left(x^4+\frac{1}{x^2}\right).$$

Искомое число r_0 есть минимум этой функции. Производная функции равна

$$r'(x)=2x^3-\frac{1}{x^3}.$$

При $x>0$ эта производная ведет себя следующим образом: она отрицательна при $x<x_0=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, равна нулю в точке x_0 и положительна при $x>x_0$. Значит, $r(x)$ убывает при $0<x<x_0$, достигает минимума при $x=x_0$ и возрастает при $x>x_0$.

Итак, наименьшее r, при котором окружность имеет общую точку с кривой $y=x^4$, —

$$r_0=r(x_0)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Осталось показать, что это r_0 дает ответ и в исходной задаче. Покажем, сначала, что соответствующая вишенка целиком содержится в бокале. Действительно, при любом $x \neq 0$ имеем $r_0 \leqslant r(x)$. Подставляя в это неравенство выражение для $r(x)$, получаем, что при любом x

$$x^6 - 2r_0x^2 + 1 \geqslant 0.$$

Умножая обе части на x^2 и подставляя $y = x^4$, получим

$$x^2 + (y - r_0)^2 \geqslant r_0^2$$

при всех x, $y = x^4$. Но это и значит, что вишенка находится в бокале.

Осталось показать, что если $r > r_0$, то вишенка не коснется начала координат. Действительно, в этом случае

$$x_0^6 - 2rx_0^2 + 1 < 0,$$

поэтому при $y_0 = x_0^4$ имеем

$$x_0^2 + (y_0 - r)^2 < r^2.$$

Это означает, что окружность радиуса r, касающаяся оси абсцисс в начале координат, пересекает график функции $y = x^4$. Поэтому вишенка не касается дна.

К о м м е н т а р и и. 1°. Нетрудно видеть, что «максимальная» вишенка касается кривой $y = x^4$ в начале координат и еще в двух точках.

2°. Аналогичную задачу можно решить для графика функции $y = |x|^a$ при любом a. Для абсциссы точки касания «максимальной вишенки» получаем уравнение $x^{2(a-1)} = \dfrac{a-2}{a}$.

а) При $a > 2$ есть ненулевое решение, и ситуация такая же, как и при $a = 4$;

б) при $a = 2$ получим $x = 0$ и $r = 1/2$ — радиус кривизны графика в точке $(0; 0)$, — максимальная вишенка касается параболы в единственной точке;

в) при $0 < a < 2$ никакой круг не может коснуться «дна» графика.

4. Сделаем гомотетию исходного многогранника M с центром в точке A и коэффициентом 2. Объем растянутого многогранника M' будет в 8 раз больше объема многогранника M. Докажем, что все 8 «перенесенных» многогранников содержатся в M'.

Пусть вершину A перенесли в вершину B, X — произвольная точка многогранника M, Y — образ точки X при соответствующем параллельном переносе (рис. 58). Докажем, что точка Y принадлежит M'.

Отрезок BX целиком содержится в многограннике M, так как многогранник — выпуклый. Значит, его середина K принадлежит многограннику. Четырехугольник $ABYX$ — параллелограмм, поэтому Y получается из K гомотетией с центром в точке A и коэффициентом 2, следовательно, точка Y принадлежит M'.

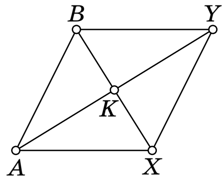


Рис. 58

Заметим, что точки вблизи вершины A не принадлежат ни одному из «перенесенных» многогранников. Действительно, расположим многогранник так, чтобы вершина A была выше всех остальных вершин, тогда существует плоскость, которая проходит ниже вершины A, но выше всех остальных вершин. Эта плоскость отрезает от многогранника M маленький многогранник N, содержащий точку A. Ясно, что он не пересекается ни с одним из перенесенных многогранников.

Предположим теперь, что перенесенные многогранники не пересекаются по внутренним точкам, тогда объем многогранника M' не меньше, чем сумма объема многогранника N и объемов перенесенных многогранников. Но суммарный объем перенесенных многогранников в точности равен объему многогранника M'. Противоречие.

Комментарии. 1°. Задача легко обобщается для n-мерного пространства.

2°. Более слабая формулировка задачи была на XIII Международной математической олимпиаде. Требовалось доказать, что пересекаются хотя бы два из девяти (а не восьми) многогранников.

5*. Сделать чертеж к задаче очень трудно (точки пересечения лежат далеко друг от друга), поэтому будем искать решение из общих соображений. Вспомним, что точки биссектрисы угла равноудалены от сторон этого угла.

Для каждой прямой, содержащей сторону четырехугольника $ABCD$, определим функцию f_i — ориентированное расстояние до этой прямой: если точка лежит по ту же сторону от прямой, что и четырехугольник, то берем обычное расстояние, а если — по другую сторону, то расстояние со знаком минус. Эти четыре функции f_1, f_2, f_3, f_4 от координат точек являются линейными (см. факт 25), т. е. записываются в виде $f_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i$.

Заметим, что точка лежит на биссектрисе внешнего угла четырехугольника тогда и только тогда, когда сумма значений двух функций для сторон угла обращается в нуль.

Для каждой из точек пересечения биссектрис, о которых говорится в условии, получаем, что сумма всех четырех функций обращается в нуль.

Но сумма линейных функций является линейной функцией, а множество точек, на котором линейная функция, отличная от константы, принимает постоянное значение, есть прямая.

Сумма наших четырех функций не является тождественным нулем, поскольку внутри четырехугольника она положительна. Поэтому указанные точки пересечения биссектрис лежат на одной прямой.

Комментарии. 1°. Зная идею решения с линейными функциями, можно сделать пространственное обобщение задачи.

2°. Есть более простая задача на ту же идею: найти геометрическое место точек в треугольнике, для которых сумма расстояний до двух сторон равна расстоянию до третьей. (Точки пересечения биссектрис со сторонами треугольника удовлетворяют условию. Значит, и отрезки между ними тоже удовлетворяют.)

3°. В школьной математике линейными функциями называют многочлены степени не выше первой. В линейной алгебре линейная функция — это многочлен степени не выше первой и без свободного члена. В этом смысле линейная функция от двух переменных имеет вид: $f(x, y) = ax + by$. Функции вида $ax + by + c$ называются *аффинными*.

6. От чего может появиться много девяток подряд в степенях двойки? — Если степень двойки «чуть» меньше числа, делящегося на большую степень десятки. Например, $2^{12} + 4$ делится на 100, $2^{53} + 8$ делится на 1000.

Попробуем найти сначала числа вида $2^n + 1$, которые делятся на высокую степень пятерки. Затем домножим эти числа на соответствующую степень двойки и получим числа вида $2^k(2^n + 1)$, делящиеся на высокую степень десятки. Раскрывая скобки и отбрасывая меньшее слагаемое, получим нужную степень двойки.

Лемма. *При всех $k \geqslant 1$ число $2^{2\cdot 5^{k-1}}+1$ делится на 5^k.*

Докажем это по индукции (см. факт 24). База ($k=1$) очевидна. Докажем шаг индукции: имеем

$$2^{2\cdot 5^{k-1}}+1=4^{5^{k-1}}+1.$$

Пусть $a=4^{5^{k-1}}$. По предположению индукции $a+1$ делится на 5^k. Тогда $4^{5^k}+1=a^5+1=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$. Поскольку $a+1$ делится на 5^k, достаточно доказать, что второй сомножитель делится на 5. Действительно, a имеет вид $5m-1$, поэтому все слагаемые во втором сомножителе при делении на 5 дают остаток 1 (см. факт 7), а их сумма дает остаток нуль. Лемма доказана.

Итак, число $2^k(2^{2\cdot 5^{k-1}}+1)$ оканчивается не меньше, чем k нулями. Несложно убедиться, что при $k>1$ количество цифр числа 2^k не превосходит $k/2$. Значит, среди последних k цифр числа $2^{2\cdot 5^{k-1}+k}$ не более $k/2$ цифр могут отличаться от 9.

Комментарии. 1°. Похожими рассуждениями можно доказать, что числа 4^0, 4^1, 4^2, …, 4^{5^k-1} дают различные остатки при делении на 5^k. Попробуйте доказать более общий факт: если $x-1$ делится на p^k ($p>2$ — простое, $k>0$), но не делится на p^{k+1}, то x^n-1 делится на p^{k+r} тогда и только тогда, когда n делится на p^r. Это важное утверждение (лемма Гензеля) часто используется в теории чисел.

2°. На Ленинградской городской олимпиаде 1981 г. была похожая задача: существует ли натуральная степень числа 5, в ста младших разрядах которой встречается по крайней мере 30 нулей подряд?

1995 год

8 класс

1. Обозначим цену хлеба через x, а цену кваса — через y (до подорожания). Тогда, по условию: денежка $=x+y$. После повышения цен хлеб стал стоить $1{,}2x$, а квас — $1{,}2y$. Поэтому

$$\text{денежка} = 0{,}5\ \text{хлеба} + \text{квас} = 0{,}6x+1{,}2y.$$

Из этих уравнений получаем:

$$x+y=0{,}6x+1{,}2y.$$

Упрощая, получим $2x=y$.

Выразим денежку через y:

$$\text{денежка} = x + y = 1{,}5y.$$

После второго повышения цен квас стал стоить $1{,}2 \cdot 1{,}2y = 1{,}44y$. Так как $1{,}5y > 1{,}44y$, денежки на квас хватит.

2. Докажем утверждение по индукции (см. факт 24).

База индукции: 10017 делится на 53. Действительно, $10017 = 53 \cdot 189$.

Шаг индукции. Покажем, что если число указанного вида делится на 53, то и следующее за ним делится на 53. Для этого вычислим разность двух соседних чисел:

$$100\underbrace{1\ldots1}_{k\ \text{единиц}}7 - 100\underbrace{1\ldots1}_{k-1\ \text{единица}}7 = (1001 - 100) \cdot 10^k = 901 \cdot 10^k$$

(последние k цифр сокращаются). Эта разность всегда делится на 53, так как $901 = 53 \cdot 17$.

Если вычитаемое делится на 53 и разность делится на 53, то и уменьшаемое делится на 53 (см. факт 5). Наше утверждение доказано по индукции.

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 1 для 9 класса.

2°. Можно показать, что частное от деления данного числа на 53 имеет вид 18...89.

3. а) При повороте на 120° по часовой стрелке вокруг точки O отрезок AC переходит в BD, а значит, их длины равны (рис. 59). Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому он параллелен отрезку AC, а его длина равна половине длины отрезка AC.

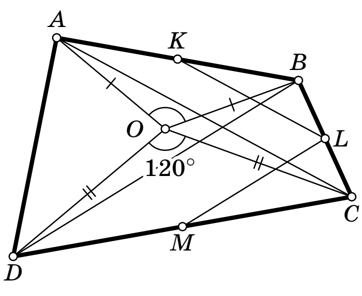


Рис. 59

Аналогично, отрезок LM параллелен отрезку BD, а его длина равна половине длины этого отрезка. Поэтому

$$KL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = LM.$$

б) Так как отрезок AC переходит в BD при повороте на 120°, угол между этими отрезками равен 60°. Так как отрезки KL и LM параллельны отрезкам AC и BD, угол между ними тоже равен 60°. Используя утверждение пункта «а», видим, что треугольник KLM правильный.

4. Достаточно взять коробку размером $11\times 13\times 14$. Ее объем равен 2002, т. е. достаточен; а общая площадь ее стенок равна $2\cdot(11\cdot 13+11\cdot 14+13\cdot 14)=958$.

Комментарии. 1°. Как догадаться до такого решения? Известно, что минимальную площадь поверхности при заданном объеме среди всех параллелепипедов имеет куб — это следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, см. факт 26. Однако куб с объемом 1995 будет иметь иррациональные длины сторон. Таким образом, нужно пытаться подобрать коробку, близкую по форме к кубу, но с целыми длинами сторон. «Ближайшие» кубы: $12\times 12\times 12$ и $13\times 13\times 13$ (их объемы 1728 и 2197 соответственно). Может показаться, что наиболее «экономный» вариант — $12\times 13\times 13$. К сожалению, этот параллелепипед дает лишь решение пункта «а». Продолжая перебор параллелепипедов близких к кубу, можно найти решение задачи.

2°. 957 единиц материала не хватит на изготовление коробки.

5. Первый способ. Докажем сначала, что от перестановки порядка двух последовательных поездок стоимость перевозки не изменится. Иными словами, пусть автомобиль посетил некоторый населенный пункт M, а потом — населенный пункт N. Покажем, что если бы он сначала поехал в N, а потом — в M, то стоимость была бы той же самой.

Пусть расстояния до M и N равны m и n соответственно. Тогда веса соответствующих грузов — тоже m и n. Стоимость перевозки остальных грузов не меняется от перестановки поездок в M и N. Стоимость перевозок грузов m и n в города, отличные от M и N, тоже не изменится. Вычислим стоимость перевозки грузов m и n в города M и N. В первом случае эта стоимость равна $(m+n)m+nm+n^2$: первое слагаемое соответствует поездке в пункт M, второе — поездке обратно в город, третье — поездке в N.

Аналогично, стоимость перевозки грузов m и n во втором случае равна $(m+n)n+mn+m^2$. Нетрудно видеть, что эти стоимости равны. Утверждение доказано.

Пусть есть два разных порядка объезда населенных пунктов. Первый порядок можно превратить во второй, переставляя последовательные поездки. Это утверждение нетрудно доказать индукцией по числу городов. Заметим, что оно очень важно в теории перестановок, см. [23], гл. 2. По доказанному, при каждой такой перестановке общая стоимость перевозки не меняется, значит, она не зависит от порядка объезда населенных пунктов.

В т о р о й с п о с о б. Занумеруем грузы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в том порядке, в каком их развозят, тогда стоимость перевозки равна

$$a_1(a_1+2a_2+2a_3+\ldots+2a_n)+a_2(a_2+2a_3+\ldots+2a_n)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(a_{n-1}+2a_n)+a_n^2=$$
$$=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+2a_2a_3+\ldots$$
$$\ldots+2a_{n-1}a_n=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2.$$

Получилось выражение, которое не зависит от порядка нумерации грузов.

6. Будем считать, что N лежит на AB, а K лежит на AF (рис. 60). Заметим, что $FK=AN$. Выберем точку P на BC, точку R на CD, точку S на DE и точку T на EF так, чтобы выполнялись равенства $FK=AN=BP=CR=DS=ET$. Тогда $\angle KBN=\angle TAK$, $\angle KCN=\angle SAT$, $\angle KDN=\angle RAS$, $\angle KEN=\angle PAR$, $\angle KFN=\angle NAP$, откуда

$$\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+$$
$$+\angle KEN+\angle KFN=$$
$$=\angle KAN+\angle TAK+\angle SAT+\angle RAS+$$
$$+\angle PAR+\angle NAP=$$
$$=\angle KAN+\angle KAN=120^\circ+120^\circ=240^\circ.$$

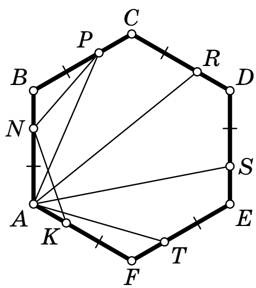


Рис. 60

9 к л а с с

1. Докажем утверждение по индукции (см. факт 24).

Б а з а и н д у к ц и и: 12008 делится на 19, действительно, $12008=19\cdot 632$.

Ш а г и н д у к ц и и. Покажем, что если число указанного вида делится на 19, то и следующее за ним делится на 19. Для этого достаточно доказать, что разность двух соседних чисел делится на 19 (см. факт 5):

$$120\underbrace{3\ldots3}_{k\text{ троек}}08-120\underbrace{3\ldots3}_{k-1\text{ тройка}}08=1083\cdot10^k.$$

Эта разность делится на 19, так как $1083=19\cdot57$. Наше утверждение доказано по индукции.

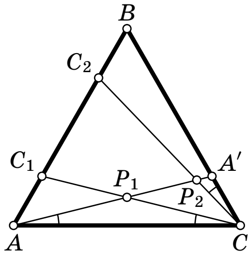
К о м м е н т а р и и. 1°. Сравните с задачей 2 для 8 класса.
2°. Можно показать, что частное будет иметь вид $63\ldots32$.

2. Выберем произвольную точку A' на BC и проведем отрезок AA' (рис. 61, *а*). Докажем, что среди отрезков с началом в точке C и концом на стороне AB имеются только два, равных отрезку AA' — это такие отрезки CC_1 и CC_2, что

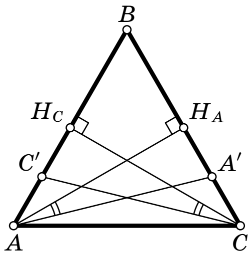
$$\angle C_1CA=\angle A'AC,\qquad \angle C_2CB=\angle A'AC.$$

Действительно, если рассмотреть симметрию треугольника относительно высоты, выходящей из точки B, то видно, что $CC_1=AA'$. Симметрия относительно высоты, выходящей из точки C, показывает, что $CC_2=CC_1$.

То, что нет других таких точек C', что $CC'=AA'$, следует из того, что из точки на прямую можно провести не более двух наклонных данной длины.



а)



б)

Рис. 61

Приведем более строгое доказательство. Пусть $CC'=AA'$. Проведем высоты AH_A и CH_C (рис. 61, *б*). Прямоугольные треугольники $C'H_CC$ и $A'H_AA$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle H_CCC'=\angle H_AAA'$. Возможны две ситуации: точка C' лежит между точками A и H_C, и точка C лежит между B и H_C. В первом случае углы $C'CA$ и $A'AC$ равны, во втором — углы $C'CB$ и $A'AC$ равны.

Итак, осталось рассмотреть точку пересечения AA' и CC_1 и точку пересечения AA' и CC_2.

Точка P_1, в которой пересекаются отрезки AA' и CC_1, лежит на высоте треугольника ABC, выходящей из вершины B. Это (интуитивно очевидное) утверждение можно доказать так: треугольник AP_1C равнобедренный, так как углы при основании равны. Значит, серединный перпендикуляр к отрезку AC является высотой этого треугольника, и, значит, он проходит через точку P_1. Но этот серединный перпендикуляр является и высотой треугольника ABC. Значит, точка P_1 лежит на высоте треугольника ABC. В силу симметрии все точки на этой высоте удовлетворяют условию задачи.

Пусть P_2 — точка пересечения AA' и CC_2. Имеем:

$$\angle AP_2C = 180^\circ - \angle A'AC - \angle C_2CA = \\ = 180^\circ - \angle A'AC - (60^\circ - \angle A'AC) = 120^\circ,$$

т. е. отрезок AC виден из точки P_2 под углом 120°. Геометрическое место точек внутри треугольника ABC, из которых отрезок AC виден под углом 120°, — это дуга окружности с концами в точках A и C Нетрудно видеть, что эта дуга проходит через центр треугольника ABC.

Проводя предыдущие рассуждения в обратном порядке, видим, что все точки этой дуги удовлетворяют условию (проверьте).

3. Идея решения: возьмем максимальную полоску (равную максимальной стороне прямоугольника). Остальные полоски будем объединять в пары, дающие в сумме максимальную полоску. Если мы заполнили прямоугольник, то задача решена; в противном случае рассуждение с площадями показывает, что прямоугольник нельзя разрезать на различные полоски.

Рассмотрим два случая: $n \leqslant 1995$ и $n > 1995$.

Случай $n \leqslant 1995$. Если $n \leqslant 998$, то разрежем прямоугольник на n полосок длиной 1995. Первую сохраним, вторую разрежем на две полоски длиной 1 и 1994, третью — на две полоски длиной 2 и 1993 и т. д. Последняя полоска 1×1995 будет разрезана на части $1 \times (n-1)$ и $1 \times (1996 - n)$. У нас получились полоски с длинами:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ 1996-n,\ (1996-n)+1,\ \ldots,\ 1994,\ 1995.$$

Ясно, что первые $n-1$ полосок различны, остальные полоски тоже различны. Однако, чтобы среди первых $n-1$ полосок не было полосок, равных одной из остальных полосок, необходимо (и достаточно), чтобы $n-1<1996-n$. Это неравенство выполняется, потому что $n \leqslant 998$. Такое разрезание для прямоугольника 5×9 изображено на рис. 62.

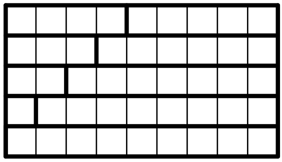


Рис. 62

Покажем, что при $998<n \leqslant 1995$ разрезать прямоугольник требуемым образом не удастся. Действительно, самая длинная полоска, которая помещается в нашем прямоугольнике, — 1×1995. Значит, даже если мы используем все 1995 возможных полосок, их суммарная площадь будет

$$1+2+3+\ldots+1994+1995=\frac{1995 \cdot 1996}{2}$$

(см. комментарий), а площадь прямоугольника равна $1995n$. Значит, должно выполняться неравенство:

$$1995n \leqslant \frac{1995 \cdot 1996}{2},$$

но это означает, что $n \leqslant 998$.

Случай $n>1995$ аналогичен. Разрежем прямоугольник на 1995 полосок длиной n. Первую сохраним, вторую разрежем на две полоски длиной 1 и $n-1$ и т. д. Получатся полоски с длинами

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 1994,\ n-1994,\ (n-1994)+1,\ \ldots,\ n.$$

Они будут различными, если $1994<n-1994$, т. е. $n \geqslant 3989$. Чтобы доказать необходимость этого условия, снова сравним площади. Так как суммарная площадь полосок не превосходит $\frac{n(n+1)}{2}$, получаем неравенство

$$1995n \leqslant \frac{n(n+1)}{2},$$

Отсюда $n \geqslant 2 \cdot 1995-1=3989$.

Комментарии. 1°. Прямоугольник $n \times m$ с $n \geqslant m$ можно разрезать на полоски различной длины тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2m-1$.

2°. Мы воспользовались формулой $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Эта формула может быть доказана по индукции. Кроме того, она является частным случаем формулы для суммы арифметической прогрессии. Тем не менее, приведем элегантное доказательство этой формулы. Обозначим $1+2+\ldots+n=X$ и посчитаем сумму всех чисел в таблице:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Так как сумма в каждом столбце равна $n+1$, а столбцов n, сумма всех чисел в таблице равна $n(n+1)$. С другой стороны, сумма в каждой из строк равна X, так что сумма всех чисел в таблице равна $2X$. Итак, $2X=n(n+1)$, откуда и следует наше утверждение.

4. Первый способ. Из условия следует, что

$$a+b+c+d=a+b+c+\frac{ab}{c}=\frac{(a+c)(b+c)}{c}$$

— целое число. Значит, дробь сократима. Поскольку оба сомножителя в числителе больше знаменателя, то после сокращения от каждого из них останется число, большее единицы. Итак, число $a+b+c+d$ является произведением двух сомножителей, больших единицы, и значит, не является простым.

Комментарий. Мы воспользовались нетривиальным утверждением: если дробь $\frac{xy}{z}$ представляет собой целое число, то можно представить z в виде произведения ts так, чтобы x делилось на t, а y делилось на s. Если Вы разберетесь во втором способе решения, то Вам станет понятно, как это утверждение доказать строго.

Второй способ. Докажем следующее утверждение: *если $ab=cd$, то найдутся натуральные u, v, w, z такие, что $a=uv$, $b=wz$, $c=uw$, $d=vz$.* Действительно, разложим числа a, b и c на простые множители. Так как число c является делителем произведения ab, все его простые множители присутствуют среди множителей a и b (причем, если простой множитель входит в c несколько раз, то он входит в a и b в сумме по крайней мере столько же раз). Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все простые делители чисел a и b. Тогда

$$\begin{aligned} a&=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n},\\ b&=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\ldots p_n^{l_n},\\ c&=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}, \end{aligned}$$

где некоторые из чисел k_i, l_i, m_i могут быть равны нулю. Как объяснялось выше, $m_i \leqslant k_i + l_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Значит, можно представить m_i в виде $t_i + s_i$, где $t_i \leqslant k_i$, $s_i \leqslant l_i$. Положим

$$u = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n},$$
$$w = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}.$$

Тогда $c = uw$. Кроме того, u — делитель числа a, а w — делитель числа b. Поэтому можно записать $a = uv$, $b = wz$ с целыми v и z. Тогда

$$d = \frac{ab}{c} = \frac{uvwz}{uw} = vz.$$

Утверждение доказано.

Итак,

$$a + b + c + d = uv + wz + uw + vz = (u + z)(v + w).$$

Оба множителя больше единицы, значит, число $a + b + c + d$ — составное.

5. Первый способ. Сначала изложим идею решения. Заметим, что порядок, в котором разрезали треугольники, не важен (в том смысле, что конечный результат от этого не зависит).

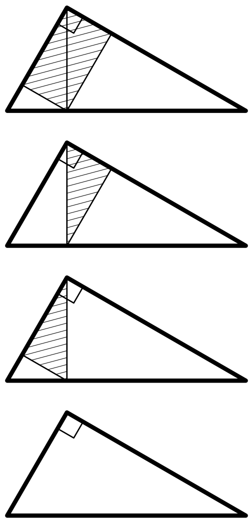


Рис. 63

Поскольку первоначально имеется четыре одинаковых треугольника, три из них придется разрезать (рис. 63). Сделаем сначала эти три разреза. В результате образуются две тройки одинаковых треугольников. В каждой из этих троек придется разрезать по два треугольника. Сделаем эти разрезы. После этого у нас опять образуются четыре одинаковых треугольника!

Теперь изложим эту идею более строго. Предположим, что после некоторого числа разрезаний из четырех одинаковых треугольников получаются попарно различные, и пусть n — наименьшее такое число. Поскольку порядок разрезаний не важен, сделаем сначала описанные выше 7 разрезаний. Получим снова 4 одинаковых треугольника, для разрезания которых потребуется $n-7$ разрезов. Но это противоречит предположению, что n — минимальное число разрезов, необходимое для того, чтобы получить разные треугольники.

Второй способ (выходящий за рамки программы 9-го класса). Пусть гипотенузы исходных треугольников равны 1, а их катеты — p и q. Тогда все получаемые разрезаниями треугольники подобны исходному с коэффициентом вида $p^m q^n$ (m и n — целые неотрицательные числа). При разрезании такого треугольника получаются два — подобные исходному с коэффициентами $p^{m+1}q^n$ и $p^m q^{n+1}$. Теперь задачу можно переформулировать так: *на координатной плоскости в вершине положительного квадранта стоят* 4 *фишки. Любую фишку можно заменять на две соседние* (*сверху и справа*). *Докажите, что нельзя добиться того, чтобы все фишки стояли в разных клетках.*

Воспользуемся идеей инварианта (см. факт 2). Запишем в клетку с координатами (m, n) число $2^{-(m+n)}$ и назовем *весом* фишки то число, на котором она стоит. Нетрудно проверить, что в процессе деления фишек сумма весов не будет меняться.

В начальный момент сумма весов фишек равна 4. Сумма чисел, записанных во всех клетках, тоже равна 4. Действительно

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(n+m)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m}\right) = 2\cdot 2 = 4.$$

Предпоследнее равенство следует из формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Поэтому если фишки стоят в разных клетках, то сумма их весов меньше 4. Следовательно, переход невозможен.

Комментарий. Похожим образом решается задача про расселение бактерий М. Концевича:

В вершине положительного квадранта сидит бактерия. Каждую секунду одна из бактерий делится на две бактерии, которые переходят в две соседние клетки (сверху и справа). В одной клетке может находиться только одна бактерия. Докажите, что в области $x + y \leqslant 5$ всегда останется хотя бы одна бактерия.

6. а) Нам будет удобнее работать с количеством банок, делящимся на 3. Поэтому введем еще одну «фиктивную» банку с нулевым весом.

Пусть, сначала, завхоз положит 27 самых легких банок на левую чашу, а 27 самых тяжелых — на правую. Этим он убедит всех геологов, что на левой чаше действительно 27 самых легких, а на правой — 27 самых тяжелых. Все банки разделились на 3 кучки по 27 банок, и про каждую из этих кучек геологи верят, что там действительно банки из этой кучки.

Теперь завхоз положит 9 самых легких банок из каждой из трех кучек на левую чашу, а 9 самых тяжелых — на правую. При этом геологи видят действия завхоза, а он не смешивает банки из разных кучек.

Теперь все банки разделились на 9 кучек по 9 банок, и геологи знают, какие банки в какой кучке. Завхоз положит по 3 самых легких банки из каждой кучки на левую чашу и по 3 самых тяжелых — на правую. Банки разделятся на 27 кучек, и геологи верят в распределение банок по кучкам. Остается взять по самой легкой банке в каждой кучке и положить на левую чашу, а самые тяжелые банки в кучках положить на правую.

б) Каждым взвешиванием банки делятся на три группы — банки на левой чаше, банки на правой чаше и банки, не участвующие во взвешивании. Самое большее, что могут узнать геологи в результате одного взвешивания, — это определить, какой набор банок лежит в каждой группе.

После первого взвешивания в одной из групп будет не меньше трети всех банок, т. е. не меньше 27 (принцип Дирихле, см. факт 1); при этом для геологов (кроме завхоза) они будут неразличимы. При втором взвешивании эта группа также разделится на 3 группы, в одной из которых будет не меньше 9 банок, неразличимых для геологов. При третьем взвешивании из этих 9 банок в одну из новых групп попадут не меньше трех банок. Поэтому трех взвешиваний недостаточно.

10 класс

1. а) Покажем сначала, что $\sin\frac{\alpha}{2}$ не может принимать больше 4 значений. Действительно, если $\sin\alpha=\sin\beta$, то $\beta=\alpha+2\pi k$ либо $\beta=\pi-\alpha+2\pi k$ (k — целое число). Соответственно $\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}+\pi k$ либо $\frac{\beta}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}+\pi k$. Этим значениям соответствуют точки на единичной окружности: $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ и только они. Некоторые из этих точек могут совпадать, но в любом случае точек не более четырех.

Осталось привести пример, когда значения синуса в этих четырех точках попарно различны. Пусть, например, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда точки на окружности, соответствующие углу $\frac{\alpha}{2}$, — это $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$. Синус принимает следующие значения в этих точках: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Если $\sin\alpha=0$, то $\alpha=k\pi$ (k — целое). Значит, $\sin\frac{\alpha}{3}$ может равняться $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Покажем, что $\sin\frac{\alpha}{3}$ не может принимать больше трех значений. Можно рассуждать, как в пункте «а». Мы приведем другое доказательство. Пусть $\sin\frac{\alpha}{3}=t$. Воспользуемся формулой синуса тройного угла:

$$\sin\alpha=\sin\left(3\cdot\frac{\alpha}{3}\right)=-4t^3+3t.$$

Осталось заметить, что многочлен третьей степени имеет не более трех корней (см. факт 20).

Комментарии. 1°. Известно, что если n нечетно, то $\sin n\varphi$ есть многочлен степени n от $\sin\varphi$, а $\cos n\varphi$ есть многочлен степени n от $\cos\varphi$ при любом n. См. комментарий к задаче 2 для 11 класса олимпиады 1996 г.

2°. Если $\sin n\varphi$ задан, то максимальное число значений, которое может принимать $\sin\varphi$ равно n при нечетном n, и $2n$ при четном n. Докажите это сами.

При заданном $\cos n\varphi$, $\cos\varphi$ может принимать не более n различных значений (вне зависимости от четности n).

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. Пусть боковые стороны трапеции — это стороны AB и CD. Обозначим через M и N вторые точки пересечения прямых AC и BD и окружностей с диаметрами AB, CD соответственно (рис. 64). Если прямая AC касается окружности с диаметром AB, то мы полагаем $M=A$, аналогично поступим, если прямая BD касается соответствующей окружности.

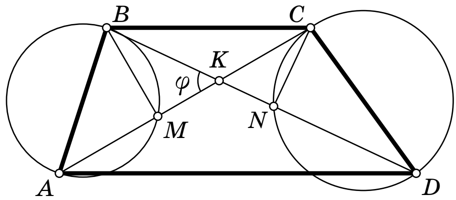


Рис. 64

По теореме о касательной и секущей квадраты касательных, проведенных из точки K к окружностям, равны $KM \cdot KA$ и $KN \cdot KD$. Это верно и в случаях $M=A$ или $N=D$. Значит, нам надо доказать, что

$$KM \cdot KA = KN \cdot KD. \tag{1}$$

Поскольку $\angle AMB$ опирается на диаметр, $\angle KMB = 90^\circ$ (см. факт 14). Опять же это верно и в случае $M=A$, так как касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Обозначим величину угла AKB через φ. Из прямоугольного треугольника KMB находим $KM = KB\cos\varphi$. Аналогично, $KN = KC\cos\varphi$. Подставляя полученные формулы в (1), находим, что нам нужно лишь доказать, что $KB \cdot KA = KC \cdot KD$. Это известное свойство трапеции следует из подобия треугольников AKD и CKB.

Вариант решения. Равенство (1) можно доказать и более геометрически. Для этого докажем, что точки A, M, N, D лежат на одной окружности.

Так как $\angle BMC = 90^\circ$ и $\angle BNC = 90^\circ$, точки B, M, N и C лежат на окружности с диаметром BC, откуда

$$\angle CMN = \angle CBN = \angle BDA$$

(так как $BC \parallel AD$).

Но тогда $\angle AMN + \angle NDA = 180^\circ$, поэтому точки A, M, N, D лежат на одной окружности. По теореме о произведении отрезка секущей на ее внешнюю часть $KM \cdot KA = KN \cdot KD$.

Однако это решение существенно опирается на рисунок: оно не проходит, например, если хотя бы одна из точек M и N лежит на продолжении диагонали. Эти случаи нетрудно разобрать отдельно (можно также воспользоваться ориентированными углами). Сложнее разобраться со случаями $M = A$ и $N = D$.

Со случаем $M = A$ можно бороться двумя способами. Первый способ состоит в том, чтобы правильно интерпретировать все утверждения в случае совпадающих точек. Например, условие «точки A, M, N и D лежат на одной окружности» нужно понимать так: прямая AK касается окружности, проходящей через точки A, N и D.

Второй способ состоит в следующем: так как $M = A$, прямые AC и AB перпендикулярны. Прямые AC и CD не могут быть перпендикулярны, так как тогда четырехугольник $ABCD$ был бы параллелограммом, а не трапецией (впрочем, для параллелограмма наше утверждение очевидно). Ясно, что прямые AB и BD не могут быть перпендикулярны. Значит, достаточно поменять местами точки A и B и точки C и D.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Первый способ. Пусть утверждение задачи не верно. Числа a, b и c можно сократить на их общий множитель, поэтому будем считать, что НОД$(a, b, c) = 1$. Пусть одно из чисел не равно ± 1, можно считать, что это число a. Пусть p — любой простой делитель числа a. Так как числа взаимно просты в совокупности, p не делит число b или p не делит число c. Рассмотрим второй случай (первый случай аналогичен).

Введем обозначение: $k(x)$ — максимальная степень p в разложении x на простые множители (см. факт 10). Можно считать, что $k(a) \geqslant k(b)$ (мы знаем, что $k(c) = 0$).

Имеем

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}.$$

Число p входит в знаменатель в степени $k(a)+k(b)$. Значит, числитель делится на $p^{k(a)+k(b)}$. Покажем, что это не так. Число p входит в a^2c в степени $2k(a) \geqslant k(a)+k(b)$, в b^2a — в степени $k(a)+2k(b) \geqslant k(a)+k(b)$, а в c^2b — в степени $k(b) < k(a)+k(b)$. Значит, a^2c+b^2a делится на $p^{k(a)+k(b)}$, а c^2b — не делится на $p^{k(a)+k(b)}$. Поэтому сумма этих чисел не делится на $p^{k(a)+k(b)}$ — противоречие (см. факт 5).

Второй способ. Введем обозначения: $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$. Тогда $xyz=1$ и

$$xy+yz+zx=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

— целое число. Рассмотрим многочлен

$$P(t)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz.$$

По доказанному, все коэффициенты этого многочлена целые. Кроме того, коэффициент при старшем члене t^3 равен единице. Значит, все рациональные корни этого многочлена — целые (см. комментарий). Согласно обратной теореме Виета, x, y и z — корни этого многочлена (см. факт 20). Значит, x, y и z — целые числа, но $xyz=1$, так что $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$. Это равносильно тому, что $|a|=|b|=|c|$.

Комментарий. Докажем использованное утверждение.

Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Теорема. *Пусть $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, которая является корнем многочлена $f(x)$. Тогда $p\,|\,a_0$, $q\,|\,a_n$.*

Набросок доказательства. Докажем первое утверждение. Условие $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$ можно переписать так:

$$a_0q^n+a_1pq^{n-1}+\ldots+a_np^n=0. \qquad (1)$$

Пусть l — простое число. В силу факта 10 достаточно доказать, что максимальная степень l, входящая в разложение p на простые множители, не превосходит максимальной степени l, входящей в разложение числа a_0 на простые множители. Пусть это не так, т. е. найдется такое x, что p делится на l^x, а a_0 не делится на l^x. Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, q не делится на l, поэтому в левой части равенства (1) первый член не делится на l^x, а остальные делятся, но это невозможно (см. факт 5).

Следствие. *Если $a_n = 1$, то любой рациональный корень многочлена $f(x)$ является целым.*

6. Первый способ. Заметим, что результат нажатия нескольких кнопок не зависит от порядка их нажатия. Проведем индукцию по числу лампочек на табло (см. факт 24). При $n = 1$ утверждение верно (так как найдется кнопка, соединенная с нечетным число лампочек, т. е. в точности с этой лампочкой).

Пусть утверждение доказано для $n - 1$ лампочек. Докажем утверждение для n лампочек. Рассмотрим i-ю лампочку. По предположению индукции, мы можем погасить остальные $n - 1$ лампочек. Обозначим необходимый для этого набор кнопок через S_i. Если погасла и i-я, то индуктивный переход доказан. Значит, можно считать, что при любом i нажатие на кнопки набора S_i приводит к следующей ситуации: горит только i-я лампочка.

Что произойдет, если при некотором состоянии табло нажать сначала кнопки из набора S_i, а потом кнопки из набора S_j? При этом изменится состояние ровно двух лампочек: лампочек с номерами i и j (подумайте, почему). Итак, мы научились менять состояние у любой пары лампочек.

По условию найдется кнопка T, соединенная с нечетным числом лампочек. Погасим все лампочки, кроме одной, соединенной с кнопкой T. Затем нажмем T. Тогда будет гореть четное число лампочек. Погасим их парами.

Второй способ (с использованием линейной алгебры). Занумеруем лампочки числами от 1 до n. Поставим в соответствие состоянию табло строчку

$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_i = 1$, если i-я лампочка горит, и $x_i = 0$ — если не горит. Такие наборы — это векторы n-мерного векторного пространства над полем из двух элементов (см. факт 25 и [72], гл. 1 и 2).

Каждой кнопке мы тоже поставим в соответствие вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$, если i-я лампочка соединена с кнопкой, и $a_i = 0$, если не соединена. Ясно, что нажатие на кнопку переводит табло из состояния x в состояние

$a + x$. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы доказать, что векторы, соответствующие кнопкам, порождают все векторное пространство.

Набору лампочек мы поставим в соответствие линейный функционал:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i,$$

где сумма берется по всем i таким, что i-я лампочка входит в набор.

Все линейные функционалы получаются таким образом. Функционал обращается в нуль на векторе, соответствующем кнопке, тогда и только тогда, когда эта кнопка соединена с четным числом лампочек из этого набора. Значит, условие задачи переводится на язык линейной алгебры следующим образом: ни один функционал не обращается в нуль на всех кнопках. Но это равносильно тому, что система векторов, соответствующих кнопкам, полна! Такую равносильность часто называют альтернативой Фредгольма.

Комментарий. Назовем инвариантом такой набор лампочек, что любая кнопка меняет состояние только четного числа лампочек из этого набора. В условии задачи сказано, что таких инвариантов нет. Рассмотрим более общую ситуацию: пусть инварианты есть. Тогда, если множество первоначально горевших лампочек пересекается с некоторым инвариантом по нечетному числу лампочек, то все лампочки, очевидно, погасить не удастся.

Оказывается, что если множество первоначально горевших лампочек пересекается с любым инвариантом по четному числу лампочек, то все лампочки можно погасить. Данная задача является частным случаем этого утверждения. Это утверждение тоже можно доказать по индукции или при помощи линейной алгебры (попробуйте сделать это сами).

11 класс

1. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей (см. комментарий), имеем:

$$|x + y - z| + |x - y + z| \geqslant |(x + y - z) + (x - y + z)| = 2|x|.$$

Аналогично получаются неравенства

$$|x - y + z| + |-x + y + z| \geqslant 2|z|,$$
$$|-x + y + z| + |x + y - z| \geqslant 2|y|.$$

Сложив все три неравенства и разделив получившееся неравенство на 2, получим требуемое неравенство.

Комментарий. Неравенство $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ можно доказать разбором случаев. Приведем элегантное доказательство. Так как обе части неравенства неотрицательны, их можно возвести в квадрат, и неравенство заменится на равносильное. То есть достаточно доказать, что

$$|x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2.$$

Пользуясь тем, что для любого a выполняется равенство $|a|^2 = a^2$ и раскрывая скобки, приходим к неравенству:

$$x^2+2xy+y^2 \leqslant x^2+2|x||y|+y^2.$$

Но это очевидно.

Заметим, также, что неравенство верно и для векторов. Доказательство сохраняется с небольшими изменениями. На плоскости это неравенство равносильно неравенству треугольника.

2. а) Покрасим ребра нижнего основания по кругу: 1-е в первый цвет, 2-е во второй, 3-е в третий, 4-е опять в первый и т. д. (1995 делится на 3, поэтому цепочка замкнется). Каждое ребро верхнего основания покрасим в цвет ребра нижнего основания, находящегося под ним. Каждое боковое ребро, выходящее из вершины, где сходятся два цвета, покрасим в недостающий цвет (рис. 65). Ясно, что на всех боковых гранях присутствуют все 3 цвета.

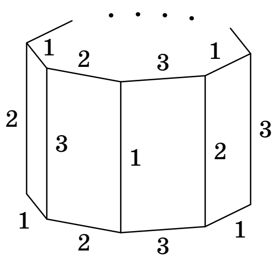


Рис. 65

б) От противного, пусть призма покрашена требуемым образом; тогда в основании есть 3 ребра всех трех цветов, идущие подряд (иначе основание раскрашено с периодом 2 и не может быть покрашено в три цвета). Рассмотрим такую тройку и занумеруем цвета в ней по часовой стрелке. Несложно проверить, что раскраска этого участка однозначно определяет раскраску участка, находящегося над ним, соответствующих боковых ребер и следующих ребер основания (см. рис. 65). Мы видим, что следующее по часовой стрелке ребро основания имеет цвет 1.

Повторяя рассуждение, видим, что следующее ребро основания имеет цвет 2, и т. д. Таким образом, нижняя грань окажется покрашенной с периодом 3. Но 1996 не делится на 3 — противоречие.

3. П е р в ы й с п о с о б. Продлим медиану AA_1 на ее длину и достроим треугольник до параллелограмма $ABDC$ (рис. 66). Напомним, что биссектриса делит основание треугольника на отрезки, пропорциональные сторонам:

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}.$$

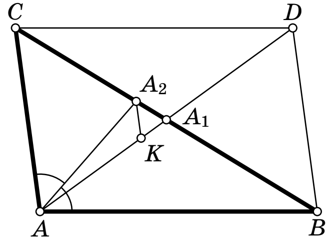


Рис. 66

Из обобщенной теоремы Фалеса следует (см. комментарий), что K делит AD в такой же пропорции:

$$\frac{KD}{KA} = \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC} = \frac{CD}{AC}$$

(заметим, что мы используем теорему Фалеса в несколько непривычной конфигурации). Значит, точка K делит AD в том же отношении, что и биссектриса угла ACD (по свойству биссектрисы треугольника). Из этого следует, что CK и есть биссектриса! Итак, AA_2 и CK перпендикулярны как биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых.

Последнее свойство доказывается так. Пусть R — точка пересечения этих биссектрис. Тогда

$$\angle RAC + \angle RCA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle DCA) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

В т о р о й с п о с о б. Используем замечательное свойство трапеции (см. комментарий): середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, лежат на одной прямой.

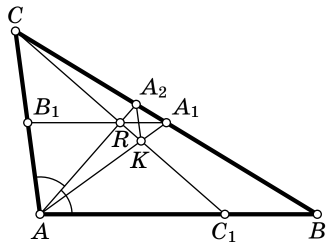


Рис. 67

Продолжим отрезок CK до пересечения с прямой AB в точке C_1 (рис. 67). Из того, что в трапеции AKA_2C середина B_1 основания AC, точка пересечения диагоналей R и точка пересечения продолжений боковых сторон A_1 лежат на одной прямой, следует, что R принадлежит средней линии A_1B_1 треугольника ABC. Поэтому $CR=RC_1$. Таким образом, в треугольнике CAC_1 отрезок AR является медианой и биссектрисой одновременно, а значит, и высотой.

Комментарии. 1°. Обобщенная теорема Фалеса. *Пусть на прямой k выбраны точки A_1, A_2 и A_3, а на прямой l — точки B_1, B_2 и B_3, причем $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Тогда*

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}.$$

Для доказательства проведем прямую, параллельную прямой l через точку A_2. Пусть она пересекает прямые A_1B_1 и A_3B_3 в точках C_1 и C_3 соответственно. Тогда $A_2C_1B_1B_2$ — параллелограмм, поэтому $A_2C_1=B_2B_1$. Аналогично, $A_2C_3=B_2B_3$. Остается воспользоваться подобием треугольников $A_1A_2C_1$ и $A_3A_2C_3$.

2°. Замечательное свойство трапеции. Пусть M и N — середины оснований трапеции, P — точка пересечения диагоналей, Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Замечательное свойство трапеции заключается в том, что эти четыре точки лежат на одной прямой. Это свойство проще всего доказать с помощью гомотетии. Существует гомотетия с центром P, переводящая одно основание трапеции в другое. Поэтому точка P лежит на прямой MN. Кроме того, существует гомотетия с центром Q, переводящая одно основание трапеции в другое. Поэтому точка Q тоже лежит на прямой MN.

4. Докажем по индукции (см. факт 24), что *любой* отрезок можно разбить на белые и черные отрезки так, что интегралы любого многочлена степени не выше n по черным и белым отрезкам равны.

База индукции ($n=0$): многочлен степени нуль — это константа. Интеграл константы по любому отрезку равен произведению этой константы на длину отрезка. Значит, достаточно разбить отрезок пополам.

Шаг индукции. Рассмотрим отрезок $[a; b]$. Пусть c — его середина. По предположению индукции, отрезок $[a; c]$ можно разбить на белые и черные отрезки так, что интегралы от любого многочлена степени не выше $n-1$ по черным и белым отрезкам равны. Обозначим черные отрезки $B_1, \ldots, B_r$, а белые отрезки — $W_1, \ldots, W_s$. Интеграл функции $f(x)$ по отрезку B_i будем обозначать через

$$\int\limits_{B_i} f(x)\,dx.$$

Аналогично обозначим интеграл $f(x)$ по W_i. Перенесем отрезок B_i на c вправо и покрасим получившийся отрезок в *белый* цвет. Обозначим его через W_{s+i}. Аналогично поступим с отрезком W_i: перенесем его на c вправо и покрасим получившийся отрезок B_{r+i} в *черный* цвет. Ясно, что отрезки $B_1, \ldots, B_{r+s}$ и $W_1, \ldots, W_{r+s}$ образуют разбиение отрезка $[a; b]$. Случаи $n=1$ и $n=2$ изображены на рис. 68. Мы утверждаем, что получившееся разбиение

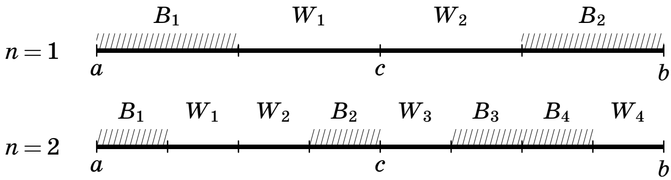


Рис. 68

обладает нужным свойством для всех многочленов степени не выше n. Для доказательства заметим, сначала, что

$$\int\limits_{W_{r+i}} f(x)\,dx = \int\limits_{B_i} f(y+c)\,dy,$$

Это равенство следует из замены переменной (см. факт 28):

$$y = x - c, \qquad dy = dx.$$

Пользуясь тем, что интеграл от разности функций равен разности интегралов, перепишем равенство в виде:

$$\int\limits_{W_{r+i}} f(x)\,dx - \int\limits_{B_i} f(x)\,dx = \int\limits_{B_i} (f(x+c) - f(x))\,dx.$$

Аналогичное равенство, конечно, имеет место и для отрезков W_i и B_{s+i}. Складывая все такие равенства, получим:

$$\sum_{i=1}^{r+s} \int\limits_{W_i} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{r+s} \int\limits_{B_i} f(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{B_i} (f(x+c) - f(x))\,dx - \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{W_i} (f(x+c) - f(x))\,dx.$$

Пусть теперь $f(x)$ — многочлен степени не выше n, тогда $f(x+c) - f(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$ (см. факт 22), так что, по предположению индукции, правая часть последнего равенства равна нулю. Значит, и левая часть равна нулю, и шаг индукции доказан.

Комментарии. 1°. Разобьем отрезок $[-1; 1]$ на отрезки длины 2^{-n-1}. Пометим отрезок знаком «+», если он покрашен в черный цвет, и знаком «−», если — в белый. Соответствующая последовательность из плюсов и минусов является n-м членом последовательности Морса:

$$+,\ +-,\ +--+,\ +--+-++-,\ +--+-++--++-+--+,\ \ldots$$

(От куска A переходим к куску AA', где A' получается из A заменой всех знаков на противоположные.) Можно построить n-й член этой последовательности так: для каждого $k=0, \ldots, 2^n-1$ взять сумму его двоичных цифр (см. факт 12) и записать на n-м месте $+$ или $-$ в зависимости от ее четности. В этой последовательности никакая комбинация символов не повторится 3 раза подряд.

2°. Выражение

$$D_c f(x) = f(x+c) - f(x)$$

называется *разностной производной* функции f с шагом c. Разностное дифференцирование использовали в докомпьютерные времена для построения таблиц различных функций, например, приближали $\sin x$ многочленом степени n, а затем заполняли таблицу, в которой в k-м столбце записана k-я разностная производная. Так как n-я производная — константа, n-й столбец заполнить легко. Если же заполнен k-й столбец, то нетрудно заполнить и $(k-1)$-й. Таким образом, используя лишь операцию сложения, можно заполнить первый столбец, т. е. получить таблицу синусов.

5. Пример, когда период последовательности A состоит из одной единицы и 1994 нулей, а B — непериодическая последовательность из нулей и единиц, в которой все единицы расположены на расстоянии, не меньшем 1994 друг от друга, показывает, что условие совпадения всех кусков длины 1994 не является достаточным для периодичности B (см. факт 4).

Докажем, что если любой кусок длины 1995 последовательности B содержится в A, то последовательность B периодична с периодом длины 1995.

Докажем сначала, что 1995 — длина одного из периодов. Пусть это не так, тогда в последовательности B найдется кусок длины 1996, у которого первый и последний символы не совпадают:

$$B = \ldots x\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{1994 символа}}y\ldots,$$

где x и y — разные символы. Обозначим участок последовательности между x и y через Z. Пусть символ x встречается в Z ровно k раз. Рассмотрим две последовательности длины 1995: xZ и Zy. По предположению, каждая из них встречается в последовательности A, значит, каждая из них совпадает со сдвинутым периодом последовательности A. Поэтому символ x должен встречаться в каждой из этих последовательностей одинаковое число раз. С другой стороны, в последовательности xZ он встречается $k+1$ раз, а в последовательности Zy — k раз. Противоречие.

Осталось доказать, что 1995 — длина минимального периода. Если бы длина периода последовательности B была меньше, чем 1995, то некоторый кусок последовательности B длины 1995 распадался бы на несколько одинаковых кусков. По условию этот кусок содержится в A. Ясно, что в этом случае длина (минимального) периода последовательности A также была бы меньше, чем 1995.

К о м м е н т а р и й. Из доказательства следует, что если n — длина минимального периода последовательности, то любые два одинаковых куска длины $n-1$ находятся на расстоянии, кратном n.

6. Возьмем
$$n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$$
и докажем, что оно удовлетворяет условию задачи при любом натуральном t.

В силу факта 8 достаточно доказать, что $n-1$ делится на 2^t, т. е. что $3^{2^t}-1$ делится на 2^t (поскольку 2^{2^t} делится на 2^t).

Докажем по индукции (см. факт 24), что при всех натуральных t число $3^{2^t}-1$ делится на 2^{t+2}. При $t=1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором t. Тогда для $t+1$ имеем:
$$3^{2^{t+1}} - 1 = (3^{2^t}+1)(3^{2^t}-1).$$
Первый множитель делится на 2, второй — на 2^{t+2}. Значит, произведение делится на 2^{t+3}, и утверждение доказано.

К о м м е н т а р и и. 1°. Малая теорема Ферма утверждает, что если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p, см., например, [29], гл. 3, § 6. Из этой теоремы следует, что при простом $n \neq 2, 3$ число $3^{n-1} - 2^{n-1}$ делится на n.

2°. Известно, что множество составных n таких, что $2^{n-1} - 1$ делится на n, бесконечно.

7. Можно сделать пространственный «крест» из 6 «карандашей» — длинных тонких параллелепипедов, примыкающих снаружи к граням единичного куба (куб нужен только для объяснения конструкции). Карандаши лежат по одному на гранях куба симметрично относительно центра куба, причем центр грани карандаша совпадает с центром одной из граней куба.

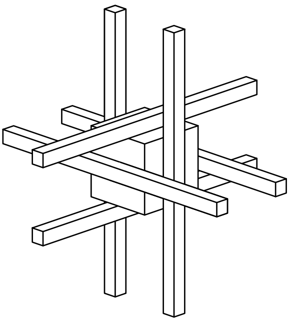


Рис. 69

Каждая пара параллельных карандашей параллельна одной из осей координат и загораживает вершины другой пары, поэтому из центра куба вершин карандашей не видно (рис. 69).

Остается перекинуть «мосты» между карандашами и получить многогранник. При этом образуются новые вершины, но они будут находиться рядом с вершинами карандашей, так что их тоже не будет видно.

Комментарий. На плоскости такой пример невозможен: для любого многоугольника из любой точки вне него видна хотя бы одна вершина (но, возможно, никакая сторона не видна полностью). Для многогранника можно гарантировать, что хотя бы одна вершина видна, если есть плоскость, разделяющая точку наблюдения и многогранник.

1996 год

8 класс

1. Приведем левую часть к общему знаменателю: $a + \frac{b^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{a}$. Аналогично поступим с правой частью. Получим равенство:

$$\frac{a^2+b^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

Из условия видно, что $a \neq 0$, $b \neq 0$. Поэтому $a^2+b^2>0$ (см. комментарий). Значит, обе части равенства можно поделить на a^2+b^2. Получим $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$, откуда $a=b$.

Комментарий. Следующие очевидные утверждения часто используются при решении задач (и вообще в математике): 1) квадрат ненулевого числа положителен, 2) сумма квадратов нескольких чисел неотрицательна. Если эта сумма равна нулю, то каждое из чисел равно нулю.

2. Обозначим массы гирек через m_i, а массы шариков — через x_i. Имеем

$$(m_1-m_2)+(m_2-m_3)+\ldots+(m_9-m_{10})+(m_{10}-m_1)=0.$$

Действительно, каждое m_i входит в эту сумму два раза: один раз со знаком «+», а второй раз — со знаком «−». Поэтому все m_i сократятся.

Заметим, что каждая из величин в скобках (m_i-m_{i+1}) по модулю равна массе i-го шарика. Значит, это равенство можно переписать так:

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_9 \pm x_{10}=0,$$

где перед некоторыми x_i стоит знак «+», а перед остальными — «−». Положим все шарики x_i, перед которыми стоят знаки «+» на левую чашу весов, а остальные — на правую. Ясно, что весы будут в равновесии.

3. Рассмотрим клетку, в которой находится цветок. Разобьем ее на четыре маленькие клеточки. Примем длину стороны маленькой клеточки за единицу (соответственно сторона клетки равна двум). Пусть наш цветок оказался в левой верхней клеточке, как на рис. 70 (остальные случаи аналогичны). Обозначим садовников, живущих в вершинах клетки, через A, B, C и D.

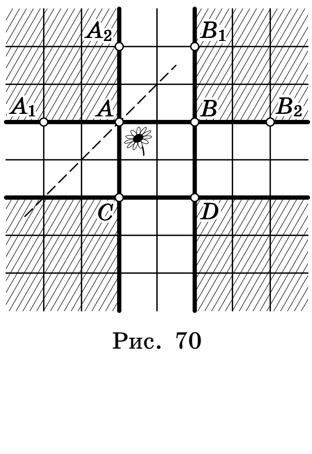


Рис. 70

Докажем следующее утверждение: *за цветком будут ухаживать садовники A, B и C.*

Разобьем всех садовников на четыре заштрихованных на рис. 70 сектора. Будем называть секторы по имени «углового» садовника — сектор A, ..., сектор D.

Заметим, что садовник A ближе к цветку, чем садовник B. Действительно, расстояния по вертикали от цветка до этих садовников равны, а расстояние по горизонтали до садовника A меньше, чем до садовника B (потому что расстояние по горизонтали до садовника A меньше единицы, а до садовника B — больше). Значит, садовник A — ближе (следует из теоремы Пифагора).

Аналогично, садовник A ближе к цветку, чем садовник C, а садовники B и C ближе, чем садовник D. Поэтому садовник D не ухаживает за цветком. Не ухаживают за цветком и остальные садовники из сектора D — они еще дальше от цветка, чем садовник D (рассмотрите расстояния по вертикали и горизонтали).

Рассмотрим сектор B. Ближайшие в этом секторе садовники — это B_1 и B_2. Покажем, что они не ухаживают за цветком. Рассмотрим, например, садовника B_1. Ясно, что он дальше, чем B. Расстояние от этого садовника до цветка по вертикали больше, чем 2, а по горизонтали — больше, чем 1. Так что он дальше от цветка, чем C. И уж тем более он дальше от цветка, чем A.

Наконец, рассмотрим сектор A. Покажем, что садовники A_1 и A_2 не ухаживают за цветком. Рассмотрим садовника A_1 (для A_2 доказательство аналогично). Ясно, что он дальше от цветка, чем B (опять же, расстояние по горизонтали от него до цветка больше, чем от B до цветка). Осталось доказать, что садовник C ближе к цветку, чем садовник A_1.

Проведем серединный перпендикуляр к отрезку A_1C. Точки этого перпендикуляра равноудалены от точек A_1 и C. Точки лежащие ниже перпендикуляра — ближе к C, чем к A_1. Ясно, что цветок находится ниже перпендикуляра, значит, он ближе к C.

Итак, за цветком ухаживают садовники A, B и C.

Рассмотрим теперь садовника X. Из предыдущего ясно, что цветы, за которыми он ухаживает, могут находиться только в прилежащих к нему клетках. К тому же, достаточно нарисовать искомую область только для одной клетки и воспользоваться симметрией. Рассмотрим, например, клетку $XYZT$ (рис. 71). Разделим ее на 4 маленьких клеточки. По доказанному, для трех заштрихованных клеточек садовник X будет одним из ухаживающих. За цветами, растущими в четвертой клеточке, будут ухаживать садовники Y, Z и T. Значит, садовник ухаживает за цветами, растущими в этих трех клеточках, и еще в девяти клеточках, получающихся из них симметрией.

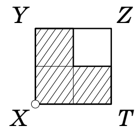


Рис. 71

4. Без ограничения общности можно считать, что точка K ближе к точке B, чем точка L (рис. 72). Тогда треугольник MKC равносторонний (так как $MC = KC$, $\angle MCK = 60°$). Поэтому $AB \parallel MK$ (так как $\angle MKC = \angle ABC = 60°$). Значит, углы AKM и BAK равны как накрест лежащие.

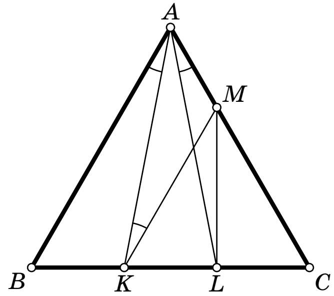


Рис. 72

Заметим, что углы BAK и CAL равны из симметрии (или же в силу того, что $\triangle BAK = \triangle CAL$ по первому признаку). Значит, $\angle AKM = \angle CAL$. Поэтому

$$\angle AKM + \angle ALM = \\ = \angle CAL + \angle ALM = \angle LMC.$$

Последнее равенство следует из того, что $\angle LMC$, будучи внешним углом в треугольнике AML, равен сумме двух внутренних.

Итак, осталось доказать, что $\angle LMC = 30°$. Но отрезок ML — медиана равностороннего треугольника MKC, а значит ML — биссектриса этого треугольника.

Комментарий. Сравните с задачей 3 для 10 класса.

5. При четных n — смотрите рис. 73. Ладья сначала побывает во всех клетках первых двух горизонталей, потом — во всех клетках 3-й и 4-й горизонтали и т. д.

Покажем, что при нечетном n такое невозможно. Действительно, рассмотрим любую горизонталь, отличную от первой. Когда ладья попадает на эту горизонталь, ей нужно следующим ходом перейти на другую клетку этой же горизонтали, а потом обязательно уйти на другую горизонталь (поскольку ладья должна сделать всего n^2 ходов, она может побывать на каждой клетке не более одного раза). Значит, клетки выбранной горизонтали делятся на пары. Поэтому в горизонтали должно быть четное число клеток.

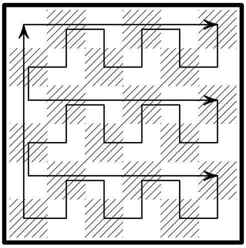


Рис. 73

Иными словами, после того как ладья побывает на горизонтали первый раз, она побывает в двух клетках этой горизонтали. После второго попадания в горизонталь — в четырех. Если в горизонтали нечетное число клеток, то в какой-то момент наступит ситуация, когда ладья, побывав во всех клетках горизонтали, кроме одной, уйдет в другую горизонталь. Ладье надо попасть в эту клетку, но после этого она не сможет сделать хода. См. также факт 23.

6. П е р в ы й с п о с о б. а) Рассмотрим два случая.

1) Предположим, что найдется школьник, решивший хотя бы 6 задач. Докажем, что найдется школьник, решивший оставшиеся 2 задачи. Действительно, каждую из этих двух задач решили 5 школьников, а так как всего школьников $8 < 5+5$, найдется школьник, решивший обе (см. факт 1).

2) Предположим, что каждый школьник решил не более 5 задач. Докажем сначала, что каждый школьник решил ровно 5 задач. Действительно, так как в каждой из восьми задач было по 5 решений, то всего решений 40. Но если каждый из восьми школьников решил не более 5 задач, причем кто-то решил меньше 5 задач, то решений меньше 40.

Итак, пусть каждый школьник решил 5 задач. Пусть первый школьник решил задачи 1, 2, 3, 4, 5. Докажем, что найдется школьник решивший задачи 6, 7 и 8. В противном случае, каждый школьник решил не менее трех из первых пяти задач, тогда имеется не менее, чем $5 + 7 \times 3 = 26$ решений первых пяти задач. Но нам известно, что каждую из этих задач решили 5 школьников, значит, всего решений 25. Противоречие.

Второй способ. а) Последний шаг можно доказать иначе. Опять же, пусть первый школьник решил задачи 1, 2, 3, 4, 5. Каждую из задач 6, 7 и 8 *не* решили 3 школьника. Значит, каждую из них не решили 2 школьника, не считая первого. Значит, всего школьников, не решивших одну из задач 6, 7 или 8, не более семи (включая первого). Так как всего школьников 8, найдется школьник, решивший задачи 6, 7 и 8.

б) Эту задачу можно решить подбором (см. таблицу «успеваемости»):

Школьники	Задачи							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+	+	+	−	−	+	−	+
2	+	+	+	−	−	−	+	+
3	+	+	−	+	−	−	+	+
4	+	−	−	+	+	−	+	−
5	−	+	+	+	+	−	−	+
6	−	−	+	+	−	+	+	−
7	−	−	−	−	+	+	−	−
8	−	−	−	−	+	+	−	−

Комментарий. Авторам книги неизвестно непереборное решение этой задачи.

9 класс

1. Первый способ. Допустим противное. Тогда в некотором выпуклом n-угольнике имеется не менее 36 углов, меньших 170° (остальные $n-36$ углов не превосходят 180°). Значит, сумма всех углов такого многоугольника меньше, чем $36\cdot170^\circ+(n-36)\cdot180^\circ$. Но, как известно, сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot180^\circ$. Следовательно, получаем неравенство

$$(n-2)\cdot180<36\cdot170+(n-36)\cdot180.$$

Раскрывая скобки и производя несложные преобразования, получим $34\cdot180<36\cdot170$, что неверно.

Второй способ. Если внутренний угол многоугольника меньше 170°, то соответствующий внешний угол больше 10°. Если бы таких углов было хотя бы 36, то их сумма была бы больше, чем 360°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника в точности равна 360°. Противоречие.

2. Первый способ. Предположим, сначала, что одно из чисел равно нулю. Пусть, например, $a=0$ (остальные случаи аналогичны). Тогда получим неравенства: $|b|\geqslant|c|$ и $|c|\geqslant|b|$, откуда $|b|=|c|$, т. е. $b=c$ или $b=-c$. В первом случае $b=a+c$, во втором $a=b+c$. Все доказано.

Пусть теперь ни одно из чисел a, b и c не равно нулю. Без ограничения общности можно считать, что число a — максимальное по модулю среди чисел a, b и c (т. е. $|a|\geqslant|b|$, $|a|\geqslant|c|$). Также можно считать, что $a>0$ (в противном случае произведем замену: $a=-a_1$, $b=-b_1$, $c=-c_1$). Тогда $|a|=a$, $|a-b|=a-b$, $|a-c|=a-c$.

При этих предположениях из неравенства $|b-c|\geqslant|a|$ следует, что числа b и c не могут иметь одинаковых знаков (подумайте, почему).

Возможны два случая.

1°. $b>0$, $c<0$. Тогда $|b|=b$, $|c|=-c$ и $|b-c|=b-c$, так что мы получаем неравенства $a-b\geqslant-c$, $b-c\geqslant a$, $a-c\geqslant b$. Из первого неравенства следует, что $b\leqslant a+c$, из второго — что $b\geqslant a+c$, значит, $b=a+c$.

2°. $b<0$, $c>0$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, получим неравенства $a-b\geqslant c$, $c-b\geqslant a$, $a-c\geqslant-b$. Следовательно, в этом случае одновременно выполняются неравенства $c\geqslant a+b$, $c\leqslant a+b$, т. е. $c=a+b$. Таким образом, в обоих случаях утверждение доказано.

Второй способ. Возведем неравенство $|a-b|\geqslant|c|$ в квадрат и перенесем все члены в левую часть, получим $(a-b)^2-c^2\geqslant0$. Разложив левую часть на множители по формуле разности квадратов, получим: $(a-b-c)(a-b+c)\geqslant$ $\geqslant 0$, или, что то же самое,

$$(a-b-c)(b-c-a)\leqslant 0.$$

Аналогично получаем, что произведения $(b-c-a)(c-a-b)$ и $(c-a-b)(a-b-c)$ также неположительны.

Перемножая эти произведения находим, что
$$(a-b-c)^2(b-c-a)^2(c-a-b)^2 \leqslant 0.$$
Мы видим, что произведение неотрицательных чисел не превосходит 0, значит, одно из этих чисел равно 0, откуда следует требуемое утверждение.

3. Углы BNM и NCA равны, так как прямые MN и AC параллельны (рис. 74). Угол NCA опирается на дугу $\smile{AB}$, значит, он равен половине этой дуги. По теореме об угле между касательной и хордой (см. факт 15), угол BAM также равен половине дуги $\smile{AB}$. Значит, $\angle NCA = \angle BAM$. Следовательно, $\angle BNM = \angle BAM$, и вокруг четырехугольника $AMBN$ можно описать окружность. Получаем следующую серию равенств углов:
$$\angle NCA = \angle BAM = \angle MBA = \\ = \angle MNA = \angle NAC.$$

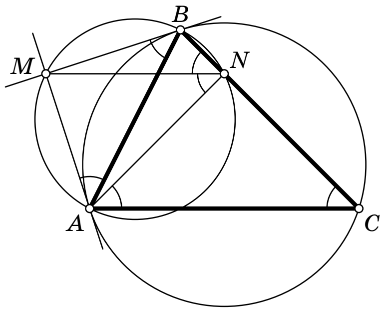


Рис. 74

Второе равенство следует из того, что треугольник AMB равнобедренный (касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны), третье — из того, что четырехугольник $AMBN$ вписанный, последнее — из теоремы о внутренних накрест лежащих углах при параллельных прямых.

Таким образом, $\angle NCA = \angle NAC$, так что треугольник ANC равнобедренный. Значит, $AN = NC$.

К о м м е н т а р и й. Внимательный читатель заметил, что мы пользовались тем, что $\angle BCA$ острый. Проверьте, что в противном случае не найдется точки N на стороне BC такой, что $MN \parallel AC$.

4. а) Сумма числа 9 и числа, записанного под ним, заключена между 10 и 18. Так как на этом отрезке есть только один точный квадрат, под числом 9 должно быть записано число 7. Аналогично, число 7 должно быть записано над числом 9. Также проверяется, что под числами

4, 5 и 6 должны быть записаны числа 5, 4 и 3 соответственно. Теперь уже нетрудно получить ответ:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 9 & 1 & 7 \end{matrix}$$

б) Нетрудно видеть, что под числом 11 может быть записано только число 5, но под числом 4 тоже может быть записано только число 5. Противоречие.

в) Идея состоит в том, чтобы свести задачу к аналогичной задаче для меньшего n. Запишем под числом k число $2025-k$ для всех $k=29, 30, \ldots, 1996$. Тогда сумма чисел в каждом столбце, начиная с 29-го, равна 45^2, а числа от 1 до 28 остались «неиспользованными». Значит, задача сводится к случаю $n=28$.

Далее под числами $k=21, 22, \ldots, 28$ запишем числа $49-k$. Задача свелась к $n=20$. Затем под числами $k=16$, 17, 18, 19, 20 запишем числа $36-k$. Задача свелась к случаю $n=15$ и, наконец, каждому $k=1, 2, \ldots, 15$ поставим в соответствие число $16-k$.

Комментарий. Попробуйте доказать, что при любом $n>11$ справедлив положительный ответ на вопрос задачи.

5. Сначала сформулируем два простых утверждения:

1) отрезок, соединяющий середину хорды с центром окружности, перпендикулярен этой хорде;

2) условие, что концы хорды лежат на разных дугах AB, эквивалентно тому, что хорда пересекает отрезок AB (во внутренней точке).

Тогда задачу можно переформулировать так: *даны точки A, B и O* ($AO=BO$); *требуется найти геометрическое место таких точек M, что прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная отрезку MO, пересекает отрезок AB.*

Докажем следующее утверждение: *перпендикуляр к отрезку MO пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда в точности один из двух углов OMA и OMB тупой.*

Действительно, перпендикуляр пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно этого перпендикуляра.

Пусть, например, точка B лежит в той же полуплоскости, что и точка O, а точка A — в другой полуплоскости. Тогда $\angle AMO > 90^\circ$, $\angle BMO < 90^\circ$ (рис. 75). Если A и O лежат в одной полуплоскости, а B — в другой, то $\angle AMO$ острый, а $\angle BMO$ тупой. Если все точки лежат в одной полуплоскости, то оба угла острые, если точки A и B лежат в одной полуплоскости, а точка O — в другой, то оба угла тупые. Мы разобрали все возможные случаи, так что утверждение доказано.

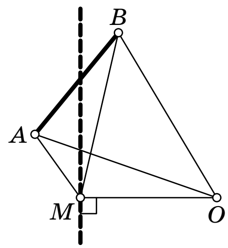


Рис. 75

Геометрическое место точек M таких, что $\angle AMO > 90^\circ$, представляет собой внутренность круга, построенного на отрезке AO как на диаметре, а ГМТ M таких, что $\angle BMO > 90^\circ$, есть внутренность круга построенного на BO как на диаметре (см. факт 14). Значит, искомое ГМТ состоит из точек, лежащих внутри в точности одного из двух кругов с диаметрами AO и BO. Следовательно, это ГМТ представляет собой внутренность этих кругов, за исключением их общей части (см. рис. 16 на с. 72).

6. Покажем, что Али-Баба может добиться, чтобы в 7 кучках лежало не более, чем по 4 монеты, а разбойник может добиться, чтобы не было кучек, содержащих менее 4 монет. Следовательно, Али-Баба унесет $100 - 7 \cdot 4 = 72$ монеты.

Докажем сначала, что *разбойник может действовать так, чтобы не было кучек, содержащих менее* 4 *монет*. Действительно, для первоначальной ситуации это верно. Пусть на некотором шаге это верно и часть монет уже отложена в кружки. Тогда, если в двух кружках содержится одинаковое число монет, то разбойник переставляет эти кружки и положение не изменяется, если же количество монет во всех кружках разное, то в двух наибольших из них соответственно не менее 3 и 4 монет, и разбойник переставляет эти кружки. В результате во всех новых кучках опять будет не менее 4 монет.

Покажем теперь, что Али-Баба может добиться, чтобы в 7 кучках лежало не более, чем по 4 монеты.

Пусть имеются 4 кучки, в каждой из которых лежит более, чем 4 монеты, и $x_1^{(0)} \geqslant x_2^{(0)} \geqslant x_3^{(0)} \geqslant x_4^{(0)} \geqslant 5$ — количества монет в этих кучках. Покажем, что Али-Баба может добиться, чтобы в одной из этих кучек стало меньше 4 монет, причем количество монет в каждой из оставшихся шести кучек не изменилось. Разложим эти кучки следующим образом:

$$x_1^{(0)} = y_1 + 1, \quad x_2^{(0)} = y_2 + 2, \quad x_3^{(0)} = y_3 + 3, \quad x_4^{(0)} = y_4 + 4,$$

положив в кружки соответственно 1, 2, 3 и 4 монеты. После перестановки кружек получим новые кучки, состоящие из

$$x_1^{(1)} = y_1 + z_1, \quad x_2^{(1)} = y_2 + z_2, \quad x_3^{(1)} = y_3 + z_3, \quad x_4^{(1)} = y_4 + z_4$$

монет, где z_1, z_2, z_3 и z_4 — некоторая перестановка чисел 1, 2, 3, 4. Далее процесс повторяется с заменой чисел $x_1^{(0)}, \ldots, x_4^{(0)}$ на расположенные в невозрастающем порядке числа $x_1^{(1)}, \ldots, x_4^{(1)}$.

Докажем, что на некотором шаге процесс оборвется, т. е. в одной из этих кучек станет меньше 5 монет. Имеет место одна из следующих трех возможностей:

1) $x_1^{(1)} > x_1^{(0)}$ (если первую кружку переставили);

2) $x_1^{(1)} = x_1^{(0)}$, $x_2^{(1)} > x_2^{(0)}$ (если первую кружку оставили на месте, а вторую переставили);

3) $x_1^{(1)} = x_1^{(0)}$, $x_2^{(1)} = x_2^{(0)}$, $x_3^{(1)} > x_3^{(0)}$ (если первые две кружки остались на месте).

На каждом шаге количество монет в первой кучке не уменьшается. Поэтому число шагов, при которых реализуется первая возможность, конечно. Суммарное число монет в первой и второй кучках тоже не уменьшается, поэтому число шагов, при которых реализуется вторая возможность, также конечно. Аналогично проверяется, что число шагов, реализующих третью возможность, тоже конечно. Следовательно, на некотором шаге процесс оборвется, что соответствует тому, что в некоторой кучке окажется не более 4 монет. При этом количество кучек с не более, чем 4 монетами увеличится. Повторяя этот процесс, в конце концов придем к тому, что останется не более трех кучек, содержащих больше 4 монет.

10 класс

1. П е р в ы й с п о с о б. Можно считать, что $a \geqslant b$ (случай $a \leqslant b$ аналогичен). Тогда $b^2 \leqslant ab$, $a^2 \geqslant ab$, поэтому

$$a^2 \geqslant a^2 + b^2 - ab \geqslant b^2,$$

откуда $a \geqslant c \geqslant b$. Значит, первый сомножитель в выражении $(a-c)(b-c)$ неотрицателен, а второй — неположителен. Поэтому произведение неположительно, что и требовалось доказать.

В т о р о й с п о с о б. Рассмотрим треугольник со сторонами a и b и углом $60°$ между ними (рис. 76). По теореме косинусов, его третья сторона равна

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°} = c.$$

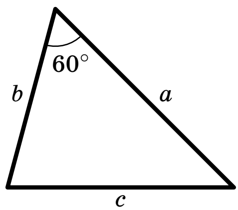


Рис. 76

Поскольку наибольший угол любого треугольника не меньше $60°$, а наименьший — не больше $60°$, угол $60°$ является средним по величине в треугольнике. Из того, что против большего угла треугольника лежит большая сторона, следует, что либо $a \leqslant c \leqslant b$, либо $b \leqslant c \leqslant a$. Значит, из двух сомножителей $a-c$ и $b-c$ один неотрицателен, а другой неположителен. Поэтому их произведение неположительно.

2. Проведем все прямые, параллельные одной из диагоналей квадрата и содержащие более одной из отмеченных точек — таких прямых 17. Невычеркнутыми останутся две угловые точки. Их можно вычеркнуть, проведя еще одну прямую — другую диагональ (рис. 77).

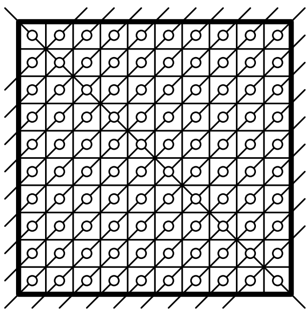


Рис. 77

Докажем, что нельзя обойтись меньшим числом прямых. Действительно, рассмотрим центры единичных квадратиков, расположенных по периметру большого квадрата. Ясно, что прямая, не параллельная стороне квадрата, может вычеркнуть не более двух таких точек, но всего таких точек 36 (см. также факт 1).

3. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Поэтому, рассматривая треугольники AP_kM, получаем $\angle P_kMC = \angle P_kAC + \angle AP_kM$, т. е. $\angle AP_kM = \angle P_kMC - \angle P_kAC$. Складывая все такие равенства, видим, что искомая сумма равна

$$(\angle P_1MC + \ldots + \angle P_{n-1}MC) - (\angle P_1AC + \ldots + \angle P_{n-1}AC).$$

Пусть n нечетно (случай четного n аналогичен). Симметрия относительно высоты равностороннего треугольника P_1MC показывает, что $\angle P_kMC + \angle P_{n+1-k}MC = 60^\circ$ (рис. 78), тогда слагаемые в первой сумме разбиваются на $\frac{n-3}{2}$ пар, в каждой паре сумма равна 60°, кроме того, двум слагаемым «не хватило» пары: $\angle P_1MC = 60^\circ$, $\angle P_{\frac{n+1}{2}}MC = 30^\circ$, значит, первая сумма равна $30^\circ \cdot n$. Во второй сумме слагаемые разбиваются на $\frac{n-1}{2}$ пар с суммой 60°. Значит, вторая сумма равна $30^\circ \cdot (n-1)$. Отсюда немедленно следует утверждение задачи.

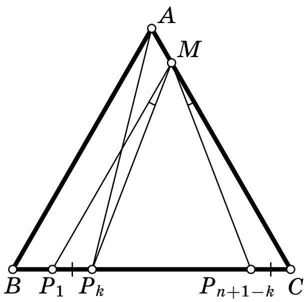


Рис. 78

Комментарий. Сравните с задачей 4 для 8 класса.

4. Случай $m = n = 1$ очевиден (первому некуда ходить). Для определенности будем считать, что доска состоит из m вертикалей и n горизонталей, причем $m \geqslant n$, а ладья, вначале, стоит в левом верхнем углу.

Оказывается, первому достаточно все время делать наиболее длинные ходы. Докажем правильность этой стратегии от противного. Рассмотрим среди досок, для которых эта стратегия не приводит к выигрышу, доску наименьшей площади (см. также факт 24). Для доски $1 \times n$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $m \geqslant n \geqslant 2$.

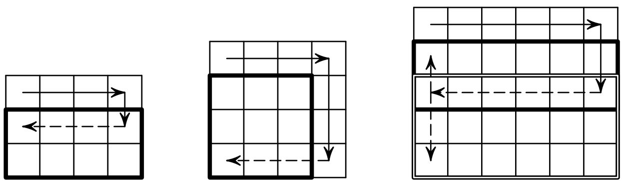
Первый ходит по длинной стороне (горизонтали) до конца. Второй вынужден сделать ход в перпендикулярном направлении. Рассмотрим 3 случая:

а) Второй пошел на одну клетку. Тогда первый пойдет по горизонтали до конца, и игра сводится к аналогичной для доски $m \times (n-1)$ (рис. 79, *а*). Заметим, что $m \geqslant 2$, поэтому доска 1×1 не получится.

б) Второй пошел до конца. Тогда первый пойдет по горизонтали до конца. Если $m = n = 2$, то первый сразу выигрывает. В противном случае игра будет происходить так же, как если бы первый начал игру на доске $(m-1) \times (n-1)$ (рис. 79, *б*).

в) Пусть второй пошел на k клеток, $k \neq 1$, $k \neq n-1$. Тогда $m \geqslant 3$. Первый пойдет до конца по горизонтали. Если второй после этого пойдет вверх, то вся дальнейшая игра будет происходить, как на доске $(m-1) \times k$. Доска 1×1 не получится, так как $(m-1) \geqslant 2$ (рис. 79, *в*).

Если второй пойдет вниз, то вся дальнейшая игра будет происходить, как на доске $m \times (n-k)$.



а) *б*) *в*)

Рис. 79

В любом случае игра будет идти, как если бы она началась ходом позже на меньшей доске, отличной от 1×1. Но, по предположению, на этой доске стратегия верна. Значит, она верна и на исходной доске. Мы пришли к противоречию.

5. Приведем пример. Пусть в стране 10 человек, все их дома располагаются на одной прямой, в порядке возрастания ростов этих людей. Пусть расстояния между между ними таковы: 1 км, 2 км, 3 км, 4 км, 5 км, 4 км, 3 км, 2 км, 1 км (рис. 80). Тогда все, кроме самого высокого, могут бесплатно ездить в транспорте. Действительно, пятеро самых низких могут выбрать круг радиуса 100 км, тогда они будут ниже 5 из 9 своих соседей. Остальные должны выбрать круг, в котором будет только один сосед. С другой стороны, все, кроме самого низкого, могут играть в баскетбол — для этого пятерым самым высоким нужно выбирать круг радиуса 100 км, а остальным — круг, содержащий только одного соседа.

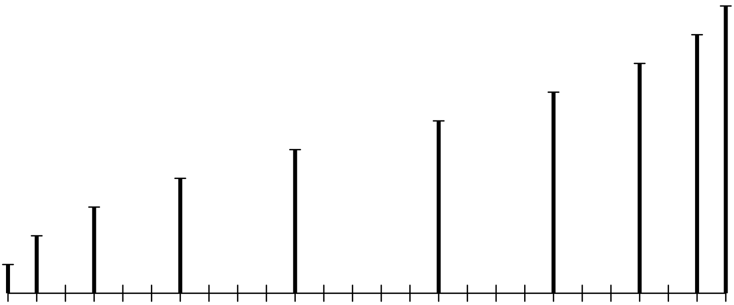


Рис. 80

6. Нетрудно видеть, что (поскольку коэффициенты — натуральные числа) $P(N) > P(M)$ при $N > M > 0$. Кроме того, $P(N) > 1$ при $N > 0$.

Далее, заметим, что если $k \mid x - y$, то $k \mid P(x) - P(y)$ (см. комментарий). Положим

$$A = P(1)P(2)\ldots P(1996).$$

Тогда $P(k) \mid P(A+k) - P(k)$ при $k = 1, \ldots, 1996$ (так как $P(k) \mid A$). Значит, $P(k) \mid P(A+k)$. Но $P(k) > 1$ и $P(A+k) > P(k)$. Значит, $P(A+k)$ — составное число при $k = 1, \ldots, 1996$. Что и требовалось доказать.

Комментарий. Докажем, что если $d \mid x - y$ и P — многочлен с целыми коэффициентами, то $d \mid P(x) - P(y)$.

Заметим сначала, что $d \mid x^n - y^n$ для любого натурального n. Это следует из формулы

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}).$$

Теперь наше утверждение очевидно в случае, когда $P(x) = ax^n$ — одночлен (см. факт 5). Наконец, если утверждение верно для двух многочленов P_1 и P_2, то оно верно и для их суммы. Остается провести индукцию (см. факт 24) по числу одночленов в многочлене $P(x)$.

11 класс

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. Введем обозначения $a=\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}$, $b=\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$, $x=$ $=a+b$. Тогда $ab=1$, так что $x=a+\frac{1}{a}$.

Воспользуемся формулами

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^5=a^5+\frac{1}{a^5}+5\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+10\left(a+\frac{1}{a}\right),$$
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+\frac{1}{a^3}+3\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Подставляя значение $a^3+\frac{1}{a^3}$ из второго равенства в первое, получаем

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^5=\left(a^5+\frac{1}{a^5}\right)+5\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)+10\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $a^5+b^5=4$, получаем

$$x^5=4+5(x^3-3x)+10x,$$

или

$$x^5-5x^3+5x-4=0.$$

Комментарий. Задача, фактически, свелась к тому, чтобы выразить $a^5+\frac{1}{a^5}$ через $a+\frac{1}{a}$. На самом деле, можно выразить $a^n+\frac{1}{a^n}$ через $a+\frac{1}{a}$ при любом n:

$$a^n+\frac{1}{a^n}=P_n\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Многочлены P_n связаны с так называемыми *многочленами Чебышева* C_n формулой $C_n(x)=\frac{1}{2}P_n(2x)$. Многочлены Чебышева определяются формулой:

$$\cos(nx)=C_n(\cos x).$$

То, что все наши формулы согласованы, следует из формулы $\cos x=$ $=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, где $i=\sqrt{-1}$, см. [75]. См. также комментарий к задаче 1 для 10 класса олимпиады 1995 г.

3. Решим сначала обратную задачу: возьмем произвольный куб и проведем через его вершины параллельные плоскости, находящиеся на равных расстояниях друг от друга.

Это можно сделать следующим образом. Введем систему координат так, чтобы рассматриваемый куб был единичным, т. е. его вершины имели координаты 0 или 1. Тогда следующие плоскости содержат вершины куба.

Плоскость	Вершина
$x+2y+4z=0$	(0, 0, 0)
$x+2y+4z=1$	(1, 0, 0)
$x+2y+4z=2$	(0, 1, 0)
$x+2y+4z=3$	(1, 1, 0)

Плоскость	Вершина
$x+2y+4z=4$	(0, 0, 1)
$x+2y+4z=5$	(1, 0, 1)
$x+2y+4z=6$	(0, 1, 1)
$x+2y+4z=7$	(1, 1, 1)

Ясно, что эти плоскости параллельны и расстояния между соседними плоскостями равны.

Теперь преобразованием подобия полученные восемь плоскостей можно преобразовать в исходные, при этом мы получим из рассматриваемого куба требуемый.

4. Первый способ. Заметим прежде всего, что квадраты целых чисел при делении на 4 могут давать остатки 0 или 1, а при делении на 9 — остатки 0, 1, 4 или 7 (см. комментарий). Поэтому числа вида $4k+3$ и $9k+3$ не представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Для любого натурального числа k рассмотрим число

$$n=(36k+2)^2+4^2.$$

Число $n-1$ не представимо в виде суммы двух квадратов, так как при делении на 4 дает остаток 3, а число $n+1$ — так как при делении на 9 дает остаток 3.

Второй способ. Возьмем в качестве n число

$$9^k+1=(3^k)^2+1^2.$$

Тогда $n+1$ дает остаток 2 при делении на 3 и, поэтому, не представляется в виде суммы квадратов.

Докажем, что $n-1=9^k$ не представляется в виде суммы квадратов натуральных чисел. Пусть это не так, $9^k=a^2+b^2$. Без ограничения общности хотя бы одно из чисел a, b не делится на 3 (иначе сократим равенство на 9). Тогда и второе число не делится на 3. Но квадрат числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 остаток 1, значит a^2+b^2 не может делиться на 3 — противоречие.

Комментарии. 1°. Докажем использованное утверждение: точный квадрат дает остаток 0 или 1 при делении на 4. Действительно, квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа имеет вид $(2k+1)^2=(2k)^2+2\cdot 2k+1=4(k^2+k)+1$.

Аналогично доказывается утверждение про деление на 3. Утверждение про остатки от деления квадратов на 9 можно доказать перебором остатков с использованием факта 7. Заметим, также, что квадрат нечетного числа дает остаток 1 при делении на 8.

2°. Имеется знаменитый критерий представимости натурального числа n в виде суммы квадратов двух *целых* чисел: разложим число n на простые множители (см. факт 10), тогда каждое простое число вида $4k+3$ должно входить в произведение в четной степени [30], § 4—5. См. также комментарий к задаче 2 для 8 класса олимпиады 1993 г.

5. Обозначим центры окружностей ω_1 и ω_2 через O_1 и O_2, а радиусы — через r_1 и r_2 соответственно.

Рассмотрим точку D пересечения общей внутренней касательной к окружностям с отрезком O_1O_2. Тогда (см. факт 17)

$$\frac{DO_1}{DO_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$

Пусть AC — одна из диагоналей указанного четырехугольника (рис. 81). Найдем точку S пересечения диаго-

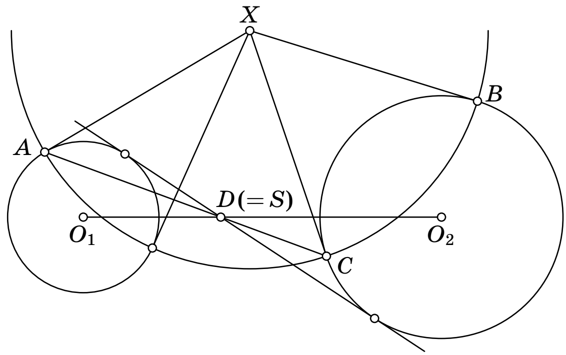


Рис. 81

нали AC и отрезка O_1O_2. Из теоремы синусов, получаем соотношения

$$\frac{SO_1}{\sin\angle O_1AS}=\frac{r_1}{\sin\angle O_1SA},\qquad \frac{SO_2}{\sin\angle O_2CS}=\frac{r_2}{\sin\angle O_2SC}.\tag{1}$$

Проведем окружность с центром в точке X, проходящую через точки A и C. Прямые AO_1 и CO_2 будут касательными к ней. По теореме об угле между хордой и касательной (см. факт 15)

$$\angle O_1AS + \angle O_2CS = \frac{1}{2}(\smile{AC} + \smile{CA}) = \pi,$$

значит $\sin\angle O_1AS = \sin\angle O_2CS$. Углы O_1SA и O_2SC равны как накрест лежащие. Поэтому из соотношений (1) следует, что

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Поскольку существует единственная точка, делящая отрезок в данном отношении, точки D и S совпадают. Аналогичные соображения верны и для второй диагонали. Таким образом доказано, что две диагонали четырехугольника и две общих внутренних касательных пересекают линию центров в одной точке. Из этого следует требуемое утверждение.

Комментарий. Из этой задачи следует такое замечательное утверждение: если четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то точка пересечения прямых, соединяющих противоположные точки касания, совпадает с точкой пересечения диагоналей. Действительно, возьмем в качестве X центр вписанной окружности четырехугольника. Возьмем в качестве ω_1 окружность с центром в точке A, проходящую через точки касания AB и AD с вписанной окружностью четырехугольника. Аналогично, ω_2 — окружность с центром в точке C. Применяя утверждение задачи к получившейся конфигурации, видим, что точка пересечения прямых, соединяющих противоположные точки касания сторон четырехугольника со вписанной окружностью, лежит на AC. Аналогично, она лежит на BD.

6. Первый способ. Будем выбирать строки «испорченной» нулями таблицы по очереди и следить за суммой $S = S(m)$ выбранных строк. Первой возьмем «испорченную» строку, которая получилась из $(1, 1, \ldots, 1)$. Строка $S(1)$ будет состоять из 0 и 1 (если в ней только нули, то уже одна эта строка дает нужное множество). Второй строкой возьмем «испорченную» строку, полученную из той, в которой стояли -1 на тех местах, где в $S(1)$ стоят 1. Тогда $S(2)$ будет стоять из 0 и 1. Пусть k строк уже выбраны. Если сумма $S(k)$ совпадает с некоторой из предыдущих сумм $S(m)$, где $m < k$, то сумма $(m+1)$-й,

$(m+2)$-й, ..., k-й строк равна нулевой строке, и задача решена. Если сумма $S(k)$ не совпадает ни с одной из предыдущих строк, то в качестве $(k+1)$-й берем «испорченную» строку, полученную из той, в которой стояли -1 на тех местах, где в $S(k)$ стоит 1, и 1 на тех местах, где в $S(k)$ стоит 0. Эта строка еще не была выбрана, так как для разных сумм $S(m)$ мы выбираем разные строки, а сумма $S(k)$ раньше не встречалась.

Если на некотором шаге получится сумма, которая уже встречалась раньше, то задача решена (см. выше), если нет, — то, в конце концов, все строки будут выбраны. При этом мы получим 2^n различных сумм $S(k)$. Так как различных наборов из 0 и 1 длины n тоже 2^n, то все строки из 0 и 1 встретятся в качестве сумм $S(k)$. Значит, на каком-то шаге, $S(k)=0$, и нужное множество — первые k выбранных строк.

Второй способ. Обозначим строки исходной таблицы a_i, а строки таблицы, «испорченной» нулями, b_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n)$. Построим также таблицу со строками $c_i=a_i-2b_i$. Иными словами, строка c_i совпадает с a_i в тех местах, которые заменялись нулями, и противоположна ей в остальных. В частности, построенная таблица состоит из ± 1. Поэтому для любого i найдется $j(i)$ такое, что $c_i=a_{j(i)}$. Рассмотрим теперь последовательность i_k, заданную рекуррентным соотношением $i_{k+1}=j(i_k)$. (Первый член последовательности выбирается произвольно.) Поскольку последовательность может принимать лишь конечное число значений, какие-то ее члены равны между собой. Пусть $i_k=i_l$ для некоторых $k<l$, причем все члены последовательности с номерами, меньшими l, различны. Имеем

$$b_{i_k}+b_{i_{k+1}}+\ldots+b_{i_{l-1}}=$$
$$=\frac{1}{2}(a_{i_k}-c_{i_k})+\frac{1}{2}(a_{i_{k+1}}-c_{i_{k+1}})+\ldots+\frac{1}{2}(a_{i_{l-1}}-c_{i_{l-1}})=$$
$$=\frac{1}{2}(a_{i_k}-a_{i_{k+1}}+a_{i_{k+1}}-a_{i_{k+2}}+\ldots+a_{i_{l-1}}-a_{i_l})=\frac{1}{2}(a_{i_k}-a_{i_l})=0.$$

Что и требовалось доказать.

1997 год

8 класс

1. На горизонтали может стоять от одной до восьми фигур. Так как на разных горизонталях — разное число фигур, на некоторой горизонтали стоит ровно одна фигура, на некоторой другой — две фигуры, ..., наконец, некоторая горизонталь заполнена восемью фигурами. Пронумеруем горизонтали в соответствии с количеством стоящих на них фигур.

Отметим на первой горизонтали ее единственную фигуру. Поскольку на второй горизонтали две фигуры, хотя бы одну из них можно отметить. Поскольку на третьей горизонтали три фигуры, хотя бы одну из них можно отметить, и так далее. См. также факт 1.

2. Путь по дороге и тропинке (туда и обратно) занимает 16 часов. Значит, если выйти сразу после извержения первого кратера, то он не будет опасен.

Движение по тропинке (туда и обратно) занимает 8 часов. Значит, если начать движение по тропинке сразу после извержения второго кратера, то он не будет опасен.

Ване для безопасного подъема достаточно, чтобы к началу движения по дороге перестал извергаться первый кратер, а спустя 4 часа, к началу движения по тропинке, перестал извергаться второй кратер.

Найдем такой момент времени. Первый кратер извергается 1-й, 19-й, 37-й часы. Второй кратер извергается 1-й, 11-й, 21-й, 31-й, 41-й часы. Значит, если выйти в начале 38-го часа, то к началу тропинки Ваня попадет как раз к концу извержения второго кратера, что и требовалось.

Комментарий. Мы решили задачу перебором. На самом деле, можно было бы составить *диофантово уравнение*. Первый кратер извергается в часы с номерами $18x+1$, где x — целое число; второй кратер — в часы с номерами $10y+1$. Нам нужно, чтобы они извергались со сдвигом в 4 часа, и мы приходим к уравнению

$$10y-18x=4.$$

Наименьшее решение в натуральных числах — $y=4$, $x=2$.

3. Пусть точки L и K симметричны точке M относительно прямых OX и OY соответственно (рис. 82, *а*). Тогда точки K, P и N лежат на одной прямой, причем $NK = NP + PK = NP + PM$. Действительно, отрезок MK перпендикулярен прямой OY, и если A — точка пересечения, то $MA = AK$ (это определение симметричной точки). Прямоугольные треугольники MAP и KAP равны по двум катетам, поэтому $\angle KPA = \angle MPY = \angle NPO$. Кроме того $PK = PM$.

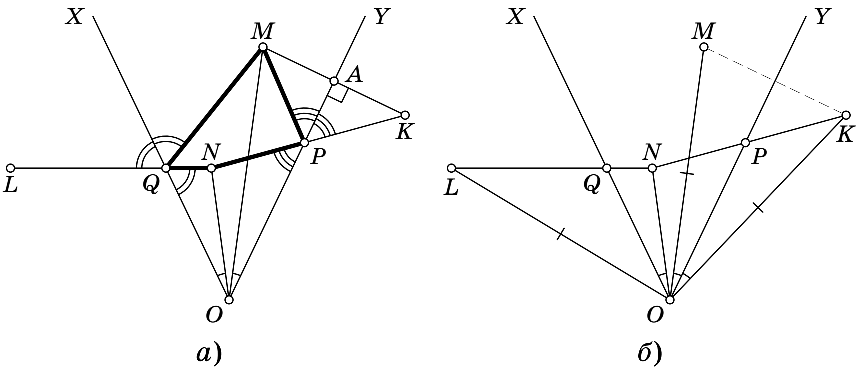


Рис. 82

Аналогично, на одной прямой лежат точки N, Q и L, а отрезок $NL = NQ + QL = NQ + QM$. Осталось доказать, что $NL = NK$. Для этого докажем, что треугольники KON и LON равны по двум сторонам и углу между ними. В самом деле, так как точки K и M симметричны относительно прямой OY, $KO = MO$ (рис. 82, *б*). Аналогично, $MO = LO$. Значит, $LO = MO$, сторона ON треугольников KON и LON общая, и

$$\angle KON = \angle KOP + \angle PON = \angle POM + \angle PON = \\ = \angle QON + \angle PON = \angle XOY.$$

Аналогично проверяется равенство $\angle LON = \angle XOY$. Итак, $\angle KON = \angle LON$, треугольники KON и LON равны по первому признаку, и утверждение доказано.

Комментарий. Хорошо известен следующий факт: ломанная MPN имеет наименьшую длину среди всех ломаных $MP'N$ с точкой P', лежащей на прямой OY. С этим связана задача про пожар: пожарник, находящийся в точке N, должен погасить пожар в точке M, набрав ведро воды в реке, представляющей собой прямую OY. Как ему бежать, чтобы его путь был кратчайшим? Ответ: через точку P.

Исходную задачу можно теперь интерпретировать так: если река представляет собой угол XOY, причем $\angle NOX = \angle MOY$, то пожарнику все равно, к какой из сторон угла бежать.

4. Рассмотрим любое четное число N, большее, чем 9992. В силу признака делимости на 2 (см. факт 6), оно оканчивается четной цифрой. Значит, если изменить любую тройку цифр, отличную от последней, то число останется четным, а значит, составным (из числа 9992 можно получить простое число 0002).

Поэтому нам нужно заботиться лишь о замене последней тройки. Мы построим число N, которое оканчивается на 000, так что оно будет четным. Заменить последнюю тройку цифр числа N — это все равно что прибавить к N некоторое трехзначное число. Значит, нам достаточно найти число, оканчивающееся на 000 и такое, чтобы числа

$$N,\ N+1,\ \ldots,\ N+999$$

были составными. Итак, перемножим нечетные числа от 1001 до 1999. Поскольку их 500, а каждое из них меньше 2000, то их произведение меньше, чем

$$2000^{500} = 2^{500}\cdot 10^{1500} = 32^{100}\cdot 10^{1500} < 100^{100}\cdot 10^{1500} = 10^{1700}.$$

Припишем к этому числу справа несколько нулей, а затем цифру 1 и еще три нуля так, чтобы общее количество цифр равнялось 1997.

Как было замечено, если в полученном числе не менять последнюю цифру, то число будет четным. Если изменить последние три нуля на четное число, то число останется четным. Если же изменить последние три нуля на нечетное число $\overline{abc}$ (см. факт 11), то последние четыре цифры образуют число $\overline{1abc}$, на которое делится построенное число, ибо $\overline{1abc}$ входит в произведение нечетных чисел от 1001 до 1999.

К о м м е н т а р и й. Сравните со следующей известной задачей: привести пример 1000 идущих подряд составных чисел.

5. Пусть прямые DE и AB пересекаются в точке G (рис. 83). Тогда треугольники DEC и BEG равны по второму признаку. Следовательно, $BG=CD=BA$. Поэтому точки A, G и C лежат на окружности с центром в точке B, причем AG — диаметр. Так как $\angle AFG=90^\circ$, точка F лежит на той же окружности по теореме об углах, опирающихся на диаметр (см. факт 14).

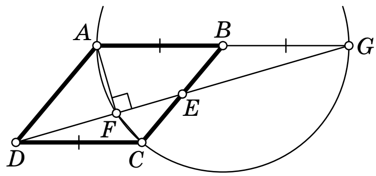


Рис. 83

По теореме об угле, вписанном в окружность, имеем $\angle GFC=\frac{1}{2}\angle GBC=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$. Значит, $\angle DFC=180^\circ-\angle GFC=110^\circ$.

Вариант решения. Можно обойтись без использования окружностей. Известно, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы (см. факт 14). Применяя это утверждение к треугольнику AFG, получим $BF=BA=BG$.

Треугольники CBF и FBA равнобедренные, поэтому сумма углов BCF и BAF равна углу CFA.

Сумма углов четырехугольника $ABCF$ равна 360°. Поэтому

$$\angle CFA+\angle CFA+40^\circ=360^\circ,$$

откуда $\angle CFA=160^\circ$. Следовательно, $\angle CFD=360^\circ-\angle AFC-\angle AFD=360^\circ-160^\circ-90^\circ=110^\circ$.

6. Решим сначала более простую задачу. Пусть банкир разрешает класть на весы монеты не более 1 раза. Из какого наибольшего числа монет можно выделить более легкую за k взвешиваний?

Если при каком-то взвешивании на чаше весов будет больше одной монеты, то из них выделить фальшивую монету не удастся (второй раз взвешивать монету нельзя!). Поэтому при каждом взвешивании на чаши кладется по одной монете.

Если весы не в равновесии, то фальшивая монета очевидна. А если в равновесии, то количество подозрительных монет уменьшится на 2. Следовательно, при k взвешиваниях можно выделить фальшивую из $2k+1$ монет.

Возвращаясь к исходной задаче, обозначим ответ в ней через $f(n)$. Пусть при первом взвешивании на чашах лежат по s монет. Если весы окажутся не в равновесии, то придется искать фальшивую монету среди s монет, причем каждую из них можно использовать лишь по одному разу, и осталось $n-1$ взвешивание. По доказанному $s \leqslant 2(n-1)+1 = 2n-1$.

Если весы в равновесии, то получаем исходную задачу для монет, не попавших на весы (их $f(n)-2s$), и $n-1$ взвешивания, значит,

$$f(n)-2s \leqslant f(n-1).$$

Отсюда

$$f(n) \leqslant f(n-1)+2s \leqslant f(n-1)+2(2n-1).$$

Следовательно,

$$f(n) \leqslant 2(2n-1)+2(2n-3)+\ldots+2\cdot 3+f(1).$$

Поскольку, как легко проверить, $f(1)=3$, имеем $f(n) \leqslant 2n^2+1$ по формуле для суммы арифметической прогрессии.

С другой стороны, если имеется $2n^2+1$ монет и каждый раз брать s максимальным, т. е. на первом шаге $s=2n-1$, на втором — $s=2n-3$, и т. д., то эксперт сможет выделить фальшивую монету. Значит, $f(n)=2n^2+1$.

9 класс

1. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. По условию $a=\frac{b+c}{3}$. Поскольку против меньшей стороны треугольника расположен его меньший угол, достаточно доказать, что a — самая маленькая из длин. Докажем, что

$$a=\frac{b+c}{3}<b.$$

Умножив обе части неравенства на 3 и преобразовав, получим неравенство $c<2b$.

По неравенству треугольника $a+b>c$, поэтому $\frac{b+c}{3}+b>c$, т. е. $2b>c$, и неравенство $a<b$ доказано. Аналогично доказывается, что $a<c$.

2. Обозначим массы кусочков в порядке возрастания: m_1, m_2, ..., m_9. Налево положим 1-й, 3-й, 5-й и 7-й кусочки, а направо — 2-й, 4-й, 6-й и 8-й. Тогда

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 < m_2 + m_4 + m_6 + m_8$$

(неравенство строгое, потому что кусочки — разные). А если налево добавить 9-й кусочек, то

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 > m_2 + m_4 + m_6 + m_8.$$

Следовательно, достаточно разрезать 9-й кусочек.

3. Заметим, сначала, что сумма всех углов шестиугольника равна 720° (это можно увидеть, например, разрезав его на два четырехугольника).

Значит,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 360^\circ. \qquad (1)$$

Площадь шестиугольника равна сумме площадей треугольников AB_1C, BCA_1, AC_1B и ABC (рис. 84). Значит, достаточно доказать, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AB_1C, BCA_1 и AC_1B.

Оказывается, из этих треугольников можно сложить треугольник ABC. Для этого повернем треугольник AB_1C вокруг точки C так, чтобы образ вершины B_1 совпал с точкой A_1 (это возможно, так как $CA_1 = CB_1$). Пусть точка A перейдет при этом в точку A'.

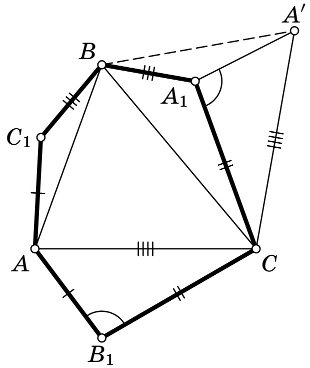


Рис. 84

Имеем $\angle A'A_1B = 360^\circ - \angle A'A_1C - \angle CA_1B = 360^\circ - \angle CB_1A - \angle CA_1B = \angle AC_1B$. Мы воспользовались равенством (1) и тем, что угол не меняется при повороте. Теперь ясно, что треугольники $A'A_1B$ и AC_1B равны по первому признаку.

Осталось доказать, что треугольники $A'BC$ и ABC равны. Но из равенства треугольников $A'A_1B$ и AC_1B следует, что $A'B = AB$, так что треугольники $A'BC$ и ABC равны по третьему признаку.

4. Для ясности будем считать поезда и станции точками.

Понятно, что если n делится на 3, то Лёша и Ира всегда уезжают одновременно. Значит, в этом случае лес отсутствует. Пусть n не делится на 3. Тогда, когда бы они ни пришли на станцию, либо Ира уедет раньше Лёши, либо — Лёша раньше Иры.

Обозначим расстояние между соседними поездами через l. Если в некоторой точке X лес, то в точке Y, находящейся от нее на расстоянии, кратном l, тоже лес. Действительно, если Ира входит на станцию, когда Рома находится в точке X, то она уедет первой. Но когда Рома находится в точке Y, расположение поездов такое же, как когда он находится в точке X, так что в этом случае Ира тоже уедет первой, поэтому в точке Y тоже лес.

Итак, «структура» леса периодическая, поэтому достаточно определить расположение леса на интервале длины l.

Рассмотрим момент, когда некоторый поезд отходит от станции B (рис. 85). Пусть поезд, на который сядет Ира (т. е. ближайший против направления движения к станции A поезд) в этот момент находится на расстоянии x от A. Тогда весь интервал между этим поездом и точкой A покрыт лесом. Действительно, если машинист Рома находится на этом интервале, то он увезет Иру, потому что Лёша «упустил» свой поезд (строго говоря, это следует из того, что $x < l$).

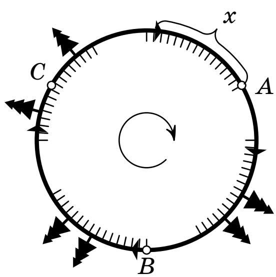


Рис. 85

Покажем, что интервал длины $l - x$, следующий за A по направлению движения, лесом не покрыт. Действительно, когда поезд придет на станцию A, то ближайший к B против направления движения поезд будет на расстоянии $l - x$. Так что если Рома находится на указанном интервале длины $l - x$, то Лёша сядет в поезд первым, так как Ира «упустила» поезд, который ведет Рома.

Итак, на участке длины l леса — x, а поля — $l - x$. Так как структура леса периодическая, то и на всей дороге количество леса относится к количеству поля как x к $l-x$.

Осталось найти x. Длина окружности равна nl, значит, длина большей дуги BA равна $\frac{2}{3}nl$. Ясно, что величина x равна остатку от деления длины дуги BA на l. Значит, если остаток от деления n на 3 равен 1, то $x=\frac{2l}{3}$, т. е. доля леса составляет $\frac{2}{3}$.

Аналогично, если остаток от деления n на 3 равен 2, то $x=\frac{l}{3}$, и лес составляет $\frac{1}{3}$.

5. Разделим участников турнира на две группы: тех, кто набрал во втором турнире больше очков, чем в первом, и тех, кто набрал в первом турнире больше очков, чем во втором. Хотя бы одна из этих двух групп включает не менее, чем n спортсменов. Пусть, например, такова первая группа, и в ней x спортсменов. Пусть их общая сумма очков во втором турнире на D больше, чем их сумма очков в первом турнире. Тогда из условия следует, что

$$D \geqslant x \cdot n. \tag{1}$$

Это изменение произошло за счет встреч x спортсменов с остальными $2n-x$ спортсменами (так как встречи спортсменов друг с другом внутри группы оба раза дали в сумме одно и то же количество очков, а именно $\frac{x(x-1)}{2}$). Каждая из встреч со спортсменами другой группы добавила не более одного очка. Поэтому

$$D \leqslant x \cdot (2n-x). \tag{2}$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), получаем $2n-x \geqslant n$. Если хотя бы одно из предыдущих неравенств было бы строгим, то мы имели бы $2n-x>n$, что противоречило бы предположению $x \geqslant n$. Значит, $x=n$ и $D=n\times n$, и каждый спортсмен первой группы увеличил свою сумму очков ровно на n.

Так как во второй группе тоже n спортсменов, к ней применимо аналогичное рассуждение.

Комментарии. 1°. Из решения видно, что условие задачи может выполняться лишь в следующем случае: спортсмены разбились на две группы по n человек, причем в первом турнире все игроки первой группы выиграли у всех игроков второй группы, а во втором турнире все игроки второй группы выиграли у всех игроков первой.

2°. Сравните с задачей 5 для 10 класса.

6. Обозначим

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$
$$G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$$

Тогда, по условию,

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = \\ = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Свободный член произведения равен произведению свободных членов, т. е. $a_0 \cdot b_0 = 1$. Значит, $a_0 = 1$ и $b_0 = 1$. Коэффициент произведения $F(x) \cdot G(x)$ при первой степени x вычисляется по формуле $a_0b_1 + a_1b_0$. Поскольку он равен 1, то либо $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, либо $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Для определенности предположим, что $a_1 = 1$ и $b_1 = 0$.

Если все коэффициенты a_i многочлена $F(x)$ равны 1, то задача решена. Если же среди них присутствует 0, то рассмотрим наименьшее m, для которого $a_m = 0$. Тогда

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 1, \qquad a_m = 0.$$

Мы хотим доказать, что многочлен $F(x)$ представим в виде $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1})T(x)$, где T — также многочлен с коэффициентами 0 и 1.

Если какой-нибудь коэффициент b_l равен единице, где $1 \leqslant l < m$, то сразу видим, что коэффициент при x^l больше 1: член x^l произведения $F(x)G(x)$ можно получить как умножая a_0 на b_lx^l, так и умножая a_l на b_0x^l. Значит, $b_l = 0$ при $1 \leqslant l < m$. Теперь ясно, что $b_m = 1$: в противном случае коэффициент при x^m был бы равен 0.

Последовательность коэффициентов a_0, a_1, ... можно представлять себе как последовательность чередующихся отрезков: сначала отрезок из единиц, потом отрезок из нулей, потом снова из единиц и т. д. Рассмотрим один из таких отрезков: $a_r = \ldots = a_{r+s-1} = 1$, причем $a_{r-1} = 0$, $a_{r+s} = 0$. Длина s этого отрезка не может быть больше m:

в противном случае член x^{r+m} произведения можно получить как умножая $a_r x^r$ на $b_m x^m$, так и умножая $a_{r+m}x^{r+m}$ на b_0.

Докажем, что *эта длина не может быть меньше m.* Предположим противное. Рассмотрим самый левый такой (окаймленный нулями) отрезок из единиц $a_r, \ldots, a_{r+s-1}$, длина s которого меньше, чем m.

Посмотрим, как получается член x^{r+s} произведения $F(x)\cdot G(x)$. Поскольку $a_{r+s}=0$, он должен получаться при умножении какого-то члена вида $a_u x^u$ на некоторый член $b_v x^v$, $v>0$. (Разумеется, $u+v=r+s$.)

Нетрудно понять, что если $u\neq 0$, то $a_{u-1}=0$ (случай $u=0$ мы оставляем читателю) — в противном случае можно получить x^{r+s-1} двумя способами: $a_{u-1}x^{u-1}\cdot b_v x^v = a_{r+s-1}x^{r+s-1}\cdot 1$. Значит, должен существовать отрезок из единиц $a_u, \ldots, a_{u+m-1}$. (Длина его равна m, поскольку он расположен левее отрезка $a_r, \ldots, a_{r+s-1}$.)

Но число $r+m-v=r+m-(r+s-u)=u+(m-s)$ лежит на отрезке $u, \ldots, u+m-1$, так что $a_{r+m-v}=1$, и мы приходим к противоречию: $a_r x^r\cdot b_m x^m = a_{r+m-v}x^{r+m-v}\cdot b_v x^v$.

Следовательно, все отрезки из единиц имеют одну и ту же длину m. Деление «уголком» (см. факт 19) убеждает нас в том, что многочлен F представим в виде произведения многочлена $1+x+\ldots+x^{m-1}$ на многочлен, все коэффициенты которого — нули или единицы.

Комментарий. Понять это решение (и тем более придумать его) проще, если рисовать отрезки и смотреть, что происходит при сдвигах. Для геометра рассматриваемая задача может быть сформулирована так:

Даны отрезок длины L и некоторая система S содержащихся в нем непересекающихся друг с другом отрезочков. Доказать, что если отрезок можно покрыть параллельными сдвигами системы S (чтобы каждая точка отрезка была покрыта и отрезочки не накладывались бы друг на друга внутренними точками, а только «состыковывались» бы в концах), то все отрезочки системы S имеют одну и ту же длину l.

10 класс

1. Первый способ. Введем в пространстве координаты и рассмотрим координатные плоскости α, β и γ, заданные уравнениями $x=0$, $y=0$ и $z=0$ соответственно.

Рассмотрим шар B, заданный неравенством
$$x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$
Его проекция на плоскость α — круг радиуса 1 с центром в начале координат. Множество точек, которые проецируются в этот круг, представляет собой цилиндр (обозначим его C_1), который задается неравенством
$$x^2+y^2\leqslant 1.$$
Аналогично определим цилиндры C_2 и C_3, как множества точек, которые проецируются в единичные круги с центрами в начале координат, лежащие в плоскостях β и γ соответственно.

Пусть C — пересечение цилиндров C_1, C_2 и C_3. Мы утверждаем, что C — требуемое тело. Оно выпукло, так как пересечение выпуклых множеств выпукло.

Покажем, что проекции тела C на плоскости α, β и γ — круги. Рассмотрим, например, плоскость α. Проекция тела C на эту плоскость содержится в единичном круге, так как проекция цилиндра C_1 совпадает с единичным кругом, а C содержится в C_1. С другой стороны, этот единичный круг содержится в теле C, значит, проекция содержит круг. Итак, проекция тела C на плоскость α содержит единичный круг и содержится в единичном круге, а, значит, совпадает с ним.

Осталось доказать, что тело C не является шаром. Точка $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ содержится в каждом из цилиндров C_1, C_2 и C_3 (например, $x^2+y^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\leqslant 1$), так что эта точка содержится в C. С другой стороны, она не принадлежит единичному шару — расстояние от нее до начала координат равно
$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}>1.$$
Поэтому $C\neq B$.

Остается один вопрос, который может показаться глупым: а не может ли C оказаться шаром, отличным от B? Нетрудно видеть, что не может: проекции тела C на плоскости α, β и γ такие же как у шара B, но ясно, что два шара, имеющие одинаковые проекции на координатные плоскости, совпадают (проверьте!).

В т о р о й с п о с о б (набросок). Рассмотрим шар и его проекции на три плоскости. Пусть некоторая точка A сферы не проецируется ни на одну из границ проекций. Тогда некоторый круг с центром в точке A обладает тем же свойством. Отрежем от шара соответствующий кусочек — получим фигуру, не являющуюся шаром, но дающую те же самые проекции на рассматриваемые плоскости.

2. Рассмотрим некоторый четырехугольник $ABCD$. Перенесем его на вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис. 86). Получим четырехугольник $A'B'C'D'$, где $A'=C$, а четырехугольник $BB'D'D$ — параллелограмм, так как отрезки BD и $B'D'$ параллельны и равны. Пусть A_0, B_0, C_0 и D_0 — середины отрезков BD, BB', $B'D'$ и $D'D$ соответственно.

Мы утверждаем, что $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм, длины диагоналей которого равны длинам диагоналей четырехугольника $ABCD$, а угол между диагоналями равен углу между диагоналями четырехугольника $ABCD$. То, что $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм, следует из того, что отрезки A_0B_0 и C_0D_0 — средние линии треугольников $B'BD$ и $B'D'D$ соответственно. Второе утверждение следует из того, что отрезки B_0D_0 и BD параллельны и равны также, как и отрезки A_0C_0 и AC.

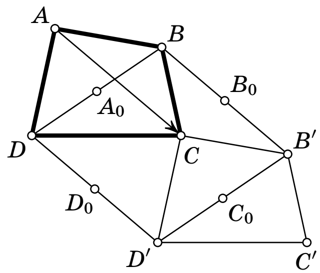


Рис. 86

Значит, осталось доказать, что периметр четырехугольника $ABCD$ не меньше периметра параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$. Но периметр параллелограмма равен $B'D+BD'$ (по теореме о средней линии). По неравенству треугольника, $BC+CD' \geqslant BD'$ и $B'C+CD \geqslant B'D$. Складывая эти неравенства, получаем нужное утверждение.

3. б) Очевидно, из правильного многоугольника $A_1A_2\ldots$ $\ldots A_n$ после продолжения сторон получится правильный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$.

Это можно доказать строго например так: многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ правильный тогда и только тогда, когда он переходит в себя при некотором повороте на $2\pi/n$. Но если многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ переходит в себя при таком повороте, то и многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ переходит в себя при таком повороте.

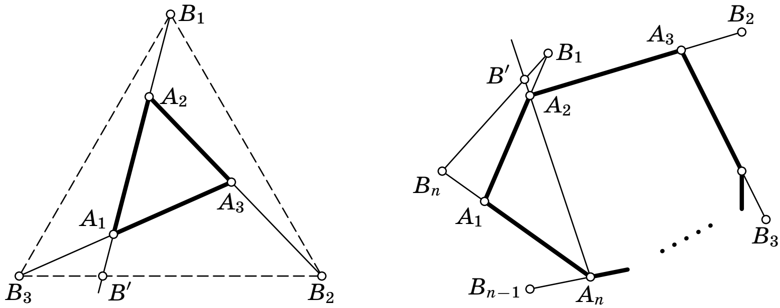
Поскольку все правильные n-угольники подобны, то любой из них можно получить такой процедурой из некоторого правильного n-угольника. Осталось доказать, что по многоугольнику $B_1B_2\ldots B_n$ многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ определяется однозначно.

Первый способ. Индукцией по n (см. факт 24) докажем более сильное утверждение.

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть точка B_1 взята на луче A_1A_2 за точкой A_2 так, что $A_1B_1/A_1A_2=\alpha_1$, точка B_2 — на луче A_2A_3 за точкой A_3, причем $A_2B_2/A_2A_3=\alpha_2$ и т. д.

Тогда многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ однозначно восстанавливается по многоугольнику $B_1B_2\ldots B_n$ и коэффициентам α_1, α_2, $\ldots$, α_n.

База индукции: $n=3$. Пусть B' — точка пересечения прямой A_1A_2 с отрезком B_2B_3 (рис. 87, *а*). Мы можем найти отношение $B_2B'/B'B_3$ по теореме Менелая (см. комментарий), так как мы знаем отношения A_2B_2/A_2A_3 и A_3B_3/A_3A_1. Поэтому точка B', а значит, и прямая A_1A_2 восстанавливаются однозначно. Аналогично восстанавливаются прямые A_2A_3 и A_3A_1, следовательно, треугольник $A_1A_2A_3$ восстанавливается однозначно.



а) *б*)

Рис. 87

Шаг индукции доказывается аналогично базе. Пусть B' — точка пересечения прямой A_nA_2 с отрезком B_1B_n (рис. 87, *б*). Мы можем найти отношение $B_1B'/B'B_n$ по теореме Менелая, так как мы знаем отношения A_nB_n/A_nA_1 и A_1B_1/A_1A_2. Поэтому точка B' восстанавливается однозначно. По той же теореме Менелая мы можем найти отношение A_nB'/A_nA_2. Применяя предположение индукции к многоугольникам $A_2A_3\ldots A_n$ и $B_2\ldots B_{n-1}B'$, видим, что точки A_2, A_3, ... A_n восстанавливаются однозначно, теперь уже нетрудно восстановить и точку A_1. Утверждение доказано.

Комментарий. Теорема Менелая. *Пусть A_1, B_1, C_1 — точки на сторонах (или на продолжениях сторон) BC, AC, AB треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1$$

и на продолжениях сторон лежат либо все точки, либо ровно одна.

В решении данной задачи используется утверждение теоремы Менелая только в одну сторону; его мы и докажем. А именно, пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Тогда при проекции на прямую, перпендикулярную этой прямой, точки A_1, B_1 и C_1 переходят в одну точку; обозначим ее P. Проекции точек A, B, C обозначим A', B', C'. Тогда

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{B'P}{C'P}\cdot\frac{C'P}{A'P}\cdot\frac{A'P}{B'P}=1.$$

См. также [46], гл. 5, § 7.

Второй способ. Пусть многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ получен указанным выше способом из многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, и при этом точка A_2 — середина отрезка A_1B_1, точка A_3 — середина отрезка A_2B_2, ..., точка A_1 — середина отрезка A_nB_n. Поместим в вершины B_1, B_2, ..., B_n грузики массами 1, 2, ..., 2^n и покажем, что точка A_1 — центр масс этой системы (см. [46], гл. 14). Для этого поместим еще в точку A_1 грузик массы 1. Теперь центр масс точек A_1 и B_1 находится в точке A_2. Поэтому можно убрать массы из точек A_1 и B_1, поместив массу 2 в точку A_2.

Аналогично, уберем массы из точек A_2 и B_2, поместив массу 4 в их центр масс — точку A_3. В конце концов, центр масс окажется в точке A_1. Значит, и центр масс исходной системы находится там же.

Поскольку центр масс определяется по системе масс однозначно, точка A_1 определена однозначно. Аналогично поступим с вершинами A_2, A_3, ..., A_n. Следовательно, и весь многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ определен многоугольником $B_1B_2\ldots B_n$.

Третий способ. При гомотетии с центром B_1 и коэффициентом $1/2$ точка A_1 перейдет в A_2. При гомотетии с центром B_2 и коэффициентом $1/2$ точка A_2 перейдет в A_3, и так далее. При гомотетии с центром B_n и коэффициентом $1/2$ точка A_n перейдет в A_1.

Значит, точка A_1 перешла в себя при композиции гомотетий. Как известно, композиция n гомотетий с коэффициентами $1/2$ есть гомотетия с коэффициентом $1/2^n$ и центром, однозначно определяемым центрами этих гомотетий (см. [46], гл. 19, § 4). В нашем случае этот центр — A_1, и, значит, эта вершина однозначно определена.

4. Данные задачи напоминают теорему Виета (см. факт 20). Рассмотрим многочлены $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ и $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$. Из условия задачи следует, что эти многочлены отличаются только свободным членом (достаточно раскрыть скобки). Поэтому график одного многочлена получается из графика другого сдвигом по оси ординат.

При $x\leqslant b_1$ имеем $Q(x)\leqslant 0$. Действительно, каждый из трех множителей в выражении для $Q(x)$ неположителен, а произведение трех неположительных чисел неположительно.

Итак, $Q(a_1)\leqslant 0$, $P(a_1)=0$. Значит, график $y=Q(x)$ получается из графика $y=P(x)$ сдвигом вниз или совпадает с ним. В частности, $Q(a_3)\leqslant P(a_3)=0$. Но при $x>b_3$ имеем $Q(x)>0$. Следовательно, $a_3\leqslant b_3$.

5. Допустим, не все набрали одинаковое число очков. Пусть занявшие первое место («первые») набрали K очков, а занявшие последнее место («последние») — L очков. (Места определяются по очкам, а не по коэффициентам.)

Коэффициент «первых» — это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше $K\cdot L$. Аналогично, коэффициент «последних» — это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому коэффициент «последних» не превосходит $K \cdot L$.

Если коэффициенты «первых» и «последних» равны, то они равняются $K \cdot L$. В этом случае каждый «первый» выиграл K встреч у набравших L очков, т. е. у «последних», а каждый «последний» выиграл L встреч у набравших K очков. Если число «первых» больше одного, то один из них выиграл у другого, что противоречит предыдущему. Значит, на первом месте один спортсмен. Аналогично, на последнем месте только один спортсмен.

По условию, в турнире есть третий участник. Из доказанного следует, что он не проигрывал ни первому, ни последнему, т. е. выиграл и у первого, и у последнего.

Но тогда он набрал больше очков, чем первый, поскольку первый выиграл только у последнего. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение неверно. Следовательно, все участники набрали одинаковое число очков.

Комментарий. Сравните с задачей 5 для 9 класса.

6. Достаточно доказать, что любой *начальный* кусок последовательности первых цифр степеней пятерки встречается (в обратном порядке) в последовательности первых цифр степеней двойки.

Рассмотрим числа: $1/2$, $1/4$, ..., $1/2^n$. Последовательность первых ненулевых цифр их десятичных записей есть в точности последовательность первых цифр десятичных записей чисел 5, 25, ..., 5^n. Таким образом, если добавить отрицательные степени, то утверждение задачи будет выполнено.

Для решения нашей задачи следует «проимитировать» отрицательные степени. Для этого достаточно показать, что для любого k существует такая степень двойки $x = 2^n$, десятичная запись которой имеет вид

$$1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}}y, \tag{1}$$

где y — оставшаяся часть десятичной записи. Иными словами, $x = 10^N + y$, причем $y < 10^{N-k}$ (см. факт 11).

В этом случае $2^{n-1}=2^n/2=500\ldots0*$, $2^{n-2}=250\ldots0*$, $2^{n-3}=1250\ldots0*$. Точнее,

$$2^{n-l}=\frac{x}{2^l}=\frac{10^N+y}{2^l}=10^{N-l}5^l+\frac{y}{2^l},$$

так что первая цифра числа 2^{n-l} совпадает с первой цифрой числа 5^l при $l<k$.

Итак, осталось доказать, что для любого k существует степень двойки вида (1).

Первое доказательство. Ясно, что найдутся две степени двойки, у которых первые $k+1$ цифр совпадают (так как наборов из $k+1$ цифр — конечное число, а степеней двойки — бесконечное). Разделим одну такую степень на другую (большую на меньшую). Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть у степеней двойки 2^a и 2^b $(a>b)$ совпадают первые $k+1$ цифр. Тогда если первая цифра, в которой числа 2^a и 2^b различаются, у числа 2^a больше, чем у числа 2^b, то частное является степенью двойки, которая начинается с единицы и k нулей. Если же первая несовпадающая цифра больше у числа 2^b, то частное начинается с k девяток.*

Доказательство. Обозначим число, образованное первыми $k+1$ цифрами чисел 2^a и 2^b через D. Пусть число 2^a — p-значное, а число 2^b — q-значное $(p\geqslant q)$. Тогда $2^a=10^{p-k-1}D+\alpha$, $2^b=10^{q-k-1}D+\beta$, где $\alpha<10^{p-k-1}$, $\beta<10^{q-k-1}$. Имеем

$$|2^{a-b}-10^{p-q}|=\left|\frac{10^{p-k-1}D+\alpha}{10^{q-k-1}D+\beta}-10^{p-q}\right|=$$
$$=\frac{|\alpha-10^{p-q}\beta|}{10^{q-k-1}D+\beta}<\frac{10^{p-k-1}}{10^{q-1}}=10^{p-q-k}. \quad (2)$$

Если первая несовпадающая цифра больше у числа 2^a, то $\alpha>10^{p-q}\beta$, так что последнее заключенное в знаки модуля выражение в формуле (2) положительно. Но тогда и остальные выражения, заключенные в знаки модуля, положительны, и предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$10^{p-q}<2^{a-b}<10^{p-q}+10^{p-q-k},$$

так что 2^{a-b} начинается с 1 и k нулей. Случай, когда первая несовпадающая цифра больше у числа 2^b, разбирается аналогично. Лемма доказана.

Итак, 2^{a-b} начинается либо с 1 и k нулей, либо с k девяток. В первом случае задача решена, во втором случае поступим следующим образом: пусть число 2^{a-b} состоит из N цифр. Повторяя операцию, мы можем построить либо степень двойки, начинающуюся с 1 и N нулей (тогда все доказано), либо степень двойки 2^c, начинающуюся с N девяток. У степеней двойки 2^c и 2^{a-b} совпадают первые k цифр, а первая цифра, в которой они различаются, больше у числа 2^c (так как у числа 2^c она равна 9). Согласно лемме число $2^c/2^{a-b}$ начинается с 1 и $k-1$ нулей. Так как число $k-1$ может быть сколь угодно большим, задача решена.

В т о р о е   д о к а з а т е л ь с т в о. Существование степени двойки вида (1) можно доказать, используя стандартные теоремы об иррациональных числах.

Достаточно доказать, что для любого k существуют такие a и b, что

$$0 \leqslant 2^a - 10^b < 10^{b-k}.$$

Это равносильно неравенствам

$$1 \leqslant \frac{2^a}{10^b} < 1 + \frac{1}{10^k}.$$

Логарифмируя по основанию 10, получим неравенства

$$0 \leqslant a \log_{10} 2 - b < \varepsilon,$$

где через ε мы обозначили $\log_{10}\left(1 + \frac{1}{10^k}\right)$. Наконец, можно переписать неравенство в виде $\{a \log_{10} 2\} < \varepsilon$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа). Число $\log_{10} 2$, очевидно, иррационально (впрочем, если бы оно было рациональным, то в качестве a можно было бы взять его знаменатель), так что наше утверждение следует из общего факта: последовательность $a_n = \{n\alpha\}$ при иррациональном α всюду плотна на отрезке [0; 1] (см. комментарий).

К о м м е н т а р и й. Рассмотрим окружность длины 1 (т. е. ее диаметр равен $1/\pi$). Будем представлять эту окружность как отрезок [0; 1] с отождествленными концами. Удобно думать о дробной части числа, как о точке этой окружности.

Последовательность $a_n=\{nx\}$ можно интерпретировать как последовательность точек окружности, причем следующая точка получается из предыдущей поворотом на дугу длины $\{x\}$ против часовой стрелки.

Пусть $x=\frac{p}{q}$ — рационально, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда ясно, что a_n — периодическая последовательность с периодом q (см. факт 4). Можно показать, что в этом случае множество точек a_n есть множество вершин правильного q-угольника.

Теорема. *Если x иррационально, то на любой (сколь угодно малой) дуге ω найдется точка последовательности a_n* (в этом случае говорят, что последовательность *всюду плотна*).

Набросок доказательства. Пусть N столь велико, что $1/N$ меньше длины дуги ω. Рассмотрим точки a_1, a_2, ..., a_N. Все эти точки различны, так как x иррационально. По принципу Дирихле (см. факт 1) найдутся две точки (скажем, a_n и a_m) на расстоянии не больше, чем $1/N$. Положим $K=|n-m|$ и рассмотрим точки a_K, a_{2K}, a_{3K}, ... Соседние точки в этой последовательности отстоят друг от друга на расстояние, меньшее длины дуги ω. Поэтому эта последовательность не может «проскочить» дугу ω, значит, одна из таких точек лежит на этой дуге.

11 класс

1. Площадь треугольника ABC равна $\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$, поэтому достаточно доказать, что отношение площади треугольника $A'B'C'$ к площади треугольника ABC равно
$$\frac{AB'\cdot BC'\cdot CA'+AC'\cdot CB'\cdot BA'}{AB\cdot BC\cdot CA}.$$
Обозначим $AB'/CA=x$, $BC'/AB=y$ и $CA'/BC=z$. Тогда легко посчитать отношения площадей треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ к площади треугольника ABC. Они равны, соответственно, $x(1-y)$, $y(1-z)$ и $z(1-x)$. Поэтому для решения задачи достаточно проверить тождество
$$1-x(1-y)-y(1-z)-z(1-x)=xyz+(1-x)(1-y)(1-z).$$
Раскройте скобки — и убедитесь! См. также факт 18.

2. Имеем
$$\int_0^{\pi/2}\cos^2(\cos x)+\sin^2(\sin x)\,dx=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\cos^2(\cos x)\,dx+\int_0^{\pi/2}\sin^2(\sin x)\,dx.$$

Выполним подстановку (см. факт 28) $y=\frac{\pi}{2}-x$ во втором интеграле, тогда $dy=-dx$, и

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2(\sin x)\,dx=\int_{\pi/2}^{0}\sin^2\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}-y\Big)\Big)(-dy)=\int_0^{\pi/2}\sin^2(\cos y)\,dy.$$

Поскольку $\cos^2(\cos x)+\sin^2(\cos x)=1$, имеем

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2(\cos x)+\sin^2(\sin x)\,dx=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\cos^2(\cos x)\,dx+\int_0^{\pi/2}\sin^2(\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

3. Поскольку $f_2(x)-f_3(x)=2x-1$ и поскольку мы можем прибавить 1 и умножить полученное выражение $2x$ на $1/2$, можно получить функцию x. Вычитая ее из $f_1(x)$, получим

$$\frac{1}{x}=f_1(x)-\frac{1}{2}(f_2(x)-f_3(x)+1).$$

Перейдем к доказательствам того, что невозможно получить $1/x$, используя только две из трех функций. Поскольку операция деления не дозволена, выразить $1/x$ только через функции f_2 и f_3 невозможно: никак нельзя получить x в знаменателе. Иными словами, если умножать и складывать многочлены, то опять получатся многочлены, а функция $1/x$ многочленом не является.

Интереснее доказательство того, что нельзя обойтись без функции f_2. Посчитаем производные функций f_1 и f_3 в точке $x=1$. Обе оказываются равны 0. Если производные двух функция в точке 1 равны 0, то производная как их суммы, так и их произведения равна 0. Для произведения это следует из вычисления

$$(fg)'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0.$$

Так что все функции, которые можно получить при помощи указанных операций из функций f_1 и f_3, имеют нулевую производную в точке 1. А производная функции $1/x$ в точке 1 отлична от 0.

Осталось доказать необходимость функции f_3. Мы докажем это тремя способами.

П е р в о е д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что любая функция, полученная из f_1 и f_2, будет иметь вид $\frac{f(x)}{x^n}$, где $n \geqslant 0$, $f(x)$ — многочлен (такие функции называются *многочленами Лорана*).

Любой многочлен Лорана можно записать в виде $\frac{f(x)}{x^n}$ с *четным* n. Пусть A — множество таких многочленов Лорана $\frac{f(x)}{x^{2k}}$, что многочлен $f(x)-f(-x)$ делится на x^2+1.

Имеем $f_1 \in A$, так как $f_1(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, где $f(x)=x(x^2+1)$, причем $f(x)-f(-x)=2x(x^2+1)$ делится на x^2+1. Еще проще проверить, что $f_2 \in A$: имеем $x^2=\frac{x^2}{x^0}$, $x^2-(-x)^2=0$ делится на x^2+1. С другой стороны, $\frac{1}{x} \notin A$, так как $\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2}$ и $x-(-x)=2x$ не делится на x^2+1.

Осталось показать, что сумма и произведение многочленов Лорана из A снова принадлежат A. Утверждение про сумму мы оставим читателю в качестве упражнения. Рассмотрим многочлены Лорана $\frac{f(x)}{x^{2k}}$ и $\frac{g(x)}{x^{2l}}$, принадлежащие множеству A. Тогда

$$\frac{f(x)}{x^{2k}} \cdot \frac{g(x)}{x^{2l}} = \frac{f(x)g(x)}{x^{2(k+l)}},$$

и

$$f(x)g(x)-f(-x)g(-x)= \\ =f(x)(g(x)-g(-x))+g(-x)(f(x)-f(-x))$$

делится на x^2+1.

К о м м е н т а р и й. Вдумчивый читатель спросит: а почему не может быть так, что $\frac{f(x)}{x^{2k}}=\frac{g(x)}{x^{2l}}$, $f(x)-f(-x)$ делится на x^2+1, $g(x)-g(-x)$ не делится на x^2+1? Ответим: это следует из теоремы об однозначности разложения на множители для многочленов (см. факт 21).

В т о р о е д о к а з а т е л ь с т в о, н е с о в с е м э л е м е н т а р н о е. Все наши функции определены при всех комплексных $x \neq 0$ (см. комментарий).

Если подставить $x = i = \sqrt{-1}$ в f_1 и f_2, то получим $i + \frac{1}{i} = i - i = 0$, $i^2 = -1$ — числа вещественные. Значит, каждая из функций, полученных из f_1 и f_2 будет иметь вещественное значение в точке i. А только через вещественные числа выразить мнимое число $f_3(i) = -2i$ нельзя.

Вариант второго доказательства. Предыдущее решение не проходит, если разрешить умножать функции на комплексные числа. Однако его нетрудно модифицировать. Имеем $f_1(i) = f_1(-i)$, $f_2(i) = f_2(-i)$. Значит, любая функция, полученная из f_1 и f_2, принимает одно и то же значение в точках i и $-i$. Однако $f_3(i) \neq f_3(-i)$.

Комментарий. Комплексные числа получаются из вещественных добавлением «числа» $i = \sqrt{-1}$. Комплексные числа *крайне* важны для математики и физики.

Если мы добавляем число i, то мы должны рассматривать и все числа вида $a + bi$, где a и b вещественные (при $b = 0$ получаются обычные вещественные числа, так что они являются частным случаем комплексных). Комплексные числа можно складывать, умножать и делить (если делитель не является нулем). Покажем, например, как умножать комплексные числа:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

(Мы воспользовались тем, что $i^2 = -1$.) За подробностями мы отсылаем читателя к [75].

Совсем неэлементарный комментарий. Выберем какие-нибудь две из функций f_1, f_2, f_3. Рассмотрим все функции, которые можно получить из них вышеуказанными операциями. Будем считать, что умножать мы разрешаем на любые комплексные числа. Множество таких функций образует *кольцо* (коммутативное, ассоциативное, с единицей). Обозначим это кольцо через A. Оно является подкольцом в кольце многочленов Лорана: $A \subset \mathbb{C}[x, x^{-1}]$.

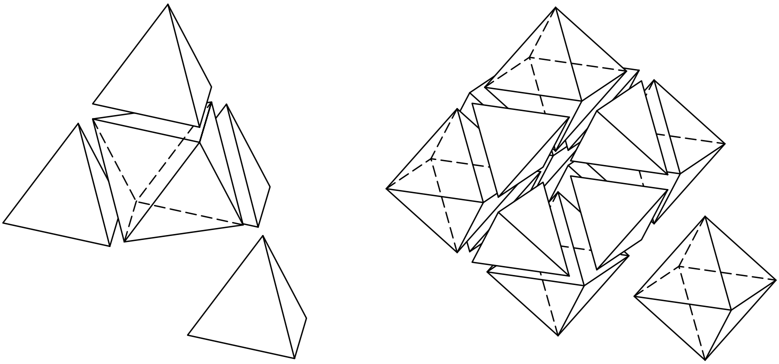
Можно показать, что оно является кольцом функций на некоторой алгебраической кривой X. Кольцо многочленов Лорана является кольцом функций на «проколотой прямой» $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$. Вложение $A \subset \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ индуцирует отображение (морфизм) кривых $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to X$. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что $A \neq \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Это равносильно тому, что φ не является изоморфизмом. Возможны 3 причины: φ не является сюръективным, φ не является инъективным, дифференциал в некоторой точке обращается в нуль.

Если A — кольцо функций, порожденное f_2 и f_3, то реализуется первая возможность: $X = \mathbb{C}$ и никакая точка $\mathbb{C}^*$ не переходит в нуль.

Если взять f_1 и f_2, то точки i и $-i$ переходят в одну и ту же точку кривой X (X — особая кривая с обыкновенной двойной точкой).

Наконец, если «запретить» функцию f_2, то дифференциал отображения φ обращается в 0 в точке 1, так что кривая X имеет каспидальную особенность. Заинтересованному читателю мы рекомендуем обратиться к введению в алгебраическую геометрию [33], § 4.

4. Отметив середины ребер правильного тетраэдра, мы легко получаем разбиение правильного тетраэдра на правильный октаэдр и 4 правильных тетраэдра. Иными словами, маленькие тетраэдры получаются из большого гомотетиями с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах большого тетраэдра (рис. 88, *а*).



а) *б*)

Рис. 88

Чуть сложнее понять, как разбить правильный октаэдр. Как и в случае с тетраэдром, подвергнем октаэдр гомотетии с коэффициентом $1/2$ и центром в вершине октаэдра. Рассмотрев все 6 вершин октаэдра, получим 6 маленьких октаэдров и, вырезав их из большого октаэдра, увидим, что осталось 8 правильных тетраэдров, примыкающих к граням большого октаэдра. Одна из вершин каждого из таких тетраэдров — центр исходного октаэдра, остальные вершины являются серединами его ребер (рис. 88, *б*).

После первого шага (на первом шаге разбивается только тетраэдр) получим октаэдр и тетраэдры с длинами ребер, равными $1/2$, после второго шага (разбиваем 4 тетраэдра и октаэдр) получатся октаэдры и тетраэдры с длинами ребер $1/4$ и т. д. После 7-го шага ребра тетраэдров и октаэдров будут равны $1/128 < 1/100$.

5. Обозначим $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Тогда $xyz=\sqrt[3]{abc}=1$. Очевидно, для любых x и y верно неравенство $x^2-xy+y^2\geqslant xy$. Умножив обе части этого неравенства на $x+y$ (это можно сделать, так как $x>0$, $y>0$), получим $x^3+y^3\geqslant(x+y)xy$, откуда

$$\frac{1}{1+a+b}=\frac{xyz}{xyz+x^3+y^3}\leqslant\frac{xyz}{xyz+(x+y)xy}=\frac{z}{x+y+z}.$$

Аналогичные неравенства верны для $\frac{1}{1+b+c}$ и $\frac{1}{1+c+a}$.

Сложим полученные неравенства:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leqslant\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}=1.$$

6. Каждой полосе поставим в соответствие вектор, перпендикулярный ее границе, длина которого равна ширине этой полосы. Отложим их от одной и той же точки O.

Разобьем плоскость на 12 углов величины 30° с вершиной в точке O. Для каждого из углов подсчитаем сумму длин векторов, лежащих внутри или на границе этого угла или внутри или на границе вертикального ему угла. Получим шесть величин — по одной для каждой пары вертикальных углов. По принципу Дирихле (см. факт 1), хотя бы одна из этих величин не меньше $100/6$.

Выберем ту пару вертикальных углов, для которой подсчитанная сумма оказалась не меньше $100/6$. Заменив, если потребуется, некоторые векторы на противоположные, добьемся того, чтобы все они попали в один и тот же угол величины 30°.

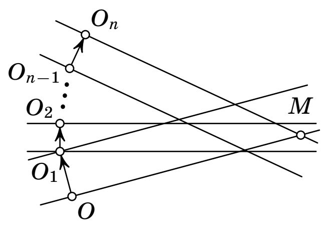


Рис. 89

Сумма векторов не зависит от порядка, в котором берутся слагаемые. Упорядочим векторы так, чтобы направление следующего получалось из направления предыдущего поворотом по часовой стрелке. Отложим их, прикладывая начало каждого следующего вектора к концу предыдущего. Получим выпуклую ломаную $OO_1O_2\ldots O_n$ (рис. 89). Длина этой ломаной, как уже было сказано, не меньше $100/6$.

Длина отрезка OO_n не может быть меньше, чем $\frac{100}{6} \times \times \cos 30^\circ$. Действительно, угол между отрезком OO_n и любым из отрезков ломаной не больше 30°, значит, длина проекции отрезка O_iO_{i+1} на прямую OO_n не меньше, чем $O_iO_{i+1}\cos 30^\circ$. Суммируя по всем отрезкам ломаной, получаем требуемое неравенство.

Перенесем полоски параллельно так, чтобы концы каждого из отрезков OO_1, O_1O_2, $\ldots$, $O_{n-1}O_n$ лежали на границе соответствующих полосок. Докажем, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$, где точка M — пересечение перпендикуляров к отрезкам OO_1 и $O_{n-1}O_n$, проведенных к этим отрезкам в точках O и O_n, будет полностью покрыт полосками.

Для этого рассмотрим любую точку X, лежащую в многоугольнике $MOO_1O_2\ldots O_n$. Проще всего рассмотреть ближайшую к X точку Y на ломаной $OO_1O_2\ldots O_n$. Если Y лежит на O_iO_{i+1}, то $XY \perp O_iO_{i+1}$, так что точка X покрывается полоской, перпендикулярной отрезку O_iO_{i+1}.

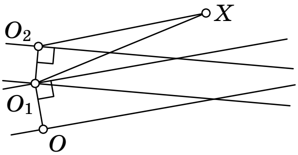


Рис. 90

Приведем более громоздкое, но более строгое рассуждение. Предположим, что полоски не покрывают точку X. Угол XOO_1 не тупой (рис. 90). Если бы угол XO_1O был не тупым, то полоска, перпендикулярная отрезку OO_1, покрывала бы точку X. Значит, $\angle XO_1O > 90^\circ$. Поэтому

$$\angle XO_1O_2 = \angle OO_1O_2 - \angle XO_1O < 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Далее, аналогичным образом показывается, что угол XO_2O_3 острый. Продолжая это рассуждение, приходим к выводу, что если точка X не покрыта ни одной из полосок, перпендикулярных отрезкам OO_1, $\ldots$, $O_{n-2}O_{n-1}$, то все углы XO_1O_2, XO_2O_3, $\ldots$, $XO_{n-1}O_n$ острые. Но тогда точка X покрыта полосой, перпендикулярной отрезку $O_{n-1}O_n$. Противоречие.

Вспомним теперь, что угол между векторами OO_1 и $O_{n-1}O_n$ не превосходит 30°. Поэтому величины углов MOO_n и MO_nO треугольника MOO_n не меньше 60°. Значит, этот треугольник содержит внутри себя правильный треугольник со стороной OO_n (рис. 91). Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a, равен $a/(2\sqrt{3})$. Остается проверить неравенство

$$\frac{(100/6)\cdot\cos 30^\circ}{2\sqrt{3}} > 1.$$

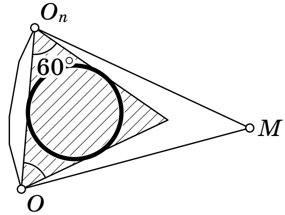


Рис. 91

1998 год

8 класс

1. В году — 12 месяцев. Один из них — февраль — состоит из 28 дней, четыре месяца (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь) состоят из 30 дней, остальные 7 месяцев — из 31 дня. Так как всего в году 365 дней, получаем

$$28\cdot 1+30\cdot 4+31\cdot 7=365.$$

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 1 для 10 класса.
2°. Есть и другое решение: $x=2$, $y=1$, $z=9$.

2. Пусть p_1, p_2, ..., p_8 — различные простые числа. Тогда искомыми являются числа $n_1=p_1^2\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_8$, $n_2=$ $=p_1\cdot p_2^2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_8$, ..., $n_8=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_8^2$.

Действительно, в разложение n_i^2 на простые множители все простые числа p_1, p_2, ..., p_8 входят минимум во второй степени. Поэтому n_i^2 делится на каждое из чисел n_j.

Покажем, что n_i не делится на n_j при $i\neq j$. Действительно, если n_i делится на n_j, то n_i делится на p_j^2 (так как n_j делится на p_j^2). Но p_j входит в разложение n_i на простые множители в первой степени, поэтому оно не может делиться на p_j^2 — противоречие (см. также факт 5).

Комментарий. Вдумчивый читатель заметит, что мы использовали нетривиальную *теорему о единственности разложения на простые множители* (см. факт 10): действительно, ведь теоретически могло бы оказаться так, что у числа n_i есть *еще одно* разложение на простые множители, куда p_j входит во второй степени!

3. Обозначим через P и Q середины сторон AB и CD соответственно. Отрезок PQ — средняя линия параллелограмма $ABCD$, значит, он проходит через точку O, причем $PQ \parallel AD$.

Это можно доказать так: четырехугольник $APQD$ — параллелограмм, так как стороны AP и QD параллельны и равны. Значит, прямая PQ содержит среднюю линию треугольника ACD, так что она проходит через точку O.

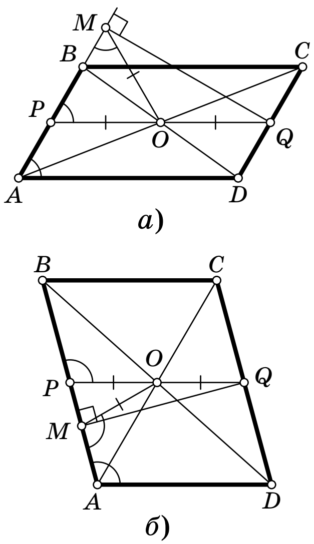


Рис. 92

Если точка M не лежит на отрезке AP, то $\angle MPO = \angle MAD = \angle AMO$ (рис. 92, *а*). Следовательно, треугольник MPO равнобедренный, откуда следует, что $MO = PO$. Нетрудно проверить, что треугольник MPO равнобедренный и в случае, когда точка M лежит на отрезке AP (рис. 92, *б*).

Итак, $MO = PO = OQ$, следовательно, в треугольнике PMQ медиана MO равна половине стороны PQ. Значит, треугольник PMQ — прямоугольный (см. факт 14), причем сторона MQ перпендикулярна стороне PM. Но сторона PM параллельна CD. Поэтому MQ является серединным перпендикуляром для отрезка CD. Следовательно, $MC = MD$.

4. Предположим, что среди чисел a_1, a_2, ..., a_{100} содержится k синих и, соответственно, $100 - k$ красных. Так как синие числа записаны в порядке возрастания, эти k синих чисел суть числа от 1 до k включительно. Аналогично, $100 - k$ красных чисел — числа 100, 99, ..., $k+1$. Значит, все числа от 1 до 100 встречаются среди a_1, a_2, ..., a_{100}.

5. Заметим, что если у человека есть знакомые, сидящие рядом друг с другом (в частности, если он знаком со своим соседом), то этот человек знаком со всеми.

Докажем, что такой гость найдется. Пусть A и B — двое соседей. Если они не знакомы между собой, то их общий знакомый C знаком со всеми, так как его знакомые сидят без промежутков. В противном случае со всеми знаком человек A (по той же причине).

Итак, пусть X — гость, знакомый со всеми. Тогда его соседи тоже знакомы со всеми, так как они знакомы с X (являющимся для них соседом). Соседи этих соседей также знакомы со всеми, и так далее по кругу.

6. См. рис. 93 для 8 белых квадратов.

Обозначим вершины красного квадрата буквами A, B, C и D. Диагональ AC разобьем на 100 равных отрезков, концы которых последовательно обозначим числами 1, 2, ..., 101 (точка A обозначена числом 1, а точка C — числом 101). Заметим, что для каждой пары точек k и $k+1$ ($k=1, 2, \ldots, 100$), существуют ровно два квадрата данного размера, стороны которых параллельны сторонам красного квадрата и проходят через точки k и $k+1$, причем один из этих квадратов содержит вершину B и не содержит D, а другой квадрат, наоборот, содержит D и не содержит B (см. рис. 93). Если k нечетно, то возьмем тот квадрат, который содержит вершину B, а если k четно, возьмем квадрат, содержащий вершину D. Выбранные таким образом 100 белых квадратов покрывают целиком красный квадрат, но если удалить квадрат, стороны которого проходят через точки k и $k+1$, то отрезок диагонали с концами k и $k+1$ покрыт не будет.

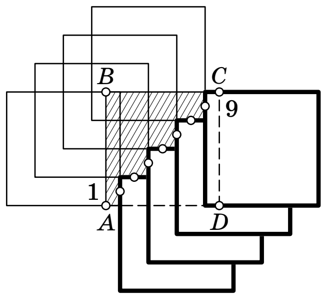


Рис. 93

К о м м е н т а р и й. Сравните с задачей 3 для 10 класса.

9 класс

1. Имеем

$$4^9+6^{10}+3^{20}=(2^9)^2+2\cdot 2^9\cdot 3^{10}+(3^{10})^2=(2^9+3^{10})^2.$$

Комментарий. Можно было бы пытаться вычислять остатки от деления данного числа на разные простые числа, надеясь найти небольшое число на которое наше число делится. Однако из этого ничего не выйдет, так как 2^9+3^{10} — простое число.

2. Проведем третью высоту BS и продлим ее до пересечения с PQ в точке T (рис. 94). Докажем, что площади прямоугольников $ASTQ$ и $AEKL$ равны. Из подобия прямоугольных треугольников ABS и AEC получаем: $AE/AC=AS/AB \Leftrightarrow AE\cdot AB=AS\cdot AC \Leftrightarrow AE\cdot AL=AS\cdot AQ$. Аналогично доказывается, что площади прямоугольников $CSTP$ и $CDMN$ равны. Значит, площадь квадрата $ACPQ$ равна сумме площадей четырехугольников $AEKL$ и $CDMN$.

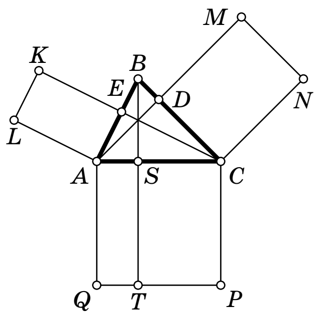


Рис. 94

Комментарий. Равенство $AE\cdot AB=$ $=AS\cdot AC$ можно также вывести из того, что и правая и левая часть равны степени точки A относительно окружности, проходящей через точки B, E, S и C, см. [46], гл. 3, § 10.

3. Пусть x — доля правдивых жителей. Представим себе, что все правдивые жители стали лжецами, а все лжецы «исправились». Тогда путешественник услышит то же самое! Действительно, правдивость любого жителя изменилась, но изменилась и правдивость соседа, о котором он говорит. Но доля правдивых в этом круге равна $1-x$. Таким образом, путешественник не может отличить круг с долей правдивых жителей x от круга с долей правдивых жителей $1-x$. Значит, он мог определить долю правдивых жителей только при $x=1-x$. Но это значит, что $x=1/2$.

Комментарий. Занумеруем жителей числами по часовой стрелке и положим $x_i=1$, если i-й житель лжец, и $x_i=0$ — в противном случае. Тогда i-й житель сообщит путешественнику x_i+x_{i+1}, где сложение происходит по модулю 2 (т. е. $0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=0$). Поэтому информацию, полученную путешественником, можно понимать как систему линейных уравнений над полем из двух элементов. См. также факт 25.

4. Из любой базы можно попасть на любую, иначе пустое множество образует важный набор, но тогда пустое множество — это единственный стратегический набор, а в условии задачи говорится про два *различных* стратегических набора.

Рассмотрим некоторый стратегический набор.

Лемма. *При закрытии всех дорог этого набора множество баз распадается ровно на две не соединенные друг с другом части, причем ни одна из дорог внутри каждой из этих частей не будет закрыта.*

Доказательство. Будем говорить, что две базы *лежат в одной компоненте связности*, если из одной базы можно проехать на другую. После закрытия стратегического набора множество всех баз разобьется на компоненты связности: при этом из баз, находящихся в одной компоненте, можно будет проехать друг в друга, а из баз, лежащих в разных компонентах, — нельзя (см. факт 3). Так как набор важный, этих компонент не менее двух.

Докажем, что их ровно две. Пусть их хотя бы три. Рассмотрим любую (закрытую) дорогу a, ведущую из одной компоненты связности X в другую компоненту Y (такая дорога найдется, так как до закрытия можно было проехать из любой базы на любую). Пусть Z — третья компонента связности. Удалим дорогу a из нашего стратегического набора (т. е. не будем ее закрывать), тогда получится снова важный набор, так как из компоненты X в компоненту Z нельзя проехать, даже пользуясь дорогой a. Но тогда наш набор — не стратегический. Это противоречие показывает, что компонент связности ровно две.

Рассмотрим любую дорогу внутри одной из компонент связности. Если она закрыта, то, как и выше, выкинем ее из стратегического набора. Останется важный набор — противоречие. Лемма доказана.

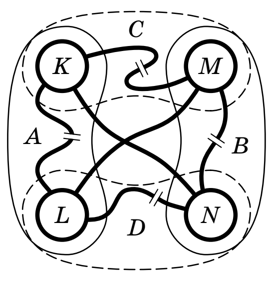


Рис. 95

Пусть первый стратегический набор разбивает множество баз на подмножества A и B, а второй — на C и D.

Пусть $K = A \cap C$, $L = A \cap D$, $M = B \cap C$, $N = B \cap D$ (рис. 95). Множества K, L,

M, N попарно не пересекаются, а их объединение — это множество всех баз. Докажем, что пустым может быть только одно из них (или ни одного). Действительно, если $K=L=\varnothing$, то A пусто, чего быть не может. Если $K=N=\varnothing$, то $A=D$ и $B=C$, но это противоречит тому, что мы взяли два *различных* стратегических набора. Остальные случаи аналогичны.

При закрытии первого стратегического набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и M, K и N, L и M, L и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие множества K с L и M с N. При закрытии второго набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и L, K и N, L и M, M и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие K с M и L с N.

Итак, множество дорог, принадлежащих ровно одному стратегическому набору, — это все дороги, соединяющие K и L, K и M, L и N, M и N. Следовательно, при закрытии такого набора дорог множество баз распадется по крайней мере на (непустые) множества $K\cup N$ и $L\cup M$, не соединенные дорогами. Другими словами, мы получим важный набор, что и требовалось доказать.

Комментарий. Этот набор не обязательно будет стратегическим — пусть, например, множества K и N непусты, но из K в N не ведет ни одной дороги.

5. 1°. Заметим, что геометрическое место таких точек O, что $\angle AOD=80^\circ$ и точка O лежит по ту же сторону от прямой AD, что и B, — это дуга окружности с концами в точках A и D, а множество точек O, для которых $\angle BOC=100^\circ$, причем точка O лежит по ту же сторону от прямой BC, что и A, — это дуга окружности с концами в точках B и C (рис. 96). Точка O должна лежать на пересечении этих двух дуг. Следовательно, таких точек не может быть более двух.

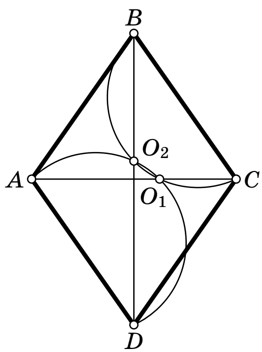


Рис. 96

2°. Укажем две точки, удовлетворяющие условиям задачи. Первая точка, O_1, лежит на диагонали AC, причем $\angle BO_1C = 100^\circ$. Тогда, очевидно, $\angle AO_1B = 80^\circ$, и в силу симметрии относительно AC имеем $\angle AO_1D = \angle AO_1B = 80^\circ$, что и требуется в условии. Аналогично, вторая точка, O_2, лежит на диагонали BD, причем $\angle BO_2C = 100^\circ$. В этом случае $\angle AO_2D = 80^\circ$ и $\angle AO_2B = 100^\circ$.

Легко видеть, что эти две точки различны (они лежат на разных диагоналях и отличны от точки пересечения диагоналей) и обе лежат внутри ромба (т. е. точки лежат на диагоналях, а не на их продолжениях). Действительно, пусть диагонали ромба пересекаются в точке P. Рассмотрим треугольник BPC. Так как $\angle BO_1P = 80^\circ > 55^\circ = \angle BCP$, точка O_1 лежит внутри ромба. Аналогично, $\angle CBP = 35^\circ < 80^\circ = \angle CO_2P$, поэтому точка O_2 находится на диагонали BD, а не на ее продолжении.

6. П е р в ы й с п о с о б. 1°. Обозначим координаты концов отрезка и отмеченных точек через x_0, x_1, ..., x_{n+1} $(0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1)$. Условие задачи означает выполнение n равенств вида

$$x_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где каждый из символов a_i и b_i означает какое-то из чисел x_j $(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$, при этом можно считать, что $a_i < x_i < b_i$.

2°. Во все правые части этих равенств, в которых присутствует x_1, подставим его значение из первого равенства. Получим новый набор равенств (с теми же левыми частями, что и в старом), правые части которых уже не содержат x_1. Если при этом в правой части второго равенства появится член вида αx_2, то перенесем его в левую часть и разделим обе части на $1 - \alpha$ (ниже мы докажем, что $\alpha \neq 1$). Второе равенство теперь имеет вид:

$$x_2 = \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_{n+1},$$

где β_i — некоторые рациональные числа.

Рассмотрим теперь все равенства, кроме первого и второго. Во все правые части, содержащие x_2, подставим его значение из второго равенства, затем используем третье равенство, чтобы выразить x_3 через переменные x_4, ..., x_n, и подставим это значение во все равенства, начиная с четвертого. Опять же, нужно доказать, что при этом не придется делить на нуль.

Повторяя эту операцию n раз, придем к равенству $x_n = \gamma$ (в правой части не осталось ни одного неизвестного!). Нетрудно понять, что на каждом шаге все коэффициенты рациональны. Действительно, в начале это так, а при наших операциях мы используем лишь сложение, умножение, вычитание и деление.

Итак, x_n рационально. Далее, x_{n-1} выражено через x_n и рациональные числа, значит, оно тоже рационально, и т. д. Значит, все числа рациональны.

3°. Осталось доказать, что ни на каком шаге не приходится делить на нуль (см. комментарий).

В любой момент каждое равенство будет иметь вид

$$x_i = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_n x_n + \delta_{n+1},$$

Докажем, что при этом

1) все коэффициенты δ_k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$) неотрицательны;

2) хотя бы один коэффициент δ_k с $k > i$ не равен нулю. Действительно, для исходного набора это верно. Делая очередную подстановку из j-го равенства ($j < i$), мы заменяем коэффициент δ_j на 0, а любой другой коэффициент δ_k на $\delta_k + \lambda\delta_j$, где λ — коэффициент при x_k в j-м равенстве. Неотрицательность при этом сохраняется, а наибольший номер ненулевого коэффициента не уменьшается, следовательно, он останется большим, чем i. При переносе в левую часть члена $\delta_i x_i$ получаем в правой части положительное число. Действительно, все x_k положительны, а все коэффициенты δ_k неотрицательны, причем по крайней мере один из них строго положителен. Значит, левая часть тоже положительна, поэтому $1 - \delta_i > 0$. При делении обеих частей равенства на положительное рациональное число $1 - \delta_i$ все перечисленные свойства также сохраняются.

Комментарии. 1°. То, что ни на каком шаге не приходится делить на нуль, принципиально: например, система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 2, \\ x_2 = \frac{x_1}{2} + 1 \end{cases}$$

имеет следующее иррациональное решение: $x_1 = 2\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2} + 1$.

2°. То, что мы делаем, — это по сути метод Гаусса решения системы линейных уравнений (см. факт 25).

Второй способ (выходящий за рамки школьной программы). 1°. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — координаты отмеченных точек. Условие, что точка находится посередине между двумя другими, записывается в виде линейного уравнения $x_i = \frac{1}{2}(a+b)$, где a и b — координаты других точек или концов отрезка (т. е. 0 или 1). Таким образом, координаты наших точек являются решениями некоторой системы линейных уравнений (обозначим ее (*)) с рациональными коэффициентами и рациональными свободными членами (будем называть такую систему *рациональной*). Нужно доказать, что эта система не может иметь иррационального решения (т. е. решения, значение хотя бы одной переменной в котором иррационально).

Если рациональная система линейных уравнений имеет единственное решение, то это решение рационально. В самом деле, если решение единственно, то его можно найти методом Гаусса, в ходе которого нужно только складывать, вычитать, умножать и делить, а делая такие действия с рациональными числами, мы не можем получить иррациональное число (см. факт 25).

2°. Осталось доказать, что решение системы (*) единственно. От противного, пусть x_1, x_2, ..., x_n и y_1, y_2, ..., y_n — два разных решения рассматриваемой системы уравнений. Тогда числа $t_1 = x_1 - y_1$, $t_2 = x_2 - y_2$, ..., $t_n = x_n - y_n$ образуют ненулевое решение соответствующей *однородной* системы, т. е. системы (*), в которой все свободные члены заменили на нули.

Иными словами, для каждого i выполняется линейное уравнение $t_i = \frac{1}{2}(a+b)$, где a — одно из чисел t_j $(j \neq i)$ или нуль и b — одно из чисел t_j $(j \neq i)$ или нуль. Рассмотрев число t_i, имеющее максимальный модуль, приходим к противоречию.

10 класс

1. Пусть $a+b+c \leqslant 11$. Тогда

$$28a+30b+31c \leqslant 31(a+b+c) \leqslant 11 \cdot 31 = 341 < 365.$$

Противоречие. Пусть $a+b+c \geqslant 14$. Тогда

$$28a+30b+31c \geqslant 28(a+b+c) \geqslant 28 \cdot 14 = 392 > 365.$$

И этого быть не может! Осталось доказать, что $a+b+c$ не может равняться 13. Итак, пусть $a+b+c=13$. Вариант $a=13$, $b=c=0$ не удовлетворяет условию:

$$28 \cdot 13 + 30 \cdot 0 + 31 \cdot 0 = 364 \neq 365.$$

Остается вариант $a+b+c=13$, $a<13$. В этом случае $b+c= =13-a>0$ и

$$28a+30b+31c = 28(a+b+c)+2b+3c \geqslant 28 \cdot 13 + 2(b+c).$$

Первое слагаемое равно 364, а второе — не меньше 2. Значит, сумма не меньше 366, и не может равняться 365.

Комментарий. Сравните с задачей 1 для 8 класса.

2. Первый способ. Обозначим отмеченную сторону i-го прямоугольника через a_i, а другую его сторону — через b_i. Площадь исходного квадрата равна сумме площадей прямоугольников: $\sum a_i b_i = 1$. Но $b_i \leqslant 1$ при всех i, поэтому $\sum a_i \geqslant 1$.

Второй способ. Спроецируем все отмеченные отрезки на одну из сторон квадрата. Если она полностью покрыта проекциями, то их суммарная длина не меньше 1. Если на стороне есть точка, не покрытая проекциями, то проведем через нее перпендикуляр к стороне. Этот перпендикуляр покрыт прямоугольниками, в которых отмечена сторона, параллельная ему (иначе основание перпендикуляра покрыто проекцией отмеченной стороны), значит, суммарная длина этих отрезков равна 1.

3. Занумеруем фонари натуральными числами в порядке следования вдоль дороги. Если отрезки, освещенные n-м и $(n+2)$-м фонарями, пересекаются (хотя бы по одной точке), то $(n+1)$-й фонарь можно выключить. Следовательно, отрезки с различными нечетными номерами, не пересекаются. На отрезке длины 1000 м нельзя расположить больше 999 непересекающихся отрезков длины 1 м. Если бы фонарей было хотя бы 1999, то фонарей с нечетными номерами было бы не менее 1000. Значит, фонарей не больше 1998.

Расположим 1998 фонарей так, чтобы центры освещенных отрезков образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{1}{2}$ м, а 1998-й равен $999\frac{1}{2}$ м. (Разность этой прогрессии равна $\frac{999}{1997}$.) Расстояние между n-м и $(n+2)$-м фонарем равно $\frac{1998}{1997}$. Значит, между отрезками, освещенными этими фонарями, имеется зазор в $\frac{1}{1997}$ м. Его освещает только $(n+1)$-й фонарь. Поэтому никакой фонарь нельзя выключить.

Комментарий. Сравните с задачей 6 для 8 класса.

4. 1°. Если число делится на 1998, то оно делится и на 999. Мы покажем, что не существует числа, делящегося на 999, сумма цифр которого меньше, чем 27.

Хорошо известен признак делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится на 9. Сформулируем аналогичный признак делимости на 999:

Разобьем десятичную запись числа на группы по 3 *цифры справа налево* (*последняя группа может состоять из одной или двух цифр*). *Сложим эти группы. Исходное число делится на* 999 *тогда и только тогда, когда полученная сумма делится на* 999.

Например, число 97902 делится на 999, так как на 999 делится число $97+902=999$.

Можно представлять себе эти тройки цифр как «цифры числа в тысячеричной записи» (см. факт 12). Доказательство этого признака полностью копирует доказательство признака делимости на 9, поэтому мы оставляем его читателю (см. факт 6).

2°. Рассмотрим число, делящееся на 999, разобьем его на тройки цифр и вычислим сумму этих троек. Если новое число больше 1000, то снова разобьем его на тройки цифр и вычислим сумму, и так далее, пока не получим число, меньшее 1000. Это случится, поскольку число уменьшается при каждой операции. Действительно, если $a_1, \ldots, a_k$ — неотрицательные целые числа, $a_k \neq 0$ и $k \geqslant 1$,

то
$$a_0 + 1000a_1 + \ldots + 1000^k a_k > a_0 + a_1 + \ldots + a_k.$$
Итак, после нескольких операций мы получим положительное число, меньшее 1000, делящееся на 999, следовательно, оно будет равно 999.

3°. Сумма цифр числа 999 равна 27. Если мы покажем, что при наших операциях сумма цифр не могла увеличиваться, то из этого будет следовать, что сумма цифр исходного числа не могла быть меньше 27. Очевидно, что когда мы разрезали число на тройки цифр, сумма цифр не изменялась. Покажем, что когда мы сложили тройки, сумма цифр не увеличилась. Действительно, обозначим через $S(X)$ сумму цифр числа X. Из алгоритма сложения в столбик видно, что $S(X+Y) = S(X) + S(Y) - 9P(X, Y)$, где $P(X, Y)$ — число переносов при сложении X и Y в столбик. Значит, $S(X+Y) \leqslant S(X) + S(Y)$, и наше утверждение доказано.

5. 1°. Решим сначала «задачу одного гвоздя». Пусть вбит один гвоздь, касающийся треугольника в точке M на стороне AC. Фиксируем центр предполагаемого вращения (точка O). Можно ли повернуть треугольник вокруг точки на небольшой угол, и если да, то в какую сторону?

Пусть треугольник расположен как на рисунке 97. Проведем перпендикуляр к прямой AC в точке M. Он разобьет плоскость на две полуплоскости. Если точка O лежит в той же полуплоскости, что и C, то вокруг точки O можно повернуть треугольник против часовой стрелки, а если в другой полуплоскости, то — по часовой стрелке.

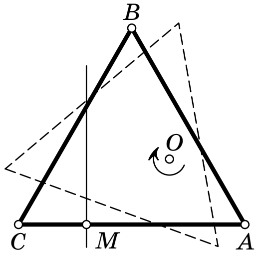


Рис. 97

Пусть точка O лежит на перпендикуляре. Тогда, если точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (а это всегда выполняется, если точка O лежит внутри треугольника), то треугольник нельзя повернуть ни в какую сторону. Если же точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC, то треугольник можно повернуть в любую сторону.

2°. Вернемся к задаче трех гвоздей. Проведем три соответствующих перпендикуляра. Докажем, что если они не пересекаются в одной точке, то треугольник можно повернуть. Действительно, перпендикуляры разбили плоскость на семь областей. Сопоставим каждой области строку из трех символов типа $+$ или $-$. Первый плюс означает, что гвоздь на стороне AB не препятствует вращению треугольника вокруг точек этой области против часовой стрелки и т. д. (рис. 98). Разным областям не могут соответствовать одинаковые строки. Всех возможных строк восемь. Поэтому наверняка встретится или строка $+++$, или строка $---$. В первом случае можно повернуть треугольник против часовой стрелки, во втором — по.

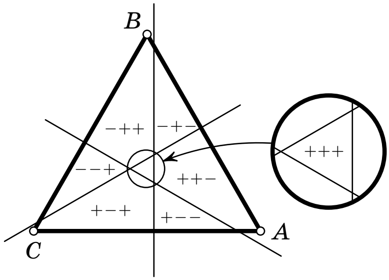


Рис. 98

3°. Пусть перпендикуляры пересекаются в одной точке. Тогда если точка не лежит ни на одном из перпендикуляров, то в соответствующей строке будет хотя бы один $+$ (запрещающий вращение по часовой стрелке) и хотя бы один $-$ (запрещающий вращение против часовой стрелки).

Если точка лежит на перпендикуляре к одному из гвоздей, причем внутри треугольника, то, как показано выше, этот гвоздь препятствует вращению треугольника в любую сторону. Наконец, если точка лежит на перпендикуляре вне треугольника, то, как нетрудно видеть, два оставшихся гвоздя препятствуют вращению треугольника.

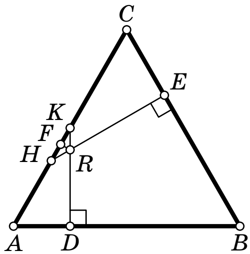


Рис. 99

4°. Итак, осталось выяснить, где нужно вбить третий гвоздь, чтобы перпендикуляры к гвоздям пересекались в одной точке. Точки, где вбиты гвозди на сторонах AB, BC и AC, обозначим соответственно через D, E и F (рис. 99). Пусть перпендикуляр к AB в точке D пересекает AC в точке K, перпендикуляр к BC в точке E пересекает AC в точке H, и эти перпендикуляры пересекаются в точке R. Тогда $AK = \dfrac{AD}{\cos 60^\circ} = \dfrac{AC}{2}$ и $CH = \dfrac{CE}{\cos 60^\circ} = \dfrac{2}{3}AC$. Треугольник HRK равнобедренный, поскольку углы HKR и KHR равны 30°. Из этого получаем, что $HF = FK$ и F делит сторону AC в отношении $5:7$, считая от вершины A.

6. 1°. Докажем, что если расстановка хорошая, то числа в ряду можно раскрасить в девять цветов так, чтобы числа каждого цвета шли в порядке возрастания. Действительно, будем красить числа слева направо, используя каждый раз такой цвет с наименьшим номером, что последнее покрашенное в этот цвет число меньше текущего. Предположим, что девяти цветов не хватило. Мы не можем покрасить очередное число (обозначим его a_{10}) в девятый цвет, так как в девятый цвет уже было покрашено большее число a_9. Число a_9 не было покрашено в восьмой цвет, поскольку до него встретилось большее число a_8, покрашенное в восьмой цвет. И так далее. Получается 10 чисел, которые идут в порядке убывания. Противоречие.

2°. Расстановка чисел от 1 до n вместе с такой раскраской в девять цветов, что последовательность чисел каждого цвета возрастает, полностью определяется цветом каждого числа от 1 до n и цветом каждого места в ряду. Числа от 1 до n можно раскрасить в 9 цветов 9^n способами. И столькими же способами можно раскрасить в 9 цветов n мест, на которые эти числа будут расставлены. Таким образом, число хороших расстановок не превосходит 81^n.

Комментарий. Существует $n!$ расстановок чисел от 1 до n. Классический факт из анализа состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{81^n}{n!} = 0.$$

Поэтому, при больших n, хороших расстановок «гораздо меньше», чем плохих. См. факт 4.

11 класс

1. Заметим, что

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(2z-1).$$

Если левая часть равенства равна нулю, то хотя бы один множитель справа равен нулю. Значит, одно из чисел x, y, z равно $1/2$.

Комментарии. 1°. Как догадаться до разложения на множители? Обозначим этот многочлен через $P(x, y, z)$. Воспользуемся общим утверждением: *если многочлен от нескольких переменных тождественно обращается в нуль при $x=a$, то многочлен делится на $x-a$* (см. факт 19). Если $x=1/2$, то $P(x, y, z)=0$. Значит, $P(x, y, z)$ делится на $x-1/2$. Аналогично, $P(x, y, z)$ делится на $y-1/2$ и $z-1/2$. Поэтому $P(x, y, z)$ равен $(x-1/2)(y-1/2)(z-1/2)$ с точностью до умножения на константу (см. факт 21).

2°. Другой способ: согласно обратной теореме Виета (см. факт 20) $P(x, y, z)=-4f(1/2)$, где

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z).$$

2. Пример:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{если } x\leqslant 1;\\ 1/x, & \text{если } x>1. \end{cases}$$

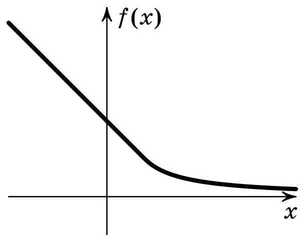


Рис. 100

(график этой функции изображен на рис. 100). Первое свойство очевидно, второе свойство следует из того, что производные функций $2-x$ и $1/x$ в точке 1 равны.

Докажем третье свойство. Очевидно, что если x рационально, то и $f(x)$ рационально. Пусть $y=f(x)$ рационально. Тогда или $x=2-y$, или $x=\dfrac{1}{y}$. В любом случае x рационально. Значит, рациональным x соответствуют рациональные $f(x)$ и наоборот.

3. 1°. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим равносторонний треугольник APQ, для которого отрезок AK является медианой, а точка P лежит на прямой AB (рис. 101). Так как точка пересечения медиан всегда делит их в отношении $2:1$, точка M является точкой пересечения

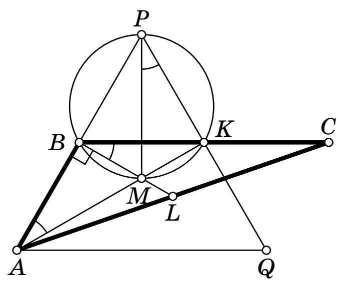


Рис. 101

медиан, а значит, и центром треугольника APQ. Значит, $\angle KPM = 30^\circ = \angle KBM$. Следовательно, точки M, K, P, B лежат на одной окружности. Так как угол $\angle MKP$ прямой, MP — диаметр этой окружности (см. факт 14). Значит, угол PBM — тоже прямой, так что

$$\angle ABC = \angle ABM + \angle CBL = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

2°. Далее, наша окружность пересекает AP ровно в двух точках, одна из которых P, а другая, B — середина AP.

Пусть сторона треугольника APQ равна $2a$. Имеем: $AB = a$, $AK = \sqrt{3}a$. Треугольник BKP — равносторонний, $BK = a = KC$, значит, $BC = 2a$. Далее, $\angle ABK = 120^\circ$, откуда по теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos 120^\circ = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2.$$

Наконец, по теореме косинусов находим

$$\cos\angle ACB = \frac{4+7-1}{2\cdot 2\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

и

$$\cos\angle CAB = \frac{7+1-4}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

4. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т. е. 1 (см. факт 7). Поэтому z — четное число (см. комментарий). Аналогично левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число x тоже четное. Итак, $4^y = 5^z - 3^x = 5^{2z_0} - 3^{2x_0}$, т. е. $2^{2y} = (5^{z_0} - 3^{x_0})(5^{z_0} + 3^{x_0})$. Поэтому $5^{z_0} - 3^{x_0} = 2^k$ и $5^{z_0} + 3^{x_0} = 2^l$ (см. факт 10), где k и l — целые неотрицательные числа и $k + l = 2y$. Таким образом, $5^{z_0} = \frac{1}{2}(2^k + 2^l)$ и

$$3^{x_0} = \frac{1}{2}(2^l - 2^k) = 2^{l-1} - 2^{k-1}.$$

Значит, число $2^{l-1} - 2^{k-1}$ нечетно, поэтому $k = 1$. Значит, $2^k = 2$ и $3^{x_0} = 2^{l-1} - 1$. Следовательно, число $l - 1$ четно, $l - 1 = 2s$ (иначе левая часть не делится на 3). Тогда $3^{x_0} = (2^s - 1)(2^s + 1)$ — произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители — 1 и 3. Тогда $s=1$, $l=2s+1=3$. Теперь нетрудно видеть, что $x=y=z=2$.

Комментарий. Нетрудно доказать по индукции, что остаток от деления на 3 числа 5^z равен 1 если z четно, и 2, если z нечетно.

На самом деле остатки от деления числа a^n на b (при фиксированных a и b) образуют периодическую последовательность (факт 4). Это можно вывести из последнего утверждения факта 7.

Заметим также, что если b — простое число, то период этой последовательности является делителем числа $p-1$. Это утверждение равносильно малой теореме Ферма, см. комментарий к задаче 6 для 11 класса олимпиады 1995 г.

5. На первый взгляд может показаться, что такая конструкция невозможна: если первая шестеренка вращается по часовой стрелке, то вторая против, тогда третья по часовой и т. д.; следовательно, 61-я должна вращаться по часовой стрелке, а тогда она не может вращаться согласованно с первой.

Однако мы работаем в пространстве. И то, по или против часовой стрелки вращается шестеренка зависит от того, откуда мы на нее смотрим. Требуемая конструкция изображена на рис. 102.

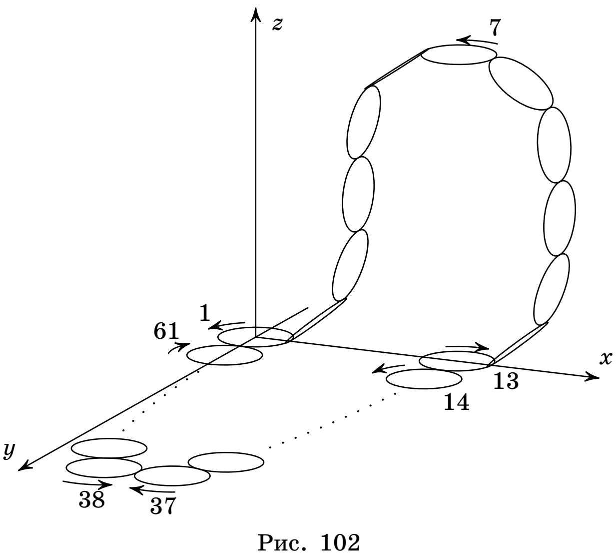


Рис. 102

Опишем конструкцию на рисунке: шестеренки 13—61 и 1 содержатся в плоскости Oxy; остальные шестеренки содержатся в плоскостях, перпендикулярных плоскости Oxz. При этом шестеренки 13, 15, 17, ..., 61 вращаются по часовой стрелке, если смотреть на плоскость Oxy сверху, а шестеренки 14, 16, ..., 60, 1 — против часовой стрелки. На участке 1—13 этой цепочки происходит «перемена четности» номеров шестеренок: шестеренки 1 и 13 вращаются в разных направлениях (на плоскости Oxy).

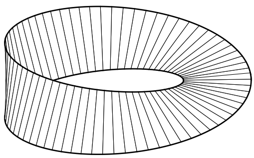


Рис. 103

Комментарий. Искушенный читатель, конечно, заметил, что эта задача — задача про *лист Мебиуса* (рис. 103). Можно было бы нарисовать ответ прямо на листе Мебиуса, но такое решение было бы трудно аккуратно обосновать. Феномен «смены четности» связан с тем, что лист Мебиуса является неориентируемой (или односторонней) поверхностью. См. [34], § 7, и [25], § 10.

6. См. решение задачи 6 для 10 класса.

1999 год

8 класс

1. Рассмотрим числа

$$1-x=\frac{1}{111111},\quad 1-y=\frac{2}{222223},\quad 1-z=\frac{3}{333334},$$

а также обратные к ним

$$\frac{1}{1-x}=111111,\quad \frac{1}{1-y}=111111\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1-z}=111111\frac{1}{3}.$$

Мы видим, что $\frac{1}{1-x}<\frac{1}{1-z}<\frac{1}{1-y}$. Значит, так как числа $1-x$, $1-y$ и $1-z$ положительны, $1-x>1-z>1-y$. Следовательно, $x<z<y$.

2. Решение изображено на рисунках 104, *а—в*. Однако, чтобы сделать его строгим, придется приложить некоторые усилия (впрочем, решение засчитывалось и при отсутствии строгого обоснования).

Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Заметим, что у него найдутся два соседних внутренних угла, сумма которых не меньше 180°. Действительно, если четырехугольник невыпуклый, то достаточно взять его угол, больший 180°, и любой из соседних. Если четырехугольник выпуклый, то

$$(\angle A + \angle B) + (\angle C + \angle D) = 360^\circ.$$

Значит, выражение в одной из скобок не меньше 180°. Можно считать, что $\angle A + \angle B \geqslant 180^\circ$ (другой случай полностью аналогичен). Если сумма углов A и B равна 180°, то $BC \parallel AD$, $ABCD$ — трапеция, и разрезать ее на трапеции совсем легко — см. рис 104, *а*.

Пусть $\angle A + \angle B > 180^\circ$. Рассмотрим прямую l, проходящую через точку B, параллельно стороне AD (рис. 104, *б*). Пусть α — угол между прямой l и стороной AB. Имеем

$$\alpha = 180^\circ - \angle A < \angle B$$

(первое равенство следует из теоремы о внутренних односторонних углах при параллельных прямых). Значит, прямая l направлена внутрь угла B. Тогда она пересекает сторону CD в некоторой точке L.

Проведем прямую, параллельную стороне CD и пересекающую отрезки AD и BL, пусть эта прямая пересекает сторону AD в точке K, а отрезок BL — в точке M. Проведем через точку M прямую, параллельную стороне BC, до пересечения с отрезком CL в точке N. Мы разрезали наш четырехугольник на трапеции $AKMB$, $KDNM$ и $CNMB$. Случай невыпуклого четырехугольника изображен на рис. 104, *в*.

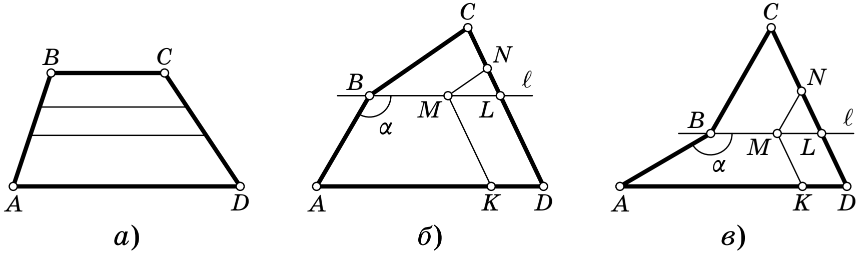


Рис. 104

3. Если бы вдруг оказалось, что $ab=cd$, то

$$a^2+2cd+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$c^2+2ab+d^2=c^2+2cd+d^2=(c+d)^2.$$

Таким образом, достаточно найти четыре различных натуральных числа a, b, c и d, для которых $ab=cd$. Или, что то же самое, найти число n, которое может быть представлено в виде произведения двух различных множителей двумя различными способами: $n=ab=cd$. Пример такого числа: $6=1\cdot6=2\cdot3$.

4. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам (см. факт 5). Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, — это 498.

Покажем как снять 498 долларов. Произведем следующие операции: $500-300=200$, $200+198=398$, $398-300=$ $=98$, $98+198=296$, $296+198=494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

5. Обозначим через N' точку, симметричную точке N относительно точки O (рис. 105).

Треугольники ONC и $ON'A$ равны по двум сторонам и углу между ними. Кроме того, угол $N'AM$ — прямой. Действительно,

$$\angle N'AM=\angle N'AO+\angle MAO=$$
$$=\angle ACB+\angle BAC=90^\circ.$$

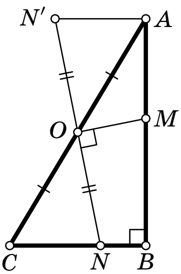


Рис. 105

Тогда по теореме Пифагора

$$AM^2+CN^2=AM^2+AN'^2=MN'^2.$$

Значит, осталось доказать, что $MN'=MN$. Это следует из того, что прямоугольные треугольники $N'OM$ и NOM равны по двум катетам.

6. Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Тогда всего в турнире было сыграно $n(n-1)$ партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов все участники набрали по $n-1$ очку. Каждый шахматист сыграл белыми фигурами $n-1$ партию, и количество выигранных им партий белыми равно одному из n чисел: $0, \ldots, n-1$. Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 до $n-1$. Рассмотрим двух участников турнира: A, выигравшего $n-1$ партию белыми фигурами, и B, не выигравшего ни одной такой партии.

Разберемся, каким мог быть результат партии, которую A играл против B черными. С одной стороны, A набрал $n-1$ очко, играя белыми, так что все свои партии черными, в том числе и эту, он должен был проиграть. Но B не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Мы пришли к противоречию.

9 класс

1. Произведение чисел на доске не меняется. Действительно,
$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab.$$
Поэтому, на 1999-й день произведение будет таким же, каким и в первый. См. также факт 2.

2. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером $k+1000$ он делает так, чтобы последние $2k+1$ букв образовывали палиндром. Докажем, что он всегда может это сделать.

Для этого проведем индукцию по k (см. факт 24). При $k=0$ это очевидно. Пусть после $(k-1)+1000$ ходов последние $2k-1$ букв образуют палиндром. Если приписанная первым игроком $(1000+k)$-я буква совпадает с $(1000-k)$-й буквой, то второму игроку ничего делать не нужно.

Если же $(1000+k)$-я и $(1000-k)$-я буквы различны, то одна из них не совпадает с буквой, стоящей на 1000-м месте. Второй игрок меняет ее с 1000-й буквой. При этом палиндром из $2k-1$ буквы не разрушится, потому что второй игрок изменил его серединную букву. Итак, последние $2k+1$ букв образуют палиндром.

После 1999 ходов все слово будет палиндромом.

3. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle CBO = \angle BAC$ (см. факт 15). С другой стороны, по теореме о внутренних накрест лежащих углах при параллельных прямых, $\angle BAC = \angle ACD$ (рис. 106); следовательно, $\angle CBO = \angle OCD$. Применяя теперь теорему, обратную к теореме об угле между касательной и хордой, убеждаемся, что прямая CD касается окружности, проходящей через точки B, O и C.

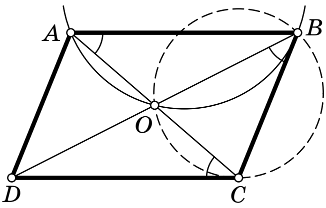


Рис. 106

Комментарий. Рассмотренный в задаче параллелограмм обладает следующим свойством: отношение длины диагонали BD к длине стороны CD равно $\sqrt{2}$. Для доказательства достаточно убедиться, что треугольники BCD и COD подобны. Из этого также следует, что если соединить середины его соседних сторон, то получится параллелограмм, подобный исходному.

4. Обозначим $n=1000$. Рассмотрим два случая.

1°. $k>n$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1}=\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\overbrace{2\ldots2}^{k-(n+1)}\underbrace{0\ldots0}_{n+1}.$$

Это число заканчивается на $n+1=1001$ нуль. Но если число является квадратом натурального числа, то оно заканчивается на четное число нулей! Значит, это число не может быть квадратом натурального числа.

2°. $k\leqslant n$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1}=\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\underbrace{0\ldots0}_{k}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}\underbrace{0\ldots0}_{k}=$$
$$=10^k(\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}).\quad (1)$$

Это число заканчивается на k нулей. Как было объяснено выше, чтобы оно было квадратом натурального числа (в дальнейшем мы будем называть квадраты натуральных чисел *точными квадратами*) необходимо, чтобы k было четно. Обозначим $l=\frac{k}{2}$.

Ясно, что число (1) является точным квадратом тогда и только тогда, когда точным квадратом является число

$$A=\underbrace{1\ldots1}_{2n-2l}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1-2l}$$

Заметим, что

$$A=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2n-2l}-\frac{2}{9}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{n+1-2l}=\frac{1}{9}(10^{2n-2l}-1-2(10^{n+1-2l}-1))$$

(см. факт 11). Обозначим $B=9A$. Число A является точным квадратом, тогда и только тогда, когда $B=9A$ — точный квадрат. Запишем выражение для B в следующей форме:

$$B=10^{2n-2l}-2\cdot10^{n+1-2l}+1=(10^{n-l})^2-2\cdot10^{n-l}\cdot10^{1-l}+1. \quad (2)$$

При $l=1$ правая часть (2) превращается в формулу квадрата разности:

$$B=(10^{n-1})^2-2\cdot10^{n-1}+1=(10^{n-1}-1)^2.$$

Пусть $l>1$.

Теперь заметим, что если $X=Y^2$ — квадрат натурального числа, то ближайший к X полный квадрат (меньший X) — это $(Y-1)^2=Y^2-2Y+1$. То есть если число Z таково, что

$$Y^2-2Y+1<Z<Y^2,$$

то Z не является полным квадратом.

Применим это замечание к числам $Y=10^{n-l}$ и $Z=B$. Ясно, что $Z<Y^2$. Кроме того,

$$Z=(10^{n-l})^2-2\cdot10^{n-l}\cdot10^{1-l}+1>(10^{n-l})^2-2\cdot10^{n-l}+1.$$

Значит, в силу предыдущего замечания, это число не может быть точным квадратом, поэтому только $l=1$ (и, значит, только $k=2$) удовлетворяет условию.

5. Обозначим длины сторон AB, BC и AC через c, a и b соответственно. Пусть p — полупериметр треугольника. Будем считать, что R лежит на AC, S — на BC (рис. 107).

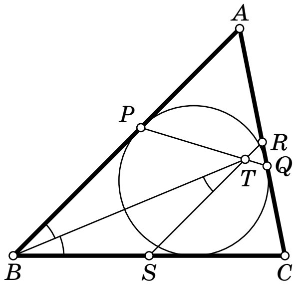


Рис. 107

Тогда (см. комментарий)

$$RQ = |RC - QC| = \left|\frac{b}{2} - (p-c)\right| = \left|\frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2}\right| = \frac{c-a}{2}.$$

Треугольники PAQ и TRQ подобны (так как $RS \parallel AB$), а треугольник PAQ равнобедренный. Поэтому $RQ = RT$. Следовательно,

$$ST = RS - RT = RS - RQ = \frac{c}{2} - \frac{c-a}{2} = \frac{a}{2} = BS.$$

Значит, треугольник TSB — равнобедренный, и $\angle SBT = \angle STB = \angle TBA$, так что BT — биссектриса угла B треугольника ABC.

Комментарий. *Расстояние от вершины треугольника до точки касания с вписанной окружностью равно $p-a$, где p — полупериметр, a — длина противоположной стороны.*

Доказательство. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Тогда, пользуясь тем, что длины касательных, проведенных из одной точки к окружности равны, получим, что периметр треугольника равен

$$2AB_1 + 2BA_1 + 2A_1C = 2AB_1 + 2BC.$$

Из этого уже нетрудно вывести наше утверждение.

6. Все пункты этой задачи решаются по индукции (см. факт 24), причем сложность рассуждений резко растет.

Начнем с решения пункта «а». База индукции очевидна: один победитель единственного соревнования из двоих — это уже половина.

Пусть есть пример 2^n спортсменов, упорядоченных по силе в n видах спорта так, что среди них 2^{n-1} возможных победителей. Обозначим такой пример C_n.

Опишем пример C_{n+1} из 2^{n+1} спортсменов, упорядоченных по силе в $n+1$ виде спорта так, что среди них 2^n возможных победителей. Разделим спортсменов на две равные группы A и A'. Силы спортсменов определим так, что

1) в видах спорта с 1-го по n-й спортсмены в каждой из групп упорядочены, как в примере C_n;

2) в $(n+1)$-м виде спорта любой спортсмен из A' сильнее любого из A, а в остальных видах — наоборот;

3) в группе A спортсмены упорядочены по $(n+1)$-му виду спорта так же, как и по n-му (а в группе A' спортсмены упорядочены по $(n+1)$-му виду спорта произвольным образом).

Если первым провести соревнование по $(n+1)$-му виду спорта, то останется группа A'. По предположению индукции половина спортсменов из этой группы может стать победителями.

Если провести соревнование по n-му виду спорта — останется группа A. Покажем, что половина спортсменов из этой группы тоже может стать победителями. По предположению индукции, для половины спортсменов из A найдется последовательность соревнований, при которых они становятся победителями. Однако эта последовательность включает n-й вид спорта, который мы уже сыграли! Сыграем вместо n-го вида спорта $(n+1)$-й, и воспользуемся тем, что в группе A спортсмены упорядочены по $(n+1)$-му виду спорта так же, как и по n-му. Итак, половина спортсменов из группы A может стать победителями, и половина спортсменов из группы A' может стать победителями. Индуктивный переход доказан.

б) Укажем для каждого вида спорта спортсмена, который при любом порядке проведения соревнований выбывает в этом виде или раньше (независимо от того, каким по очереди проводится этот вид спорта), причем для разных видов мы выберем разных спортсменов. Тогда ни один из них не может стать победителем, и возможных победителей не более, чем $2^n - n$. Построение индуктивное.

База индукции: для 1-го вида соревнований — это самый слабый в 1-м виде.

Шаг индукции: Пусть уже построено множество $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ спортсменов такое, что a_i выбывает в i-м виде спорта или раньше.

Из спортсменов, не входящих в множество A_k, выберем самого слабого в $(k+1)$-м виде спорта, обозначим его через a_{k+1}. Докажем, что a_{k+1} выбывает в $(k+1)$-м виде спорта или раньше при любом порядке соревнований. Пусть $(k+1)$-й вид спорта проводится r-м по порядку, а из множества A_k за первые $r-1$ соревнований выбыло w человек. В r-м соревновании выбывает 2^{n-r} человек. Поэтому a_{k+1} может пройти в следующий тур только при выполнении условия $2^{n-r} \leqslant k-w$ (так как лишь $k-w$ из оставшихся участников могут быть слабее в $(k+1)$-м виде, чем a_{k+1}). Но после $(k+1)$-го вида спорта должны пройти соревнования по не менее чем $k-w$ видам спорта с номерами из множества $\{1, \ldots, k\}$ (по предположению индукции). Поэтому $k-w \leqslant n-r < 2^{n-r}$. Мы воспользовались неравенством $2^l > l$, верным для всех целых чисел. Таким образом, a_{k+1} выбывает в $(k+1)$-м виде спорта или раньше, и шаг индукции доказан.

в) Лемма. *Пусть 2^n спортсменов соревнуются в $n+1$ виде спорта. При этом соревнование по $(n+1)$-му виду спорта проводится обязательно, а из оставшихся видов спорта выбирается $n-1$ (соревнование по последнему виду спорта может проводиться любым номером). Тогда может оказаться, что все, кроме одного спортсмена (а именно, кроме самого слабого в $(n+1)$-м виде спорта), являются возможными победителями.*

Прежде чем доказывать лемму, поясним, как использовать ее для решения пункта «в». Обозначим пример из этой леммы через E_n. База индукции по-прежнему очевидна. Для индуктивного перехода повторим рассуждение пункта «а» с незначительными изменениями.

Пусть есть пример 2^n спортсменов, упорядоченных по силе в n видах спорта так, что среди них $2^n - n$ возможных победителей, обозначим такой пример D_n.

Опишем пример D_{n+1} из 2^{n+1} спортсменов. Опять разделим спортсменов на две равные группы A и A'. Силы спортсменов определим так, что

1) в видах спорта с 1-го по n-й спортсмены в группе A' упорядочены, как в примере D_n;

2) в $(n+1)$-м виде спорта любой спортсмен из группы A' сильнее любого из группы A, а в остальных видах — наоборот;

3) в группе A спортсмены упорядочены, как в примере E_n.

Если первым провести соревнование по $(n+1)$-му виду спорта, то останется группа A'. По предположению индукции 2^n-n спортсменов из этой группы могут стать победителями.

Рассмотрим любого спортсмена из группы A, который может быть победителем в примере E_n. Рассмотрим последовательность соревнований, при которой он становится победителем. Пусть при этом не проводится соревнование по j-му виду спорта. Проведем его первым — останется группа A. Теперь проведем оставшиеся соревнования в порядке, необходимом, чтобы сделать этого спортсмена победителем в примере E_n.

Итак, из группы A' победителями можно сделать 2^n-n человек, а из A — 2^n-1 человек. Итого получаем $2^n-n+ +2^n-1=2^{n+1}-(n+1)$ возможных победителей.

Доказательство леммы. Докажем более сильное утверждение: *Пусть 2^n спортсменов соревнуются в $n+1$ виде спорта. При этом соревнование по $(n+1)$-му виду спорта проводится обязательно, а из оставшихся видов спорта выбирается $n-1$ (соревнование по $(n+1)$-му виду спорта может проводиться любым номером). Тогда может оказаться, что все, кроме одного спортсмена (а именно, кроме самого слабого в $(n+1)$-м виде спорта), являются возможными победителями, а единственный исключительный участник (будем называть его* аутсайдером*) может выйти в финал.*

База $(n=1)$ очевидна.

Индуктивный переход. Строим пример E_{n+1}, исходя из существования примера E_n. Опять разделим 2^{n+1} спортсменов на равные группы B и B'. Определим их силы так, чтобы в 1-м виде спорта любой из B' был сильнее любого из B, в остальных видах — наоборот, а в виде j $(2\leqslant j\leqslant n+2)$ спортсмены внутри каждой из групп B и B' были упорядочены, как спортсмены в примере E_n в виде $j-1$. Дополнительно потребуем, чтобы аутсайдер в B был самым сильным среди B в 1-м виде спорта.

Проводя сначала соревнования по 1-му виду спорта, получим 2^n-1 возможных победителей из B', причем при некотором порядке проведения соревнований аутсайдер из B' выйдет в финал (индуктивное предположение).

Если вообще не проводить соревнования по 1-му виду спорта, то в первом соревновании выбывают все спортсмены из B', а далее проводится n соревнований. По предположению индукции, выбрав вид спорта для первого соревнования и порядок проведения соревнований по остальным видам спорта, можно сделать победителями 2^n-1 спортсменов из B.

Осталось объяснить, как сделать победителем аутсайдера в B. Для этого *первым проводим тот вид соревнований, который является последним при порядке соревнований, обеспечивающем выход аутсайдера в финал*. После этого останутся только спортсмены из B. Далее проводим соревнования в таком порядке, который обеспечивает выход аутсайдера из B в финал, а завершаем — 1-м видом спорта. В нем аутсайдер побеждает.

10 класс

1. Первый способ. Если $a=0$, то $b\neq 0$ (иначе $c^2<0$). Поэтому $b^2>0=4ac$, и все доказано.

Если $a\neq 0$, то рассмотрим квадратный трехчлен $f(x)= =ax^2+bx+c$. Имеем $f(1)=a+b+c$, $f(0)=c$. По условию

$$f(1)f(0)=(a+b+c)c<0.$$

Значит, среди чисел $f(1)$ и $f(0)$ одно отрицательно, а другое положительно. Поэтому парабола $y=f(x)$ пересекает ось x. Значит, дискриминант этого квадратного трехчлена положителен: $b^2-4ac>0$.

Второй способ. Можно избежать рассмотрения двух случаев. Рассмотрим квадратный трехчлен $g(x)= =x^2+bx+ac$. Из условия следует, что $g(c)=c^2+bc+ac= =(a+b+c)c<0$. Так как рога параболы $y=g(x)$ направлены вверх и $g(c)<0$, эта парабола пересекает ось Ox в двух точках, т. е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трехчлена положителен: $b^2-4ac>0$.

2. Треугольники APB и DPC равнобедренные, так как AP, BP, CP и DP — радиусы третьей окружности. Обозначим углы при основаниях: $\angle ABP=\angle BAP=\alpha$, $\angle DCP= =\angle CDP=\beta$. Четырехугольники $ABQP$ и $DCQP$ вписанные, отсюда следует, что $\angle AQP = \angle ABP = \alpha$ и $\angle DQP = \angle DCP = \beta$ (рис. 108). По теореме об углах, вписанных в окружность, получаем:

$$\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \alpha + \beta.$$

Далее, $\angle BQP = \pi - \angle BAP = \pi - \alpha$, также $\angle CQP = \pi - \beta$ и

$$\angle BQC = 2\pi - \angle BQP - \angle CQP = \alpha + \beta.$$

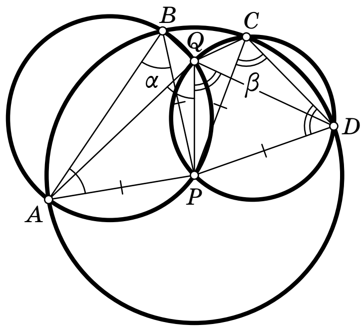


Рис. 108

3. Докажем вначале, что x и y взаимно просты. Предположим противное. Тогда x и y делятся на некоторое простое число p. Пусть p входит в разложения на простые множители чисел x и y в степенях $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$ соответственно (см. факт 10). Не ограничивая общности, можно считать, что $a \geqslant b$. Тогда максимальная степень p, на которую делится $x^3 + y$, равна b (поскольку x^3 делится на p^{3a} и тем более на p^{b+1}, но y делится на p^b и не делится на p^{b+1}). С другой стороны, $x^2 + y^2$ делится на p^{2b}, следовательно, $x^3 + y$ не может делиться на $x^2 + y^2$. Это противоречие показывает, что x и y взаимно просты (см. факт 5).

Далее, по условию $x(x^2 + y^2) - (x^3 + y) = y(xy - 1)$ должно делиться на $x^2 + y^2$. Заметим, что y и $x^2 + y^2$ не могут иметь общий делитель, больший 1 (так как x и y взаимно просты), значит $xy - 1$ делится на $x^2 + y^2$ (см. факт 9). Но если предположить, что $xy - 1 > 0$, то это невозможно, так как $x^2 + y^2 \geqslant 2xy > xy - 1$. Итак, $xy = 1$, а значит, $x = y = 1$.

4. Условимся называть красными числа, стоящие в красных секторах, и синими — стоящие в синих секторах. *Расстоянием* между двумя числами a и b назовем количество чисел, расположенных на меньшей дуге между числами a и b. Числа, расставленные по окружности, разбиваются на пары равных. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем одну из них).

Заметим, что в задаче существенен только циклический порядок чисел от 1 до n. Поэтому, если нумерацию сдвинуть по циклу (на одно и то же число для красных и синих чисел!), то задача заменится на равносильную. Поэтому можно считать, что выбранная пара — красная единица и синяя единица. Также можно считать, что меньшая дуга ω между ними идет от красной единицы к синей против часовой стрелки (рис. 109). На дуге ω либо нет чисел (т. е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета. Действительно, если на этой дуге есть и красные, и синие числа, то на ней находятся красное и синее числа n, но тогда расстояние между ними меньше, чем расстояние между единицами.

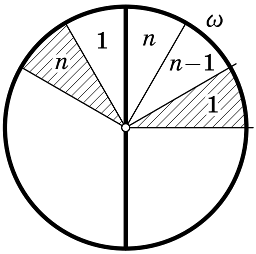


Рис. 109

Пусть все числа на этой дуге (если они есть) — синие (случай, когда они красные, аналогичен). Проведем диаметр, отделяющий синюю единицу от числа, следующего за ним по часовой стрелке (это число — синее n или красная единица); покажем, что этот диаметр искомый. Действительно, рассмотрим полукруг, содержащий синюю единицу. Прочтем синие числа, записанные в этом полукруге, начиная с единицы, против часовой стрелки — это числа 1, 2, ..., l (l — некоторое число). Прочтем теперь красные числа (тоже против часовой стрелки). Поскольку на дуге ω нет красных чисел, первым числом в рассматриваемом полукруге будет число n. Значит, красные числа на этой дуге — это числа n, $n-1$, ..., $n-m$ (m — некоторое число).

Итак, в рассматриваемом полукруге l синих и $m+1$ красное число. Всего в полукруге n чисел, следовательно, $l+(m+1)=n$, т. е. $n-m=l+1$. Поэтому в полукруге записаны синие числа от 1 до l и красные числа от n до $l+1$, а значит, в нем записаны все числа от 1 до n по одному разу.

5. Пусть

$$f,\, g\colon [0;\,1]\to[0;\,1],\qquad f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}},\qquad g(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

— функции, отвечающие прыжкам кузнечика. Область значений функции f — отрезок $[0; 1/\sqrt{3}]$, область значений функции g — отрезок $[1-1/\sqrt{3}; 1]$. Каждый из этих отрезков имеет длину $1/\sqrt{3}$, и вместе они покрывают отрезок $[0; 1]$.

Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим всевозможные композиции функций вида

$$h_1(h_2(\ldots(h_n(x))\ldots))\colon [0; 1]\to[0; 1],$$

где каждая функция h_i — либо f, либо g. Легко видеть, что область значений каждой из этих функций есть отрезок длины $(1/\sqrt{3})^n$. Докажем индукцией по n (см. факт 24), что эти отрезки покрывают весь отрезок $[0; 1]$. Для $n=1$ это утверждение уже проверено. Предположим, что области значений всевозможных функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(x))\ldots))$ покрывают отрезок $[0; 1]$. Фиксируем одну из этих функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(x))\ldots))$. Ясно, что область значений этой функции покрывается областями значений функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(f(x)))\ldots))$ и $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(g(x)))\ldots))$. Тем самым нужное утверждение доказано.

Пусть теперь на отрезке $[0; 1]$ выбрана точка a. Рассмотрим интервал $(a-0{,}01; a+0{,}01)$ и покажем, что кузнечик сможет в него попасть. Выберем n столь большим, чтобы было выполнено неравенство $(1/\sqrt{3})^n<0{,}01$ (например, годится $n=10$). По доказанному, можно выбрать такую функцию $h_1(h_2(\ldots(h_n(x))\ldots))$, что точка a принадлежит области ее значений. Тогда вся область значений рассматриваемой функции (отрезок длины $(1/\sqrt{3})^n$) лежит внутри интервала $(a-0{,}01; a+0{,}01)$. Это означает, что из любой точки отрезка $[0; 1]$ кузнечик попадет внутрь интервала $(a-0{,}01; a+0{,}01)$, выполнив последовательно прыжки, соответствующие функциям h_n, h_{n-1}, …, h_1.

К о м м е н т а р и и. 1°. Сравните с задачами 4 и 7 для 11 класса.

2°. Эта задача и задача 4 для 11 класса — задачи о сжимающих отображениях. Пусть есть два сжимающих отображения $f\colon [0; 1]\to\to[0; 1]$ и $g\colon [0; 1]\to[0; 1]$ (дифференцируемое отображение называется *сжимающим*, если его производная ограничена числом $\delta<1$).

Возникает следующая задача: возьмем точку x на отрезке $[0; 1]$. Что можно сказать о положении этой точки после последовательного применения большого числа отображений f и g? Точнее, рассмотрим бесконечную последовательность отображений f и g. Пусть x_n — результат последовательного применения первых n отображений.

Так как отображения сжимающие, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не будет зависеть от x. Однако он будет зависеть от последовательности, в которой применяются отображения f и g.

В случае, если области значений отображений f и g покрывают весь отрезок [0; 1], x_n может стремиться к любой точке отрезка [0; 1] (это, фактически, и утверждается в нашей задаче). В противном случае, множество возможных пределов похоже на канторово множество. Например, если $f(x) = \frac{x}{3}$, $g(x) = \frac{x+2}{3}$, то получится в точности канторово множество. По этому поводу см. [32], гл. 1.

6. Лемма. *Пусть по окружности расставлено* 1999 *различных положительных чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_{1999}$, *и пусть* $a_1 > a_{1998}$. *Для всех* $2 \leqslant i \leqslant 999$ *проделаем следующую операцию: числа* a_i *и* a_{1999-i} *поменяем местами, если* $a_i < a_{1999-i}$, *и не будем менять в противном случае. Если при этом хотя бы одна пара чисел поменялась местами, то сумма произведений десяток чисел, идущих подряд, увеличилась.*

Доказательство леммы. Рассмотрим симметричные группы по 10 чисел: $a_i, \ldots, a_{i+9}$ и $a_{1999-i}, \ldots, a_{1990-i}$. Покажем, что сумма произведений в таких группах не уменьшилась, причем хотя бы в одной группе она увеличилась. Из этого будет следовать утверждение леммы.

Пусть z — произведение чисел, содержащихся одновременно и в первой, и во второй группе (если таковых нет, то считаем $z = 1$); x и x' — произведения чисел, содержащихся соответственно только в первой и только во второй группе, оставшихся на своем месте после проведения наших операций; y и y' — произведение чисел, содержащихся соответственно только в первой и только во второй группе, поменявшихся местами после проделанных операций (опять же, если таких чисел нет, то считаем, что соответствующее произведение равно 1). Тогда сумма произведений чисел в рассматриваемых двух группах до операции равна $s_1 = zxy + zx'y'$, а после операции $s_2 = zxy' + zx'y$. Имеем: $s_1 - s_2 = z(x - x')(y - y')$. Нетрудно видеть, что $x \geqslant x'$, и $y \leqslant y'$. Значит, $s_1 - s_2 \leqslant 0$.

Осталось доказать, что если в результате проделанной операции не все числа остались на своих местах, то хотя бы для одной пары симметричных групп из 10 чисел эта разность будет строго отрицательна. Нетрудно видеть, что $y' > y$, если хотя бы одна пара чисел (из данной десятки) поменялась. Если же хотя бы одна пара чисел не поменялась, то $x' < x$, так как все числа различны. Значит, достаточно показать, что найдутся две симметричные группы по 10 чисел для которых хотя бы одна пара не поменялась, и хотя бы одна пара поменялась (напомним, что a_1 и a_{1998} не поменялись местами). Но это очевидно. Лемма доказана.

Решение задачи. Будем считать, что числа 1, 2, ..., 1999 расставлены так, что дуги между соседними числами равны. Пусть числа расставлены оптимальным образом, т. е. так, что сумма произведений десяток соседних чисел максимальна. Проведем какую-нибудь ось симметрии 1999-угольника (это — диаметр, проходящий через одно из чисел k и середину противоположной дуги). Тогда для всех пар чисел, симметричных относительно этого диаметра, меньшие числа расположены в одном полукруге, а большие — в другом. Действительно, занумеруем числа переменными a_1, ..., a_{1999} по кругу, начиная с большего из чисел, соседних с числом k, и заканчивая числом k. Тогда $a_1 > a_{1998}$, так что можно применить лемму: так как расстановка оптимальная, никакая пара чисел не поменяется местами, а значит, большие числа расположены в одном полукруге, а меньшие — в другом.

Оказывается, что с точностью до поворотов и симметрий существует единственная расстановка чисел, удовлетворяющая этому свойству для всех диаметров. Действительно, число 2 должно быть рядом с числом 1. Иначе найдется диаметр, отделяющий число 2 от числа 1, причем 1 и 2 не симметричны относительно этого диаметра. Обозначим числа, симметричные числам 1 и 2 относительно этого диаметра, через A и B соответственно. Тогда $A > 1$ и $2 < B$, что противоречит оптимальности в силу леммы.

Далее строим искомую расстановку по индукции (см. факт 24). Пусть мы доказали, что числа 1, 2, ..., $2k$ ($1 \leqslant k \leqslant 998$) расставлены как в ответе, т. е. в порядке (для определенности по часовой стрелке) $2k$, $2k-2$, ..., 2, 1, 3, ..., $2k-1$ подряд. Обозначим через A и B соответственно числа, следующее за $2k$ против часовой стрелки и следующее за $2k-1$ по часовой стрелке (рис. 110). Предположим, число $2k+1$ отлично от A и B. Тогда пусть C — число, следующее за $2k+1$ по часовой стрелке. C отлично от 1, 2, ..., $2k$. Числа C и $2k-1$, а также $2k+1$ и B симметричны относительно одного и того же диаметра, но $C>2k-1$, а $2k+1<B$ — противоречие. Значит, либо $A=2k+1$, либо $B=2k+1$. Но предположение $A=2k+1$ сразу приводит к противоречию — достаточно рассмотреть диаметр, относительно которого симметричны числа $2k$ и $2k-1$. Значит, $B=2k+1$.

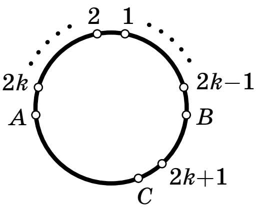


Рис. 110

Аналогично доказывается, что $A=2k+2$. Это завершает доказательство индуктивного перехода.

11 класс

1. Из неравенства треугольника $a>|b-c|$. Возводя обе части в квадрат, получаем: $a^2>(b-c)^2$. Отсюда следует, что $a^2+2bc>b^2+c^2$. Правая часть положительна, значит, на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в условии задачи больше 1. То же верно для двух других слагаемых. Поэтому их сумма больше 3.

2. а) Нетрудно построить середину ломаной BAC, т. е. точку, которая делит ломаную на две ломаных равной длины. Осталось провести прямую через эту точку и середину дуги.

б) Пусть D — середина дуги (рис. 111). Сегменты, опирающиеся на хорды BD и DC, равны. Поэтому достаточно провести через точку D прямую, которая делит пополам площадь четырехугольника $ABDC$.

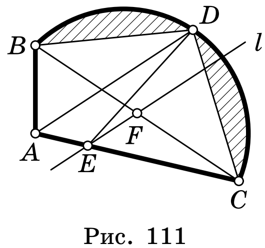


Рис. 111

Пусть точка F — середина диагонали BC. Проведем через точку F прямую l, параллельную диагонали AD. Пусть прямая l пересекает отрезок AC (случай пересечения прямой l с отрезком AB рассматривается аналогично). Обозначим $E = l \cap AC$; прямая DE — искомая.

Действительно, сумма площадей треугольников ABF и BDF равна половине площади четырехугольника $ABDC$. Нам достаточно доказать, что площадь треугольника AED равна площади треугольника AFD, но эти треугольники имеют общее основание и равные высоты (см. факт 18).

3. Первый способ. Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры. Это можно представить следующим образом. Рассмотрим куб $ABCDEFGH$ (рис. 112) и два тетраэдра: $ACFH$ и $BDEG$. Пересечение этих тетраэдров есть октаэдр. Действительно, вершины пересечения есть середины граней куба, а середины граней куба являются вершинами октаэдра.

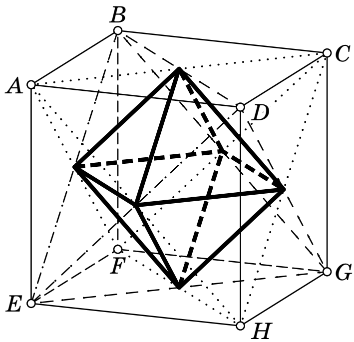


Рис. 112

Черные грани октаэдра лежат на одном тетраэдре, а белые — на другом.

Утверждение задачи следует из того, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна утроенному объему тетраэдра, деленному на площадь грани.

Докажем последнее утверждение. Пусть A, B, C и D — вершины тетраэдра, O — точка внутри тетраэдра, h_A, h_B, h_C и h_D — расстояния от точки O до плоскостей BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Пусть S — площадь грани тетраэдра $ABCD$. Тогда объемы тетраэдров $BCDO$, $ACDO$, $ABDO$ и $ABCO$ равны $\frac{1}{3}Sh_A$, $\frac{1}{3}Sh_B$, $\frac{1}{3}Sh_C$ и $\frac{1}{3}Sh_D$ соответственно. Поэтому объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$\frac{S}{3}(h_A + h_B + h_C + h_D),$$

откуда следует требуемое утверждение.

Второй способ (не совсем элементарный). Рассмотрим ориентированные расстояния от точки до плоскостей граней. Точнее говоря, если точка и октаэдр лежат по одну сторону от плоскости, то расстояние берется со знаком плюс, иначе — со знаком минус.

Докажем утверждение, более сильное, чем утверждение задачи:

Сумма ориентированных расстояний от любой точки до плоскостей черных граней равна сумме ориентированных расстояний от точки до плоскостей белых граней (*даже если точка не лежит внутри октаэдра*).

Ориентированное расстояние до плоскости представляет собой линейный функционал в пространстве (см. факт 25). Значит, сумма расстояний до граней какого-нибудь цвета — тоже линейный функционал. Обозначим сумму расстояний от точки X до белых граней через $l_w(X)$, а сумму расстояний до черных граней — через $l_b(X)$. Мы хотим доказать, что $l_b - l_w = 0$. Пусть это не так. Тогда множество нулей линейного функционала $l_b - l_w$ является плоскостью. Но нетрудно проверить, что он обращается в нуль во всех вершинах октаэдра. Противоречие. Значит, $l_b - l_w$ обращается в нуль тождественно.

4. Пусть сторона квадрата имеет длину 1. Разделим каждую сторону на 2^n равных частей, а через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам. При этом квадрат разделен на квадратики со стороной 2^{-n}. Если n достаточно велико, то один из этих квадратиков окажется целиком в лунке (например, если взять n таким, чтобы 2^{-n} было меньше половины радиуса лунки, то годится квадратик, содержащий центр лунки).

Поэтому достаточно доказать, что при любом n кузнечик сможет попасть в любую из 4^n получившихся клеток.

Докажем это утверждение по индукции (см. факт 24). При $n = 0$ факт тривиален. Проведем индуктивный переход от n к $n+1$. Рассмотрим какую-нибудь из клеток размера $2^{-(n+1)} \times 2^{-(n+1)}$.

Разрежем исходный квадрат на 4 квадрата со сторонами $1/2$ (рис. 113). Без ограничения общности можно считать, что наша клетка находится в левом нижнем квадрате. Выполним гомотетию с центром в левой нижней вершине большого квадрата и коэффициентом 2. Тогда выбранная клетка перейдет в квадрат со стороной 2^{-n}. Нетрудно видеть, что это будет одна из клеток, получившихся при разбиении квадрата на 4^n квадратов со стороной 2^{-n}.

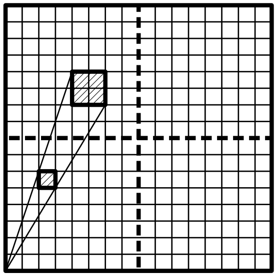


Рис. 113

По предположению индукции кузнечик может туда попасть. Если он прыгнет теперь к левой нижней вершине квадрата, то попадет в нужную клетку.

Комментарий. Сравните с задачей 5 для 10 класса и с задачей 7 для 11 класса.

5. Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем числами от 1 до k. Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней k цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Затем, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, не перекрашенными в цвет 1, перекрасим в цвет 2, и т. д. вплоть до последнего цвета. На каждом шаге получается правильная раскраска, поэтому хотя бы одна из вершин каждого цвета останется неперекрашенной.

После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета k. Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета $k-1$. Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе ее первоначальный цвет был бы k, и она вначале соседствовала бы с вершиной того же цвета, что невозможно. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета $k-2$, и т. д. Продолжая этот процесс, построим путь длины k из вершин k цветов, которые не были перекрашены.

Комментарий. Заметим, что мы доказали более сильное утверждение: найдется путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов по одному разу *в заданном порядке*.

6. Первый способ. Пусть p — простой делитель числа l. Поскольку $n^m=(1+n^k)^l-1$, то n^m делится на $(1+n^k)^p-1$ (см. факт 8). Но, в силу бинома Ньютона (см. комментарий),

$$(1+n^k)^p-1=n^k\cdot p+n^{2k}\cdot\frac{p(p-1)}{2}+n^{3k}\cdot r,$$

где r — неотрицательное целое число. Разделив это выражение на n^k, получим, что n^m делится на

$$p+n^k\cdot\frac{p(p-1)}{2}+n^{2k}\cdot r.$$

Если n не делится на p, то это выражение взаимно просто с n, и n^m не может на него делиться (см. факт 5). Значит, p — делитель числа n (см. факт 9). Тогда

$$1+n^k\cdot\frac{p-1}{2}+\frac{n^{2k}}{p}\cdot r$$

— натуральное число, большее единицы. Если $k>1$ или p нечетно, то второе слагаемое делится на n (третье слагаемое делится на n всегда), значит, сумма взаимно проста с n, так что n^m не может на нее делиться. Полученное противоречие показывает, что $k=1$ и $p=2$. Поэтому 2 — единственный простой делитель числа l, так что l имеет вид 2^s (см. факт 10).

Воспользуемся снова биномом Ньютона:

$$n^m=(1+n^k)^l-1=(1+n)^l-1=ln+\frac{l(l-1)}{2}n^2+\ldots+n^l.$$

В правой части все члены, начиная со второго, делятся на n^2. Из этого, поскольку $m>1$, следует, что l делится на n. Значит, n, как и l, является степенью двойки.

Так как $2\,|\,l$, $(1+n)^l-1$ делится на $(1+n)^2-1=n(n+2)$. Так как n^m представляет собой степень двойки, $n+2$ также является степенью двойки. Таким образом, n и $n+2$ — степени двойки, следовательно, $n=2$.

Если $l\geqslant 4$, то $(1+n)^l-1$ делится на $(1+n)^4-1=80$, и не может быть степенью двойки. Значит, $l=2$, откуда $m=3$.

Идея другого способа. Так как $1+n^m$ делится на $1+n^k$, то (при $n\neq 1$) m делится на k (см. факт 8). Поэтому, заменяя n^k на n, а m/k на m, сводим все к случаю $k=1$.

Пусть n делится на p^t, но не на p^{t+1}, где p — простое число ($t>0$). Пусть p^s — наибольшая степень p, которая делит l. Теперь запишем бином Ньютона:

$$ln + C_l^2 n^2 + \ldots + n^l = n^m.$$

Пусть $p \neq 2$ или $t > 1$. Можно показать, что правая часть и все слагаемые, кроме первого, делятся на p^{t+s+1}. Полученное противоречие показывает, что $n=2$.

Комментарий. Хорошо известны формулы для $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$. Оказывается, что существует аналогичная формула для $(a+b)^n$ при любом n. Чтобы выписать эту формулу, нам понадобится понятие числа сочетаний. *Числом сочетаний из n элементов по k* (обозначается C_n^k, читается «це из эн по ка») называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. При этом выборки, отличающиеся порядком предметов, считаются одинаковыми. Иначе говоря, C_n^k — это число k-элементных подмножеств в n-элементном множестве.

Справедлива формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}.$$

Теперь мы можем привести формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \\ = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

7. Рассмотрим окружность длины 1 как отрезок [0; 1] с отождествленными концами (см. комментарий к решению задачи 6 для 10 класса олимпиады 1997 г.). Тогда дробную часть f_m числа $\lg(2^m) = m\cdot\lg 2$ можно рассматривать как точку этой окружности. Рассмотрим на окружности точки

$$0,\ \lg 2,\ \ldots,\ \lg 9$$

и 9 полуинтервалов, на которые они разбивают окружность. Обозначим эти полуинтервалы $I_1 = [0;\ \lg 2)$, ..., $I_9 = [\lg 9;\ 0)$.

Первая цифра числа 2^m равна s тогда и только тогда, когда f_m попадает на интервал I_s. Например, если 2^m начинается с 7, то

$$7\cdot 10^l \leqslant 2^m < 8\cdot 10^l$$

для некоторого натурального l. Дробная часть числа $m \cdot \lg 2$ равна $m \cdot \lg 2 - l$, и она находится между $\lg 7$ и $\lg 8$.

Предположим, что первые цифры чисел 2^{2^n} повторяются с периодом k. Тогда дробные части величин $2^n \cdot \lg 2$ и $2^{n+k} \cdot \lg 2$ попадают в один и тот же полуинтервал I_s для любого $n > n_0$, где n_0 — длина предпериода (см. факт 4).

Нетрудно видеть, что самый длинный из полуинтервалов — первый, и его длина равна $\lg 2 < 1/3$.

1°. Пусть на окружности отложены дробные части двух положительных чисел A и B; эти дробные части различны и не являются диаметрально противоположными точками окружности; длина меньшей из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, равна x. Тогда, как легко показать непосредственно, длина одной из дуг, соединяющих дробные части чисел $2A$ и $2B$, равна $2x$.

2°. Пусть теперь дробные части чисел A и B лежат в одном интервале I_s; рассмотрим пары $2A$ и $2B$, $4A$ и $4B$ и т. д. Из сказанного выше следует, что длина меньшей дуги, соединяющей дробные части пары, удваивается до тех пор, пока она не станет больше, либо равна $1/2$. Значит, на некотором шаге одна из дуг, соединяющих дробные части пары, станет больше $1/3$, но меньше $2/3$. Тогда эти дробные части принадлежат разным интервалам окружности.

3°. Рассмотрим числа $A = 2^{n_0} \lg 2$ и $B = 2^{n_0+k} \lg 2$. Эти числа, рассматриваемые как точки окружности, не равны и не являются диаметрально противоположными, так как число $\lg 2$ иррационально (см. ниже). Значит, к этим числам можно применить пункт 2°, и мы получаем противоречие с предположением о периодичности.

Иррациональность числа $\lg 2$ можно доказать от противного: если $\lg 2 = p/q$, то $2^q = 10^p$, что, очевидно, невозможно.

К о м м е н т а р и и. 1°. Фактически мы доказали, что если α не является рациональной степенью десятки, то последовательность первых цифр чисел α^{2^n} непериодична.

С другой стороны, можно указать такое α, что последовательность первых цифр α^{10^n} периодична и α не является рациональной степенью десятки.

Например, пусть

$$\lg\alpha = 0{,}101001000100001\ldots$$

(число нулей между последовательными единицами увеличивается). Эта дробь не является периодической, так что α не является рациональной степенью десятки (см. факт 13). С другой стороны, $\{10^n \log\alpha\} < 0{,}11 < \lg 2$ при любом n. Значит, первая цифра числа α^{10^n} при всех n равна 1!

2°. Задачи 4 для 11 класса и 5 для 10 класса являются задачами про сжимающие отображения отрезка в себя (см. комментарии к задаче для 10 класса). Данная задача есть задача о *растягивающих* отображениях.

2000 год

8 класс

1. Перенесем $2000x$ в правую часть, а y^2 — в левую. Получим:

$$x^2 - y^2 = 2000x - 2000y.$$

Разложим левую часть по формуле разности квадратов:

$$(x-y)(x+y) = 2000(x-y).$$

Так как $x \neq y$, можно сократить на $x-y$. Отсюда $x+y = 2000$.

2. Идея решения задачи: Партия Любителей Математики (ПЛМ) получит наибольшее количество мест в парламенте, если общее количество голосов, отданных за непрошедшие (т. е. набравшие не более 5 % голосов) партии, максимально.

Если 10 партий наберут ровно по 5 % голосов, а две, включая Партию любителей математики (ПЛМ), — по 25 %, то в парламент пройдут только две партии. Каждая из них получит ровно 50 мест в парламенте.

Докажем, что большее число мест ПЛМ получить не может. Если бы в парламент не прошли 11 партий, то они вместе набрали бы не более 55 % голосов, но $55\,\% + 25\,\% < 100\,\%$. Значит, не прошли в парламент максимум 10 партий, и они набрали в сумме не более 50 % голосов.

Поэтому партии, прошедшие в парламент, набрали не менее 50 % голосов. Так как ПЛМ набрала 25 % голосов, она получила не более половины мест в парламенте, т. е. не более 50 мест.

3. Пусть $m>n$. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения и разобьем каждую сторону получившегося треугольника на m равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам треугольника (рис. 114). Получится разбиение треугольника на равные маленькие треугольники. Верхнее основание трапеции является одной из проведенных линий, так как его длина выражается целым числом сантиметров. Таким образом, мы получили разбиение трапеции на равные треугольники.

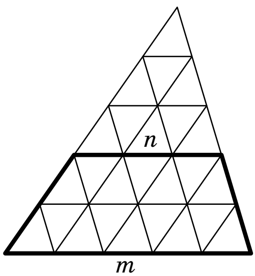


Рис. 114

4. Обозначим $CM=a$ (рис. 115). Пусть K — точка, симметричная M относительно точки A. Тогда $KM=MB=$ $=ME=2a$. Поэтому треугольник KBE прямоугольный (см. факт 14): $KB\perp BE$.

Четырехугольник $DKBM$ — параллелограмм, так как его диагонали делятся в точке пересечения пополам. Значит, $DM\parallel KB$. Следовательно, $DM\perp BE$.

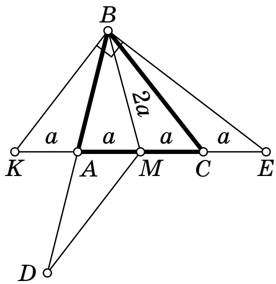


Рис. 115

5. Будем кодировать расположение карт в колоде числом, в котором цифр столько, сколько в колоде карт. Это число строится по следующему правилу: на k-м месте справа стоит 1, если k-я карта снизу лежит рубашкой вверх, и 2, если эта карта лежит рубашкой вниз. Например, колода, в которой все карты лежат рубашкой вниз, кодируется числом, десятичная запись которого состоит из одних двоек.

Нетрудно видеть, что после каждого Петиного действия это число уменьшается. Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т. е. найдем самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра 2 сменилась на 1. Но это означает, что число уменьшилось.

Поскольку количество n-значных чисел из единиц и двоек конечно, число не может уменьшаться «до бесконечности» — в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх. См. также факт 2.

6. На рис. 116 приведено расположение 16 коней, удовлетворяющее условию задачи. Покажем, что большее число коней расставить нельзя. Раскрасим клетки доски в черный и белый цвета, как показано на рис. 116. Заметим, что количество коней, расположенных на черных клетках, равно количеству коней, расположенных на белых клетках. Действительно, если соединить отрезками бьющих друг друга коней, то каждый отрезок будет соединять белую клетку с черной. С другой стороны, из каждой клетки выходит два отрезка. Значит, число отрезков равно удвоенному числу коней, стоящих на белых клетках, и удвоенному числу коней, стоящих на черных клетках. Поэтому число коней, стоящих на белых клетках, равно числу коней, стоящих на черных клетках.

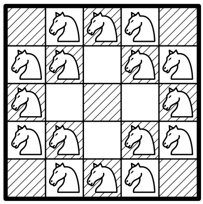


Рис. 116

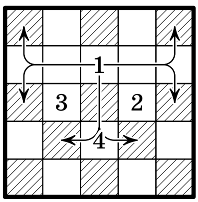


Рис. 117

Белых клеток всего 12, а черных — 13. Значит, если число пустых белых клеток равно n, то число пустых черных клеток равно $n+1$, и нам достаточно доказать, что $n \geqslant 4$ (тогда по крайней мере $4+(4+1)=9$ клеток пусты).

При любом оптимальном расположении коней центральная клетка пуста. В противном случае из восьми клеток, которые бьет конь, стоящий на центральном поле, ровно шесть пустых белых. Отсюда $n \geqslant 6$, и число коней не превосходит $25-6-(6+1)=12$.

Рассмотрим клетку, обозначенную на рисунке 117 цифрой 1. Если на этой клетке стоит конь, то 4 из 6 черных клеток, которые она бьет, пусты. По доказанному центральная клетка тоже пуста. Значит, по крайней мере 5 черных клеток пусты, и все доказано. Поэтому можно считать, что эта клетка пуста. Аналогично, можно считать, что клетки 2, 3 и 4 пусты. Но тогда $n \geqslant 4$, что и требовалось.

9 класс

1. Умножим обе части уравнения на $(x+1)-(x-1)=2$. Тогда оно преобразуется к виду

$$(x+1)^{64}-(x-1)^{64}=0. \tag{1}$$

Это следует из формулы

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

примененной к $a=x+1$, $b=x-1$, $n=64$.

Уравнение (1) легко решается:

$$(x+1)^{64}=(x-1)^{64} \quad \Leftrightarrow \quad |x+1|=|x-1|,$$

поскольку $x+1\neq x-1$, получаем $x+1=-(x-1)$, откуда $x=0$.

2. Разобьем данные 23 числа на семь групп из стоящих подряд чисел: три группы по пять чисел и четыре группы по два числа (в каком порядке эти группы расположены — неважно). Каждую группу заключим в скобки, а между группами расставим знаки умножения. Если расставить знаки внутри каждой группы так, чтобы результат операций в группе из двух чисел делился на 2, а в группе из пяти чисел — на 5, то все выражение будет делиться на $2^4\cdot 5^3=2000$.

Покажем, что такая расстановка знаков в группах существует. Рассмотрим, сначала, какую-нибудь группу из двух чисел. Если числа в группе из двух чисел разной четности, то между ними нужно поставить знак умножения, если одинаковой четности — сложения. Результат, очевидно, будет делиться на 2 (см. факт 23).

Теперь рассмотрим группу чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, идущих именно в таком порядке. Выпишем остатки от деления на 5 следующих пяти сумм (см. факт 7):

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3+a_4,\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

Если один из остатков равен 0, то соответствующая сумма делится на 5. В этом случае нужно расставить знаки сложения между числами, входящими в эту сумму, саму сумму (если требуется) заключить в скобки, а все оставшиеся промежутки между числами группы заполнить знаками умножения. Если же ни один из остатков нулю не равен, то, согласно принципу Дирихле (см. факт 1), среди них найдутся два одинаковых остатка (так как сумм — пять, а ненулевых остатков — всего четыре). Пусть, например, суммы $a_1+\ldots+a_i$ и $a_1+\ldots+a_j$ $(i<j)$ дают одинаковые остатки при делении на 5. Тогда их разность, представляющая собой сумму подряд стоящих чисел $a_{i+1}+\ldots+a_j$, делится на пять, и мы опять расставляем знаки сложения, заключаем эту сумму в скобки, а оставшиеся позиции заполняем знаками умножения. Приведем два примера:

$$(1+2+3+4)\cdot 3=30, \qquad 2\cdot(1+4)\cdot 7\cdot 1=70.$$

Значит, в любом случае нам удастся расставить знаки в группе из пяти чисел так, чтобы результат делился на 5.

Комментарий. Следующая задача является классической: *в строку выписаны n целых чисел, тогда одно из них или сумма нескольких подряд идущих делится на n.*

3. 1°. Пусть O — центр окружности в условии задачи. Докажем, что для точки C выполняется равенство $OC^2=2R^2-OA^2$, где O — центр данной окружности, R — ее радиус. Введем обозначения, как показано на рис. 118. Отрезок OC является гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетами x и y; по теореме

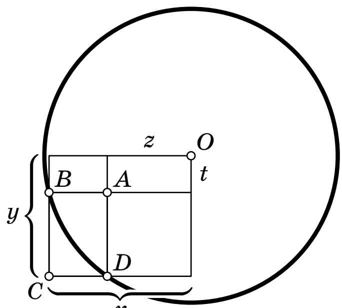


Рис. 118

Пифагора получаем:

$$OC^2 = x^2 + y^2 = (x^2 + t^2) + (y^2 + z^2) - (z^2 + t^2) = 2R^2 - OA^2.$$

$(x^2 + t^2 = y^2 + z^2 = R^2,\ \ z^2 + t^2 = OA^2$ по теореме Пифагора).

Отсюда следует, что расстояние от точки C до точки O постоянно и равно $\sqrt{2R^2 - OA^2}$, значит, искомым ГМТ является окружность с центром O и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$.

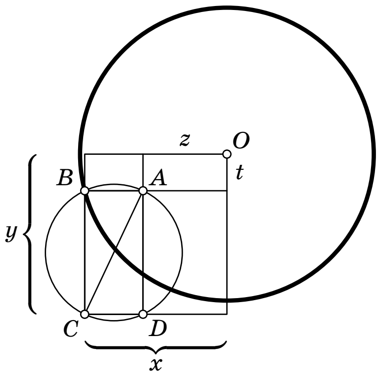


Рис. 119

2°. Обратно, пусть точка C такова, что $OC^2 = 2R^2 - OA^2$. Докажем, что найдется прямоугольник $ABCD$, вершины B и D которого лежат на исходной окружности.

Построим окружность на отрезке AC как на диаметре (рис. 119). Она пересечет исходную окружность в двух точках. Обозначим одну из этих точек через B. Тогда $\angle ABC = 90^\circ$ (см. факт 14). Достроим прямоугольный треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$. Нам достаточно доказать, что точка D лежит на окружности. В обозначениях рисунка

$$OD^2 = y^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + (z^2 + t^2) - (x^2 + t^2) =$$
$$= OC^2 + OA^2 - R^2 = (2R^2 - OA^2) + OA^2 - R^2 = R^2,$$

что и требовалось доказать.

4. Пусть у Лёши есть много доминошек 1×2. Если он положит на доску две доминошки так, чтобы они перекрывались ровно по одной клетке

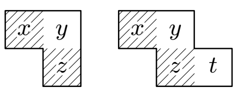


Рис. 120

(рис. 120, слева), то, вычтя из суммы чисел под одной доминошкой $(x + y)$ сумму чисел под другой $(y + z)$, он узнает разность $x - z$ чисел, накрытых ровно одной доминошкой (эти числа записаны в клетках одного цвета). Пусть Лёша положит третью доминошку так, чтобы одна ее половина накрывала число z, а вторая — еще не покрытую клетку (например, как на рис. 120 справа). Складывая ранее полученную разность с суммой чисел под новой доминошкой, Лёша получит сумму $x+t$ тех двух чисел, которые покрыты ровно одной из трех доминошек (эти числа записаны в клетках разного цвета). Так, добавляя все новые и новые доминошки, можно построить цепочку, соединяющую любые две клетки доски, и, если эти клетки одного цвета, узнать их разность, а если разного — их сумму.

Известно, что числа 1 и 64 расположены на одной диагонали, т. е. в клетках одного цвета. Их разность равна 63, а разность любых двух других натуральных чисел между 1 и 64 меньше 63. Поэтому Лёша может определить, в каких клетках записаны 1 и 64. Теперь, зная сумму (или разность) числа 64 с числом в любой другой клетке, Лёша легко определит, где какое число записано.

5. Первый способ. Пусть P и Q — середины отрезков AB и CD соответственно, O_1 и O_2 — центры окружностей, проходящих через точки A, M, C и B, M, D соответственно, H_1 и H_2 — проекции O_1 и O_2 на прямую PQ (рис. 121).

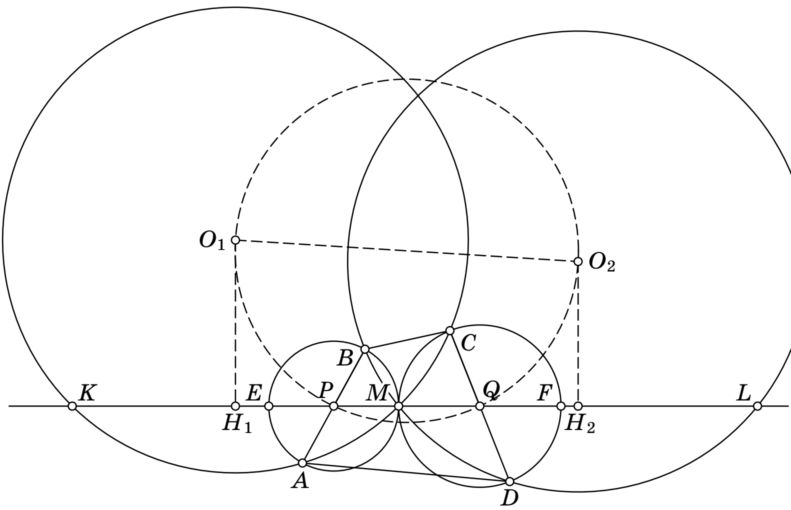


Рис. 121

1°. Точки M, P и Q лежат на одной прямой. В самом деле, прямые PM и QM содержат радиусы окружностей, касающихся в точке M, и, следовательно, перпендикулярны общей внутренней касательной к этим окружностям.

2°. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Действительно, $PO_1 \perp PO_2$, поскольку эти прямые — серединные перпендикуляры к отрезкам MA и MB, угол между которыми прямой (M лежит на окружности с диаметром AB, см. факт 14). Аналогично, $QO_1 \perp QO_2$.

3°. Ясно, что $KH_1 = H_1M$, $LH_2 = H_2M$ (радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам).

4°. $PH_1 = QH_2$, так как проекция середины отрезка O_1O_2 делит отрезок H_1H_2 пополам, но эта проекция делит пополам и отрезок PQ (мы снова пользуемся тем, что перпендикуляр к хорде, опущенный из центра окружности, делит ее пополам). Наконец, $|MK - ML| = 2|MH_1 - MH_2| = 2|MP - MQ| = 2\left|\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD\right| = |AB - CD|$.

В т о р о й с п о с о б. Обозначим окружность, проходящую через точки A, M и B, через ω_{AMB}, окружность, проходящую через точки A, M и C, — через ω_{AMC} и т. д.

Пусть E — точка пересечения прямой KL с окружностью ω_{AMB}, F — точка пересечения той же прямой с окружностью ω_{CMD} (рис. 122). Так как отрезок EM — диаметр окружности ω_{AMB}, имеем $EM = AB$. Значит, $MK - AB = KE$. Аналогично $ML - CD = FL$. Поэтому достаточно доказать, что $KE = FL$.

Продолжим отрезок AB до пересечения с окружностью ω_{AMC} в точке K'. Мы утверждаем, что $KE = BK'$. Действительно, рассмотрим симметрию относительно прямой, соединяющей центры окружностей ω_{AMC} и ω_{AMB}. При этой симметрии окружности ω_{AMB} и ω_{AMC} переходят в себя, значит, их точки пересечения A и M переходят друг в друга.

Так как центр P окружности ω_{AMB} переходит в себя, прямая AK' переходит в прямую MK. Точка K переходит в точку K', так как окружность ω_{AMC} переходит в себя. Аналогично, точка E переходит в точку B. Значит, отрезок KE переходит в отрезок $K'B$, и наше утверждение доказано.

По тем же соображениям, если точка L' является точкой пересечения прямой CD с окружностью ω_{BMD}, отличной от точки D, то $FL = CL'$. Итак, осталось доказать, что $BK' = CL'$.

Пусть L'' — точка пересечения прямой CD с окружностью ω_{AMC}. Рассматривая симметрию относительно прямой, соединяющей центры окружностей ω_{AMC} и ω_{CMD}, видим, что $MK = CL''$. Аналогично, $AK' = MK$. Значит, $CL'' = AK'$. Пусть хорды AK' и CL'' пересекаются в точке N. Так как эти хорды равны, биссектриса угла ANL'' проходит через центр окружности ω_{AMC}.

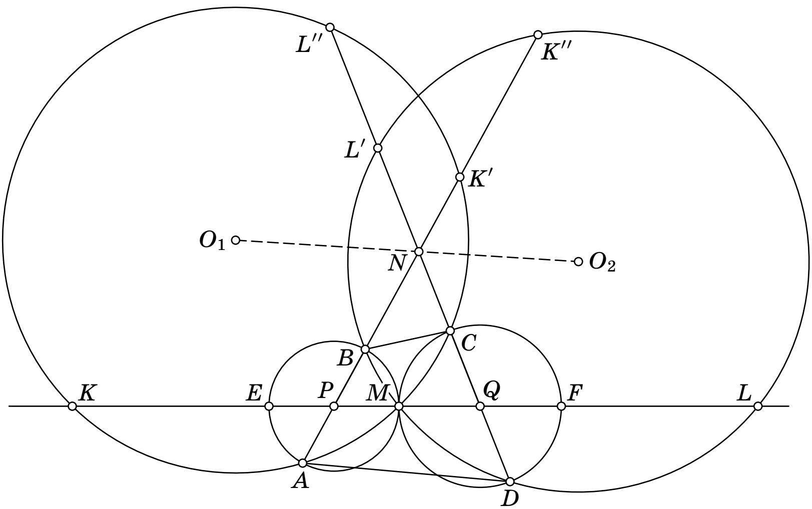


Рис. 122

Так же доказывается, что эта биссектриса проходит через центр окружности ω_{BMD} (нужно продолжить AK' до пересечения с окружностью ω_{BMD} в точке K'' и доказать, что $BK'' = DL'$). Значит, симметрия относительно этой биссектрисы переводит в себя окружности ω_{AMC} и ω_{BMD}, а прямые CL' и AK' переводит друг в друга. Но тогда она переводит отрезок BK' в отрезок CL'. Поэтому эти отрезки равны, и задача решена.

6. а) Докажем, что указанная в условии система укреплений (будем называть ее *трилистником*) надежна. Обозначим блиндажи, как показано на рис. 123.

Ограничим начальные положения пехотинца блиндажами O, A_2, B_2 и C_2. При этом задача пушки упростится, но мы докажем, что пушка все равно не сможет накрыть пехотинца.

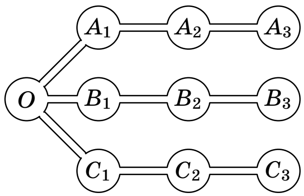


Рис. 123

Эти блиндажи (O, A_2, B_2 и C_2) мы будем называть *четными*, а остальные — *нечетными*. Заметим, что из четного блиндажа пехотинец может перебежать только в нечетный, а из нечетного — только в четный. Поэтому перед выстрелами пушки с четными номерами пехотинец находится в нечетном блиндаже, а перед выстрелами с нечетными номерами — в четном. Значит, пушка должна наносить четные выстрелы по нечетным блиндажам, а нечетные — по четным.

Докажем, что перед каждым нечетным выстрелом пушки пехотинец может оказаться в O и еще в одном из двух четных блиндажей (т. е. пушке неизвестно, в каком из этих трех блиндажей пехотинец).

Для доказательства проведем индукцию по количеству выстрелов. Действительно, вначале наше утверждение верно. Пусть перед $(2k-1)$-м выстрелом пехотинец может оказаться в O и еще двух четных блиндажах (например, в A_2 и B_2).

Рассмотрим $(2k-1)$-й выстрел.

Случай 1: пусть он нанесен по блиндажу O, тогда перед следующим выстрелом пехотинец может оказаться в любом из блиндажей A_1, A_3, B_1 и B_3; $2k$-й выстрел должен быть нанесен по одному из нечетных блиндажей. Нетрудно видеть, что в любом случае перед $(2k+1)$-м выстрелом пехотинец может снова оказаться в любом из блиндажей O, A_2, B_2.

Случай 2: пусть $(2k-1)$-й выстрел нанесен по блиндажу A_2. Тогда перед следующим выстрелом пехотинец может оказаться в любом из блиндажей A_1, B_1, C_1 и B_3. Если $2k$-й выстрел нанесен по блиндажу A_1, то перед

$(2k+1)$-м выстрелом пехотинец может оказаться в O, B_2 и C_2, если по B_1, то в O, A_2 и C_2, если по C_1, то в O, A_2 и B_2. Если пушка стреляет по одному из блиндажей A_3, B_3, C_3, то пехотинец может оказаться в любом из четырех блиндажей. В любом случае перед $(2k+1)$-м выстрелом пехотинец может оказаться в O и еще двух четных блиндажах, так что в случае 2 наше утверждение доказано.

Случай 3: пусть $(2k-1)$-й выстрел нанесен по блиндажу B_2. Этот случай полностью аналогичен предыдущему.

Случай 4: пусть $(2k-1)$-й выстрел нанесен по блиндажу C_2. Тогда перед следующим выстрелом пехотинец может оказаться в любом из блиндажей A_1, A_3, B_1 и B_3, и этот случай аналогичен случаю 1.

Итак, перед каждым нечетным выстрелом пехотинец может оказаться в нескольких разных блиндажах, так что пушка не сможет его накрыть. Из предыдущего перебора видно, что пушка не может накрыть его и четным выстрелом.

б) Если в системе есть цикл из нескольких блиндажей A_1—A_2—…—A_n—A_1, то такая система укреплений надежна. Ведь пехотинец, перебегая только по этому циклу, каждый раз может выбирать тот из двух доступных ему блиндажей, который не будет накрыт следующим выстрелом.

Заметим, что если какая-то часть системы укреплений сама по себе надежна, то пехотинец может спасаться только в этой части, таким образом, и вся система надежна. Поэтому, если кроме цикла A_1—A_2—…—A_n—A_1 имеются другие траншеи, то такая система уже не минимальна. Покажем, что любой цикл минимален. Разрушив, скажем, траншею A_n—A_1, мы получим линейный лабиринт A_1—A_2—…—A_n. Вот как должна действовать пушка. Она последовательно стреляет по блиндажам A_2, A_3, …, A_n. Если сначала пехотинец был в блиндаже с четным номером, то один из этих выстрелов его накроет (докажите!). Если же этого не произошло, то пушка производит еще одну серию выстрелов, начиная с блиндажа A_1 или A_2 и последовательно перемещаясь по возрастанию номера блиндажа. То, с какого блиндажа она начинает вторую серию, зависит от четности номера блиндажа, в котором в этот момент находится пехотинец (это легко вычислить, так как сначала номер был нечетен и после каждого перебегания четность номера меняется).

Осталось рассмотреть системы укреплений без циклов. Покажем, что единственная минимальная надежная среди них — это трилистник. Возьмем любую систему, не содержащую ни цикла, ни трилистника, и укажем, как должна действовать пушка. (Мы опишем стратегию для связной системы. Если же система несвязна, т. е. состоит из нескольких участков, не связанных между собой траншеями, то пушка должна последовательно реализовать эту стратегию для каждого участка.)

Назовем блиндаж *перекрестком*, если из него выходят три или более траншеи. Траншею, ведущую из блиндажа, назовем *сквозной*, если, пробежав через нее, пехотинец может перебежать еще два раза, не побывав дважды ни в одном блиндаже. Например, в трилистнике траншея A_1—A_2, ведущая из блиндажа A_1, не сквозная, а траншея A_2—A_1 из A_2 сквозная. Наконец, блиндаж назовем *тупиковым*, если из него ведет единственная траншея.

Так как наша система не содержит трилистника и циклов, из любого блиндажа выходит не более двух сквозных траншей. Определим, откуда пушка начнет атаку. Возьмем любой перекресток. Если из него ведут две сквозные траншеи, причем каждая ведет к другому перекрестку, то выберем одну из них и проследуем через нее до ближайшего перекрестка. Если из этого нового перекрестка выходит еще одна сквозная траншея, ведущая к перекрестку, перейдем по этой траншее до следующего ближайшего перекрестка. Действуем так, пока не придем к перекрестку с единственной выходящей из него сквозной траншеей или с двумя, через одну из которых можно дойти до тупикового блиндажа, не проходя ни одного перекрестка. В первом случае пройдем по любой несквозной траншее в соседний блиндаж, во втором — пройдем по этой са́мой сквозной траншее до блиндажа, соседнего с тупиковым. Таким образом, мы определили, с какого блиндажа начать обстрел.

Разобьем блиндажи на четные и нечетные так, что пехотинец каждый раз перебегает из блиндажа одной четности в блиндаж другой четности (это возможно, поскольку циклов в системе нет). Покажем, как нужно стрелять, чтобы гарантированно поразить пехотинца при условии, что он изначально находится в блиндаже той же четности, что и блиндаж, с которого начнется обстрел. (Если, сделав все эти выстрелы, пушка так и не накроет пехотинца, значит, он находился в блиндаже другой четности; теперь уже точно известна четность блиндажа с пехотинцем.)

Пусть пушка последовательно поразит блиндажи, начиная с выбранного и заканчивая перекрестком. Тогда на обстрелянном линейном участке системы пехотинца нет. Мы так выбрали начальный блиндаж, чтобы среди траншей, ведущих в другие участки системы, было не более одной сквозной. (Если всего их две, то вторая ведет в только что обстрелянный участок.) Любая несквозная траншея ведет либо в тупиковый блиндаж, либо в блиндаж, из которого можно попасть в несколько тупиковых или же вернуться на перекресток. В обоих случаях за этой траншеей всего один блиндаж четности, противоположной четности рассматриваемого перекрестка. После того как пушка накрыла перекресток, пехотинец перебежал как раз в блиндаж, четность которого противоположна четности перекрестка, так что если он находится за этой траншеей, то, ударив по блиндажу, в который ведет эта траншея, пушка поразит пехотинца. Если же нет, пушка снова бьет по перекрестку, не давая пехотинцу пробежать на уже проверенные участки системы укреплений. Проверив все несквозные траншеи, пушка приступает к единственной сквозной, поражает блиндаж, в который ведет эта траншея, и далее последовательно все блиндажи до ближайшего перекрестка. Там повторяется проверка несквозных проходов и т. д. Так можно проверить всю систему.

Тем самым, любая система, не содержащая ни циклов, ни трилистника, ненадежна. Разрушив любую траншею в трилистнике, мы получим ненадежную систему, так что трилистник является минимальной надежной системой. Наконец, любая система, состоящая из трилистника и чего-то еще, надежна, но не минимальна.

10 класс

1. Можно считать, что абсцисса точки A меньше абсциссы точки B (рис. 124). Рассмотрим точку K пересечения отрезков AH_A и OB. Рассматриваемые фигуры пересекаются по криволинейному «треугольнику» AKB. Значит, разность рассматриваемых площадей равна разности площадей треугольника OAK и четырехугольника H_AKBH_B. Покажем, что эта разность равна нулю:

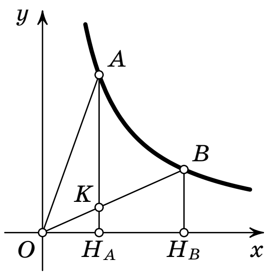


Рис. 124

$$S(OAK) - S(H_AKBH_B) =$$
$$= S(OAH_A) - S(OBH_B) =$$
$$= \frac{OH_A \cdot AH_A}{2} - \frac{OH_B \cdot BH_B}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что точки A и B лежат на графике функции $y = 1/x$.

2. Заметим, что
$$f(x) = (x+6)^2 - 6.$$
Тогда
$$f(f(x)) = (((x+6)^2 - 6) + 6)^2 - 6 = (x+6)^4 - 6,$$
$$f(f(f(x))) = (x+6)^8 - 6$$
и т. д. Наконец,
$$f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{32} - 6.$$
Но уравнение $(x+6)^{32} = 6$ решить просто: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.

3. Докажем, что каждая из рассматриваемых величин равна площади многоугольника. Проверим это для суммы длин вертикальных отрезков. Проведем эти отрезки. Пусть их длины равны $a_1, \ldots, a_n$ (рис. 125). Тогда многоугольник разобьется на два треугольника и $n-1$ трапецию, причем высоты этих фигур будут равны одной клеточке. По формуле для площади трапеции, площадь i-й

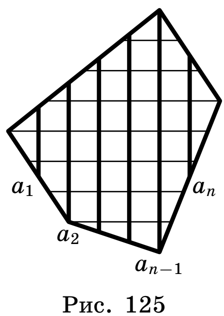


Рис. 125

трапеции равна $\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ клеточек, а площади треугольников равны $\frac{a_1}{2}$ клеточек и $\frac{a_n}{2}$ клеточек. Значит, площадь многоугольника равна

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}+\frac{a_n}{2}=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Что и требовалось.

Комментарии. 1°. Утверждение задачи верно и для невыпуклого многоугольника. Кроме того, условие, что ни одна из сторон не идет по вертикали или горизонтали, можно заменить на следующее условие: вертикальные и горизонтальные отрезки, лежащие на границе многоугольника, считаются с коэффициентом 1/2.

2°. Можно решать задачу так: каждая из сумм *аддитивна* в следующем смысле: если многоугольник разрезан на части, то сумма для всего многоугольника равна сумме соответствующих сумм для всех частей. Но нетрудно проверить, что единственная аддитивная функция на множестве всех многоугольников с целыми вершинами, равная 1 на квадрате со стороной 1 и инвариантная относительно параллельных переносов и центральных симметрий, — это площадь.

3°. Рассмотрим достаточно хорошее множество на координатной плоскости (например, многоугольник или выпуклое множество). Пусть длина его пересечения с прямой $x=a$ равна $f(a)$, а длина его пересечения с прямой $y=b$ равна $g(b)$. Тогда площадь нашего множества вычисляется по формулам

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy.$$

См. по этому поводу [75], гл. 11, § 4.

Многие утверждение из анализа имеют дискретные аналоги. Так, наша задача является дискретным аналогом приведенной формулы.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Объясним, как можно действовать в пунктах «а» и «в». Вычеркивание первого члена переводит последовательность $\{a_n\}$ в последовательность $\{a_{n+1}\}$. Вычитая из этой последовательности исходную последовательность, получим последовательность $\{a_{n+1}-a_n\}$. Такое преобразование обозначим через T, а m-кратное применение преобразования T обозначим через T^m. Еще нам пригодится последовательность I, все члены которой — единицы (ее можно получить делением данной последовательности на себя). Теперь покажем, как получить последовательность $\{n\}$ в пункте «а»:

$$\{n^2\} \xrightarrow{T} \{2n+1\} \xrightarrow{-I} \{2n\} \xrightarrow{/(I+I)} \{n\}.$$

Решить пункт «в» несколько сложнее. Заметим, сначала, что если $P(n)$ — многочлен от n степени m, то применение T к последовательности $\{P(n)\}$ дает последовательность $\{Q(n)\}$, где $Q(n)$ — многочлен степени $m-1$ (см. факт 22). Отсюда следует, что применение T^{m-1} к $\{P(n)\}$ дает многочлен степени 1, т. е. последовательность вида $\{an+b\}$, а применение T^{m+1} дает нулевую последовательность. Имеем

$$\left\{\frac{n^{2000}+1}{n}\right\} = \left\{n^{1999} + \frac{1}{n}\right\}.$$

Применение T^{2000} к слагаемому n^{1999} этой последовательности дает 0. Нетрудно проверить (по индукции, см. факт 24), что применение T^{2000} ко второму слагаемому дает $\dfrac{2000!}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)}$. Теперь уже нетрудно предъявить нужную последовательность преобразований:

$$\left\{\frac{n^{2000}+1}{n}\right\} \xrightarrow{T^{2000}} \left\{\frac{2000!}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)}\right\} \to$$

$$\xrightarrow{I/} \left\{\frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)}{2000!}\right\} \to$$

$$\xrightarrow{\times(\overbrace{I+I+\ldots+I}^{2000!\text{ раз}})} \{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)\} \xrightarrow{T^{2000}} \{an+b\},$$

где a, b — целые числа, $a \neq 0$. Дальнейшие действия ясны.

б) Докажем, что последовательность $\{n\}$ получить нельзя. Для этого заметим, что все последовательности, которые можно получить из $\{n+\sqrt{2}\}$, имеют вид $\left\{\dfrac{P(n+\sqrt{2})}{Q(n+\sqrt{2})}\right\}$, где P и Q — многочлены с целыми коэффициентами. (В самом деле, исходная последовательность такой вид имеет. При почленном сложении, вычитании, умножении или делении последовательностей такого вида, очевидно, снова получится последовательность такого вида, а выбрасывание нескольких членов равносильно замене

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ на $\frac{P(x+r)}{Q(x+r)}$ для некоторого натурального r, что можно представить в требуемом виде, раскрыв все скобки в числителе и знаменателе.) Если в таком виде представляется последовательность $\{n\}$, то в таком виде представляется и последовательность, все члены которой равны $\sqrt{2}$. Но из равенства $\frac{P(n+\sqrt{2})}{Q(n+\sqrt{2})}=\sqrt{2}$ следует, что отношение старших коэффициентов многочленов P и Q равно $\sqrt{2}$, что невозможно, так как $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Противоречие.

6. а) Пусть Гриша назовет два набора карт: свой и набор из трех карт, которых у него нет, и скажет: «У меня один из этих наборов». При этом Лёша узнает Гришины карты (так как Гришин набор не пересекается с Лёшиным набором, а второй названный Гришей набор — обязательно пересекается).

Теперь возможны две ситуации: если второй из наборов, названных Гришей, не совпадает с Лёшиным, то Лёша должен назвать набор своих карт и набор Гришиных карт и сказать: «У меня один из этих наборов».

Если второй из наборов, названных Гришей, совпадает с Лёшиным, то Лёша должен поступить иначе (чтобы Коля не узнал спрятанной карты): он называет свой набор и любые три карты, которых у него нет (но не Гришин набор).

После этого каждый из них знает весь расклад. Коле же ничего не ясно. Действительно, названо три набора карт: A, B и C. Гриша сказал: «У меня либо A, либо B», Лёша сказал: «У меня либо A, либо C» (наборы B и C пересекаются по двум картам, а остальные пары наборов не пересекаются). Это означает, что либо у Гриши набор A, а у Лёши — C, либо у Гриши — B, а у Лёши — A. Конечно, эти расклады различны, и даже закрытую карту определить нельзя.

б) Заметим, что предыдущий способ не работает: зная закрытую карту, Коля может все определить. Занумеруем карты числами от 0 до 6. Пусть Гриша и Лёша по очереди назовут остатки от деления суммы номеров своих карт на 7 (см. факт 7). Тогда они узна́ют расклад: каждый из них должен лишь прибавить к своей сумме сумму другого и найти остаток, противоположный этой общей сумме по модулю 7 (т. е. такой, который при прибавлении к этой сумме дает число, делящееся на 7). Это и будет номер закрытой карты. После этого восстановление расклада не составляет труда. Проверим, что Коля ничего не узнал. Рассмотрим карту с номером s. Покажем, что она могла попасть к Грише, если он назвал сумму a. Для этого надо дополнить эту карту двумя другими с суммой номеров $a-s$ (по модулю 7). Легко видеть (проверьте!), что существует три различные пары номеров, дающие в сумме $a-s$. Одна пара может быть «испорчена» тем, что туда входит карта с номером s. Еще одна пара может быть испорчена тем, что туда входит Колина карта, но как минимум одна пара остается. Ею мы и дополним набор Гриши. Такие же рассуждения показывают, что любая карта могла оказаться и у Лёши.

Комментарий. Заметим, что метод пункта «б» не работает в пункте «а» — Коля узнает закрытую карту.

11 класс

1. Пусть $a=2000m+n$, $b=2000n+m$, d — наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа

$$2000a-b=(2000^2-1)m \quad \text{и} \quad 2000b-a=(2000^2-1)n.$$

Поскольку m и n взаимно просты, то d является также делителем числа 2000^2-1 (см. комментарий). С другой стороны, при $m=2000^2-2000-1$, $n=1$, получаем $a=(2000^2-1)(2000-1)$, $b=2000^2-1=d$.

Комментарий. Мы воспользовались таким утверждением: если m и n взаимно просты, то НОД$(dm, dn)=d$. Это следует из более общего утверждения:

$$\text{НОД}(dx, dy)=d\,\text{НОД}(x, y).$$

Дадим набросок доказательства. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все простые делители чисел x, y и d. Запишем разложения этих чисел на простые множители:

$$x=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n},$$
$$y=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\ldots p_n^{l_n},$$
$$d=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}.$$

(Некоторые из чисел k_i, l_i и m_i могут быть равны нулю. Сравните с комментарием к задаче 4 для 9 класса олимпиады 1995 г.)

Обозначим через $\min(p, q)$ меньшее из чисел p и q. Тогда

$$\text{НОД}(x, y) = p_1^{\min(k_1,l_1)} p_2^{\min(k_2,l_2)} \ldots p_n^{\min(k_n,l_n)}.$$

Аналогично,

$$\text{НОД}(dx, dy) = p_1^{\min(m_1+k_1,m_1+l_1)} p_2^{\min(m_2+k_2,m_2+l_2)} \ldots p_n^{\min(m_n+k_n,m_n+l_n)}.$$

Остается заметить, что для любого i выполняется равенство

$$\min(m_i + k_i,\ m_i + l_i) = m_i + \min(k_i,\ l_i).$$

Другое доказательство можно получить, пользуясь следующим фактом: для любых целых x и y найдутся такие целые a и b, что $ax + by = \text{НОД}(x, y)$, см. например [30].

2. Первый способ. Так как интеграл от разности функций равен разности интегралов (см. факт 28), получаем:

$$\int_0^\pi (|\sin 1999x| - |\sin 2000x|)\, dx = \int_0^\pi |\sin 1999x|\, dx - \int_0^\pi |\sin 2000x|\, dx. \quad (1)$$

Мы покажем, что

$$\int_0^\pi |\sin kx|\, dx = 2$$

при любом натуральном k. Из этого будет следовать, что правая часть (1) равна нулю.

Функция $|\sin kx|$ периодична с периодом π/k. Значит,

$$\int_0^\pi |\sin kx|\, dx = k \int_0^{\pi/k} |\sin kx|\, dx = k \int_0^{\pi/k} \sin kx\, dx. \quad (2)$$

Интеграл в правой части легко вычислить, сделав замену $y = kx$ (см. факт 28):

$$\int_0^{\pi/k} \sin kx\, dx = \int_0^\pi \sin y\, \frac{dy}{k} = \frac{2}{k}.$$

Значит, интеграл (2) равен 2 при любом k, и наше утверждение доказано.

Второй способ (набросок). График функции $|\sin kx|$ на отрезке $[0; \pi]$ состоит из k одинаковых «шапочек» (рис. 126), которые получаются из графика функции $\sin x$ на том же отрезке путем сжатия к оси ординат в k раз. При этом площадь под графиком также уменьшается в k раз. Как следствие, площадь под k «шапочками» одинакова при любом k. Поэтому искомый интеграл равен нулю.

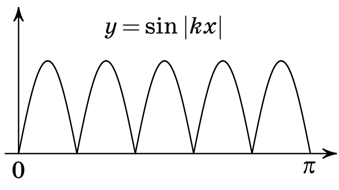


Рис. 126

3. Пусть X — середина KB (рис. 127, *а*). Тогда $\angle KMX = \frac{1}{2}\angle KMB = \angle KAB = \angle KDC$ (в предпоследнем равенстве мы пользуемся тем, что угол опирающийся на дугу, равен половине дуги, в последнем — тем, что углы, опирающиеся на равные дуги, равны). Ясно, что $MX \perp BD$, значит, $KM \perp CD$. При этом $ON \perp CD$, так что $ON \parallel KM$. Аналогично, $OM \parallel KN$.

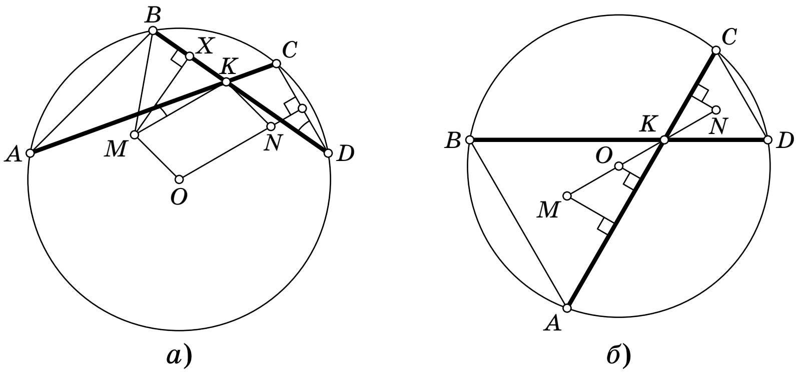


Рис. 127

Если точки O, K, M, N не лежат на одной прямой, то $OMKN$ — параллелограмм, и $OM = KN$. В противном случае рассмотрим ортогональные проекции отрезков OM и KN на AC (рис. 127, *б*). Так как точки O, M и N проектируются соответственно в середины отрезков AC,

AK и KC, проекции отрезков OM и KN равны $\frac{1}{2}KC$. Так как эти отрезки лежат на одной прямой, то из равенства длин проекций следует равенство длин самих отрезков.

4. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Этот многочлен имеет корень t, больший 1, поскольку $P(1) < 0$, а $P(2) > 0$ (см. комментарий). Возьмем длины палочек равными t^3, t^2, t. Напомним, что из трех отрезков можно сложить треугольник тогда и только тогда, когда длина большего из них меньше суммы длин двух оставшихся. Так как $t^3 = t^2 + t + 1 > t^2 + t$, из этих палочек не удастся сложить треугольник. После первого отпиливания получим палочки с длинами t^2, t, 1. Так как отношение длин не изменилось, процесс будет продолжаться бесконечно.

Комментарий. Мы воспользовались теоремой о промежуточном значении, которая утверждает, *что если функция* $P(x)$ непрерывна *на отрезке* $[a; b]$, *причем* $P(a) < 0$, $P(b) > 0$, *то найдется такая точка* $c \in (a; b)$, *что* $P(c) = 0$.

Мы не будем приводить ни доказательства этой теоремы, ни даже определения непрерывной функции, отсылая читателя к [75], гл. 4. Заметим лишь, что любой многочлен непрерывен.

5. а) Пусть N — число игроков, $M = \left[\frac{N}{2}\right]$. Игроков, занявших первые M мест, назовем *сильными*, а остальных — *слабыми* (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть X — число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $\frac{M(M-1)}{2}$, а во встречах со слабыми — не больше X. Обозначим сумму очков, набранных сильными, через S_1, а сумму очков, набранных слабыми, — через S_2. Тогда

$$S_1 \leqslant \frac{M(M-1)}{2} + X, \qquad S_1 + S_2 = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Если все получили одинаковое число очков, то все партии — правильные. Поэтому можно считать, что есть два игрока с разным числом очков. Рассмотрим сначала, случай, когда N — четное. Тогда число слабых игроков равно числу сильных. Ясно, что в этом случае $S_1 > S_2$. Значит,

$$S_1 > \frac{S_1+S_2}{2} = \frac{N(N-1)}{4},$$

откуда

$$X \geqslant S_1 - \frac{M(M-1)}{2} > \frac{N(N-1)}{4} - \frac{M(M-1)}{2}.$$

Подставляя $M = N/2$, несложной выкладкой убеждаемся, что $X > N^2/8 > N(N-1)/8$. Так как общее число партий равно $N(N-1)/2$, доля правильных партий больше $1/4$.

Однако это доказательство не проходит для нечетного N. В этом случае можно поступить так: рассмотрим *средний* результат сильного игрока $\frac{S_1}{M}$. Ясно, что он больше среднего результата слабого игрока, а значит, больше среднего, взятого по всем игрокам:

$$\frac{S_1}{M} > \frac{N(N-1)/2}{N}.$$

То есть $S_1 > \frac{M(N-1)}{2}$. Отсюда

$$X \geqslant S_1 - \frac{M(M-1)}{2} > \frac{M(N-M)}{2} > \frac{N(N-1)}{8}.$$

Последнее неравенство нетрудно проверить, подставив $M = \frac{N-1}{2}$.

К о м м е н т а р и й. Доказательство для случая нечетного N проходит и при четном N.

б) Рассмотрим сначала турнир из $2k+1$ игрока, в котором каждый участник с номером $i \leqslant k$ проиграл участникам с номерами $i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Очевидно, что все игроки набрали по k очков.

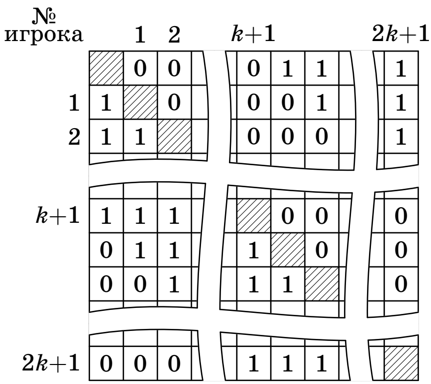


Рис. 128

Рассмотрим таблицу турнира (рис. 128). Нетрудно видеть, что в этой таблице над главной диагональю единицы стоят ровно в $\frac{k(k+1)}{2}$ клетках из $\frac{2k(2k+1)}{2}$. Теперь «размножим» каждого игрока, заменив его группой из n игроков, и пусть участники из разных групп играют друг с другом так же, как соответствующие прежние участники, а участники из одной группы играют друг с другом вничью. Получим новую таблицу, в которой по-прежнему у всех игроков поровну очков.

Исправим эту таблицу так, чтобы суммы очков игроков перестали быть равными. Для этого будем менять результаты участников из $(k+1)$-й группы: в их встречах против участников из $(k+1-i)$-й группы заменим in выигрышей ничьими, так что сумма очков каждого участника $(k+1)$-й группы уменьшится на $i/2$, а каждого участника $(k+1-i)$-й группы увеличится на $i/2$. Напротив, в партиях с игроками $(k+1+i)$-й группы заменим ничьими in проигрышей.

Тогда первое место в турнире займут игроки из первой группы, второе — из второй группы и т. д. Посчитаем число неправильных партий.

Все партии, проигранные игроками из группы $i \leqslant k$, — неправильные. Таких партий $kn^2 - in$ (вспомним, что in партий с игроками из $(k+1)$-й группы сыграны вничью). Далее, игроки из i-й группы при $i > k+1$ проиграли $(2k+1-i)n^2$ неправильных партий. Наконец, игроки из $(k+1)$-й группы проиграли $kn^2 - \frac{k(k+1)n}{2}$ неправильных партий (второе слагаемое соответствует неправильным проигрышам, которые мы заменили на ничьи).

Итак, число неправильных партий равно

$$\sum_{i=1}^{k}(kn^2 - in) + \sum_{i=k+2}^{2k+1}(2k+1-i)n^2 + kn^2 - \frac{k(k+1)}{2}n = \\ = \frac{3k^2+k}{2}n^2 - k(k+1)n.$$

При этом общее число партий равно $\frac{n(2k+1)(n(2k+1)-1)}{2}$. Значит, когда k и n стремятся к бесконечности одновременно, число неправильных партий растет как $\frac{3}{2}k^2n^2$, а число всех партий — как $2k^2n^2$. Тогда их отношение стремится к $\frac{3}{4} > 0{,}7$ (см. факт 27). Поэтому, если взять достаточно большие n и k, это отношение будет больше $70\,\%$. Читатель, который не любит пределов, может просто проверить, что при $n = k = 20$ неправильные партии составляют $\frac{235\,600}{335\,790} > 0{,}7$ от общего числа партий.

6. Будем помещать между плоскостями правильные тетраэдры, расстояние между противоположными ребрами которых равно расстоянию между плоскостями. Пусть одно из ребер каждого тетраэдра лежит в одной из граничных плоскостей, а противоположное ему — в другой. Два тетраэдра можно расположить так, чтобы конец «верхнего» ребра первого совпадал с серединой «верхнего» ребра второго, а середина «нижнего» ребра первого — с концом «нижнего» ребра второго, и при этом как «верхние», так и «нижние» ребра обоих тетраэдров были перпендикулярны.

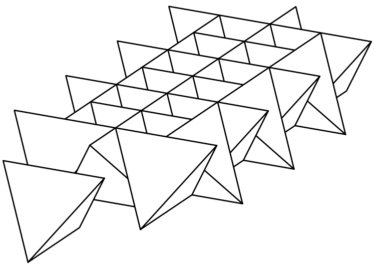


Рис. 129

Распространив этот процесс на весь слой, получим, что каждый тетраэдр окружен четырьмя другими (рис. 129); два из них не позволяют выдвинуть его «вверх», два остальных — «вниз».

2001 год

8 класс

1. Сначала будет закрашен наружный слой клеток, после чего останется прямоугольник 98×198 клеток. Этот прямоугольник также будет закрашиваться по спирали; после закраски его наружного слоя останется прямоугольник 96×196 клеток, и так далее.

Посмотрим, что произойдет после закраски 49 слоев (рис. 130). Будут закрашены верхние 49 строк и нижние 49 строк, значит, незакрашенные клетки будут только в 50-й и 51-й строках. Аналогично, будут закрашены левые 49 столбцов (с номерами 1—49), и правые 49 столбцов (с номерами 152—200). Итак, незакрашенными останутся клетки, расположенные на пересечении столбцов с номерами 50—151 и строк с номерами 50—51 (это прямоугольник 2×102). Последней будет закрашена нижняя левая клетка этого прямоугольника, она расположена в 51-й строке и 50-м столбце.

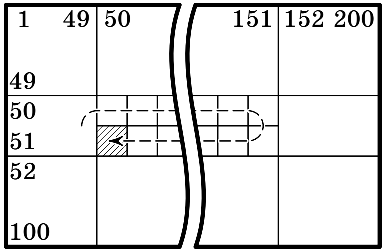


Рис. 130

2. Можно, например, ставить точки на окружности через равные достаточно малые интервалы (как на рис. 131, только меньшие). В каждый момент получившаяся фигура будет иметь ось симметрии. Действительно, если число поставленных точек нечетно, то ось симметрии — диаметр окружности, проходящий через среднюю точку. Если число точек четно, то ось симметрии — диаметр окружности, проходящий через середину средней дуги.

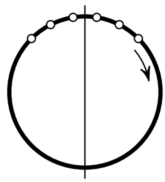


Рис. 131

3. Напишем слова в столбик:

З А Н О З А
З И П У Н Ы
К А З И Н О
К Е Ф А Л Ь
О Т М Е Л Ь
Ш Е Л Е С Т

После всех замен буквы в каждой колонке должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждой колонке сохранить наиболее частую букву (любую из них, если таких букв несколько). Например, в первой колонке можно оставить буквы З или К. В обоих случаях, чтобы получились одинаковые первые буквы, потребуются четыре замены. Во второй колонке тоже понадобится четыре замены. А вот в третьей колонке все буквы разные, так что понадобится пять замен. В последних трех колонках потребуется по четыре замены. Минимальное число замен во всех колонках равно $4+4+5+4+4+4=25$.

Комментарий. Среди слов, которые могут получиться, есть осмысленные, например, ЗЕЛЕНЬ, КАПЕЛЬ или КАФЕЛЬ.

4. Напомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине и, наоборот, если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный (см. факт 14).

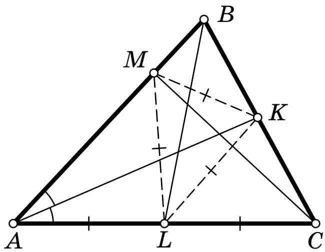


Рис. 132

Медиана ML прямоугольного треугольника AMC равна половине гипотенузы AC, т. е.

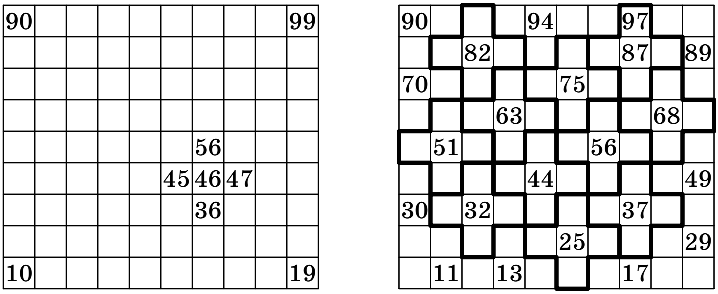
$$ML=AL=LC.$$

По условию, треугольник KLM равносторонний, так что $KL=ML$ (рис. 132). Значит, в треугольнике AKC медиана KL равна половине стороны AC, поэтому угол AKC прямой. Таким образом, в треугольнике ABC биссектриса AK является высотой.

Следовательно, треугольник BAC равнобедренный ($AB=$ $=AC$) и AK является также медианой: $BK=KC$. Значит, MK — медиана прямоугольного треугольника BMC, поэтому $BC=2MK=2KL=AC$. Итак, $AB=BC=AC$, что и требовалось доказать.

5, 6. Расположим двузначные числа в клетках прямоугольника высоты 9 и ширины 10 (по горизонтали откладываем единицы, по вертикали — десятки).

Каждой попытке Гриши соответствует крестик из пяти клеток (рис. 133, *а*): в центре названное им число, а по бокам четыре числа, отличающиеся в одной цифре на единицу (если названное число содержит цифру 0 или 9, некоторые клетки крестика выходят за края прямоугольника; таким клеткам никакие числа не соответствуют). Задача Гриши — покрыть прямоугольник 9×10 такими крестиками. Убедимся, что 22 крестиков ему хватит, а 18 крестиков — нет.



а) *б*)

Рис. 133

Покрытие из 22 крестиков легко найти, если заметить, что крестиками можно выложить плоскость без перекрытий (правда, придется еще добавить несколько крестиков по краям прямоугольника). Например, Гриша может назвать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97 (рис. 133, *б*).

В задаче 6 суммарная площадь крестиков равна $18 \cdot 5 = 90$, т. е. равна площади прямоугольника. Но, покрывая угловую клетку, мы неизбежно выйдем за пределы прямоугольника, и эта потеря помешает покрыть весь прямоугольник.

9 класс

1. Расставим их на одной прямой так, чтобы расстояние между первым и вторым футболистами было 2 м, между вторым и третьим — 3 м, между третьим и четвертым — 1 м (футболисты перечислены в порядке их расположения на прямой, см. рис. 134).

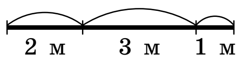


Рис. 134

2. Пусть, например, в каждом регионе все получают одинаковую зарплату и есть регион, в котором живут те самые 10 % работников, которые получают 90 % всей зарплаты.

Приведем конкретный пример. Пусть регионов всего 2. В первом регионе живет 1 тысяча работников, а во втором — 9 тысяч работников. Пусть зарплата каждого работника в первом регионе — x рублей в месяц, а во втором — y рублей в месяц, причем $x > y$. Ясно, что в каждом регионе зарплата любых 10 % работников в точности равна 10 % всей зарплаты (что меньше 11 %).

Ясно, что 10 % самых высокооплачиваемых работников — это тысяча работников, живущих в первом регионе. Их суммарная зарплата — $1000x$. Зарплата всех работников равна $1000x + 9000y$. Значит, 90 % зарплаты всех работников — $900x + 8100y$. Решая уравнение

$$1000x = 900x + 8100y,$$

находим $x = 81y$. Значит, можно взять $y = 1000$ р./месяц, $x = 81\,000$ р./месяц.

3. Первый способ. Рассмотрим на окружности, описанной около треугольника BCM, точку M' диаметрально противоположную точке M (рис. 135). Так как угол, опирающийся на диаметр, прямой (см. факт 14), отрезок BM' перпендикулярен прямой BM, а отрезок $M'C$ перпендикулярен прямой MC. Из равенства углов падения и отражения следует, что BM' — биссектриса угла ABC, а CM' — биссектриса угла BCA. Значит, точка M' — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (напомним, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка — центр вписанной окружности).

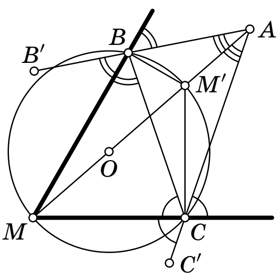


Рис. 135

Пусть B' — точка на продолжении отрезка AB за точку B, а C' — точка на продолжении отрезка AC за точку C. Точка M лежит на пересечении биссектрис углов $B'BC$ и BCC', следовательно, она является центром вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC

(см. факт 16). Поэтому точка M лежит на биссектрисе угла BAC. Значит, весь диаметр MM', включая точку O, лежит на биссектрисе AM угла BAC.

Второй способ. Имеем

$$\angle BMO = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle MOB = \frac{\pi}{2} - \angle BCM.$$

Первое равенство вытекает из того факта, что треугольник MOB равнобедренный, второе равенство следует из теоремы о вписанном угле, ибо $\angle BCM$ — острый. Действительно, в противном случае точка A лежала бы внутри треугольника MBC, но тогда и угол CBM был бы неострым. То есть треугольник MBC имел бы два неострых угла, что невозможно.

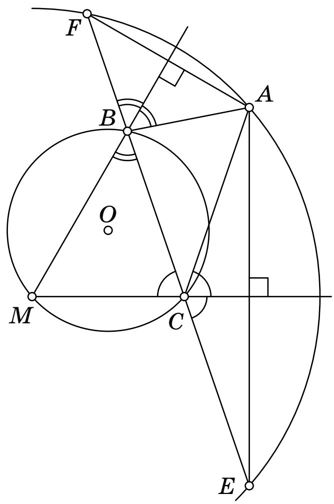


Рис. 136

Рассмотрим точку F, симметричную точке A относительно прямой MB, и точку E симметричную точке A относительно прямой MC (рис. 136). Из соображений симметрии, $MA = MF$, $MA = ME$. Значит, точки E, A и F лежат на окружности с центром в точке M. Из того, что угол падения равен углу отражения, следует, что точки E, C, B и F лежат на одной прямой. Теперь можно вычислить угол BMA:

$$\angle BMA = \frac{1}{2}\angle FMA = \angle AEF = \angle AEC = \frac{\pi}{2} - \angle BCM.$$

Пояснения требует только второе равенство: оно следует из теоремы о вписанном угле. Итак,

$$\angle BMO = \angle BMA.$$

Значит, точки M, O и A лежат на одной прямой.

Комментарий. Математические бильярды — очень интересный раздел математики, в котором имеется много нерешенных задач. См., например, [85].

4. Заметим, что если в некоторый момент количество камней в каждой кучке делится на нечетное число a, то и в дальнейшем во всех получаемых разрешенными действиями кучках количество камней будет делиться на a (см. факты 5 и 9).

После первого хода можно получить три варианта размещения камней: кучки из 100 камней и 5 камней (общий делитель 5), из 56 камней и 49 камней (общий делитель 7), из 51 камня и 54 камней (общий делитель 3). Итак, в первом случае, будут получаться кучки, состоящие из числа камней, кратного 5; во втором — из числа камней, кратного 7; в третьем — из числа камней, кратного 3, так что кучка из одного камня получиться никак не может.

Комментарий. Сравните с задачей 3 для 9 класса олимпиады 1993 г.

5. Заметим, что $\underbrace{999\ldots99}_{k\text{ девяток}}=10^k-1$. Рассмотрим число $N_k=9k\cdot(10^k-1)$ и покажем, что оно удовлетворяет условию задачи. Пусть $9k=\overline{s_1\ldots s_t0\ldots0}$ (здесь $s_t\neq0$, а нулей на конце может и не быть, см. факт 11). Достаточно проверить, что сумма цифр числа N_k равна $9k$. Нетрудно доказать по индукции (см. факт 24), что $9k<10^k$ при любом $k\geqslant1$. Учитывая это обстоятельство, вычислим разность чисел $9k\cdot10^k$ и $9k$ в столбик:

$$\begin{array}{r}
s_1s_2\ldots s_{t-1}\quad s_t\quad \overbrace{0\ldots0\quad 0\quad \ldots\quad 0\quad 0}^{k\text{ нулей}}\quad 0\ldots0\\
-\qquad\qquad\qquad\qquad s_1\quad \ldots\quad s_{t-1}\quad s_t\quad 0\ldots0\\
\hline
s_1s_2\ldots s_{t-1}(s_t-1)9\ldots9(9-s_1)\ldots(9-s_{t-1})(10-s_t)0\ldots0
\end{array}$$

В нижней строчке записано число N_k. Легко видеть, что сумма его цифр равна

$$s_1+\ldots+s_{t-1}+(s_t-1)+\underbrace{9+\ldots+9}_{k-1\text{ девятка}}+10-s_1-\ldots-s_t=9k.$$

Комментарий. Число N_k — единственное число, равное произведению суммы своих цифр на 10^k-1. Действительно, пусть N — такое число; докажем, что $N=N_k$. Пусть десятичная запись числа N состоит из l цифр. Тогда сумма цифр числа N не превосходит $9l$. Так как число N в 10^k-1 раз больше суммы своих цифр, получаем

$$N \leqslant 9l(10^k-1).$$

Так как десятичная запись числа N состоит из l цифр, $N \geqslant 10^{l-1}$. Итак,

$$10^{l-1} \leqslant 9l(10^k-1). \qquad (1)$$

Мы хотим показать, что, за одним исключением, неравенство (1) влечет $l \leqslant 2k$. Нетрудно доказать по индукции, что неравенство $9l < 10^{\frac{l-1}{2}}$ выполняется, начиная с $l=5$. Поэтому при $l \geqslant 5$

$$10^{\frac{l-1}{2}} < \frac{10^{l-1}}{9l} \leqslant 10^k-1,$$

откуда $\dfrac{l-1}{2} < k$, так что $l \leqslant 2k$. Ясно, что при $l=1$ и $l=2$ тоже имеем $l \leqslant 2k$ (так как $k \geqslant 1$). Подставляя $l=4$ в неравенство (1), видим, что неравенство $l \leqslant 2k$ выполняется и при $l=4$. Подставляя $l=3$, видим, что $k=1$, $l=3$ — единственное исключение. Мы оставляем читателю проверку того, что этот случай невозможен (т. е. не существует трехзначных чисел, которые в 9 раз больше суммы своих цифр). Значит, $l \leqslant 2k$.

Разобьем десятичную запись числа N на группы по k цифр, начиная справа (последняя группа может оказаться неполной). Неравенство $l \leqslant 2k$ показывает, что таких групп будет не более двух. Ясно, что их будет ровно 2. Итак,

$$N = 10^k A + B = (10^k-1)A + (A+B),$$

где B — группа из k цифр, A — группа из не более, чем k цифр. Так как N делится на 10^k-1, $A+B$ делится на 10^k-1. Вариант $A=B=10^k-1$ не подходит, значит, $A+B=10^k-1$. Поэтому при сложении A с B никаких переносов произойти не может. Значит, сумма цифр числа N равна $9k$. Итак, $N=9k(10^k-1)=N_k$.

6. Обозначим сумму очков, набранных участником A, через S_A, а его коэффициент силы — через F_A. Рассмотрим сумму $\sum\limits_A S_A F_A$ (сумма берется по всем участникам). Мы утверждаем, что эта сумма равна нулю.

Действительно, определим число $r(A, B)$ следующим образом:

$$r(A, B) = \begin{cases} 1, & \text{если игрок } A \text{ выиграл у игрока } B, \\ 0, & \text{если игроки } A \text{ и } B \text{ сыграли вничью,} \\ -1, & \text{если игрок } A \text{ проиграл игроку } B. \end{cases}$$

Тогда, по определению, $F_A = \sum\limits_{A \neq B} r(A,\, B) S_B$. Значит,

$$\sum_A S_A F_A = \sum_{A \neq B} r(A,\, B) S_A S_B.$$

Приведем подобные члены. Если игроки A и B сыграли вничью, то член $S_A S_B$ входит в эту сумму с коэффициентом нуль. Если A выиграл у B, то член $S_A S_B$ входит дважды: один раз с коэффициентом 1, а другой раз — с коэффициентом -1. Значит, вся сумма равна нулю, как и утверждалось.

Числа S_A неотрицательны, и среди них есть хотя бы одно положительное (на самом деле только одно из этих чисел может быть нулем). Если бы все коэффициенты F_A были положительны, то и сумма $\sum\limits_A S_A F_A$ была бы положительна, а мы только что доказали, что эта сумма равна нулю. Значит, коэффициенты силы у всех участников не могут быть положительными. Аналогично, если бы все коэффициенты силы были отрицательны, то и сумма $\sum\limits_A S_A F_A$ была бы отрицательна.

Комментарий. В математике часто приходится рассматривать выражения типа

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

Такая сумма обращается в нуль, если коэффициенты a_{ij} *кососимметричны*, т. е. $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i и j. Если коэффициенты не кососимметричны, то можно выбрать числа x_i так, что эта сумма не обратится в нуль.

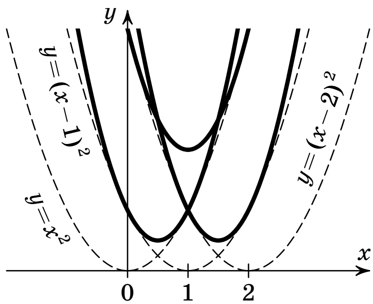


Рис. 137

10 класс

1. Например, таковыми являются трехчлены x^2, $(x-1)^2$ и $(x-2)^2$. Сумма любых двух из них больше нуля при любом x. На рис. 137 изображены графики трехчленов и их сумм.

Комментарий. Сравните с задачей 1 для 11 класса.

2. На рис. 138 показан пример расположения шести часовых, удовлетворяющий условию. Кружочками обозначены часовые, каждая из стрелок указывает направление, в котором смотрит часовой.

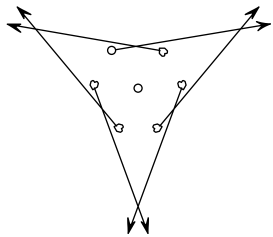


Рис. 138

Комментарий. Пять часовых не удастся так расставить. Действительно, пусть часовые расставлены требуемым образом; рассмотрим точки пересечения «отрезков зрения» часовых. Рассмотрим выпуклую оболочку этих точек. Мы утверждаем, что все часовые находятся внутри этой выпуклой оболочки. Действительно, если это не так, то отделим часового прямой от всех точек пересечения. Пусть враг подкрадывается к часовому из полуплоскости P, в которой нет ни одной точки пересечения отрезков зрения. Если он подходит к отрезку зрения, то он просто обходит его, оставаясь в полуплоскости P (он сможет это сделать, так как этот отрезок не пересекает других отрезков зрения в P).

Ясно, что выпуклая оболочка — многоугольник с не менее, чем тремя вершинами. Каждая вершина — пересечение хотя бы двух отрезков зрения. Мы утверждаем, что каждый часовой участвует в образовании не более чем одной вершины выпуклой оболочки (тогда часовых не менее шести, и все доказано). Действительно, пусть часовой X участвует в образовании вершин A и B выпуклой оболочки, тогда он находится на прямой AB, вне отрезка AB, т. е. вне выпуклой оболочки или на ее границе — противоречие.

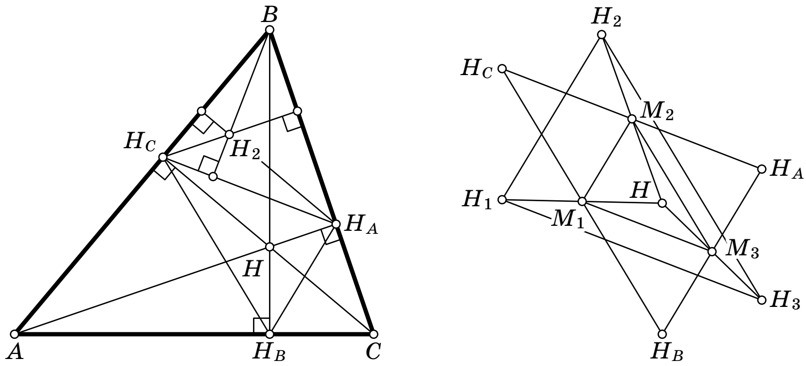
3. Пусть, например, $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2001}+\frac{1}{2}$. Тогда

$$P(1-x)=\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2001}+\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2001}+\frac{1}{2},$$

поэтому $P(x)+P(1-x)=1$.

4. Пусть H_1, H_2, H_3 — ортоцентры (точки пересечения высот) треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B соответственно, H — ортоцентр треугольника ABC, M_1, M_2, M_3 — середины отрезков H_BH_C, H_CH_A и H_AH_B. Покажем, что точка H_i симметрична точке H относительно M_i ($i=1$, 2, 3). Рассмотрим, например, точку H_2. Поскольку $H_CH_2\perp BC$ и $AH\perp BC$, отрезки H_CH_2 и HH_A параллельны (рис. 139, *а*). Аналогично, $H_AH_2\parallel HH_C$. Значит, $H_CH_2H_AH$ — параллелограмм, и точка H_2 симметрична H

относительно середины диагонали H_AH_C. Такие же рассуждения справедливы для точек H_1 и H_3.



а) *б*)

Рис. 139

Получаем конфигурацию, показанную на рис. 139, *б*. Так как M_1M_2 — общая средняя линия треугольников $H_AH_BH_C$ и H_1H_2H, отрезки H_AH_B и H_1H_2 равны. Аналогично доказываются равенства $H_BH_C = H_2H_3$ и $H_AH_C = H_1H_3$. Следовательно, треугольники $H_1H_2H_3$ и $H_AH_BH_C$ равны.

5. Назовем расположение фишек *одноцветным*, если фишки стоят на клетках одного цвета, *разноцветным* — если на клетках разного цвета. Заметим, что при перемещениях фишек одноцветные и разноцветные расположения чередуются. Если бы при перемещениях фишки могли встретиться все расположения по одному разу, то количество разноцветных расположений было бы равно количеству одноцветных, либо отличалось бы от него на единицу. Общее количество разноцветных расположений равно $64 \cdot 32$. Действительно, клетку для черной фишки можно выбрать произвольно, после этого белую фишку можно поставить на любую из 32 клеток другого цвета. Количество одноцветных расположений равно $64 \cdot 31$, поскольку две фишки не могут стоять на одной клетке. Значит, все возможные расположения встретиться не могут.

6. Рассмотрим страну, карта которой изображена на рис. 140 (точки — города, отрезки — дороги). Покажем, что второй армии всегда удастся захватить хотя бы две точки A_i. Действительно, если первая армия первым ходом занимает точку на «ветке» из k точек, вторая армия должна занять соответствующую этой «ветке» точку A_i; если первая занимает A_i, то вторая — B_i; если первая выбирает точку B_i, то вторая — одну из точек A_j, соединенную отрезком с B_i. Дальнейшие действия очевидны.

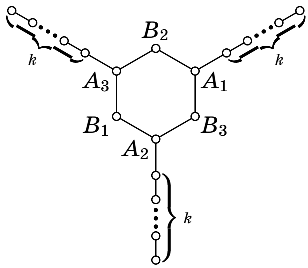


Рис. 140

После прекращения боевых действий вторая армия занимает хотя бы две точки A_i, поэтому она занимает и расположенную между ними точку B_j. Ясно, что первая армия может занимать точки лишь на одной «ветке». Поэтому первая армия занимает не более $k+3$ точек. Вторая армия занимает все остальные города, значит, доля городов, захваченных второй армией, не менее $\dfrac{2k+3}{3k+6}$. Уже при $k=1$ это число больше $1/2$.

Комментарий. В условии задачи вместо $1/2$ можно взять любое число $\alpha<2/3$: при достаточно больших k имеет место неравенство $\dfrac{2k+3}{3k+6}>\alpha$, так как $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k+3}{3k+6}=\dfrac{2}{3}$ (см. факт 27).

11 класс

1. Например, годятся трехчлены $(x-10)^2-1$, x^2-1 и $(x+10)^2-1$. Действительно, $x^2+(x\pm10)^2=2(x\pm5)^2+50\geqslant$ $\geqslant50$ и $(x-10)^2+(x+10)^2=2x^2+200\geqslant200$. Поэтому сумма любых двух трехчленов не обращается в нуль.

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 1 для 10 класса.

2°. Как придумать такой пример? Если взять трехчлены $(x-10)^2$, x^2 и $(x+10)^2$, то каждый из них имеет один корень, а сумма любых двух из них не имеет корней. Однако нам нужно, чтобы каждый из трехчленов имел два корня. Идея состоит в том, чтобы вычесть из каждого из этих трехчленов маленькое число: если число достаточно маленькое, то сумма трехчленов не будет иметь корней, а у каждого из трехчленов появится 2 корня.

2. Пусть a_1, a_2, ..., a_n, ... — данная геометрическая прогрессия, q — ее знаменатель. По условию a_1, $a_{10}=a_1q^9$ и $a_{30}=a_1q^{29}$ — натуральные числа. Поэтому q^9 и q^{29} — положительные рациональные числа. Отсюда следует, что $q^2=\frac{q^{29}}{(q^9)^3}$ — положительное рациональное число и $q=\frac{q^9}{(q^2)^4}$ — также положительное рациональное число.

Пусть $q=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные взаимно простые числа. Число $a_{30}=\frac{a_1m^{29}}{n^{29}}$ натуральное, m^{29} и n^{29} взаимно просты, следовательно, a_1 делится на n^{29} (см. факт 9). Отсюда получаем, что $a_{20}=a_1q^{19}=\frac{a_1m^{19}}{n^{19}}$ — число натуральное.

3. Мы докажем, что прямые IL' и $I'L$ проходят через середину высоты CH. Обозначим через M точку вписанной окружности, диаметрально противоположную точке L, через M' — точку вневписанной окружности, диаметрально противоположную точке L' (рис. 141). Таким образом, ML и $M'L'$ — диаметры вписанной и вневписанной окружностей соответственно; они параллельны высоте CH треугольника ABC. Вписанная окружность переходит во вневписанную при гомотетии с центром в точке C. При этой гомотетии диаметр ML переходит в параллельный ему диаметр $L'M'$. Поэтому точки C, M, L' лежат на одной прямой, и точки C, M', L тоже лежат на одной прямой. Отсюда следует, что треугольники $L'LM$ и $L'HC$ совмещаются гомотетией с центром в точке L'. Поскольку $L'I$ — медиана треугольника $L'LM$, прямая $L'I$ пересекает отрезок CH в его середине. Аналогично, треугольники $LL'M'$ и LHC совмещаются гомотетией с центром в точке L. Поскольку LI'

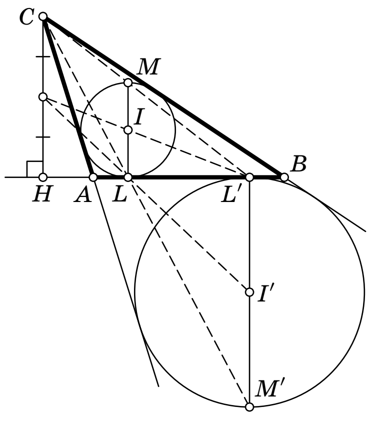


Рис. 141

является медианой в треугольнике $LL'M'$, прямая LI' также пересекает отрезок CH в его середине, откуда следует утверждение задачи.

4. Предположим, что такой многочлен $Q(x)$ существует. Пусть $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где a_0, a_1, ..., a_n — целые неотрицательные числа, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 2$.

Если $a_0 = 0$, то $Q(x) = x(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1)$, следовательно, при простом p число $Q(p)$ делится на p, причем $Q(p) > p$ (здесь используется то, что степень Q не меньше 2), поэтому $Q(p)$ — число составное. Допустим, $a_0 \geqslant 2$. Обозначим через p некоторый простой делитель числа a_0. Тогда $Q(p) = (a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \ldots + a_1)p + a_0$ делится на p, причем $Q(p) > p$; значит, $Q(p)$ — число составное. Таким образом, имеется единственная возможность: $a_0 = 1$.

Если для любого простого p число $Q(p)$ простое, то и число $Q(Q(p))$ является простым при любом простом p. Значит, свободный член многочлена $Q(Q(x))$ должен равняться 1. Однако, поскольку $Q(0) = a_0 = 1$, $Q(Q(0)) = Q(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + 1 > 1$. Мы получили противоречие, завершающее доказательство.

5. Положим $N = 2001$ и опишем построение расположения N выпуклых многогранников, из которых никакие три не пересекаются и любые два касаются.

Рассмотрим бесконечный круговой конус, вершина O которого находится в начале координат, а ось направлена вдоль оси Oz. На окружности, являющейся сечением конуса плоскостью $z = 1$, возьмем точки A_1, A_2, ..., A_N — вершины правильного N-угольника. Обозначим через B_1, B_2, ..., B_N середины меньших дуг A_1A_2, A_2A_3, ..., A_NA_1 соответственно. Через $C(t)$ обозначим круг, являющийся сечением конуса плоскостью $z = t$, через O^t — центр этого круга, через A_i^t, B_i^t — точки пересечения образующих OA_i, OB_i с кругом $C(t)$, где $t > 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Здесь и далее мы будем считать нумерацию точек A_i циклической, т. е., например, $A_{N+1} = A_1$.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть выпуклый многоугольник M лежит внутри круга $C(t_0)$, $t_0 > 0$. Рассмотрим бесконечную вверх* *«призму» P, основанием которой служит многоугольник M, а боковое «ребро» параллельно прямой OB_i для некоторого i. Многоугольник (равный M), который получается при пересечении призмы P и круга $C(t)$, обозначим $M(t)$ (таким образом, $M(t_0)$ совпадает с M). Тогда найдется такое положительное $T > t_0$, что при всех $t > T$ многоугольник $M(t)$ будет содержаться внутри сегмента $S_i(t) = A_i^t B_i^t A_{i+1}^t$ круга $C(t)$.*

Доказательство. Многоугольник $M(t)$ является образом M при параллельном переносе на вектор, параллельный образующей OB_i. Поэтому многоугольник $M(t)$ содержится внутри круга, равного кругу $C(t_0)$, который касается круга $C(t)$ в точке B_i^t. Расстояние от точки B_i^t до прямой $A_i^t A_{i+1}^t$ прямо пропорционально длине образующей OB_i^t; следовательно, найдется такое T, что при всех $t > T$ это расстояние больше диаметра окружности $C(t_0)$ (рис. 142). Это и означает, что многоугольник $M(t)$ попадает внутрь сегмента $S_i(t)$ круга $C(t)$. Лемма доказана.

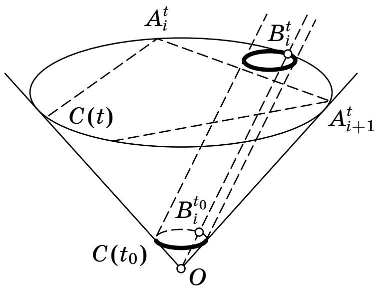


Рис. 142

Переходим к индуктивному построению требуемого расположения (см. факт 24). При каждом n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ мы построим положительные числа $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, выпуклые многоугольники M_1, M_2, $\ldots$, M_n, лежащие внутри кругов $C(t_1)$, $C(t_2)$, $\ldots$, $C(t_n)$, бесконечные «призмы» P_1, P_2, $\ldots$, P_n с основаниями M_1, M_2, $\ldots$, M_n и боковыми «ребрами», параллельными OB_1, OB_2, $\ldots$, OB_n соответственно, причем любые две призмы касаются, и никакие три не имеют общих точек.

Выберем $t_1 > 0$. Возьмем выпуклый многоугольник M_1 внутри круга $C(t_1)$. Рассмотрим бесконечную вверх «призму» P_1, основанием которой служит многоугольник M_1, а боковое «ребро» параллельно прямой OB_1.

Пусть для некоторого n $(1 \leqslant n < N)$ уже определены положительные числа t_1, t_2, $\ldots$, t_{n-1}, выпуклые многоугольники M_1, M_2, $\ldots$, M_{n-1} и «призмы» P_1, P_2, $\ldots$

$\ldots, P_{n-1}$. Согласно лемме существует такое число $t_n > t_{n-1}$, что многоугольник $M_1(t_n)$ содержится внутри сегмента $S_1(t_n)$ круга $C(t_n)$, многоугольник $M_2(t_n)$ содержится внутри сегмента $S_2(t_n)$ круга $C(t_n)$, $\ldots$, многоугольник $M_{n-1}(t_n)$ содержится внутри сегмента $S_{n-1}(t_n)$ круга $C(t_n)$. Сдвинем каждую из прямых $A_i^{t_n}A_{i+1}^{t_n}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ в направлении вектора $O^{t_n}B_i^{t_n}$, пока она не совпадет с прямой $l_i(t_n)$, касающейся многоугольника $M_i(t_n)$. Теперь построим выпуклый многоугольник M_n, который содержится в круге $C(t_n)$, касается каждого многоугольника $M_i(t_n)$ и лежит по разные с ним стороны от прямой $l_i(t_n)$: возьмем для каждого i одну из точек касания многоугольника $M_i(t_n)$ и прямой $l_i(t_n)$; при $n > 3$ эти точки являются вершинами выпуклого $(n-1)$-угольника, который мы и выберем в качестве M_n; при $n = 2$, 3 надо добавить еще несколько точек. Рассмотрим бесконечную вверх «призму» P_n, основанием которой является многоугольник M_n, а боковое «ребро» параллельно прямой OB_n. Построение будет закончено, когда мы получим призмы P_1, P_2, $\ldots$, P_N. Наконец, «срежем» призмы плоскостью $z = T$, где $T > t_N$.

Докажем, что полученные (обычные) призмы удовлетворяют условию задачи. Для этого достаточно показать, что призма P_n пересекается с призмой P_i, $i < n$, только в плоскости круга $C(t_n)$. Пусть, напротив, найдется общая точка $R \in C(t)$ двух призм, где $t > t_n$. Через точку R проведем прямые, параллельные OB_n и OB_i; обозначим их точки пересечения с плоскостью круга $C(t_n)$ через R_n и R_i соответственно. Тогда точка R_n должна принадлежать многоугольнику $M_n(t_n)$, а точка R_i должна принадлежать многоугольнику $M_i(t_n)$. Ненулевые векторы $\overrightarrow{R_iR_n}$ и $\overrightarrow{B_i^{t_n}B_n^{t_n}}$ противоположно направлены, так как

$$\overrightarrow{RR_n} = -(t-t_n)\overrightarrow{OB_n} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{RR_i} = -(t-t_n)\overrightarrow{OB_i}.$$

Однако это невозможно, поскольку точки R_i и $B_i^{t_n}$ лежат по одну сторону от прямой $l_i(t_n)$, а точки R_n и $B_n^{t_n}$ — по другую. Противоречие завершает доказательство.

6. а) Текущее состояние описанной в задаче системы определяется количеством шариков в каждой коробочке и указанием коробочки, с которой нужно начинать раскладывать шарики в следующий раз. Поэтому возможных состояний системы конечное число. Из каждого состояния можно, раскладывая шарики, перейти в другое состояние системы, которое определено однозначно. Наоборот, зная состояние системы в настоящий момент, можно *однозначно* определить состояние системы перед последним раскладыванием шариков. Действительно, последнее раскладывание должно было закончиться на выделенной коробочке; поэтому, чтобы восстановить предыдущее состояние, нужно взять один шарик из выделенной коробочки и далее, идя *против* часовой стрелки, брать по шарику из каждой коробочки, пока это возможно. Когда же мы встретим пустую коробочку, мы положим в нее все собранные шарики и объявим ее отмеченной. (Фактически мы дали описание операции, обратной к ходу, описанному в условии задачи.) Если обозначить состояния системы точками, а возможность перехода из одного состояния в другое — стрелкой, соединяющей соответствующие точки (т. е. построить *ориентированный граф состояний системы*, см. факт 3), то из каждой точки будет выходить ровно одна стрелка и в каждую точку будет входить ровно одна стрелка. Начнем двигаться по стрелкам, начиная с заданного состояния A_1. Получаем последовательность состояний A_2, A_3, ... Поскольку число состояний конечно, в некоторый момент в последовательности $\{A_i\}$ возникнет повторение. Пусть, например, $A_k = A_n$, где $k < n$. Поскольку в точку A_k входит ровно одна стрелка, из равенства $A_k = A_n$ следуют равенства $A_{k-1} = A_{n-1}$, ..., $A_1 = A_{n-k+1}$. Тем самым, через $n-k$ ходов мы вернулись в состояние A_1.

б) В отличие от задачи «а» теперь состояние системы определяется лишь тем, как разложены шарики по коробочкам. В каждый момент возможно несколько ходов, а именно столько, сколько в данный момент имеется непустых коробочек. Нетрудно видеть, что имеется столько же возможностей выполнить обратную операцию, описанную в решении пункта «а». В терминах графа состояний системы это означает, что из каждой точки выходит столько же стрелок, сколько в нее входит.

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *При любом начальном состоянии можно добиться того, чтобы все шарики оказались в одной наперед заданной коробочке X.*

Доказательство. Если при каждой операции брать шарики из непустой коробочки, ближайшей к X при движении против часовой стрелки, то либо число шариков в X увеличится, либо количество шариков в X не изменится, а ближайшая к X непустая коробочка станет еще ближе, что не может продолжаться бесконечно. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если из состояния A можно попасть в состояние B, то из состояния B можно попасть в состояние A.*

Доказательство. Заметим, что если из A в C ведет стрелка, то из C в A тоже можно попасть, двигаясь по стрелкам. Действительно, пройдем по стрелке из A в C, а далее будем действовать как в пункте «а», т. е. на каждом следующем ходе будем брать шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе. Тогда, согласно утверждению пункта «а», повторится начальная ситуация — мы попадем в состояние A. Поэтому если можно попасть из A в B (за несколько ходов), то можно попасть из B в A. Лемма доказана.

Пусть A и B — произвольные состояния. Обозначим через K состояние, при котором все шарики собраны в коробочке X. Согласно лемме 1, можно попасть из A в K. Из лемм 1 и 2 следует, что можно попасть из K в B. Значит, можно попасть из A в B.

2002 год

8 класс

1. Пусть число супружеских пар на острове равно N (замужем N женщин, женаты N мужчин). По условию N замужних женщин составляют $3/5$ всех женщин острова, значит, на острове $5N/3$ женщин. Аналогично, женатые мужчины составляют $2/3$ всех мужчин острова, значит, на острове $3N/2$ мужчин.

Поэтому всего на острове $\frac{5}{3}N+\frac{3}{2}N=\frac{19}{6}N$ жителей, а в браке состоит $2N$ жителей. Итак, искомая доля равна

$$\frac{2N}{19N/6}=\frac{12}{19}.$$

2. Заметим, что $A^2 \leqslant 99^2=9801<9999$. Поэтому сумма цифр числа A^2 меньше, чем $9\cdot 4=36$. Так как она равна квадрату суммы цифр числа A, то сумма цифр числа A меньше, чем $\sqrt{36}=6$.

Но если сумма цифр меньше, чем 6, то она меньше или равна 5. Остается перебрать все двузначные числа, у которых сумма цифр не больше 5 — таких чисел 15: 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50. Нетрудно проверить, что условию задачи удовлетворяют только девять чисел, указанных в ответе.

Комментарий. Возникает естественный вопрос: а как найти все (не только двузначные) числа, удовлетворяющие условию задачи? Простого ответа на этот вопрос автору неизвестно. Можно доказать (попробуйте это сделать), что любое число A, квадрат суммы цифр которого равен сумме цифр числа A^2, обладает следующими свойствами:

— в его десятичной записи могут встречаться только цифры 0, 1, 2 и 3;

— тройки не могут стоять рядом друг с другом и с двойками.

К сожалению, эти условия не являются достаточными: например,

$$222^2=49284,$$

но сумма цифр числа 49284 равна 27 и не совпадает с 6^2.

3. Пусть E — точка касания второй окружности с общей касательной, O — центр первой окружности (рис. 143). Треугольник AOD равнобедренный (потому что AO и OD — радиусы первой окружности), поэтому $\angle ODA=\angle OAD$.

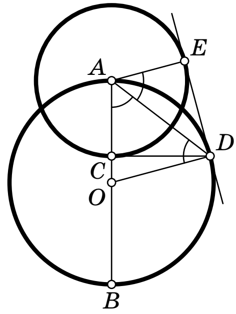


Рис. 143

Как известно, касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Значит, отрезки OD и AE перпендикулярны общей касательной DE. Поэтому $OD \parallel AE$, так что по теореме о внутренних накрест лежащих углах при параллельных прямых $\angle DAE = \angle ODA$. Итак, $\angle DAE = \angle OAD$.

Теперь мы видим, что $\triangle DEA = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними. Действительно, $\angle DAE = \angle OAD$, $EA = AC$ (радиусы!), AD — общая сторона. Значит, $\angle DCA = \angle DEA = 90^\circ$, т. е. прямые DC и AB перпендикулярны.

4. Заметим, что от перестановки горизонталей доски ничего не изменяется. Иными словами, если некоторая позиция является проигрышной для первого, и мы разрежем доску на горизонтали и переставим их, то новая позиция тоже будет проигрышной для первого (а если она была выигрышной для первого, то она останется выигрышной). Это следует из того, что при такой перестановке числа шашек на вертикалях не меняются.

От перестановки вертикалей тоже ничего не меняется.

Пусть первый поставил на доску первую шашку. Переставим горизонтали и вертикали так, чтобы первая шашка оказалась на средней вертикали, но не в центре доски. Далее второй игрок должен делать ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. Тогда вторая шашка тоже окажется на средней вертикали, и первый не сможет занять центральную клетку.

Легко проверить, что второй всегда сможет сделать симметричный ход. Действительно, после каждого хода второго расстановка шашек симметрична относительно центра доски. Значит, на средней горизонтали стоит либо 0, либо 2 шашки (напомним, что центр не может быть занят!). Если там стоит 0 шашек, то первый может сделать ход на среднюю горизонталь (но не в центр!). Ясно, что второй сможет ответить симметричным ходом.

На среднюю вертикаль первый пойти не может. Осталось рассмотреть случай, когда он ставит шашку в клетку, не лежащую ни на средней горизонтали, ни на средней вертикали. Его ход не изменяет количества шашек на горизонтали и вертикали, содержащих симметричную клетку, поэтому второй может поставить туда шашку.

Комментарий. Игра всегда заканчивается либо после 129, либо после 130 ходов. Действительно, пусть сделано не более 128 ходов. Тогда по принципу Дирихле (см. факт 1) либо найдется пустая горизонталь, либо две горизонтали с одной шашкой. В первом случае можно поставить шашку на пересечении пустой горизонтали и любой вертикали, на которой стоит не более одной шашки. Во втором случае выберем вертикаль с не более чем одной шашкой, и рассмотрим ее пересечение с каждой из этих двух горизонталей. Ясно, что хотя бы одна из этих двух клеток пуста, и в нее можно поставить шашку.

130-й ход можно сделать не всегда: после 129 ходов есть одна вертикаль с одной шашкой, и одна горизонталь с одной шашкой (остальные вертикали и горизонтали содержат по две шашки). Казалось бы, можно поставить шашку на пересечение, но на пересечении шашка может уже стоять — и в этом случае выиграет первый.

После 128-го хода возможны четыре ситуации: 1) свободная горизонталь и свободная вертикаль; 2) две вертикали с одной фишкой и свободная горизонталь; 3) две горизонтали с одной фишкой и свободная вертикаль; 4) две вертикали с одной фишкой и две горизонтали с одной фишкой. Нетрудно видеть, что при стратегии, приведенной в решении, возможны только вторая и последняя ситуации. Во второй ситуации всегда выигрывает второй. В последней ситуации рассмотрим клетки A, B, C и D на пересечении вертикалей с одной фишкой и горизонталей с одной фишкой (рис. 144). В некоторых из них уже могут стоять фишки. Например, если в A фишка стоит, а в D — нет, то первый может пойти в D и выиграть. Однако, при нашей стратегии это невозможно: либо все клетки свободны, либо заняты две клетки, расположенные по диагонали (A и D или B и C). Нетрудно видеть, что в каждом из этих вариантов второй сможет сделать 130-й ход (и выиграть).

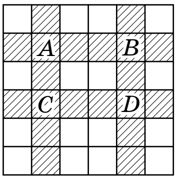


Рис. 144

5. Первый способ. Проведем в треугольнике AMB медианы AF и BG и обозначим через N точку их пересечения (рис. 145). Известно, что точка пересечения медиан делит их в отношении $1:2$. Поэтому

$$MF=\frac{1}{2}MB=ME,$$

так как M — точка пересечения медиан треугольника ABC. В пункте «а» прямоугольные треугольники AME и AMF равны, так что $AF=AE$. В пункте «б» основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BE, лежит на луче MB, значит, $AF<AE$.

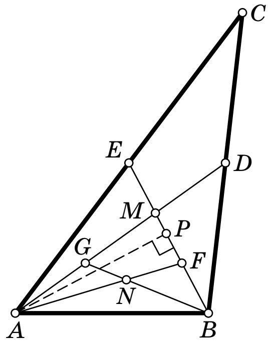


Рис. 145

Приведем подробное доказательство. Пусть P — основание перпендикуляра. Так как P лежит на луче MB и M — середина отрезка EF, получаем $PF < PE$. По теореме Пифагора

$$AF = \sqrt{AP^2 + PF^2} < \sqrt{AP^2 + PE^2} = AE.$$

Итак, в любом случае $AF \leqslant AE$. Значит,

$$AN = \frac{2}{3}AF \leqslant \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AC$$

(так как N — точка пересечения медиан треугольника ABM).

Аналогично доказывается, что $BN \leqslant \frac{1}{3}BC$. Используя неравенство треугольника для треугольника ANB, получаем:

$$AC + BC \geqslant 3(AN + BN) > 3AB.$$

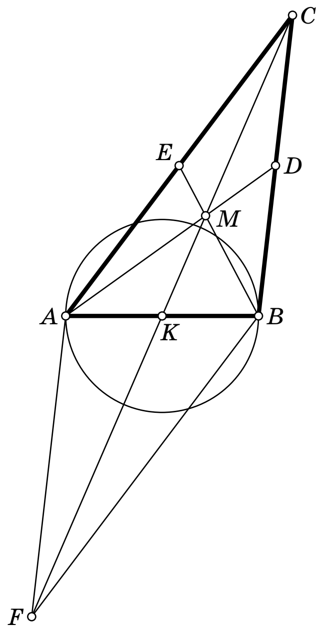


Рис. 146

Второй способ. Проведем медиану CK и продолжим ее на отрезок той же длины, получим точку F такую, что $KF = CK$ (рис. 146). Четырехугольник $ACBF$ — параллелограмм. Из треугольника ACF имеем: $AC + AF > FC = 2CK$, значит, $AC + BC > 2CK$.

Построим на стороне AB как на диаметре окружность. Поскольку угол AMB не тупой, точка M не лежит внутри этой окружности (см. факт 14). Значит, $MK \geqslant AK = \frac{1}{2}AB$. Но $CK = 3MK$, так как медианы делятся точкой пересечения в отношении $1:2$. Поэтому

$$AC + BC > 2CK = 6MK \geqslant 3AB.$$

6. Рассмотрим сначала случай прямоугольника $1 \times n$. При $n = 2$ и $n \geqslant 4$ вечно живые расстановки в прямоугольнике $1 \times n$ существуют: каждая из расстановок на рис. 147 имеет период 2, т. е. каждую вторую минуту возвращается в исходное состояние. Четыре случая на рисунке соответствуют различным остаткам от деления числа n на 4 (см. факт 7). Выделенная часть $\boxtimes\boxed{\bigcirc}\boxed{\bigcirc}\boxtimes$ является повторяющейся, т. е., чтобы получить картинку для большего n, достаточно увеличить количество таких частей (символ $\boxtimes$ соответствует живой клетке, символ $\boxed{\bigcirc}$ — мертвой).

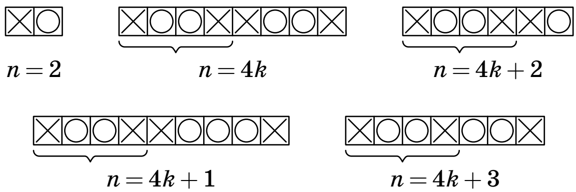


Рис. 147

Заметим, что при $n=4k+1$ имеется одна «вечно мертвая» клетка, а при остальных n каждая клетка последовательно оживает и умирает.

Пусть для некоторого n в прямоугольнике $1\times n$ существует вечно живая расстановка. Тогда такая расстановка существует и во всех прямоугольниках $m\times n$.

Строится она так: берем вечно живую расстановку в прямоугольнике $1\times n$ и копируем ее во все строки прямоугольника $m\times n$. Тогда в нем столбцы будут эволюционировать так же, как клетки в соответствующем столбце прямоугольника $1\times n$. Действительно, все клетки живого столбца умирают, как и соответствующая клетка прямоугольника $1\times n$. У каждой клетки мертвого столбца соседи сверху и снизу мертвы, поэтому количество ее живых соседей равно количеству живых соседних столбцов, а значит, и количеству живых соседей у соответствующей клетки в «полоске» $1\times n$. Значит, мертвый столбец оживает в том и только том случае, когда оживает соответствующая клетка в полоске.

Поскольку в полоске всегда остается хотя бы одна живая клетка, то в построенной расстановке для прямоугольника $m\times n$ тоже всегда остается хотя бы один живой столбец.

Мы можем считать, что $m\leqslant n$ (иначе повернем прямоугольник на 90°). Если $n\geqslant 4$ или $n=2$, то, по доказанному, вечно живая расстановка найдется. Остается рассмотреть прямоугольники 1×1, 1×3 и 3×3.

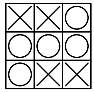
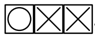
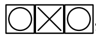


Рис. 148

В прямоугольнике 3×3 также есть вечно живая расстановка (тоже периода 2), см. рис. 148.

Осталось доказать, что в прямоугольниках 1×1 и 1×3 любая расстановка рано или поздно умрет. Случай 1×1 очевиден. Для случая 1×3 можно считать (возможно, начиная отсчет со второго шага), что первая клетка мертва. Тогда остается 3 варианта, в которых есть хотя бы одна живая клетка: , , . Проверку этих вариантов мы оставляем читателю.

9 класс

1. Договоримся в случае, когда сержант стоит в строю, обозначать буквой m количество человек, стоящих в строю слева от сержанта к нему лицом, а буквой n — количество человек, стоящих справа от сержанта к нему лицом.

Пусть сначала сержант встанет в левый край шеренги. Тогда слева от него никого не будет ($m=0$). Если и справа от сержанта никто не будет стоять к нему лицом ($n=0$), то задача решена. В противном случае ($n>0$) пусть сержант идет слева направо от человека к человеку. Если он проходит мимо новобранца, стоявшего к нему спиной, то число m увеличивается на 1, а число n не изменяется. Если сержант проходит мимо новобранца, стоявшего к нему лицом, то число n уменьшается на 1, а число m не изменяется. Если же он проходит мимо новобранца, повернувшегося кругом, то оба числа m и n остаются без изменений.

Посмотрим, что происходит с числом $m-n$. Сначала оно отрицательно, а в процессе движения сержанта вдоль строя может изменяться только на единицу. Но когда сержант дойдет до правого края, уже число n будет нулевым, а значит, число $m-n$ будет неотрицательным. Итак, начав с отрицательного числа $m-n$ и несколько раз прибавляя и вычитая по единице, мы получили неотрицательное число. Значит, в какой-то момент мы должны были получить нуль. В этот момент $m=n$, и с обеих сторон от сержанта находилось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом.

2. Первый способ. По неравенству треугольника $a+b>c$. Кроме того, для любых неотрицательных a и b выполняется неравенство $a^2-ab+b^2\geqslant 0$. Действительно,

$$a^2-ab+b^2\geqslant a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqslant 0.$$

Поэтому

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant c(a^2-ab+b^2).$$

Отсюда получаем:

$$a^3+b^3+3abc=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc\geqslant$$
$$\geqslant c(a^2-ab+b^2)+3abc=c(a^2+2ab+b^2)=c(a+b)^2>c^3.$$

Второй способ. Пусть $d=c-b$, тогда $d+b=c$ (d может быть отрицательным). По неравенству треугольника $a>d$. Получаем:

$$a^3+b^3+3abc>d^3+b^3+3dbc=d^3+b^3+3bd(d+b)=$$
$$=d^3+3d^2b+3db^2+b^3=(d+b)^3=c^3.$$

Комментарий. Неравенство $a^2-ab+b^2\geqslant 0$ выполняется для любых чисел. Докажите это сами.

3. Отразим симметрично треугольник ABC относительно прямой DE (рис. 149). По свойству вписанных углов

$$\angle AED=\angle ACD=\angle BCD=\angle BED$$

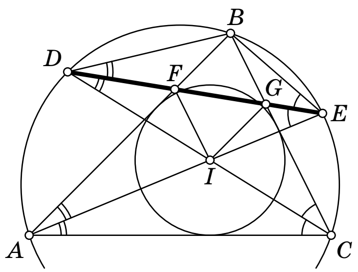


Рис. 149

(второе равенство верно, потому что CD — биссектриса угла ACB). Поэтому прямая AE при этом отражении перейдет в прямую BE, аналогично, прямая CD при отражении перейдет в прямую BD. Тогда точка пересечения прямых AE и CD, т. е. точка I, перейдет при отражении в точку пересечения прямых BE и BD, т. е. в точку B. Таким образом, треугольник IFG перейдет при отражении в треугольник BFG, откуда $IF=BF$, $IG=BG$, и прямая BI перпендикулярна DE. Но луч BI — биссектриса угла FBG, значит, в треугольнике FBG высота является биссектрисой. Поэтому этот треугольник равнобедренный, $FB = BG$.

Итак, все стороны четырехугольника $BFIG$ равны, значит, этот четырехугольник — ромб.

4. Если (x, y) — решение уравнения $x^4 - 2y^2 = 1$, то $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ тоже решения. Поэтому будем искать только неотрицательные решения. Ясно, что x — нечетное число, $x = 2t + 1$. Перепишем уравнение в виде

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = 2t \cdot (2t+2) \cdot (4t^2 + 4t + 2) = 2y^2.$$

Теперь видно, что y — четное число, $y = 2u$. Деля обе части уравнения на 8, получаем уравнение

$$t(t+1)(2t(t+1)+1) = u^2.$$

Нетрудно проверить, что числа t, $t+1$ и $2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты. Действительно, пусть, например,

$$d \mid t+1 \quad \text{и} \quad d \mid 2t(t+1)+1,$$

тогда d делит и $2t(t+1)$, а, значит, и разность

$$1 = (2t(t+1)+1) - (2t(t+1))$$

(см. факт 5). Взаимная простота двух остальных пар доказывается аналогично.

Произведение этих взаимно простых чисел — полный квадрат. Согласно известной теореме (см. комментарий), каждое из них также является полным квадратом.

Итак, t и $t+1$ — полные квадраты. Это возможно только при $t = 0$. Действительно, если $t = \alpha^2$, $t+1 = \beta^2$, где $\beta \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, то

$$(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 1,$$

поэтому $\beta - \alpha = 1$, $\beta + \alpha = 1$, так что $\alpha = 0$, следовательно, $t = 0$. Тогда и $u = 0$. Значит, $x = \pm 1$, $y = 0$.

Комментарий. Приведем подробное доказательство использованного утверждения. Рассмотрим сначала случай двух сомножителей.

Теорема. *Если $ab = d^2$, a, b и d — натуральные числа, и числа a и b взаимно просты, то a и b — точные квадраты.*

Запишем разложения чисел a, b и d на простые множители:

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}, \quad b = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_l^{m_l}, \quad d = r_1^{t_1} r_2^{t_2} \ldots r_u^{t_u}.$$

Здесь p_i — попарно различные простые числа, q_i — попарно различные простые числа, и r_i — попарно различные простые числа (см. факт 10).

Так как числа a и b взаимно просты, ни одно из чисел p_i не равно ни одному из чисел q_j. Значит,

$$ab = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_l^{m_l}$$

— разложение числа ab на попарно различные простые множители. С другой стороны,

$$d^2 = r_1^{2t_1} r_2^{2t_2} \ldots r_u^{2t_u}$$

— разложение числа d^2 на попарно различные простые множители. В силу теоремы о единственности разложения, эти разложения могут отличаться лишь порядком сомножителей. Значит, числа n_i — это некоторые из чисел $2t_j$. Поэтому все n_i четны, но тогда a есть произведение простых чисел в четных степенях, а значит, является точным квадратом. Аналогично доказывается, что b является точным квадратом. Теорема доказана.

Пусть теперь a, b и c попарно взаимно простые числа, и $abc = d^2$. Нетрудно видеть, что числа a и bc взаимно просты (предположите, что они имеют простой общий делитель p и используйте факт 9). Применяя нашу теорему к числам a и bc, видим, что каждое из них является точным квадратом. Аналогично доказывается, что числа b и c — точные квадраты.

5. См. решение задачи 6 для 8 класса, где данной задаче соответствует случай прямоугольников $1 \times n$ (горящие лампочки соответствуют живым клеткам).

6. Заметим сначала, что все получающиеся многоугольники будут выпуклыми. Докажем индукцией по количеству имеющихся частей (см. факт 24) следующее утверждение: *после каждого разрезания найдется часть* (*многоугольник*) *хотя бы с тремя нетупыми углами.*

База индукции. Сначала есть одна часть, и это треугольник с тремя острыми углами.

Шаг индукции. Пусть на очередном шаге имеется многоугольник M хотя бы с тремя нетупыми углами, и мы делаем очередное разрезание.

Если мы режем не многоугольник M, то шаг индукции очевиден. Пусть мы разрезали M по прямой на две части. Обозначим точки пересечения этой прямой с многоугольником M буквами A и B.

Если точка A лежит внутри одной из сторон многоугольника M, то линия разреза образует с этой стороной два смежных угла, по крайней мере один из которых — не тупой. Если же точка A — вершина многоугольника, то соответствующий ей угол многоугольника разбивается разрезом на два угла, сумма которых меньше 180° (так как многоугольник M — выпуклый). Значит, тем более один из них не тупой. Если при этом угол A сам не был тупым, то, очевидно, оба получившихся угла также не тупые. Таким образом, после разреза к точке A примыкает больше нетупых углов (по крайней мере, на единицу). Аналогичные рассуждения про второй конец разреза B показывают, что дополнительный нетупой угол появляется и там.

По предположению индукции многоугольник M имел не менее трех нетупых углов. Поэтому после разрезания у двух получившихся многоугольников таких углов в сумме не менее пяти. Следовательно, согласно принципу Дирихле (см. факт 1) по крайней мере в одном из них нетупых углов не менее трех. Шаг индукции доказан.

Тем самым утверждение доказано. Значит, после того, как исходный треугольник распадется на треугольники, хотя бы у одного из них будет не меньше трех нетупых углов, т. е. все углы этого треугольника будут нетупыми.

10 класс

1. Первый способ. Обозначим углы треугольника через α, β, γ ($\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$). Так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, имеет место неравенство $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$, поэтому $0<\operatorname{tg}\alpha\leqslant\sqrt{3}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha$ — натуральное число, то он равен 1, $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Тогда $\beta+\gamma=\frac{3\pi}{4}$, откуда

$$-1=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\operatorname{tg}\beta-1)(\operatorname{tg}\gamma-1)=2.$$

Число 2 простое, поэтому выражение в одной скобке равно 1, а в другой 2 (случай, когда одно из выражений равно -1, а другое -2, как легко видеть, невозможен). Отсюда получаем: $\operatorname{tg}\beta=2$, $\operatorname{tg}\gamma=3$.

Второй способ. Нарисуем на клетчатой бумаге треугольник ABC, как показано на рис. 150. Подсчетом клеточек легко убедиться, что $\operatorname{tg}\angle BAC = 3$, $\operatorname{tg}\angle ACB = 2$. Отметим теперь на рисунке точки H и D. Опять-таки из подсчета клеточек следует, что $ADBH$ — ромб с равными диагоналями, т. е. квадрат. Поэтому $\angle ABC = \pi/4$, а $\operatorname{tg}\angle ABC = 1$. Итак, нарисованный треугольник удовлетворяет условию.

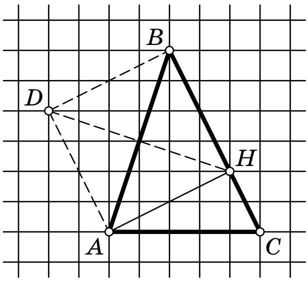


Рис. 150

Покажем, что других значений тангенсов быть не может. Как было доказано (см. первый способ решения), наименьший из углов треугольника обязательно равен $\pi/4$. При этом остальные углы строго больше: если бы второй угол также равнялся $\pi/4$, то третий угол был бы равен $\pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, и его тангенс был бы не определен. Таким образом, один из тангенсов равен 1, а два остальных — больше 1 (так как тангенс возрастает на полуинтервале $[0; \pi/2)$).

Поскольку сумма углов треугольника равна π, нельзя изменить значение тангенса одного угла, не меняя значений остальных двух. Значит, кроме варианта 1, 2, 3 осталось рассмотреть вариант 1, m, n, где $m > 2$, $n > 3$. В этом случае пришлось бы увеличить два угла треугольника ABC, оставив третий без изменений, что невозможно по той же теореме о сумме углов треугольника. Итак, вариант на рисунке — единственный.

2. Умножая неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c$$

на общий знаменатель, получаем равносильное неравенство

$$bc + ac + ab \geqslant (a + b + c)abc.$$

Теперь докажем вспомогательное неравенство (верное при всех a, b и c)

$$(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ac).$$

Начнем с известного неравенства (см. комментарий)

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \geqslant 3(ab+bc+ac) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac).$$

Отсюда легко получить требуемое неравенство:

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac) \geqslant 3(a+b+c)abc,$$
$$a+b+c \geqslant 3abc.$$

Комментарий. Использованное неравенство доказывается просто. Имеем (см. факт 26):

$$2ab \leqslant a^2+b^2, \quad 2bc \leqslant b^2+c^2, \quad 2ac \leqslant a^2+c^2.$$

Достаточно сложить все три неравенства и разделить получившееся неравенство на два.

3. Пусть площади треугольников равны n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Тогда площадь четырехугольника $ABCD$ составляет $4n+6$. Нетрудно видеть, что площадь треугольника BCD в четыре раза больше площади треугольника ECF, поэтому эта площадь не меньше $4n$. Значит,

$$S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BCD} \leqslant (4n+6) - 4n = 6.$$

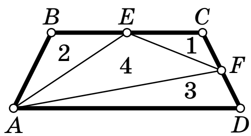


Рис. 151

Равенство достигается, если треугольник ECF имеет наименьшую площадь из указанных четырех треугольников.

Осталось доказать, что значение 6 является возможным. Примером служит равнобедренная трапеция с основаниями $AD=6$, $BC=4$ и высотой 2 (числа на рис. 151 обозначают площади треугольников).

Комментарий. Нетрудно видеть, что площадь треугольника ABD всегда равна либо 2, либо 6.

4. Занумеруем всех зрителей номерами их билетов $1, \ldots, n$. Пусть, для определенности, самое правое место имеет номер n, а самое левое — номер 1. Мы сведем задачу к той же задаче с меньшим числом зрителей, пересадив зрителя n на свое место.

Пусть билетер действует следующим образом. Он пересаживает зрителя n вправо, если его правый сосед при этом не садится на свое место. Если зрителя n не удается пересадить правее места k, то на $(k+1)$-м месте сидит зритель k. Выберем наибольшее m такое, что зрители с номерами k, $k+1$, $\ldots$, $k+m-1$ сидят на местах $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $k+m$ соответственно. Возможны два случая: $k+m<n$ или $k+m=n$.

В первом случае на $(k+m+1)$-м месте сидит зритель j, $j\neq k+m$. Ясно, что $j\neq k+m-1$, $j\neq k+m-2$, $\ldots$, $j\neq k+1$.

Поэтому можно пересадить зрителя j налево, потом еще раз налево и т. д., пока он не поменяется местами со зрителем n. В результате билетеру удастся пересадить зрителя n на одно место правее, причем все зрители слева от n сидят на чужих местах. Билетер может повторять эту процедуру до тех пор, пока не произойдет одно из двух: зритель n окажется на своем месте или встретится второй случай ($k+m=n$).

Во втором случае билетер может рассадить по своим местам зрителей k, $k+1$, $\ldots$, n, пересаживая зрителя n вправо до его места.

Таким образом, несколько зрителей в правом конце ряда будут сидеть на своих местах, а остальные — нет. Мы свели задачу к исходной с меньшим числом зрителей.

5. а) Остап не мог занять последнее, 2002-е место в первом туре, поскольку иначе он сразу же выбыл бы из числа кандидатов. Поэтому $k\leqslant 2001$.

Пусть все кандидаты в первом туре набрали почти поровну, Остап занял предпоследнее место и в каждом следующем туре получал все голоса выбывшего кандидата. Тогда Остап победит в тот момент, когда количество выбывших кандидатов достигнет половины. Это случится как раз в 1002-м туре.

Выполним точный подсчет в случае, когда кандидаты в первом туре набрали 10^6, 10^6+1, $\ldots$, 10^6+2001 голос. Тогда в 1001-м туре у Остапа еще меньше половины голосов, а именно: голоса всех кандидатов, занявших последние 1001 место в первом туре. Однако в 1002-м туре у него уже более половины всех голосов. Действительно, в 1002-м туре у Остапа

$$10^6 + (10^6 + 1) + \ldots + (10^6 + 1001) = 1002 \cdot 10^6 + \frac{1001 \cdot 1002}{2} = \\ = 1002 \cdot 10^6 + 1001 \cdot 501 = 1\,002\,501\,501$$

голосов, а всего избирателей

$$10^6 + (10^6 + 1) + \ldots + (10^6 + 2001) = 2002 \cdot 10^6 + \frac{2001 \cdot 2002}{2} = \\ = 2002 \cdot 10^6 + 2001 \cdot 1001 = 2\,004\,003\,001.$$

Нетрудно проверить, что это меньше удвоенного числа голосов Остапа.

б) Предположим, что $k > 1$. Тех, кто выбыл в первой тысяче туров, назовем *аутсайдерами*, а всех остальных кандидатов, кроме Остапа, — *лидерами*. Кандидата, занявшего первое место в первом туре, назовем *фаворитом*. Поскольку число аутсайдеров 1000, а лидеров 1001, то один из лидеров не получал голосов аутсайдеров. В первом туре (и позже) он имел больше голосов, чем любой аутсайдер (так как в конечном счете выбыл аутсайдер, а не этот лидер). Значит, фаворит тоже имел в первом туре больше голосов, чем любой аутсайдер. Поэтому фаворит является лидером.

Максимальное число голосов, которое Остап мог собрать к 1001-му туру, — это все голоса аутсайдеров на момент вылета каждого из них и голоса первоначальных избирателей Остапа. Любой из лидеров в любом из первой тысячи туров (а тем более в 1001-м) имеет больше голосов, чем аутсайдер этого тура. Фаворит заведомо имеет больше, чем имел Остап в первом туре. Поэтому лидеры и фаворит в сумме имеют в 1001-м туре больше голосов, чем Остап, и он не может стать победителем.

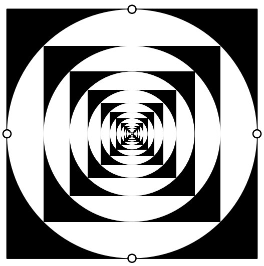
Комментарии. 1°. Дополнительный вопрос: изменится ли ответ в задаче, если голоса выбывшего кандидата произвольно делятся между оставшимися?

2°. Заметим, что в пункте «а» получается очень большой город (в нем более двух миллиардов избирателей). Интересно понять, как ответ зависит от количества избирателей. Заметим, что из условия следует, что в городе не менее, чем

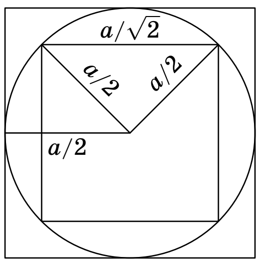
$$0 + 1 + \ldots + 2001 = 2003001$$

избирателей — иначе количество голосов у всех кандидатов не могло бы быть разным.

6. Рассмотрим такую раскраску квадрата: впишем круг в квадрат и покрасим в черный цвет точки квадрата, лежащие вне круга; впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Покрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне «маленького» квадрата. По такому же правилу раскрасим маленький квадрат и т. д. (рис. 152, *а*). Заметим, что мы считаем граничные точки лежащими «внутри» фигуры. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена черным, за исключением четырех точек касания вписанного в квадрат круга, а граница каждого круга — белым, за исключением четырех вершин квадрата, вписанного в этот круг.



а)



б)

Рис. 152

Пусть сторона исходного квадрата равна a, тогда сторона маленького квадрата равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, длины сторон квадратов стремятся к 0 (см. факт 27). Поэтому все точки, кроме центра, будут покрашены. Центр покрасим в черный цвет.

Очевидно, что множество черных точек квадрата подобно множеству черных точек круга, вписанного в этот квадрат (второе получается из первого гомотетией с центром в центре квадрата и с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$). А множество белых точек квадрата просто совпадает с множеством белых точек вписанного в него круга (рис. 152, *б*).

Комментарии. 1°. Аналогичная конструкция используется в доказательстве знаменитой теоремы Кантора—Бернштейна (см., например, [71], § 1.5, или [36], § 10).

2°. Множества точек каждого цвета получаются при помощи бесконечного процесса и мало похожи на «фигуры». Оказывается, если резать фигуры на «плохие» множества, то встречаются разные неожиданности: например, шар можно разрезать на части, из которых можно сложить два шара того же радиуса. По этому поводу см. [36], § 10.

11 класс

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. Пусть $t>0$. Тогда точка B с координатами $(t,\,c)$, где $c=t^3+t+1$, лежит на графике функции $y=x^3+|x|+1$.

Точка A с координатами $(\sqrt[3]{c},\,c)$ лежит на графике функции $y=x^3$. Покажем, что при достаточно большом t расстояние между точками A и B не превосходит $\frac{1}{100}$. Нетрудно видеть, что это расстояние равно $\sqrt[3]{c}-t$. Обозначим его через r, тогда $(t+r)^3=c$, так что

$$3t^2r+3tr^2+r^3=t+1,$$

откуда $3t^2r<t+1$, а значит,

$$r<\frac{t+1}{3t^2}.$$

Осталось взять такое t, чтобы выполнялось неравенство $\frac{t+1}{3t^2}<\frac{1}{100}$. Годится любое достаточно большое t (см. факт 27), например, можно взять $t=100$:

$$\frac{t+1}{3t^2}=\frac{101}{3\cdot100\cdot100}<\frac{1}{100}.$$

Комментарий. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена степени $n\geqslant 2$ с одинаковыми членами степени n и одинаковыми членами степени $n-1$:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\text{члены меньшей степени},$$
$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\text{члены меньшей степени}.$$

Будем считать, что $a_n>0$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \quad\text{и}\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty.$$

Пусть $\varphi(y)$ определяется условием $f(\varphi(y))=y$. Для достаточно большого y функция $\varphi(y)$ существует и единственна (если вы знакомы с математическим анализом, то попытайтесь доказать это утверждение). Аналогично определим $\psi(y)$ условием $g(\psi(y))=y$. Тогда точки

$$(\varphi(y),\,y) \quad\text{и}\quad (\psi(y),\,y)$$

лежат на графиках функций f и g соответственно, и расстояние между ними равно $|\varphi(y)-\psi(y)|$. Мы утверждаем, что

$$\lim_{y\to+\infty}|\varphi(y)-\psi(y)|=0.$$

Действительно, переобозначив при необходимости многочлены f и g, можно считать, что для достаточно больших x выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$. Тогда $\psi(y) \geqslant \varphi(y)$. Пусть $h(x) = f(x) - g(x)$. Это многочлен степени не выше $n-2$. Имеем:

$$h(\varphi(y)) = f(\varphi(y)) - g(\psi(y)) + g(\psi(y)) - g(\varphi(y)) = \\ = g(\psi(y)) - g(\varphi(y)) = (\psi(y) - \varphi(y))g'(\vartheta),$$

где $\psi(y) \geqslant \vartheta \geqslant \varphi(y)$, g' — производная функции g (последнее равенство — это теорема Лагранжа о конечных приращениях).

Функция $g'(x)$ монотонно возрастает на луче $(C; +\infty)$ при некотором C. Значит, для достаточно больших x

$$\psi(y) - \varphi(y) = \frac{h(\varphi(y))}{g'(\vartheta)} \leqslant \frac{h(\varphi(y))}{g'(\varphi(y)}.$$

Осталось заметить, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h(t)}{g'(t)} = 0,$$

так как степень многочлена h не превосходит $n-2$, а степень многочлена g' равна $n-1$. Можете попытаться доказать, что в случае, когда коэффициенты при x^{n-1} у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не равны (и равны a_{n-1} и b_{n-1}), искомый предел равен

$$\frac{|a_{n-1} - b_{n-1}|}{na_n}.$$

В качестве учебника по математическому анализу мы порекомендуем читателю [75].

3. См. решение задачи 4 для 10 класса.

4. Обозначим n-й член последовательности через a_n, а сумму первых n членов через S_n. Пусть частное от деления S_{n-1} на a_n равно k_n, т. е. $S_{n-1} = a_n k_n$. По условию k_n — натуральное число при $n \geqslant 2002$.

Так как $a_{n+1} > a_n$, получаем

$$k_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n-1} + a_n}{a_{n+1}} < \frac{S_{n-1} + a_n}{a_n} = k_n + 1.$$

Значит, $k_{n+1} \leqslant k_n$ (при $n \geqslant 2002$), так как k_n и k_{n+1} — натуральные числа.

Итак, последовательность частных k_n не возрастает, начиная с $n = 2002$. Но невозрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел стабилизируется: начиная с некоторого места все ее члены равны. Пусть все они равны числу k, т. е., начиная с некоторого N, имеет место равенство $k_n = k$.

Но тогда при $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1} = \frac{S_{n-1}+a_n}{k} = a_n + \frac{a_n}{k}$, т. е. с этого места последовательность a_n является геометрической прогрессией:

$$a_n = \frac{k+1}{k} a_{n-1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 a_{n-2} = \ldots = \frac{(k+1)^{n-N}}{k^{n-N}} a_N.$$

Получаем, что k^{n-N} делит произведение $(k+1)^{n-N}a_N$. Ясно, что k^{n-N} взаимно просто с первым сомножителем, значит, k^{n-N} делит a_N (см. факт 9). Но это верно при сколь угодно большом n, так что $k=1$, что и требовалось доказать.

5. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC, а через r — ее радиус. Пусть $\angle BAC = \alpha$ (рис. 153). Докажем, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны r.

Докажем сначала, что $T_BO_A \perp AB$.

Находим

$$AB_1 = AB\cos\alpha, \quad AC_1 = AC\cos\alpha.$$

В треугольниках BAC и B_1AC_1 угол BAC общий и

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos\alpha.$$

Таким образом, треугольники B_1AC_1 и BAC подобны с коэффициентом подобия, равным $\cos\alpha$ (это хорошо известный факт, см., например, [46], гл. 1, § 5). Пусть X — проекция точки O_A на AB. Отрезки AX и AT_B — это отрезки от вершины A до точек касания соответствующих сторон со вписанной окружностью в подобных треугольниках B_1AC_1 и BAC, т. е. AX и AT_B — соответствующие элементы в подобных треугольниках. Поэтому $AX = AT_B\cos\alpha$. Но если Y — проекция точки T_B на AB, то $AY = AT_B\cos\alpha$. Это означает, что $AX = AY$, т. е. точки X и Y совпадают. Отсюда следует, что $T_BO_A \perp AB$.

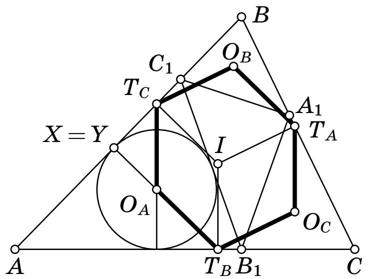


Рис. 153

Аналогично доказывается, что

$T_AO_B \perp AB$, $T_CO_B \perp BC$, $T_BO_C \perp BC$, $T_AO_C \perp AC$, $T_CO_A \perp AC$.

Очевидно, $IT_C \perp AB$, $IT_A \perp BC$, $IT_B \perp AC$, а также $IT_A = IT_B = IT_C = r$. В четырехугольнике $T_BO_AT_CI$ противоположные стороны параллельны, следовательно, $T_BO_AT_CI$ — параллелограмм, в котором

$$IT_B = IT_C = T_BO_A = T_CO_A = r.$$

Аналогично получаем, что

$$T_CO_B = T_AO_B = T_AO_C = T_BO_C = r,$$

поэтому все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны r.

Комментарий. Из приведенного решения очевидно, что шестиугольник $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ центрально-симметричен. Менее очевидно, что его центр симметрии лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Читателю предлагается доказать эти утверждения самостоятельно.

6. См. решение задачи 5 для 10 класса.

2003 год

8 класс

1. Первый способ. Если Маше удвоят стипендию, то семейный доход возрастет на размер этой стипендии. Следовательно, Машина стипендия составляет $5\,\%$ общего дохода. Аналогично, мамина зарплата составляет $15\,\%$, а папина — $25\,\%$. Оставшаяся доля $100\,\% - 5\,\% - 15\,\% - 25\,\% = 55\,\%$ приходится на дедушкину пенсию. Значит, если ему удвоят пенсию, доход всей семьи возрастет на $55\,\%$.

Второй способ. Если бы всем членам семьи вдруг стали платить вдвое больше, общий доход увеличился бы на $100\,\%$. Из этого увеличения $5\,\%$ приходится на Машу, 15 — на маму, 25 — на папу, а остальные 55 — на дедушку.

2. Сперва найдем такое число (не обязательно десятизначное), что после прибавления к нему произведения его цифр получается число с тем же числом знаков и с тем же произведением цифр. Например, попробуем найти такое число, что после прибавления к нему произведения цифр они попросту меняются местами. Если последние цифры числа — 13, то, чтобы поменять их местами, нужно прибавить 18. Чтобы произведение цифр было 18, нужно дописать еще цифру 6. Итак, число 613 обладает нужным свойством.

Теперь, чтобы получить десятизначное число, припишем слева недостающее число единиц. Произведение цифр от этого не изменится: $1111111613 + 18 = 1111111631$.

Комментарий. Мы рассмотрели число 613: $613 + 6 \cdot 1 \cdot 3 = 631$, и приписали слева недостающие единицы. Другие аналогичные числа: $326 + 3 \cdot 2 \cdot 6 = 362$, $819 + 8 \cdot 1 \cdot 9 = 891$.

В наименьшем примере $(28 + 2 \cdot 8 = 44)$ цифры изменяются, однако их произведение сохраняется.

3. Предположим, что такая раскраска возможна.

Заметим сначала, что доску 8×8 можно разрезать на восемь прямоугольников 4×2, поэтому на ней ровно $8 \times 4 = 32$ закрашенные клетки.

Теперь разрежем доску на четыре квадрата 3×3, три прямоугольника 4×2 и угловой квадратик 2×2 (рис. 154). В четырех квадратах 3×3 и трех прямоугольниках 4×2 уже $4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 32$ клетки, поэтому в угловом квадратике 2×2 не должно быть ни одной закрашенной клетки.

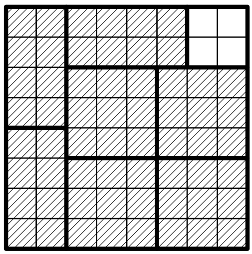


Рис. 154

Аналогично можно доказать, что и в остальных угловых квадратиках 2×2 нет закрашенных клеток.

Теперь разрежем доску без угловых квадратиков 2×2 на шесть прямоугольников 4×2. Получаем, что всего на доске $6 \cdot 4 = 24$ закрашенные клетки. Противоречие.

4. Для внешних углов BXC и AYB треугольников ABX и CAY запишем равенства

$$\angle BXC = \angle ABX + \angle BAX,$$
$$\angle AYB = \angle YAC + \angle YCA$$

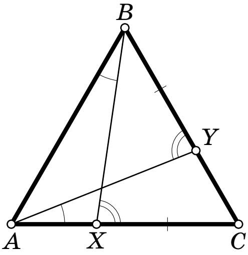


Рис. 155

(рис. 155). Так как по условию $\angle BXC = \angle AYB$, $\angle ABX = \angle YAC$, получаем, что $\angle BAX = \angle YCA$, т. е. треугольник ABC является равнобедренным, $AB = BC$.

Лемма. *Пусть у треугольников PQR и $P'Q'R'$ равны две стороны и угол* не между ними: $PQ = P'Q'$, $QR = Q'R'$, $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$. *Тогда либо треугольники равны, либо* $\angle PRQ + \angle P'R'Q' = 180°$.

Доказательство. Отметим на луче PR точку R_1 на расстоянии $P'R'$ от точки P. Треугольники $P'Q'R'$ и PQR_1 равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, если точка R_1 совпадает с точкой R, то треугольники PQR и $P'Q'R'$ равны.

В противном случае точка R_1 окажется внутри или вне отрезка PR (рис. 156, *а* и *б*). У равнобедренного треугольника RQR_1 углы при основании равны. Если точка R_1 лежит внутри отрезка PR, то

$$\angle PRQ = \angle RR_1Q = 180° - \angle PR_1Q = 180° - \angle P'R'Q'.$$

Случай, когда точка R_1 лежит вне отрезка PR, аналогичен. Лемма доказана.

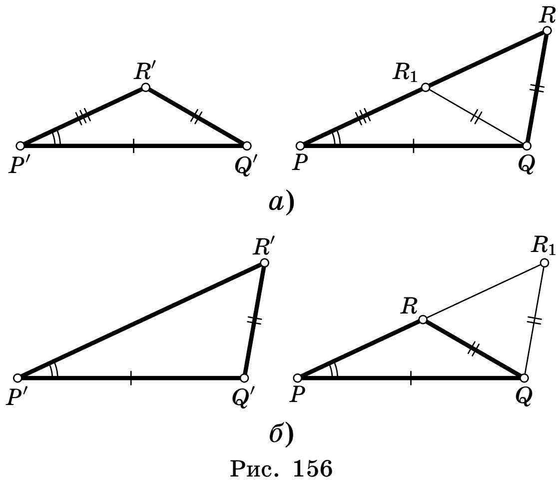


Рис. 156

Комментарий к лемме. Нетрудно видеть, что если $P''Q''R''$ — третий треугольник, причем $P''Q''=PQ$, $Q''R''=QR$, $\angle R''P''Q''=\angle RPQ$, то хотя бы два из треугольников PQR, $P'Q'R'$ и $P''Q''R''$ равны. Это утверждение иногда называют *признаком полуравенства треугольников по двум сторонам и углу не между ними*.

Рассмотрим треугольники XBC и YAB. У них равны две стороны и угол не между ними: $\angle BXC=\angle AYB$, $XC=YB$, $BC=AB$. В силу леммы такие треугольники либо равны, либо $\angle XBC+\angle YAB=180^\circ$, но второй случай невозможен, поскольку $\angle XBC+\angle YAB<\angle ABC+\angle CAB=180^\circ-\angle ACB<180^\circ$. Значит, $\triangle XBC=\triangle YAB$, а следовательно, $\angle ABY=\angle BCX$, и треугольник ABC равносторонний.

5. Докажем, что меньше, чем 21 авиалинией не обойтись. Вначале заметим, что если 15 городов соединены авиалиниями так, что можно добраться от любого города до любого другого, то авиалиний не меньше 14. Действительно, вылетим из произвольного города, и попробуем объехать все остальные, при этом, посещение каждого следующего города будет требовать не менее одной новой авиалинии (см. факт 3).

Обозначим количество линий у авиакомпаний через a, b и c. По доказанному, у любых двух компаний вместе не менее 14 линий, т. е. $a+b\geqslant 14$, $b+c\geqslant 14$, $c+a\geqslant 14$. Складывая эти неравенства, получаем: $2(a+b+c)\geqslant 42$, т. е. у трех компаний в сумме не менее 21 авиалинии.

Осталось привести пример с 21 авиалинией. Два таких примера показаны на рис. 157.

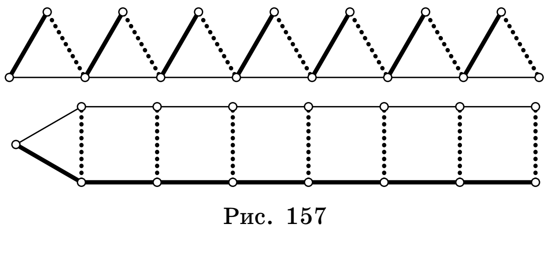


Рис. 157

6. Попробуем играть за Киру. Самый естественный первый ход — назвать число «2». Если мы не угадали, и Борино число было нечетным, то назовем «3». Если мы опять не угадали, то, по крайней мере, Борино число станет четным. К сожалению, число «2» мы уже называть не можем, поэтому будем действовать хитрее.

Чтобы понять, какие возможные Борины числа мы уже отсеяли, рассмотрим возможные остатки от деления исходного числа на 6 ($6 = \text{НОК}(2, 3)$; см. факт 7). Если остаток был равен 0, 2 или 4, то Кира выиграла первым ходом. Если остаток был 5, то после первого хода он стал 3, и Кира выиграла вторым ходом. Таким образом, игра будет продолжаться, только если исходное Борино число давало остаток 1 или 3 при делении на 6. После двух ходов из него вычтется $2+3=5$, и остаток при делении на 6 станет 2 или 4.

Третьим ходом попробуем назвать просто следующее число — это «4». Рассмотрим возможные остатки Бориного числа перед этим ходом при делении на 12 ($12 = \text{НОК}(2, 3, 4)$). Возможные остатки при делении на 6 — это 2 или 4, значит, при делении на 12 могут получиться остатки 2, 4, 8 или 10. Игра будет продолжаться, если этот остаток равен 2 или 10 (иначе число делилось бы на 4), значит, после вычитания 4 остаток от деления на 12 станет 10 или 6.

Теперь, если мы назовем «6», то либо сразу выиграем (если остаток был 6), либо остаток от деления Бориного числа на 12 станет равным 4. Теперь Борино число делится на 4, но «4» мы уже называли. Но если из числа, которое при делении на 12 дает в остатке 4, вычесть 16, то полученное число будет делиться на 12. А 12 мы еще не называли! Итак, называем 16, а потом 12 и выигрываем, так как после пятого хода Боря мог вычесть из своего числа лишь $2+3+4+6+16=31$, т. е. Борино число не могло стать отрицательным.

В табл. 1 представлены ходы Киры и возможные числа Бори. Посмотрим теперь на процесс игры, зная заранее, что достаточно рассматривать остатки при делении Бориного числа на 12 (табл. 2).

Каждым ходом Кира «отсеивает» некоторые остатки. Уже перед пятым ходом становится ясно, что Борино число имеет вид $12k+4$, но приходится назвать «16», чтобы привести его к виду $12k$, а уже затем назвать «12».

Таблица 1

Ход Киры	Возможное число Бори перед ее ходом	Возможное число Бори после ее хода
2	Любое	$2k+1$
3	$6k+1$, $6k+3$, $6k+5$	$6k+4$, $6k+2$
4	$12k+2$, $12k+4$, $12k+8$, $12k+10$	$12k+10$, $12k+6$
6	$12k+6$, $12k+10$	$12k+4$
16	$12k+4$	$12k$
12	$12k$	—

Таблица 2

Ход Киры	Возможные остатки от деления на 12 Бориного числа перед ее ходом	Возможные остатки от деления на 12 Бориного числа после ее хода
2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	11, 1, 3, 5, 7, 9
3	1, 3, 5, 7, 9, 11	10, 2, 4, 8
4	2, 4, 8, 10	10, 6
6	6, 10	4
16	4	0
12	0	—

Комментарии. 1°. Участниками олимпиады были придуманы и другие последовательности ходов Киры. Например, 6, 4, 3, 2, 5, 12.

2°. Эта задача тесно связана с задачей о покрытии натурального ряда арифметическими прогрессиями. Попробуйте сами найти минимальное число арифметических прогрессий с попарно различными разностями, необходимое, чтобы покрыть весь натуральный ряд.

9 класс

1. Первый способ. Наложим одного головастика на другого как показано на рис. 158, *а*. Нетрудно проверить, что если отрезать от первого головастика заштрихованные сегменты, и повернуть их вокруг точек A_1 и B_1 на 180°, то получится в точности второй головастик. Значит, головастики имеют одинаковую площадь.

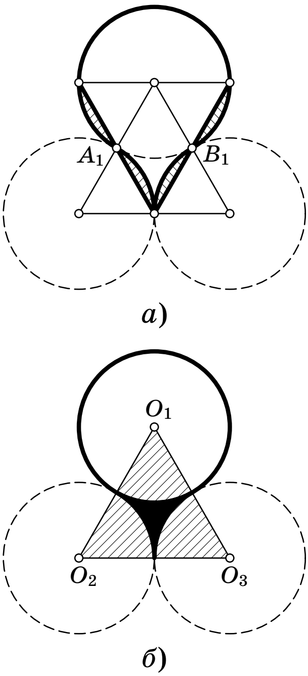


Рис. 158

В т о р о й с п о с о б. Можно провести и более формальное доказательство, без использования наглядных аргументов (хотя первое доказательство тоже засчитывалось на олимпиаде как верное). Пусть площадь круга равна $S_{\text{кр}}$, а площадь равностороннего треугольника со стороной, равной диаметру окружности, равна $S_{\text{тр}}$. Так как треугольник $O_1O_2O_3$ равносторонний (рис. 158, *б*), его углы равны 60°; кроме того, длина его стороны равна диаметрам исходных окружностей, поэтому его площадь равна $S_{\text{тр}}$. Значит, площадь каждого из заштрихованных секторов на рис. 158, *б*, равна $S_{\text{кр}}/6$, а площадь закрашенной части равна

$$S_{\text{тр}} - 3 \cdot \frac{S_{\text{кр}}}{6} = S_{\text{тр}} - \frac{S_{\text{кр}}}{2}.$$

Поэтому площадь второго головастика равна $S_{\text{кр}} + S_{\text{тр}} - S_{\text{кр}}/2 = S_{\text{тр}} + S_{\text{кр}}/2$ и равна площади первого головастика.

2. Пример можно построить, просто взяв первые четыре числа равные 2 (единицы брать нельзя — после вычитания получатся нули). Пусть пятое число равно x. Чтобы эти числа удовлетворяли условию задачи, достаточно, чтобы выполнялось равенство $16x = x - 1$, откуда $x = -1/15$.

3. П е р в ы й с п о с о б. Предположим, что за весь день на первом этаже в лифт вошло x покупателей, на втором — y, на третьем — z. Заметим, что количество покупателей, вышедших из лифта на каждом из этажей в течение дня, равно количеству покупателей, вошедших на этом же этаже в течение дня.

По условию, из покупателей, вошедших на втором этаже, половина едет вниз, а половина — вверх. Значит, со второго этажа на третий приехало $y/2$ покупателей, и столько же со второго на первый. Второе условие можно записать так: $z < (x+y+z)/3$, или $2z < x+y$.

С первого этажа на третий было совершено $z - \frac{y}{2}$ поездок, так как всего на третьем этаже вышли из лифта z человек, а $y/2$ из них приехали со второго этажа. А с первого на второй поднимались те покупатели, входившие в лифт на первом этаже, кто не ехал на третий, т. е. $x - \left(z - \frac{y}{2}\right)$. Для решения задачи требуется сравнить эти два выражения

$$z - \frac{y}{2} \ \ ? \ \ x - \left(z - \frac{y}{2}\right).$$

Прибавив к каждому из них $z + \frac{y}{2}$, мы получим

$$z - \frac{y}{2} + z + \frac{y}{2} \ \ ? \ \ x - \left(z - \frac{y}{2}\right) + z + \frac{y}{2}$$

или

$$2z \ \ ? \ \ x + y.$$

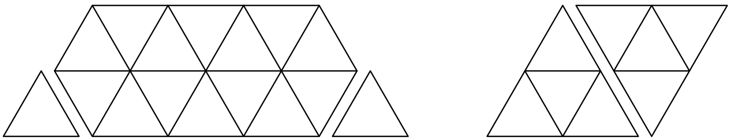
Но $2z < x+y$. Значит, $z - \frac{y}{2} < x - \left(z - \frac{y}{2}\right)$. То есть с первого этажа на третий за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

В т о р о й с п о с о б. Обозначим через n_{12} количество поездок с первого этажа на второй. Аналогично определим числа n_{13}, n_{21}, n_{23}, n_{31}, n_{32}. Все поездки разобьем на три группы: поездки на третий этаж $(n_{13}+n_{23})$, поездки с третьего этажа $(n_{31}+n_{32})$ и поездки между первым и вторым этажом $(n_{12}+n_{21})$. По условию задачи, первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж, равно числу уехавших с третьего этажа. Значит, последняя группа — самая большая:

$$(n_{31}+n_{32}) = (n_{13}+n_{23}) < (n_{12}+n_{21}).$$

Подставляя в это неравенство $n_{21}=n_{23}$, получим $n_{13}<n_{12}$: с первого этажа чаще ездили на второй, нежели на третий.

4. После первого хода всегда образуется равнобедренная трапеция. Посмотрим какие фигуры могут образоваться на последующих ходах при правильной игре.



а) *б*)

Рис. 159

Пусть на каком-то ходу один из игроков (назовем его A) получил шоколадку в форме равнобедренной трапеции с меньшим основанием a и большим основанием b (длина боковой стороны такой трапеции равна $b-a$). Если A отломит треугольник, сторона которого меньше, чем $b-a$, то другой игрок (назовем его $Б$) отломит треугольник со стороной 1, и у игрока A не будет возможности сделать ход и он проиграет (рис. 159, *а*). Следовательно, в этой ситуации он должен отломать треугольник со стороной $b-a$. После этого хода остается параллелограмм, длины сторон которого равны a и $b-a$.

Пусть игрок получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b, причем $a<b$. Тогда по аналогичным соображениям он должен отломать треугольник со стороной a. После этого хода остается равнобедренная трапеция с основаниями $b-a$ и b.

Таким образом, если в некоторый момент один из игроков получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b ($a<b$), то через два хода он получит шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и $b-a$.

Если же один из игроков получил параллелограмм с равными сторонами (т. е. ромб), то после его хода образуется треугольник (рис. 159, *б*).

Теперь приведем выигрышную стратегию для второго игрока при простом n: ему достаточно каждый раз отламывать кусок наибольшего размера. Покажем, что эта стратегия приводит к выигрышу. Пусть первый игрок отломал треугольник со стороной k. После хода второго игрока образовался параллелограмм со сторонами k и $n-k$. Эти числа взаимно просты, так как n — простое число. Далее, после каждого хода второго игрока будет получаться параллелограмм (пока в конце концов не получится ромб). Длины сторон этого параллелограмма взаимно просты (если k и n взаимно просты, то k и $n-k$ тоже взаимно просты, см. факт 5). Значит, длины сторон ромба тоже взаимно просты. Но это означает, что получится ромб со стороной 1! Первый будет вынужден отломать от него треугольник со стороной 1, после чего второй выигрывает.

Если $n=1$, то первый уже выиграл. Пусть теперь число n составное. Обозначим через p любой простой делитель числа n (см. факт 10). Пусть первый сначала отломает треугольник со стороной p, а потом каждый раз отламывает самый большой кусок. Через некоторое время второй игрок получит треугольник со стороной p и, как было разобрано выше, через несколько ходов проиграет.

Комментарий. Заметим, что описанный процесс есть не что иное, как алгоритм Евклида (см. [30], гл. 3).

5. Пусть точка O — центр окружности (рис. 160). Так как треугольник ABC прямоугольный, точка O совпадает с серединой гипотенузы AB (см. факт 14). Угол NOK прямой: действительно, средняя линия NO треугольника ABC параллельна его стороне BC, а прямая OK содержит высоту равнобедренного треугольника BOC (так как луч OK является биссектрисой угла BOC).

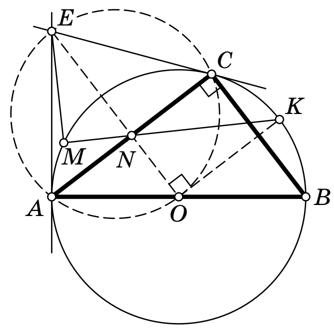


Рис. 160

Нетрудно видеть, что точки E, N и O лежат на одной прямой. Действительно, прямоугольные треугольники ECO и EAO равны по катету и гипотенузе, поэтому

EO — биссектриса угла AEC. С другой стороны, треугольник AEC — равнобедренный, так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны. Поскольку отрезок EN — медиана в этом треугольнике, то он также является и биссектрисой. Поэтому лучи EN и EO совпадают как биссектрисы угла AEC.

Точки A, E, C и O лежат на одной окружности, так как $\angle ECO = \angle EAO = 90^\circ$. Из теоремы о пересекающихся хордах окружности следует, что

$$AN \cdot NC = EN \cdot NO. \qquad (1)$$

Применяя ту же теорему к хордам AC и MK исходной окружности, получаем

$$AN \cdot NC = MN \cdot NK. \qquad (2)$$

Комбинируя (1) и (2), получаем, что

$$MN \cdot NK = EN \cdot NO.$$

По теореме, обратной к теореме о пересекающихся хордах, получаем, что точки M, K, E и O лежат на одной окружности.

Углы EMK и EOK равны, как опирающиеся на одну дугу. Но угол EOK — прямой, значит, и угол EMK — прямой.

6. Приведем одну из возможных стратегий узников. Выберем одного из узников (будем называть его «счетчиком», а остальных узников — «обычными»). Он будет считать узников, которые посетили комнату, следующим образом. Вначале число подсчитанных узников равно 0. Далее, если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет включен, то он прибавляет к уже посчитанному числу узников единицу и выключает свет, если же свет не горит, то он, ничего не меняя, возвращается обратно в свою камеру. Каждый из «обычных» узников действует по такому правилу: если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет не горит, и он до этого ни разу не включал свет, то он его включает. В остальных случаях он ничего не меняет. Когда число посчитанных узников становится равным 99, «счетчик» говорит, что все узники уже побывали в комнате.

Докажем, что эта стратегия гарантирует узникам освобождение. В самом деле, действуя согласно этой стратегии, каждый узник, кроме «счетчика», включит свет в комнате не более одного раза, а «счетчик» вообще не включает свет. Если «счетчик» насчитает 99, значит каждый из оставшихся узников побывал в комнате хотя бы раз. И «счетчик» там, конечно, уже был.

Остается доказать, что «счетчик» в какой-то момент «досчитает» до 99, т. е. что каждый из 99 узников включит свет. Предположим, что это не так — свет будет включен менее 99 раз, т. е., досчитав до некоторого числа $m < 99$, «счетчик» выключит свет, и больше свет никогда зажжен не будет (иначе, зайдя в комнату после следующего включения света, «счетчик» досчитает до $m+1$). Так как «обычных» узников больше m, то найдется «обычный» узник, который свет никогда не зажигал. По условию он окажется в комнате и после указанного выше момента. При этом, следуя указанной стратегии, он должен будет включить свет. Противоречие.

Комментарий. Придумайте стратегию узников, если неизвестно, включена вначале лампа или выключена.

10 класс

1. Решение может состоять просто в проверке того, что числа $a=1$, $b=5$, $c=6$ действительно удовлетворяют условию. Попробуем объяснить, как можно найти такие числа. Прежде всего, постараемся упростить нашу задачу. Заметим, во-первых, что корни уравнений, отличающихся только знаком при bx, противоположны, поэтому достаточно обеспечить лишь, чтобы корни уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $ax^2+bx-c=0$ были целыми. Тогда корни уравнений $ax^2-bx+c=0$ и $ax^2-bx-c=0$ окажутся целыми автоматически.

Далее, если x_1 и x_2 — целые корни уравнения ax^2+ $+bx+c$, то по теореме Виета $b=-(x_1+x_2)a$, $c=x_1x_2a$, т. е. все коэффициенты уравнения можно сократить на a, при этом опять получится уравнение с натуральными коэффициентами и такими же корнями. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $a=1$.

Если x_1 и x_2 — корни первого уравнения, то по теореме Виета $x_1x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Аналогично, если y_1 и y_2 — корни второго уравнения, то по теореме Виета $y_1y_2 = -c$, $y_1 + y_2 = -b$. Осталось подобрать такие x_1, x_2, y_1, y_2, что

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1x_2 = -y_1y_2.$$

Годятся, например, $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $y_1 = 1$, $y_2 = -6$.

Вариант решения. Для того чтобы корни уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + bx - c = 0$ были целыми, необходимо, чтобы дискриминанты этих уравнений были точными квадратами: $b^2 - 4c = m^2$, $b^2 + 4c = n^2$. Это же условие оказывается и достаточным — ведь $b^2 - 4c$ той же четности, что и b, а значит и $\sqrt{b^2 - 4c}$ (если этот корень целый) оказывается той же четности (см. факт 23). Тем самым, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ (корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$) — целые числа. Аналогичное рассуждение верно и для второго уравнения.

На самом деле, таких b, c, m, n, что $b^2 - 4c = m^2$, $b^2 + 4c = n^2$, существует бесконечно много. Для решения задачи достаточно предъявить один пример таких b, c, m, n. Покажем, как такой пример можно было подобрать. Исключая c, получаем $n^2 - b^2 = b^2 - m^2$, при этом, чтобы c было целым, необходимо, чтобы b, m и n были одной четности. Перебрав квадраты нечетных чисел от 1 до 9, находим одно из решений: $7^2 - 5^2 = 5^2 - 1 = 24$; $c = 24/4 = 6$. Мы нашли b и c такие, что дискриминанты обоих уравнений — полные квадраты.

Комментарий. Для того чтобы найти пример, нам потребовалось подобрать представление $2b^2$ в виде суммы $m^2 + n^2$, отличное от $b^2 + b^2$. Мы нашли такие b, m и n просто подбором, но в действительности задача представления заданного числа в виде суммы двух квадратов хорошо изучена. См. комментарий к задаче 4 для 11 класса олимпиады 1996 г.

2. Выберем любую из получившихся частей. Рассмотрим сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где a_i — количество сторон i-й грани.

Каждое ребро многогранника, по которому ломаная не проходит, посчитано в этой сумме дважды, и поэтому четность суммы не зависит от числа таких ребер (факт 23).

Каждое ребро, через которое проходит ломаная, входит в сумму ровно один раз. Таких ребер 2003, поэтому вся сумма нечетна.

Если бы количество граней с нечетным числом сторон было четно, то рассмотренная сумма также была бы четна. Значит, это количество нечетно.

Комментарии. 1°. Приведите пример такого многогранника и такой ломаной.

2°. Сравните эту задачу с хорошо известной задачей про марсиан. У марсиан произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что все руки оказались занятыми. Докажите, что число марсиан, у которых нечетное число рук, четно.

3. Если степень многочлена $P(x)$ равна 0, то $P(x)=1$ (старший коэффициент равен 1). Но тогда $P(a_1)\neq 0$. Если степень многочлена равна 1, то, например, многочлен $P(x)=x-1$ и последовательность 1, 2, 3, ... ($a_n=n$) удовлетворяют условию задачи.

Докажем, что нет таких многочленов степени 2 и выше. Пусть такой многочлен $P(x)$ существует.

Лемма. *Найдется такая положительная константа C, что если $|x|>C$, то $|P(x)|>|x|$.*

Доказательство. Пусть $P(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0$. Возьмем $C=|b_{n-1}|+\ldots+|b_1|+|b_0|+1$. Если $|x|>C$, то

$$\begin{aligned}|P(x)|&\geqslant|x|^n-|b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0|\geqslant\\ &\geqslant|x|^n-(|b_{n-1}|\cdot|x|^{n-1}+\ldots+|b_1|\cdot|x|+|b_0|)\geqslant\\ &\geqslant|x|^n-(|b_{n-1}|\cdot|x|^{n-1}+\ldots+|b_1|\cdot|x|^{n-1}+|b_0|\cdot|x|^{n-1})=\\ &=|x|^{n-1}\cdot(|x|-(|b_{n-1}|+\ldots+|b_0|))>|x|^{n-1}\geqslant|x|\end{aligned}$$

(мы два раза воспользовались тем, что $|x|>1$). Лемма доказана.

Заметим теперь, что все члены последовательности по модулю ограничены числом C. Действительно, если $|a_n|>C$, то $C<|a_n|<|P(a_n)|=|a_{n-1}|$. Продолжая, получим:

$$C<|a_n|<|P(a_n)|=|a_{n-1}|<|P(a_{n-1})|=|a_{n-2}|<\ldots$$
$$\ldots<|P(a_2)|=|a_1|<|P(a_1)|=|0|,$$

что неверно.

Мы получили, что все члены последовательности по модулю не превосходят C; с другой стороны, по условию задачи все они целые. Но таких чисел только конечное число, значит, в последовательности обязательно будут повторения. Противоречие.

4. Первый способ. Обозначим
$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{MA_1}=\vec{x}$, $\overrightarrow{MB_1}=\vec{y}$, $\overrightarrow{MC_1}=\vec{z}$.

По условию имеем, что следующие скалярные произведения равны нулю:

$$(\vec{z},\,\vec{c})=(\vec{x},\,\vec{a})=(\vec{y},\,\vec{b})=0, \tag{1}$$

$$((\vec{x}-\vec{y}),\,(\vec{a}-\vec{b}))=((\vec{x}-\vec{z}),\,(\vec{a}-\vec{c}))=0. \tag{2}$$

Раскрывая в (2) скобки и учитывая (1), получим

$$(\vec{a},\,\vec{y})+(\vec{b},\,\vec{x})=(\vec{a},\,\vec{z})+(\vec{c},\,\vec{x})=0.$$

Поскольку $\vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{b}=-\vec{c}-\vec{a}$, получаем:

$$0=(\vec{a},\,\vec{y})+(\vec{b},\,\vec{x})=(-\vec{b}-\vec{c},\,\vec{y})+(-\vec{a}-\vec{c},\,\vec{x})=-(\vec{c},\,\vec{y})-(\vec{c},\,\vec{x}).$$

Аналогично,

$$0=(\vec{a},\,\vec{z})+(\vec{c},\,\vec{x})=(-\vec{b}-\vec{c},\,\vec{z})+(-\vec{a}-\vec{b},\,\vec{x})=-(\vec{b},\,\vec{z})-(\vec{b},\,\vec{x}).$$

Нужно доказать, что

$$\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0},$$

для чего достаточно, чтобы

$$(\vec{b},\,\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=(\vec{c},\,\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=0.$$

Действительно,

$$(\vec{b},\,\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=(\vec{b},\,\vec{x})+(\vec{b},\,\vec{z})=0,$$

$$(\vec{c},\,\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=(\vec{c},\,\vec{x})+(\vec{c},\,\vec{y})=0.$$

Второй способ. Идея решения состоит в сведении задачи к эквивалентной для некоторой более простой ситуации. (Так, например, в алгебре решают уравнения, сводя их к более простым равносильными преобразованиями.) Сведем задачу аффинными преобразованиями к случаю равностороннего треугольника.

В исходном треугольнике точки A_1, B_1 и C_1 задаются условиями

$$MA_1 \perp BC,\ \ MB_1 \perp AC,\ \ MC_1 \perp AB,\ \ A_1B_1 \perp MC,\ \ A_1C_1 \perp MB.$$

Повернув треугольник $A_1B_1C_1$ вокруг точки M на 90° против часовой стрелки (рис. 161, *а*), получим треугольник $A'B'C'$, причем на точки A', B' и C' будут выполнены условия

$$MA' \parallel BC,\ \ MB' \parallel AC,\ \ MC' \parallel AB,\ \ A'B' \parallel MC,\ \ A'C' \parallel MB. \quad (3)$$

При этом медианы треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке M тогда и только тогда, когда медианы треугольника $A'B'C'$ пересекаются в точке M. Проведем аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в равносторонний. При аффинном преобразовании точки пересечения отрезков переходят в пересечения их образов, а параллельные прямые — в параллельные.

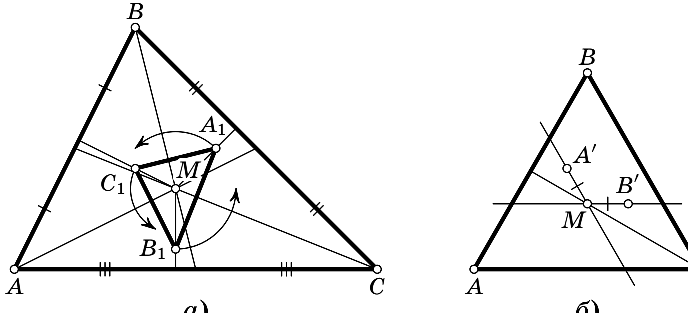


Рис. 161

Итак, если вместо точек M, A, B, C, A', B', C' взять точки, получившиеся из них после аффинного преобразования, то условия (3) будут выполняться. Поэтому достаточно доказать, что из условий (3) следует, что медианы треугольника $A'B'C'$ пересекаются в точке M *в предположении, что треугольник ABC равносторонний.*

В этом случае медиана MC образует равные углы со сторонами AC и BC. Тогда из 1-го, 2-го и 4-го условий (3) следует, что $A'MB'$ — равнобедренный треугольник (рис. 161, *б*). Аналогично, $A'M = C'M$. Теперь уже нетрудно понять, что треугольник $A'B'C'$ равносторонний, а M — его центр.

5. Покажем, как разделить страну на губернии так, чтобы выполнялось условие задачи. Если в стране всего один город, то задача тривиальна: можно взять две губернии пустыми.

Назовем несколько городов страны *автономной областью*, если из каждого города этой автономной области можно проехать в любой другой город этой автономной области, не выезжая за ее пределы. (Легко видеть, что тогда для этой автономной области будет выполнятся условие задачи, т. е. такой путь, не проходящий два раза через один город, будет единственным.)

Возьмем произвольный город. Очевидно, он образует автономную область, и эту автономную область можно поделить на три губернии, как требуется в задаче. Будем последовательно увеличивать автономную область, добавляя к ней на каждом шаге несколько городов так, чтобы опять получалась автономная область, и деля полученную область на губернии, как требуется в задаче.

Предположим, что автономная область содержит не все города страны. Тогда найдется дорога, ведущая из города области (обозначим его через X) в город, еще не принадлежащий этой области (назовем его Y). Действительно, если все дороги, выходящие из городов автономной области, ведут в города этой области, то из городов области можно проехать только в города этой области. Рассмотрим несамопересекающийся путь (последовательность дорог, не проходящих два раза через один город), ведущий из Y в X. Вообще говоря, он может до города X проходить и через другие города области. Покажем, что это невозможно, т. е. на этом пути не могут встретиться другие города автономной области, кроме последнего города X.

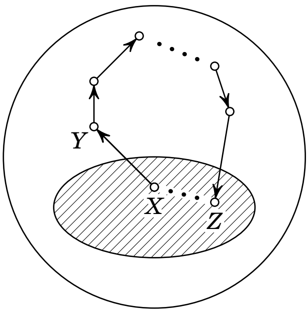


Рис. 162

Пусть Z — первый город автономной области на пути из Y в X. Предположим, что Z и X — разные города этой области. Так как для области выполнялось условие задачи, найдется несамопересекающийся путь из X в Z, идущий только по городам области (рис. 162).

Но тогда из X можно добраться до Z двумя несамопересекающимися путями: не выезжая из области и через Y. Но по условию такое невозможно.

Следовательно, путь из Y в X не содержит других городов области, кроме X. Теперь присоединим все города на этом пути (включая Y) к автономной области и отнесем их поочередно в те две губернии, в которые X не входит.

Заметим, что можно проехать из любого добавленного города в любой другой добавленный или в любой город области и наоборот, т. е. получилась опять автономная область. Докажем, что она правильно разделена на губернии. Так как из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путем, не проходящим два раза через один и тот же город, то все дороги, соединяющие присоединенные города, — это дороги на пути $Y \to X$.

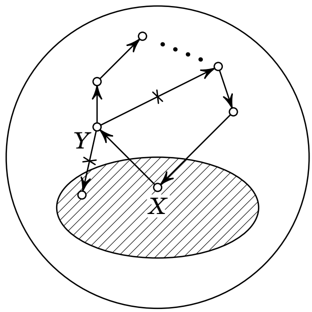


Рис. 163

Аналогично, есть только две дороги, соединяющие какой-либо присоединенный город с городом, уже имевшимся в области — это дорога из X в Y и последняя дорога на пути $Y \to X$ (рис. 163). Поэтому нет дорог, соединяющих города из одной губернии. Следовательно, полученная область будет правильно разделена на губернии.

Действуя таким образом, пока есть хотя бы один город, не лежащий в автономной области, мы получим автономную область, совпадающую со всей страной, при этом она будет правильно разделена на губернии. Утверждение задачи доказано.

Комментарий. Подумайте сами, какую форму может иметь граф, удовлетворяющий условию задачи.

6. Пусть, например,

$$f(x) = \pi + \operatorname{arctg} x,$$
$$g(x) = x + \pi,$$

$h(x)$ — функция, которая на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ равна $P_n(\operatorname{tg} x)$ (т. е. график многочлена P_n «сжат» в интервал $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, рис. 164).

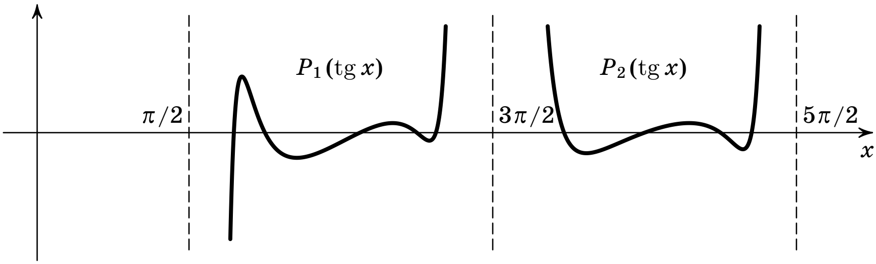


Рис. 164

Тогда
$$P_n(x)=h(\operatorname{arctg} x+n\pi)=h(g(g(\ldots(g(f(x)))\ldots)))$$
(функция g используется $n-1$ раз).

Комментарии. 1°. Рассмотрим множество пар $(x,\ n)$, где x — действительное число, а n — натуральное. Это множество обозначается $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ и называется *декартовым произведением множества действительных чисел и множества натуральных чисел*. Можно представлять себе это множество как множество прямых на координатной плоскости, параллельных оси абсцисс, и проходящих через точку $(0,\ n)$, где $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ (рис. 165).

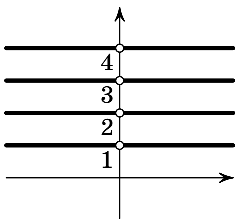


Рис. 165

Теперь рассмотрим отображения:
$$H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R},\qquad H(x,\ n)=P_n(x),$$
$$F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{N},\qquad F(x)=(x,\ 1),$$
$$G\colon \mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}\times\mathbb{N},\qquad G(x,\ n)=(x,\ n+1).$$
Отображение H «кодирует» все многочлены $P_n(x)$, и нетрудно видеть, что
$$P_n(x)=H(G(G(\ldots(G(F(x)))\ldots))),$$
где отображение G используется $n-1$ раз. К сожалению, это еще не дает решения нашей задачи, так как в задаче требуется предъявить *функции*, т. е. отображения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а не из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Идея решения задачи состоит в том, чтобы «уложить» $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ на прямую. Такое укладывание задается отображением $A(x,\ n)=\operatorname{arctg} x+\pi n$.

2°. Утверждение задачи остается верным для любой последовательности функций $P_n(x)$ (не обязательно многочленов).

11 класс

1. Освободившись от знаменателя, приведем наше равенство к виду
$$x^3z-x^3y+z^3y-z^3x+y^3x-y^3z=0. \qquad (1)$$
Разложим левую часть на множители:
$$x^3z-x^3y+z^3y-z^3x+y^3x-y^3z=$$
$$=x^3(z-y)+z^3(y-x)+y^3(x-z)=$$
$$=x^3((z-x)+(x-y))+z^3(y-x)+y^3(x-z)=$$
$$=x^3(z-x)+y^3(x-z)+x^3(x-y)+z^3(y-x)=$$
$$=(z-x)(x^3-y^3)+(x-y)(x^3-z^3)=$$
$$=(z-x)(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x-z)(x^2+xz+z^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(xz+z^2-xy-y^2)=(x-y)(x-z)(z-y)(x+y+z).$$
Заметим, что при положительных x, y, z выражение в последней скобке положительно. Таким образом, если все числа различны, то все множители отличны от нуля. Поэтому (1) не может выполняться.

Комментарий. Как догадаться до такого разложения на множители? Обозначим левую часть равенства (1) через $P(x, y, z)$. Тогда $P(x, y, z)=0$, если $x=y$. Из этого можно вывести, что многочлен $P(x, y, z)$ делится на $x-y$ (идея доказательства: проверьте, что многочлен $P(x, y, z)-P(y, y, z)$ делится на $x-y$). По аналогичным соображениям $P(x, y, z)$ делится на $x-z$ и $z-y$ (см. факт 21). Итак, $P(x, y, z)$ делится на $(x-y)(x-z)(z-y)$.

Оказывается, то, что частное равно $x+y+z$, тоже можно понять ничего не вычисляя. Дело в том, что многочлен $P(x, y, z)$ обладает таким свойством: если поменять местами любые два его аргумента, то его значение умножится на -1 (такие многочлены называются *кососимметрическими*). Аналогичным свойством обладает и многочлен $(x-y)(x-z)(z-y)$. Значит, их частное является симметрическим многочленом (т. е. его значение не меняется при перестановке аргументов). Теперь уже нетрудно понять, что частное имеет вид $C(x+y+z)$, где C — константа (используйте, что частное есть многочлен степени 1). Значит,
$$P(x, y, z)=C(x-y)(x-z)(z-y)(x+y+z).$$
Чтобы убедится в том, что $C=1$, достаточно приравнять коэффициенты, скажем, при x^3z.

2. См. решение задачи 3 для 10 класса при $n=2003$.

3. Пусть U и V — точки, симметричные H относительно AB и AD соответственно, X — точка пересечения прямых UC и AB, Y — точка пересечения прямых VC и AD. Прежде всего отметим, что точки U и V лежат на описанной окружности четырехугольника (рис. 166). Для доказательства заметим, что

$$\angle AUB = \angle AHB = \angle ADB.$$

Значит, точка U лежит на указанной окружности по теореме, обратной к теореме об углах, вписанных в окружность. Доказательство для точки V аналогично.

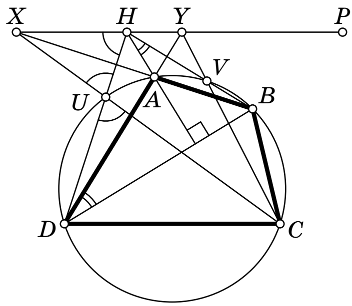


Рис. 166

Как следствие,

$$\angle XHY = \angle XHU + \angle UHV + \angle VHY =$$
$$= \angle DUC + \angle DHB + \angle CVB = \angle DAC + \pi - \angle DAB + \angle CAB = \pi.$$

Значит, точки X, H, Y лежат на одной прямой.

Симметрия относительно прямой AB показывает, что прямая PH проходит через X, а QH — через Y. Утверждение задачи доказано.

Комментарий. Наше решение годится лишь если точки расположены как на рисунке. Избежать перебора случаев можно, если использовать *ориентированные углы* (см. [46], гл. 2).

4. Примем некоторую точку окружности за начало отсчета. Пусть a_i — длина дуги от начала отсчета до i-й вишенки по часовой стрелке. Рассмотрим числа $b_i = a_i - i$.

Лемма. *$|b_m - b_k| < 1$ для любых m, k.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $m > k$. Нам нужно доказать, что $b_m - b_k < 1$ и $b_k - b_m < 1$. Рассмотрим k-ю и m-ю вишенки, они делят окружность на две дуги. Рассмотрим, сначала, дугу, которая «заметается», если двигаться от a_k к a_m по часовой стрелке. Длина этой дуги — $a_m - a_k$, а число вишенок на ней — $m - k - 1$. По условию число вишенок на этой дуге меньше длины этой дуги, т. е. $m - k - 1 < a_m - a_k$. Тогда $b_k - b_m = (a_k - k) - (a_m - m) = a_k - a_m + m - k < 1$.

Рассмотрим теперь вторую дугу между m-й и k-й вишенками. Длина этой дуги — $n-(a_m-a_k)$, а число вишенок на ней — $n-(m-k)-1$, т. е.

$$n-(m-k)-1<n-(a_m-a_k),$$

откуда $b_m-b_k<1$. Лемма доказана.

Пусть b_s — наименьшее из чисел b_k. Тогда $0\leqslant b_i-b_s<1$ для любого i. Пусть x чуть-чуть меньше, чем b_s. Тогда $x<b_i<x+1$ для всех i. То есть $x+i<a_i<x+1+i$ для всех i. Значит, разрез по радиусам, проведенным в точки с координатами x, $x+1$, $\ldots$, $x+n-1$, — искомый.

Комментарий. Данная задача близка к известной «задаче про бензоколонки»: на кольцевой дороге расположено несколько безоколонок, в каждой бензоколонке осталось некоторое количество бензина. Известно, что суммарное количество бензина во всех бензоколонках достаточно, чтобы автомобиль мог сделать полный круг. Докажите, что автомобиль с пустым баком (вместимость бака считаем неограниченной) может начать движение с некоторой бензоколонки и, заправляясь на встречающихся ему бензоколонках, сделать полный круг.

5. Для каждой из граней рассмотрим вектор внешней нормали, т. е. вектор, перпендикулярный этой грани и направленный вовне многогранника.

1°. Докажем, что угол между любыми двумя внешними нормалями тупой или развернутый. Пусть это не так — нашлись две грани Γ_1 и Γ_2, внешние нормали к которым образуют угол не больше $\pi/2$. Тогда грани Γ_1 и Γ_2 принадлежат полуплоскостям Π_1 и Π_2, которые образуют двугранный угол величиной не меньше $\pi/2$.

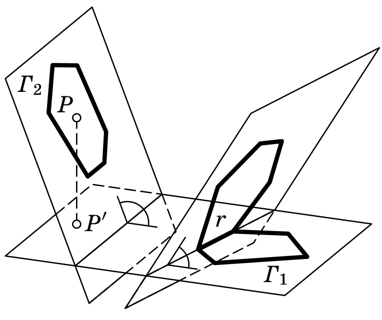


Рис. 167

Возьмем точку P на грани Γ_2. Пусть P' — проекция точки P на плоскость грани Γ_1. Так как угол между внешними нормалями к граням Γ_1 и Γ_2 не больше чем $\pi/2$, а наш многогранник — выпуклый, точка P' лежит вне многоугольника Γ_1. Следовательно, найдется прямая, содержащая некоторое ребро r

грани Γ_1 и отделяющая P' от Γ_1. Многогранник лежит внутри острого двугранного угла, соответствующего ребру r, но P лежит вне этого двугранного угла (рис. 167). Противоречие.

2°. Остается показать, что в пространстве не существует более четырех векторов, попарные углы между которыми тупые или развернутые.

Пусть это не так, и $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ — пять векторов, попарные углы между которыми тупые или развернутые. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Oz была сонаправлена с $\vec{u}_0$.

Обозначим через $\vec{v}_i$ проекцию вектора $\vec{u}_i$ на плоскость Oxy. Пусть $\vec{u}_i = (x_i,\, y_i,\, z_i)$, тогда $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 > 0$ и $v_0 = 0$.

Условие, что все углы — тупые или развернутые, равносильно тому, что все скалярные произведения отрицательны. В частности,

$$z_0 z_i = (\vec{u}_0,\, \vec{u}_i) < 0,$$

откуда $z_i < 0$ при $1 \leqslant i \leqslant 4$. Значит, $z_i z_j > 0$ при $1 \leqslant i,\, j \leqslant 4$, так что

$$(\vec{v}_i,\, \vec{v}_j) = (\vec{u}_i,\, \vec{u}_j) - z_i z_j < (\vec{u}_i,\, \vec{u}_j) < 0$$

при $i \neq j$, $i,\, j > 0$. Значит, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ — четыре вектора на плоскости, углы между которыми тупые или развернутые. Но это невозможно.

Итак, у многогранника четыре грани. Заметим, что многогранник с четырьмя гранями может быть только тетраэдром.

Идея другого решения. Сначала докажем, что в каждой вершине многогранника сходятся три грани. Для этого достаточно доказать, что сумма двугранных углов любого n-гранного угла больше, чем $\pi(n-2)$. Так как n-гранный угол можно разрезать на $n-2$ трехгранных, достаточно доказать это утверждение для трехгранного угла. Теперь можно показать, что все плоские углы при каждой из вершин тоже острые. Из этого нетрудно вывести, что все грани — треугольники. Теперь уже нетрудно убедиться, что многогранник является тетраэдром.

6. Приведем пример, показывающий, что при $k \leqslant 290$ описанная ситуация возможна. Упорядочим всех борцов по силе и перенумеруем их по возрастанию силы (первый — самый слабый). Назовем 210 слабейших *новичками*, а 190 сильнейших — *мастерами*. В частности, любой новичок окажется слабее любого мастера. Пронумеруем деревни *против* часовой стрелки. Поместим в первую деревню одного слабейшего новичка и 19 слабейших мастеров; во вторую — двух новичков, слабейших из оставшихся, и 18 мастеров, слабейших из оставшихся; в третью — трех слабейших из оставшихся новичков и 17 мастеров, слабейших из оставшихся, и т. д.; в последнюю деревню мы поместим 20 сильнейших новичков. Это размещение по деревням указано в таблице (в столбце «Борцы» числа, набранные прямым шрифтом, означают силы мастеров, набранные курсивом — силы новичков).

Деревни	Борцы	Деревни	Борцы
1	*1*, 211—229	11	*56—66*, 356—364
2	*2—3*, 230—247	12	*67—78*, 365—372
3	*4—6*, 248—264	13	*79—91*, 373—379
4	*7—10*, 265—280	14	*92—105*, 380—385
5	*11—15*, 281—295	15	*106—120*, 386—390
6	*16—21*, 296—309	16	*121—136*, 391—394
7	*22—28*, 310—322	17	*137—153*, 395—397
8	*29—36*, 323—334	18	*154—171*, 398—399
9	*37—45*, 335—345	19	*172—190*, 400
10	*46—55*, 346—355	20	*191—210*

Покажем, что i-я деревня сильнее $(i-1)$-й при $i>1$. Действительно, в i-й деревне есть i новичков и $20-i$ мастеров. При этом мастера i-й деревни победят всех в $(i-1)$-й, а новички победят новичков, и всего побед будет $20(20-i)+i(i-1)=i^2-21i+400$. Вершина этой параболы находится в точке $i=10{,}5$, а ветви направлены вверх, поэтому минимальное значение в целой точке достигается ровно при двух значениях — $i=10$ и $i=11$ — и равно $10^2-21\cdot 10+400=290$. То есть i-я деревня сильнее $(i-1)$-й при $k \leqslant 290$. Кроме того, мастера первой деревни победят новичков 20-й, и всего побед будет $20 \cdot 19 = 380 > 290$, т. е. все условия выполнены.

Покажем, что при $k > 290$ такая ситуация невозможна. Упорядочим в каждой деревне борцов по убыванию силы и выберем в каждой деревне десятого по силе борца. Покажем, что деревня, в которой живет слабейший из выбранных борцов, не может быть сильнее следующей за ней. Обозначим выбранных борцов в нашей и следующей деревнях через A и B соответственно. Тогда в нашей деревне 11 борцов не сильнее, чем A, а в следующей — 10 борцов хотя бы такой же силы, как B. Все поединки между этими борцами закончатся в пользу второй деревни, и этих поединков — 110, т. е. поединков, в которых выиграл борец нашей деревни, не больше, чем $20 \cdot 20 - 110 = 290$.

7. Значения $a = 2$ и $a = 3$ возможны: например, $2^2 - 1 = 2 + 1$, $(3-1)^2 = 3 + 1$. Предположим, что при некотором $a > 3$ требуемое равенство выполнено:

$$A = (a^{m_1} - 1) \dots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \dots (a^{k_l} + 1). \qquad (1)$$

Л е м м а 1. *Как любое m_i, так и $a - 1$ являются степенями двойки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть γ — произвольный нечетный делитель числа m_i (возможно, $\gamma = 1$), а p — любой простой делитель числа $a^\gamma - 1$. Тогда A делится на p (см. факт 8), значит, в правом произведении найдется множитель $a^{k_j} + 1$, делящийся на p (см. факт 9). Заметим, что

$$((a^{k_j})^\gamma + 1) - ((a^\gamma)^{k_j} - 1) = 2.$$

С другой стороны, $(a^{k_j})^\gamma + 1$ делится на p, так как $a^{k_j} + 1$ делится на p, а $(a^\gamma)^{k_j} - 1$ делится на p, так как $a^\gamma - 1$ делится на p. Значит, 2 делится на p, откуда $p = 2$. Итак, 2 — единственный простой делитель числа $a^\gamma - 1$, значит, $a^\gamma - 1$ — степень двойки (см. факт 10), т. е. найдется такое K, что $2^K = a^\gamma - 1 = (a^{\gamma-1} + \dots + a + 1)(a - 1)$. Так как γ — нечетно, выражение в первой скобке — нечетный делитель числа 2^K, т. е. 1. Значит, $\gamma = 1$. Следовательно, $a - 1 = 2^K$. Кроме того, мы доказали, что единица — единственный нечетный делитель числа m_i, значит, m_i — степень двойки. Лемма доказана.

Так как $a-1>2$, то $a-1$ делится на 4, поэтому a^k+1 дает остаток 2 при делении на 4 при любом k (см. факт 7).

Обозначим $a_i=\dfrac{a^{2^i}+1}{2}$. Тогда a_i — нечетное число. Нам понадобится следующая формула:

$$a^{2^d}-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{d-1}}+1)=\\ =2^K\cdot 2^d\cdot a_0\dots a_{d-1}. \quad (2)$$

Лемма 2. *Все a_i попарно взаимно просты.*

Доказательство. Рассмотрим числа a_i и a_j и докажем, что они взаимно просты. Можно считать, что $i>j$. В силу (2) $a^{2^i}-1$ делится на a_j, с другой стороны, $a^{2^i}+1$ делится на a_i. Поэтому любой общий делитель чисел a_i и a_j является также и делителем числа

$$2=(a^{2^i}+1)-(a^{2^i}-1).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что числа a_i и a_j нечетны. Лемма доказана.

Перемножив представления (2) для $a^{2^{m_i}}-1$, получим, что A представляется в виде $A=2^N(a_0)^{N_0}\dots(a_q)^{N_q}$, причем $N>N_0+\dots+N_q$. Поскольку любое из чисел $a^{k_j}+1$ дает остаток 2 при делении на 4, то $l=N$ (см. (1)). Но каждое из $a^{k_j}+1$ делится на одно из чисел a_i (действительно, если $k_j=2^rs$, где s нечетно, то $a^{k_j}+1$ делится на a_r). Тогда, поскольку $l>N_0+\dots+N_q$, то на какое-то из чисел a_i делится больше, чем N_i чисел $a^{k_j}+1$, а следовательно, A делится на $a_i^{N_i+1}$. Противоречие с тем, что a_i нечетны и попарно взаимно просты.

2004 год

8 класс

1. Нетрудно проверить, что корнями уравнения $x^2+3x+2=0$ являются -1 и -2. После увеличения коэффициентов на единицу получится уравнение $x^2+4x+3=0$ с корнями -1 и -3, потом уравнение с корнями -1 и -4, затем — с корнями -1 и -5, и, наконец, уравнение с корнями -1 и -6.

Чтобы проверить вышесказанное, придется решить 5 квадратных уравнений. Вместо этого можно воспользоваться теоремой Виета. Все наши уравнения имеют вид

$$x^2+(p+1)x+p=0,$$

где p — целое число. Тогда, по обратной теореме Виета, корнями этого уравнения будут целые числа -1 и $-p$:

$$(-1)+(-p)=-(p+1), \qquad (-1)(-p)=p.$$

Комментарии. 1°. Ср. с задачей 2 для 9 класса.

2°. Годится любое уравнение, у которого один корень -1, а другой — целый. При увеличении коэффициентов на единицу корень -1 будет сохраняться, а второй корень — уменьшаться на единицу.

3°. То, что корень -1 сохраняется, можно понять еще и так: увеличение коэффициентов p и q на единицу означает прибавление $x+1$ к исходному трехчлену. При этом значение трехчлена в точке -1 меняться не будет. Значит, если число -1 было корнем, то оно и останется корнем.

4°. Попробуем объяснить, как догадаться, что один из корней нужно брать равным -1. Пусть x_1 и x_2 — корни. Тогда (по теореме Виета)

$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1x_2=q.$$

Значит, при увеличении p и q на единицу, сумма корней уменьшается на единицу. Самый простой способ этого добиться — это оставить x_1 неизменным, уменьшив x_2 на 1:

$$x_1+(x_2-1)=-(p+1).$$

Посмотрим, что произойдет с произведением корней:

$$x_1(x_2-1)=x_1x_2-x_1.$$

Итак, произведение корней уменьшится на x_1, но оно должно увеличиться на 1. Значит, нужно взять $x_1=-1$.

2. Нужное разрезание изображено на рис. 19 на с. 75. Этот пример можно придумать следующим образом. Разобьем трапецию на квадрат площади 4 и треугольник площади 1. Мы видим, что площадь трапеции равна 5. Значит, и площадь искомого квадрата равна 5, поэтому его сторона равна $\sqrt{5}$. По теореме Пифагора длину $\sqrt{5}$ имеет гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2. Теперь уже легко придумать нужное разрезание.

Комментарий. Интересен следующий вопрос: какие отрезки можно расположить на плоскости так, чтобы их концы находились в углах клеток? Пусть длина такого отрезка равна d. Согласно теореме Пифагора, d^2 — натуральное число. Однако этого недостаточно. Например, отрезок длины $\sqrt{3}$ так расположить не удастся — нужно еще чтобы d^2 можно было представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. По этому поводу см. комментарий к задаче 4 для 11 класса олимпиады 1996 г., а также к задаче 2 для 8 класса олимпиады 1993 г.

3. Продлим AI до пересечения с KC в точке X и продлим CI до пересечения с LA в точке Y (рис. 168). Точка I — центр вписанной окружности — является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. Значит, AX — биссектриса в равнобедренном треугольнике KAC, проведенная к основанию. Поэтому она является и высотой: $AX \perp KC$. Аналогично, $CY \perp AL$. Таким образом, в треугольнике AMC отрезки AX и CY — высоты. Поскольку прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке, I — точка пересечения высот треугольника AMC. Следовательно, прямая MI содержит высоту, а значит, она перпендикулярна прямой AC.

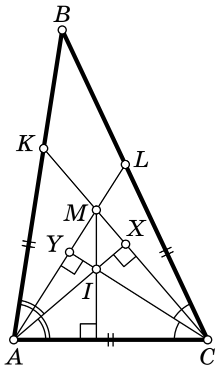


Рис. 168

4. Первый способ. Заметим, что при повышении курса акций он умножается на $1+\frac{n}{100}$, а при понижении — на $1-\frac{n}{100}$. Следовательно, после k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^k\left(1-\frac{n}{100}\right)^l. \quad (1)$$

Докажем, что это число не может быть равно единице. Для этого запишем дробь $\frac{n}{100}$ в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где $b>1$. Тогда $1+\frac{n}{100}=\frac{b+a}{b}$ и $1-\frac{n}{100}=\frac{b-a}{b}$, и (1) запишется так:

$$\frac{(b+a)^k(b-a)^l}{b^{k+l}}. \quad (2)$$

Так как дробь $\frac{a}{b}$ несократима, числа $b+a$ и b взаимно просты, числа $b-a$ и b тоже взаимно просты (см. факт 5). Следовательно, дробь (2) также несократима, а значит, не равна единице, что и требовалось доказать.

Комментарии. 1°. Приведем более подробное доказательство несократимости дроби (2). От противного, пусть дробь сократима, тогда найдется простое число p, которое делит и числитель, и знаменатель. Так как p простое и p делит знаменатель, то p делит b (см. факт 9). Так как p делит числитель, то p делит $(b+a)^k$ или $(b-a)^l$. Значит, p делит $b+a$ или $b-a$. В любом случае p делит a (так как оно делит b). Но это противоречит взаимной простоте a и b.

2°. Из решения следует, что после каждого изменения курса акций возрастает количество знаков после запятой в числе, выражающем отношение текущего курса к начальному (подумайте, почему).

Второй способ. Условие, что выражение (1) равно единице, можно записать так:

$$(100+n)^k(100-n)^l=100^{k+l}.$$

Так как правая часть четна, то и левая часть должна быть четна, значит, n четно (см. факт 23). Аналогично, левая часть делится на 5, значит, n делится на 5. Значит, n делится на 10. Можно перебрать все 9 возможных вариантов: $n=10$, 20, ..., 90. Например, если $n=10$, то левая часть делится на 11, что невозможно.

Можно обойтись без перебора: пусть n не делится на 25. Тогда числа $100-n$ и $100+n$ тоже не делятся на 25. Значит, пятерка входит в разложение левой части на простые множители ровно $k+l$ раз (см. факт 10). Но она входит в разложение правой части $2(k+l)$ раз — противоречие. Итак, n делится на 25. Аналогично доказывается, что n делится на 4. Но тогда n делится на 100, что невозможно, ибо $0<n<100$.

5. а) Рассмотрим выпуклый семиугольник $ABCDEFG$ (например, правильный). Искомые семь многоугольников — это треугольники, определенные парами соседних сторон семиугольника (т. е. треугольники ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGA и GAB, рис. 169, *а*). Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Рассмотрим какие-нибудь шесть из них, например, все, кроме треугольника GAB. Их можно прибить двумя гвоздями (в точках F

и C). С другой стороны, так как любой гвоздь прибивает не более трех из наших многоугольников, то двумя гвоздями можно прибить не более шести многоугольников.

б) Рассмотрим правильный семиугольник $ABCDEFG$ (рис. 169, *б*). Искомые восемь многоугольников — это четырехугольники $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, $DEFG$, $EFGA$, $FGAB$, $GABC$ и «маленький» семиугольник, находящийся в центре, ограниченный диагоналями AD, BE, CF, DG, EA, FB, GC. Покажем, что любые семь из них можно прибить двумя гвоздями. Действительно, если взять семь четырехугольников $ABCD$, ..., $GABC$, то их можно прибить к столу гвоздями в точках A и E. Если же взять центральный семиугольник и шесть четырехугольников, например, все кроме $BCDE$, то их можно прибить гвоздями в точках H и F, где H — общая точка отрезков AD и CG.

Теперь докажем, что все восемь многоугольников нельзя прибить двумя гвоздями. Предположим, что можно. Тогда один из гвоздей должен прибивать центральный семиугольник. Но этот гвоздь прибивает не более двух четырехугольников. Значит, оставшийся гвоздь должен прибить по меньшей мере пять четырехугольников, что невозможно. Противоречие.

Комментарии. 1°. Можно построить пример, в котором гвозди прибивают внутренние точки многоугольников. Например, можно немного «раздуть» имеющиеся многоугольники (рис. 169, *в* и *г*).

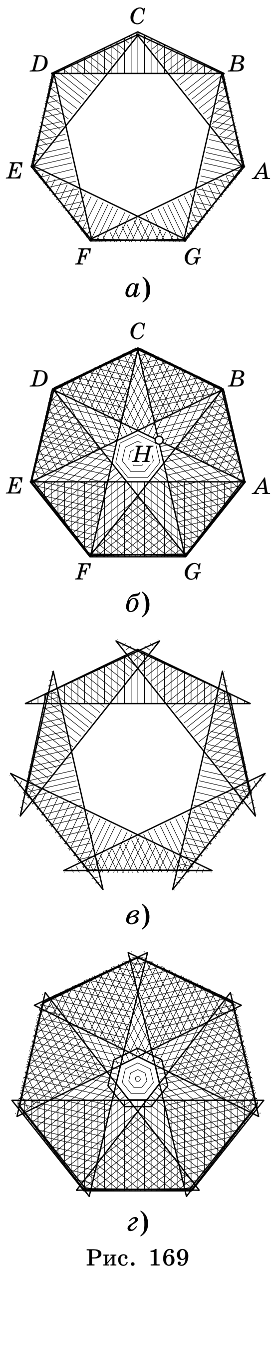


Рис. 169

2°. Знаменитая теорема Хелли (см. [46], гл. 2, § 22) утверждает, что *если на плоскости даны несколько выпуклых многоугольников, любые три из которых можно прибить к плоскости одним гвоздем, то и все многоугольники можно прибить одним гвоздем.* Наша задача опровергает аналогичное утверждение с заменой одного гвоздя на два.

6. Все доминошки занимают 64 клетки, поэтому одна клетка всегда свободна. Будем называть ее *дыркой*. Заметим сначала, что если в (горизонтальном) ряду с дыркой есть хотя бы одна вертикальная доминошка, то одну из таких доминошек можно сделать горизонтальной. Действительно, для этого достаточно сдвинуть все горизонтальные доминошки, находящиеся между дыркой и вертикальной доминошкой, после чего повернуть вертикальную доминошку. Будем повторять такую операцию, пока дырка не окажется в ряду без вертикальных доминошек (это обязательно случится, так как после каждой операции число вертикальных доминошек уменьшается).

Когда указанный процесс остановится, дырка будет находиться в верхнем ряду: действительно, дырка окажется в ряду, в котором все доминошки горизонтальны, а, значит, в этом ряду нечетное число клеток. Но во всех рядах, кроме верхнего, число клеток четно (см. факт 23).

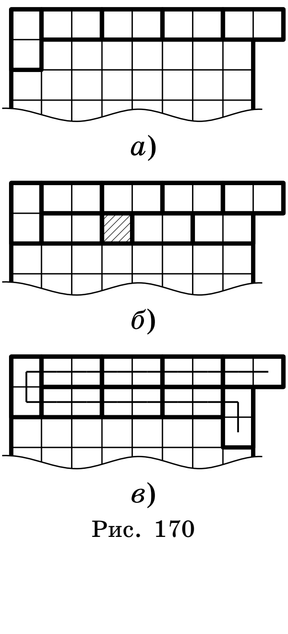
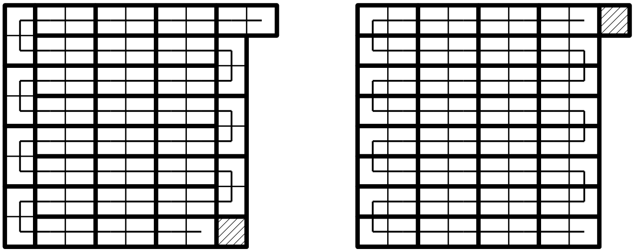


Рис. 170

Начнем строить «змею»: передвинем дырку в верхний левый угол и сделаем вертикальной доминошку, оказавшуюся под дыркой («змея» занимает весь верхний ряд, см. рис. 170, *а*).

Теперь рассмотрим оставшуюся часть доски. Применим процесс, описанный в первом абзаце, к этой части. После этого дырка окажется во втором сверху ряду, причем в этом ряду будет только одна вертикальная доминошка (рис. 170, *б*). Передвинем теперь дырку в правый конец второго ряда и сделаем оказавшуюся под ней доминошку вертикальной. «Змея» теперь занимает уже два верхних ряда (рис. 170, *в*).

Повторяя эти операции, в итоге получим «змею», составленную из всех доминошек (рис. 171, *а*). Теперь, если «змея переползет» на одну клетку вперед, то все доминошки станут горизонтальными (рис. 171, *б*).



а) *б*)

Рис. 171

Комментарий. Заметим, что упоминавшееся в решении переползание «змеи» на одну клетку вперед есть применение процедуры, описанной в первом абзаце решения.

9 класс

1. Заметим, что при повышении курса акций он умножается на $\frac{117}{100}$, а при понижении — на $\frac{83}{100}$. Следовательно, после k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(\frac{117}{100}\right)^k\left(\frac{83}{100}\right)^l.$$

Если это число равно единице, то $117^k\cdot 83^l = 100^{k+l}$. Но в правой части этого равенства стоит четное число, а в левой — нечетное. Противоречие (см. факт 23).

Комментарий. Сравните с задачей 4 для 8 класса.

2. Например, годится уравнение $x^2+3x+2=0$. Действительно, используя обратную теорему Виета, легко понять, что корнями уравнения $x^2+(q+1)x+q=0$ являются числа -1 и $-q$. См. также решение задачи 1 для 8 класса и комментарии к нему.

3. Доказательство от противного. Пусть шар вернулся в исходную вершину. Обозначим эту вершину через A, а точки отражения через A_1, ..., A_n. Выберем одну из сторон бильярда и будем называть параллельные ей прямые *вертикальными*, а перпендикулярные ей прямые *горизонтальными*. Тогда каждая сторона бильярда либо вертикальна, либо горизонтальна. Заметим, что угол (обычный, ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара постоянен (нетрудно проверить, что он не меняется при отражениях относительно как вертикальных, так и горизонтальных прямых, см. рис. 172). Можно считать, что он не равен 0° и 90°, иначе шар свалится в соседнюю лузу. Так как A — вершина внутреннего угла, то существует лишь один луч с вершиной в A, образующий данный угол с вертикальной прямой и лежащий в той четверти, где расположен стол. Значит, шар вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел, и $A_1 = A_n$.

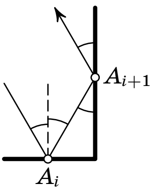


Рис. 172

Таким образом, первый и последний отрезки пути шара совпадают. Рассмотрим два отражения шара от стенки в точке A_1 — первое и последнее. Учитывая закон отражения, получим, что шар в конце пути прилетел в точку A_1 по той же траектории, по которой вылетел из нее в начале. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути шара также совпадают. Итак, путь шара имеет такой вид:

$$A \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_2 \to A_1 \to A.$$

Рассуждая аналогично, мы видим, что путь шара имеет следующий вид:

$$A \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{k-1} \to A_k \to A_{k-1} \to \ldots \to A_2 \to A_1 \to A.$$

Иными словами, половину времени шар двигался по некоторой траектории, а вторую половину — возвращался обратно по ней же. Значит, шар, отразившись от стенки в точке A_k, стал двигаться по той же прямой, по которой он прилетел в A_k, только в противоположную сторону. Но тогда отрезок $A_{k-1}A_k$ пути шара перпендикулярен стороне многоугольника, следовательно, образует с вертикальной прямой угол 0° или 90°. Так как угол с вертикальной прямой не меняется, то и в начале угол был равен 0° или 90°, что невозможно. Противоречие.

4. Пусть a, b, и c — длины сторон треугольника ABC. Без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 173). Тогда

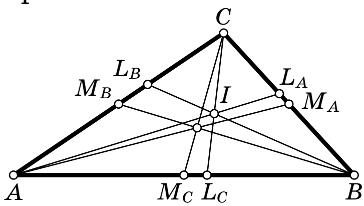


Рис. 173

$$\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}>\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}\geqslant\frac{l_a+l_b}{c}>\frac{AI+IB}{c}>1.$$

Здесь второе неравенство выполнено, поскольку любой отрезок внутри треугольника (в частности, любая медиана) не превосходит наибольшей стороны (см. [46], гл. 10, § 10). Третье неравенство выполнено, поскольку $l_a > AI$ и $l_b > BI$. Последнее неравенство выполнено в силу неравенства треугольника для треугольника AIB.

Комментарии. 1°. Данная задача — пример ситуации, когда частный случай гораздо сложнее общего: из решения видно, что биссектрисы и медианы ни при чем — неравенство верно для произвольных отрезков, соединяющих вершину треугольника и какую-то точку на противоположной стороне. (Подумайте, можно ли в условии задачи заменить биссектрисы на высоты.) Попытка решить задачу методом «грубой силы», используя формулы для медиан и биссектрис, вряд ли приведет к успеху (автору задачи не удалось этого сделать даже с помощью компьютера).

2°. Отметим, что оценка точная, т. е. число 1 в правой части нельзя заменить на большее так, чтобы неравенство осталось верным для всех треугольников (докажите это!).

3°. Бытует мнение, что любое верное симметричное неравенство можно доказать многократным применением неравенств о среднем арифметическом, среднем геометрическом и аналогичных. Наша задача является контрпримером к этому утверждению, поскольку в классических неравенствах о средних равенство достигается, когда все слагаемые равны между собой. В данной же задаче, если $\frac{l_a}{m_a}=\frac{l_b}{m_b}=\frac{l_c}{m_c}$, то $\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}=3$, что является максимумом, а не минимумом (докажите!).

Замечания по поводу этой задачи присылайте автору по адресу `markelov@mccme.ru`.

5. Пусть l — произведение первых 21 простых чисел. Заметим, что l — наименьшее неразрешенное число. Нетрудно проверить, что 21-е простое число — это $71 < 2004$. Значит, 2004! делится на l.

Рассмотрим число m, полученное после первого хода первого игрока. Так как число камней, взятое за один ход, не может делиться на l, число m не делится на l (см. факт 5). Рассмотрим остаток r от деления числа m на l (см. факт 7). Этот остаток меньше, чем l, поэтому он не может делиться больше чем на 20 простых чисел. Второй игрок сможет взять r камней и снова получить число, делящееся на l, и т. д.

Итак, если второй будет каждый раз брать остаток от деления числа камней на l, то после каждого хода первого игрока число камней в кучке не делится на l, а после хода второго игрока — делится. Значит, первый игрок не сможет взять последние камни, так что выиграет второй игрок.

6. а) Заметим, что угадать 18 карт не составляет труда. Действительно, первыми двумя рубашками помощник может «закодировать» масть второй карты (сопоставив каждой масти один из четырех возможных вариантов расположения двух рубашек), следующими двумя рубашками — масть четвертой и т. д.

Когда в колоде остались две карты, экстрасенс знает, какие они (так как он видел, какие 34 карты вышли), и поэтому помощнику достаточно закодировать лишь порядок, в котором они лежат; это легко сделать при помощи рубашки 35-й карты. Действительно, экстрасенс с помощником могут договориться о том, какая масть считается «старше», после чего помощник может положением 35-й карты указать какая из карт старше — 35-я или 36-я. Таким образом экстрасенс угадает масти 19 карт.

б) Будем называть 1, 3, 5, ..., 35-ю карты *нечетными*. Рассмотрим следующие 17 карт: все нечетные карты, кроме первой и предпоследней, и вторую карту. По принципу Дирихле (см. факт 1) среди этих семнадцати карт обязательно найдутся пять карт одной масти. Назовем эту масть *основной*. Положением первых двух карт колоды помощник может закодировать основную масть. Положением $(2k-1)$-й и $2k$-й карт (для $2 \leqslant k \leqslant 17$) помощник может закодировать масть $2k$-й карты. Положением рубашки предпоследней карты помощник может закодировать масти двух последних карт (см. решение пункта «а»).

Экстрасенс должен называть основную масть на каждую из выбранных семнадцати карт. Тогда он угадает масти хотя бы пяти из выбранных семнадцати карт. Кроме того, экстрасенс угадает масти всех четных карт, кроме второй и последней, а также масти двух последних карт. Всего он угадает масти хотя бы 23 карт.

Комментарий. Покажем, как экстрасенс мог угадать масти 24 карт. Для этого достаточно из первых 34 карт угадать масти хотя бы 22 (см. конец решения пункта «а»). Разделим эти 34 карты, кроме первой, на 11 троек, идущих подряд. Положение первой карты (не входящей ни в одну из троек) будет указывать, каких мастей в первой тройке больше — черных или красных. Не уменьшая общности, предположим, что черных больше.

Рассмотрим карты первой тройки. Назовем *натуральными* картами первые две черные карты. Оставшуюся карту назовем *ненатуральной* (она может быть как черной, так и красной). Поворотом рубашки каждой из двух натуральных карт помощник покажет, какую из двух мастей черного цвета должен называть экстрасенс. Используя эту информацию, экстрасенс угадает масти обеих натуральных карт. Поворотом рубашки ненатуральной карты помощник кодирует цвет, который чаще встречается в следующей тройке. (Заметим, что если красная карта в первой тройке не последняя, то ее ненатуральность экстрасенс сможет опознать только после ее открытия.)

Теперь то же самое можно сделать со второй тройкой — при этом экстрасенс угадает в ней две масти из трех и узнает преобладающий цвет следующей тройки и т. д. Таким образом, он угадает масти всех карт, кроме, быть может, первой карты, и еще одиннадцати карт (по одной в каждой тройке), т. е. всего не менее 24 карт.

Известен (гораздо более сложный) алгоритм, обеспечивающий угадывание мастей 26 карт (см. [89], [90]).

10 класс

1. Пусть a и b — первый и n-й члены прогрессии, S — сумма первых n членов. Тогда

$$S = \frac{a+b}{2} n.$$

Значит, $2S$ делится на n. Так как $2S$ — степень двойки, то и n — степень двойки.

Комментарий. Мы использовали следующее утверждение: любой делитель степени двойки сам является степенью двойки. Аккуратное доказательство этого утверждения требует теоремы об однозначности разложения на простые множители (подумайте, почему), см. факт 10.

2. Предположим, что существует такой тетраэдр $ABCD$ (рис. 174). Пусть AB — гипотенуза треугольника ABC. Тогда AB является также и гипотенузой треугольника ABD. Нетрудно видеть, что в этом случае CD — гипотенуза треугольников ACD и BCD. Середину гипотенузы CD обозначим через M. Так как треугольники ACD и BCD прямоугольные,

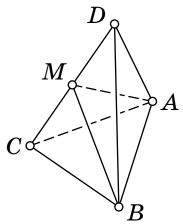


Рис. 174

$$AM = BM = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$$

(см. факт 14).

Точки A, M и B не могут лежать на одной прямой, ибо тогда точки A, B, C и D лежали бы в одной плоскости. Рассмотрим треугольник AMB. Для него должно выполняться неравенство треугольника: $AB < AM + MB$. Однако

$$AB = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AM + MB.$$

Противоречие.

3. Например,

$$\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{7}}.$$

Это равенство легко проверить возведением в квадрат.

Как догадаться до такого равенства? Будем искать черное число, равное сумме двух белых. Опыт работы с радикалами подсказывает, что нужно брать *сопряженные* белые числа:

$$\sqrt{A+B\sqrt{2}} + \sqrt{A-B\sqrt{2}} = \sqrt{C+D\sqrt{7}}. \qquad (1)$$

Возводя обе части равенства в квадрат, получим:

$$2A + 2\sqrt{A^2-2B^2} = C + D\sqrt{7}.$$

Итак, достаточно подобрать такие числа A и B, что $A^2 - 2B^2 = 7$, тогда можно взять $C = 2A$, $D = 2$.

Комментарии. 1°. Уравнение $A^2-2B^2=7$ имеет бесконечно много решений в целых числах. Поэтому и уравнение (1) имеет бесконечно много решений. Это связано с тем, что уравнение Пелля $A^2-2B^2=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах (см. по этому поводу [26]).

2°. Имеется критерий представимости чисел в виде A^2-2B^2 с целыми A и B, похожий на критерий представимости чисел в виде суммы двух квадратов, см. комментарий к задаче 4 для 11 класса олимпиады 1996 г.

3°. У исходной задачи есть и другие решения:

$$\sqrt{26-18\sqrt{2}}+\sqrt{5+3\sqrt{2}}+\sqrt{27+9\sqrt{2}}=\sqrt{54+18\sqrt{7}},$$

$$\sqrt{mn+n+2m\sqrt{n}}+\sqrt{mn+n-2m\sqrt{n}}+\sqrt{n+1+2\sqrt{n}}+ \\ +\sqrt{n+1-2\sqrt{n}}=\sqrt{4mn+4n+8n\sqrt{m}}.$$

Здесь первое равенство следует из равенства

$$((2-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2}))\sqrt{3-\sqrt{2}}+3\sqrt{3+\sqrt{2}}=3\sqrt{6+2\sqrt{7}}.$$

Оно показывает, что число белых слагаемых может быть равно трем. Второе равенство показывает, что пару чисел (2, 7) можно заменить на любую другую пару чисел, не являющихся полными квадратами (это равенство фактически придумано школьником на олимпиаде).

4°. Интересно, что для «ординарных» радикалов ответ на аналогичный вопрос отрицательный. Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа, то ни один из корней $\sqrt{p_i}$ не представляется в виде суммы других с рациональными коэффициентами. Элементарное доказательство этого факта можно прочитать в [24]. Верно и более общее утверждение, но доказательство его гораздо сложнее: сумма чисел вида $\sqrt[n_i]{p_i^{m_i}}$ с рациональными коэффициентами является иррациональным числом, если все дроби m_i/n_i правильные и различные.

5°. Заметим, что решение уравнений в радикалах — знаменитая тема, которая положила начало современной алгебре [83]. Замечания по поводу этой задачи присылайте ее автору по адресу markelov@mccme.ru.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Первый способ. Пусть O и O' — центры соответственно описанной и вневписанной окружностей, упоминающихся в условии задачи (см. факт 16). Будем считать, что A' лежит на луче CB, а B' лежит на луче CA (рис. 175, *а*). Достаточно доказать, что $OA'\perp B'C'$ и $OB'\perp A'C'$. Нетрудно видеть, что $O'A\perp B'C'$. Значит, чтобы доказать перпендикулярность прямых OA' и $B'C'$, достаточно доказать, что $O'A\parallel OA'$. Мы докажем, что

$$\angle A'O'A=\angle O'AO.$$

Тогда из того, что окружности имеют равные радиусы, следует, что $A'O'AO$ — равнобочная трапеция, и прямые $O'A$ и OA' параллельны.

Из четырехугольника $A'O'C'B$ находим

$$\angle A'O'C' = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle A'BC' = 180^\circ - \angle A'BC' = \angle B$$

и, аналогично, $\angle B'O'C' = \angle A$. Следовательно,

$$\angle A'O'A = \angle A'O'C' + \frac{1}{2}\angle B'O'C' = \angle B + \frac{1}{2}\angle A.$$

С другой стороны, если $\angle C$ острый, то

$$\angle O'AO = \angle O'AB + \angle BAO = \frac{1}{2}\angle B'AC' + (90^\circ - \angle C) = \\ = 180^\circ - \angle C - \frac{1}{2}\angle A = \angle B + \frac{1}{2}\angle A.$$

Во втором равенстве мы использовали, что $\angle O$ равнобедренного треугольника AOB равен $2\angle C$. Проверку того, что если $\angle C$ тупой, то получается такая же формула для $\angle O'AO$, мы оставляем читателю. Итак, $\angle O'AO = \angle A'O'A$. Поэтому $OA' \perp B'C'$. Аналогично доказывается, что $OB' \perp \perp A'C'$. Значит, O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$.

В т о р о й с п о с о б (предложен школьниками на олимпиаде). Пусть K — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC (рис. 175, *б*), тогда $OK \perp BC$. Кро-

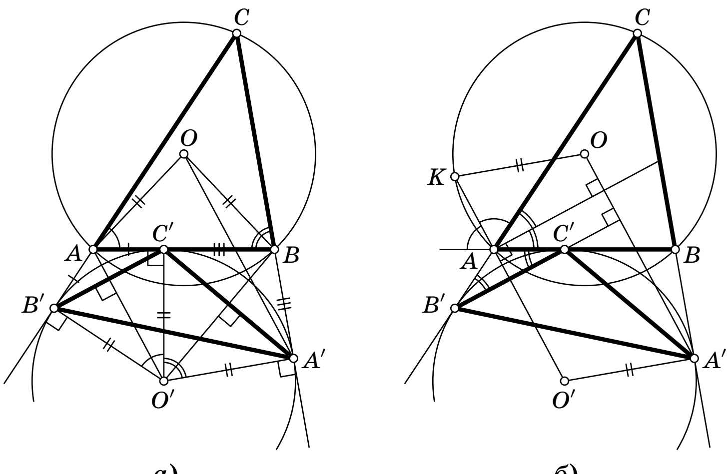


Рис. 175

ме того, $O'A' \perp BC$, а отрезки OK и $O'A'$ равны по условию. Поэтому четырехугольник $OKO'A'$ — параллелограмм и $OA' \parallel O'K$. Используя теорему об углах, вписанных в окружность, нетрудно проверить, что

$$\angle KAC = \frac{\pi - \angle CAB}{2},$$

поэтому AK — биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине A. Значит, точки K, A и O' лежат на одной прямой, и параллельные отрезки $A'O$ и $O'K$ перпендикулярны биссектрисе угла CAB. Нетрудно видеть, что эта биссектриса параллельна прямой $B'C'$. Значит, $B'C' \perp OA'$. Аналогично, $A'C' \perp OB'$. Поэтому O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$.

6. См. решение задачи 6 для 9 класса.

11 класс

1. Первый способ. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. Выделим полный квадрат, для этого обозначим $t = x + \frac{b}{2a}$ и $D = b^2 - 4ac$. Тогда

$$ax^2 + bx + c = a\left(t^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

При $D \leqslant 0$ положим $p = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$. Тогда искомое представление

$$a\left(t^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = \frac{a}{2}((t-p)^2 + (t+p)^2) = \\ = \frac{a}{2}\left(x + \frac{b - \sqrt{-D}}{2a}\right)^2 + \frac{a}{2}\left(x + \frac{b + \sqrt{-D}}{2a}\right)^2.$$

При $D > 0$ положим $q = \frac{\sqrt{D}}{2a\sqrt{2}}$. Тогда

$$a\left(t^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a(2(t+q)^2 - (t+2q)^2) = \\ = 2a\left(x + \frac{b + \sqrt{D/2}}{2a}\right)^2 - a\left(x + \frac{b + \sqrt{2D}}{2a}\right)^2.$$

Второй способ. Если квадратный трехчлен $f(x)$ можно представить в виде суммы двух трехчленов с нулевыми дискриминантами, то в таком же виде можно представить и трехчлен $Af(ax+b)$, где A, a и b — константы ($A \neq 0$, $a \neq 0$).

Когда таким преобразованием можно перевести трехчлен $f(x)$ в трехчлен $g(x)$? Нетрудно видеть, что это можно сделать тогда и только тогда, когда их дискриминанты имеют один и тот же знак.

Дадим набросок доказательства: выделяя полный квадрат, любой трехчлен можно привести к виду $\alpha x^2+\beta$, затем, подбирая A и a, приведем трехчлен к виду x^2 или $x^2\pm 1$. Осталось заметить, что если трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ можно перевести в трехчлен $h(x)$, то трехчлен $f(x)$ можно перевести в $g(x)$.

В силу вышесказанного, нам осталось представить в виде суммы двух трехчленов с нулевыми дискриминантами по *одному* трехчлену для каждого знака дискриминанта. Например:

$$x^2+x^2\ (D=0),\quad x^2+(x+1)^2\ (D<0)\ \text{и}\ (2x+1)^2-x^2\ (D>0).$$

2. Пусть a, b, c, d — четыре попарно скрещивающиеся прямые. Построим такие плоскости $\alpha\supset a$ и $\beta\supset b$, что α параллельна β (рис. 176). Аналогично, построим

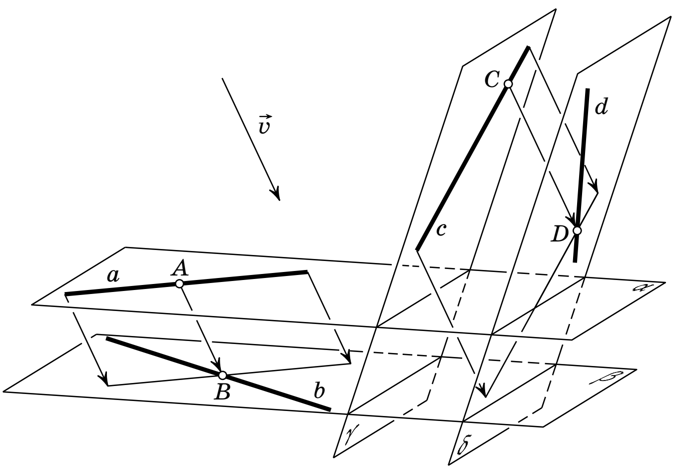


Рис. 176

такие плоскости $\gamma\supset c$ и $\delta\supset d$, что γ параллельна δ. Рассмотрим произвольное направление $\vec v$, не параллельное никакой из этих плоскостей. Спроецируем прямую a на плоскость β вдоль этого направления. Обозначим через B точку пересечения проекции и прямой b, а через $A \in a$ ее прообраз при проецировании, тогда прямая AB параллельна направлению $\vec{v}$. Аналогично строятся точки $C \in c$ и $D \in d$, для которых прямая CD параллельна направлению $\vec{v}$. Тогда прямая AB параллельна CD, поэтому либо точки A, B, C и D лежат на одной прямой, либо четырехугольник $ABCD$ — трапеция, либо четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Основная сложность состоит в том, чтобы исключить случай точек, лежащих на одной прямой. Пусть, сначала, плоскости α и γ не параллельны.

1°. Начнем издалека. Рассмотрим поверхность H, заданную в пространстве уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Эта поверхность называется *однополостным гиперболоидом* (см. [69], гл. 7). Ее пересечение с плоскостью $z = 0$ есть окружность. Оказывается, через каждую точку этой окружности проходят ровно две прямые, целиком лежащие на H (рис. 177). Читатель может попытаться проверить это и последующие утверждения в координатах.

Оказывается, такие прямые (они называются *образующими*) разбиваются на два семейства: прямые одного семейства скрещиваются, а разных — пересекаются. Кроме того, никаких других прямых на гиперболоиде нет.

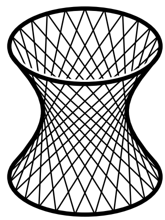


Рис. 177

Заметим также, что если все эти прямые параллельно перенести в начало координат, то они перейдут в образующие конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

2°. Можно показать (попробуйте), что любые три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, можно перевести аффинным преобразованием (см. [69], гл. 3) в любые другие три прямые, удовлетворяющие тем же условиям. Плоскости α и γ не параллельны, поэтому, переобозначив при необходимости прямые, можно считать, что прямые a, b и c не параллельны одной плоскости.

Теперь возьмем любые три образующие (из одного семейства) a', b', c' на H. Нетрудно проверить, что они не параллельны одной плоскости, значит, аффинным преобразованием можно перевести их в a, b и c. Но наша задача инвариантна относительно аффинных преобразований, поэтому можно с самого начала считать, что прямые a, b и c лежат на H. Они принадлежат одному семейству образующих, которое мы будем называть *первым*.

Нетрудно видеть, что прямая либо лежит на гиперболоиде, либо пересекает его не более, чем в двух точках. Значит, прямые, пересекающие каждую из прямых a, b и c, — это в точности образующие H из второго семейства. Поэтому возможны две ситуации: 1) прямая d лежит на H, тогда каждая из образующих второго семейства пересекает все прямые a, b, c, d, и 2) прямая d пересекает H не более, чем в двух точках, тогда прямых, пересекающих каждую из прямых a, b, c, d, не более двух.

Теперь потребуем, чтобы направление $\vec{v}$ было параллельно плоскости $z=0$. Так как ни одна из образующих не параллельна этой плоскости, точки A, B, C и D не будут лежать на одной прямой.

3°. Чтобы исключить случай параллелограмма, достаточно обеспечить неравенство $AB \neq CD$. Заметим, что $AB = \frac{p}{\sin\varphi}$ и $CD = \frac{q}{\sin\psi}$, где p — расстояние между плоскостями α и β, q — расстояние между плоскостями γ и δ, φ — угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью α, ψ — угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью γ.

Итак, достаточно, чтобы выполнялось неравенство
$$\sin\varphi < \frac{p}{q}\sin\psi. \tag{2}$$

Пусть f — прямая пересечения плоскости α и плоскости $z=0$. Пусть сначала f не параллельна плоскости γ. Если взять вектор $\vec{v}$ параллельным прямой f, то $\varphi=0$, $\psi\neq 0$. Если этот вектор чуть-чуть пошевелить так, чтобы он оставался параллельным плоскости $z=0$, то условие (2) сохранится в силу непрерывности, и соответствующие точки A, B, C и D будут вершинами трапеции.

Если f параллельна плоскости γ, то рассмотрим любую такую плоскость $\varkappa$, что угол между ней и плоскостью

$z=0$ меньше, чем $\pi/4$, и прямая $\alpha\cap\varkappa$ не параллельна плоскости γ. Можно убедиться, что такая плоскость тоже не параллельна ни одной из образующих (достаточно проверить, что угол между любой из образующих и плоскостью $z=0$ равен $\pi/4$). Осталось повторить предыдущую конструкцию с плоскостью $\varkappa$ вместо плоскости $z=0$.

4°. Пусть теперь все плоскости α, β, γ, δ параллельны, тогда $\varphi=\psi$ для любого направления $\vec{v}$, и для выполнения неравенства $AB\neq CD$ достаточно неравенства $p\neq q$, которого всегда можно добиться, переобозначив прямые.

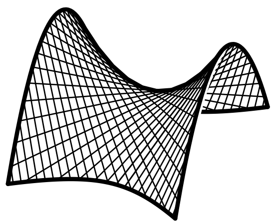


Рис. 178

Чтобы точки A, B, C и D не лежали на одной прямой, поступим следующим образом.

Рассмотрим *гиперболический параболоид* $xy=z$ (рис. 178). На нем тоже имеется два семейства образующих, причем образующие одного семейства параллельны плоскости $x=0$, а образующие другого — плоскости $y=0$.

Пусть плоскости α', β' и γ' параллельны плоскости $x=0$, а расстояния между ними такие же, как и между плоскостями α, β и γ. Каждая из этих плоскостей высекает прямую на параболоиде. Нетрудно видеть, что аффинным преобразованием можно перевести прямые a, b и c в соответствующие прямые на параболоиде. Итак, можно считать, что прямые a, b и c являются образующими параболоида. Теперь достаточно взять вектор $\vec{v}$ не параллельным ни одной из плоскостей $x=0$, $y=0$.

Комментарий. Другой способ борьбы с параллелограммами и точками на одной прямой состоит в доказательстве того, что и тех, и других в некотором смысле «мало». Например, искушенный читатель может попытаться доказать, что «плохие» векторы $\vec{v}$ образуют множество меры нуль.

б) Возьмем четыре параллельные плоскости, все попарные расстояния между которыми различны. В каждой из них проведем прямую таким образом, чтобы эти прямые попарно скрещивались. Докажем, что параллелограмма с вершинами на этих прямых не существует. Действительно, длины любых двух параллельных отрезков с концами на этих прямых пропорциональны расстояниям между соответствующими парами плоскостей, а значит, различны.

3. Первый способ. Число n можно записать в виде $n=10^k(10a+b)+c$, где $0\leqslant c<10^k$, b — ненулевая цифра, которую вычеркиваем, a — число, образованное цифрами, стоящими левее b. Тогда после вычеркивания получится число $n_1=10^ka+c$. Разность этих чисел — $n-n_1=$ $=10^k(9a+b)$. Чтобы выполнялось условие задачи, достаточно, чтобы числа $9a+b$ и 10^ka+c делились на d (см. факт 5). Если d не делится на 9, то в качестве b возьмем остаток от деления d на 9, иначе положим $b=9$. Тогда $d-b$ делится на 9, и мы возьмем $a=\dfrac{d-b}{9}$. Имеем $9a+b=d$, и осталось подобрать c и k, чтобы 10^ka+c делилось на d. Пусть k — такое число, что $10^{k-1}>d$. Число 10^ka+10^{k-1} разделим с остатком на d: $10^ka+10^{k-1}=dq+r$, $0\leqslant r<d$ (см. факт 7). Положим $c=10^{k-1}-r>0$, тогда $10^ka+c=dq$ делится на d.

Второй способ (предложен школьниками на олимпиаде). Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_k=10^kd-d$. Пусть l — количество знаков в десятичной записи числа d. Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k>l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идет десятичная запись числа $d-1$, затем — серия девяток, и наконец — десятичная запись числа 10^l-d (см. факт 11). Таким образом, при $k\geqslant l$ число n_k можно получить из числа n_{k+1} путем вычеркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

4. Докажем, что треугольник ABC либо равнобедренный, либо прямоугольный.

Пусть H — основание высоты, проведенной из вершины B. Заметим, что точка H лежит на стороне AC, а не на ее продолжении, иначе она лежала бы вне описанной окружности, и никакой диаметр через нее не проходил бы.

Пусть указанный в условии диаметр d пересекает треугольник в точках H и G (рис. 179, *а*). Пусть M — середина стороны AC. Если диаметр d содержит отрезок BM, то $H=M$, треугольник ABC — равнобедренный, и $\angle B = \pi - 2\alpha$ (рис. 179, *б*). Пусть диаметр d не содержит отрезка BM, тогда из того, что каждый из этих отрезков делит треугольник на две равновеликие части, следует, что эти отрезки пересекаются в некоторой точке K. Ясно, что площади треугольников BGK и MKH равны. Тогда площади треугольников BGH и BMH тоже равны. Значит, высоты этих треугольников, проведенные к стороне BH, равны, следовательно, отрезок BH параллелен GM. Поэтому отрезок GM — серединный перпендикуляр к хорде AC. Следовательно, он является частью диаметра окружности. Значит, точка G принадлежит двум различным диаметрам, поэтому она является центром окружности (рис. 179, *в*). Если точка G лежит на стороне BC, то $\alpha = \pi/2$ (см. факт 14), что противоречит условию, а если G лежит на стороне AB, то $\angle C = \pi/2$ и $\angle B = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

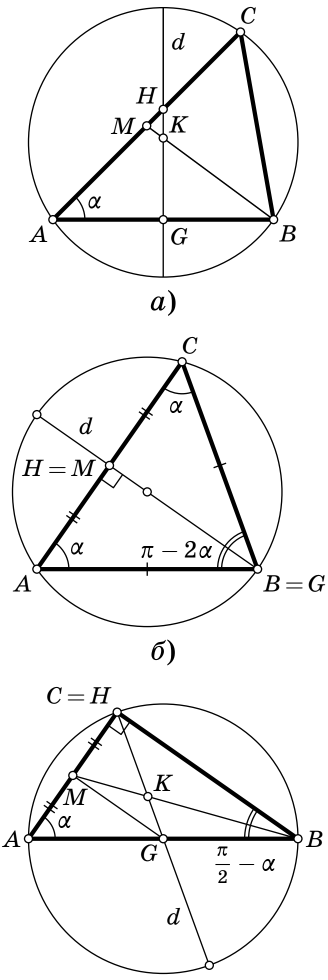


Рис. 179

В а р и а н т р е ш е н и я. Пусть указанный в условии диаметр d пересекает треугольник в точках H и G. Допустим, что точка G лежит на отрезке AB (возможно, совпадая с точкой B), тогда площадь треугольника AHG равна

$$\frac{AG}{AB}\frac{AH}{AC}S_{ABC} = \frac{AG}{AC}S_{ABC}\cos\alpha$$

(см. факт 18). Теперь условие задачи можно переписать так:

$$AG = \frac{AC}{2\cos\alpha}.$$

Таким образом AG — гипотенуза в треугольнике с катетом $AC/2$ и прилежащим углом α. Из этого сразу следует, что G — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC с прямой AB. Но серединный перпендикуляр к хорде содержит диаметр окружности. Значит, либо G — центр окружности, либо этот диаметр совпадает с диаметром d. В первом случае AB — тоже диаметр, так что $\angle C = \pi/2$. Во втором случае точка H является серединой AC, и треугольник равнобедренный.

Если точка G лежит на отрезке BC и не совпадает с точкой B, то, как и выше, можно доказать, что $\alpha = \pi/2$, но это противоречит условию.

5. Обозначим через $N(F)$ число нулей функции F на полуинтервале $[0; 2\pi)$, т. е. число значений аргумента $x \in [0; 2\pi)$, для которых $F(x) = 0$. Тогда при $A_1 = A_2 = 0$ получаем $N(\sin k_0 x) = 2k_0$. Действительно, нулями являются числа $x_n = \frac{\pi n}{k_0}$, где $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2k_0 - 1$.

Фиксируем произвольные числа A_1 и A_2 и докажем, что число нулей функции

$$F(x) = \sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + A_2 \sin k_2 x$$

на полуинтервале $[0; 2\pi)$ не меньше, чем $2k_0$. Обозначим

$$f_m(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } m \text{ делится на } 4, \\ -\cos x, & \text{если } m-1 \text{ делится на } 4, \\ -\sin x, & \text{если } m-2 \text{ делится на } 4, \\ \cos x, & \text{если } m-3 \text{ делится на } 4. \end{cases}$$

Очевидно, $f'_{m+1}(x) = f_m(x)$. Теперь определим последовательность функций

$$F_m(x) = f_m(k_0 x) + A_1 \left(\frac{k_0}{k_1}\right)^m f_m(k_1 x) + A_2 \left(\frac{k_0}{k_2}\right)^m f_m(k_2 x),$$

$m = 0,\ 1,\ \ldots$ Тогда $F_0 = F$ и $F'_{m+1} = k_0 F_m$. Ясно, что число 2π — период каждой из функций F_m.

Лемма. *Пусть f — дифференцируемая функция с периодом 2π. Тогда число нулей функции f на полуинтервале* $[0;\,2\pi)$ *не превосходит числа нулей ее производной на том же полуинтервале.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Ролля: *между двумя нулями дифференцируемой функции есть хотя бы один нуль ее производной* (см. комментарий к задаче). Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ — нули функции на указанном полуинтервале. По теореме Ролля на каждом из интервалов $(x_1;\,x_2)$, $(x_2;\,x_3)$, $\ldots$, $(x_{N-1};\,x_N)$, $(x_N;\,x_1+2\pi)$ есть хотя бы один нуль производной. Однако нуль производной на последнем интервале (обозначим его через y) может оказаться вне полуинтервала $[0;\,2\pi)$. В этом случае рассмотрим $y-2\pi$ — это тоже нуль производной, так как производная периодической функции периодична. Лемма доказана.

Из леммы следует, что $N(F_m)\geqslant N(F_{m+1})$. Поэтому достаточно доказать, что $N(F_M)\geqslant 2k_0$ для достаточно большого числа M.

Поскольку $\dfrac{k_0}{k_1}<1$, $\dfrac{k_0}{k_2}<1$, то для достаточно большого числа M

$$\varepsilon=\left|A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^M\right|+\left|A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^M\right|<1$$

(см. факт 27). Выберем такое M вида $4m+3$, тогда

$$F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)=\cos(\pi n)+A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^M\cos\left(\frac{k_1\pi n}{k_0}\right)+A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^M\cos\left(\frac{k_2\pi n}{k_0}\right).$$

Поэтому $F_M\left(\dfrac{\pi n}{k_0}\right)>1-\varepsilon>0$ для четных n и $F_M\left(\dfrac{\pi n}{k_0}\right)<-1+\varepsilon<0$ для нечетных n. Значит, непрерывная функция F_M обязательно имеет нуль между любыми соседними точками $x_n=\dfrac{\pi n}{k_0}$, где $n=0,\ 1,\ \ldots,\ 2k_0$. Поэтому $N(F_M)\geqslant 2k_0$.

Комментарии. 1°. Периодическую функцию можно представлять себе как функцию на окружности. Тогда утверждение леммы переформулируется так: число нулей функции на окружности не превосходит числа нулей ее производной, и доказательство станет более прозрачным.

2°. Идея доказательства теоремы Ролля: рассмотрите экстремумы (максимум и минимум) функции на отрезке, соединяющем точки, где функция обращается в нуль. Если один из экстремумов достигается *внутри* отрезка, то производная обращается в нуль в этой точке. Если оба экстремума достигаются на концах отрезка, то функция равна нулю на этом отрезке тождественно.

3°. Вообще говоря, может оказаться, что функция имеет бесконечно много нулей на полуинтервале. В этом случае лемму нужно понимать так: если f имеет бесконечно много нулей на полуинтервале, то и f' имеет бесконечно много нулей на этом полуинтервале. Проверьте, что доказательство остается в силе и в этом случае.

6. а) Предположим, что бойница имеет длину $s < 2/3$. За то время, пока второй стражник проходит не занятый бойницей участок стены (длины $1 - s$), первый стражник пройдет расстояние $2(1 - s) > s$. Поэтому найдется такой момент времени, в который ни один из стражников не находится возле бойницы — противоречие. Значит, $s \geqslant 2/3$.

Рассмотрим такой момент времени, в который первый стражник находится на $1/3$ впереди второго. Пусть бойница занимает тот участок стены между стражниками, который имеет длину $2/3$. Легко проверить, что тогда условия задачи выполнены.

б) Пусть суммарная длина бойниц равна s. Без ограничения общности будем считать, что в начальный момент времени стражники находятся в одной точке, а за 1 час второй стражник делает ровно один обход вдоль стены. Чтобы система бойниц была надежной, необходимо, чтобы суммарное время, проведенное стражниками около бойниц в течении часа, было не меньше часа. Более того, это время должно быть *больше* часа, так как найдется такой промежуток времени, в течение которого они оба будут находиться возле одной и той же бойницы, содержащей точку их встречи.

С другой стороны, за час каждый стражник проведет возле бойниц s часов (первый стражник пройдет все бойницы дважды, но в два раза быстрее). Итак, $2s > 1$, и следовательно $s > 1/2$.

в) Построим множество $A \subset [0; 1]$, обладающее следующими свойствами:

1) A есть объединение конечного числа непересекающихся отрезков;

2) суммарная длина этих отрезков не превосходит s;

3) если $t \notin A$, то $\{2t\} \in A$ (фигурные скобки обозначают дробную часть).

Если такое множество построено, то задачу решить несложно. Как и раньше, считаем, что в момент времени $t=0$ стражники находились в одной точке, а за отрезок времени $[0;\ 1]$ второй стражник делает ровно один обход вдоль стены. Поставим в соответствие числу $t \in [0;\ 1]$ точку стены, в которой находится второй стражник в момент t. Пусть бойницы проделаны на участках стены, соответствующих отрезкам, составляющим множество A. Тогда их суммарная длина будет меньше s. Так как для любого t имеем $t \in A$ или $\{2t\} \in A$, получаем, что в каждый момент времени по крайней мере один из стражников находится возле бойницы.

Идея построения множества A: допустим, что нам удалось разбить отрезок $[0;\ 1]$ на такие множества A и B, что если $t \in A$, то $\{2t\} \in B$, а если $t \in B$, то $\{2t\} \in A$. Тогда последнее требование выполняется автоматически. Представим себе на секунду, что множества A и B состоят из отрезков (это, конечно, невозможно). Тогда нетрудно убедиться, что суммарная длина отрезков, составляющих множество A, равна суммарной длине отрезков, составляющих множество B, а значит, равна $1/2$. К сожалению, таких множеств A и B не существует (см. комментарий). Тем не менее, можно построить множества A и B, для которых эти условия выполнены «с точностью до $s-\frac{1}{2}$». Этим мы и займемся.

Выберем натуральное число n таким, чтобы $\frac{1}{2^n} < s-\frac{1}{2}$. Можно считать, что n нечетно. Рассмотрим двоичную запись числа t из полуинтервала $[0;\ 1)$:

$$t = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

(все a_k равны 0 или 1, см. факт 12). Пусть задано некоторое натуральное число q. Рассмотрим множество M_q чисел t из полуинтервала $[0;\ 1)$, для которых среди первых qn знаков после запятой в двоичном разложении t встречается набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \text{нулей}}$. Ясно, что M_q представляет собой объединение конечного числа полуинтервалов.

Дополнение $[0;\,1)\setminus M_q$ содержится в множестве G_q тех чисел t из полуинтервала $[0;\,1)$, для которых ни один из наборов вида

$$a_{kn+1}a_{kn+2}\ldots a_{(k+1)n} \qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,q-1)$$

не совпадает с набором $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$. Суммарная длина полуинтервалов, составляющих множество G_q, равна

$$g_q=\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^q.$$

Поскольку $\frac{2^n-1}{2^n}<1$, то g_q стремится к нулю при неограниченном росте q (n фиксировано, см. факт 27). Поэтому можно взять q настолько большим, что $g_q<\frac{1}{2^{n+1}}$. Можно считать, что q четно.

Множество M_q разобьем на два множества B_q и C_q, где B_q — множество таких чисел t, что набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$ впервые встречается в двоичной записи числа t, начиная с нечетного места (т. е. наименьшее $k\geqslant 0$, для которого набор $a_ka_{k+1}\ldots a_{k+n-1}$ совпадает с набором $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$, нечетно). Аналогично, C_q — множество таких чисел t, что набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$ впервые встречается, начиная с четного места. Обозначим суммарную длину полуинтервалов, составляющих множество B_q, через b_q, а суммарную длину полуинтервалов, составляющих множество C_q, — через c_q.

Пусть число $t=0{,}a_1a_2a_3\ldots$ содержится в B_q, тогда число $\frac{t}{2}=0{,}0a_1a_2a_3\ldots$ содержится в C_q (здесь мы используем то, что n нечетно, а q четно). Кроме того, если набор $a_1a_2\ldots a_{n-1}$ первых цифр числа t' не совпадает с набором $\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$, то число $\frac{t'+1}{2}=0{,}1a_1a_2a_3\ldots$ также содержится в C_q. Ясно, что $\frac{t}{2}\neq\frac{t'+1}{2}$ $\left(\text{так как } \frac{t}{2}<\frac{1}{2} \text{ и } \frac{t'+1}{2}\geqslant\frac{1}{2}\right)$.

Отсюда получаем, что

$$c_q \geqslant \frac{b_q}{2} + \frac{1}{2}\left(b_q - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = b_q - \frac{1}{2^n}.$$

Значит, $b_q < 1 - c_q \leqslant 1 + \frac{1}{2^n} - b_q$, т. е. $b_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Положим $A' = B_q \cup G_q$. Тогда A' — объединение попарно непересекающихся полуинтервалов. Искомое множество A получается из множества A' заменой всех полуинтервалов на отрезки.

Свойство 1 очевидно. Суммарная длина отрезков, составляющих множество A, не превосходит

$$b_q + g_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} < s,$$

и свойство 2 доказано. Для доказательства последнего свойства заметим, что если $t \notin A$, то $t = 0{,}a_1a_2\ldots$ содержится в множестве C_q, т. е. среди первых qn знаков после запятой встречается набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$, причем он впервые встречается, начиная с четного места. Тогда $\{2t\} = 0{,}a_2a_3\ldots$, так что $\{2t\}$ принадлежит множеству $B_q \subset A$.

Комментарий. Обозначим $\varphi(x) = \{2x\}$. Тогда φ можно рассматривать как отображение единичной окружности в себя. Можно было бы пытаться решить задачу следующим образом: разобьем окружность на множества A и B так, что $\varphi(A) = B$ и $\varphi(B) = A$. «Приблизим» множество A объединением отрезков и возьмем это множество отрезков в качестве бойниц. Нетрудно видеть, что если множества A и B измеримы, то мера каждого из них равна 1/2. Однако оказывается, что такие множества A и B не могут быть измеримыми! Это связано с тем, что отображение $\varphi(\varphi(x)) = \{4x\}$ является *эргодическим*. Подробнее об этом см. в [77].

2005 год

8 класс

1. Для решения задачи достаточно убедиться, что числа $a = 2$, $b = 20$ удовлетворяют нашему уравнению.

Объясним, как найти все целочисленные решения этого уравнения (хотя этого и не требовалось для решения задачи). Разложим левую часть уравнения на множители:

$$a^2b^2+a^2+b^2+1=a^2(b^2+1)+(b^2+1)=(a^2+1)(b^2+1).$$

Уравнение примет вид $(a^2+1)(b^2+1)=2005$. Значит, и (a^2+1) и (b^2+1) являются делителями числа 2005 (см. факт 5).

Найдем все положительные делители числа 2005. Для этого разложим это число на простые множители: $2005 = 5\cdot 401$ (см. факт 10). Теперь ясно, что все положительные делители числа 2005 — это 1, 5, 401 и 2005.

Заметим, что a^2+1 не может быть равно 2005: иначе $a^2=2004$, но 2004 не является полным квадратом. Кроме того, если $a^2+1=1$, то $b^2+1=2005$, что тоже невозможно. Значит, возможны только случаи

$$\begin{cases} a^2+1=5, \\ b^2+1=401 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2+1=401, \\ b^2+1=5. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим все решения исходного уравнения: $a = \pm 2$, $b=\pm 20$ или $a=\pm 20$, $b=\pm 2$.

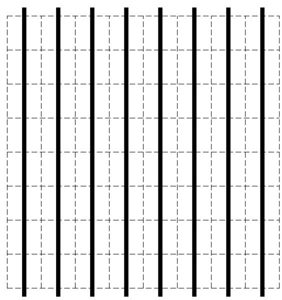


Рис. 180

2. Пусть разрез проходил вертикально (случай горизонтального разреза аналогичен). Проведем во всех квадратиках 1×1 вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Заметим, что при сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, при разрезании разрезаются они и только они. Считая число получающихся при этом частей, видим, что квадрат распался на 9 частей.

К о м м е н т а р и й. Важно было решить задачу для *произвольного* складывания, а не рассматривать конкретный пример. В частности, в условии не сказано, что каждый раз складывали пополам.

3. Так как AA' и BB' — высоты, треугольники $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ и $CB'H$ — прямоугольные (рис. 181). Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине (см. факт 14), поэтому $XA' = \frac{1}{2}AB = XB'$ и $YA' = \frac{1}{2}CH = YB'$. Значит, треугольники $XB'Y$ и $XA'Y$ равны по трем сторонам. Следовательно, YX — биссектриса угла $B'YA'$. Но в равнобедренном треугольнике $B'YA'$ биссектриса является высотой, поэтому прямая XY перпендикулярна прямой $A'B'$.

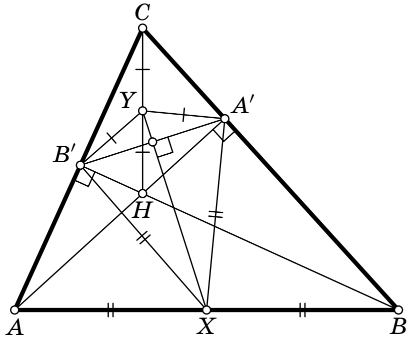


Рис. 181

В а р и а н т р е ш е н и я. Это решение можно изложить иначе: построим на отрезках AB и CH как на диаметрах окружности. Центры этих окружностей — точки X и Y, причем окружности пересекаются в точках A' и B'. Утверждение задачи теперь следует из того, что прямая, соединяющая точки пересечения двух окружностей, перпендикулярна линии центров.

4. Пусть это не так, то есть после выкидывания любых двух соседних чисел оставшиеся числа можно разбить на две группы с равной суммой. Предположим сначала, что все числа четны (см. факт 23). Поделим все числа на два. Заметим, что указанное свойство сохранится после деления, т. е. опять после выкидывания любых двух соседних чисел оставшиеся числа можно разбить на две группы с равной суммой. Поэтому, поделив при необходимости все числа набора на 2 несколько раз, можно считать, что среди всех 2005 чисел есть хотя бы одно нечетное.

Рассмотрим два случая: сумма всех чисел четна и сумма всех чисел нечетна. В первом случае все 2005 чисел нечетными быть не могут, т. е. среди них есть как четные, так и нечетные числа. Тогда среди них можно найти четное и нечетное числа, стоящие рядом, и выкинуть их. Сумма оставшихся чисел будет нечетной, значит, их нельзя разбить на две группы с равной суммой, и мы приходим к противоречию.

Пусть теперь сумма всех 2005 чисел нечетна. Заметим, что обязательно найдутся два числа одной четности, стоящие рядом, — в противном случае четные и нечетные числа чередовались бы, что невозможно, поскольку 2005 — нечетное число.

Выкинув эти два числа, мы получим 2003 числа, сумма которых нечетна, значит, их нельзя разбить на две группы с равной суммой — противоречие.

Комментарии. 1°. Если в условии задачи заменить натуральные числа на ненулевые рациональные, то утверждение останется верным — докажите это сами. На самом деле утверждение останется верным и для вещественных чисел, но доказать это гораздо сложнее. По этому поводу см. факт 25 и задачу 6 для 9 класса олимпиады 1998 г.

2°. Хорошо известна похожая задача: в стаде 101 корова. Известно, что если увести любую корову, то оставшихся можно разделить на два стада с равной суммарной массой коров. Доказать, что все коровы имеют одинаковую массу.

5. Разобьем окружность с центром в точке O на шесть равных частей точками A, B, C, D, E и F. Треугольник OAB — равносторонний, так как $OA = OB$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Аналогично, треугольники OBC, OCD, ODE, OEF и OFA — равносторонние.

Проведем дугу окружности с центром в точке A радиуса AB от точки B до точки O. Аналогично проведем дуги окружностей с центрами в точках B, C, D, E, F (рис. 182, *а*). Таким образом, мы разбили окружность на 6 равных частей. Теперь каждую из этих частей разобьем на две равные части одним из двух способов, изображенных на рис. 182, *б*. Получившиеся разрезания изображены на рис. 182, *в*. Еще один вариант разрезания изображен на рис. 182, *г*. (Доказательств в этой задаче не требовалось.)

Комментарий. Данная задача приоткрывает дверь в волшебный мир открытых проблем современной геометрии — ибо если начать смотреть чуть глубже в любом направлении, возникает нерешенная проблема. Укажем некоторые направления возможного исследования:

1) Круг разделен на 12 равных частей так, что центр лежит на границе некоторых, но не всех частей. Верно ли, что части равны

частям, получающимся при одном из разрезаний, указанных в решении? Никто не знает!

2) При каких n круг можно разделить на n равных частей так, чтобы центр лежал на границе некоторых, но не всех частей? (пример известен лишь при n вида $6k$, $k \geqslant 2$; недавно А. Я. Канель-Белов доказал, что при $n = 2$ такое деление невозможно (см. [84]), больше ничего не известно).

3) Круг разделен на несколько равных частей. Верно ли, что диаметр каждой из частей не меньше радиуса круга? Никто не знает! (Диаметром фигуры называют наибольшее из расстояний между ее точками.)

4) Можно ли разделить круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга лежал строго внутри (не на границе) одной из частей? Ответ на этот вопрос неизвестен не только для круга, но и для правильных n-угольников при $n > 4$.

5) Аналогичные вопросы можно поставить про шар в пространстве — ни на один из вопросов ответа нет (в том числе и на вопрос, аналогичный поставленному на олимпиаде).

Если Вы смогли решить одну из этих задач или придумали иное решение исходной олимпиадной задачи, автору было бы интересно про это узнать: напишите, пожалуйста, Сергею Маркелову (`markelov@mccme.ru`).

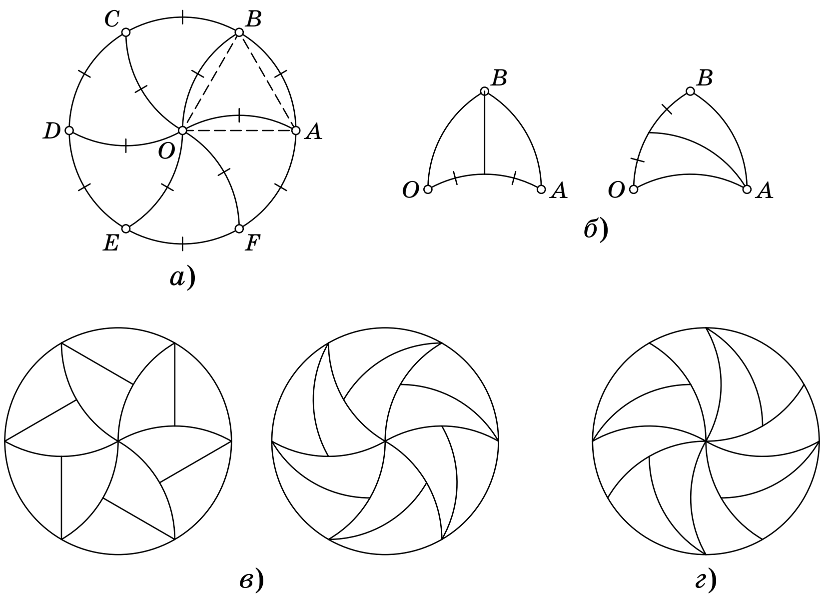


Рис. 182

6. Изложим сначала решение, если точек всего 8, и можно использовать только три цифры: 0, 1 и 2 (заметим, что $8=2^3$). Осел должен пометить отрезки как на рис. 183 (16 отрезков на рисунке не изображены, их Осел должен пометить цифрой 2).

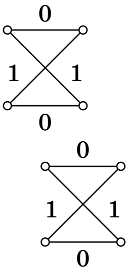


Рис. 183

Докажем, что Тигр проиграет. Ясно, что в каждой из четырех вертикальных пар точек он должен использовать цифру, отличную от нуля. Рассмотрим верхнюю четверку, одну из двух верхних вершин Тигр должен пометить не нулем и одну из двух нижних он должен пометить не нулем. Если бы он обе эти вершины пометил единицей, то проиграл бы. Значит, одну из них он вынужден пометить двойкой.

Аналогично доказывается, что одну из вершин в нижней четверке Тигр должен пометить двойкой, но эти вершины соединены ребром, помеченным двойкой, так что Тигр проиграет.

Теперь мы изложим доказательство для нашего случая, т. е. вместо трех цифр можно использовать все 10, а вместо $8=2^3$ точек мы используем $1024=2^{10}$ точек.

Итак, выделим из данных точек какие-нибудь 1024. Докажем, что Осел может так пометить отрезки, что независимо от того, как пометит точки Тигр, среди выделенных 1024 точек найдутся две точки, помеченные той же цифрой, что и соединяющий их отрезок.

Разобьем выделенные точки на 512 пар, и пусть Осел пометит нулем отрезки, соединяющие точки из одной пары. Далее, объединим получившиеся пары по две. Получим 256 четверок. Осел пометит цифрой 1 еще не помеченные отрезки, соединяющие точки одной четверки. После этого объединим получившиеся четверки по две. Получим 128 восьмерок. Осел пометит цифрой 2 еще не помеченные отрезки, соединяющие точки из одной восьмерки, и так далее. На последнем шаге объединим получившиеся две группы по 512 точек в одну, и пусть Осел пометит еще не помеченные отрезки цифрой 9.

Предположим, что теперь Тигр может пометить точки так, чтобы не нашлось отрезка, помеченного той же цифрой, что и оба его конца.

Заметим, что в каждой из 512 исходных пар найдется точка, помеченная ненулевой цифрой. Действительно, иначе нашлись бы две точки, помеченные цифрой 0, которые соединены отрезком, помеченным цифрой 0.

Докажем теперь, что в каждой из 256 четверок найдется точка, помеченная не нулем и не единицей. Рассмотрим произвольную из 256 четверок. В каждой из двух пар, из которых она образована, найдется точка, помеченная не нулем. Если бы обе эти точки были помечены единицей, они образовывали бы пару, дающую победу Ослу (поскольку они соединены отрезком, помеченным цифрой 1). Следовательно, в каждой из 256 четверок найдется точка, помеченная не нулем и не единицей.

Продолжая это рассуждение, получаем, что в каждой из 128 восьмерок найдется точка, помеченная не нулем, не единицей и не двойкой, в каждой из 64 групп по 16 точек найдется точка, помеченная не нулем, не единицей, не двойкой и не тройкой и т. д.; наконец, в каждой из двух групп по 512 точек найдется точка, помеченная не нулем, не единицей, не двойкой, ..., не восьмеркой. Следовательно, эти точки помечены цифрой 9. Но они соединены отрезком, помеченным цифрой 9, что противоречит предположению. Итак, Осел выигрывает независимо от игры Тигра.

Комментарий. Из приведенного решения видно, что Осел выигрывает и для 1024 точек. Можно доказать, что Осел выигрывает даже для 121 точки. Сравните с задачей 6 для 10 класса.

9 класс

1. Из формулы корней квадратного уравнения следует, что если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена x^2+px+ $+q$, причем $x_1 \geqslant x_2$, а D — дискриминант этого трехчлена, то $x_1-x_2=\sqrt{D}$. Действительно,

$$x_1-x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}.$$

Обозначим корни данных приведенных квадратных трехчленов через x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 так, чтобы $x_1 \geqslant x_2$, $y_1 \geqslant y_2$ и $z_1 \geqslant z_2$. Тогда, в силу приведенной выше формулы, $x_1-x_2=\sqrt{1}=1$, $y_1-y_2=\sqrt{4}=2$ и $z_1-z_2=\sqrt{9}=3$.

Следовательно,

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 3 = z_1 - z_2,$$

откуда $x_1 + y_1 + z_2 = x_2 + y_2 + z_1$.

2. Несложно подобрать три натуральных числа таких, что сумма любых двух из них делится на третье: 1, 2 и 3. Заметим, что одно из этих чисел равно сумме двух других ($3 = 2 + 1$). Добавим к этим числам еще одно — их сумму. Полученный набор чисел (1, 2, 3, 6) также обладает тем свойством, что сумма любых трех из них делится на четвертое.

Покажем, что добавляя к любому набору чисел, обладающему нужным нам свойством, их сумму, мы опять получим набор, обладающий нужным нам свойством. Действительно, пусть числа a_1, a_2, ..., a_k таковы, что сумма любых $k-1$ из них делится на оставшееся, тогда $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ делится на каждое из этих чисел (см. факт 5).

Рассмотрим набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k, S_k)$. Ясно, что для любого i сумма всех чисел этого набора, кроме a_i, равна $2S_k - a_i$ и делится на a_i, поскольку S_k делится на a_i. Теперь ясно, что этот набор удовлетворяет условиям задачи, так что мы можем взять $a_{k+1} = S_k$.

Теперь, начав с набора 1, 2, 3 и проделав описанную выше операцию нужное количество раз, мы получим набор: 1, 2, 3, 6, 12, 24, ..., $3 \cdot 2^{2003}$, удовлетворяющий требованиям задачи.

3. Пусть O_2 — центр окружности ω_2, E и F — точки касания прямых AC и BC с окружностью ω_2 (рис. 184). Прямоугольные треугольники O_2CE и O_2CF равны по катету и гипотенузе, так что $\angle O_2CA = \angle O_2CB$. Так как эти углы вписаны в окружность ω_1, то равны дуги, на которые они опираются: $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$.

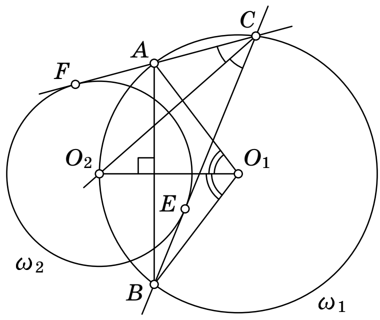


Рис. 184

Поэтому O_1O_2 — биссектриса равнобедренного треугольника AO_1B, а значит, и высота. Итак, прямая O_1O_2 перпендикулярна AB.

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=2000$ и $BC=\frac{1}{1000}$. Его площадь равна 1. Предположим, что треугольник ABC можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат. Тогда площадь этого квадрата тоже равна 1, значит, и сторона этого квадрата равна 1.

Разобьем катет AC на 1000 равных отрезков точками $A=A_0$, A_1, ..., A_{999}, $A_{1000}=C$. Поскольку частей 1000, а точек 1001, по принципу Дирихле (см. факт 1) какие-то две попадут в одну часть. Так как эта часть содержится в квадрате со стороной 1, то расстояние между любыми двумя ее точками не превосходит $\sqrt{2}$. С другой стороны, расстояние между любыми двумя из точек A_0, ..., A_{1000} не меньше двух. Полученное противоречие доказывает, что треугольник ABC нельзя разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат.

Комментарий. В 1807 году венгерский математик Вольфганг Бойаи (Bolyai) доказал удивительную теорему: любые 2 многоугольника равной площади равносоставленны (т. е. один можно разрезать на несколько частей, из которых можно собрать второй). Возникает естественный вопрос — как определить, какое минимальное количество частей требуется для двух конкретных многоугольников? Задача 4 показывает нетривиальность вопроса — даже для треугольника и квадрата количество частей заранее неограниченно. В этой области науке известно весьма мало даже про наиболее естественный частный случай — какое минимальное количество частей требуется для разрезания правильного многоугольника с целью получить правильный многоугольник с другим числом сторон? В таблице 3 показаны наилучшие известные разрезания правильных n-угольников при $n\leqslant 10$. Не доказана минимальность ни одного из них (попробуйте улучшить какой-нибудь из результатов!). Некоторые из разрезаний, соответствующих числам в таблице, изображены на рис. 185. Справа от разрезания приведена картинка, внимательно посмотрев на которую, можно понять, как такое разрезание получилось.

До недавнего времени считался открытым вопрос: являются ли равносоставленными круг и квадрат? Иными словами, можно ли разрезать круг на несколько частей, из которых можно составить квадрат? Интуитивно кажется, что ответ должен быть отрицательным, так все

Таблица 3

	3	4	5	6	7	8	9
4	4						
5	6	6					
6	5	5	7				
7	8	7	9	8			
8	7	5	9	8	11		
9	8	9	10	10	13	12	
10	7	7	10	9	11	10	13

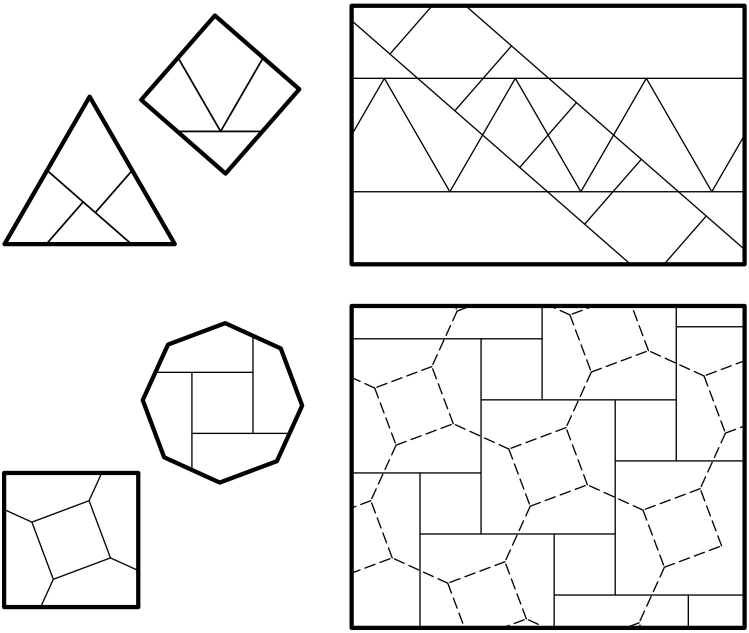


Рис. 185

и предполагали, но доказательства найти не могли. В 1988 году Миклош Лацкович (Laczkovich) ко всеобщему удивлению доказал, что ответ — положительный (см. [87])! К сожалению, его решение существенно выходит за рамки школьной программы, оно использует около 10^{49} частей. Заметим, что эти части мало похожи на многоугольники, см. также задачу 6 для 10 класса олимпиады 2002 г. и комментарии к ней.

По-другому обстоят дела в пространстве. Немецкий математик Ден (Dehn) доказал, что существуют два тетраэдра объема 1, которые нельзя разрезать на равные многогранники! Подробнее об этом можно прочитать в статье [86]. А если разрешить резать не только прямым ножом (на многогранники), но и кривым — верно ли, что тогда из любого многогранника можно сделать куб? Открытая проблема.

Заинтересовавшимся темой разрезаний рекомендуем (помимо описанных выше нерешенных задач) подумать над следующими, решения которых известны:

1) Можно ли невыпуклый четырехугольник разрезать двумя прямыми на 6 частей?

2) На плоскости нарисован неравнобедренный треугольник ABC и симметричный ему относительно прямой треугольник DEF. Можно ли разрезать треугольник ABC на несколько частей, из которых можно собрать DEF без переворачивания частей?

3) Дан многоугольник (рис. 186). На какое минимальное число частей его можно разрезать так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

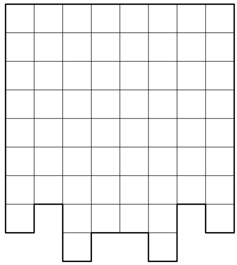


Рис. 186

4) Можно ли какой-нибудь невыпуклый пятиугольник разрезать на два равных пятиугольника?

5) Можно ли треугольник (с границей и внутренностью) разбить на отрезки, т. е. представить в виде объединения непересекающихся отрезков?

5. Так как у Сени и Жени получились одинаковые числа, каждая из цифр 1, 2, ..., 9 входит в Сенино и Женино числа одно и то же число раз. Значит, цифры, которые *не входят* в Сенино и Женино числа, — одинаковы. Действительно, пусть цифра, которая не была выписана Сеней, равна i и она встречается на окружности n_i раз. Тогда в Сенино число она входит $n_i - 1$ раз. Значит, и в Женино число она входит $n_i - 1$ раз. Поэтому не выписанная Женей цифра тоже равна i.

Пусть между теми точками на окружности, с которых Сеня и Женя соответственно начинали выписывать свои числа, расположено $k-1>0$ цифр (если считать по часовой стрелке). Тогда поворот окружности на k цифр по часовой стрелке совмещает каждую цифру с равной ей.

Пусть m — наименьшее ненулевое количество цифр, при повороте на которое каждая цифра совмещается с равной ей. Докажем, что n делится на m.

Разделим n на m с остатком: $n = mq + r$, $0 \leqslant r < m$ (см. факт 7). Тогда поворот на r цифр по часовой стрелке — это тоже самое, что q последовательных поворотов на m цифр *против* часовой стрелки. Поэтому такой поворот тоже переводит каждую цифру в равную ей. Но $r < m$, значит, из условия минимальности m следует, что $r = 0$. Поэтому n делится на m. См. также факт 4.

Теперь разрезав окружность на дуги, содержащие по m цифр, мы получим, что записанные на дугах цифры будут образовывать одинаковые числа.

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 5 для 11 класса олимпиады 1995 г.

2°. Подробнее о свойствах периодических последовательностей см. [81].

6. Обозначим середину AP через A_1, середину BC через A_2, проекцию точки P на BC через A_3. Точки B_1, B_2, B_3 и C_1, C_2, C_3 определим аналогично (рис. 187, *а* и *б*). Обозначим точку пересечения описанных окружностей треугольников $B_1C_2A_1$ и $C_1B_2A_1$, отличную от A_1, через Q. Докажем, что описанная окружность треугольника $C_1B_1A_2$ тоже содержит точку Q.

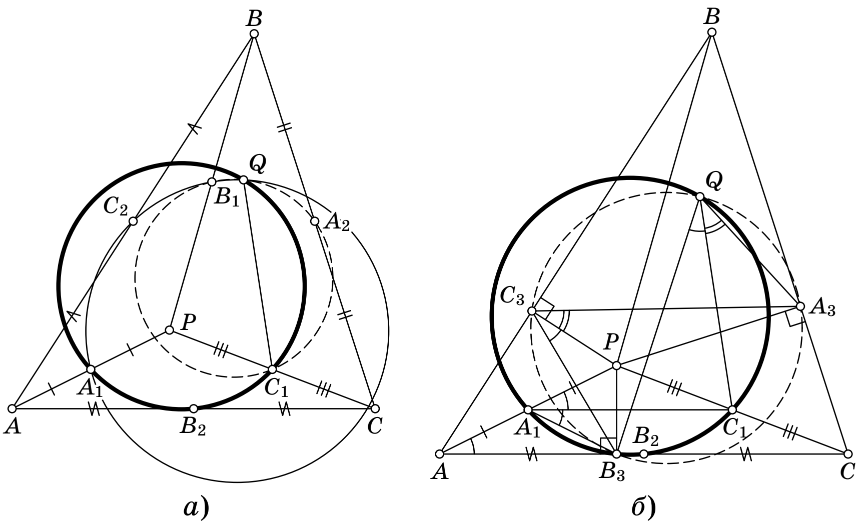


Рис. 187

Пусть точки расположены как на рисунках. По теореме об углах, вписанных в окружность, $\angle A_1QC_1 = 180^\circ - \angle A_1B_2C_1 = 180^\circ - \angle A_1PC_1$. Аналогично $\angle A_1QB_1 = 180^\circ - \angle A_1PB_1$. Значит,

$$\angle B_1QC_1 = \angle A_1QC_1 + \angle A_1QB_1 = 360^\circ - \angle A_1PC_1 - \angle A_1PB_1 = \\ = \angle B_1PC_1 = \angle B_1A_2C_1.$$

Поэтому описанная окружность треугольника $C_1B_1A_2$ тоже содержит точку Q.

Аналогично доказывается, что описанная окружность треугольника $A_2B_2C_2$ тоже содержит точку Q.

Осталось доказать, что описанная окружность треугольника $A_3B_3C_3$ тоже содержит точку Q. Для этого достаточно показать, что $\angle A_3C_3B_3 = \angle A_3QB_3$. Точка B_3 симметрична точке P относительно A_1C_1. Значит, $\angle A_1B_3C_1 = \angle A_1PC_1 = \angle A_1B_2C_1$. Поэтому точка B_3 лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_2C_1$ (это окружность девяти точек треугольника APC, см. [46], глава 5, § 11).

Итак, точки A_1, B_3, B_2, C_1, Q лежат на одной окружности. Кроме того, четырехугольник AB_3PC_3 вписанный (поскольку углы B_3 и C_3 в нем прямые). Поэтому $\angle B_3QC_1 = \angle B_3A_1C_1 = \angle C_1A_1P = \angle PAB_3 = \angle B_3C_3P$.

Аналогично $\angle A_3C_3P = \angle A_3QC_1$. Значит,

$$\angle A_3C_3B_3 = \angle A_3C_3P + \angle B_3C_3P = \angle A_3QC_1 + \angle B_3QC_1 = \angle A_3QB_3,$$

что и требовалось доказать.

Комментарий. Чтобы решить задачу в общем случае, а не только для точек, расположенных как на рисунках, следует воспользоваться ориентированными углами, см. [46], глава 2.

10 класс

1. На первый взгляд кажется, что ответ отрицательный, так как единственный четырехугольник, у которого все углы равны — это прямоугольник. Но из равенства тангенсов не следует равенство углов, а следует лишь, что разность углов кратна π.

Осталось придумать четырехугольник, у которого любые два угла либо равны, либо отличаются на π.

Это четырехугольник, у которого три угла равны 45°, а четвертый — 225°. Тангенсы всех его углов равны 1 (рис. 188).

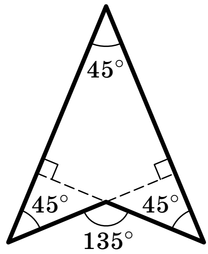


Рис. 188

Комментарий. Можно показать, что углы четырехугольника определены условием задачи однозначно.

2. Пусть отмеченные точки имеют координаты $(x_1, P(x_1))$ и $(x_2, P(x_2))$, где $x_1 \neq x_2$. Перенеся начало координат в точку $(x_2, P(x_2))$, можно считать, что $x_2 = 0$ и $P(x_2) = P(0) = 0$. Следовательно, $P(x)$ делится на x.

Расстояние между точками $(x_1, P(x_1))$ и $(0, 0)$ равно

$$\sqrt{(x_1)^2 + (P(x_1))^2} = |x_1|\sqrt{1 + \left(\frac{P(x_1)}{x_1}\right)^2}.$$

По условию это число — целое. Обозначим $m = \frac{P(x_1)}{x_1}$ (это — тоже целое число). Нам нужно доказать, что $m = 0$. Заметим, что $\sqrt{1+m^2}$ — рациональное, а следовательно, целое число (см. комментарий 1). Но $1 + m^2$ является точным квадратом только при $m = 0$. Действительно, если $1 + m^2 = n^2$, то $1 = (n-m)(n+m)$, так что $n - m = n + m = 1$ или $n - m = n + m = -1$. В любом случае $m = 0$.

Комментарии. 1°. Мы воспользовались следующим утверждением: если корень из целого числа рационален, то он целый. Докажем это. Пусть $\sqrt{A} = \frac{p}{q}$, где A — целое число, а $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Пусть $q \neq 1$. Рассмотрим любой простой делитель числа q. Поскольку $p^2 = Aq^2$, этот простой делитель делит p^2, а значит, и p (см. факт 9). Но это противоречит несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

2°. Можно рассуждать и непосредственно, пользуясь тем, что

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (P(x_1) - P(x_2))^2} = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + \left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right)^2}$$

— целое число и $P(x_1) - P(x_2)$ всегда делится на $x_1 - x_2$.

3. Первый способ. Поскольку $AB = BB_1$, $BC = BB_2$ и $\angle B_1BB_2 = \pi - \angle ABC$, то $S_{ABC} = S_{BB_1B_2}$ (рис. 189). Аналогично, $S_{B_1A_2A_3} = S_{AA_1A_2} = S_{ABC} = S_{BB_1B_2} = S_{B_1A_2B_4}$.

Итак, треугольники $B_1A_2A_3$ и $B_1A_2B_4$ имеют общее основание B_1A_2 и равные площади, значит, их высоты равны, так что $A_3B_4 \parallel A_2B_1 \parallel AB$ (см. факт 18).

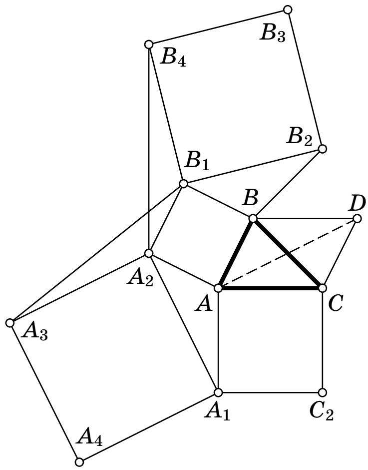


Рис. 189

Второй способ. Прежде всего отметим, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, перпендикулярна отрезку A_1A_2, а длина этой медианы равна половине длины отрезка A_1A_2.

В самом деле, достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 189). Треугольник ABD является образом треугольника A_2AA_1 при повороте на 90° вокруг центра квадрата ABB_1A_2.

Значит, отрезок A_2A_3 параллелен этой медиане и вдвое длиннее нее. Аналогично, отрезок B_1B_4 параллелен медиане треугольника ABC, проведенной из точки B, и вдвое длиннее нее. Поэтому

$$\overrightarrow{A_3B_4} = \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{B_1B_4} =$$
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) = 4\,\overrightarrow{AB}.$$

Таким образом, мы доказали не только утверждение задачи, но и равенство $A_3B_4 = 4AB$.

4. Опишем самый простой из возможных контрпримеров. Пусть в коробку $2 \times 2 \times 3$ помещены два бруска $1 \times 2 \times 3$. Немного (например, на 0,1) уменьшим у одного из них сторону длины 3, а у другого — сторону длины 2. Так как у второго бруска одна сторона равна 3, высоту коробки уменьшить нельзя. Так как высоты обоих брусков больше 2, их можно ставить в коробку только вертикально. Прямоугольники 1×2 и $1 \times 1{,}9$ можно расположить в квадрате 2×2 только «параллельно» друг другу, поэтому горизонтальные размеры коробки также нельзя уменьшить.

Комментарий. Выясните самостоятельно, изменится ли ответ в задаче, если у каждого бруска уменьшаются два измерения из трех.

5. Первый способ. Докажем сначала, что для любого m, не делящегося на 5, m^4-1 делится на 5 (это утверждение является частным случаем малой теоремы Ферма, см. комментарий к задаче 6 для 11 класса олимпиады 1995 г.).

Имеем $m^4-1=(m-1)(m+1)(m^2+1)$. Возможные остатки от деления числа m на 5 — это 1, 2, 3 и 4 (см. факт 7). Если остаток 1, то первый сомножитель делится на 5. Если остаток 4, то второй. Остается убедиться, что если остаток равен 2 или 3, то m^2 дает остаток 4, так что третий сомножитель делится на 5 (см. факт 5).

Используя факт 8, видим, что m^n-1 делится на 5, если n делится на 4, а m не делится на 5.

Заметим, что среди любых пяти подряд идущих членов последовательности найдется член, номер которого делится на 4. Докажем, что все члены с такими номерами не делятся на 5. Действительно, по доказанному, в выражении $1+2^n+3^n+4^n+5^n$ все слагаемые, кроме последнего, дают остаток 1 при делении на 5, а последнее дает остаток 0. Поэтому сумма дает остаток 4 при делении на 5.

Второй способ. Предположим, что числа a_m, ..., a_{m+4} делятся на 2005. Тогда числа $b_n=a_{n+1}-a_n=$ $=2^n+2\cdot 3^n+3\cdot 4^n+4\cdot 5^n$ также делятся на 2005 при $n=m$, $m+1$, $m+2$, $m+3$. Аналогично, на 2005 делятся числа $c_n=b_{n+1}-2b_n=2\cdot 3^n+6\cdot 4^n+12\cdot 5^n$ при $n=m$, $m+1$, $m+2$. Рассмотрев затем числа $d_n=c_{n+1}-3c_n$ и $d_{n+1}-4d_n$, мы в итоге придем к числу $24\cdot 5^n$, которое не делится на простое число 401, а значит, и на 2005 (см. факт 9). Противоречие.

Комментарий. В действительности утверждение задачи — это частный случай гораздо более общего факта: *если k — произвольное натуральное число, то ни для какого простого числа $p>k$ не существует k идущих подряд членов последовательности $1+2^n+\ldots+k^n$, делящихся на p.* Доказательство для общего случая аналогично второму способу решения.

6. а) Докажем по индукции (см. факт 24) следующее утверждение: если число цветов k, а число точек не меньше 2^k, то первый может гарантировать себе победу.

При $k=1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $k-1$ цвета, докажем его для k цветов. Выберем произвольное множество, состоящее из 2^k точек. Разобьем его на два подмножества, состоящие из 2^{k-1} точек каждое. Покрасим отрезки, соединяющие точки, лежащие в одном подмножестве, в $k-1$ цвет в соответствии с индуктивным предположением. Все отрезки, соединяющие точки из разных подмножеств, покрасим оставшимся k-м цветом. Теперь посмотрим, как покрасил выбранные 2^k точек второй игрок. Если в каком-то из двух подмножеств нет точек, покрашенных в k-й цвет, то искомый отрезок существует по предположению индукции. Если же в обоих множествах есть точки, покрашенные в k-й цвет, то соединяющий их отрезок — искомый.

б) Докажем, что первый игрок может покрасить требуемым образом отрезки, соединяющие 121 точку. Занумеруем точки парами чисел (a, b), где a и b — числа от 1 до 11. Рассмотрим различные точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Заметим, что найдется не более одного такого k, что $(a_2-a_1)-k(b_2-b_1)$ делится на 11 (для доказательства воспользуйтесь тем, что 11 — простое число, см. факт 9). При $k=0, \ldots, 9$ покрасим отрезок, соединяющий такие точки, цветом $k+1$.

Выберем произвольный цвет. Легко видеть, что если две точки соединены с третьей отрезками этого цвета, то между собой они соединены отрезком того же цвета. Таким образом, точки разбиваются на несколько множеств (классов эквивалентности) так, что все отрезки между точками из одного множества покрашены в выбранный цвет.

Зафиксируем точку (a_1, b_1). Нетрудно убедиться, что для любого b_2 существует ровно одно a_2 такое, что отрезок между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) покрашен в данный цвет. Поэтому для каждого цвета точки разбиваются на 11 множеств по 11 точек в каждом. Теперь покрасим оставшиеся отрезки произвольным образом.

Как бы второй игрок ни покрасил точки, найдутся 12 точек одного цвета. Рассмотрим разбиение на 11 множеств, соответствующее этому цвету. Найдутся две точки, попавшие в одно множество. Соединяющий их отрезок — искомый.

Комментарии. 1°. Сравните с задачей 6 для 8 класса.

2°. Построенный пример имеет естественную интерпретацию с точки зрения линейной алгебры над конечными полями. Пусть $V = (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^2$ — плоскость над полем вычетов по модулю 11. Иначе говоря, это множество пар (x, y), где x и y — элементы конечного поля из 11 элементов. Обозначим $p = 11$.

По аналогии с обычной плоскостью назовем *прямой* множество точек, заданное уравнением $ax + by = c$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Нетрудно проверить, что выполняются все обычные свойства: через любые две точки проходит единственная прямая; любые прямые либо не пересекаются (параллельны), либо пересекаются ровно в одной точке; две различные прямые, параллельные третьей, параллельны.

Нетрудно проверить, что каждая прямая состоит из p точек. При этом все прямые разбиваются на $p+1$ классов параллельных прямых («направлений»), причем каждый класс содержит ровно p прямых.

Ясно, что точки нашей плоскости соответствуют 121 точке, использованной в решении. Поставим в соответствие каждому цвету направление. Отрезок, соединяющий точки A и B, покрасим в цвет, соответствующий направлению прямой AB. Остальные отрезки покрасим произвольным образом. Нетрудно убедиться, что получится конструкция, аналогичная конструкции в решении задачи. При этом все решение приобретает прозрачный геометрический смысл. По поводу конечных полей и линейной алгебры см. [72], гл. 1 и 2.

11 класс

1. *Вариант А.* По условию функция $y = \sin x + a - bx$ обращается в нуль ровно в двух точках. Обозначим их x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Эти точки разбивают числовую ось на 3 интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$. Так как наша функция непрерывна и не обращается на этих интервалах в нуль, она не меняет знак на этих интервалах (по теореме о промежуточном значении, см. комментарий к задаче 4 для 11 класса олимпиады 2000 г.).

Заметим, что $b \neq 0$, иначе либо функция $y = \sin x + a$ обращалась бы в нуль в бесконечном числе точек (если $|a| \leqslant 1$), либо не обращалась бы в нуль ни в одной точке (если $|a| > 1$). Покажем, что на интервалах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ функция имеет разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $b > 0$. Тогда при $x > \dfrac{a+1}{b}$

имеем:

$$y \leqslant 1 + a - bx < 0,$$

так что функция отрицательна на интервале $(x_2; +\infty)$, аналогично доказывается, что функция положительна на интервале $(-\infty; x_1)$.

Поэтому на соседних промежутках $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ или на соседних промежутках $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ функция имеет одинаковые знаки, а тогда либо точка x_1, либо точка x_2 является точкой экстремума, и в ней производная $y' = (\sin x + a - bx)' = \cos x - b$ обращается в нуль.

Решение задачи в варианте Б аналогично.

Комментарии. 1°. Докажите самостоятельно, что система имеет ровно одно решение.

2°. Переформулируем геометрически основную задачу.

Рассмотрим функции $y = \sin x$ (график — синусоида) и $y = bx - a$ (график — прямая). Теперь условия задачи можно сформулировать следующим образом: прямая пересекает синусоиду ровно в двух точках. Докажите, что одна из этих точек — точка касания.

3°. Эта задача составлена по мотивам следующей задачи, предложенной Т. Голенищевой-Кутузовой и И. Ященко.

Вася спускается на парашюте с постоянной скоростью 1 м/с, а его друг Миша катается на колесе обозрения, которое крутится с постоянной скоростью (колесо ниже начальной точки спуска парашютиста). Известно, что пока Вася спускался, они оказывались на одной высоте ровно 4 раза, включая тот момент, когда Вася приземлился, а кабинка колеса обозрения была внизу. Считая Васю и Мишу точками, найдите скорость изменения высоты Миши в тот момент, когда они впервые оказались на одной высоте.

Эта задача допускает наглядное решение, основанное на рассмотрении графиков изменения высоты Миши и Васи.

График изменения высоты Васи — прямая l, а Миши — синусоида (рис. 190). В момент приземления парашютиста синусоида касается оси t, значит, «слева» от момента приземления прямая l идет «выше»

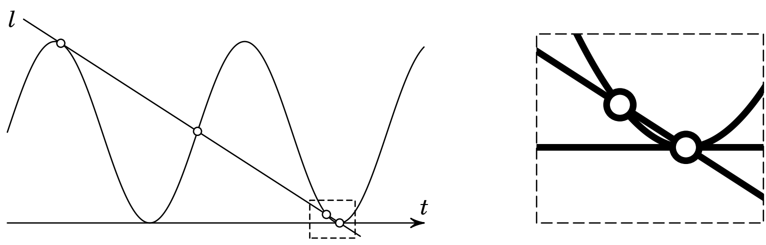


Рис. 190

синусоиды. Будем двигаться по l влево. Предположим сначала, что l не касается синусоиды ни в одной точке. Тогда после следующей точки касания l окажется ниже синусоиды, потом — опять сверху, наконец, после последней общей точки она окажется ниже синусоиды, что невозможно.

Значит, одна из общих точек — точка касания. Мы утверждаем, что это — самая левая из общих точек, тогда скорость изменения высоты Миши в этот момент равна скорости изменения высоты Васи, т. е. равна 1 м/с и задача решена.

Итак, осталось объяснить, почему l не может касаться синусоиды во второй или третьей точке. Это следует из такого факта: *все точки пересечения касательной к синусоиде с этой синусоидой лежат по одну сторону от точки касания* (кроме случая горизонтальной касательной). Действительно, можно считать, что синусоида — это график функции $y=\sin x$, а касательная l проведена в точке с абсциссой $x_0 \in (0;\ \pi/2)$. Из выпуклости следует, что l не пересекает синусоиду на отрезке $[0;\ \pi/2]$, а значит, в точке $\pi/2$ прямая проходит выше прямой $y=1$, поэтому точек пересечения с синусоидой при $x \geqslant \pi/2$ не будет.

2. Обозначим сумму модулей членов арифметической прогрессии через S ($S=100$ в варианте А и $S=250$ в варианте Б). Покажем, что $n^2d=4S$, если данная прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ возрастает (для убывающей прогрессии решение аналогично и $n^2d=-4S$). Из условия задачи следует, что функция

$$S(x)=|a_1-x|+|a_2-x|+\ldots+|a_n-x|$$

принимает в трех различных точках одинаковые значения: $S(0)=S(-1)=S(-2)=S$. Нетрудно убедиться, что

$$S(x)=\begin{cases}-nx+\mathrm{const} & \text{при } x\leqslant a_1,\\ (2i-n)x+\mathrm{const} & \text{при } a_i\leqslant x\leqslant a_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ nx+\mathrm{const} & \text{при } x\geqslant a_n.\end{cases}$$

Пусть $n=2k+1$ нечетно, тогда $S(x)$ убывает при $x\leqslant a_{k+1}$ и возрастает при $x\geqslant a_{k+1}$, так что эта функция не может принимать трех одинаковых значений.

Пусть $n=2k$ четно, тогда $S(x)$ убывает при $x\leqslant a_k$, постоянна на отрезке $[a_k;\ a_{k+1}]$ и возрастает при $x\geqslant a_{k+1}$.

Следовательно, $S=S\Big(a_k+\dfrac{d}{2}\Big)$.

Вспомним теперь, что наша последовательность является арифметической прогрессией, так что $a_k - a_i = (k-i)d$, и

$$S\left(a_k + \frac{d}{2}\right) = \left|-(k-1)d - \frac{d}{2}\right| + \left|-(k-2)d - \frac{d}{2}\right| + \ldots$$
$$\ldots + \left|-\frac{d}{2}\right| + \left|\frac{d}{2}\right| + \ldots + \left|(k-1)d + \frac{d}{2}\right| =$$
$$= d((2k-1) + (2k-3) + \ldots + 1) = k^2 d = \frac{n^2 d}{4}.$$

3. *Вариант А.* Рассмотрим на доске произвольный клетчатый квадрат со стороной 105, который назовем *большим*. Разобьем его на 25 квадратов 21×21, которые назовем *малыми*.

Центр клетки с числом, находящийся на расстоянии менее 10 от центра некоторого малого квадрата, обязан находиться в этом малом квадрате. Так как малые квадраты не пересекаются, то в большом квадрате найдется хотя бы 25 клеток с числами. Наименьшее из них отличается от наибольшего более, чем на 23. Соответствующие две клетки находятся на расстоянии менее 150, поскольку лежат в большом квадрате, расстояние между наиболее удаленными угловыми клетками которого не превосходит $105\sqrt{2} < 150$.

Вариант Б. Рассмотрим на доске произвольный клетчатый квадрат со стороной 66, который назовем *большим*. Разобьем его на 36 квадратов 11×11, которые назовем *малыми*.

Центр клетки с числом, находящийся на расстоянии менее 5 от центра некоторого малого квадрата, обязан находиться в этом малом квадрате. Так как малые квадраты не пересекаются, то в большом квадрате найдется хотя бы 36 клеток с числами. Наименьшее из них отличается от наибольшего более, чем на 34. Соответствующие две клетки находятся на расстоянии менее 100, поскольку лежат в большом квадрате, расстояние между наиболее удаленными угловыми клетками которого не превосходит $66\sqrt{2} < 99$.

Комментарий. Размер квадратов можно менять. Например, в первом варианте можно в качестве малых взять квадраты 19×19. Соответственно уменьшится и размер большого квадрата.

4. Обозначим через O точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям. Заметим, что эта точка остается на месте при применении любого количества операций к четырехугольнику. Обозначим углы, образованные сторонами четырехугольника и отрезками AO, BO, CO, DO, через α_1, α_2, $\ldots$, α_8, как на рис. 191, *а*. Заметим, что длины сторон не меняются при наших операциях (но меняется порядок сторон). После применения трех операций стороны четырехугольника опять будут расположены в прежнем порядке: b, c, d, a, а указанные углы будут расположены, как указано на рис. 191, *б*.

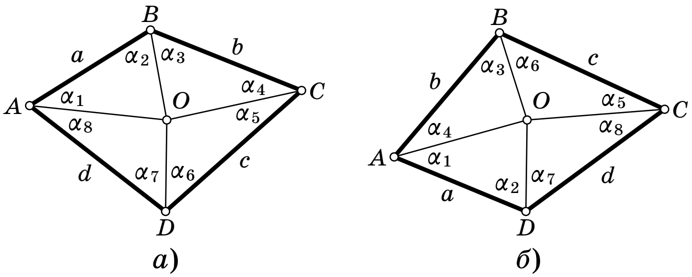


Рис. 191

Если четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то O — центр вписанной окружности, OA, OB, OC и OD — радиусы, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, $\alpha_5 = \alpha_6$ и $\alpha_7 = \alpha_8$. Значит, $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$ и $\alpha_6 + \alpha_7 = \alpha_5 + \alpha_8$, так что четырехугольник $ABCD$ перейдет в равный ему четырехугольник за три операции.

В общем случае после шести операций стороны опять будут расположены в прежнем порядке и углы будут расположены так же, как и вначале.

Вариант решения. а) Для ответа на первый пункт задачи необязательно следить за углами α_i. Если сразу оговорить, что четырехугольник вписанный, то останется заметить, что вписанный в данную окружность четырехугольник однозначно определяется длинами и порядком расположения сторон.

б) Можно заметить, что суммы противоположных углов четырехугольника не меняются. После шести операций получится четырехугольник с теми же длинами сторон и теми же суммами противоположных углов. Остается проверить, что четырехугольник определяется однозначно длинами сторон и суммой противоположных углов.

5. Обозначим через a первое натуральное число, а через b и c — записанные за ним двузначные числа. Пусть $x = a + b + c$. Согласно условию числа a, b, c и x удовлетворяют уравнению $10^4a + 100b + c = x^3$ (см. факт 11). Поэтому

$$x^3 = 10^4a + 100b + c < 10^4(a + b + c) = 10^4x,$$

откуда $x < 100$. Следовательно, x — двузначное число, a — либо однозначное, либо двузначное число, а x^3 — либо пяти-, либо шестизначное число. Поэтому $x \geqslant 22$ ($21^3 = 9261$ — четырехзначное число). Заметим, что $x^3 - x = 9999a + 99b$, значит, $x^3 - x$ делится на 99 (см. факт 5). Так как $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, среди чисел $x - 1$, x и $x + 1$ какое-то делится на 11 (см. факт 9). Заметим, что лишь одно из этих чисел делится на 3, поэтому оно должно делиться и на 9.

Условие, что одно из чисел $x - 1$, x, $x + 1$ делится на 11, сводит перебор к числам 22, 23, 32, 33, 34, 43, 44, 45, 54, 55, 56, 65, 66, 67, 76, 77, 78, 87, 88, 89, 98, 99. Условие делимости на 9 сводит перебор к следующим вариантам:

1) $x = 44$ $(x + 1 = 45)$, $44^3 = 85184$, $8 + 51 + 84 > 44$;

2) $x = 45$ $(x - 1 = 44)$, $45^3 = 91125$, $a = 9$, $b = 11$, $c = 25$;

3) $x = 54$ $(x + 1 = 55)$, $54^3 = 157464$, $15 + 74 + 64 > 54$;

4) $x = 55$ $(x - 1 = 54)$, $55^3 = 166375$, $16 + 63 + 75 > 55$;

5) $x = 89$ $(x - 1 = 88,\ x + 1 = 90)$, $89^3 = 704969$, $70 + 49 + 69 > 89$;

6) $x = 98$ $(x + 1 = 99)$, $98^3 = 941192$, $94 + 11 + 92 > 98$;

7) $x = 99$, $99^3 = 970299$, $97 + 2 + 99 > 99$, 2 — не двузначное число.

6. Покажем сначала, как за $2n + 1$ попытку отгадать одну точку. Пусть прямая l не пересекает круг из условия задачи, проведем отрезок этой прямой и отметим на нем $n + 1$ точку X_0, ..., X_n. Узнаем для каждой из них расстояние до ближайшей загаданной точки. По принципу Дирихле (см. факт 1), хотя бы для двух (скажем, X_i и X_j,

$i<j$) из отмеченных $n+1$ точек Миша назовет расстояние до одной и той же неизвестной нам загаданной точки Y.

Лемма. *Для всех k таких, что $i<k<j$, Миша также назовет расстояние до точки Y.*

Доказательство. Пусть ω_i и ω_j — окружности с центрами в точках X_i и X_j соответственно, проходящие через точку Y. Пусть Y' — вторая точка пересечения этих окружностей (случай касающихся окружностей мы оставляем читателю). Пусть ω — окружность с центром в точке X_k, проходящая через точки Y и Y' (рис. 192). Достаточно доказать, что окружность ω содержится внутри объединения кругов, ограниченных окружностями ω_i и ω_j.

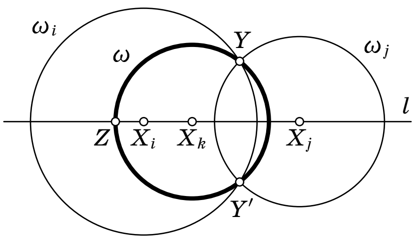


Рис. 192

Заметим сначала, что ω пересекает ω_i и ω_j *только* в точках Y и Y' (так как окружности пересекаются не более чем в двух точках). Значит, каждая из дуг, на которые окружность ω разбивается точками Y и Y', либо лежит целиком внутри объединения кругов, либо целиком снаружи. Чтобы доказать, что второй случай невозможен, достаточно проверить, что точки пересечения ω и прямой l лежат внутри объединения кругов, ограниченных окружностями ω_i и ω_j.

Действительно, пусть Z — одна из точек пересечения ω и прямой l. Без ограничения общности можно считать, что она лежит на продолжении отрезка X_kX_i за точку X_i. Тогда $X_iZ=X_kY-X_kX_i<X_iY$, так что Z лежит внутри окружности ω_i. Лемма доказана.

В силу леммы, если провести окружности с центрами в отмеченных $n+1$ точках и радиусами, равными названным Мишей для этих точек расстояниям, то одна из точек пересечения окружностей, соответствующих соседним точкам, будет загаданной. Причем из двух точек пересечения окружностей следует взять ту, которая лежит с той же стороны, что и круг, данный в условии задачи. Поэтому если Коля последовательно назовет все такие точки пересечения окружностей (n попыток), то хотя бы один раз названное Мишей расстояние будет нулевым.

Итак, мы за $2n+1$ попытку угадали одну точку. Действуя далее аналогично, мы отгадаем все точки за

$$(2n+1)+(2n-1)+\ldots+3=(n+1)^2-1$$

попыток.

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ

В настоящий раздел собраны понятия и теоремы, которые наиболее часто встречались в решениях задач данной книги. Эти понятия и теоремы мы для краткости назвали *фактами*. Мы старались не включать факты, имеющиеся в большинстве школьных учебников, хотя некоторые, плохо, по нашему мнению, изучаемые в школе, присутствуют.

Мелким шрифтом набран текст, содержание которого явно выходит за рамки школьной программы (хотя может и изучаться в математических школах и на кружках). Этот раздел не претендует на полноту и не заменяет систематических учебных пособий (см. список литературы).

Комбинаторика

1°. Принцип Дирихле.

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти клетках, то в некоторой клетке сидит не меньше двух кроликов». Более общая форма принципа Дирихле: *если рассадить более чем kd кроликов по k клеткам, то обязательно найдется клетка, в которой будет по крайней мере $d+1$ кролик*. Для непрерывных величин принцип Дирихле выглядит так: если кашу объема v разделить между n людьми, то кто-то получит не меньше v/n и кто-то получит не больше v/n. Хорошими иллюстрациями применения принципа являются задачи 95.9.6б и 02.9.6.

Задачи: 94.10.3, 95.9.6, 96.8.6, 96.10.2, 97.11.6, 00.9.2, 02.9.6, 05.9.4, 05.11.6.

Литература: [62].

2°. Инвариант и полуинвариант.

Часто встречаются задачи следующего типа: рассматриваются некоторые операции, и спрашивается, можно ли при помощи таких операций из одного состояния получить другое. Стандартный способ доказательства невозможности состоит в нахождении инварианта. *Инвариантом* называется величина, которая не меняется при этих преобразованиях. Если в первом состоянии инвариант принимает одно значение, а во втором — другое, то попасть из первого состояния во второе невозможно.

Полуинвариант — это число, которое при данных операциях изменяется в определенную сторону (например, увеличивается). Если имеется полуинвариант и он изменился, то вернуться в начальное положение невозможно.

Задачи: инвариант 93.8.3, 95.9.5, 95.10.6, 99.9.1;
полуинвариант 94.10.5, 04.8.6.
Литература: [62].

3°. Графы, компоненты связности, деревья. Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними — линиями. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро — это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

Граф называется *связным*, если из любой вершины можно попасть в любую, двигаясь по ребрам. *Циклом* в графе называется такая последовательность различных вершин A_1, A_2, ..., A_n, что каждая следующая вершина соединена ребром с предыдущей, а первая вершина соединена с последней.

Связный граф без циклов называется *деревом*. Дерево с n вершинами всегда имеет $n-1$ ребро.

Множество вершин, в которые можно попасть из данной, двигаясь по ребрам, называется *компонентой связности* этой вершины графа. Связный граф состоит из одной компоненты связности, а несвязный граф распадается на несколько компонент.

Иногда рассматриваются графы с *петлями* (петля — это ребро, соединяющее вершину с ней самой) и *кратными ребрами* (кратные ребра — это несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин).

Ориентированный граф — это граф, на ребрах которого указано направление.

Задачи: 94.10.3, 98.9.4, 99.11.5, 01.11.6, 03.8.5,
03.10.5.
Литература: [62], [45].

4°. Периодичность.

Рассмотрим бесконечную последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... Для краткости мы будем обозначать такую последовательность просто a_n.

Последовательность a_n называется *периодичной* или *периодической*, если найдется такое m, что при всех n, больших некоторого числа K, выполняется равенство $a_{n+m}=a_n$. При этом конечная последовательность a_{K+1}, a_{K+2}, ..., a_{K+m} называется *периодом*, а число m называется *длиной периода*.

Наименьшее число m, для которого выполняется указанное свойство, называется *длиной минимального периода*, а соответствующий период называется *минимальным периодом*.

Например, для последовательности

БББББББАББАББАББАББАБ...

можно взять $K=5$, $m=3$ (период — *ББА*). А можно взять $K=5$, $m=6$, тогда периодом будет *ББАББА*. Можно также взять $K=6$, $m=3$, и периодом будет *БАБ*. Отсюда видно, что K и m определены неоднозначно.

Теорема. *Пусть a_n — периодическая последовательность с длиной минимального периода m. Число l является длиной некоторого периода последовательности a_n тогда и только тогда, когда l делится на m* (см. факт 5).

Пусть m — длина минимального периода последовательности a_n. Выберем K минимально возможным. Тогда последовательность a_1, ..., a_K называется *предпериодом* последовательности a_n. Итак, каждая периодическая последовательность имеет вид

предпериод период период период ...,

что часто записывают как предпериод(период). Например, последовательность из нашего примера можно записать так: *БББББ*(*ББА*).

Замечание. Длину периода часто называют периодом. Предпериодом иногда называют последовательность a_1, ..., a_K без предположения о минимальности K.

Задачи: 93.10.1, 94.10.2, 95.11.5, 99.11.7, 02.8.6, 05.9.5.

Теория чисел

5°. Делимость.

Говорят, что целое число a *делится* на целое число b (или *кратно* числу b), если найдется такое целое число c, что $a = bc$. В этом случае также говорят, что b *делит* a. (Например, «2 делит 6» или «6 делится на 2», «-1 делит -5».) Обозначение: $b \mid a$.

Свойства: а) любое число делится на ± 1 и на себя; 0 делится на любое число, но никакое ненулевое число не делится на 0.

б) Если $d \mid a$ и $d \mid b$, то $d \mid a \pm b$; кроме того, $d \mid ac$ для любого целого c; если $c \mid b$ и $b \mid a$, то $c \mid a$.

в) Если $b \mid a$, то $|b| \leqslant |a|$ или $a = 0$.

г) Если $d \mid a$ и $d \mid b$, k и l — целые числа, то $d \mid ka + lb$; более общо, если каждое из чисел a_1, a_2, ..., a_n делится на d, а k_i — целые числа, то

$$d \mid k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n.$$

Наибольший общий делитель чисел a и b мы обозначаем НОД(a, b). Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b) = 1$ (иначе говоря, числа взаимно просты, если из того, что $d \mid a$ и $d \mid b$, следует, что $d = \pm 1$).

Задачи: 93.9.3, 95.8.2, 95.9.1, 95.10.5, 97.8.4, 98.8.2, 98.10.4, 99.8.4, 99.10.3, 99.11.6, 00.9.2, 00.9.4, 01.9.4, 03.9.4, 02.9.4, 02.11.4, 03.11.7, 04.8.4, 04.11.3, 05.8.1, 05.9.2, 05.10.5, 05.11.5.

Литература: [29], гл. 1.

6°. Признаки делимости.

а) Число четно тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна.

б) Остаток от деления числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5. В частности, число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5.

в) Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр на 9. В частности, число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Аналогичные утверждения верны для деления на 3.

Задачи: 93.8.1, 94.10.1, 97.8.4, 97.10.6, 98.10.4, 01.9.5.

7°. Деление с остатком.

Пусть a и b — целые числа, причем $b \neq 0$. Тогда найдутся единственные q и r такие, что

а) $a = qb + r$;

б) $0 \leqslant r < |b|$.

При этом q и r называются *частным* и *остатком* от деления a на b соответственно.

Пусть $b > 0$. Остатками при делении на b могут быть числа $0, 1, \ldots, b-1$. Число дает остаток r при делении на b тогда и только тогда, когда оно имеет вид $qb + r$. При этом все числа разбиваются на b (бесконечных) арифметических прогрессий. Например, при $b = 2$ это прогрессии $2n$ и $2n+1$ (ср. с фактом 23), при $b = 3$ — прогрессии $3n$, $3n+1$ и $3n+2$ и т. д.

Число делится на b тогда и только тогда, когда его остаток от деления на b равен нулю.

Остатки суммы (разности, произведения) однозначно определяются остатками слагаемых (сомножителей). Например, если числа a и b дают остатки 3 и 6 при делении на 7, то $a + b$ дает остаток $2 = 3 + 6 - 7$, число $a - b$ — остаток $4 = 3 - 6 + 7$, а ab — остаток $4 = 3 \cdot 6 - 14$ при делении на 7.

Точное утверждение таково: если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b, а остаток от деления $a_1 a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 r_2$ на b.

Задачи: 93.8.1б, 94.11.6, 96.11.4, 97.9.4, 00.9.2, 00.10.6, 03.8.6, 05.9.5, 05.10.5.

Литература: [29], гл. 1 и [30], § 2.

8°. *Если* $t \mid s$, *то* $a^t - 1 \mid a^s - 1$.

Доказательство. Если $t \mid s$, то можно записать $s = kt$ с натуральным k. Тогда

$$a^s - 1 = (a^t)^k - 1 = (a^t - 1)(1 + a^t + a^{2t} + \ldots + a^{(k-1)t}),$$

и $a^s - 1$ делится на $a^t - 1$. Утверждение доказано.

Используя алгоритм Евклида (см. [30], § 3), можно показать, что при $a > 1$

$$\text{НОД}(a^t - 1,\ a^s - 1) = a^{\text{НОД}(t,s)} - 1.$$

Задачи: 99.11.6, 03.11.7 05.10.5.

9°. *Если* $d \mid ab$ *и НОД*$(a, d) = 1$, *то* $d \mid b$. В частности, $2k+1 \mid 2x$ тогда и только тогда, когда $2k+1 \mid x$ (см. задачу 01.9.4).

Если простое число делит произведение, то оно делит один из сомножителей. Точнее, если простое число p делит произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$, то $p \mid a_i$ для некоторого i.

Задачи: 94.8.2, 94.10.1, 99.10.3, 01.9.4, 02.11.4, 01.11.2, 03.11.7, 04.8.4, 05.10.2, 05.10.5, 05.11.5.

Литература: [29], гл. 1.

10°. Разложение на простые множители.

Число $p > 1$ называется *простым*, если оно делится лишь на $\pm p$ и ± 1. Остальные натуральные числа, бóльшие единицы, называются *составными*. Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых. Иногда бывает удобно сгруппировать одинаковые простые и записать это произведение в виде

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, $n_1, n_2, \ldots \ldots, n_k$ — натуральные числа.

Основная теорема арифметики. *Разложение числа на простые множители единственно* (*с точностью до порядка множителей*).

Однозначность разложения на множители часто используется неявно — см., например, задачи 98.8.2 и 04.10.1.

Задачи: 94.9.5, 95.9.4, 95.10.5, 96.11.4, 98.8.2, 98.11.4, 99.8.3, 99.10.3, 99.11.6, 03.11.7, 04.8.4, 04.10.1, 05.8.1.

Литература: [29], гл. 1, [30].

11°. Десятичная запись числа.

Запись $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ означает n-значное натуральное число, первая цифра которого равна a_n, вторая — a_{n-1}, … …, последняя — a_1. Таким образом,

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} = 10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \ldots + 10 a_2 + a_1.$$

Иногда мы пользуемся записью типа $\overline{ab}$, когда a и b — не обязательно цифры. Такая запись обозначает число, которое получится, если к числу a приписать справа число b. Если число b является k-значным, то

$$\overline{ab} = 10^k a + b.$$

Заметим также, что натуральное число b является k-значным тогда и только тогда, когда $10^{k-1} \leqslant b < 10^k$.

Задачи: 94.8.2, 94.9.5, 94.10.1, 94.11.6, 97.8.4, 97.10.6, 98.10.4, 99.9.4, 99.11.7, 00.8.5, 01.9.5, 04.11.3, 05.11.5.

12°. Системы счисления.

Кроме десятичной, бывают и другие системы счисления. В *m-ичной системе счисления* запись $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ означает $m^{n-1}a_n + m^{n-2}a_{n-1} + \ldots + ma_2 + a_1$. Цифрами m-ичной системы счисления являются числа $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-2, m-1$.

В математике особенно важны двоичная и троичная системы счисления, а в информатике — двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы.

Задачи: 94.10.2, 95.11.4, 98.10.4, 04.11.6.

13°. Бесконечные десятичные дроби.

Каждое действительное число может быть разложено в *бесконечную* десятичную дробь:

$$\pm a_n a_{n-1} \ldots a_1{,}b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

где a_i и b_i — цифры. Смысл этой записи таков:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1{,}b_1 b_2 b_3 \ldots = 10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1 + 10^{-1}b_1 + 10^{-2}b_2 + 10^{-3}b_3 + \ldots$$

(здесь справа стоит бесконечная сумма, т. е. *сумма ряда*, см. [75], гл. 3).

Число x рационально тогда и только тогда, когда соответствующая бесконечная десятичная дробь периодична (см. факт 4).

Обобщение: можно разложить число в бесконечную m-ичную дробь, см. факт 12.

Задачи: 93.10.1, 94.10.2.

Геометрия

14°. Медиана прямоугольного треугольника.

Треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда длина его медианы, проведенной к некоторой стороне, равна половине длины этой стороны.

Равносильная формулировка: геометрическое место точек, из которых отрезок AC виден под прямым углом, есть окружность, построенная на AC как на диаметре (без точек A и C). В одну сторону это утверждение можно еще сформулировать так: из любой точки окружности диаметр виден под прямым углом (кроме концов диаметра).

При этом если точка B лежит внутри этой окружности, то $\angle ABC$ — тупой, если вне — острый.

Задачи: 93.9.1, 95.10.3, 96.9.5, 97.8.5, 98.8.3, 00.8.4, 00.9.5, 01.8.4, 01.9.3, 02.8.5, 03.9.5, 04.10.2, 05.8.3.

15°. Угол между касательной и хордой.

Касательная образует с хордой два смежных угла, каждый из которых равен половине угловой меры дуги, заключенной внутри него.

Более формально, угол, на который нужно повернуть прямую l по часовой стрелке, чтобы она перешла в прямую AB, равен половине угла, на который нужно повернуть по часовой стрелке окружность, чтобы точка A перешла в точку B. Обратное утверждение тоже верно: из равенства углов следует, что прямая l касается окружности.

Задачи: 94.9.4, 96.9.3, 96.11.5, 99.9.3.

Литература: [46], гл. 2.

16°. Вневписанные окружности.

Вневписанной окружностью треугольника ABC называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Таким образом, имеются три вневписанных окружности (рис. 193).

Центр вневписанной окружности есть точка пересечения биссектрисы одного из углов треугольника и двух биссектрис внешних углов треугольника. Таким образом, эти три биссектрисы пересекаются в одной точке.

Задачи: 93.8.6, 01.9.3, 02.10.6, 04.10.5.

17°. Общие касательные к двум окружностям. Рассмотрим две непересекающиеся окружности. К ним можно провести ровно 4 общих касательных (т. е. прямых, касающихся каждой из окружностей, см. рис. 194). Обозначим центры окружностей и точки касания как на рисунке.

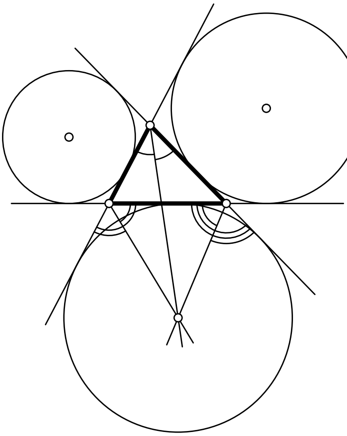


Рис. 193

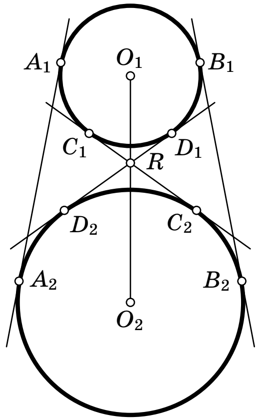


Рис. 194

Касательные A_1A_2 и B_1B_2 называются *внешними*, а C_1C_2 и D_1D_2 — *внутренними*. Внутренние касательные пересекаются в точке R, лежащей на отрезке O_1O_2, причем

$$\frac{C_1R}{C_2R}=\frac{D_1R}{D_2R}=\frac{O_1R}{O_2R}=\frac{r_1}{r_2},$$

где r_1 и r_2 — радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно.

Аналогичные утверждение верны про точку пересечения внешних касательных. Заметим также, что к пересекающимся окружностям можно провести ровно две (внешние) общие касательные, а к касающимся — ровно 3.

Задачи: 94.10.4, 96.11.5, 02.8.3.

18°. Площади и отношения площадей. Напомним, что площадь треугольника равна половине произведения длины высоты на длину стороны, на которую (или на продолжение которой) эта высота опущена.

Треугольники ABC и $AB'C$ с общим основанием AC имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда их высоты, проведенные к основанию, равны. Если прямая BB' параллельна AC, то площади этих треугольников равны. Обратно, если точки B и B' лежат по одну сторону от прямой AC и площади треугольников ABC и $AB'C$ равны, то $BB' \parallel AC$.

В конфигурации, изображенной на рис. 195, *а*, отношение площадей треугольников ABC и ADC равно отношению AB к AD. На рис. 195, *б* отношение площадей треугольников $AB'C'$ и ABC равно

$$\frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}.$$

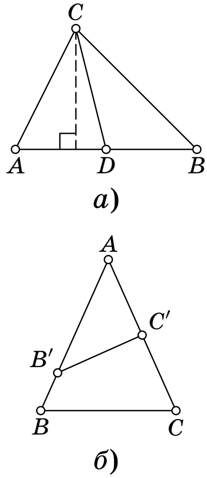


Рис. 195

Задачи: 97.11.1, 99.11.2, 04.11.4, 05.10.3.
Литература: [46], гл. 4.

Многочлены

19°. Деление многочленов и теорема Безу. Многочлены с рациональными коэффициентами можно делить с остатком, как и целые числа (ср. с фактом 7):

Теорема. *Пусть f и g — многочлены, причем $g \neq 0$. Тогда найдутся единственные многочлены q и r такие, что* а) $f = qg + r$; б) *степень r меньше степени g.*

При этом q и r называются *частным* и *остатком* от деления f на g соответственно. Аналогичная теорема верна для многочленов с действительными коэффициентами. Заметим, что мы полагаем степень нулевого многочлена равной $-\infty$.

Например, частное от деления x^4+1 на x^2+x равно x^2-x+1, а остаток равен $1-x$.

Теорема Безу. а) *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен $f(a)$.*

б) *$f(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда a — корень многочлена $f(x)$.*

Задачи: 97.9.6, 98.11.1, 03.11.1.
Литература: [48].

20°. Корни многочлена и теорема Виета.

Теорема. а) *Многочлен степени n имеет не более, чем n корней.*

б) *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные корни многочлена $f(x)$ степени n, тогда*

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где a — коэффициент многочлена $f(x)$ при x^n.

в) *Если*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

то

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i, \\ a_{n-2} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j, \\ a_{n-3} &= -\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} x_i x_j x_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 &= (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

г) *В частности, если $x_1, \ldots, x_n$ — различные корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, то имеют место формулы* (1).

Утверждения «в» и «г» называют *теоремой Виета*. При $n = 3$ формулы (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} a_2 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ a_1 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ a_0 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

При $n = 2$ получаем обычную теорему Виета, известную из школьной программы.

Часто используют обратную теорему Виета: если определить коэффициенты многочлена формулой (1), то корнями этого многочлена будут в точности числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Задачи: 95.10.1, 95.10.5, 97.10.4, 98.11.1.

Литература: [48].

21°. Однозначность разложения на множители для многочленов.

Многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от константы, называется *неприводимым над рациональными числами*, если его нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами. Например, многочлены $x-4$, x^2-2, x^3+x+1 неприводимы, а многочлены x^3-1, x^4+4, x^5+x+1 приводимы.

Любой многочлен с рациональными коэффициентами можно однозначно (с точностью до перестановки множителей и домножения на константы) представить в виде произведения неприводимых.

Например,

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=(2x-2)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right).$$

Аналогичная теорема верна для многочленов с целыми коэффициентами, с действительными коэффициентами, с комплексными коэффициентами и т. д. Теорема верна и для многочленов от нескольких переменных.

Задачи: 97.11.3, 98.11.1, 03.11.1.
Литература: [48].

22°. Разностное дифференцирование.

Пусть c — ненулевая константа. Тогда степень многочлена $f(x+c)-f(x)$ на единицу меньше степени многочлена $f(x)$. Более точно, если старший член $f(x)$ равен ax^n, то старший член многочлена $f(x+c)-f(x)$ равен $acnx^{n-1}$.

Задачи: 95.11.4, 00.10.5.
Литература: [48].

Разные факты

23°. Четность.

Число называется *четным*, если оно делится на два (см. факт 5), в противном случае число называется *нечетным*. Четные числа можно представить в виде $2n$, а нечетные — в виде $2n+1$.

Полезные соображения: а) сумма двух четных или двух нечетных чисел четна; сумма четного и нечетного чисел нечетна; аналогичные утверждения верны для разности;

б) сумма нескольких чисел четна тогда и только тогда, когда количество нечетных чисел в этой сумме четно; в) произведение четного числа и любого числа четно, произведение двух нечетных чисел нечетно. Произведение нескольких чисел четно, если хотя бы один из сомножителей четный, и нечетно в противном случае.

Задачи: 93.8.3, 93.9.2, 95.10.6, 96.8.5, 97.8.4, 97.11.3, 98.11.4, 99.9.4, 00.9.2, 00.9.6, 01.10.5, 02.9.4, 03.10.1, 03.10.2, 04.8.4, 04.8.6, 04.9.1, 05.8.4.
Литература: [62].

24°. Индукция, полная индукция.
Математическая индукция — это метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n=1$ верно, что...», «Для $n=2$ верно, что...» и т. д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или *основанием*) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *индуктивный переход* (или *шаг индукции*): «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $n+1$». Индуктивный переход также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

Если верна база индукции и верен индуктивный переход, то все утверждения верны (это и есть *принцип математической индукции*). Хорошими иллюстрациями принципа математической индукции являются задачи 94.10.3, 95.8.2 и 02.9.6.

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на *все* предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: «Если верны все утверждения с номерами от 1 до n, то верно и утверждение с номером $n+1$». В качестве иллюстрации смотрите задачи 93.8.5 и 93.9.2.

Иногда удобен *индуктивный спуск* или *обратная индукция*: если утверждение с номером $n>1$ можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и утверждение 1 верно, то все утверждения верны.

Часто спуск оформляется следующим образом: рассуждают от противного, рассматривают наименьшее n, для которого утверждение с номером n неверно, и доказывают, что найдется такое $m<n$, что утверждение с номером m неверно; см., например, задачи 95.9.5 и 96.10.4.

Часто индукция встречается в завуалированном виде: например, слова «и так далее» часто означают скрытую индукцию.

Задачи: индукция 93.8.5, 93.9.2, 93.11.4, 94.10.3, 94.11.6, 95.8.2, 95.9.1, 95.9.5, 95.10.6, 95.11.4, 95.11.6, 96.10.4, 97.10.3, 99.9.2, 99.9.6, 99.10.5, 99.11.4, 00.9.6, 00.10.5, 01.11.5, 02.9.6, 03.10.5, 05.10.6;
завуалированная индукция: 93.9.4, 97.8.6, 97.10.3, 99.10.6, 01.9.5, 02.10.4.
Литература: [62].

25°. Линейность.

Аффинная функция на плоскости с координатами (x, y) задается формулой $f(x, y)=ax+by+c$, а в n-мерном пространстве с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ — формулой

$$f(x_1, \ldots, x_n)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+C.$$

Если $C=0$, то функция называется *линейной*.

Проекция точки на прямую или на плоскость — это аффинная функция от координат точки. Ориентированное расстояние $f(x, y, z)$ от точки (x, y, z) до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, является аффинной функцией (проекцией на нормаль к α):

$$f(x, y, z)=\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Вывод этой формулы основан на том, что скалярное произведение вектора, лежащего на плоскости, с вектором, лежащим на нормали, равно нулю. Полезное соображение: сумма (и линейная комбинация) аффинных функций является аффинной функцией. Если аффинная функция на плоскости отлична от константы, то множество ее нулей есть прямая. Поэтому равенство аффинной функции на плоскости константе (в частности, нулю) достаточно проверить в трех вершинах некоторого треугольника. Аналогично, чтобы проверить равенство нулю (константе) аффинной функции в трехмерном пространстве, достаточно проверить его в вершинах произвольного тетраэдра (см. 99.11.3).

Во многих задачах встречается линейное пространство над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — полем вычетов по модулю 2. Во втором решении задачи 95.10.6 используется следующий факт: любое собственное (отличное от всего пространства) линейное подпространство содержится внутри множества нулей некоторой линейной функции.

Решение задачи 98.9.6 основано на следующем соображении: если система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет иррациональное решение (т. е. значение одной из переменных иррационально), то она имеет бесконечно много решений (параметрическое семейство решений).

Задачи: 94.11.5, 95.10.6, 98.9.3, 99.11.3.
Литература: [72], [73].

26°. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

В задачах часто используют неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$ (верное для всех a и b), а также $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (верное для неотрицательных a и b). Последнее неравенство имеет геометрический смысл: квадрат имеет наибольшую площадь среди прямоугольников с заданным периметром.

Обобщением этих неравенств служит классическое *неравенство Коши*, утверждающее что для неотрицательных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Из этого неравенства для $n = 3$ следует, что куб имеет наибольший объем среди параллелепипедов с заданной площадью боковой поверхности.

Задачи: 93.10.5, 95.8.4, 02.10.2.

27°. Предел последовательностей.

Бесконечная последовательность a_n имеет *предел* L (*стремится к* L, когда n стремится к бесконечности), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для всякого $n > k$ выполняется неравенство $|a_n - L| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

Это определение есть формализация утверждения «a_n очень близко к L, если n очень велико». Равносильное определение: *каждый интервал, содержащий L, содержит все члены последовательности за исключением, быть может, конечного числа.*

Некоторые пределы, часто встречающиеся в решении задач:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, если $|a| < 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ при любом a.

3) Пусть P и Q — многочлены степеней k и l соответственно. Тогда предел $\frac{P(n)}{Q(n)}$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю, если $l > k$, и равен отношению коэффициентов при членах старшей степени, если $k = l$.

Задачи: 98.10.6, 99.10.5, 00.11.5, 01.10.6, 04.11.5, 04.11.6.

Литература: [75], гл. 3.

28°. Свойства определенного интеграла. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на отрезке $[a; b]$. Тогда при некоторых ограничениях на функцию $f(x)$ (например, если $f(x)$ непрерывна) определен *определенный интеграл* $f(x)$ *по отрезку* $[a; b]$, который обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ непрерывна, то это площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $f(x)$. При этом площади участков, где f отрицательна, считаются с отрицательным знаком.

Графики функций $f(x)$ и $f(a - x)$ симметричны относительно прямой $x = a/2$, поэтому $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (см. задачу 97.11.2).

Интеграл обычно вычисляют, пользуясь *формулой Ньютона—Лейбница*: если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (т. е. $F'(x) = f(x)$ на интервале $(a; b)$ и

$F(x)$ непрерывна в точках a и b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Первообразная непрерывной функции всегда существует, но не всегда выражается через элементарные функции.

Некоторые свойства определенного интеграла:

а) $$\int_a^b c_1f_1(x) + c_2f_2(x)\,dx = c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx;$$

б) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx;$$

в) если $k \neq 0$, то

$$\int_a^b f(kx+l)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka+l}^{kb+l} f(x)\,dx$$

(см. задачу 00.11.2).

Задачи: 95.11.4, 97.11.2, 00.11.2.

Литература: [75], гл. 4.

ДОПОЛНЕНИЕ А

О геометрических олимпиадных задачах

В. М. Тихомиров

Этим маленьким заключительным фрагментом мне хотелось бы способствовать (с помощью олимпиадных задач) совершенствованию геометрического школьного образования.

Школьный курс геометрии может преследовать несколько целей, среди которых назову две: развитие воображения, с одной стороны, и развитие способности точно формулировать свои мысли — с другой. Где еще, кроме как на уроках геометрии, человек может научиться устанавливать непременную истинность суждений, логически выводимых из фундаментальных фактов, не подвергаемых сомнению? И мне хочется, во-первых, предложить небольшой список таких основных геометрических фактов, достаточный для решения множества задач, а во-вторых, привести несколько «формализованных» доказательств, когда каждый логический ход обосновывается ссылкой либо на один из основных фактов, либо на нечто уже доказанное.

Но сначала несколько слов об обозначениях. Мне трудно заставить себя употреблять один и тот же символ и для геометрического объекта и для его величины, и потому, следуя А. Н. Колмогорову, далее отрезок AB обозначается $[A; B]$, а его длина $|AB|$, угол A обозначается $\angle A$, а его величина $\widehat{A}$.[1]

Теоремы, на которые будем далее опираться, за исключением теорем синусов и косинусов, восходят к истокам нашей науки и приписываются обычно Фалесу, школе Пифагора или Евклиду.

Основные геометрические факты

1. Треугольник ABC является равнобедренным ($|AC| = |BC|$) тогда и только тогда, когда $\widehat{A} = \widehat{B}$.

[1] В отличие от основного текста книги, где используются принятые в настоящее время в школе обозначения.

2. Сумма углов треугольника равна 180°.

3. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ равны (более точно следовало бы употребить другое слово, скажем, «наложимы друг на друга» или «конгруэнтны»),

1) если $|AB|=|A'B'|$, $|AC|=|A'C'|$ и $\widehat{A}=\widehat{A}'$, или

2) если $|AB|=|A'B'|$, $\widehat{A}=\widehat{A}'$ и $\widehat{B}=\widehat{B}'$, или

3) если $|AB|=|A'B'|$, $|AC|=|A'C'|$ и $|BC|=|B'C'|$.

4. Треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$.

5. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ подобны, если либо их углы равны, либо их стороны пропорциональны.

6. Величина вписанного в окружность угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же хорду, либо дополняет ее до 180°.

7. Теоремы синусов и косинусов. В треугольнике ABC выполнены следующие соотношения:

$$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2-2\,|AB|\,|AC|\cos\widehat{A}, \qquad \frac{|AB|}{\sin\widehat{C}}=\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}}=\frac{|BC|}{\sin\widehat{A}}.$$

Приведем несколько тривиальных следствий из этих теорем.

С л е д с т в и е 1 (о биссектрисе). Прямая, соединяющая вершину треугольника с центром вписанного круга, является его биссектрисой.

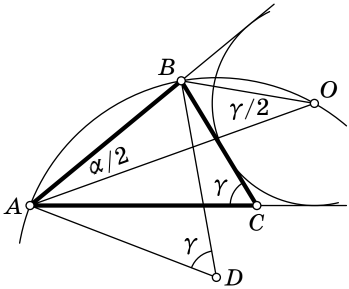
С л е д с т в и е 2 (о средней линии). Если B' и C' — середины сторон AB и AC, то треугольники ABC и $AB'C'$ подобны с коэффициентом 2.

С л е д с т в и е 3 (о серединном перпендикуляре). Для того чтобы $|AB|=|AC|$, необходимо и достаточно, чтобы точка C лежала на серединном перпендикуляре к отрезку $[A;\,B]$.

С л е д с т в и е 4 (об угле, опирающемся на диаметр). Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

Рассмотрим теперь для примера геометрические задачи олимпиады 1993 года и порешаем их.

8 класс, задача 6. Окружность с центром D проходит через точки A, B и центр O вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Доказать, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



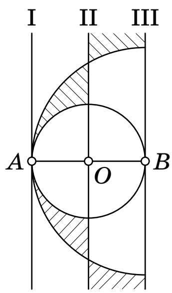
Решение. Обозначим $\widehat{A}=\alpha$, $\widehat{B}=\beta$, $\widehat{C}=\gamma$ и соединим A и B с O. Тогда AO — биссектриса угла A, BO — биссектриса внешнего угла B (см. следствие о биссектрисе). Значит,

$$\widehat{ABO}=\beta+\frac{180^\circ-\beta}{2}. \qquad \text{(i)}$$

Тогда по теореме о сумме углов треугольника $\widehat{BOA}=180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\widehat{ABO}\overset{\text{(i)}}{=}\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}=\frac{\gamma}{2}$. Угол BOA — вписанный в окружность по условию и, следовательно, по теореме о вписанном угле $\widehat{ADB}=\gamma$, а значит, по теореме, обратной к теореме о вписанном угле, A, B, C и D лежат на одной окружности.

9 класс, задача 1. Для двух данных различных точек плоскости A и B найдите геометрическое место таких точек C, что треугольник ABC остроугольный, а его угол A — средний по величине.

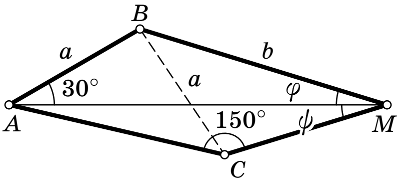
Решение. Пусть O — середина отрезка $[A;B]$, прямые I, II, III перпендикулярны AB и проходят через A, O и B соответственно, $\mathscr{O}$ — окружность с центром в O радиуса $\frac{|AB|}{2}$, $\mathscr{O}_1$ — окружность с центром в B радиуса $|AB|$. Тогда: 1) Углы A и B острые тогда и только тогда, когда C лежит между I и III. 2) Угол C тупой тогда и только тогда, когда C лежит внутри $\mathscr{O}$ (по следствию 4). 3) Угол A равен углу B на серединном перпендикуляре II и больше B между I и II; угол A равен углу C (по теореме о равнобедренном треугольнике) на окружности $\mathscr{O}_1$ и меньше угла C внутри этой окружности. Отсюда вытекает, что для того чтобы треугольник был остроугольным и при этом $\widehat{B}\leqslant\widehat{A}\leqslant\widehat{C}$, необходимо и достаточно, чтобы точка C лежала левее II и между окружностями, а для того чтобы треугольник был остроугольным и при этом $\widehat{C}\leqslant\widehat{A}\leqslant\widehat{B}$, необходимо и достаточно, чтобы точка C лежала правее II и вне $\mathscr{O}_1$.



9 класс, задача 6. Дан выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором $|AB| = |BC|$, $\widehat{BAM} = 30^\circ$, $\widehat{ACM} = 150^\circ$. Докажите, что AM — биссектриса угла BMC.

Р е ш е н и е. Обозначим $\widehat{BMA} = \varphi$, $\widehat{AMC} = \psi$, $|AB| = |BC| = a$, $|BM| = b$. По теореме синусов в треугольнике ABM получим:

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b. \qquad \text{(i)}$$



В силу теоремы о равнобедренном треугольнике $\widehat{BCA} = \widehat{BAC}$. Но по теореме о сумме углов треугольника $\widehat{BAC} = 30^\circ + 180^\circ - 150^\circ - \psi = 60^\circ - \psi$, откуда из теоремы синусов в треугольнике BCM получаем:

$$\frac{a}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{b}{\sin(150^\circ - 60^\circ + \psi)} = \frac{b}{\cos\psi} \overset{\text{(i)}}{=} \frac{a}{2\sin\varphi\cos\psi},$$

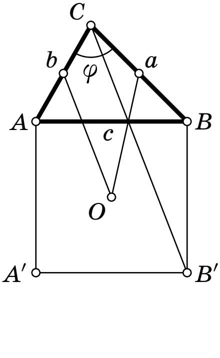
откуда, используя формулу

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi,$$

получаем: $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi$, т. е. $\varphi = \psi$.

10 класс, задача 6. На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен квадрат с центром O. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно a и b. Найти максимум суммы $|OM| + |ON|$, когда угол ACB меняется.

Р е ш е н и е. Обозначим $\widehat{B} = \psi$, $\widehat{C} = \varphi$, $|AB| = |BB'| = c$. По теореме косинусов в треугольниках CBB' и ABC имеем: $|CB'|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\psi + 90^\circ)$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$. По теореме синусов в треугольнике ABC получаем: $\dfrac{a}{\sin\psi} = \dfrac{c}{\sin\varphi}$, т. е. $c\sin\psi = a\sin\varphi$ и, значит,



$$|CB'|^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Аналогично,

$$|CA'|^2 = b^2 + 2a^2 + 2ab(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Оба выражения достигают максимума в точке $\varphi = 135°$, ибо $\sin\varphi - \cos\varphi = \sqrt{2}\cos(135° - \varphi)$. Значит,

$$\max(|CA'| + |CB'|) = \\ = (b^2 + 2a^2 + 2\sqrt{2}\,ab)^{1/2} + (a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}\,ab)^{1/2} = \\ = \sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,b + a + b = (\sqrt{2} + 1)(a + b),$$

откуда по следствию 2 получаем, что

$$\max(|OM| + |ON|) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}(a + b).$$

Мы видим, что все эти четыре задачи являются вполне школьными: для их решения не требуется ничего, кроме небольшого набора геометрических фактов, которые на протяжении веков преподаются в школе.

Однако не все олимпиадные задачи с геометрическим содержанием таковы. Приведем две нестандартные задачи из той же LVI олимпиады, которые оказались столь трудными, что на олимпиаде их никто не решил, и более того, корректное решение первой из них не было известно почти до сдачи в набор данной книги. Вот эта задача.

10 класс, задача 3. От любой точки на любом из двух берегов реки можно доплыть до другого берега, проплыв не более одного километра. Всегда ли лоцман может провести корабль вдоль реки так, чтобы находиться все время на расстоянии не более чем а) 700 метров, б)* 800 метров от каждого из берегов? П р и м е ч а н и е. Известно, что река соединяет два круглых озера радиусом 10 километров каждое, а береговые линии состоят из отрезков и дуг окружностей. Корабль следует считать точкой.

Хочу предложить свой план решения. То, что 700 м не удовлетворяют условию задачи, хорошо и просто объяснено на с. 110. Докажем, что 800 м условию задачи удовлетворяют. Сначала рассмотрим простейшую ситуацию, когда каждый из берегов представляет собой функцию $x \to f_i(x)$, $i = 1,\ 2$, $x \in [a;\ b]$, в декартовой системе координат. Для каждого x на отрезке $[a;\ b]$ найдем единственный максимальный круг, целиком расположенный в реке, центр $c(x)$ которого расположен на вертикальной прямой, пересекающей горизонтальную ось в точке $(x, 0)$. Тогда $x \to c(x)$ — искомая линия пути лоцмана (ибо радиус максимального круга не может быть больше[1] $\sqrt{2}/2$ км, что меньше 800 м, а максимальный круг должен касаться обоих берегов). В общем случае надо рассмотреть *все максимальные круги*, их центры и дадут искомую кривую. Мне кажется, что, базируясь на этом плане, можно получить достаточно короткое формализованное доказательство[2].

Вторая задача — о мухе, я уже упоминал о ней.

11 класс, задача 6. Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром a. Какое наименьшее расстояние она должна пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?

Эта задача действительно трудна для начинающего математика, но если кое-что знать, то решение ее напрашивается. Дело в том, что эта задача относится к выпуклому программированию, где, в частности, исследуются задачи о минимизации выпуклых функций при линейных ограничениях, а данная задача именно такова. Существование решения в данной задаче гарантируется общими соображениями компактности, которые проходятся на первом курсе университета (или в специальных математических школах). А для выпуклых задач, подобных задаче о мухе, имеется способ сформулировать необходимое и достаточное условие минимума. В задаче о мухе оно состоит в том, что если из точки на грани, на которую села муха (при выборе оптимальной траектории), провести единичные векторы по направлениям той точки, откуда муха прилетела и куда она должна лететь, то сумма этих векторов должна быть ортогональна той грани, на которую муха села. Отсюда следует, что если путь состоит из кратчайших отрезков, соединяющих медианы граней, то сформулированное условие удовлетворится, и значит, решение найдено. А самих путей при этом можно выбрать три разных.

[1] Аккуратное доказательство этого утверждения, приведенное в дополнении Б, занимает 3 страницы.

[2] Впрочем, такое доказательство пока не получено (см. дополнение Б).

ДОПОЛНЕНИЕ Б

Решение задачи 3б для 10 класса олимпиады 1993 г.

Рассмотрим любой круг, лежащий целиком на воде, и точки A_1, A_2, B_1 и B_2 на границе этого круга. Пусть точки B_1 и B_2 разделяют точки A_1 и A_2 (т. е., двигаясь по окружности, мы не можем из A_1 попасть в A_2, не проходя через B_1 или B_2).

Пусть O — центр круга, обозначим первую точку пересечения луча OA_1 с берегом через A_1'. Аналогично определим точки A_2', B_1' и B_2'. Рассмотрим *береговую линию*, т. е. объединение левого берега, правого берега и берегов озер. Эта линия представляет собой замкнутую несамопересекающуюся кривую, состоящую из отрезков и дуг окружностей. Нам неоднократно понадобится следующее «топологическое» утверждение.

Лемма 0. *Точки B_1' и B_2' разделяют точки A_1' и A_2', т. е. нельзя попасть из A_1' в A_2', двигаясь вдоль берега и не проходя через точки B_1' и B_2'.*

Доказательство. Пусть это не так, обозначим через Γ участок берега, соединяющий точки A_1' и A_2' (рис. 196) и не проходящий через точки B_1' и B_2'. Ясно, что Γ должен пересекать один из лучей OB_1', OB_2' (пусть OB_1'), причем дальше от центра, чем B_1'. Рассмотрим контур, состоящий из Γ и отрезков OA_1' и OA_2'. Этот контур разделяет точки B_1' и B_2', поэтому береговая линия между B_1' и B_2' должна его пересечь, но это невозможно. Лемма доказана.

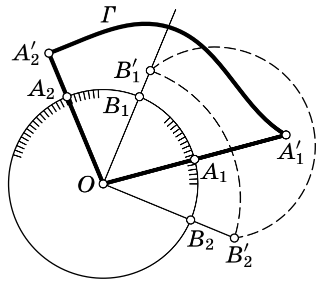


Рис. 196

Комментарий. Мы воспользовались знаменитой *теоремой Жордана*: замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость на две части. Для кривых, состоящих из отрезков и дуг окружностей, доказать ее несложно. По поводу общего случая см. [25].

Лемма 1. *В условиях задачи не существует круга радиуса 750 м с центром в реке, лежащего целиком на воде.*

Доказательство. Пусть такой круг существует, O — его центр. Докажем, что тогда найдется точка на одном из берегов, расстояние от которой до другого берега больше 1000 м.

Рассмотрим множество лучей с началом в точке O и покрасим их в четыре цвета: в синий, если первое пересечение луча происходит с правым берегом, в зеленый — если с левым, в желтый — если с первым озером, и в белый — если со вторым озером.

Соответственно покрасим точки окружности. Белые и желтые точки будем называть *светлыми*, а остальные — *темными*. Итак, окружность разбилась на разноцветные дуги (быть может, имеется лишь одна дуга, совпадающая со всей окружностью).

1°. *Имеется не более одной дуги каждого цвета.*

Доказательство. Пусть, например, зеленых дуг две. Возьмем две зеленые точки A_1 и A_2 на разных дугах. Эти точки разбивают окружность на две части, на каждой из которых мы возьмем по точке другого цвета. Обозначим их через B_1 и B_2. Осталось применить лемму 0. Утверждение доказано.

Заметим, что каждая из дуг может быть открытой, замкнутой, либо содержащей ровно один из своих концов.

Комментарий. Искушенный читатель может возразить, что множества точек каждого цвета не обязаны быть объединениями конечного числа дуг. Однако из приведенного рассуждения следует, что эти множества связны, а связное множество на окружности является дугой.

2°. *Если синяя и зеленая дуги присутствуют, то белая и желтая дуги не могут иметь общего конца.*

Доказательство. От противного. Пусть, например, дуги расположены в следующем порядке: белая, желтая, зеленая и синяя. Возьмем в качестве A_1, A_2, B_1 и B_2 белую, зеленую, желтую и синюю точки соответственно и применим лемму 0. Остальные варианты разбираются аналогично.

3°. *Каждая из светлых дуг меньше* 180°, потому что точку, не лежащую в озере, можно отделить от озера прямой. Значит, есть хотя бы одна темная дуга.

4°. *Либо каждая из темных дуг составляет* 180° (этот случай мы будем называть *исключительным*), *либо найдутся точки A_1, A_2 и B на окружности, обладающие следующими свойствами*:

1) *точки A_1 и A_2 диаметрально противоположны*,

2) *точка B является серединой одной из дуг A_1A_2*,

3) *точка B темная, а каждая из точек A_i либо светлая, либо одного цвета с B* (этот случай мы будем называть *общим*).

Доказательство. Можно считать, что синяя и зеленая дуги присутствуют, причем каждая из них меньше 180° (остальные случаи очевидны). Предположим сначала, что обе светлые дуги присутствуют. Используя утверждение 2°, видим, что найдется диаметр d_1, соединяющий белую и желтую точки. Рассмотрим перпендикулярный ему диаметр d_2. Если один из концов этого диаметра темный, то можно взять этот конец в качестве точки B, а концы диаметра d_1 в качестве точек A_1 и A_2.

В противном случае, диаметры d_1 и d_2 разбивают окружность на четыре части, причем каждая из темных дуг содержится целиком в одной из частей. Части, содержащие темные дуги, противоположны, так как иначе одна из светлых дуг была бы не меньше 180°. Теперь ясно, что в качестве точки B можно взять любую из темных точек.

Случай двух темных и одной светлой дуги мы оставляем читателю.

5°. Рассмотрим сначала общий случай. Будем считать, что точка B — синяя. Как обычно определим точки A_1', A_2', B'. Пусть Γ — участок береговой линии между A_1' и A_2', содержащий точку B'. *Выбирая при необходимости новые точки A_i и B, тоже удовлетворяющие условиям* 4°, *мы можем считать, что на Γ нет точек левого берега.*

Доказательство. Точки A_1' и A_2' не лежат на левом берегу, значит, либо на Γ нет точек левого берега, либо Γ содержит весь левый берег. В первом случае все доказано, во втором случае Γ содержит целиком берег одного из озер (пусть первого). Тогда возможны два варианта: точки A_1 и A_2 синие или одна из них синяя, а другая белая. Если точки A_1 и A_2 синие, то в силу леммы 0 вся окружность — синяя. Снова используя лемму 0, нетрудно убедиться, что достаточно заменить точку B на диаметрально противоположную. Если же точка B — белая, то окружность состоит только из желтой и синей дуг, так что синяя дуга больше 180°. Но тогда мы можем выбрать новые точки A_i и B синего цвета и свести все к предыдущему случаю. Утверждение доказано.

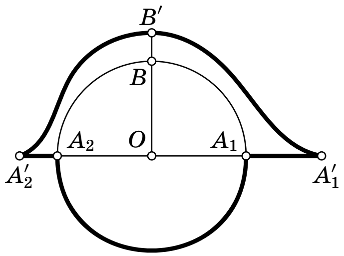


Рис. 197

Построим контур (рис. 197), состоящий из

1) береговой линии Γ,

2) отрезков A_1A_1' и A_2A_2',

3) полуокружности, соединяющей точки A_1 и A_2 и не содержащей точки B.

Так как на Γ нет точек левого берега, кратчайший путь от B' до левого берега пересекает участок $A_1'A_1A_2A_2'$ в некоторой точке X. В любом случае

$$\angle B'OX \geqslant 90^\circ, \quad B'O \geqslant 750 \text{ м}, \quad XO \geqslant 750 \text{ м}.$$

Значит, по теореме косинусов,

$$B'X \geqslant \sqrt{B'O^2 + XO^2} \geqslant 750\sqrt{2} > 1000 \text{ м}.$$

Это противоречит условию.

Осталось рассмотреть исключительный случай. В этом случае не получится взять диаметрально противоположные точки синего цвета, но можно взять «почти» диаметрально противоположные. Точнее, мы потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\cos\alpha < 1/9$, где 2α — меньшая из дуг A_1A_2. Тогда предыдущие неравенства заменятся на:

$$B'X \geqslant \sqrt{B'O^2 + XO^2 - \frac{2B'O\cdot XO}{9}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{B'O^2 + XO^2 - \frac{B'O^2 + XO^2}{9}} \geqslant \sqrt{\frac{8}{9}}\cdot\sqrt{750^2 + 750^2} = 1000 \text{ м}.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть расстояние от точки O на реке до левого берега* (*по воде*) *не меньше 750 м, тогда расстояние до правого берега не превосходит 750 м.*

Доказательство. Пусть B — ближайшая к O точка берега (или одна из ближайших, если таких несколько). Согласно лемме 1, $OB < 750$ м.

Внутри отрезка OB нет точек берега, так что расстояние от O до B по воде равно расстоянию по прямой. Так как расстояние от точки O до левого берега не меньше 750 м, B не может быть точкой левого берега. Если B — точка правого берега, то все доказано. Остался случай, когда B — точка на берегу озера. Соответствующее озеро представляет собой круг, обозначим его K_1.

Пусть левый берег переходит в озера в точках P и Q, а правый — в R и S.

Пусть K_2 — круг радиуса OB с центром в точке O. Внутри этого круга нет точек берега. Значит, либо круги K_1 и K_2 касаются, либо B — одна из точек P, Q, R, S (рис. 198). Во втором случае B — точка берега реки, а этот вариант мы уже рассмотрели. Нетрудно видеть, что и в первом случае B — одна из точек P, Q, R, S (иначе мы приплыли бы к берегу озера снаружи). Лемма доказана.

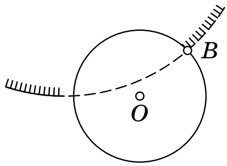


Рис. 198

Теперь мы можем изложить решение задачи.

Идея решения. Пусть X — множество точек A, удовлетворяющих двум условиям:

1) точка A лежит на воде (на реке или в озере);

2) расстояние (по воде) от точки A до левого берега меньше 800 м.

Тогда X — это *связная* область[1]. Связность следует из того, что от любой точки области X можно доплыть до левого берега по точкам, лежащим в X.

Пусть Γ — *внешняя граница области* X, т. е. та компонента границы, из точек которой можно уйти далеко от реки и озер (говоря математически — «на бесконечность») по точкам, не лежащим в X (рис. 199). *Тогда Γ — замкнутая несамопересекающаяся кривая.* (1)

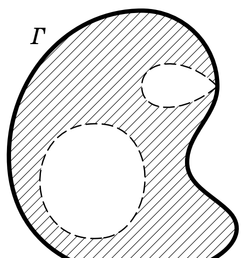


Рис. 199

[1] Грубо говоря, множество называется связным, если оно состоит из одного куска.

Ясно, что Γ состоит из точек двух типов:

1) точек, расстояние от которых до левого берега *равно* 800 м;

2) точек берега (реки или озер).

Кроме того, ясно, что весь левый берег (обозначим его Γ_1) содержится в Γ. Действительно, пусть A — точка левого берега, если отплыть от нее чуть-чуть в реку, то получится точка множества X, а если отойти от нее чуть-чуть по суше, то получится точка, не лежащая в множестве X. Значит, точка A принадлежит границе множества X. Она лежит именно во внешней компоненте границы, так как из нее можно уйти по суше на бесконечность.

Итак, Γ можно представить в виде объединения дуги Γ_1 и ее дополнения $\Gamma \setminus \Gamma_1$. Заметим, что $\Gamma \setminus \Gamma_1$ соединяет концы левого берега, т. е. соединяет озера. Докажем, что лоцман может провести корабль по этому дополнению. Достаточно доказать, что расстояние от любой точки $\Gamma \setminus \Gamma_1$ до каждого из берегов не превосходит 800 м, если только эта точка не лежит в озере.

Рассмотрим любую точку $\Gamma \setminus \Gamma_1$. Расстояние до левого берега не превосходит 800 м. Если эта точка — точка правого берега, то расстояние до правого берега меньше 800 м. Если это точка на реке, то утверждение вытекает из леммы 2. Задача решена.

Набросок строгого решения. Утверждение (1), выделенное курсивом, верно не для всякой области, а лишь для достаточно хорошей. Для нашей области оно верно, однако доказать это не просто (см. комментарии 2 и 3). Более простой выход состоит в том, чтобы приблизить берега (которые по условию состоят из отрезков и дуг окружностей) ломаной. Подробное изложение этого рассуждения заняло бы много страниц, поэтому мы разобьем его на относительно несложные задачи.

Обозначим через ε_0 минимальное из расстояний по воде между точками A и B, где A лежит на левом берегу реки, а B — на правом. Обозначим $\varepsilon = \min(\varepsilon_0/3,\ 50\ \text{м})$.

Задача. Можно проплыть из P в Q по некоторой *ломаной* L_1 так, чтобы расстояние по воде до левого берега не превосходило ε.

Засыпем песком акваторию, ограниченную ломаной L_1 и левым берегом. Аналогично проведем ломаную L_2 вдоль правого берега и засыпем песком соответствующую акваторию. Пусть X' — множество точек на воде, расстояние от которых по воде до ломаной L_1 меньше $d = 750$ метров.

Назовем открытую ограниченную область X *хорошей*, если ее граница есть объединение конечного числа отрезков и дуг окружностей.

З а д а ч а. Внешняя граница связной хорошей области может быть представлена как $\bigcup\limits_{i=1}^{M} \Gamma_i$, где Γ_i — либо отрезок, либо дуга окружности, причем найдутся такие попарно различные точки F_i $(i=1, \ldots, M)$, что Γ_i соединяет F_i с F_{i+1}, Γ_M соединяет F_M с F_0, причем Γ_i не пересекается с внутренностью Γ_j при $i \neq j$. У к а з а н и е. Рассмотрите границу области как граф на плоскости, ребра которого — отрезки и дуги окружностей. Тогда внешняя граница — подграф этого графа (см. факт 3). Рассмотрите в этом подграфе цикл.

З а д а ч а. Выведите утверждение задачи из того, что X' — хорошая область.

Осталось доказать, что X' — хорошая область.

Назовем *основным путем* любую ломанную $A_1A_2\ldots A_kC$, удовлетворяющую условиям:

1) A_i — вершины ломаной L_2;

2) все звенья ломаной лежат на воде;

3) C — вершина L_1 либо основание перпендикуляра, опущенного из A_k на одно из звеньев L_1.

Ясно, что число основных путей конечно.

З а д а ч а. Кратчайший путь от любой точки B до левого берега по воде есть либо путь по прямой, либо объединение отрезка и основного пути. У к а з а н и е. Зафиксируйте точку B и рассмотрите кратчайший из путей указанного вида. Предположите, что есть более короткий путь, и проведите убывающую индукцию по количеству вершин, через которые этот путь проходит.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ — все основные пути, $d_1, \ldots, d_N$ — их длины, $E_1, \ldots, E_N$ — их начальные точки.

З а д а ч а. Кратчайшее расстояние по воде от точки B до левого берега либо есть расстояние по прямой, либо равно минимальной из величин

$$BE_i + d_i,$$

где минимум берется по тем i, для которых BE_i целиком лежит на воде.

Пусть X_i — множество точек, для которых отрезок BE_i лежит на воде, и $BE_i < d - d_i$. Пусть Y_i — множество точек, от которых можно доплыть по прямой до i-й вершины ломаной L_1, причем это расстояние не превосходит d, наконец, Z_i — множество точек, из которых можно опустить перпендикуляр на i-е звено ломаной L_1, причем этот перпендикуляр лежит целиком на воде и его длина не превосходит d.

З а д а ч а. X' есть объединение всех X_i, Y_i и Z_i.

З а д а ч а. Каждое из множеств X_i и Y_i есть пересечение многоугольника и круга, каждое из множеств Z_i — многоугольник.

З а д а ч а. Докажите, что X' — хорошая область. У к а з а н и е. Докажите, что объединение двух хороших областей является хорошей областью.

Комментарии. 1°. Если разрешить острова, то нетрудно придумать контрпример — рис. 200 (ширина реки чуть меньше километра, остров очень узкий).

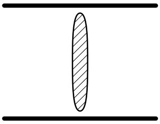


Рис. 200

2°. Граница множества (даже открытого) может быть устроена очень плохо. Например, можно построить 3 таких открытых множества, что любая точка дополнения будет принадлежать границе каждого из них! См., например, [25].

3°. Неверно, что Γ есть объединение отрезков и дуг окружностей. Пусть, например, правый берег — это отрезок, а левый содержит окружность радиуса 200 м (рис. 201). Пусть A — такая точка окружности, что касательная в этой точке перпендикулярна правому берегу. Пусть расстояние от A до правого берега равно 400 м. Выпустим из каждой точки X верхней полуокружности касательную и отложим на ней расстояние 400 м минус длина дуги AX. Получившаяся кривая называется *эвольвентой* окружности. Расстояние от изображенных на рисунке точек эвольвенты до правого берега равно 800 м, так что часть этой эвольвенты содержится в Γ.

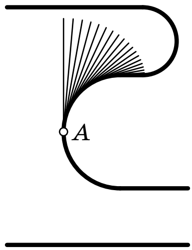


Рис. 201

4°. А. Акопян предложил следующее элегантное рассуждение: покрасим точки на воде, расстояние от которых до обоих берегов не превосходит 800 м, в белый цвет, а остальные — в черный. Если можно проплыть из одного озера в другое по белым точкам, то задача решена, в противном случае черные точки образуют *перегородку* между правым и левым берегом. Нетрудно показать, что в этой перегородке найдется точка, расстояние от которой до каждого из берегов не меньше 800 м. Остается использовать лемму 2. К сожалению, утверждение о перегородках тоже не является элементарным.

5°. Авторы книги не смогли сами решить эту задачу. Был объявлен конкурс, и решение было найдено коллективными усилиями А. Акопяна, В. Клепцына, М. Прохоровой и авторов. Идея другого доказательства, основанного на рассмотрении точек, из которых берега видны под равными углами, была предложена Д. Пионтковским.

ДОПОЛНЕНИЕ В

Избранные задачи Московских математических олимпиад 1935—1992 г.

1. Железнодорожный поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда. (*1935*(*1*).*2*.)

2. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых. (*1935*(*1*).*2*.)

3. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра. Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в 12 различных цветов. (*1935*(*2*).*1*.)[1]

4. В пространстве расположены 3 плоскости и шар. Сколькими различными способами можно поместить в пространстве второй шар так, чтобы он касался[2] трех данных плоскостей и первого шара? (*1936*(*2*).*5*.)

5. На сколько частей разделяют n-угольник его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке? (*1937*(*1*).*2*.)

6. Построить треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании. (*1938*(*2*).*3*.)

7. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины. (*1939*(*1*).*5*.)

8. Пароход от Горького до Астрахани идет 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани? (*1940*(*1*).*7*/*8*.*5*.)

Для каждой задачи указывается год олимпиады, номер тура, класс, в котором она была предложена и номер задачи в классе. Если деление на туры или классы отсутствовало, то соответствующая информация не указывается.

[1] Эта задача не была решена ни одним участником.

[2] В этой задаче речь фактически идет о касании сфер, т. е. не предполагается, что шары могут касаться только внешним образом.

9. Данным четырехугольником неправильной формы настлать паркет, т. е. покрыть всю плоскость четырехугольниками, равными данному, без промежутков и перекрытий. (*1940*(*2*).*7*/*8.3*.)

10. На бесконечном конусе, угол развертки которого равен α, взята точка. Из это точки в обе стороны проводится линия так, что после развертки она превращается в отрезки прямых. Определить число ее самопересечений. (*1940*(*2*).*9*/*10.1*.)

11. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей дает полный квадрат. (*1941*(*1*).*7*/*8.5*.)

12. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры лежат в вершинах некоторого квадрата. (*1941*(*1*).*9*/*10.2*.)

13. Построить треугольник ABC по трем точкам H_1, H_2 и H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон. (*1941*(*2*).*7*/*8.6*.)

14. Прямоугольный треугольник ABC движется по плоскости так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла. Доказать, что множеством точек A является отрезок и найти его длину. (*1945*(*1*).*9*/*10.4*.)

15. Окружность радиуса, равного высоте некоторого правильного треугольника, катится по стороне этого треугольника. Доказать, что дуга, высекаемая сторонами треугольника на окружности, все время равна 60°. (*1945*(*2*).*9*/*10.3*.)

16. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике? (*1946*(*1*).*7*/*8.1*.)

17. Дан ряд чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди первых ста миллионов одного (10^8+1) членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями? (*1946*(*2*).*9*/*10.2*.)

18. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что:

1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте не менее трех остановок.
Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?
(*1946*(*2*).*7*/*8.4*.)

19. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+9$ есть число, хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел. (*1947*(*1*).*9*/*10.3*.)

20. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые, остальные[1] дюралевые (более тяжелые). Как при помощи 11 взвешиваний на весах с двумя чашечками без гирь определить число дюралевых кубиков? (*1947*(*2*).*7*/*8.1*.)

21. Найти все рациональные положительные решения уравнения $x^y = y^x$ $(x \neq y)$. (*1948*(*2*).*9*/*10.1*.)

22. Дана плоская замкнутая ломаная периметра 1. Доказать, что можно начертить круг радиусом 1/4, покрывающий всю ломаную. (*1949*(*1*).*7*/*8.4*.)

23. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чашки весов, по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют один и тот же вес. (*1949*(*2*).*7*/*8.3*.)

24. Докажите, что числа вида 2^n при различных целых положительных n могут начинаться на любую наперед заданную комбинацию цифр. (*1949*(*2*).*9*/*10.5*.)

25. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмем среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое наибольшее число сторон может он иметь? (*1950*(*2*).*7*/*8.1*.)

26. Числа 1, 2, 3, ..., 101 написаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая). (*1950*(*2*).*9*/*10.2*.)

27. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости. (*1950*(*2*).*9*/*10.3*.)

---

[1] Предполагается, что все кубики могут быть алюминиевыми, но они не могут быть все дюралевыми (если все кубики окажутся одного веса, то нельзя выяснить, алюминиевые они или дюралевые).

28. Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 60 г (раскованное звено весит тоже 1 г)? (*1951*(*1*).*7*/*8.5*.)

29. Автобусный маршрут содержит 14 остановок (считая две конечные). В автобусе одновременно могут ехать не более 25 пассажиров. Доказать, что во время поездки автобуса из одного конца в другой

а) найдутся восемь различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, таких, что ни один пассажир не едет от A_1 до B_1, ни один пассажир не едет от A_2 до B_2, ни один пассажир не едет от A_3 до B_3 и ни один пассажир не едет от A_4 до B_4;

б) может оказаться, что пассажиры едут таким образом, что не существует 10 различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5, которые обладали бы аналогичными свойствами. (*1951*(*2*).*9*/*10.3*.)

30. Окружность обладает тем свойством, что внутри нее можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая вершина треугольника описывала эту окружность. Найти замкнутую непересекающуюся кривую, отличную от окружности, внутри которой также можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая его вершина описывала эту кривую. (*1951*(*2*).*9*/*10.4*.)

31. Два человека A и B должны попасть как можно скорее из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/час. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/час. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идет пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передает ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы время, затраченное A и B на дорогу в N, было наименьшим (C идет пешком с той же скоростью, что A и B; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода A и B из M до момента прибытия последнего из них в N).

(*1952*(*1*).*8.3*.)

32. Из точки C проведены касательные CA и CB к окружности O. Из произвольной точки N окружности опущены перпендикуляры ND, NE, NF соответственно на прямые AB, CA и CB. Докажите, что ND есть среднее пропорциональное между NE и NF. (*1952*(*2*).*8.2*.)

33. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше? (*1952*(*2*).*9.5*.)

34. В плоскости расположено n зубчатых колес таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т. д. Наконец, последнее колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колеса такой системы? (*1953*(*2*).*8.3*.)

35. Разрезать куб на 3 равные пирамиды. (*1953*(*2*).*9.5*.)

36. Из квадрата размером 3 на 3 вырезать одну фигуру, которая представляет развертку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1. (*1954*(*1*).*8.1*.)

37. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи 2 и 1. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел каждого класса получилось число, в написании которого содержится не менее двух троек. (*1954*(*2*).*8.5*.)

38. В турнире собираются принять участие 25 шахматистов. Все они играют в разную силу, и при встрече всегда побеждает сильнейший. Какое наименьшее число партий требуется, чтобы определить двух сильнейших игроков? (*1955*(*2*).*7.2*.)

39. Две окружности касаются друг друга внешним образом и третьей изнутри. Проводятся внешняя и внутренняя общие касательные к первым двум окружностям. Доказать, что внутренняя касательная делит пополам дугу, отсекаемую внешней касательной на третьей окружности. (*1955*(*2*).*8.2*.)

40. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1 \ldots A_n$ и соединена отрезками с вершинами. Стороны

n-угольника нумеруются числами от 1 до n, разные стороны нумеруются разными числами. То же самое делается с отрезками $OA_1, \ldots, OA_n$.

а) При $n=9$ найти нумерацию, при которой сумма номеров сторон для всех треугольников $A_1OA_2, \ldots, A_nOA_1$ одинакова.

б) Доказать, что при $n=10$ такой нумерации осуществить нельзя. (*1955*(*2*).*8.3.*)

41. На столе лежат 15 журналов, закрывающих его целиком. Докажите, что можно забрать семь журналов так, чтобы оставшиеся журналы закрывали не меньше 8/15 площади стола. (*1956*(*2*).*7.5.*)

42. Груз весом 13, 5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках. (Весом пустого ящика можно пренебречь.) (*1956*(*2*).*8.1.*)

43. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна, и, в-третьих, каждое число, сумма которого с двумя следующими положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю? (*1956*(*2*).*8.4.*)

44. Подряд выписаны n чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчеркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами положительна. Докажите, что сумма всех подчеркнутых чисел положительна. (*1956*(*2*).*10.1.*)

45. Докажите, что если в треугольной пирамиде любые два трехгранных угла равны или симметричны, то все грани этой пирамиды равны. (*1956*(*2*).*10.4.*)

46. Улитка ползет по столу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90° налево или направо, а в промежутках между поворотами ползет по прямой. Доказать, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов. (*1957*(*1*).*7.3.*)

47. Радиолампа имеет семь контактов, расположенных по кругу и включаемых в штепсель, имеющий семь отверстий. Можно ли так занумеровать контакты лампы и отверстия штепселя, чтобы при любом включении лампы хотя бы один контакт попал на свое место (т. е. в отверстие с тем же номером)? (*1957*(*2*).*7.2*.)

48. Дано n целых чисел $a_1=1$, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, причем $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) и сумма всех чисел четна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны? (*1957*(*2*).*10.5*.)

49. Имеется система уравнений

$$*x+*y+*z=0,$$
$$*x+*y+*z=0,$$
$$*x+*y+*z=0.$$

Два человека поочередно вписывают вместо звездочек числа. Доказать, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение. (*1958*(*1*).*7.1*.)

50. Из четырех прямых на плоскости никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идет пешеход. Известно, что 1-й встречается со 2-м, с 3-м и с 4-м, а 2-й встречается с 3-м и с 4-м. Доказать, что 3-й пешеход встретится с 4-м. (*1958*(*1*).*10.5*.)

51. Каждая грань куба заклеивается двумя равными прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой, один из которых белый, другой — черный. Можно ли эти треугольники расположить так, чтобы при каждой вершине куба сумма белых углов была равна сумме черных углов? (*1958*(*2*).*7.3*.)

52. Игральная доска имеет форму ромба с углом 60°. Каждая сторона ромба разделена на 9 частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба, разбивающие доску на треугольные клетки. Если на некоторой клетке поставлена фишка, проведем через эту клетку 3 прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба. Клетки, которые они пересекут, будут считаться побитыми фишкой. Каким наименьшим числом фишек можно побить все клетки доски?

(*1958*(*2*).*9.3*.)

53. Обозначим через a наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно полностью покрыть заданный многоугольник M, через b — наибольшее число непересекающихся кругов радиуса 1 с центрами внутри многоугольника M. Какое из чисел больше, a или b? (*1958*(*2*).*9.4*.)

54. Между зажимами A и B включено несколько сопротивлений. Каждое сопротивление имеет входной и выходной зажимы. Какое наименьшее число сопротивлений необходимо иметь и какова может быть схема их соединения, чтобы при порче любых 9 сопротивлений цепь оставалось соединяющей зажимы A и B, но не было короткого замыкания? (Порча сопротивления: короткое замыкание или обрыв.) (*1958*(*2*).*9.5*.)

55. Существует ли тетраэдр, каждое ребро которого являлось бы стороной плоского тупого угла? (*1959*(*1*).*10.3*.)

56. В квадратную таблицу $N \times N$ записаны все целые числа по следующему закону: 1 стоит на любом месте, 2 стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего 1, 3 стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего 2, и так далее. На сколько сумма чисел в столбце, содержащем N^2, отличается от суммы чисел в строке, содержащей 1? (*1959*(*1*).*10.4*.)

57. Доказать, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше 180°. (*1959*(*2*).*9.3*.)

58. В углах шахматной доски 3 на 3 стоят кони: в верхних углах — белые, в нижних — черные. Доказать, что для того, чтобы им поменяться местами, потребуется не менее 16 ходов. (Кони не обязательно ходят сначала белый, потом черный. Ходом считается ход одного коня.) (*1959*(*2*).*9.5*.)

59. Два концентрических круга поделены на $2k$ равных секторов. Каждый сектор выкрашен в белый или черный цвет. Доказать, что если белых и черных секторов на каждом круге одинаковое количество, то можно сделать такой поворот, что по крайней мере на половине длины окружности будут соприкасаться разноцветные куски. (*1959*(*2*).*10.5*.)

60. Доказать, что любая правильная дробь может быть представлена в виде (конечной) суммы обратных величин попарно различных целых чисел. (*1960*(*1*).*9.1*.)

61. Улитка ползет с непостоянной скоростью. Несколько человек наблюдало за ней по очереди в течение 6 мин. Каждый начинал наблюдать раньше, чем кончал предыдущий, и наблюдал ровно 1 мин. За эту минуту улитка проползла ровно 1 м. Доказать, что за все 6 мин. улитка могла проползти самое большее 10 м. (*1960*(*2*).*8.4*.)

62. В квадрате со стороной 100 расположено N кругов радиуса 1, причем всякий отрезок длины 10, целиком расположенный внутри квадрата, пересекает хотя бы один круг. Доказать, что $N \geqslant 400$. (*1960*(*2*).*9.5*.)

63. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек. (*1960*(*2*).*10.3*.)

64. Играют двое; один из них загадывает набор из целых чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — однозначных, как положительных, так и отрицательных. Второму разрешается спрашивать, чему равна сумма $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где $(a_1 \ldots a_n)$ — любой набор. Каково наименьшее число вопросов, за которое отгадывающий узнает задуманный набор? (*1961*(*1*).*8.2*.)

65. k человек ехали в автобусе без кондуктора, и у всех них были монеты только достоинством в 10, 15, 20 копеек. Известно, что каждый уплатил за проезд [1] и получил сдачу. Доказать, что наименьшее число монет, которое они могли иметь, равно $k + \left[\frac{k+3}{4}\right]$, где значок $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее a. (*1961*(*1*).*10.3*.)

66. Стороны произвольного выпуклого многоугольника покрашены снаружи. Проводится несколько диагоналей многоугольника, так, что никакие три не пересекаются в одной точке. Каждая из этих диагоналей тоже покрашена с одной стороны, т. е. с одной стороны отрезка проведена узкая цветная полоска. Доказать, что хотя бы один из многоугольников, на которые разбит диагоналями исходный многоугольник, весь покрашен снаружи. (*1961*(*2*).*7.1*.)

67. На сторонах квадрата, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники с острым углом при вершине. Доказать, что получившуюся фигуру нельзя разбить на параллелограммы. (*1962*(*1*).*10.2*.)

---

[1] Проезд в автобусе стоит 5 копеек.

68. У края биллиарда, имеющего форму правильного $2n$-угольника, стоит шар. Как надо пустить шар от борта, чтобы он, отразившись от всех бортов, вернулся в ту же точку? (При отражении углы падения и отражения равны.) Доказать, что при этом длина пути шара не зависит от выбора начальной точки. (*1962*(*2*)*.7.1.*)

69. В окружность вписан неправильный n-угольник, который при повороте окружности около центра на некоторый угол $\alpha \neq 2\pi$ совмещается сам с собой. Доказать, что n — число составное. (*1962*(*2*)*.8.3.*)

70. Стороны выпуклого многоугольника, периметр которого равен 12, отодвигаются на расстояние $d = 1$ во внешнюю сторону. Доказать, что площадь многоугольника увеличится по крайней мере на 15. (*1962*(*2*)*.9.3.*)

71. Даны 2^n конечных последовательностей из нулей и единиц, причем ни одна из них не является началом никакой другой. Доказать, что сумма длин этих последовательностей не меньше $n \cdot 2^n$. (*1962*(*2*)*.9.5.*)

72. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему. (*1962*(*2*)*.10.5.*)

73. Дан произвольный треугольник ABC. Найти множество всех таких точек M, что перпендикуляры к прямым AM, BM, CM, проведенные из точек A, B, C (соответственно), пересекаются в одной точке. (*1963*(*1*)*.10.5.*)

74. В таблицу 8×8 вписаны все целые числа от 1 до 64. Доказать, что при этом найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 5. (Соседними называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону.) (*1963*(*2*)*.8.2.*)

75. Найти множество центров тяжести всех остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность. (*1963*(*2*)*.8.3.*)

76. По аллее длиной 100 метров идут три человека со скоростями 1, 2 и 3 км/час. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идет назад с той же скоростью. Доказать, что найдется отрезок времени в 1 минуту, когда все трое будут идти в одном направлении. (*1963*(*2*)*.8.5.*)

77. Доказать, что на сфере нельзя так расположить три дуги в 300° каждая, чтобы никакие две из них не имели ни общих точек, ни общих концов. (*1963*(*2*).*11.5*.)

78. На какое наименьшее число непересекающихся тетраэдров можно разбить куб? (*1964*(*1*).*10/11.5*.)

79. Собрались $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n присутствующими. Доказать, что можно выбрать из них четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми ($n \geqslant 2$). (*1964*(*2*).*7.2*.)

80. В n стаканах достаточно большой вместительности налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно в конечное число шагов слить воду в один стакан? (*1964*(*2*).*8.1*.)

81. В квадрате со стороной 1 взята произвольно 101 точка, не обязательно лежащие внутри квадрата. Доказать, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/60$. (*1964*(*2*).*8.5*.)

82. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Доказать, что число звеньев такой ломаной четно. (*1964*(*2*).*9.5*.)

83. Пирог имеет форму правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середин сторон проведены прямолинейные надрезы длины 1. Доказать, что при этом от пирога будет отрезан какой-нибудь кусок. (*1964*(*2*).*10.4*.)

84. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом. (*1964*(*2*).*10.5*.)

85. 30 команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей. (*1965*(*1*).*8.4*.)

86. Даны двадцать карточек. Каждая из цифр от нуля до девяти включительно написана на двух из этих карточек (на каждой карточке — только одна цифра). Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две, и так далее до девяток, между которыми должно быть девять карточек? (*1965*(*1*).*11*.*5*.)

87. В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q — целые нечетные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длиной $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Доказать, что шарик обязательно попадет в одну из средних луз. (*1965*(*2*).*10*.*3*.)

88. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Доказать, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров. (*1966*(*2*).*9—11*.*3*.)

89. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера? (*1967*(*1*).*8*.*5*.)

90. Доказать, что существует q такое, что в десятичной записи числа $q \cdot 2^{1000}$ нет ни одного нуля. (*1967*(*2*).*7*.*3*.)

91. В четырех заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол. Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Доказать, что эти прожекторы можно направить так, что они осветят всю плоскость. (*1967*(*2*).*7*.*5*.)

92. На шахматной доске размера 1000×1000 находится черный король и 499 белых ладей. Черные и белые ходят по очереди. Доказать, что как бы ни ходили ладьи, король всегда может за несколько ходов встать под бой одной из них. (*1967*(*2*).*8*.*4*.)

93. Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящие рядом, причем это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения. (*1967*(*2*).*9.5*.)

94. В восьми данных точках пространства установлено по прожектору, каждый из которых может осветить в пространстве октант (трехгранный угол со взаимно перпендикулярными сторонами). Доказать, что можно повернуть прожекторы так, чтобы они осветили все пространство. (*1967*(*2*).*10.4*.)

95. Можно ли расположить на плоскости 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими своими концами упирался строго внутрь других отрезков? (*1968*(*1*).*8.5*.)

96. В коридоре длиной 100 метров постелено 20 ковровых дорожек общей длины 1000 метров. Каково может быть наибольшее число незастеленных кусков (ширина дорожки равна ширине коридора)? (*1968*(*1*).*9.3*.)

97. Из пункта A одновременно вылетают 100 самолетов (флагманский и 99 дополнительных). С полным баком горючего самолет может пролететь 1000 км. В полете самолеты могут передавать друг другу горючее. Самолет, отдавший горючее другим, совершает планирующую посадку. Каким образом надо совершать перелет, чтобы флагман пролетел возможно дальше? (*1968*(*1*).*10.1*.)

98. Две прямые на плоскости пересекаются под углом α. На одной из них сидит блоха. Каждую секунду она прыгает с одной прямой на другую (точка пересечения считается принадлежащей обеим прямым). Известно, что длина каждого ее прыжка равна 1 и что она никогда не возвращается на то место, где была секунду назад. Через некоторое время блоха вернулась в первоначальную точку. Докажите, что угол α измеряется рациональным числом градусов. (*1968*(*2*).*8.2*.)

99. Круглый пирог режут следующим образом. Вырезают сектор с углом α, переворачивают его на другую сторону и весь пирог поворачивают на угол β. Дано, что $\beta < \alpha < 180^\circ$. Доказать, что после некоторого конечного числа таких операций каждая точка пирога будет находиться на том же месте, что и в начале. (*1968*(*2*).*8.3*.)

100. Внутри выпуклого многоугольника M помещена окружность максимально возможного радиуса R (это значит, что внутри M нельзя поместить окружность большего радиуса). Известно, что внутри можно провернуть отрезок длины 1 на любой угол (т. е. мы можем двигать единичный отрезок как твердый стержень по плоскости так, чтобы он не вылезал за пределы многоугольника M и при этом повернулся на любой заданный угол). Докажите, что $R \geqslant 1/3$. (*1968*(*2*).*10.1*.)

101. Правильный треугольник ABC разбит на N выпуклых многоугольников так, что каждая прямая пересекает не более 40 из них (мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если они имеют общую точку, например, если прямая проходит через вершину многоугольника). Может ли быть N больше миллиона? (*1968*(*2*).*10.4*.)

102. В Чили в феврале проходил международный турнир по футболу. Первое место с 8 очками занял местный клуб «Коло-Коло». На очко отстало московское «Динамо» и заняло второе место. 3-е место с 4 очками занял бразильский клуб «Коринтианс». 4-е место занял югославский клуб «Црве́на Зве́зда», также набравший 4 очка. Доказать, что по этим данным можно точно определить, сколько еще команд участвовало в турнире и по сколько очков они набрали. (*1969*(*1*).*7.3*.)

103. Имеется 1000 деревянных правильных 100-угольников, прибитых к полу. Всю эту систему мы обтягиваем веревкой. Натянутая веревка будет ограничивать некоторый многоугольник. Доказать, что у него более 99 вершин. (*1969*(*1*).*7.5*.)

104. Остров Толпыго имеет форму многоугольника. На нем расположено несколько стран, каждая из которых имеет форму треугольника, причем каждые две граничащие страны имеют целую общую сторону (т. е. вершина одного треугольника не лежит на стороне другого). Доказать, что карту этого острова можно так раскрасить тремя красками, чтобы каждая страна была закрашена одним цветом и любые две граничащие страны были закрашены в разные цвета. (*1969*(*1*).*9.2*.)

105. Некий фермер приобрел квадратный участок земли, обнес его забором и получил у доверчивого арендатора документ, в котором сказано, что он имеет право несколько раз произвести следующую операцию: провести прямую через любые две точки забора, огораживающего его участок, снести участок забора между этими двумя точками по одну сторону от прямой и достроить такой же кусок забора с другой стороны симметрично снесенной части относительно выбранной прямой. Сможет ли он такими операциями увеличить площадь своего участка? (*1969*(*2*).*7.3*.)

106. В круглый пудинг радиуса 10 см запечена жемчужина радиуса 3 мм. Мы хотим ее найти. Для этого разрешается разрезать пудинг острым ножом по прямой на две (одинаковые или разные) части. Если жемчужина не попадет под нож, можно одну из этих частей снова разрезать; если она снова не будет обнаружена, можно разрезать одну из трех получившихся частей и т. д. Доказать, что, как бы мы ни резали, может случиться, что после 32 разрезов жемчужина все еще не будет обнаружена. Доказать, что можно так сделать 33 разреза, что жемчужина обязательно будет обнаружена, где бы она ни находилась. (*1969*(*2*).*7.5*.)

107. Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа $0, 1, 2, \ldots, 1024$. Первый мудрец зачеркивает 512 чисел (по своему выбору), второй зачеркивает 256 из оставшихся, затем снова первый зачеркивает 128 чисел и т. д. На десятом шаге второй мудрец зачеркивает одно число; остаются *два* числа. После этого второй мудрец платит первому разницу между этими числами. Как выгоднее играть первому мудрецу? Как второму? Сколько уплатит второй мудрец первому, если оба будут играть наилучшим образом? (*1969*(*2*).*10.1*.)

108. На бесконечной шахматной доске на двух соседних по диагонали черных полях стоят две черные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число черных шашек и одну белую таким образом, чтобы белая *одним ходом* взяла *все* черные шашки, включая две первоначально стоявшие? (*1970*(*1*).*7.1*.)

109. 12 теннисистов участвовали в турнире. Известно, что каждые два теннисиста сыграли между собой ровно один раз и не было ни одного теннисиста, проигравшего все встречи. Доказать, что найдутся теннисисты A, B, C

такие, что A выиграл у B, B у C, C у A. (В теннисе ничьих не бывает.) (*1970*(*1*).*8.5*.)

110. Мудрый таракан, который видит не дальше, чем на 1 см, решил отыскать *Истину*. Находится она в точке, расстояние до которой D см. Таракан может делать шаги, каждый длиной не более 1 см, и после каждого шага ему говорят, приблизился он к *Истине* или нет. Таракан может помнить все, в частности, направление своих шагов. Доказать, что он сможет отыскать *Истину*, сделав не более $3D/2+7$ шагов. (*1970*(*1*).*9.5*.)

111. На участке земли квадратно-гнездовым способом посажено 10 000 деревьев: 100 рядов по 100 деревьев. Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то за деревьями не будет видно ни одного другого пня? Деревья считать достаточно тонкими. (*1970*(*2*).*8.3*.)

112. Плоский коридор шириной 1 м имеет форму буквы «Г» и бесконечен в обе стороны. Необходимо изготовить плоский кусок несгибаемой проволоки — не обязательно прямой — такой, чтобы его можно было протащить по всему коридору. Каково максимальное возможное расстояние между концами проволоки? (*1970*(*2*).*9.2*.)

113. У Мерлина есть две таблицы 100×100; одна из них пустая, а на другой, волшебной, написаны какие-то числа. Первая таблица прибита к скале у входа в пещеру, а вторая — к стене внутри пещеры. Вы можете обвести на первой таблице какой-нибудь квадрат (размером 1×1, 2×2, ... или 100×100), расположенном в любом месте таблицы, и за шиллинг узнать у Мерлина сумму чисел, стоящих в клетках соответствующего квадрата на волшебной таблице. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы узнать сумму чисел на диагонали волшебной таблицы? (*1970*(*2*).*10.5*.)

114. У Пети имеется набор «Юный паркетчик», который состоит из дощечек, уложенных в один слой в прямоугольную коробку так, что они покрывают всю ее площадь. Каждая дощечка имеет площадь 3 см^2 и имеет форму либо прямоугольника, либо уголка (рис. 202). Петя сказал, что он потерял дощечку в форме

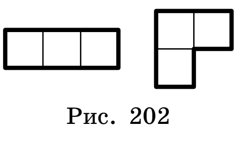


Рис. 202

уголка, сделал вместо нее прямоугольную дощечку и уложил после этого все дощечки вместе с новой в один слой в коробку. Можно ли утверждать, что он лжет? (*1971*(*1*).*10.2*.)

115. В колбе находится колония из n бактерий. В какой-то момент внутрь колбы попадает вирус. В первую минуту вирус уничтожает одну бактерию, и сразу же после этого и вирус, и оставшиеся бактерии делятся пополам. Во вторую минуту новые два вируса уничтожают две бактерии, а затем и вирусы, и оставшиеся бактерии снова делятся пополам, и т. д. Наступит ли такой момент времени, когда не останется ни одной бактерии? (*1971*(*2*).*7.3*.)

116. В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту не более 100 м. Доказать, что лес можно обнести забором длиной 200 м. (*1972*(*1*).*9.3*.)

117. Натуральные числа m и n взаимно просты и $n < m$. Какое число больше: $\left[1 \cdot \frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \ldots + \left[n \cdot \frac{m}{n}\right]$ или $\left[1 \cdot \frac{n}{m}\right] + \left[2 \cdot \frac{n}{m}\right] + \ldots + \left[m \cdot \frac{n}{m}\right]$? (*1972*(*1*).*9.4*.)

118. В городе «Многообразие» живут n жителей, любые два из которых либо дружат, либо враждуют между собой [1]. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители могут подружиться. (*1972*(*1*).*10.1*.)

119. В городе Никитовка двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно проехать из любой точки города в любую другую. Доказать, что в Никитовке можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую точку. (*1972*(*2*).*8.3*.)

120. На плоскости проведено 3000 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пе-

[1] Если A — друг B, а B — друг C, то A — также друг C.

ресекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезана на куски. Доказать, что среди кусков найдется не менее: а) 1000 треугольников, б) 2000 треугольников. (*1972*(*2*).*9.5*.)

121. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т. е. прыгают друг через друга. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли один из них попасть в четвертую вершину квадрата? (*1973*(*1*).*8.5*.)

122. В городе N с любой станции метро на любую другую можно проехать. Доказать, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было попрежнему проехать на любую другую. (*1973*(*1*).*9.4*.)

123. Доказать, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон. (*1973*(*1*).*10.4*.)

124. На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее и наибольшее расстояние до границы кляксы. Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее, а среди наибольших выбрали наименьшее и сравнили полученные два числа. Какую форму имеет клякса, если эти два числа равны между собой? (*1973*(*2*).*8.1*.)

125. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из его вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что отношение максимальной скорости полицейского и максимальной скорости гангстера равно: а) 0,5; б) 0,49; в) 0,34; г) 1/3. Доказать, что полицейский может бежать так, что в какой-то момент окажется на одной стороне с гангстером.[1] (*1973*(*2*).*8.3*.)

126. На арене круглого цирка радиуса 10 метров бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 километров. Доказать, что сумма всех углов, на которые лев поворачивал, не меньше 2998 радиан. (*1973*(*2*).*10.5*.)

[1] Утверждение «г» неверно.

127. Несколько стеклянных шариков разложено в три кучки. Мальчик, располагающий неограниченным запасом шариков, может за один ход взять по одному шарику из каждой кучки или же добавить из своего запаса в одну из кучек столько шариков, сколько в ней уже есть. Доказать, что за несколько ходов мальчик может добиться того, что в каждой кучке не останется ни одного шарика. (*1974*(*1*).*7.4*.)

128. Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ см разрезан на прямоугольные полоски, каждая из которых имеет сторону 1 см. Линии разрезов параллельны сторонам исходного листа. Доказать, что хотя бы одно из чисел a или b целое. (*1974*(*1*).*9.5*.)

129. Доказать, что в десятичной записи чисел $2^n + 1974^n$ и 1974^n содержится одинаковое количество цифр. (*1974*(*1*).*10.2*.)

130. Шарообразная планета окружена 37 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдется точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. (Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.) (*1974*(*1*).*10.3*.)

131. На конгресс собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдется ученый, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса. (*1974*(*1*).*10.4*.)

132. На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки? (*1975*(*1*).*10.4*.)

133. Можно ли разместить в пространстве четыре свинцовых шара и точечный источник света так, чтобы каждый исходящий из источника света луч пересекал хотя бы один из шаров? (*1975*(*1*).*10.5*.)

134. Можно ли какой-нибудь выпуклый многоугольник разрезать на конечное число невыпуклых четырехугольников? (*1975*(*2*).*9.5*.)

135. Доказать, что существует такое натуральное число n, большее 1000, что сумма цифр числа 2^n больше суммы цифр числа 2^{n+1}. (*1976*(*2*).*9.3*.)

136. В клетках таблицы размером 10×20 расставлено 200 различных чисел. В каждой строчке отмечены 3 наибольших числа красным цветом, а в каждом столбце отмечены 3 синим цветом. Доказать, что не менее 9 чисел отмечены в таблице как красным, так и синим цветом. (*1976*(*2*).*10.3*.)

137. Каждая точка пространства окрашена в один из фиксированных пяти цветов, причем имеется 5 точек, окрашенных в различные цвета. Доказать, что существует прямая, все точки которой окрашены не менее чем в три цвета, и плоскость, все точки которой окрашены не менее чем в четыре цвета. (*1976*(*2*).*10.5*.)

138. В пространстве расположен выпуклый многогранник, все вершины которого находятся в целых точках. Других целых точек внутри, на гранях и на ребрах нет. (Целой называется точка, все три координаты которой — целые числа.)

Доказать, что число вершин многогранника не превосходит восьми. (*1977*(*2*).*9.4*.)

139. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x + 1$. (*1977*(*2*).*9.5*.)

140. Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ строится по следующему правилу: $x_1 = 2, \ \ldots, \ x_n = [1{,}5x_{n-1}]$ ($[\ ]$ — целая часть числа). Доказать, что последовательность $y_n = (-1)^{x_n}$ непериодическая. (*1977*(*2*).*10.5*.)

141. У белой сферы 12 % ее площади окрашено в красный цвет. Доказать, что в сферу можно вписать параллелепипед, у которого все вершины белые. (*1978.10.1*.)

142. Доказать, что существует: а) *одно*; б) *бесконечно много* таких натуральных чисел n, что последние цифры числа 2^n образуют число n. (*1978.10.4*.)

143. Квадрат разрезан на прямоугольники. Доказать, что сумма площадей кругов, описанных около каждого прямоугольника, не меньше площади круга, описанного около квадрата. (*1979.7.3*.)

144. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали AC и BD четырехугольника взаимно перпендикулярны. Доказать, что длина перпендикуляра OH, опущенного из центра окружности на сторону AD, вдвое меньше длины стороны BC. (*1979.8.3.*)

145. Имеется несколько камней, масса каждого из которых не превосходит 2 кг, а общая масса равна 100 кг. Из них выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число d. Какое максимальное значение может принимать число d для всевозможных наборов камней? (*1979.9.1.*)

146. На химической конференции присутствовало k ученых химиков и алхимиков, причем химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого ученого хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому ученому может задать вопрос: «Кем является такой-то: химиком или алхимиком?» (В частности, может спросить, кем является сам этот ученый.) Доказать, что математик может установить это за $2k-3$ вопросов. (*1979.9.5.*)

147. На отрезке длины 1 отмечено несколько интервалов. Известно, что расстояние между любыми двумя точками, принадлежащими одному или разным отмеченным интервалам, не равно 0,1. Доказать, что сумма длин отмеченных интервалов не превосходит 0,5. (*1979.10.2.*)

148. Три прямолинейных коридора одинаковой длины l образуют фигуру, изображенную на рис. 203. По ним бегают гангстер и полицейский. Максимальная скорость полицейского в 2 раза больше максимальной скорости гангстера. Полицейский сможет увидеть гангстера, если он окажется от него на расстоянии, не большем r. Доказать, что полицейский всегда может поймать гангстера, если: а) $r > l/5$; б) $r > l/7$. (*1980.9.4.*)

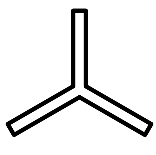


Рис. 203

149. На сфере радиуса 1 расположено несколько дуг больших окружностей (большая окружность — это пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр).

Сумма длин всех этих дуг меньше π. Доказать, что найдется плоскость, проходящая через центр сферы, которая не пересекается ни с одной из дуг. (*1980.10.5.*)

150. На двух равных круглых листах бумаги художник нарисовал одинаковых драконов. Оказалось, что на первом листе глаз дракона совпал с центром круга, а на втором — не совпал. Доказать, что второй лист бумаги можно разрезать на такие две части, чтобы из них удалось сложить круг того же радиуса с тем же драконом, но чтобы его глаз уже находился в центре круга. (*1981.7.3.*)

151. В квадрате $ABCD$ находятся 5 точек. Доказать, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $AC/2$. (*1982.7.2.*)

152. Внутри правильного шестиугольника находится другой правильный шестиугольник с вдвое меньшей стороной. Доказать, что центр большого шестиугольника лежит внутри малого шестиугольника. (*1982.10.5.*)

153. Двум друзьям необходимо попасть в соседний город. У них есть один велосипед, на котором может ехать только один человек. Каково минимальное время, за которое оба могут добраться до города (считая по последнему прибывшему), если скорости пешеходов u_1 и u_2, их скорости на велосипеде v_1 и v_2, расстояние до города равно S (они могут возвращаться и оставлять велосипед друг другу)? (*1983.7.4.*)

154. Докажите, что сумма расстояний от центра правильного семиугольника до всех его вершин меньше суммы расстояний до них от любой другой точки. (*1984.8.3.*)

155. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

(*1985.8.4.*)

156. В некоторой стране 1985 аэродромов. С каждого из них вылетел самолет и приземлился на самом удаленном от места старта аэродроме. Могло ли случиться, что в результате все 1985 самолетов оказались на 50 аэродромах? (Землю можно считать плоской, а маршруты прямыми.) (*1985.9.2.*)

157. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастет. (*1986.8.4.*)

158. Али-Баба и 40 разбойников решили разделить клад из 1987 золотых монет следующим образом: первый разбойник делит весь клад на две части, затем второй разбойник делит одну из частей на две части и т. д. После 40-го деления первый разбойник выбирает наибольшую из частей, затем второй разбойник выбирает наибольшую из оставшихся частей и т. д. Последняя, 41-я часть достается Али-Бабе. Для каждого из 40 разбойников определить, какое наибольшее количество монет он может себе обеспечить при таком дележе независимо от действий других разбойников. (*1987.7.5.*)

159. На плоскости даны две перпендикулярные прямые. С помощью кронциркуля укажите на плоскости три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки. (*1988.9.3.*)

160. Имеется линейка без делений и эталон длины, позволяющий откладывать некоторое фиксированное расстояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша провести какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой? (*1988.10.4.*)

161. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящей через данную точку а) вне этой прямой; б) на ней. (*1989.8.3.*)

162. Табло, состоящее из 64 лампочек, управляется 64 кнопками; каждая лампочка — своей кнопкой. За одно включение можно одновременно нажать любой набор кнопок и записать, какие лампочки при этом зажглись. За какое наименьшее количество включений можно узнать о всех лампочках табло, какая лампочка какой кнопкой включается? (*1990.8.5.*)

163. Имеется шесть одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г». Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить правильность всех шести надписей? (*1991.8.4.*)

164. В клетках таблицы 15×15 расставлены ненулевые числа так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних клетках (соседними называем клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что все числа в таблице положительны. (*1991.9.5.*)

165. Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков так, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, не хватало ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4. (*1991.10.4.*)

166. На прямоугольном экране размером $m \times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка. (*1991.11.5.*)

167. Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме — во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач. (*1992.8.3.*)

168. В центре квадратного пирога находится изюминка. От пирога можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т. д. Можно ли отрезать изюминку? (*1992.9.3.*)

169. Всегда ли ребра выпуклого многогранника можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой грани количества ребер разных цветов отличались не более чем на 1? (*1992.11.5.*)

ДОПОЛНЕНИЕ Г

Задачи LXIX олимпиады (2006 г.)

8 класс

1. В олимпиаде участвовали 2006 школьников. Оказалось, что школьник Вася из всех шести задач решил только одну, а число участников, решивших

— хотя бы 1 задачу, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 2;
— хотя бы 2 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 3;
— хотя бы 3 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 4;
— хотя бы 4 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 5;
— хотя бы 5 задач, в 4 раза больше, чем решивших все 6.

Сколько школьников не решили ни одной задачи?

2. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечетно?

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 — гипотенузы). Известно, что C_1 лежит на BC, B_1 лежит на AB, а A_1 лежит на AC. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

4. Девять одинаковых по виду монет расположены по кругу. Пять из них настоящие, а четыре — фальшивые. Никакие две фальшивые монеты не лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково, и фальшивые — одинаково (фальшивая монета тяжелее настоящей). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

5. Серёжа придумал фигуру, которую легко разрезать на две части и сложить из них квадрат (рис. 204).

Покажите как по-другому разрезать эту фигуру на две части, из которых тоже можно сложить квадрат.

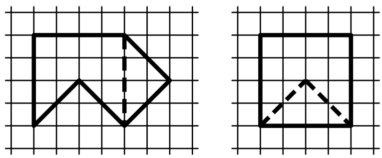


Рис. 204

6. Каждую неделю Ваня получает ровно одну оценку («3», «4» или «5») по каждому из семи предметов. Он считает неделю удачной, если количество предметов, по которым оценка улучшилась, превышает хотя бы на два количество предметов, по которым оценка ухудшилась. Оказалось, что N недель подряд были удачными, и в последнюю из них оценка по каждому предмету в точности совпала с оценкой первой недели. Чему могло равняться число N? (Найдите все варианты.)

9 класс

1. Васе на 23 февраля подарили 777 конфет. Вася хочет съесть все конфеты за n дней, причем так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа n это возможно?

2. На олимпиаде $m>1$ школьников решали $n>1$ задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB=KC$. Докажите, что прямые AL, NK и MC пересекаются в одной точке.

4. В выражении $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2006}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

5. Назовем *тропинкой* замкнутую траекторию на плоскости, состоящую из дуг окружностей и проходящую через каждую свою точку ровно один раз. Приведите пример тропинки и такой точки M на ней, что любая прямая, проходящая через M, *делит тропинку пополам*, то есть сумма длин всех кусков тропинки в одной полуплоскости равна сумме длин всех кусков тропинки в другой полуплоскости.

6. Учитель заполнил клетчатую таблицу 5×5 различными целыми числами и выдал по одной ее копии Боре и Мише. Боря выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее число из оставшихся, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т. д. Миша производит аналогичные операции, каждый раз выбирая наименьшие числа. Может ли учитель так заполнить таблицу, что сумма пяти чисел, выбранных Мишей, окажется больше суммы пяти чисел, выбранных Борей?

10 класс

1. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня меньших тысячи, другой — два корня больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

2. Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

3. Можно ли замостить все пространство равными тетраэдрами, все грани которых — прямоугольные треугольники?

4. В коробке лежат карточки, занумерованные натуральными числами от 1 до 2006. На карточке с номером 2006 лежит карточка с номером 2005 и т. д. до 1. За ход разрешается взять одну верхнюю карточку (из любой коробки) и переложить ее либо на дно пустой коробки, либо на карточку с номером на единицу больше. Сколько пустых коробок нужно для того, чтобы переложить все карточки в другую коробку?

5. Натуральное число n таково, что $3n+1$ и $10n+1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29n+11$ — составное.

6. Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A'. Точки B' и C' строятся аналогично. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

11 класс

1. Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, $\ldots$, a_5, все члены которой принадлежат отрезку $[0; 3\pi/2]$, если числа $\cos a_1$, $\cos a_2$, $\cos a_3$, а также числа $\sin a_3$, $\sin a_4$ и $\sin a_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии.

2. Найти все несократимые дроби a/b, представимые в виде $b{,}a$ (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел b и a).

3. Можно ли намотать нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину конуса, а также разрезать и перекручивать. При необходимости можно считать, что она бесконечна, а угол между осью и образующей конуса достаточно мал.

4. Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

5. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найти геометрическое место середин оснований таких треугольников.

6. Все имеющиеся на складе конфеты разных сортов разложены по n коробкам, на которые установлены цены в 1, 2, $\ldots$, n у. е. соответственно. Требуется купить такие k из этих коробок наименьшей суммарной стоимости, которые содержат заведомо не менее k/n массы всех конфет при одном лишь условии, что масса конфет в любой коробке не превосходит массы конфет в любой более дорогой коробке

а) Какие коробки следует купить при $n=10$ и $k=3$?

б) Тот же вопрос для произвольных натуральных $n \geqslant k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Для начинающих

[1] Болл У., Кокстер Г. Математические эссе и развлечения. — Мир, 1986.
[2] Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. — М.: Наука, 1978.
[3] Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка. — М.: МЦНМО, 2004.
[4] Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — Юниасм, МДС, 1994.
[5] Произволов В. В. Задачи на вырост. — М.: Бюро Квантум, 2003. — (Приложение к журналу «Квант», № 3, 2003).
[6] Савин А. П. Занимательные математические задачи. — М.: АСТ, 1995.
[7] Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике. — М.: Просвещение, 2002.
[8] Уфнаровский В. А. Математический аквариум. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
[9] Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.: Наука, 1981.
[10] Ященко И. В. Математический праздник. — М.: МЦМНО, 2005.

Книги о математике и математиках

[11] Аносов Д. В. Взгляд на математику и нечто из нее. — М.: МЦНМО, 2003. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 3).
[12] Болибрух А. А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя). — М.: МЦНМО, 1999. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 2).
[13] Васильев Н. Б. Избранные статьи. — М.: Бюро Квантум, 1998. — (Приложение к журналу «Квант», № 6, 1998).
[14] Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 2000.
[15] Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — М.: МЦНМО, 2001.
[16] Дынкин Е. Б., Успенский В. А. Математические беседы. — М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
[17] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. — М.: Наука, 1987.
[18] Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. — (Библ. «Квант», вып. 64).
[19] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. — М.: МЦНМО, 2004.

Многие из приведенных здесь книг вы можете найти в электронной форме на сайте www.math.ru.

[20] Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры (опыты математического мышления). — М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
[21] Сингх С. Великая теорема Ферма. — М.: МЦНМО, 2000.
[22] Тихомиров В. М. Великие математики прошлого и их великие теоремы. — М.: МЦНМО, 2003. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 1).

Элементарно о высшей математике

[23] Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: Наука, 1980. — (Библ. «Квант», вып. 7).
[24] Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: МЦНМО, 2001.
[25] Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — (Библ. «Квант», вып. 21).
[26] Бугаенко В. О. Уравнения Пелля. — М.: МЦНМО, 2001. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 13).
[27] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. — М.: МЦНМО, 2004.
[28] Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: МЦНМО, 2004.
[29] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
[30] Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. — М.: Наука, 1969. — (Популярные лекции по математике, вып. 47).
[31] Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973.
[32] Окстоби Дж. Мера и категория. — М.: Мир, 1974.
[33] Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. — М.: Мир, 1991.
[34] Смирнов С. Г. Прогулки по замкнутым поверхностям. — М.: МЦНМО, 2003. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 27).
[35] Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М.: Наука, 1954.
[36] Ященко И. В. Парадоксы теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 20).

Разные книги

[37] Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1992. — (Популярные лекции по математике, вып. 6).
[38] Гик Е. Я. Математика на шахматной доске. — М.: Наука, 1976.
[39] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
[40] Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. — М.: МЦНМО, 2004.
[41] Долбилин Н. П. Жемчужины теории многогранников. — М.: МЦНМО, 2000. — (Библ. «Математическое просвещение», вып. 5).

[42] Коксетер Г. С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
[43] Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.
[44] Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1985.
[45] Оре О. Графы и их применение. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
[46] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
[47] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.
[48] Табачников С. Л. Многочлены. — М.: Фазис, 1996.
[49] Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Эдиториал УРСС, 2004.
[50] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. (Алгебра, планиметрия, стереометрия). — М.: Наука, 2000.
[51] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.
[52] Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1985.
[53] Энциклопедия элементарной математики / Под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. — М.—Л.: ГТТИ, 1951, 1952; — М.: Физматгиз, 1963; — М.: Наука, 1966.

Сборники олимпиадных задач

[54] Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Лань, 2003.
[55] Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова (конкурсы по математике). — М.: МЦНМО, ЧеРо. 1998.
[56] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1987.
[57] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988.
[58] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
[59] Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2005.
[60] Дориченко С. А., Ященко И. В. LVIII Московская математическая олимпиада: сборник подготовительных задач. — М.: ТЕИС, 1994.
[61] Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.
[62] Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2004.

[63] Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1965.
[64] Международные математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. — М.: Дрофа, 1998.
[65] Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1976.
[66] Московские математические олимпиады. 60 лет спустя / Сост. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Под ред. Ю. С. Ильяшенко, В. М. Тихомирова. — М.: Бюро Квантум, 1995. (Приложение к журналу «Квант», № 6, 1995).
[67] Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге. — Ростов-на-Дону: «Март», 2000.
[68] Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994.

Для старших школьников и студентов

[69] Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979.
[70] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: РХД, 2000.
[71] Верещагин Н. К., Шень А. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002.
[72] Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002.
[73] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.
[74] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии: В 2 т. — М.: Мир, 1982.
[75] Зорич В. А. Математический анализ: В 2 т. М.: МЦНМО, 2002.
[76] Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1963.
[77] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980.
[78] Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972.
[79] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.
[80] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии: В 2 т. — М.: Наука, 1988.

Различные статьи

[81] Белов А., Сапир М. «И возвращается ветер...», или периодичность в математике // Квант. — 1990. — № 4. — С. 6—10, 56.
[82] Ильяшенко Ю., Котова А. Подкова Смейла // Квант. — 1994. — № 1. — С. 15—19.
[83] Камнев Л. Н. Иррациональность суммы радикалов // Квант. — 1972. — № 2. — С. 26—27.

[84] Канель-Белов А. Я. Решение задачи 1.5 // Математическое просвещение. Третья серия. — 2002. — Вып. 6. — С. 139—140.
[85] Математическое просвещение. Третья серия. — 2001. — Вып. 5. — С. 65—138.
[86] Фукс Д. Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. — 1990. — № 11. — С. 2—11.
[87] Laczkovich M. Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring problem // Journal für die Reine aud Angewandte Mathematik. — 1990. — № 404. S. 77—117.
[88] Wagon S. Partitioning intervals, spheres and balls into congruent pieces // Canadian Mathematical Bulletin. — 1983. — № 26. — P. 337—340.
[89] `http://www.livejournal.com/community/ru_math/112913.html`
[90] `http://www.livejournal.com/community/ru_math/114368.html`

Для учителя и руководителя кружка

[91] Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: МЦНМО, 2001.
[92] Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.
[93] Кац М., Улам С. Математика и логика. — М.: Мир, 1971.
[94] Пойа Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1976.
[95] Сойер У. Прелюдия к математике. — М.: Мир, 1972.
[96] Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1990.

АВТОРЫ ЗАДАЧ

Задачи, несомненно, определяют уникальное лицо Московской математической олимпиады — одной из немногих олимпиад мира, на которой большинство задач оригинальны. Многие замечательные задачи впервые появились именно на Московской математической олимпиаде.

Окончательные условия задач и сами варианты рождаются после долгих раздумий и обсуждений. И в результате иногда трудно установить, кто же конкретно является автором той или иной задачи. Тем не менее, мы решились привести список авторов задач — в тех случаях, где это «удалось установить». Приносим свои извинения за возможные неточности. Будем рады любым замечаниям и исправлениям.

S. Wolfram 98.11.2
С. М. Агеев 98.10.3
А. В. Акопян 04.8.5
И. А. Акулич 93.8.6, 01.8.2
А. В. Анджанс 93.11.3
С. С. Анисов 98.10.1[&], 98.10.4[&], 98.11.5
Р. Е. Анно 00.10.1[&]
Б. И. Бегун 96.10.4
А. Д. Блинков 02.8.2, 04.8.1[&], 04.10.2, 05.9.1
И. И. Богданов 02.8.5, 03.11.6
П. А. Бородин 04.11.2, 04.11.4
Д. А. Ботин 93.8.4, 94.8.5, 95.8.4
В. О. Бугаенко 96.10.1[&]
А. И. Буфетов 99.10.5, 99.11.4[&]
А. А. Бучин 02.8.4[&]
Н. Б. Васильев 94.9.3, 94.11.3, 94.11.6
А. А. Владимиров 93.10.4[&]
М. А. Волчкевич 97.8.5, 98.9.5
А. И. Галочкин 93.9.3, 94.9.5, 95.8.2, 95.9.1, 95.11.5, 95.11.7, 96.9.1, 96.9.2, 04.11.3
Г. А. Гальперин 93.9.5, 94.11.4, 97.11.5[&] 98.11.3, 00.10.3, 01.9.5, 02.9.6, 02.10.6
С. Б. Гашков 93.10.1, 93.10.2
А. А. Герко 99.9.6
Т. И. Голенищева-Кутузова 04.8.1[&], 05.11.1[&]
А. Н. Горбачев 02.8.6, 02.9.5
М. В. Горелов 00.8.6
Е. А. Горский 05.10.2
А. В. Грибалко 95.10.5
П. В. Грозман 01.10.6[&]
В. М. Гуровиц 01.11.6, 02.8.1
С. М. Гусейн-Заде 93.11.4[&]
Д. В. Дерягин 99.10.6[&]
В. Л. Дольников 97.9.2
В. В. Доценко 00.10.5[&], 01.8.3[&]
М. А. Евдокимов 97.10.3, 97.11.3, 99.9.5, 00.10.2
А. А. Егоров 95.9.4, 96.10.1[&]
Л. А. Емельянов 02.11.5
В. С. Жгун 02.9.3
Р. Г. Женодаров 00.8.4
С. А. Зайцев 05.8.2
А. А. Заславский 97.11.1, 99.9.3, 99.10.2[&], 00.11.3, 01.9.3, 01.11.3, 02.8.3, 02.10.1, 02.11.1, 03.10.2, 03.10.4, 03.11.3, 03.11.5[&], 04.10.5, 05.8.3, 05.9.3, 05.9.6, 05.10.1
Л. И. Звавич 03.8.1[&]
С. А. Злобин 99.10.3, 00.8.1, 00.11.1, 02.10.2

[&] в соавторстве.

А. В. Иванищук 02.8.4[&]
К. А. Игнатьев 94.9.6
Р. Н. Измайлов 93.10.4[&]
И. В. Изместьев 99.9.2
Д. А. Калинин 03.9.2
А. Я. Канель-Белов 93.8.3, 93.11.1, 93.11.2, 93.11.5, 95.10.6, 95.11.5, 95.11.7[&], 96.9.6, 97.10.1, 97.10.6, 98.8.2, 98.10.4[&], 98.10.6[&], 99.9.1, 99.11.4[&], 99.11.7, 00.11.6, 01.10.1, 01.11.1, 01.11.5, 04.9.3, 04.9.4, 05.9.5, 05.10.5
Т. В. Караваева 03.8.4
В. А. Кириченко 00.10.1[&]
В. А. Клепцын 01.9.4, 01.10.2, 03.10.1
А. К. Ковальджи 94.8.2, 94.8.4, 94.10.1, 94.11.1[&], 97.9.4, 98.9.1, 98.9.2
В. К. Ковальджи 95.8.1, 95.8.5
П. А. Кожевников 99.10.2[&]
Г. В. Кондаков 93.10.3, 94.11.1[&], 95.11.4[&], 96.11.6
Н. Н. Константинов 96.10.5
С. В. Конягин 93.9.2, 05.8.6, 05.10.6
О. Н. Косухин 04.11.6, 05.11.5, 05.11.6
О. Ф. Крыжановский 94.8.6, 94.10.6
Р. М. Кузнец 00.9.1
Б. Н. Кукушкин 93.8.1, 96.11.2
Е. Ю. Куликов 05.8.4[&]
А. А. Кустарев 04.8.2
В. Н. Латышев 98.10.6[&]
М. А. Макаров 04.8.3
С. В. Маркелов 94.8.3, 95.8.3, 95.9.2, 95.10.1, 95.10.2, 95.10.3, 95.11.7[&], 96.11.5, 04.10.3, 05.8.5, 05.9.4
И. В. Межиров 03.10.5[&]
А. Ю. Митягин 01.9.1
И. П. Нагель 94.9.4
Е. Н. Осьмова 99.9.4
М. Ю. Панов 00.9.3
Д. А. Пермяков 05.11.3[&]
О. К. Подлипский 03.11.5[&]
В. В. Произволов 94.10.5, 95.8.6, 96.8.2, 96.8.4, 96.10.3, 96.11.3, 97.8.1, 97.8.3, 97.9.3, 97.11.4, 98.8.1, 98.9.6, 98.10.1[&], 98.10.2, 98.11.1, 99.8.2, 99.8.3[&], 99.8.5, 99.10.4, 99.11.2[&],
П. Е. Пушкарь 03.8.3
В. А. Сендеров 95.11.6, 96.10.6, 96.11.4, 97.9.6, 98.11.4[&], 99.8.3[&], 99.11.1, 99.11.2[&], 99.11.6[&], 01.10.3, 02.9.2, 02.9.4, 03.11.7
И. Н. Сергеев 04.11.1, 04.11.5, 05.11.2
А. Б. Скопенков 98.9.4, 05.11.3[&]
М. Б. Скопенков 04.10.1
В. В. Слитинский 93.8.2
А. Н. Смоляков 97.11.5[&]
М. В. Смуров 97.11.6, 98.8.3
А. В. Спивак 93.8.5, 96.8.5, 00.9.6[&], 02.11.2[&], 03.10.5[&]
Д. А. Терешин 93.10.5, 99.11.3
С. И. Токарев 93.9.4, 96.8.6, 05.8.4[&]
А. К. Толпыго 95.9.6, 97.9.1, 99.8.4, 01.9.6
А. В. Устинов 05.11.4
В. А. Уфнаровский 94.10.3
Р. М. Федоров 96.8.1, 03.8.5, 03.9.1
К. Э. Фельдман 97.10.4
В. П. Филевич 96.9.4
Б. Р. Френкин 97.9.5, 97.10.5, 98.9.3, 99.8.6, 99.10.6[&], 02.10.5, 02.11.6, 03.10.3, 03.11.2, 04.8.4, 04.9.1
А. В. Хачатурян 01.8.1, 02.11.2[&], 03.8.2, 03.9.4, 05.10.3
А. С. Чеботарев 03.8.1[&], 03.8.6, 03.9.3, 03.10.6
Ю. В. Чеканов 94.9.2, 95.9.3
Г. Р. Челноков 99.11.6[&], 03.11.4
Н. Л. Чернятьев 99.11.5
Г. Б. Шабат 94.10.2
А. И. Шапиро 94.9.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Федоров Роман Михайлович
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Ковальджи Александр Кириллович
Ященко Иван Валериевич

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ
1993—2005 г.

Редактор *А. В. Семенов*
Корректор *Ф. И. Кизнер*
Технический редактор *В. Ю. Радионов*

Подписано в печать 26.2.2006 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 28.5. Тираж 5000 экз. Заказ № 2708

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241—74—83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.