ADAM-RIES-Wettbewerb 1981

*Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden***.**

Aufgabe 1. Im Schulgarten stecken Schüler auf einem 8 m² großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar so dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.

Wie viele Kilogramm Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

Aufgabe 2. Schüler einer Klasse 5 unterhielten sich im Mathematikzirkel über den bei der Olympiade so erfolgreichen DDR-Rudervierer ohne Steuermann. Egon kam dazu und fragte, wie die vier Sportler heißen und in welcher Reihenfolge sie im Boot sitzen. Er erhielt folgende Auskünfte:

(1) Die vier Sportler haben die Vornamen Andreas, Jürgen, Siegfried und Stefan; ihre Nachnamen lauten Brietzke, Decker, Semmler und Thiele.
(2) Andreas sitzt unmittelbar hinter Siegfried und unmittelbar vor Semmler.
(3) Thiele sitzt unmittelbar hinter dem Sportler, dessen Vor- und Nachname den gleichen Anfangsbuchstaben haben.

Egon überlegt eine Weile und sagt dann: „Diese Informationen reichen noch nicht aus!“ Daraufhin erhält er noch folgende Auskunft:

(4) Andreas sitzt hinter Brietzke.

(a) Weise nach, dass sich aus diesen vier Aussagen die Namen und die Reihenfolge eindeutig ermitteln lassen.
(b) Weise nach, dass Egon mit seiner Meinung recht hatte, dass sich allein aus den Aussagen (1), (2) und (3) die Namen und die Reihenfolge nicht eindeutig ermitteln lassen.
(c) Ersetze die Aussage (4) so durch eine andere Aussage (4a), dass sich dann aus (1), (2), (3) und (4a) Namen und Reihenfolge wiederum eindeutig ermitteln lassen!

Aufgabe 3. Uwe, Hans und Horst haben sich an einem Knobelnachmittag mit der Lösung des folgenden Kryptogramms beschäftigt:

6	4	6	:		□	9	=		□	□
	-								+	
1	□	□	-		2	0	=	□	0	□
□	□	□	-	□	□	□	=	□	□	0

Sie versuchen, in jedes leere Kästchen eine solche Ziffer einzusetzen, dass die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gelöst sind.

Uwe stellt fest: „Dieses Kryptogramm besitzt genau eine Lösung. Diese Lösung lässt sich auch dann noch eindeutig bestimmen., wenn die „1“ in der zweiten Zeile nicht mit eingetragen ist.“

Hans ergänzt: „Diese Lösung lässt sich sogar dann noch eindeutig ermitteln, wenn außer der „1“ auch noch die „2“ nicht eingetragen ist.“

Horst meint: „Stünde dagegen an der Stelle der „2“ eine „3“ oder eine noch größere Ziffer, dann hätte das Kryptogramm keine Lösung.“

Untersuche, ob alle drei Jungen recht hatten!

Löse das Kryptogramm!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1981

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir kennen die Umrechnungen 1 ha = 100 · 100 m² und 1 dt = 100 kg. Auf einer Fläche von (10000 : 1250 =) 8 m² werden also üblicherweise (200 : 1250 =) 0,16 kg = 160 g Saatgut verwendet.

Als Ertrag ist deshalb (160 · 15 =) 2400 g = 2,4 kg zu erwarten.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir skizzieren das Ruderboot als Tabelle und tragen in der ersten Zeile die Platznummer ein. Wir verwenden für die Vor- und Nachnamen jeweils nur die ersten beiden Buchstaben, also An, Jü, Si, St bzw. Br, De, Ss, Th. Wir schreiben für die vollständigen Namen eine Kombination Vorname-Nachname. Wir setzen zunächst Fragezeichen, wenn der Vor- oder Nachname noch nicht bekannt ist.

Aus Aussage (2) erkennen wir, dass Andreas nur auf Platz 2 oder Platz 3 sitzen kann (weil sowohl vor ihm als auch hinter ihm ein anderer Sportler sitzt) und dass Siegfried nicht Semmler heißt. Dann gibt es aber nur noch eine Möglichkeit eines Namens mit gleichen Anfangsbuchstaben: St Se.

Es gibt also zwei Möglichkeiten:

Platznummer	1 (vorn)	2	3	4 (hinten)
Variante 1	Si-?	An-?	St-Se	?-?
Variante 2	?-?	Si-?	An-?	St-Se

Mit Aussage (3) entfällt aber die Variante 2, weil hinter St-Se noch der Sportler ?-Th sitzt. Da für die anderen drei Sportler die Vornamen schon bekannt sind, ist es der Sportler Jü-Th.

Platznummer	1 (vorn)	2	3	4 (hinten)
Variante 1	Si-?	An-?	St-Se	Jü-Th

Aus den bisherigen Aussagen kann aber nicht der Nachname von Si oder An festgelegt werden. Mit der zusätzlichen Aussage (4) ist die Zuordnung nun eindeutig möglich: Es muss Si-Br sein und es bleibt An-De übrig.

Platznummer	1 (vorn)	2	3	4 (hinten)
Variante 1	Si-Br	An-De	St-Se	Jü-Th

Die Sportler heißen in der Reihenfolge ihrer Platzierung (von vorn nach hinten): Siegried Brietzke, Andreas Decker, Stefan Semmler und Jürgen Thiele.

Erläuterung zur Teilaufgabe b): In der Beantwortung der Aufgabe 2a war ohne die Aussage (4) erkennbar, dass sowohl Siegfried Brietzke als auch Siegfried Decker zu einer gültigen Zuordnung führt.

Möglichkeiten für Teilaufgabe c): Da mit den Aussagen (1), (2) und (3) die zwei hinteren Plätze bereits eindeutig ermittelt werden konnten, ist jede Aussage (4a) hilfreich, die einen der zwei verbleibenden Nachnamen Br oder De eindeutig auf die Plätze 1 oder 2 zuordnet, z.B.

Brietzke sitzt vor Decker.
Decker sitzt unmittelbar vor Stefan.

und viele mehr.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3. Einige Ziffern lassen sich unmittelbar eintragen, wenn wir die Einerziffern bei den zeilen- und spaltenweisen Operationen betrachten:

6	4	6	:			9	=			4
	-					·			+	
1		6	-		2	0	=		0	6
		0	-			0	=			0

Wenn wir annehmen, dass führende Nullen im Kryptogramm nicht zulässig sind, können wir die mittlere Zeile und nachfolgend die linke Spalte komplett ausfüllen:

6	4	6	:			9	=		x	4
	-					·			+	
1	2	6	-		2	0	=	1	0	6
5	2	0	-			0	=			0

Nun probieren für die mit x markierte Stelle die Ziffern 1 bis 9 aus und beachten, dass die mittlere Zahl y in der unteren Zeile durch 20 teilbar sein muss:

Aus x = 1 folgt 14 + 106 = 120, also 520 – 400 = 120 und somit 400 : 20 = 20 im Widerspruch zu ?9.
Aus x = 2 folgt 24 + 106 = 130, also 520 – 390 = 130, aber 130 ist nicht durch 20 teilbar.
Aus x = 3 folgt 34 + 106 = 140, also 520 – 380 = 140 und somit 380 : 20 = 19. Wir erhalten eine Lösung:

6	4	6	:		1	9	=		3	4
	-					·			+	
1	2	6	-		2	0	=	1	0	6
5	2	0	-	3	8	0	=	1	4	0

Um die Eindeutigkeit zu überprüfen, probieren wir weiter und haben dabei schon erkannt, dass x nicht geradzahlig sein kann.

Aus x = 5 folgt 54 + 106 = 160, also 520 – 360 = 160 und somit 360 : 20 = 18 im Widerpruch zu ?9.
Aus x = 7 folgt 74 + 106 = 180, also 520 – 340 = 180 und somit 340 : 20 = 17 im Widerpruch zu ?9.
Aus x = 9 folgt 94 + 106 = 200, also 520 – 320 = 200 und somit 320 : 20 = 16 im Widerpruch zu ?9.

Damit kann es keine weiteren Lösungen geben.

Tatsächlich wird die Ziffer 1 in der mittleren Zeile nicht benötigt. Es zeigt sich, dass die Hunderter-Ziffer bei der Argumentation durch 20 nicht benötigt wird. Dieses systematische Probieren ist gleichbedeutend, einen zweistelligen Teiler von 646 zu finden, der auf 9 endet. Dies erfüllt nur 19.

Steht statt der 2 in der Mitte der mittleren Zeile ein 3 (oder größere Zahl), dann ist das Produkt in der mittleren Spalte mindestens 19 · 30 = 570 und der Minuend der unteren Zeile beträgt mindestens 670, was aber wegen der linken Spalte mit 646 < 670 nicht möglich ist.

Steht dagegen statt der 2 in der mittleren Zeile eine 1, so finden wir mit

6 4 6	:	1 9	=	3 4
-		·		+
2 1 6	-	1 0	=	2 0 6
4 3 0	-	1 9 0	=	2 4 0

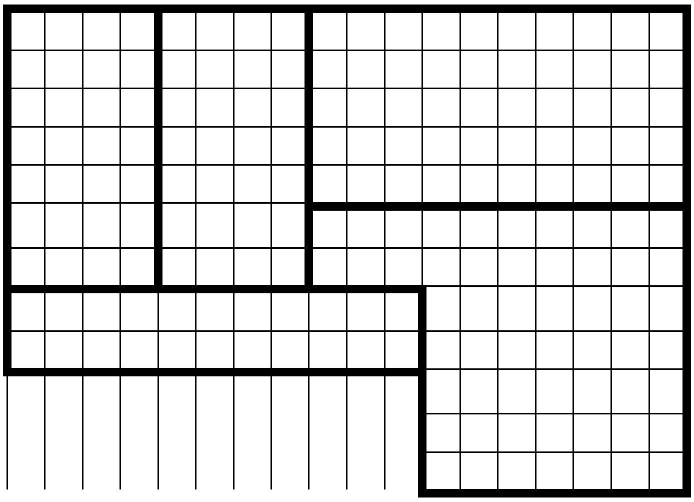
Das Kryptogramm hätte dann zwei Lösungen. Folglich hat Hans nicht recht: Sind sowohl 1 als auch 2 nicht in der mittleren Zeile eingetragen, kann das Kryptogramm nicht eindeutig gelöst werden.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1982

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Der Grundriss einer Wohnung ist in der Skizze festgehalten. Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht. Man kennt nur die eingetragenen Maße und weiß, dass Küche und Bad die gleichen Ausmaße haben und dass die Wände stets rechtwinklig aufeinanderstoßen.

Alle Räume sind 2,60 m hoch. Die Wandstärke soll nicht berücksichtigt werden.



a) In der Küche sollen die Wände und die Decke gestrichen werden. Wie viele Quadratmeter Fläche sind insgesamt zu streichen, wenn man für die nicht zu streichenden Türen und Fenster 1/5 der Gesamtfläche abzieht?
b) Im Wohnzimmer sollen nur die Wände gestrichen werden. Wie viele Quadratmeter Fläche sind hier zu streichen? Die Flächen der Türen und Fenster sollen hier nicht abgezogen werden.

Aufgabe 2.

a) In einem Geschäft für Heimwerkerkauften zwei Kunden vom gleichen Maschendraht. Der erste Kunde kaufte genau 3 m, der zweite Kunde genau 5 m. Der zweite Kunde bezahlte genau 30,00 Mark mehr als der erste Kunde.

   Wieviel hat der erste Kunde bezahlt?

b) Vier Kunden kauften in diesem Geschäft gleichartige Schrauben. Der zweite Kunde kaufte genau 10 Schrauben weniger als der erste; der dritte Kunde kaufte genau so viel Schrauben wie die ersten beiden zusammen; der vierte Kunde kaufte genau 20 Schrauben mehr als die ersten drei Kunden zusammen und bezahlte genau 5,88 Mark mehr als der erste Kunde. Der Preis für eine solche Schraube lag zwischen 4 Pfennigen und 10 Pfennigen und war eine ungerade Zahl.

   Zeige, dass sich aufgrund dieser Angaben folgende Fragen eindeutig beantworten lassen.

   Wieviel Mark bezahlte der vierte Kunde?
   Wie viele Schrauben kaufte jeder der vier Kunden?
   Wieviel Mark bezahlen die vier Kunden zusammen?

   (Eine Probe am Text solltest du zwar durchführen, du brauchst sie aber nicht mit aufzuschreiben.)

Aufgabe 3.

a) 5 Schüler führen ein Schachturnier durch. Jeder dieser Schüler spielt gegen jeden anderen Schüler genau zwei Spiele (Hin- und Rückspiel).

Wie viele Spiele werden in einem solchen Turnier insgesamt gespielt?

b) In einer Arbeitsgemeinschaft Schach wurde folgendes Turnier (wiederum mit Hin- und Rückspiel) ausgetragen:

Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen.
Jeder Junge spielte gegen jeden anderen Junge.
Kein Mädchen spielte gegen einen Jungen.
Es wurden insgesamt 84 Partien gespielt.

Bode behauptet: „Die Mädchen haben insgesamt 16 Partien gespielt."
Frank antwortet: „Das stimmt nicht, sie haben nur 12 Partien gespielt."
Wir wissen, dass eine dieser beiden Aussagen wahr ist.

Zeige, dass sich aufgrund dieser Angaben die folgenden Fragen eindeutig beantworten lassen:

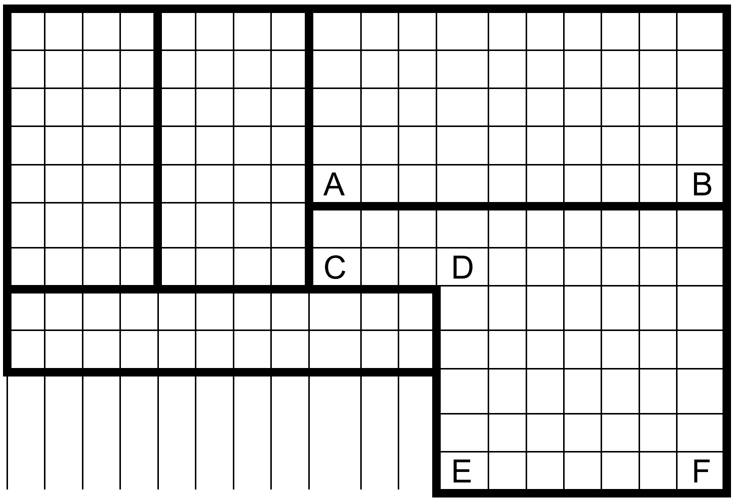
(I) Welche der beiden Aussage ist wahr?
(II) Wie viele Mädchen und wie viele Jungen haben an dem Turnier teilgenommen?

Zeige, dass man (II) nicht eindeutig beantworten könnte, wenn man nicht wüsste, dass eine der beiden Aussagen wahr ist!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1982

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Der Grundriss einer Wohnung ist in der Skizze festgehalten. Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht. Man kennt nur die eingetragenen Maße und weiß, dass Küche und Bad die gleichen Ausmaße haben und dass die Wände stets rechtwinklig aufeinanderstoßen.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Umfang der Küche beträgt (2 · 3,5 + 2 · 2 =) 11 m. Multipliziert mit der Raumhöhe beträgt die Gesamtfläche der Wände (11 · 2,6 =) 28,6 m², hinzu kommen (2 · 3,5 =) 7 m² Deckenfläche.

Von der Fläche (28,6 + 7 =) 35,6 m² sind 1/5 zu subtrahieren, also verbleibt die zu streichende Fläche mit (35,6 – 35,6 : 5 =) 28,48 m².

Lösungshinweise zur Aufgabe b): Wir erkennen, dass für die Seitenlängen

AB = CD + EF und BF = AC + DE

gelten. Wir müssen also die Ecke im Wohnzimmer nicht genau bemessen können, um die Wandfläche zu ermitteln:

Der Umfang beträgt (2 · AB + 2 · BF = 2 · (9 – 2 · 2) + 2 · 3,5 =) 17 m. Multipliziert mit der Höhe erhalten wir (17 · 2,6 =) 44,2 m² Fläche, die im Wohnzimmer zu streichen ist.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da der zweite Kunde genau 2 m mehr als der erste Kunde kaufte und dafür 30 Mark mehr bezahlte, kostete ein Meter Maschendraht (30 : 2 =) 15 Mark. Also bezahlte der erste Kunde (15 · 3 =) 45 Mark.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b).

Wenn der Kunde K1	x Schrauben kaufte,
dann kaufte der Kunde K2	x – 10 Schrauben
und der dritte Kunde K3 kaufte	2 · x – 10 Schrauben.
Schließlich kaufte der vierte Kunde K4	x + (x – 10) + (2 · x – 10) + 20 = 4 · x Schrauben.

Somit kosteten (4 · x – x =) 3 · x Schrauben 5,88 Mark, d.h. x = 1,96 Mark.

Der vierte Kunde K4 bezahlte (1,96 · 4 =) 7,84 Mark.

Da x eine ganze Zahl ist, suchen wir die ungeraden Teiler von 196 zwischen 4 und 10. Da 196 nicht durch 5 (Einerziffer verschieden von 0 oder 5) und nicht durch 9 (Quersumme 1 + 9 + 6 = 16 nicht durch 9 teilbar) teilbar ist, kann nur der Preis 7 Pfennige je Schraube zur Lösung führen.

Tatsächlich finden wir, dass K1 (196 : 7 =) 28 Schrauben kaufte. Damit hat K2 insgesamt (28 – 10 =) 18 Schrauben, K3 (28 + 18 =) 46 Schrauben und K4 (4 · 28 =) 112 Schrauben gekauft.

Zusammen haben Sie (28 + 18 + 46 + 112 =) 204 Schrauben gekauft, für die sie insgesamt (204 · 7 =) 14,28 Mark bezahlten.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da der erste Spieler gegen 4 andere Schüler, der zweite gegen 3 andere, der dritte noch gegen 2 andere und der vierte gegen den einen spielten, waren es 2 · (4 + 3 + 2 + 1) = 20 Spiele.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir verallgemeinern die Anzahl der erforderlichen Spiele im Turnier: für n Spieler müssen $n^2 - n$ Spiele ausgetragen werden
(Kontrolle: $5^2 - 5 = 20$).

Angenommen, Bodo hat recht und die Mädchen haben insgesamt 16 Spiele absolviert. Es gibt aber keine natürliche Zahl mit $n^2 - n = 16$, denn $4^2 - 4 = 12$ sind zu wenig und $5^2 - 5 = 20$ sind zu viele.

Also hat Frank recht und es waren 4 Mädchen im Turnier ($4^2 - 4 = 12$). Damit verbleiben für die Jungen (84 – 12 =) 72 Spiele. Durch systematisches Probieren finden wir, dass es 9 Jungen waren ($9^2 - 9 = 81 - 9 =$) 72.

Ohne die Kenntnis der Anzahl der Spiele der Mädchen könnten es auch 7 Jungen mit ($7^2 - 7 =$) 42 Spiele und 7 Mädchen mit ($7^2 - 7 =$) 42 Spiele, gesamt (42 + 42 =) 84 Spiele gewesen sein.

Es könnte aber auch 9 Mädchen und 4 Jungen gewesen sein (wenn wir die Geschlechter vertauschen).

ADAM-RIES-Wettbewerb 1983

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Hans und Horst spielen Zahlenraten. Beide denken sich vier Zahlen.

Hans sagt:

- „Meine erste Zahl ist um 3 größer als das Doppelte der zweiten Zahl.“
- „Die dritte Zahl ist so groß wie die beiden ersten zusammen.“
- „Die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl.“
- „Die Summe aus meinen vier Zahlen beträgt 83“.

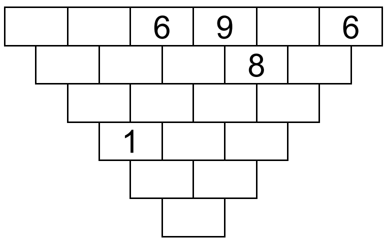
Nachdem Horst diese vier Zahlen bestimmt hat, sagt er:

- „Meine vier Zahlen stimmen mit deinen Zahlen nicht überein, dennoch haben sie dieselben Eigenschaften wie deine Zahlen, nur ist ihre Summe kleiner als 83.“
- „Ich verrate dir noch, dass meine vierte Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt.“

Nach einigem Überlegen sagt Hans: „Deine Angaben reichen nicht aus, um deine Zahlen eindeutig zu bestimmen.“

a) Wie lauten die vier Zahlen, die sich Hans gedacht hat?
b) Weise nach, dass Hans mit seiner letzten Aussage recht hat!

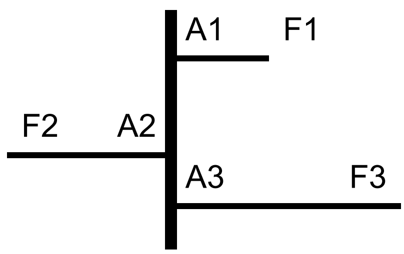
Aufgabe 2. In die leeren Felder der Figur sind Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, dass jeweils im Feld unterhalb von zwei nebeneinanderstehenden Zahlen deren Differenz steht. (Die größere der beiden Zahlen sei der Minuend.)



a) Gib eine Eintragung an, die diese Bedingungen erfüllt!
b) Gib alle Eintragungen an, die diese Bedingungen erfüllen! Weise nach, dass es keine weiteren Lösungen gibt!
c) Ersetze eine der bereits eingetragenen sechs Zahlen so durch eine der Zahlen von 1 bis 9, dass es keine Eintragung gibt, die die gestellten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 3.

a) In einem Industriegebiet liegen drei Fabriken F1, F2 und F3. Sie sind von einer Hauptstraße (dicke Linie) über die Abzweigstellen A1, A2 und A3 auf Nebenstraßen (dünne Linien) erreichbar (siehe umrahmten Teil der Skizze).

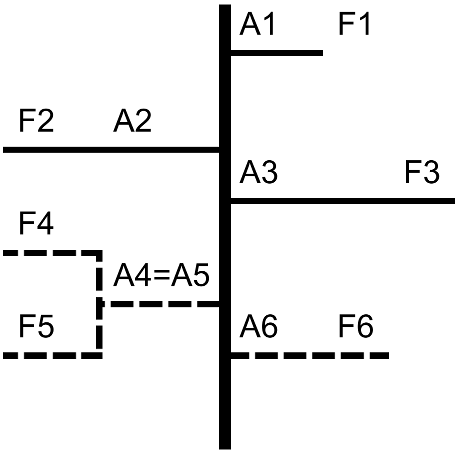


An welcher Stelle B der Hauptstraße muss man eine Bushaltestelle bauen, wenn man erreichen will, dass die

Summe der drei Wege von B bis zu jeder der drei Fabriken möglichst klein wird?

Gib diesen günstigsten Standort an! Begründe, warum es der günstigste Standort ist!

b) Das Industriegebiet wird um drei Fabriken F4, F5 und F6 erweitert, für die weitere Nebenstraßen (gestrichelte Linien) gebaut werden.



An welcher Stelle B der Hauptstraße müsst nun die Bushaltestelle stehen, wenn man erreichen will, dass die Summe der sechs Wege von B zu den sechs Fabriken möglichst klein wird?

ADAM-RIES-Wettbewerb 1983

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.

Hans habe sich als zweite Zahl	x gewählt.
Dann beträgt seine erste Zahl	$2 \cdot x + 3$
und seine dritte Zahl	$x + 2 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 3$
und schließlich seine vierte Zahl	$2 \cdot (x + 2 \cdot x + 3) - 1 = 6 \cdot x + 5$
Insgesamt gilt	$(2 \cdot x + 3) + x + (3 \cdot x + 3) + (6 \cdot x + 5) = 83$
also	$12 \cdot x + 11 = 83$
bzw.	$x = 6$.

Hans merkte sich also die Zahlen 6, $(2 \cdot 6 + 3 =)15$, $(3 \cdot 6 + 3 =)\ 21$ und $(6 \cdot 6 + 5 =)\ 41$.

Da Horst andere Zahlen als Hans gewählt hat, nennen wir seine zweite Zahl y. Die Zusammenhänge zwischen den Zahlen sollen aber wie bei Hans sein, also erhalten wir:

- Für Horst seine Zahlen soll $12 \cdot y + 11 < 83$ gelten, d. h. $y < x$.
- $6 \cdot y + 5$ lässt bei Division durch 4 den Rest 1, d.h. $6 \cdot y + 4$ ist durch 4 teilbar. Insbesondere ist y eine gerade Zahl.

Wir probieren Werte für y aus:

Für $y = 4$ erhalten wir $12 \cdot 4 + 11 = 59 < 83$ und $6 \cdot 4 + 5 = 29$ lässt bei Division durch 4 den Rest 1.

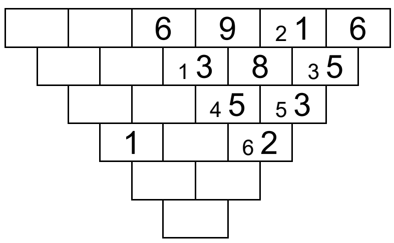
Für $y = 2$ erhalten wir $12 \cdot 2 + 11 = 35 < 83$ und $6 \cdot 2 + 5 = 17$ lässt bei Division durch 4 den Rest 1.

Es sind also zwei verschiedenen Lösungen möglich, nämlich

$$4,\ (2 \cdot 4 + 3 =)\ 11,\ (3 \cdot 4 + 3 =)\ 15 \text{ und } (6 \cdot 4 + 5 =)\ 29,$$
$$\text{und } 2,\ (2 \cdot 2 + 3 =)\ 7,\ (3 \cdot 2 + 3 =)\ 9 \text{ und } (6 \cdot 2 + 5 =)\ 17.$$

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Wir füllen zunächst alle Felder aus, die sich aufgrund der gegebenen Zahlen eindeutig ermitteln lassen. Um die Reihenfolge der Ergebnisse zu markieren, schreiben wir „$_n m$“ für „Im n-ten Schritt finden wir die Zahl m“.

- Unter der 6 und 9 erhalten wir 3 (Nr. 1).
- Über der Zahl 8 muss die 1 (Nr. 2) eingefügt werden, da 17 – 9 keine gültige Differenz ergibt.
- Unter der 1 und 6 folgt in eindeutiger Weise die 5 (Nr. 3).
- Auch die folgenden Eintragungen (Nr. 4 bis 6) ergeben sich in eindeutiger Weise aus den Differenzen:



In der Mitte der dritten Zeile von unten kann keine Zahl größer als 4 stehen, da sich größere Zahlen nicht als Differenz mit Subtrahend 5 und einstelligem Minuend darstellen lassen.

Wir setzen also 4 (Nr. 7) in diese Mitte ein. Da in keiner Zeile außer der oberen eine 9 stehen darf (weil sie nicht als Differenz einstelliger, von null verschiedener Zahlen dargestellt werden kann), finden wir 1 (Nr. 8). Außerdem sind die Zahlen Nr. 9 bis 11 eindeutig bestimmt. Auch die nächste 2 (Nr. 12) ergibt sich zwangsläufig. Nun verbleiben noch vier freie Kästchen A bis D.

A	C	6	9	$_{2}$1	6
B	D	$_{1}$3	8	$_{3}$5	
$_{12}$2	$_{8}$1	$_{4}$5	$_{5}$3		
1	$_{7}$4	$_{6}$2			
$_{9}$3	$_{10}$2				
$_{11}$1					

Durch systematisches Probieren finden wir folgende Möglichkeiten:

Für D = 2 folgt B = 4 (weil B = 0 nicht zulässig ist) sowie C = 4 oder C = 8.
Für D = 4 folgt C = 2 (weil C = 10 nicht zulässig ist) sowie B = 2 oder B = 6.

In jedem dieser vier Fälle ist A eindeutig bestimmt:

8	4	6	9	1	6
4	2	3	8	5	
2	1	5	3		
1	4	2			
3	2				
1					

4	8	6	9	1	6
4	2	3	8	5	
2	1	5	3		
1	4	2			
3	2				
1					

8	2	6	9	1	6
6	4	3	8	5	
2	1	5	3		
1	4	2			
3	2				
1					

4	2	6	9	1	6
2	4	3	8	5	
2	1	5	3		
1	4	2			
3	2				
1					

Wir setzen nun 3 (Nr. 7) in diese Mitte ein. Die Zahlen Nr. 8 bis 10 sind wieder eindeutig bestimmt. Nun verbleiben noch sechs freie Kästchen A bis F.

A	C	6	9	$_{2}$1	6
B	D	$_{1}$3	8	$_{3}$5	
E	F	$_{4}$5	$_{5}$3		
1	$_{7}$3	$_{6}$2			
$_{8}$2	$_{9}$1				
$_{10}$1					

Wir könnten F = 8 setzen. 8 ist aber nicht als Differenz einstelliger Zahlen darstellbar, wenn eine der Zahlen 3 beträgt.

Wir könnten F = 2 (Nr. 11) setzen.

Für E = 1 finden wir C = 1, B = 2, D= 5 oder D = 7 mit A = 3 oder A = 7 bzw. A = 9.
Für E = 5 finden wir D = 1, C = 1 oder C = 3 mit B = 4, A = 5 bzw. B = 6, A = 7

A	D	6	9	1	6
B	E	3	8	5	
C	$_{11}$2	5	3		
1	$_{7}$3	2			
$_{8}$2	$_{9}$1				
$_{10}$1					

In jedem dieser vier Fälle ist A eindeutig bestimmt:

3	5	6	9	1	6
2	1	3	8	5	
1	2	5	3		
1	3	2			
2	1				
1					

7	5	6	9	1	6
2	1	3	8	5	
1	2	5	3		
1	3	2			
2	1				
1					

8	2	6	9	1	6
6	4	3	8	5	
2	1	5	3		
1	4	2			
3	2				
1					

5	1	6	9	1	6
4	5	3	8	5	
1	2	5	3		
1	3	2			
2	1				
1					

Damit haben wir alle Möglichkeiten gefunden.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir vermuten, dass der günstigste Stanbdort für die Bushaltestelle B an der Abzweigstelle A2 liegt.

Begründung: Wir stellen fest, dass sich bei Änderung der Lage von B nicht die Weglängen der Nebenstraßen von Ai zu Fi (i = 1, 2, 3) ändern. Wir müssen also nur einen Standort B finden, so dass die Summe der Wegstrecken B-A1 + B-A2 + B-A3 möglichst klein wird.

Für B = A2 erhalten wir B-A1 + B-A2 + B-A3 = B-A1 + B-A3 = A1-A3.

Liegt B verschieden von A2 innerhalb von A1-A3, dann ist die Gesamtstrecke mindestens länger als A1-A3.
Liegt B sogar außerhalb von A1-A3, dann ist die Gesamtstrecke erst recht länger als A1-A3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir vermuten: Wenn B ein Punkt auf der Strecke A3-A4 ist, dann nimmt die Summe der sechs Wege B zu den sechs Fabriken den kleinsten Wert a (der Standort ist also nicht eindeutig auf der Strecke A3-A4 b bestimmt!).

Begründung: Wenn B auf dem Wegstück A3-A4 liegt, gilt B-A3 + BA-4 = A3-A4. Für die anderen Wegstrecken erhalten wir

B-A1 + B-A2 + B-A5 + B-A6 = A1-A6 + A2-A5.

Folglich gilt:

B-A1 + B-A2 + B-A3 + B-A4 + B-A5 + B-A6 = A1-A6 + A2-A5 + B3-A4.

Wie schon in Teilaufgabe a) zeigen wir nun, dass jede Lage von A außerhalb von A3-A4 zu einer größeren Wegstrecke führt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1984

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56. Vögel.

Nachdem vom ersten Baum 7 Vögel auf den zweiten Baum und dann vom zweiten Baum 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viele Vögel wie auf dem ersten Baum und auf dem dritten Baum doppelt so viele Vögel wie auf dem zweiten Baum.

Berechne, wie viele Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

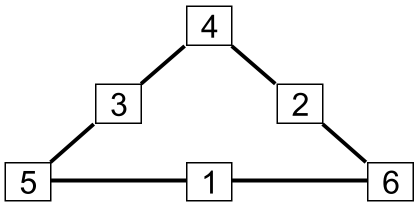
Aufgabe 2. In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel im Preis von 15 Mark, 16 Mark, 18 Mark, 19 Mark, 20 Mark und 31 Mark, von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt so viel zu bezahlen wie der erste Käufer.

Zeige, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welches der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

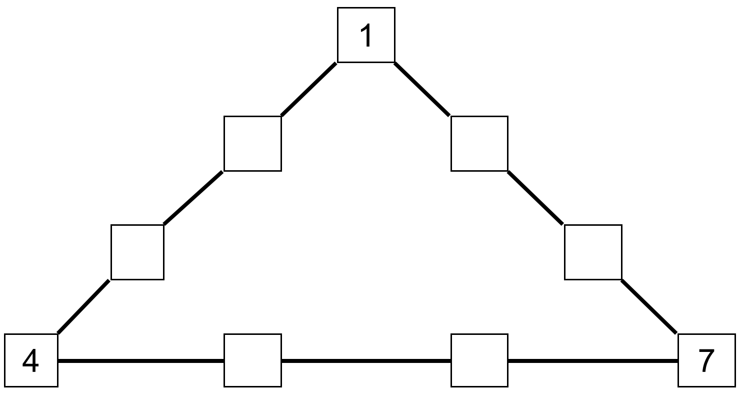
Aufgabe 3a) Im untenstehenden Schema sind die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen, dass die drei „Seitensummen" S gleich groß sind, und dass stets S = 12 gilt!

$$4 + 3 + 5 = 5 + 1 + 6 = 6 + 2 + 4 = 12$$



Gib je eine Eintragung der Zahlen von 1 bis 6 in ein solches Schema an, so dass S = 9 bzw. S = 10 bzw. S = 11 gilt!

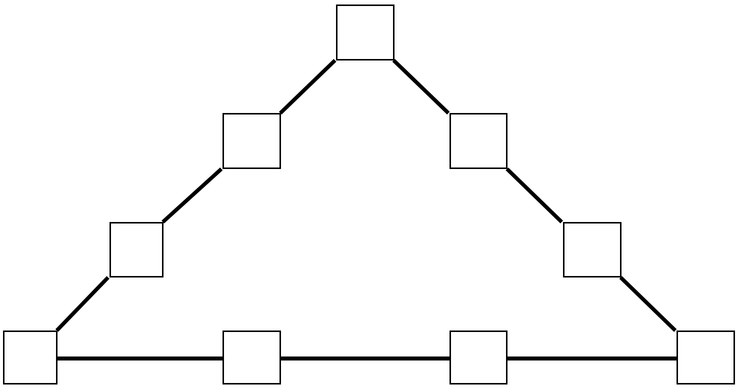
Aufgabe 3b) Im untenste~~henden Sche~~ma sind die „Eckzahlen" 1, 4, 7 mit der „Ecksumme" E = 12 eingetragen.



Trage die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so in das Schema ein, dass die drei „Seitensummen“ S gleich groß sind und dass S = 19 gilt!

Finde möglichst viele solche Eintragungen!

Aufgabe 3c) In untenstehendes Schema sind die Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, dass die „Seitensummen“ S gleich groß werden. Außer S = 19 kann noch S = 17, S = 20, S = 21 und S = 23 gelten.



Finde möglichst viele solche Eintragungen!

(Hinweis: Die „Ecksumme“ ist stets durch 3 teilbar.)

ADAM-RIES-Wettbewerb 1984

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Nachdem einige Vögel die Bäume gewechselt haben, saßen

x Vögel auf dem ersten Baum,
$2 \cdot x$ Vögel auf dem zweiten Baum und
$4 \cdot x$ Vögel auf dem dritten Baum.

Insgesamt waren es also $7x$ Vögel,

woraus wegen $7 \cdot x = 56$ unmittelbar $x = 8$ folgt. Also saßen danach 8 Vögel auf dem ersten Baum, 16 Vögel auf dem zweiten Baum und 32 Vögel auf dem dritten Baum.

(Probe: $8 + 16 + 32 = 56$)

Weil 5 Vögel vom zweiten auf den dritten Baum flogen, waren vorher $32 – 5 =27$ Vögel auf dem dritten Baum und $16 + 5 = 21$ Vögel auf dem zweiten Baum.

Weil zudem davor 7 Vögel vom ersten auf den zweiten Baum flogen, waren vorher $21 – 7 = 14$ Vögel auf dem zweiten Baum und $8 + 7 = 15$. Vögel auf dem ersten Baum.

(Probe: $15 + 14 + 27 = 56$ Vögel, $15 – 7 = 8$, $14 + 7 – 5 = 16$, $27 + 5 = 32$)

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Wir kürzen die Währungseinheit Mark mit M ab.

Angenommen, der erste Käufer kaufte das Geschenk für 31 M. Dann betrug seine Kaufsumme mindestens (31 + 15 =) 46 M. Damit hätte der zweite Käufer mindestens 92 M zu bezahlen. Dieser Wert kann aber nicht als Summe von drei Geschenken mit jeweils höchstens 20 M dargestellt werden.

Angenommen, der erste Käufer kaufte nicht das Geschenk für 31 M, aber das Geschenk für 20 M. Dann betrug seine Kaufsumme mindestens (15 + 20 =) 35 M. Damit hätte der zweite Käufer mindestens 70 M zu bezahlen. Um diesen Wert zu erreichen, muss der zweite Käufer das Geschenk für 31 M gekauft haben (weil sonst seine Summe kleiner als 60 M wäre). Die verbleibenden (70 – 31 =) 39 M lassen sich nicht auf zwei Geschenke aufteilen, weil alle verbleibenden Geschenke höchsten auf (18 + 19 =) 37 M kommen.

Angenommen, der erste Käufer kaufte nicht die Geschenke für 20 M und 31 M, aber das Geschenk für 19 M. Dann betrug seine Kaufsumme mindestens (15 + 19 =) 34 M. Damit hätte der zweite Käufer mindestens 68 M zu bezahlen. Um diesen Wert zu erreichen, muss der zweite Käufer das Geschenk für 31 M gekauft haben (weil sonst seine Summe kleiner als 60 M wäre). Die verbleibenden (68 – 31 =) 37 M lassen sich nicht auf zwei Geschenke aufteilen, weil alle verbleibenden Geschenke entweder auf (18 + 20 =) 38 M oder höchsten auf (16 + 18 =) 36 M kommen.

Angenommen, der erste Käufer kaufte nicht die Geschenke für 19 M, 20 M und 31 M, aber das Geschenk für 18 M. Dann betrug seine Kaufsumme mindestens (15 + 18 =)

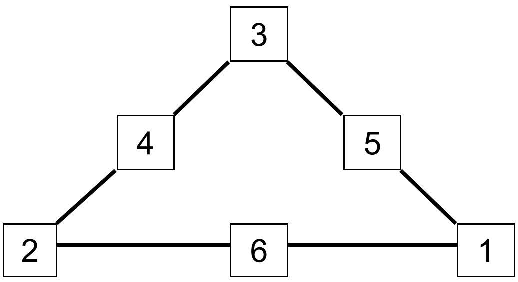
33 M. Damit hätte der zweite Käufer mindestens 66 M zu bezahlen. Um diesen Wert zu erreichen, muss der zweite Käufer das Geschenk für 31 M gekauft haben (weil sonst seine Summe kleiner als 60 M wäre). Die verbleibenden (66 – 31 =) 35 M lassen sich wegen (16 + 19 =) 35 M auf zwei Geschenke aufteilen.

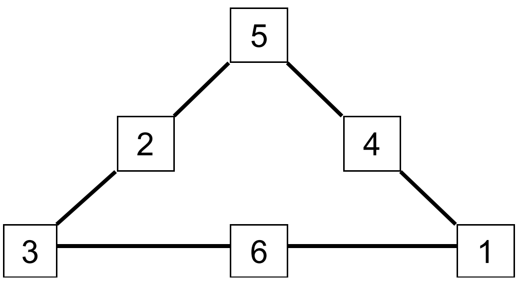
Antwort: Wenn der erste Kunde die Geschenke für 15 M und 18 M gekauft hat (gesamt 15 + 18 =) 33 M und der zweite Käufer die Geschenke für 16 M, 19 M und 31 M gekauft hat (16 + 19 + 31 =) 66 M sind die Bedingungen der Aufgabe alle erfüllt.

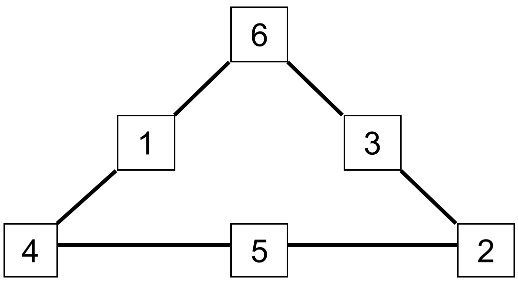
In der Fallunterscheidung fehlt nur noch der Fall, dass der erste Käufer die Geschenke für 15 M und 16 M gekauft hat, gesamt (15 + 16 =) 31 M. Dann hat der zweite Käufer 62 M bezahlt. Da er auch in diesem Fall das Geschenk für 31 M gekauft haben muss, gibt es keine andere Möglichkeit, mit zwei Geschenken auf 31 M zu kommen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es genügt, gültige Eintragungen anzugeben.

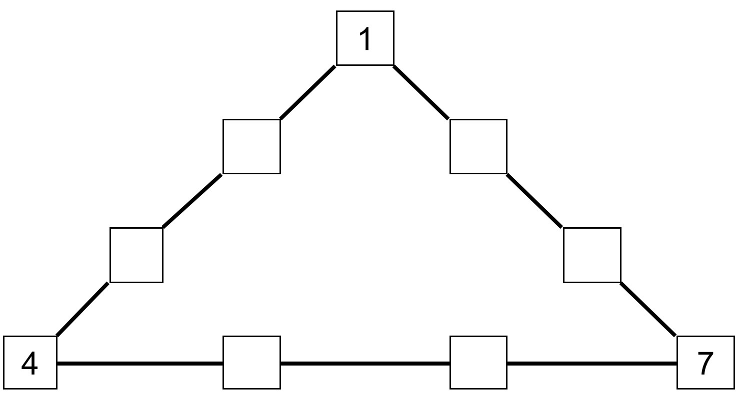
2 + 6 + 1 = 1 + 5 + 3 = 3 + 4 + 2 = 9 (E = 6)
3 + 6 + 1 = 1 + 4 + 5 = 5 + 2 + 3 = 10 (E = 9)
4 + 5 + 2 = 2 + 3 + 6 = 6 + 1 + 4 = 11 (E = 12)







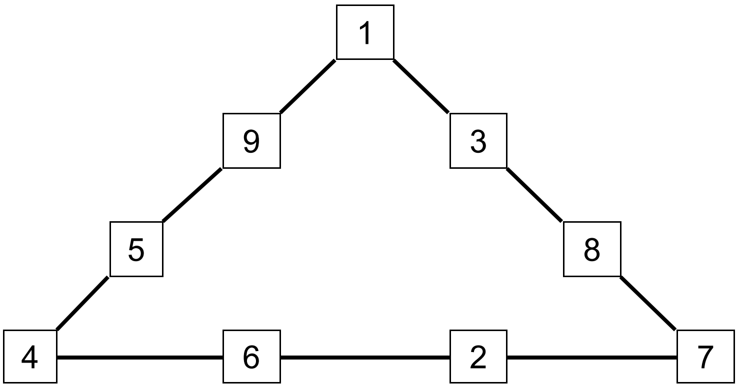
Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Im nebenstehenden Schema sind die „Eckzahlen“ 1, 4, 7 mit der „Ecksumme“ E = 12 eingetragen.



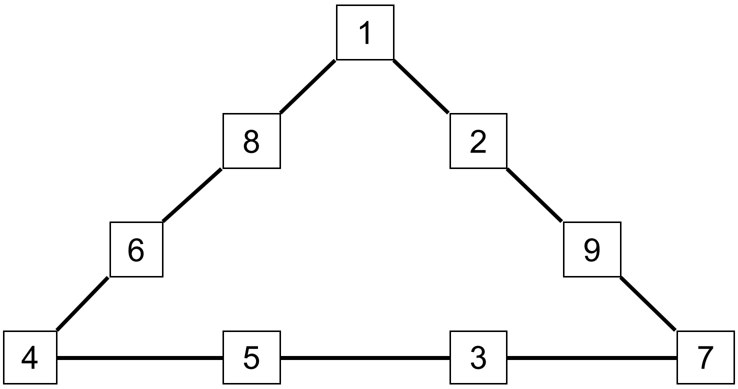
Betrachten wir die Seite mit den Eckzahlen 4 und 1, so muss die Summe der mittleren Zahlen dieser Seite 14 betragen, weil 4 + 14 + 1 = 19 gilt. Die Zahl 14 lässt sich nur in der Form 14 = 5 + 9 = 6 + 8 als Summe zweier Zahlen der gegebenen Menge schreiben. Für die Seite mit den Eckzahlen 4 und 7 zerlegen wir 8 = 2 + 6 = 3 + 5 und für die Seite mit den Eckzahlen 1 und 7 zerlegen wir 11 = 3 + 8 = 2 + 9 = 5 + 6.

Damit finden wir genau folgende Möglichkeiten, die Zahlen anzuordnen:

$$4 + 5 + 9 + 1 = 1 + 3 + 8 + 7 = 7 + 2 + 6 + 4$$



$$4 + 6 + 8 + 1 = 1 + 2 + 9 + 7 = 7 + 3 + 5 + 4$$



Durch Vertauschen der Zahlen im Innern jeder Seite können damit insgesamt (8 · 2 =) 16 Möglichkeiten festgelegt werden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Mit dem Hinweis, dass die Ecksumme stets durch 3 teilbar ist, können nur die durch 3 teilbaren Ecksummen zwischen E = 6 (als Summe 1 + 2 + 3 = 6) bis E = 24 (als Summe 7 + 8 + 9 =24) auftreten.

Es gibt folgende Eintragungen (wobei die Eckzahlen unterstrichen wurden):

S = 17: $(\underline{1}, 5, 9, \underline{2}, 4, 8, \underline{3}, 6, 7)$ mit E = 1 + 2 + 3 = 6
$(\underline{1}, 6, 8, \underline{2}, 5, 7, \underline{3}, 4, 9)$

S = 19: Lösungen aus Teilaufgabe b) sowie
$(\underline{2}, 5, 9, \underline{3}, 1, 8, \underline{7}, 4, 6)$ mit E = 2 + 3 + 7 = 12
$(\underline{2}, 6, 8, \underline{3}, 4, 5, \underline{7}, 1, 9)$

S = 20: $(\underline{1}, 6, 8, \underline{5}, 2, 3, \underline{9}, 2, 7)$ mit E = 1 + 5 + 9 = 15

	$(\underline{2}, 4, 9, \underline{5}, 1, 6, \underline{8}, 3, 7)$	mit E = 2 + 5 + 8 = 15
	$(\underline{2}, 6, 7, \underline{5}, 3, 4, \underline{8}, 1, 9)$	
	$(\underline{3}, 4, 8, \underline{5}, 2, 6, \underline{7}, 1, 9)$	mit E = 3 + 5 + 7 =15
	$(\underline{4}, 1, 9, \underline{6}, 2, 7, \underline{5}, 3, 8)$	mit E = 4 + 6 + 5 = 15
	$(\underline{4}, 3, 7, \underline{6}, 1, 8, \underline{5}, 2, 9)$	
S = 21:	(3, 4, 8, 6, 1, 5, 9, 2, 7)	mit E = 3 + 6 + 9 = 18
	(3, 5, 7, 6, 2, 4, 9, 1, 8)	
	(3, 2, 9, 7, 1, 5, 8, 4, 6)	mit E = 3 + 7 + 8 = 18
	(3, 5, 6, 7, 2, 4, 8, 1, 9)	
S = 23:	(7, 2, 6, 8, 1, 5, 9, 3 ,4)	mit E = 7 + 8 + 9 = 24
	(7, 3, 5, 8, 2, 4, 9, 1, 6)	

Da im Innern der Seiten die Zahlen getauscht werden können, existieren zu jeder Variante insgesamt 8 Anordnungen, somit $8 \cdot 18 = 144$ verschiedene Belegungen.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1985

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1.

a) Gib eine Lösung des folgenden Kryptogramms an:

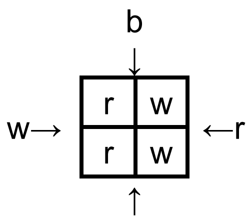
6	4	6	:			9	=			
		+				·				+
1			-		2	0	=		0	
			.				=			0

b) Gib alle Lösungen desfolgenden Kryptogramms an, und weise nach, dass keine weiteren Lösungen existieren:

6	4	6	:			9	=			
		+				·				+
			-			0	=		0	
			.				=			0

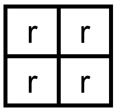
Aufgabe 2. Gegeben sind 8 gleichgroße Würfel. Jeder Würfel hat zwei rote (r), zwei blaue (b) und zwei weiße (w) Seitenflächen. Die gleichfarbigen Flächen liegen dabei stets einander gegenüber.

Werden zwei Würfel aneinander gelegt, dann sollen sie sich stets mit zwei gleichfarbigen Flächen vollständig berühren. Auf diese Weise kann man vier solche Würfel so anordnen, wie dies in Abbildung 1 in der Draufsicht festgehalten ist: Man sieht von oben zwei rote und zwei weiße Flächen; zwei sich berührende Flächenpaare sind blau, eines weiß und eines rot.

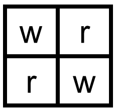


(1)

a) Ist es möglich, vier Würfel so anzuordnen, wie dies die Abb. 2 und Abb. 3 festhält.

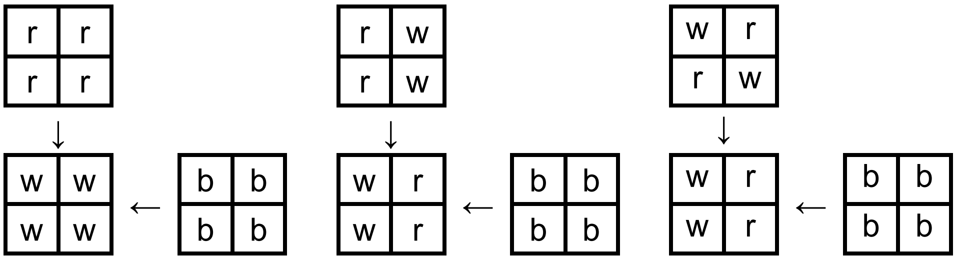


(2)



(3)

b) Ist es möglich, acht Würfel so anzuordnen, wie dies die Abb. 4, Abb. 5 bzw, Abb. 6 festhält.



(4) (5) (6)

Aufgabe 3. Bei einem Kindergeburtstag werden Nüsse verteilt.

Das erste Kind bekommt eine Nuss und 1/10 vom verbleibenden Rest.
Das zweite Kind bekommt 2 Nüsse und 1/10 vom nun verbleibenden Rest.
Das dritte Kind bekommt 3 Nüsse und 1/10 vom nun verbleibenden Rest
usw., bis alle Nüsse verteilt sind.

Zum Schluss stellt sich heraus, dass alle Kinder gleich viele Nüsse bekommen haben.

a) Gib die Gesamtzahl x der verteilten Nüsse, die Anzahl k der Kinder sowie die Anzahl n der Nüsse an, die jedes dieser Kinder bekommen hat!
b) Zeige durch eine Probe, dass die von dir gegebenen Anzahlen die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllen1
c) Weise nach, dass sich die Anzahlen x, k und n eindeutig aus den gegebenen Bedingungen ableiten lassen! Dabei darfst du die zusätzliche Bedingung verwenden, dass $x < 200$ gilt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1985

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): In der oberen Zeile erkennen wir, dass 19 ein Teiler von 646 ist (646 : 19 = 34). Wir probieren die Division durch 29, was nicht ganzzahlig aufgeht. Bei Division durch 39 müsste 646 durch 3 und bei Division durch 49 durch 7 möglich sein – beides ist nicht erfüllt. Wäre die mittlere Zahl in der oberen Zeile größer als 50, wäre das Produkt in der mittleren Spalte bereits vierstellig. Damit können wir erste Ziffern und nachfolgend alle anderen Ziffern schrittweise ergänzen:

6	4	6	:		**1**	9	=		**3**	**4**
		-				·				+
1	2	**6**	-		2	0	=	**1**	0	**6**
5	2	**0**	-	**3**	**8**	**0**	=	2	4	0

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es gibt insgesamt zwei verschiedene Kryptogramme. Neben der Lösung in Teilaufgabe a) ergibt sich eine weitere Lösung wie folgt.

Zunächst können wir in der oberen Zeile wie in Teilaufgabe a) argumentieren. Allerdings müssen wir auch die Division durch 59, 69, 79, 89 und 99 prüfen – jedes Mal erhalten wir keine ganzzahligen Ergebnisse. Das Ausfüllen erfolgt also eindeutig mit 646 : 19 = 34.

Weil das Produkt in der mittleren Spalte auf 0 endet, lassen sich weitere 0 und 6 eintragen. Im nächsten Schritt suchen wir Ziffern, die jeweils für die Variablen x und y eingesetzt werden können.

Wäre x = 3 oder größer, wäre die mittlere Zahl in der unteren Reihe 570. Damit lässt sich die Subtraktionsaufgabe in der unteren Zeile nicht erfüllen, weil schon 570 + y · 100 + 40 größer als 700 wird, die Subtraktionsaufgabe der ersten Spalte also nicht erfüllbar ist.

6	4	6	:		**1**	9	=		**3**	**4**
		-				·				+
y	x	**6**	-		x	0	=	y	0	**6**
		0	-			**0**	=	y	**4**	0

Wir probieren deshalb x = 2.

> Für y = 6 folgt z = 0,
> für y = 5 folgt z = 1,
> für y = 4 folgt z = 2 und
> für y = 3 folgt z = 3;

diese Belegungen erfüllen nicht die untere Zeile.

Für y = 2 erhalten wir in der ersten Spalte z = 4 und somit in der unteren Zeile y = 0, also einen Widerspruch.

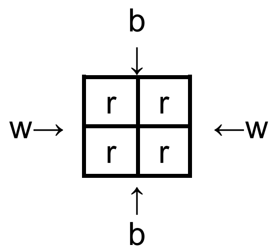
Setzen wir dagegen y = 1 finden wir mit z = 5 eine korrekte Belegung,

6	4	6	:		**1**	9	=		**3**	**4**
		-				·				+
1	2	**6**	-		2	0	=	1	0	**6**
5	2	**0**	-	3	8	**0**	=	1	**4**	0

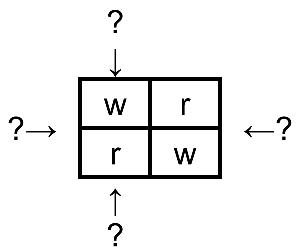
Wir probieren schließlich x = 1.
Probieren wir in gleicher Weise die Werte für y, so kann das Kryptogramm nur mit y = 2 und daraus folgend z = 4 korrekt ausfüllen.

6	4	6	:		**1**	9	=		**3**	**4**
		-				·				+
2	1	**6**	-		1	0	=	2	0	**6**
4	3	**0**	-	1	9	**0**	=	2	**4**	0

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die Anordnung nach Abbildung 2 ist möglich, zum Beispiel auf folgende Weise:



Dagegen ist es nicht möglich, die Anordnung nach Abbildung 3 zu erstellen. Wenn sich nämlich Würfel mit oben rot und weiß nebeneinanderliegen, müssen sie mit den blauen Seitenflächen aneinander liegen, d.h. so ein Würfel müsste zwei benachbarte blaue Seitenflächen haben.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):
- Es ist möglich, die Würfel wie in Abbildung 4 anzuordnen.
- Auch die Anordnung nach Abbildung 5 ist möglich.

- Es ist jedoch nicht möglich, die Würfel nach Abbildung 6 anzuordnen, da bereits die obere Schicht nach Abbildung 3 nicht möglich ist.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Aufgrund der weiteren Aufgabenstellungen genügt es, eine Lösung anzugeben, die den Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Insgesamt sind es x = 81 Nüsse, k = 9 Kinder und n = 9 Nüsse für jedes Kind.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Nun ist als Probe die Verteilungsprozedur anzugeben. Alle Kinder erhielten tatsächlich 9 jeweils 9 Nüsse.

Nr. des Kindes	Anzahl Nüsse	Verbleibende Nüsse
1	1 + (81 - 1)/10 = 9	81 – 9 = 72
2	2 + (72 - 2)/10 = 9	72 – 9 = 63
3	3 + (63 - 3)/10 = 9	63 – 9 = 54
4	4 + (54 - 4)/10 = 9	54 – 9 = 45
5	5 + (35 - 5)/10 = 9	45 – 9 = 36
6	6 + (36 - 6)/10 = 9	36 – 9 = 27
7	7 + (27 - 7)/10 = 9	27 – 9 = 18
8	8 + (18 - 8)/10 = 9	18 – 9 = 9
9	9	

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Damit das 1. Kind eine ganze Anzahl von Nüssen erhält, muss (x – 1) ein Vielfaches von 10 sein. Als Lösungen kommen also wegen x < 200 nur die Zahlen 11, 21, 31, …, 191 in Frage. (Es ist zulässig, nun alle diese Zahlen zu probieren – aber auch sehr aufwendig!)

Wenn jedes der k Kinder n Nüsse erhält, gilt $x = k \cdot n$.

Da nach der Verteilung keine Nüsse übrig bleiben, erhält das k-te Kind genau k + 0/10 = n Nüsse, also k = n. Also ist x wegen $x = k \cdot n = n^2$ eine Quadratzahl.

In der Liste der möglichen Lösungen ist nur x = 81 und x = 121 eine Quadratzahl, die auf 1 endet. Während x = 81 wegen Teilaufgabe b) bereits als Lösung erkannt wurde, führt n = 121 zu keiner Lösung, da bereits beim 2. Kind keine ganze Anzahl von Nüssen möglich ist.

Nr. des Kindes	Anzahl Nüsse	Verbleibende Nüsse
1	1 + (121 - 1)/10 = 13	121 – 13 = 108
2	2 + (108 - 2)/10	Nicht ganzzahlig

ADAM-RIES-Wettbewerb 1986

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Beim Leichtathletiksportfest einer Schule ist über den Ausgang des Weitsprungwettbewerbes folgendes bekannt:

(1) Arnd sprang weiter als Frank.
(2) Christian sprang nicht so weit wie Frank.
(3) Bernd gelang es diesmal, Frank zu schlagen.
(4) Erik war nur besser als Dietmar.
(5) Arnd erreichte nicht ganz die Leistung von Bernd.
(6) Dietmar wurde diesmal von Christian geschlagen.

(a) Zeige, dass sich aus diesen Angaben die Platzierung der genannten sechs Jungen eindeutig ermitteln lässt, wenn man weiß, dass keine gleichen Weiten erzielt wurden.
Gib die Platzierung an!

(b) Welche der Angaben (1) bis (6) sind für die eindeutige Ermittlung dieser Platzierung nicht unbedingt erforderlich?

Aufgabe 2. Auf der Eisenbahnstrecke von Karl-Marx-Stadt nach Berlin fuhr um 7:45 Uhr ein 350 m langer Güterzug in den 850 m langen Tunnel bei Waldheim ein. Es dauerte 1 Minute und 30 Sekunden, bis er den Tunnel gänzlich passiert hatte. Die nächste Blockstelle ist vom Tunnelausgang 13,55 km entfernt. Der Güterzug fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit, und die Lok fuhr um 11:18 Uhr im Zielbahnhof ein.

a) Wann erreichte der Zug die Blockstelle?
b) Wie weit ist der Zielbahnhof von der Blockstelle entfernt?

Aufgabe 3. In einer Arbeitsgemeinschaft „Junge Mathematiker“ werden Knobelaufgaben gelöst.

a) Steffen teilt mit: Meine Mutter ist genau 6 Jahre jünger als mein Vater. Heute in einem Jahr wird mein Vater genau dreimal so alt sein wie mein Zwillingsbruder Kurt. Wäre mein Mutter zwei Jahre früher geboren, wären wir vier heute in einem Jahr zusammen genau 100 Jahre alt.

b) Dann sagt der AG-Leiter Arno: Ich bin jetzt doppelt so alt, wie mein Bruder Bernd zu einem bestimmten früheren Zeitpunkt war. Zu diesem früheren Zeitpunkt war ich genau so alt wie Bernd jetzt ist. Zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt wird Bernd genau so alt sein, wie ich jetzt bin. Zu diesem späteren Zeitpunkt werden wir beide zusammengenau 63 Jahre alt sein.

Zeige, dass man aus Steffens Angaben das gegenwärtige Alter der vier Familienmitglieder eindeutig ermitteln kann! Wie alt sind diese vier Personen?

Zeige, dass man aus Arnos Angaben das gegenwärtige Alter von Arno und Bernd eindeutig ermitteln kann! Wie alt sind die beiden?

ADAM-RIES-Wettbewerb 1986

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir kürzen die Namen mit ihren Anfangsbuchstaben ab und verwenden das Relationszeichen „>“ für „sprang weiter“ bzw. „<“ für „sprang nicht so weit“. Dann lassen sich die fünf Aussagen wie folgt aufschreiben:

(1) A > F
(2) F > C, weil laut Text C < F
(3) B > F
(4) E > D und A > E, B > E, C > E, F > E
(5) B > A, weil laut Text A < B
(6) C > D, weil laut Text D < C

Daraus ergibt sich eindeutig die Reihenfolge

(5) B > A, (1) A > F, (2) F > C, (4) C > E und (4) E > D.

Die Aussage (3) ist dabei nicht erforderlich, da B > A > F die Aussage B > F umfasst. Auch die Aussage (6) ist nicht erforderlich, weil sie bereits aus (4) folgt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Damit der Zug den Tunnel gänzlich passierte, muss die Lok (350 + 850 =) 1200 m fahren. Wenn sie dafür 1 Minute und 30 Sekunden, also (60 + 30 =) 90 sec benötigte, fuhr der Zug in einer Minute ($1200 : 3 \cdot 2 =$) 800 m.

Die Entfernung vom Tunneleingang bis zur Blockstelle beträgt (850 m + 13,55 km =) 14400 m. Dafür benötigt er (14400 : 800 =) 18 min.

Also erreicht der Zug die Blockstelle um 8:03 Uhr.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da der Zug um 8:03 Uhr die Blockstelle und um 11:18 Uhr den Zielbahnhof erreichte, dauerte die Fahrt auf diesem Abschnitt 3 Stunden und 15 Minuten. Nach Aufgabe a) fuhr der Zug in 1 Minute 800 m. Nun können wir folgende Entfernungen ermitteln:

nach 15 min $\rightarrow$ ($15 \cdot 0{,}8 =$) 12 km
nach 60 min = 1 h $\rightarrow$ ($4 \cdot 12 =$) 48 km
nach 3 h $\rightarrow$ ($3 \cdot 48 =$) 144 km
also nach 3 h 15 min $\rightarrow$ (144 + 12 =) 156 km

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Steffens Alter in Jahren bezeichnen wir mit x. Sein Zwillingsbruder Kurt ist folglich auch x Jahre alt. Das Alter des Vaters ist demnach $3 \cdot (x + 1) - 1$, das Alter der Mutter also $3 \cdot (x+1) - 7$. Zusammenfassend soll gelten

$$2 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x + 1) - 4 = 8 \cdot x + 4 = 100 \rightarrow x = 12.$$

Somit sind Steffen und Kurt jeweils 12 Jahre alt, ihr Vater $(3 \cdot (x + 1) - 1 =)$ 38 Jahre alt und ihre Mutter $(38 - 6 =)$ 32 Jahre alt.

Alle Angaben erfüllen die Bedingungen der Aufgabe, wie durch eine Probe am Text bestätigt wird.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir bezeichnen mit a das Alter in Jahren von Arno und mit b das Alter in Jahren von Bernd. Außerdem sei x die Anzahl der Jahre von einem früheren Zeitpunkt bis jetzt. Dann gilt entsprechend der Aussagen von Arno:

$$a = 2 \cdot (b - x) \text{ und } (a - x) = b$$

Formen wir die zweite Gleichung zu $a = b + x$ um und ersetzen damit in der linken Seite der ersten Gleichung die Variable a, so erhalten wir $b + x = 2 \cdot b - 2 \cdot x$. Somit finden wir $b = 3 \cdot x$ und folglich $a = 4 \cdot x$.

Da Bernd zu einem späteren Zeitpunkt so alt sein wird, wie Arno jetzt bist, ist also Bernd dann $4 \cdot x$ Jahre alt. Das bedeutet, dass von „jetzt“ bis „später“ noch einmal x Jahre vergehen. Also ist Arno zu diesem späteren Zeitpunkt $(4 \cdot x + x =)$ $5 \cdot x$ Jahre alt.

Sind sie dann gemeinsam $63 = 4 \cdot x + 5 \cdot x = 9 \cdot x$ Jahre alt, gilt $x = 7$.

Arno ist also jetzt $(4 \cdot 7 =)$ 28 Jahre und Bernd ist jetzt $(3 \cdot 7 =)$ 21 Jahre alt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1987

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1.

a) Die Klasse 5a sammelte 2,25 dt einer bestimmten Sorte von Altstoffen. Die Klasse 5b sammelte von der gleichen Sorte von Altstoffen 3,15 dt und erhielt dafür 22,50 Mark mehr als die Klasse 5a.

   Wie viele Mark erhielt die Klasse 5a für ihr Sammelergebnis?

b) Die Klassen 3, 4, 5 und 6 sammelten zusammen genau 5 dt Altpapier. Dabei sammelte die Klasse 4 um 80 kg mehr als die Klasse 3. Die Klasse 5 sammelte ebenso viel wie die Klassen 3 und 4 zusammen. Die Klasse 6 sammelte nur halb so viel wie die Klasse 5.

   Wie viele Dezitonnen Altpapier sammelte die Klasse 5?

Aufgabe 2. Carsten möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die folgende Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:

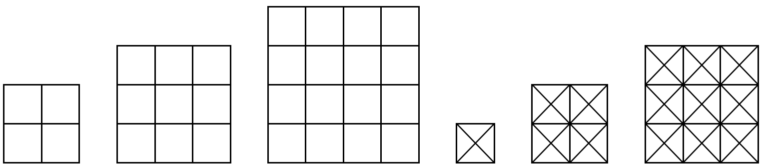
(1) Die Summe der Ziffern dieser Zahl ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches größer als 100 und kleiner als 200 ist.
(3) Vergrößert man die Einerziffer von z um 2, so erhält man die Zehnerziffer von z.

Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 3. Wer kann geschickt zählen?

a) In Figur a1 findet man 5 Quadrate (nämlich ein „großes“ mit der Seitenlänge 2 und vier „kleine“ mit der Seitenlänge 1).
   Wie viele Quadrate findet man in Figur a2?
   Wie viele Quadrate findet man in Figur a3?

b) In Figur b1 findet man 8 Dreiecke (nämlich vier „kleine“ und vier „große“).
   Wie viele Dreiecke findet man in Figur b2?
   Wie viele Dreiecke findet man in Figur b3?



a1 a2 a3 b1 b2 b3

Hinweis: Gib jeweils an, wie man die gesuchte Gesamtanzahl von Quadraten bzw. Dreiecken aus den Anzahlen der Quadrate bzw. Dreiecke verschiedener Größe ermitteln kann! Weitere Begründungen werden hier nicht verlangt.

Wer angibt, wie man in Aufgabe a) die Anzahl der Quadrate in einer derartigen Figur mit beliebig vorgegebener Seitenlänge n ermitteln kann, erhält Sonderpunkte!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1987

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die Klasse 5b sammelte (3,15 – 2,25 =) 0,90 dt mehr von den Altstoffen.

Deshalb erhielt man für eine Dezitonne (22,50 : 0,9 =) 25 Mark.

Damit sammelte die Klasse 5a für (2,25 · 25 =) 56,25 Mark.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir bezeichnen die Menge Altpapier (in kg), die die Klasse 3 sammelte, mit x. Dann gilt laut Aufgabentext:

Die Klasse 4 sammelte	$x + 80$.
Die Klasse 5 sammelte	$x + x + 80 = 2 \cdot x + 80$.
Die Klasse 6 sammelte	$(x + x + 80) : 2 = x + 40$.
Zusammen sammelten sie	$x + x + 80 + 2x + 80 + x + 40 = 5x +200 = 500$.

Somit finden wir $x = (500 – 200) : 5 = 60$.

Die Klasse 5 sammelte ($2 \cdot 60 + 80 =$) 200 kg = 2 dt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2: Die Zehnerziffer der Zahl z sei a und die Einerstelle sei b. Dann ist $z = 10a+b$.

Wegen der Aussage (3) gilt $b + 2 = a$.
Wegen der Aussage (2) gilt $100 < 30 \cdot b + 3 \cdot a < 200$

Fassen wir beide Erkenntnisse zusammen, so erhalten wir $100 < 33 \cdot b + 6 < 200$.

Wir erkennen, dass b mindestens 3 sein muss, weil $33 \cdot 2 + 6 = 72 < 100$ die Aussage (2) nicht erfüllt.
Außerdem erkennen wir, dass b höchstens 5 sein kann, weil $33 \cdot 6 + 6 > 204$ die Aussage (2) nicht erfüllt.

Somit können nur die Zahlen 53, 64 oder 75 Lösungen sein. Wegen Aussage (1) entfällt die Zahl 64, da deren Ziffernsumme 10 ergibt.

Wir prüfen die beiden anderen Lösungskandidaten:

$100 < 3 \cdot 35 = 105 < 200$; $3 + 2 = 5$,
$100 < 3 \cdot 57 = 171 < 200$; $5 + 2 = 7$.

Somit erfüllen genau die Zahlen 53 und 75 die Bedingungen der Aufgabe.

Lösungshinweise Aufgabe 3

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): In der Abbildung a2) sind 9 kleine Quadrate (mit Seitenlänge 1), 4 mittlere Quadrate (mit Seitenlänge 2) und 1 großes Quadrat (mit der Seitenlänge 3) zu sehen.

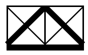
Insgesamt sind es somit (9 + 4 + 1 =) 14 Quadrate.

In der Abbildung a3) sind 16 kleine Quadrate (mit Seitenlänge 1), 9 mittlere Quadrate (mit Seitenlänge 2) und 4 größere Quadrate (mit der Seitenlänge 3) und 1 großes Quadrat (mit der Seitenlänge 4) zu sehen.

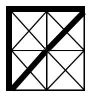
Insgesamt sind es somit (16 + 9 + 4 + 1 =) 30 Quadrate.

Verallgemeinernd erkennen wir, dass wir in einem großen Quadrat mit $n \cdot n$ kleinen Quadraten insgesamt ($n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2$ verschiedene Quadrate sehen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b)
In Abbildung b2) sind in jedem der vier Teilquadrate jeweils 8 Dreiecke zu sehen (wie in Abbildung b1), also insgesamt bereits ($4 \cdot 8$ =) 32 Dreiecke.
Nun gibt es aber noch jeweils 2 Dreiecke, die über zwei benachbarte Quadrate liegen, also weitere ($4 \cdot 2$=) 8 Dreiecke.



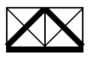
Des Weiteren gibt es noch 4 große Dreiecke, die in mehr als zwei Quadraten liegen.



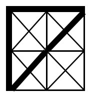
Insgesamt sind es also (32 + 8 + 4 = 44).

In Abbildung b3) sind in jedem der 9 Teilquadrate jeweils 8 Dreiecke zu sehen (wie in Abbildung b1), also insgesamt bereits ($9 \cdot 8$ =) 72 Dreiecke.

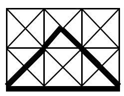
Nun betrachten wir je zwei benachbarte Quadrate – davon gibt es 12 Möglichkeiten mit je 2 Dreiecken wie in Abbildung b2), also weitere ($12 \cdot 2$ =) 24 Dreiecke.

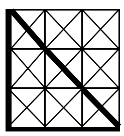


Außerdem betrachten wir die Quadrate mit je vier kleinen Quadraten – davon gibt es 4 Möglichkeiten mit je 4 Dreiecken wie in Abbildung b2), also weitere ($4 \cdot 4$ =) 16 Dreiecke.



Es gibt jedoch weitere Dreiecke,
- zum Einen in den Flächen von 3x2-Quadraten (davon gibt es 4 Möglichkeiten mit je 2 Dreiecken, also ($4 \cdot 2$ =) 8 Dreiecke),
- zum Anderen in der Fläche von 3x3-Quadraten (mit 4 Dreiecken).





Insgesamt sehen wir (72 + 24 + 16 + 8 + 4 =) 124 Dreiecke.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1988

*Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden***.**

Aufgabe 1.

a) Wir suchen 3 natürliche Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen sollen:

- Die zweite Zahl ist um 10 größer als die erste Zahl;
- die dritte Zahl ist gleich dem Dreifachen der ersten Zahl;
- die Summe der drei Zahlen beträgt 210.

b) Wir suchen 4 natürliche Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen sollen:

- Die erste Zahl ist um 8 größer als das Doppelte der zweiten Zahl;
- die dritte Zahl ist um 2 kleiner als das Dreifache der zweiten Zahl;
- die vierte Zahl ist gleich der Summe aus der ersten und der dritten Zahl;
- die Summe der 4 Zahlen beträgt 122.

Zeige jeweils, wie man alle Zahlen finden kann, die die gestellten Bedingungen erfüllen!

Weise nach, dass die gefundenen Zahlen tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllen!

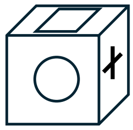
Aufgabe 2. Bernd Fleischer, Lutz Maurer, Hans Richter und Axel Schlosser sind (nicht unbedingt in der gegebenen Reihenfolge) von Beruf Fleischer, Maurer, Richter und Schlosser. Es ist folgendes bekannt:

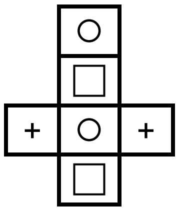
(1) Der Richter, der nicht Richter heißt, hat Bernd zum Geburtstag eingeladen.
(2) Hans war zum Geburtstag des Richters auch eingeladen, konnte aber nicht kommen.
(3) Der Fleischer teilte der Familie Fleischer mit, dass sein Freund Hans erkrankt sei.
(4) Der Maurer rief Lutz an und bat ihn, mit ihm zusammen der Familie Fleischer beim Hausbau zu helfen.
(5) Lutz machte dem Maurer den Vorschlag, auch Axel um Hilfe zu bitten.

a) Wie heißt der Schlosser? Weise nach, dass man den Namen des Schlossers aus den 5 Angaben eindeutig ermitteln kann!
b) Untersuche, ob man tatsächlich alle 5 Angaben benötigt, um den Namen des Schlossers zu ermitteln!
c) Weise nach, dass aus diesen Angaben zwar noch den Namen des Maurers, nicht aber den Namen des Fleischers noch den Namen des Richters eindeutig ermitteln kann!

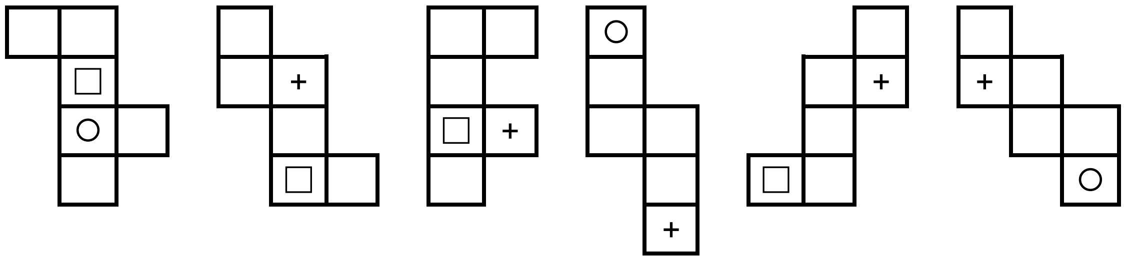
Aufgabe 3.

a) Die Abbildung zeigt einen verzierten Würfel und ein Würfelnetz, aus dem sich dieser Würfel herstellen lässt.





Die zweite Abbildung zeigt 6 Netze, bei denen jeweils nur auf 2 der 6 Flächen eine Verzierung eingezeichnet ist.



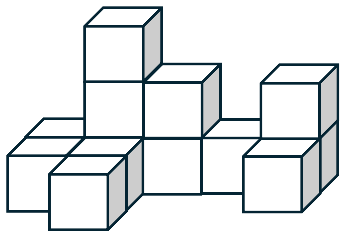
a b c d e f

Gibt es unter diesen 6 Netzen auch solche, aus denen sich kein Würfel herstellen lässt? Wenn ja, dann kennzeichne diese Netze!
(Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aus welchen der restlichen Netze lässt sich der Würfel aus der Abbildung herstellen? Zeichne in diese Netze die noch fehlenden Verzierungen ein!

Falls nun noch Netze übrigbleiben, dann begründe, warum sich aus ihnen der Würfel aus obiger Abbildung nicht herstellen lässt.

b) Der in der Abbildung dargestellte Körper ist durch Zusammenkleben von Würfeln entstanden. Die nicht sichtbare Hinterseite dieses Körpers ist glatt, d.h. hier gibt es weder Lücken noch Vorsprünge.



Ferner sei bekannt, dass beim Zusammenkleben jeweils nur eine der sich berührenden Flächen mit Leim eingestrichen wurde.

Aus wie vielen Würfeln besteht dieser Körper? Wie viele quadratische Seitenflächen wurden mit Leim eingestrichen? Wie viele Quadrate bilden insgesamt (d.h., vorn, hinten, oben, unten, rechts und links) die Oberfläche dieses Körpers?

c) Hans erzählt: „Ich habe mir aus 20 Würfeln durch Zusammenkleben einen Körper hergestellt, und zwar auf eine Weise, wie sie unter b) beschrieben wurde. Dabei habe ich 25 Seitenflächen mit Leim bestrichen. Die Oberfläche meines Körpers setzt sich aus 68 Quadratflächen zusammen."

Fritz erwidert: „Das kann nicht stimmen! Bestimmt hast du dich verzählt!"
Begründe, warum Fritz recht hat!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1988

Lösungshinweise

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir bezeichnen die erste Zahl mit x. Dann giult

für die zweite Zahl	$x + 10$
und für die dritte Zahl	$3 \cdot x$.

Die Summe der drei Zahlen beträgt folglich	$x + x + 10 + 3 \cdot x = 210$
also	$5 \cdot x + 10 = 210$
Daraus finden wir	$x = 40$

Die gesuchten Zahlen lauten 40, (40 + 10 =) 50 und (3 · 40 =) 120. Dabei gilt für die Summe wie behauptet 40 + 50 + 120 = 210.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir bezeichnen die zweite Zahl mit x. Dann gilt

für die erste Zahl	$2 \cdot x + 8$
für die dritte Zahl	$3 \cdot x - 2$
und für die vierte Zahl	$2 \cdot x + 8 + 3 \cdot x - 2 = 5 \cdot x + 6$

Die Summe der drei Zahlen beträgt	$2 \cdot x + 8 + x + 3 \cdot x - 2 + 5 \cdot x + 6 = 122$
also	$11 \cdot x + 12 = 122$
Daraus finden wir	$x = 10$

Die gesuchten Zahlen lauten (2 · 10 + 8 =) 28, 10, (3 · 10 – 2 =) 28 und (28 + 28 =) 56. Dabei gilt für die Summe wie behauptet 28 + 10 + 28 + 56 = 122.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Zur Vereinfachung der Schreibweise kürzen wir die Vor- und Nachnamen mit den Anfangsbuchstaben ab, also Bernd Fleischer mit BF, Lutz Maurer LM, Hans Richter mit HR und Axel Schlosser mit AS. Wir wollen schrittweise die Erkenntnisse aus dem Text und nachfolgenden Schlüssen in einer Tabelle eintragen. Wir verwenden das Symbol ✓, falls eine Zuordnung sicher ist, und das Symbol ×, falls eine Zuordnung sicher nicht gilt. Die Nummer gibt an, aus welchen Schlussfolgerungen die Symbole folgen.

	Fleischer	Maurer	Richter	Schlosser
BF	3: ×	4: ×	1: ×	5: ✓
LM		4: ×		5: ×
HR	3: ×	6: ✓	1: ×	5: ×
AS		6: ×		5: ×

Schlussfolgerungen:

1. Aus Aussage (1) folgt, dass HR nicht Richter ist, und auch nicht Fleischer ist (weil er BF zum Geburtstag eingeladen hat).
2. Aus Aussage (2) wissen wir, dass HR ist nicht Richter (weil er vom Richter eingeladen wurde, was in 1. bereits erkannt wurde).

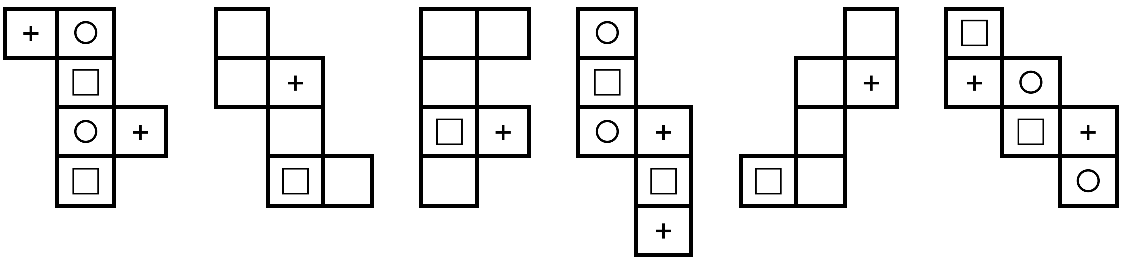
3. Aus Aussage (3) folgt, dass BF nicht Fleischer ist, und auch HR nicht Fleischer ist (weil er zum Geburtstag des Fleischers eingeladen wurde).
4. Aus Aussage (4) wissen wir, dass LM nicht Maurer ist (weil der Maurer LM anrief), und auch nicht BF heißt (weil er mit BF zusammen helfen möchte).
5. Da die erste Zeile bereits drei Symbole × zeigt, wissen wir bereits, dass **BF Schlosser** ist. Dann kann aber keine andere der Personen Schlosser sein.
6. Nun stehen in der dritten Zeile drei Symbole ×. Deshalb wissen wir, dass **HR Maurer** ist und kein anderer der Personen Maurer sein kann.
7. Die Information aus Aussage (5) sind uns bereits bekannt, denn LM ist nicht Maurer und auch AS ist nicht Maurer.

Damit haben wir gezeigt:

Nach Schlussfolgerung 5 heißt der Schlosser Bernd Fleischer.
In der Schlussfolgerung 2 bemerkten wir bereits, dass diese Aussage nicht erforderlich war.
Nach Schlussfolgerung 6 wissen wir, dass der Maurer HR heißt.
Nach Untersuchung aller Aussagen bleiben in der Tabelle die Zuordnungen der Berufe Richter und Fleischer zu den Namen LM und AS unbeantwortet – beide Varianten der Namenszuordnungen sind ohne Widersprüche möglich.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir ergänzen zunächst die fehlenden Symbole auf den Netzen und achten darauf, dass gegenüberliegende Seiten das gleiche Symbol zeigen.

- Das Netz a lässt sich wie gefordert ergänzen und zu dem Würfel falten.
- Das Netz b kann nicht dem Würfel entsprechen. weil die vorgegebenen verschiedenen Symbole auf gegenüberliegenden Seiten liegen.
- Das Netz c ist kein Würfelnetz, weil die beiden rechts liegenden Quadrate beim Falten aufeinander liegen werden.
- Das Netz d lässt sich wie gefordert ergänzen und zu dem Würfel falten.
- Das Netz e kann nicht dem Würfel entsprechen. weil die vorgegebenen verschiedenen Symbole auf gegenüberliegenden Seiten liegen.
- Das Netz f lässt sich wie gefordert ergänzen und zu dem Würfel falten.



a b c d e f

Aus welchen der restlichen Netze lässt sich der Würfel aus der Abbildung herstellen? Zeichne in diese Netze die noch fehlenden Verzierungen ein!

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Durch Abzählen an der Zeichnung erkennen wir:
Es sind 13 Würfel verbaut.
Es wurden 14 Seitenflächen mit Leim bestrichen.

Die 13 Würfel haben insgesamt 13 ·6 = 78 Seitenflächen. An jeder verleimten Seite stoßen 2 Seitenflächen aneinander, so dass 2 · 14 = 28 Seitenflächen nicht zu sehen sind. Folglich bilden (78 – 28 =) 50 Quadrate die Oberfläche des Körpers.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wir verwenden den Lösungsansatz wie in Teilaufgabe b.

Die 20 Würfel besitzen 20 · 6 = 120 Seitenflächen. Wegen 25 verleimten Flächen gehen dadurch 2 · 25 = 50 Seitenflächen verloren. Es bilden somit (120 – 50 =) 70 Quadraten die Oberfläche des Körpers. Fritz hat also recht.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1989

1. Stufe (Hausarbeit)

*Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden***.**

Aufgabe 1. Ein Schwerlasttransporter startete um 9:40 Uhr in Adorf und fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit nach dem 135 km entfernten Benshausen, wo er 12:40 Uhr ankam.

Um 10:20 Uhr passierte der Schwerlasttransporter Penzdorf, während zur gleichen Zeit in Benshausen ein PKW startete und mit gleichbleibender Geschwindigkeit nach Adorf fuhr.

Der PKW traf den Schwerlasttransporter genau um 11:10 Uhr.

a) Wie viele Kilometer legte der Schwerlasttransporter in einer Stunde zurück, und wie viele Kilometer ist Penzdorf von Adorf entfernt?
b) Um wieviel Uhr traf der PKW in Adorf ein?
c) Um wieviel Uhr wäre der PKW in Adorf eingetroffen, wenn er etwas langsamer gefahren wäre und daher den Schwerlasttransporter erst um 11:16 Uhr getroffen hätte?

Aufgabe 2. Wir spielen mit Worten.

Wir betrachten „Worte“, die nur aus den Buchstaben M, I, U bestehen. Aus bereits vorhandenen Worten sollen neue Worte abgeleitet werden, wobei man sich streng an die folgenden Regeln halten muss:

R1: Wenn in einem Wort der letzte Buchstabe ein I ist, dann darf man ein U hinten anfügen.

(Beispiel: Aus MIUI kann man MIUIU ableiten, kurz MIUI → MIUIU)

R2: Wenn ein Wort mit M beginnt, dann darf man die Buchstabenfolge, die nach dem M kommt, verdoppeln.

(Beispiel: MIUI → MIUIIUI)

R3: Wenn ein Wort die Buchstabenfolge III enthält, dann darf man diese Buchstabenfolge durch ein U ersetzen.

(Beispiel: MIIIUI → MUUI)

R4: Wenn ein Wort die Buchstabenfolge UU enthält, dann darf man diese Buchstabenfolge weglassen.

(Beispiel: MIUUI → MII)

a) Wende auf das Wort MI die Regeln R2, R2, R1, R3 in der angegebenen Reihenfolge an! Welche Worte lassen sich auf diese Weise ableiten?

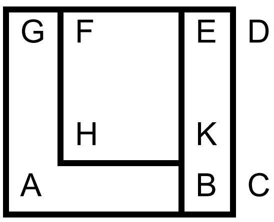
b) Lässt sich das Wort MIMI aus dem Wort MI durch Anwendung der angegebenen Regeln ableiten? Begründe deine Antwort!
c) Lässt sich das Wort MIUIUIUIU aus dem Wort MI ableiten? Wenn ja, dann gib eine Ableitung (nebst Angabe der verwendeten Regeln) an!
d) Gib eine Ableitung für das Wort MUIUI aus dem Wort MI an!
e) Gib eine Ableitung für das Wort MUII aus dem Wort MI an!

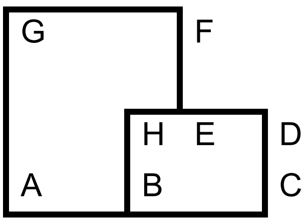
Aufgabe 3. Die in den abgebildeten Figuren vorkommende Vierecke sind stets Rechtecke. Die Figuren sind nicht maßstabgerecht gezeichnet!

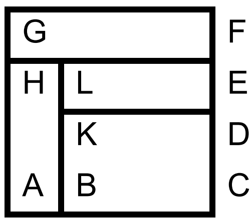
a) Geg.: HK=KE=18 cm
BC=12 cm
Die drei Teilfiguren haben den gleichen Flächeninhalt.
Ges.: BK=x cm

b) Geg.: CD=DE=25 cm
FG=AG=35 cm
Die beiden Teilfiguren haben den gleichen Flächeninhalt.
Ges.: Die Umfänge der beiden Teilfiguren.

c) Geg.: AG=GF=21 cm
Die vier Teilfiguren haben den gleichen Umfang.
Ges.: Die Flächeninhalte der vier Teilfiguren.







ADAM-RIES-Wettbewerb 1989

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1

Lösungshinweise zur Aufgabe a): Der Transporter legte in der Zeit von 9:40 Uhr bis 12:40 Uhr (also in 3 Stunden) insgesamt 135 km zurück. Wir erhalten als Durchschnittsgeschwindigkeit (135 : 3 =) 45 km/h. Um 10:20 Uhr (also nach 40 min) traf der Transporter in Penzdorf ein. Da 40 min 2/3 von einer Stunde sind, legte er in diesen 40 min (45 · 2/3 =) 30 km zurück.

Lösungshinweise zur Aufgabe b): Da der Transporter bis 11:10 Uhr 90 min unterwegs war, also 1,5 Stunden, legte er in dieser Zeit (45 · 1,5 =) 67,5 km zurück. Damit ist der PKW ebenfalls 67,5 km gefahren, war aber bis dahin nur 50 min unterwegs. Da er auch für die gleichlange verbleibende Strecke ebenfalls noch 50 min benötigte, war er 12:00 Uhr in Adorf.

Lösungshinweise zur Aufgabe c): Hätte der PKW erst 6 min später den Transporter getroffen, wäre der Transporter insgesamt 96 min unterwegs gewesen. In dieser Zeit legte er (45 · 96/60 =) 72 km zurück. Der PKW legte in 56 min die Strecke (135 – 72 =) 63 km zurück, fuhr also mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von (63 : 56/60 =) 67,5 km/h. Für die 72 Kilometer lange Strecke vom Begegnungsort bis nach Adorf benötigte der PKW also noch (72 : 67,5 =) 64 min. Er kam also um 12:20 Uhr in Adorf an.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): MI → MII → MIIII → MIIIIU → MIUU oder MUIU

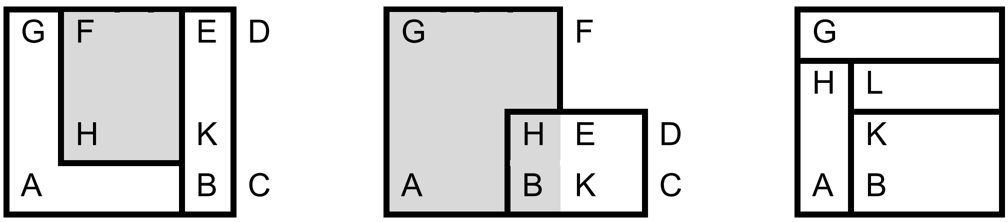
Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es ist unmöglich, weil in keiner der Regeln ein M hinzugefügt werden kann.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Mit der Regel R1: MI → MIU, mit Regel R2: MIU → MIUIU und nochmals mit Regel R2: MIUIU → MIUIUIUIU.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Mit zweimal Regel R2: MI → MII → MIIII, mit Regel R3 MIIII → MUI und mit Regel R2: MUI → MUIUI

Lösungshinweise zur Teilaufgabe e): MUII aus dem Wort MI → MII → MIIII → MIIIIIIII → MIIIIIIIU → MIIIIUU → MUIIIIIIIIIU → MUIIIIIIIUU → MUIIIIIII → MUIIIIU

Lösungshinweise zur Aufgabe 3



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wegen HK = KE = 18 cm ist das Rechteck HKEF ein Quadrat mit dem Flächeninhalt (18 · 18 =) 324 cm².

Wegen BC = 12 cm ergibt sich der Flächeninhalt des Rechtecks BCDE mit der Formel 12 cm · CD = 324 cm². Wir erhalten CD = (324 : 12 =) 27 cm.

Folglich gilt BK = CD – EK = 27 cm – 18 cm = 9 cm.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wegen AG = GF = 35 cm ist die graue Fläche ein Quadrat mit dem Flächeninhalt (35 · 35 =) 1225 cm².

Wegen CD = DE = 25 cm ist auch die weiße Fläche ein Quadrat mit dem Flächeninhalt (25 · 25 =) 625 cm².

Schreiben wir für BK = HE = x cm, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks BKHE die Formel x · 25 cm². Also betragen die Flächeninhalte für die Flächen

ABHEFG: 1225 cm² - 25 · x cm² bzw.

BCDH: 625 cm² + 25 · x cm²

Da beide Flächeninhalte gleich groß sind, finden wir

$1225 – 25 \cdot x = 625 + 25 \cdot x$, also $600 = 50 \cdot x$, d.h. $x = 12$.

Daher gilt für den Umfang des Flächenstückes ABHEFG: 4 · 35 cm = 140 cm und für den Umfang des Flächenstückes BCDH: 2 · (12 + 25) cm + 2 · 25 cm = 124 cm.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wir betrachten zunächst die Rechtecke HEFG und ABLH. Sei GH = EF = x cm. Wegen AG = GF = 21 cm gilt dann

AH = BL = (21 – x) cm

Da laut Voraussetzung beide Rechtecke umfangsgleich sind, gilt

AB = LH = (21 + x) cm.

Betrachten wir nun die umfangsgleichen Rechtecke KDEL und BCDK, so finden wir

CD = DE = ½ · (21 – x) cm.

Betrachten wir die umfangsgleichen Rechtecke BCDK und ABLH, so finden wir daraus

BC = 2 · x cm + ½ · (21 – x) cm = 1,5 · x cm + 10,5 cm.

Wegen AG = GF = 21cm, ist das Rechteck ACFG ein Quadrat mit AC = AB + BC = 21 cm, also AC = 2 · x cm + 1,5 · x cm + 10,5 cm = 21 cm, also 3,5 · x cm = 10,5 cm bzw. x = 3 cm.

Damit haben wir alle relevanten Seitenlängen gefunden:

HG = 3 cm, AB = 6 cm, AH = 18 cm, BC = 15 cm und CD = 9 cm.

Für die gesuchten Flächeninhalte gilt daher:

Rechteck HEFG:	(3 · 21 =) 63 cm²
Rechteck ABLH:	(18 · 6 =) 108 cm²
Rechtecke BCDK, KDEL:	(15 · 9 =) 135 cm²

Kontrolle: Die Summe der drei Flächeninhalte beträgt (21 · 21 =) 441 cm².

ADAM-RIES-Wettbewerb 1990

1. Stufe (Hausarbeit)

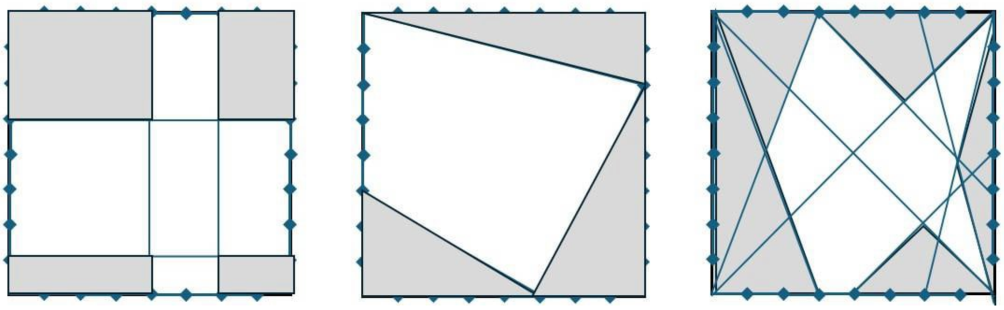
Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Drei Sportklubs A, B, C trugen einen Schwimmwettkampf in den drei Disziplinen Brustschwimmen, Freistilschwimmen und Rückenschwimmen aus. In jeder Disziplin wurden für den 1. Platz 5 Punkte, für den 2. Platz 3 Punkte und für den 3. Platz 1 Punkt vergeben, in keiner Disziplin wurde ein Rangplatz geteilt. Über den Ausgang des Wettkampfes ist folgendes bekannt:

Klub A erreichte insgesamt 7 Wertungspunkte, Klub B erreichte insgesamt 9 Wertungspunkte. Klub B war im Freistilschwimmen besser als Klub C und im Brustschwimmen besser als Klub A. Klub C erreichte keinen 2. Platz.

a) Wie viele Wertungspunkte erreichte Klub C insgesamt?
b) Gib in einer Tabelle eine Verteilung der in jeder Disziplin vergebenen Punkte an, die alle gegebenen Bedingungen erfüllt!
c) Weise nach, dass es außer der von dir angegebenen Verteilung nur noch eine weitere gibt, die alle gegebenen Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 2. Die abgebildeten Flächen sind Quadrate, deren Seiten in 8 gleich lange Abschnitte geteilt sind. Die weißen Flächen werden durch Geraden begrenzt, die durch Teilpunkte auf den Seiten der jeweiligen Quadrate gehen.



a) b) c)

Gib jeweils den Anteil des Inhalts der weißen Fläche von der Gesamtfläche des Quadrates in Form eines gekürzten Bruches an!

Aufgabe 3. Ein Gemüseladen erhielt 5 Kisten mit Zitronen oder Apfelsinen. In jeder Kiste waren nur Früchte einer Sorte. In der 1. Kiste waren 115 Früchte, in der 2. Kiste 110 Früchte, in der 3. Kiste 105 Früchte, in der 4. Kiste 100 Früchte und in der 5. Kiste 130 Früchte. Nachdem eine der Kisten verbraucht war, befanden sich in den restlichen vier (unversehrten) Kisten dreimal so viel Apfelsinen wie Zitronen.

Untersuche, ob man aus diesen Angaben folgende Fragen eindeutig beantworten kann; wenn dies der Fall ist, dann gib die Antwort!

a) Die wievielte Kiste wurde verbraucht?
b) Welche Sorte von Früchten enthielt diese Kiste?
c) Welche Sorte von Früchten enthielt die 5. Kiste?

ADAM-RIES-Wettbewerb 1990

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.

Lösungshinweise zur Aufgabe a): In jeder Disziplin wurden (5 + 3 + 1 =) 9 Wertungspunkte vergeben, insgesamt also (9 · 3 =) 27 Wertungspunkte. Da die Wertungspunkte für Klub A und Klub B bekannt sind, können wir die Wertungspunkte für Klub C mit (27 – 9 – 7 =) 11 ermitteln.

Lösungshinweise zur Aufgabe b): Da 11 Wertungspunkte ohne einen zweiten Platz nur durch (5 + 5 + 1 =) 11 erreicht werden können, und da Klub C im Freistilschwimmen nicht den ersten Platz erreichte (Klub B war besser), können wir die Wertungspunkte des Klubs C angeben.

Da Klub B im Brustschwimmen besser als Klub A war, hat er in dieser Disziplin 3 Punkte erhalten (und Klub A entsprechend 1 Punkt).

Damit Klub B in drei Disziplinen 9 Wertungspunkte erhielt, muss er im Freistilschwimmen und im Rückenschwimmen insgesamt 6 Wertungspunkte erhalten. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, in der Tabelle dargestellt als x/y: Klub B kann im Freistilschwimmen 3 oder 5 Punkte erhalten haben. Für Klub A ergeben sich dann eindeutig die möglichen Wertungspunkte.

Klub	Punkte im …			Gesamt
	Freistilschwimmen	Brustschwimmen	Rückenschwimmen	
C	1	5	5	11
B	3/5	3	3/1	9
A	5/3	1	1/3	7
gesamt	9	9	9	

Lösungshinweise zur Aufgabe c): Beide Möglichkeiten erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir berechnen die Flächeninhalte der sichtbaren neun Teilrechtecke. Damit beträgt der Flächeninhalt der weißen Fläche

6 + 16 + 8 + 8 + 2 = 40

Das Quadrat hat den Flächeninhalt (8 · 8 =) 64. Somit beträgt der Anteil $\frac{40}{64} = \frac{5}{8}$.

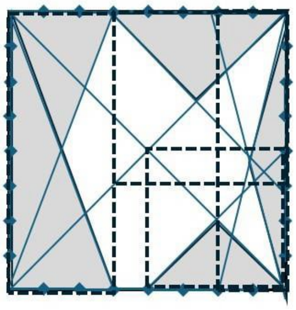
Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir berechnen die Flächeninhalte der sichtbaren drei (grauen) Teildreiecke: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8, \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9, \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7{,}5$.

Damit beträgt der Flächeninhalt der weißen Fläche

64 – (8 + 9 + 7,5) = 39,5

Somit beträgt der Anteil $\frac{39,5}{64} = \frac{79}{128}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wir zeichnen in das Quadrat vier Rechtecke (mit gestrichelten Seitenlinien). In jedem dieser Rechtecke sind die grauen Flächen durch die durch beide Diagonalen erzeugten Dreiecke bestimmt. Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass diese vier Dreiecke paarweise flächengleich sind.



Die grauen Flächen überdecken sich nicht, so dass wir deren Flächeninhalte ermitteln können:

$$\frac{3}{4} \cdot 8 \cdot 3 = 18, \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 5 = 6{,}25, \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 2 = 4, \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 4 = 4$$

Der Flächeninhalt der grauen Fläche beträgt also 18 + 4 + 4 + 6,25 = 32,25

Somit beträgt der gesuchte Anteil $\frac{64-32,25}{64} = \frac{31,75}{64} = \frac{127}{256}$.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Aufgabe a): In den 5 Kisten befanden sich (115 + 110 + 105 + 100 + 130 =) 560 Früchte. Da in den vier verbleibenden Kisten dreimal so viele Apfelsinen wie Zitronen waren, ist die Gesamtzahl dieser Früchte durch 4 teilbar. Da 560 durch 4 teilbar ist, kann die Summe der Früchte in den vier Kisten nur dann durch 4 teilbar sein, wenn die (verbrauchte) fünfte Kiste auch eine durch 4 teilbare Anzahl enthielt. Damit ist ersichtlich, dass die vierte Kiste mit 100 Früchten verbraucht wurde.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b) und c): In den verbleibenden vier Kisten befinden sich (560 – 100 =) 460 Früchte. Der vierte Teil sind Zitronen. Wegen (460 : 4 =) 115 ist ersichtlich, dass in der ersten Kiste Zitronen und der Inhalt der 2., 3. und 5. Kiste Apfelsinen waren.

Lösungshinweise zur Aufgabe d): Die Fruchtart in der vierten Kiste kann nicht ermittelt werden, da sowohl die Annahme, es seien Zitronen, als auch die Annahme, es seien Apfelsinen, zu keinen Widersprüchen führt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1991
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Untersuche, ob es jeweils drei natürliche Zahlen gibt, die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) (1) Die 1. Zahl ist um 6 größer als das Doppelte der 2. Zahl.
   (2) Die dritte Zahl ist halb so groß wie die 1. Zahl.
   (3) Die Summe der drei Zahlen beträgt 17.

b) Bedingungen (1) und (2) wie unter a) angegeben.
   (3) Die Summe der drei Zahlen beträgt 2505.

c) Bedingungen (1) und (2) wie unter a) angegeben.
   (3) Die Summe der drei Zahlen hat als Endziffer eine 6.

Aufgabe 2. In Münzland gibt es drei Sorten von Münzen: Pun, San und Tin. Für 84 Tin bekommt man 2 Pun und für 3 San bekommt man 21 Tin.

a) Wieviel San erhält man für 5 Pun?

b) Peter hat von seiner Mutter 3 Pun bekommen und soll dafür eine Torte kaufen. Er erhält vom Bäcker 9 Tin zurück.
   Wieviel hat die Torte gekostet? Gib den Preis so in Pun, San und Tin an, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist!

Aufgabe 3. Ein quaderförmiger Wasserbehälter ist 70cm lang, 50cm breit und 20cm hoch. In seinem Deckel befindet sich ein Zulaufhahn und in seinem Boden ein Ablaufhahn.

Um den leeren Behälter bei geschlossenem Ablaufhahn zu füllen, benötigt man 35 Minuten. Öffnet man zu dem Zeitpunkt, wo der Behälter vollständig gefüllt ist, zusätzlich zum Zulaufhahn auch den Ablaufhahn, dann ist der Behälter nach einer Stunde und 10 Minuten entleert.

Der Behälter sei bis 8cm unterhalb des oberen Randes gefüllt.

a) Wie lange dauert es, bis der Behälter nach Öffnen des Ablaufhahnes bei geschlossenem Zulaufhahn leer ist?

b) Wie lange dauert es, bis der Behälter nach Öffnen des Ablaufhahnes bei geöffnetem Zulaufhahn leer ist?

ADAM-RIES-Wettbewerb 1991
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir nehmen an, dass es drei natürliche Zahlen gibt, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

Wir bezeichnen die 2. Zahl mit x. Dann lässt sich wegen Bedingung (1) die 1. Zahl, wegen Bedingung (2) die 3. Zahl so darstellen, wie dies in der Tabelle festgehalten wurde. Für die Summe s dieser drei Zahlen gilt daher stets $4 \cdot x + 9 = s$.

2. Zahl	x
1. Zahl	$2 \cdot x + 6$
3. Zahl	$x + 3$
Summe	$4 \cdot x + 9$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Aus Bedingung (3) folgt in diesem Fall $4 \cdot x + 9 = 17$, also $x = 2$ (weil $4 \cdot 2 + 9 = 17$). Hieraus lassen sich die anderen beiden Zahlen leicht berechnen (vgl. Tabelle).

Durch eine Probe bestätigt man leicht, dass die Zahlen 10, 2 und 5 die Bedingungen (1), (2) und (3) tatsächlich erfüllen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Analoges Vorgehen führt in diesem Fall zu der Gleichung $4 \cdot x + 9 = 2505$, also $x = 624$ und somit zu den drei Zahlen 1254, 624 und 627.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): In diesem Fall kann es keine drei natürlichen Zahlen geben, die alle genannten Bedingungen erfüllen. Wegen (3) müsste die Summe s eine gerade Zahl sein. Der Term $4 \cdot x + 9$ ist aber stets ungerade, weil die Summe aus einer geraden Zahl $4 \cdot x$ und der ungeraden Zahl 9 immer ungerade ist.

<u>Hinweis:</u> Man kann die Lösungen von a) und b) auch durch systematisches Probieren ermitteln. Nach der Aufgabenstellung ist nur ein Existenznachweis, kein Einzigkeitsnachweis ver langt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Aus den Angaben ermitteln wir die Umrechnungen 1 Pun = (84 : 2 =) 42 Tin, 1 San = (21 : 3 =) 7 Tin.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wenn 84 Tin 2 Pun entsprechen, bekommt man für 1 Pun 42 Tin und somit 6 San. Damit erhält man für 5 Pun ($5 \cdot 6 =$) 30 San.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da 1 Pun gleich 42 Tin sind, erhält Peter von seiner Mutter umgerechnet ($3 \cdot 42 =$) 126 Tin.

Da Peter 9 Tin zurückbekommt, kostet die Torte 117 Tin. Weil 6 San 42 Tin sind, erhält man demzufolge für **1 San 7 Tin**. Wegen $117 = 84 + 28 + 5$ gilt daher

117 Tin = $2 \cdot 42$ Tin + $4 \cdot 7$ Tin + 5 Tin, also 117 Tin = 2 Pun + 4 San + 5 Tin.

Folglich kostet die Torte **2 Pun, 4 San und 5 Tin**.

(Hinweis: Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, den Preis festzuhalten, z.B. 117 Tin = 1 Pun + 10 San + 5 Tin. All diese weiteren Angaben erfüllen aber nicht die Bedingung, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich sein soll.)

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3. Wegen $70cm \cdot 50cm \cdot 20cm = 70000cm^3 = 70l$ hat der Behälter ein Volumen 70 Liter.

Wenn in 35 Minuten 70 Liter durch den Zuflusshahn fließen, dann fließen (wegen 70 : 35 = 2) **2 Liter pro Minute durch den Zulaufhahn**.

Wenn der Behälter bei geöffnetem Zu- und Ablaufhahn nach 1 Stunde und 10 Minuten, also in 70 Minuten geleert ist, dann geschieht dies mit einer resultierenden Abflussgeschwindigkeit von 1 Liter pro Minute. Demzufolge fließen bei geschlossenem Zuflusshahn **3 Liter pro Minute durch den Abflusshahn**.

Wenn der Behälter bis 8 cm unterhalb des oberen Randes mit Wasser gefüllt ist, dann enthält er wegen $70\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} \cdot (20 - 8)\text{ cm} = 42000\text{ cm}^3$ genau 42 Liter Wasser.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da bei geschlossenem Zuflusshahn 3 Liter pro Minute ab fließen, dauert es also (wegen 42 : 3 = 14) **14 Minuten**, bis das Wasser abgelaufen ist.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da bei geöffnetem Zu- und Abflusshahn die resultierende Abflussgeschwindigkeit 1 Liter pro Minute ist, dauert es also (wegen 42 : 1 = 42) **42 Minuten**, bis das Wasser abgelaufen ist.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1992

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. In der Zeit, als ADAM RIES lebte, bezahlte man mit Gulden (abgekürzt fl), Groschen (gr) und Pfennigen(pf). Es galten folgende Umrechnungen:

1 fl = 21 gr, 1 gr = 12 pf.

Ein Kaufmann hat von zwei Käufern folgende Geldbeträge empfangen: 123 fl 17 gr 9 pf und 234 fl 18 gr 7 pf.

Wie viel Geld hat er erhalten? Wandle das Ergebnis so um, dass die Pfennigangabe weniger als 12 Pfenning und die Groschenangabe weniger als 21 Groschen beträgt.

Aufgabe 2. In den Rechenbüchern von ADAM RIES findet man auch diese Aufgabe:

> Unter an den schönen Linden war ein kleiner Wurm zu finden.
> Der kroch hinauf mit aller Macht, acht Ellen richtig bei der Nacht,
> und alle Tage kroch er wieder vier Ellen dran hernieder.
> Zwölf Nächte trieb er dieses Spiel, bis dass er von der Spitze fiel
> am Morgen in die Pfütze und kühlte sich ab von seiner Hitze.
> Mein Schüler, sage mir ohne Scheu, wie hoch dieselbe Linde sei!

Gib die Höhe des Baumes in Ellen an.

Zusatz: Wie viele Meter könnten das sein? Gib an, wie die zu dieser Zahl kommst.

Aufgabe 3. Drei Bauern haben auf dem Markt Gemüse gekauft:

> Bauer A für 12 gr 4 pf,
> Bauer B für 13 fl 7 gr 11 pof,
> Bauer C für 10 fl 19 gr 6 pf.

Sie wollen das Geld so verteilen, dass jeder Bauer die gleiche Geldsumme erhält.

Gib das Ergebnis in Gulden, Groschen und Pfennigen an.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1992

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir bilden zunächst die Summen der Münzen: (123 + 234 =) 357 fl, (17 + 18 =) 35 gr, (9 + 7 =) 16 pf.

Für 16 pf schreiben wir 1 gr (16 – 12 =) 4 pf. Damit sind es (35 + 1 =) 36 gr. Dafür schreiben wir 1 fl (36 – 21 =) 15 gr, der eine Gulden wird zu den 357 fl hinzugefügt.

Somit hat der Kaufmann 358 fl 15 gr 4 pf erhalten.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Wir gehen davon aus, dass der Wurm abends seinen Weg beginnt. Nach 11 Nächten und Tage hat er eine Strecke von 11· (8 – 4) = 44 Ellen zurückgelegt. In der 12. Nacht kommen weitere 8 Ellen hinzu (ohne dass er wieder nach unten kroch). Somit hat er (44 + 8 =) 52 Ellen zurückgelegt – die Höhe der Linde.

Eine Elle kann in Anlehnung der Körperelle (Knochen am Unterarm) als 50 cm = 0,5 m angenommen werden. Damit wäre die Linde (52 · 0,5 =) 26 m hoch.

Es ist bekannt, dass in Annaberg-Buchholz zu der Zeit, als Adam Ries wirkte, 56,8 cm lang war.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Wir addieren die drei genannten Beträge und erhalten (13 + 10 =) 23 fl, (12 + 7 + 19 =) 38 gr und (4 + 11 + 6 =) 21 pf.

Damit die Anzahl der Gulden durch 3 teilbar ist, wandeln wir 2 fl in gr um,

21 fl (2 · 21 + 38 =) 80 gr 21 pf

Damit die Anzahl der Groschen durch 3 teilbar ist, wandeln wir 2 gr in pf um

21 fl 78 gr (2 · 12 + 21 =) 45 pf.

Wir teilen alle Angaben durch 3 und erhalten (21 : 3 =) 7 fl (78 : 3 =) 26 gr (45 : 3 =) 15 pf. Da 15 pf in 1 gr 3 pf umgewandelt werden können und (26 + 1 =) 27 gr in 1 fl 6 gr umgewandelt werden können, erhält jeder der drei Bauer

8 fl 6 gr 3 pf.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1993

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Eine Aufgabe aus der Feder von Adam Ries:

> „Item einer hat 20 pfundt Saffran vnd Ingwer durch eynander kost ein pfundt Safran 3 floren vnd 2 pfunt Ingwer 1 floren kaufft daraus 45 floren. Nun frage ich wie viel ytzliches pfundt ynn sonderheit gewesen sein."

Heute würden wir in unseren Rechenbüchern diese Aufgabe wie folgt formulieren:

Es hat jemand eine Menge von insgesamt 20 Pfund Safran und Ingwer durcheinander gebracht. 1 Pfund Safran kostet drei Gulden und 2 Pfund Ingwer kosten einen Gulden. Insgesamt wurden für die Gewürze 45 Gulden bezahlt.

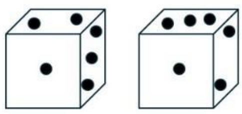
Wie viel Pfund von jeder Sorte sind durcheinandergebracht worden?

Löse diese Aufgabe!

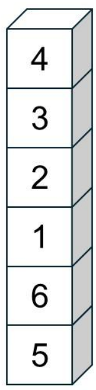
Aufgabe 2. Zu der Zeit, als Adam Ries lebte, gab es zur Angabe der Masse von eingekauften Waren nicht die bei uns jetzt üblichen Einheiten Kilogramm und Gramm, sondern die Kramergewichte Mark (nicht zu verwechseln mit unserer heutigen Währungseinheit), Lot und Quent. 3 Mark entsprachen 48 Lot und 5 Lot entsprachen 20 Quent.

a) Wie viel Quent entsprechen 2 Mark?
b) Bei einem Marktverkäufer wogen vier Brote insgesamt 7 Mark und 14 Lot. Wie viel wogen bei diesem Verkäufer sieben Brote der gleichen Sorte? Gib die Masse so an, dass die Werte der einzelnen Kramergewichte so klein wie möglich sind.

Aufgabe 3. Bildet man bei einem regulären Spielwürfel die Summe der Punkte, die sich auf je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen befinden, erhält man stets sieben Punkte. Dabei kann man zwei Arten von Würfeln unterscheiden: Der rechts abgebildete Würfel wird als rechtsdrehend, der andere als linksdrehend bezeichnet.



(Anstatt die Punkte verwenden wir auf den Würfelflächen die Anzahl der darauf sichtbaren Punkte.)

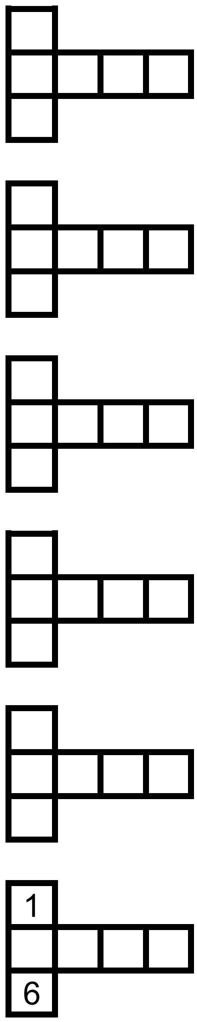


Aus sechs regulären, rechtsdrehenden, gleichartigen Würfeln soll ein sechsstöckiger Turm mit folgenden Eigenschaften gebildet werden:

(1) In Jeder Seite des Turmes kommt die Anzahl der Punkte von 1 bis 6 genau ein Mal vor.
(2) Die Anzahl der Punkte auf der Oberseite der Würfel bezeichnet das jeweilige „Stockwerk des Turmes", d.h., auf der Oberseite des ersten Würfels ist 1 Punkt, des zweiten Würfels 2 Punkte, …, des sechsten Würfels 6 Punkte.

a) Vervollständige die sechs Würfelnetze so, dass die den Netzen entsprechenden Würfel übereinandergelegt einen Turm mit den geforderten Eigenschaften ergeben.

b) Ermittle so viel wie möglich voneinander verschiedene Türme, die die genannten Eigenschaften besitzen.
(Dabei werden zwei Türme als gleich betrachtet, wenn sich nach einer Drehung des gesamten Turmes die gleiche Verteilung der Punkte ergibt.)



ADAM-RIES-Wettbewerb 1993

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir lösen die Aufgabe durch systematisches Probiere und tragen unsere Zwischenergebnisse in einer Tabelle zusammen. Da der Gesamtpreis eine ganze Zahl (in Gulden) ist, muss die Menge Ingwer eine gerade Anzahl Pfund sein.

Menge Ingwer in Pfund	Preis In Gulden	Menge Safran in Pfund	Preis on Gulden	Gesamtpreis in Gulden
2	1	20 – 2 = 18	18 · 3 = 54	1 + 54 = 55
4	2	20 – 4 = 16	16 · 3 = 48	2 + 48 = 50
6	**3**	**20 – 6 = 14**	**14 · 3 = 42**	**3 + 42 = 45**
8	4	20 – 8 = 12	12 · 3 = 36	4 + 36 = 40

Wir erkennen: Nur wenn es 6 Pfund Ingwer und 14 Pfund Safran waren, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wenn 3 Mark 48 Lot entsprechen, entspricht 1 Mark (48 : 3 =) 16 Lot. Wenn 5 Lot 20 Quent entsprechen, entspricht 1 Lot (20 : 5 =) 4 Lot.

Damit erhalten wir 2 Mark = (2 · 16 =) 32 Lot = (32 · 4 =) 128 Quent.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir rechnen die Masse in Quent um.

7 Mark 14 Lot = (7 · 16 + 14 =) 126 Lot = (126 · 4 =) 504 Quent.

Somit wog ein Brot (504 : 4 =) 126 Quent und 7 Brote (126 · 7 =) 882 Quent.

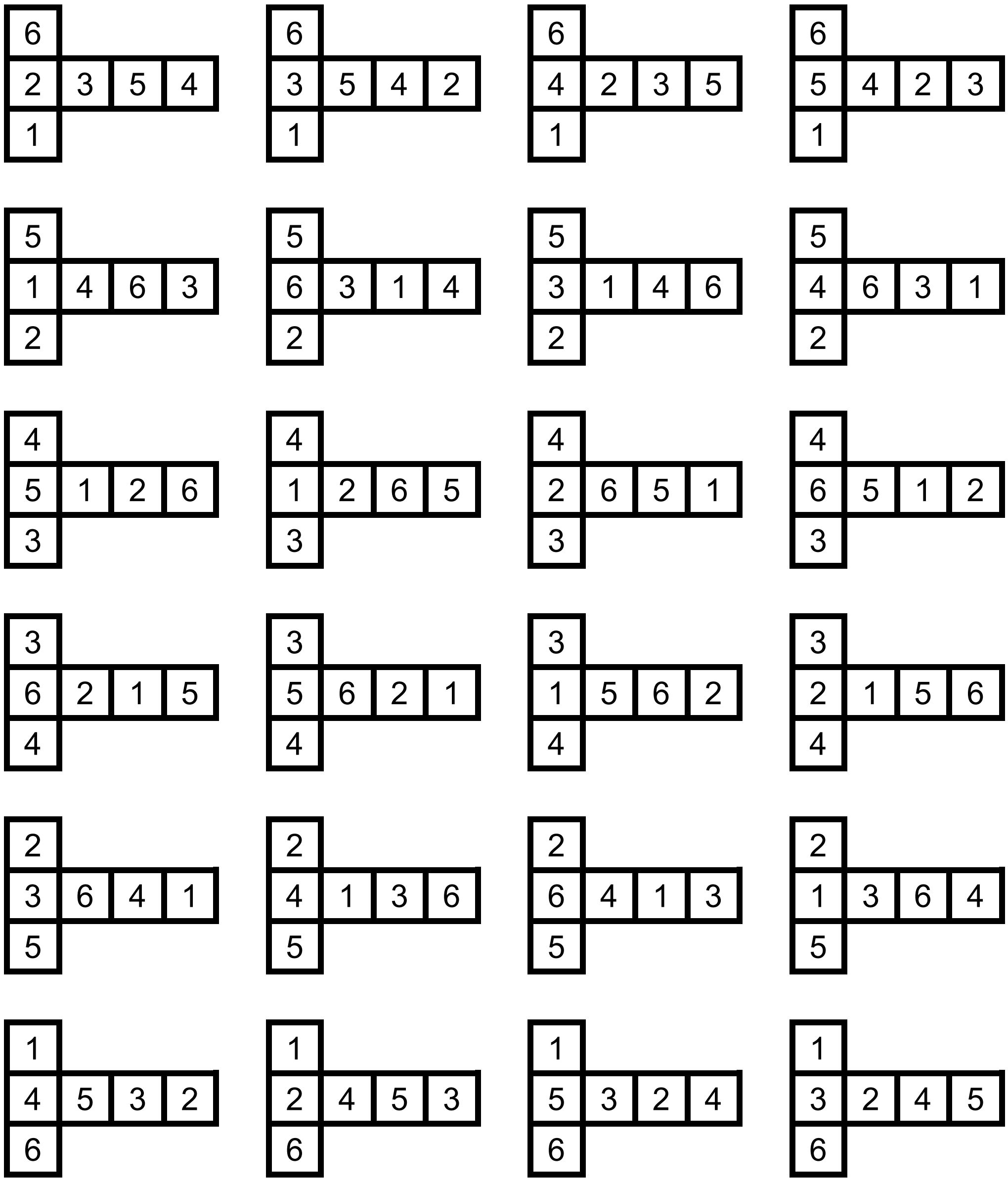
Wir können wieder umwandeln: Wegen 220 · 4 = 880, entsprechen 882 Quent 220 Lot 4 Quent. Wegen 13 · 16 = 208 entsprechen 220 Lot 4 Quent insgesamt

13 Mark 12 Lot 4 Quent.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es genügt, ein korrektes Beispiel anzugeben (linke Spalte in der folgenden Abbildung).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es gibt drei weitere Möglichkeiten (der Nachweis, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt, wurde nicht verlangt)



6 2 3 5 4 1
6 3 5 4 2 1
6 4 2 3 5 1
6 5 4 2 3 1
5 1 4 6 3 2
5 6 3 1 4 2
5 3 1 4 6 2
5 4 6 3 1 2
4 5 1 2 6 3
4 1 2 6 5 3
4 2 6 5 1 3
4 6 5 1 2 3
3 6 2 1 5 4
3 5 6 2 1 4
3 1 5 6 2 4
3 2 1 5 6 4
2 3 6 4 1 5
2 4 1 3 6 5
2 6 4 1 3 5
2 1 3 6 4 5
1 4 5 3 2 6
1 2 4 5 3 6
1 5 3 2 4 6
1 3 2 4 5 6

ADAM-RIES-Wettbewerb 1994
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Zur Zeit, als Adam Ries lebte, gab es zur Angabe der Masse von eingekauften Waren nicht die bei uns jetzt üblichen Einheiten Kilogramm und Gramm, sondern die Kramer-Gewichte Mark (nicht zu verwechseln mit unserer heutigen Währungseinheit), Lot und Quent. Dabei entsprachen 1 Mark = 16 Lot und 1 Lot = 4 Quent.

In einer von ADAM RIES erstellten Silber- und Kupferzehntrechnung der Stadt Geyer aus dem Jahre 1538 lesen wir:

Datum	abgegebene Masse an Feinsilber
12.6.1538	139 Mark 15 Lot
10.8.1538	88 Mark 8 Lot
12.9.1538	121 Mark 6 Lot
Summe	349 Mark 13 Lot

a) Zeige, dass ADAM RIES die Summe der drei Abrechnungen richtig gebildet hat, und rechne die Gesamtmenge Feinsilber in Quent um.
b) Aus der Gesamtmenge Feinsilber sollen Gulden und Groschen geprägt werden. Dabei benötigt man für die Prägung eines Guldens 3860 Quent Feinsilber, für die Prägung eines Groschens 3088 Quent.
Welche größtmögliche Anzahl von derartigen Münzen kann mit diesem Feinsilber hergestellt werden?
Bestimme alle Möglichkeiten der Münzprägung unter der Bedingung, dass das gesamte Feinsilber zur Herstellung von Münzen verarbeitet wird.

Aufgabe 2. Gegeben sind neun Quadrate mit den folgenden Seitenlängen

1. a = 72 mm
2. b = 60 mm
3. c = 56 mm
4. d = 40 mm
5. e = 36 mm
6. f = 32 mm
7. g = 28 mm
8. h = 16 mm
9. i = 4 mm

Füge diese Quadrate so zusammen, dass ein Rechteck entsteht. Fertige zur Lösungsdarstellung von diesem zusammengelegten Rechteck eine maßstäbliche Zeichnung an.

Aufgabe 3. In „Die Wunder der Rechenkunst“ von Johann Christoph Schäfer stehen folgende Verse:

Die 3 Freunde
Fritz, Bast und Hans, die sahen Geld, auf einem Tische hingezählt.
Fritz sagte darauf: „Mein Beutel enthält zweimal so viel, als dieses Geld.“
„Da habe ich dreimal so viel“, sagt Bast, „als du angeblich im Beutel hast.“
Hans wendet sich an Bast und setzt hinzu: „und ich hab‘ viermal soviel als du.“
160 Taler hatten sie alle Drei; rechne nun aus und sag es ohne Scheu,
wie viel Geld auf dem Tische wohl lag und jede Person gehabt haben mag?

Löse die im Gedicht enthaltene Rechenaufgabe.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1994
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir addieren

(139 + 88 + 121 =) 348 Mark
(15 + 8 + 6 =) 29 Lot = (1 · 16 + 13 =) 1 Mark 13 Lot.

Die Summe beträgt also tatsächlich (348 + 1 =) 349 Mark 13 Lot

Nun entsprechen 349 Mark (349 · 16 =) 5584 Lot
(5584 + 13 =) 5597 Lot entsprechen (5597 · 4 =) 22388 Quent.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da für Gulden (3860 – 3088 =) 772 Quent Feinsilber benötigt wird, ermitteln wir zunächst, wie viele Groschen möglich wären:

(22388 : 3088 =) 7 Rest 772. Es können also nicht mehr als 7 Münzen geprägt werden. Wir haben damit aber bereits eine Lösung gefunden; Für 6 Groschen und 1 Gulden wird die Menge Feinsilber benötigt.

Wir prüfen nun systematisch, ob es auch andere Münzkombinationen gibt und berechnen den verbleibenden Rest an Feinsilber, wenn nur 5, 4, 3, 2,1 oder kein Groschen geprägt werden:

Anzahl Groschen	Benötigtes Feinsilber	Verbleibendes Feinsilber	Anzahl Gulden (Division durch 3860)
5	5 · 3088 = 15440	22388 – 15440 = 7278	Nicht ohne Rest teilbar
4	4 · 3088 = 12372	22388 – 12372 = 10016	Nicht ohne Rest teilbar
3	3 · 3088 = 9264	22388 – 9264 = 13124	Nicht ohne Rest teilbar
2	2 · 3088 = 6186	22388 – 6186 = 16202	Nicht ohne Rest teilbar
1	1 · 3088 = 3088	22388 – 3088 = 19300	19300 : 3860 = 5
0	0	22388	Nicht ohne Rest teilbar

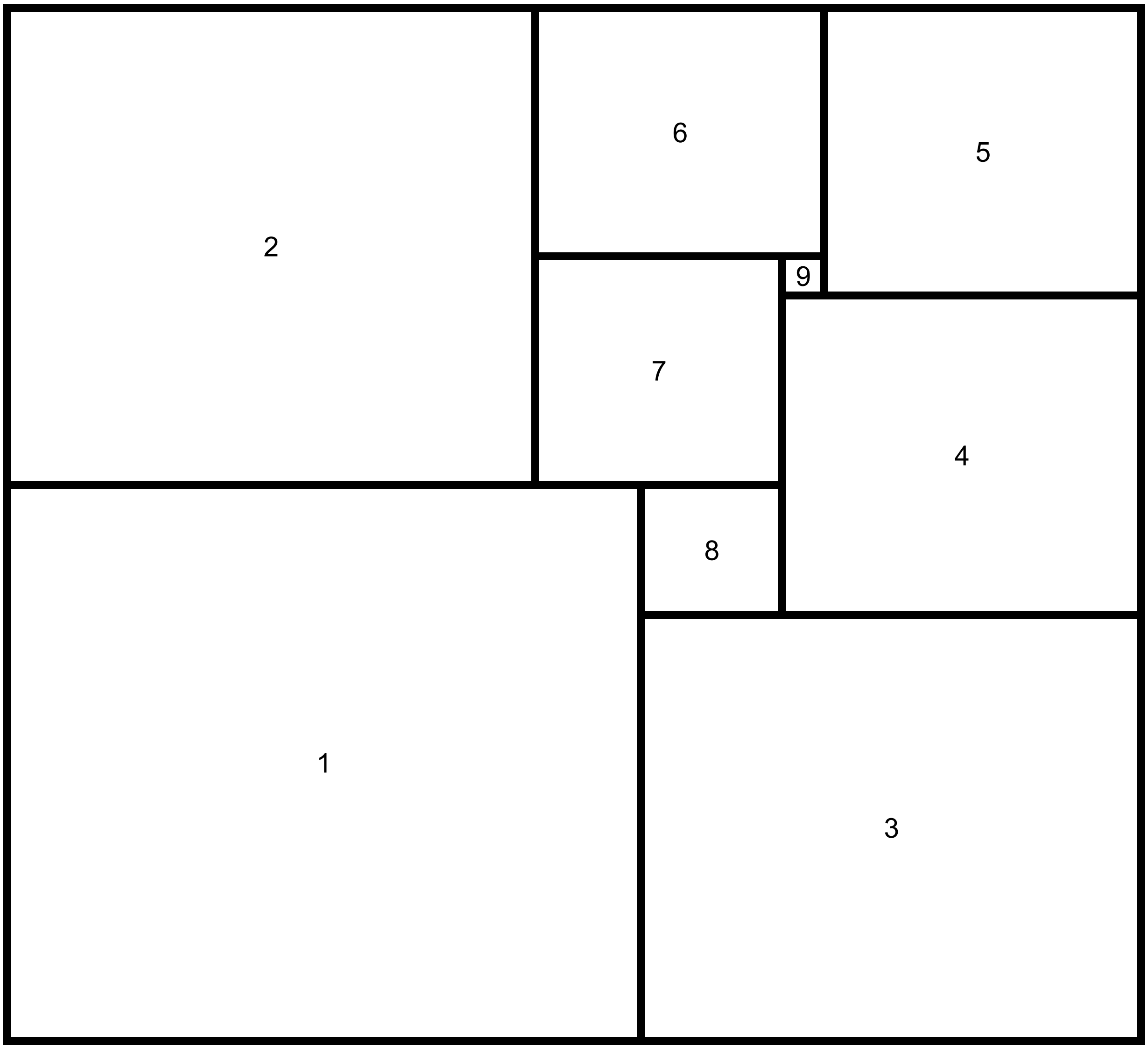
Es gibt also noch eine zweite Lösung: Für 5 Gulden und 1 Groschen wird das verfügbare Feinsilber benötigt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Es genügt laut Aufgabenstellung, ein geeignetes Rechteck mit seiner Zerlegung anzugeben.

Für die Lösungsfindung sind folgende Vorbetrachtungen hilfreich: Wir erkennen, dass die angegeben Seitenlängen alle Vielfache von 4 sind. Setzen wir 1 LE = 4 mm, so werden die Maßzahlen der Seitenlängen kleiner. Quadrat 1: 18 LE, 2: 15 LE, 3: 14 LE, 4: 10 LE, 5: 9 LE, 6: 8 LE, 7: 7 LE, 8: 4 LE, 9: 1 LE. Sie überdecken eine Fläche von

324 + 225 + 196 + 100 + 81 + 64 + 49 + 16 + 1 = 1056 LE²

Nun suchen wir ganzzahlige Zerlegungen von 1056 in zwei Faktoren. Dabei muss jeder Faktor größer als 18 sein. Dies ist nur mit 1056 = 33 · 32 möglich.



Lösungshinweise zur Aufgabe 3. Wir bezeichnen die Geldbeträge der Freunde mit den Variablen F, B und H. Für den Geldbetrag auf dem Tisch setzen wir X. Dann wissen wir aus dem Text:

$F = 2 \cdot X$
$B = 3 \cdot F$
$H = 4 \cdot B$
$F + B + H = 160$

Setzen wir in die letzte Gleichung diese Informationen ein, erhalten wir:

$F + B + H = F + B + 4 \cdot B = F + 5 \cdot B = F + 5 \cdot (3 \cdot F) = 16 \cdot F = 32 \cdot X = 160$

Deshalb ist $X = 5$, $F = 10$, $B = 30$ und $H = 120$. Diese Ergebnisse erfüllen alle Bedingungen der Aufgabenstellung, wie die Probe bestätigt:

$F = 10 = 2 \cdot 5$
$B = 30 = 3 \cdot 10$
$H = 120 = 4 \cdot 30$
$F + B + H = 10 + 30 + 120 = 160$

Die 3 Freunde
Fritz, Bast und Hans, die sahen Geld, auf einem Tische hingezählt.
Fritz sagte darauf: „Mein Beutel enthält zweimal so viel, als dieses Geld.“
„Da habe ich dreimal so viel“, sagt Bast, „als du angeblich im Beutel hast.“
Hans wendet sich an Bast und setzt hinzu: „und ich hab‘ viermal soviel als du.“
160 Taler hatten sie alle Drei; rechne nun aus und sag es ohne Scheu,
wie viel Geld auf dem Tische wohl lag und jede Person gehabt haben mag?

ADAM-RIES-Wettbewerb 1995
1. Stufe (Hausarbeit)

*Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden***.**

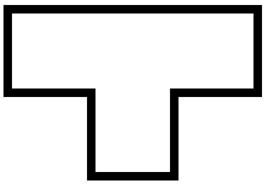
Aufgabe 1. Zur Zeit, als Adam Ries lebte, gab es in den verschiedenen deutschen Staaten unterschiedliche Währungen. Es sollen folgende Umrechnungen gelten:

5 Baseler Rappen = 4 Straßburger
8 Straßburger = 11 Würtemberger
11 Würtemberger = 14 Augsburger
7 Augsburger = 8 Wiener

a) In einem alten Rechenbüchlein von 1525 fordert ein Rechenmeister auf zu berechnen, wie viel „Wiener" es für 40 „Baseler Rappen" gibt.
Löse diese Aufgabe!

b) Auf einem Markt bietet ein Kaufmann aus Basel einen Ballen Tuch für 15 Baseler Rappen, ein Nürnberger Kaufmann den gleichen Tuchballen für 54 Schilling an. Untersuche, wer von den beiden Kaufleuten seine Ware billiger verkauft, wenn man für 3 Straßburger 13 Schilling erhält.

Aufgabe 2. Die Figur in der Abbildung soll mit genau einem Schnitt so in zwei Teilfiguren zerlegt werden, dass diese Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können. Versuche mehrere unterschiedliche Lösungen zu finden.



Fertige zur Lösungsdarstellung von jeder gefundenen Möglichkeit eine Zeichnung der Ausgangsfigur mit der Schnittlinie und (in gleicher Größe) eine Zeichnung des Quadrates mit erkennbaren Teilfiguren an.

Aufgabe 3. Ein Landwirt sagt im Gasthof der drei Schellen:

„Ich habe 100 Stück Schafe in 5 Ställen.
Sie sind in jedem andersjährig,
sind groß und stark und auch gut härig.
Im ersten und zweiten Stall sind 50 und 2;
im zweiten und dritten stehen 40 und 3, i
m dritten und vierten 30 und 4;
im vierten und fünften nur 30. – Sagt mir,
meine Freunde, nun aber gefälligst einmal,
wie viele in jedem Stalle wohl sind an der Zahl."

(Hinweis: Mit „… im ersten und zweiten Stall sind 50 und zwei; … „ ist gemeint, dass im ersten und im zweiten Stall zusammen 52 Schafe sind. Analoges gilt für die nächsten Zeilen.)

Löse die im Gedicht enthaltene Aufgabe. Gib den Lösungsweg und das Ergebnis an.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1995
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

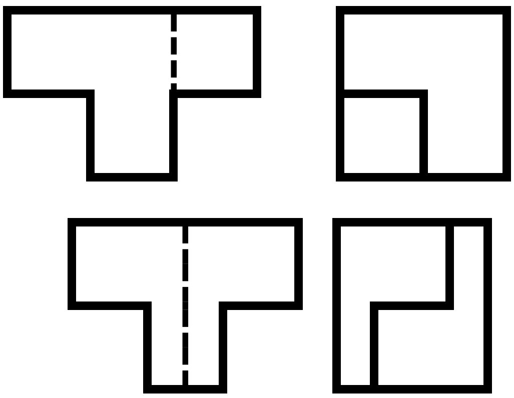
Lösungshinweise zur Aufgabe 1.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir wenden nacheinander die gegebenen Umrechnungen an:

Wegen 40 = 8 · 5 sind 40 Baseler Rappen = (8 · 4 =) 32 Straßburger.
Wegen 32 = 4 · 8 sind 32 Straßburger = (4 · 11 =) 44 Württemberger.
Wegen 44 = 4 · 11 sind 44 Württemberger = (4 · 14 =) 56 Augsburger.
Wegen 56 = 8 · 7 sind 56 Augsburger = (8 · 8 =) 64 Wiener.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Kaufmann aus Basel verkaufte seinen Ballen Tuch für (3 · 5 =) 15 Baseler Rappen, die (3 · 4 =) 12 Straßburger entsprechen. Wegen der Umrechnung 3 Straßburger = 13 Schilling und 12 = 4 · 3 entsprach der Preis (4 · 13 =) 52 Schilling.

Der Kaufmann aus Basel verkaufte also den Ballen Tuch billiger, und zwar um (54 – 52 =) 2 Schilling billiger.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Es gibt nur zwei Möglichkeiten, die Aufgabe zu lösen:



Lösungshinweise zur Aufgabe 3. Wir setzen für die Anzahl der Schafe in den Ställen 1 bis 5 die Variablen A, B, C, D und E. Dann wissen wir aus dem Text:

$$A + B = 52$$
$$B + C = 43$$
$$C + D = 34$$
$$D + E = 30$$
$$A + B + C + D + E = 100.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen können wir A + B + C = 100 – 30 = 70 ablesen.
Da aber A + B = 52 gilt, erhalten wir C = (70 – 52 =) 18.
Damit finden wir aus der dritten Gleichung D = (34 – 18 =) 16.
Damit finden wir aus der zweiten Gleichung B = (43 – 18 =) 25.
Unmittelbar daraus folgt aus der ersten Gleichung A = (52 – 25 =) 27.
Schließlich finden wir aus der vierten Gleichung E = (30 – 16 =) 14.

Wir verwenden die fünfte Gleichung als Probe: 27 + 25 + 18 + 16 + 14 = 100. Außerdem gilt tatsächlich
27 + 25 = 52 ; 25 + 18 = 43 ; 18 + 16 = 34 ; 16 + 14 = 30.

Alle Bedingungen der Aufgabe sind also erfüllt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1996
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Folgende Aufgabe aus dem 2. Rechenbuch von ADAM RIES lautet im Originaltext:

„Item ein Hoffmeister verdingt einem wirt 12 pferdt 1 Jar / mit solchen geding / sol ydem die wochen geben 2 schöffel habern / 40 punt hew vn 10 punt stro / des habern gibt man 1 schöffel fur 2 groschen 40 punt hew fur 3 groschen vn 10 punt stro fur 3 groschen.
Wieviel sind die pferdt schüldig /“

Heute würden wir in unseren Rechenbüchern diese Aufgabe wie folgt formulieren:

„Ein Hofmeister gibt einem Wirt 12 Pferde 1 Jahr lang unter Vertrag mit der Bedingung, dass er jedem Pferd in der Woche 2 Scheffel Hafer, 40 Bund Heu und 10 Bund Stroh geben soll. 1 Scheffel Hafer kosten 2 Groschen, 40 Bund Heu kosten 3 Groschen, und 10 Bund Stroh kosten 2 Groschen. Wie hoch sind die Kosten für die Pferde?“

(Zur damaligen Zeit bezahlte man mit Gulden und Groschen. Für die Umrechnung galt: 105 Groschen entsprechen 5 Gulden.)

Löse zu dieser Aufgabenstellung folgende Teilaufgaben:

a) Berechne die jährlichen Kosten (1 Jahr = 52 Wochen) für diese Pferde!
   (Gib die Geldbeträge so an, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist.)

b) Der Hofmeister hat für die Versorgung der Pferde für ein Jahr höchstens 300 Gulden zur Verfügung. Er möchte aber noch 7 weitere Pferde versorgen lassen.
   Berechne, wie viele volle Wochen der Hofmeister diese 7 Pferde zusätzlich beim gleichen Wirt in Pflege geben kann!

Aufgabe 2. Die Geschwister Andreas, Franz, Claudia und Linda besuchen öfter das neue Freizeitbad. Dabei probieren sie aus, wer am längsten tauchen kann.

Zu Hause angekommen, erzählen die Kinder ihrer Mutter über die Platzierungen bei diesem Vergleich. (Es sei vorausgesetzt, dass alle Kinder unterschiedlich lange tauchen.)

a) Folgende Aussagen werden gemacht:
   Andreas: „Wenn ich weiter so trainiere, kann ich mich um (mindestens) zwei Plätze verbessern.“
   Franz: „Nach der Summe der Platzierungen haben wir Jungen gewonnen.“
   Claudia: „Ich habe es noch nicht geschafft, besser als Franz zu sein.“
   Linda: „Ich kann noch nicht so lange tauchen wie Claudia.“

Untersuche, ob aus diesen wahren Aussagen die Mutter in der lage ist, die Reihenfolge der vier Kinder eindeutig zu ermitteln, und gib dieses gegebenenfalls an (beginne mit dem besten Taucher).

b) Am darauffolgenden Tag ergibt sich, dass für die Platzierungen im erneuten Wettkampf drei Aussagen des vorangegangenen Tages wahr sind, eine jedoch falsch ist.
Ermittle für jede mögliche falsche Aussage, ob die Mutter die Platzierungen der Kinder wieder eindeutig bestimmen kann.

Aufgabe 3. Gegeben sind 9 Domino-Steine (anstatt der Punkte geben wir den Zahlenwert der Punktanzahl an).

3	2	5	0	3	0
4	1	3	1	5	2
4	2	5	1	4	0

a) Ordne diese neun Steine so an, dass die Summe der Augenzahlen der Dominoi-Steine in allen drei Senkrechten und den beiden Diagonalen stets 15 beträgt.
Gib eine solche Anordnung an!

b) Ordne diese neun Steine nun so, dass die Summe der Augenzahlen in allen drei Senkrechten, drei Waagerechten und den beiden Diagonalen stets 15 beträgt.
Gib so viel wie möglich solcher Anordnungen an. (Dabei sollen die Anordnungen nicht aus Drehungen oder Speigelungen einzelner Domino-Steine oder des ganzen Systems auseinander hervorgegangen sein.)

c) Untersuche, wie viele verschiedene Lösungen es für die Aufgabenstellung b) gibt, und weise nach, dass es keine weiteren geben kann.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1996
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir verwenden die Abkürzungen fl für Gulden und gr für Groschen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da ein Pferd 2 Scheffel Hafer für (2 · 2 =) 4 gr, 40 Bund Heu für 3 gr und 10 Bund Stroh für 2 gr verbraucht, kostet ein Pferd je Woche (4 + 3 + 2 =) 9 gr. Somit kostet ein Pferd (52 · 9 =) 468 gr im Jahr und damit 12 Pferde (468 · 12 =) 5616 gr.

Wenn 5 fl = 105 gr gilt, so gilt 1 fl = 21 gr. Wir können also die Kosten umrechnen zu 5616 gr = (267 · 21 + 9 =) 267 fl 9 gr.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Dem Hofmeister bleiben (300 – 268 =) 32 fl und (21 – 9 =) 12 gr übrig. Das sind zusammen (32 · 21 + 12 =) 684 gr.

Da ein Pferd pro Woche Futter für 9 gr verbraucht, verbrauchen 7 Pferde insgesamt pro Woche (7 · 9 =) 63 gr. Also reicht das Geld für (684 : 63 =) < 11 Wochen, also für 10 volle Wochen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Wir kürzen die Namen mit den Anfangsbuchstaben ab: Andreas (A), Franz (F), Claudia (C) und Linda (L). Die Bezeichnung X>Y bedeutet, dass X länger tauchen kann als Y. Die Platzierung im Tauchwettbewerb schließen wir als Zahl an den Namen an.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Aus den Aussagen erkennen wir:
Wenn sich A um mindestens zwei Plätze verbessern kann, gilt A4 oder A3.
Es gilt C < F und L < C, also gilt L < C < F.
Wäre L3, dann wäre A4, C2 und F1, aber die Summe der Platzierungen der Jungen (4 + 1) ist so groß wie die Summe der Platzierungen der Mädchen (3 + 2). Somit lautet die Platzierung F1, C2, A3, L4.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir untersuchen die vier verschiedenen Möglichkeiten, welche Aussage falsch sei.

Fall 1: Ist die Aussage von Andreas falsch, so kann er sich höchstens um einen Platz verbessern. Damit Ist A4, A3 und A2 möglich. Da aus den anderen Aussagen L < C < F folgt, ist die Lösung nicht eindeutig, denn neben der Reihenfolge aus Teilaufgabe a) erüllt auch L4, C3, A2, F1 alle Bedingungen.

Fall 2: Ist die Aussage von Franz falsch, so ist die Summe der Platzierungen der Jungen gleich oder kleiner als die Summe der Platzierungen der Mädchen. Da wiederum L < C < F gilt, finden wir (wie in Teilaufgabe a) schon diskutiert) die eindeutige Reihenfolge A4, L3, C2, F1.

Fall 3: Ist die Aussage von Claudia falsch, so gilt C > F. Da aber A4 oder A3 gilt, kann die Summe der Platzierungen der Jungen 2 + 3 = 5 oder höher betragen. Damit ist die Aussage von Franz nicht erfüllbar.

Fall 4: Ist die Aussage von Linda falsch, gilt also C < L. Außerdem liefern die anderen Aussage A4 oder A3 und C < F. Für A4 genügt F1 nicht, um die Aussage von Franz zu erfüllen. Also muss A3 gelten. Dann ist aber C4. Um die Aussage von Franz zu erfüllen, erhalten wir F1, L2, A3, C4.

Also nur wenn die Aussagen von Franz oder Linda falsch sind, kann die Mutter die Reihenfolge eindeutig bestimmen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Beispiel für Teilaufgabe a):

5	1	3	0	4	2
3	2	4	1	5	0
4	0	5	2	3	1

Beispiel für Teilaufgabe b):

3	1	5	2	4	0
5	0	3	2	4	1
4	2	3	0	5	1

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Für diese Aufgabenstellung interessieren nur die Gesamtaugenzahlen jedes Domino-Steines, das sind die Zahlen 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7. Die Lösung zu Teilaufgabe b) lässt sich nun so zusammenfassen:

4	7	4
5	5	5
6	3	6

Wir unterscheiden die möglichen Belegungen nach der Lage der Zahl 7.

Fall 1: Eine Eckzahl sei 7. Dann gibt es drei Linien (eine Senkrechte, eine Waagerechte und eine Diagonale), die die 7 enthält. Um die Summe 15 zu erzeugen, müssen zu jeder dieser Linien noch die Summe 8 addiert werden. Aus den verfügbaren Zahlen gibt es aber nur 2 Varianten, die Teilsumme 8 zu erzeugen: 3 + 5 = 4 + 4 = 8. Also kann es keine Belegung der geforderten Art geben.

Fall 2: Die 7 liegt im Mittenfeld. Dann gibt es sogar vier Linien, die die Zahl 7 enthalten. Analog zu Fall 1 ist eine solche Belegung nicht möglich.

Fall 3: Die Zahl 7 liegt auf einem mittleren Randfeld, z.B. wie oben in der ersten Waagerechten (steht die 7 auf einen anderen Randfeld, kann es durch Drehung in diese Position gebracht werden). Dann dürfen die zwei Felder mit 6 nicht in einer Linie der 7 stehen. Dafür gibt es die Möglichkeiten

	7	
6		6

	7	
6		
		6

	7	
6		6

Im linken Beispiel erhalten wir in eindeutiger Weise eine Belegung, die jedoch nicht den Bedingungen genügt, da nun nur noch zwei 4 und zwei 5 zur Verfügung stehen:

	7	
6	3	6
	5	

Im mittleren Beispiel kann die obere Waagerechte nur durch 4 4 oder 3 5 ergänzt werden. In beiden Fällen lässt sich das Quadrat nicht mehr gemäß den Bedingungen ausfüllen:

4	7	4
6		
5	?	6

3	7	5
6		
?		6

Im rechten Beispiel finden wir in eindeutiger Weise eine Belegung:

4	7	4
5	5	5
6	3	6

Da alle Domino-Steine mit gleicher Augensumme verschieden sind, gibt es jeweils folgende Möglichkeiten der Belegung:

Verteilung von 3 Steinen mit der Augenzahl 5 auf 3 Felder: 6 Möglichkeiten.
Verteilung von 2 Steinen mit der Augenzahl 4 auf 2 Felder: 2 Möglichkeiten.
Verteilung von 2 Steinen mit der Augenzahl 6 auf 2 Felder: 2 Möglichkeiten.

Insgesamt sind es (6 · 2 · 2 =) 24 verschiedene Belegungen.

Allerdings wird jede Möglichkeit durch 2 gespiegelte Belegungen repräsentiert, so dass es nur (24 : 2 =) 12 verschiedene Bedingungen gibt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1997
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden **.**

Aufgabe 1. Folgende Aufgabe aus dem im Jahre 1522 gedruckten 2. Rechenbuch von Adam Ries lautet im Originaltext:

> *„Item einer 5 wochen 9 arbeiter / vnd gibt einem des Tages 14 pfennig“*

Heute würden wir in unseren Rechenbüchern diese Aufgabe wie folgt formulieren: Jemand hat 5 Wochen lang 9 Arbeiter beschäftigt und gibt jedem von ihnen pro Tag 14 Pfennige.

(Zur damaligen Zeit bezahlte man unter anderem mit Gulden, Groschen und Pfennigen.)

Für die Umrechnung galt: 2 Gulden entsprechen 42 Groschen
5 Groschen entsprechen 60 Pfennige.

Löse zu dieser Aufgabenstellung folgende Teilaufgaben:

a) Wie hoch ist der Wochenlohn eines Arbeiters, wenn man berücksichtigt, dass im 16. Jahrhundert jeden Tag gearbeitet wurde? Wandle den Geldbetrag so um, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist!

Jeder Arbeiter erhält nach 5 Wochen seinen Lohn für diesen Zeitraum ausgezahlt. Der Handwerksmeister hat in seinem Geldbeutel eine unbekannte Anzahl von Münzen (der drei Sorten) im Gesamtwert von 19 Gulden, 2 Groschen und 3 Pfennigen.

b) Untersuche, ob der Geldbetrag des Meisters reicht. Jedem Arbeiter seinen Lohn auszuzahlen!

c) Die Zahlung des Lohnes erfolgt so, dass die Anzahl der ausgezahlten Geldstücke kleinstmöglich ist und kein Arbeiter wechselmünzen benötigt.
Ermittle die Anzahl der Münzen, die der Meister vor der Auszahlung mindestens in seinem Geldbeutel hat!

Aufgabe 2. Eine natürliche Zahl heißt „symmetrisch“, wenn sie von links nach rechts und von rechts nach links gelesen die gleiche Zahl ergibt (z.B. 33; 4334; 14841).

a) Gib die kleinste und die größte dreistellige symmetrische Zahl an!
Ermittle die Anzahl aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

b) 15851 ist eine fünfstellige symmetrische Zahl.
Ermittle die beiden nächstgrößeren symmetrischen Zahlen.

c) Weise nach, dass es unter je 11 aufeinanderfolgenden dreistelligen Zahlen (mindestens) eine symmetrische Zahl gibt!
Untersuche diesen Zusammenhang für vierstellige und fünfstellige Zahlen!

Aufgabe 3. Von 16 gleich großen quadratischen Kärtchen haben jeweils genau vier die gleiche Farbe.

a) Die 16 Kärtchen sollen zu einem großen Quadrat zusammengefügt werden, so dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der Farben genau einmal vorkommt. Gib zwei solche Anordnungen an!

b) Nun wird auf jede der Kärtchen noch einer der Zahlen 1 bis 4 geschrieben, und zwar so, dass die vier Kärtchen gleicher Farbe genau die Zahlen 1 bis 4 erhalten.
Die 16 Kärtchen sollen nun wieder zu einem großen Quadrat zusammengefügt werden, so dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der Farben und jede der Zahlen genau einmal vorkommt. Gib zwei solche Anordnungen an!

c) Untersuche, ob sich die Anzahl aller möglichen Anordnungen zum Legen eines großen Quadrates in Teilaufgabe a) durch das Beschriften der farbigen Karten mit den Zahlen 1 bis 4 (Teilaufgabe b) verändert! Begründe deine Entscheidung!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1997
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir kürzen die Münzangaben mit fl für Gulden, gr für Groschen und pf für Pfennige ab. Wir vereinfachen die Umrechnungen mit

1 fl = (42 : 2 =) 21 gr und 1 gr = (60 : 5 =) 12 pf.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Wochenlohn ergibt sich als (7 · 14 =) 98 pf, die wir wegen (8 · 12 =) 96 in 8 gr 2 pf umwandeln können.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir müssen für 5 Wochen und 9 Arbeiter den Gesamtlohn berechnen, wenn ein Wochenlohn 8 gr 2 pf beträgt, also (5 · 9 · 8 =) 360 gr und (5 · 9 · 2 =) 90 pf. Laut Umrechnung können wir 90 pf als 7 gr 6 pf schreiben. Wegen (17 · 21 =) 357 können wir (360 + 7 =) 367 gr als 17 fl 10 gr schreiben.

Also beträgt der Gesamtlohn 17 fl 10 gr 6 pf. Dieser Wert ist kleiner als der Geldbetrag, den der Meister mit sich führt. Er kann ihn also auszahlen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Jeder Arbeiter erhält für 5 Wochen den Wochenlohn von 8 gr 2 pf, das sind (5 · 8 =) 40 gr und (5 · 2 =) 10 pf. Für 40 gr können wir auch 1 fl 19 gr schreiben. Somit erhält jeder Arbeiter Lohn, der mit 30 Münzen (1 fl, 19 gr, 10 pf) bezahlt werden kann.

Für die Auszahlung des Lohns benötigt der Meister also (9 · 30 =) 270 Münzen.

Nach Teilaufgabe 1b wissen wir, dass der Gesamtlohn 17 fl 10 gr 6 pf betrug, im Beutel aber 19 fl 2 gr 3 pf waren, was wir als 18 fl 23 gr 3 pf bzw. 18 fl 22 gr 15 pf schreiben können. Also sind im Beutel noch Münzen im Gesamtwert von 1 fl 12 gr 9 pf, wozu insgesamt (1 + 12 + 9 =) 22 Münzen erforderlich sind.

Somit waren mindestens (270 + 22 =) 292 Münzen im Geldbeutel des Meisters.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die kleinste dreistellige symmetrische Zahl ist 101, die größte dreistellige symmetrische Zahl lautet 999.

Für jede Hunderterstelle 1, 2, …, 9 gibt es 10 dreistellige symmetrische Zahlen. Sei nämlich die Hunderterstelle a, so ist aba eine symmetrische Zahl, egal welchen Wert die Ziffer b annimmt. Also gibt es (9 · 10=) 90 dreistellige symmetrische Zahlen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Die nächsten symmetrischen Zahlen lauten 15951 und 16061. Würden wir dagegen die Einer- oder Zehnerstelle erhöhen, erhöht sich die Zahl um 10000 oder 1000.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es sei aba eine dreistellige symmetrische Zahl mit $a \neq 0$.
Ist $b \neq 9$, so lautet die nächstgrößere symmetrische Zahl a(b+1)a und ihre Differenz ist

$$a \cdot 100 + (b + 1) \cdot 10 + a - a \cdot 100 - b \cdot 10 - a = 10.$$

Ist dagegen $b = 9$, so ist die nächstgrößere symmetrische Zahl $(a+1)0(a+1)$ und die Differenz beträgt

$$(a + 1) \cdot 100 + a + 1 – a \cdot 100 – 90 – a =100 – 90 + 1 =11$$

Somit ist der Abstand von zwei dreistelligen symmetrischen Zahlen höchstens 11, d.h. unter 11 aufeinander folgenden Zahlen sind mindestens zwei symmetrische Zahlen.

Wir betrachten vierstellige symmetrische Zahlen der Form abba mit $a \neq 0$.

Ist $b \neq 9$, so lautet die nächste symmetrische Zahl $a(b+1)(b+1)a$ und der Abstand beträgt:

$$a \cdot 1000 + (b + 1) \cdot 110 + a – a \cdot 1000 – b \cdot 110 – a = 110$$

Ist dagegen $b = 9$, so lautet die nächstgrößere symmetrische Zahl $(a+1)00(a+1)$ und der Abstand beträgt:

$$(a + 1) \cdot 1001 – a \cdot 1001 – 990 = 11$$

Somit ist der Abstand von zwei vierstelligen symmetrischen Zahlen höchstens 110, d.h. unter 110 aufeinander folgenden Zahlen sind mindestens zwei symmetrische Zahlen.

Wir betrachten nun fünfstellige symmetrische Zahlen der Form abcba mit $a \neq 0$.

Ist $c \neq 9$, so lautet die nächste symmetrische Zahl $ab(c+1)ba$ und der Abstand beträgt:

$$a \cdot 10001 + b \cdot 1010 + (c + 1) \cdot 100 – a \cdot 10001 – b \cdot 1010 – c \cdot 100 = 100$$

Ist $c = 9$ und $b \neq 9$, so lautet die nächstgrößere symmetrische Zahl $a(b+1)0(b+1)a$ und der Abstand beträgt:

$$a \cdot 10001 + (b + 1) \cdot 1010 – a \cdot 10001 – b \cdot 1010 – 900 = 110$$

Ist $c = 9$ und $b = 9$, so lautet die nächstgrößere symmetrische Zahl $(a+1)000(a+1)$ und der Abstand beträgt:

$$(a + 1) \cdot 10001 – a \cdot 10001 – b \cdot 9090 – 900 = 11.$$

Somit ist der Abstand von zwei fünfstelligen symmetrischen Zahlen höchstens 110, d.h. unter 110 aufeinander folgenden Zahlen sind mindestens zwei symmetrische Zahlen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3. Wir verwenden die vier Farben Blau (b), Gelb (g), Rot (r) und Schwarz (s).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Beim Legen der Karten kann man folgende systematische Vorgehensweise wählen:

1. Legen von vier verschiedenfarbigen Karten in eine Diagonale.
2. Legen einer Karte mit der Farbe der inneren Diagonalenfelder auf einen freien Eckplatz.
3. Schrittweises (eindeutiges) Legen der anderen Karten nach den Bedingungen der Aufgabe.

Zwei Möglichkeiten:

b	r	s	g
s	g	b	r
g	s	r	b
r	b	g	s

b	g	s	r
r	s	g	b
g	b	r	s
s	r	b	g

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir bezeichnen die Karten mit Farbe und Zahl wie bei b1 = Farbe blau und Zahl 1. Beim Legen der Karten kann man wieder systematisch vorgehen:

1. Legen einer Variante wie in Aufgabe a).
2. Ersetzen der Karten auf den Diagonalen durch gleichfarbige Karten mit unterschiedlichen Zahlen.
3. Ersetzen einer weiteren Eckkarte durch eine gleichfarbige Karte mit einer Zahl aus dem Inneren der Diagonalen.
4. Schrittweises (eindeutiges Ersetzen gleichfarbiger Karten nach den Zahlenbedingungen.

b1	r3	s4	g2
s4	g2	b1	r3
g2	s4	r3	b1
r3	b1	g2	s4

b2	g4	s3	r1
r3	s1	g2	b4
g1	b3	r4	s2
s4	r2	b1	g3

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c: Durch das Beschriften der Karten mit Zahlen werden die vier gleichfarbigen Karten unterscheidbar. Zu jeder Variante aus Teilaufgabe a) erhält man damit mehrere Möglichkeiten durch Verwendung der Zahlenkarten.

Also gibt es insgesamt mehr Möglichkeiten,

ADAM-RIES-Wettbewerb 1998
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Im zweiten Rechenbuch von ADAM RIES, das 1522 erschienen ist, sind Aufgaben zum „Warentausch" gestellt. Zwei Händler mit unterschiedlichen Waren wollen diese tauschen. In unserer heutigen Sprache würde man die Aufgabe wie folgt formulieren (Zahlen leicht geändert):

Zwei wollen miteinander tauschen. Einer hat Seide, von der 1 Pfund 2 Gulden und 8 Groschen kostet. Der andere hat 15 Stück Samt – davon kostet jedes Stück 18 Gulden und 12 Groschen.

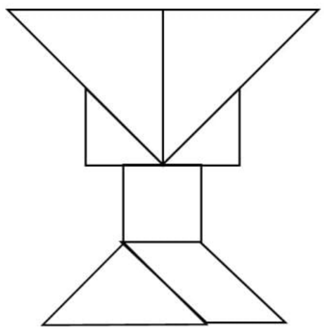
Zur Zeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man mit Gulden und Groschen. Für einen Gulden erhielt man 21 Groschen, Löse folgende Aufgaben:

a) Berechne, wie viel Pfund Seide man für 50 Gulden erhält!

b) Wie viel Pfund Seide muss der erste dem zweiten Händler für den gesamten Samt geben?

c) An einem anderen Tag haben beide Händler für ihre Waren einen höheren Preis festgesetzt, der Samthändler um 50 Groschen je Stück. Es werden 120 Pfund Seide für 15 Stück Samt getauscht.
Berechne, um wie viel Groschen der Händler den Preis für 1 Pfund Seide erhöht hat!

Aufgabe 2. Die in Abb. 1 dargestellt Figur ist aus fünf Dreiecken und zwei Vierecken zusammengesetzt.



a) Setze die Teilfiguren so zusammen, dass eine Quadratfläche entsteht. Fertige zur Lösungsdarstellung von dem so zusammengesetzten Quadrat eine maßstäbliche Zeichnung an.

b) Untersuche, ob es möglich ist, aus den Teilfiguren eine Rechteckfläche zusammenzusetzen, die keine Quadratfläche ist. Fertige gegebenenfalls eine maßstäbliche Zeichnung an.

c) Die längere Seite eines Rechteckes soll doppelt so lang sein wie die längste aller in den Teilfiguren vorkommenden Seiten.

Überzeuge dich, dass es nicht möglich ist, aus den vorgegebenen Teilfiguren genau ein solches Rechteck zusammenzusetzen.

Teile genau eine der Teilfiguren so in zwei Figuren, dass sich ein derartiges Rechteck zusammensetzen lässt. Fertige eine maßstäbliche Zeichnung dieses Rechtecks an. Suche nach unterschiedlichen Lösungen!

Aufgabe 3. Vier Schüler mit den Nachnamen Aurich, Bruchholz, Colditz und Demmler sowie den Vornamen Enrico, Franz, Gina und Hans haben sich mit unterschiedlichem Erfolg am Adam-Ries-Wettbewerb (ARW) beteiligt. Am Hausaufgabenwettbewerb nahmen alle Schüler teil, am Klausurwettbewerb der 1. Stufe nur noch drei. Zwei von ihnen konnten sich zur 2. Stufe qualifizieren, von denen einer sogar an der dritten Stufe des ARW teilnahm.

Folgendes ist bekannt:

(1) Hans war zum Klausurwettbewerb der 1. Stufe krank. Er geht mit Aurich in eine Klasse, während Colditz in einer anderen Klasse lernt.

(2) Franz und Colditz haben sich in der Arbeitsgemeinschaft „Mathematik" kennengelernt.

(3) Demmler konnte nur am Hausaufgabenwettbewerb teilnehmen. Franz schaffte die Teilnahme an einer höheren Stufe des ARW als Aurich.

(4) Gina war traurig, weil sie nicht an der 3. Stufe teilnehmen konnte. Aurich tröstete sie.

a) Weise nach, dass sich aus diesen vier Angaben die vollständigen Namen der Schüler eindeutig ermitteln lassen und gib diese an!

b) Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen vier Angaben auch die Teilnahmen an den verschiedenen Stufen des ARW eindeutig zu ermitteln!

c) Ersetze die Aussage (2) durch folgende Aussage:

„(2*) Franz und Colditz haben sich zur zweiten Stufe des ARW kennengelernt."

Untersuche, ob es nun möglich ist, aus de Aussagen (1), (2*), (3) und (4) die Teilnehmer an den verschiedenen Stufen des ARW eindeutig zu ermitteln, und gib diese gegebenenfalls an!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1988
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir kürzen Gulden mit fl und Groschen mit gr. ab

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Aufgrund der Umrechnung 1 fl = 21 gr entsprechen 50 fl insgesamt (50 · 21 =) 1050 gr. Da 1 Pfund Seite 2 fl 8 gr = (2 · 21 + 8 =) 50 gr kostet, erhält man für 1050 gr insgesamt (1050 : 50 =) 21 Pfund Seide.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da 1 Stück Samt 18 fl 12 gr kostet, kosten 15 Stück Samt (15 · 18 =) 270 fl und (15 · 12 =) 180 gr. Für 270 fl schreiben wie (270 · 21 =) 5670 gr. Insgesamt kosten 15 Stück Samt also (5670 + 180 =) 5850 gr.

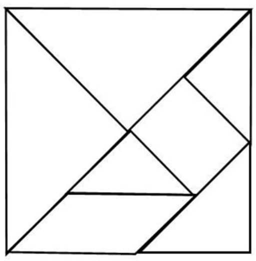
Somit erhält man für 15 Stück Samt (5850 : 50 =) 117 Pfund.

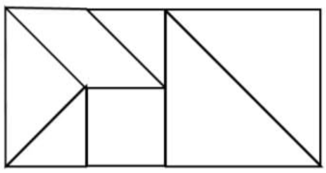
Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Da für jedes Stück Samt der Preis um 50 gr erhöht wurde, erhöhte sich der Gesamtpreis um (15 · 50 =) 750 gr. Mit dem Ergebnis von Teilaufgabe c) wissen wir, dass die 15 Stück Samt nun (5850 + 750 =) 6600 gr kosten. Da insgesamt 120 Pfund Seide eingetauscht wurden, kostete 1 Pund Seide nun (6600 : 120 =) 55 gr.

Gegenüber dem vorherigen Preis wurde der Preis für ein Pfund Seide um (55 – 50 =) 5 gr erhöht.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Für diese Aufgabe ist es günstig, sich die Teile aufzuzeichnen und auszuschneiden. Dann lassen sich die Lösungen experimentell finden.

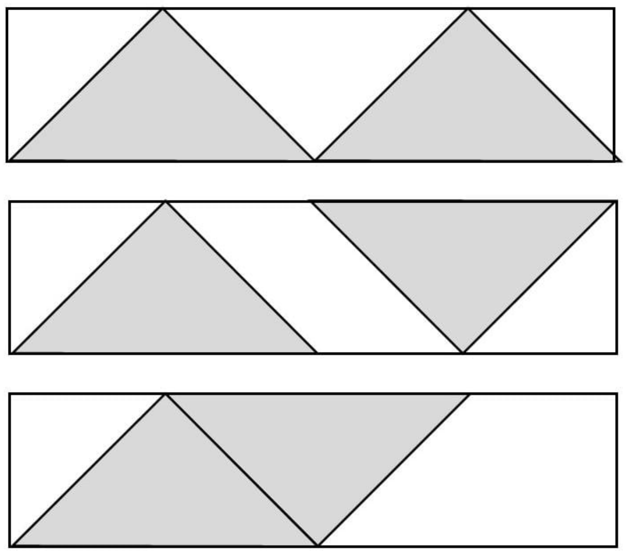
Lösungshinweise zu den Teilaufgaben a) und b):



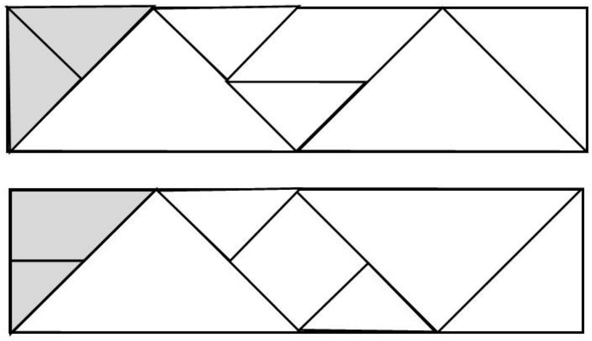


Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Die längste Seite einer Teilfigur ist die dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite des großen Dreiecks (das zweimal in der Figur vorkommt. Wir überzeugen uns, dass es nur drei mögliche Anordnungen dieser Dreiecke in den geforderten Rechtecken gibt.

In keinen dieser Fälle gelingt es, die anderen Teilfiguren (insbesondere das Quadrat und das Parallelogramm) zu platzieren.



Wenn man dagegen das Quadrat in zwei Dreiecke oder das Parallelogramm in ein Dreieck und ein Trapez teilt, gelingt die geforderte Zusammensetzung.



Lösungshinweise zur Aufgabe 3. Wir kürzen die Vornamen und die Nachnamen mit den entsprechenden Großbuchstaben ab (also E, F, G, H und A, B, C D). Wir schreiben zum Beispiel E = A, wenn der vollständige Name Enrico Aurich wäre, und E <> A, wenn Enrico nicht Aurich heißt.

Außerdem bezeichnen wir die Stufen des Adam-Ries-Wettbewerbs (ARW) mit SIH, SIK, SII und SIII.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es ist Folgendes bekannt.

Aus (1) folgt: H <> A und H <> C, außerdem H nicht in SIK
Aus (2) folgt: F <> C
Aus (3) folgt: **H = D**, F <> A
Also folgt, da nach (2) F <> C und nach (3) F <> D, F <> A → **F = B**
Aus (4) folgt: G <> A.
Also folgt, da nach (3) G <> D und G <> B → **G = C**
Es verbleibt **E = A**.

Aus den Angaben konnten also die Vor- und Nachnamen eindeutig zugeordnet werden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir wissen bereits, dass
- HD nur an SIH teilnahm,
- FB eine höhere Stufe als EA erreichte und deshalb EA nicht an SIII teilnahm,
- GC nicht an SIII teilnahm.

Also nahm FB an SIII und damit auch an SII teil.

Wer von den beiden EA und GC nicht an II teilnahm, kann jedoch aus den gegebenen Aussagen nicht ermittelt werden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Mit der Aussage (2*) ist nun ersichtlich, dass sowohl FB als auch GC an SII teilnahm. Da es nur zwei der vier Schüler in die Stufe SII schafften, sind die Aussagen vollständig:

HD in SIH, EA in SIK, GC in SII und FB in SIII (sowie jeweils in den darunter liegenden Stufen.

ADAM-RIES-Wettbewerb 1999

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1. Im zweiten Rechenbuch von ADAM RIES, das 1522 erschienen ist, sind einige Aufgaben zum „Warenkauf" gestellt. Unter anderem steht folgende Aufgabe:

„Einer kauft 3060 Ochsen. Er gibt für einen Ochsen 3 Gulden, 18 Groschen."

Zur Zeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man mit Gulden und Groschen. Für einen Gulden erhielt man 21 Groschen.

Löse zu dieser Aufgabenstellung folgende Teilaufgaben:

a) Berechne den Preis, den der Bauer bezahlen muss! (Gib den Geldbetrag so an, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist.)

b) Berechne, wie viele Ochsen der Bauer für 46 Gulden und 6 Groschen kaufen könnte!

c) Zusätzlich formulierte Ries in seiner Aufgabe: „Für je 100 bezahlte Ochsen bekommt er jeweils drei Ochsen geschenkt". Trotzdem geht er mit 3060 Ochsen vom Viehmarkt. Berechne, wie viele Gulden er dadurch einspart!

Aufgabe 2. ALBRECHT DÜRER (1471 – 1528) hat auf seinem Kupferstich „Melancolia I" ein Zahlenquadrat dargestellt (vg. Abb.) Jeder der Zahlen 1 bis 16 ist genau einmal so in die 4x4 Felder eingetragen, dass sich in jeder der vier Zeilen, in jeder der vier Spalten und auch in jeder der beiden Diagonalendie gleiche Zahlensumme ergibt. Überprüfe.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

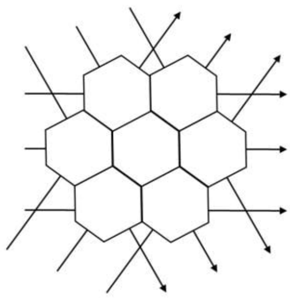
Solch ein Zahlenquadrat nennt man auch „Magisches Quadrat". ADAM RIES hat im zweiten Rechenbuch unter anderem ein Verfahren angegeben, wie man magische Quadrate konstruieren kann.

a) Bilde ein magisches Quadrat aus 3x3 Feldern, in dem jede der Zahlen 1 bis 9 genau einmal vorkommt.

b) Nebenstehende Abb. zeigt ein Quadrat aus 4x4 Feldern, in dem bereits einige Felder gegeben sind. Trage in die freien Felder die noch fehlenden Zahlen von 1 bis 16 so ein, dass ein magisches Quadrat entsteht.

		4	15
12	7		6
8	11		

c) Nebenstehende Abb. zeigt eine Anordnung von sieben regelmäßigen Sechsecken.



Untersuche, ob es möglich ist, jede der Zahlen 3 bis 9 so in die Felder einzutragen, dass die Summe in jeder der drei Waagerechten sowie in jeder der sechs Schrägen (gekennzeichnete Linien) gleich sind. Begründe!

Untersuche, ob es möglich ist, sieben zusammenhängende natürliche Zahlen so in die Felder einzutragen, dass die Summen jeder der drei Waagerechten sowie in jeder der sechs Schrägen gleich sind.

Aufgabe 3. Anna, Bianca, Carla, Diana und Elisa sind mit dem Fahrrad auf Adam-Ries-Tour von Annaberg über Erfurt nach Staffelstein unterwegs. Beim Radeln denken sie sich mathematische Knobeleien aus, die ihr nun lösen sollt. (Hinweis: Kürze zum Lösen der Aufgaben die Namen mit ihren Anfangsbuchstaben ab.)

Aufgabe 3.1. Die fünf Mädchen fahren hintereinander.

a) Anna fährt als erste und Bianca als zweite. Die drei anderen Mädchen fahren in ständig wechselnder Reihenfolge.
Schreibe alle möglichen Reihenfolgen auf (z.B. ABCDE; AB...; ...)!

b) Anna fährt weiterhin als erste. Nun aber fahren die vier anderen Mädchen in ständig wechselnder Reihenfolge hinter Anna.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen ergeben sich nun?

c) Danach fahren alle fünf Mädchen in ständig wechselnder Reihenfolge, aber immer Elisa und Bianca unmittelbar hintereinander.
Wie viele verschiedenen Reihenfolgen sind nun insgesamt möglich?

Aufgabe 3.2. Die Mädchen übernachten in Jugendherbergen. Wegen verschiedener Anzahlen der Betten in den Räumen müssen sich die fünf ständig neu gruppieren.

a) In Erfurt stehen ihnen ein Raum mit drei Betten und ein Raum mit zwei Betten zur Verfügung.
Schreibe alle verschiedenen Möglichkeiten der Verteilung in die Räume auf. Wie viele ergeben sich insgesamt?

b) In Staffelstein stehen ihnen ein Raum mit vier Betten und ein Raum mit zwei Betten zur Verfügung.
Wie viele verschiedenen Möglichkeiten der Verteilung in die Räume ergeben sich insgesamt? Begründe!

ADAM-RIES-Wettbewerb 1999
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir verwenden die Abkürzungen fl für Gulden und gr für Groschen. Es gilt 1 fl = 21 gr.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Für 3060 Ochsen muss der Bauer (3060 · 3 =) 9180 fl und (3060 · 18) = 55080 gr bezahlen. Um die Anzahl der gr in fl auszudrücken, erkennen wir (2622 · 21 =) 55062. Somit sind 55080 gr gleich viel wie 2622 fl 18 gr.

Also muss der Bauer insgesamt (9180 + 2622 =) 11802 fl und 18 gr bezahlen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Weil 1 Ochse (3 · 21 + 18 =) 81 gr kostet und 46 fl 6 gr in (46 · 21 + 6 =) 972 gr umgerechnet werden können, kann der Bauer für 46 fl 6 gr insgesamt (972 : 81 =) 12 Ochsen kaufen.

Um die Division durch 81 zu vermeiden, können wir auch schrittweise die Anzahl ermitteln:

1 Ochse kostet	3 fl 18 gr.
2 Ochsen kosten	(2 · 3 =) 6 fl und (2 · 18 =) 36 gr, entspricht 7 fl 15 gr
4 Ochsen kosten	(2 · 7 =) 14 fl und (2 · 15 =) 30 gr, entspricht 15 fl 9 gr

Um auf 46 fl 9 gr zu kommen, vermuten wir, dass der Kauf von 12 Ochsen möglich wäre. Tatsächlich finden wir

12 Ochsen kosten (3 · 15 =) 45 fl und (3 · 9 =) 27 gr, entspricht 46 fl 6 gr.

Der Bauer kann für 46 fl 6 gr insgesamt 12 Ochsen kaufen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wenn der Bauer für 100 Ochsen bezahlt, erhält er 103 Ochsen.

Wegen 29 · 103 = 2987 < 3060 < 30 · 103 = 3090 hat der Bauer 29-mal volle Hundert Ochsen und 73 weitere Ochsen erhalten. Er musste dafür aber

für 29 volle Hundert Ochsen	(29 · 8100 =) 234900 gr
und für 73 Ochsen	(81 · 73 =) 5913 gr

bezahlen, insgesamt also (234900 + 5913 =) 240813 gr, das entspricht 11467 fl 6 gr. Da er laut Teilaufgabe 1a) 11802 fl 18 gr bezahlt hätte, sparte er (11802 – 11467 =) 335 fl und (18 – 6 =) 14 gr.

Der Bauer sparte 335 fl 14 gr.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es genügt die Angabe eines korrekten magischen Quadrates (ohne Herleitung). Es gibt genau (bis auf Drehungen oder Spiegelungen) ein magisches Quadrat der Ordnung 3:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Zunächst ermitteln wir die Zeilen-, Spalten- bzw. Diagonalensumme. Da insgesamt die Zahlen von 1 bis 16 zu verwenden sind, beträgt die Gesamtsumme

1 + 2 + 3 + … + 16 = 136.

Diese Summe wird gleichmäßig auf 4 Zeilen (oder auch auf 4 Spalten) verteilt, so dass die magische Summe (136 : 4 =) 34 beträgt. Nun füllen wir einige Felder aus, für die die Belegung bereits eindeutig ist. Wir bezeichnen die Zeilen mit A, B, C, D und die Spalten mit a, b, c, d. Die Abkürzung Ad beschreibt dann den Wert im Feld in der Zeile A und in der Spalte d (hier also Ad = 15).

A	***1***	***14***	4	15
B	12	7	***9***	6
C	***13***	***2***		
D	8	11		
	a	b	c	d

1. Es gilt in Zeile B: 12 + 7 + Bc + 6 = 34, also Bc = 9.
2. Es gilt in der Diagonale: 15 + 9 + Cb + 8 = 34, also Cb = 2.
3. Es gilt in Spalte b: Ab + 7 + 2 + 11 = 34, also Ab = 14.
4. Es gilt in Zeile a: Aa + 14 + 4 + 15 = 34, also Aa = 1.
5. Es gilt in Spalte a: 1 + 12 + Ca + 8 = 34, also Ca = 13.

Nun fehlen im Quadrat noch die Zahlen 3, 5, 10 und 16.
Betrachten wir deshalb

6. Es gilt in Zeile C: 13 + 2 + Cc + Cd = 34, also Cc + Cd = 19.

Den Wert 19 können wir nur mittels 3 + 16 = 19 erhalten. Folglich bleiben uns die folgenden Möglichkeiten:

Setzen wir Cc = 16 (und folglich Cd = 3), so erfüllt Dc = 5 und Dd = 10 das magische Quadrat.
Setzen wir dagegen Cc = 3 (und folglich Cd = 16), so ist Dc = 18 erforderlich und die Spaltensumme D ist bereits größer als 34, beides aber im Widerspruch zu den Bedingungen eines magischen Quadrates.

A	1	14	4	15
B	12	7	9	6
C	13	2	16	3
D	8	11	5	10
	a	b	c	d

A	1	14	4	15
B	12	7	9	6
C	13	2	3	16
D	8	11	***18***	
	a	b	c	d

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Die Gesamtsumme der Zahlen 3 bis 9 beträgt

3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42.

Da sich diese Summe auf drei Linien verteilt, muss jede solcher Linie den Wert (42 : 3 =) 14 betragen. Jedoch sehen wir 6 Reihen, die nur aus zwei Summanden bestehen. Wenn ein Eckfeld belegt wird (zum Beispiel links unten), so müssen die „Nachbarfelder“ gleich sein. Dieses Problem besteht aber bei jeder Belegung mit 7 zusammenhängenden Zahlen. Es ist also nicht möglich!

Lösungshinweise zur Aufgabe 3. Wie vorgeschlagen kürzen wir die Namen mit den Anfangsbuchstaben ab – A, B, C, D und E.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1a): ABCDE, ABCED, ABDCE, ABDEC, ABECD, ABEDC

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1b): Wenn B an zweiter Stelle fährt, gibt es laut Teilaufgabe 3.1.a insgesamt 6 Möglichkeiten. So viele sind es auch, wenn C, D oder E an zweiter Stelle fährt. Insgesamt sind es also ($4 \cdot 6 =$) 24 Möglichkeiten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1c): Wenn B und E stets hintereinanderfahren, betrachten wir die beiden als ein festes Paar, für das es zwei Möglichkeiten gibt, nämlich (BE) oder (EB). Somit haben wir nur zweimal 4 Fahrende anzuordnen. Insgesamt sind es also ($2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 48 Möglichkeiten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2a): Es genügt, die Verteilung von zwei Mädchen auf das Zweibett-Zimmer zu ermitteln, weil damit die Belegung auf das Dreibett-Zimmer bereits festgelegt ist.

AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE

Es gibt folglich genau 10 verschiedene Möglichkeiten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2b): Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: Ein Mädchen nutzt das Zweibett-Zimmer allein (und die Belegung des Vierbett-Zimmers ist damit festgelegt). Dafür gibt es bei 5 Mädchen insgesamt 5 Möglichkeiten.

Fall 2: Zwei Mädchen nutzen das Zweibett-Zimmer (und die Belegung des Vierbett-Zimmers ist damit festgelegt). Dafür gibt es bei 5 Mädchen laut Teilaufgabe 3.2a insgesamt 10 Möglichkeiten.

Somit gibt es insgesamt ($5 + 10 =$) 15 Möglichkeiten.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2000
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1. Zur Zeit, als ADAM RIES lebte, gab es verschiedene Münzen zum Bezahlen der Waren. Nach der „Reichsmünzordnung“ von 1551 wurden unter anderem Gulden, Groschen und Kreuzer verwendet.

Es galt: 1 Gulden = 24 Groschen = 60 Kreuzer.

a) Ein Bauer will auf dem Markt Futter für seine drei Pferde kaufen. Er benötigt für jedes Pferd wöchentlich 2 Scheffel Hafer, 40 Bund Heu und 10 Bund Stroh. (Der Scheffel ist ein zur damaligen Zeit in Sachsen gültiges Maß. Er wurde als Hohl, aber auch als Flächenmaß verwendet.)

Auf dem Markt wurden die Waren zu folgenden Preisen angeboten:

5 Bund Heu für einen Kreuzer,
1 Bund Stroh für einen halben Kreuzer,
1 Scheffel Hafer für zwei Groschen.

Berechne den Preis, den der Bauer für einen Futtervorrat für 5 Wochen bezahlen muss.

Gib den Preis in Gulden, Groschen und Kreuzer an!

b) Ein Bauer will auf dem Markt Vieh verkaufen. Er wählt folgende Preise:

4 Ziegen koten einen Gulden,
2 Schweine kosten drei Gulden,
1 Kalb kostet 12 Groschen,
1 Ochse kostet 3 Gulden, 18 Groschen 1 Kreuzer.

(1) Am ersten Tag verkauft er 2 Schweine, 1 Kalb, 1 Ochsen und noch Ziegen. Insgesamt nimmt er 8 Gulden, 12 Groschen und 1 Kreuzer ein.
Berechne, wie viele Ziegen der Bauer an diesem Tag verkauft hat!

(2) Am zweiten Tag nimmt der Bauer für das verkaufte Vieh insgesamt 5 Gulden, 36 Groschen und 1 Kreuzer ein. Er verkaufte von jeder der vier Tierarten mindestens ein Tier.
Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Angaben eindeutig zu ermitteln, wie viele Tiere der Bauer von jeder Art verkauft hat.

Aufgabe 2. In einem Spiel schneiden zwei Spieler A und B aus einem Quadrat mit 6x6 Feldern eine Anzahl von Feldern heraus.
Spieler A wählt eines der 36 Felder. Er schneidet alle Felder, die von dem gewählten Feld in gleicher Zeile rechts liegen, in gleicher Spalte oberhalb liegen, und alle rechts oberhalb eingeschlossenen Felder aus.

Danach wiederholen Spieler B und A abwechselnd diese Vorgehensweise. Verloren hat der Spieler, der das letzt mögliche Feld des Quadrates (links unten) nehmen muss.

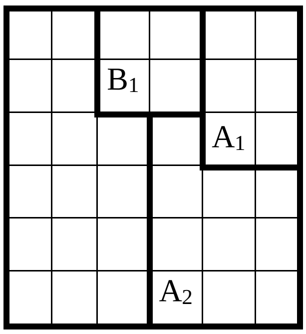


Abbildung 1

Bezeichnet man das vom Spieler A im ersten Zug gewählte Feld mit A_1 (analog Spieler B), so zeigt Abb. 1 den Anfang eines möglichen Spielverlaufes (die stark umrandeten Felder werden jeweils herausgeschnitten).

a) (1) Vervollständige den Spielverlauf aus Abb. 1 so, dass Spieler B gewinnt!
(2) Vervollständige den Spielverlauf aus Abb. 1 so, dass Spieler B in seinem dritten Zug verliert!

b) Abb. 2 zeigt einen weiteren Spielverlauf. Spieler A hat mit dem ersten Zug A_1 begonnen.
Vervollständige den Spielverlauf aus Abb. 2 so, dass Spieler A gewinnt.

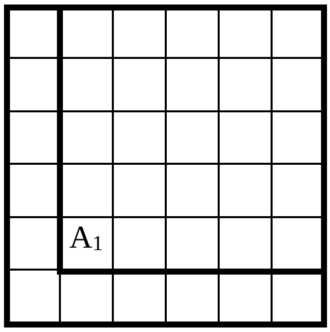


Abbildung 2

Beschreibe eine Strategie, die es dem Spieler A ermöglicht, für den in Abb. 2 gewählten Beginn den Sieg stets zu erringen!

c) Betrachtet wird nun ein Quadrat aus nxn Feldern. Aus diesem werden von den Spielern abwechselnd Teile nach den oben genannten Bedingungen herausgeschnitten.

Entwickle eine Strategie, die es dem beginnenden Spieler stets ermöglicht, den Sieg zu erzwingen!

Aufgabe 3. In einem Teilgebiet der Mathematik, der Stochastik, ist es oft von Bedeutung, die Anzahl aller Möglichkeiten zu ermitteln. Probiere in en folgenden Aufgaben, ob du alle findest!

a) Vertauscht man Buchstaben (z.B. ABC) in ihrer Reihenfolge, so erhält man verschiedene Anordnungen. In unserem Beispiel erhält man insgesamt diese sechs verschiedenen Reihenfolgen: ABC; ACB; BAC; BCA; CAB und CBA.

(Hinweis: Beim Ermitteln aller möglichen Fälle werden diese in lexikographischer Reihenfolge angegeben, d.h. in der Reihenfolge, in der die „Wörter“ alphabetisch geordnet in einem Lexikon stehen würden.)

(1) Schreibe alle möglichen verschiedenen Anordnungen auf, die aus den Buchstaben RIES gebildet werden können!

(2) Ermittle die Anzahl aller möglichen verschiedenen Anordnungen, die aus den Buchstaben ADAM gebildet werden können!

(3) Ermittle die Anzahl aller möglichen verschiedenen Anordnungen, die aus den Buchstaben ANNA gebildet werden können!

b) Zur Zeit von ADAM RIES benutzte man zum Darstellen von Zahlen auf dem Rechenbrett Metallplättchen, die Rechenpfennige. In einer Dose befinden sich 10 solcher Rechenpfennige aus Kupfer, 20 aus Messing und 15 aus Zinn.

Wie viele Rechenpfennige müssen mindestens der Dose „blind“ (ohne Hineinschauen) entnommen werden, um mit Sicherheit

(1) 5 Pfennige aus Messing unter den Entnommenen zu haben? Begründe!

(2) 5 Pfennige aus dem gleichen Metall unter den Entnommenen zu haben? Begründe!

ADAM-RIES-Wettbewerb 2000
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):
- Der Bauer benötigt für eine Woche (3 · 2 =) 6 Scheffel Hafer. Diese kosten (6 · 2 =) 12 Groschen.
- Der Bauer benötigt für eine Woche (3 · 40 =) 120 Bund Heu. Diese kosten (120 : 5 =) 24 Kreuzer.
- Der Bauer benötigt für eine Woche (3 · 10 =) 30 Bund Stroh. Diese kosten (30 : 2 =) 15 Kreuzer.

Der Futtervorrat für eine Woche kostet somit 12 Groschen und (24 + 15 =) 39 Kreuzer. Damit kostet der Futtervorrat für 5 Wochen (5 · 12 =) 60 Groschen und (5 · 39 =) 195 Kreuzer.

195 Kreuzer können wir wegen 195 = 3 · 60 + 15 in 3 Gulden und 15 Kreuzer umrechnen. Aus der Umrechnung 24 Groschen = 60 Kreuzer folgt die Umrechnung 2 Groschen = 5 Kreuzer. Somit können wir die 15 Kreuzer in 6 Groschen umrechnen.

(60 + 6 =) 66 Groschen können wir wegen 66 = 2 · 24 + 18 in 2 Gulden und 18 Groschen umrechnen.

Der Bauer musste (3 + 2 =) **2 Gulden und 18 Groschen** bezahlen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b(1):
- Der Bauer erhält für **2 Schweine** 3 Gulden.
- Der Bauer erhält für **1 Kalb** 12 Groschen.
- Der Bauer erhält für **1 Ochsen** 3 Gulden, 18 Groschen und 1 Kreuzer.
- Insgesamt erhält er für diese Tiere somit (3 + 3 =) 6 Gulden, (12 + 18 =) 30 Groschen (entspricht 1 Gulden und 6 Groschen) und 1 Kreuzer.
- Vom Gesamtpreis 8 Gulden, 12 Groschen und 1 Kreuzer verbleiben noch (8 – 7 =) 1 Gulden, (12 – 6 =) 6 Groschen und (1 – 1 =) 0 Kreuzer.
- Dies können wir als (24 + 6 =) 30 Groschen schreiben.
- Weil 4 Ziegen einen Gulden bzw. 24 Groschen kosten, kostet 1 Ziege (24 : 4 =) 6 Groschen. Somit verkaufte er für 30 Groschen (30 : 6 =) **5 Ziegen**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b(2): Da der Bauer unter den eingenommenen Münzen nur 1 Kreuzer hatte, verkaufte er genau **1 Ochsen**.

Es verbleiben noch (5 – 3 =) 2 Gulden, (36 – 18 =) 18 Groschen für die anderen Tiere, also (2 · 24 + 18 =) 66 Groschen.

Wir suchen die Möglichkeiten der Verteilung auf Kälber (je 12 Groschen), Schweine (je 36 Groschen) und Ziegen (je 6 Groschen).

Da er von jeder Tierart mindestens ein Tier verkaufte, war darunter genau **1 Schwein** (weil 2 Schweine bereits 72 Groschen einbringen).

Es verbleiben noch (66 – 36 =) 30 Groschen für Kälber und Ziegen.

Der Bauer könnte also außer 1 Ochse und 1 Schwein

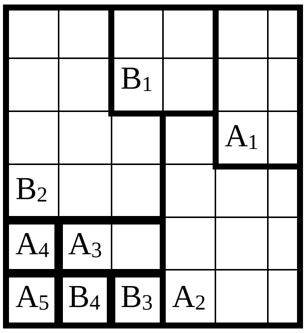
- **1 Kalb und 3 Ziegen** für (12 + 3 · 6 =) 30 Groschen oder

- **2 Kälber und 1 Ziege** für (2 · 12 + 6 =) 30 Groschen

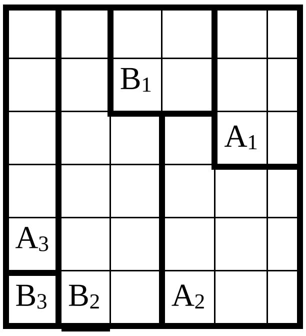
verkauft haben. Es lässt sich also nicht eindeutig ermitteln, wie viele Tiere von jeder Art verkauft wurden.

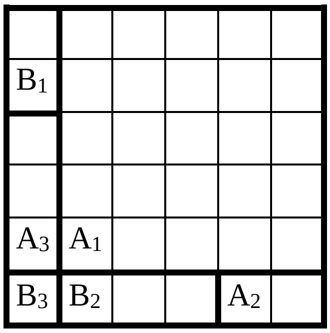
Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a1):



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a2):





Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Spieler B wählt ein beliebiges Feld und schneidet damit 1 bis 5 Felder der linken Spalte oder der unteren Zeile ab. Der Spieler A wählt das das Feld in der unteren Zeile (bzw. in der linken Spalte), mit dem er gleichviele Felder wie B abschneidet. Diese Strategie setzt Spiele A fort, bis Spieler B das linke untere Feld nehmen muss und verliert.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Der beginnende Spieler muss ein solches Feld wählen, damit noch genau eine Spalte (die linke) und eine Zeile (die untere) übrig bleiben. Nachdem der zweite Spieler gewählt hat, pariert der erste stets mit einem gleichen Stück der anderen Zeile, also symmetrisch zur Diagonalen. Damit verbleibt für den zweiten Spieler immer das Feld links unten übrig, womit er verloren hat.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3a.1: Es gibt 24 verschiedene Anordnungen

RIES, RISE, RSIE, RSEI, REIS, RESI,
IRES, IRSE, IERS, IESR, ISER, ISRE,
ERIS, ERSI, EIRS, EISR, ESIR, ESRI,
SRIE, SREI, SIRE, SIER, SEIR, SERI

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3a.2: Es gibt 12 verschiedene Anordnungen

AADM, AAMD, ADAM, AMAD, ADMA, AMDA,
DAAM, MAAD, DAMA, MADA, DMAA, MDAA

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3a.3: Es gibt 6 verschiedene Anordnungen

AANN, ANAN, ANNA, NAAN, NANA, NNAA

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3b.1: Im ungünstigen Fall zieht Adam Ries zunächst 10 Rechenpfennige aus Kupfer und 15 Rechenpfennige aus Zinn. Erst wenn er weitere 5 Rechenpfennige gezogen hat, sind 5 Rechenpfennige aus Messing dabei.

Er muss also mindestens (10 + 15 + 5 =) 30 Rechenpfennige ziehen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3b.2: im ungünstigen Fall zieht Adam Ries zunächst 4 Rechenpfennige aus Kupfer, 4 Rechenpfennige aus Messing und 4 Rechenpfennige aus Zinn. Mit dem nächsten Rechenpfennig hat er aber sicher 5 Rechenpfennige aus dem gleichen Material.

Er muss also mindestens (4 + 4 + 4 + 1 =) 13 Rechenpfennige ziehen.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2001

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1: Im 2. Rechenbuch von ADAM RIES steht folgende Aufgabe (einige Zahlen wurden geändert):

„Ein Händler kauft 2 Saum Gewand in Brügge in Flandern. 1 Tuch kostet in rheinischer Währung 13 Gulden und 10 Schilling. 1 Saum hat 22 Tuch. Der Fuhrlohn nach Preßburg in Ungarn kostet insgesamt 34 rheinische Gulden. Dort verkauft er sein gesamtes Tuch. Für 1 Tuch bekommt er 18 ungarische Gulden."

Zur damaligen Zeit bezahlte man in den verschiedenen Staaten mit unterschiedlichen Münzen, z.B. rheinische Gulden, Schilling, Heller, ungarische Gulden, ...

Für die Umwandlung der rheinischen Goldwährung galt:
1 Gulden entspricht 20 Schilling, 1 Schilling entspricht 12 Heller.

Für die Umwandlung von rheinischen in ungarische Gulden galt:
90 rheinische Gulden entsprechen 108 ungarische Gulden.

Löse zu dieser Aufgabe folgende Teilaufgaben:

a) Wie viele rheinische Gulden zahlt der Händler für das gesamte Gewand in Brügge?

b) Ein anderer hat 26000 Heller. Wie viel Tuch Gewand kann dieser höchstens kaufen?

c) Berechne den Gewinn (in rheinischer Goldwährung), den der Händler (aus Aufgabe a) nach dem Verkauf in Preßburg erzielt.

Aufgabe 2. Für die Aufgaben und Lösungen des Adam-Ries-Wettbewerbs benötigt man oft Tabellen oder Grafiken, die mit Hilfe von Textverarbeitungsprogrammen eines Computers erzeugt werden können. Dabei kann man folgende (vereinfachte) Vorgehensweise wählen:

(1) Zeichnen einer Tabelle aus m (waagerechten) Zeilen und n (senkrechten) Spalten mit Außenrahmen und allen Innengitterlinien
(Bezeichnung: Z(m;n))

(2) Markieren eines Rechtecks bestehend aus einer beliebigen Anzahl von Feldern (Zellen), die durch die Zeilen und Spalten gebildet werden
(Bezeichnung: M(Feld1;Feld2; ...))

(3) Von diesem markierten Rechteck Setzen (S) oder Entfernen (E)

(a) aller Außenrahmenlinien (Bez.: S□ oder E□)
oder einzelner Außenrahmlinien (Bez.: S⌋ oder E⌋)
(b) aller senkrechten Innengitterlinien (Bez.: S| oder E|);
(c) aller waagerechten Innengitterlinien (Bez.: S– oder E–);

(Doppelt gezeichnete Linien entstehen nur einmal).

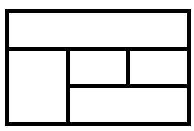
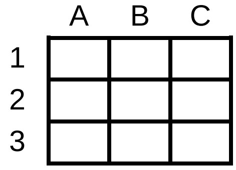


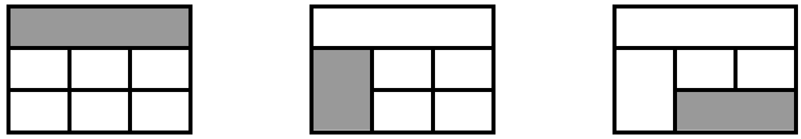
Abb.1

Abbildung 1 zeigt eine solche Grafik. Sie besteht aus 3 Zeilen und 3 Spalte

Abbildung 2 zeigt die Entstehung dieser Grafik. Zur besseren Beschreibung der Felder sind die Zeilen und Spalten mit Zahlen und Buchstaben bezeichnet.

Z(3 ;3) :





→M(A1;B1;C1), E| → M(A2;A3), E– → M(B3;C3), E|

Abb. 2

a) Untersuche, ob durch die Vorschrift

Z(3;3) → M(alle Felder), E|, E– → M(A2;A3), S□ →M(B2;C2), S□, S|

ebenfalls die Grafik aus Abbildung 1 erzeugt wird. Begründe durch Zeichnungen!

b) Abbildung 3 zeigt eine Grafik einer früheren Aufgabe des ARW (1995, 1. Stufe) aus 4 Zeilen und 4 Spalten gleicher Breite bzw. Höhe.

Beschreibe mit der oben verwendeten Symbolik eine Möglichkeit, diese Grafik zu erzeugen und gib die Anzahl der erforderlichen Markierungen an. Versuche eine Möglichkeit zu finden, diese Grafik mit einer minimalen Anzahl von Markierungen zu erzeugen.

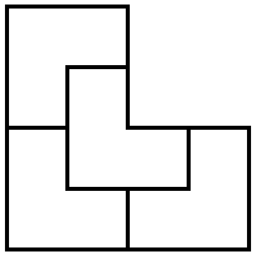


Abb. 3

c) Entwerfe selbst eine Grafik aus 5 Zeilen und 5 Spalten und beschreibe eine Möglichkeit, diese zu erzeugen.

<u>Hinweis:</u> Wenn ihr zu Hause einen Computer habt, dann probiere doch das Erstellen solcher Tabellen oder Grafiken selbst einmal aus. Deine Eltern werden dich dabei bestimmt unterstützen. Zur Lösung der Aufgabe 2c) kannst du solch eine erstellte Darstellung deinem Lehrer mit abgeben.

Aufgabe 3. Benjamin bummelt auf dem Annaberger Weihnachtsmarkt. Die Lose eines Losverkäufers sind blau (b), gelb (g) und rot (r). Von jeder Farbe sind ausreichend viele in einem Kasten. Benjamin zieht, ohne in den Kasten zu schauen, mit einem Griff vier Lose.

a) Schreibe 10 mögliche Farbzusammenstellungen der gezogenen vier Lose auf. Schreibe so:

bb bb   bb bg

Posamentiererin

Adam Ries

Ermittle die Anzahl aller möglichen verschiedenen Farbzusammenstellungen, die Benjamin gezogen haben könnte.

Benjamin gewinnt fünf Holzminiaturen der Figuren der Annaberger Weihnachtspyramide, nämlich:

eine Posamentiererin (P),
Adam Ries (R),
Agricola (A),
einen Bergmann (B) und
einen Engel (E).

Benjamin stellt diese Figuren nebeneinander auf und betrachtet ihre Reihenfolge von links nach rechts. Er versucht, alle möglichen verschiedenen Aufstellungen zu finden.

b) Schreibe alle möglichen Reihenfolgen auf, wenn die Posamentiererin als erste und Ries als zweiter steht.

Schreibe so: P R _ _ _ ; ...

c) Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, bei denen die Posamentiererin und Ries nebeneinander (nicht unbedingt an der ersten und zweiten Stelle) stehen? Begründe!

Benjamin stellt nun außer Ries die restlichen vier Miniaturen in gleichmäßigen Abständen auf den Drehteller einer Pyramide. Die Pyramide dreht sich stets in ein und dieselbe Richtung. Benjamin achtet auf die verschiedenen Reihenfolgen, die durch das Aufstellen erzielt werden können.

d) Wie viele verschiedene Aufstellungen dieser vier Figuren kann es insgesamt geben?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2001
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen werden verwendet:
rheinische Goldwährung: Gulden fl, Heller h, Schilling ß; ungarische Gulden: ufl

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): 1 Tuch Gewand kostet 13 fl 10 ß.
1 Saum Gewand entsprechen 22 Tuch, somit sind 2 Saum (2 · 22 =) 44 Tuch.
44 Tuch Gewand kosten (44 · (13 fl 10 ß)=) 572 fl 440 ß = **594 fl**.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):*1 Tuch Gewand kostet

13 fl 10 ß = (13 · 20 + 10=) 270 ß = (270 · 12 =) 3240 h.

Da 26 000 h **:** 3240 = 8 Rest 80 h kann der andere höchstens **8 Tuch** Gewand kaufen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):

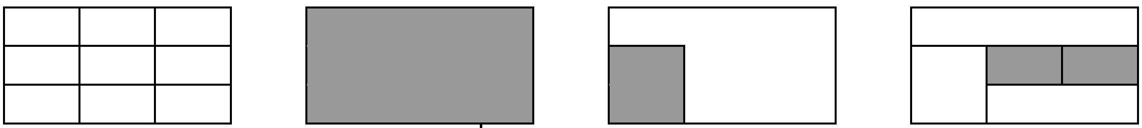
Ausgaben des Händlers:	2 Saum Gewand kosten	594 fl
	Fuhrlohn	34 fl
	Gesamtausgaben	628 fl

Einnahmen des Händlers und Umrechnung in rheinische Währung:

2 Saum hat 44 Tuch. 1 Tuch Gewand bringt 18 ufl, folglich bringen 2 Saum (44 · 18 =) 792 ufl.
Es gilt: 90 fl = 108 ufl, also 5 fl = 6 ufl. Wegen 792 : 6 = 132 und 132 · 5 = 660 gilt daher: 792 ufl = 660 fl. Für 2 Saum Gewand betragen die Einnahmen also 660 fl.

Gewinn des Händlers: Einnahmen **–** Ausgaben = 660 fl **–** 628 fl = **32 fl.**

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Durch die gegebene Vorschrift wird die gleiche Grafik erzeugt.

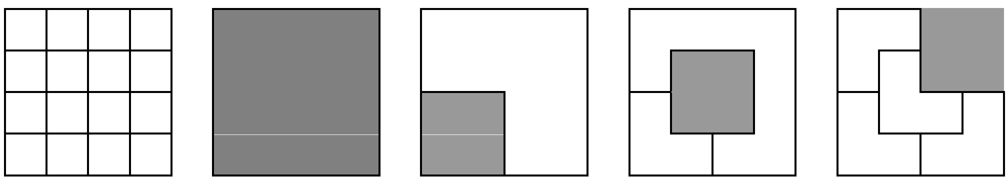


Z(3;3) → M(alle), E|, E– → M(A2;A3), S□ →M(B2;C2),S□,S|

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Die Grafik lässt sich folgendermaßen erzeugen:

Z(4;4) → M(alle), E½, E**-** → M(A3;B3;A4;B4), Sp
→ M(B2;C2;B3;C3), E½, E**-**, Sp → M(C1;D1;C2;D2), E½, E**-**, Ep ,Sf.

Folgende Abbildung zeigt die Erzeugung mit Hilfe von Zeichnungen.



Diese Erzeugung kommt mit vier Markierungen aus. Es ist gleichzeitig die minimale Anzahl von Markierungen, um diese Grafik zu erzeugen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es gibt insgesamt die folgenden (1 + 2 + 3 + 4 + 5 =) **15** verschiedenen Farbzusammenstellungen, die Benjamin gezogen haben könnte:

(b;b;b;b), (b;b;b;g), (b;b;b;r), (b;b;g;g), (b;b;g;r), (b;b;r;r), (b;g;g;g), (b;g;g;r), (b;g;r;r), (b;r;r;r), (g;g;g;g), (g;g;g;r), (g;g;r;r), (g;r;r;r), (r;r;r;r).

Begründung: Durch systematisches Untersuchen aller Fälle unter Berücksichtigung der lexikographischen Reihenfolge der Farben ergibt sich folgende Tabelle:

Anzahl der gezogenen Lose	blau	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	gelb	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
	rot	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): PR**ABE**, PR**AEB**, PR**BAE**, PR**BEA**, PR**EAB**, PR**EBA**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es gibt insgesamt **48** verschiedene Reihenfolgen.

Begründung: Wenn **P** an der ersten und **R** an der zweiten Stelle steht, dann gibt es für die restlichen 3 Figuren genau 6 verschiedene Reihenfolgen (vgl. Aufgabe b).

Bei jeder dieser 6 Reihenfolgen könnte das Paar (**P;R**) der beiden nebeneinanderstehenden Figuren an 4 verschiedenen Stellen stehen. Es ergeben sich somit (4 · 6 =) 24 verschiedene Reihenfolgen. Bei jeder dieser 24 Reihenfolgen kann **P** vor **R** oder **R** vor **P** stehen.
Es ergeben sich somit (24 · 2 =) 48 verschiedene Reihenfolgen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Ordnet man vier Miniaturen auf 4 Plätze an, so gibt es (4 · 3 · 2 · 1 =) 24 Möglichkeiten. Durch die Betrachtung der Reihenfolge in einer kreisförmigen Anordnung gibt es keinen „Anfang“ und kein „Ende“. Somit ergeben z. B. die Anordnungen **ABEP**, **BEPA**, **EPAB** und **PABE** ein und dieselbe Reihenfolge.

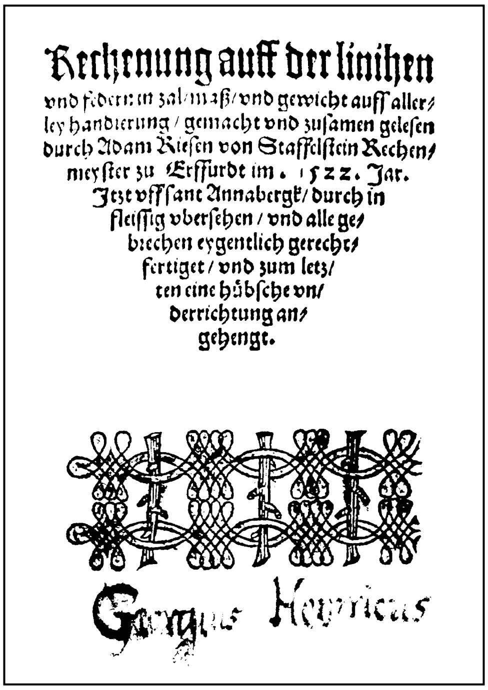
Folglich kann es insgesamt nur (24 **:** 4 =) **6** verschiedene Aufstellungen geben.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2002

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1. Im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (nebenstehende Abbildung zeigt die Titelseite der zweiten Auflage dieses Rechenbuches von 1525) stehen auch Aufgaben zum „Handelsverlust“.


Rechenung auff der linihen und federn in zal/maß/und gewicht auff allerley handierung / gemacht und zusamen gelesen durch Adam Riesen von Staffelstein Rechenmeyster zu Erffurdt im. 1522. Jar. Itzt uff sant Annabergk/ durch in fleissig ubersehen / und alle gebrechen eygentlich gerechtfertiget / und zum letzten eine hübsche unterrichtung angehengt.

Georgius Henricus

Bei solchen Aufgaben kauft ein Händler eine bestimmte Menge Safran zu einem Preis, muss notgedrungen den gesamten Safran zu einem niedrigeren Preis wieder verkaufen und hat damit einen Verlust.

Zur damaligen Zeit gab es als Geldwerte nicht DM oder €, sondern z.B. Gulden, Schilling und Heller.

Für die Umrechnung galt:
1 Gulden = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt ein Einkaufspreis von 3 Gulden, 7 Schilling und 4 Heller je Pfund Safran.

a) Berechne den Einkaufspreis für 3 Pfund Safran. (Gib den Preis so an, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist.)

b) Ein Großhändler hat 101 Gulden. Wie viel Pfund Safran kann er damit höchstens kaufen?

c) Ein anderer Händler hat 14 Pfund Safran gekauft. Durch den notgedrungenen Verkauf dieses Safrans macht er insgesamt 6 Gulden und 13 Schilling Verlust.
Zu welchem Preis je Pfund hat er den Safran verkauft?

Aufgabe 2. Eine „Landkarte“ ist in eine bestimmte Anzahl von Ländern unterteilt. Jedes Land besteht aus einem zusammenhängenden Territorium, das vollständig durch Grenzen eingeschlossen wird.

Jedes Land soll mit genau einer Farbe so ausgemalt werden, dass Länder mit einer gemeinsamen Grenze (benachbarte Länder) unterschiedlich gefärbt sind.
Länder, die in nur einem Punkt zusammentreffen, sind nicht benachbart.

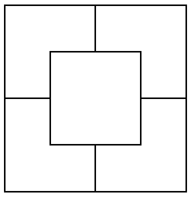
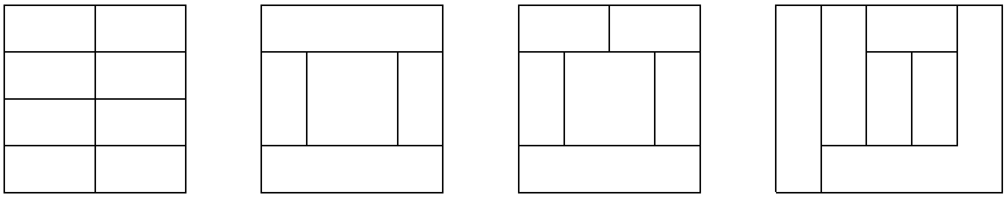

Landkarte 1

Abb. 1

a) Zeige, dass sich die Landkarte 1 (Abb. 1) mit genau drei Farben färben lässt.

b) Ermittle die kleinstmögliche Anzahl von Farben, mit der sich die Landkarten 2, 3, 4 und 5 (Abb. 2) färben lassen.
Erläutere deine Aussagen durch je eine Färbung.

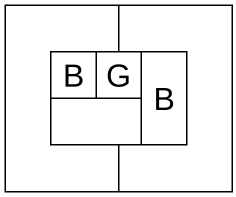


Landkarte 2 Landkarte 3 Landkarte 4 Landkarte 5

Abb. 2

c) Jemand hat begonnen, die Landkarte 6 wie in Abb. 3 mit blau (B) und grün (G) zu färben.

Untersuche, ob es möglich ist, bei diesem Beginn die Karte mit vier Farben vollständig zu färben. Begründe!
Begründe, dass es bei einem anderen Beginn möglich ist, diese Karte mit nur vier Farben vollständig zu färben.



Landkarte 6

Abb. 3

d) Das beiliegende Arbeitsblatt zeigt eine Karte der Bundesrepublik Deutschland mit den Grenzen der einzelnen Bundesländer.
Färbe diese Karte nach den oben genannten Bedingungen mit der kleinstmöglichen Anzahl von Farben.

Aufgabe 3. Oberwiesenthal lädt zur schneefreien Zeit zu einer Fahrt mit dem Schlitten auf der Sommerrodelbahn ein.

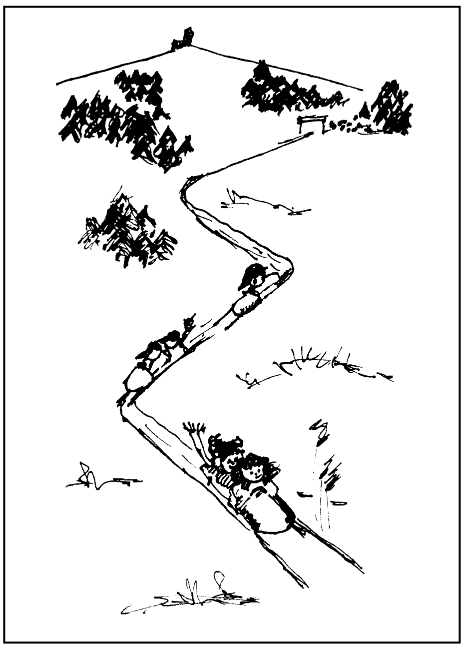
a) Die Freunde **A**rne, **C**arl und **E**rik haben je einen Schlitten. Am Start überlegen sie, in welcher Reihenfolge sie talwärts fahren können.

Schreibe alle verschiedenen Möglichkeiten dafür auf. Schreibe so: ACE; AEC; ...

Während sich die Jungen unterhalten, kommen aus der Jugendherberge zwei Mädchen, **B**rit und **D**orit, mit je einem Schlitten dazu. Die fünf Kinder einigen sich schnell, dass abwechselnd ein Junge und ein Mädchen mit je einem Schlitten startet, ein Junge zuerst.

Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Talfahrt, die es nun insgesamt gibt.

b) Zur nächsten Fahrt verabreden die fünf Kinder, mit genau drei Schlitten zu fahren. Auf jedem Schlitten können zwei Kinder Platz finden. Die unterschiedlichen Platzierungen auf ein und demselben Schlitten sollen unberücksichtigt bleiben.



Erik fährt auf einem Schlitten allein. Schreibe alle verschiedenen Möglichkeiten dafür auf, dass die übrigen vier zu je zweien auf den beiden anderen Schlitten Platz nehmen.

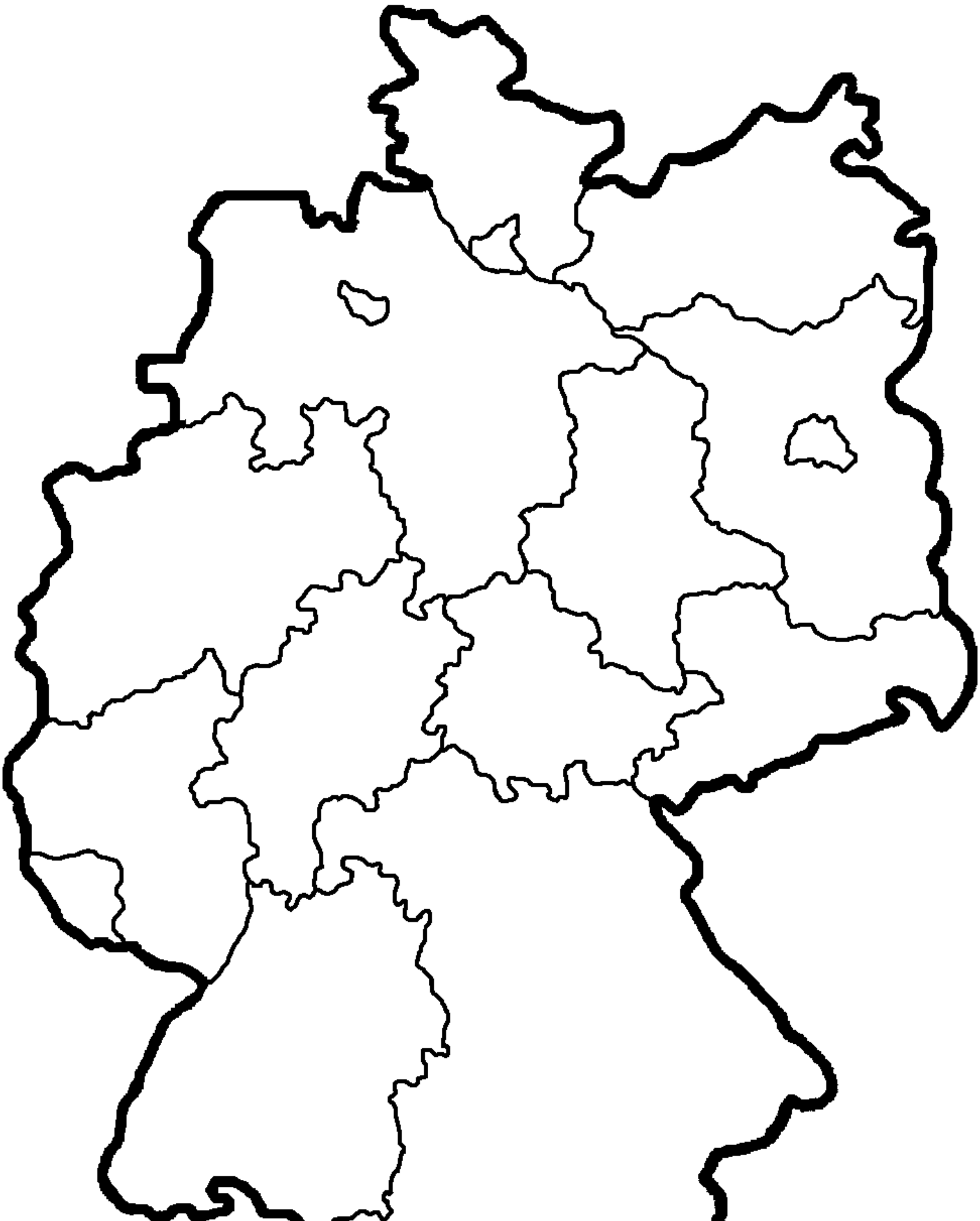
Schreibe so: $E - \overline{AB} - \overline{CD}$; E–...

Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Reihenfolge des Talwärtsfahrens gibt es insgesamt, wenn bei jedem Talwärtsfahren genau ein Kind allein und die übrigen vier jeweils zu zweien auf dem Schlitten fahren (also sowohl verschiedene Schlittenbesatzungen als auch die Startreihenfolge der Schlitten beachtet werden)?

c) Brit findet Spaß an den Überlegungen für „so viele Möglichkeiten". Sie fragt: „Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Reihenfolge der Talfahrt gibt es insgesamt, wenn wir fünf genau vier Schlitten benutzen?"

Arbeitsblatt zu Aufgabe 2

Name: .... Klasse: ....



ADAM-RIES-Wettbewerb 2002

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen werden verwendet:

Gulden fl ; Schilling ß ; Heller hel ; Pfund pfu.

Die Angaben der Preise erfolgen in fl/ß/hel.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): 1 pfu Safran kostet 3/7/4. Somit kosten 3 pfu Safran $3 \cdot 3/3 \cdot 7/3 \cdot 4 = 9/21/12$.

Mit 12 hel = 1 ß und 20 ß = 1 fl gilt: $9/21/12 = 9/22/0 = 9/20{+}2/0 = 10/2/0$. Somit kosten **3 pfu Safran 10 Gulden und 2 Schillinge**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Großhändler hat 101 Gulden.

Mit $101/0/0 = 0/101 \cdot 20/0 = 0/0/101 \cdot 20 \cdot 12 = 0/0/24240$ ergeben sich 24240 hel.

1 pfu Safran kostet $3/7/4 = 0/3 \cdot 20 + 7/4 = 0/67/4 = 0/0/67 \cdot 12 + 4 = 0/0/808 = 808$ hel.

Für 101 fl (= 24240 hel) kann man demzufolge ($24240 : 808 =$) **30 pfu Safran** kaufen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): 1 pfu Safran kostet 3/7/4.

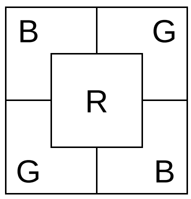
14 pfu Safran kosten somit $14 \cdot 3/14 \cdot 7/14 \cdot 4 = 42/98/56$.

Da der gesamte Verlust 6/13/0 beträgt, ist der gesamte Verkaufspreis um 6/13/0 geringer als der Einkaufspreis und beträgt damit

$42 - 6/98 - 13/56 = 36/85/56 = 0/36 \cdot 20 + 85/56 = 0/805/56 = 0/0/805 \cdot 12 + 56 = 0/0/9716$, also 9716 hel.

Damit ergibt sich für den Verkaufspreis je pfu ein Betrag von ($9716 : 14 =$) 694 hel, also ($0/0/694 = 0/0/57 \cdot 12 + 10 = 0/57/10 = 0/2 \cdot 20 + 17/10 = 2/17/10$) **2 Gulden, 17 Schillinge und 10 Heller.**

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Zur Lösungsdarstellung werden stets die Farben Blau (B), Grün (G), Rot (R) und Violett (V) verwendet.



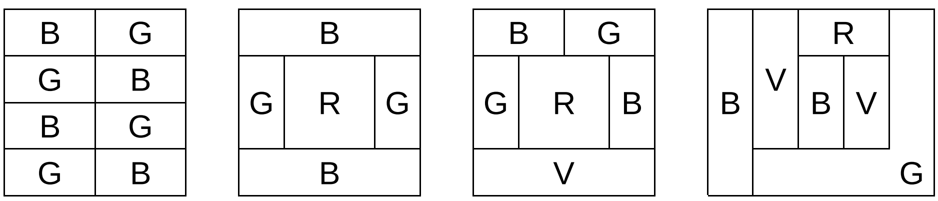
Landkarte 1

Abb. L1

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Abb. L1 zeigt eine mögliche Färbung mit drei Farben.

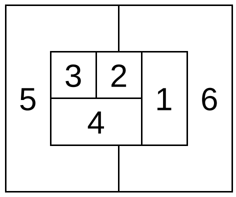
Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für die Landkarte 2 sind zwei Farben, für Karte 3 drei, für Karte 4 vier und für Karte 5 ebenfalls vier Farben erforderlich.

Die Färbungen in Abb. L2 erfüllen alle geforderten Bedingungen der Aufgabe.



Landkarte 2 Landkarte 3 Landkarte 4 Landkarte 5

Abb. 2



Landkarte 6

Abb. L3

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Die Landkarte 6 lässt sich mit derartigem Beginn nicht mit vier Farben färben.

Begründung: Wir bezeichnen die Länder mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 (Abb. L3). 1 = B soll heißen, dass Land 1 blau gefärbt ist.

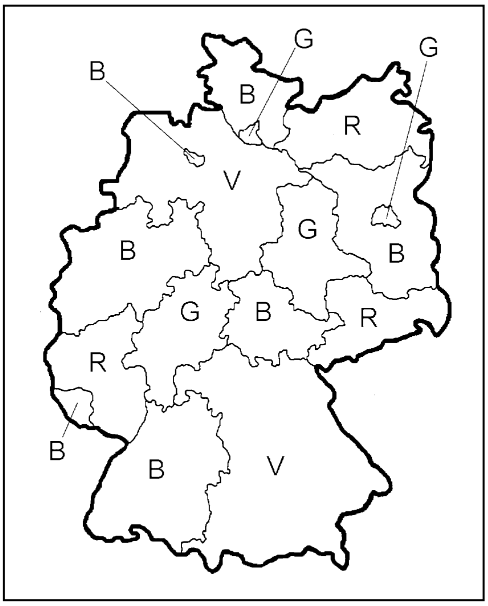
- Laut Aufgabenstellung gilt: 1 = B, 2 = G und 3 = B.
- Land 4 hat Grenzen mit 1 = B, 2 = G und 3 = B und muss deshalb mit einer neuen Farbe (z.B. rot) gefärbt werden: 4 = R.
- Land 5 hat Grenzen mit 2 = G, 3 = B und 4 = R und muss deshalb mit einer neuen Farbe (z.B. violett) gefärbt werden: 5 = V.
- Land 6 hat Grenzen mit 1 = B, 2 = G, 4 = R und 5 = V und muss deshalb mit einer neuen fünften Farbe gefärbt werden.

Der neue Beginn mit 1 = B, 2 = G und 3 = R kann folgendermaßen fortgesetzt werden:

- Land 4 hat Grenzen mit 1 = B, 2 = G und 3 = R und muss deshalb mit einer neuen Farbe (z.B. violett) gefärbt werden: 4 = V.
- Land 5 hat Grenzen mit 2 = G, 3 = R und 4 = V und kann deshalb mit blau gefärbt werden: 5 = B.
- Land 6 hat Grenzen mit 1 = B, 2 = G, 4 = V und 5 = B und kann deshalb rot gefärbt werden.

Somit ist die Färbung der Landkarte mit vier Farben möglich.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Die kleinstmögliche Anzahl zum Färben der Karte ist vier. Nebenstehende Abbildung zeigt eine mögliche Färbung, die alle Anforderungen der Aufgabe erfüllt.



Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Arne, Carl und Erik können in folgenden Reihenfolgen talwärts fahren:

ACE; AEC; CAE; CEA; EAC; ECA.

A**B**C**D**E ist eine Reihenfolge, die alle Anforderungen erfüllt: Junge zuerst und abwechselnd (Mädchen fett gedruckt). Mit A als erstem Fahrer können die Mädchen miteinander tauschen (2 Mögl.) und zu jeder dieser Varianten auch die beiden Jungen tauschen (2 Mögl.) → (2 · 2 =) 4 Mögl.

Außerdem gibt es 3 Mögl., dass ein Junge als Erster fährt → 3 Mögl. Somit gibt es insgesamt (3 · 4 =) **12 verschiedene Reihenfolgen**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es ergeben sich folgende drei Verteilungsmöglichkeiten:

E – AB – CD; E – AC – BD; E – AD – BC.

Jedes der fünf Kinder kann allein fahren → 5 Mögl.
Für die verbleibenden vier Kinder gibt es 3 mögliche Verteilungen (vgl. b) → 3 Mögl.
Für drei Schlitten gibt es 6 Startreihenfolgen (vgl. a) → 6 Mögl.

Somit gibt es insgesamt ($5 \cdot 3 \cdot 6 =$) **90 verschiedene Reihenfolgen**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Bei vier Schlitten müssen zwei Kinder zu zweien und drei Kinder allein fahren.

(1) Bei der Auswahl von zwei aus fünf Kindern ergeben sich 10 Möglichkeiten.
(2) Die restlichen drei Kinder nehmen auf den drei Schlitten Platz. Damit ergibt sich keine weitere Möglichkeit.
(3) Für vier Schlitten ergeben sich ($4 \cdot 3 \cdot 2 =$) 24 Reihenfolgen.

Aus (1), (2) und (3) ergeben sich insgesamt ($10 \cdot 24 =$) **240 verschiedene Reihenfolgen** der Talfahrt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2003

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Vom Geldwechsel

Aufgabe 1. Im seinem zweiten Rechenbuch stellt ADAM RIES auch Aufgaben vom Geldwechsel. Da im europäischen Wirtschaftsgebiet des 16. Jh. Rheinische Gulden und Ungarische Gulden zwei wichtige Währungen waren, hatten solche Umwandlungen eine große Bedeutung.

RIES verwendet in einigen Aufgaben einen Wechselkurs, bei dem 15 Ungarische Gulden einen Wert von 20 Rheinischen Gulden haben. Für die Umrechnung der Rheinischen Gold-währung galt:

1 Gulden = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller.

a) Einer hat 513 Ungarische Gulden. Berechne, wie viel Rheinische Gulden er dafür erhält.

b) Ein anderer hat 604 Rheinische Gulden. Berechne, wie viel Ungarische Gulden er dafür erhält.

c) In einer Aufgabe stellt RIES die Frage, welchen Geldbetrag in Rheinischer Goldwährung man für 874 Ungarische Gulden erhält. Löse diese Aufgabe. Gib den Betrag in Gulden, Schilling und Heller an.

d) RIES schreibt: „Wenn dir ungarische Gulden übrig bleiben und du nicht weißt, wie die umzurechnen sind, so mache Rheinische Schilling daraus.“ Er fordert in einer Aufgabe, 578 Rheinische Gulden umzuwandeln und erhält als Lösung: 433 Ungarische Gulden, 13 Rheinische Schilling und 4 Heller.
Überprüfe, ob ADAM RIES richtig gerechnet hat.

Aufgabe 2. Eine Zahlenpyramide ist so aufgebaut, dass die Summe der natürlichen Zahlen zweier benachbarter Felder stets in dem darüber liegenden Feld steht.

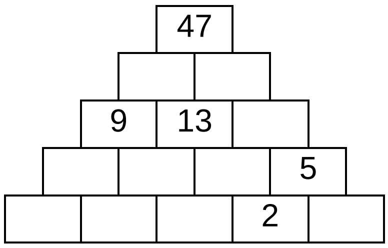


Abb.1

a) Fülle die leeren Felder der Zahlenpyramide in Abb. 1 aus.

b) Untersuche, ob sich die Zahlenpyramide in Abb. 1 auch ohne der in der zweiten Zeile eingetragenen „5“ noch eindeutig ausfüllen lässt.

c) Eine andere Zahlenpyramide hat in der untersten Zeile genau vier Felder, in denen vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen eingetragen sind. Im obersten Feld dieser Pyramide steht die Zahl „1500“. Ermittle die vier Zahlen der untersten Reihe.

Aufgabe 3. Auf dem Marktplatz von Annaberg-Buchholz hält ein Brunnen das Andenken an BARBARA UTHMANN wach.

BARBARA UTHMANN lebte von 1514 bis 1575 (also in der Zeit des ADAM RIES) und wirkte als Unternehmerin im Berg- und Hüttenwesen und in der Bortenwirkerei. Solch eine Tätigkeit war in dieser Zeit ganz und gar außergewöhnlich für eine Frau. Das Lebenswerk der BARBARA UTHMANN steht für die Größe und den Reichtum der Stadt Annaberg im 16. Jahrhundert.

Stell dir vor, ein Geschichtsschreiber kennt die Namen der 12 Kinder der UTHMANN, nicht aber deren Alter. Er könnte diese 12 Namen in insgesamt 479001600 verschiedenen Reihenfolgen anordnen. **So viele Möglichkeiten!**

In der Mathematik spielt das Suchen nach „so vielen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du alle „Möglichkeiten“ zu finden.

Aufgabe 3.1.

a) Die drei Buchstaben A, B und C kann man in folgenden Reihenfolgen schreiben:

ABC BAC CAB
ACB BCA CBA

Ordne die vier Buchstaben ABCD in allen möglichen verschiedenen Reihenfolgen an. Überlege, wie viele verschiedene Reihenfolgen der Anordnung von fünf Buchstaben möglich sind. Gib die Anzahl an.

Zusatzaufgabe: Wie könnte man die oben im Text angegebene Anzahl der Reihenfolgen der 12 Namen berechnen?

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten ergeben sich für die Anordnung der Namen der ersten fünf Kinder der UTHMANN (Paul, Heinrich, Hans, Barbara, Mechthilde), wenn man nur weiß, dass die Namen mit dem Anfangsbuchstaben H aufeinanderfolgen?

Aufgabe 3.2. BARBARA UTHMANN war Eigentümerin mehrerer Gebäude Annabergs. Dazu gehörten auch das heutige „Haus des Gastes“, die Stadtbibliothek, das Cafè „Anna“ und das Haus der „Freien Presse“. Touristen möchten einige dieser Häuser besichtigen.

a) Ermittle alle verschiedenen Möglichkeiten der Auswahl, wenn sie genau zwei der vier Häuser besichtigen möchten bzw. wenn sie genau drei der vier Häuser besichtigen möchten.

b) Zum Besitz der UTHMANN gehörte auch ein Bergarbeiterhaus. Ermittle alle verschie-denen Möglichkeiten der Auswahl, wenn die Touristen in mindestens drei der fünf ange-gebenen Häuser gehen möchten, wobei in jedem Fall das Bergarbeiterhaus dabei ist.

(Hinweis: Wenn eine „Auswahl“ von Dingen interessiert, ist keine Reihenfolge zu beachten.)

ADAM-RIES-Wettbewerb 2003

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1: Folgende Abkürzungen werden verwendet:
Ungarische Währung: Gulden ufl ; Rheinische Währung: Gulden fl; Schilling ß ; Heller hel .

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): 15 ufl = 20 fl, also (15 : 5 =) 3 ufl = (20 : 5 =) 4 fl.
Da 513 ufl = 3 · 171 ufl erhält man dafür (4 · 171 =) **684 fl**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): 20 fl = 15 ufl, also (20 : 5 =) 4 fl = (15 : 5 =) 3 ufl.
Da 604 fl = 4 · 151 fl erhält man dafür (3 · 151 =) **453 ufl**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): 3 ufl = 4 fl = (4 · 20 =) 80 ß = (80 · 12 =) 960 hel.
874 ufl = 873 ufl +1 ufl. Da 873 ufl = 3 · 291 ufl erhält man dafür (4 ·291 =) 1164 fl.
Für 1 ufl erhält man (1 **:** 3 ·960 =) 320 hel.
320 hel **=** 312 hel + 8 hel **=** (312 **:** 12 =) 26 ß + 8 hel **=** 20 ß + 6 ß + 8 hel **=** 1 fl + 6 ß + 8 hel

Somit erhält man für 874 ufl insgesamt **1165 fl und 6 ß und 8 hel**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Ries hat richtig gerechnet. Die Überprüfung kann durch eine Probe oder durch das Nachrechnen der Umwandlung erfolgen.

Probe: 433 ufl = 432 ufl + 1 ufl
Da 432 ufl = 3 · 144 ufl erhält man dafür (4 · 144 =) 576 fl.
Für 1 ufl erhält man 1 fl + 6 ß + 8 hel.

433 ufl + 13ß + 4 hel = 432 ufl + 1 ufl + 13ß + 4 hel
= 576 fl + 1 fl + 6 ß + 8 hel + 13ß + 4 hel = 577 fl + 19 ß + 12 hel = 577 fl + 20 ß = **578 fl**

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

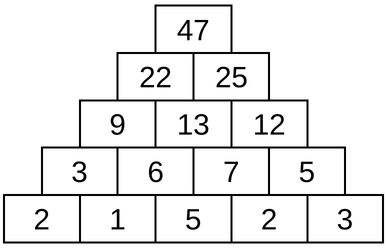


Abb.L1

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Abb. L1 zeigt die (einzig mögliche Lösung) der Aufgabe.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Ohne die „5“ lassen sich alle restlichen Felder der dritten und vierten Zeile eindeutig ausfüllen (vgl. Abb. L2).

Wir bezeichnen die Zahl im letzten Feld der zweiten Zeile mit x, die benachbarten Zahlen mit y und z. Wegen der „2“ in der letzten Zeile muss gelten: x ≥ 2. x wird maximal, wenn y minimal ist. y wird minimal, wenn z maximal wird. Da z ≤ 9, muss y ≥ 4 und daher x ≤ 8 sein.

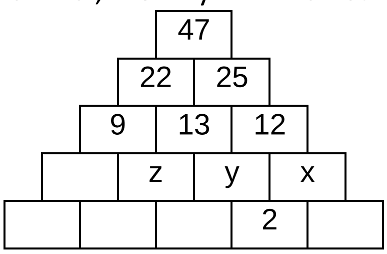


Abb.L2

Die Untersuchung der Pyramide für die Zahlen x = 2; 3; 4; 6; 7; 8 ergibt stets negative Werte für mindestens ein Feld. Somit ist die Lösung aus Aufgabe a) wiederum die einzig mögliche. Damit ist die Pyramide auch ohne „5“ noch eindeutig ausfüllbar.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c) Für konkrete Pyramiden mit vier aufeinanderfolgenden Zahlen lässt sich die obere Zahl einfach berechnen,
z.B. 0; 1; 2; 3 → 12

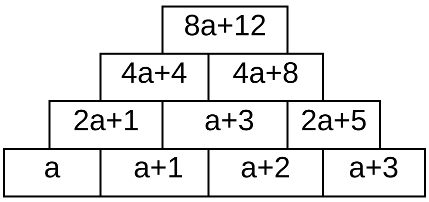


Abb.L3

1; 2; 3; 4 $\rightarrow$ 20
2; 3; 4; 5 $\rightarrow$ 28.

Man erkennt leicht den Zusammenhang zwischen der kleinsten der vier Zahlen a und der oberen Zahl, für die gilt: $8 \cdot a + 12$. Aus $8 \cdot a + 12 = 1500$ folgt $a = 186$.

Die vier Zahlen lauten demzufolge 186, 187, 188 und 189.

Variante: Bezeichnen wir mit a die kleinste der vier Zahlen, ergibt sich für die folgenden Zahlen a + 1; a + 2 und a + 3 (vgl. Abb. L3). Somit lässt sich die obere Zahl mit $8 \cdot a + 12$ berechnen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.1.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): In lexikographischer Anordnung ergeben sich folgende **24 verschiedene Reihenfolgen**:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Bei 5 Buchstaben kann jeder Buchstabe vorn stehen. Für die Verteilung der restlichen 4 Buchstaben ergeben sich dann jeweils 24 (siehe oben) Möglichkeiten. Somit gibt es für 5 Buchstaben ($5 \cdot 24 =$) **120 verschiedene Reihenfolgen**.

Die Anzahl der Reihenfolgen bei 12 Namen könnte man also durch $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ berechnen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für das Aufeinanderfolgen von Heinrich und Hans muss man folgendes beachten:

Heinrich und Hans können an 1./2., 2./3., 3./4. und 4./5. Stelle folgen $\rightarrow$ 4 Mögl.
Für die verbleibenden drei Kinder gibt es je 6 mögliche Reihenfolgen $\rightarrow$ 6 Mögl.
Heinrich und Hans können ihre Reihenfolge vertauschen $\rightarrow$ 2 Mögl.

Somit gibt es insgesamt ($4 \cdot 6 \cdot 2 =$) **48 verschiedene Anordnungen**.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.2. Folgende Abkürzungen werden verwendet: „Haus des Gastes“ G; Stadtbibliothek B; Cafe „Anna“ C; Haus der „Freien Presse“ F; Bergarbeiterhaus A.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Um aus BCFG genau zwei auszuwählen ergeben sich folgende 6 Möglichkeiten: BC, BF, BG, CF, CG, FG (Die Reihenfolge bleibt unberücksichtigt).

Um aus BCFG genau drei auszuwählen ergeben sich folgende 4 Möglichkeiten: BCF, BCG, BFG, CFG (Genau eins darf nicht ausgewählt werden).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wenn A auf alle Fälle besucht werden soll, muss man noch aus den vier Häusern BCFG mindesten 2 auswählen:

Auswahl von genau zwei Häusern (aus 4) $\rightarrow$ 6 Mögl. (siehe 3.1a)
Auswahl von genau drei Häusern (aus 4) $\rightarrow$ 4 Mögl. (siehe 3.1a)
Auswahl von genau vier Häusern (aus 4) $\rightarrow$ 1 Mögl.

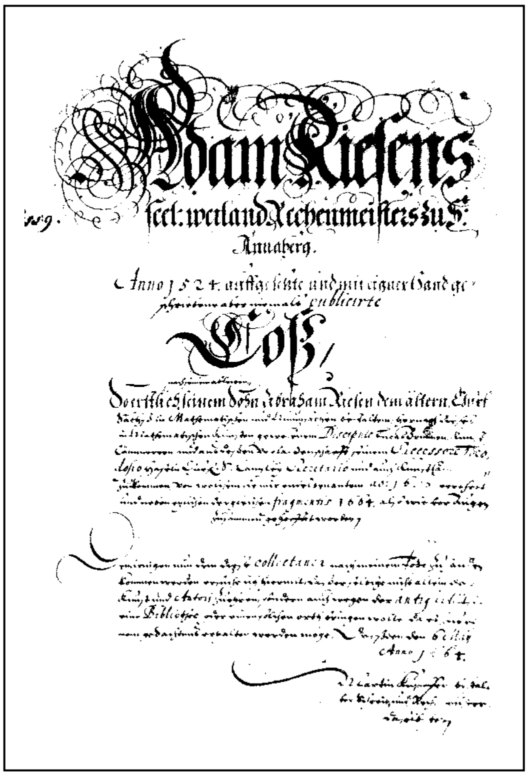
Somit gibt es insgesamt (6+4+1 =) **11 Möglichkeiten**.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2004

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1. Neben seinen drei Rechenbüchern hat ADAM RIES auch ein großes Algebra-Buch geschrieben, die **Coß**. Leider konnte Ries dieses Buch nie zum Druck bringen. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Titelblatt für die „Anno 1524 auffgesetzte und mit eigner Hand geschriebene aber niemals publicirte Coß“.


Adam Riesens
seel: weiland Rechenmeisters zu St. Annaberg.
Anno 1524 auffgesetzte und mit eigner Hand geschriebene aber niemals publicirte
Coß

Aus diesem bedeutenden Buch stammt die folgende Aufgabe, die in unserem heutigen Sprachgebrauch folgendermaßen lauten würde:

> Einer hat Weizen und Gerste, insgesamt 10 Scheffel.
> Ein Scheffel Weizen kostet 8 Schilling und zwei Scheffel Gerste kosten 1 Schilling.

(Das Scheffel ist ein zur damaligen Zeit gültiges Maß in Sachsen. Es wurde als Hohl-, aber auch als Flächenmaß verwendet.)

Für die Umrechnung der Münzen galt:
1 Gulden = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller.

a) Einer verkauft 5 Scheffel Weizen und 3 Scheffel Gerste.
Berechne, wie viel Geld er erhalten hat. Gib den Preis in Gulden, Schilling und Heller an.

b) Ein anderer verkauft Weizen und Gerste, von jedem die gleiche Menge. Er erhält dafür 1 Gulden und 14 Schilling.
Berechne, welche Menge Weizen und Gerste er verkauft hat.

1c) Ries stellt folgende Aufgabe:

> Beim Verkauf der gesamten 10 Scheffel Getreide erhält einer 50 Schilling.
> Nun frag ich, wie viel Gerste und Weizen es waren?

Löse diese Aufgabe.

Aufgabe 2. Der englische Schriftsteller und Mathematiker LEWIS CARROLL (1832-1898) ist vor allem durch sein Kinderbuch „Allice im Wunderland“ bekannt. Aber auch mit seinen Aufgaben zur Logik ist er populär geworden.

In einer Aufgabe leben miteinander verstrittene Gesellen in Nachbarhäusern, ein jeder in genau einem Haus. Sie ernähren sich aus Zauberbrunnen. Um sich nicht ins Gehege zu kommen, sucht jeder Geselle nach direkten Wegen vom Haus zu jedem der Brunnen, wobei kein Weg einen anderen kreuzt.

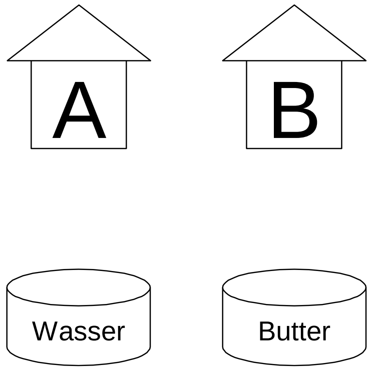


Abbildung 1

a) Zwei Gesellen A und B ernähren sich von zwei Zauberbrunnen; der eine Brunnen liefert Wasser, der andere Butter (vgl. Abb. 1).
Gib einen möglichen Verlauf der Wege von jedem Haus zu jedem Brunnen an.

b) Ein dritter Zauberbrunnen, der Marmelade liefert, kommt nun hinzu.
Gib einen möglichen Verlauf der Wege von jedem der beiden Häuser zu jedem der drei Brunnen an.

c) Für diese Teilaufgabe ist es nicht erforderlich, dass die Wege kreuzungsfrei verlaufen.

(1) Es ernähren sich 10 Gesellen aus fünf verschiedenen Brunnen.
Wie viele Wege (ohne Berücksichtigung der Kreuzungsfreiheit) sind erforderlich?

(2) Für eine weitere Anordnung sind von jedem Haus zu jedem Brunnen insgesamt 42 Wege erforderlich, wobei mehr Gesellen als Brunnen vorhanden sind.
Ermittle alle möglichen Anzahlen von Brunnen, die bei einer solchen Anordnung vorhanden sein können.

d) Drei Gesellen A, B und C ernähren sich nun von drei Zauberbrunnen. Untersuche, ob es möglich ist, einen kreuzungsfreien Verlauf der erforderlichen Wege zu schaffen. Begründe!

Aufgabe 3. In der Mathematik spielt das Suchen nach „Allen Möglichkeiten" oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du alle „Möglichkeiten" in folgenden Aufgaben zu finden.

Die Erfurter rechnen auf dem Abacus mit Rechenpfennigen, die wie folgt geprägt sind:


Bildnis des Adam Ries (**R**), Ansicht Annaberg (**A**), Ansicht Erfurt (**E**), Ansicht Staffelstein (**S**)

Aufgabe 3.1. Felix sammelt Rechenpfennige. Er besitzt von den oben genannten je einen und ordnet die vier nebeneinander an. Obenstehende Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung. Wir nutzen die obigen Bezeichnungen und schreiben kurz so: **RAES**

Belassen wir R an 1. Stelle und vertauschen die anderen, so ergeben sich folgende Anordnungen:
RAES REAS RSAE RASE RESA RSEA, also insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

a) Ordne die vier Rechenpfennige in allen verschiedenen Möglichkeiten an.
Wie viele Möglichkeiten sind das?
Tipp: Gehe systematisch vor, damit du alle Möglichkeiten findest.

b) Felix erwirbt bei einem Wettbewerb einen weiteren Rechenpfennig, der durch die Prägung das Erfurter Universitätstor (U) zeigt.
Überlege, wie viele verschiedene Anordnungen entstehen könnten, wenn Felix genau drei der fünf Rechenpfennige nebeneinander legt. Begründe dein Ergebnis.

Aufgabe 3.2. In der historischen „Erfurter Rechenschule“ befinden sich in einem Lederbeutel – wie zu Riesens Zeit – 15 Rechenpfennige mit der Stadtansicht Erfurt, 10 mit der Stadtansicht Annaberg und 5 mit der Stadtansicht Staffelstein. Du sollst aus diesem Beutel (ohne die Prägung zu erkennen), man sagt im „Finstern“, eine möglichst kleine Anzahl Rechenpfennige herausnehmen und sicher sein, dass sich unter den entnommenen Rechenpfennigen mindestens

a) einer mit der Stadtansicht Erfurt und einer mit der Stadtansicht Staffelstein befinden.
b) auf vieren die gleiche Stadtansicht befindet.

Tipp: Gehe in deinem Lösungsansatz vom „ungünstigsten Fall“ aus.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2004

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen werden verwendet:

Münzsorten: Gulden fl ; Schilling ß ; Heller hel ; Volumeneinheiten: Scheffel S.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):
- Kostet 1 S Weizen 8 ß, so kosten 5 S Weizen (5 · 8 =) 40 ß = 480 hel.
- Kosten 2 S Gerste 1 ß = 12 hel, so kosten 3 S Gerste (12 **:** 2 · 3 =) 18 hel.
- Somit kosten 5 S Weizen und 3 S Gerste zusammen (480 + 18 =) 498 hel.

Wir rechnen um: 498 hel = (41 · 12 + 6) hel = ((2 · 20 + 1) · **1**2 + 6) hel = **2 fl 1 ß 6 hel**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):
- 1 S Weizen kostet 8 ß = 96 hel. 1 S Gerste kostet 1/2 ß = 6 hel.
- 1 S Weizen und 1 S Gerste kosten zusammen (96 + 6 =) 102 hel.

Für 1 fl 14 ß = 34 ß = 408 hel wurden (408 **:** 102 =) **4 S Weizen und 4 S Gerste** verkauft.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wir bezeichnen mit x die Anzahl der verkauften Scheffel Weizen. Somit ist (10 · x) die Anzahl der verkauften Scheffel Gerste. x S Weizen kosten 96 · x hel. (10 · x) S Gerste kosten 6 · (10 · x) hel. Da 50 ß = 600 hel, muss gelten: 96 · x + 6 · (10 · x) = 600.

Durch systematisches Untersuchen aller möglichen Fälle kommt man zur Lösung dieser Gleichung.

Weizen		Gerste		Gesamtpreis in hel
Menge in S x	Preis in hel 96 · x	Menge in S (10 · x)	Preis in hel 6 · (10 · x)	
0	0	10	60	60 < 600 (entf.)
1	96	9	54	150 < 600 (entf.)
2	192	8	48	240 < 600 (entf.)
3	288	7	42	330 < 600 (entf.)
4	384	6	36	420 < 600 (entf.)
5	480	5	30	510 < 600 (entf.)
6	576	4	24	600=600
7	672	3	18	690 > 600 (entf.)
>7				entf.

Es wurden **6 Scheffel Weizen und 4 Scheffel Gerste** verkauft.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Abb. L1 zeigt einen möglichen Verlauf der der vier Wege von jedem Haus zu jedem Brunnen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Abb. L2 zeigt einen möglichen Verlauf der sechs Wege von jedem Haus zu jedem Brunnen.

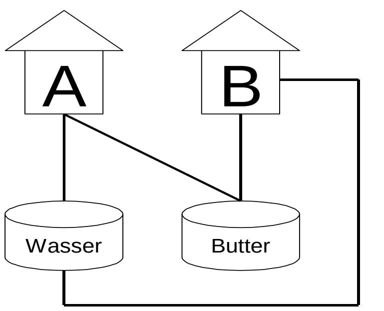


Abbildung L1

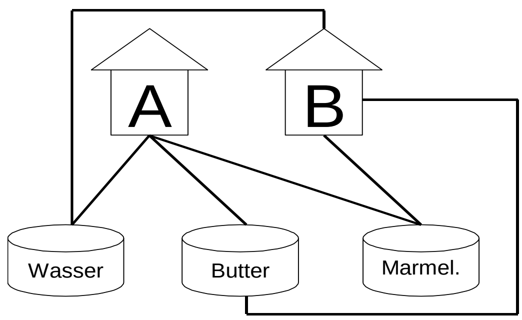


Abbildung L2

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):
(1) Wenn sich 10 Gesellen aus fünf verschiedenen Brunnen ernähren, muss von jedem der zehn Häuser zu jedem der fünf Brunnen genau ein direkter Weg existieren, also insgesamt: (10 · 5 =) **50 Wege**.

(2) Wir bezeichnen die Anzahl der Gesellen mit g und die Anzahl der Brunnen mit b. Für die Anzahl der Wege w gilt somit w = g · b. Somit sind alle Möglichkeiten der Darstellung von 42 als Produkt zweier natürlicher Zahlen g · b mit g > b gesucht.

Es gibt genau vier derartige Darstellungen: 42 = 42 · 1 = 21 · 2 = 14 · 3 = 7 · 6. Folglich können 1, 2, 3 oder 6 Brunnen vorhanden sein.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Es ist nicht möglich, einen kreuzungsfreien Verlauf der neun direkten Wege von jedem der drei Häuser zu jedem der drei Brunnen zu schaffen.

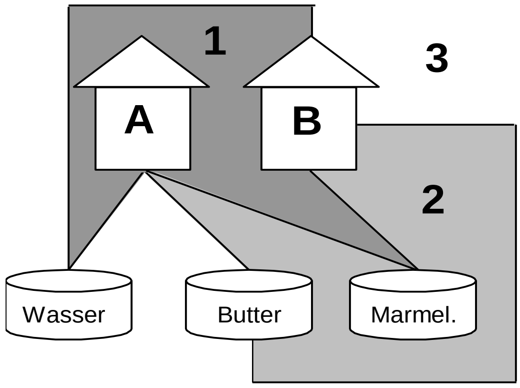


Abbildung L3

Begründung: Für zwei Häuser und drei Brunnen ist das Problem kreuzungsfrei lösbar (Aufg. b). Die Wege A-Wasser-B-Marmelade-A bzw. A-Butter-B-Marmelade-A ergeben in ihrer Nacheinanderausführung jeweils eine geschlossene Kurve. Diese beiden Kurven bilden die drei Gebiete 1, 2 und 3 (Abb. L3).

Fall 1: Geselle C befindet sich im Gebiet 1. Der Brunnen „Butter“ liegt außerhalb des Gebietes 1. Folglich ist ein Weg C-Butter nicht kreuzungsfrei möglich.
Fall 2: Geselle C befindet sich im Gebiet 2. Der Brunnen „Wasser“ liegt außerhalb des Gebietes 2. Folglich ist ein Weg C-Wasser nicht kreuzungsfrei möglich.
Fall 3: Geselle C befindet sich im Gebiet 3. Der Brunnen „Marmel.“ liegt außerhalb des Gebietes 3. Folglich ist ein Weg C-Marmel. nicht kreuzungsfrei möglich.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3
Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1a): In lexikographischer Reihenfolge ergeben sich folgende Möglichkeiten:

AERS	AESR	ARES	ARSE	ASER	ASRE
EARS	EASR	ERAS	ERSA	ESAR	ESRA
RAES	RASE	REAS	RESA	RSAE	RSEA
SAER	SARE	SEAR	SERA	SRAE	SREA

Somit gibt es insgesamt (4 · 6 =) 24 Möglichkeiten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1b): Es gibt genau 10 Möglichkeiten, aus den 5 Rechenpfennigen A, E, R, S ,U genau 3 auszuwählen:

AER, AES, AEU, ARS, ARU, ASU, ERS, ERU, ESU, RSU.

Es gibt genau 6 Möglichkeiten, 3 Rechenpfennige (z.B. A, E, R) nebeneinander zu ordnen:

AER, ARE, EAR, ERA, RAE, REA.

Folglich könnten insgesamt (10 · 6 =) 60 verschiedene Anordnungen entstehen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2: In dem Beutel sind Rechenpfennige mit 15 · E, 10 · A. 5 · S.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2a): Um sicher zu sein, beim Ziehen 1 · E und 1 · S zu erhalten, kann man im ungünstigsten Fall 10 · A und 15 · E nacheinander ziehen. Bei der nächsten Ziehung wird man mit Sicherheit ein S ziehen, womit das geforderte Ergebnis erreicht ist.

Folglich muss man mindestens (10 + 15 + 1 =) 26 Rechenpfennige entnehmen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2b): Um sicher zu sein, beim Ziehen vier Rechenpfennige mit der gleichen Stadtansicht zu erhalten, kann man im ungünstigsten Fall 3 · A, 3 · E und 3 · S nacheinander ziehen. Bei der nächsten Ziehung erhält man mit Sicherheit eine der drei Stadtansichten zum vierten Mal.

Folglich muss man mindestens (3 + 3 + 3 + 1 =) 10 Rechenpfennige entnehmen.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2005

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1. Ries verfasste mehrere Bücher. In seinem 2. Rechenbuch „Rechenung auff der linihen und federen" (1522) wollte er „dem gantzen Landt und der Jugent zum besten etwas schreiben" (Vorrede). Mit diesem Rechenbuch begründete Ries seinen Ruhm als „Rechenmeyster".

Eine Aufgabe zur Preisberechnung aus dem 2. Rechenbuch (leicht geändert) lautet wie folgt:

Ein Händler verkauft Wachs in Scheiben: Die große wiegt 4 Zentner 3 Stein 11 Pfund, die kleine 3 Zentner 1 Stein 11 Pfund. Er verkauft nur ganze Scheiben. 1 Zentner kostet 10 Gulden.

Hinweis: Zentner, Stein und Pfund waren zu Riesens Zeit Maße für die Masse. Gulden war eine Währung. Für die Umrechnung gilt:

1 Zentner = 5 Stein; 1 Stein = 22 Pfund.

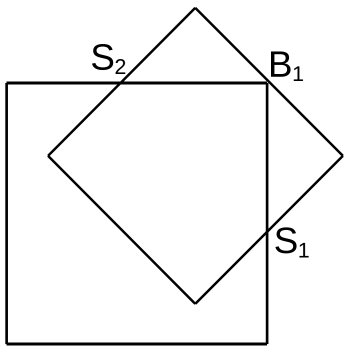
a) Einer kauft eine große Scheibe Wachs und eine kleine. Berechne, wie viel er bezahlen muss.

b) Ein anderer kauft für 132 Gulden nur Scheiben gleicher Größe. Berechne, wie viele Scheiben welcher Größe er kaufte.

c) Ein dritter hat 195 Gulden. Er will möglichst eine große Masse an Wachs kaufen. Berechne, wie viele Scheiben jeder Größe er kaufen sollte.

Aufgabe 2. Gegeben sind zwei Quadrate Q_1 und Q_2 . Das Quadrat Q_1 hat eine Seitenlänge von 5,0 cm, das Quadrat Q_2 hat eine Seitenlänge von 4,0 cm. Die beiden Quadrate sollen sich in solch einer Lage befinden, dass die Quadratseiten eine bestimmte Anzahl gemeinsamer Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) haben.

Die nebenstehende (nicht maßstäbliche) Skizze zeigt die beiden Quadrate Q_1 und Q_2 mit drei gemeinsamen Punkten, dem Berührungspunkt B_1 und den beiden Schnittpunkten S_1 und S_2.



a) Zeichne die beiden Quadrate Q_1 und Q_2 in solch einer Lage, dass sie
   (1) zwei gemeinsame Punkte,
   (2) vier gemeinsame Punkte und
   (3) fünf gemeinsame Punkte haben.

b) Die beiden Quadrate Q_1 und Q_2 sollen eine Lage mit sechs gemeinsamen Punkten haben. Gib für jede mögliche Anzahl von Schnitt- und Berührungspunkten eine Zeichnung an.

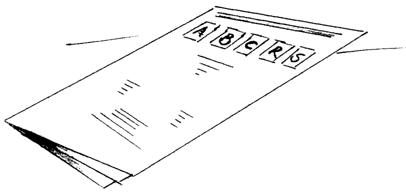
c) Ermittle die maximale Anzahl gemeinsamer Punkte der beiden Quadrate Q_1 und Q_2 und begründe, dass es keine größere Anzahl geben kann.

d) Das Quadrat Q_2 wird durch ein Quadrat Q_3 mit einer sehr kleinen Seitenlänge von nur wenigen Millimetern ausgetauscht.
Gib alle möglichen Anzahlen gemeinsamer Punkte zwischen den Quadraten Q_1 und Q_3 an und begründe, dass es keine größere Anzahl geben kann.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten! In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten" oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du alle Möglichkeiten in folgenden Aufgaben zu finden.

Die Kinder der „Annaberger Rechenschule" wollen für ihre Rechenschule werben. Ihnen stehen für die Gestaltung der Werbematerialien fünf Fotos mit folgenden Motiven zur Verfügung:

der **A**bacus (**A**);
Barbara Uthmann (**B**);
die **C**oß (**C**);
Rechenmeister Adam **R**ies (**R**);
die Annaberger Rechen**s**chule (**S**).



(Die Buchstaben in den Klammern sollst du in deinen Lösungswegen als Kurzbezeichnung für die Fotos benutzen.)

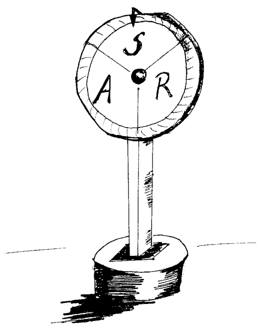
3.1 Die fünf Fotos sind in einer Bildzeile am oberen Rand eines Prospektes anzuordnen (vgl. Abbildung 1).

a) Schreibe alle möglichen verschiedenen Reihenfolgen auf, bei denen **R,** der Rechenmeister, als 1. Foto und **S**, die Rechenschule, als letztes erscheint, schreibe so: R _ _ _ S.

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt, wenn die Fotos R und S (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge) nebeneinander platziert werden sollen, die anderen Fotos an den übrigen Plätzen?

3.2 Drei der fünf Fotos sollen für die Gestaltung eines Flyers ausgewählt werden (d.h. die Reihenfolge spielt hierbei keine Rolle).
Schreibe alle verschiedenen Möglichkeiten der Auswahl auf.

3.3 Am Eingang der „Rechenschule" wird ein Glücksrad aufgestellt, das so funktioniert: Eine Scheibe, gestaltet mit den Fotos **A**, **R** und **S** (siehe Skizze), wird gedreht. Nach dem Stillstand der Scheibe zeigt der Zeiger (Pfeil) auf ein Bild.



(Sollte der Zeiger zufälligerweise nicht exakt auf genau ein Foto zeigen, ist der Versuch ungültig und das Drehen wird wiederholt).

Der Besucher der Rechenschule soll das Glücksrad dreimal drehen und nach jedem Stillstand der Scheibe den Namen des Bildes aufschreiben, auf das der Zeiger zeigt. So könnten z.B. folgende Bildfolgen entstehen: ARA, RAS, ...

a) Schreibe alle möglichen Bildfolgen auf, in denen ein Foto genau zweimal erscheint.

b) Wie viele verschiedene Bildfolgen gibt es insgesamt?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2005

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen werden verwendet:
Münzsorten: Gulden fl . Einheiten der Masse: Zentner z, Stein s, Pfund p.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die große Scheibe hat eine Masse von 4z 3s 11p. Die kleine Scheibe hat eine Masse von 3z 1s 11p. Beide Scheiben haben (unter Beachtung der Umrechnungen 22 p = 1 s und 5s = 1 z) eine Masse von

(4 + 3 =) 7z (3 + 1 =) 4s (11 + 11 =) 22p = 7z 5s = 8z.

Kostet 1 z Wachs 10 fl, so kosten 8z Wachs (8 · 10 =) **80 fl**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): 1z = 5s Wachs kostet 10 fl. 1s = 22p Wachs kostet (10 : 5 =) 2 fl. (22 : 2 =) 11p Wachs kostet (2 : 2 =) 1 fl.

Die große Scheibe mit einer Masse von 4z 3s 11p kostet $(4 \cdot 10 + 3 \cdot 2 + 1 =)$ 47 fl.
Die kleine Scheibe mit einer Masse von 3z 1s 11p kostet $(3 \cdot 10 + 1 \cdot 2 + 1 =)$ 33 fl.

Da 132 nicht durch 47 teilbar ist, aber 132 durch 33 teilbar ist, hat der Händler nur kleine Scheiben gekauft, und zwar (132 : 33 =) **4 Stück**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wir bezeichnen mit x und y die Anzahl der gekauften kleinen und großen Scheiben Wachs.

Die Masse der kleinen Scheibe beträgt 3z 1s 11p = $((3 \cdot 5 + 1) \cdot 22 + 11 =)$ 363p.
Die Masse der großen Scheibe beträgt 4z 3s 11p = $((4 \cdot 5 + 3) \cdot 22 + 11 =)$ 517p.

Für 2 fl erhält man 22p Wachs, für 195 fl erhält man $(22 : 2 \cdot 195 =)$ 2145p Wachs.

Durch systematisches Untersuchen aller möglichen Fälle lässt sich bei vorgegebenen Werten für x der maximal mögliche Wert für y ermitteln.

kleine Scheibe		große Scheibe		Gesamtmasse in p
Anzahl x	Masse in p 363x	Anzahl y	Masse in p 517y	
0	0	4	2068	2068
1	363	3	1551	1914
2	726	2	1034	1760
3	1089	2	1034	2123
4	1452	1	517	1969
5	1815	0	0	1815

Die größte Masse Wachs erzielt man beim Kauf von **3 kleinen und 2 großen** Scheiben.

<u>*Variante:*</u> Eine möglichst große Masse an Wachs hat man gekauft, wenn das nach dem Kauf verbleibende Restgeld möglichst klein ist.

Da eine große Scheibe 47 fl und eine kleine 33 fl kosten, ergibt sich für das Restgelt folgender Zusammenhang: $195 - (33 \cdot x + 47 \cdot y) \rightarrow min$. Auch hier lässt sich durch systematisches Untersuchen aller möglichen Fälle in tabellarischer Form die Lösung der Aufgabe finden.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungsbeispiele für Teilaufgabe a): Abb. 1-3 zeigen Beispiele möglicher Lagebeziehungen:

(1)

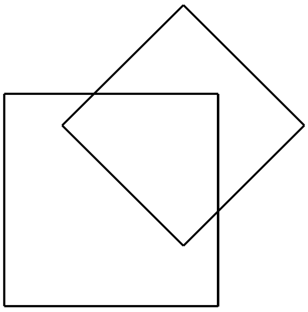


Abb. 1

zwei gemeinsame Punkte

(2)

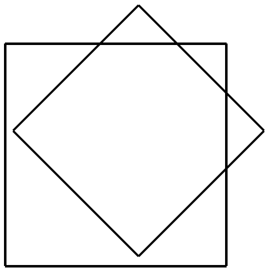


Abb. 2

vier gemeinsame Punkte

(3)

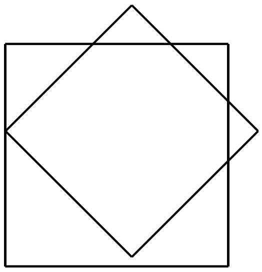


Abb. 3

fünf gemeinsame Punkte

Lösungsbeispiele zur Teilaufgabe b):

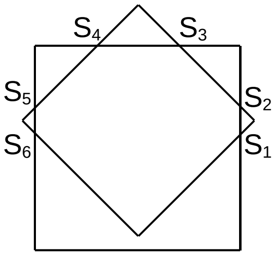


Abb. 4

sechs Schnittpunkte

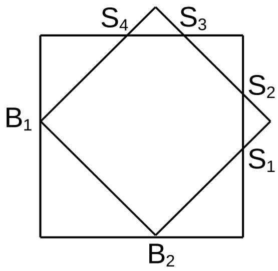


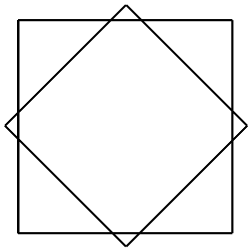
Abb. 5

vier Schnittpunkte

zwei Berührungspunkte

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es sind maximal acht gemeinsame Punkte möglich (vgl. Abb. 6).

Begründung: Da im Quadrat alle Innenwinkel rechte Winkel sind, kann jede Seite Q_2 höchstens zwei Seiten von Q_1 schneiden. Somit sind höchstens $(4 \cdot 2 =)$ **8 gemeinsame Punkte** möglich.



Q1 Abb. 6

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Es sind **0, 1, 2, 3 oder 4 gemeinsame Punkte** möglich.

Begründung: Für noch so kleine Seitenlängen von Q_3 kann dieses Quadrat in einer Ecke von Q_1 so angeordnet werden, dass es vier gemeinsame Punkte gibt (vgl. Abb. 7).

Die kleine Seitenlänge reicht aber nicht aus, um eine der beiden noch nicht geschnittenen Seiten von Q_1 zu erreichen.

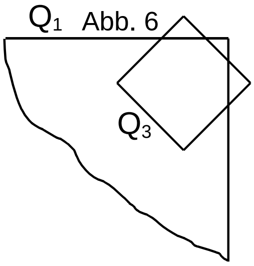


Abb. 7

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1.a): In lexikographischer Reihenfolge ergeben sich folgende Möglichkeiten:

RABCS RBACS RCABS
RACBS RBCAS RCBAS

Somit gibt es insgesamt (3 · 2 =) **6 Möglichkeiten**.

b) Da R und S nebeneinander platziert werden, kann man sie als ein Foto betrachten. Für die Anordnung der 4 Fotos A, B, C und RS gibt es (4 · 3 · 2 =) 24 Möglichkeiten. Da R und S auch vertauscht werden kann, gibt es zu jeder der 24 Möglichkeiten wieder 2 Varianten.

Insgesamt gibt es somit (24 · 2 =) **48 verschiedene Möglichkeiten**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2.: In lexikographischer Reihenfolge ergeben sich folgende Möglichkeiten:

ABC	BCR	CRS
ABR	BCS	
ABS	BRS	
ACR		
ACS		
ARS		

Somit gibt es insgesamt **10 Möglichkeiten**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.3.a): AAR, ARA, RAA, AAS, ASA, SAA, RRA, RAR, ARR, RRS, RSR; SRR, SSA, SAS, ASS, SSR, SRS, RSS.

Somit gibt es insgesamt **18 mögliche Bildfolgen**.

c) Die Gesamtzahl ergibt sich aus den möglichen Bildfolgen, in denen ein Foto genau einmal (6), genau zweimal (18) bzw. genau dreimal (3) erscheint.

Somit gibt es insgesamt (6 + 18 + 3 =) **27 verschiedene Bildfolgen**.

Variante: Beim ersten Drehen gibt es 3 Möglichkeiten (A, R oder S). Beim zweiten Drehen gibt es für jede der 3 Möglichkeiten wieder 3 Möglichkeiten, insgesamt (3 · 3 =) 9 Möglichkeiten. Beim dritten Drehen gibt es für jede der 9 Möglichkeiten wieder 3 Möglichkeiten, insgesamt (9 ·3 =) 27 Möglichkeiten.

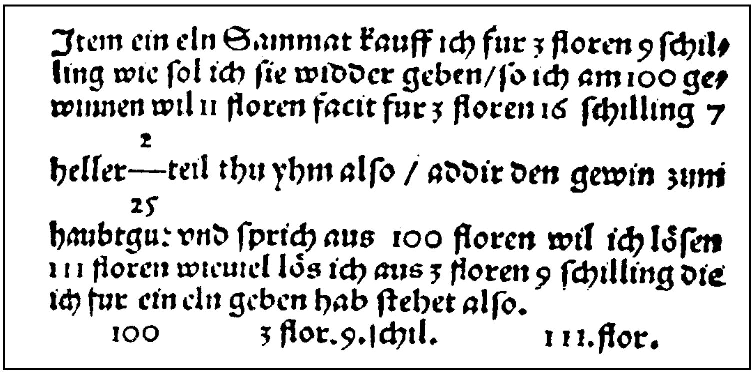
ADAM-RIES-Wettbewerb 2006

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1. Adam Ries stellt in seinem 1522 erschienenen zweiten Rechenbuch Aufgaben, in denen durch Kauf und Verkauf von Waren ein Gewinn erzielt werden soll.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Originaltext einer solchen Aufgabe mit Lösung. In unserem heutigen Sprachgebrauch (Zahlen geändert) würde sie wie folgt lauten:


Item ein eln Sammat kauff ich fur 3 floren 9 schil-
ling wie sol ich sie widder geben/so ich am 100 ge-
winnen wil 11 floren facit fur 3 floren 16 schilling 7 $\frac{2}{25}$ heller—teil thu yhm also / addir den gewin zum
haubtgut: vnd sprich aus 100 floren wil ich lösen
111 floren wievil lös ich aus 3 floren 9 schilling die
ich fur ein eln geben hab stehet also.
100 3 flor.9.schil. 111.flor.

Ein Händler kauft Samt, die Elle für 3 Gulden und 8 Schillinge. Er möchte allen Samt wieder verkaufen und dabei einen Gewinn erzielen.

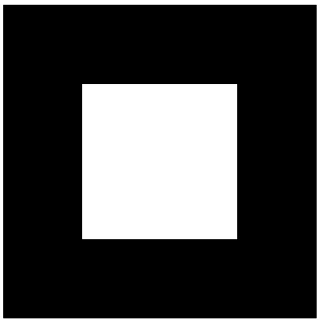
Die Elle war zu Riesens Zeit ein gebräuchliches Längenmaß.
Für die Umrechnung der Münzen galt: 1 Gulden = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller.

a) Der Händler kauft Samt für 85 Gulden. Berechne, wie viel Ellen Samt er gekauft hat.

b) Ein anderes Mal kauft er eine bestimmte Menge Samt und verkauft diese wieder für 4 Gulden und 6 Heller die Elle. Er erzielt dabei einen Gewinn von 15 Gulden.
Berechne, mit wie viel Ellen Samt er gehandelt hat.

c) Ries stellt in seiner Aufgabe folgende Frage: Zu welchem Preis muss der Händler die Elle Samt wieder verkaufen, wenn er 25 Gulden Gewinn an 100 Gulden erzielen möchte?
Löse diese Aufgabe.

Aufgabe 2. Aus einem Quadrat ist ein kleineres Quadrat ausgeschnitten. Die Seitenlänge des kleineren Quadrates ist halb so lang wie die des größeren. Die beiden Quadrate liegen so, dass sie den gleichen Mittelpunkt haben und ihre Seiten zueinander parallel sind. Es entsteht ein sogenannter Quadratring (vgl. nebenstehende Abbildung).



Der Quadratring soll durch Geraden so zerlegt werden, dass die Teilstücke von gleicher Form und Größe sind.

a) Zerlege den Quadratring durch 2 Geraden in 4 Teilstücke.
Gib eine weitere Lösung an und begründe, dass es noch weitere Lösungen gibt.

b) Zerlege den Quadratring durch 3 Geraden in 6 Teilstücke.

c) Zerlege den Quadratring durch 4 Geraden in 8 Teilstücke.

d) Zerlege den Quadratring durch 6 Geraden in 12 Teilstücke.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten! In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du alle Möglichkeiten in folgenden Aufgaben zu finden.

Die „KÄT“ ist das größte Volksfest im oberen Erzgebirge und lockt alljährlich Tausende zum vergnüglichen Treiben auf den Festplatz von Annaberg-Buchholz. Auch **A**nna, **B**runo, **C**arola, **D**anilo und **E**lena bummeln vom Karussell zur Geisterbahn und dann zum Autoscooter. (Die Anfangsbuchstaben der Namen sollst du in deinen Lösungswegen als Kurzbezeichnung benutzen.) Dabei interessieren sie sich für „alle Möglichkeiten“ und ihr sollt folgende Aufgaben lösen:

3.1 Die Fünf wollen Karussell fahren. Genau vier Sitze sind hintereinander frei.

Schreibe alle verschiedenen Möglichkeiten auf, wenn Bruno, Carola, Danilo und Elena fahren. Schreibe so: BCDE, BCED, ...

Wie viele verschiedene Möglichkeiten von Reihenfolgen gibt es insgesamt, wenn jeweils vier der Fünf fahren würden?

Bei wie vielen dieser Reihenfolgen sitzen Anna und Bruno auf aufeinanderfolgenden Sitzen?

3.2 Die Fünf gehen zur Geisterbahn. Hier können in jeder „Kabine“ höchstens drei Platz nehmen. Drei der Fünf nehmen in einer Kabine Platz, zwei in einer anderen. Wer mit wem?

Finde alle verschiedenen Möglichkeiten.
(Tipp: Du findest alle Möglichkeiten am schnellsten, wenn du mit der „Besatzung“ der Zweierkabine beginnst.)

3.3 Nun wollen die Fünf Autoscooter fahren. Je zwei können zusammen in einem „Auto“ sitzen. Die Kinder fahren gleichzeitig in drei „Autos“. Wieder interessiert: Wer mit wem?

Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Verteilungen gibt es insgesamt?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2006
Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1: Folgende Abkürzungen werden verwendet: Münzsorten: Gulden fl , Schilling ß, Heller hel. Einheiten der Masse: Zentner z, Stein s, Pfund p.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Händler kauft Samt für 85 fl, also für $(85 \cdot 20 =)$ 1700 ß. 1 Elle Samt kostet im Einkauf 3 fl 8 ß, also $(3 \cdot 20 + 8 =)$ 68 ß. Demzufolge kauft er $(1700 : 68 =)$ **25 Ellen** Samt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):
1 Elle Samt kostet dem Händler im Einkauf 3 fl 8 ß, also $((3 \cdot 20 + 8) \cdot 12 =)$ 816 hel je Elle.
1 Elle Samt verkauft der Händler für 4 fl 6 hel, also für $((4 \cdot 20 \cdot 12) + 6 =)$ 966 hel je Elle.
Für jede Elle Samt erzielt er einen Gewinn von $(966 - 816 =)$ 150 hel.
Der Händler erzielt einen Gewinn von 15 fl, also $(15 \cdot 20 \cdot 12 =)$ 3600 hel.
Folglich hat er mit $(3600 : 150 =)$ **24 Ellen** Samt gehandelt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Ries schreibt in der Lösung seiner Aufgabe wie folgt:

„Mach's so: Addiere den Gewinn zum Grundwert und sprich: Von 100 fl will ich 125 fl erhalten. Wie viel erhalte ich von 3 fl 8 ß, die ich für 1 Elle bezahlt habe?
Aus 100 fl will ich 125 fl erhalten, aus 4 fl will ich also 5 fl erhalten.
Aus 4 ß will ich demzufolge auch 5 ß erhalten.
Aus $(3 \cdot 20 + 8 =)$ 68 ß will ich folglich $(68 : 4 \cdot 5 =)$ 85 ß, also 4 fl 5 ß erhalten."

Der Händler muss die Elle Samt für **4 fl 5 ß** wieder verkaufen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungsbeispiele zur Teilaufgabe a): Abb. 1 und 2 zeigen zwei verschiedene Lösungen.

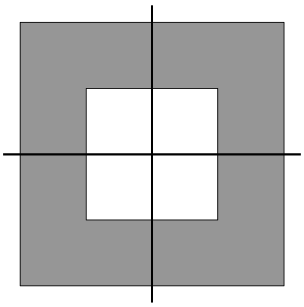


Abb. 1

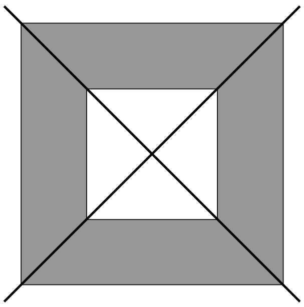


Abb. 2

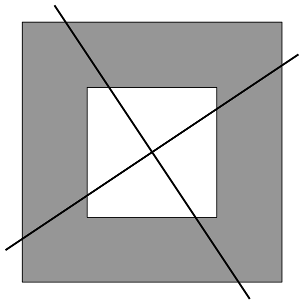


Abb. 3

Begründung für weitere Lösungen: Die senkrecht aufeinander stehenden, zerlegenden Geraden werden um ihren Schnittpunkt, der mit dem Mittelpunkt der Quadrate übereinstimmt, gedreht. Die Geraden teilen jede der vier großen Quadratseiten in zwei Strecken. Diese Strecken sind bei jeder Quadratseite gleich groß. Gleiches erfolgt mit den kleinen Quadratseiten (vgl. Abb. 3). Daher haben alle vier Teile die gleichen Längen- und Winkelabmessungen. Sie stimmen in Form und Größe überein.

Lösungsbeispiele zu den Teilaufgaben b) bis d):

b) Abb. 4 zeigt eine mögliche Lösung.

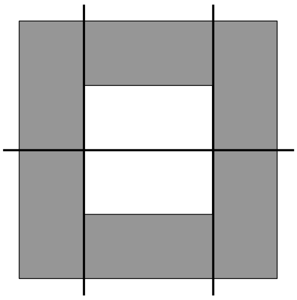


Abb. 4

c) Abb. 5 zeigt eine mögliche Lösung.

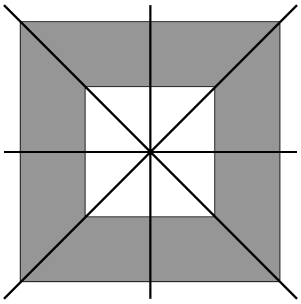


Abb. 5

d) Abb. 6 zeigt eine mögliche Lösung.

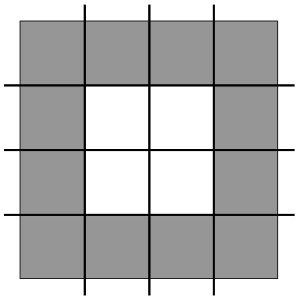


Abb. 6

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1.: In lexikographischer Reihenfolge ergeben sich folgende Möglichkeiten:

BCDE	BCED	BDCE	BDEC	BECD	BEDC
CBDE	CBED	CDBE	CDEB	CEBD	CEDB
DBCE	DBEC	DCBE	DCEB	DEBC	DECB
EBCD	EBDC	ECBD	ECDB	EDBC	EDCB

Wenn Anna nicht mitfährt, ergeben sich 24 Möglichkeiten (vgl. obige Auflistung). Die gleiche Anzahl von Möglichkeiten ergeben sich auch jeweils, wenn Bruno, Carola, Danilo bzw. Elena nicht mitfahren. Folglich gibt es insgesamt $(5 \cdot 24 =)$ **120 verschiedene Möglichkeiten**, wenn jeweils vier der Fünf fahren.

Da A und B auf aufeinanderfolgenden Sitzen platziert werden, kann man beide als eine „Person" betrachten, die auf einem Sitz platziert wird. Somit können drei „Personen" auf drei Plätze verteilt werden, wofür sich $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten ergeben. Da AB eine andere Reihenfolge als BA darstellt, verdoppelt sich die Anzahl der Reihenfolgen auf 12. Diese Anzahl ergibt sich jeweils, wenn Carola, Danilo bzw. Elena nicht mitfahren. Folglich gibt es $(12 \cdot 3 =)$ **36 verschiedene Reihenfolgen**, wenn sich Anna und Bruno auf aufeinanderfolgenden Sitzen platzieren.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2.: Es gibt folgende **10 Möglichkeiten**:

$AB - CDE$, $AC - BDE$, $AD - BCE$, $AE - BCD$,
$BC - ADE$, $BD - ACE$, $BE - ACD$,
$CD - ABE$, $CE - ABD$,
$DE - ABC$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.3.: Da fünf Personen mit drei Autos fahren, müssen in zwei Autos je zwei und in einem Auto genau eine Person fahren.

- Um das „Einerauto" zu besetzen, gibt es 5 Möglichkeiten.
- Um ein „Zweierauto" dann mit den vier verbleibenden Personen zu besetzen, gibt es 6 Möglichkeiten.
- Um das andere „Zweierauto" mit den zwei verbleibenden Personen zu besetzen, verbleibt nur noch eine Möglichkeit.

Somit gibt es insgesamt $(5 \cdot 6 \cdot 1 =)$ **30 Möglichkeiten** der Verteilung.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2007

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.


Rechnung auff der linihen gemacht durch Adam Rieſen vonn Staffelſteyn/ in maſſen man es pflegt tzu lern in allen rechenſchulen gruntlich begriffen anno 1518. vleyſigklich vberleſen/ vnd zum andern mall in trugk vorfertiget.

Getruckt zu Erffordt zcum Schwartzen Horn. 1525.

Aufgabe 1. Im 1518 verfassten 1. Rechenbuch von ADAM RIES (nebenstehende Abb. zeigt die Titelseite der zweiten Auflage aus dem Jahr 1525) stellt Ries auch Aufgaben zum Fuhrlohn.

Ein Händler muss dem Fuhrunternehmen für den Transport von Waren auf Grund der transportierten Masse und der Länge des Transportweges einen Fuhrlohn zahlen (Bei einer Vergrößerung der Masse als auch des Transportweges vergrößert sich der Fuhrlohn in gleichem Maße).

In unserem heutigen Sprachgebrauch (Zahlen geändert) würde solch eine Aufgabe wie folgt lauten:

Ein Händler bezahlt für den Transport von 6 Zentnern Waren über eine Entfernung von 7 Meilen 1 Gulden, 4 Pfund und 6 Pfennige.

Die Meile war zu Zeiten von Ries ein gebräuchliches Streckenmaß. Mit Zentner wurde die Masse angegeben.

Gulden, Pfund und Pfennig waren Einheiten des Geldes. Für ihre Umrechnung galt:
1 Gulden = 7 Pfund, 1 Pfund = 30 Pfennig.

a) Begründe, dass beim Transport von 2 Zentnern Waren über eine Entfernung von 21 Meilen der gleiche Fuhrlohn gezahlt werden muss wie beim Transport von 6 Zentnern über 7 Meilen.

   Berechne den Fuhrlohn, der für den Transport von 18 Zentnern Waren über eine Entfernung von 14 Meilen bezahlt werden muss.
   Wandle das Ergebnis vollständig in Gulden, Pfund und Pfennige um.

b) Adam Ries stellt in seiner Aufgabe folgende Frage: Wie viele Meilen kann man 15 Zentner Waren für einen Fuhrlohn von 8 Gulden transportieren?
   Löse diese Aufgabe.

Aufgabe 2. Tim und Tom lösen ein SUDOKU (Abb.1). In einem Zahlenfeld von 3×3 Blöcken enthält jeder Block 3×3 Felder. Somit besteht ein Sudoku aus 9 waagerechten Zeilen und 9 senkrechten Spalten, also 81 Feldern.

Ein Sudoku ist gelöst, wenn in jedem Feld eine der Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen ist, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jedem Block jede der Zahlen von 1 bis 9 nur genau einmal vorkommt.

35 Zahlen sind bereits vorgegeben.

Zur besseren Orientierung bezeichnen wir die Blöcke in fortlaufender, zeilenweiser Zählung mit Block 1 bis Block 9, die Zeilen mit kleinen Buchstaben von a bis i, die Spalten mit großen Buchstaben von A bis I und die Felder demzufolge mit aA bis iI.

a) Tim erkennt beim Ausfüllen des Sudokus 1 (Abb. 1), dass das Feld eH mit 2 und das Feld iH mit 7 belegt werden muss. Begründe!

   Er schlussfolgert nun die Belegungen bH mit 3, bI mit 6 und bE mit 5. Begründe!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
a	9		6	1		8		4	
b	2	8	4	9		7	1		
c		3						5	8
d		6		2	7			9	
e					6		4		3
f		4			9	5		6	
g		2						8	
h	4		8		2		3	1	
i						9	5		2

Abb. 1

b) Tom erkennt, dass nun im Block 2 noch die Zahlen 2, 3, 4 und 6 fehlen. Er stellt fest, dass man die Zahl 2 eindeutig eintragen kann und schlussfolgert die Felder für die anderen Zahlen.
   Fülle den Block 2 des Sudokus 1 aus.

c) Tim und Tom erkennen, dass es manchmal hilfreich ist, blockweise die fehlenden Zahlen aufzuschreiben. Für jede dieser Zahlen wird überprüft, ob in dem Block ein freies Feld existiert, in deren Zeile und Spalte diese Zahl noch nicht vorkommt.

   Fülle so die Blöcke 5, 6, 9 und 3 des Sudokus 1 in dieser Reihenfolge aus.

d) Löse das Sudoku 1 vollständig.

e) Meist sind Sudokus eindeutig lösbar, das heißt, es gibt nur genau eine Lösung. In Abb.2 wurde genau eine Zahl des Sudo-kus 1 geändert. Im Feld aA wurde die Zahl 9 durch eine 5 ersetzt.

   Untersuche, ob nun das Sudoku 2 (Abb. 2) eindeutig lösbar ist.

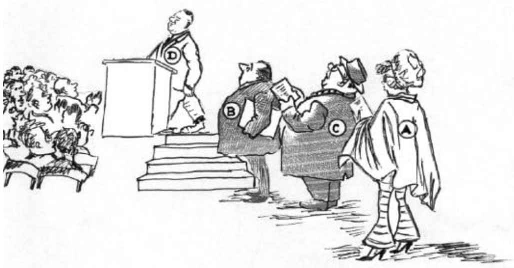
5		6	1		8		4	
2	8	4	9		7	1		
	3						5	8
	6		2	7			9	
				6		4		3
	4			9	5		6	
	2						8	
4		8		2		3	1	
					9	5		2

Abb.2

Aufgabe 3 - so viele Möglichkeiten! In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du alle Möglichkeiten in folgenden Aufgaben zu finden.

Der Adam-Ries-Bund veranstaltet in Anna-berg-Buchholz regel-mäßig Kolloquien. Mathematiker und Historiker haben die Möglichkeit über ihre Forschungsergebnisse zu berichten.
Nehmen wir an, dass sich zu einem dieser Kolloquien fünf Referenten, nennen wir sie A, B, C, D und E, angemeldet haben.

a) Zwei sollen vormittags, drei nachmittags sprechen.



Schreibe alle verschiedene Möglichkeiten hierfür auf. Schreibe z.B. so: AB-CDE, ... (d.h.: vormittags sprechen AB, nachmittags CDE. Beachte, dass die Reihenfolge hierbei keine Rolle spielt; so wäre BA-CED keine weitere Möglichkeit.)

Ein weiterer Referent, nämlich F, hat sich angemeldet.

b) Vormittags sollen wiederum zwei Referate gehalten werden, aber nachmittags vier.

Zeige, wie du (recht schnell) auf die insgesamt 15 verschiedenen Möglichkeiten kommen kannst.

Wir betrachten im Folgenden nur den Nachmittag des Kolloquiums, an dem A, B, C und D referieren. Nun soll die Reihenfolge der Referate von Interesse sein.

c) Bei wie vielen aller verschiedenen Reihenfolgen ist D der erste Referent?

d) Von den Referenten wird gewünscht, dass D nicht als Letzter spricht und dass A nicht unmittelbar nach B vorträgt.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen des Vortragens ergeben sich unter diesen Bedingungen?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2007

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen werden verwendet:

Einheiten der Masse:	Zentner cen;
Einheiten des Weges:	Meile m;
Einheiten des Geldes:	Gulden fl , Pfund p, Pfennige pf.

Die Angabe 1/5/8 bedeutet 1 fl, 5 p und 8 pf.

Begründung zur Teilaufgabe a): Zum Transport von 6 cen Waren über 7 m beträgt der Fuhrlohn 1/4/6. 2 cen Waren sind der dritte Teil von 6 cen $\rightarrow$ dritter Teil des Fuhrlohnes.
21 m sind das Dreifache von 7 m $\rightarrow$ dreifacher Fuhrlohn. Der dritte Teil und das Dreifache des Fuhrlohnes heben sich gerade auf $\rightarrow$ gleicher Fuhrlohn.

18 cen Waren sind das Dreifache von 6 cen $\rightarrow$ dreifacher Fuhrlohn.
14 m sind das Doppelte von 7 m $\rightarrow$ doppelter Fuhrlohn.
Der dreifache und der doppelte Fuhrlohn $\rightarrow$ sechsfacher Fuhrlohn.
Es gilt: $6 \cdot (1/4/6) =$ 6/24/36=6/25/6=9/4/6

Es muss ein Fuhrlohn von **9 Gulden, 4 Pfund und 6 Pfennig** gezahlt werden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): 8 fl entsprechen (8/0/0=0/56/0=0/0/1680) 1680 pf.

Der Fuhrlohn für 6 cen Waren über 7 m beträgt (1/4/6=0/11/6=0/0/336) 336 pf.

Für $(6:2 =)$ 3 cen Waren über 7 m beträgt der Fuhrlohn $(336:2 =)$ 168 pf.
Für $(3 \cdot 5 =)$ 15 cen Waren über 7 m beträgt der Fuhrlohn $(168 \cdot 5 =)$ 840 pf.
Für 15 cen Waren bei Fuhrlohn von $(840 \cdot 2 =)$ 1680 pf beträgt die Entfernung $(7 \cdot 2 =)$ 14 m.

Demzufolge kann man 15 Zentner Waren für einen Fuhrlohn von 8 Gulden über eine Entfernung von **14 Meilen** transportieren.

Zur Lösungsfindung eignet sich die folgende Tabelle.

Masse der Ware in cen	Länge der Strecke in m	Fuhrlohn in pf	Rech-nung
6	7	336	:2
3	7	168	·5
15	7	840	·2
15	**14**	1680	

Lösungsvariante: 15 cen sind das $2\frac{1}{2}$-fache von 6 cen. 8 fl sind das 5-fache von 1/4/6. Demzufolge muss die Entfernung das Doppelte von 7 m, also 14 m sein.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. $eH \rightarrow 2$ bedeutet, dass dem Feld eH eindeutig die Zahl 2 zugeordnet wird.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):

Begründung für $eH \to 2$ und $iH \to 7$: In Spalte H fehlen die Zahlen 2, 3 und 7. Die 2 steht bereits in Zeile b und Zeile i. Damit gilt: $eH \to 2$.In Spalte H fehlen nun die Zahlen 3 und 7. Die 7 steht bereits in Zeile b. Damit gilt: $iH \to 7$.

Begründung für $bH \to 3$, $bI \to 6$ und $bE \to 5$: In Spalte H fehlt nun die Zahl 3. Damit gilt: $bH \to 3$. In Zeile b fehlen nun die Zahlen 5 und 6. Die 6 steht bereits in Spalte E. Damit gilt: $bI \to 6$. In Zeile b fehlt nun die Zahl 5. Damit gilt: $bE \to 5$.

Lösungshinweise zu den Teilaufgaben b) und c): Untenstehende Abb. zeigen die vollständig ausgefüllten Blöcke 2, 5, 6, 9 und 3.

	D	E	F
a	**1**	3	**8**
b	**9**	5	**7**
c	6	4	2

Block 2

	D	E	F
d	**2**	**7**	4
e	8	**6**	1
f	3	**9**	**5**

Block 5

	G	H	I
d	8	**9**	5
e	**4**	2	**3**
f	7	**6**	1

Block 6

	G	H	I
g	6	**8**	4
h	**3**	**1**	9
i	**5**	7	**2**

Block 9

	G	H	I
a	2	**4**	7
b	**1**	3	6
c	9	**5**	**8**

Block 3

Lösung zur Teilaufgabe d): Nebenstehende Abb. 1 zeigt das vollständig und eindeutig ausgefüllte Sudoku 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
a	**9**	5	**6**	**1**	3	**8**	2	**4**	7
b	**2**	**8**	**4**	**9**	5	**7**	**1**	3	6
c	1	**3**	7	6	4	2	9	**5**	**8**
d	3	**6**	1	**2**	**7**	4	8	**9**	5
e	7	9	5	8	**6**	1	**4**	2	**3**
f	8	**4**	2	3	**9**	**5**	7	**6**	1
g	5	**2**	9	7	1	3	6	**8**	4
h	**4**	7	**8**	5	**2**	6	**3**	**1**	9
i	6	1	3	4	8	**9**	**5**	7	**2**

Abb. 1

Lösungshinweise zur Teilaufgabe e): Das Sudoku 2 lässt sich ohne Verwendung des Feldes aA=5 analog dem Sudoku 1 bis zum Stand in Abb. 2 eindeutig ausfüllen. Mit Verwendung des Feldes aA=5 gilt: $aB \to 9$. Ein eindeutiges Ausfüllen der weiteren Felder ist nicht möglich.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
a	**5**	9	**6**	**1**	3	**8**	2	**4**	7
b	**2**	**8**	**4**	**9**	5	**7**	**1**	3	6
c	1	**3**	7	6	4	2	9	**5**	**8**
d	3	**6**	1	**2**	**7**	4	8	**9**	5
e				8	**6**	1	**4**	2	**3**
f	8	**4**	2	3	**9**	**5**	7	**6**	1
g		**2**			1	3	6	**8**	4
h	**4**		**8**		**2**	6	**3**	**1**	9
i	6	1	3	4	8	**9**	**5**	7	**2**

Abb. 2

In Zeile h und in Spalte B fehlen jeweils die Zahlen 5 und 7.

Fall 1 ($hB \to 5$): Es folgt zwangsläufig $hD \to 7$, $eB \to 7$, $gD \to 5$. In Spalte A fehlen nun die Zahlen 7 und 9. Die 7 steht bereits in Zeile e. Damit gilt: $gA \to 7$. Es folgt zwangsläufig $eA \to 9$, $eC \to 5$ und $gC \to 9$.

Fall 2 ($hB \to 7$): Es folgt zwangsläufig $hD \to 5$, $eB \to 5$, $gD \to 7$. In Spalte A fehlen nun die Zahlen 7 und 9. Die 7 steht bereits in Zeile g. Damit gilt: $gA \to 9$. Es folgt zwangsläufig $eA \to 7$, $eC \to 9$ und $gC \to 5$. Auch in diesem Fall lässt sich das Sudoku wieder eindeutig ausfüllen.

Damit ist gezeigt, dass sich das Sudoku 2 **nicht eindeutig** ausfüllen lässt. Fall 1 und 2 liefern zwei verschiedene Lösungen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, müssen zwei Referenten (aus 5) für den Vormittag ausgewählt werden, die für den Nachmittag ergeben sich dann zwangsläufig. Es ergeben sich folgende **10 Möglichkeiten**:

AB – CDE			
AC – BDE	BC – ADE		
AD – BCE	BD – ACE	CD – ABE	
AE – BCD	BE – ACD	CE – ABD	DE – ABC

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Nachweis: Zu den 10 Möglichkeiten aus Aufgabe a) kann F mit jedem der 5 bisher angemeldeten Referenten am Vormittag sprechen (AF, BF, CF, DF und EF). Folglich ergeben sich 5 weitere Möglichkeiten (die für den Nachmittag ergeben sich wiederum zwangsläufig), insgesamt also **15 Möglichkeiten**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wenn D der erste Referent ist, ergeben sich die verschiedenen Reihenfolgen aus den Anordnungen der verbleibenden drei Referenten. Dadurch gibt es $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ **6 Reihenfolgen**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Für die vier Nachmittagsreferenten gibt es insgesamt $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24 Reihenfolgen.

Bed. 1: Da A nicht unmittelbar nach B vortragen soll, entfallen diese Reihenfolgen. In dem Fall kann A und B als „eine Person“ BA betrachtet werden. Für die Anordnung der 3 Personen BA, C und D gibt es $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten. $\rightarrow$ Es entfallen 6 Reihenfolgen.

Bed. 2: Da D nicht als Letzter sprechen soll, entfallen 6 Reihenfolgen. Von diesen 6 Möglichkeiten erfüllten bereits 2 die Bed.1. $\rightarrow$ Es entfallen $(6 - 2 =)$ 4 Reihenfolgen.

Folglich ergeben sich $(24 - 6 - 4 =)$ **14 Reihenfolgen** des Vortragens.

Lösungsvariante: Es gibt für die Referenten A, B, C und D folgende 24 Möglichkeiten:

~~ABCD~~	~~BACD~~	~~CABD~~	DABC
ABDC	~~BADC~~	CADB	DACB
~~ACBD~~	~~BCAD~~	~~CBAD~~	~~DBAC~~
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	~~CDBA~~	~~DCBA~~.

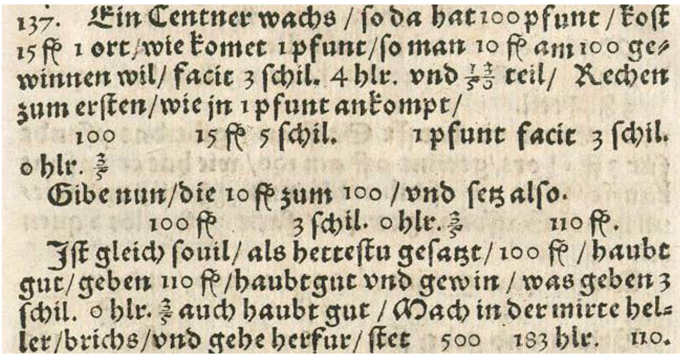
Von diesen Reihenfolgen werden die gestrichen, die Bedingung 1 oder Bedingung 2 nicht erfüllen. Es verbleiben 14 Möglichkeiten.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2008

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Aufgabe aus dem im Jahre 1550 erschienenen dritten Rechenbuch von ADAM RIES, der Practica. Der einleitende Text der Aufgabe (Zahlen geändert) lautet:


137. Ein Centner wachs / so da hat 100 pfunt / kost 15 fl 1 ort / wie komet 1 pfunt / so man 10 fl am 100 gewinnen wil / facit 3 schil. 4 hlr. vnd $\frac{13}{55}$ teil / Rechen zum ersten / wie jn 1 pfunt ankompt / 100 15 fl 5 schil. 1 pfunt facit 3 schil. 0 hlr. $\frac{3}{5}$ Gibe nun / die 10 fl zum 100 / vnd setz also. 100 fl 3 schil. 0 hlr. $\frac{3}{5}$ 110 fl. Ist gleich souil / als hettestu gesatzt / 100 fl / haubt gut / geben 110 fl / haubtgut vnd gewin / was geben 3 schil. 0 hlr. $\frac{3}{5}$ auch haubt gut / Mach in der mitte heller / brichs / vnd gehe herfur / stet 500 183 hlr. 110.

> Ein Zentner Wachs, das 100 Pfund hat,
> kostet 17 Gulden und zwei Ort.

Zurzeit als Adam Ries lebte, bezahlte man mit Gulden, Schilling und Heller. Mit Ort bezeichnete man ein Viertel des Guldens. Für die Umrechnung galt:

> 1 Gulden entspricht 4 Ort (Viertel),
> 1 Ort entspricht 5 Schilling und
> 1 Schilling entspricht 12 Heller.

Löse folgende Aufgaben:

a) Rechne den Preis für die 100 Pfund Wachs in Schilling um.

b) Ries stellt folgende Frage: Wie viel kostet 1 Pfund Wachs?
Löse diese Aufgabe und gib den Preis in Schilling und Heller an.

c) Einer kauft Wachs für 7 Gulden.
Berechne, wie viel Pfund Wachs er gekauft hat.

Aufgabe 2. Tim und Tom beschäftigen sich mit dem Logikspiel SIKAKU. In einem rechteckigen Quadratgitter sind in einigen Quadraten Zahlen eingetragen. Das Sikaku ist gelöst, wenn das Quadratgitter längs der Gitterlinien so vollständig in Rechtecke zerlegt ist, dass

(1) jedes Rechteck genau eine Zahl enthält,
(2) diese Zahl angibt, wie viele Gitterquadrate das Rechteck enthält,
(3) sich keine der Rechtecke überlappen.

a) Die Abbildung zeigt ein solches Sikaku 1 mit einem Quadratgitter aus sieben waagerechten Zeilen und sieben senkrechten Spalten. Zur besseren Orientierung bezeichnen wir die Zeilen mit kleinen Buchstaben von a bis g, die Spalten mit großen Buchstaben von A bis G und die Gitterquadrate demzufolge mit aA bis gG.

	A	B	C	D	E	F	G
a	3			3			9
b							
c	6						
d				3		2	
e	2			6	2		
f	2	3			2		6
g							

Sikaku 1

Tim und Tom beginnen jeder mit dem Zerlegen ihres Sikakus 1. Sie sind bestrebt nur solche Rechtecke zu zeichnen, deren Lage eindeutig bestimmt ist.

Tim markiert als erstes ein 2   3 Rechteck aus den 6 Gitterquadraten cA, cB, cC, dA, dB und dC (2   3 Rechteck bedeutet, dass Rechteck besteht aus 2 Zeilen und 3 Spalten).

Tom markiert als erstes ein 3   3 Rechteck aus den 9 Gitterquadraten aE, aF, aG, bE, bF, bG, cE, cF und cG.

Beurteile die Anfänge von Tim und Tom bezüglich ihrer Eindeutigkeit. Begründe!

Tom setzt seine Zerlegung folgendermaßen fort:
3   2 Rechteck mit den Gitterquadraten eF, eG, fF, fG, gF und gG,
3   2 Rechteck mit den Gitterquadraten eC, eD, fC, fD, gC und gD,
1   2 Rechteck mit den Gitterquadraten dF und dG,
2   1 Rechteck mit den Gitterquadraten dE und eE,
1   3 Rechteck mit den Gitterquadraten dB, dC und dD.
Anschließend löst er das Sikaku vollständig.

Vollziehe die von Tom durchgeführte Lösung des Sikakus 1 nach (Umrande die entstehenden Rechtecke und färbe sie).

b) Tim möchte nun das Sikaku 2 lösen. Leider kann er die Zahl im doppelt umrandeten Feld nicht lesen.

Begründe, dass dort die Zahl 9 stehen   muss. Trage diese ein.

Tim sucht nach einem Anfang. Ihm fällt auf, dass Rechtecke mit 9 Gitterquadraten gut geeignet sind, da es nur 1   9, 3   3 und 9   1 Rechtecke geben kann.

Ermittle alle Anzahlen von Gitterquadraten bis 30, für die es genau drei verschiedene Rechtecke gibt.

Löse das Sikaku 2 (Umrande die entstehenden Rechtecke und färbe sie).

							2		
						3	2		
	6	3			9		2		9
	4		3						
3			2	2	3			$\boxed{}$	
		2							
6						2			
			3					3	
3				3	4				
		3	4				3		2

Sikaku 2

c) Tom möchte für seine kleinere Cousine Madleen selbst ein Sikaku entwerfen. Er nutzt dazu ein Quadratgitter aus drei Zeilen und drei Spalten. Die Zahlen „1“ und „9“ sollen in diesem Sikaku nicht vorkommen.

Zeichne alle verschiedenen solchen Sikakus und begründe, dass es keine weiteren geben kann (Zwei Sikakus heißen verschieden, wenn sie nicht durch Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgegangen sind).

Aufgabe 3. In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du alle Möglichkeiten in folgenden Aufgaben zu finden.

Die Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz pflegt Traditionen ihrer mehr als 500-jährigen Geschichte auch in der Form, dass sich Handwerker aus der frühen Stadtgeschichte auf dem Markt dem bunten Treiben vieler Schaulustiger stellen.
Weißt du, was **B**öttger, **F**ärber, **G**ürtler, **K**orbmacher, **L**ohgerber und **P**icher leisteten?

In den folgenden Aufgaben sind **alle Möglichkeiten** von Reihenfolgen und Auswahlen der B, F, G, K, L, P (das sind die Kurzbezeichnungen obiger Berufe) aus mathematischer Sicht von Interesse. Also aufgepasst beim Probieren und Zählen.

a) Der Marketingchef der Stadt will an der Längsseite des Marktes B, F und L nebeneinander platzieren und an der Breitseite P und K.

Schreibe alle verschiedenen Anordnungen auf. Schreibe so: BFL-PK, BLF-PK, ...

(Beginne beim Betrachten der Reihenfolgen immer an der „Längsseite" des Marktes, siehe Bild.)

G soll nun zusätzlich an der Breitseite des Marktes platziert werden. Wiederum ist die Reihenfolge der sechs Handwerker von der Längsseite aus bis zur Breitseite zu betrachten.
Wie viele verschiedene Anordnungen ergeben sich insgesamt?

b) Lena und Hanna besuchen den Handwerkermarkt. Lena will genau vieren der sechs Handwerker zuschauen. Sie überlegt, welche Möglichkeiten der Auswahl sie hätte (es kommt hierbei nicht auf die Reihenfolge an, so ist z.B. BLGK gleich LKBG).

Entwickle eine Systematik des Aufschreibens aller verschiedenen Auswahl-möglichkeiten. Schreibe alle Möglichkeiten auf.

Hanna sagt zu Lena: „Wenn ich genau zweien der sechs Handwerker zuschauen möchte, habe ich genau so viele Möglichkeiten wie du."
Hat Hanna recht? Begründe deine Antwort.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2008

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen werden verwendet:
Münzsorten: Gulden fl , Ort o, Schilling ß, Heller hel; Einheiten der Masse: Pfund p.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da 1 fl = 4 o, gilt 17 fl = 68 o. Folglich sind 17 fl 2 o also 70 o. Da 1 o = 5 ß, gilt 70 o = 350 ß.
Der Preis für 100 Pfund Wachs beträgt **350 Schilling**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): 100 Pfund Wachs kosten 350 ß. Da 1 ß = 12 hel, gilt 350 ß = 4200 hel. 100 Pfund Wachs kosten 4200 hel, folglich kostet 1 Pfund Wachs 42 hel. 42 hel = 3 ß 6 hel.
1 Pfund Wachs kostet **3 Schilling und 6 Heller**.

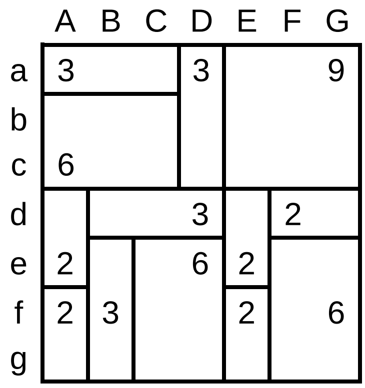
Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): 1 Pfund Wachs kostet 42 hel. Da 1 fl = 4 o, 1 o = 5 ß und 1 ß = 12 hel, gilt 1 fl = 240 hel. Da 1 fl = 240 hel, gilt 7 fl = 1680 hel.
Folglich kann man für 7 fl **40 Pfund Wachs** kaufen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Anfang von Tim ist **nicht eindeutig**. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein Rechteck mit dem Feld cA bestehend aus 6 Gitterquadraten zu markieren, nämlich:

1 6 Rechteck (cA, cB, cC, cD, cE, cF),
2 3 Rechteck (bA, bB, bC, cA, cB, cC oder cA, cB, cC, dA, dB, dC),
3 2 Rechteck (bA, bB, cA, cB, dA, dB).

Der Anfang von Tom ist **eindeutig**. Es gibt nur genau eine Möglichkeit, ein 3 3 Rechteck mit dem Feld aG bestehend aus 9 Gitterquadraten zu markieren.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die (eindeutige) Lösung des Sikakus 1.



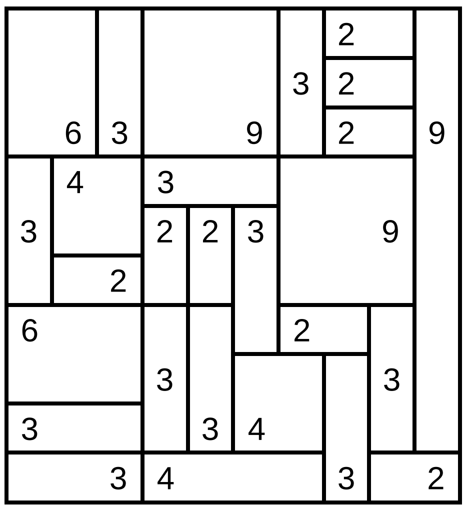
Sikaku 1

Begründung zur Teilaufgabe b): Das Sikaku 2 besteht aus 100 Gitterquadraten. Bei einer vollständigen Zerlegung müssen folglich Rechtecke aus insgesamt 100 Gitterquadraten entstehen. Die Summe aller muss 100 betragen. Da die Summe aller eingetragenen Zahlen 91 beträgt, muss in dem Feld die **Zahl 9** stehen.

Durch Untersuchen aller möglichen Fälle ergeben sich folgende Anzahlen von Gitterquadraten mit **drei Rechtecken**:

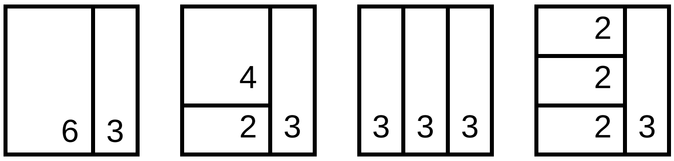
4 (1 4, 2 2, 4 1)
9 (1 9, 3 3, 9 1)
25 (1 25, 5 5, 25 1)

(Wie man leicht erkennt können nur Quadratzahlen eine ungerade Anzahl von Rechtecken hervorrufen.)



Sikaku 2

Die nebenstehende Abbildung zeigt die (eindeutige) Lösung des Sikakus 2.



Lösung 1 Lösung 2 Lösung 3 Lösung 4

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es existieren genau **vier verschiedene Sikakus**, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen (Lösung 1-4).

Begründung: Für die Anzahl n der Einheitsquadrate der entstehenden Rechtecke gilt: 1 < n < 9. Durch systematisches Untersuchen aller möglichen Fälle für n ergibt sich folgende Tabelle (kommutative Rechtecke werden nicht berücksichtigt):

Fall	n	Restfelder	Bem.	Begr.
1	8		entf.	8×1, 4×2
2	7		entf.	7 1
3	**6 (3 2)**	**3 (3 1)**	**Lösung 1**	
4	5		entf.	5 1
5	**4 (2 2)**	**5 (3 1, 2 1)**	**Lösung 2**	
6	3 (3 1)	6 (3 2)	vgl. Fall 3	
7	**3 (3 1)**	**6 (3 1, 3 1)**	**Lösung 3**	
8	**2 (2 1)**	**7 (2 1, 2 1, 3 1)**	**Lösung 4**	

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es ergeben sich die folgenden **12 verschiedenen Anordnungen**, nämlich 6 an der Längsseite und 2 an der Breitseite (6 · 2 = 12):

, , , , , , sowie
, , , , , .

Durch die zusätzliche Berücksichtigung von G an der Breitseite ändern sich die 6 Möglichkeiten an der Längsseite nicht. Für die Anordnung von P, K und G an der Breitseite ergeben sich 6 Möglichkeiten. Folglich ergeben sich insgesamt **36 Anordnungen**.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Bei dieser Aufgabe geht es um ein Auswahlproblem (vier von sechs), bei dem die Reihenfolge keine Rolle spielt. Unter Berücksichtigung des lexikografischen Ordnens von B, F, G, K, L und P kann man zu folgender, verallgemeinerungsfähigen Zählmethode kommen:

BF GK, BF GL, BF GP 3	BF KL, BF KP 2	BF LP 1	(= 6 Mögl.)
	BG KL, BG KP 2	BG LP 1	(= 3 Mögl.)
		BK LP 1	(= 1 Mögl.)
	FG KL, FG KP 2	FG LP 1	(= 3 Mögl.)
		FK LP 1	(= 1 Mögl.)
		GK LP 1	(= 1 Mögl.)

Durch geschickte Gruppenbildung ergeben sich (6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1 = **15 Möglichkeiten**.

Hanna hat Recht.
Begründung: Lena wählt vier von sechs Handwerkern aus, also zwei nicht. Hanna wählt zwei von sechs Handwerkern aus, also vier nicht. Hanna könnte folglich immer genau die auswählen, die Lena nicht gewählt hat. Sie würden folglich die gleiche Anzahl von Möglichkeiten erhalten.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2009

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Die Neunerprobe ist ein Verfahren zum Nachweis einer fehlerhaften Addition, Subtraktion oder Multiplikation. Adam Ries forderte bei vielen seiner Aufgaben eine Probe. In einem seiner Bücher, der Coß, erläutert Ries an einem Beispiel die Neunerprobe.

(Die abgebildete Briefmarke erschien 1992 anlässlich seines 500. Geburtstages und zeigt die Neunerprobe.)

a) Den Neunerrest einer Zahl (Rest bei Division der Zahl durch 9) erhält man, indem man alle Ziffern dieser Zahl addiert (Quersumme). Ist das Ergebnis größer als 9, so addiert man ihre Ziffern wiederum (Quersumme der Quersumme) und führt das so lange fort, bis eine einstellige Zahl übrig bleibt. Diese Zahl ist der Neunerrest.

   Zeige, dass die Zahl 2375 den Neunerrest 8 hat.
   Ermittle den Neunerrest der Zahl 47 598.

b) Adam Ries beschreibt die Neunerprobe einer Additionsaufgabe wie folgt:

   Mache ein Kreuz $\times$ *zum ersten.*
   Nimm den Neunerrest vom ersten Summanden. Setze ihn in das linke Feld des Kreuzes.
   Nimm den Neunerrest vom zweiten Summanden. Setze ihn in das rechte Feld.
   Addiere beide Reste. Setze das Ergebnis in das obere Feld des Kreuzes.
   Nimm den Neunerrest von der Summe. Setze ihn in das untere Feld des Kreuzes.
   Stimmen das obere und das untere Feld nicht überein, so hast du falsch gerechnet.

   Führe die Neunerprobe für die folgenden Aufgaben (1) und (2) durch:

   (1) $7\,869 + 8\,769 = 16\,368$ (2) $12\,469 + 26\,389 = 38\,758$

   Von den nachfolgenden Aussagen A1 oder A2 ist genau eine wahr. Rechne die Aufgaben (1) und (2) schriftlich nach und entscheide, welche Aussage wahr ist.

   A1: Wenn bei der Neunerprobe das obere und das untere Feld übereinstimmen, dann hat man richtig gerechnet.
   A2: Wenn bei der Neunerprobe das obere und das untere Feld nicht übereinstimmen, dann hat man falsch gerechnet.

c) Die Neunerprobe kann man auch für Multiplikationsaufgaben anwenden. Übertrage das Verfahren der Neunerprobe auf die Multiplikation und zeige, dass damit der Rechenfehler in der Aufgabe (3) gefunden werden kann:

   (3) $11 \cdot 21 = 221.$

   Von den folgenden Aufgaben (4) und (5) ist genau eine falsch gelöst. Untersuche mit der Neunerprobe, welche Aufgabe falsch gelöst ist.

   (4) $7\,453 \cdot 165 = 1\,229\,745$ (5) $7\,453 \cdot 165 = 1\,228\,745$

Aufgabe 2. Zahlen, deren Zahlensystemdarstellung von vorne und von hinten gelesen den gleichen Wert haben, nennt man Palindromzahlen oder symmetrische Zahlen.

Jede einstellige natürliche Zahl ist eine Palindromzahl. 55, 121, 2552 und 15251 sind weitere Beispiele solcher Zahlen

a) Gib alle Palindromzahlen von 10 bis 200 an.

b) Ermittle die Anzahl aller Palindromzahlen, die genau drei Stellen haben.

Ein Kraftfahrer beobachtet den Kilometerzähler seines Autos, der fünf Stellen anzeigt.

c) Der Kilometerzähler zeigt gerade einen Stand von 34043 an.

„Was für ein Zufall“, denkt der Fahrer. „Es wird sicherlich lange dauern, bis der nächste symmetrische Kilometerstand angezeigt wird“.

Ermittle, wie viel Kilometer der Kraftfahrer bis zum nächsten symmetrischen Kilometerstand fahren muss.

Gib an, wie viel Kilometer der Kraftfahrer seit dem letzten symmetrischen Kilometerstand gefahren ist.

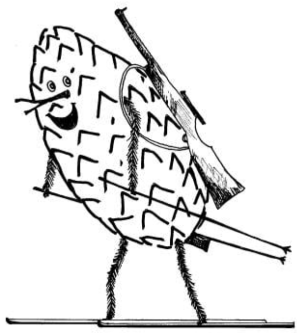
d) Über das Problem der Anzeige aufeinander folgender, fünfstelliger symmetrischer Kilometerangaben äußern die Fahrzeuginsassen folgende Meinungen:

Tim: Das ist einfach. Alle 100 km muss es solch eine symmetrische Kilometerangabe geben.

Tom: Es gibt verschiedene Differenzen benachbarter symmetrischer Kilometerangaben.

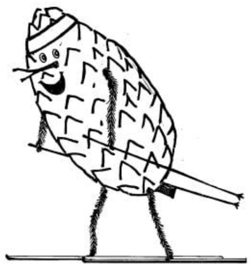
Madleen: Alle 110 Kilometer gibt es mindestens eine symmetrische Kilometerangabe.

Untersuche, welche der Aussagen wahr ist. Begründe!



Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten! An der Eliteschule des Wintersports in Oberwiesenthal trainieren Kinder und Jugendliche in genau einer der Sportarten Biathlon (**B**), Langlauf (**L**), Nordische Kombination (**N**), Rennschlitten (**R**) oder Skispringen (**S**). Tatjana Hüfner, Claudia Künzel-Nystad, Eric Frenzel und viele weitere erfolgreiche Wintersportathleten nutzten in dieser Schule die optimalen Bedingungen zum Lernen und für den Leistungssport.

In den folgenden Aufgaben sind alle Möglichkeiten von Reihenfolgen und Auswahlen der B, L, N, R, S (das sind die Kurzbezeichnungen obiger Sportarten) aus mathematischer Sicht von Interesse. Also aufgepasst beim Probieren und Zählen.



a) Auf der Trainingsstrecke am Fichtelberg sind ein Langläufer, ein Biathlet und ein Nordisch Kombinierter unterwegs. Sie beschließen in allen möglichen Reihenfolgen hintereinander zu laufen.

Eine mögliche Reihenfolge ist: Biathlet (B), Langläufer (L), Nordisch Kombinierter (N). Unter Verwendung der Kurzschreibweise der Sportarten kann man das so schreiben: BLN.

Schreibe alle verschiedenen Reihenfolgen, in der die drei Sportler hintereinander laufen können, in Kurzschreibweise auf.

Ein weiterer Langläufer schließt sich der Gruppe an. Die vier Sportler überlegen, wie viele verschiedene Reihenfolgen nun möglich sind. Bei wie vielen dieser Reihenfolgen laufen die beiden Langläufer hintereinander?

b) Der Kurort Oberwiesenthal lädt Schulteams (max. 8 Teammitglieder) zum Schneefigurenwettbewerb ein. Natürlich wollen die Sportler der Eliteschule dabei sein und bilden ein Team.

In folgenden Aufgaben ist zu betrachten, welche Wintersportart die Teammitglieder betreiben. So bedeutet z.B.: „L“, alle Teammitglieder sind Langläufer; „BR“, die Teammitglieder sind Biathleten oder Rennschlittensportler.

Schreibe alle die verschiedenen Möglichkeiten auf, bei denen die Teammitglieder genau zwei verschiedenen Sportarten der oben genannten 5 Sportarten angehören. (Tipp: Versuche eine Systematik zu finden.)

Begründe, dass die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, bei denen die Teammitglieder genau dreien der fünf Sportarten angehören, mit der Anzahl der mit genau zweien der fünf Sportarten übereinstimmt.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Teambildung, bezogen auf die Sportart der Teammitglieder, ergeben sich insgesamt? Begründe!

ADAM-RIES-Wettbewerb 2009

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

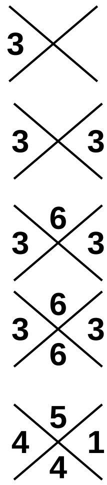
Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir bezeichnen den Neunerrest einer Zahl a mit $R_9(a)$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):

Neunerrest für 2375: $R_9(2375)=R_9(2+3+7+5)=R_9(17)=R_9(1+7)=R_9(8)=8$

Neunerrest für 47598: $R_9(47598)=R_9(4+7+5+9+8)=R_9(33)=R_9(3+3)=R_9(6)=\mathbf{6}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):



Neunerprobe für (1):

$R_9(7869)=R_9(7+8+6+9)=R_9(30)=R_9(3+0)=R_9(3)=3$

$R_9(8769)=R_9(8+7+6+9)=R_9(30)=R_9(3+0)=R_9(3)=3$

$R_9(7869)+R_9(8769)=3+3=6$

$R_9(16368)=R_9(1+6+3+6+8)=R_9(24)=R_9(2+4)=R_9(6)=6$

Neunerprobe für (2):

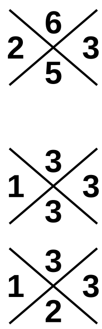
$R_9(12469)+R_9(26389)=4+1=5\neq 4=R_9(38758)$

Schriftliche Addition für (1):	schriftliche Addition für (2):
7 869	12 469
+ 8 769	+ 26 389
16 638	38 858

Aussage A1 ist falsch. Bei der Neunerprobe von (1) stimmen das obere und untere Feld überein, die schriftliche Addition zeigt jedoch ein falsches Ergebnis.

Folglich muss **Aussage A2 wahr** sein. Die Untersuchung zu (2) ist ein Beispiel für die Wahrheit dieser Aussage (falsche Neunerprobe und falsches Ergebnis).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):



Neunerprobe für (3):

$R_9(11)\cdot R_9(21)=2\cdot 3=6\neq 5=R_9(221)$

Neunerprobe für (4):

$R_9(7453)\cdot R_9(165)=1\cdot 3=3=3=R_9(1229745)$

Neunerprobe für (5):

$R_9(7453)\cdot R_9(165)=1\cdot 3=3\neq 2=R_9(1228745)$

Schlussfolgerung: Neunerprobe falsch → Multiplikationsaufgabe **(5) falsch** gelöst.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die Palindromzahlen zwischen 10 und 200 lauten:

11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99; 101; 111; 121; 131; 141; 151; 161; 171; 181 und 191.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Jede dreistellige Palindromzahl kann man in der Form (1) $\overline{aba}\ (a \neq 0)$ darstellen. Folglich sind für a die Ziffern 1; 2; ...; 9 und für b die Ziffern 0; 1; ...; 9 möglich. Für jede der 9 Zahlen mit a als Hunderter- und als Einerziffer gibt es genau 10 Möglichkeiten, sie durch eine Ziffer b als Zehnerziffer zu einer Palindromzahl zu ergänzen. Insgesamt gibt es $(9 \cdot 10 =)$ **90** verschiedene dreistellige Palindromzahlen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Um die auf 34043 folgende Palindromzahl zu ermitteln, untersucht man die stellenweise Vergrößerung dieser Zahl.

Bei einer Vergrößerung des Einers (von 3 auf 4) vergrößert sich wegen der Zahlensymmetrie gleichermaßen der Zehntausender (analog bei Vergrößerung des Zehners (von 4 auf 5) auch der Tausender). Eine minimale Vergrößerung der Zahl wird demzufolge bei Erhöhung des Hunderters von 0 auf 1 erreicht. Die folgende Palindromzahl ist 34143. Der Kraftfahrer muss bis zum nächsten symmetrischen Kilometerstand $(34143 - 34043 =)$ **100 Kilometer** fahren.

Die unmittelbar vor 34043 liegende Palindromzahl ist 33933. Der Kraftfahrer ist seit dem letzten symmetrischen Kilometerstand $(34043 - 33933 =)$ **110 Kilometer** gefahren.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Es sei $\overline{abcba}\ (a \neq 0)$ eine beliebige fünfstellige Palindromzahl. Statt der Zifferdarstellung können wir für diese Zahl auch 10001 · a + 1010 · b + c schreiben. Die nächstgrößere Palindromzahl lautet:

Fall 1 ($c \neq 9$): $\overline{ab(c+1)ba}$.

Die Differenz ist $\overline{ab(c+1)ba}$ - $\overline{abcba}$ = 100.
bzw.
10001·a + 1010·b + 100·(c + 1) – 10001·a – 1010·b – 100·c = 100

Fall 2 ($c = 9$ und $b \neq 9$)): $\overline{a(b+1)0(b+1)a}$.

Die Differenz ist $\overline{a(b+1)0(b+1)a}$ - $\overline{ab9ba}$ = 110.
bzw.
10001·a + 1010·(b + 1) – 10001·a – 1010·b – 900 = 110

Fall 3 ($c = 9$ und $b = 9$)): $\overline{(a+1)000(a+1)}$.

Die Differenz ist $\overline{(a+1)000(a+1)}$ - $\overline{a999a}$ = 11.
bzw.
10001·(a + 1) – 10001·a – 9990 = 11.

Folglich gibt es zwischen zwei aufeinander folgenden fünfstelligen symmetrischen Kilometerangaben genau drei Differenzen, deren größte 110 beträgt.

Die Aussage von Tim ist falsch, die Aussagen von Tom und Madleen sind wahr.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.
Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es gibt folgende **6 Reihenfolgen**:

BLN, BNL, LBN, LNB, NBL und NLB.

Da ein weiterer Langläufer sich der Gruppe anschließt, kann man L_1 und L_2 als einen „Doppelläufer L“ betrachten. Für die drei Läufer B, L, N gibt es 6 Möglichkeiten (wie oben). Da für den

„Doppelläufer L“ die Reihenfolge L_1L_2 und L_2L_1 möglich ist, verdoppelt sich die Anzahl der Reihenfolgen. Folglich laufen bei **12 Reihenfolgen** die zwei Langläufer hintereinander.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Von 5 Elementen (Sportarten) sind genau 2 (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen. Es ergeben sich in lexikographischer Reihenfolge) folgende **10 Möglichkeiten**:

BL, BN, BR, BS, LN, LR, LS, NR, NS, RS.

Begründung: Bei den zu betrachtenden Möglichkeiten der Auswahl von genau 3 Elementen (Sportarten) aus 5 bleiben immer genau 2 Sportarten übrig. Folglich stimmt die Anzahl der Auswahl von 3 aus 5 mit der von 2 aus 5 überein.

Alle Teammitglieder können aus genau einer Sportart (5 Mögl.), aus genau zwei Sportarten (10 Mögl., vgl. Aufgabe a), aus genau 3 Sportarten (10 Mögl.), aus genau vier Sportarten (5 Mögl.) und aus genau fünf Sportarten (1 Mögl.) kommen.

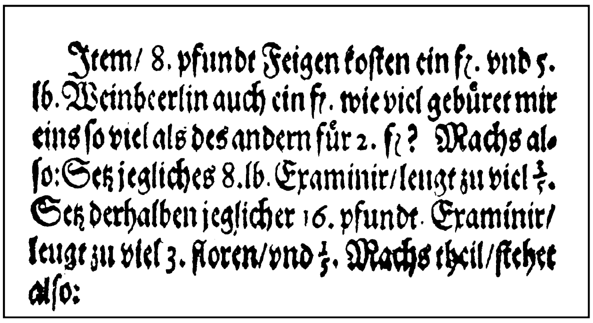
Folglich gibt es genau (5 + 10 + 10 + 5 + 1 =) **31 verschiedene Möglichkeiten** der Teambildung.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2010

1. Stufe (Hausaufgaben)

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1: Im 1522 erschienenen zweiten Rechenbuch stellt ADAM RIES eine Aufgabe zum Kauf von Feigen und Rosinen (Zahlen geändert), deren Originaltext in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist. Für die Aufgabe gilt:


Item/ 8. pfundt Feigen kosten ein fl. vnd 5. lb. Weinbeerlin auch ein fl. wie viel gebüret mir eins so viel als des andern für 2. fl? Machs also: Setz jegliches 8. lb. Examinir/ leugt zu viel $\frac{3}{5}$. Setz derhalben jeglicher 16. pfundt. Examinir/ leugt zu viel 3. floren/ vnd $\frac{1}{5}$. Machs theil/ stehet also:

8 Pfund Feigen kosten 1 Gulden und
6 Pfund Rosinen kosten auch 1 Gulden.

Zurzeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man unter anderem mit Gulden (fl), Schilling (ß) und Heller (he). Für die Umrechnungen galt:

1 fl = 20 ß, 1 ß = 12 he.

a) Berechne, wie viel Heller 1 Pfund Feigen kostet.

b) Adam Ries stellt in seiner Aufgabe folgende Frage: „Wie viel Feigen und Rosinen habe ich für 7 Gulden zu bekommen, wenn die Mengen an Feigen und Rosinen gleich sein sollen?“
Löse diese Aufgabe.

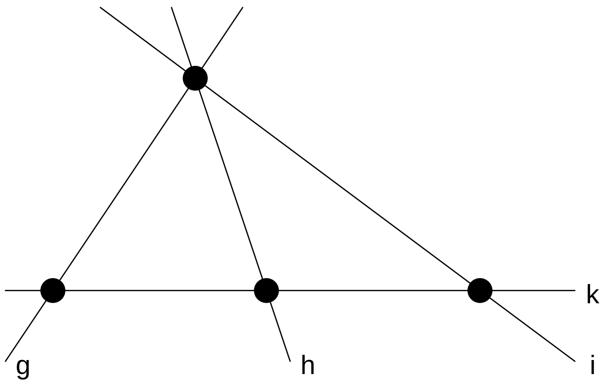
c) Einer kauft Feigen und Rosinen, insgesamt 20 Pfund. Er bezahlt dafür 3 Gulden.
Berechne, wie viel Pfund er von jeder Sorte gekauft hat.

Aufgabe 2: Untersucht werden soll immer die Anzahl von Schnittpunkten, die eine bestimmte Menge von Geraden hat. Die Abbildung zeigt die vier Geraden g, h, i und k, die einander in genau vier Punkten schneiden.

a) Zeichne vier Geraden so, dass sie einander in genau fünf Punkten schneiden.

b) Zeichne vier Geraden, die einander in einer größtmöglichen Anzahl von Schnittpunkten schneiden.

c) Ermittle die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten bei sechs Geraden.
Begründe, dass es keine größere Anzahl von Schnittpunkten geben kann.



d) Weise nach, dass 25 niemals die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten einer bestimmten Anzahl von Geraden sein kann.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten!

In Annaberg-Buchholz kannst du an vielen Orten dem Rechenmeister ADAM RIES begegnen, am intensivsten aber in seinem ehemaligen Haus in der Johannisgasse 6. Dort befindet sich das Adam-Ries-Museum, die Annaberger Rechenschule und eine Bibliothek.

Wir werden Anna durch dieses Haus begleiten und einige Aufgaben lösen, in denen **alle Möglichkeiten** von Zuordnungen, Reihenfolgen und Auswahlen von Interesse sind. Also aufgepasst beim Probieren und Zählen.

Aufgabe 3.1: Anna liest im Museum von bedeutenden Männern zu Riesens Zeit, denen Ries wahrscheinlich selbst nie begegnet ist:

Nicolaus Copernicus entwickelte ein Weltbild, das dessen Namen später trägt.
Martin Luther übersetzte die Bibel ins Deutsche.
Paracelsus bewirkte Heilungen, die legendär wurden.
Georgius Agricola verfasste ein maßgebliches Werk über Bergbau- und Hüttenwesen.

Von diesen vier Männern und von Adam Ries hat Anna je ein Bildnis.

a) Anna soll den Bildern den richtigen Namen zuordnen. Ries und Luther erkennt sie sofort und ordnet den beiden den richtigen Namen zu. Dann ordnet sie den drei ihr unbekannten Bildnissen je einen der drei verbleibenden Namen auf gut Glück zu, also rein zufällig.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten des Zuordnens (von denen natürlich nur eine richtig ist) gibt es insgesamt?

b) Die Bildnisse der fünf bedeutenden Männer sind an einer Wand so anzuordnen, dass in der oberen Reihe drei Bilder hängen und in der unteren zwei. Anna kennt inzwischen die Bildnisse aller Männer.

(1) Anna soll in die untere Reihe die Bildnisse von Agricola und Paracelsus hängen.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Bilder sind dann möglich?
(2) Ermittle alle möglichen Reihenfolgen des Anbringens der Bilder, wenn nur gefordert wird, dass das Bild von Agricola in der unteren Reihe an letzte Stelle zu hängen ist.

Aufgabe 3.2: Anna, Elena, Felix und Max erfüllen im Rahmen einer Projektarbeit Forschungsaufgaben im Adam-Ries-Haus. Die vier teilen sich in die Aufgaben so, dass genau zwei zusammen arbeiten, die beiden anderen jeweils allein und zwar gleichzeitig im Museum, in der Rechenschule bzw. in der Bibliothek. Zu untersuchen sind alle verschiedenen Möglichkeiten, wer mit wem oder allein wo arbeitet.

a) Setze in dieser Teilaufgabe vereinfachend voraus, dass die beiden Mädchen zusammen arbeiten.
Erfasse tabellarisch alle verschiedenen Möglichkeiten des Aufsuchens der drei Räumlichkeiten durch die vier Kinder.
(*Tipp:* Schreibe zur Vereinfachung nur die Anfangsbuchstaben der Namen, also: A, E, F, M)

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2010

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir verwenden zusätzlich folgende Abkürzung: Pfund pf.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): 1 pf Feigen kostet **30 he**.

Begründung: 8 pf Feigen kosten 1 fl = (1 · 20 =) 20 ß = (20 · 12 =) 240 he.
Dann gilt: 1 pf Feigen kostet (240 : 8 =) **30 he**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Man bekommt von Feigen und Rosinen je **24 pf**.

Begründung: 6 pf Rosinen kosten 1 fl = (1 · 20 =)20 ß = (20 · 12 =) 240 he. Dann gilt: 1 pf Rosinen kostet (240 : 6 =) 40 he.

1 pf Rosinen und 1 pf Feigen kosten insgesamt (30 + 40 =) 70 he.
Für 7 fl = (7 · 20 =) 140 ß = (140 · 12 =) 1680 he bekommt man von Feigen und Rosinen je (1680 : 70 =) **24 pf**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es wurden **8 pf Feigen und 12 Pfund Rosinen** gekauft.

Herleitung: Wir bezeichnen mit f die Anzahl der gekauften Pfund Feigen. Folglich ist (20 – f) die Anzahl der gekauften Pfund Rosinen. f pf Feigen kosten 30 · f he und (20 – f) pf Rosinen kosten 40 · (20 – f) he.

Durch systematisches Untersuchen aller möglichen Fälle erhalten wir folgende Tabelle, aus der sich die Lösung der Aufgabe ergibt. Dabei gilt 3 fl = (3 · 20 =) 60 ß = (60 · 12 =) 720 he.

Feigen		Rosinen		Bemerkungen
Menge in pf f	Preis in he 30 · f	Menge in pf (20 – f)	Preis in he 40 · (20 – f)	
1	30	19	760	790 > 720 (entf.)
…	…	…	…	… > 720 (entf.)
7	210	13	520	730 > 720 (entf.)
8	240	12	480	720 = 720
9	270	11	440	710 < 720 (entf.)
...	...	...	...	... < 720 (entf.)
19	570	1	40	610 < 720 (entf.)

Lösungshinweise zur Aufgabe 2
Lösung zur Teilaufgabe a): Abb. 1 zeigt vier Geraden, die einander in genau fünf Punkten schneiden.

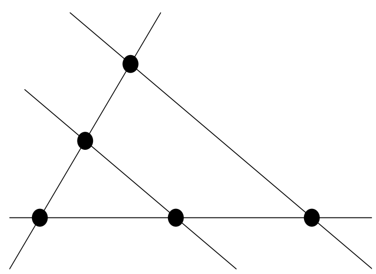


Abb.1

Lösung zur Teilaufgabe b): 6 Schnittpunkte ist die größtmögliche Anzahl bei vier Geraden. Abb. 2 zeigt vier Geraden, die einander in genau 6 Punkten schneiden.

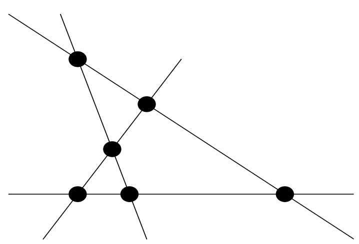


Abb.2

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): 6 Geraden können höchstens **15 Schnittpunkte** haben.

Begründung:
- Zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt.
- Eine dritte Gerade kann jede der beiden Geraden in höchstens je einem Punkt schneiden, also gibt es zwischen 3 Geraden höchstens (1 + 2 =) 3 Schnittpunkte.
- Eine vierte Gerade kann jede der drei Geraden höchstens in je einem Punkt schneiden, folglich sind in diesem Fall höchstens (1 + 2 + 3 =) 6 Schnittpunkte möglich.

Analog gilt:
- Zwischen 5 Geraden sind höchstens (1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4 =) 10 Schnittpunkte möglich,
- Zwischen 6 Geraden sind höchstens (1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 10 + 5 =) 15 Schnittpunkte möglich.

Lösung zur Teilaufgabe d): Zwischen 7 Geraden sind höchstens (15 + 6 =) **21 Schnittpunkte** möglich und zwischen 8 Geraden sind höchstens (21 + 7 =) **28 Schnittpunkte** möglich. Folglich kann 25 niemals die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten zwischen Geraden sein.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3
Antwortsatz zur Teilaufgabe 3.1 a): Es gibt **6 Möglichkeiten** des Zuordnens.

Begründung: Da Anna die Namen von zwei Bildern zuordnen kann, verbleiben noch drei Bilder. Dem ersten Bild können 3 Namen zugeordnet werden. Für jede dieser Zuordnung verbleiben für das zweite Bild noch 2 Namen, für das dritte nur noch 1 Name.

Folglich gibt es (3 · 2 · 1 =) **6 Möglichkeiten** des Zuordnens.

Antwortsätze zur Teilaufgabe 3.1 b): Für (1) sind (1) **12 Reihenfolgen** möglich. Für (2) gibt es **24 Möglichkeiten.**

Begründung: **(1)** Da die Bildnisse von Agricola und Paracelsus in der unteren Reihe hängen sollen, gibt es für die drei Bilder der oberen Reihe wieder 6 Möglichkeiten. Für die untere Reihe gibt es zwei Möglichkeiten der Zuordnung (A – P oder P – A). Folglich sind (6 · 2 =) **12 Reihenfolgen** möglich.

(2) Wenn das Bild von Agricola in der unteren Reihe an letzter Stelle hängen soll, sind noch 4 Bilder auf 4 Plätze zu verteilen. Dafür gibt es (4 · 3 · 2 · 1 =) **24 Möglichkeiten.**

Antwort zur Teilaufgabe 3.2 a): Es genügt, die geforderte Tabell anzugeben.

Museum	Rechenschule	Bibliothek
AE	F	M
AE	M	F
F	AE	M
F	M	AE
M	AE	F
M	F	AE

Antwortsatz zur Teilaufgabe 3.2 b): Es gibt insgesamt **36 Möglichkeiten**.

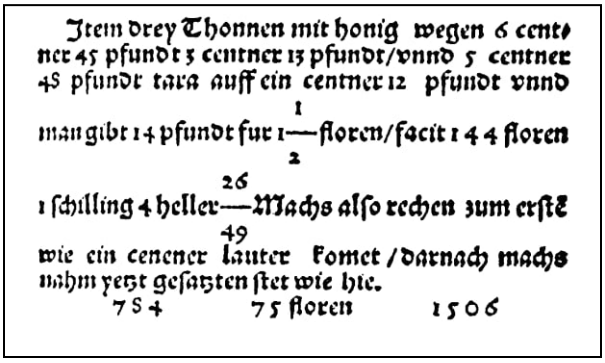
Begründung: Wenn zwei beliebige Personen zusammenarbeiten gibt es genau 6 Möglichkeiten: AE, AF, AM, EF, EM, FM. Für jede der sechs Möglichkeiten gibt es die sechs Verteilungen der Räume aus Teilaufgabe a). Folglich gibt es insgesamt (6 · 6 =) **36 Möglichkeiten**.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2011

1. Stufe (Hausaufgaben)

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Im 1522 erschienenen zweiten Rechenbuch von ADAM RIES stehen auch Aufgaben zur Berechnung des Preises von Waren, bei denen das Gewicht der Verpackung berücksichtigt wird. Die Abb. zeigt eine solche Aufgabe. Sie lautet in unserem heutigen Sprachgebrauch (Zahlen geändert):


Item drey Thonnen mit honig wegen 6 cent-
ner 45 pfundt 3 centner 13 pfundt/unnd 5 centner
45 pfundt tara auff ein centner 12 pfundt unnd
man gibt 14 pfundt fur 1 $\frac{1}{2}$ floren/facit 1 4 4 floren
1 schilling 4 heller $\frac{26}{49}$ Machs also rechen zum erstē
wie ein centner lauter kompt / darnach machs
nahm yetzt gesatzten stet wie hie.
754 75 floren 1506

3 Fässer mit Honig wiegen 6 Zentner 45 Pfund,
3 Zentner 13 Pfund und 7 Zentner 92 Pfund.

Auf 1 Zentner kommen 12 Pfund für die Verpackung. Man bezahlt für 14 Pfund Honig 1 Gulden und 10 Schilling.

Zurzeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man unter anderem mit Gulden (fl) und Schilling (ß).
Für die Umrechnung galt: 1 fl = 20 ß.

Mit Zentner (cen) und Pfund (pfu) wurde die Masse angegeben.
Für die Umrechnung galt: 1 cen = 100 pfu.

a) Welche Masse haben die drei Fässer mit Honig insgesamt? Gib das Ergebnis so an, dass die Anzahl an Pfund möglichst klein ist.

b) Berechne die Masse des Honigs, der sich in den drei Fässern befindet.

c) Berechne, wie viel der Honig in den drei Fässern kostet. Gib den Preis in Gulden an.

Aufgabe 2. Gleich viele schwarze und weiße Damesteine liegen in einer Reihe in nebeneinander angeordneten Feldern, abwechselnd weiß und schwarz. Am linken Rand befinden sich zwei Leerfelder. Es gibt folglich zwei Felder mehr als Steine (vgl. Ausgangsstellung der Abb.1).

Die Steine sollen mit einer bestimmten Anzahl von Zügen so sortiert werden, dass in der Endstellung alle schwarzen Steine nebeneinander und daran anschließend ohne Zwischenfeld alle weißen Steine nebeneinander liegen (vgl. Endstellung der Abb.1).

Bei jedem Zug werden genau zwei nebeneinander liegende Steine in die beiden Leerfelder verlegt, ohne dass dabei der linke mit dem rechten Stein vertauscht wird. Probiere es aus!

a) Abb. 1 zeigt die Ausgangs- und Endstellung sowie die Stellungen nach den ersten beiden Zügen eines Spiels mit je vier schwarzen und weißen Steinen.
Zeige, dass es bei diesem Spiel möglich ist, mit genau vier Zügen den Endzustand zu erhalten.
Gib die Stellung nach dem 3. Zug an.

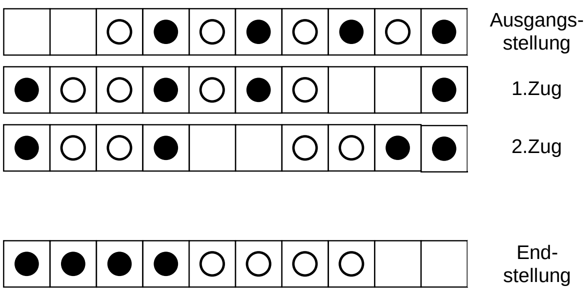


Abb. 1

b) Nun wird die Anzahl der Felder um zwei erhöht und es werden unter gleichen Bedingungen je fünf schwarze und weiße Steine verwendet.
Finde die kleinstmögliche Anzahl von Zügen, die zum Sortieren notwendig ist und gib die Stellungen nach jedem Zug an.

c) Begründe, dass es nicht möglich ist, mit je zwei schwarzen und weißen Steinen die Endstellung zu erreichen.

d) Es lässt sich nachweisen, dass für jede natürliche Anzahl n ($n \geq 4$) schwarzer und weißer Steine genau n Züge erforderlich sind, um die Endstellung zu erreichen.

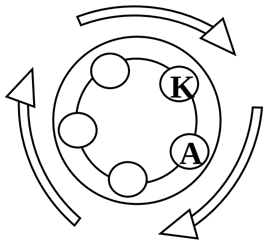
Untersuche, ob dieser Zusammenhang auch bereits für $n = 3$ gilt. Gib gegebenenfalls eine kleinstmögliche Anzahl von Zügen an, um die Endstellung mit drei weißen und schwarzen Steinen zu erreichen (Eine Begründung ist nicht erforderlich).
Gib für deine gefundene Lösung auch die Stellungen nach jedem Zug an.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten! Der Annaberger Weihnachtsmarkt lockt alljährlich Tausende zum Besuch. Buden wie aus dem Märchenland drängen sich um den Weihnachtsbaum und auf der Pyramide erzählen 18 geschnitzte Figuren Stadtgeschichte. Falls du kannst, dann träume doch auch einmal in der Annaberger Weihnachtswelt...

Foto: Stadt Annaberg-Buchholz

Vorerst aber aufgepasst beim Probieren und Zählen: In dieser Aufgabe geht es um das Finden aller Möglichkeiten von Zuordnungen, Reihenfolgen und Auswahlen. Nutze zum Schreiben der Lösungswege die in den Klammern stehenden Kurzbezeichnungen der Namen.

Aufgabe 3.1. Auf einer Scheibe der Weihnachtspyramide sollen Adam **Ries** (R), Barbara **Uthmann** (U), Herzog **Georg** der Bärtige (G), **Agricola** (A) und Daniel **Knappe** (K) im Kreis hintereinander aufgereiht stehen. Nimm an, dass die Reihenfolge des Aufstellens nicht von vornherein festgelegt ist.



a) Aufgestellt wurden bereits Agricola und der ihm folgende Knappe.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen des Aufstellens der drei übrigen Figuren wären dann noch möglich?
Bei wie vielen dieser Möglichkeiten würde dann (bei sich im Uhrzeigersinn drehender Scheibe) auf Georg Herzog dem Bärtigen Agricola folgen?

b) Wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Figuren würden sich für einen Betrachter der sich (im Uhrzeigersinn) drehenden Scheibe insgesamt ergeben können, wenn die Pyramidenfiguren in allen möglichen Reihenfolgen aufgestellt sein könnten?

Aufgabe 3.2. Der Weihnachtsmann teilt seine Wichtel **Bastel** (B), **Dettel** (D), **Fichtel** (F), **Kasperl** (K) und **Lärchel** (L) zur Arbeit ein, und zwar alle. Mindestens einer soll entweder in der Weihnachtsbastelstube, in der Weihnachtsbäckerei oder in der Wichtelwerkstatt helfen.

a) Schreibe alle möglichen Einteilungen der Wichtel für die Bastelstube auf. Ergänze hierzu die begonnene Systematik: B;........... BD; .... BDF; ....

b) Der Weihnachtsmann legt fest, dass nur Bastel in der Bastelstube hilft.
Wie viele verschiedene Einteilungen gibt es dann insgesamt für die anderen vier?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2011

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Folgende Abkürzungen (wie auch Ries sie verwendet) werden eingeführt: Gulden fl, Schilling ß, Heller hel, Zentner cen, Pfund pfu.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Die drei Fässer haben eine Masse von **17 Zentner und 50 Pfund**.

Begründung: (6 cen 45 pfu) + (3 cen 13 pfu) + (7 cen 92 pfu) = 16 cen 150 pfu.
Wegen 150 pfu = (100 + 50) pfu können wir das Ergebnis zu 17 cen 50 pfu umformen.

Die drei Fässer haben insgesamt eine Masse von **17 Zentner und 50 Pfund**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Der Honig in den Fässern hat eine Masse von **1540 Pfund**.

Begründung: Wenn in 1 cen (=100 pfu) Gesamtmasse 12 pfu für die Fässer enthalten sind, dann sind in 17 cen Gesamtmasse (12 · 17 =) 204 pfu und in 50 pfu (12 : 2 =) 6 pfu,
insgesamt folglich (204 + 6 =) 210 pfu für die Fässer enthalten.

Folglich hat der Honig in den Fässern eine Masse von 1750 – 210 =) **1540 Pfund**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Der Preis beträgt **165 Gulden**.

Begründung: 14 pfu Honig kosten 1 fl 10 ß. 1540 pfu kosten folglich das (1540 : 14 =) 110-fache, folglich 110 fl und 1100 ß. Wegen 1100 ß = (20 · 55) ß = 55 fl sind das (110 + 55 =) 165 fl.

Anmerkung: Adam Ries löst die Aufgabe anders. Er formuliert sinngemäß:

Addiere, es werden 1750 Pfund.

Rechne zuerst, wie viel 1 Zentner netto kostet (10 fl 14 ß $3\frac{3}{7}$ he).

Ziehe das Gewicht der Verpackung nicht von der Summe der Fassgewichte ab, sondern addiere es zum Zentner, es werden 112 Pfund.

Setze so: 112 Pfund kosten 10 fl 14 ß $3\frac{3}{7}$ he, was kosten 1750 Pfund?

Das Ergebnis: 167 fl 8 ß $2\frac{4}{7}$ he.

Ries wählt den zur damaligen Zeit üblichen Netto-Ansatz. Durch diese Rechnung erhöht sich der Verkaufspreis im Vergleich zum Brutto-Ansatz (wie in Aufgabe 1c) um den Faktor $\frac{1}{\left(1+\frac{12}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{12}{100}\right)}$.

In seinem 3.Rechenbuch (1559) geht Ries auf die beiden Berechnungsweisen und die jeweiligen Vor- und Nachteile für Käufer und Verkäufer ausführlich ein.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Abb. 1 zeigt die Stellung nach dem dritten Zug.

Im vierten Zug werden die beiden schwarzen Steine am linken Ende in die Leerfelder gezogen. Folglich ist die Endstellung nach vier Zügen erreicht.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Abb. 2 zeigt, wie die Endstellung nach 5 Zügen erreicht werden kann.

●			●	○	○	○	○	●	●	3.Zug

Abb. 1

		○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	Ausgangs-stellung
●	○	○	●	○	●	○	●	○			●	1.Zug
●	○	○	●			○	●	○	○	●	●	2.Zug
●	○	○	●	●	○	○			○	●	●	3.Zug
●			●	●	○	○	○	○	○	●	●	4.Zug
●	●	●	●	●	○	○	○	○	○			5.Zug Endstellung

Abb. 2

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Für je zwei schwarze und weiße Steine gibt es für jeden Zug nur höchstens drei Möglichkeiten. Davon ändern einige Möglichkeiten die Reihenfolge der Steine nicht oder sind nur die Umkehrung des vorangegangenen Zuges. Sie sind folglich für die Lösung nicht interessant.

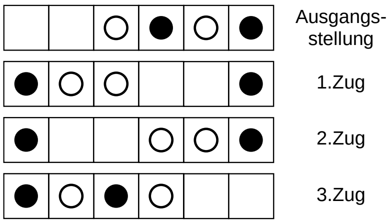


Abb. 3

Abb. 3 zeigt die in jedem Zug einzige erfolgversprechende Möglichkeit. Damit ist es aber nur möglich, die Reihenfolge der Steine umzukehren, nicht aber die Endstellung zu erreichen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Für je drei schwarze und weiße Steine ist es nicht möglich, mit nur drei Zügen die Endstellung zu erreichen.

Mit minimal vier Zügen lässt sich allerdings die Endstellung erreichen, wie Abb. 4 zeigt.

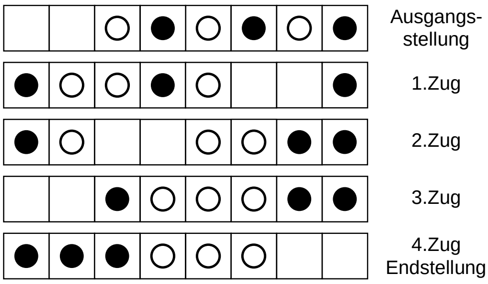


Abb. 4

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Antwortsatz zur Teilaufgabe 3.1 a): Jede der drei Figuren kann an erster Stelle stehen. Für die beiden verbleibenden Figuren gibt es jeweils genau zwei Möglichkeiten. Somit ergeben sich $(3 \cdot 2 =)$ **6 Reihenfolgen**.

Bei **2 Möglichkeiten** würde auf Georg Herzog dem Bärtigen die Figur von Agricola folgen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.1 b): Nummerieren wir die Plätze, so gibt es für die Anordnung der fünf Figuren (5 · 4 · 3 · 2 · 1 =)120 Reihenfolgen. Je fünf dieser Anordnungen gehen aber durch Drehungen auseinander hervor. Folglich würden sich für einen Betrachter der Pyramide (120 : 5 =) **24 Reihenfolgen** ergeben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2 a): Es genügt, eine Liste anzugeben - folgende 25 Einteilungen sind möglich:

B; D; F; K; L
BD; BF; BK; BL; DF; DK; DL; FK; FL; KL
BDF; BDK; BDL; BFK; BFL; BKL; DFK; DFL; DKL; FKL

Lösungshinweise zur Teilaufgabe 3.2 b): Wenn nur Bastel in der Bastelstube hilft, können die vier bleibenden Wichtel auf zwei Objekte verteilt werden. Folglich entfallen von den 25 Möglichkeiten der Aufgabe a) alle, in denen Bastel vorkommt:

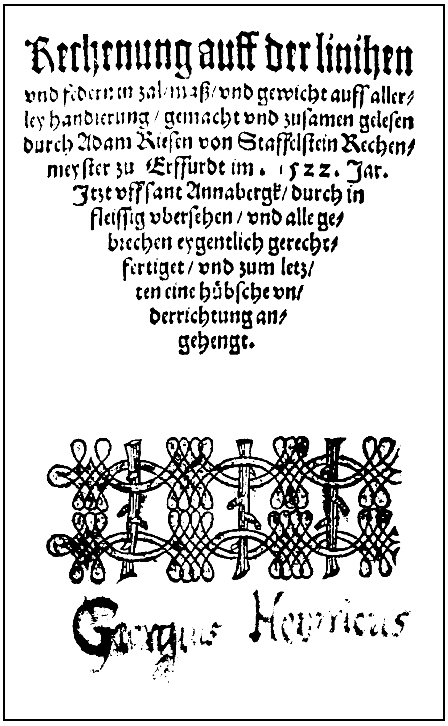
~~B~~; D; F; K; L
~~BD; BF; BK; BL~~; DF; DK; DL; FK; FL; KL
~~BDF; BDK; BDL; BFK; BFL; BKL~~; DFK; DFL; DKL; FKL

Für die Verteilung ergeben sich **14 Möglichkeiten**.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2012

1. Stufe (Hausaufgaben)

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.



Aufgabe 1. Adam Ries stellt in seinem 1522 erschienenen zweiten Rechenbuch (nebenstehende Abb. zeigt die Titelseite der zweiten Auflage dieses Buches von 1525) Aufgaben, in denen durch Kauf und Verkauf von Waren ein Gewinn erzielt werden soll. Der Händler kauft die Waren mit einem niedrigen Preis ein und verkauft sie wieder zu einem höheren Preis.

Eine solche Aufgabe würde in unserem heutigen Sprachgebrauch (Zahlen geändert) wie folgt lauten:

„Ein Händler verkauft eine bestimmte Menge Ingwer. Er verkauft ein Pfund für 11 Schilling und 6 Heller und gewinnt 15 Gulden an 100.
Zu welchem Preis hat er ein Pfund gekauft?"

Zurzeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man unter anderem mit Gulden (fl), Schilling (ß) und Heller (he).
Für die Umrechnungen galt: 1 fl = 20 ß, 1 ß =12 he.

Mit Pfund (pfu) wurde die Masse angegeben.

a) Ein Kunde kauft 4 Pfund Ingwer.
Berechne, wie viel er dafür bezahlen muss.
Gib den Preis so an, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist.

b) Ein anderer Kunde hat 20 Gulden. Er möchte für eine ganzzahlige Anzahl von Gulden eine ganzzahlige Anzahl Pfund Ingwer kaufen.
Untersuche, ob dies möglich ist.

c) Löse die Aufgabe von Adam Ries.
Zu welchem Preis hat der Händler ein Pfund Ingwer eingekauft?

Aufgabe 2. Einheitsquadrate (EQ) sind Quadrate mit einer Seitenlänge von einer Längeneinheit (LE). Solche werden so aneinandergefügt, dass je zwei benachbarte Quadrate genau eine gemeinsame Seite haben. Durch Zusammenfügen von zwei solchen Quadraten entstehen Dominos, von drei Trominos, von vier Tetrominos, von fünf Pentominos, usw.

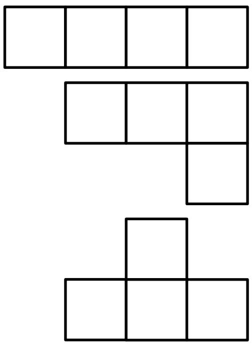


Abb.1

a) Es gibt genau fünf verschiedene (nicht durch Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgegangene) Tetrominos. Abb. 1 zeigt drei dieser Tetrominos.
Zeichne die beiden noch fehlenden Tetrominos.

Alle Tetrominos haben den gleichen Flächeninhalt von 4 EQ.
Begründe, dass aber nicht alle Tetrominos den gleichen Umfang haben.

b) Eine Quadratfläche aus 16 EQ soll durch Tetrominos **ein und derselben Art** vollständig und ohne Überlappungen ausgelegt werden. Abb. 2 zeigt eine solche Möglichkeit des Auslegens mit dem „geraden“ Tetromino.

Gib an, mit welchen weiteren der fünf Tetrominos dies möglich ist und zeichne jeden Fall.

Begründe, falls dies mit einer Art der Tetrominos nicht möglich ist.

Abb.2

c) Die fünf Tetrominos bestehen aus insgesamt 20 EQ. Leider ist es nicht möglich, mit ihnen ein Rechteck mit einer Länge von 5 LE und einer Breite von 4 LE vollständig und überlappungsfrei auszulegen. Man kann aber ein Einheitsquadrat überstehen lassen und dafür im Rechteck ein Loch frei lassen. Abb. 3 zeigt eine solche Figur.

Gib eine mögliche Auslegung der grau schraffierten Fläche mit den 5 Tetrominos an.

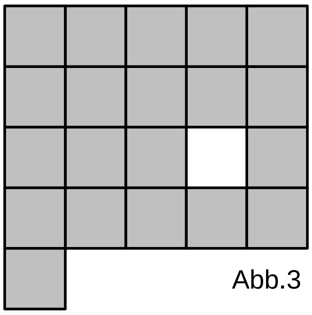


Abb.3

Hinweis: Schneide dir aus Pappe die fünf Tetrominos aus und probiere.

d) Mit zwei Sätzen aus den je fünf verschiedenen Tetrominos lässt sich ein Rechteck mit einer Länge von 8 LE und einer Breite von 5 LE vollständig auslegen.
Gib eine solche Möglichkeit an.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten! Der Tradition der Handwerkskunst folgend werden im Erzgebirge vielerlei Figuren für die Weihnachtszeit hergestellt. In dieser Aufgabe geht es um das **Anordnen** von Miniaturstuben und das **Auswählen** von Weihnachtsbaumanhängern.
Also aufgepasst beim Probieren und Zählen, um **alle Möglichkeiten** zu finden!

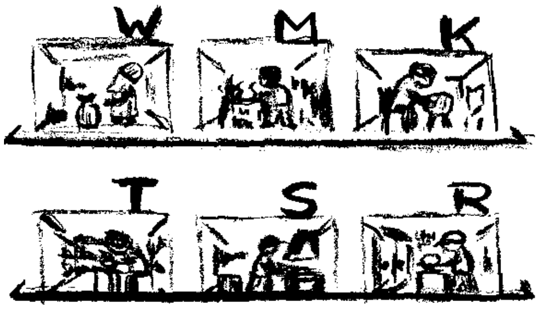
Nutze zum Schreiben der Lösungen die in den Klammern stehenden Kurzbezeichnungen.

3.1 Die in einer Manufaktur hergestellten Miniaturstuben der Klöpplerin (**K**), des Spielzeugmachers (**M**), Schreiners (**R**), Schmiedes (**S**), Schusters (**T**) und Weihnachtsmannes (**W**) sollen auf ein oberes und ein unteres Regalbrett nebeneinander aufgestellt werden.

Hinweis: Alle Reihenfolgen sind von links nach rechts zu betrachten.

a) Hanni stellt die Miniaturstuben R, S und T auf das untere Regalbrett.

Schreibe alle möglichen verschiedenen Reihenfolgen dieser drei Stuben auf.



Des Weiteren stellt Hanni die Stuben W, K und M auf das obere Regalbrett, dabei die Stube W links an erste Stelle.

Wie viele verschiedene Anordnungen des Aufstellens der sechs Stuben ergeben sich auf diese Weise insgesamt?

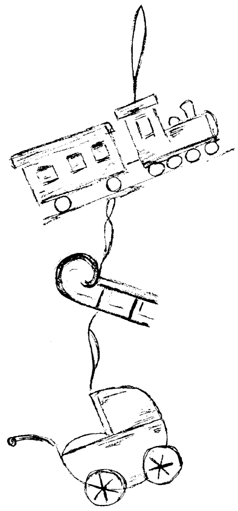
b) Matti fragt Hanni, wie viele verschiedene Möglichkeiten des Anordnens sich ergeben würden, wenn folgende drei Bedingungen gelten:

(1) die Stube W steht auf dem oberen Regalbrett an erster Stelle,

(2) auf dem oberen Brett stehen außerdem die Stube K und eine beliebige weitere Stube,
(3) die übrigen drei Stuben stehen auf dem unteren Regalbrett.

Wie muss Hanni antworten?

3.2 Am Verkaufsstand sehen Hanni und Matti Anhänger für den Weihnachtsbaum: blaue (S_b), grüne (S_g) und rote (S_r) Schlitten sowie auch ein Auto (A), eine Eisenbahn (E), eine Feuerwehr (F), einen Puppenwagen (P) und einen Traktor (T).



a) Matti wählt genau einen Schlitten und zwei weitere Anhänger.

Schreibe alle verschiedenen Wahlmöglichkeiten für den Fall auf, dass Matti den blauen Schlitten wählt. Schreibe so: S_bAE, ...

Wie viele verschiedene Wahlmöglichkeiten hat Matti insgesamt?

b) Nun fragt Hanni Matti, wie viele verschiedene Wahlmöglichkeiten sich insgesamt ergeben würden, wenn unter drei gewählten Anhängern höchstens ein Schlitten ist.

Wie muss Matti antworten?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2012

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Die Angaben der Preise erfolgen in fl / ß / he.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): 4 pfu Ingwer kosten **2 Gulden und 6 Schillinge**.

Herleitung: 1 pfu Ingwer kostet 0 / 11 / 6 = 0 / 0 / 11 · 12 + 6 = 0 / 0 /138.
Somit kosten 4 pfu Ingwer 0 / 4 · 11 / 4 · 6 = 0 / 44 / 24 oder 0 / 0 / 4 · 138 = 0 / 0 / 552.
Mit 1 ß = 12 he und 1 fl = 20 ß gilt:
0 / 44 / 24 = 0 / 44 / 2 · 12 = 0 / 46 / 0 = 0 / 2 · 20 + 6 / 0 = 2 / 6 / 0
bzw. 0 / 0 / 552 = 0 / 46 · 12 = 0 / 46 / 0 = 0 / 2 · 20 + 6 / 0 = 2 / 6 / 0.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es ist nicht möglich, für eine ganzzahlige Anzahl von Gulden eine ganzzahlige Anzahl Pfund Ingwer zu kaufen

Begründung:
1 pfu Ingwer kostet 0 / 11 / 6,
2 pfu Ingwer kosten 0 / 2 · 11 / 2 · 6 = 0 / 22 / 12 = 0 / 23 / 0 = 0 / 1 · 20 + 3 / 0 = 1 / 3 / 0,
3 pfu Ingwer kosten 0 / 3 · 11 / 3 · 6 = 0 / 33 / 12 + 6 = 0 / 34 / 6 = 0 / 1 · 20 + 14 / 6 = 1 / 14 / 6,
4 pfu Ingwer kosten 0 / 4 · 11 / 4 · 6 = 0 / 44 / 2 · 12 = 0 / 46 / 0 = 0 / 2 · 20 + 6 / 0 = 2 / 6 / 0,

Wir erkennen, dass nur für gerade Anzahlen die Schillinge ganzzahlig sind. Wir betrachten deshalb eine gerade Zahl 2n mit positiver ganzer Zahl n. Es gilt:

2n pfu Ingwer kosten 0 / 2n · 11 / 2n · 6 = 0 / n · 22 / n · 12 = 0 / n · 23 / 0.

Da 1 fl = 20 ß wird eine ganzzahlige Anzahl Gulden erreicht, wenn n · 23 durch 20 teilbar ist. Dies wird für n = 20 erstmalig erreicht (weil 20 und 23 teilerfremd sind). Wir finden damit:
40 pfu Ingwer kosten 0 / 40 · 11 / 40 · 6 = 0 / 20 · 23 / 0 = 23 / 0 /0, also 23 fl.

Da der Kunde nur 20 Gulden besitzt, ist es ihm **nicht möglich**, für eine ganzzahlige Anzahl von Gulden eine ganzzahlige Anzahl Pfund Ingwer zu kaufen.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Der Einkaufspreis des Ingwers beträgt **10 Schilling.**

Herleitung: Der Händler hat Ingwer für 0 / 11 / 6 = 0 / 0 / 11 · 12 + 6 = 0 / 0 / 138, also 138 Schilling verkauft.

Der Händler gewinnt 15 Gulden an 100, d.h., beim Einkauf von Ingwer für 100 fl verkauft er diesen wieder für 115 fl . Folglich verkauft er

beim Einkauf von Ingwer für 100 he diesen für 115 he,
beim Einkauf von Ingwer für (100 : 5 =) 20 he diesen für (115 : 5 =) 23 he,
und beim Einkauf von Ingwer für (20 · 6 =) 120 he diesen für (23 · 6 =) 138 he.

Der Einkaufspreis des Ingwers beträgt folglich **120 Heller**, also **10 Schilling.**

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Abb. L1 zeigt die fehlenden beiden Tetrominos.

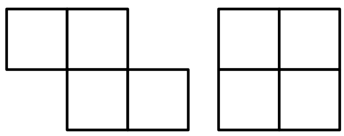


Abb.L1

Begründung zur Aussage bzgl. Umfang: Durch Auszählen finden wir, dass bei vier der fünf Tetrominos der Umfang 10 Seitenlängen des Einheitsquadrates beträgt, beim Tetromino „Quadrat“ (linke Figur in Abb. L1) aber nur 8 Seitenlängen.

Rechnerisch erhalten wir man dieses Ergebnis, weil bei vier der fünf Tetrominos jedes Einheitsquadrat nur genau eine Verbindung zu einem anderen hat. Es gibt folglich insgesamt 3 solche Verbindungen, so dass $(3 \cdot 2 =)$ 6 Seitenlängen nicht zum Umfang der Tetrominos zählen. Der Umfang beträgt $(4 \cdot 4 - 6 =)$ 10 Seitenlängen. Bei dem Tetromino „Quadrat“ hat jedes Einheitsquadrat genau zwei Verbindungen zu einem anderen, insgesamt folglich 4. Der Umfang beträgt somit $(4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 =)$ 8 Seitenlängen.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b):
Für weitere drei der Tetrominos gibt es solche Auslegungen (vgl. Abb. L2).

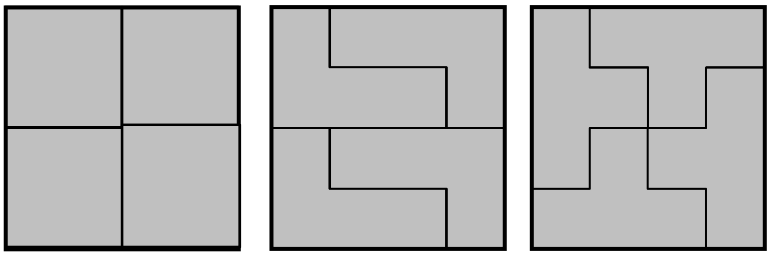


Abb.L2

Für das Tetromino „Z“ gibt es keine solche Möglichkeit.

Begründung: Eine Ecke der Quadratfläche aus 16 EQ kann nur wie in Abb. L3 mit einem „Z“ ausgefüllt werden. Die dabei entstehenden schraffierten Felder lassen sich nicht mehr mit einem Tetromino „Z“ ausfüllen.

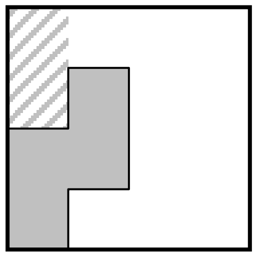


Abb.L3

Lösung zur Teilaufgabe c): Abb.L4 zeigt eine solche Auslegung.
Lösung zur Teilaufgabe d): Abb.L5 zeigt eine solche Auslegung.

Hinweis: Es genügte jeweils, eine korrekte Auslagung (ohne Herleitung) zu zeichnen.

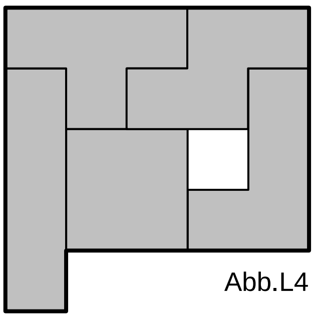


Abb.L4

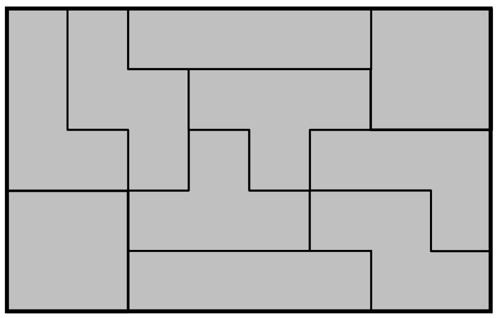


Abb.L5

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.1
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt **12 verschiedene Anordnungen**.

Begründung: Für die Miniaturstuben R, S und T gibt es die folgenden 6 Reihenfolgen:

RST, RTS, SRT, STR; TRS; TSR

Da die Miniaturstube W links an erster Stelle steht, ergeben sich für K und M 2 Reihenfolgen. Für jede der 6 Reihenfolgen des unteren Regalbrettes gibt es 2 Reihenfolgen auf dem oberen Regalbrett. Folglich gibt es $(2 \cdot 6 =)$ **12 verschiedene Anordnungen**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gibt **48 verschiedene Anordnungen**.

Begründung: Für das obere Regalbrett gilt:

W an erster Stelle → 1 Möglichkeit.
K an zweiter oder dritter Stelle → 2 Möglichkeiten.
R, S, T oder M an der noch freien Stelle → 4 Möglichkeiten.

Für das untere Regalbrett gilt:

3 Miniaturstuben auf drei Plätze → 6 Möglichkeiten.

Folglich gibt es (1 · 2 · 4 · 6 =) **48 verschiedene Anordnungen**.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.2
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Matti hat **30 verschiedene Wahlmöglichkeiten**.

Begründung: Matti hat folgende 10 verschiedene Wahlmöglichkeiten:

S_bAE , S_bAF , S_bAP , S_bAT , S_bEF , S_bEP , S_bET , S_bFP , S_bFT , S_bPT .

Da es drei verschiedene Schlitten gibt, hat Matti insgesamt (3 · 10 =) **30 verschiedene Wahlmöglichkeiten**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gibt **40 verschiedene Wahlmöglichkeiten.**

Begründung: Es gibt 5 Nichtschlittenanhänger. Wir betrachten folgende Fälle:

- unter drei gewählten Anhängern ist kein Schlitten: 3 aus 5 → 10 Möglichkeiten,
- unter drei gewählten Anhängern ist genau ein Schlitten: für 3 verschiedene Schlitten je 2 aus 5 (vgl. Aufgabe 3.2a) → (3 · 10 =) 30 Möglichkeiten.

Insgesamt ergeben sich also (10 + 30 =) **40 verschiedene Wahlmöglichkeiten.**

ADAM-RIES-Wettbewerb 2013

1. Stufe (Hausaufgaben)

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Abbildung: Erfurt im Jahre 1490 (aus Weltchronik Schedel 1493 in Erfurt-web.de)

Aufgabe 1. Adam Ries verfasste seine ersten Rechenbücher in Erfurt. Die Stadt Erfurt erwarb im Mittelalter Wohlstand u. a. durch den Handel mit dem Blaufarbmittel Waid. So verwundert es nicht, dass in Ries´ 1522 erschienenen zweiten Rechenbuch auch zu diesem praktischen Bezug Aufgaben zu finden sind. Eine Aufgabe lautet:

> 1 Kübel Waid für 9 Gulden 11 Groschen.
> Wie teuer kommen 47 Kübel?
> Ries´Tipp: "Mach die Gulden zu Groschen ..."

Zurzeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man unter anderem mit Gulden (fl) und Groschen (gr). Für die Umrechnung galt: 1 fl = 21 gr.

a) Berechne den Kaufpreis zu der oben gestellten Aufgabe. (Gib den Preis so an, dass die Anzahl der benötigten Münzen so klein wie möglich ist.)

b) Einer kaufte für 571 fl 9 gr mehrere Kübel Waid. Er verhandelte den Kaufpreis so, dass er jeden 20. Kübel kostenlos erhielt.
Berechne, wie viele Kübel Waid er bekommen hat.

c) Der Waidhändler bietet neben dem Kübel Waid für 9 fl 11 gr auch teueren, den Kübel für 11 fl.
Ein anderer kauft insgesamt 10 Kübel. Er bezahlt dafür 104 fl 2gr.
Ermittle, wie viel Kübel Waid jeder Art er gekauft hat.
Zeige, dass es außer deiner Lösung keine weitere gibt.

Aufgabe 2. Viele der Logikrätsel mit asiatisch klingenden Namen wie Sudoku, Kakuro, Hashi, ... haben ihre Ursprünge in anderen Regionen der Welt. **HITORI** gehört zu den wenigen Logikrätseln, das wirklich aus Japan stammt.

In einem Quadratraster aus waagerechten Zeilen und senkrechten Spalten sind in jedem Feld Zahlen eingetragen. Von diesen Feldern sind einige so schwarz zu färben, dass

- jede Zahl in jeder Zeile und jeder Spalte nur höchstens einmal vorkommt,
- die geschwärzten Felder weder waagerecht noch senkrecht benachbart sind,
- alle nicht geschwärzten Felder zusammenhängend bleiben.

(Hinweis: Sich nur diagonal berührende Felder sind nicht benachbart und nicht zusammenhängend.)

3	2	4	4	4
5	1	5	3	2
4	4	2	5	4
1	4	5	2	3
4	5	4	1	4

Abb.1

a) Aaron möchte das Hitori der Abbildung 1 lösen. Er leitet aus den Regeln folgende Aussagen ab:

(1) In benachbarten Dreiergruppen gleicher Zahlen müssen die äußeren Felder geschwärzt werden, das mittlere Feld darf nicht geschwärzt werden.
(2) Das Feld zwischen einem Paar gleicher Zahlen darf nicht geschwärzt werden.

Untersuche, ob Aarons Aussagen wahr sind. Begründe!

b) Aaron löst das Hitori.

Er schwärzt die Felder mit Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllen. Felder, deren Zahlen erhalten bleiben müssen, kennzeichnet er mit einem Kreis.

3	2	4	4	4
5	1	5	3	2
4	4	2	5	4
1	4	5	2	3
4	5	4	1	4

Abb.2

3	2	4	4	4
5	1	5	3	2
4	4	2	5	4
1	4	5	2	3
4	5	4	1	4

Abb.3

3	2	4	4	4
5	1	5	3	2
4	4	2	5	4
1	4	5	2	3
4	5	4	1	4

Abb.4

Nach 6 Feldern erhält er das Hitori der Abbildung 2, nach 11 Feldern das der Abbildung 3 und nach 14 Feldern das der Abbildung 4.

Vollziehe den Lösungsweg von Aaron nach. Löse das Hitori vollständig. Untersuche, ob die Lösung dieses Hitoris eindeutig ist.

c) Löse das Hitori der Abbildung 5.

1	3	2	6	5	4
1	6	5	2	5	1
4	1	5	3	2	6
3	5	5	4	3	3
3	2	4	6	6	4
2	5	3	6	1	5

Abb.5

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten! In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du in den folgenden Aufgaben „alle Möglichkeiten“ zu finden. Also aufgepasst beim Probieren und Zählen!

Erfurt war zu Ries' Zeit eine der größten deutschen Städte. Handwerk und Handel und die damit verbundenen Maße und Gewichte, Zölle und Zahlungsmittel brauchten die Kunst des Rechnens. So verwundert es nicht, dass der Rechenmeister Adam Ries in Erfurt wirkte.

a) Ries' Spuren sind auf der Krämerbrücke (K), im Rathaus (R), in der Druckerei des Mathes Maler (M) und in der Universität (U) zu entdecken. In dieser Aufgabe geht es um das Anordnen dieser Bauwerke auf einer Ansichtskarte, die zu Ehren des Rechenmeisters Adam Ries gestaltet werden soll. Die Abbildungen der genannten Bauwerke sind auf die Positionen (1) bis (4) zu platzieren (siehe Skizze).

1	2
3	4

Nutze zum Schreiben der Lösungswege die Kurzbezeichnungen. So bedeutet KRMU, dass die Krämerbrücke auf Position (1), das Rathaus auf Position (2), die Druckerei des M. Maler auf (3) und die Universität auf (4) abgebildet wird.

Schreibe alle verschiedenen Anordnungen unter der Bedingung, dass R auf Position (1) steht, auf. Schreibe so: RKMU. …

Wie viele verschiedene Anordnungen von K, M, R, U gibt es insgesamt?

Bei wie vielen dieser Anordnungen sind Rathaus und Universität auf der Ansichtskarte nebeneinander abgebildet?

b) Ein Glasbläser bietet auf dem Erfurter Weihnachtsmarkt Glaskugeln in blau (b), golden (g), pink (p), rot (r) und silber (s) an. Er verpackt die Kugeln in Kartons zu je zwei bzw. drei Stück. In keinem Karton sollen Kugeln gleicher Farbe sein.

Entwickle eine Systematik des Aufschreibens aller verschiedenen Auswahlmöglich-keiten von genau drei Kugeln je Karton. Schreibe alle Möglichkeiten auf. Schreibe so: bgp, …

(Beachte, dass die veränderte Reihenfolge bpg keine neue Auswahlmöglichkeit ist.)

Wenn der Glasbläser genau zwei Kugeln je Karton auswählt, kommt er auf die gleiche Anzahl von Möglichkeiten wie bei der Auswahl von drei Kugeln.

Erkläre diesen Zusammenhang.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2013

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Die Angaben der Preise erfolgen in fl/gr.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): 47 Kübel Waid kosten 447 Gulden und 13 Groschen.

Herleitung: 1 Kübel Waid kostet 9/11, also (9 · 21 + 11 =) 200 gr. Also kosten 47 Kübel (47 · 200 =) 9400 gr, das sind (447 · 21 + 13 =) 9400 gr, also 447/13.

Lösungsvariante: Ohne Ries' Tipp wäre folgende Rechnung möglich: Berechne zunächst die Gulden und Groschen getrennt. 47 Kübel kosten (47 · 9 =) 423 fl und (47 · 11 =) 517 gr. Die Anzahl der Groschen ist umzurechnen in 24 fl und 13 gr, also insgesamt (423 + 24 =) 447 fl und 13 gr, 447/13.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Er hat 63 Kübel Waid bekommen.

Herleitung: 571/9 sind (571 · 21 + 9 =) 12000 gr. Für 200 gr erhält man 1 Kübel Waid, für 12000 gr erhält man folglich (12000 : 200 =) 60 Kübel Waid. Da jeder 20 Kübel kostenlos ist, hat er 3 weitere Kübel erhalten, insgesamt hat er folglich (20 + 3 =) 63 Kübel Waid bekommen.

Antwortsatz zur Teilauifgabe c): Der Kunde hat 4 Kübel billiges Waid und 6 Kübel teueres Waid gekauft.

Herleitung: Wir bezeichnen mit x die Anzahl der Kübel des billigen Waids, mit y die Anzahl der Kübel des teueren Waids. Der Kunde kauft insgesamt 10 Kübel Waid. Folglich gilt: x + y = 10 (1).

1 Kübel billiger Waid kostet 9/11, also (9 · 21 +11 =) 200 gr.
1 Kübel teurer Waid kostet 11/0, also (11 · 21 =) 231 gr.
Der Kunde bezahlt 104/2, also (104 · 21 + 2 =) 2186 gr.

Folglich gilt: x · 200 + y · 231 = 2186 (2). Durch systematisches Untersuchen aller möglichen Fälle für (1) auf Richtigkeit von (2) erhält man die gesuchte Lösung: x = 4 und y = 6.

Zur Lösungsfindung: Für das systematische Probieren ist eine Tabelle geeignet:

billiges Waid		teueres Waid		Gesamtpreis in gr
Anzahl x	Preis in gr 200 · x	Anzahl y = 10 - x	Preis in gr 231 · y	
0	0	10	2310	2310 > 2186
1	200	9	2079	2279 > 2186
2	400	8	1848	2248 > 2186
3	600	7	1617	2217 > 2186
4	800	6	1386	2186 = 2186
5	1000	5	1155	2155 < 2186
…	…	…	…	… < 2186

Man erkennt, dass bei Verringerung der Menge des teueren Waids der Gesamtpreis stets kleiner als 2186 gr wird.

Lösungsvariante: Der Aufpreis für einen Kübel teueren Waid beträgt 31 gr. Also bezahlte der Kunde für 10 Kübel den gemeinsamen Preis (10 · 200 =) 2000 gr und für y den Aufpreis y · 31 = 186. Daraus folgt y = 6.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Antwort zur Teilaufgabe a): Aussage (1) ist wahr. Auch Aussage (2) ist wahr.

Begründung zu (1): In jeder Zeile und jeder Spalte darf jede Zahl nur höchstens einmal vorkommen. Bei drei gleichen Zahlen müssen zwei gefärbt werden. Da die geschwärzten Felder weder waagerecht noch senkrecht benachbart sind dürfen, muss das nicht geschwärzte Feld in der Mitte sein.

Begründung zu (2): In jeder Zeile und jeder Spalte darf jede Zahl nur höchstens einmal vorkommen. Bei zwei gleichen Zahlen muss eine gefärbt werden. Da die geschwärzten Felder weder waagerecht noch senkrecht benachbart sind dürfen, muss ein geschwärztes Feld waagerecht und senkrecht von nicht geschwärzten Felder umgeben sein. Folglich darf das Mittelfeld nicht geschwärzt werden.

Lösung zur Teilaufgabe b): Abbildung L1 zeigt die Lösung des Hitoris.

Abbildung L2 zeigt das Hitori nach der Bearbeitung von 24 Feldern. Alle Schritte sind nach den Regeln (1) und (2) oder unmittelbar daraus folgenden Schlussfolgerungen eindeutig ausführbar.

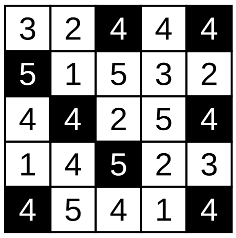


Abb.L1

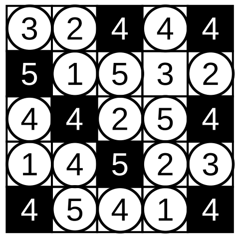


Abb.L2

Das Feld der Zeile 2 / Spalte 4 ist noch offen. Wegen Regel (3) darf dieses Feld nicht geschwärzt werden, weil sonst kein zusammenhängendes Gebiet bleibt. Folglich ist die Lösung in Abbildung L1 eindeutig.

Lösung zur Teilaufgabe c): Abbildung L3 zeigt die Lösung des Hitoris.

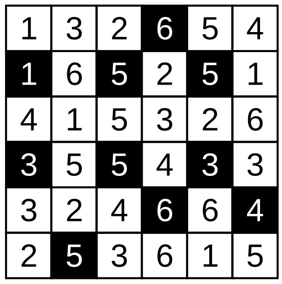


Abb.L3

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es gibt folgende 6 Anordnungen:

RKMU, RKUM, RMKU, RMUK, RUKM, RUMK.

Unter der Bedingung, dass R auf Position (1) steht, gibt es 6 Anordnungen. Wenn K, M und U auf Position (1) stehen, gibt es auch jeweils 6 Anordnungen. Insgesamt gibt es folglich ($4 \cdot 6 =$) 24 Anordnungen von K, M, R und U.

Rathaus und Universität können in der oberen Zeile in den Anordnungen RU oder UR nebeneinander abgebildet werden. Für die verbleibenden Bilder M und K ergeben sich jeweils auch 2 Möglichkeiten, insgesamt folglich ($2 \cdot 2 =$) 4 Möglichkeiten.

Gleiches kann durch Vertauschung der Zeilen auftreten. Folglich werden in (4+4 =) **8 Anordnungen** Rathaus und Universität nebeneinander abgebildet.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Von den 5 Elementen b, g, p, r und s sind genau 3 (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen. Durch eine lexikographische Reihenfolge ergeben sich die folgenden **10 Möglichkeiten**:

bgp	bpr	brs	gpr	grs	prs
bgr	bps	gps			
bgs					

Erklärung: Wenn von 5 Kugeln jeweils 3 Kugeln ausgewählt werden, bleiben 2 Kugeln übrig. Diese zwei Kugeln entsprechen der neuen Aufgabenstellung Auswahl von 2 Kugeln aus 5. Folglich ist die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten in beiden Fällen gleich.

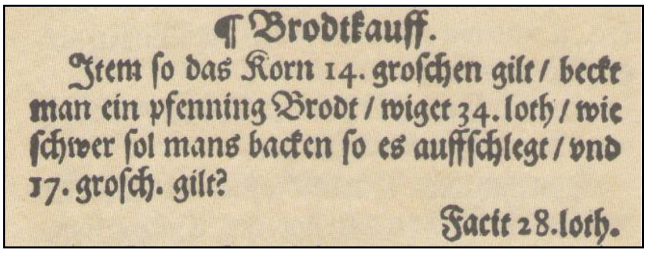
ADAM-RIES-Wettbewerb 2014

1. Stufe (Hausaufgaben)

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Zu der Zeit, als Adam Ries lebte, waren die Preise von Backwaren viele Jahre unverändert. Davon zeugt beispielsweise die Bezeichnung „Pfennigbrot“ – dieses Brot kostete immer einen Pfennig. Weil aber das Getreide je nach Ernte unterschiedlich teuer sein konnte, musste das Brotgewicht an den Getreidepreis angepasst werden.

Im zweiten Rechenbuch von Adam Ries findet man dazu eine Aufgabe zum „Brodtkauff“ (siehe nebenstehende Abbildung). Nach heutigem Sprachgebrauch beginnt diese Aufgabe mit den Worten *„Wenn ein Sack Korn 14 Groschen kostet, so ...“.*



¶ Brodtkauff.

Item so das Korn 14. groschen gilt / beckt man ein pfenning Brodt / wiget 34. loth / wie schwer sol mans backen so es auffschlegt / vnd 17. grosch. gilt?

Facit 28. loth.

Zur damaligen Zeit bezahlte man unter anderem mit Gulden, Groschen und Pfennigen. Zur Umrechnung galt: 1 Gulden = 21 Groschen, 1 Groschen = 12 Pfennige.

a) Angenommen, der Sack Korn kostet 13 Groschen.
Ermittle, wie viel ein Bäcker für 5 und einen halben Sack Korn bezahlen muss. Gib den Gesamtpreis so an, dass die Anzahl der Münzen möglichst klein ist.

b) Ein anderes Mal erhält ein Bäcker für 23 Gulden 18 Sack Korn.
Ermittle, wie viel diesmal ein Sack Korn kostet. Gib den Preis wieder in möglichst wenig Münzen an!

c) Wieder ein anderes Mal kauft ein Bäcker zunächst einige Säcke Korn für 11 Groschen je Sack und später weitere Säcke Korn für 14 Groschen je Sack. Insgesamt waren es weniger als 10 Sack und der Bäcker hat eine ganze Anzahl von Gulden bezahlt.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der gekauften Säcke eindeutig ermitteln lässt! Gib diese und die Anzahl der bezahlten Gulden gegebenenfalls an.

Aufgabe 2. Claudia hat ein quadratisches Blatt Papier vor sich. Das zerschneidet sie in vier gleichgroße Quadrate – wir nennen dieses Zerschneiden einen 4-Teile-Schnitt. Nun nimmt sie irgendeines der entstandenen Teile und zerschneidet es wieder mit einem 4-Teile-Schnitt usw.

a) Gib an, wie viele 4-Teile-Schnitte Claudia mindestens benötigt, wenn mehr als 5 Quadrate entstehen und alle erhaltenen Quadrate gleich groß sein sollen. Begründe!

b) Nach drei 4-Teile-Schnitten hat Claudia Quadrate in drei verschiedenen Größen erhalten.
Wie viele 4-Teile-Schnitte muss sie mindestens noch ausführen, damit danach alle Teile gleich groß sind? Begründe!

c) Nach einer bestimmten Anzahl von 4-Teile-Schnitten soll Claudia Quadrate in drei verschiedenen Größen erhalten, und zwar von jeder Größe gleich viele.
Untersuche, ob dies möglich ist. Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3 – so viele Möglichkeiten! In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Versuche auch du in den folgenden Aufgaben „alle Möglichkeiten“ zu finden. Also aufgepasst beim Probieren und Zählen!

Die nationale Runde des tschechischen Adam-Ries-Wettbewerbs wird alljährlich vom Untererzgebirgischen Gymnasium (Podkrušnohorské gymnázium) in Most durchgeführt. Der Aufbau der heutigen Stadt Most begann in den 50-er Jahren des 20. Jahrhunderts, als die alte Stadt Most dem Bergbau weichen musste. Nur wenige historische Bauwerke konnten damals erhalten werden. Eines davon ist die Kirche Maria Himmelfahrt (erbaut im 16. Jahrhundert), die 1975 mit einem spektakulären Transport über 841 m gerettet wurde.

Über die Entwicklung des Braunkohlebergbaus in Most informiert das Untererzgebirgische Technische Museum (Podkrušnohorské Technické Muzeum), das in der ehemaligen Grube Julius III in Kopisty, nahe Most, im Jahr 2003 eröffnet wurde. Zu den Baudenkmälern dieses Freilichtmuseums gehören ein **Förderturm** (F), das **Kesselhaus** (K), das **Maschinenhaus** (M) und das **Schachtgebäude** (S). Während der Führung durch das Museum werden alle vier Bauwerke besichtigt.

a) Schreibe alle Möglichkeiten auf, in welcher Reihenfolge die Bauwerke besichtigt werden können, wenn keines davon in einer Führung zweimal gezeigt wird.
Nutze zum Schreiben der Möglichkeiten die in Klammer gegebenen Abkürzungen. Scheibe so: FKMS, ...
Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Besichtigung gibt es? Überprüfe die Anzahl der aufgeschriebenen Möglichkeiten durch eine Rechnung!

b) Der Förderturm und das Schachtgebäude stehen nahe bei einander. Sie werden deshalb während des Rundgangs unmittelbar aufeinander folgend gezeigt.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Besichtigung gibt es unter dieser Bedingung? Begründe deine Antwort!

c) Am Ausgang des Museums kann man Andenken kaufen. Natürlich gibt es Andenken zu den vier Bauwerken. Aber auch von einer **Förderdampfmaschine** und von den **Arbeiterwohnhäusern** sind Erinnerungsstücke erhältlich. Katharinas Taschengeld reicht nur für drei Andenken. Davon sollen mindestens zwei von den Bauwerken sein, die sie auf der Führung kennen lernte.

   Wie viele Möglichkeiten gibt es für Katharina, eine solche Auswahl zu treffen?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2014

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Für die Lösungsdarstellung verwenden wir die Abkürzungen fl für Gulden, gr für Groschen und pf für Pfennig.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Der Bäcker muss für 5 und einen halben Sack Korn 3 fl, 8 gr und 6 pf bezahlen.

Herleitung: Bei einem Preis von 13 gr je Sack Korn, kosten 5 Sack (13 · 5 =) 65 gr. Ein halber Sack kostet 6 gr und 6 pf, da 13 gr als 12 gr und (1 gr =) 12 pf geschrieben werden kann. Zusammen sind es (65 + 6 =) 71 gr und 6 pf.

Wegen (3 · 21 =) 63, lässt sich der Preis als 3 fl, (71 – 63 =) 8 gr und 6 pf angeben.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Ein Sack Korn kostet 1 fl, 5 gr und 10 pf.

Herleitung: Wir rechnen die Gulden in Pfennige um: (23 · 21 · 12 =) 5796 pf. Deshalb kostet ein Sack Korn (5796 : 18 =) 322 pf.

Lösungsvariante: Um das Rechnen mit großen Zahlen zu vermeiden, kann der Sackpreis auch in zwei Schritten berechnet werden: Weil 23 Gulden (23 · 21 =) 483 gr sind, kosten (18 : 3 =) 6 Sack Korn (483 : 3 =) 161 gr. Weil 161 Groschen (161 · 12 =) 1932 pf sind, kostet 1 Sack (1932 : 6 =) 322 pf. Das ergibt wegen (26 · **12** =) 312 pf einen Preis von 26 gr und (322 – 312 =) 10 pf. Man beachte: 26 gr = 1 fl und 5 gr.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Der Bauer kaufte für 5 fl insgesamt 9 Säcke Korn.

Herleitung: Die Aufgabe lässt sich mit Hilfe einer Tabelle lösen. Um alle Lösungen zu finden (zur Prüfung der Eindeutigkeit), müssen alle Kombinationen von Anzahlen der 11-gr-Säcke und Anzahlen der 14-gr-Säcke geprüft werden, wobei die Gesamtanzahl der Säcke kleiner als 10 ist.

Anzahl der 11-gr-Säcke	Preis der 11-gr-Säcke	Anzahl der 14-gr Säcke	Preis der 14-gr-Säcke	Gesamt-preis in Groschen	Gesamtpreis in Gulden
a	*A =11 x a*	*b*	*B =14 x b*	*C = A + B*	*C : 21*
1	11	1	14	25	nicht ganzzahlig
2	22	1	14	36	nicht ganzzahlig
...	...	...	...	...	...
7	77	1	14	91	nicht ganzzahlig
7	**77**	**2**	**28**	**105**	**5**
8	88	1	14	102	nicht ganzzahlig

Lösungsvariante: Mit einer Vorüberlegung kann die Anzahl der zu prüfenden Möglichkeiten verkürzt werden. Bezeichnet a die Anzahl der 11-gr-Säcke, b die Anzahl der 14-gr-Säcke und c die Anzahl der zu bezahlenden Gulden, so gilt für die Anzahl der Groschen

$$a \cdot 11 + b \cdot 14 = c \cdot 21.$$

Da 14 und 21 durch 7 teilbar ist, 11 dagegen nicht, muss die Anzahl a durch 7 teilbar sein also a = 7. Damit genügt es wegen a + b < 10, die Möglichkeiten b = 1 und b = 2 zu überprüfen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Zur Abkürzung verwenden wir für „4-Teile-Schnitt“ 4TS.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Claudia benötigt mindestens fünf 4TS, um gleichgroße Teile zu erhalten.

Herleitung: Nach dem ersten 4TS erhält Claudia 4 Quadrate. Um mehr als fünf Quadrate zu erhalten, muss sie mindestens einen weiteren 4TS ausführen. Um gleich große Quadrate zu erhalten, muss sie aber jedes Quadrat nach dem ersten 4TS zerschneiden. Insgesamt benötigt sie also mindestens fünf 4TS.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Claudia muss noch mindestens 18 solche 4TS ausführen, um gleichgroße Quadrate zu erhalten.

Herleitung: Nach dem ersten 4TS erhält Claudia 4 gleichgroße Quadrate der Größe Q1.

Mit dem zweiten 4TS zerschneidet sie eins davon (behält also drei Quadrate der Größe Q1) und erhält 4 gleichgroße Quadrate der Größe Q2.

Um mit dem dritten 4TS Quadrate einer weiteren Größe zu erhalten, muss Claudia ein Quadrat der Größe Q2 zerschneiden und erhält 4 kleinere Quadrate der Größe Q3 (es verbleiben drei Quadrate der Größe Q2).

Damit alle Teilquadrate die gleiche Größe Q3 haben, muss sie zunächst die noch vorhandenen drei Quadrate der Größe Q1 jeweils mit einem 4TS zerschneiden (**drei 4TS**) und erhält 12 Quadrate der Größe Q2. Zusammen mit den schon vorhandenen drei Quadraten der Größe Q2 muss sie also noch insgesamt (12 + 3 =) **15 solcher 4TS** ausführen. Somit kann sie nach insgesamt (3 + 15 =) 18 Schnitten gleichgroße Quadrate erhalten.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es ist nicht möglich, durch 4TS gleich viele Quadrate in drei verschiedenen Größen zu erhalten.

Begründung: Nach dem ersten 4TS hat Claudia vier Quadrate. Bei jedem weiteren Schnitt wird ein Teil entnommen, um es in vier Teile zu zerschneiden. Es entstehen also drei Teile mehr. Wenn aber anfangs 4 Teile vorliegen und sich mit jedem 4TS die Anzahl der Teile um 3 erhöht, kann diese Anzahl nie durch 3 teilbar sein. Also gibt es auch nicht die Möglichkeit, dass von drei verschiedenen Größen jeweils gleich viele Quadrate vorhanden sind.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt 24 Möglichkeiten, die Reihenfolge der Besichtigung festzulegen.

Begründung: Wir geben alle Möglichkeiten an:
FKMS, FKSM, FMKS, FMSK, FSKM, FSMK,
KFMS, KFSM, KMFS, KMSF, KSFM, KSMF,
MFKS, MFSK, MKFS, MKSF, MSFK, MSKF,
SFKM, SFMK, SKFM, SKMF, SMFK, SMKF.

Lösungsvariante: Als erstes Bauwerk können wir eins von 4 auswählen, für das zweite Bauwerk stehen noch 3 zur Verfügung. Das dritte Bauwerk kann eins von 2 sein. Schließlich verbleibt noch das letzte Bauwerk. Insgesamt gibt es also $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24 Möglichkeiten.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Unter der zusätzlichen Bedingung gibt es noch 12 Möglichkeiten, die Reihenfolge festzulegen.

Begründung: Die Anzahl lässt sich finden, wenn aus der Liste von Teilaufgabe a) alle Möglichkeiten gestrichen werden, bei denen F und S nicht nebeneinander stehen:

~~FKMS~~, ~~FKSM~~, ~~FMKS~~, ~~FMSK~~, FSKM, FSMK,
~~KFMS~~, KFSM, KMFS, KMSF, KSFM, ~~KSMF~~,
~~MFKS~~, MFSK, MKFS, MKSF, MSFK, ~~MSKF~~,
SFKM, SFMK, ~~SKFM~~, ~~SKMF~~, ~~SMFK~~, ~~SMKF~~.

Es verbleiben 12 Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Wenn Förderturm und Schachtgebäude aufeinander folgend besichtigt werden, können beide Bauwerke zunächst wie ein **Doppel-Bauwerk** (D) betrachtet werden. Somit sind alle Reihenfolgen für drei Objekte zu finden: DKM, DMK, KDM, KMD, MDK, MKD, also ($3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 6 Möglichkeiten. Da es aber zwei Möglichkeiten gibt, die Reihenfolge im Doppel-Bauwerk zu wählen (FS oder SF), sind insgesamt ($2 \cdot 6 =$) 12 Reihenfolgen möglich.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es gibt 16 Möglichkeiten, die Andenken unter den geforderten Bedingungen auszuwählen.

Begründung: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Katharina kauft 3 Andenken von Bauwerken, die sie besichtigt hat. Dafür gibt es 4 Möglichkeiten, denn sie kann jedes der vier Bauwerke weglassen.

2. Katharina kauft nur 2 Andenken von Bauwerken, die sie besichtigt hat. Dazu kann sie zunächst eines von 4 und dann noch eines von den verbleibenden 3 erwerben. Allerdings spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle, so dass sie die Anzahl ($4 \cdot 3 =$) 12 noch durch 2 teilen muss. Folglich gibt es ($12 : 2 =$) 6 Möglichkeiten, 2 Andenken aus den 4 möglichen auszuwählen (FK, FM, FS, KM, KS, MS). Dazu kann sie entweder das Andenken an die Arbeiterwohnhäuser oder das Andenken an die Förderdampfmaschine kaufen, so dass es insgesamt ($6 \cdot 2 =$) 12 Möglichkeiten gibt.

Zusammen ergeben beide Fälle ($4 + 12 =$) 16 Möglichkeiten.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2015

1. Stufe (Hausaufgaben)

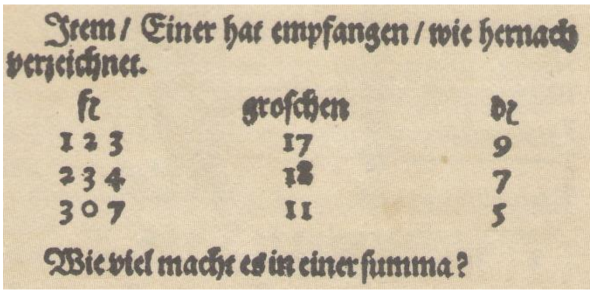
Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1 – Aus dem 2. Rechenbuch von Adam Ries (1522). Im Abschnitt ***Addieren oder Summieren*** erklärt Adam Ries:

> *„ ... / lehrt, wie man viel und mancherlei Zahlen von Gulden, Groschen und Pfennige in eine Summe bringen soll."*


Addiren oder
Summiren
HEißt zusamen thun / Lehret wie man viel vnd mancherley zahlen von gülden/groschen/pfenning vnd hellern in eine summa bringen soll.

So beginnt die erste Rechenaufgabe dieses Buches (s. nebenstehende Abbildung, Zahlen geändert) im heutigen Sprachgebrauch:


Item / Einer hat empfangen / wie hernach verzeichnet.

fl	groschen	dn
123	17	9
234	18	7
307	11	5

Wie viel macht es in einer summa?

Ein Kaufmann hat nachfolgende drei Geldbeträge empfangen:

3 Gulden 17 Groschen und 9 Pfennige,
28 Groschen und 7 Pfennige,
25 Pfennige.

Für die Umrechnung galt zu damaliger Zeit: 1 Gulden = 21 Groschen, 1 Groschen = 12 Pfennige.

a) Wie viel Geld erhielt der Kaufmann insgesamt. Gib das Ergebnis so an, dass die Anzahl der Münzen möglichst klein ist.

Adam Ries stellte noch viele weitere Aufgaben, in denen mit Münzen zu rechnen ist.

b) Jemand hat einen Geldbetrag von 2 Gulden, 4 Groschen und 8 Pfennigen.
Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt, diesen Geldbetrag in 100 Münzen (Gulden, Groschen und Pfennige) umzutauschen.

c) Ein Kaufmann hat 11 Münzen (Groschen und Pfennige). Jemand gibt ihm weitere Münzen, so dass sich sein Geldbetrag vervierfacht. Nachdem der Kaufmann so viele Pfennige wie möglich in Groschen umtauschte, stellte er fest, dass er nun wieder 11 Münzen (Groschen und Pfennige) besaß.
Wie viele Groschen kann der Kaufmann am Anfang höchstens gehabt haben? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2 – **Mit kleinen Quadraten Muster legen.** Wir beginnen mit einem einzelnen Quadrat – wir nennen es 0. Ring (weil es ja kein richtiger Ring ist). Legt man um dieses Quadrat weitere Quadrate wie in der Abbildung, so nennen wir diese 8 Quadrate den 1. Ring. Werden um diese entstandene Fläche wieder Quadrate angelegt, so entsteht der 2. Ring. Dies können wir so fortsetzen.

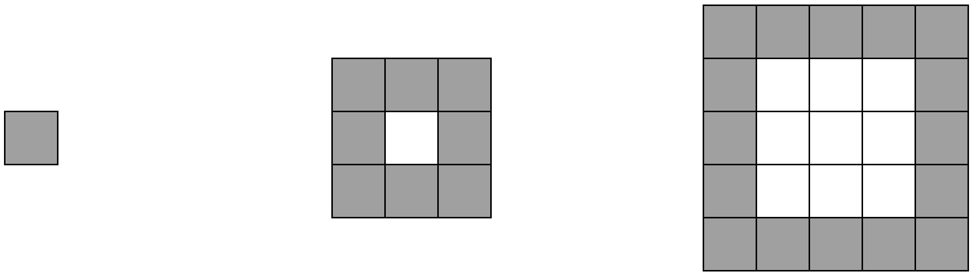


Abb. 0. Ring 1. Ring 2. Ring

a) Aus wie vielen Quadraten besteht der 4. Ring?

b) Berechne die Anzahl des 6. Ringes (ohne diese Anzahl mithilfe einer Zeichnung zu ermitteln).

c) Gegeben seien graue und weiße Quadrate. Wir beginnen mit einem weißen Quadrat als 0. Ring und legen abwechselnd gleichfarbige weiße und graue Ringe darum. Wie viele weiße und wie viele graue Quadrate sind erforderlich, um dieses Muster bis zum 8. Ring zu gestalten.

d) Begründe, dass – egal wie viele gleichfarbige Ringe abwechselnd weiß und grau gelegt werden - die Anzahlen der erforderlichen weißen und grauen Quadrate niemals gleich sind.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten. Am Vorabend der 3. Stufe des Adam-Ries-Wettbewerbs werden Knobelaufgaben im Team gelöst. Ein Team besteht aus 6 Teilnehmern (wir nennen sie abkürzend A, B, C, D, E und F). Bei jeder Aufgabe sind jeweils drei Teilaufgaben zu lösen.

a) Bei der ersten Aufgabe teilt sich das Team in zwei Dreiergruppen auf, um zunächst zwei Teilaufgaben zu schaffen.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei Dreiergruppen zu bilden? Schreibe alle Möglichkeiten auf, schreibe so ABC-DEF, ….

(Beachte, dass bei diesen Aufgaben die Reihenfolge innerhalb einer Gruppe und die Reihenfolgen der Gruppen nicht von Bedeutung sind. So ist beispielsweise die Aufteilung ABC-DEF nicht verschieden von DFE-CBA.)

b) Bei der ersten Aufgabe hat das Team die Lösung der dritten Teilaufgabe nicht mehr geschafft. Deshalb teilt sich das Team bei der zweiten Aufgabe diesmal in drei Paare auf, um gleichzeitig die drei Teilaufgaben zu bearbeiten.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, drei Paare zu bilden? Schreibe diese Möglichkeiten wieder alle auf.

c) Bei der dritten Aufgabe hat das Team einen neuen Plan: A erwies sich als besonders pfiffig beim Lösen der Aufgaben. Deshalb soll er diesmal eine Aufgabe alleine bearbeiten. Die fünf anderen Teilnehmer bilden ein Paar und eine Dreiergruppe.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Team so aufzuteilen?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2015

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Für die Geldeinheiten verwenden wir die Abkürzungen fl (Gulden), gr (Groschen) und pf (Pfennige).

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Kaufmann erhielt insgesamt **5 Gulden, 6 Groschen und 5 Pfennige**.

Herleitung: Insgesamt sind es (9 + 7 + 25 =) 41 pf. Weil 12 pf einen Groschen ergeben, lassen sich 41 pf wegen 3 · 12 + 5 = 41 als 3 gr **5 pf** darstellen.

Unter Berücksichtigung dieser 3 gr sind es insgesamt (3 + 17 + 28 =) 48 gr. Weil 21 gr einen Gulden ergeben, lassen sich 48 gr wegen 2 · 21 + 6 = 48 als 2 fl **6 gr** darstellen.

Unter Berücksichtigung dieser 2 fl sind es insgesamt (2 + 3 =) **5 fl**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gilt: 2 fl 4 gr 8 pf = 1 fl 19 gr 80 pf. Also lässt sich der Betrag mit 100 Münzen darstellen.

Begründung: Wegen 6 · 12 + 8 = 80 sind 80 pf so viel wie 6 gr und 8 pf.
Wegen 1 · 21 + 4 = 25 = 19 + 6 sind 25 gr so viel wie 1 fl 4 gr.
Folglich ergeben die 100 Münzen den Geldbetrag von 2 fl 4 gr 8 pf.

Um weitere Lösungen auszuschließen, ist folgende Fallunterscheidung hilfreich:

(1) Unter den 100 Münzen sind 2 fl. Da 4 gr in (4 · 12 =) 48 pf umgetauscht werden können, ist die mögliche Anzahl von Münzen nicht größer als (2 + 48 + 8 =) 58.

(2) Unter den 100 Münzen ist 1 fl. Dafür wurde bereits eine Lösung gefunden. Werden weniger Groschen in Pfennige getauscht, ist die Münzzahl kleiner als 100, werden mehr Groschen in Pfennige getauscht, ist die Münzzahl größer als 100.

(3) Unter den 100 Münzen sind keine Gulden. Es können also zwischen (2 · 21 + 4 =) 46 gr oder keine Groschen sein.
Werden 4 gr in Pfennige getauscht, sind es (46 – 4 =) 42 gr und (4 · 12 + 8 =) 56 pf, also (42 + 56 =) 98 Münzen.
Werden 5 gr in Pfennige getauscht, sind es (46 – 5 =) 41 gr und (5 · 12 + 8 =) 68 pf, also (41 + 68 =) 109 Münzen.
Somit ist in diesem Fall eine Darstellung mit 100 Münzen nicht möglich.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Der Kaufmann kann am Anfang höchsten 2 gr 9 pf gehabt haben.

Herleitung: Die Lösung lässt sich durch systematisches Probieren finden und in einer Tabelle übersichtlich darstellen:

Anzahl Groschen am Anfang	Anzahl Pfennige am Anfang	Vierfacher Betrag	Umtausch	Anzahl Münzen
0 gr	11 pf	0 gr 44 pf	3 gr 8 pf	11
1 gr	10 pf	4 gr 40 pf	7 gr 4 pf	11
2 gr	9 pf	8 gr 36 pf	11 gr	11
3 gr	8 pf	12 gr 32 pf	14 gr 8 pf	> 11

Lösungshinweise zur Aufgabe 2. Wir bezeichnen mit Q(n) die Anzahl der Quadrate im n-ten Ring. In der Abbildung erkennen wir: Q(0) = 1, Q(1) = 8, Q(2) = 16.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Zur Angabe der Lösung genügt das Auszählen an einer Zeichnung. So findet man Q(3) = 24, **Q(4) = 32**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Der 6. Ring besteht aus 48 Quadraten, **Q(6) = 48**.

Herleitung: Aus Teilaufgabe (a) wird die Berechnungsvorschrift $Q(n) = 8 \cdot n$ ersichtlich, also gilt $Q(6) = 6 \cdot 8 = 48$. [Dies ist als plausible Erklärung anzuerkennen, wenn sie auch nur anhand einiger weniger Beispiele gefunden wurde.]

Tiefgründiger ist ein rekursiver Ansatz: Zerlegen wir einen Ring mit Q Quadraten in die 4 Eckquadrate und die (Q – 4) Seitenquadrate, so hat der nächste Ring an jedem der Seitenquadrate ebenfalls ein Quadrat und an jedem der Eckquadrate weitere 3 Quadrate, also insgesamt $((Q - 4) + 3 \cdot 4 =)\ Q + 8$ Quadrate. Damit ist die zur obigen Formel passenden rekursive Bildungsvorschrift gefunden.
Ausgehend von Q(4) = 32 folgt Q(5) = Q(4) + 8 = 40 und Q(6) = Q(5) + 8 = 48.

Lösungsvariante: Das Muster aller Quadrate bis zum 6. Ring bildet ein Quadrat mit der Seitenlänge von 13 Quadraten. Der 6. Ring wiederum umschließt ein Quadrat mit der Seitenlänge von 11 Quadraten. Damit findet man: $Q(6) = 13^2 - 11^2 = 169 – 121 = 48$.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Man benötigt 161 weiße und 128 graue Quadrate.

Herleitung: Fertigt man sich eine Liste der Anzahl der Quadrate je Ring an, ist die Aufgabe leicht zu beantworten. Auch eine Zeichnung des Musters bis zum 8. Ring gilt als Lösung.

Ring-Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Anzahl weiße Quadrate	1		16		32		48		64	161
Anzahl graue Quadrate		8		24		40		56		128

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Die Anzahl der Quadrate eines Ringes ist immer gerade, außer beim 0. Ring. Beginnt man mit einem weißen 0. Ring, ist die Anzahl der weißen Quadrate ungeradzahlig, die der grauen Quadrate geradzahlig.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt 10 verschiedene Möglichkeiten.

Herleitung: Betrachten wir die Dreiergruppe, zu der A gehört. Es gibt nun 10 Möglichkeiten, zwei aus den verbleibenden fünf Teilnehmern auszuwählen, die in das Team von A kommen: BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF . Die anderen drei bilden die zweite Dreiergruppe. Deshalb sind folgende Dreiergruppen möglich:

ABC-DEF,	ABD-CEF,	ABE-CDF,	ABF-CDE,
	ACD-BEF,	ACE-BDF,	ACF-BDE,
		ADE-BCF,	ADF-BCE,
			AEF-BCD.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gibt 15 verschiedene Möglichkeiten.

Herleitung: Betrachten wir das Paar, zu denen A gehört, dafür gibt es 5 verschiedene Möglichkeiten (AB, AC, AD, AE oder AF). Für die 4 verbleibenden Teilnehmer gibt es 3 verschiedene Möglichkeiten, sich in zwei Paare aufzuteilen. Insgesamt gibt es also (5 · 3 =) 15 Möglichkeiten:

AB-CD-EF,	AB-CE-DF,	AB-CF-DE,
AC-BD-EF,	AC-BE-DF,	AC-BF-DE,
AD-BC-EF,	AD-BE-CF,	AD-BF-CE,
AE-BC-DF,	AE-BD-CF,	AE-BF-CD,
AF-BC-DE,	AF-BD-CE,	AF-BE-CD.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Wie in Teilaufgabe (a) gibt es **10 verschiedene Möglichkeiten**. Es genügt ja, die Dreiergruppe, zu der A gehört in A und das Paar der beiden anderen Teilnehmer aufzuteilen.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2016

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1 – Aus dem 2. Rechenbuch von Adam Ries. Adam Ries ließ 1 522 sein zweites Rechenbuch in Erfurt drucken. Darin beschrieb er ausführlich die „Regula Detri“ (die Regel von drei Dingen) und demonstrierte ihre Anwendung an zahlreichen Aufgaben der folgenden Art:


Regula Detri
JSt ein Regel von dreyen dingen/ Setz hin-
den das du wissen wilt/ wirdt die Frag ge-

(*Beachte:* Zur Zeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man mit Gulden, Groschen und Pfennigen. Für einen Gulden erhielt man 21 Groschen, für einen Groschen 12 Pfennige. Längen wurden unter anderem in Ellen angegeben.)

a) Von einer Sorte Tuch kostet eine Elle 3 Gulden, 5 Groschen und 5 Pfennige. Wie viel kosten 6 Ellen des Tuchs? Gib den Geldbetrag so an, dass die Anzahlen der Groschen und Pfennige möglichst klein sind.

b) Wenn 32 Ellen einer anderen Sorte Tuch 28 Gulden kosten, wie viel kosten dann 6 Ellen von diesem Tuch? Bestimme den Geldbetrag so, dass die Anzahlen der Groschen und Pfennige möglichst klein sind.

Ein Kaufmann bietet zwei Sorten Tuch an: Das rote Tuch kostet 2 Gulden 10 Groschen je Elle, das blaue Tuch kostet 1 Gulden 7 Groschen je Elle. Eine Bauersfrau kauft sowohl rotes als auch blaues Tuch, jeweils eine ganze Anzahl von Ellen. Zusammen waren es aber nicht mehr als 10 Ellen.

c) Wie viele Ellen Tuch könnte sie gekauft haben, wenn sie den Gesamtbetrag mit einer ganzen Anzahl von Gulden bezahlen kann? Gib an, wie viele Ellen rotes Tuch und wie viele Ellen blaues Tuch sie gekauft hat. Welchen Gesamtbetrag hat sie dafür bezahlt?

Aufgabe 2 – Eine technische Meisterleistung. Die neuen Stadtteile der Stadt Most wurden ab 1964 aufgebaut. Sie ersetzten die damals in unmittelbarer Nähe befindliche Altstadt von Brüx, die schon im 13. Jahrhundert entstand, aber nun dem Braunkohletagebau weichen musste. Fast die gesamte Altstadt wurde abgerissen. Erhalten blieb die Kirche Maria Himmelfahrt. Das historische Bauwerk wurde in einer spektakulären Aktion 1975 ohne seine Fundamente auf einer Schienenbahn zum heutigen Standort verschoben. Die durchschnittliche Geschwindigkeit dieser Fahrt betrug weniger als 1,5 m pro Stunde.

Für die folgenden Aufgaben wurden die Zahlen geändert.

a) Prüfe durch eine Rechnung nach, dass die Fahrt in 30 Tagen ihr Ziel in 850 m Entfernung erreichen konnte, wenn ununterbrochen jede Minute 20 mm zurückgelegt wurden.

Die Ingenieure wollten die Geschwindigkeit erhöhen und hielten es für realisierbar, in jeder Minute 25 mm zurückzulegen. Sie empfahlen allerdings, die Fahrt nach jeweils 10 Stunden zu unterbrechen, um eine Wartung durchzuführen. Eine solche Wartung dauerte 2 Stunden.

b) War unter diesen Bedingungen das Ziel in der vorgesehenen Zeit von 30 Tagen zu erreichen? Begründe deine Antwort!

c) Wenn der Start der Fahrt am ersten Tag um 12:00 Uhr erfolgte, am wievielten Tag und um welche Uhrzeit wurde dann das Ziel erreicht?

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten. Wir wissen nicht, ob Adam Ries und seine Familie mit Domino-Steinen spielten. Möglich wäre es, denn das Domino-Spiel soll erstmals im 14. Jahrhundert nach Europa gekommen sein. Man vermutet, dass es der Weltreisende Marco Polo (1254-1323) aus dem fernen China mitgebracht haben könnte.

Die bekannteste Variante des Domino-Spiels besteht aus 28 Steinen. Jeder Stein besteht aus 2 quadratischen Feldern, auf denen alle Kombinationen der Augenzahl 0 bis 6 genau einmal vorkommen. Wir schreiben für einen Domino-Stein die Augenzahlen in der Form 0|0, 0|1, ..., 0|6, 1|1, 1|2, ..., 5|6, 6|6 auf. Dabei bezeichnen beispielsweise 1|3 und 3|1 natürlich den gleichen Domino-Stein, denn man kann jeden Domino-Stein drehen.

Für das Aneinanderlegen von Domino-Steinen zu einer Reihe gilt die Spielregel, dass die aneinander stoßenden Felder die gleiche Augenzahl zeigen müssen. Die Abbildung zeigt eine regelgerechte Reihe aus drei Domino-Steinen

5	3	3	0	0	0

Bei den folgenden Aufgaben gelten zwei Auswahlen als verschieden, wenn in der einen Auswahl mindestens ein Domino-Stein ist, der nicht in der anderen Auswahl ist.

a) Gib an, wie viele verschiedene Möglichkeiten der Auswahl von zwei Domino-Steinen es gibt, um die folgende Reihe regelgerecht auszulegen.

6	6	?	?	?	?

b) Gib an, wie viele verschiedene Möglichkeiten der Auswahl von zwei Domino-Steinen es gibt, um die folgende Reihe regelgerecht auszulegen. (Einmal ausgewählt spielt es keine Rolle, welcher der beiden Domino-Steine links und welcher rechts angelegt wird.)

?	?	6	6	?	?

c) Die folgende Reihe hat Platz für vier Domino-Steine. Zwei Domino-Steine sind bereits aufgelegt.

2	0	?	?	?	?	1	6

c1) Finde zwei Domino-Steine, die regelgerecht angelegt werden können, so dass die Summe der Augen aller acht Felder durch 16 teilbar ist.
c2) Begründe, warum es keine zwei Domino-Steine geben kann, so dass die Summe der Augen aller acht Felder durch 11 teilbar ist.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2016

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Abkürzend schreiben wir für Gulden fl, für Groschen gr und für Pfennige pf.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Von diesem Tuch kosten 6 Ellen 19 fl 11 gr 6 pf.

Herleitung: Wenn eine Elle Tuch 3 fl 5 gr 5 pf kostet, so kosten 6 Ellen Tuch (6 · 3 =) 18 fl (6 · 5 =) 30 gr und (6 · 5 =) 30 pf.
Nun lassen sich 30 pf in 2 gr 6 pf umrechnen, denn es gilt 2 · 12 + 6 = 30.
Weiter lassen sich (30 + 2 =) 32 gr in 1 fl 11 gr umrechnen, denn es gilt 1 · 21 + 11 = 32.
Damit sind es (18 + 1 =) 19 fl.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Von dem anderen Tuch kosten 6 Ellen 5 fl 5 gr 3 pf.

Herleitung: Den Betrag von 28 fl kann man in (28 · 21 · 12 =) 7056 pf umrechnen.
Wegen (32 : 16) · 3 = 6 ist dieser Betrag durch 16 zu dividieren, (7056 : 16 =) 441 pf. Dieses Ergebnis ist mit 3 zu multiplizieren, (441 · 3 =) 1323 pf.
Wegen 1323 = 110 · 12 + 3 können 1323 pf in 110 gr 3 pf umgerechnet werden.
Wegen 110 = 5 · 21 + 5 können 110 gr in 5 fl 5 gr umgerechnet werden.
Somit sind 1323 pf so viel wie 5 fl 5 gr 3 pf.

Lösungsvariante mit kleineren Zahlen: Man betrachte zunächst (32 · 3 =) 96 Ellen des Tuchs mit dem Preis von (28 · 3 =) 84 fl. Wegen 96 : 16 = 6 ist der Betrag von 84 fl durch 16 zu dividieren. Mit der Zerlegung 84 = 5 · 16 + 4 verbleiben 5 fl und es genügt, den Betrag von 4 fl durch 16 zu dividieren, d.h. den Betrag von 1 fl durch 4 zu dividieren. Man kann 1 fl in (21 · 12 =) 252 pf umrechnen. Man findet (252 : 4 =) 63 pf, die sich in 5 gr 3 pf umrechnen lassen. Dies findet man unmittelbar, wenn man 1 fl in 20 gr 12 pf umrechnet.

Lösungsvariante fürs „Kopfrechnen“: Wenn 32 Ellen Tuch 28 fl kosten, dann kosten (32 : 4 =) 8 Ellen (28 : 4 =) 7 fl. Also kosten (3 · 8 =) 24 Ellen (3 · 7 =) 21 fl. Um den Preis für 6 Ellen zu ermitteln, ist wegen (24 : 4 =) 6 Ellen der Betrag von 21 fl durch 4 zu teilen. Da sich 21 fl als 20 fl 21 gr und weiter als 20 fl 20 gr 12 pf darstellen lässt, findet man unmittelbar das Ergebnis (20 : 4 =) 5 fl (20 : 4 =) 5 gr (12 : 4 =) 3 pf.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Die Bauersfrau hat 7 Ellen rotes Tuch und 2 Ellen blaues Tuch für den Gesamtbetrag von 20 fl gekauft.

Herleitung: Prinzipiell ist diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösbar. Durch die Begrenzung „zusammen nicht mehr als 10 Ellen“ wären 45 Möglichkeiten auszuprobieren. Eine tabellarische Übersicht ist für eine solche „Fleißarbeit“ hilfreich:

Ellen vom roten Tuch	Betrag für das rote Tuch	Ellen vom blauen Tuch	Betrag für das blaue Tuch	Gesamtbetrag
1	2 fl 10 gr	1	1 fl 7 gr	3 fl 17 gr
1	2 fl 10 gr	2	2 fl 14 gr	4 fl 24 gr = 5 fl 3 gr
1	2 fl 10 gr	3	3 fl 21 gr	5 fl 31 gr = 6 fl 10 gr
...				
7	**14 fl 70 gr**	**2**	**2 fl 14 gr**	**16 fl 84 gr = 20 fl**

...				
9	18 fl 90 gr	1	1 fl 7 gr	19 fl 97 gr = 23 fl 12 gr

Lösungsvariante: Um eine ganze Anzahl von Gulden zu erhalten, muss die Summe aus dem Vielfachen von 10 gr (beim roten Tuch) und dem Vielfachen von 7 gr (beim blauen Tuch) ein ganzzahliges Vielfaches von 21 gr ergeben. Es genügt also zu probieren, ob es ein Vielfaches von 21 gibt, dass um ein Vielfaches von 10 vermindert eine durch 7 teilbare Zahl ergibt. Da es genügt, eine Lösung anzugeben, kann bei einer gefundenen Möglichkeit die Suche beendet werden:

Vielfaches von 21	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70
21	11	1					
42	32	22	12	2			
63	53	43	33	23	13	3	
84	74	64	54	44	34	24	**14**

Somit könnte die Bauersfrau 7 Ellen rotes Tuch und 2 Ellen blaues Tuch gekauft haben. Die Bedingung $7 + 2 \leq 10$ ist erfüllt. Bei diesem Lösungsweg muss der Gesamtbetrag noch berechnet werden:

$$7 \cdot (2 \text{ fl } 10 \text{ gr}) + 2 \cdot (1 \text{ fl } 7 \text{ gr}) = (14 + 2) \text{ fl } (70 + 14) \text{ gr} = 16 \text{ fl } 84 \text{ gr} = 20 \text{ fl}.$$

Ergänzung: Die Lösungsvariante lässt sich formalisieren: Angenommen, die Bauersfrau habe R Ellen rotes Tuch (52 gr je Elle) und B Ellen blaues Tuch (28 gr je Elle) gekauft. Laut Aufgabenstellung gilt $R > 0$ und $B > 0$. Es gibt also eine ganze Zahl Z, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$R \cdot 52 + B \cdot 28 = Z \cdot 21,$$

Da sowohl 28 als auch 21 durch 7 teilbar ist, 52 aber nicht, muss 7 ein Teiler von R sein. Wegen $R < 10$ gilt also $R = 7$.

Setzt man $R = 7$ in die obige Gleichung ein und dividiert man beide Seiten durch 7, erhält man:

$$52 + B \cdot 4 = Z \cdot 3, \qquad \text{also } 4 \cdot (13 + B) = Z \cdot 3$$

Da die rechte Seite ein Vielfaches von 3 ist, 4 aber nicht durch 3 teilbar ist, muss $13 + B$ ein Vielfaches von 3 sein. Dies ist für $B = 2$ der Fall.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Das Ziel bei 850 m ist in 30 Tagen erreichbar.

Begründung: Wenn das Bauwerk in 1 Minute um 20 mm = 2 cm verschoben wird, wird es in 1 Stunde um $(60 \cdot 2 =)$ 120 cm verschoben. Somit wird das Bauwerk jeden Tag um $(24 \cdot 120 =)$ 2880 cm verschoben. In 10 Tagen sind es $(10 \cdot 2880 =)$ 28800 cm = 288 m.
Insgesamt kann also das Bauwerk in 30 Tagen um $(288 \cdot 3 =)$ 864 m verschoben werden. Das Ziel bei 850 m ist also in 30 Tagen erreichbar.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Das Ziel kann auch unter diesen Bedingungen in 30 Tagen erreicht werden.

Begründung: Mit der erhöhten Geschwindigkeit wird das Bauwerk in einer Stunde um $(60 \cdot 25 =)$ 1500 mm = 150 cm verschoben. Aufgrund von 2 Wartungspausen pro Tag sind täglich nur 20

Stunden Fahrtzeit möglich. Somit wird das Bauwerk jeden Tag um (20 · 150 =) 3000 cm = 30 m verschoben. Da dies pro Tag mehr als in Teilaufgabe a) ist, kann auch unter diesen Bedingungen in 30 Tagen das Ziel erreicht werden.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Das Ziel wurde am 29. Tag um 18:40 Uhr erreicht.

Herleitung: Am 1. Tag wurden nach 10 Stunden Fahrzeit 15 m erreicht, bevor von 22:00 Uhr bis 24:00 Uhr die erste Wartungspause erfolgte.

An jedem folgenden Tag wurde von 00:00 Uhr bis 24:00 Uhr eine Strecke von 30 m zurückgelegt. Bis Mitternacht des 2. Tages wurden folglich insgesamt (15 + 1 · 30 =) 45 m zurückgelegt, entsprechend bis Mitternacht des 28. Tages insgesamt (15 + 27 · 30 =) 825 m.

Am 29. Tag wurde von 00:00 Uhr bis 10:00 Uhr das Bauwerk um weitere 15 m verschoben, so dass bereits 840 m zurückgelegt waren. Nach der letzten Wartung von 10:00 bis 12:00 Uhr waren noch (850 - 840 =) 10 m zurückzulegen. Da in 10 Stunden (600 min) eine Strecke von 15 m Strecke möglich war, benötigte man für 10 m nur noch 400 min (6 Stunden und 40 Minuten). Das Ziel wurde somit am 29. Tag um 18:40 Uhr erreicht.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt 36 mögliche Auswahlen von Domino-Steinen.

Begründung: Als zweiten Domino-Stein in dieser Reihe kann jeder der Domino-Steine 6|0, 6|1, 6|2, ..., 6|5 ausgewählt werden (6 Möglichkeiten). In Abhängigkeit von der Auswahl 6|a gibt es jeweils 6 Möglichkeiten für den dritten Domino-Stein in dieser Reihe: a|0, ..., a|5 (nicht aber a|6, weil 6|a = a|6 bereits als zweiter Domino-Stein der Reihe ausgewählt wurde). Somit sind es insgesamt (6 · 6 =) 36 mögliche Auswahlen.

Die Lösung kann auch durch Angabe der 36 vervollständigten Reihen dargestellt werden.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gibt 15 mögliche Auswahlen von Domino-Steinen.

Begründung: 3.2 Um die Reihe regelgerecht zu ergänzen, kann die Auswahl nur aus zwei der Domino-Steine 0|6, 1|6, ... 5|6 bestehen. Für den ersten Domino-Stein sind es 6 Möglichkeiten, für den zweiten Domino-Stein sind es noch 5 Möglichkeiten. Da es aber auf die Reihenfolge der Auswahl nicht ankommt (beispielsweise 0|6 und 6|1 die gleiche Auswahl wie 1|6 und 6|0 darstellt), sind es insgesamt (6 · 5 : 2 =) 15 verschiedene Auswahlen.

Die Lösung kann auch durch Angabe der 15 vervollständigten Reihen dargestellt werden.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c1): Die Domino-Steine 0|3 und 3|1 erfüllen die Bedingung, denn es gilt 2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 1 + 1 + 6 = 16.

2	0	0	3	3	1	1	6

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c2): Bei regelgerechtem Anlegen sind zwei weitere Felder bereits festgelegt:

2	0	0	?	?	1	1	6

Die Summe der schon festgelegten 6 Felder beträgt 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 6 = 10. Da beide Felder mit ? die gleiche Augenzahl zeigen müssen, ist die Gesamtsumme bei jeder regelgerechten Belegung geradzahlig. Wenn die Augensumme aller 8 Felder durch 11 teilbar sein soll, muss die Augensumme 22 betragen. Es muss also anstelle des ? eine 6 stehen. Dazu würde jedoch der Domino-Stein 1|6 zweimal benötigt – dies ist nicht möglich.

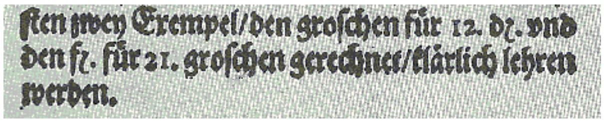
ADAM-RIES-Wettbewerb 2017

1. Stufe (Hausarbeit)

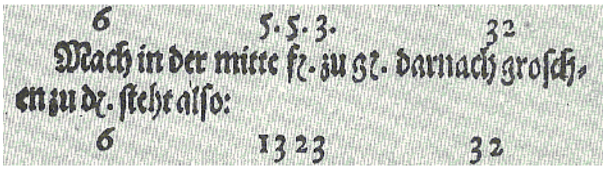
Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1. Als Adam Ries lebte, bezahlte man mit Gulden, Groschen und Pfennigen. Es galten die Umrechnungen:

1 Groschen = 12 Pfennige,
1 Gulden = 21 Groschen,


sten zwey Exempel/den groschen für 12. dz. vnd den fl. für 21. groschen gerechnet/klärlich lehren werden.

Wenn Adam Ries in seinen Aufgaben aufforderte „Mach Gulden zu Groschen, danach mach Groschen zu Pfennigen“, entstanden meist große Zahlen, denn 1 Gulden entsprach bereits 252 Pfennigen. Im nebenstehenden Auszug aus seinem 2. Rechenbuch (Seite 17) werden 5 Gulden 5 Groschen 3 Pfennige zu insgesamt 1323 Pfennig umgerechnet.


6 5.5.3. 32
Mach in der mitte fl. zu gr. darnach grosch-en zu dz. steht also:
6 1323 32

Doch beim Aufteilen von Geldbeträgen auf mehrere Personen würde niemand erst alles in Pfennige umtauschen, sondern stets darauf achten, möglichst wenige Münzen zu verwenden. Will ein Kaufmann beispielsweise 5 Gulden auf drei Personen aufteilen, genügt es 3 Gulden unverändert zu lassen und nur 2 Gulden in 42 Groschen umzutauschen. Die Rechnung gelingt dann mit kleinen Zahlen: Jede der drei Personen erhält

3 Gulden : 3 = 1 Gulden und 42 Groschen : 3 = 14 Groschen.

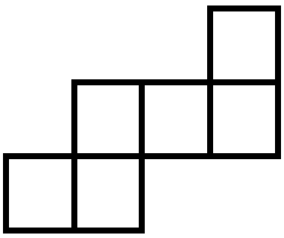
Löse nun folgende Aufgaben!

a) Teile 8 Gulden auf 7 Personen auf. Wie viel Geld erhält jeder? Gib den Betrag mit möglichst wenig Münzen an!

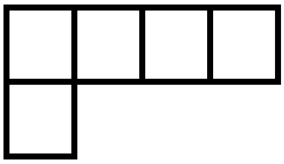
b) Teile 18 Gulden auf 8 Personen auf. Wie viel Geld erhält jeder? Gib den Betrag mit möglichst wenig Münzen an!

c) Es haben 9 Personen insgesamt 31 Gulden in eine Kasse eingezahlt, jeder den gleichen Geldbetrag. Nun lassen sich 4 Personen ihr eingezahltes Geld wieder auszahlen. Welcher Geldbetrag ist nach der Auszahlung noch in der Kasse? Gib den Betrag mit möglichst wenig Münzen an!

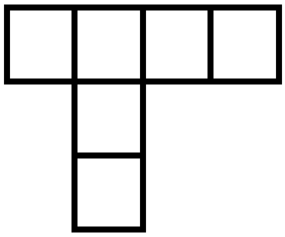
Aufgabe 2 – Mit Schere und Papier. Wir fertigen aus Papier einen Spielwürfel. Dazu entwerfen wir ein Würfelnetz, also eine Vorlage aus 6 zusammenhängenden identischen Quadraten, die sich zu einem Würfel falten lässt. (Die fürs Basteln erforderlichen Klebefalze haben wir hier weggelassen.) Leicht kannst du ausprobieren, dass sich das abgebildete Netz von Quadraten tatsächlich zu einem Würfel falten lässt.



a) Das nebenan abgebildete Netz ist noch unvollständig. An wie vielen verschiedenen Stellen kann das sechste Quadrat angefügt werden?
Zeichne die Möglichkeiten auf.

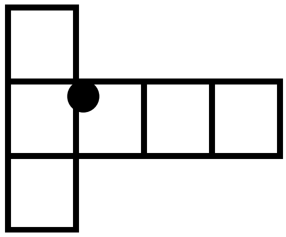


b) Jemand hat das Netz der nebenstehenden Abbildung gezeichnet.
Begründe, warum man dieses Netz nicht zu einem vollständigen Würfel falten kann.



Auf den Kanten eines Würfels läuft eine Ameise.

c) Zeichne das nebenstehend abgebildete Würfelnetz ab. Markiere auf dem Würfelnetz alle Eckpunkte, die die Ameise erreichen kann, wenn sie am markierten Punkt startet und ihr Weg genau zwei Kantenlängen lang ist.



Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten. Claudia und Andreas untersuchen die Möglichkeiten, ein Quadrat durch kleinere Quadrate vollständig zu überdecken, sodass die kleineren Quadrate nicht übereinanderliegen (wir sagen, sie sind überschneidungsfrei). Beispielsweise kann ein 3 x 3 – Quadrat durch ein 2 x 2 – Quadrat und fünf 1 x 1 – Quadrate vollständig und überschneidungsfrei überdeckt werden (siehe Abbildung).

Zwei Überdeckungen gelten als gleich, wenn sie in den Anzahlen der Quadrate jeder Größenordnung übereinstimmen, unabhängig von der Lage. In der Abbildung sind beide Überdeckungen also gleich, weil sie jeweils aus einem 2 x 2 – Quadrat und aus fünf 1 x 1 – Quadraten bestehen.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein 4 x 4 – Quadrat durch kleinere Quadrate zu überdecken. Gib alle möglichen Überdeckungen mit der Anzahl der verwendeten Quadrate jeder Größe an.

b) Zeichne für ein 5 x 5 – Quadrat eine Überdeckung mit kleineren Quadraten und verwende dabei genau acht kleinere Quadrate.

c) Claudia behauptet, ein 6 x 6 – Quadrat mit genau fünf kleineren Quadraten überdeckt zu haben. Andreas erwidert: „Das kann nicht sein!“ Wer hat recht? Begründe deine Antwort.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2017

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Abkürzend schreiben wir für Gulden fl, für Groschen gr und für Pfennige pf.

Antwort zur Teilaufgabe a): 8 fl = 7 fl 21 gr, also lautet das Ergebnis nach Division durch 3: **1 fl 3 gr**

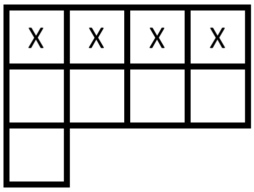
Antwort zur Teilaufgabe b): 18 fl = 16 fl 42 gr = 16 fl 40 gr 24 pf, also lautet das Ergebnis nach Division durch 8: **2 fl 5 gr 3 pf**

Antwort zur Teilaufgabe c): **17 fl 4 gr 8 pf**

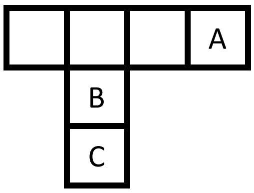
Herleitung: 31 fl = 27 fl 84 gr = 27 fl 81 gr 36 pf. Daraus folgt die Einzahlung pro Person nach Division durch 9: 3 fl 9 gr 4 pf. Der verbleibende Betrag für 5 Personen ergibt sich nach Multiplikation mit 5: 15 fl 45 gr 20 pf = 15 fl 45 gr (12 + 8) pf = 15 fl 46 gr 8 pf = 15 fl (42 + 4) gr 8 pf = 17 fl 4 gr 8 pf.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Antwort zur Teilaufgabe a): An jeder der vier mit X markierten Stellen kann das sechste Quadrat des Würfelnetzes ergänzt werden:

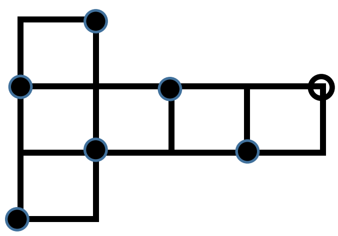


Antwort zur Teilaufgabe b): Die vier waagerecht angeordneten Quadrate bilden den Mantel eines Würfels. Das Quadrat in der zweiten Reihe (mit B bezeichnet) wird zur Grund- oder Deckfläche. Dann fällt beim Falten das mit C bezeichnete Quadrat mit der mit A bezeichneten Seitenfläche zusammen. Damit ist der Würfel nicht vollständig.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): An einem Würfel ist leicht zu erkennen, dass die Ameise mit zwei Kantenlängen vier Punkte nicht erreichen kann: Die drei Eckpunkte, die vom Ausgangspunkt in einer Kantenlänge zu erreichen sind (weil die Ameise weiter- oder zurücklaufen muss) und der Eckpunkt, der auf der Raumdiagonale gegenüberliegt (weil er drei Kantenlängen entfernt ist).

Die Weglänge von zwei Kantenlängen kann auch auf dem Würfelnetz nachgezeichnet werden. Damit sind die (voll) markierten Punkte erreichbar. Hinzu kommt noch der ohne Füllung markierte Punkt, der beim Falten mit dem Punkt links auf der waagerechten Linie zusammenfällt.



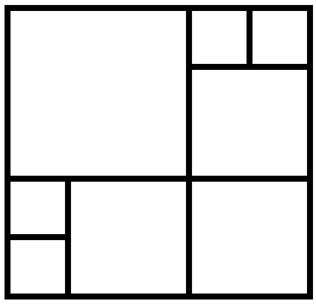
Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösung zur Teilaufgabe a): Tabellarische Angabe aller Möglichkeiten:

Anzahlen der zu verwendenden Quadrate:		
3 x 3 - Quadrate	2 x 2 - Quadrate	1 x 1 - Quadrate
1	0	7
0	4	0
0	3	4
0	2	8
0	1	12
0	0	16

Rein rechnerisch könnte auch mit einem 3 x 3 – Quadrat, einem 2 x 2 – Quadrate und drei 1 x 1 – Quadraten eine Überdeckung möglich sein – dies ist aber zeichnerisch nicht realisierbar.

Lösung zur Teilaufgabe b): Beispiel



Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): In der Hausarbeit ist die vollständige Auflistung aller Fälle in Analogie zur Teilaufgabe 3a) als Lösung zulässig und zielführend. Aber auch folgende Fallunterscheidung führt zum Ziel:

Wird ein 5 x 5 – Quadrat verwendet, kann die Überdeckung nur durch 1 x 1 – Quadrate ergänzt werden, insgesamt sind es dann 12 Teilquadrate.

Wird ein 4 x 4 – Quadrat verwendet, lässt sich die Überdeckung allenfalls mit 2x2 Quadraten oder 1x1 Quadraten ergänzen. Bei fünf 2 x 2 – Quadraten ergeben sich insgesamt bereits 6 Teilquadrate.

Bei einem 3 x 3 – Quadrat verbleibt eine Fläche von 27 Quadraten der Größe 1 x 1. Selbst bei größtmöglicher Verwendung von 2 x 2 - Quadraten sind dafür sechs 2 x 2 – Quadrate nicht ausreichend.

Bei zwei 3 x 3 – Quadraten verbleibt eine Fläche von 18. Doch dafür sind vier 2 x 2 – Quadrate nicht ausreichend.

Bei drei 3 x 3 – Quadraten verbleibt eine Fläche von 9. Doch dafür sind zwei 2 x 2 – Quadrate nicht ausreichend.

Werden nur 2 x 2 verwendet, benötigt man (36 : 4 =) 9 Teilquadrate. Tauscht man irgendein 2 x 2 – Quadrat in vier 1 x 1 – Quadraten, werden mehr Teilquadrate verwendet.

Werden nur 1 x 1 – Quadrate verwendet, sind 36 dieser Größe erforderlich.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2018

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1 – Aus dem 2. Rechenbuch von Adam Ries. Adam Ries beschreibt in seinem 2. Rechenbuch „Vom Gewinn nach der Zeit“: Wenn ein Geldbetrag für eine vereinbarte Zeit eingezahlt wird, wird das Geld nach dieser Zeit mit einem Gewinn zurückgegeben.


Vom gewinn nach
der zeit.
Item 12. fl. gewinnen in 3. Jaren 7. fl. in wie
viel Jaren werden 20. fl gewinnen 12. fl?
Facit 3. Jar vnd 3 3/5 theil.
Machs wie das nechst verzeichnet außwei-
set/setz:

(Heute sagen wir: „Das Geld wird angelegt und nach der vereinbarten Laufzeit mit Zinsen ausgezahlt.“)

Dabei gilt: Je größer der eingezahlte Geldbetrag ist, desto größer ist der Gewinn. Je länger der Zeitraum ist, desto größer ist der Gewinn.

An den folgenden 3 Beispielen lassen sich Regeln erkennen, wie man den Gewinn berechnen kann, wenn der Geldbetrag und der Zeitraum bekannt sind. Finde solche Regeln, um die nachfolgenden Aufgaben zu lösen.

Geldbetrag	**Zeitraum**	**Gewinn**
18 Gulden	2 Jahre	4 Gulden
18 Gulden	3 Jahre	6 Gulden
9 Gulden	1 Jahr	1 Gulden

a) Übertrage die Tabelle auf dein Lösungsblatt und ergänze die fehlenden Einträge, wenn auch hier die Regeln gelten sollen.

Geldbetrag	**Zeitraum**	**Gewinn**
18 Gulden	1 Jahr	
18 Gulden	2 Jahre	4 Gulden
18 Gulden	3 Jahre	6 Gulden
9 Gulden	1 Jahr	1 Gulden
9 Gulden		3 Gulden
9 Gulden	5 Jahre	

In einem anderen Fall wird für 45 Gulden nach 3 Jahren ein Gewinn von 12 Gulden angeboten.

b) Untersuche, ob dieses Angebot günstiger ist als das Angebot aus Aufgabe a). Begründe deine Antwort.

In einem weiteren Fall wird für 12 Gulden nach 3 Jahren ein Gewinn von 6 Gulden angeboten.

c) Jemand zahlt unter diesen Bedingungen eine ganze Anzahl von Gulden ein. Nach 2 Jahren erhält er einen Gewinn von 8 Gulden. Wie viele Gulden hatte er am Anfang eingezahlt?

Aufgabe 2 – Fußball-Weltmeisterschaft 2018. Wir untersuchen Fußball-Turniere, in denen in einer Gruppe jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft der Gruppe genau einmal antreten muss. In einer Gruppe mit fünf Mannschaften müssen also insgesamt 10 Spiele ausgetragen werden.

Nach jedem Spiel erhalten der Sieger 3 Punkte und der Verlierer 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten beide Mannschaften je einen Punkt.

a) Nachdem alle Spiele in einer Gruppe mit fünf Mannschaften beendet waren, gab es keine zwei Mannschaften mit gleicher Punktzahl. Außerdem endete kein Spiel unentschieden.
Gib eine Möglichkeit an, die die obigen Bedingungen erfüllt.

Wir betrachten nun eine andere Gruppe mit nur vier Mannschaften (wir kürzen sie mit A, B, C und D ab). Nachdem jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft genau einmal gespielt hat, lautet die Abschlusstabelle:

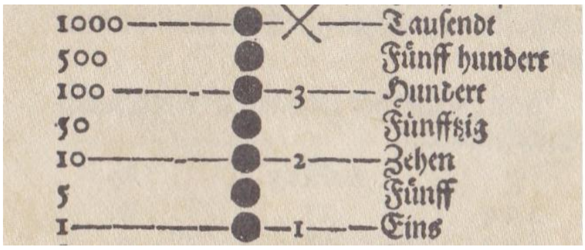
Platz	**Mannschaft**	**Anzahl Spiele**			**Tore gesamt**
		gewonnen	unentschieden	verloren	
1.	A	2	1	0	4 : 1
2.	B	2	0	1	4 : 1
3.	C	0	2	1	1 : 2
4.	D	0	1	2	0 : 5

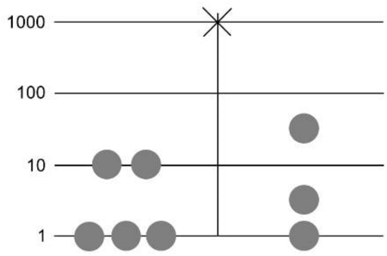
b) Wie viele Tore hat jede Mannschaft im Spiel A gegen B geschossen? Begründe deine Antwort!

c) Wie viele Tore hat jede Mannschaft im Spiel C gegen B geschossen? Begründe deine Antwort!

d) Gib das Ergebnis eines weiteren Gruppenspiels an!

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten. Auf dem Rechenbrett, wie es Adam Ries in seiner Rechenschule verwendete, sind Linien für die Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausender-Stellen gezeichnet. Die Zwischenräume zeigen die Werte Fünf, Fünfzig und Fünfhundert an.





Werden Rechenpfennige auf die Linien oder in die Zwischenräume gelegt, nehmen sie die entsprechenden Werte an.

In der Abbildung sind im linken Feld die Zahl 23 (mit fünf Rechenpfennigen) und im rechten Feld die Zahl 56 (mit drei Rechenpfennigen) gelegt.

Beim Auflegen der Rechenpfennige sind folgende Regeln zu beachten:

- Auf jeder Linie dürfen nicht mehr als 4 Rechenpfennige liegen.
- In jedem Zwischenraum darf nicht mehr als 1 Rechenpfennig liegen.

Beachte: Zwei Möglichkeiten des Auflegens von Rechenpfennigen auf dem Rechenbrett gelten als verschieden, wenn die zugehörigen Zahlenwerte verschieden sind.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, mit genau zwei Rechenpfennigen auf dem Rechenbrett eine Zahl kleiner als 100 zu legen? Gib alle Möglichkeiten an!

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, mit drei Rechenpfennigen auf dem Rechenbrett eine Zahl kleiner als 50 zu legen? Begründe deine Antwort!

c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, mit genau fünf Rechenpfennigen eine Zahl kleiner als 500 zu legen, wenn die Rechenpfennige nur auf den Linien und nicht in den Zwischenräumen liegen sollen?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2018

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

Ergebnisse zur Teilaufgabe a): Eine Begründung wird nicht verlangt.

Geldbetrag	Zeitraum	Gewinn
18 Gulden	1 Jahr	**2 Gulden**
18 Gulden	2 Jahre	4 Gulden
18 Gulden	3 Jahre	6 Gulden
9 Gulden	1 Jahr	1 Gulden
9 Gulden	**3 Jahre**	3 Gulden
9 Gulden	5 Jahre	**5 Gulden**

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Das neue Angebot ist mit 12 Gulden nach 3 Jahren ungünstiger als in Aufgabe a).

Begründung: Ausgehend von den Beispielen aus Aufgabe a) erhält man:

Geldbetrag	Zeitraum	Gewinn
9 Gulden	3 Jahre	3 Gulden
(9 · 5 =) 45 Gulden	3 Jahre	(3 · 5 =) 15 Gulden

Da man in Aufgabe a) für 45 Gulden nach 3 Jahren einen Gewinn von 15 Gulden erhält, ist das neue Angebot mit 12 Gulden nach 3 Jahren ungünstiger als in Aufgabe a).

Variante: Rechnet man das Angebot auf die Einzahlung von 9 Gulden für ein Jahr um, erhält man einen Betrag, der kleiner als 1 Gulden ist. Also ist das neue Angebot ungünstiger als in Aufgabe a).

Geldbetrag	Zeitraum	Gewinn
45 Gulden	3 Jahre	12 Gulden
45 Gulden	(3 : 3 =) 1 Jahr	(12 : 3 =) 4 Gulden
(45 : 5 =) 9 Gulden	1 Jahr	(4 : 5) < 1 Gulden

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Er hat 24 Gulden eingezahlt.

Begründung: Durch Anwendung der Regeln nach Aufgabe a) lassen sich zuerst der Gewinn für einen Zeitraum von 2 Jahren und anschließend der einzuzahlende Betrag für einen Gewinn von 8 Gulden berechnen.

Geldbetrag	Zeitraum	Gewinn
12 Gulden	3 Jahre	6 Gulden
12 Gulden	(3 : 3 =) 1 Jahr	(6 : 3 =) 2 Gulden
12 Gulden	(2 · 1 =) 2 Jahre	(2 · 2 =) 4 Gulden
(2 · 12 =) 24 Gulden	2 Jahre	(2 · 4 =) 8 Gulden

Lösungshinweise zu Aufgabe 2.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Der Gruppenerste erreichte 12 Punkte, der Gruppenzweite 9 Punkte, der Gruppendritte 6 Punkte, der Gruppenvierte 3 Punkte und der Gruppenletzte 0 Punkte.

Herleitung: Weil in einer Gruppe mit 5 Mannschaften insgesamt 10 Spiele auszutragen sind, wurden insgesamt 30 Punkte vergeben. Der Gruppenerste kann höchstens 12 Punkte erreichen (wenn er alle seine vier Spiele gewinnt). Da jede Mannschaft eine durch 3 teilbare Punktzahl haben muss und keine gleichen Punktzahlen auftreten, probiere man die Aufteilung 12 + 9 + 6 + 3 + 0 = 30.

Damit gibt es unter den angegebenen Bedingungen nur die im Antwortsatz gegebene Möglichkeit.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Das Spiel A gegen B endete mit 1 : 0.

Begründung: B hat ein Spiel verloren. Da C und D keine Spiele gewonnen haben, kann B nur im Spiel gegen A verloren haben. Da B insgesamt nur ein Gegentor erhielt, muss B dieses im Spiel gegen A erhalten haben. Also endete das Spiel A gegen B mit 1 : 0.

Antwortsatz zur Teilaufgabe 2c): Das Spiel C gegen D endete mit 0 : 0.

Begründung: C hat 2 Spiele unentschieden gespielt. Da für B kein Spiel unentschieden endete, spielte C sowohl gegen A und als auch gegen D unentschieden. Da D insgesamt keine Tore schoss, endete das Spiel C gegen D mit 0 : 0.

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Für alle anderen Gruppenspiele gilt (es genügt ein weiteres Ergebnis anzugeben): Das Spiel A gegen C endete mit 1 : 1.

Das Spiel B gegen C endete mit 1 : 0.
Das Spiel A gegen D endete mit 2 : 0.
Das Spiel B gegen D endete mit 3 : 0.

Herleitung: Das Spiel A gegen C endete unentschieden. Das Ergebnis 0 : 0 ist nicht möglich, denn in diesem Fall hätte C gegen B ein Tor geschossen. Das einzige Gegentor für B war aber bereits im Spiel A gegen B. Da C insgesamt nur 1 Tor geschossen hat, lautete das Ergebnis A : C = 1 : 1.

Wenn C sowohl gegen A als auch gegen D unentschieden spielte, hat C gegen B verloren. Aufgrund der Torbilanz von C kann das Spiel C gegen B nur 0 : 1 geendet haben.

Durch Auswertung der noch nicht verwendeten Torerfolge von A und B ergibt sich, dass D gegen A mit 0 : 2 und gegen B mit 0 : 3 verloren hat.

Variante: Wird ohne weitere Erläuterungen eine vollständige Ergebnisübersicht angegeben, ist die Probe erforderlich, dass die Anzahl der gewonnenen (g), unentschiedenen (u) und verlorenen (v) Spiele und die Torverhältnisse der Aufgabenstellung entsprechen.

	A	**B**	**C**	**D**	**Tore**
A	X	1 : 0 (g)	1 : 1 (u)	2 : 0 (g)	4 : 1
B	0 : 1 (v)	X	1 : 0 (g)	3 : 0 (g)	4 : 1
C	1 : 1 (u)	0 : 1 (v)	X	0 : 0 (u)	1 : 2
D	0 : 2 (v)	0 : 3 (v)	0 : 0 (u)	X	0 : 5

Lösungshinweise zu Aufgabe 3.
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt 8 Möglichkeiten.

Begründung: Es gibt die Möglichkeiten 2, 6, 11, 15, 20, 51, 55, 60. Ein Nachweis, dass es keine weiteren gibt, wird nicht verlangt. Dieser könnte wie folgt geführt werden:

Für Zahlen kleiner als 100 gibt es nur 4 Stellen, Rechenpfennige aufzulegen: Einer-Linie I, Fünfer-Zwischenraum V, Zehner-Linie X und Fünfziger-Zwischenraum D. Mit I, V, X und D bezeichnen wir die Anzahl der Rechenpfennige auf diesen Stellen. Es gilt also I + V + X + D = 2. Folgende Fälle können unterschieden werden:

V = 0, D = 0: I + X = 2 ergibt 3 Möglichkeiten I = 2, X = 0; I = 1, X = 1; I = 0, X = 2
V = 1, D = 0: I + X = 1 ergibt 2 Möglichkeiten I = 1, X = 0; I = 0, X = 1
V = 0, D = 1: I + X = 1 ergibt 2 Möglichkeiten I = 1, X = 0; I = 0, X = 1
V = 1, D = 1: I + X = 0 ergibt 1 Möglichkeit I = 0, X = 0

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gibt 7 Möglichkeiten.

Begründung: Es gibt die Möglichkeiten 3, 7, 12, 16, 21, 25, 30.

Für Zahlen kleiner als 50 gibt es nur 3 Stellen, Rechenpfennige aufzulegen: Einer-Linie I, Fünfer-Zwischenraum V und Zehner-Linie X. Mit I, V und X bezeichnen wir die Anzahl der Rechenpfennige auf diesen Stellen. Es gilt also I + V + X = 3. Folgende Fälle können unterschieden werden:

V = 0: I + X = 3 ergibt 4 Möglichkeiten I = 3, X = 0; I = 2, X = 1; I = 1, X = 2; I = 0, X = 3
V = 1: I + X = 2 ergibt 3 Möglichkeiten I = 2, X = 0; I = 1, X = 1; I = 0, X = 2

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es gibt 18 Möglichkeiten.

Begründung: Laut Aufgabenstellung genügt die Anzahl der Möglichkeiten (s. Tabelle). Eine Herleitung wäre wie folgt möglich.

Für Zahlen kleiner als 500 gibt es nur 3 Stellen, Rechenpfennige aufzulegen: Einer-Linie I, Zehner-Linie X und Hunderter-Linie C. Mit I, X und C bezeichnen wir die Anzahl der Rechenpfennige auf diesen Stellen. Es gilt also I + X + C = 5. Da jede der Anzahlen nicht größer als 4 sein darf, sind folgende Fälle möglich:

Anzahl I	**Anzahl X**	**Anzahl C**	**Zahlenwert**
4	1	0	14
4	0	1	104
3	2	0	23
3	1	1	113
3	0	2	203
2	3	0	32
2	2	1	122
2	1	2	212
2	0	3	302
1	4	0	41
1	3	1	131
1	2	2	221
1	1	3	311
1	0	4	401
0	4	1	140
0	3	2	230
0	2	3	320
0	1	4	410

Variante: Es ist auch folgende Fallunterscheidung möglich:

Auf einer Linie liegen 4 Rechenpfennige (dafür gibt es 3 Möglichkeiten I, X oder C). Für den fünften Rechenpfennig gibt es jeweils noch zwei freie Linien, also insgesamt 3 · 2 = 6 Möglichkeiten.

Auf einer Linie liegen 3 Rechenpfennige (dafür gibt es 3 Möglichkeiten I, X oder C). Für den vierten und fünften Rechenpfennig gibt es drei Möglichkeiten, diese auf die anderen zwei Linien zu verteilen, also insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

Es verbleiben nun nur noch die Möglichkeiten, bei denen auf jeder Linie höchstens 2 Rechenpfennige liegen. Dafür gibt es aber nur drei Möglichkeiten: 122, 212, 221.

Insgesamt sind es $6 + 9 + 3 = 18$ Möglichkeiten.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2019

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Vorbemerkung. Adam Ries erklärt in seinem 2. Rechenbuch (das 1522 erschien) die Grundrechenarten. Dabei zeigt er es sowohl für das Rechnen auf den Linien als auch für das schriftliche Rechnen. Vor Multiplikation und Division erläutert er als gesonderte Operationen ausführlich das Verdoppeln („Duplieren“) und das Halbieren („Medieren“).


Dupliren
Lehret wie du ein zahl zweyfaltigen solt. Thu ihm also: Schreib die zahl vor dich/mach ein


Medirn
Lehret wie du ein zahl halb machen solt. Thu ihm also: Schreib dieselbige für dich/ mach

Aufgabe 1 – Im zweiten Rechenbuch geblättert. Zu der Zeit, als Adam Ries lebte, bezahlte man mit Gulden, Groschen und Pfennigen. Für einen Gulden erhielt man 21 Groschen, für einen Groschen 12 Pfennige. Für die Angabe der Masse einer Ware wurde unter anderem Pfund verwendet.

a) Berechne das Doppelte von 2 Gulden, 15 Groschen und 9 Pfennigen. Gib das Ergebnis mit möglichst wenigen Münzen an.

b) Berechne die Hälfte von 3 Gulden. Gib das Ergebnis mit möglichst wenig Münzen an, aber so, dass die Anzahl von Gulden, Groschen und Pfennigen ganzzahlig ist.

Mit Halbieren und Addieren lassen sich manche Rechnungen ohne eine schwierige Division und Multiplikation ausführen. Beispiel: Wenn 4 Pfund Wachs 8 Groschen kosten, wie viel kosten dann 3 Pfund Wachs? Zunächst wird zweimal halbiert: 2 Pfund Wachs kosten 4 Groschen, 1 Pfund Wachs kostet 2 Groschen, somit kosten (2 + 1 =) 3 Pfund Wachs insgesamt (4 + 2 =) 6 Groschen.

c) Wenn 16 Pfund Äpfel 1 Gulden, 1 Groschen und 8 Pfennige kosten, wie viel kosten dann 11 Pfund Äpfel? Gib das Ergebnis mit möglichst wenig Münzen an.

Aufgabe 2 – Zahlen folgen auf Zahlen. Wir bilden Zahlenfolgen wie schon der Mathematiker Leonardo Fibonacci, der sich bereits um 1200 mit solchen Zahlen beschäftigt hat: Er begann mit 1 und 1, bildete die Summe (1 + 1 = 2) und schrieb das Ergebnis daneben: 1, 1, 2. Dann addierte er die zwei rechts stehenden Zahlen (1 + 2 = 3) und schrieb das Ergebnis wieder rechts daneben: 1, 1, 2, 3 und so weiter.

Es ist gut möglich, dass sich die Söhne von Adam Ries (Adam, Abraham, Jacob, Isaac und Paul) mit solchen Zahlenspielereien beschäftigten.

a) Abraham begann wie Fibonacci mit den Zahlen 1 und 1 als 1. und 2. Glied der Folge. Dann hat er diese Rechenvorschrift bis zum 9. Glied der Folge durchgeführt. Er erhielt als Ergebnis 34. Prüfe nach, ob Abraham richtig gerechnet hat und schreibe dafür alle Zwischenergebnisse auf.

b) Paul behauptete, er könne das Ergebnis 34 als 8. Zahl der Folge mit dieser Rechenvorschrift erreichen, wenn er als 2. Folgenglied nicht die 1, sondern eine andere Zahl setzt. Hat Paul Recht? Welche Zahl müsste er auf die zweite Stelle setzen?

c) Jacob behauptete, er könne die ersten beiden Zahlen so geschickt auswählen, dass er das Ergebnis 34 bereits als 5. Zahl der Folge erhält. Hat Jacob Recht? Mit welchen Zahlen müsste Jacob beginnen? Gib ein Beispiel an und führe eine Probe durch.

d) Adam dachte über die Behauptung von Jacob lange nach und stellte schließlich fest, dass es dafür verschiedene Lösungen gibt. Finde alle Zahlenpaare, die der Behauptung von Jacob entsprechen.

Aufgabe 3 – So viele Möglichkeiten. Die drei Töchter von Adam Ries (Eva, Anna und Sibylla) spielten gern mit Domino-Steinen. Ein vollständiges Domino-Spiel besteht aus 28 Domino-Steinen, die jede mögliche paarweise Auswahl von 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten tragen (s. Abbildung).

0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6
	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
		2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
			3 3	3 4	3 5	3 6
				4 4	4 5	4 6
					5 5	5 6
						6 6

Anstatt die Punkte zu zeichnen, schreiben wir kurz die Anzahl der Punkte auf, z.B. 1-2. Beachte, dass es zu einer Auswahl nur genau einen Domino-Stein gibt. Beispielsweise beschreiben die Angaben 1-2 und 2-1 den gleichen Domino-Stein. Die Augensumme eines Steines ist die Anzahl aller Punkte auf den zwei Feldern. So hat der Domino-Stein 1-2 die Augensumme 3.

a) Welche Domino-Steine gibt es, deren Augensumme genau 7 beträgt?

b) Anna und Eva entnahmen dem Haufen aller Domino-Steine jeweils einen Stein, ohne ihn wieder zurückzulegen. Bei welchen Domino-Steinen hat Eva nicht die Möglichkeit, einen Domino-Stein mit der gleichen Augensumme wie Anna zu ziehen.

c) Jedes der drei Mädchen entnahm dem Haufen aller Domino-Steine genau einen Stein, ohne ihn wieder zurückzulegen. Überrascht stellten Sie fest, dass die Augensumme des Steines von Eva doppelt so groß wie die Augensumme des Steines von Anna war, und dass gleichzeitig die Augensumme des Steines von Anna doppelt so groß wie die Augensumme des Steines von Sibylla war. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Behauptung zu erfüllen?

ADAM-RIES-Wettbewerb 2019

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Entsprechend des Hinweises auf dem Aufgabenblatt sollen die Nebenrechnungen aufgeschrieben werden. Wenn also nur kurz geschrieben steht, dass 1 Gulden / 1 Groschen / 8 Pfennige insgesamt 272 Pfennige sind, sollte auch bei richtiger Lösung ein Punkt mit dem Hinweis „Zeige, wie du gerechnet hast“ abgezogen werden.

Hinweis: Wir schreiben für die Währungsangabe kurz Gulden/Groschen/Pfennige.

Lösung zur Teilaufgabe a): 2 · (2/15/9) = 4/30/18 = 4/30/(12+6) = 4/31/6 = 4/(21+10)/6 = **5/10/6**

Lösung zur Teilaufgabe b): 3/0/0 = 2/21/0 = 2/20/12 → (3/0/0) : 2 = **1/10/6**

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Die Umrechnungsschritte können in einer Tabelle zusammengefasst werden:

Pfund	Gulden	Groschen	Pfennige
16	1	1	8
16	0	21+1	8
8	0	11	4
8	0	10	12+4
4	0	5	8
4	0	4	12 + 8
2	0	2	10
1	0	1	5

Um den Preis für (8 + 2 + 1 =) 11 Pfund zu ermitteln, sind die entsprechenden Teilpreise zu addieren:

0/11/4 + 0/2/10 + (0/1/5) = (0+0+0)/(11+2+1)/(4+10+5) = 0/14/19 = 0/14/(12+7) = **0/15/7**

Natürlich ist es korrekt, den Preis in Pfennige umzurechnen, durch 16 zu teilen, mit 11 zu multiplizieren und in Groschen und Pfennige umzurechnen, aber es sollte auf die Nebenrechnungen geachtet werden.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34. Es wurde sieben Mal die Summen gebildet, das 9. Glied ist tatsächlich 34.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Paul setzt auf die zweite Stelle die 2, dann verschiebt sich die Folge um ein Summe nach links:

1, 2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34.

Es ist bereits das 8. Glied 34.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Jacob könnte mit 2, 10 gestartet haben:

2, 10, 2+10 = 12, 10+12 = 22, 12+22 = 34.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Durch aufwändiges systematisches Probieren können alle Lösungen gefunden werden. Mit einem Formelansatz kann das Probieren jedoch reduziert werden.

Dafür seien die beiden Zahlen am Anfang mit a und b bezeichnet. Dann ergibt sich bis zur dritten Anwendung der Summenbildung folgender Verlauf:

$$a, b, a + b, b + (a + b) = a + 2b, (a + b) + (a + 2b) = 2a + 3b = 34$$

Jetzt genügt es die Zahlen a = 1, ..., 16 auszuprobieren, wobei nur a = 2, 5, 8, 11, 14 eine ganzzahlige Lösung für b liefert.

Variante: Aus $3b = 34 – 2a = 2 \cdot (17 – a)$ folgt, dass $(17 – a)$ durch 3 teilbar sein muss. Dies ist nur für die oben gefundenen Zahlen a erfüllt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Nur die Dominosteine 1-6, 2-5, 3-4 haben die Augensumme 7. Es gibt also drei derartige Dominosteine.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Die Augensumme 0 (Domino-Stein 0-0), 1 (0-1), 11 (5-6) und 12 (6-6) tritt jeweils nur bei einem Dominostein auf.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Tabellarisch unterstützte Lösungsfindung für Augensummen (AS)

Sibylla	Anna	Eva	Anzahl Möglichkeiten
AS=1: 0-1	AS=2: 0-2, 1-1	AS=4: 0-4, 1-3, 2-2	$1 \cdot 2 \cdot 3=6$
AS=2: 0-2, 1-1	AS=4: 0-4, 1-3, 2-2	AS=8: 2-6, 3-5, 4-4	$2 \cdot 3 \cdot 3=18$
AS=3: 0-3, 1-2	AS=6: 0-6, 1-5, 2-4, 3-3	AS=12: 6-6	$2 \cdot 4 \cdot 1=8$

Hat Sibylla die Augensumme 0, so ist die Bedingung nicht erfüllbar, weil dann alle drei Mädchen die Augensumme 0 hätten.

Hat Sibylla eine Augensumme größer als 3, so wäre die Augensumme von Eva größer als 12, was nicht erfüllbar ist. Also gibt es (6 + 18 + 8 =) 32 Möglichkeiten.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2020
1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1 – Vom Handel mit Gewürzen. Zu Lebzeiten von Adam Ries gab es noch keine Supermärkte. Lebensmittel wie Brot, Eier, Milch oder Gewürze konnte man direkt auf dem Bauernhof oder auf dem Marktplatz erwerben.

Diese Aufgabe befasst sich mit dem Verkauf von Gewürzen, und zwar Ingwer und Lorbeer. An seinem Stand auf dem Marktplatz verkauft ein Händler Ingwer. Für 1 Gulden bekommt man bei ihm 2 Pfund davon. Ein anderer Händler verkauft Lorbeer. Bei ihm erhält man für 1 Gulden 6 Pfund.

Hinweis: Das Pfund war zu Adam Ries' Lebzeiten ein gebräuchliches Gewichtsmaß. Damals bezahlte man unter anderem mit Gulden (fl), Schilling (ß) und Heller (he), wobei folgende Umrechnung galt: 1 fl = 20 ß, 1 ß = 12 he.

a) Ein Kunde kauft bei jedem der beiden Händler für je 10 Schilling Gewürz ein.
   Berechne, wie viel Pfund Gewürz er insgesamt gekauft hat.

b) Ein zweiter Kunde kauft insgesamt 2 Pfund Gewürz und stellt fest, dass er bei beiden Händlern gleich viel bezahlt hat.
   Ermittle, wie viel Pfund Ingwer er gekauft hat.

c) Ein dritter Kunde kauft ein halbes Pfund Ingwer und ein halbes Pfund Lorbeer.
   Berechne den Preis, den er dafür insgesamt bezahlen muss. Gib den Geldbetrag mit möglichst wenig Münzen an.

d) Ein vierter Kunde kauft für 2 Gulden Gewürz, gleich viel Ingwer wie Lorbeer.
   Ermittle den Preis, den er für den Ingwer bezahlt hat. Gib auch hier den Geldbetrag mit möglichst wenig Münzen an.

Aufgabe 2 – So viele Möglichkeiten. Im Erzgebirge hat es schon geschneit. Die 5 Söhne von Adam Ries bauen gemeinsam einen Schneemann. Dazu rollen sie auf einem Feld Schnee zu großen Kugeln.

a) Das Feld ist rechteckig, Die Jungen rollen Schnee von einer Ecke des Feldes zu einer anderen Ecke, immer geradeaus, zum Beispiel so: Bestimme, auf wie vielen verschiedenen Wegen sie eine Kugel rollen können. Dabei unterscheiden sich 2 Wege nicht, wenn man sie in umgekehrter Richtung abrollt.
   Fertige eine Skizze des Feldes an und zeichne alle möglichen Varianten ein.

b) Jeder der 5 Söhne rollt eine Kugel Schnee. Alle 5 Kugeln sind unterschiedlich groß:

   – Der älteste Sohn, Adam, rollt die größte Kugel, sie ist riesengroß (**R**).
   – Der zweite Sohn, Abraham, rollt die zweitgrößte Kugel, sie ist groß (**G**).
   – Der dritte Sohn, Jacob, rollt die drittgrößte Kugel, sie ist mittel. (**M**).
   – Der vierte Sohn, Isaac, rollt die viertgrößte Kugel, sie ist klein (**K**).
   – Der jüngste Sohn, Paul, rollt die kleinste Kugel, sie ist winzig. (**W**).

Dann setzen sie den Schneemann aus 3 der 5 Kugeln zusammen. Dabei soll die Größe der verwendeten Schneekugeln von unten nach oben abnehmen.

Notiere alle Möglichkeiten, so einen Schneemann zu bauen. Liegt beispielsweise Adams Kugel ganz unten, Abrahams Kugel in der Mitte und Jacobs Kugel ganz oben, so schreibe **RGM**.

c) Anschließend wollen die Jungen den Schneemann noch schmücken. Auf den Kopf kommt entweder ein Topf als Hut oder kleine Stöckchen als Haare. Die Knöpfe sind Kastanien oder Steine. In der Hand hält er eine Schaufel oder einen Besen oder einen Rechen.
Berechne, auf wie viele verschiedene Arten die Jungen den Schneemann schmücken können.

Aufgabe 3 – Weihnachtsvorbereitungen. Die Weihnachtsvorbereitungen am Nordpol laufen auf Hochtouren. Die Helfer des Weihnachtsmanns, die Wichtel, sind rund um die Uhr damit beschäftigt, Geschenke einzupacken. Sie verwenden dazu (handelsübliche) Geschenkpapierrollen von 70 cm Breite und 2 m Länge.

Damit sie leichter erkennen, wie viel Geschenkpapier sie benötigen, messen die Wichtel alles in Dezimetern (dm). Eine Rolle Geschenkpapier ist also 7 dm breit und 20 dm lang und hat somit eine Fläche von 140 dm².

a) Der Wichtel Anton packt große Geschenke ein und benötigt für jedes davon genau 25 dm² Geschenkpapier.
Ermittle, wie viele große Geschenke er mit einer Rolle Geschenkpapier höchstens einpacken kann.

b) Der Wichtel Bertram packt kleine Geschenke ein, für die er nur 5 dm² Geschenkpapier braucht. Weil er das schon lange macht, schafft er ein Geschenk in 2 Minuten. Seine Schicht geht vom Frühstück (um 9) bis zum Mittagessen (um 12). Er legt sich dafür 3 Rollen Geschenkpapier bereit.
Entscheide, ob Bertram durcharbeiten kann, ohne weiteres Papier nachholen zu müssen. Begründe Deine Antwort.

c) Der Wichtel Cornelius braucht doppelt so viel Papier für ein Geschenk wie der Wichtel Diethelm, und Diethelm braucht doppelt so viel Papier wie der Wichtel Eduard. Gemeinsam können sie mit einer Rolle jeder genau zwei Geschenke einpacken (und es bleibt nichts von der Rolle übrig).
Berechne, wie viel Papier Diethelm für ein Geschenk benötigt.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2020

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Für 1 Gulden bekommt man 2 Pfund Ingwer. Für 1 Gulden erhält man 6 Pfund Lorbeer. Es galten folgende Umrechnungen: 1 fl = 20 ß, 1 ß = 12 he.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Der erste Kunde hat insgesamt 4 Pfund Gewürze gekauft.

Begründung: Wegen 1 fl = 20 ß kann der erste Kunde für 10 ß = ½ · 20 ß vom Ingwer (½ · 2 =) 1 Pfund und vom Lorbeer (½ · 6 =) 3 Pfund kaufen, also insgesamt (1 + 3 =) 4 Pfund.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Der zweite Kunde hat ½ Pfund Ingwer gekauft.

Begründung: Wenn der zweite Kunde bei jedem Händler 1 fl bezahlt, erhält er 2 Pfund Ingwer und 6 Pfund Lorbeer, also insgesamt (2 + 6 =) 8 Pfund Gewürze. Das wäre aber die vierfache Menge der tatsächlich gekauften Gewürzmenge. Also hat er für ¼ fl (¼ · 2 =) ½ Pfund Ingwer und für ¼ fl (¼ · 6 =) 3 · ½ Pfund Lorbeeren gekauft.

Probe: Der Kunde kaufte insgesamt (½ + 3 · ½ =) 2 Pfund Gewürze.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Der dritte Kunde kauft für 6 Schilling und 8 Heller Gewürze.

Herleitung: Wir wissen, dass sich 1 fl in 20 ß oder in (20 · 12 =) 240 he umrechnen lassen. Deshalb kostet

- ein halbes Pfund Ingwer wegen (2 : 4 =) ½ insgesamt (20 : 4 =) 5 ß.
- ein halbes Pfund Lorbeer wegen (6 : 12 =) ½ insgesamt (240 : 12 =) 20 he.

Somit kauft der dritte Kunde für 5 ß und 20 he Gewürze. Dies kann in 6 ß 8 he umgewandelt werden.

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Der vierte Kunde kauft für 1 Gulden und 10 Schilling Ingwer.

Herleitung: Wenn der vierte Kunde bei jedem Händler 6 Pfund Gewürze kauft, muss er für Ingwer (3 · 1 =) 3 fl bezahlen und für Lorbeer 1 fl bezahlen, also insgesamt (3 + 1 =) 4 fl. Das wäre aber der doppelte Preis vom tatsächlich bezahlten Preis. Also hat er für 1½ fl (6 : 2 =) 3 Pfund Ingwer gekauft und für ½ fl 3 Pfund Lorbeeren gekauft. Wir können 1½ fl in 1 fl 10 ß umrechnen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt 6 verschiedene Wege.

Begründung: Es gibt zwei Diagonalen, zwei lange Rechteckseiten und 2 kurze Rechteckseiten, insgesamt also (2 + 2 + 2 =) 6 Wege.

Liste aller Möglichkeiten für Teilaufgabe b): RGM, RGK, RGW, RMK, RMW, RKW
GMK, GMW, GKW,
MKW

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es gibt 12 verschiedene Arten, den Schneemann zu schmücken.

Liste der Arten: Wir kürzen die Elemente ab:

Topf als Hut (Hu) und Stöckchen als Haare (Ha)	– 2 Möglichkeiten
Kastanien (Ka) und Steine (St)	– 2 Möglichkeiten
Schaufel (S), Besen (B) und Rechen (R)	– 3 Möglichkeiten

Insgesamt sind es 2 · 2 · 3 = 12 Arten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Die Geschenkpapierrolle ist 7 dm breit und 20 dm lang und hat eine Fläche von 140 dm².

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Wichtel Anton kann höchstens 5 Geschenke einpacken.

Begründung: Theoretisch lassen sich aus 140 dm² 5 Geschenkpapiere der Größe 25 dm² schneiden, denn es gilt

$$140 : 25 = \frac{140}{25} = \frac{140 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{560}{100} = 5{,}6$$

Praktisch könnte jedes dieser Geschenkpapiere $7 \cdot \frac{25}{7}$ dm² = 25 dm² groß sein. Dann passt ein Geschenkpapier in der Breite auf die Rolle. 5 solche Geschenkpapiere nacheinander passen wegen $5 \cdot \frac{25}{7} = \frac{125}{7} = \frac{126}{7} - \frac{1}{7} < 18$ in der Länge, aber 6 solche Geschenkpapiere passen wegen $6 \cdot \frac{25}{7} = \frac{150}{7} = \frac{147}{7} + \frac{3}{7} > 21$ nicht.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Wenn Wichtel Bertram durcharbeiten will, muss er weiteres Papier nachholen.

Herleitung: Weil die Schicht von Bertram von 9 bis 12 Uhr (also 3 Stunden) dauert und er in einer Stunde 30 Päckchen schafft, kann er in einer Schicht (30 · 3 =) 90 Geschenke einpacken.

Aus einer Rolle mit 140 dm² kann Bertram (140 : 5 =) 28 Geschenke einpacken, mit 3 Rollen also (3 · 28 =) 84 Geschenke.

Wegen 84 < 90 muss Bertram weiteres Papier nachholen, um durcharbeiten zu können.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Eduard benötigt für ein Geschenk 10 dm².

Herleitung: Diethelm braucht für Ein Geschenk doppelt so viel Papier wie der Wichtel Eduard. Er könnte also anstelle seiner zwei Geschenke 4 Geschenke von Eduard einpacken. Der Wichtel Cornelius braucht doppelt so viel Papier für ein Geschenk wie der Wichtel Diethelm, also viermal so viel Papier für ein Geschenk wie der Wichtel Eduard. Er könnte also anstelle seiner zwei Geschenke 8 Geschenke von Eduard einpacken. Gemeinsam haben sie einen Verbrauch an Geschenkpapier, der für (8 + 4 + 2 =) 14 Geschenke von Eduard reichen würde. Somit benötigt Eduard für ein Geschenk (140 : 14 =) 10 dm².

ADAM-RIES-Wettbewerb 2022

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1 – Advent, Advent. Kathrin, Leonard und Gerd haben ihre Schuhe ordentlich geputzt und deswegen vom Nikolaus leckere Süßigkeiten bekommen.

a) Kathrin hat ein Säckchen voll mit kleinen Marzipankugeln bekommen. Sie möchte jeden Tag genau eine Kugel essen, ist aber leider etwas vergesslich. Am 6. Dezember isst Kathrin die erste Kugel. Am 7. Dezember vergisst sie es. Am 8. Dezember isst sie wieder eine Kugel, am 9. Dezember vergisst sie es wieder. So geht das immer weiter im Wechsel. Am 24. Dezember isst Kathrin die letzte Kugel.
Ermittle, wie viele Marzipankugeln insgesamt in dem Säckchen waren.

b) Gerd hat eine Tüte mit Gummibärchen vom Nikolaus bekommen. Jeden Tag (beginnend am 6. Dezember) isst Gerd genau eines der Gummibärchen. Sein Bruder Nico ist neidisch, denn er hat keine Gummibärchen bekommen. Am 8. Dezember und danach an jedem dritten Tag nimmt er heimlich genau ein Gummibärchen aus Gerds Tüte. Am 24. Dezember isst Gerd das letzte Gummibärchen.
Bestimme, wie viele Gummibärchen insgesamt in der Tüte waren.

c) Leonard hatte eine Packung mit Schokolinsen in seinem Stiefel. Er isst am 6. Dezember eine Schokolinse, am 7. Dezember zwei, am 8. Dezember drei und immer so weiter, jeden Tag genau eine mehr (falls noch genug da sind). In der Packung sind 50 Schokolinsen.
Berechne, an welchem Tag Leonard die letzte Linse aus der Packung nimmt.

d) Angenommen Leonard würde diese Vorgehensweise bis zum Ende des Jahres, also 26 Tage lang, durchhalten.
Beschreibe eine günstige Möglichkeit, wie man ohne fortlaufendes Addieren die Anzahl der benötigten Schokolinsen ermitteln kann und gib diese an.

Aufgabe 2 – So viele Möglichkeiten. Lisa und Jule sind auf dem Weihnachtsmarkt unterwegs. Es gibt so viel zu entdecken und erleben.

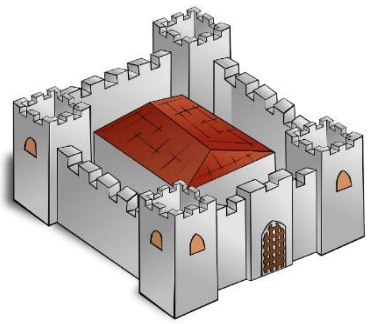
a) Lisa möchte
- den Baum anschauen **(B),**
- etwas Essen und Trinken (**E**),
- Karussell fahren (**K**), und
- ein Geschenk für ihre Mutti aussuchen (**G**).

Die Reihenfolge ist ihr dabei egal. Wichtig ist nur, dass sie erst nach der Karussellfahrt etwas isst.
Ermittle, wie viele mögliche Reihenfolgen es für Lisa gibt, unter dieser Bedingung alles zu erledigen. Schreibe alle diese Möglichkeiten auf. Nutze dafür die oben angegebenen Abkürzungen, also z.B.: BGKE, …

b) Lisa und Jule finden, dass es nun Zeit für eine kleine Mahlzeit ist. Es gibt gebrannte Mandeln, Dresdner Handbrot, Trdelnik (ein tschechisches Gebäck) und Lebkuchenherzen zu Essen. Zum Trinken kommen Kinderpunsch und heiße Schokolade in Frage.
Berechne, wie viele Möglichkeiten es für die Mädchen gibt, eine Mahlzeit zusammenzustellen, die aus genau zwei verschiedenen Snacks und genau einem Getränk bestehen soll.

c) Jule möchte einen Kinderpunsch trinken. Dafür kann sie verschiedene Obstsäfte kombinieren. Zur Auswahl stehen insgesamt 6 unterschiedliche Geschmacksrichtungen: Apfel, Birne, Brombeere, Himbeere, Kirsche und Orange.
Bestimme, aus wie vielen verschiedenen Sorten Kinderpunsch Jule wählen kann, wenn sie genau 3 dieser 6 Geschmacksrichtungen kombiniert.

Aufgabe 3 – Die Ritterburg. Finn spielt mit seiner Ritterburg. Die Burg hat vier Türme (einen an jeder Ecke) und vier Mauern (eine an jeder Seite, begrenzt von je zwei Türmen.) Auf die Türme und Mauern stellt Finn kleine Ritter, die die Burg schützen sollen. Dabei wird jede Seite der Burg von denjenigen Rittern geschützt, die entweder auf der entsprechenden Mauer oder auf einem der beiden angrenzenden Türme stehen.



Für die folgenden Aufgaben nehmen wir an, dass Finn immer genug Platz auf einer Mauer oder einem Turm hat, um so viele Ritter zu platzieren, wie er gerne möchte.

a) Finn hat insgesamt 20 kleine Ritter, die er alle auf die Mauern und Türme der Burg verteilt.
Gib eine Möglichkeit an, die Ritter so auf den Mauern und Türme zu platzieren, dass jede Seite von insgesamt 7 Rittern geschützt wird. Beschreibe dazu, wie Finn die Ritter auf der Burg verteilt, und/oder zeichne ein Bild.

b) Als Finn das nächste Mal mit seiner Burg spielt, muss er feststellen, dass er drei seiner Ritter verloren hat.
Entscheide, ob Finn die ihm verbliebenen 17 Ritter so auf die Türme und Mauern verteilen kann, dass erneut jede Seite von 7 Rittern geschützt wird. Falls ja, gib – wie in a) – eine solche Verteilung an. Falls nein, begründe deine Entscheidung.

c) Ermittle, wie viele Ritter Finn mindestens auf die Burg stellen muss, damit jede Seite von 7 Rittern geschützt wird.
Gib eine mögliche Verteilung an, und begründe, dass es nicht mit weniger Rittern geht

ADAM-RIES-Wettbewerb 2022

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es waren 10 Marzipankugeln im Säckchen.

Herleitung: Wir tragen in eine Tabelle in die erste Zeile den Tag des Monats (von 6 bis 24) und in die zweite Zeile die Anzahl der gegessenen Kugeln ein (jeweils abwechselnd 1 oder 0).

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Wir erkennen, dass Kathrin an 10 Tagen eine Marzipankugel gegessen hat.

Lösungsvariante: Der Zeitraum vom 6. bis 23. Dezember umfasst 18 Tage, an zwei aufeinanderfolgenden Tag nahm Kathrin jeweils 1 Kugel, also in diesem Zeitraum (18 : 2 =) 9 Kugeln. Hinzu kommt die Kugel am 24. Dezember, insgesamt also (9 + 1 =) 10 Kugeln.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es waren 25 Gummibärchen in der Tüte.

Herleitung: Wir tragen in eine Tabelle in die erste Zeile den Tag des Monats (von 6 bis 24) ein, in die zweite Zeile die Anzahl der Gummibärchen, die Gerd an diesem Tag gegessen hat (jeden Tag 1) und in die dritte Zeile die Anzahl der Gummibärchen, die Nico an diesem Tag gegessen hat (jeweils 1 oder 0).

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

Wir erkennen, dass Gerd an 19 Tagen jeweils ein Gummibärchen und Nico an 6 Tagen jeweils ein Gummibärchen gegessen hat, insgesamt (19 + 6 =) 25 Gummibärchen.

Lösungsvariante: Der Zeitraum vom 6. bis 24. Dezember umfasst 19 Tage, also hat Gerd 19 Gummibärchen gegessen. Der Zeitraum vom 6. bis 23. Dezember umfasst 18 Tage. Nur an jedem dritten Tag hat Nico ein Gummibärchen gegessen, also (18 : 3 =) 6 Gummibärchen. Am 24. Dezember hat Nico kein Gummibärchen gegessen. Insgesamt waren also (19 + 6 =) 25 Gummibärchen in der Tüte.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Am 15. Dezember nimmt Leonard die letzte Schokolinse aus der Tüte.

Herleitung: Wir tragen in eine Tabelle in die erste Zeile den Tag des Monats (von 6 bis …) ein, in die zweite Zeile die Anzahl der Schokolinsen, die Leonardo an diesem Tag gegessen hat (jeden Tag eine mehr als am Vortag) und in die dritte Zeile die Anzahl der Schokolinsen, die Leonardo an allen bisherigen Tagen und dem aktuellen Tag zusammen bereits gegessen hat.

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	

Wir erkennen, dass die Summe aller Schokolinsen bereits am 15. Dezember die Zahl 50 überschritt.

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Die Anzahl der Schokolinsen bis zum 26. Dezember beträgt 190.

Herleitung: Die erforderliche Addition lautet

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26 =$$
$$= 1+26+2+25+3+24+4+23+\ldots+10+17+11+16+12+15+13+14 =$$
$$= 27 + 27 + 27 + 27 + \ldots + 27 + 27 + 27 + 27 =$$
$$= 13 \cdot 27 = \tfrac{1}{2} \cdot 26 \cdot 27 = 351.$$

Bezeichnen wir mit X die Anzahl der Tage, so können wir für die letzte Umformung schreiben:

$$1+2+3+\cdots+X = \frac{1}{2} \cdot X \cdot (X+1).$$

Für X = 26 erhalten wir mit dieser Formel ebenfalls ½ · 26 · 27 = 351 Schokolinsen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Für Lisa gibt es 12 Reihenfolgen, die ihren Bedingungen entsprechen.

Begründung: Wir schreiben zunächst alle möglichen Reihenfolgen (ohne Beachtung der zusätzlichen Bedingung) auf und streichen danach alle Reihenfolgen, in denen E vor K steht:

~~BEKG~~	~~BEGK~~	BKEG	BKGE	~~BGEK~~	BGKE
~~EBKG~~	~~EBGK~~	~~EKBG~~	~~EKGB~~	~~EGBK~~	~~EGKB~~
KEBG	KEGB	KBEG	KBGE	KGEB	KGBE
~~GEKB~~	~~GEBK~~	GKEB	GKBE	~~GBEK~~	GBKE

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es gibt 12 Möglichkeiten für die Mädchen, eine Mahlzeit zusammenzustellen, die aus genau zwei verschiedenen Snacks und genau einem Getränk besteht.

Herleitung: Es stehen 4 verschiedene Snacks zur Auswahl. Es bestehen also 6 Möglichkeiten, davon 2 Snacks auszuwählen (gleichbedeutend dazu, zwei der vier Snacks abzuwählen). Außerdem stehen 2 verschiedenen Getränke zur Auswahl. Also gibt es insgesamt (6 · 2 =) 12 Möglichkeiten für die Mahlzeit.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es gibt 20 verschiedene Sorten Kinderpunsch, der aus 3 Geschmacksrichtungen besteht.

Herleitung: Wir schreiben alle Kombinationen aus 3 Geschmacksrichtungen auf. Da die Reihenfolge der Geschmacksrichtungen im Kinderpunsch egal ist, achten wir darauf, dass die Anordnungen in lexigrafischer Ordnung stehen (also alphabetisch geordnet sind), damit keine Kombination mehrfach genannt wird:

ABiBr	ABiH	ABiK	ABiO	ABrH	ABrK	ABrO	AHK	AHO	AKO
BiBrH	BiBrK	BiBrO	BiHK	BiHO	BiKO				
BrHK	BrHO	BrKO							
HKO									

Lösungsvariante: Wir wählen zuerst 3 Geschmacksrichtungen aus, dafür gibt es 6 · 5 · 4 = 120 Möglichkeiten, denn für die erste Geschmacksrichtung können wir aus 6 Varianten wählen, für die zweite Geschmacksrichtung aus 5 und für die dritte Geschmacksrichtung aus 4.
Allerdings ist die Reihenfolge der Geschmacksrichtungen im Kinderpunsch egal, es gibt 3 · 2 · 1= 6 Kombinationen, die zum gleichen Kinderpunsch führen. Also gibt es insgesamt (120 : 6 =) 20 Möglichkeiten.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Wenn die Ritter so wie dargestellt aufgestellt werden, wird jede Seite von (2 + 3 + 2 =) 7 Rittern bewacht. Insgesamt stehen (4 · 2 + 4 · 3 =) 20 Ritter auf der Burg.

2	3	2
3		3
2	3	2

Ergänzung: Eine Herleitung wird nicht verlangt. Nehmen wir aber an, auf jedem Turm stehen T Ritter und auf jeder Mauer stehen M Ritter. Dann gilt für alle Ritter 4 · M + 4 · T = 20 (also M + T = 5) und für jede Seite M + 2 · T = 7. Hieraus erkennen wir T = 2. Wenn die Aufstellung symmetrisch ist, so gibt es mit 20 Rittern nur diese Aufstellung. Es sind aber auch unsymmetrischen Aufstellungen möglich, z.B.

3	3	1
2		4
2	3	2

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Es genügt ein Beispiel (ohne Herleitung) anzugeben und zu zeigen, dass alle Bedingungen erfüllt sind:

7	0	0
0		3
0	3	4

Es gilt wie gefordert: 7 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 3 + 4 =17, 7 + 0 + 0 = 0 + 3 + 4 =7.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Finn muss mindestens 14 Ritter auf die Burg stellen, um allen Bedingungen gerecht zu werden.

Begründung: Angenommen, Finn kann weniger als 14 Ritter aufstellen. Dann stehen in der oberen Reihe 7 Ritter. Jedoch sind es dann nicht genügend Ritter, um auch in der unteren Reihe 7 Ritter aufzustellen.

Lösungsvariante: Da jede Seite von 7 Rittern beschützt werden soll, gilt

$$T1 + M1 + T2 = 7 \text{ und } T4 + M3 + T3 = 7.$$

Deshalb gilt auch

$$T1 + M1 + T2 + T4 + M3 + T3 = 14 \leq T1 + T2 + T3 + T4 + M1 + M2 + M3 + M4$$

Also muss die Anzahl aller Ritter mindestens 14 betragen. Setzt Finn T1 = T3 = 7 und alle anderen Positionen T2 = T4 = M1 = M2 = M3 = M4 = 0, so sind alle Bedingungen mit 14 Rittern erfüllt.

T1	M1	T2
		M2
T4	M3	T3

7	0	0
0		7
0	0	7

Ergänzung: Finn kann höchstens 28 Ritter auf die Burg stellen, so dass alle Bedingungen erfüllt sind. Wie oben gilt

$$T1 + M1 + T2 + T4 + M3 + T3 = 14$$
$$T1 + M4 + T4 + T2 + M2 + T3 = 14$$

Wegen T1 + T2 + T3 + T4 + M1 + M2 + M3 + M4 = 14 + M2 + M4 ≥ 14 wird die Anzahl aller Ritter umso größer, je größer die Teilsumme M2 + M4 ist. Diese Teilsumme kann aber höchstens 14 betragen (falls M2 = M4 = 7). Eine solche maximale Verteilung ist möglich:

0	7	0
7		7
0	7	

ADAM-RIES-Wettbewerb 2023

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden

Aufgabe 1 – Der Fuhrlohn. In seinem 2. Rechenbuch befasst sich Adam Ries unter anderem mit der Berechnung von Fuhrlöhnen. Wollte man damals Waren transportieren lassen, so bezahlte man in Abhängigkeit von der Menge der Waren und der Strecke des Transports. Für diese Aufgabe betrachten wir ein Fuhrunternehmen, bei dem es 1 Gulden kostet, um 4 Fässer Wein über eine Strecke von 20 Meilen transportieren zu lassen.

Die „Meile“ war damals eine Entfernungsangabe, und man bezahlte in „Gulden“ (fl) und “Schilling“ (ß), wobei die folgenden Umrechnungen galten: 1 fl = 20 ßl, also 1 Gulden entspricht 20 Schillingen.

a) Die folgende Tabelle stellt gegenüber, wie viel für den Transport einer gewissen Anzahl Fässer Wein über eine gewisse Strecke gezahlt werden muss. Übernimm die Tabelle auf Dein Lösungsblatt und fülle die leeren Felder mit den korrekten Zahlen.

Anzahl Fässer Wein	Strecke in Meilen	Preis in fl und ß
4 Fässer	20 Meilen	1 fl
12 Fässer	20 Meilen	
12 Fässer		6 fl
	10 Meilen	2 fl
1 Fass		5 ß
2 Fässer	10 Meilen	
	15 Meilen	1 fl 5 ß

b) Ein Händler möchte 6 Fässer Wein über 16 Meilen transportieren lassen. Nach der Hälfte der Strecke werden 3 der Fässer verkauft, und nur noch die restlichen 3 Fässer transportiert. Wie viel muss der Händler für den Transport insgesamt bezahlen?

c) Ein anderer Händler möchte 3 Fässer Wein über 15 Meilen transportieren lassen. Während der Fahrt bemerkt er, dass der Wein in einem der Fässer verdorben ist. Er lässt das Fass zurück und muss somit für den Rest der Strecke nur noch für 2 Fässer bezahlen. Dadurch spart er am Ende 2ß.
Berechne, nach wie vielen Meilen der Händler das Fass zurückgelassen hat.

Aufgabe 2 – Buntes Drachensteigen. Adam Ries hatte mit seiner Frau insgesamt 8 Kinder. An einem schönen Herbsttag beschlossen die Kinder, sich jeder einen Drachen zu basteln. Damit ihre Drachen nicht gleich aussehen, sondern voneinander unterscheidbar sind, binden sie Schleifen in unterschiedlichen Farbzusammenstellungen an den Schwanz des Drachen.

Für alle folgenden Teilaufgaben gilt:

- Keines der Kinder hat mehr oder weniger Schleifen an den Schwanz seines Drachens gebunden als ein anderes Kind – alle haben gleich viele.
- Zwei Drachenschwänze gelten auch dann als unterschiedlich, falls Schleifen gleicher Farbe in einer anderen Reihenfolge angebunden werden.

a) Die Kinder haben ausreichend Schleifen in den herbstlichen Farben **r**ot, **g**elb und **o**range.

Ermittle, wie viele Schleifen jedes der Kinder mindestens an den Schwanz seines Drachen binden muss, damit alle 8 Drachen unterschiedlich aussehen können, und gib ein Beispiel an, wie diese 8 Drachenschwänze aussehen könnten.

Hinweis: Wäre zum Beispiel 4 die korrekte Antwort, dann schreibe so:
Drache 1: rot – gelb – rot – orange (**r – g – r – o)**
Drache 2: orange– rot – rot – gelb (**o – r – r – g)**
und so weiter.

Begründe, dass es in diesem Fall nicht möglich ist, rote, gelbe und orangene Schleifen derart an die 8 Drachenschwänze zu binden, dass keine zwei gleich aussehen.

b) Die Kinder finden zusätzlich **b**raune Schleifen. Entscheide, ob es den Kindern nun möglich ist, die Schleifen an die 8 Drachenschwänze zu binden, sodass keine zwei gleich aussehen, aber an keinem Schwanz eine Farbe doppelt vorhanden ist.
Falls nein, so begründe warum es nicht möglich ist.
Falls ja, so ermittle die geringste Anzahl an Schleifen, die jeder Drachenschwanz haben muss, und gib, ähnlich wie in Aufgabe a), ein Beispiel einer solchen Verteilung an.

Aufgabe 3 – Verrückte Brotpreise. Zu Zeiten von Adam Ries gab es sogenannte Pfennigbrote. Ein Pfennigbrot kostete immer genau 1 Pfennig. Gab es in einem Jahr eine schlechte Ernte, so war das Korn teuer. Dann kostete es für einen Bäcker mehr, ein Brot zu backen. Da ein Brot aber immer genau 1 Pfennig kosten sollte, wurden die Brote einfach kleiner gebacken. Kostete das Korn beispielsweise 12 Groschen, so wog ein Pfennigbrot 30 Lot.

Das „Lot“ war damals eine Gewichtseinheit, und man zahlte in „Groschen“ (gr).

a) Eines Tages verdoppelt sich der Preis für Korn auf 24 gr.
Berechne, wie schwer dann das Pfennigbrot gebacken wird.

b) An einem anderen Tag wiegt das Pfennigbrot 20 Lot.
Ermittle, zu welchem Preis Korn verkauft wurde.

c) In seinem zweiten Rechenbuch stellt Adam Ries die folgende Aufgabe: „Wenn das Korn 14 gr kostet, bäckt man ein Pfennigbrot, das 34 Lot wiegt.
Wie schwer soll man es backen, wenn das Korn teurer wird und 17 Groschen kostet?“
Beschreibe, einen Lösungsweg für diese Aufgabe. Versuche dabei zu erkennen, wie Du die vorherigen Teilaufgaben a) und b) gelöst hast.
Das Angeben eines Ergebnisses ist hier nicht notwendig.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2023

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1.

Antworten zur Teilaufgabe a):

Nr.	Anzahl Fässer Wein	Strecke in Meilen	Preis in fl und ß
1	4 Fässer	20 Meilen	1 fl
2	12 Fässer	20 Meilen	3x so viele Fässer wie in Zeile 1: (3 · 1 =) 3 fl
3	12 Fässer	2x so viele Gulden wie in Zeile 2: (2 · 20 =) 40 Meilen	6 fl
4	2x so viele Gulden wie in Zeile 1, aber halb so viele Meilen wie in Zeile 1: (4 · 2 · 2 =) 16 Fässer	10 Meilen	2 fl
5	1 Fass (¼ von Zeile 1)	20 Meilen	5 ß (¼ von Zeile 1)
6	2 Fässer (½ von Zeile 1)	10 Meilen (½ von Zeile 1)	¼ von Zeile 1 1 fl = 20 ß (¼ · 20 =) 5 ß
7a	5x so viele Schilling Wie in Zeile 6 (5 · 2 =) 10 Fässer	10 Meilen	1 fl 5 ß → 25 ß
7	1½ x so viele Meilen wie in Zeile 7a: (10 : 1½ =) 6 und ein Drittel Fässer	15 Meilen	1 fl 5 ß → 25 ß

Lösungsvariante: Wenn es 1 Gulden = 20 Schilling kostet, um 4 Fässer Wein über eine Strecke von 20 Meilen transportieren zu lassen, dann kostet es (20 : 20 =) 1 Schilling, um 4 Fässer Wein über eine Strecke von 1 Meile transportieren zu lassen, dann kostet es ¼ Schilling, um 1 Fass Wein über eine Strecke von 1 Meile transportieren zu lassen.

Nr.	Anzahl Fässer Wein	Strecke in Meilen	Preis in fl und ß
1	4 Fässer	20 Meilen	1 fl
2	12 Fässer	20 Meilen	(12 · 20 · ¼ =) 60 ß (60 : 20 =) 3 fl
3	12 Fässer	(12 · M · ¼ =) 120 ß → M = (120 : 12 · 4 =) 40 Meilen	6 fl (6 · 20 =) 120 ß
4	(F · 10 · ¼ =) 40 ß F = (40 : 10 · 4 =) 16 Fässer	10 Meilen	2 fl (2 · 20 =) 40 ß
5	1 Fass	(1 · M · ¼ =) 5 ß M = (5 : 1 · 4 =) 20 Meilen	5 ß

6	2 Fässer	10 Meilen	(2 · 10 · ¼ =) 5 ß
7	(F · 15 · ¼ =) 25 ß F = (25 : 15 · 4) = 6 und ein Drittel	15 Meilen	1 fl 5 ß

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Insgesamt muss der Händler 18 ß für den Transport bezahlen.

Begründung: Der Preis setzt sich zusammen aus: 6 Fässer über 8 Meilen und 3 Fässer über 8 Meilen:

$$6 \cdot 8 \cdot \tfrac{1}{4} + 3 \cdot 8 \cdot \tfrac{1}{4} = 12 + 6 = 18 \text{ ß}$$

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Nach 3 ½ Meilen hat der Händler das Fass zurückgelassen.

Begründung: Der Händler hätte 3 · 15 · ¼ = 11 ß und ¼ ß bezahlen müssen. Wenn er dass Fass nach X Meilen zurückließ, setzt sich der Transportpries wie folgt zusammen:

$$3 \cdot X \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot (15 - X) \cdot \tfrac{1}{4} = (3 - 2) \cdot X + 15 \cdot \tfrac{1}{4} = (11 - 2) + \tfrac{1}{4}$$

Daraus erhalten wir: $X = 9 + \tfrac{1}{4} - 15 \cdot \tfrac{1}{4} = 3\tfrac{1}{2}$ Meilen

Lösungshinweise zur Aufgabe 2.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Sie können mit zwei Schleifen die 8 Drachen mit unterschiedlichen Schwänzen basteln.

Herleitung: Würden sie nur eine Schleife anbiden, wären bei 3 Farben nur 3 unterschiedliche Schwänze möglich.

Würden sie stets zwei Schleifen anbinden, dann gibt es folgende 9 Möglichkeiten:

r – g, r – o, r – r, g – g, g – o, g – r, o – g, o – o, o – r

Sie können also mit zwei Schleifen die 8 Drachen mit unterschiedlichen Schwänzen basteln.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Unter der neuen Bedingung entfallen die in a) unterstrichenen Möglichkeiten. Es verbleiben also nur 6 Möglichkeiten.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es ist möglich, die 8 Drachen mit unterschiedlichen Schwänzen zu basteln.

Begründung: Mit 4 Farben sind mit zwei Schleifen folgende 12 Farbkombinationen möglich

b – g, b – o, b – r, g – b, g – o, g – r, o – b, o – g, o – r, r – b, r – g, r – o

Es ist also möglich, die 8 Drachen mit unterschiedlichen Schwänzen zu basteln.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3.

Lösung zur Teilaufgabe a): Wenn sich der Kornpreis verdoppelte, halbierte sich das Brotgewicht: (30 : 2 =) **15 Lot**.

Lösung zur Teilaufgabe b): Angenommen, das Korn kostet k Groschen.
Dann gilt k · 20 Lot = 12 · 30 Lot, also k = (30 : 20 · 12 =) **18 gr**.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Aus den Teilaufgaben a und b haben wir erkannt, dass das Produkt aus Kornpreis und Brotgewicht konstant ist, Also muss gelten 14 · 34 = 17 · G. Daraus finden wir G = **28 Lot**.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2024

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1 – Hühnerei. Ein Bauer geht auf den Markt, um Hühner zu kaufen. Ein Dutzend Hühner kosten 1 Gulden und 10 Schilling.

Zu Adam Ries' Zeiten wurde in Gulden (fl), Schilling (ß) und Heller (he) bezahlt, und es galten die folgenden Umrechnungen: 1 fl = 20 ß, 1 ß = 12 he.
Das Dutzend ist eine Mengenangabe, und es gilt 1 Dutzend = 12 Stück.

a) Der Bauer kauft ein Dutzend Hühner und noch acht dazu. Berechne den Preis, den er dafür zahlen muss. Gib das Ergebnis mit möglichst wenig Münzen an.

b) Nachdem die Hühner insgesamt 3 Dutzend Eier gelegt haben, verkauft der Bauer alle diese Eier und kann vom Erlös zwei Scheffel Futter kaufen. Jeder Scheffel Futter kostet 2 ß 9 he. (Hinweis: „Scheffel" ist eine Mengenangabe.)
Berechne, zu welchem Preis der Bauer je ein Dutzend Eier verkauft hat. Gib erneut das Ergebnis mit möglichst wenig Münzen an.

c) Das Huhn Helga legt pro Woche 3 kleine Eier. Der Bauer bekommt auf dem Markt für jedes dieser Eier 2 he. Helgas Futter kostet pro Woche 2 he.
Berechne, wie viele Wochen es dauert, bis der Bauer mit dem Verkauf von Helgas Eiern und dem Kauf ihres Futters 1 ß Gewinn erzielt.

Aufgabe 2 – So viele Möglichkeiten. Fiona besitzt eine Kiste voll mit bunten Murmeln. Aus diesen möchte sie sich eine schöne Halskette basteln.

a) Fiona hat Murmeln in den Farben **g**rün, **b**lau, **r**osa und **o**range in ihrer Kiste. Auf ihrer Kette sollen sich Murmeln in zwei verschiedenen Farben abwechseln, also zum Beispiel blau, grün, blau, grün, blau usw.
Notiere alle möglichen Ketten, die sie auf diese Weise basteln kann. Schreibe dazu das Muster mit Hilfe der großen Anfangsbuchstaben der verwendeten Farben auf, also so: BG, …
Hinweis: Es ist egal mit welcher der beiden Farben das Muster beginnt. Beispielsweise sind BG und GB das gleiche Muster.

b) Fiona findet zusätzlich Murmeln in den Farben **t**ürkis und **l**ila. Daher möchte sie nun für ihre Kette doch lieber vier verschiedene Farben verwenden.
Berechne, wie viele verschiedene Farbkombinationen Fionas Kette haben kann, wenn auf jeden Fall immer Murmeln in Fionas Lieblingsfarbe türkis dabei sein sollen.
Hinweis: Erneut soll die Reihenfolge keine Rolle spielen, es sind also beispielsweise TROB und OTBR die gleiche Farbkombination.

c) Fiona entscheidet sich für Murmeln in den Farben türkis, lila, rosa und blau, die sie in der stets gleichen Reihenfolge auffädelt. Beispielsweise könnte ihre Kette so aussehen: lila, rosa, türkis, blau, lila, rosa, türkis, blau usw. Kurz schreiben wir LRTB. Beachte, dass z.B. RTBL die gleiche Kette ist wie LRTB, und dass auch ein „Umdrehen" der Kette keine neue Kette liefert.

Weise nach, dass Fiona unter diesen Bedingungen nur drei verschiedene Ketten basteln kann.

In Fionas Kiste befinden sich nach einiger Zeit noch 12 blaue Murmeln, 8 grüne Murmeln und 6 türkise Murmeln. Sie greift „blind“, also ohne hinzuschauen, in die Kiste und nimmt einzeln nacheinander Murmeln heraus und legt sie nicht wieder zurück.

d) Ermittle, wie viele Murmeln Fiona höchstens aus der Kiste nehmen muss, um sicher eine blaue, eine grüne und eine türkise Murmel herausgenommen zu haben. Mit anderen Worten: Nach wie vielen Zügen hat Fiona spätestens eine Kugel in jeder der drei Farben erhalten.

Aufgabe 3 – Basketball. Basketball ist eine Sportart, bei der zwei Teams mit je fünf Spielern gegeneinander antreten. Ziel ist es, den Basketball in einen Korb zu werfen. Dafür gibt es, je nachdem wie weit der Ball geworfen wurde, 2 oder 3 Punkte.

Im letzten Sommer fand die Weltmeisterschaft im Basketball statt. Es war eine große Sensation, dass Deutschland dieses Turnier gewinnen konnte. Deutschlands bester Spieler, Dennis Schröder, wurde nach dem Finale als „Wertvollster Spieler des Turniers“ ausgezeichnet.

a) Im Halbfinale gewann Deutschland gegen eine der besten Mannschaften der Welt, die USA. Dennis Schröder traf in diesem Spiel 7-mal den Korb und erzielte dabei 17 Punkte. Berechne, wie viele seiner Würfe ihm 2 Punkte einbrachten und wie viele 3 Punkte. Bestätige Dein Ergebnis mit einer Probe.

Wird ein Spieler beim Korbwurf von einem Gegner behindert, bekommt er einen Freiwurf zugesprochen. Wenn er trifft, erhält er dafür 1 Punkt.

b) Wir nehmen an, Dennis Schröder hätte im Halbfinale auch mit einem oder mehreren Freiwürfen Punkte erzielt. Ermittle, wie viele seiner 7 Treffer ihm dann 1, 2 oder 3 Punkte eingebracht haben könnten. Gib alle möglichen Lösungen an, und begründe, dass es keine weiteren geben kann.

Im Finale war Dennis Schröder vom Gegner Serbien nicht zu stoppen. Er traf 17-mal in den Korb und erzielte dabei 28 Punkte.

c) Begründe, dass Dennis Schröder im Finale mehr als einen Punkt durch Freiwürfe erzielt haben muss.

d) Ermittle alle Möglichkeiten, mit 17 Treffern 28 Punkte zu erzielen.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2024

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausarbeit)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1. Wir verwenden wie im Aufgabentext die Abkürzungen fl für Gulden, ß für Schilling und he für Heller.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): 20 Hühner kosten 2 Gulden und 10 Schilling.

Herleitung: 1 Dutzend Hühner – also 12 Hühner – kosten laut Aufgabenstellung 1 fl 10 ß.

Weil 1 fl in 20 ß umgerechnet werden kann, gilt 1 fl 10 ß = (20 + 10) = 30 ß.
Weil 1 ß in 12 Heller umgerechnet werden kann gilt 30 ß = (12 · 30 =) 360 he.

Weil aber der Preis für 12 Hühner angegeben wurde, müssen wir die Multiplikation nicht ausführen, denn es gilt (12 · 30) : 12 = 30 he.

Also kostet 1 Huhn 30 he. Wieder mit der Umrechnung von ß und he können wir den Preis auch so angeben: 30 he = (2 · 12 + 6) he = 2 ß 6 he.

1 Dutzend Hühner und dazu 8 Hühner sind gesamt 20 Hühner. Der Gesamtpreis beträgt folglich (20 · 30 =) 600 he.

Wegen 600 : 12 = 50 können wir 600 he in 50 ß umrechnen.
Wegen 50 = 2 · 20 + 10 können wir 50 ß in 2 fl 10 ß umrechnen.

Lösungsvariante: Wir können aber auch mit der Preisangabe pro Huhn 2 ß 6 he rechnen. Für 20 Hühner finden wir damit (20 · 2 =) 40 ß und (20 · 6 =) 120 he. Rechnen wir 120 he in 10 ß um, beträgt der Gesamtpreis (40 + 10 =) 50 ß. Nun rechnen wir wie oben 50 ß in 2 fl 10 ß um.

Lösungsvariante: Wir wissen, dass 12 Hühner 1 fl 10 ß = 30 ß kosten. Dann kosten (12 : 3 =) 4 Hühner (30 : 3 =) 10 ß. Wegen 5 · 4 = 20 kosten (5 · 4 =) 20 Hühner insgesamt (5 · 10 =) 50 ß. Nun rechnen wir wie oben 50 ß in 2 fl 10 ß um.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Ein Dutzend Eier kosten 1 Schilling und 10 Heller.

Begründung: Weil ein Scheffel Futter 2 ß und 9 he kostet, kosten zwei Scheffel (2 · 2 =) 4 ß und (2 · 9 =) 18 he. Wegen (4 · 12 =) 48 können wir 4 ß in 48 he umrechnen. Damit kosten 2 Scheffel Futter (48 + 18) = 66 he.

Weil 3 Dutzend Eier so viel kosten wie 2 Scheffel Futter, kosten 1 Dutzend Eier (66 : 3 =) 22 he. Wegen 22 = 12 + 10 können wir 22 he in 1ß 10 he umrechnen.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es dauert 3 Wochen, bis der Bauer 1 ß Gewinn erzielt.

Herleitung: Für den Verkauf der 3 Eier pro Woche erhält der Bauer (3 · 2 =) 6 he. Für das Futter pro Woche muss der Bauer 2 he bezahlen. Somit erzielt der Bauer pro Woche einen Gewinn von (6 – 2 =) 4 he.

Wir können 1 ß in 12 he umrechnen. Da der Bauer pro Woche 4 he Gewinn erzielt, dauert es (12 : 4 =) 3 Wochen, bis er insgesamt 1 ß Gewinn erreicht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Wir kürzen wie im Aufgabentext vorgeschlagen die Farben mit ihren Anfangsbuchstaben ab: G für grün, B für blau, R für rosa, O für orange, T für türkis und L für lila.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es gibt 6 Möglichkeiten, aus 4 Farben genau 2 Farben auszuwählen:

GB, GR, GO, BR, BO, RO.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Sie hat 10 Möglichkeiten.

Herleitung: Eine der 4 Farben ist immer türkis. Somit kann sie noch 3 Farben aus den restlichen 5 Farben auswählen. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

Wenn sie G auswählt, gibt es 6 Möglichkeiten.

TGBR TGBO TGBL TGRO TGRL TGOL

Wenn sie nicht G, aber B auswählt, hat sie weitere 3 Möglichkeiten.

TBRO TBRL TBOL

Wenn sie weder G noch B auswählt, hat sie noch eine weitere Möglichkeit.

TROL

Weitere Möglichkeiten hat sie nicht. Es sind also (6 + 3 + 1 =) 10 Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten, um 3 Farben aus 5 verfügbaren Farben auszuwählen (für die erste Farbe gibt es 5 Varianten, für die zweite Farbe noch 4 Varianten und für die dritte Farbe noch 3 Varianten). Die $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ möglichen Reihenfolgen werden doppelt gezählt, also gibt es $60 : 6 = 10$ Möglichkeiten.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Es gibt 3 Möglichkeiten.

Begründung: Wir legen eine Farbe als „1. Farbe“ fest, zum Beispiel L. Dann gibt es 6 Möglichkeiten, die anderen 3 Farben anzuordnen:

LBRT LBTR LRBT LRTB LTBR LTRB

Da wir die Buchstaben umordnen können, sind auch alle Möglichkeiten erfasst, bei denen als 1. Farbe eine andere Farbe als L gewählt wird.

Ordnen wir die 6 Möglichkeiten in einer anderen Reihenfolge, erkennen wir, dass einige Muster durch Umdrehen der Kette entstehen (paarweise in Klammern). Dabei verwenden wir auch den Hinweis in der Aufgabenstellung, die erste Farbe nach hinten verschieben zu können.

(LBRT TRBL) (LBTR RTBL) (LRBT TBRL)

Somit bleiben 3 Möglichkeiten übrig.

Lösungsvariante: Wir wählen eine Farbe als „Startfarbe“ fest. Für die restlichen 3 Farben gibt es dann $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Alle Muster mit einer anderen „Startfarbe“ sind dann schon beachtet. Durch „Umdrehen“ der Kette fällt noch die Hälfte der Möglichkeiten weg, denn LRTB und LBTR sind die gleiche Kette; ebenso LRBT und LTBR sowie LTRB und LBRT. Folglich gibt es 3 verschiedene Ketten.

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Insgesamt muss Fiona höchstens 21 Murmeln ziehen.

Begründung: Im ungünstigsten Fall zieht Fiona zunächst alle blauen und grünen Murmeln und erst dann eine türkise. Insgesamt muss Fiona höchstens (12 + 8 + 1 =) 21 Murmeln ziehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Wir nennen die Würfe, die 1, 2 oder 3 Punkte erzielen, Einer, Zweier bzw. Dreier.

Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Es sind 3 Dreier und 4 Zweier gewesen.

Begründung: Annahme, es werden nur Zweier erzielt, dann ergibt es mit 7 Würfen (7 · 2 =) 14 Punkte. Das sind (17 – 14 =) 3 Punkte zu wenig. Somit müssen es 3 Dreier und (7 – 3 =) 4 Zweier gewesen sein.

Probe: 4 · 2 + 3 · 3 = 8 + 9 = 17

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): Mit 1 Einer, 2 Zweier und 4 Dreier oder mit 2 Einer, 0 Zweier und 5 Dreier können 17 Punkte erzielt werden.

Herleitung: Wir untersuchen mithilfe einer Fallunterscheidung.
1 Freiwurf. Dann verbleiben 16 Punkte in 6 Würfen. Ähnlich wie in Aufgabe a) stellen wir fest, dass mit 6 Zweier nur (6 · 2 =) 12 Punkte erreicht werden. Das sind (16 – 12 =) 4 Punkte zu wenig. Wieder wie in a): Mit 1 Einer, 2 Zweier und 4 Dreier können 17 Punkte erzielt werden.

Probe: (1 · 1 + 2 · 2 + 4 · 3 = 1 + 4 + 12 =) 17 Punkte, (1 + 2 + 4 =) 7 Würfe

2 Freiwürfe. Dann verbleiben 15 Punkte in 5 Würfen. Ähnlich wie in Aufgabe a) stellen wir fest, dass mit 5 Zweier nur (5 · 2 =) 10 Punkte erreicht werden. Das sind (15 – 10 =) 5 Punkte zu wenig. Wieder wie in a): Mit 2 Einer, 0 Zweier und 5 Dreier können 17 Punkte erzielt werden.

Probe: (2 · 1 + 0 · 2 + 5 · 3 = 2 + 0 + 15 =) 17 Punkte, (2 + 0 + 5 =) 7 Würfe

3 Freiwürfe. Dann verbleiben 14 Punkte in 4 Würfen. Mit 4 Würfen können maximal (4 · 3 =) 12 Punkte erzielt werden. Also sind 3 (und mehr) Freiwürfe nicht möglich.

Antwortsatz zur Teilaufgabe c): Ohne einen Freiwurf wären es mindestens (17 · 2 =) 34 Punkte, also mehr als 28 Punkte. Mit einem Freiwurf wären es mindestens (1 + 16 · 2 =) 33 Punkte also ebenfalls mehr als 28 Punkte. Folglich wurden die Punkte mit mehr als einem Freiwurf erzielt. Dass es tatsächlich möglich ist, wird in Aufgabe d) untersucht.

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Es gibt 6 Möglichkeiten.

Herleitung: Folgende Tabelle zeigt alle Lösungen. Die Anzahl der Dreier-Würfe wird jeweils angenommen; die zugehörige Lösung für Zweier- und Einer-Würfe ergibt sich wie in a):

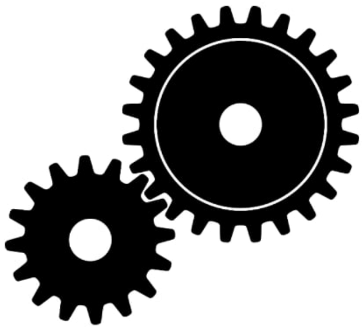
Dreier	0	1	2	3	4	5	
Zweier	11	9	7	5	3	1	
Einer	6	7	8	9	10	11	
Würfe	0+6+11	1+9+7	2+7+8	3+5+9	4+3+10	5+1+11	=17
Punkte	0+22+6	3+18+7	6+14+8	9+10+9	12+6+10	15+2+11	=28

Bei 6 Dreiern werden bereits mindestens (6 · 3 =) 18 Punkte erreicht. Es verbleiben für (17 – 6 =) 11 Würfe noch (28 – 18 =) 10 Punkte. Da jeder Wurf mindestens 1 Punkt erzielt, kann es keine weiteren Lösungen geben.

ADAM-RIES-Wettbewerb 2025

1. Stufe (Hausarbeit)

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.



Aufgabe 1 – Gut verzahnt: Schon zu Lebzeiten von Adam Ries nutzen viele Maschinen zum Antrieb Zahnräder, die ineinander greifen, beispielsweise Webmaschinen. Das nebenstehende Bild zeigt zwei Zahnräder: ein kleines mit 16 Zähnen und ein großes mit 24 Zähnen.

a) Ermittle, wie oft sich das große Zahnrad dreht, wenn sich das kleine genau sechsmal dreht.

b) Wenn das kleine Zahnrad sich genau einmal dreht, befindet sich das große Zahnrad nicht in seiner Ausgangsposition, sondern es ist „verdreht". Sobald das große Zahnrad seine erste Runde vollendet, ist dagegen das kleine Zahnrad nicht in der Ausgangsposition.

   Berechne, nach wie vielen Umdrehungen des großen bzw. kleines Zahnrads sich beide erstmalig wieder gleichzeitig in ihrer Ausgangsposition befinden.

c) Einmal geht das kleine Zahnrad kaputt und muss ersetzt werden. Das Ersatzzahnrad hat mehr als 16 Zähne, aber immer noch weniger als 24.

   Nach 5 Umdrehungen des großen Zahnrads befinden sich beide – das große und das neue kleine Zahnrad – erstmals gleichzeitig wieder in ihrer Ausgangsposition.

   Berechne, wie viele Zähne das neue kleine Zahnrad hat.

d) Untersuche ob es für Aufgabe c) weitere Lösungen gibt, falls das Ersatzrad weniger als 16 Zähne hat. Gib gegebenenfalls eine weitere Lösung an.

Aufgabe 2 – Guter Durchblick: Hast Du schon mal nachgezählt, wie viele Deiner Mitschüler eine Brille tragen? Die folgenden Kinder haben gezählt, das Ergebnis aber etwas umständlich beschrieben.

a) In Alinas Schulklasse gehen insgesamt 28 Kinder. Sie ist eines von 13 Mädchen in der Klasse.

   Alina stellt fest: „In meiner Klasse tragen genauso viele Jungen wie Mädchen eine Brille. Außerdem ist die Anzahl der Jungen ohne Brille doppelt so groß wie die Anzahl der Jungen mit Brille."

   Ermittle, wie viele Kinder in Alinas Klasse Brille tragen.

b) In Bastians Klasse gehen insgesamt 25 Kinder.

   Bastian sagt: „Jeder dritte Junge trägt eine Brille, aber nur jedes vierte Mädchen trägt eine Brille. Trotzdem tragen mehr Mädchen als Jungen eine Brille."

   Ermittle auch für Bastians Klasse die Anzahl der Brillenträger.

Hinweis: „Jeder dritte Junge trägt eine Brille“ bedeutet: Die Jungen in Bastians Klasse kann man so in Gruppen von jeweils 3 Kindern einteilen, dass in jeder Gruppe genau ein Brillenträger ist.

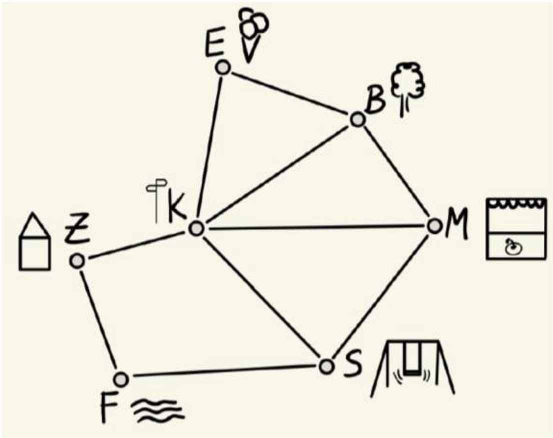
c) Chris ist einer von 16 Jungen in seiner Klasse.

Chris behauptet: „In meiner Klasse gibt es dreimal so viele Kinder ohne Brille wie es Kinder mit Brille gibt. Außerdem gibt es genauso viele Mädchen ohne Brille wie Jungen mit Brille.

Weise nach, dass die Behauptung von Chris nicht stimmen kann.

Aufgabe 3 – Kein Weg doppelt: Leonhard Euler war ein bedeutender Mathematiker. Er erreichte unter anderem dafür Bekanntheit, dass er untersuchte, wie man sich durch einen Ort fortbewegen kann, ohne einen Weg doppelt zu nutzen.

Es ist nicht ganz unwahrscheinlich, dass auch der junge Adam Ries über 100 Jahre vor der Geburt von Euler schon darüber nachgedacht hat. Vielleicht mochte er es ebenfalls nicht, Wege doppelt zu nutzen.



Die nebenstehende Figur ist eine (vereinfachte) Karte des Teils von Staffelstein in Franken, wo Adam aufgewachsen ist. Eingezeichnet sind (im Uhrzeigersinn) sein **Z**uhause, die große **K**reuzung, die **E**isbude, ein sehr markanter **B**aum, der **M**arkt, ein **S**pielplatz und ein gemütlicher Platz am **F**luss. Die Verbindungen zwischen den Punkten sind die Wege, die Adam laufen kann.

Eines Tages schickt Adams Vater Contz den kleinen Adam auf den Markt, um Erledigungen zu machen. Auf dem Hinweg darf Adam sich ein Eis holen. Auf den Spielplatz darf er erst gehen, nachdem er auf dem Markt war, damit er nicht die Zeit verpasst.

a) Zeichne die Karte auf Dein Blatt und markiere farbig eine mögliche Route, die Adam von zu Hause (**Z**) zum Eis (**E**), dann auf den Markt (**M**), anschließend zum Spielplatz (**S**) und schließlich wieder zurück nach Hause (**Z**) bringt, ohne dass er einen Weg zweimal benutzt.

Schreibe zusätzlich den Weg als Folge aller besuchter Orte in der korrekten Reihenfolge auf. Benutze dafür die fett gedruckten Anfangsbuchstaben.

Hinweis: Wegpunkte dürfen mehrfach besucht werden. Adam darf nur keine Verbindungsstrecke mehr als einmal benutzen. Es müssen nicht alle Verbindungsstrecken genutzt werden.

b) Finde alle weiteren Möglichkeiten, diese Route zu laufen. Notiere sie mit Hilfe der Anfangsbuchstaben der besuchten Orte in der korrekten Reihenfolge.

c) Adam beschließt, sein Eis erst auf dem Rückweg zu holen. Gib dafür eine mögliche Route an.

d) Heimlich denkt Adam darüber nach, ob es ihm möglich wäre, auf dem Hinweg zum Markt nicht nur sein Eis zu holen, sondern auch den Spielplatz zu besuchen, und nach dem Markt erneut den Spielplatz zu besuchen, bevor er zurück nach Hause geht. Er stellt fest, dass dies nicht möglich ist.

Begründe, dass Adam Recht hat.

e) Adam bemerkt nach einigem Grübeln, dass es möglich ist, den Spielplatz auf dem Hin- und Rückweg zu besuchen (und das Eis auf dem Hinweg zu holen), wenn er einen zusätzlichen Trampelpfad läuft, der nicht in der Karte verzeichnet ist.

Ermittle, zwischen welchen zwei Punkten dieser Trampelpfad verlaufen könnte und gib eine mögliche Route an.

ADAM-RIES-WETTBEWERB 2025

Lösungshinweise zur 1. Stufe (Hausaufgaben)

Lösungshinweise zur Aufgabe 1 – Gut verzahnt.
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): Das große Zahnrad dreht sich 4 Mal.

Begründung: Wenn sich das kleine Zahnrad 6 Mal dreht, rückt es um insgesamt ($6 \cdot 16 =$) 96 Zähne weiter. Jeder Zahn des kleinen Zahnrads bewegt einen Zahn des großen Zahnrades, Deshalb dreht sich das große Zahnrad genau ($96 : 24 =$) 4 Mal.

Antwortsatz zu Aufgabenteil b): Nach 3 Umdrehungen des kleinen Zahnrades und nach 2 Umdrehungen des großen Zahnrades haben beide Zahnräder die Ausgangsstellung erstmalig wieder erreicht.

Herleitung: Wir ermitteln die Lösung durch eine Tabelle, in der wir aufschreiben, um wie viele Zähne sich die Zahnräder bei vollständigen Umdrehungen verdrehen:

Umdrehungen	1	2	3
Kleines Zahnrad	16	32	**48**
Großes Zahnrad	24	**48**	

Wir erkennen, dass sich das kleine Zahnrad in 3 Umdrehungen um 48 Zähne verdreht. Das große Zahnrad verdreht sich in 2 Umdrehungen ebenfalls um 48 Zähne.

Antwortsatz zu Teilaufgabe c): Das neue Zahnrad hat 20 Zähne.

Herleitung: Nach 5 Umdrehungen des großen Zahnrads befinden sich beide – das große und das neue kleine Zahnrad – erstmals gleichzeitig wieder in ihrer Ausgangsposition. Nach 5 Umdrehungen hat sich das große Zahnrad um ($5 \cdot 24 =$) 120 Zähne verdreht. Ein kleineres Zahnrad vollführt nach 120 Zähnen genau dann vollständige Umdrehungen, wenn dessen Zähnezahl ein Teiler von 120 ist. Wir erkennen, dass sich ein Zahnrad mit 20 Zähnen bei Verdrehung um 120 Zähne insgesamt nach ($120 : 20 =$) 6 Umdrehungen wieder in der Ausgangsstellung befindet.

Antwortsatz zur Teilaufgabe d): Es können Zahnräder mit 5, 10 oder 15 Zähnen sein. Laut Aufgabentext genügt es, eine dieser drei Möglichkeiten anzugeben.

Begründung: Wie in Aufgabenteil c) erkennen wir, dass das kleine Zahnrad nach 120 Zähnen nur dann vollständige Umdrehungen vollführt, wenn dessen Zähnezahl ein Teiler von 120 ist: Unter den Anzahlen kleiner als 16 sind das die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15. Verwenden wir 1, 2, 3, 4, 6, 8 oder 12, so würde sich das kleine Zahnrad schon nach einer Umdrehung des großen Zahnrades wieder in der Ausgangsstellung befinden (weil 24 bereits jeweils durch 1, 2, 3, 4, 6, 8 oder 12 teilbar ist – somit treten die Ausgangsstellungen bereits bei einer Umdrehung des großen Zahnrades auf). Somit kommen nur Zahnräder mit 5, 10 oder 15 Zähnen in Frage.

Dagegen sind 24, 48, 72 und 96 nicht durch 5, 10 oder 15 teilbar – die Ausgangsstellungen können also nicht bei weniger Umdrehungen des großen Zahnrades (1, 2, 3 oder 4 Umdrehungen) gleichzeitig auftreten.

Probe: Es gilt tatsächlich, dass nach Verdrehung um 120 Zähne
- das Zahnrad mit 5 Zähnen ($120 : 5 =$) 24 Umdrehungen vollführt,
- das Zahnrad mit 10 Zähnen ($120 : 10 =$) 12 Umdrehungen vollführt und

- das Zahnrad mit 15 Zähnen (120 : 15 =) 8 Umdrehungen vollführt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2 – Guter Durchblick.
Antwortsatz zur Teilaufgabe a): In Alinas Klasse tragen 10 Kinder eine Brille.

Herleitung: Wir können die Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Wir wissen, dass in Alinas Klasse (28 – 13 =) 15 Jungen sind.

Anzahl Mädchen mit Brille	Anzahl Jungen mit Brille	Anzahl Jungen ohne Brille	Anzahl Jungen gesamt	Vergleich mit 15
1	1	$2 \cdot 1 = 2$	$1 + 2 = 3$	$3 < 15$
2	2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 + 4 = 6$	$6 < 15$
3	3	$2 \cdot 3 = 6$	$3 + 6 = 9$	$9 < 15$
4	4	$2 \cdot 4 = 8$	$4 + 8 = 12$	$12 < 15$
5	**5**	$\mathbf{2 \cdot 5 = 10}$	$\mathbf{5 + 10 = 15}$	$\mathbf{15 = 15}$
6	6	$2 \cdot 6 = 12$	$6 + 12 = 18$	$18 > 15$

Die Bedingungen sind nur dann erfüllt, wenn 5 Mädchen und 5 Jungen eine Brille tragen, also insgesamt (5 + 5 =) 10 Kinder.

Lösungsvariante mit Gleichungen: Wir bezeichnen

- die Anzahl der Mädchen ohne Brille mit MoB,
- die Anzahl der Mädchen mit Brille mit MmB,
- die Anzahl der Jungen ohne Brille mit JoB und
- die Anzahl der Jungen mit Brille mit JmB.

Im Aufgabentext können wir lesen:

(1) $\text{MoB} + \text{MmB} = 13$ (Anzahl aller Mädchen)
(2) $\text{MmB} = \text{JmB}$
(3) $\text{JoB} = 2 \cdot \text{JmB}$
(4) $\text{JoB} + \text{JmB} = 28 - 13 = 15$ (Anzahl aller Jungen)

Wir ersetzen in Gleichung (4) die Anzahl JoB durch die Angabe aus Gleichung (3) und wir erhalten

(5) $2 \cdot \text{JmB} + \text{JmB} = 3 \cdot \text{JmB} = 15.$

Damit ergibt sich unmittelbar JmB = (15 : 3 =) 5. Nutzen wir nun die Gleichung (2), so ergibt sich MmB = JmB = 5.

Also sind in der Klasse MmB + JmB = 5 + 5 = 10 Kinder mit Brille.

Antwortsatz zur Teilaufgabe b): In Bastians Klasse tragen 7 Kinder eine Brille.

Herleitung: Die Anzahl der Jungen muss durch 3 teilbar sein („jeder dritte Junge"). Die Anzahl der Mädchen muss durch 4 teilbar sein („jedes vierte Mädchen"). Zur Lösung können wir wieder systematisch probieren und tragen die Erkenntnisse in einer Tabelle ein.

Anzahl Jungen mit Brille	Anzahl Jungen	Anzahl Mädchen	Anzahl Mädchen mit Brille
1	3 · 1 = 3	25 – 3 = 22	22 nicht durch 4 teilbar
2	3 · 2 = 6	25 – 6 = 19	19 nicht durch 4 teilbar
3	**3 · 3 = 9**	**25 – 9 = 16**	**16 : 4 = 4 und 4 > 3**
4	3 · 4 = 12	25 – 12 = 13	13 nicht durch 4 teilbar
5	3 · 5 = 15	25 – 15 = 10	10 nicht durch 4 teilbar
6	3 · 6 = 18	25 – 18 = 7	7 nicht durch 4 teilbar
7	3 · 7 = 21	25 – 21 = 4	4 : 4 = 1, aber 1 < 7
8	3 · 8 = 24	25 – 24 = 1	1 nicht durch 4 teilbar

Nur in einem Fall werden alle Bedingungen erfüllt: Es sind 3 Jungen und 4 Mädchen Brillenträger.

Lösungsvariante mit Gleichungen: Wir verwenden wieder die Abkürzungen wie im Aufgabenteil a). Dann können wir im Aufgabentext lesen:

(1) 3 · JmB = JmB + JoB (jeder 3. Junge mit Brille)
(2) 4 · MmB = MmB + MoB (jedes 4. Mädchen mit Brille)
(3) JmB + JoB + MmB + MoB = 25

Setzen wir die Gleichungen (1) und (2) in Gleichung (3) ein, erkalten wir

(4) 3 · JmB + 4 · MmB = 25

Nun müssen wir aber auch wieder mit systematischem Probieren nach Lösungen suchen. Weil JmB < MmB gelten soll, beginnen wir mit JmB = 1 und finden für JmB = 3 erstmalig eine ganz Zahl MmB = 4. Für die zweite ganzzahlige Lösung JmB = 7 und MmB = 1 ist JmB < MmB nicht erfüllt.

Erklärung zur Teilaufgabe c): Chris ist einer von 16 Jungen in seiner Klasse.

Herleitung: Wir verwenden wieder eine Tabelle und tragen die Erkenntnisse aus dem Aufgabentext zusammen.

Mädchen ohne Brille	Jungen mit Brille	Jungen ohne Brille	Anzahl Kinder ohne Brille	Anzahl Kinder mit Brille
1	1	16 – 1 = 15	1 + 15 = 16	16 nicht durch 3 teilbar
2	2	16 – 2 = 14	2 + 14 = 16	16 nicht durch 3 teilbar
3	3	16 – 3 = 13	3 + 13 = 16	16 nicht durch 3 teilbar

Wir erkennen, dass unabhängig von der Anzahl der Mädchen ohne Brille die Anzahl der Kinder ohne Brille 16 ist. Aber da 16 nicht durch 3 teilbar ist, können es nicht dreimal so viele Kinder ohne Brille wie Kinder mit Brille geben.

Lösungsvariante mit Gleichungen. Wir verwenden wieder die Abkürzungen aus Aufgabenteil a) und wissen aus dem Aufgabentext:

(1) JmB + JoB = 16
(2) JoB + MoB = 3 · (JmB + MmB)
(3) JmB = MoB

In der Gleichung (2) können wir JoB durch Gleichung (1) und MoB durch Gleichung (3) ersetzen. Wir erhalten:

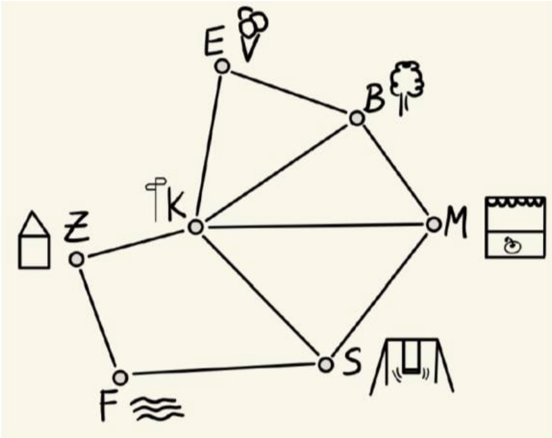
(4) (16 – JmB) + JmB = 3 · (JmB + MmB),

also

16 = 3 · (JmB + MmB).

Da aber 16 kein Vielfaches von 3 ist, kann es keine ganzen Zahlen JmB oder MmB geben, so dass die letzte Gleichung erfüllt wird!

Lösungshinweise zur Aufgabe 3 – Kein Weg doppelt: Die nebenstehende Figur ist eine (vereinfachte) Karte des Teils von Staffelstein in Franken. Wir verwenden für die Plätze die Abkürzungen: **Z**uhause, **K**reuzung, **E**isbude, **B**aum, **M**arkt, **S**pielplatz und **F**luss.



Beispiel für Teilaufgabe a): Laut Aufgabentext genügt es, einen korrekten Weg (ohne Herleitung) einzuzeichnen. Ein möglicher Weg ist: **ZKEBMSFZ.**

Jeder andere Weg (der in Teilaufgabe b) gefunden wird) darf hier auch angegeben werden. Wichtig ist, dass keine Verbindungslinie mehrfach durchlaufen wird und in der Beschreibung E vor M und M vor S steht.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Um alle Wege zu ermitteln, suchen wir systematisch.

Adam kann nicht zuerst nach F gehen, weil von dort als nächster Punkt S zwingend erforderlich wird, was gegen die Anweisung verstößt.

Also beginnt der Weg mit ZK. Von K aus kann Adam folgende Punkte erreichen:

- S: nicht möglich, weil es gegen die Anweisung verstößt.
- M: nicht möglich, weil dann kein Eis auf dem Hinweg möglich ist.
- B: Um auf dem Hinweg ein Eis zu erhalten, ist der Weg mit ZKBEKM fortzusetzen. Da die Verbindungen ZK und MK bereits verwendet wurde, kann der Heimweg nur über SFZ erfolgen (weil ZK nicht in der anderen Richtung noch einmal genutzt werden darf), gesamt also **ZKBEKMSFZ**.
- E: Es ist der oben gezeigte Weg „rundherum“ möglich: **ZKEBMSFZ.**
- Weitere Wege sind nur möglich, wenn wir statt „rundherum“ zwischendurch zu K zurückkehren (weil Punkte mehrfach verwendet werden dürfen): **ZKEBKMSFZ** oder **ZKEBMKSFZ.**

Beispiele zur Teilaufgabe c): Es genügt laut Aufgabenstellung wieder, nur einen korrekten Weg (ohne Herleitung) anzugeben. Wenn Adam sich daran hält, erst nach dem Markt auf dem Spielplatz zu gehen, muss sein Weg mit ZKM beginnen. Damit ist **ZKMBEKSFZ** ein möglicher Weg.

Erklärung zur Teilaufgabe d): Wenn Adam auf seinem Weg zweimal S besucht, muss er auf zwei Wegen hinlaufen und auf zwei Wegen weglaufen. Da aber kein Weg mehrfach genutzt werden darf, müssten 4 Wege in S enden – es sind aber nur 3. Deshalb ist es nicht möglich, unter Einhaltung der Bedingungen zweimal den Spielplatz zu besuchen.

Beispiele für Teilaufgabe e): Nach den Lösungshinweisen zu Teilaufgabe d) erkennen wir, dass der Trampelpfad von S ausgehen muss (damit in S vier Wege enden). So wäre ein zusätzlicher Weg von Z nach S hilfreich: **ZFSKEBMSZ** oder **ZSKEBMSFZ** (in beiden Fällen kann das Wegstück **BM** auch über K laufen: **BKM**).

Wir können auch einen Trampelpfad von S nach K verwenden. Dann kann Adam die Verbindung zwischen S und K zweimal laufen, ohne einen Weg mehrfach zu nutzen: **ZFSKEBMSKZ.**

Wir können auch einen Trampelpfad von S nach B verwenden (der aber „außenherum“ um M geführt werden muss, damit keine neue Kreuzung entsteht. Dann kann Adam den Punkt B zweimal anlaufen, ohne einen Weg mehrfach zu nutzen (weil nun vier Wege in B enden): **ZFSKEBMSBKZ.**

Trampelpfade zwischen S und F oder zwischen S und E sind nicht hilfreich, weil die Punkte F bzw. E dann nicht zweimal angelaufen werden können (weil nur drei Wege zu E bzw. zu F führen würden).