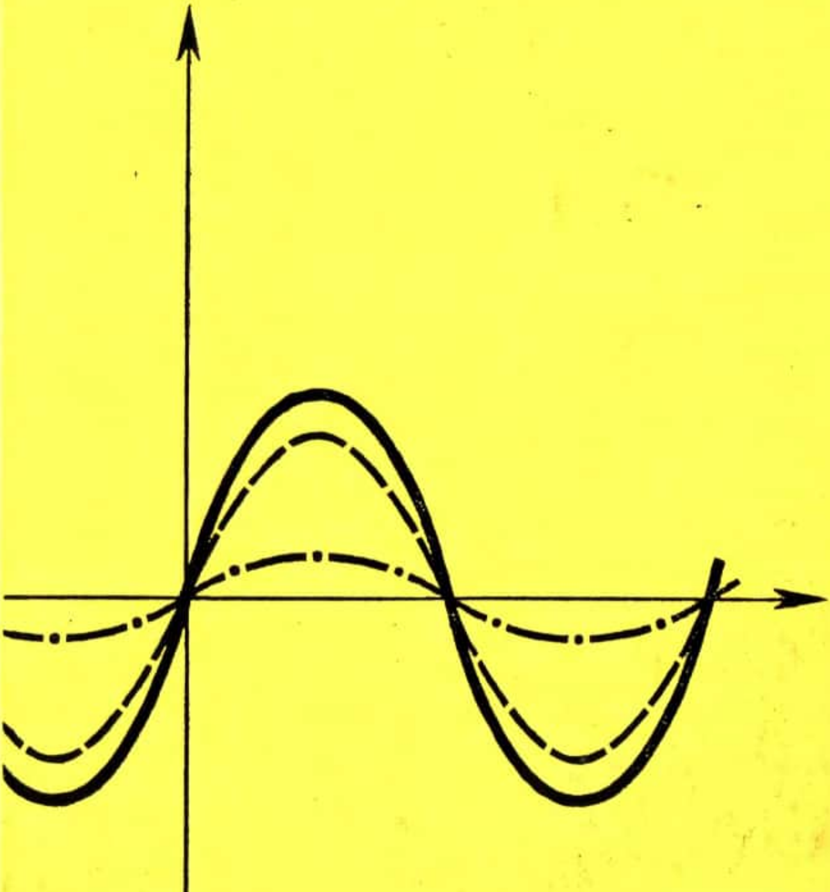
Mathematische Formeln

BARTSCH



BARTSCH · MATHEMATISCHE FORMELN

MATHEMATISCHE FORMELN

Von Dr.-Ing. HANS-JOCHEN BARTSCH

18. Auflage · Mit 362 Bildern

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

18. Auflage
Lizenznummer 114-210/48/81
LSV 1017
Verlagslektor: Helga Fago
Printed in GDR
Satz: (IV/5/1) VEB Druckhaus Köthen
Druck und Bindearbeiten:
Druckhaus Freiheit Halle IV/10/5
Redaktionsschluß: 15. 1. 1981
Bestellnummer: 545 033 9
DDR 9,80 M

VORWORT

In einer Zeit wie der unsrigen, in der laufend technisch-wissenschaftliche Fortschritte großen Stils erzielt werden, ist es verständlich, daß an den gesamten Ausbildungsgang besonders der technisch-wissenschaftlichen Kader gesteigerte Anforderungen zu stellen sind. Vornehmlich trifft das für die Mathematik zu.

Nur sichere und gut fundierte mathematische Kenntnisse befähigen die Ingenieure, Techniker, Konstrukteure und Meister, jederzeit dem Tempo des technischen Fortschritts folgen zu können und mit mathematischer Genauigkeit den an sie gestellten Anforderungen gerecht zu werden. Voraussetzung dafür ist vor allem eine gute mathematische Grundausbildung an allen dafür in Frage kommenden Instituten. Die Ausbildung in dieser Richtung zu fördern ist der Zweck auch dieser Formelsammlung. Sie baut im wesentlichen auf dem in der zehnklassigen polytechnischen Oberschule vermittelten Wissen auf und wendet sich in erster Linie an die Studierenden der Fachschulen und die Studenten der Hochschulen. Aber auch für Schüler der zwölfklassigen Oberschulen sowie für die Werktätigen, die auf Grund der großzügigen Unterstützung durch unsere Regierung sich beruflich im Selbst-, Fern- und Abendstudium qualifizieren, kann das Buch eine wertvolle Hilfe zur Rationalisierung der geistigen Arbeit sein. Es ist einleuchtend, daß nicht jedes Spezialgebiet aufgenommen werden konnte. Der Rahmen der Formelsammlung — er erstreckt sich von den Grundrechenarten über die analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung bis zu den FOURIER-Reihen, den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der linearen Optimierung, der Algebra der Logik und der LAPLACE-Transformation — scheint jedoch weit genug gespannt, den Ansprüchen der breitesten Interessentengruppen zu genügen.

Die 12. Auflage erfuhr Verbesserungen hinsichtlich der Einordnung einiger Unterabschnitte in den Gesamtrahmen des Buches sowie der noch stärkeren mengentheoretischen Durchdringung.

Es wurde besonderer Wert auf ein ausführliches Sachwortverzeichnis und eine klare, übersichtliche Gliederung gelegt, um es dem Benutzer zu erleichtern, das Erforderliche zu finden.

Durch zahlreiche Beispiele soll das Verständnis der abstrakten mathematischen Formeln erleichtert werden. Erläuterungen geben dem Leser die Möglichkeit, die Mathematik nicht formal zu betrachten, sondern sie durch eigenes Denken zum geistigen Besitz werden zu lassen, und sie sind außerdem ein Beitrag zur schöpferischen Anwendung der Mathematik in der Praxis.

VERFASSER UND VERLAG

INHALTSVERZEICHNIS

4. Analytische Geometrie

5. Differentialrechnung

6. Differentialgeometrie

7. Integralrechnung

8. Differentialgleichungen

0. Mathematische Zeichen und Symbole

0.1. Mathematische Zeichen

Zeichen	Sprechweise
1. Ordnungszeichen	
1.	erstens
, .	Komma, Punkt
...	und so weiter bis und so weiter unbegrenzt
$a_1, a_2, \ldots, a_n$	a eins, a zwei, a n
2. Gleichheit und Ungleichheit	
$=$	gleich
$\equiv$	identisch gleich
$\neq$	nicht gleich, ungleich
$\not\equiv$	nicht identisch gleich
$\sim$	proportional
$\approx$	angenähert, nahezu gleich (rund, etwa)
$\triangleq$	entspricht
$<$	kleiner als
$>$	größer als
$\leqq$	kleiner oder gleich, höchstens gleich
$\geqq$	größer oder gleich, mindestens gleich
$\ll$	klein gegen
$\gg$	groß gegen
3. Elementare Rechenoperationen	
$+$	plus
$-$	minus
$\cdot$ $\times$	mal
— / :	geteilt durch, zu
%	vom Hundert, Prozent
‰	vom Tausend, Promille
( ) [ ] { } ⟨ ⟩	runde, eckige, geschweifte, spitze Klammer auf, zu
4. Geometrische Zeichen	
$\parallel$	parallel
$\nparallel$	nicht parallel
$\uparrow\uparrow$	gleichsinnig parallel
$\uparrow\downarrow$	gegensinnig parallel
$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf
$\triangle$	Dreieck
$\cong$	kongruent
$\sim$	ähnlich
$\sphericalangle$	Winkel
$\overline{AB}$	Strecke AB
$\widehat{AB}$	Bogen AB
5. Algebra und Elemente der Analysis	
sgn	signum
$\lvert z \rvert$	Betrag von z
$\operatorname{arc} z$	Arcus z
$n!$	n Fakultät
$\binom{n}{p}$	n über p
Σ	Summe
Π	Produkt

Zeichen	Sprechweise
$\sqrt{}$; $\sqrt[n]{}$	Quadratwurzel aus, n-te Wurzel aus
i oder j	imaginäre Einheit
π	Pi
( )	Matrix
$\vert\ \vert$ oder det	Determinante
$f(x)$	f von x

6. Grenzwerte

Zeichen	Sprechweise
∞	unendlich
(a, b)	offenes Intervall a b
$[a, b]$ oder $\langle a, b\rangle$	abgeschlossenes Intervall a b
$\rightarrow$	gegen, nähert sich, strebt nach, konvergiert nach
lim	Limes

7. Differentialrechnung

Zeichen	Sprechweise
Δf	Delta f
$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$	f Strich x, f zwei Strich x, ..., f n Strich x
$\dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t)$	φ Punkt t, φ zwei Punkt t
$y', y'', \ldots, y^{(n)}$	y Strich, y zwei Strich, ..., y n Strich
d d$f(x)$	Differentialzeichen df von x
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$	dy nach dx, d zwei y nach dx hoch zwei, ..., dn y nach dx hoch n
f_x, f_y	f nach x, f nach y
∂	d partiell
f_{xx}, f_{xy}	f nach xx, f nach xy
f_{yx}, f_{yy}	f nach yx, f nach yy
d$f(x; y)$	totales Differential von $f(x; y)$

8. Integralrechnung

Zeichen	Sprechweise
$\int$	Integral
$\int f(x)\,dx$	Integral $f(x)$ dx
$\int_a^b f(x)\,dx$	Integral $f(x)$ dx von a bis b
$F(x)\Big\vert_a^b$	$F(x)$ zwischen den Grenzen a und b
$\oint$	Randintegral Hüllenintegral

9. Exponential- und Logarithmusfunktion

Zeichen	Sprechweise
$\exp x$	Exponentialfunktion von x
log	Logarithmus (allgemein)
$\log_a$	Logarithmus zur Basis a
lg	Zehnerlogarithmus (gewöhnlicher oder Briggsscher Logarithmus)
ln	natürlicher Logarithmus

10. Trigonometrische und Hyperbelfunktionen sowie deren Umkehrungen

Zeichen	Sprechweise
sin	Sinus
cos	Cosinus
tan	Tangens
cot	Cotangens
arcsin	Arcussinus
arccos	Arcuscosinus
arctan	Arcustangens
arccot	Arcuscotangens
sinh	Hyperbelsinus
cosh	Hyperbelcosinus
tanh	Hyperbeltangens
coth	Hyperbelcotangens
arsinh	Areasinus
arcosh	Areacosinus
artanh	Areatangens
arcoth	Areacotangens

0.2. Symbole der Mengenlehre

$A = \{a_k\} = \{a_1; a_2; a_3; \ldots\}$	Die Menge A besteht aus den Elementen $a_1; a_2; a_3; \ldots$	
$\in$	ist Element von	
$\notin$	ist kein Element von	
$=$	ist gleich	
$\{\,\}; \emptyset$	leere Menge (enthält kein Element)	
$\subseteq$	ist Teilmenge von (ist enthalten in); echte Teilmenge $\subset$	
$\cup$	vereinigt mit	
$\cap$	geschnitten mit (Durchschnitt)	
$\setminus$	Differenz	
$\rightarrow$	abgebildet auf	
$\times$	Zeichen für Mengenprodukt	
N	Menge der natürlichen Zahlen	
G	Menge der ganzen Zahlen	$N \subset G$
K	Körper der gebrochenen (rationalen) Zahlen	$G \subset K$
R	Körper der reellen Zahlen	$K \subset R$
C	Körper der komplexen Zahlen	$R \subset C$
E	Erfüllungsmenge, Lösungsmenge	

0.3. Symbole der Logik

$A_1 \Rightarrow A_2$	Aus A_1 folgt A_2 (Implikation)
$A_1 \Leftrightarrow A_2$	Die Aussagen A_1 und A_2 sind gleichwertig (Äquivalenz)
$A_1 \rangle\!=\!\langle A_2 = A_1 \oplus A_2$	Die Aussagen A_1 und A_2 schließen einander aus (Antivalenz)
$\vee, +, \cup$	*oder* (Disjunktion)
$\wedge, \cdot, \cap$	*und* (auch ohne Rechenzeichen) (Konjunktion)
$\bar{x}; \sim x$	logische Verneinung (x quer, x nicht) (Negation)

1. Arithmetik

1.1. Mengenlehre

1.1.1. Grundbegriffe

Faßt man alle Objekte, die eine bestimmte Eigenschaft haben, zu einer Gesamtheit zusammen, so wird diese eine *Menge* genannt, falls für jedes Objekt eindeutig entschieden werden kann, ob ihm diese Eigenschaft zukommt oder nicht.
Die zur Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente*.
Darstellung (Beispiele):

$$M = \{3; 7; 11\}$$

$$S = \{2; 4; \ldots; 2n\}$$

$$Q = \{x \mid |x| < 1; x \in R\}$$

Sind die Elemente der Mengen Punkte einer Kurve, einer Ebene oder eines Raumes, so werden die Mengen auch *Punktmengen* genannt.
Wenn jedes Element a_i der Menge A in der Menge B enthalten ist, dann ist A eine *Teilmenge* (Untermenge) von B (Obermenge):

$$A \subset B \Leftrightarrow B \supset A \quad (\textit{echte Teilmenge} \text{ für } A \neq B)$$

Stets gilt:

$$A \subseteq A \text{ (reflexive Beziehung)}, \emptyset \subset A$$

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C \text{ (transitive Beziehung)}$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

$$A = B \text{ für } \textit{jedes } x \in A \wedge x \in B$$

$$A = B \Leftrightarrow B = A \text{ (symmetrische Beziehung)}$$

$$A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C \text{ (transitive Beziehung)}$$

Eine Menge, die mindestens 2 verschiedene Elemente enthält, heißt *Körper*, wenn unter ihren Elementen die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bis auf die Division durch Null unbeschränkt ausführbar sind.

1.1.2. Mengenoperationen

Die *Vereinigung* zweier Mengen $A \cup B$ (lies A vereinigt mit B) besteht aus allen Elementen, die wenigstens einer der beiden Mengen A und B angehören.
Der *Durchschnitt* zweier Mengen $A \cap B$ (lies A Durchschnitt B) besteht aus allen Elementen, die sowohl zur Menge A als auch zur Menge B gehören.
Die *Differenz* zweier Mengen $A \setminus B$ (lies Differenzmenge aus A und B) besteht aus allen Elementen, die zu A, aber nicht zu B gehören.
Das *Produkt* zweier Mengen $A \times B$ (lies A Kreuz B) stellt die Menge aller geordneten Elementepaare $(a; b)$ dar, wobei $a \in A$, $b \in B$.

Rechenregeln

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus A = \emptyset$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Wenn eine der drei Beziehungen

$$A \subset B, \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A$$

gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit der anderen beiden.

1.1.3. Abbildungen, Mächtigkeit

Wird jedem Element $x \in X$ durch eine bestimmte Vorschrift ein (oder mehrere) Element(e) einer Menge Y zugeordnet, so spricht man

von einer *Abbildung* der Menge X in bzw. auf die Menge Y, je nachdem, ob von Y nur ein Teil oder alle Elemente beteiligt sind.
Die dem Element x zugeordneten Elemente der Menge Y werden die *Bilder* von x genannt. Das Element x wird auch das *Urbild* genannt, Die Menge X heißt die *Urbildmenge* bzw. der *Definitionsbereich* D. die Menge Y die *Bildmenge* bzw. der *Wertebereich* W.
Wird die Abbildung durch σ bezeichnet, so schreibt man:

$$\sigma\colon X \to Y \quad \text{bzw.} \quad x \xrightarrow{\sigma} \sigma(x) = y$$

Wird bei einer Abbildung jedem Element der Urbildmenge genau ein Element der Bildmenge zugeordnet, so ist die Abbildung *eindeutig*. Bestehen die beiden Mengen aus mathematischen Objekten, so spricht man von *Funktionen*. Ist bei einer eindeutigen Abbildung die Umkehrabbildung σ^{-1} ebenfalls eindeutig, d.h., entspricht jedem Element der Bildmenge genau ein Element der Urbildmenge, so ist die Abbildung *eineindeutig*. Zwei Mengen, die sich eineindeutig aufeinander abbilden lassen, sind von *gleicher Mächtigkeit* oder *gleichmächtig*.
Läßt sich eine Menge A eineindeutig auf eine echte Teilmenge B' von B abbilden, aber nicht auf die Menge B selbst, dann ist A von kleinerer Mächtigkeit als die Menge B. Die Menge B wird von größerer Mächtigkeit als die Menge A genannt.

1.1.4. Zahlenbereiche

		Ausführbare math. Operationen
Bereich der natürlichen Zahlen	$N = \{0; 1; 2; \ldots\}$	Addition, Multiplikation
Bereich der ganzen Zahlen	$G = \{0; 1; -1; 2; -2; \ldots\}$ $N \subset G$	Addition, Subtraktion, Multiplikation
Körper der rationalen Zahlen (gebrochene Zahlen, unendliche, periodische Dezimalbrüche)	$K = \left\{ \frac{g}{h} \middle\vert g \in G \wedge h \in N \setminus \{0\} \right\}$ $G \subset K$	Addition, Subtrakt., Multipl., Division
Körper der reellen Zahlen:	$R \quad K \subset R$	Addition, Subtrakt., Multipl., Division, Grenzübergänge

Er enthält den Körper der rationalen Zahlen und alle unendlichen Dezimalbrüche. Nicht rationale reelle Zahlen heißen *irrationale Zahlen,* deren Dezimalbrüche nicht periodisch sind.

Der Körper der reellen Zahlen kann eineindeutig auf die Punkte der reellen Zahlengeraden abgebildet werden. R ist der Menge der Punkte einer Geraden gleichmächtig.

Körper der komplexen Zahlen	$C = \{a + b\mathrm{j} \mid a, b \in R \wedge \mathrm{j}^2 = -1\}$ $R \subset C$	wie R, zusätzlich Erfüllung algebraischer Gleichungen

1.2. Reelle Zahlen

1.2.1. Allgemeines

Betrag von reellen Zahlen

$$|a| = |-a|$$

$$|a| \geqq 0$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geqq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$\pm a \leqq |a|$$

$$|a| - |b| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b| \quad (\textit{Dreiecksungleichung})$$

$$|a| - |b| \leqq |a - b| \leqq |a| + |b|$$

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ für } b \neq 0$$

Vorzeichen (signum) einer Zahl

$$\operatorname{sgn} z = \frac{|z|}{z}$$

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} +1, & \text{für } z > 0 \\ -1 & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} 0 = 0$$

1.2.2. Irrationale Zahlen

Die n-ten Wurzeln aus n-ten Potenzen rationaler Zahlen sind wieder rationale Zahlen.

$$\sqrt{25} = 5; \qquad \sqrt[3]{27} = 3; \qquad \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$$

Die n-ten Wurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen, die nicht n-te Potenzen darstellen, sind *irrationale* Zahlen, d. h. unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche.

Rationalmachen des Nenners

Führt die Rechnung zu Brüchen mit Wurzeln im Nenner, so erweitert man den Bruch derart, daß der Nenner rational wird.

Beispiele:

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}\sqrt[4]{x}} = \frac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{x\sqrt[4]{x}}{x} = \sqrt[4]{x}$$

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$$

1.2.3. Binomialkoeffizienten, binomischer Satz

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies n über k)

$k \in N;\ n \in K$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k$ (k *Fakultät*)

Festsetzung: $0! = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ [Definition]};\ \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n > 0;\ n \in N$$

Beispiele:

$$\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$\binom{3}{5} = \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 0$$

Pascalsches Dreieck zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

$n = 0$						1					
$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1

$\binom{n}{k}$ steht in diesem Dreieck in der $(n+1)$-ten Zeile an der $(k+1)$-ten Stelle.

Beispiele:

$\binom{4}{2} = 6$ steht in der 5. Zeile an der 3. Stelle.

Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (Symmetrie)} \qquad n \in N$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad n \in N$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \cdots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n} \qquad n \in N$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad n \in N$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \qquad n \in N$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1} \qquad n \in N$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} \qquad n \in N$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} \qquad n \in N$$

Binomischer Lehrsatz mit Exponenten aus natürlichen Zahlen

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \\ + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \\ + - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}b^n = \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Allgemeiner binomischer Lehrsatz für reelle Exponenten

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \\ + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

Konvergenzbedingung $|b| < |a|$

Binomischer Lehrsatz für einige Werte von n

$$n = 2{:}\ (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$n = 3{:}\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$n = 4{:}\ (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$
$$n = 5{:}\ (a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$

1.3. Imaginäre und komplexe Zahlen

1.3.1. Imaginäre Zahlen

Imaginäre Einheit

Bestimmungsgleichung: $\mathrm{j}^2 = -1$

Potenzen der imaginären Einheit

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}^{4n} &= +1 \\ \mathrm{j}^{4n+1} &= \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^{4n+2} &= -1 \\ \mathrm{j}^{4n+3} &= -\mathrm{j} \end{aligned}\right\} \text{für } n \in G$$

Lösung der Gleichung $x^2 = -a \quad a \in R, a > 0$

Aus $x^2 = -a = (-1)\,a$ folgt $E = \{j\sqrt{a}; -j\sqrt{a}\}$

Algebraische Summen von imaginären Zahlen

sind entweder imaginär oder 0.

Beispiele:

$$4j - 7j + 9j = 6j$$
$$4j - 7j + 3j = 0$$

Produkte von imaginären Zahlen

sind entweder reell oder imaginär.

Beispiele:

$$5j \cdot 7j = 35j^2 = -35$$
$$5j \cdot 7j \cdot 8j = 280j^3 = -280j$$

Quotienten von imaginären Zahlen

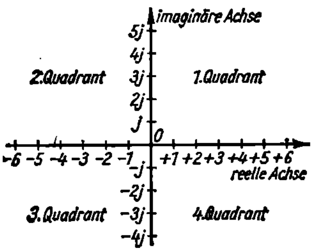
sind stets reell.

Beispiel:

$$\frac{14j}{15j} = \frac{14}{15}$$

Darstellung der imaginären Zahlen

Die Menge der imaginären Zahlen kann durch Punkte auf der imaginären Zahlengeraden als Vielfaches der imaginären Einheit j (Strecke O bis j) dargestellt werden. Reelle und imaginäre Zahlengeraden stehen senkrecht aufeinander.



1.3.2. Komplexe Zahlen in arithmetischer Form

$z = a + bj \quad a, b \in R;\ j^2 = -1 \qquad a$ Realteil; b Imaginärteil

Konjugiert komplexe Zahlen

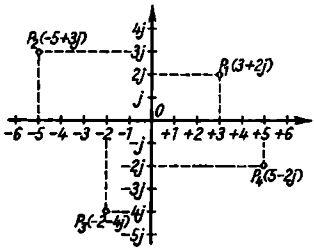
$$z_1 = a + bj$$
$$z_2 = a - bj$$

Gleichheit komplexer Zahlen

$$a + b\mathrm{j} = c + d\mathrm{j} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

speziell gilt $a + b\mathrm{j} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$

Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Die Menge aller Zahlen $a + b\mathrm{j}$ bildet den **Körper der komplexen Zahlen** C, von denen jede einem geordneten Zahlenpaar $(a; b)$, d.h. einem Element des Mengenprodukts $R \times R$ entspricht. Die *Darstellung* aller dieser Mengenprodukte erfolgt durch Punkte in der Gaussschen Zahlenebene (eineindeutige Abbildung der Menge der komplexen Zahlen auf die Menge der Punkte der Gaussschen Zahlenebene).

Im Körper C haben alle quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten Lösungen.

Addition von komplexen Zahlen

$$(a + b\mathrm{j}) \pm (c + d\mathrm{j}) = (a \pm c) + (b \pm d)\,\mathrm{j}$$

$$(a + b\mathrm{j}) + (a - b\mathrm{j}) = 2a$$

Subtraktion von komplexen Zahlen

$$(a + b\mathrm{j}) - (c + d\mathrm{j}) = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{j}$$

$$(a + b\mathrm{j}) - (a - b\mathrm{j}) = 2b\mathrm{j}$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$(a + b\mathrm{j})\,(c + d\mathrm{j}) = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{j}$$

$$(a + b\mathrm{j})\,(a - b\mathrm{j}) = a^2 + b^2$$

$a^2 + b^2$ heißt *Norm der komplexen Zahl* $a + b\mathrm{j}$ bzw. $a - b\mathrm{j}$.

Division von komplexen Zahlen (Reellmachen des Nenners)

$$\frac{a + b\mathrm{j}}{c + d\mathrm{j}} = \frac{(a + b\mathrm{j})\,(c - d\mathrm{j})}{(c + d\mathrm{j})\,(c - d\mathrm{j})} = \frac{ac + bc\mathrm{j} - ad\mathrm{j} - bd\mathrm{j}^2}{c^2 - d^2\mathrm{j}^2} =$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,\mathrm{j}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot \mathrm{j}$$

Durch Erweitern des Quotienten mit der zum Divisor konjugiert komplexen Zahl erhält man stets einen Quotienten, dessen Nenner reell ist.

Beispiel:

$$\frac{1+2\mathrm{j}}{3-\mathrm{j}} = \frac{(1+2\mathrm{j})(3+\mathrm{j})}{(3-\mathrm{j})(3+\mathrm{j})} = \frac{1+7\mathrm{j}}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{j}$$

Potenzieren von komplexen Zahlen

$$(a+b\mathrm{j})^2 = a^2 + 2ab\mathrm{j} + b^2\mathrm{j}^2 = a^2 + 2ab\mathrm{j} - b^2$$

$$(a+b\mathrm{j})^3 = a^3 + 3a^2b\mathrm{j} + 3ab^2\mathrm{j}^2 + b^3\mathrm{j}^3 = $$
$$= a^3 + 3a^2b\mathrm{j} - 3ab^2 - b^3\mathrm{j}$$

$$(a+b\mathrm{j})^4 = a^4 + 4a^3b\mathrm{j} + 6a^2b^2\mathrm{j}^2 + 4ab^3\mathrm{j}^3 + b^4\mathrm{j}^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b\mathrm{j} - 6a^2b^2 - 4ab^3\mathrm{j} + b^4$$

usw.

Komplexe Quadratwurzel von z

Definition

Lösungen der Gleichung $x^2 = a + b\mathrm{j} = z$ heißen komplexe Quadratwurzeln von z.

$$x_{0,1} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + b\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\right)$$

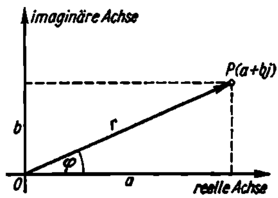
1.3.3. Komplexe Zahlen in goniometrischer Form

Jede komplexe Zahl läßt sich als *Vektor* $\mathfrak{z}$ in der GAUSSschen Zahlenebene darstellen:

$$z = a + b\mathrm{j} = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

$$r \in R,\ r \geqq 0$$

$$0 \leqq \varphi < 360°$$



r *Betrag* oder *Modul* der komplexen Zahl

φ *Argument* oder *Phase* der komplexen Zahl

Dabei gilt

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

(a und b bestimmen die Lage des Punktes in der GAUSSschen Zahlenebene und somit auch φ.)

$$|\mathfrak{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel:

Verwandle $3 - 4\mathrm{j}$ in die goniometrische Form!

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\tan\varphi = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}; \quad \varphi = 306°\,52'$$

(Der 2. Wert für φ scheidet aus, da die Zahl bei $a > 0$ und $b < 0$ im 4. Quadranten liegt.)

$$3 - 4\mathrm{j} = 5\,(\cos 306°\,52' + \mathrm{j}\sin 306°\,52')$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Division von komplexen Zahlen

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Potenzieren von komplexen Zahlen

$$z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

$$z^n = r^n\,(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi) \quad \text{(Satz von MOIVRE)} \quad n \in G$$

Komplexe n-te Wurzeln von z

Definition

Lösungen der Gleichung $x^n = z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ heißen komplexe n-te Wurzeln von z. $x \in C$; $n \in N \setminus \{0\}$

$$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 360°}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{\varphi + k\cdot 360°}{n}\right)$$

$$k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$$

Die n-ten Wurzeln aus einer Zahl haben n Werte.

Komplexe n-te Einheitswurzeln

für $r = 1$, $\varphi = 0$ (n-te Kreisteilungsgleichung):

$$x_e^n = 1 \Rightarrow x_{e_k} = \cos\frac{k \cdot 360°}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{k \cdot 360°}{n}$$

$$x_e^n = -1 \Rightarrow x_{e_k} = \cos\frac{180° + k \cdot 360°}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{180° + k \cdot 360°}{n}$$

für $k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$

Beispiele:

$$x_e^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{e_0} = 1 \\ x_{e_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3} \\ x_{e_2} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3} \end{cases} \qquad x_e^3 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_{e_0} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3} \\ x_{e_1} = -1 \\ x_{e_2} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x_e^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{e_0} = 1 \\ x_{e_1} = \mathrm{j} \\ x_{e_2} = -1 \\ x_{e_3} = -\mathrm{j} \end{cases} \qquad x_e^4 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_{e_0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{2} \\ x_{e_1} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{2} \\ x_{e_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{2} \\ x_{e_3} = +\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Lösung der binomischen Gleichungen

$$x^n + a_0 = 0 \Rightarrow x_k = \begin{cases} \sqrt[n]{a_0} \cdot x_{e_k} & \text{für } a_0 \geqq 0 \text{ und } x_e^n = -1 \\ \sqrt[n]{-a_0} \cdot x_{e_k} & \text{für } a_0 < 0 \text{ und } x_e^n = 1 \end{cases}$$

$n \in N \setminus \{0\}$

$k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$

1.3.4. Komplexe Zahlen in Exponentialform

Definition

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \quad \textit{Eulersche Formel}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi$$

Daraus folgt:

$$z = re^{j\varphi} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = a + bj$$

Beispiel:

Verwandle $-2 + 3j$ in die Exponentialform:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}; \quad \tan\varphi = \frac{3}{-2} = -1{,}5;$$

$$\varphi = 123^\circ\, 41' \mathrel{\widehat{=}} 2{,}16 \text{ rad}$$

$$-2 + 3j = \underline{\underline{\sqrt{13} \cdot e^{j \cdot 2{,}16}}}$$

Abkürzung in der Technik:

$$e^{j\varphi} = \underline{/\varphi} \text{ (lies: } \textit{Versor } \varphi)$$

$$-2 + 3j = \sqrt{13}\, e^{j123^\circ 41'} = \sqrt{13}\, \underline{/123^\circ\, 41'}$$

Beispiel:

Verwandle $17 \cdot e^{j37^\circ 22'}$ in die arithmetische Form $a + bj$!

$$a + bj = 17(\cos 37^\circ\, 22' + j\sin 37^\circ\, 22') =$$

$$= 17(0{,}795 + j \cdot 0{,}607) = \underline{\underline{13{,}5 + 10{,}3j}}$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{j\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{j\varphi_2} \end{aligned}\right\} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division von komplexen Zahlen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{j\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{j\varphi_2} \end{aligned}\right\} \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzieren von komplexen Zahlen

$$z = re^{j\varphi} \quad z^n = r^n e^{jn\varphi} \quad n \in G$$

Komplexe n-te Wurzeln von z

Definition

Lösungen der Gleichung $x^n = z = re^{j(\varphi + 2k\pi)}$ heißen komplexe n-te Wurzeln von z. $x \in C$; $k \in N$; $n \in N \setminus \{0\}$

$$x_k = \sqrt[n]{r}\, e^{j\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Spezielle Werte des Faktors $e^{j\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} e^{j2k\pi} &= 1 \\ e^{j(2k+1)\pi} &= -1 \end{aligned}\right\} \text{ für } k \in G$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\sqrt{3}$$

$$e^{j\frac{3}{2}\pi} = -j; \quad e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\sqrt{3}$$

$$e^{j2k\pi} = 1 \Rightarrow e^{\varphi + 2k\pi} = e^{\varphi}$$

Periode der Exponentialfunktion deshalb $2\pi j$.
Zusammenhang zwischen Exponential- und trigonometrischen Funktionen siehe S. 164.

1.3.5. Natürliche Logarithmen von komplexen und negativen Zahlen

Definition

Der natürliche Logarithmus der komplexen Zahl

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad z \neq 0$$

ist die komplexe Zahl

$$\ln z = \ln[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)] = \ln r + j(\varphi + 2k\pi) \qquad k \in G$$

Für $k = 0$ ergibt sich der *Hauptwert.*

Beispiel:

$\ln(3 - 7j)$ ist zu berechnen.

$$r = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \qquad \tan\varphi = \frac{-7}{3} = -2{,}33\ldots$$

$$\varphi = 293^\circ\, 12' \triangleq 5{,}12 \text{ rad}$$

$$\ln(3 - 7j) = \ln\sqrt{58} + j(5{,}12 + 2k\pi) =$$
$$= 2{,}03022 + j(5{,}12 + 2k\pi)$$

$k = 0$: $\ln(3 - 7j) = 2{,}03022 + 5{,}12j$

$k = 1$: $= 2{,}03022 + j(5{,}12 + 2\pi) = 2{,}03022 + 11{,}4j$

$k = 2$: $= 2{,}03022 + j(5{,}12 + 4\pi) = 2{,}03022 + 17{,}68j$

usw.

Sonderfälle

Positive imaginäre Zahl $b\mathrm{j}$ $(a = 0;\ b > 0)$

$$\ln(b\mathrm{j}) = \ln\left[r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + 2k\pi)}\right], \text{ wobei } r = b \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\ln(b\mathrm{j}) = \ln\left[b\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}\right] =$$

$$= \ln b + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \text{für } k \in G$$

Logarithmen positiver imaginärer Zahlen sind komplexe Zahlen.

Negative imaginäre Zahl $-b\mathrm{j}$ $(a = 0;\ b > 0)$

$$\ln(-b\mathrm{j}) = \ln\left[r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + 2k\pi)}\right], \quad \text{wobei } r = b \text{ und } \varphi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\ln(-b\mathrm{j}) = \ln\left[b\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)}\right] =$$

$$= \ln b + \mathrm{j}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \quad \text{für } k \in G$$

Positive reelle Zahl a $(a > 0;\ b = 0)$

$$\ln a = \ln\left[r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + 2k\pi)}\right], \text{ wobei } r = a \text{ und } \varphi = 0$$

$$\ln a = \ln\left[a\mathrm{e}^{\mathrm{j}(0 + 2k\pi)}\right] =$$

$$= \ln a + 2k\pi\mathrm{j} \text{ für } k \in G$$

Negative reelle Zahl $-a$ $(a > 0;\ b = 0)$

$$\ln(-a) = \ln\left[r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + 2k\pi)}\right], \quad \text{wobei } r = a \text{ und } \varphi = \pi$$

$$\ln(-a) = \ln\left[a\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi + 2k\pi)}\right]$$

$$= \ln a + \mathrm{j}(\pi + 2k\pi) \text{ für } k \in G$$

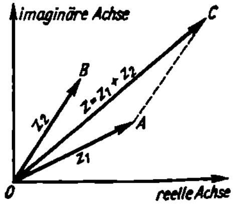
Entsprechend:

$$\left.\begin{aligned} \ln 1 &= 2k\pi\mathrm{j} \\ \ln(-1) &= (\pi + 2k\pi)\,\mathrm{j} \\ \ln \mathrm{j} &= \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\mathrm{j} \\ \ln(-\mathrm{j}) &= \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)\mathrm{j} \end{aligned}\right\} \text{ für } k \in G$$

1.3.6. Graphische Verfahren

Graphisches Addieren von komplexen Zahlen

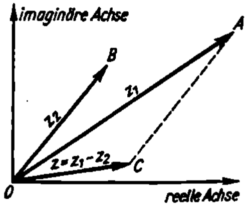
Da komplexe Zahlen als zweidimensionale Vektoren in der GAUSSschen Zahlenebene dargestellt werden können, führt das graphische Addieren von komplexen Zahlen auf eine Vektoraddition. An den Vektor $\mathfrak{z}_1$ wird durch Parallelverschiebung der Vektor $\mathfrak{z}_2$ angefügt. Der Summenvektor OC ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$.



Zur Bildung der Differenz

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 + (-\mathfrak{z}_2)$$

wird an $\mathfrak{z}_1$ der zu $\mathfrak{z}_2$ entgegengesetzt gerichtete Vektor $-\mathfrak{z}_2$ angefügt.



Graphische Multiplikation von komplexen Zahlen

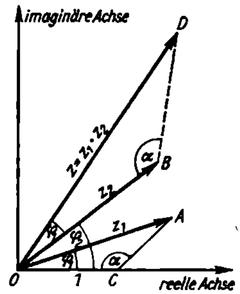
Die graphische Multiplikation ist nicht identisch mit einer der möglichen Produktbildungen von Vektoren.

Aus $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = z = re^{j\varphi}$ ergibt sich für den Winkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und für den Modul $r = r_1 r_2$.

Die letzte Gleichung läßt sich umformen in $r : r_2 = r_1 : 1$.

Konstruktion

1. Schritt: Zeichnen der den komplexen Zahlen entsprechenden Vektoren OA und OB.
2. Schritt: Antragen des Winkels φ_1 an den Vektor OB gemäß $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
3. Schritt: Von O aus auf der reellen Achse die Strecke 1 abtragen (Punkt C).
4. Schritt: Verbinden von C mit A.
5. Schritt: Antragen des Winkels $OCA = \alpha$ an die Strecke OB im Punkt B. Der Schnittpunkt D seines freien Schenkels mit dem freien Schenkel



des angetragenen Winkels φ_1 bestimmt den Vektor des Ergebnisses.

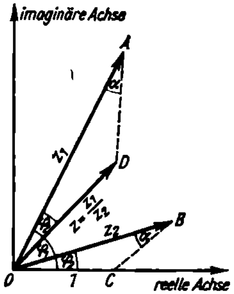
Begründung: $\triangle\, OCA \sim \triangle\, OBD$
(Übereinstimmung in den Winkeln), so daß obige Proportion $r:r_2 = r_1:1$ gilt.

Graphische Division von komplexen Zahlen

Aus $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = z = re^{j\varphi}$ ergibt sich für den Winkel $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ und für den Modul $r = \dfrac{r_1}{r_2}$.

Die letzte Gleichung läßt sich umformen in $r:r_1 = 1:r_2$.

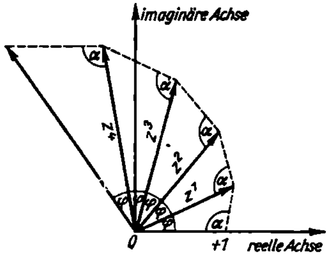
Konstruktion

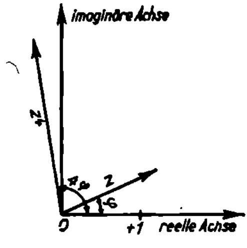


1. Schritt: Zeichnen der den komplexen Zahlen entsprechenden Vektoren OA und OB.
2. Schritt: Antragen des Winkels φ_2 an den Vektor OA im negativen Sinne gemäß $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.
3. Schritt: Von O aus auf der reellen Achse die Strecke 1 abtragen (Punkt C).
4. Schritt: Verbinden von B mit C.
5. Schritt: Antragen des Winkels $OBC = \alpha$ an die Strecke OA im Punkt A.

Der Schnittpunkt D seines freien Schenkels mit dem freien Schenkel des angetragenen Winkels φ_2 bestimmt den Vektor des Ergebnisses. Begründung: $\triangle\, OCB \sim \triangle\, ODA$ (Übereinstimmung in den Winkeln), so daß obige Proportion $r:r_1 = 1:r_2$ gilt.

Graphisches Potenzieren von komplexen Zahlen





Das Verfahren beruht auf wiederholter Anwendung des graphischen Multiplizierens.
Ein weiteres Verfahren benutzt die errechneten Werte $\sphericalangle\, n\varphi$ und r^n. Bild für $n = 4$.

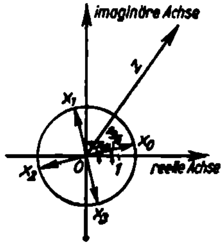
Graphische Darstellung der n-ten Wurzeln von komplexen Zahlen

Lösung der Gleichung

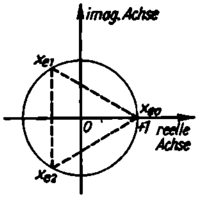
$$x^n = z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

Das Verfahren benutzt die errechneten Werte $\sphericalangle\, \frac{\varphi}{n}$ und $\sqrt[n]{r}$.

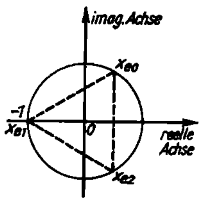
Das Bild für $n = 4$ ergibt die 4 Wurzelwerte $x_0, \ldots, x_3$, die gegeneinander um $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{4} \mathrel{\widehat{=}} 90°$ verschoben sind.



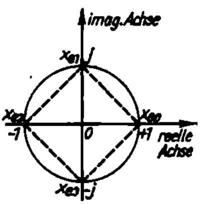
Graphische Darstellung der Wurzeln aus der positiven und negativen Einheit



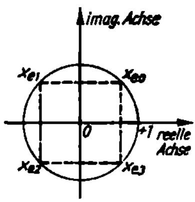
$x^3 = 1$



$x^3 = -1$



$x^4 = 1$



$x^4 = -1$

Die Einheitswurzeln teilen den *Einheitskreis* (Radius 1) in n gleiche Teile.

1.4. Proportionen

Bezeichnungen

Proportion (Verhältnisgleichung)

$$a:b = c:d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a und d Außenglieder
b und c Innenglieder

a und c Vorderglieder
b und d Hinterglieder

Erweitern und *Kürzen* von Gliedern einer Proportion:

$$a:b = c:d \Rightarrow \begin{cases} an:bn = c:d \\ an:b = cn:d \end{cases}$$

$$a:b = c:d \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{n}:\dfrac{b}{n} = c:d \\ \dfrac{a}{n}:b = \dfrac{c}{n}:d \end{cases}$$

Produktgleichung

$$a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc$$

(Produkt der Außenglieder = Produkt der Innenglieder)

Vertauschung der Glieder einer Proportion

Aus $a:b = c:d$ folgt: $a:c = b:d$
$d:b = c:a$
$d:c = b:a$

Korrespondierende Addition und Subtraktion

Aus $a:b = c:d$ folgt: $(a+b):a = (c+d):c$
$(a+b):b = (c+d):d$
$(a-b):a = (c-d):c$
$(a-b):b = (c-d):d$
$(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d)$

$$(pa \pm qb):(ra \pm sb) = (pc \pm qd):(rc \pm sd)$$

Vierte Proportionale

$$a:b = c:x; \qquad x = \frac{bc}{a} \quad \text{(4. Proportionale zu } a, b, c\text{)}$$

Geometrische Behandlung siehe S. 121.

Proportionalitätsfaktor

$$a:b = c:d \Rightarrow \begin{cases} a = pc \\ b = pd \end{cases}$$

p Proportionalitätsfaktor

Stetige Proportion

$a:b = b:c$ (gleiche Innenglieder)

Dritte Proportionale

$a:b = b:x; \quad x = \dfrac{b^2}{a}$ (3. Proportionale zu a und b)

Mittlere Proportionale

$a:x = x:b; \quad x = \sqrt{ab}$ (mittlere Proportionale oder *geometrisches Mittel* von a und b)

$b > 0$

Geometrische Behandlung siehe S. 122.

Stetige harmonische Proportion

$(a - x):(x - b) = a:b; \quad x = \dfrac{2ab}{a + b}$ (*harmonisches Mittel* aus a und b)

oder in anderer Schreibweise: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

Fortlaufende Proportion

$a:b:c:d:\ldots = a_1:b_1:c_1:d_1:\ldots$

Jede fortlaufende Proportion kann in Einzelproportionen aufgespaltet werden:

$$\begin{array}{ll} a:b = a_1:b_1 & b:c = b_1:c_1 \\ a:c = a_1:c_1 & b:d = b_1:d_1 \\ a:d = a_1:d_1 & c:d = c_1:d_1 \quad \text{usw.} \end{array}$$

1.5. Logarithmieren

1.5.1. Allgemeines

Bezeichnungen

$\log_b a = c$

b Basis

a Numerus (*Logarithmand*)

c Logarithmus

Begriff des Logarithmus

Das Logarithmieren ist die zweite Umkehrung des Potenzierens, wobei zu dem gegebenen Potenzwert und der gegebenen Basis der Exponent gesucht wird.

$$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$$

$$(a, b \in R;\ a, b > 0;\ b \neq 1)$$

$$b^{\log_b a} = a;\ \log_b (b^a) = a;\ \log_b (b^{-a}) = -a$$

Dekadische (gemeine, Briggssche) Logarithmen

Basis 10 *Schreibweise:* $\log_{10} = \lg$

$$\lg a = x \Leftrightarrow a = 10^x$$

Natürliche Logarithmen

$$\text{Basis } \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = 2{,}718\,281\,828\,459 \ldots$$

Schreibweise: $\log_{\mathrm{e}} = \ln$

$$\ln a = x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = a$$

Zusammenhang der Logarithmensysteme

$$\log_b a = \log_c a \frac{1}{\log_c b} = \log_c a \log_b c$$

Der Umrechnungsfaktor $\frac{1}{\log_c b} = \log_b c$ heißt **Modul.**

Zusammenhang zwischen den dekadischen und den natürlichen Logarithmen

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \ln a \lg \mathrm{e}$$

$$\frac{1}{\ln 10} = \lg \mathrm{e} = \mathrm{M}_{10} = 0{,}43429 \ldots$$

ist der *Modul der dekadischen Logarithmen.*

$$\ln a = \lg a \ln 10$$

$$\ln 10 = \frac{1}{\mathrm{M}_{10}} = 2{,}30259 \ldots$$

ist der *Modul der natürlichen Logarithmen.*

1.5.2. Logarithmengesetze

$\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c$	$\lg (ac) = \lg a + \lg c$ $\ln (ac) = \ln a + \ln c$
$\log_b \dfrac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$	$\lg \dfrac{a}{c} = \lg a - \lg c$ $\ln \dfrac{a}{c} = \ln a - \ln c$
$\log_b (a^n) = n \log_b a$	$\lg (a^n) = n \lg a$ $\ln (a^n) = n \ln a$
$\log_b \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \log_b a$	$\lg \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \lg a$ $\ln \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \ln a$

Sonderfälle

$$\log_b b = 1; \quad \log_b 1 = 0;$$

(Logarithmen von komplexen und negativen Zahlen siehe S. 15)

1.5.3. Bestimmung von dekadischen Logarithmen aus Logarithmentafeln

Jeder dekadische Logarithmus besteht aus zwei Teilen, der *Kennziffer* und der durch ein Komma von ihr getrennten *Mantisse.*
Die Kennziffer eines unechten Dezimalbruches mit n Stellen vor dem Komma ist $n - 1$.
Die Kennziffer eines echten Dezimalbruches ist negativ, und zwar gleich der Anzahl der vorn stehenden Nullen, wobei die Null vor dem Komma mitgerechnet wird.

Beispiele:

$$\lg 3745 = 3,\ldots \qquad \lg 75 = 1,\ldots$$

$$\lg 4 = 0,\ldots \qquad \lg 0{,}0073 = 0,\ldots -3$$

Die Mantissen sind Logarithmentafeln zu entnehmen.
Hat der Numerus eine Ziffer mehr, als die Tafel aufweist, so ist die abzulesende Mantisse für die folgende Ziffer durch *Interpolation* zu erhöhen:

$$\text{Mantissenzuwachs } d = \frac{Dn}{10},$$

wobei D die Tafeldifferenz (Differenz zwischen dem bereits erfaßten Mantissenwert und dem folgenden) und n die noch zu erfassende Ziffer bedeutet.

Beispiele:

$$\lg 37\,489 = 4{,}57391; \quad \text{denn} \quad \begin{aligned} \lg 37\,480 &= 4{,}57380 \\ \lg 37\,490 &= 4{,}57392 \end{aligned}$$

Tafeldifferenz $D = 12$, die noch zu erfassende Ziffer $n = 9$, somit Mantissenzuwachs

$$d = \frac{Dn}{10} = \frac{12 \cdot 9}{10} = 10{,}8 \approx \underline{\underline{11}}$$

demnach

$$\begin{aligned} \lg 37\,489 = {} & 4{,}57380 \\ & \quad\;\; 11 + \\ \hline & \underline{\underline{4{,}57391}} \end{aligned}$$

$$\lg 0{,}12367 = 0{,}09227 - 1 \qquad \begin{aligned} D &= 35 \\ n &= 7 \\ d &= \frac{35 \cdot 7}{10} \approx \underline{\underline{25}} \end{aligned}$$

Der Mantissenzuwachs kann auch aus den in jeder Logarithmentafel angegebenen *Proportionaltafeln* direkt abgelesen werden.

Aufsuchen des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus: Aus der Kennziffer ergibt sich sofort die Stellung des Kommas im Numerus. Steht die zugehörige Mantisse zufällig in der Tafel, so können die Ziffern unmittelbar abgelesen werden. Sonst sind die Ziffern des nächstkleineren Mantissenwertes abzulesen und aus dem Mantissenzuwachs d und der Tafeldifferenz D die folgende Ziffer n zu errechnen:

$$n = \frac{d \cdot 10}{D}$$

Auch hierbei ist die Benutzung der Proportionaltafel vorteilhaft.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \lg x &= 3{,}59814 \\ x &= 3964{,}1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= 1 \\ D &= 11 \\ n &= \frac{1 \cdot 10}{11} \approx \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\lg x = 0{,}99637 - 3 \qquad d = 3$$

$$x = 0{,}0099168 \qquad D = 4$$

$$n = \frac{3 \cdot 10}{4} \approx \underline{\underline{8}}$$

1.6. Kombinatorik

1.6.1. Permutationen

Definition

Permutationen von n Elementen sind die Anordnungen (Komplexionen) aller n Elemente in jeder möglichen Reihenfolge. Vertauscht man in einer Permutation von n verschiedenen Elementen zwei Elemente miteinander, so hat man eine *Transposition* ausgeführt. Jede Permutation von n verschiedenen Elementen kann in eine andere durch aufeinanderfolgende Transpositionen überführt werden.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Permutationen von n Elementen mit Wiederholung

Unter den Elementen befinden sich je r, s, t gleiche Elemente:

$$P_{r,s,t}(n) = \frac{n!}{r!\, s!\, t!}$$

Unter den Elementen befinden sich je r und $(n - r)$ gleiche Elemente:

$$P_{r,n-r}(n) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Beispiele:

Wieviel verschiedene fünfstellige ganze Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 3, 5, 5 bilden?

$$P_{2,2}(5) = \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30$$

Wieviel verschiedene sechsstellige ganze Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 1, 4, 4, 4, 4 bilden?

$$P_{2,4}(6) = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 = \binom{6}{2}$$

Inversion

Definition

Werden Elemente in einer bestimmten Anordnung permutiert, dann bilden zwei Elemente der Permutation eine *Inversion*, wenn die Reihenfolge gegenüber der ursprünglichen Reihenfolge umgekehrt ist.

Beispiel:

Ursprüngliche Anordnung 4, 5, 6, 7, 8
permutiert 8, 4, 6, 5, 7
In dieser Permutation bilden die Elemente 8 und 4
8 und 6
8 und 5
8 und 7
6 und 5
je eine Inversion, also insgesamt fünf Inversionen.
Eine Permutation heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem, ob sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen aufweist.
Anzahl der möglichen geraden Permutationen von n verschiedenen Elementen = Anzahl der möglichen ungeraden Permutationen = $\frac{n!}{2}$.

1.6.2. Variationen

Definition

Anordnungen, die aus n gegebenen Elementen nur eine bestimmte Anzahl r in allen möglichen Reihenfolgen enthalten, heißen Variationen.
Schreibweise: $V_r(n)$ bedeutet Variationen von n Elementen zur r-ten Klasse.

Variationen von n Elementen zur r-ten Klasse ohne Wiederholung

Jedes Element kommt in einer Variation nur einmal vor.

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r}\cdot r!$$

Beispiel:

Wieviel Würfe mit verschiedenen Augen sind mit drei Würfeln möglich?

$$V_3(6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Variationen von n Elementen zur r-ten Klasse mit Wiederholung

Jedes Element kann in einer Variation mehrfach vorkommen.

$$V_r^w(n) = n^r$$

Beispiel:

Wieviel Möglichkeiten bestehen beim Ausfüllen eines Sporttotoscheines?

$$n = 3 \quad \text{(gewonnen, verloren, unentschieden)}$$

$$r = 12$$

$$V_{12}^w(3) = 3^{12} = 531\,441$$

1.6.3. Kombinationen

Erklärung

Anordnungen, die aus n gegebenen Elementen eine bestimmte Anzahl r in beliebiger Reihenfolge enthalten, wobei jedoch keine Umstellungen (Permutationen) innerhalb dieser Zusammenstellung statthaft sind, heißen Kombinationen.

Schreibweise: $C_r(n)$ bedeutet Kombinationen von n Elementen zur r-ten Klasse.

Kombinationen von n Elementen zur r-ten Klasse ohne Wiederholung

Jede Kombination darf dasselbe Element nur einmal enthalten.

$$C_r(n) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{V_r(n)}{P(r)} \qquad n \geqq r$$

Beispiel:

Wieviel Möglichkeiten gibt es beim Durchkreuzen von fünf Zahlen im Zahlenlotto?

$$n = 90; \quad r = 5$$

$$C_5(90) = \binom{90}{5} = 43\,949\,268$$

Kombinationen von n Elementen zur r-ten Klasse mit Wiederholung

Jede Kombination darf dasselbe Element mehrfach enthalten.

$$C_r^w(n) = \binom{n+r-1}{r}$$

Beispiel:

Wie oft lassen sich die fünf Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 zur dritten Klasse mit Wiederholung kombinieren?

$$C_3^w(5) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$$

1.7. Prozentrechnung, Zinsrechnung

1.7.1. Prozentrechnung (Promillerechnung)

Definition

$$1\,\% \text{ (vom Hundert)} = \frac{1}{100} \text{ des Grundwertes}$$

$$p\,\% \text{ (vom Hundert)} = \frac{p}{100} \text{ des Grundwertes}$$

Entsprechend für die Promillerechnung:

$$1\,‰ \text{ (vom Tausend)} = \frac{1}{1000} \text{ des Grundwertes}$$

$$p\,‰ \text{ (vom Tausend)} = \frac{p}{1000} \text{ des Grundwertes}$$

Für den Prozentwert P, den Prozentsatz p und den Grundwert G gilt:

$$P:p = G:100$$

Prozent „auf" und „in" Hundert

$$p\,\% \text{ a.H.} \mathrel{\widehat{=}} \frac{100\cdot p}{100+p}\,\% \text{ v.H.}$$

$$p\,\% \text{ i.H.} \mathrel{\widehat{=}} \frac{100\cdot p}{100-p}\,\% \text{ v.H.}$$

Beispiel:

Die Materialverluste bei einer bestimmten Fertigung seien 23% vom Rohgewicht. Das entspricht, vom Fertigerzeugnis aus betrachtet, einem Verlust von 23% i.H. $= \frac{100\cdot 23}{77}\,\% = \underline{\underline{29{,}9\,\%\text{ v.H.}}}$

Beispiel:

Durch Zuschlag von 15% auf den Herstellerabgabepreis errechnet sich der Großhandelspreis. Das sind 15% a.H. des Großhandelspreises bzw. $\frac{100\cdot 15}{100+15}\,\% = 13\,\%$ v.H. des Großhandelspreises.

1.7.2. Zinsrechnung

Bezeichnungen

z Zinsen
b Grundbetrag
p Zinsfuß
t Zeit

Berechnung der Zinsen

$$z = \frac{bpt}{100} \text{ bzw. } z = \frac{bpt}{100 \cdot 12} \text{ bzw. } z = \frac{bpt}{100 \cdot 360}$$

(t in Jahren bzw. Monaten bzw. Tagen)

Berechnung des Grundbetrages

$$b = \frac{100z}{pt} \text{ bzw. } b = \frac{100 \cdot 12z}{pt} \text{ bzw. } b = \frac{100 \cdot 360z}{pt}$$

(t in Jahren bzw. Monaten bzw. Tagen)

Berechnung des Zinsfußes

$$p = \frac{100z}{bt} \text{ bzw. } \frac{100 \cdot 12z}{bt} \text{ bzw. } \frac{100 \cdot 360z}{bt}$$

(t in Jahren bzw. Monaten bzw. Tagen)

Berechnung der Zeit

$$t = \frac{100z}{bp} \text{ bzw. } \frac{100 \cdot 12z}{bp} \text{ bzw. } \frac{100 \cdot 360z}{bp}$$

(t in Jahren bzw. Monaten bzw. Tagen)

Zinszahl und Zinsdivisor

Bei Berechnung der Zinsen nach Tagen gilt

$$z = \frac{N}{D}, \quad \text{wobei} \quad N = \frac{bt}{100} \text{ die } \textit{Zinszahl}$$

$$\text{und} \quad D = \frac{360}{p} \text{ der } \textit{Zinsdivisor} \text{ ist.}$$

1.8. Folgen und Reihen

1.8.1. Allgemeines

Definition

Unter einer *Zahlenfolge* versteht man eine geordnete Menge von Zahlen. Eine reelle Zahlenfolge $\{a_k\}$ ist eine eindeutige Abbildung

der Menge der natürlichen Zahlen $k \in N$ auf eine Teilmenge der reellen Zahlen R, wobei die Beibehaltung der Reihenfolge gefordert wird.
Eine reelle Zahlenfolge ist eine reelle Funktion mit N bzw. einer Teilmenge von N als Definitionsbereich.

Schreibweise für Zahlenfolge: $\{a_k\}$ $a_k \in R$ Bilder
$k \in N$ Urbilder

Die Urbilder k heißen auch Indizes der Glieder der Folge.
Die Bilder a_k heißen auch Glieder der Folge.

Darstellungen

Wortdarstellung: z.B.: Jeder natürlichen Zahl k wird ihr Quadrat zugeordnet.

Analytische Darstellungen

unabhängige Darstellung: $a_k = f(k)$

z.B. $a_k = k^2$ für $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (endliche Folge)
$k \in N$ (unendliche Folge)

Die unabhängige Darstellung gibt das allgemeine Glied an und stellt eine Funktionsgleichung dar.
Rekursive Darstellung: $a_k = f(a_{k-1})$ mit Angabe des ersten Gliedes a_1
tabellarische Darstellung: $\{a_k\} = 1; 4; 9; 16; \ldots$
Endliche Folgen brechen nach dem letzten Glied a_n ab bzw. alle $a_k = 0$ für $k > n$, $k \in N$.
Schreibweise: $\{a_k\} = a_1; a_2; \ldots; a_n$ bzw. $a_k = f(k)$ für $k = 1; 2; 3; \ldots; n$
Unendliche Folgen haben kein letztes Glied, d.h., zu jedem $k \in N$ gibt es ein $k' > k$; für das $a_{k'} \neq 0$ ist.
Schreibweise: $\{a_k\} = a_1; a_2; a_3; \ldots$ bzw. $a_k = f(k)$ für $k \in N$
Eine *Teilfolge* entsteht, wenn man in einer unendlichen Folge endlich oder unendlich viele Glieder wegläßt, wodurch aber immer noch eine unendliche Folge verbleibt.

z.B. $a_k = k$ $k \in N$ $\{a_k\} = 1; 2; 3; \ldots$

Teilfolge $b_k = a_{2k}$ $\{b_k\} = 2; 4; 6; \ldots$

Differenzenfolge: Zu $\{a_k\}$ ist $\{d_k\}$ die Differenzenfolge, wenn
$d_k = a_{k+1} - a_k$ $k \in N$

Quotientenfolge: Zu $\{a_k\}$ ist $\{q_k\}$ die Quotientenfolge, wenn

$$q_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} \qquad k \in N$$

Partialsummenfolge: Zu $\{a_k\}$ ist $\{s_k\}$ die Partialsummenfolge, wenn $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$

Positiv definite Folge: Alle $a_k > 0$ in $\{a_k\}$

Negativ definite Folge: Alle $a_k < 0$ in $\{a_k\}$

Alternierende Folge: Abwechselnde Vorzeichen in $\{a_k\}$; $q_k < 0$; $a_k a_{k+1} < 0$

Monoton steigende Folge: $a_{k+1} \geqq a_k$

Monoton fallende Folge: $a_{k+1} \leqq a_k$

Streng monoton steigende Folge: $a_{k+1} > a_k$

Streng monoton fallende Folge: $a_{k+1} < a_k$

Konstante Folge: $a_k = a_{k+1} =$ konst.

Beschränkte Folge: Die Glieder der Folge liegen zwischen einer unteren (S) und oberen (T) Schranke der Folge. $S, T \in R$

Nullfolge:

Eine Nullfolge liegt vor, wenn in $\{a_k\}$ bei genügend großem k die Glieder der Folge gegen Null gehen und sich nicht wieder entfernen.

1.8.2. Arithmetische Folgen

Definition

Arithmetische Folgen weisen eine konstante Differenzenfolge auf.

Arithmetische Folge 1. Ordnung

$$\{x_k\} = a_1;\ (a_1 + d);\ (a_1 + 2d);\ (a_1 + 3d);\ \ldots;\ a_n;$$

$\{\Delta x_k\} = d, d, \ldots$ (konstante Differenzenfolge)

a_1 Anfangsglied — n Anzahl der Glieder

a_n n-tes Glied (Endglied) — d Differenz = konstant

Bildungsgesetz der arithmetischen Folge 1. Ordnung $\{x_k\}$:

unabh. Darst. $a_k = a_1 + (k - 1)\, d$ für $k \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}$

rekursive Darst. $a_{k+1} = a_k + d$

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

Summenformel für die arithmetische Folge 1. Ordnung $\{x_k\}$:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{und} \quad s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)\, d]$$

Beispiele:
Summe der n ersten natürlichen Zahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der n ersten geraden Zahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

Summe der n ersten ungeraden Zahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Interpolation einer arithmetischen Folge 1. Ordnung

Einschalten von m Gliedern zwischen zwei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge mit der Differenz d ergibt eine neue arithmetische Folge mit der Differenz $d_1 = \frac{d}{m+1}$.

Arithmetische Folgen höherer Ordnung

Eine arithmetische Folge k-ter Ordnung liegt vor, wenn erst die k-te Differenzenfolge konstante Glieder aufweist.

Beispiel:

$\{x_k\} = 2;$	$3;$	$8;$	$18;$	$36;$	$67;$	$118;$	$\ldots$	
$\{\Delta x_k\} =$	1	5	10	18	31	51	$\ldots$	1. Differenzenfolge
$\{\Delta^2 x_k\} =$	4	5	8	13	20	$\ldots$		2. Differenzenfolge
$\{\Delta^3 x_k\} =$	1	3	5	7	$\ldots$			3. Differenzenfolge
$\{\Delta^4 x_k\} =$	2	2	2	$\ldots$				4. Differenzenfolge konstant

Die Ausgangsfolge ist eine Folge 4. Ordnung.

Bildungsgesetze für arithmetische Folgen höherer Ordnung

$$a_k = b_2(k-1)^2 + b_1(k-1) + b_0$$

arithmetische Folge 2. Ordnung

$$a_k = b_3(k-1)^3 + b_2(k-1)^2 + b_1(k-1) + b_0$$

arithmetische Folge 3. Ordnung

$$\vdots$$

$$a_k = b_m(k-1)^m + b_{m-1}(k-1)^{m-1} + \cdots + b_0$$

arithmetische Folge m-ter Ordnung

für $k \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}$

Beispiele:

Summe der n ersten Quadratzahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Summe der n ersten Kubikzahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$$

1.8.3. Geometrische Folgen und Reihen

Definition

Geometrische Folgen weisen für den Quotienten zweier beliebiger benachbarter Glieder einen konstanten Wert auf.

Endliche geometrische Folge $\{x_k\}$

$\{x_k\} = a_1; a_1q; a_1q^2; \ldots; a_n$

a_1 Anfangsglied — n Anzahl der Glieder

a_n n-tes Glied (Endglied) — q Quotient

Für $q > 1$ ist die Folge steigend;
für $0 < q < 1$ ist die Folge fallend;
für $q < 0$ ist die Folge alternierend (abwechselnde Vorzeichen);
für $q = 1$ enthält die Folge gleicher Glieder.

Bildungsgesetz der geometrischen Folge

unabh. Darst. $a_k = a_1q^{k-1}$ für $k \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}$

rekursive Darst. $a_{k+1} = a_k \cdot q$

$a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$

Summenformeln

Für $q \neq 1$ gilt:

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Für $q = 1$ gilt: $s_n = a_1 n$

Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = s \quad \text{für} \quad |q| < 1$$

Interpolation der geometrischen Folge

Einschalten von m Gliedern zwischen zwei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge mit dem Quotienten q ergibt eine neue geometrische Folge mit dem Quotienten $q_1 = \sqrt[m+1]{q}$.

Vorzugszahlen

Vorzugszahlen in der Standardisierung bilden angenähert geometrische Folgen, die dem Dezimalsystem angepaßt sind. Stufensprung $\varphi = \sqrt[k]{10}$, wobei k der Index der Grundreihe ist und $k - 1$ die zwischen zwei Zehnerpotenzen eingeschalteten Glieder angibt.

Beispiel:

Wie groß ist der Stufensprung bei R 20? $\varphi = \sqrt[20]{10} = 1{,}120$. Damit lautet die Folge R 20: 10; 11,2; 12,5; 14,0; 16,0; 18,0 usw. Die Werte wurden für den technischen Gebrauch gerundet.

1.8.4. Zinseszinsrechnung

Bezeichnungen

b_n Endbetrag
b_0 Grundbetrag, Barwert
n Anzahl der Zinsabschnitte
p Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$ Zinsfaktor
r Rate, regelmäßige Zahlung

Endbetrag bei Zinszuschlag am Ende eines jeden Jahres

$$b_n = b_0 q^n \quad (n \text{ bedeutet die Anzahl der Jahre})$$

Endbetrag bei Zinszuschlag halbjährlich, vierteljährlich usw.

halbjährlich: relativer Zinsfuß $= \frac{p}{2}$; demnach $q = 1 + \frac{p}{200}$

vierteljährlich: relativer Zinsfuß $= \frac{p}{4}$; demnach $q = 1 + \frac{p}{400}$

usw.

In der Formel $b_n = b_0 q^n$ bedeutet hier n die Anzahl der Halbjahre, Vierteljahre usw.

Berechnung des Grundbetrages (*Barwertes*)

$$b_0 = \frac{b_n}{q^n}$$

Berechnung des Barwertes heißt *Diskontieren.*
Berechnung des Zinsfußes

$$\textit{Zinsfaktor } q = \sqrt[n]{\frac{b_n}{b_0}}$$

Aus q ergibt sich $p = 100(q - 1)$
Berechnung der Zinsabschnitte n

$$n = \frac{\lg b_n - \lg b_0}{\lg q}$$

Endbetrag regelmäßiger Zahlungen

$$b_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$ für Zahlungen am Ende des Jahres (*nachschüssig, postnumerando*)

$$b_n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$ für Zahlungen am Anfang des Jahres (*vorschüssig, pränumerando*)

1.8.5. Rentenrechnung

Endbetrag der n-mal *vorschüssig* zahlbaren Zeitrente r

$$b_n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

Endbetrag der n-mal *nachschüssig* zahlbaren Zeitrente r

$$b_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

Barwert der n-mal *vorschüssig* zahlbaren Zeitrente r

$$b_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}$$

Barwert der n-mal *nachschüssig* zahlbaren Zeitrente r

$$b_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$$

Berechnung der Rentenhöhe aus Endbetrag bzw. Grundbetrag (*nachschüssig*)

$$r = \frac{b_n(q - 1)}{q^n - 1}$$

$$r = \frac{b_0 q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

Berechnung der Rentenhöhe aus Endbetrag bzw. Grundbetrag (*vorschüssig*)

$$r = \frac{b_n (q-1)}{q(q^n - 1)}$$

$$r = \frac{b_0 q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$$

Berechnung der Zeit aus Endbetrag bzw. Grundbetrag

$$n = \frac{\lg [b_n (q-1) + r] - \lg r}{\lg q} \quad \text{für Postnumerandozahlungen}$$

$$n = \frac{\lg [b_n (q-1) + rq] - \lg (rq)}{\lg q} \quad \text{für Pränumerandozahlungen}$$

$$n = \frac{\lg r - \lg (r + b_0 - b_0 q)}{\lg q} \quad \text{für Postnumerandozahlungen}$$

$$n = \frac{\lg r + \lg q - \lg (b_0 + rq - b_0 q)}{\lg q} \quad \text{für Pränumerandozahlungen}$$

Barwert einer *ewigen Rente*

$$b_0 = \frac{r}{q-1} \quad \text{(nachschüssige Rente)}$$

$$b_0 = \frac{rq}{q-1} \quad \text{(vorschüssige Rente)}$$

Barwert regelmäßiger Zahlungen von r (in Mark)

$$b_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n (q-1)} \quad \text{für Zahlungen am Ende des Jahres}$$

$$b_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)} \quad \text{für Zahlungen am Anfang des Jahres}$$

Endbetrag eines Grundbetrags bei regelmäßigen Einzahlungen und Abhebungen von r (in Mark)

$$b_n = b_0 q^n + \frac{r(q^n - 1)}{q-1} \quad \text{bei Einzahlungen am Ende des Jahres}$$

$$b_n = b_0 q^n + \frac{rq(q^n - 1)}{q-1} \quad \text{bei Einzahlungen am Anfang des Jahres}$$

$$b_n = b_0 q^n - \frac{r(q^n - 1)}{q-1} \quad \text{bei Abhebungen am Ende des Jahres}$$

$$b_n = b_0 q^n - \frac{rq(q^n - 1)}{q-1} \quad \text{bei Abhebungen am Anfang des Jahres}$$

Tilgung einer Schuld (eines Darlehens, einer Anleihe)

$$\textit{Annuität } A = \frac{b_0 q^n (q-1)}{q^n - 1}, \quad b_0 \text{ Schuldsumme}$$

Tilgungsfuß (Prozentsatz, mit dem die Schuldsumme getilgt wird)

$$i = \frac{p}{q^n - 1}, \quad p \text{ Zinsfuß der Verzinsung,} \quad i = \frac{100\,A}{b_0} - p$$

$$\textit{Tilgungsdauer} \quad n = \frac{\lg\left(1 + \frac{p}{i}\right)}{\lg q}$$

Stetige (*organische*) Verzinsung eines Grundbetrages b_0 in n Jahren

$$b_n = b_0 e^{\frac{pn}{100}}$$

Entsprechend gilt für stetige Abnahme

$$b_n = b_0 e^{-\frac{pn}{100}}$$

Organisches Wachsen

$$w = b_0 e^{\alpha t} \qquad \begin{array}{ll} \alpha & \text{Wachstumsintensität} \\ b_0 & \text{Grundbetrag} \end{array}$$

Für $\alpha < 0$ beschreibt das *Wachstumsgesetz* Abklingprozesse (Radioaktiver Zerfall mit $\alpha = -\lambda$; Abkühlung; Kondensatorentladung)

1.9. Determinanten

1.9.1. Allgemeines

Bezeichnungen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}| = \Delta \quad (n\text{-reihige Determinante})$$

Die Zahlen a_{ik} (Anzahl n^2) heißen *Elemente* der Determinante (lies a eins eins, a eins zwei usw.)

Spalten und Zeilen sind gleichberechtigt und heißen *Reihen.*
Horizontalreihen Zeilen (der 1. Index i bei a_{ik} gibt die Zeile an);
Vertikalreihen Spalten (der 2. Index k bei a_{ik} gibt die Spalte an);
Elemente $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ bilden die *Hauptdiagonale*;
Elemente $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots, a_{n1}$ bilden die *Nebendiagonale*;
Produkt der Elemente der Hauptdiagonale = *Hauptglied*

Definition

Unter einer *n-reihigen Determinante* ($n \in N$) versteht man eine quadratische Anordnun g von n^2 willkürlich gegebenen Zahlen. Den *Wert einer n-reihigen Determinante* bestimmt man, indem man jedes Glied a_{ik} einer Reihe mit seiner zugehörigen Unterdeterminante A_{ik} multipliziert und die sich ergebenden Produkte addiert.
Unter der *Unterdeterminante* A_{ik} versteht man die (n — 1)-reihige Determinante, die entsteht, wenn man in der gegebenen Determinante die i-te Zeile und die k-te Spalte streicht. Die *Adjunkte* ist die mit $(-1)^{i+k}$ multiplizierte Unterdeterminante.

Berechnung der zweireihigen Determinante (Definition)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen minus Produkt der Elemente der Nebendiagonalen)

Beispiel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 6 = -10$$

Entwickeln nach den Elementen einer Reihe

Eine Determinante wird nach den Elementen einer Reihe entwickelt, indem die Elemente dieser Reihe mit den zugehörigen Unterdeterminanten multipliziert und die Produkte addiert werden.
Entwickeln nach den Elementen einer Zeile

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Entwickeln nach den Elementen einer Spalte

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Beispiele:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 10 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(Entwickelt nach den Elementen der ersten Zeile)

Die hier auftretenden, mit Vorzeichen versehenen dreireihigen Unterdeterminanten sind mit A_{11}, A_{12}, A_{13} und A_{14} zu bezeichnen.

Regel von Sarrus für dreireihige Determinanten

Man schreibt die ersten beiden Spalten noch einmal rechts neben die Determinante und bildet die Summe der Produkte parallel der Hauptdiagonale (positiv zu nehmen) und parallel der Nebendiagonale (negativ zu nehmen).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ & + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right. = \begin{aligned} & 2\cdot(-2)\cdot 4 + 1\cdot(-3)\cdot 3 + 9\cdot 1\cdot 5 - \\ & - 3\cdot(-2)\cdot 9 - 5\cdot(-3)\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 100 \end{aligned}$$

1.9.2. Determinantengesetze

1. Vertauschen der Zeilen mit den gleichstelligen Spalten (Stürzen der Determinante; Spiegeln an der Hauptdiagonalen) ändert den Wert der Determinante nicht.

   Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 7 & 6 & 3 \\ 13 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

2. Vertauschen von zwei parallelen Reihen ändert das Vorzeichen der Determinante.

   Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 13 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

3. Ein allen Elementen einer Reihe gemeinsamer Faktor kann ausgehoben werden.

   Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 2 & 6 & 9 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

   Umkehrung:

   Die Multiplikation einer Determinante mit einem Faktor kann durch Multiplikation aller Elemente einer beliebigen Reihe mit diesem Faktor ausgeführt werden.

   Beispiel:

$$5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 35 & 13 \\ 4 & 30 & 9 \\ 16 & 15 & 8 \end{vmatrix}$$

4. Eine Determinante hat den Wert 0, wenn
   — die Elemente von zwei parallelen Reihen übereinstimmen,
   — die Elemente einer Reihe zu einer parallelen proportional sind,
   — die Elemente einer Reihe Linearkombinationen der Elemente der parallelen Reihen sind.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 8 & 12 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 2\times\ 1.\,\text{Zeile} + \rightarrow \\ 3\times\ 2.\,\text{Zeile} \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 32 & 53 \end{vmatrix} = 0$$

5. Die Summe der Produkte aus den zu einer Reihe gehörenden Unterdeterminanten und den Elementen einer parallelen Reihe ist Null.

Beispiel:

gegebene Det. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ $\quad A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 21;$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -17$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{11} \cdot a_{12} + A_{21} \cdot a_{22} + A_{31} \cdot a_{32} = 21 \cdot 7 + (-17) \cdot 6 + \\ + (-15) \cdot 3 = 0$$

6. Addition eines Vielfachen der Elemente einer Reihe zu einer parallelen Reihe ändert den Wert der Determinante nicht.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 + 5 \cdot 4 & 3 + 5 \cdot 6 & 8 + 5 \cdot 9 \end{vmatrix}.$$

7. Eine Determinante wird gerändert, indem übereck eine Spalte und eine Zeile angefügt werden, wobei das beiden gemeinsame Element gleich 1, die übrigen Elemente der einen Reihe alle 0, der anderen beliebige Konstanten sind. Der Wert der Determinante ändert sich dabei nicht.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 2 & 7 & 13 \\ 4 & 4 & 6 & 9 \\ -6 & 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

8. Determinanten, die sich nur in einer Reihe unterscheiden, werden addiert, indem in der Summendeterminante die Elemente dieser unterschiedlichen Reihen addiert werden, alle übrigen erhalten bleiben.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 6 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 5 & -2 & 9 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 9 & 4 & 18 \\ 16 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

9. Determinanten werden multipliziert, indem die Elemente der Spalten der einen mit denen der Zeilen der anderen linear kombiniert werden.

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = \varDelta_1 \varDelta_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32} & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Bei Multiplikation von vier- und mehrreihigen Determinanten ist entsprechend zu verfahren (lineare Kombination der Spalten von $\varDelta_1$ mit denen von $\varDelta_2$).

Vandermondesche Determinante (*Potenzdeterminante*)

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \\ &\cdot (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) \\ &\cdot (a_4 - a_3)(a_5 - a_3) \dots (a_n - a_3) \\ &\dots \\ &\cdot (a_n - a_{n-1}) = \end{aligned}$$

$$= \prod (a_r - a_s) \quad \text{für alle } r > s \text{ von } 1 \text{ bis } n.$$

Erläuterung: $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$

Berechnungsbeispiel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 12 & 8 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

Gemeinsamer Faktor der Zeile 2 ausgeklammert

$$= 4 \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

Zeile 2 zu Zeile 1 addiert — Spalte 2 von Spalte 3 subtrahiert

$$= 4(-8) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} + 4(-6) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

Entwickelt nach den Elementen der ersten Zeile

$$= -32 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} - 24 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

Spalte 3 von Spalte 2 subtrahiert — Spalte 1 zu Spalte 2 addiert

$$= -32 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 24 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} =$$

3 ausgeklammert — Doppelte Spalte 1 zu Spalte 3 addiert

$$= -96\,(-1) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 96 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 24(-1) \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 96\,(5 + 2) - 192\,(2 - 5) + 24\,(96 - 28) = 2880$$

1.9.3. Lösung eines Gleichungssystems mittels Determinanten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}$$

Koeffizientendeterminante Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bei den Zählerdeterminanten Δx_i ersetzt man in der Koeffizientendeterminante die Koeffizienten von x_i durch die absoluten Glieder c_k.

Hauptfall 1: $\Delta \neq 0$; Δx_i beliebig, System eindeutig lösbar:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \textbf{(Cramersche Regel)}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 7 \\ 2x - 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y - z &= 12 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 17 & -3 & -1 \\ 12 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 17 & -1 \\ 12 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(15 - 2) + 1(-85 + 12) = 18$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12 \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{18}{6} = 3 \quad y = \frac{-12}{6} = -2 \quad z = \frac{6}{6} = 1$$

d.h., $E = \{3; -2; 1\}$

Hauptfall 2: $\Delta = 0$

alle $\Delta x_i = 0$ — unendliche Lösungsmenge, da höchstens $n - 1$ unabhängige Gleichungen

nicht alle $\Delta x_i = 0$, A_{ik} beliebig, — Widerspruch in den Gleichungen, Lösungsmenge $E = \emptyset$

1.10. Matrizen

1.10.1. Allgemeines

Bezeichnungen:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{(m,n)} \ (m, n\text{-Matrix});\ m, n \in N$$

Die Zahlen a_{ik} heißen Elemente der Matrix (lies *a* eins eins, *a* eins zwei usw.). Der erste Index gibt stets die Zeile, der zweite die Spalte an. Die Elemente können reell, komplex oder von einem Parameter abhängig sein.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten heißt m, n-Matrix und ist vom Typ (m, n). Die Bedingung $m = n$ wie bei Determinanten besteht nicht.

$m \neq n$ *rechteckige* Matrix, $m = n$ *quadratische* Matrix. Bei einer quadratischen Matrix bilden die Glieder $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mn}$ die *Hauptdiagonale.*

Matrizen mit nur einer Zeile oder Spalte bezeichnet man als *Vektoren.*

Matrix der Menge der Elemente einer Horizontalreihe = Zeile: *Zeilenvektor* $\mathfrak{a}^i$ (lies: *a* oben *i*)

$$\mathfrak{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),\ \text{Typ } (1, n)$$

Dabei ist i in $\mathfrak{a}^i$ ein Index, der bei Zeilenvektoren üblicherweise hochgesetzt wird.

Menge der Elemente einer Vertikalreihe = Spalte: *Spaltenvektor* $\mathfrak{a}_k$ (lies: a unten k)

$$\mathfrak{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad \text{Typ}\,(m, 1)$$

Schreibweise einer Matrix mit Zeilen- oder Spaltenvektoren:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^1 \\ \mathfrak{a}^2 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}^m \end{pmatrix} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$$

Definition

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ Elementen (m Zeilenvektoren, n Spaltenvektoren), die in runde Klammern eingeschlossen sind. Sie hat keinen Zahlenwert. (Anstatt Klammern können auch Doppelstriche stehen.)

Bei einer *Nullmatrix* sind alle Elemente Null, ebenso bei *Nullvektoren.*

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Festlegung: Eine Matrix ändert ihre Aussage nicht, wenn am rechten oder unteren Rand Nullvektoren zugefügt werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei einer quadratischen *Diagonalmatrix* verschwinden alle Glieder außerhalb der Hauptdiagonalen.

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_m \end{pmatrix} = (\delta_{ik} d_i) = (\delta_{ik} d_k) \qquad \delta_{ik} \text{ s. S. 47}$$

Sonderfall

Einheitsmatrix

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\mathfrak{d}_{ik})$$

Kronecker-Symbol

$$\mathfrak{d}_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$$

Bei quadratischen *Dreiecksmatrizen* ist für eine
obere Dreiecksmatrix $a_{ik} = 0$ für $i > k$
untere Dreiecksmatrix $a_{ik} = 0$ für $i < k$

Beispiele:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix untere Dreiecksmatrix

Eine *Unterdeterminante k-ten Grades* von $\mathfrak{A}$ entsteht, wenn man in der Matrix $\mathfrak{A}$ so viele Zeilen und Spalten streicht, daß eine quadratische Matrix von k Zeilen und k Spalten übrigbleibt, aus deren Elementen die Determinante gebildet wird.

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Unterdeterminanten 4. Grades

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Unterdeterminanten 3. Grades

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Unterdeterminanten 2. Grades

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Ist eine Matrix quadratisch, kann man direkt die Determinante aus allen Elementen bilden (det $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|$).
Die höchste, r-reihige, von Null verschiedene Unterdeterminante (r-ter Ordnung) bestimmt den *Rang* r der Matrix, d. h., alle Unterdeterminanten $(r + 1)$-ter Ordnung mit $r + 1$ Zeilen und $r + 1$ Spalten sind Null.
Durch Linearkombination von Zeilen und Spalten ändert sich der Rang einer Matrix nicht.

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch Linearkombination der 1. und 3. Spalte erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alle Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden, da drei von ihnen in der ersten Spalte nur Elemente 0 besitzen und die vierte durch Linearkombination der 1. und 2. Spalte zwei gleiche Spalten aufweist.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Da eine der Unterdeterminanten zweiten Grades, z. B. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ ungleich Null ist, hat die Matrix den Rang $r = 2$.
Die Lösung ist mit dem verketteten Gaussschen Algorithmus durchführbar (siehe z. B. „Ausgewählte Kapitel der Mathematik").
Für den Rang r einer Matrix gilt:
bei quadratischen Matrizen:

reguläre Matrix $\quad r = n = m$; det $\mathfrak{A} \neq 0$
singuläre Matrix $\quad r < n$; $\quad$ det $\mathfrak{A} = 0$

Defekt, Rangabfall, Nullität $d = n - r$

bei nicht quadratischen Matrizen:

$$m > n \Rightarrow r \leqq n$$

spaltenregulär für $r = n$

$$m < n \Rightarrow r \leqq m$$

zeilenregulär für $r = m$

Aus $r = n$ bzw. $r = m$ folgt die Unabhängigkeit der Vektoren einer Matrix.

1.10.2. Matrizengesetze

Gegeben: (m, n)-Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})$.

Gleichheit von Matrizen

$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, wenn alle $a_{ik} = b_{ik}$.

Summe zweier Matrizen

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (a_{ik} + b_{ik})$$

Einander entsprechende Glieder werden addiert.

Kommutatives Gesetz $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$

Assoziatives Gesetz $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

$$\mu\mathfrak{A} = (\mu a_{ik}) = \mathfrak{A}\mu$$

Distributive Gesetze $\lambda(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \lambda\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B}$

$(\lambda \pm \mu)\,\mathfrak{A} = \lambda\mathfrak{A} \pm \mu\mathfrak{A}$

Assoziatives Gesetz $\mu(\lambda\mathfrak{A}) = (\mu\lambda)\,\mathfrak{A} = \mu\lambda\mathfrak{A}$

Limes einer Matrix $\mathfrak{A}(t)$

Hängt eine Matrix von einem Parameter t ab, $\mathfrak{A}(t)$, versteht man unter der *Grenzmatrix* diejenige Matrix, bei der an jedem Glied der Grenzübergang $t \to t_0$ vollzogen ist.

$$\lim_{t \to t_0} \mathfrak{A}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} a_{ik}(t)\right)$$

Differentialquotient einer Matrix $\mathfrak{A}(t)$

Die Elemente werden einzeln differenziert.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathfrak{A}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,a_{ik}(t)\right) \qquad (a_{ik} \text{ differenzierbar})$$

Die Elemente werden einzeln integriert.

$$\int\limits_a^b \mathfrak{A}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int\limits_a^b a_{ik}(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad (a_{ik} \text{ integrierbar})$$

Transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$

Sie entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten. Aus einem Zeilenvektor wird durch Transposition ein Spaltenvektor.

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}) \quad \mathfrak{A}' = (a'_{ik}) \quad a'_{ik} = a_{ki}$$

Ist $\mathfrak{A}$ vom Typ (m, n), so hat $\mathfrak{A}'$ den Typ (n, m).

$$(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A}$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'$$

$$(k\mathfrak{A})' = k\mathfrak{A}' \qquad k \text{ skalarer Faktor}$$

Symmetrische, quadratische Matrix

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \qquad a_{ik} = a_{ki}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Antisymmetrische, quadratische Matrix (schiefsymmetrisch)

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}' \qquad a_{ik} = -a_{ki}$$

(Die Elemente der Hauptdiagonalen müssen verschwinden.)

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Konjugiert komplexe Matrix $\overline{\mathfrak{A}}$

Man ersetzt jedes Element der ursprünglichen Matrix durch sein konjugiert komplexes.

$$\overline{\mathfrak{A}} = (\bar{a}_{ik})$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$$

$$\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}}$$

$$\overline{\mu\mathfrak{A}} = \bar{\mu}\overline{\mathfrak{A}}$$

$$(\overline{\mathfrak{A}})' = (\overline{\mathfrak{A}'})$$

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1+3\mathrm{j} & 2-5\mathrm{j} \\ 5 & 7+2\mathrm{j} \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 1-3\mathrm{j} & 2+5\mathrm{j} \\ 5 & 7-2\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

Man nennt $\overline{\mathfrak{A}}'$ einer quadratischen Matrix *hermitesch*. Für diese gilt

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}'; \qquad \bar{a}_{ik} = a_{ki}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}' = \begin{pmatrix} 2 & 1-2\mathrm{j} & 3+5\mathrm{j} \\ 1+2\mathrm{j} & 3 & 2-\mathrm{j} \\ 3-5\mathrm{j} & 2+\mathrm{j} & 5 \end{pmatrix}$$

(Die Elemente der Hauptdiagonalen müssen reell sein.)

Schief-hermitesch ist eine quadratische Matrix, für die gilt:

$$\mathfrak{A} = -\overline{\mathfrak{A}}'; \qquad a_{ik} = -\bar{a}_{ki}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = -\overline{\mathfrak{A}}' = \begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & 1-2\mathrm{j} & 3+5\mathrm{j} \\ -1-2\mathrm{j} & \mathrm{j} & 2-\mathrm{j} \\ -3+5\mathrm{j} & -2-\mathrm{j} & 5\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

(Die Elemente der Hauptdiagonalen sind imaginär.)

Multiplikation von Zeilen- und Spaltenvektoren (Skalares Produkt)

$$\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \ldots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_1 \\ \vdots \\ a_m b_1 \end{pmatrix}$$

Produkt von Matrizen

Definition

$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \triangleq A \leftarrow B$, Multiplikation $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ in Reihenfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{a}^i\mathfrak{b}_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}\right) = (c_{ik}) \triangleq A \leftarrow B,$$

aber $\mathfrak{B}\mathfrak{A} \triangleq B \leftarrow A$

Das Element c_{ik} ergibt sich als skalares Produkt des Zeilenvektors $\mathfrak{a}^i$ (i-te Zeile) mit dem Spaltenvektor $\mathfrak{b}_k$ (k-te Spalte) $c_{ik} = \mathfrak{a}^i\mathfrak{b}_k$. Voraussetzung: Spaltenzahl von $\mathfrak{A}$ = Zeilenzahl von $\mathfrak{B}$.

Diese Bedingung kann durch Zufügen von Nullvektoren am rechten und unteren Rand erreicht werden (vgl. S. 46).

$$a^1 b^1 = (a_1, a_2, \ldots, a_m)\,(b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m)\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = (a_1 b_1, a_1 b_2, \ldots, a_1 b_n)$$

Merke: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$ bedingt nicht notwendig $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$.
Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{N}$ sowie $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{N}$, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ singulär. Das Matrizenpaar heißt in diesem Fall *Nullteiler*.
aber: $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$.

Produktschemen

$$m\,\overset{n}{\boxed{\mathfrak{A}}} \cdot n\,\overset{p}{\boxed{\mathfrak{B}}} = m\,\overset{p}{\boxed{\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}}}$$

(m, n)-Matrix $\mathfrak{A}$ mal (n, p)-Matrix $\mathfrak{B}$ ergibt die (m, p)-Matrix $\mathfrak{C}$.

Beispiel:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Schema von Falk:

$$\begin{array}{cc|c|c} & & p & \\ \cline{3-3} & n \quad n & \mathfrak{B} & \\ \cline{2-3} m & \mathfrak{A} & \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} & m \\ \cline{2-3} & & p & \end{array}$$

Die Elemente c_{ik} der Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ stehen im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ und der k-ten Spalte von $\mathfrak{B}$ und sind deren skalares Produkt.

Beispiel:

$$
\begin{array}{c|ccc|cc|c}
\multicolumn{1}{c}{} & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{5-6}
\multicolumn{1}{c}{} & & & 3 & 1 & 0 & \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 2 & 3 & \\
\multicolumn{1}{c}{} & & 3 & & 4 & 1 & \\
\cline{2-6}
2 & 1 & 3 & 2 & 15 & 11 & 2 \\
 & 2 & 4 & 1 & 14 & 13 & \\
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{c}{} & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

Zur Kontrolle gestattet das Schema von Falk die *Zeilensummenprobe*

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{c|}{} & \mathfrak{B} & \mathfrak{b} \\
\hline
\mathfrak{A} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{C} & \mathfrak{c} \\
\hline
\end{array}
$$

Man fügt den Zeilensummenvektor $\mathfrak{b}$ als zusätzliche Spalte an und multipliziert skalar mit den Zeilen von $\mathfrak{A}$, d.h., $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, wobei $\mathfrak{c}$ Zeilensummenvektor von $\mathfrak{C}$.

Beispiel:

$$
\begin{array}{|ccc|cc|c|l}
\cline{4-6}
\multicolumn{3}{c|}{} & 1 & 0 & 1 & \\
\multicolumn{3}{c|}{} & 2 & 3 & 5 & \\
\multicolumn{3}{c|}{} & 4 & 1 & 5 & \\
\hline
1 & 3 & 2 & 15 & 11 & 26 & \leftarrow 1\cdot 1+5\cdot 3+5\cdot 2 \\
2 & 4 & 1 & 14 & 13 & 27 & \\
\cline{1-6}
\end{array}
$$

Spaltensummenprobe

$$
\begin{array}{|c|c|}
\cline{2-2}
\multicolumn{1}{c|}{} & \mathfrak{B} \\
\hline
\mathfrak{A} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{C} \\
\hline
\mathfrak{a} & \mathfrak{c} \\
\hline
\end{array}
$$

Beispiel:

			1	0
			2	3
			4	1
1	3	2	15	11
2	4	1	14	13
3	7	3	29	24

$$\uparrow$$
$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4$$

Beide Verfahren lassen sich kombinieren.
Das **kommutative** Gesetz gilt im allgemeinen nicht.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

d.h., bei der Multiplikation einer Matrix $\mathfrak{B}$ von links (vorn) mit einer Matrix $\mathfrak{A}$ erzielt man im allgemeinen ein anderes Ergebnis als bei Multiplikation von rechts (hinten).
Ist bei quadratischen Matrizen $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$, heißen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *vertauschbare* oder *kommutative* Matrizen.

Multiplikation mit der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ bzw. dem Nullvektor $\mathfrak{N}$

Für quadratische Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ von derselben Ordnung gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{N}$$

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}$ spielen bei Matrizen die gleiche Rolle wie 1 und 0 bei Zahlen.

Multiplikation mit der Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$

von rechts

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} = (a_{ik}d_k) = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \dots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \dots & a_{2n}d_n \\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \dots & a_{mn}d_n \end{pmatrix}$$

von links

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = (a_{ik}d_i) = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & \dots & a_{1n}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & \dots & a_{2n}d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}d_n & a_{m2}d_n & \dots & a_{mn}d_n \end{pmatrix}$$

Determinante aus einer quadratischen Matrix det $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|$

$$\det \mathfrak{A}' = \det \mathfrak{A}$$

$$\det (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \det \mathfrak{A} \det \mathfrak{B}$$

Transponierte eines Produktes

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})' = \mathfrak{C}'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$$

Multiplikation von 3 Matrizen

Assoziatives Gesetz $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$

Voraussetzung: (m, n)-Matrix $\mathfrak{A}$, (n, p)-Matrix $\mathfrak{B}$, (p, q)-Matrix $\mathfrak{C}$. Das Ergebnis ist eine (m, q)-Matrix.

Distributives Gesetz $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}$$

Potenzen von Matrizen

Ist $\mathfrak{A}$ eine quadratische Matrix, so wird definiert:

$\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\dots$
(n Faktoren)

$\mathfrak{A}^{-n} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\dots \qquad n \in N$
(n Faktoren)

$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}$

$\mathfrak{A}^n\mathfrak{A}^m = \mathfrak{A}^{n+m} \qquad n, m \in G$

Vertauschungsmatrix $\mathfrak{V}$

Eine Vertauschungsmatrix weist in jeder Zeile und jeder Spalte nur eine 1, sonst lauter Nullen auf und ist quadratisch. Bei der Multiplikation einer Matrix $\mathfrak{A}$ von vorn (links) mit $\mathfrak{V}$ bewirkt eine 1 in der

r-ten Zeile und s-ten Spalte von $\mathfrak{B}$, daß in der Matrix $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ die r-te Zeile mit der s-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ übereinstimmt.

Beispiel:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ r\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} &&\uparrow& \\ &&s& \end{array}\end{array} \begin{pmatrix}1&3&0&2\\2&4&7&3\\3&0&4&1\\5&2&1&1\end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow s \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix}2&4&7&3\\3&0&4&1\\1&3&0&2\\5&2&1&1\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \end{array}$$

Bei der Multiplikation einer Matrix $\mathfrak{A}$ von hinten (rechts) mit $\mathfrak{B}$ bewirkt eine 1 in der r-ten Zeile und s-ten Spalte von $\mathfrak{B}$, daß in der Matrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die s-te Spalte mit der r-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ übereinstimmt.

Beispiel:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix}1&2&4&0\\2&4&6&1\\1&3&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&4&0&1\\4&6&1&2\\3&0&3&1\end{pmatrix}$$

$\mathfrak{B}^{-1}$ macht die durch $\mathfrak{B}$ bewirkte Vertauschung rückgängig. Ersetzt man die 1 in der Vertauschungsmatrix durch eine Zahl p_{ik}, erfolgt zusätzlich eine Multiplikation der vertauschten Zeile oder Spalte mit p_{ik}.

Kehrwertmatrix (reziproke Matrix) $\mathfrak{A}^{-1}$ ($\mathfrak{A}$ quadratisch)

Definition

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E} \Leftrightarrow \mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} \Rightarrow \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A}^{-1} \text{ vertauschbare Matrizen}$$

$\mathfrak{B}$ ist die Kehrwertmatrix zu $\mathfrak{A}$. Die Umkehrung ist eindeutig, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert.
Umkehren lassen sich nur quadratische, nichtsinguläre Matrizen

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{A}\,\mathfrak{A}_{ad} = \frac{1}{A}\,(A_{ki})$$

wobei A_{ki} Unterdeterminanten (s. S. 38)

$$A = \det \mathfrak{A} \neq 0 \text{ (reguläre Matrix)}$$

$\mathfrak{A}_{ad}$ gestürzte Matrix der Adjunkten, *adjungierte Matrix* (in $\mathfrak{A}'$ werden die a_{ki} durch die entsprechende Adjunkte ersetzt).
Für die Berechnung der Kehrmatrix steht der verkettete GAUSSsche Algorithmus zur Verfügung (siehe z. B. „Ausgewählte Kapitel der Mathematik").

Die Elemente der Kehrwertmatrix $b_{ik} = \frac{A_{ki}}{A}$ (beachte die Indizes!) heißen *reduzierte Adjunkten.*

$$(\mathfrak{A}^{-1})^{-1} = \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^{-1} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}^{-1} \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{C} \text{ nicht singulär}$$

$$(\mathfrak{A}')^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})' \qquad (\textit{kontragrediente} \text{ Matrix zu } \mathfrak{A})$$

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A = \det \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1.10.8. Anwendungen

Kontrolle der Lösungsmöglichkeiten von linearen Gleichungssystemen

Ein *inhomogenes Gleichungssystem 1. Grades* aus m Gleichungen mit n Variablen ist nur lösbar, wenn die *Koeffizientenmatrix* und die um die absoluten Glieder erweiterte Matrix gleichen Rang r haben.

$r = n$ eine eindeutige Lösung

$r < n$ ∞^{n-r} Lösungen

Beispiel:

$$3x + 2y + 5z = 10$$
$$6x + 4y + 10z = 30$$
$$12x + 8y + 20z = 40$$

Die Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 12 & 8 & 20 \end{pmatrix}$ hat den Rang $r = 1$ (s. S. 48)

Die erweiterte Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & 4 & 10 & 30 \\ 12 & 8 & 20 & 40 \end{pmatrix}$ hat den Rang $r > 1$, da u.a.

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} \neq 0$$

Das System hat keine Lösungen (die Gleichungen widersprechen einander).
Ein *homogenes Gleichungssystem 1.Grades* aus m Gleichungen in n Variablen hat nur dann eine von der trivialen Lösung (alle Variablen gleich Null) verschiedene Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als n ist.

Weitere Anwendungen

Matrizen werden weiterhin vor allem in der Vierpolberechnung (Widerstands-, Leitwerts-, Ketten- und Reihenparallelmatrix), Berechnung linearer Netzwerke (Maschenberechnung), bei der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen, bei Planungs- und sonstigen ökonomischen Aufgaben verwendet.

2. Gleichungen, Funktionen, Vektorrechnung

2.1. Gleichungen

2.1.1. Allgemeines

Term

Ein Term ist eine aus Zahlen, Buchstaben und mathematischen Zeichen sinnvoll gebildete Folge, die einen bestimmten Zahlenwert annimmt, wenn man die Buchstaben durch im *Definitionsbereich* frei wählbare Zahlen ersetzt.
Bezeichnung von Termen: $T, S, \ldots$
Die Menge der Terme bildet einen Körper.

Besondere Terme

Linearer Term: Die Variablen werden nur mit Konstanten multipliziert und zu Konstanten bzw. gleichartigen Termen (Linearkombination) addiert,

z. B. linearer Term in den Variablen x und y

$$L(x, y) = ax + by + c \qquad a, b, c \text{ Konstanten}$$

Ganzer rationaler Term (Polynom): Die Variablen werden nur mit Addition, Subtraktion und Multiplikation verbunden,
z. B. ganzer rationaler Term in x und y

$$T(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + b_m y^m + \\ + b_{m-1} y^{m-1} + \cdots + b_1 y + a_0 \qquad n, m \in N$$

Rationaler Term: Die Variablen werden mit den vier Grundrechenarten verbunden,
z. B. rationaler Term

$$T(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad n, m \in N$$

Definition der Gleichung:

Durch Gleichsetzen zweier Terme erhält man eine Gleichung

$$T_1 = T_2$$

Eine Gleichung mit mindestens einer *Variablen* stellt eine *Aussageform* dar, die in eine wahre oder falsche *Aussage* übergeht, wenn man den Variablen Werte des *Definitionsbereichs* bzw. *Variablenbereichs* zuordnet.
Eine Gleichung ohne Variablen stellt eine wahre oder falsche *Aussage* dar, z.B. $7 = 3 + 4$, wahre Aussage.
Definitionsbereich einer Gleichung: $X = X_1 \cap X_2$; $Y = Y_1 \cap Y_2$; ... wobei X_1, Y_1, ... Definitionsbereiche für T_1; X_2, Y_2, ... Definitionsbereiche für T_2
Erfüllungen oder Lösungen einer Gleichung sind alle Elemente des Definitionsbereichs, für die $T_1(x; y; \ldots) = T_2(x; y; \ldots)$ eine wahre Aussage wird.
Erfüllungsmenge, Lösungsmenge, Gültigkeitsbereich E (oder L) ist die Menge aller Lösungen, wobei E Untermenge des Definitionsbereichs ist.

Schreibweise:

$$E = \{(x; y; \ldots) \mid T_1(x; y; \ldots) = T_2(x; y; \ldots)\}$$

ohne Angabe des Variablenbereichs, wenn dieser offensichtlich ist.

bzw.

$$E = \{(x; y; \ldots) \mid x \in X; y \in Y; \ldots \wedge T_1(x; y; \ldots) = T_2(x; y; \ldots)\}$$ mit Angabe des Variablenbereichs.

Sonderfälle

Identität, Definition der *Gleichheit von Termen:*

$T_1(x; y; \ldots) = T_2(x; y; \ldots)$ für Erfüllungsmenge = Definitionsbereich

z.B. Gleichung in einer Variablen

$T_1(x) = T_2(x)$ für $E = X$ bzw. in anderer Schreibweise

$$E = \{x \mid x \in X \wedge T_1(x) = T_2(x)\} = X$$

Beispiel:

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $X = K$, d.h. Identität in bezug auf den Körper K

bzw.

$$E = \{x \mid x \in K \wedge \sin 2x = 2 \sin x \cos x\} = K$$

Unerfüllbarkeit $E = \emptyset$

Beispiel:

$$3^x = -4 \qquad X = R \qquad E = \emptyset$$

bzw.

$$E = \{x \mid x \in R \land 3^x = -4\} = \emptyset$$

Linearkombination der Terme T_1 und T_2

$$m_1T_1 + m_2T_2$$

Gleichwertigkeit

Zwei Gleichungen sind gleichwertig (äquivalent) bezüglich des gegebenen Variablenbereichs, wenn sie die gleiche Erfüllungsmenge E besitzen.

$T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 + T = T_2 + T$
T sinnvoller Term im Variablenbereich

$T_1 = T_2 \Rightarrow T_1T = T_2T$; $T \neq 0$ für alle Werte des Variablenbereichs

2.1.2. Algebraische Gleichungen in einer Variablen

Erklärung

Eine Gleichung heißt algebraisch, wenn sie folgende Form hat:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \quad a_i \in R; \quad i \in N$$

Zahlen, die man als Lösungen algebraischer Gleichungen erhalten kann, heißen *algebraisch.*

2.1.2.1. Lineare Gleichungen

Normalform $ax + b = 0 \qquad a \neq 0; x \in R$

Lösung:

$$x = -\frac{b}{a}$$

bzw.

$$E = \{x \mid x \in R \land ax + b = 0 \land a \neq 0\} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

2.1.2.2. Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form $Ax^2 + Bx + C = 0$; $A \neq 0$
Division durch A führt auf die

Normalform $\{x \mid x^2 + px + q = 0\}$ (*gemischtquadratische Gleichung*),

wobei $p = \frac{B}{A}$, $q = \frac{C}{A}$ ist.

Lösung:

$$x_{1;2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & \text{für } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0 \\ -\frac{p}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} & \text{für } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \end{cases}$$

Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Sonderfälle

a) $p = 0\ \{x \mid x^2 + q = 0\}$ (*reinquadratische Gleichung*)

Lösung:

$$x_{1;2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-q} & \text{für } q \leqq 0 \\ \pm\mathrm{j}\sqrt{q} & \text{für } q > 0 \end{cases}$$

b) $q = 0\ \{x \mid x^2 + px = 0\}$

Lösung: $x(x + p) = 0$

$$x_1 = 0;\ x_2 = -p$$

c) Zurückführen der *symmetrischen Gleichung 3.Grades* auf eine quadratische Gleichung

Erklärung

Gleichungen heißen *symmetrisch*, wenn die Koeffizienten symmetrisch angeordnet sind.

$$\{x \mid ax^3 + bx^2 + bx + a = 0\}$$

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)\,[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$$

Hieraus $x + 1 = 0$; $x_1 = -1$ und

$$a(x^2 - x + 1) + bx = 0 \quad \text{(quadratische Gleichung)}$$

Beispiel:

$$\{x \mid 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0\}$$

Lösung:

$$6(x^3 + 1) - 7x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)\,[6(x^2 - x + 1) - 7x] = 0$$

$$x + 1 = 0; \qquad \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0 \quad \text{(Normalform)}$$

$$x_{2;3} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 1\frac{1}{2}}}; \qquad \underline{\underline{x_3 = \frac{2}{3}}}$$

bzw.

$$E = \left\{-1;\ 1\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right\}$$

d) Zurückführen der *symmetrischen Gleichung 4.Grades* auf eine quadratische Gleichung

$$\{x \mid ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0\}$$

Division durch x^2 und Zusammenfassen ergibt

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Substitution $y = x + \frac{1}{x}$ und $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ liefert die quadratische Gleichung

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

e) Zurückführen einer *biquadratischen* Gleichung, in der das kubische und lineare Glied fehlen, auf eine quadratische Gleichung

$$\{x \mid ax^4 + cx^2 + e = 0\}$$

Substitution $x^2 = y$ führt auf die quadratische Gleichung

$$ay^2 + cy + e = 0$$

2.1.2.3. Kubische Gleichungen

Allgemeine Form $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0;\ A \neq 0.$
Division durch A führt auf die

Normalform $\{x \mid x^3 + ax^2 + bx + c = 0\}$

worin $a = \frac{B}{A}, \quad b = \frac{C}{A}, \quad c = \frac{D}{A}$ ist.

Durch Substitution $x = y - \frac{a}{3}$ erhält man die

reduzierte Form $y^3 + py + q = 0$

Cardanische Lösungsformel für die reduzierte Gleichung

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\,\mathrm{j}\sqrt{3}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\,\mathrm{j}\sqrt{3}$$

wobei

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Diskriminante $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

$D > 0$ ergibt eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen.

$D = 0$ ergibt drei reelle Lösungen, darunter eine Doppelwurzel.

Casus irreducibilis

$D < 0$ ergibt drei reelle Lösungen, die sich auf goniometrischem Wege errechnen lassen (irreduzibler Fall, casus irreducibilis)

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right)$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right)$$

φ läßt sich aus der Gleichung $\cos\varphi = \dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}$ berechnen.

Die entsprechenden x-Werte folgen aus obiger Substitution
$x = y - \dfrac{a}{3}$.

1. Beispiel: $D > 0$)

$\{x \mid x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0\}$

Substitution $x = y - \dfrac{-3}{3} = y + 1$

$(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 + 4(y + 1) - 4 = 0$

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 4y + 4 - 4 = 0$

Reduzierte Form $y^3 + y - 2 = 0 \qquad p = 1;\ q = -2$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} \approx$$
$$\approx 1{,}264$$

$$v = \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} \approx -0{,}264$$

$y_1 = 1{,}264 - 0{,}264 = 1 \qquad \underline{\underline{x_1 = 2}}$

$y_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1{,}528}{2}\,\mathrm{j}\sqrt{3} \qquad \underline{\underline{x_2 = \dfrac{1}{2} + 0{,}764\,\mathrm{j}\sqrt{3}}}$

$y_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1{,}528}{2}\,\mathrm{j}\sqrt{3} \qquad \underline{\underline{x_3 = \dfrac{1}{2} - 0{,}764\,\mathrm{j}\sqrt{3}}}$

bzw.

$$E = \left\{2;\quad \frac{1}{2} + 0{,}764\,\mathrm{j}\sqrt{3};\quad \frac{1}{2} - 0{,}764\,\mathrm{j}\sqrt{3}\right\}$$

2. Beispiel: ($D < 0$)

$\{x \mid x^3 - 21x - 20 = 0\}$ (bereits reduzierte Form)

Diskriminante $D = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = (-10)^2 + (-7)^3 < 0$

Goniometrischer Lösungsweg:

$$\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{343}}\,;\ \varphi = 57°\,19'$$

$$x_1 = 2\sqrt{7}\cos 19°\,6'; \qquad \underline{\underline{x_1 = 5}}$$

$$x_2 = -2\sqrt{7}\cos(-40°\,54') \qquad \underline{\underline{x_2 = -4}}$$

$$x_3 = -2\sqrt{7}\cos 79°\,6' \qquad \underline{\underline{x_3 = -1}}$$

bzw.

$$E = \{5, -4, -1\}$$

Sonderfälle der kubischen Gleichung in reduzierter Form

a) $p = 0 \quad \{y \mid y^3 + q = 0\}$ (*binomische Gleichung*)
Lösung siehe Abschnitt „Komplexe Zahlen", S. 13.

b) $q = 0 \quad \{y \mid y^3 + py = 0\}$

Lösung:

$$y(y^2 + p) = 0 \quad y_1 = 0; \quad y_{2;3} = \begin{cases} \pm\sqrt{-p} & \text{für } p \leqq 0 \\ \pm\,\mathrm{j}\sqrt{p} & \text{für } p > 0 \end{cases}$$

2.1.2.4. Algebraische Gleichung n-ten Grades

Allgemeine Form $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots = 0; \qquad A \neq 0$

Division durch A führt auf die

Normalform $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0 \qquad a_i \in C$

Das von x freie Glied a_0 heißt *Absolutglied.*

Die Lösungsmenge E einer algebraischen Gleichung mit dem Variablenbereich $x \in C$ ist nie leer.

Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung n-ten Grades in 1 Variablen hat genau n reelle oder komplexe Wurzeln. Mehrmals auftretende Wurzeln heißen k-fache Wurzeln.

Zerlegung in Linearfaktoren

Ein Polynom n-ten Grades $f_n(x)$ mit einer Nullstelle x_1, d. h. $f_n(x_1) = 0$, läßt sich zerlegen in

$$f_n(x) = (x - x_1)\,f_{n-1}(x)$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung, so gilt

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0 =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

Vietascher Wurzelsatz

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n && = -a_{n-1} \\
&x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n && = a_{n-2} \\
&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n && = -a_{n-3} \\
&\vdots && \\
&x_1x_2x_3 \ldots x_n && = (-1)^n a_0
\end{aligned}$$

Die Wurzeln einer Gleichung in Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten können oft mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes durch Probieren gefunden werden, falls vermutet werden kann, daß sie ganzzahlig sind. Als ganzzahlige Wurzeln kommen nur die Teiler des absoluten Gliedes in Frage.

Beispiel:

$$\{x \mid x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0\}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = 6 \quad \text{(Absolutglied)}$$

Faktoren des Absolutgliedes sind ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Durch Probieren findet man:

$$\underline{\underline{x_1 = 1}}, \quad \underline{\underline{x_2 = -1}}, \quad \underline{\underline{x_3 = -2}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_4 = 3}}$$

bzw.

$$E = \{1;\ -1;\ -2;\ 3\}$$

Ergibt sich durch Probieren nur eine Lösung x_1, dann kann der Grad der Gleichung erniedrigt werden, indem man durch den entsprechenden Linearfaktor $(x - x_1)$ dividiert.
Es kann auch das HORNERsche Schema angewendet werden.

2.1.3. Transzendente Gleichungen

Goniometrische Gleichungen

Siehe S. 172.

2.1.3.1. Exponentialgleichungen

Grundgleichung: $a^x = b$
Gilt $b = a^n$, so daß $a^x = a^n \Leftrightarrow x = n$ (Eineindeutigkeit der Exponentialfunktion), anderenfalls wird logarithmiert $x \ln a = \ln b$.

Beispiele:

1. $\{x \mid \sqrt[3]{a^{x+2}} = \sqrt{a^{x-5}}\}$

Lösung:

$$a^{\frac{x+2}{3}} = a^{\frac{x-5}{2}}; \frac{x+2}{3} = \frac{x-5}{2}; 2x + 4 = 3x - 15; \underline{\underline{x = 19}},$$

bzw. $E = \{19\}$

2. $\{x \mid 2^{x+1} + 3^{x-3} = 3^{x-1} - 2^{x-2}\}$

Lösung:

$$2^x \cdot 2 + 3^x \cdot 3^{-3} = 3^x \cdot 3^{-1} - 2^x \cdot 2^{-2}$$

$$216 \cdot 2^x + 27 \cdot 2^x = 36 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x; \quad 243 \cdot 2^x = 32 \cdot 3^x;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{32}{243} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad \underline{\underline{x = 5}} \quad \text{bzw.} \quad E = \{5\}$$

3. $\{x \mid 4^{3x} \cdot 5^{2x-3} = 6^x\}$

Lösung:

$$3x \lg 4 + (2x - 3) \lg 5 = x \lg 6$$

$$x(3 \lg 4 + 2 \lg 5 - \lg 6) = 3 \lg 5$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3 \lg 5}{3 \lg 4 + 2 \lg 5 - \lg 6}}}$$

$$\text{bzw. } E = \left\{\frac{3 \lg 5}{3 \lg 4 + 2 \lg 5 - \lg 6}\right\}$$

Viele Exponentialgleichungen lassen sich nicht auf algebraische Gleichungen zurückführen und können nur mit Näherungsverfahren gelöst werden.

2.1.3.2. Logarithmische Gleichungen

Die Veränderliche kommt auch im Logarithmanden vor. Im allgemeinen ist nur näherungsweise Lösung möglich. Nur in speziellen Fällen gelingt ein Zurückführen auf eine algebraische Gleichung.

Grundgleichung: $\log_a x = b$
Gilt $b = \log_a c$, so daß $\log_a x = \log_a c \Leftrightarrow x = c$, anderenfalls ist $x = a^b$.

Beispiele:

1. $\{x \mid 3 \ln (2x - 7) + 8 = \sqrt{\ln (2x - 7) + 20}\}$

   Substitution $\quad y = \ln (2x - 7)$

   $$3y + 8 = \sqrt{y + 20}$$
   $$9y^2 + 47y + 44 = 0$$

Hieraus zwei Werte für y. Auf Grund der Substitution $y = \ln (2x - 7)$ ergibt sich dann $e^y = 2x - 7$, woraus x berechnet werden kann.

2. $\{x \mid \lg (x^2 + 1) = 2 \lg (3 - x)\}$

Lösung:

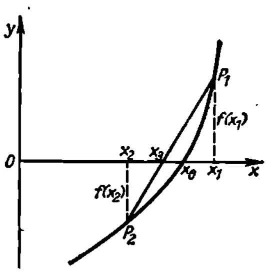
$$\lg (x^2 + 1) = \lg (3 - x)^2$$
$$x^2 + 1 = (3 - x)^2$$
$$\underline{\underline{x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}}} \quad \text{bzw.} \quad E = \left\{1\frac{1}{3}\right\}$$

2.1.4. Näherungsverfahren zur Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung

2.1.4.1. Regula falsi (lineare Interpolation)

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel zwischen den Werten x_1 und x_2, d. h., haben $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen, so ergibt sich als verbesserter Näherungswert gegenüber x_1 und x_2

$$x_3 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)\, f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$



Geometrische Deutung: Die Kurve wird ersetzt durch die Sehne durch P_1 und P_2 (*Sehnennäherungsverfahren*).

Beispiel:

$$\{x \mid x^3 - x + 7 = 0\}$$

Zugehörige Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - x + 7.$$

Aus der Wertetabelle liest man ab:

$$x_1 = -2; \quad f(x_1) = 1$$

$$x_2 = -2{,}5; \quad f(x_2) = -6{,}125$$

$$x_3 = -2 + \frac{(-2{,}5 + 2) \cdot 1}{1 + 6{,}125} = -2 + \frac{-0{,}5}{7{,}127} = -2{,}07;$$

$$f(x_3) = 0{,}200$$

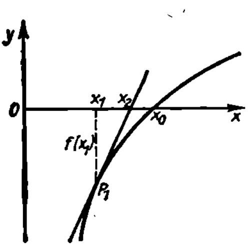
Wiederholung des Verfahrens führt zu weiterer Annäherung.

2.1.4.2. Newtonsche Näherungsmethode

Ist für die Gleichung $f(x) = 0$ der Näherungswert x_1 einer Wurzel bekannt, so ergibt sich eine bessere Näherung aus

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad f'(x_1) \neq 0$$

Das Verfahren ist von zweiter Ordnung, da sich die Anzahl der richtigen Stellen von x_ν mit jedem Schritt verdoppelt.



Das Verfahren versagt, wenn die Kurve $f(x)$ an der Näherungsstelle der x-Achse nahezu parallel ist oder wenn zwischen dem Näherungswert und dem genauen Wurzelwert eine Extremstelle oder ein Wendepunkt mit zur x-Achse nahezu paralleler Wendetangente liegt.

Kriterium für Anwendbarkeit: In dem Intervall, das x_0 und alle Näherungswerte enthält, muß gelten:

$$\left| \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| \leqq m < 1$$

Geometrische Deutung: Die Kurve wird ersetzt durch ihre Tangente im Näherungspunkt P_1 (*Tangentennäherungsverfahren*).

Beispiel:

$$\{x \mid x^3 + 2x - 1 = 0\}$$

Zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + 2x - 1$.
Aus der Wertetabelle findet man als Näherungswert $x_1 = 0{,}5$; $f(x_1) = 0{,}125$.

Ableitungen $f'(x) = 3x^2 + 2$; $f''(x) = 6x$
$f'(x_1) = 2{,}75$; $f''(x_1) = 3$, demnach

$$\left|\frac{f(x_1)\,f''(x_1)}{[f'(x_1)]^2}\right| \approx 0{,}05 < 1$$

$$x_2 = 0{,}5 - \frac{0{,}125}{2{,}75} \approx 0{,}5 - 0{,}045 \approx 0{,}455$$

$$f(x_2) \approx 0{,}004$$

Das Verfahren kann beliebig wiederholt werden.

2.1.4.3. Iterationsverfahren

Man bringt die Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form $x = \varphi(x)$. Ist x_1 ein Näherungswert für eine Wurzel der Gleichung und ist für diesen Wert x_1 die Bedingung $|\varphi'(x_1)| \leq m < 1$ erfüllt, dann ist

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

eine bessere Näherung. Wiederholung des Verfahrens erhöht die Genauigkeit. Bei $\varphi'(x_1) < 0$ liegen zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte auf verschiedenen Seiten des genauen Wurzelwertes, und man kann daher die erreichte Genauigkeit abschätzen.
Ist $|\varphi'(x_1)| > 1$, dann ist die inverse Funktion einzuführen.

Beispiel:

$$\{x \mid x^3 + 2x - 6 = 0\}$$

Näherungswert $x_1 = 1{,}45$ für eine Wurzel, $f(x_1) = -0{,}051375$

$$x = \frac{6 - x^3}{2} = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{3x^2}{2}\,;\ |\varphi'(x_1)| = |\varphi'(1{,}45)| = 3{,}14375 > 1$$

Es ist nach dem zweiten Glied von x aufzulösen:

$$x = \frac{6 - x^3}{2}\,;\ x^3 = 6 - 2x;\ x = \sqrt[3]{6 - 2x} = \psi(x)$$

$$\psi'(x) = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{(6 - 2x)^2}}\,;\qquad |\psi'(1{,}45)| = \left|\frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{3{,}1^2}}\right| < 1$$

Daraus folgt:

$$\underline{\underline{x_1 = 1{,}45}}$$

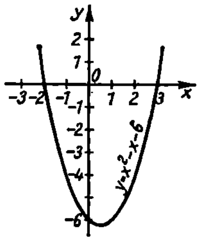
$$x_2 = \sqrt[3]{6 - 2 \cdot 1{,}45} \;\; = \underline{\underline{1{,}4581}}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{6 - 2 \cdot 1{,}4581} = \underline{\underline{1{,}4556}}$$

usw.

2.1.4.4. Graphische Lösung von Gleichungen

Die Gleichung in Normalform wird in eine Funktionsgleichung überführt, indem man die linke Seite gleich y setzt. Ihre graphische Darstellung ergibt die reellen Lösungen der Gleichung als Schnittpunkte mit der x-Achse ($y = 0$).
Mitunter ist es vorteilhaft, die zu lösende Gleichung in der Form $\varphi(x) = \psi(x)$ zu schreiben und $y = \varphi(x)$ sowie $y = \psi(x)$ graphisch darzustellen. Die Abszissen der Schnittpunkte der graphischen Darstellung beider Gleichungen entsprechen dann den reellen Wurzeln der Bestimmungsgleichung.



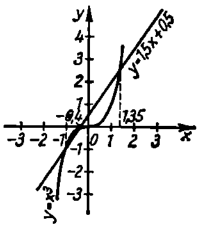
Beispiel:

$\{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$

$$x^2 - x - 6 = y$$

$$\underline{\underline{x_1 = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = \;\; 3}}$$



Beispiel:

$\{x \mid x^3 - 1{,}5x - 0{,}5 = 0\}$

$$x^3 = 1{,}5x + 0{,}5$$

Die Schnittpunkte der Kurven zu den Funktionen

$\varphi(x) = y = x^3$ und

$\psi(x) = y = 1{,}5x + 0{,}5$

ergeben mit ihren Abszissen die Lösungen

$$\underline{\underline{x_1 = -1}}; \quad \underline{\underline{x_2 \approx -0{,}4}}; \quad \underline{\underline{x_3 \approx 1{,}35}}$$

2.1.5. Gleichungssysteme

Zur eindeutigen Bestimmung von n Variablen sind n voneinander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen notwendig. Der Lösungsweg besteht darin, daß die n Gleichungen mit n Variablen schrittweise auf eine Gleichung mit einer Variablen reduziert werden.
Mit dem aus dieser Gleichung errechneten Wert der einen Variablen können schrittweise die weiteren Variablen ermittelt werden.
Liegen r unabhängige Gleichungen mit n Variablen ($r < n$) vor (diophantische Gleichungen), so werden $(n - r)$ Variable als freie Parameter (unabhängige Variable) ausgewählt. Diese können mit beliebigen Werten des Definitionsbereichs belegt werden. Die Erfüllungsmenge E eines Gleichungssystems ist gleich dem Durchschnitt der Erfüllungsmengen der einzelnen Gleichungen $E_1, E_2, \ldots$

$$E = E_1 \cap E_2 \cap \ldots$$

2.1.5.1. Lineare Gleichungen in 2 Variablen

Eine Gleichung in 2 Variablen $a_1x + a_2y = b$

Die Erfüllungsmenge ist die Menge aller geordneten Wertepaare $(x; y) \in R \times R$, für die die Aussageform zu einer wahren Aussage wird.

Schreibweise:

$$E = \{(x; y) \mid (x; y) \in R \times R \wedge a_1x + a_2y = b \mid a_1, a_2, b \in R\}$$

bzw. bei offensichtlichem Definitionsbereich kürzer

$$E = \{(x; y) \mid a_1x + a_2y = b\}$$

Mit x als unabhängiger und y als abhängiger Variablen wird die Lösungsmenge

$$E = \left\{(x; y) \mid x \in R \wedge y = \frac{b - a_1x}{a_2}\right\},$$

die eine Abbildung $x \to y$ in Form einer Geraden widerspiegelt.

Zwei Gleichungen in 2 Variablen

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \underline{a_{21}x + a_{22}y = b_2} \end{array}\right|$$

Die Erfüllungsmenge ist die Menge aller geordneten Wertepaare $(x; y) \in R \times R$, für die die Aussageformen zu wahren Aussagen werden.

Schreibweise:

$$E = \{(x; y) \mid (x; y) \in R \times R \wedge a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$\wedge\ a_{21}x + a_{22}y = b_2\}$$

bzw. bei offensichtlichem Definitionsbereich kürzer

$$E = \{(x; y) \mid a_{11}x + a_{12}y = b_1 \wedge a_{21}x + a_{22}y = b_2\}$$

Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)

Beispiel:

$$\{(x; y) \mid 3x + 7y - 7 = 0 \wedge 5x + 3y + 36 = 0\}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l|} 3x + 7y - 7 = 0 \\ 5x + 3y + 36 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$y = \frac{7 - 3x}{7}$$

$$5x + 3\left(\frac{7 - 3x}{7}\right) + 36 = 0$$

$$\underline{\underline{x = -10\frac{1}{2}}}; \qquad y = \frac{7 + 31\frac{1}{2}}{7} = \underline{\underline{5\frac{1}{2}}}$$

bzw.

$$E = \left\{\left(-10\frac{1}{2};\quad 5\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Gleichsetzungsmethode

Man löst beide Gleichungen nach einer Variablen auf und setzt die gefundenen Terme einander gleich.

Beispiel:

$$\{(x; y) \mid 3x + 7y - 7 = 0 \wedge 5x + 3y + 36 = 0\}$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y - 7 &= 0 \\ 5x + 3y + 36 &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \frac{-3x+7}{7} = \frac{-5x-36}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} 7y &= -3x + 7 \\ 3y &= -5x - 36 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{-3x+7}{7} \\ y &= \frac{-5x-36}{3} \end{aligned}\right| \qquad \underline{\underline{x = -10\frac{1}{2}}} \qquad \underline{\underline{y = 5\frac{1}{2}}}$$

bzw.

$$E = \left\{\left(-10\frac{1}{2};\quad 5\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Additionsmethode

Man multipliziert beide Seiten jeder Gleichung mit geeigneten Faktoren so, daß eine Veränderliche in beiden Gleichungen denselben Koeffizienten aufweist. Durch Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen fällt diese Veränderliche dann heraus.

Beispiel:

$$\{(x;y) \mid 3x + 7y - 7 = 0 \wedge 5x + 3y + 36 = 0\}$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y - 7 &= 0 \\ 5x + 3y + 36 &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot 3 \\ &\cdot 7 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 9x + 21y - 21 &= 0 \\ 35x + 21y + 252 &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &- \\ &+ \end{aligned}$$

$$26x + 273 = 0$$

$$\underline{\underline{x = -10\frac{1}{2}}}; \qquad \underline{\underline{y = 5\frac{1}{2}}}$$

bzw.

$$E = \left\{\left(-10\frac{1}{2};\quad 5\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Weitere Lösungsmöglichkeiten mit Determinanten, s. S. 44.

2.1.5.2. Lineare Gleichungen in 3 Variablen

Gleichungssystem mit 2 linearen Gleichungen in 3 Variablen

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{array}\right|$$

Homogenes System $(b_1 = b_2 = 0)$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{array}\right|$$

Koeffizientendeterminante $\Delta = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = z\,\Delta_1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{12} & -a_{23}z \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -z\,\Delta_2$$

Lösung:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{z\,\Delta_1}{\Delta} = \Delta_1 t \quad \text{mit} \quad t = \frac{z}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-z\,\Delta_2}{\Delta} = -\Delta_2 t$$

$$z = \Delta \cdot t$$

$$E(t) = \{(\Delta_1 \cdot t;\ -\Delta_2 \cdot t;\ \Delta_3 \cdot t) \mid t \in R\}$$

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 7y - 7z = 0 \\ 5x + 3y + 36z = 0 \end{array}\right|$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 36 \end{vmatrix} = 273; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 36 \end{vmatrix} = 143; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -26$$

$$E(t) = \{(273t;\ -143t;\ -26t) \mid t \in R\}$$

Für $t = t_0$ ergibt sich ein *partikuläres Lösungstripel* $E(t_0)$.

Inhomogenes System

Sind nicht alle $\Delta i = 0$, setzt sich die Erfüllungsmenge des inhomogenen Systems aus der Summe der Lösung des homogenen Systems

und einem partikulären Lösungstripel des **inhomogenen** Systems zusammen.
Man kann ein System von 2 linearen Gleichungen in 3 Variablen auch lösen, indem eine Variable als Parameter (unabhängige Variable) mit auf die rechte Seite genommen wird. Die Behandlung erfolgt dann wie ein System in 2 Variablen.

Gleichungssystem mit 3 linearen Gleichungen in 3 Variablen

Cramersche Regel (siehe S. 44)

Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)

Beispiel 1:

$$\begin{array}{rl|l} 3x + 3y + z = 17 & & \text{(I)} \\ 3x + y + 3z = 15 & & \text{(II)} \\ x + 3y + 3z = 13 & & \text{(III)} \end{array}$$

Aus (I) $\qquad z = 17 - 3x - 3y$

Eingesetzt in (II) und (III)

$$\begin{array}{r|} 3x + y + 3(17 - 3x - 3y) = 15 \\ x + 3y + 3(17 - 3x - 3y) = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|} -6x - 8y = -36 \\ -8x - 6y = -38 \end{array}$$

$$x = 3\frac{1}{7}; \quad y = 2\frac{1}{7}; \quad z = 1\frac{1}{7}$$

bzw.

$$E = \left\{\left(3\frac{1}{7}; \quad 2\frac{1}{7}; \quad 1\frac{1}{7}\right)\right\}$$

Gleichsetzungsmethode

Beispiel 2:

$$\begin{array}{r|} 3x + 3y + z = 17 \\ 3x + y + 3z = 15 \\ x + 3y + 3z = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|}
z = 17 - 3x - 3y \\
z = \dfrac{15 - 3x - y}{3} \\
z = \dfrac{13 - x - 3y}{3} \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|}
17 - 3x - 3y = \dfrac{15 - 3x - y}{3} \\
\dfrac{15 - 3x - y}{3} = \dfrac{13 - x - 3y}{3} \\ \hline
\end{array}\;.$$

Ergebnis siehe Beispiel 1.

Additionsmethode

Beispiel 3:

$$\begin{array}{rcl|r|r}
3x + 3y + z & = & 17 & \cdot 3 + & \\
3x + y + 3z & = & 15 & - & + \\
x + 3y + 3z & = & 13 & & - \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr|}
6x + 8y & = & 36 \\
2x - 2y & = & 2 \\ \hline
\end{array}$$

Ergebnis siehe Beispiel 1.

2.1.5.3. Gaußscher Algorithmus

Gleichungssystem von n linearen Gleichungen in n Variablen

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & c_3 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & c_n
\end{array} \tag{1}$$

$a_{11} \neq 0$; Koeffizientendeterminante $\Delta \neq 0$

Man multipliziert die erste Gleichung von (1) mit $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ und addiert zur zweiten Gleichung. Multipliziert man dann die erste Gleichung von (1) mit $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ und addiert zur dritten Gleichung usw., so fallen alle Glieder, die x_1 enthalten, heraus, und es reduziert sich das ursprüngliche Gleichungssystem (1) auf ein solches von $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Variablen.

$$\begin{array}{l} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = c'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = c'_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = c'_n \end{array} \tag{2}$$

Verfährt man mit diesem System (2) entsprechend, so kommt man auf ein Gleichungssystem von $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ Variablen usw. Schließlich ergibt sich aus System (1) folgendes sogenanntes gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &=& c_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &=& c'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &=& c''_3 \\ \vdots \qquad & & \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &=& c_n^{(n-1)} \end{array} \tag{3}$$

aus dem sich der Reihe nach, beginnend mit x_n aus der letzten Gleichung, die Variablen berechnen lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl|l|l} x + 2y - 0{,}7z &=& 21 & \cdot(-3) & \cdot(-0{,}9) \\ 3x + 0{,}2y - z &=& 24 & & \\ 0{,}9x + 7y - 2z &=& 27 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} x + 2y - 0{,}7\,z &=& 21 & \\ -5{,}8y + 1{,}1\,z &=& -39 & \cdot\dfrac{5{,}2}{5{,}8} \\ 5{,}2y - 1{,}37z &=& 8{,}1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|} x + 2y - 0{,}7z &=& 21 \\ -5{,}8y + 1{,}1z &=& -39 \\ -\dfrac{11{,}13}{29}z &=& -\dfrac{779{,}1}{29} \\ \hline \end{array}$$

$\underline{\underline{z = 70}}$; $\underline{\underline{y = 20}}$; $\underline{\underline{x = 30}}$, d.h., $E = \{30; 20; 70\}$

Rechenschema

	$a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \cdots\ a_{in}$	c_i	
	$\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3\ \ldots\ \sigma_n$	σ	$\sigma + \sum \sigma_k = \sum s_i$
Elimin. Zeile	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\ a_{1n}$	c_1	s_1
e_{21}	$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots\ a_{2n}$	c_2	s_2
$e_{21}a_{1k}$	. . . .		
e_{31}	$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \cdots\ a_{3n}$	c_3	s_3
	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \ \vdots$	$\vdots$	
e_{n1}	$a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \cdots\ a_{nn}$	c_n	s_n
Elim. Zeile	$0\ \ldots$		

Koeffizienten a_{ik}

Absolutglieder c_i

Spaltensummen $\sigma_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik} \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Spaltensumme der Absolutglieder

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Zeilensumme $s_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} + c_i;\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Erweiterungsfaktor $e_{i1} = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} x + 2y - 0{,}7z = 21 \\ 3x + 0{,}2y - z = 24 \\ 0{,}9x + 7y - 2z = 27 \end{array}$$

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	c_i	Σ
	4,9	9,2	−3,7	72	82,4
Elim. Z.	1	2	−0,7	21	23,3
−3	3	0,2	−1	24	26,2
$(-3) \cdot a_{1k}$	−3	−6	2,1	−63	−69,9
−0,9	0,9	7	−2	27	32,9
$(-0{,}9) \cdot a_{1k}$	−0,9	−1,8	0,63	−18,9	−20,97
Elim. Z.	0	−5,8	1,1	−39	−43,7
$\frac{5{,}2}{5{,}8}$	0	5,2	−1,37	8,1	11,93
$\frac{5{,}2}{5{,}8} \cdot a_{1k}$		−5,2	0,986	−35	−39,214
		0	−0,384	−26,9	−27,284

2.1.5.4. Quadratische Gleichungen in 2 Variablen

Ein Gleichungssystem von der Form

$$\begin{array}{l|} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \\ \hline \end{array}$$

läßt sich nach der Einsetzungsmethode lösen, jedoch ist dieses Verfahren rechnerisch sehr umständlich, da es auf eine Gleichung 4. Grades führt.

Sonderfälle

a) *Eine Gleichung quadratisch, eine linear*

Einsetzungsmethode führt zum Ziel.

Beispiel:

$$\begin{array}{l|} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 4 \\ \hline \end{array}$$

$y = x - 4$ in erste Gleichung eingesetzt, führt auf $x^2 + (x - 4)^2 = 25$ (quadratische Gleichung).

6*

b) *Reinquadratische Gleichungen* (ohne Glied mit xy)

Additionsverfahren führt zum Ziel.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll|c|c} 9x^2 - 2y^2 & = 18 & \cdot 3 & + \\ 5x^2 + 3y^2 & = 47 & \cdot 2 & + \\ \hline 37x^2 & = 148 & & \\ x^2 & = 4 & & \end{array}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 2}}; \quad \underline{\underline{x_2 = 2}}; \quad \underline{\underline{x_3 = -2}}; \quad \underline{\underline{x_4 = -2}}$$

$$\underline{\underline{y_1 = 3}}; \quad \underline{\underline{y_2 = -3}}; \quad \underline{\underline{y_3 = 3}}; \quad \underline{\underline{y_4 = -3}}$$

bzw.

$$E = \{(2; 3); \quad (2; -3); \quad (-2; 3); \quad (-2; -3)\}$$

c) *Gleichungen, in denen als quadratisches Glied nur xy vorkommt*

Additionsverfahren und Substitutionsmethode führen zum Ziel.

Beispiel:

$$\begin{array}{l|l} 5x + y + 3 = 2xy & \text{(I)} \\ xy = 2x - y + 9 & \text{(II)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c} -2xy + 5x + y + 3 = 0 & & + \\ xy - 2x + y - 9 = 0 & \cdot 2 & + \\ \hline x + 3y - 15 = 0 & & \end{array}$$

$$x = 15 - 3y$$

in Gleichung (II) eingesetzt, ergibt

$$y(15 - 3y) = 2(15 - 3y) - y + 9$$

eine quadratische Gleichung für y.

d) *Zwei homogene quadratische Gleichungen*

Gleichungen heißen *homogen*, wenn ihre linken Seiten homogene Terme der Variablen sind. Eine quadratische Funktion in x und y heißt *homogen*, wenn sie nur Glieder gleicher Dimension enthält, d.h.,

$$f(x; y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Die Substitution $y = xz$ führt auf eine quadratische Gleichung für z.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 39 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 &= 43 \end{aligned}\right| \quad y = xz$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x^2z + x^2z^2 &= 39 \\ 2x^2 - 3x^2z + 2x^2z^2 &= 43 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} x^2(1 - z + z^2) &= 39 \\ x^2(2 - 3z + 2z^2) &= 43 \end{aligned}\right|$$

$$\frac{1 - z + z^2}{2 - 3z + 2z^2} = \frac{39}{43} \quad \text{(quadratische Gleichung für } z\text{)}$$

$$z_1 = \frac{7}{5}; \quad z_2 = \frac{5}{7}$$ Hieraus durch Einsetzen quadratische Gleichungen für x_1 bzw. x_2

2.1.5.5. Graphische Lösung von Gleichungssystemen in 2 Variablen

Gleichungssysteme 1. Grades

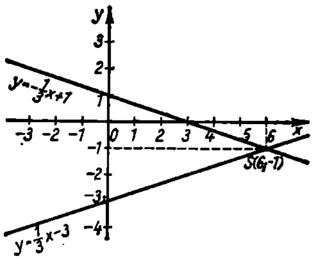
Jede Gleichung 1. Grades in x und y kann als Funktionsgleichung aufgefaßt werden und ergibt bei graphischer Darstellung eine Gerade. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind dann die reelle Lösung des Gleichungssystems.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 3 \\ x - 3y &= 9 \end{aligned}\right|$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$y = \frac{1}{3}x - 3$$



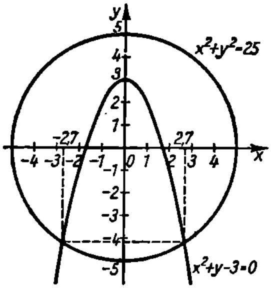
Lösung:

$\underline{\underline{x_s = x = 6}}$; $\underline{\underline{y_s = y = -1}}$ bzw. $E = \{(6; -1)\}$

Anmerkung: Sind die beiden Geraden einander parallel oder fallen sie zusammen, so widersprechen die Gleichungen des Systems einander oder sind nicht unabhängig voneinander.

Gleichungssysteme 2. Grades

Eine Gleichung 2. Grades in x und y, als Funktionsgleichung aufgefaßt, ergibt bei graphischer Darstellung einen Kegelschnitt (Parabel, Ellipse, Hyperbel).
Ist die 2. Gleichung des Systems linear, so stellt sie eine Gerade dar, deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt in ihren Koordinaten die Lösungen des Systems bestimmen.
Sind beide Gleichungen quadratisch, so ergibt die graphische Darstellung zwei Kegelschnitte. Die Koordinaten der Schnittpunkte, von denen es zwei oder vier geben kann, sind dann die reellen Wurzelpaare des Gleichungssystems.



Beispiel:

$$\begin{array}{rl|l} x^2 + y^2 = 25 & & \text{(I)} \\ x^2 + y \;=\; 3 & & \text{(II)} \end{array}$$

Gleichung (I) stellt einen Kreis mit Radius $r = 5$ um den Ursprung als Mittelpunkt dar; Gleichung (II) eine Parabel mit dem Scheitel (0; 3).
Die Koordinaten der Schnittpunkte geben folgende Wurzelpaare:

$$\underline{\underline{x_1 \approx 2{,}7}};\quad \underline{\underline{y_1 \approx -4{,}2}};\quad \underline{\underline{x_2 \approx -2{,}7}};\quad \underline{\underline{y_2 \approx -4{,}2}}$$

bzw.

$$E = \{(2{,}7;\ -4{,}2);\ (-2{,}7;\ -4{,}2)\}$$

2.2. Ungleichungen

Definition der Ungleichung

Die Verbindung zweier Terme durch eines der Zeichen $<$, $\leq$, $>$, $\geqq$ heißt *Ungleichung*.
Werden Terme ohne Variable miteinander verbunden, stellt die Ungleichung eine wahre oder falsche Aussage dar, z. B. $7 < 5$ falsche Aussage.
Eine Ungleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar, die in eine wahre oder falsche Aussage übergeht, wenn man den Variablen Werte des Definitions- bzw. Variablenbereichs zuordnet.
Erfüllungsmenge ist die Menge aller Werte, für die die Ungleichung eine wahre Aussage darstellt.

Gleichwertigkeit:

$T_1 < T_2 \Rightarrow T_1 + T < T_2 + T$ — T sinnvoller Term im Variablenbereich

$T_1 < T_2 \Rightarrow T_1 T < T_2 T$ — $T > 0$

Rechnen mit Ungleichungen

$T_1 < T_2 \Rightarrow T_1 T > T_2 T$ — $T < 0$

$0 < T_1 < T_2 \Rightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2}$

$T_1 < T_2$ und $T_3 < T_4 \Rightarrow T_1 + T_3 < T_2 + T_4$

$T_1 < T_2$ und $T_3 < T_4 \Rightarrow T_1 T_3 < T_2 T_4$ — $T_2, T_3 > 0$

$T_1 < T_2 \Rightarrow -T_1 > -T_2$

$T_1^n + T_2^n \leqq (T_1 + T_2)^n$ — $T_1, T_2 > 0;\quad n \in N \setminus \{0\}$

$(1 + T)^n \geqq 1 + nT$ — $T \geqq 0,\ n \in N$ (BERNOULLIsche Ungleichung)

$2^x > x \qquad x \in N$

$\sqrt[n]{1 + T} < 1 + \frac{T}{n}$ — $T > 0,\quad n \in N \setminus \{0; 1\}$

$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

Intervall

(a, b) bedeutet $a < x < b$ (*offenes Intervall*)

$[a, b]$ bedeutet $a \leqq x \leqq b$ (*abgeschlossenes Intervall*)

$[a, b)$ bedeutet $a \leqq x < b$ (*halboffenes Intervall*)

$(a, b]$ bedeutet $a < x \leqq b$ (*halboffenes Intervall*)

exakte Darstellung: $\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$, d.h., (a, b) ist die Lösungsmenge der Ungleichung $a < x < b$.
Liegt ein unendlicher Abschnitt vor, ist das Intervall stets offen. Es bedeuten:

$(-\infty; a) \Rightarrow x < a$

$(-\infty; a] \Rightarrow x \leqq a$

2.3. Funktionen

2.3.1. Allgemeines

Definition

Ist die Abbildung der Menge X auf die Menge Y eindeutig, d.h. entspricht jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$, so heißt die Menge f der geordneten Paare $(x; y)$ eine Funktion. Die Zugehörigkeit der Paare $(x; y)$ zur Menge f muß eindeutig entscheidbar sein. Man spricht von einer reellen Funktion, wenn sowohl die Urbilder $x \in R$ als auch die Bilder $y \in R$ reelle Zahlen sind. Ihr ist eineindeutig eine Punktmenge in der Ebene zugeordnet, die eine Kurve bilden kann, andererseits ist eine Kurve nur dann das Abbild einer Funktion, wenn durch sie eine eindeutige Abbildung gegeben ist.
Menge X = *Definitionsbereich, Urbildmenge*, Menge der *Argumentwerte* der Menge f.
Menge Y = *Wertebereich, Bildmenge*, Menge der *Funktionswerte*
x unabhängige Variable, Argument der Funktion
y abhängige Variable, Funktionswert von f an der Stelle x

Schreibweise

$y = f(x)$ für die Abbildung $x \to y$

Darstellungsarten

Analytische Darstellung (*Funktionsgleichung*)

in *expliziter* Form $\quad f\colon y = f(x)$

in *impliziter* Form $\quad f(x; y) = 0$

in *Parameterform* $\quad x = \varphi(t)$

$y = \psi(t)$

Exakteste Schreibweisen

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

$$f = \{(x; y) \mid F(x; y) = 0, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

$$f = \{[x; f(x)] \mid x \in X, \quad f(x) \in Y\}$$

Tabellarische Darstellung (Wertetabelle)

Graphische Darstellung

Einteilung der Funktionen

Reelle Funktionen

Rationale Funktionen | Irrationale Funktionen

ganze rationale Funktionen | gebrochene rationale Funktionen

Ganze rationale Funktion n-ten Grades

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

für $n \in N;\quad a_k \in R;\quad a_n \neq 0$

Gebrochene rationale Funktion

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

für $n, m \in N,\quad a_k, b_k \in R$

Echt gebrochene Funktion für $n < m$

Unecht gebrochene Funktion für $n \geqq m$

Linear gebrochene Funktion für $n = m = 1$

Algebraische Funktion

$$Q_n(x)\, y^n + Q_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + Q_1(x)\, y + Q_0(x) = 0$$

für $n \in N$, $Q_k(x)$ ganze rationale Terme von x k-ten Grades

Transzendente Funktion

Jede nicht algebraische Funktion heißt transzendent.

Identisch gleiche Funktionen

Stimmen die Definitions- und Wertebereiche zweier Funktionen f und g überein und wird durch beide Funktionen jedes $x \in X$ auf denselben Funktionswert $y \in Y$ abgebildet, so sind beide Funktionen identisch gleich:

$$f \equiv g$$

Dagegen bedeutet $f(x) = g(x)$ Übereinstimmung des Funktionswertes für mindestens ein Argument.

Gerade und ungerade Funktionen

Gerade Funktion: $f(-x) = f(x) \qquad x \in X$

(axialsymmetrisch zur y-Achse)

Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x) \qquad x \in X$

(zentralsymmetrisch zum Ursprung)

Monotone Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt *monoton wachsend*, wenn für $x_1 < x_2$ im Definitionsbereich $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt. Sie heißt *monoton fallend*, wenn für $x_1 < x_2$ im Definitionsbereich $f(x_1) \geqq f(x_2)$ gilt.

Gilt für $x_1 < x_2$ im ganzen Definitionsbereich $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, so nennt man die Funktion *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend*.

Homogene Funktionen

Eine Funktion

$$f(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n) = 0$$

heißt homogen vom Grad k bezüglich der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wenn

$$f(tx_1; tx_2; \ldots; tx_n) = t^k \cdot f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

k Homogenitätsgrad

Nullstellen, Pole, Lücken

Nullstelle x_0 einer Funktion ist der Wert der unabhängigen Variablen x, bei dem der Funktionswert verschwindet. (Bei gebrochenen rationalen Funktionen Zähler $= 0$ oder Nenner $\xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$.)

Pol x_p einer Funktion ist der Wert der unabhängigen Variablen x, bei dem der Funktionswert $y \to \infty$.

(Bei gebrochenen rationalen Funktionen Nenner $= 0$ oder Zähler $\xrightarrow[x \to x_p]{} \infty$.)

Lücke einer gebrochenen rationalen Funktion ist der Wert der unabhängigen Variablen x, bei dem Zähler und Nenner verschwinden.

Stetige Funktionen

Definition: Eine Funktion $f = \{[x; f(x)] \mid x \in X, f(x) \in Y\}$, deren Definitionsbereich $[a; b] = X$ die Umgebung der Stelle c enthält, ist an der Stelle $x = c$ stetig, wenn

f an der Stelle c definiert ist, d. h., $[c; f(c)] \in f$,

der Grenzwert $\lim\limits_{x \to c} f(x) = C$ existiert (s. auch 5.1. mit der genauen Definition des Grenzwertes) und

$f(c) = C$.

Eine Funktion f ist im Intervall $[a; b]$ stetig, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls stetig ist.

Die Funktion f heißt im Intervall $[a; b]$ *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ (s. Bild auf Seite 259) eine Zahl $\xi = \xi(\varepsilon) > 0$ derartig gibt, daß für alle x und $x + h$ im Intervall $[a; b]$ die Ungleichung $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$ bei $|h| < \xi$ gilt. Wenn die Funktionen f und g im Intervall $[a; b]$ gleichmäßig stetig sind, so sind die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und, falls in $[a; b]$ die Ungleichung $g(x) \neq 0$ gilt, auch $\frac{f}{g}$ in $[a; b]$ gleichmäßig stetig.

Alle Stellen $x = d$, für die obige drei Stetigkeitsbedingungen nicht erfüllt sind, heißen Unstetigkeitsstellen. Diese lassen sich heben unter der Voraussetzung, daß $\lim\limits_{x \to d} f(x)$ existiert, indem man der Stelle $x = d$ den Grenzwert $\lim\limits_{x \to d} f(x)$ zuordnet.

Beispiele:

$y = \frac{1}{x}$ **ist an der Stelle $x = 0$ unstetig (Pol)**

$y = \dfrac{3}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ ist an der Stelle $x = 0$ unstetig (die Funktion springt von einem Wert auf einen anderen)

$y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ ist an den Stellen $x = \pm 1$ unstetig (Lücke bei $x = +1$ und Pol bei $x = -1$)

Die Lücke ist hebbar, da $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{3}{2}$ existiert. Mit der Festsetzung $f(1) = \frac{3}{2}$ wird die fehlende dritte Bedingung erreicht.

Periodische Funktionen

$f(x) = f(x + kT_0)$ für alle $x \in X$

$x + kT_0 \in X$

T_0 Periode

$k \in G$

Umkehrfunktionen, inverse Funktionen

Ordnet man bei einer eineindeutigen Funktion f den Bildern ihre Urbilder zu, erhält man die Umkehrfunktion f^{-1}. Jede eineindeutige Abbildung bzw. streng monotone Funktion besitzt eine Umkehr- (inverse) Abbildung bzw. Umkehrfunktion. Man erhält die Umkehrfunktion zu $y = f(x)$, indem man die Buchstaben x und y vertauscht und die neue Gleichung, wenn möglich, wieder nach y auflöst.

Beispiel:

$$y = \frac{x}{1+x} = f(x). \qquad \text{Vertauschung: } x = \frac{y}{1+y}$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Bildet man die Menge der geordneten Paare $X(x; y)$ eindeutig auf eine Menge Z ab, dann ist die Menge f der geordneten Tripel $(x; y; z)$ eine Funktion mit 2 unabhängigen Variablen.

Schreibweise: $f = \{(x; y; z) \mid z = f(x; y)\}$

Für n unabhängige Variable gilt:
Bildet man die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$ eindeutig auf eine Menge Y ab, dann ist die Menge f der geordneten $(n+1)$-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n; y)$ eine Funktion mit n unabhängigen Veränderlichen.

Schreibweise: $f = \{(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n; y) \mid y = f(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)\}$

2.3.2. Weitere Arten der analytischen Darstellung

Hornersches Schema

Es ermöglicht vor allem eine rasche Ermittlung eines Funktionswertes einer ganzen rationalen Funktion.

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{für} \quad x = x_1$$

$$\begin{array}{llll}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\
0 & a_n x_1 & a_n x_1^2 + a_{n-1} x_1 & a_n x_1^3 + a_{n-1} x_1^2 + a_{n-2} x_1 \\
\hline
a_n & a_n x_1 + a_{n-1} & a_n x_1^2 + a_{n-1} x_1 + a_{n-2} & \\
 & & & a_n x_1^3 + a_{n-1} x_1^2 + a_{n-2} x_1 + a_{n-3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\ldots & a_0 \\
\ldots & a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \cdots \\
\hline
\end{array}$$

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \cdots + a_0 = f(x_1)$$

1. Zeile: Koeffizienten der Funktion. Zu beachten ist, daß bei Fehlen eines Gliedes $a_k x^{n-k}$ in die entsprechende Stelle der 1. Zeile des HORNERschen Schemas der Wert Null einzusetzen ist.

1. Schritt: a_n mit x_1 multipliziert und zu a_{n-1} addiert

2. Schritt: Summe wieder mit x_1 multipliziert und zu a_{n-2} addiert

3. Schritt: Summe wieder mit x_1 multipliziert und zu a_{n-3} addiert usw.

Die letzte Summe ist dann der gesuchte Funktionswert an der Stelle x_1.

Beispiel:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 7 \quad \text{an der Stelle} \quad x_1 = 2{,}3$$

zu berechnen.

1	2	0	−5	7	(Koeffizientenzeile)
0	2,3	9,89	22,747	40,8181	
1	4,3	9,89	17,747	47,8181 = $f(2{,}3)$	

$$f(2{,}3) \approx 47{,}82$$

Näherungsdarstellungen von Funktionen mit Interpolationsformeln

Formel von Lagrange

$$\begin{aligned} y = f(x) = {} & y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_n)} + \\ & + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_n)} + \\ & \vdots \\ & + y_n \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \cdots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

Hierbei sind $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ die zu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gehörigen Funktionswerte, die bekannt bzw. vorgegeben sind.

Beispiel:

Wie heißt die Funktion in analytischer Darstellung zu folgender Wertetabelle?

x	1	4	6	9
y	2	5	3	6

$$y = 2 \cdot \frac{(x-4)(x-6)(x-9)}{(1-4)(1-6)(1-9)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-6)(x-9)}{(4-1)(4-6)(4-9)} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(6-1)(6-4)(6-9)} + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(9-1)(9-4)(9-6)}$$

$$y = -\frac{1}{60}(x^3 - 19x^2 + 114x - 216) +$$

$$+ \frac{1}{6}(x^3 - 16x^2 + 69x - 54) -$$

$$- \frac{1}{10}(x^3 - 14x^2 + 49x - 36) +$$

$$+ \frac{1}{20}(x^3 - 11x^2 + 34x - 24)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{32}{5}x - 3}}$$

Formel von Newton (NEWTONsches Interpolationspolynom)

$$y = y_1 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$+ A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots +$$

$$+ A_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$$

Dabei sind

$$A_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad A_2 = \frac{(y_3 - y_1) - A_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)};$$

$$A_3 = \frac{(y_4 - y_1) - A_1(x_4 - x_1) - A_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

usw.

Wesentlich einfacher wird diese Formel, wenn die x-Werte in gleichmäßigen Abständen aufeinanderfolgen, also wenn $x_k - x_{k-1} = h$.

Setzt man

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1,$$

$$y_3 - y_2 = \Delta y_2,$$

$$y_4 - y_3 = \Delta y_3, \ldots$$

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,$$

$$\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2,$$

$$\Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3, \ldots$$

$$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1,$$

$$\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2,$$

$$\Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 = \Delta^3 y_3, \ldots$$

....

$$\Delta^{n-2} y_2 - \Delta^{n-2} y_1 = \Delta^{n-1} y_1,$$

$$\Delta^{n-2} y_3 - \Delta^{n-2} y_2 = \Delta^{n-1} y_2,$$

$$\Delta^{n-2} y_4 - \Delta^{n-2} y_3 = \Delta^{n-1} y_3, \ldots,$$

dann erhält man

$$y = y_1 + \frac{\Delta y_1 (x - x_1)}{1!\, h} + \frac{\Delta^2 y_1 (x - x_1)(x - x_2)}{2!\, h^2} + \frac{\Delta^3 y_1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\, h^3} + \cdots + \frac{\Delta^{n-1} y_1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-1})}{(n-1)!\, h^{n-1}}$$

bzw. mit der neuen Variablen t: $x = x_1 + th$

$$y = y_1 + \binom{t}{1} \Delta y_1 + \binom{t}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{t}{3} \Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{t}{n} \Delta^n y_1$$

Beispiel:

Wie heißt die Funktion in analytischer Darstellung zu folgender Wertetabelle?

x	2	3	4	5	6
y	3	5	4	2	7

1. Schritt: Bestimmen der Differenzen

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= 5 - 3 = 2 \\ \Delta y_2 &= 4 - 5 = -1 \\ \Delta y_3 &= 2 - 4 = -2 \\ \Delta y_4 &= 7 - 2 = 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta^2 y_1 &= -1 - 2 = -3 \\ \Delta^2 y_2 &= -2 + 1 = -1 \\ \Delta^2 y_3 &= 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_1 &= -1 + 3 = 2 \\ \Delta^3 y_2 &= 7 + 1 = 8 \end{aligned} \qquad \Delta^4 y_1 = 8 - 2 = 6$$

2. Schritt: Einsetzen in die Formel

$$\begin{aligned} y = 3 &+ \frac{2(x-2)}{1! \cdot 1} + \frac{-3(x-2)(x-3)}{2! \cdot 1^2} + \\ &+ \frac{2(x-2)(x-3)(x-4)}{3! \cdot 1^3} + \\ &+ \frac{6(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{4! \cdot 1^4} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{6}x^3 + \frac{53}{4}x^2 - \frac{61}{3}x + 12}}$$

2.3.3. Graphische Darstellung von Funktionen

Algebraische Funktionen

Ganze rationale Funktion 1. Grades (lineare Funktion)

Allgemeine Form: $y = a_1 x + a_0$

Kurvenform: Gerade

$a_1 = \tan \alpha$ *Richtungsfaktor,* wobei α Winkel der Geraden mit der positiven x-Richtung

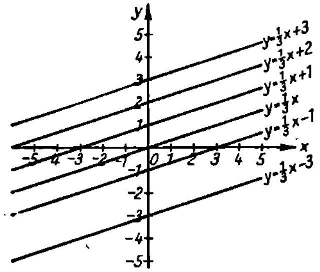
$a_1 > 0$ steigende Gerade

$a_1 < 0$ fallende Gerade

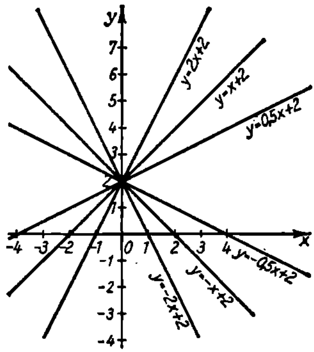
a_0 Abschnitt auf der y-Achse

$a_0 = 0$ Gerade durch den Nullpunkt

Beispiel:



a_1 = konst, parallele Geraden



a_0 = konst, Geraden durch den gleichen Punkt der y-Achse

Ganze rationale Funktion 2. Grades (quadratische Funktion)

Allgemeine Form: $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Kurvenform: quadratische Parabel, Achse parallel der Ordinatenachse

$a_2 > 0$ nach oben geöffnet

$a_2 < 0$ nach unten geöffnet

Parabelscheitel $S\left(\frac{-a_1}{2a_2}\,;\; -\frac{a_1^2}{4a_2} + a_0\right)$

Normalform:

$$y = x^2 + px + q \quad \text{mit} \quad S\left(-\frac{p}{2}\,;\; -\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]\right)$$

Kurvenform: Normalparabel, Achse parallel zur Ordinatenachse

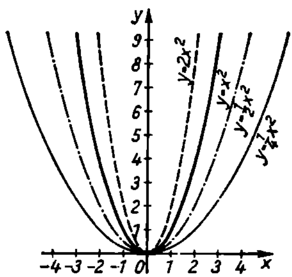
Sonderfälle

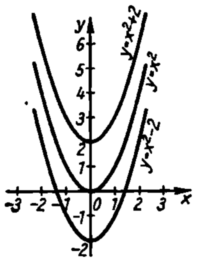
$y = a_2x^2$ Parabel mit Scheitel im Ursprung

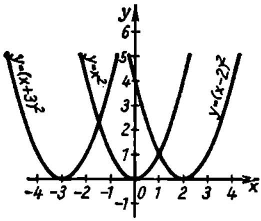
$a_2 = 1$ *Normalparabel*

$|a_2| < 1$ flachere Parabel

$|a_2| > 1$ steilere Parabel







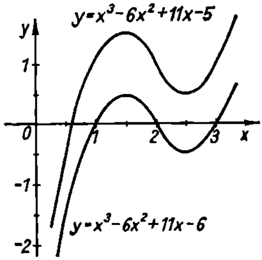
$y = x^2 + a_0$ Normalparabel mit Scheitel $S\ (0;\ a_0)$

$y = (x + b)^2$ Normalparabel mit Scheitel $S\ (-b;\ 0)$

Ganze rationale Funktion 3. Grades

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Kurvenform:

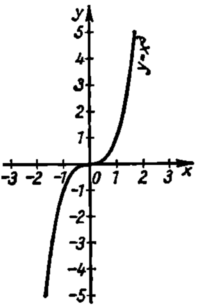


kubische Parabel

$a_3 > 0$ Die Parabel läuft von der unteren Halbebene nach der oberen Halbebene

$a_3 < 0$ umgekehrter Verlauf

a_0 verschiebt die Kurve in Ordinatenrichtung (Schnittpunkt mit der Ordinate)

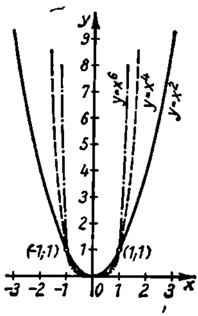


Sonderfall

$y = x^3$ *kubische Normalparabel*

Gerade Potenzfunktionen

$$y = x^{2n} \quad \text{für} \quad n \in N$$



Kurvenform:

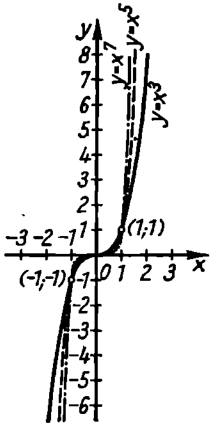
Kurvenschar von Normalparabeln 2., 4., ... Grades

Scheitel $S(0; 0)$,

$y = -x^{2n}$ ergibt die gleichen Parabeln mit Öffnung nach unten.

Ungerade Potenzfunktionen

$$y = x^{2n+1} \quad \text{für} \quad n \in N$$

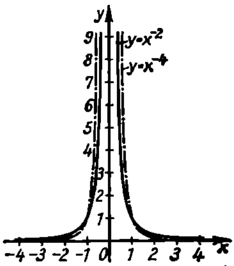


Kurvenform:

Kurvenschar von Normalparabeln 3., 5., ... Grades im 1. und 3. Quadranten, Ursprung als Symmetriezentrum $y = -x^{2n+1}$ ergibt die entsprechende Kurvenschar im 2. und 4. Quadranten, die durch Spiegelung an der x-Achse entsteht.

Gerade Potenzfunktionen mit negativem Exponenten

$$y = x^{-2n} \quad \text{für} \quad n \in N$$



Kurvenform:

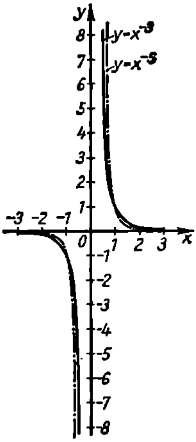
Kurvenschar von Hyperbeln im 1. und 2. Quadranten

$y = -x^{-2n}$ ergibt die entsprechende Kurvenschar im 3. und 4. Quadranten, die durch Spiegelung an der x-Achse entsteht.

Ungerade Potenzfunktionen mit negativem Exponenten

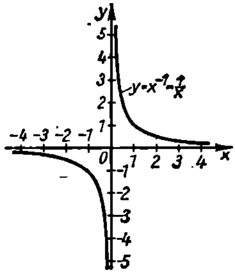
$y = x^{-(2n+1)}$ für $n \in N$

Kurvenform:
Kurvenschar von Hyperbeln im 1. und 3. Quadranten, Ursprung als Symmetriezentrum



Sonderfall: $n = 0$; $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

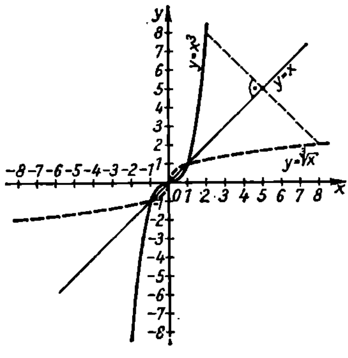
gleichseitige Hyperbel $f = f^{-1}$



$y = -x^{-(2n+1)}$ ergibt die entsprechenden Kurven im 2. und 4. Quadranten, die durch Spiegelung an der x-Achse entstehen.

Inverse Funktion

Man findet die Kurve der inversen Funktion, indem man die Kurve der ursprünglichen Funktion (Stammkurve) an der Geraden $y = x$ spiegelt.



Wurzelfunktionen

$$y = \begin{cases} \sqrt[2n-1]{x} & \text{für } x \geqq 0 \\ -\sqrt[2n-1]{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist die inverse Funktion zu

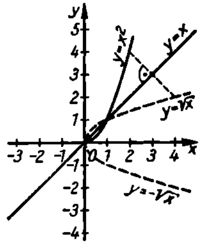
$y = x^{2n-1} \quad n \in G$

Dagegen hat $y = x^{2n}$, $x \geqq 0$ keine eindeutige Umkehrung.

Jede dieser Abbildungen ist die Vereinigung zweier Funktionen

$$y = \sqrt[2n]{x} \quad \wedge \quad y = -\sqrt[2n]{x}$$

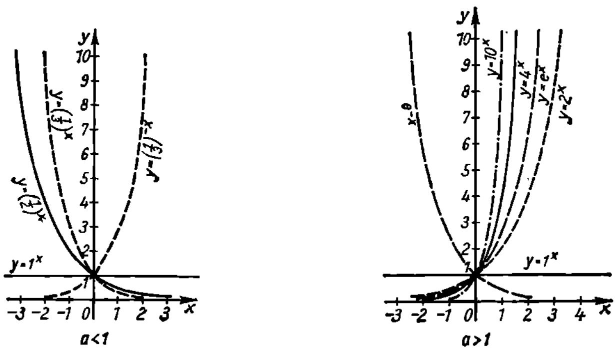
Periodische Funktionen siehe Abschnitt 9.



Transzendente Funktionen

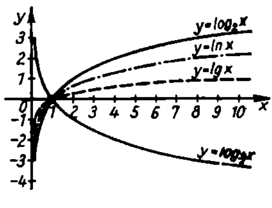
Exponentialfunktionen

$y = a^x$ ergibt für positive Werte von a Exponentialkurven, die stets durch den Punkt (0; 1) gehen.



Logarithmische Funktionen

$y = \log_a x$ ergibt für $x > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$ logarithmische Kurven, die stets durch den Punkt (1; 0) gehen. Die logarithmischen Funktionen sind invers zu den entsprechenden Exponentialfunktionen.



Trigonometrische Funktionen, Arcusfunktionen, Hyperbelfunktionen, Areafunktionen siehe unter den betreffenden Abschnitten. Graphische Darstellung von Funktionen mit 2 unabhängigen Variablen siehe Abschnitt 4.2.

2.4. Vektorrechnung

2.4.1. Allgemeines

Die auf der Seite 45 gegebene Definition des Vektors als einreihige Matrix läßt auch eine geometrische Deutung zu, die besonders in der Physik Verwendung findet.
Die wesentlichen Merkmale des Vektors sind dann sein Zahlenwert (eine Länge) und seine Richtung. Er wird graphisch meist durch einen Pfeil wiedergegeben, dessen Richtung mit der des Vektors übereinstimmt und dessen Länge einem Zahlenwert proportional ist.

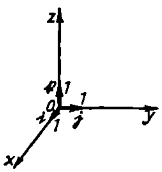
Definitionen

Vektoren werden mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... oder $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\vec{\omega}$, ... bezeichnet.

Die Länge eines Vektors heißt sein *Betrag* und wird $|\mathfrak{a}| = a$ geschrieben. *Nullvektoren* haben den Betrag Null und unbestimmte Richtung.

Ortsvektoren sind Vektoren mit gemeinsamem Anfangspunkt.
Radiusvektoren $\mathfrak{r}$ sind Ortsvektoren mit dem Anfangspunkt im Ursprung eines Koordinatensystems.

Einsvektoren haben den absoluten Betrag 1. Sie werden mit $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{c}^0$, ... (lies $\mathfrak{a}$ hoch Null) bezeichnet: $\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}$.



Einsvektoren mit gemeinsamem Anfangspunkt O, deren Richtungen mit den Achsen eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfallen, werden mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezeichnet (*Grundvektoren*).
Im folgenden wird stets ein *Rechtssystem* zugrunde gelegt, das dadurch charakterisiert ist, daß eine Drehung von der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse mit gleichzeitiger Verschiebung in Richtung der positiven z-Achse eine Rechtsschraube ergibt.

Kollineare Vektoren sind derselben Geraden parallel.
Sie sind linear abhängig, und es gilt $\mathfrak{a} = t\mathfrak{b}$, $t \in R$.

Komplanare Vektoren liegen in einer Ebene. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ komplanar, gilt:

$$\mathfrak{c} = s\mathfrak{a} + t\mathfrak{b} \qquad s, t \in R$$

bzw.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Ist $\Delta \neq 0$, sind die Vektoren linear unabhängig, d. h., sie liegen nicht in einer Ebene.

Entgegengesetzte Vektoren haben gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \mathfrak{a} \\ \overrightarrow{BA} &= -\mathfrak{a} \end{aligned}\right\} |\mathfrak{a}| = |-\mathfrak{a}|$$

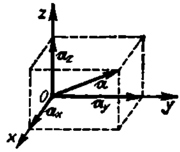
Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind einander gleich, wenn sie gleiche Größe und gleiche Richtung aufweisen, d. h., wenn ihre Komponenten gleich sind.
Freie Vektoren können im Raum beliebig parallel verschoben werden, ortsgebundene Vektoren (z. B. Feldvektoren) sind einer bestimmten Stelle des Raumes zugeordnet.
Vektoren dienen zur Darstellung von
- vektoriellen Größen in der Physik (Feldstärke, Kraft, Geschwindigkeit usw.) } ortsgeb. Vektoren
- Zahlentripeln
- geometrischen Verschiebungen — freie Vektoren

Größen, die im Gegensatz zu Vektoren nur durch einen Zahlenwert bestimmt sind, heißen *Skalare*.

Komponentendarstellung von Ortsvektoren

Die Projektionen eines Vektors $\mathfrak{a}$ auf die drei Koordinatenachsen x, y, z ergeben die *vektoriellen Komponenten* von $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z$$



Skalare Komponenten von $\mathfrak{a}$:

$$|\mathfrak{a}_x| = a_x; \quad |\mathfrak{a}_y| = a_y; \quad |\mathfrak{a}_z| = a_z$$

Die Koordinaten bezüglich $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ eines Radiusvektors sind demnach

$$a_x = x; \quad a_y = y; \quad a_z = z$$

Haben der Anfangspunkt und der Endpunkt von $\mathfrak{a}$ die Koordinaten x_1, y_1, z_1 bzw. x_2, y_2, z_2, so folgt

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1$$

Schreibweisen eines Ortsvektors:

$$\mathfrak{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{(Zeilen- oder Spaltenmatrix)}$$

$$= a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} =$$

$$= a\mathfrak{a}^0 = a[\mathfrak{i}\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) + \mathfrak{j}\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) + \mathfrak{k}\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{k})]$$

Betrag eines Ortsvektors:

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a = \sqrt{\mathfrak{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(Räumlicher Lehrsatz des Pythagoras)

Entsprechend:

$$\mathfrak{i} = (1; 0; 0); \quad \mathfrak{j} = (0; 1; 0); \quad \mathfrak{k} = (0; 0; 1)$$

Beispiel:

$$\mathfrak{a} = 5\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 6\mathfrak{k}$$

$$a = |\mathfrak{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}062$$

Richtungscosinus

Die Winkel, die der Vektor $\mathfrak{a}$ mit den positiven Koordinatenachsen bildet, ergeben sich aus den sogenannten Richtungscosinus von $\mathfrak{a}$:

$$\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{x}{a}; \quad \cos(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{y}{a}; \quad \cos(\mathfrak{a};\mathfrak{k}) = \frac{a_z}{a} = \frac{z}{a}$$

$$\cos^2(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) + \cos^2(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) + \cos^2(\mathfrak{a};\mathfrak{k}) = 1$$

$$a_x\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) + a_y\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) + a_z\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{k}) = a$$

$$\mathfrak{i}\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) + \mathfrak{j}\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) + \mathfrak{k}\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{k}) = \mathfrak{a}^0$$

Beispiel:

Richtungscosinus für $\mathfrak{a} = 5\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 6\mathfrak{k}$ (siehe obiges Beispiel)

$$\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) = \frac{5}{8{,}062} = 0{,}6202; \qquad \sphericalangle(\mathfrak{a};\mathfrak{i}) = 51^\circ\,40'$$

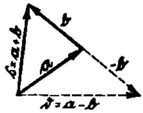
$$\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) = \frac{2}{8{,}062} = 0{,}2481; \qquad \sphericalangle(\mathfrak{a};\mathfrak{j}) = 75^\circ\,38'$$

$$\cos(\mathfrak{a};\mathfrak{k}) = \frac{-6}{8{,}062} = -0{,}7442; \quad \sphericalangle(\mathfrak{a};\mathfrak{k}) = 138^\circ\,6'$$

Addition und Subtraktion von Vektoren

An den Vektor $\mathfrak{a}$ wird der Vektor $\mathfrak{b}$ durch Parallelverschiebung angefügt. Die Verbindung des Anfangspunktes von $\mathfrak{a}$ mit dem Endpunkt von $\mathfrak{b}$ ergibt den *Summenvektor* $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

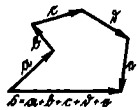
Subtraktion eines oder mehrerer Vektoren wird zurückgeführt auf eine Addition der entgegengesetzten Vektoren (siehe Bild):



$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})$$

Addition mehrerer Vektoren führt auf diesem Wege zu einem *Polygonzug*, der durch den Summenvektor geschlossen wird.

Umkehrung der Addition von Vektoren führt zur Komponentenzerlegung von Vektoren in gegebene Richtungen.



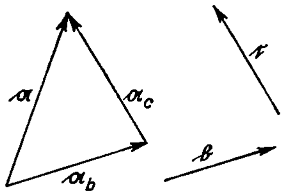
Kommutatives Gesetz der Addition

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

Assoziatives Gesetz der Addition

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$$

usw.



Für den Betrag gilt

$$|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|;$$

$$|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| \geqq |\mathfrak{a}| - |\mathfrak{b}|$$

Bildung der Summe bzw. Differenz von Ortsvektoren in Komponentendarstellung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \pm \mathfrak{b} &= \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z \pm (\mathfrak{b}_x + \mathfrak{b}_y + \mathfrak{b}_z) = \\ &= (a_x \pm b_x)\,\mathfrak{i} + (a_y \pm b_y)\,\mathfrak{j} + (a_z \pm b_z)\,\mathfrak{k} = \\ &= (x_1 \pm x_2)\,\mathfrak{i} + (y_1 \pm y_2)\,\mathfrak{j} + (z_1 \pm z_2)\,\mathfrak{k} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{a} = -5\mathfrak{i} + 12\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k} \qquad \mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} - 6\mathfrak{j} - 7\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (-5 + 3)\,\mathfrak{i} + (12 - 6)\,\mathfrak{j} + (7 - 7)\,\mathfrak{k} =$$

$$= -2\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j}$$

2.4.2. Multiplikation von Vektoren

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}n$ stellt einen Vektor dar, der mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ kollinear ist (Kommutation) $n \in R$

$$n\mathfrak{a} = n\mathfrak{a}_x + n\mathfrak{a}_y + n\mathfrak{a}_z$$

$$|n\mathfrak{a}| = |n| \cdot |\mathfrak{a}|$$

$n > 0$ ergibt $n\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}$ ($n\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}$ gleichgerichtet)

$n = 0$ ergibt $n\mathfrak{a} = 0$ (Nullvektor)

$n < 0$ ergibt $n\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{a}$ ($n\mathfrak{a}$ ist entgegengerichtet zu $\mathfrak{a}$)

$n_1(n_2\mathfrak{a}) = (n_1 n_2)\,\mathfrak{a}$ (Assoziation)

$$n(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = n\mathfrak{a} + n\mathfrak{b}$$

$$(m + n)\,\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a}$$

Skalares Produkt (inneres Produkt)

Schreibweise: $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ (lies „$\mathfrak{a}\mathfrak{b}$" oder „$\mathfrak{a}$ Punkt $\mathfrak{b}$")

Definition

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}$$

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}$ Komponente von $\mathfrak{a}$ parallel $\mathfrak{b}$

wobei $\sphericalangle(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ der kleinste Winkel ist, um den einer der Vektoren gedreht werden muß, um zum anderen parallel zu verlaufen.
Das skalare Produkt ist selbst ein Skalar.

Kommutatives Gesetz: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$

Distributives Gesetz: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$

Assoziatives Gesetz: $(n\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(n\mathfrak{b}) = n(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

aber: $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} \neq \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$

Für $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|$

Für $\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|$

Für $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$

Für die Einsvektoren folgt

$$\mathfrak{i}^2 = 1 \qquad \mathfrak{j}^2 = 1 \qquad \mathfrak{k}^2 = 1$$
$$\mathfrak{i}\mathfrak{j} = 0 \qquad \mathfrak{j}\mathfrak{k} = 0 \qquad \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0$$

Hieraus für Ortsvektoren

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$
$$\mathfrak{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Schnittwinkel zweier Geraden

$$\cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|}$$

Orthogonalität zweier Vektoren ($\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$):

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Cosinussatz:

$$(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2 \pm 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2$$
$$|\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}| = \sqrt{\mathfrak{a}^2 \pm 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2}$$
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2 - (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = 4\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{a} = 16\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 7\mathfrak{k} \qquad \mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 4\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 16 \cdot 3 + 4 \cdot (-9) + (-7)(-4) = 40$$
$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{16^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{321} \approx 17{,}9$$
$$|\mathfrak{b}| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 4^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}3$$
$$\cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = \frac{40}{17{,}9 \cdot 10{,}3} \approx 0{,}2168; \qquad \sphericalangle(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \approx 77° \, 29'$$

Vektorprodukt (äußeres Produkt)

Schreibweise: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ (lies $\mathfrak{a}$ Kreuz $\mathfrak{b}$)

Definition

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$
$$|\mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bilden ein Rechtssystem $\mathfrak{c} \perp \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c} \perp \mathfrak{b}$.

Geometrische Deutung: Der Vektor $\mathfrak{c}$ steht auf den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht. Der Betrag $|\mathfrak{c}|$ ist gleich der Maßzahl der Fläche des aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Parallelogramms.

$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = -\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}$ (Das kommutative Gesetz gilt nicht!)

Assoziatives Gesetz: $n(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = (n\mathfrak{a})\times\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\times(n\mathfrak{b})$

Distributives Gesetz: $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{a}\uparrow\uparrow\mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{a}\uparrow\downarrow\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{a}\perp\mathfrak{b} \quad \Rightarrow |\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|$$

Für die Einsvektoren folgt:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{i}\times\mathfrak{i}=\mathfrak{o} & \mathfrak{j}\times\mathfrak{j}=\mathfrak{o} & \mathfrak{k}\times\mathfrak{k}=\mathfrak{o} \\ \mathfrak{i}\times\mathfrak{j}=\mathfrak{k} & \mathfrak{j}\times\mathfrak{k}=\mathfrak{i} & \mathfrak{k}\times\mathfrak{i}=\mathfrak{j} \\ \mathfrak{j}\times\mathfrak{i}=-\mathfrak{k} & \mathfrak{k}\times\mathfrak{j}=-\mathfrak{i} & \mathfrak{i}\times\mathfrak{k}=-\mathfrak{j} \end{array}$$

Komponentendarstellung des Vektorproduktes

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = (a_yb_z - b_ya_z)\,\mathfrak{i} + (a_zb_x - b_za_x)\,\mathfrak{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\,\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{a} = 16\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 7\mathfrak{k} \qquad \mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 4\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 16 & 4 & -7 \\ 3 & -9 & -4 \end{vmatrix} = -79\mathfrak{i} + 43\mathfrak{j} - 156\mathfrak{k}$$

Mehrfache Produkte von Vektoren

Weder für das skalare noch für das vektorielle Produkt gibt es Gesetze für die Verbindung von drei und mehr Vektoren. Es können in einer Rechenoperation stets nur zwei Vektoren skalar oder vektoriell verbunden werden.

Da $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ ein Skalar ergibt, sind weitere Regeln nur für $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ als ersten Rechenschritt nötig.

Spatprodukt:

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] > 0 \quad \text{für } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \text{ Rechtssystem}$$

Geometrische Deutung: Das Spatprodukt ist dem absoluten Betrag nach gleich dem Volumen des von den drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gebildeten Prismas (Spates).

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\,\mathfrak{a} = (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = \\ = -(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})\,\mathfrak{c} = -(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})\,\mathfrak{a} = -(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})\,\mathfrak{b}$$

Beispiel:

Bestimme das Volumen des von folgenden Vektoren aufgespannten Spates.

$$\mathfrak{a} = 3\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b} = 5\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 7\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{c} = 6\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k}$$

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 5 & -1 & 7 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 69$$

$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = 0$, wenn die drei Vektoren in einer Ebene liegen (komplanare Vektoren) bzw. wenn ein Vektor ein Nullvektor ist.

Vektorprodukt dreier Vektoren

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) \neq (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$$

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,\mathfrak{a} \quad \textit{Entwicklungssatz}$$

Das Vektorprodukt dreier Vektoren $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ stellt einen Vektor dar, der in der Ebene der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegt.

Produkte mit vier Faktoren:

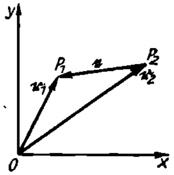
$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{d} & \mathfrak{b}\mathfrak{d} \end{vmatrix}$$

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a} & \mathfrak{a}\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\mathfrak{b} \end{vmatrix}$$

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = \mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}] - \mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] - \mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$$

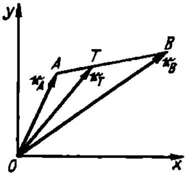
$$[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]\times\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}\times\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{d}) = \\ = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]\,\mathfrak{c} - (\mathfrak{c}\mathfrak{d})\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$$

2.4.3. Geometrische Anwendungen der Vektorrechnung



Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2

$$|\mathfrak{e}| = |\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|$$

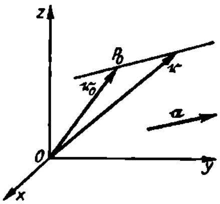


Teilung einer Strecke AB im Verhältnis λ

$$\mathfrak{r}_T = \frac{\mathfrak{r}_A + \lambda\mathfrak{r}_B}{1 + \lambda}$$

$\lambda > 0$ innerer Teilpunkt; $\lambda < 0$ äußerer Teilpunkt; $\lambda = 1$ Mittelpunkt der Strecke

$$\mathfrak{r}_M = \frac{\mathfrak{r}_A + \mathfrak{r}_B}{2}$$



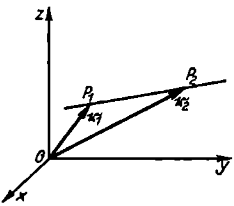
Punkt-Richtungs-Gleichung der Geraden

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}, \qquad t \in R$$

Beispiel:

$$P_0(3; -4; 6); \quad \mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 5\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} + t(2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 5\mathfrak{k})$$



Gleichung der Geraden durch zwei Punkte

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + t(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) \qquad t \in R$$

Beispiel:

$P_1(-1; 5; 7)$

$P_2(3; -4; 2)$

$$\mathfrak{r} = (-1)\,\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k} +$$
$$+ t[3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k} - (-1)\,\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j} - 7\mathfrak{k}] =$$
$$= -\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k} + t(4\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 5\mathfrak{k})$$

Schnittwinkel zweier Geraden

$$\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \arccos \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden

$$\delta = \left| \frac{([\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}] (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2))}{[\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}]} \right| = \left| \frac{\Delta}{[\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}]} \right|$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Richtungsvektoren der beiden Geraden

$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ Radiusvektoren nach je einem beliebigen Punkt auf jeder der beiden Geraden

$$\mathfrak{r}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}; \quad \mathfrak{r}_2 = x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}$$

Die Geraden schneiden einander, wenn $\Delta = 0$.

Beispiel:

$$\mathfrak{g}_1 \equiv (2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k})\, t + 3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{g}_2 \equiv (-4\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k})\, \tau - \mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 10\mathfrak{k}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & 4 & 6 \\ 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Die Geraden schneiden einander.}$$

Für die letzte Zeile der Determinante wurden die Radiusvektoren der Geradenpunkte für $t = 0$ bzw. $\tau = 0$ zugrunde gelegt.
Der Schnittpunkt ergibt sich durch Gleichsetzen der Geradengleichungen und Koeffizientenvergleich.

$$(2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k})\, t + 3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k} =$$
$$= (-4\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k})\, \tau - \mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 10\mathfrak{k}$$

$$2t + 3 = -4\tau - 1$$
$$4t - 1 = 4\tau + 5$$
$$3t + 2 = 6\tau + 10$$

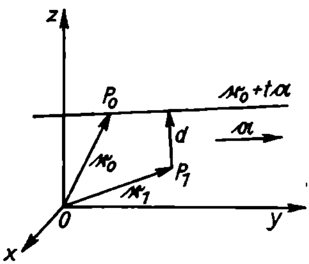
Aus zwei der obigen Gleichungen errechnen sich

$$t = \frac{1}{3}; \quad \tau = -\frac{7}{6}$$

Von diesen Werten muß auch die dritte der Gleichungen befriedigt werden, sonst gibt es keinen Schnittpunkt.

Radiusvektor des Schnittpunktes

$$\mathfrak{r}_s = (2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}) \cdot \frac{1}{3} + 3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k} =$$
$$= \frac{11}{3}\mathfrak{i} + \frac{1}{3}\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$$



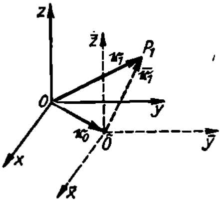
Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden

Gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$; P_1 mit Radiusvektor $\mathfrak{r}_1$

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1 + \frac{(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2}\,\mathfrak{a}$$

Parallelverschiebung des Koordinatensystems

$$\bar{\mathfrak{r}}_1 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0$$

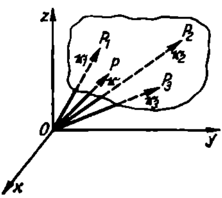


Gleichung der Ebene durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte

$$[(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2)\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_3)] = 0$$

Dieses Spatprodukt in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$



Hieraus durch Ränderung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

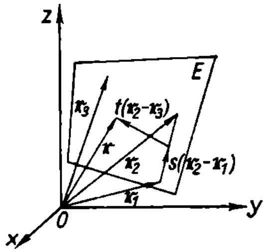
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

A, B, C, D Adjunkten der Elemente der ersten Zeile obiger Determinante

Abschnittsform: a, b, c Abschnitte auf x, y, z-Achse

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

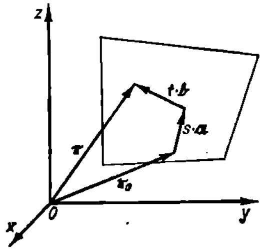
Parameterdarstellung der Ebene



$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + s(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + t(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3)$$

s, t Parameter

$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ Radiusvektoren von drei gegebenen Punkten auf der Ebene



$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + s\mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$$

s, t Parameter

$\mathfrak{r}_0$ Radiusvektor des gegebenen Punktes

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Richtungsvektoren

Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene

(Gleichung der Ebene durch P_0, senkrecht auf $\mathfrak{a}$)

Stellungsvektor $\mathfrak{n}^0 = \dfrac{\mathfrak{n}}{|\mathfrak{n}|}$ Normalenvektor

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) = 0$$
$$\mathfrak{n}\mathfrak{r} = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0$$
$$\mathfrak{n}\mathfrak{r} + D = 0$$

Hessesche Normalform der Ebenengleichung

Aus Vorstehendem folgt

$$\mathfrak{n}^0\mathfrak{r} - p = 0$$

$p = -\dfrac{D}{|\mathfrak{n}|}$ Abstand des Ursprungs von der Ebene

Abstand eines Punktes P_0 von der Ebene

$$d = \mathfrak{n}^0\mathfrak{r}_0 - p \begin{cases} < 0 \text{ für } P_0 \text{ und Ursprung auf derselben Seite der Ebene} \\ > 0 \text{ für } P_0 \text{ und Ursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene} \end{cases}$$

$d = \mathfrak{n}^0(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)$ $\mathfrak{r}_1$ Radiusvektor eines Ebenenpunktes

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$; Ebene $\mathfrak{n}\mathfrak{r} = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0$

$$\varphi = \arcsin \left| \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{a}}{|\mathfrak{n}| \cdot |\mathfrak{a}|} \right|$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

$$\cos(E_1; E_2) = \frac{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2}{|\mathfrak{n}_1| \cdot |\mathfrak{n}_2|}$$

Fläche des ebenen Dreiecks

$$2A = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1$$

$\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ Radiusvektoren zu den Ecken

Volumen einer dreiseitigen Pyramide mit Spitze im Ursprung

$$V = \left| \frac{1}{6} (\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2)\, \mathfrak{r}_3 \right|$$

Volumen einer dreiseitigen Pyramide in beliebiger Lage

$$V = \left| \frac{1}{6} [(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_4)(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_4)(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_4)] \right| \qquad P_4 \text{ Spitze}$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Zerlegen des Vektors $\mathfrak{a}$ nach den Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] + \mathfrak{c}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}] + \mathfrak{d}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]}{[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]}$$

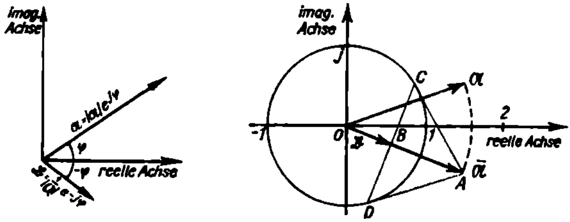
2.5. Spiegelung am Kreis, Inversion

Inversion:

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\, e^{j\varphi} \Leftrightarrow \mathfrak{B} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|}\, e^{-j\varphi}$$

Anwendung: Inversion von Ortskurven, Umrechnung Widerstand in Leitwert u.ä.

Inversion eines Zeigers gemäß obiger Gleichung mittels graphischen Verfahrens am Einheitskreis:



1. Zeichnen des konjugiert komplexen Zeigers $\overline{\mathfrak{A}} = |\mathfrak{A}|\, e^{-j\varphi}$
2. Zeichnen der Tangenten vom Endpunkt des Zeigers $\overline{\mathfrak{A}}$ an den Kreis
3. Verbindungslinie der Tangentenberührungspunkte schneidet den Zeiger $\overline{\mathfrak{A}}$ in B, dem Endpunkt des inversen Zeigers $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'$

Begründung:

$$\triangle\, OBD \sim \triangle\, ODA;\ \frac{|\mathfrak{A}|}{1} = \frac{1}{|\mathfrak{B}|}$$

Unter Berücksichtigung des Maßstabes gilt:

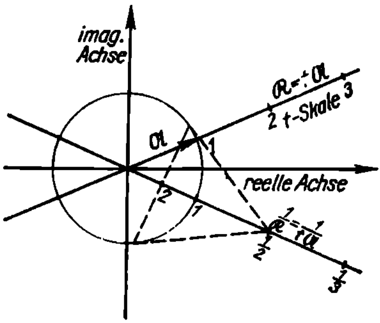
$$r = 1 \mathrel{\widehat{=}} a \text{Einheiten von } \mathfrak{A} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \text{ Einheiten von } \mathfrak{B}$$

z. B. Kreisdurchmesser $r = 1 \mathrel{\widehat{=}} 5\,\Omega \Leftrightarrow \frac{1}{5}\,\mathrm{S}$

bei Umrechnung Widerstand—Leitwert

Inversion von Kurven

1. Inversionssatz: Eine Gerade durch den Nullpunkt ergibt durch Inversion wieder eine Gerade durch den Nullpunkt.



Gegeben:

Gerade $\mathfrak{R}(t) = t\mathfrak{A}$.

Invertiert:

Gerade $\dfrac{1}{\mathfrak{R}} = \dfrac{1}{t\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}'$

1. Zeichnen der konjugierten Richtung durch $\mathfrak{A} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$
2. Auftragen der Parameterskale t für

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{t\mathfrak{A}}$$

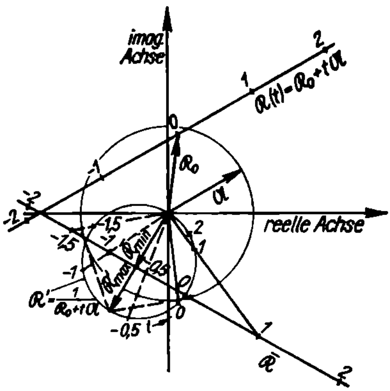
2. Inversionssatz: Eine Gerade nicht durch den Nullpunkt ergibt durch Inversion einen Kreis durch den Nullpunkt.

Gegeben:

Gerade $\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}_0 + t\mathfrak{A}$

Invertiert:

Kreis $\dfrac{1}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}' = \dfrac{1}{\mathfrak{R}_0 + t\mathfrak{A}}$



1. Zeichnen der konjugierten Geraden $\overline{\mathfrak{R}}$
2. Zeichnen der Normalen zu $\overline{\mathfrak{R}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{R}}_{\min}$
3. Spiegelung von $\overline{\mathfrak{R}}_{\min}$ am Einheitskreis $\Rightarrow \mathfrak{R}'_{\max}$

Die Tangentenpunkte T_1 und T_2 sind Schnittpunkte von $\overline{\mathfrak{R}}$ mit dem Einheitskreis und gleichzeitig auch Punkte des durch die Inversion erhaltenen Kreises.

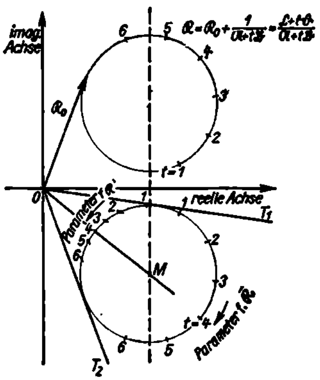
3. Inversionssatz: Ein Kreis nicht durch den Nullpunkt ergibt durch Inversion wieder einen Kreis nicht durch den Nullpunkt.

Gegeben:

$$\text{Kreis } \mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}_0 + \frac{1}{\mathfrak{A} + t\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C} + t\mathfrak{D}}{\mathfrak{A} + t\mathfrak{B}}$$

Invertiert:

$$\text{Kreis } \mathfrak{R}' = \frac{\mathfrak{A} + t\mathfrak{B}}{\mathfrak{C} + t\mathfrak{D}} \text{ gleicher Art}$$



1. Zeichnen des konjugiert komplexen Kreises $\overline{\mathfrak{R}}$.
2. Zweckmäßigerweise Maßstabswahl für inversen Kreis so, daß konjugierter und inverser Kreis zusammenfallen. Damit Parameterskale für inversen Kreis $\mathfrak{R}'$, als Schnittpunkte der Verbindungs-

geraden Parameterpunkte konjugierter Kreis—Nullpunkt eintragen.

Bei Wahl eines anderen Maßstabs für den inversen Kreis ist zu beachten, daß die Tangenten vom Nullpunkt an den konjugiert komplexen Kreis stets auch Tangenten des inversen Kreises sind, wodurch der Mittelpunkt stets auf der Geraden durch M und O liegt.

3. Geometrie

3.1. Allgemeines

Winkel

Nebenwinkel betragen zusammen 180°.
Scheitelwinkel sind einander gleich.
Komplementwinkel betragen zusammen 90°.
Supplementwinkel betragen zusammen 180°.

Winkelmaße

Winkel werden gemessen in *Altgrad*, *Neugrad* (*Gon*) oder *Bogenmaß* (*Radiant*). Der Altgrad wird in Minuten ($1° = 60'$) und Sekunden ($1' = 60''$) unterteilt (sexagesimale Teilung).
Der Neugrad (das Gon) wird in Neuminuten ($1^g = 100^c$) und Neusekunden ($1^c = 100^{cc}$) unterteilt (dezimale Teilung).

$$360° \triangleq 400^g \qquad 90° \triangleq 100^g$$

Unter dem Bogenmaß eines Winkels α versteht man die Maßzahl des Bogens (*arcus*), der im Einheitskreis zu dem Zentriwinkel α gehört.

$$1\varphi_0 = 2\pi \text{ rad} = 4^L = 360° = 400^g$$

$$1 \text{ rad} = 0{,}6366198^L = 57{,}29578° = 57°\,17'\,45'' = 63{,}66198^g$$

1 rad ist der ebene Winkel, für den das Verhältnis der Länge des zugehörigen Kreisbogens zu seinem Halbmesser gleich 1 ist.

Umrechnungsfaktor $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{2\pi}$ $\qquad \varphi_0$ Vollwinkel

speziell $\qquad \varphi\,[\text{Grad}] = \dfrac{180}{\pi}\,\varphi\,[\text{rad}]$

$$360° = 2\pi \text{ rad} \qquad 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$270° = \frac{3}{2}\pi \text{ rad} \qquad 45° = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

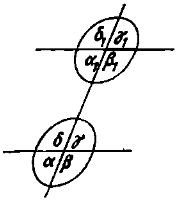
$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \qquad 1° = 0{,}01745 \text{ rad}$$

$$1' = 0{,}00029 \text{ rad}$$

Winkel an geschnittenen Parallelen

Stufenwinkel sind einander gleich.



$$\alpha = \alpha_1 \qquad \gamma = \gamma_1$$

$$\beta = \beta_1 \qquad \delta = \delta_1$$

Wechselwinkel sind einander gleich.

$$\alpha = \gamma_1 \qquad \gamma = \alpha_1$$

$$\beta = \delta_1 \qquad \delta = \beta_1$$

Entgegengesetzte Winkel betragen zusammen 180°.

$$\alpha + \delta_1 = 180° \qquad \gamma + \beta_1 = 180°$$

$$\beta + \gamma_1 = 180° \qquad \delta + \alpha_1 = 180°$$

Symmetrie

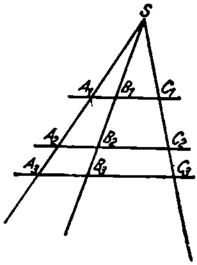
Eine ebene Figur heißt *axialsymmetrisch*, wenn sie durch eine Gerade in zwei Teile zerlegt werden kann, die sich durch Umklappen um diese Gerade (Symmetrieachse) um 180° zur Deckung bringen lassen.
Eine ebene Figur heißt *zentralsymmetrisch*, wenn sie sich nach Drehung um einen bestimmten Punkt (Symmetriezentrum) mit der ursprünglichen Lage deckt.

Strahlensätze

1. Strahlensatz: Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl wie die gleichliegenden Abschnitte auf jedem anderen Strahl.

2. Strahlensatz: Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die entsprechenden Scheitelstrecken auf irgendeinem Strahl.

1. Strahlensatz:



$$\overline{SA_1}:\overline{SA_2}:\overline{SA_3} = \overline{SB_1}:\overline{SB_2}:\overline{SB_3} = \\ = \overline{SC_1}:\overline{SC_2}:\overline{SC_3}$$

oder

$$\overline{SA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3} = \\ = \overline{SB_1}:\overline{B_1B_2}:\overline{B_2B_3} = \\ = \overline{SC_1}:\overline{C_1C_2}:\overline{C_2C_3}$$

usw.

2. Strahlensatz:

$$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}:\overline{A_3B_3} = \overline{SA_1}:\overline{SA_2}:\overline{SA_3}$$

oder

$$\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}:\overline{B_3C_3} = \overline{SC_1}:\overline{SC_2}:\overline{SC_3}$$

usw.

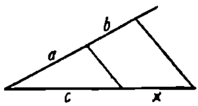
Hieraus folgt:

$$\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2} = \overline{A_3B_3}:\overline{B_3C_3}$$

Vierte Proportionale

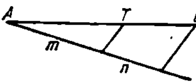
a, b, c gegebene Strecken

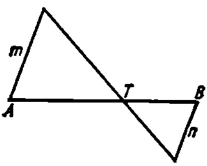
$a:b = c:x$



Teilung einer Strecke in gegebenem Verhältnis

Strecke AB soll im Verhältnis $m:n$ geteilt werden.

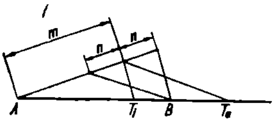




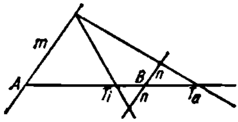
Der entstandene Teilpunkt heißt genauer *innerer* Teilpunkt.

Harmonische Teilung einer Strecke

Teilt man eine Strecke AB innen und außen im gleichen Verhältnis $m:n$, so nennt man die Punkte A, B, T_i, T_a die zu $\overline{AB}$ und $m:n$ gehörenden vier harmonischen Punkte.



Anwendung des 1. Strahlensatzes

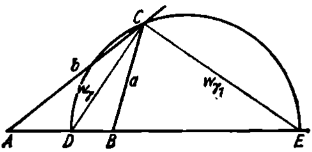


Anwendung des 2. Strahlensatzes

T_i *innerer Teilpunkt*
T_a *äußerer Teilpunkt*

In jedem Dreieck teilen die Halbierungslinien eines Innenwinkels und seines Außenwinkels die Gegenseite harmonisch, und zwar im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

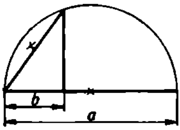
$$\overline{AD}:\overline{BD} = \overline{AE}:\overline{BE} = b:a$$



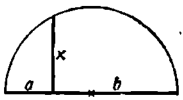
Der Kreis über $\overline{DE}$ als Durchmesser ist geometrischer Ort für die Spitzen aller Dreiecke, von denen eine Seite (im Bild $\overline{AB}$) festgelegt und das Verhältnis der beiden anderen Seiten vorgeschrieben ist (Kreis des APPOLONIUS).

Mittlere Proportionale (geometrisches Mittel)

$$x^2 = a \cdot b \Rightarrow a:x = x:b$$

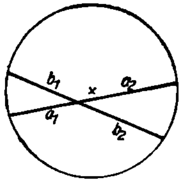


Kathetensatz



Höhensatz

Siehe auch „Tangentensekantensatz“.



Streckenverhältnis am Kreis

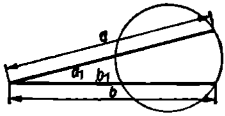
Sehnensatz: Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises Sehnen, so ist das Produkt ihrer Abschnitte konstant.

$$a_1 a_2 = b_1 b_2$$

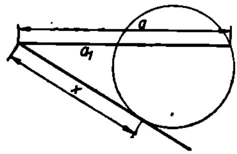
Sekantensatz: Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises Sekanten, so ist das Produkt aus jeder Sekante und ihrem äußeren Abschnitt konstant.

$$aa_1 = bb_1$$

Tangentensekantensatz: Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante und eine Tangente, so ist das Produkt aus

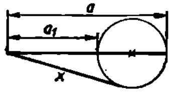


Sekantensatz



Tangentensekantensatz

der Sekante und ihrem äußeren Abschnitt gleich dem Quadrat der Tangentenlänge.



$$aa_1 = x^2 \quad \text{oder} \quad a:x = x:a_1$$

Die Tangentenlänge ist die mittlere Proportionale zu der Sekante und ihrem äußeren Abschnitt (Konstruktion der mittleren Proportionalen).

Stetige Teilung (Goldener Schnitt)

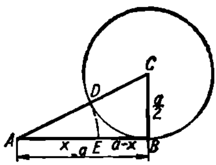
Eine Strecke heißt stetig geteilt, wenn der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zu der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt ist.

$$a:x = x:(a - x)$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a \approx 0{,}618a$$

Konstruktion der stetigen Teilung

Man errichtet auf der Strecke $AB = a$ in B die Senkrechte $BC = \frac{1}{2}a$, verbindet A mit C, beschreibt um C den Kreis mit Radius $\frac{1}{2}a$, der $\overline{AC}$ in D schneidet, und trägt $\overline{AD}$ auf $\overline{AB}$ von A aus ab. E teilt $\overline{AB}$ stetig.



Anwendung: Die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist der größere Abschnitt des stetig geteilten Radius seines Umkreises.

Ähnlichkeit

Ebene Vielecke, die in der Form übereinstimmen, heißen ähnlich ($\sim$).

Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

in zwei Winkeln oder

im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder

im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite oder

im Verhältnis der drei Seiten.

Ähnliche Dreiecke werden durch entsprechende Höhen oder Winkelhalbierenden oder Seitenhalbierenden in ähnliche Dreiecke zerlegt.
In ähnlichen Dreiecken verhalten sich entsprechende Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden wie ein Paar entsprechender Seiten.
Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie ein Paar entsprechender Strecken (Seiten, Höhen, Seitenhalbierenden usw.)

$$u_1:u_2 = a_1:a_2 = b_1:b_2 = c_1:c_2 = k$$

(*Ähnlichkeitsverhältnis, Linearvergrößerung*)

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Strecken (Seiten, Höhen, Seitenhalbierenden usw.)

$$A_1:A_2 = a_1^2:a_2^2 = b_1^2:b_2^2 = c_1^2:c_2^2 = k^2 \qquad (k \text{ siehe oben})$$

Vielecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis entsprechender Seiten oder in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen.
Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar entsprechender Strecken (Seiten, Höhen, Diagonalen usw.)

$$u_1:u_2 = a_1:a_2 = b_1:b_2 = \ldots = k$$

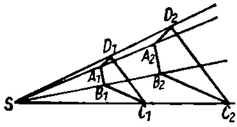
Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken (Seiten, Höhen, Diagonalen usw.)

$$A_1:A_2 = a_1^2:a_2^2 = b_1^2:b_2^2 = \ldots = k^2$$

Die *Flächenvergrößerung* ähnlicher Vielecke ist gleich dem Quadrat der linearen Vergrößerung.

Ähnlichkeitslage

Ähnliche Vielecke sind in Ähnlichkeitslage, wenn entsprechende Seiten parallel sind und entsprechende Punkte auf Strahlen eines Strahlenbüschels liegen. Der Scheitel S des Strahlenbüschels heißt *Ähnlichkeitspunkt.*



Kongruenz

Vielecke, die nicht nur in der Form, sondern auch in der Größe homologer Stücke übereinstimmen, heißen kongruent ($\cong$).

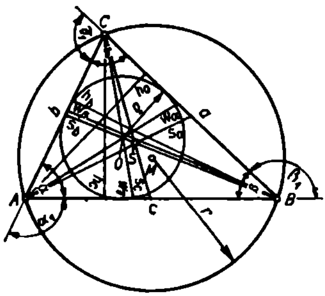
Kongruenzsätze

Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen
in einer Seite und zwei Winkeln oder
in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder
in den drei Seiten.

3.2. Planimetrie

3.2.1. Dreieck *ABC*

Bezeichnungen:



α, β, γ	Innenwinkel
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$	Außenwinkel
a	Gegenseite der Ecke A
b	Gegenseite der Ecke B
c	Gegenseite der Ecke C
A	Flächeninhalt

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

h_a Höhe zur Seite a	s_a Seitenhalbierende von A aus
h_b Höhe zur Seite b	s_b Seitenhalbierende von B aus
h_c Höhe zur Seite c	s_c Seitenhalbierende von C aus

$w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ Winkelhalbierende der Innenwinkel

$w_{\alpha_1}, w_{\beta_1}, w_{\gamma_1}$ Winkelhalbierende der Außenwinkel

r Radius des Umkreises, ϱ Radius des Inkreises, $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ Radien der Ankreise (die im Index stehende Seite wird berührt).

Winkelbeziehungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$$

$$\alpha_1 = \beta + \gamma; \quad \beta_1 = \alpha + \gamma; \quad \gamma_1 = \alpha + \beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -(4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1)$$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = 1$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)\times$$
$$\times(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma)(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) =$$
$$= 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

Sinussatz

$$a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Mollweidesche Formeln

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad \frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

Tangenssatz

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{a+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

Halbwinkelsätze

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}; \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}; \quad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Seitensätze

$$a + b > c \qquad |a - b| < c$$

$$b + c > a \qquad |b - c| < a$$

$$a + c > b \qquad |a - c| < b$$

Seitenhalbierende

Schnittpunkt der Seitenhalbierenden = *Schwerpunkt S*. Abstand des Schwerpunktes von einer Seite gleich einem Drittel der zugehörigen Höhe.
Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden = 2:1 (gerechnet vom Eckpunkt aus)

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}$$

$$s_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}$$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}$$

Winkelhalbierende

Jede der Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ teilt die Gegenseite *innen* im Verhältnis der anliegenden Seiten.
Jede der Winkelhalbierenden w_{α_1}, w_{β_1}, w_{γ_1} teilt die Gegenseite *außen* im Verhältnis der anliegenden Seiten.

$\overline{AD}:\overline{BD} = b:a$ (vgl. Bild S. 122)

$\overline{AE}:\overline{BE} = b:a$

$$w_\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$w_\beta = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]} = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$$

$$w_\gamma = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]} = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

Höhen

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

$h_a = b \sin\gamma =$ $= c\sin\beta$	$h_b = a\sin\gamma =$ $= c\sin\alpha$	$h_c = a\sin\beta =$ $= b\sin\alpha$

Umkreis

Umkreismittelpunkt = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (Senkrechten auf den Seiten in ihren Mitten)

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

$$s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$r = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c} = \frac{abc}{4A}$$

Inkreis

Inkreismittelpunkt = Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

$$w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$$

$$\varrho = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\varrho = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (s-b)\tan\frac{\beta}{2} = (s-c)\tan\frac{\gamma}{2}$$

$$\varrho = s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

$$\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Ankreise

Ankreismittelpunkte = Schnittpunkte von $w_\alpha, w_{\beta_1}, w_{\gamma_1}$

bzw. von $w_\beta, w_{\alpha_1}, w_{\gamma_1}$

bzw. von $w_\gamma, w_{\alpha_1}, w_{\beta_1}$

Abstand des Umkreismittelpunktes vom Inkreismittelpunkt = $= \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$

$$\varrho_a = \frac{A}{s-a}; \quad \varrho_b = \frac{A}{s-b}; \quad \varrho_c = \frac{A}{s-c}$$

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{\varrho_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \qquad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho$$

$$\varrho_a = s \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\varrho_b = s \tan\frac{\beta}{2} = \frac{b \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\varrho_c = s \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{c \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{abc}{4r} = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}$$

$$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \textit{(Heronische Formel)}$$

$$A = \varrho s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c)$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta$$

$$A = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$$

$$A = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

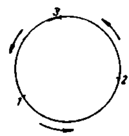
$$A = s^2 \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2}$$

$$A = \varrho^2 \cot\frac{\alpha}{2} \cot\frac{\beta}{2} \cot\frac{\gamma}{2}$$

Sind die Ecken eines Dreiecks im rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, dann gilt:

$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

Die Indizes der drei Summanden in der eckigen Klammer gehen durch *zyklische Vertauschung* auseinander hervor.



$$A = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) +$$

$$+ (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Der Flächeninhalt ergibt sich positiv, wenn die drei Eckpunkte des Dreiecks in entgegengesetztem Drehsinn des Uhrzeigers (*mathematischem Drehsinn*) durchlaufen werden können, sonst negativ. In letzterem Falle ist der Betrag zu nehmen.
Sind die Ecken des Dreiecks in Polarkoordinaten gegeben, und zwar $A(r_1; \varphi_1)$, $B(r_2; \varphi_2)$, $C(r_3; \varphi_3)$, dann gilt:

$$A = \frac{1}{2} [r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + r_2 r_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) +$$

$$+ r_3 r_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)]$$

Verallgemeinerter Satz des Pythagoras

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bp \qquad \alpha \gtrless 90^\circ \qquad p \text{ Projektion von } c \text{ auf } b$$

$$b^2 = c^2 + a^2 \pm 2cq \text{ für } \beta \gtrless 90^\circ \qquad q \text{ Projektion von } a \text{ auf } c$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ar \qquad \gamma \gtrless 90^\circ \qquad r \text{ Projektion von } b \text{ auf } a$$

Grundaufgaben des Dreiecks

Ein Dreieck ist eindeutig bestimmbar aus
1 Seite und 2 Winkeln oder
2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
2 Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder
3 Seiten.

Grundaufgabe 1:
Gegeben eine Seite und zwei Winkel (z. B. a, α, γ).

Lösungsweg:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Grundaufgabe 2:
Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (z. B. a, c, β).

Lösungsweg 1:

$$\tan \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cot \frac{\beta}{2} \qquad \text{(Tangenssatz)}$$

Hieraus $\frac{\alpha - \gamma}{2}$

Durch Addition und Subtraktion von

$$\frac{\alpha - \gamma}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

ergeben sich α und γ.

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Lösungsweg 2:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta} \qquad \text{(Cosinussatz)}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Grundaufgabe 3:

Gegeben zwei Seiten und der der größeren von ihnen gegenüberliegende Winkel (z. B. a, b, α; $a > b$).

Lösungsweg:

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Grundaufgabe 4:

Gegeben die drei Seiten a, b, c.

Lösungsweg 1:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{(Halbwinkelsatz)}$$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

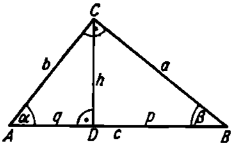
Lösungsweg 2:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{(Cosinussatz)}$$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Rechtwinkliges Dreieck



Bezeichnungen

a und b Katheten ($\gamma = 90°$)
c Hypotenuse
h Höhe
p Projektion von a auf c
q Projektion von b auf c

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\gamma = 90°)$$

Pythagoreische Zahlen

Pythagoreische Zahlen befriedigen die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c \in G$.

Man erhält pythagoreische Zahlen, wenn man $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $c = p^2 + q^2$ setzt ($p, q \in G$).

Tabelle für pythagoreische Zahlen:

p	q	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
4	1	8	15	17
5	1	10	24	26
3	2	12	5	13
4	2	16	12	20
5	2	20	21	29
4	3	24	7	25
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41

usw.

Man erhält weitere pythagoreische Zahlen, wenn man die in obiger Tabelle zusammengehörenden a, b, c-Werte durch λa, λb, λc ersetzt ($\lambda \in N$).

Sind die Maßzahlen der Seiten eines Dreiecks pythagoreische Zahlen, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Kathetensatz (Euklid)

$$a^2 = cp; \quad b^2 = cq$$

Höhensatz (Euklid)

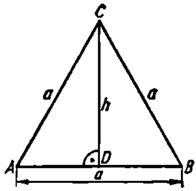
$$h^2 = pq$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$$

Abstand des *Schwerpunktes* S von der Hypotenuse $= \frac{1}{3}h$
Abstand des *Schwerpunktes* S von der Kathete $a = \frac{1}{3}b$
Abstand des *Schwerpunktes* S von der Kathete $b = \frac{1}{3}a$

Gleichseitiges Dreieck



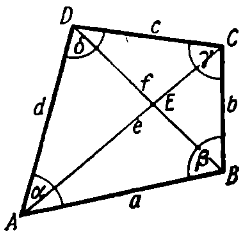
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Abstand des *Schwerpunktes* S von einer Seite $= \frac{a}{6}\sqrt{3}$

3.2.2. Vierecke

Bezeichnungen



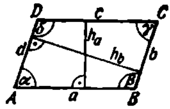
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Innenwinkel
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$	Außenwinkel
a, b, c, d	Seiten
e, f	Diagonalen
ϱ	Radius des Inkreises
h_a	Höhe zur Seite a
h_b	Höhe zur Seite b

Winkelsummen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360°$$

Parallelogramm



$$a \parallel c; \quad b \parallel d; \quad a = c; \quad b = d$$

$$\alpha = \gamma; \qquad \beta = \delta$$

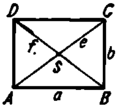
$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$$

Die Diagonalen halbieren einander.

Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Diagonalen.

$$A = ah_a = bh_b = gh \qquad \begin{array}{l} g \text{ Grundlinie} \\ h \text{ zugehörige Höhe} \end{array}$$

Rechteck



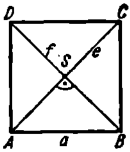
$$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Diagonalen halbieren einander.

$$A = ab$$

Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Diagonalen

Quadrat



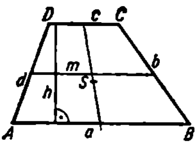
Die Diagonalen e und f halbieren einander und stehen senkrecht aufeinander.

$$e = f = a\sqrt{2}$$

$$A = a^2 = \frac{1}{2}e^2$$

Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Diagonalen

Trapez



m Mittelparallele

$$a \parallel c$$

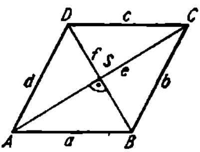
$$A = \frac{a + c}{2}h = mh$$

Der *Schwerpunkt* S liegt auf der Verbindungslinie der Mitten der parallelen Grundseiten im Abstand $\frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2c}{a + c}$ von der Grundlinie a.

Rhombus (Raute)

$$a = b = c = d$$

Die Diagonalen e und f stehen senkrecht aufeinander, halbieren einander und die Rhombuswinkel.



$$A = \frac{ef}{2}$$

Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Diagonalen

Sehnenviereck

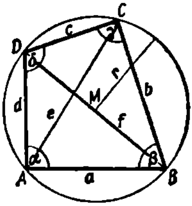
$$\alpha + \gamma = 180°; \quad \beta + \delta = 180°$$

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

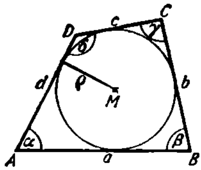
$ac + bd = ef$ (Satz von PTOLEMÄUS)

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}; \quad f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}}$$

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$



Sehnenviereck



Tangentenviereck

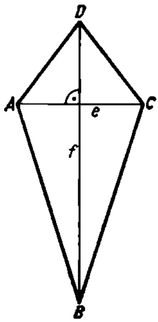
Tangentenviereck

$$a + c = b + d$$

$A = \varrho s$ $\quad$ s siehe unter Sehnenviereck

Drachenviereck

$$A = \frac{ef}{2}$$



Drachenviereck

3.2.3. Vielecke (n-Ecke)

Winkelsumme des n-Ecks

Summe der Innenwinkel $= (2n - 4) \cdot 90°$

Summe der Außenwinkel $= 360°$

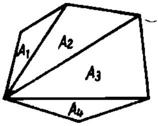
Anzahl der Diagonalen des n-Ecks

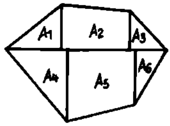
$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Flächeninhalt des n-Ecks

Das n-Eck wird entweder in Dreiecke durch Diagonalen von einem Eckpunkt aus oder in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze durch Lote von den Ecken auf eine Standlinie zerlegt.

$$A = \sum_{1}^{k} A_i$$





Regelmäßige n-Ecke

Die Seiten und Winkel des regelmäßigen n-Ecks sind gleich.

Bezeichnungen:

s_n	Seite des regelmäßigen n-Ecks
s_{2n}	Seite des regelmäßigen $2n$-Ecks
r	Radius des Umkreises
ϱ_n	Radius des Inkreises
α	Innenwinkel
α_1	Außenwinkel

Schwerpunkt S = Mittelpunkt des Umkreises

Winkel des regelmäßigen n-Ecks:

$$\alpha = \frac{2n-4}{n} \cdot 90^\circ \qquad \alpha_1 = \frac{360^\circ}{n}$$

Beziehung zwischen s_n, r und ϱ_n:

$$\varrho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

Berechnung der Seite s_{2n} aus s_n:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\varrho_n}$$

Fläche des n-Ecks:

$$A_n = \frac{n s_n \varrho_n}{2} = \frac{n s_n \sqrt{4r^2 - s_n^2}}{4}$$

$$A_n = \frac{nr^2}{2}\sin\gamma \qquad \gamma \text{ Mittelpunktswinkel}$$

Einfache regelmäßige Vielecke

Gegeben: Umkreisradius r

Regelmäßiges Dreieck (gleichseitiges Dreieck)

$$s_3 = r\sqrt{3} \qquad \varrho_3 = \frac{r}{2} \qquad A = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

Regelmäßiges Viereck (Quadrat)

$$s_4 = r\sqrt{2} \qquad \varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2} \qquad A = 2r^2$$

Regelmäßiges Fünfeck

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \varrho_5 = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$A = \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Regelmäßiges Sechseck

$$s_6 = r \qquad \varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3} \qquad A = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$$

Regelmäßiges Achteck

$$s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \varrho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad A = 2r^2\sqrt{2}$$

Regelmäßiges Zehneck

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad \varrho_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Gegeben: Seite s_n des Vielecks

Regelmäßiges Dreieck (gleichseitiges Dreieck)

$$r = \frac{s_3}{3}\sqrt{3} \qquad \varrho_3 = \frac{s_3}{6}\sqrt{3} \qquad A = \frac{s_3^2}{4}\sqrt{3}$$

Regelmäßiges Viereck (Quadrat)

$$r = \frac{s_4}{2}\sqrt{2} \qquad \varrho_4 = \frac{s_4}{2} \qquad A = s_4^2$$

Regelmäßiges Fünfeck

$$r = \frac{s_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} \qquad \varrho_5 = \frac{s_5}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{s_5^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Regelmäßiges Sechseck

$$r = s_6 \qquad \varrho_6 = \frac{s_6}{2}\sqrt{3} \qquad A = \frac{3}{2}s_6^2\sqrt{3}$$

Regelmäßiges Achteck

$$r = \frac{s_8}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \qquad \varrho_8 = \frac{s_8}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$A = 2s_8^2\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

Näherungswert für die Seite des regelmäßigen Neunecks ($r = 1$)

$$s_9 \approx \frac{2\sqrt{5} + 1}{8}$$ (nach H. Kissel, Ludwigshafen/Rh.)

Regelmäßiges Zehneck

$$r = \frac{s_{10}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) \qquad \varrho_{10} = \frac{s_{10}}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

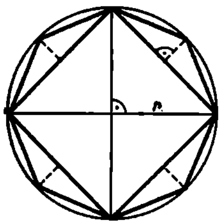
$$A = \frac{5}{2}s_{10}^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Konstruktion der einfachen regelmäßigen Vielecke

Gegeben: Umkreisradius r

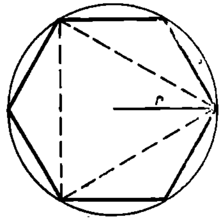
Regelmäßiges Dreieck siehe regelmäßiges Sechseck.

Regelmäßiges Viereck und Achteck



In den Kreis mit dem gegebenen Radius r zeichnet man zwei zueinander senkrechte Durchmesser und verbindet deren Endpunkte miteinander.
Errichtet man auf jeder Viereckseite die Mittelsenkrechte und bringt diese zum Schnitt mit dem Umfang des Kreises, so erhält man die Ecken des regelmäßigen Achtecks. Nach dem gleichen Verfahren ergibt sich das regelmäßige 2^n-Eck ($n \in N$).

Regelmäßiges Sechseck und Dreieck

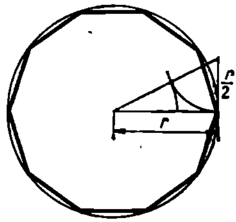


In den Kreis mit dem gegebenen Radius r trägt man den Radius sechsmal hintereinander als Sehne ein.
Das regelmäßige Dreieck entsteht, wenn man im regelmäßigen Sechseck drei nicht benachbarte Ecken miteinander verbindet.

Regelmäßiges Zwölfeck

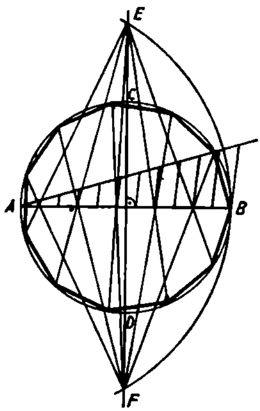
Errichtet man auf den Seiten des regelmäßigen Sechsecks die Mittelsenkrechten und bringt diese zum Schnitt mit dem Kreisumfang, so erhält man die Ecken des regelmäßigen Zwölfecks. Auf dieselbe Weise kann man das regelmäßige 24-Eck, 48-Eck, ..., allgemein das $3 \cdot 2^n$-Eck ($n \in N$) zeichnen.

Regelmäßiges Zehneck und Fünfeck



Man teilt den gegebenen Radius r stetig und trägt den größeren Abschnitt in den Kreis mit Radius r hintereinander zehnmal als Sehne ein.
Das regelmäßige Fünfeck entsteht, wenn man im regelmäßigen Zehneck fünf nicht benachbarte Ecken miteinander verbindet. Aus dem regelmäßigen Zehneck erhält man mit Hilfe der Mittelsenkrechten das 20-Eck, das 40-Eck, ..., allgemein das $5 \cdot 2^n$-Eck ($n \in N$).

Näherungskonstruktion beliebiger regelmäßiger n-Ecke

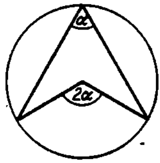


Gegeben: Umkreisradius r

In den Kreis mit dem gegebenen Radius r zeichnet man zwei zueinander senkrechte Durchmesser AB und CD ein. Den einen Durchmesser (im Bild $\overline{AB}$) teilt man dann in n (im Bild $n = 11$) gleiche Teile und schlägt um den einen Endpunkt (im Bild A) den Kreis mit Radius $2r$, der die Verlängerungen des anderen Durchmessers in E und F schneidet. Von E und F aus zieht man Strahlen durch die Teilpunkte, wobei immer ein Teilpunkt ausgelassen wird, und erhält in deren Schnittpunkten mit dem Ausgangskreis die Eckpunkte des n-Ecks.

3.2.4. Kreis

Bezeichnungen:



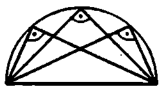
r Radius
d Durchmesser

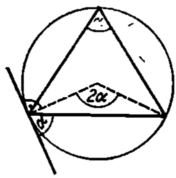
Der *Umfangswinkel* (*Peripheriewinkel*) ist halb so groß wie der *Mittelpunktswinkel* (*Zentriwinkel*) über demselben Bogen.

Satz des Thales

Der Umfangswinkel im Halbkreis ist 90°.
Der *Sehnentangentenwinkel* ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel über demselben Bogen, folglich gleich dem Umfangswinkel über demselben Bogen.

(Sehnensatz, Sekantensatz, Tangentensekantensatz siehe S. 122, 123.)





Kreisumfang

$$u = 2\pi r = \pi d$$

Kreisbogen

$$b = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\alpha}{\text{Grad}} \cdot r = \frac{\alpha}{\text{rad}} \cdot r$$

Schwerpunkt S des Bogens b liegt auf der Halbierenden des Winkels α im Abstand $\frac{rs}{b}$ vom Mittelpunkt. s ist die zum Bogen b gehörige Sehne.

Kreisfläche

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

Schwerpunkt S = Mittelpunkt des Kreises.

Kreisausschnitt (Kreissektor) (Bild unten)

$$A = \frac{\pi}{360}\,\frac{\alpha}{\text{Grad}}\,r^2 = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\text{rad}} \cdot r^2$$

Schwerpunkt S liegt auf der Symmetrieachse im Abstand $\frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$ vom Mittelpunkt M.

Kreisabschnitt (Kreissegment)

$$s = 2\sqrt{2hr - h^2}$$

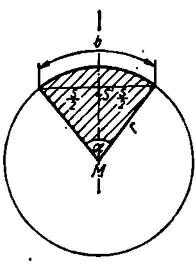
$$h = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2} \quad \text{für} \quad h < r$$

$$A = \text{Kreissektor} - \text{Dreieck } AMB$$

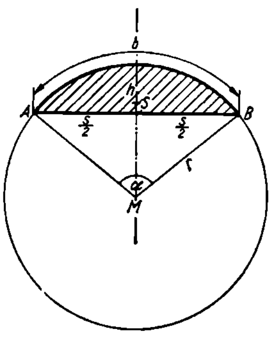
$$A = \frac{1}{2}\,[br - s(r - h)]$$

$$A \approx \frac{2}{3}\,hs$$

$$A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180\,\text{Grad}} - \sin\alpha\right)$$

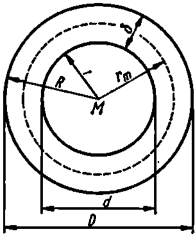


Kreisausschnitt



Kreisabschnitt

Schwerpunkt S liegt auf der Symmetrieachse im Abstand $\frac{s^3}{12A}$ vom Mittelpunkt M.



Kreisring

$$A = \pi(R^2 - r^2) =$$

$$= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi r_m \delta$$

$$\delta = R - r$$

Schwerpunkt S = Mittelpunkt M

3.3. Stereometrie

Bezeichnungen

V	Volumen	A_G	Grundfläche
A_O	Oberfläche	A_D	Deckfläche
h	Höhe	A_M	Mantelfläche

3.3.1. Allgemeine Sätze

Prinzip von Cavalieri

Körper mit gleich großen Grundflächen und Höhen haben gleiches Volumen, wenn sie in gleichen Abständen von der Grundfläche flächengleiche, zur Grundfläche parallele Querschnitte haben.

Simpsonsche Regel

Besitzt ein Körper zwei parallele Grundflächen A_G und A_D und hat jeder parallele Querschnitt in der Höhe x einen Flächeninhalt, der Funktionswert einer ganz rationalen Funktion höchstens dritten Grades von x ist, so gilt

$$V = \frac{h}{6}(A_G + A_D + 4A_m) \quad A_m \text{ mittlerer Querschnitt}$$

Eulerscher Polyedersatz

Polyeder (Vielflache) sind Körper, die nur von ebenen Vielecken begrenzt sind.
Unter der Voraussetzung, daß das Polyeder keine einspringende Ecke hat, gilt

$$e + f - k = 2$$

e Anzahl der Ecken
f Anzahl der Flächen
k Anzahl der Kanten

Guldinsche Regeln

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Umfang des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreises:

$V = 2\pi y_0 A = 2\pi M_x$ $\quad$ A erzeugende Fläche

y_0 Abstand ihres Schwerpunktes von der Drehachse

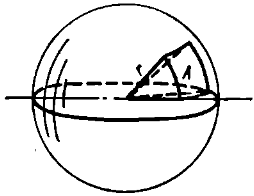
M_x statisches Moment

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge des erzeugenden Linienzuges und dem Umfang des von seinem Schwerpunkt beschriebenen Kreises:

$A_M = 2\pi y_0 s$ $\quad$ s rotierender Linienzug

y_0 Abstand seines Schwerpunktes von der Drehachse

Raumwinkel



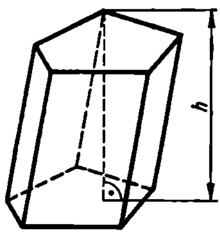
Ein räumlicher Winkel (oder Raumwinkel) kann gemessen werden durch das Verhältnis der aus einer Kugel (um seinen Scheitel) ausgeschnittenen Fläche A zum Quadrat des Kugelradius. Als Einheit gilt derjenige räumliche Winkel, für den das Verhältnis von Kugelfläche zum Quadrat des Kugelradius den Zahlenwert 1 besitzt. Diese Einheit wird Steradiant (Zeichen: sr) genannt.

3.3.2. Ebenflächig begrenzte Körper

Bezeichnung

d Körperdiagonale

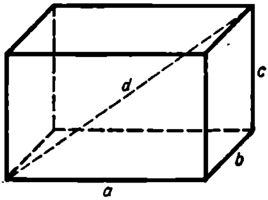
Prisma (gerade und schief)



$$V = A_G h$$

$$A_O = A_M + 2A_G$$

Schwerpunkt S = Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke zwischen den Schwerpunkten der Grund- und Deckfläche.



a, b, c Kanten

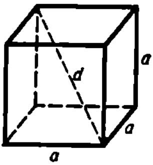
Rechtkant (Quader)

$$V = abc$$

$$A_O = 2(ab + ac + bc)$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Körperdiagonalen



a Kante

Würfel

$$V = a^3$$

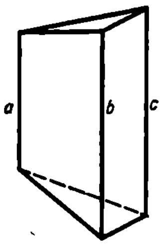
$$A_O = 6a^2$$

$$d = a\sqrt{3}$$

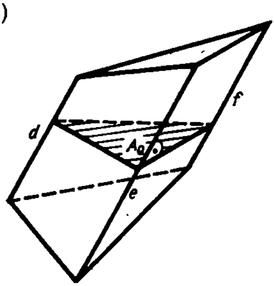
Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Körperdiagonalen

Schief abgeschnittenes gerades dreiseitiges Prisma

$$V = A_G \frac{a + b + c}{3} \text{ (Bild links)}$$



a, b, c die drei parallelen Kanten



A_Q Querschnitt senkrecht zu den Kanten; *d, e, f* die drei parallelen Kanten

Schief abgeschnittenes schräges dreiseitiges Prisma

$$V = A_Q \frac{d + e + f}{3} \text{ (Bild rechts)}$$

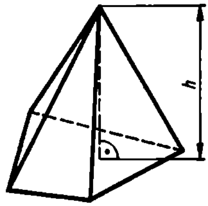
Schief abgeschnittenes *n*-seitiges Prisma

$$V = A_Q s$$

s Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der Grund- und Deckfläche

A_Q Querschnitt, senkrecht zu s

Pyramide (gerade und schief)



$$V = \frac{1}{3} A_G h \qquad A_O = A_G + A_M$$

Schwerpunkt S liegt auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Flächenschwerpunkt der Grundfläche im Abstand $\frac{h}{4}$ von der Grundfläche.

Dreiseitige Pyramide

Ecken der Grundfläche

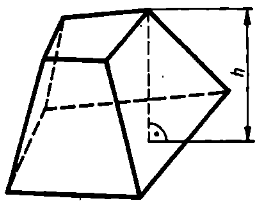
$$P_1(x_1; y_1; z_1), \quad P_2(x_2; y_2; z_2), \quad P_3(x_3; y_3; z_3)$$

Spitze im Ursprung

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

V ergibt sich positiv, wenn die Ecken P_1, P_2, P_3 im mathematisch positiven Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn) aufeinanderfolgen.

Pyramidenstumpf



$$V = \frac{h}{3} \left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)$$

$$A_O = A_G + A_D + A_M$$

Schwerpunkt S liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte von Grund- und Deckfläche. Abstand von der

$$\text{Grundfläche} = \frac{h}{4} \cdot \frac{A_G + 2\sqrt{A_G A_D} + 3A_D}{A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D}$$

Näherungsformel für den Pyramidenstumpf

$$V \approx \frac{A_G + A_D}{2} h$$

Die Formel gibt gute Näherungswerte, wenn A_G wenig von A_D abweicht.

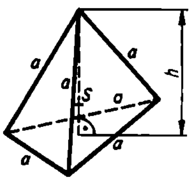
Die fünf regelmäßigen Polyeder

Bezeichnungen

a Seite
r Radius der Umkugel
ϱ Radius der Inkugel

Tetraeder (von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt)

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ (siehe auch unter „dreiseitige Pyramide")

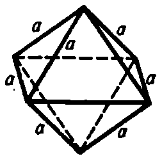


$$A_O = a^2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{6} \qquad \varrho = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

Schwerpunkt S liegt auf der Höhe im Abstand $\frac{h}{4}$ von der Grundfläche.

Oktaeder (von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt)

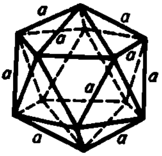


$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}; \qquad A_O = 2a^2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}; \qquad \varrho = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Diagonalen des gemeinsamen Grundquadrates

Ikosaeder (von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt)



$$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$$

$$A_O = 5a^2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}; \quad \varrho = \frac{a\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}$$

Hexaeder (Würfel) (von 6 Quadraten begrenzt)

$$V = a^3; \qquad A_O = 6a^2$$

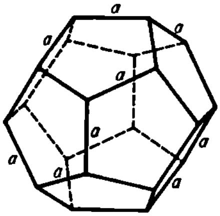
$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3}; \quad \varrho = \frac{a}{2}$$

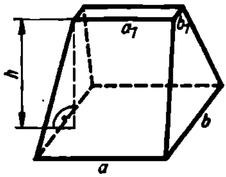
Schwerpunkt S = Schnittpunkt der Körperdiagonalen

Dodekaeder (von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt)

$$V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}; \quad A_O = 3a^2\sqrt{5\,(5 + 2\sqrt{5})}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4}; \quad \varrho = \frac{a\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20}$$





Obelisk

Obelisk

Grund- und Deckfläche nicht ähnliche parallele Rechtecke, Seitenflächen Trapeze

$$V = \frac{h}{6}\left[(2a + a_1)\ b + (2a_1 + a)\ b_1\right] =$$

$$= \frac{h}{6}\left[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1\right]$$

Abstand des *Schwerpunktes S* von der Grundfläche ab ist

$$\frac{h}{2}\cdot\frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}$$

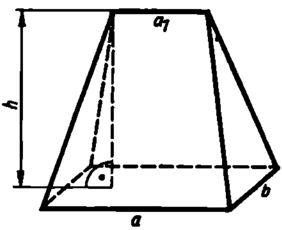
Keil

Grundfläche rechteckig, Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke und gleichschenklige Trapeze

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a_1)$$

Abstand des *Schwerpunktes S* von der Grundfläche ab ist

$$\frac{h}{2}\cdot\frac{a + a_1}{2a + a_1}$$



Prismatoid

Unter Prismatoiden versteht man Körper mit nur geradlinigen Kanten und ebenen, zum Teil aber auch krummen Grenzflächen, deren Ecken oder Grundflächen auf zwei parallelen Ebenen liegen. (Berechnung mit Hilfe der SIMPSONschen Regel, s. S. 144.)

3.3.3. Krummflächig begrenzte Körper

Bezeichnungen

r Radius

d Durchmesser

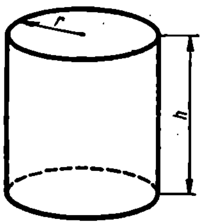
Schiefer Zylinder

$V = A_G h; \quad A_M = us$

u Umfang des Querschnitts normal zur Achse

s Mantellinie

Gerader Kreiszylinder



$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2}{4} h$$

$$A_M = 2\pi r h = \pi d h$$

$$A_O = 2\pi r(r + h) = \pi d \left(\frac{d}{2} + h\right)$$

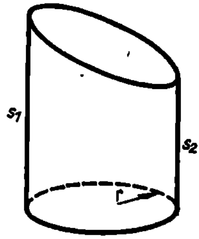
Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand $\frac{h}{2}$ von der Grundfläche.

Schief abgeschnittener gerader Kreiszylinder

$$V = \frac{\pi r^2}{2} (s_1 + s_2) = \frac{\pi d^2}{8} (s_1 + s_2)$$

$$A_M = \pi r(s_1 + s_2) = \frac{\pi d}{2} (s_1 + s_2)$$

$$A_O = \pi r \left[s_1 + s_2 + r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2}\right]$$



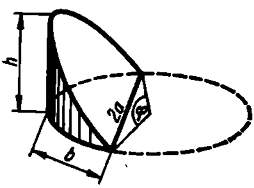
Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand

$$\frac{s_1 + s_2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 \tan^2 \alpha}{s_1 + s_2}$$

von der Grundfläche.
α Neigungswinkel der Deckfläche gegen die Grundfläche

s_1, s_2 längste bzw. kürzeste Seitenlinie

Zylinderabschnitt (Zylinderhuf)



$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$A_M = \frac{2rh}{b}\left[(b - r)\frac{\varphi}{2} + a\right]$$

Für $a = b = r$ ergibt sich

$$V = \frac{2}{3} r^2 h = \frac{d^2}{6} h; \quad M = 2rh = dh$$

φ Mittelpunktswinkel des Grundrisses im Bogenmaß, $2a$ Hufkante, h längste Mantellinie, b Lot vom Fußpunkt von h auf die Hufkante

Gerader Hohlzylinder (Rohr)

$$V = \pi h(r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi h}{4}(d_1^2 - d_2^2) =$$

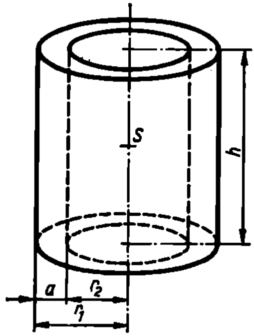
$$= \pi a h(2r_1 - a) = \pi a h(2r_2 + a)$$

$$A_M = 2\pi h(r_1 + r_2) = \pi h(d_1 + d_2)$$

$$A_O = 2\pi(r_1 + r_2)(h + r_1 - r_2) =$$

$$= \pi(d_1 + d_2)\left(h + \frac{d_1 - d_2}{2}\right)$$

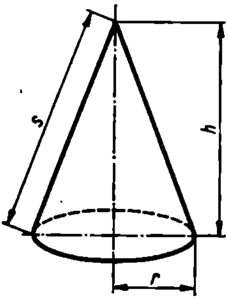
Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand $\frac{h}{2}$ von der Grundfläche.



r_1 (d_1) äußerer Radius (Durchmesser)
r_2 (d_2) innerer Radius (Durchmesser)
$a = r_1 - r_2$ Dicke der Wandung

Kegel (gerade und schief)

$$V = \frac{1}{3} A_G h$$



s Seitenlinie

Gerader Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{12} d^2 h$$

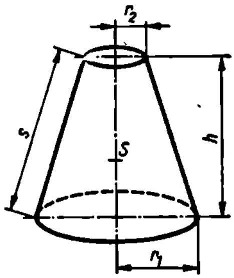
$$A_M = \pi r s = \frac{\pi}{2} d s$$

$$A_O = \pi r(r + s) = \pi \frac{d}{2}\left(\frac{d}{2} + s\right)$$

Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand $\frac{h}{4}$ von der Grundfläche.

Gerader Kreiskegelstumpf

$$V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{1}{12} \pi h(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$



$$A_M = \pi s(r_1 + r_2) = \frac{\pi s}{2}(d_1 + d_2)$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (d_1 - d_2)^2}$$

$$A_O = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)] =$$

$$= \frac{\pi}{4}[d_1^2 + d_2^2 + 2s(d_1 + d_2)]$$

Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand von der Grundfläche

$$\frac{h}{4} \cdot \frac{r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

Näherungsformeln für das Kegelstumpfvolumen

$$V \approx \frac{\pi}{2} h(r_1^2 + r_2^2) = \frac{\pi}{8} h(d_1^2 + d_2^2)$$

Die Formel gibt gute Näherungswerte, wenn r_1 wenig von r_2 abweicht.

$$V \approx \frac{\pi}{4} h(r_1 + r_2)^2 = \frac{\pi}{16} h(d_1 + d_2)^2$$

$$V \approx \pi h r_m^2 = \frac{\pi}{4} h d_m^2$$

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2} \text{ Radius des Mittelschnitts}$$

$$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2} \text{ Durchmesser des Mittelschnitts}$$

Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{A_O^3}{\pi}}$$

$$A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2 = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_O}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$d = \sqrt{\frac{A_O}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Schwerpunkt S = Mittelpunkt der Kugel

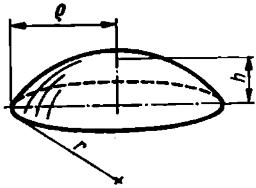
Kugelabschnitt (Kugelsegment)

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h^2(3d - 2h)$$

$$A_M = 2\pi r h = \pi\, dh = \pi(\varrho^2 + h^2)$$

$$A_O = \pi(2rh + \varrho^2) = \pi(h^2 + 2\varrho^2) = \pi h(4r - h)$$

$$\varrho = \sqrt{h(2r - h)}$$



ϱ Radius der Grundfläche des Abschnitts
h Höhe des Abschnitts

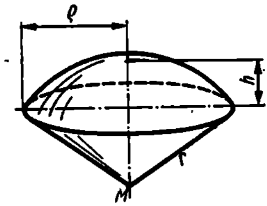
Schwerpunkt S liegt auf der Symmetrieachse des Abschnitts im Abstand vom Kugelmittelpunkt $\frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$

Kugelausschnitt (Kugelsektor)

$$V = \frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{6} d^2 h$$

$$A_O = \pi r(2h + \varrho)$$

Schwerpunkt S liegt auf der Symmetrieachse des Ausschnitts im Abstand vom Kugelmittelpunkt $\frac{3}{8}(2r - h)$



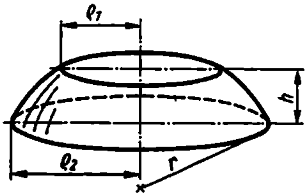
h Höhe des zugehörigen Abschnitts
ϱ Radius des Grundkreises des zugehörigen Abschnitts

Kugelschicht

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$

$$A_M = 2\pi r h = \pi\, dh \quad (\textit{Kugelzone})$$

$$A_O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2) = \pi(dh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$$



ϱ_1, ϱ_2 Radien der begrenzenden Kreise
h Höhe der Schicht

Kugelkappe

Die Kugelkappe ist der krumme Teil der Oberfläche des Kugelabschnitts (Bild s. S. 153).

$$A = 2\pi r h = \pi d h$$

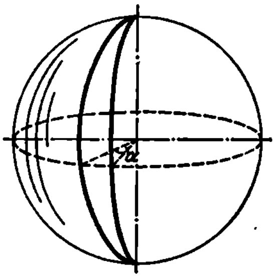
A Fläche
h Höhe des zugehörigen Abschnitts

Kugelzweieck

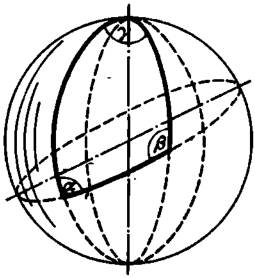
$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}$$

Kugeldreieck

$$A = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180°}$$



α Winkel zwischen den begrenzenden Kugelkreisen

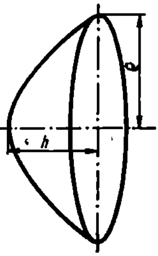


ε sphärischer Exzeß
$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$
α, β, γ Winkel des Dreiecks

Rotationsparaboloid

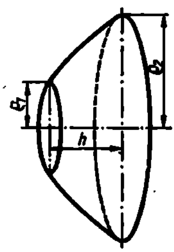
$$V = \frac{1}{2} \pi \varrho^2 h$$

Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand $\frac{2}{3} h$ vom Scheitel.



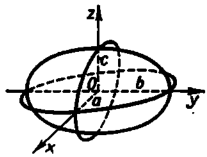
ϱ Radius des Grundkreises, der den Körper abschließt
h Höhe

Abgestumpftes Rotationsparaboloid



$$V = \frac{1}{2} \pi(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)h$$

ϱ_1, ϱ_2 Radien der parallelen Grundkreise



a, b, c Halbachsen

Ellipsoid

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

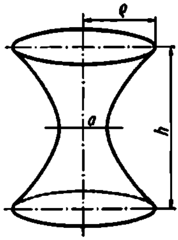
Rotationsellipsoide

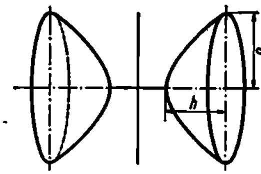
$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2 \text{ (2}a\text{ Drehachse)}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b \text{ (2}b\text{ Drehachse)}$$

Einschaliges Rotationshyperboloid

$$V = \frac{\pi h}{3}(2a^2 + \varrho^2)$$





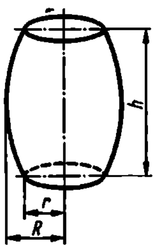
h Höhe,
a Halbachse der Hyperbel,
ϱ Radius der begrenzenden Grundkreise

h Höhe einer Schale,
ϱ Radius der parallelen Grundkreise

Zweischaliges Rotationshyperboloid

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(3\varrho^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right) \text{ (Bild oben rechts)}$$

Tonne (Faß)



Sphärische und elliptische Krümmung

$$V = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2) = \frac{1}{12}\pi h(2D^2 + d^2)$$

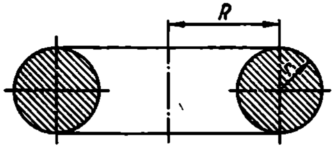
Parabolische Krümmung

$$V = \frac{1}{15}\pi h(8R^2 + 4Rr + 3r^2) =$$

$$= \frac{1}{60}\pi h(8D^2 + 4dD + 3d^2)$$

Für andere Krümmungen ergeben obige Formeln Näherungswerte.

Ring mit kreisförmigem Querschnitt (Torus)



$$A_O = 4\pi^2 rR$$

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

r Radius des kreisförmigen Querschnitts
R mittlerer Radius des Ringes

3.4. Goniometrie, trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen

3.4.1. Goniometrie

Definition der trigonometrischen Funktionen

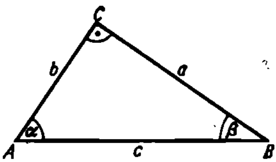
Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a und b gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

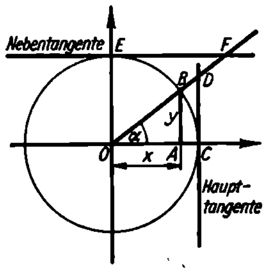
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$



Im *Einheitskreis* ($r = 1$) gilt:



Der Sinus des Winkels ist gleich der Maßzahl der Ordinate.

$$\sin\alpha = y = \overline{AB}$$

Der Cosinus des Winkels ist gleich der Maßzahl der Abszisse.

$$\cos\alpha = x = \overline{OA}$$

Der Tangens des Winkels ist gleich der Maßzahl des Abschnittes auf der Haupttangente.

$$\tan\alpha = \overline{CD}$$

Der Cotangens des Winkels ist gleich der Maßzahl des Abschnittes auf der Nebentangente.

$$\cot\alpha = \overline{EF}$$

Anmerkung: $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha$; $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b} = \sec\alpha$

Komplementbeziehungen

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$$

Vorzeichen der Funktionswerte in den 4 Quadranten

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Reduktionsformeln für beliebige Winkel

Fkt. \ φ	$-\alpha$	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\tan\varphi$	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\varphi$	$-\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

Periodizität der trigonometrischen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360°) \\ y &= \cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360°) \\ y &= \tan\alpha = \tan(\alpha + k \cdot 180°) \\ y &= \cot\alpha = \cot(\alpha + k \cdot 180°) \end{aligned}\right\} \text{ für } k \in G$$

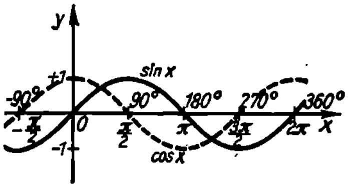
Verlauf der trigonometrischen Funktionen

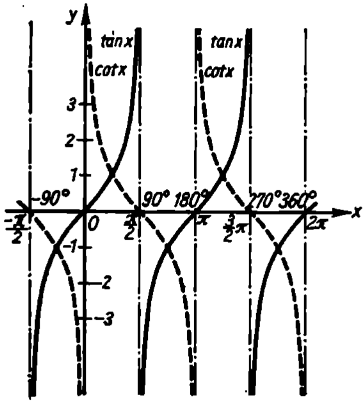
$$f = \{(x; y) \mid y = \sin x,\ x \in R;\ y \in [-1; 1]\}$$

$$f = \{(x; y) \mid y = \cos x,\ x \in R;\ y\ [-1; 1]\}$$

$$f = \left\{(x; y) \mid y = \tan x,\ x \in R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in G\right\};\ y \in R\right\}$$

$$f = \{(x; y) \mid y = \cot x,\ x \in R \setminus \{k\pi \mid k \in G\};\ y \in R\}$$





Beispiele:

$$\sin(-500°) = -\sin 500° = -\sin 140° = $$
$$= -\sin 40° = -\cos 50°$$
$$\cos 1000° = \cos 280° = \cos 80° = \sin 10°$$
$$\tan 1500° = \tan 60° = \cot 30°$$
$$\cot(-2000°) = -\cot 2000° = -\cot 20° = -\tan 70°$$

Besondere Funktionswerte

Fkt. \ α	0° 180°	30° 150°	45° 135°	60° 120°	90° 270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	± 1
$\cos\alpha$	± 1	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$(\pm\infty)$
$\cot\alpha$	$(\pm\infty)$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Anmerkung: Obere Vorzeichen gelten für die Winkel der ersten Zeile, die unteren für die der zweiten Zeile des Tabellenkopfes.

$\pm\infty$ heißt: Es existiert an dieser Stelle kein Funktionswert.

Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Termen desselben Winkels

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\tan\alpha \cot\alpha = 1$
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cot\alpha}$	$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$	$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Ersatz eines Terms durch einen anderen desselben Winkels

	sin	cos	tan	cot
$\sin\alpha =$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\dfrac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha =$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$	—

Bei beliebigen Winkeln α entscheidet der Quadrant des Winkels über das Vorzeichen der Wurzel.

ADDITIONSTHEOREME

Terme der Summe und Differenz zweier Winkel

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

Terme der doppelten und halben Winkel

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\cot\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Terme von weiteren Vielfachen eines Winkels

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$$

$$\sin 4\alpha = 8 \sin\alpha \cos^3\alpha - 4 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\sin 5\alpha = 16 \sin\alpha \cos^4\alpha - 12 \sin\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4\alpha - 8 \cos^2\alpha + 1$$

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5\alpha - 20 \cos^3\alpha + 5 \cos\alpha$$

$$\sin n\alpha = n \sin\alpha \cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} \sin^3\alpha \cos^{n-3}\alpha + \\ + \binom{n}{5} \sin^5\alpha \cos^{n-5}\alpha - + \cdots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2} \sin^2\alpha \cos^{n-2}\alpha + \\ + \binom{n}{4} \sin^4\alpha \cos^{n-4}\alpha - + \cdots$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3 \tan^2\alpha}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{4 \tan\alpha - 4 \tan^3\alpha}{1 - 6 \tan^2\alpha + \tan^4\alpha}$$

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3 \cot\alpha}{3 \cot^2\alpha - 1}$$

$$\cot 4\alpha = \frac{\cot^4\alpha - 6 \cot^2\alpha + 1}{4 \cot^3\alpha - 4 \cot\alpha}$$

Summen und Differenzen von trigonometrischen Termen

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$$
$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\beta\sin\alpha}$$

Produkte von trigonometrischen Termen

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$
$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = -\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\alpha - \cot\beta}$$
$$\cot\alpha\cot\beta = \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = -\frac{\cot\alpha - \cot\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$$
$$\tan\alpha\cot\beta = \frac{\tan\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha + \tan\beta} = -\frac{\tan\alpha - \cot\beta}{\cot\alpha - \tan\beta}$$
$$\cot\alpha\tan\beta = \frac{\cot\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha + \cot\beta} = -\frac{\cot\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha - \cot\beta}$$
$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + $$
$$+ \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + $$
$$+ \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + $$
$$+ \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + $$
$$+ \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$

Potenzen von trigonometrischen Termen

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$$

$$\sin^5\alpha = \frac{1}{16}(10\sin\alpha - 5\sin 3\alpha + \sin 5\alpha)$$

$$\cos^5\alpha = \frac{1}{16}(10\cos\alpha + 5\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)$$

$$\sin^6\alpha = \frac{1}{32}(10 - 15\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha - \cos 6\alpha)$$

$$\cos^6\alpha = \frac{1}{32}(10 + 15\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha + \cos 6\alpha)$$

Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion (Eulersche Formeln)

$$y = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$$

$$y = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi$$

Hieraus folgt:

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\mathrm{j}} \qquad \cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2}$$

$$\tan\varphi = -\frac{\mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi})}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}} \qquad \cot\varphi = \frac{\mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi})}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}$$

Winkelfunktionen imaginärer Argumente

$$y = \sin \mathrm{j}\varphi = \mathrm{j} \sinh \varphi; \quad y = \tan \mathrm{j}\varphi = \mathrm{j} \tanh \varphi$$

$$y = \cos \mathrm{j}\varphi = \cosh \varphi; \quad y = \cot \mathrm{j}\varphi = -\mathrm{j} \coth \varphi$$

φ Bogenmaß

Näherungsformeln für kleine Winkel

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) \approx \sin \alpha \pm \sin \beta$$

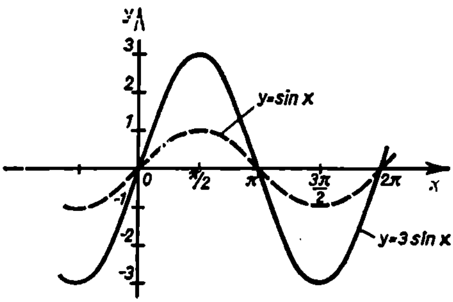
$$\tan (\alpha \pm \beta) \approx \tan \alpha \pm \tan \beta$$

$$\sin n\alpha \approx n \sin \alpha$$

$$\tan n\alpha \approx n \tan \alpha$$

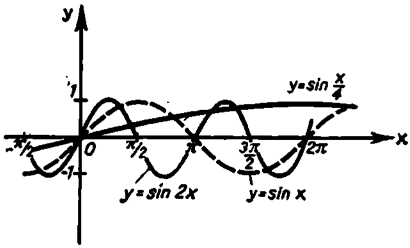
Graphische Darstellung verschiedener trigonometrischer Funktionen

Amplitudenänderung:



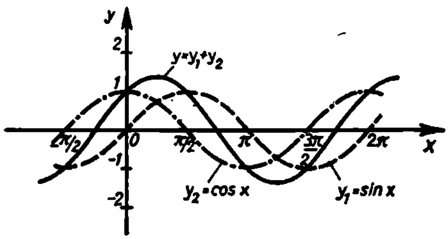
$$y = a \sin x$$

Frequenzänderung:

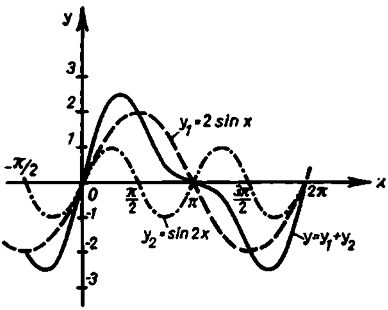


$y = \sin ax$

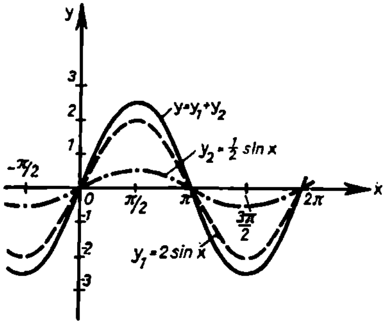
Überlagerung von zwei trigonometrischen Kurven:



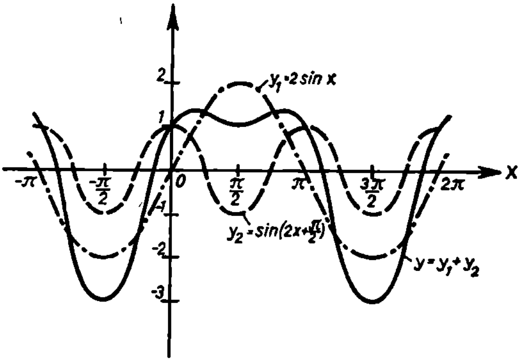
$y = \sin x + \cos x$



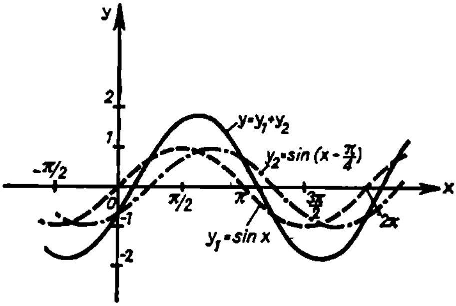
$y = 2 \sin x + \sin 2x$



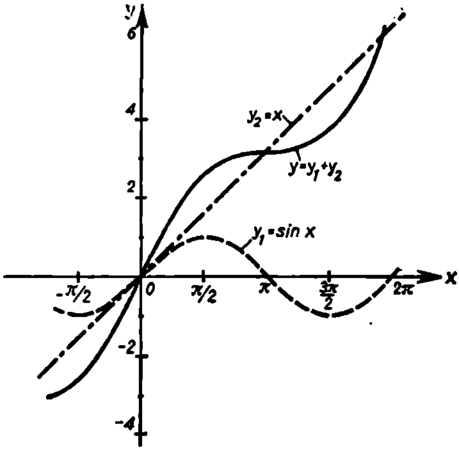
$$y = 2\sin x + \frac{1}{2}\sin x$$



$$y = 2\sin x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y = \sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

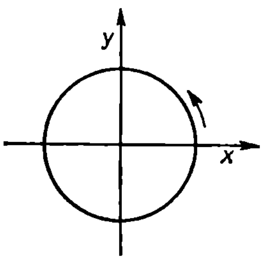


$y = \sin x + x$

Überlagerung von harmonischen Schwingungen bei senkrecht aufeinander stehenden Schwingungsrichtungen (LISSAJOUS-Figuren)

$$x = a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1)$$

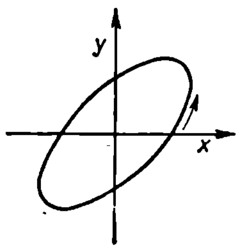
$$y = a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$



$x = a \sin \omega t$

$y = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

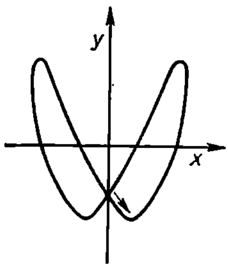
$\omega_1 : \omega_2 = 1:1$



$x = a \sin \omega t$

$y = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

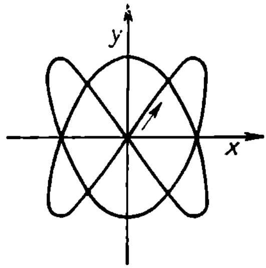
$\omega_1 : \omega_2 = 1:1$



$x = a \sin \omega t$

$y = a \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$\omega_1 : \omega_2 = 1:2$



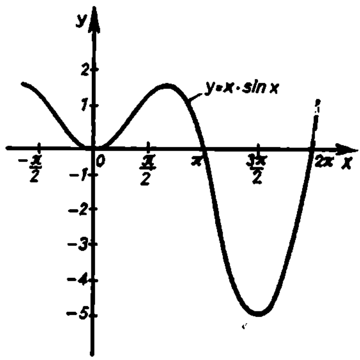
$x = a \sin 2\omega t$

$y = a \sin 3\omega t$

$\omega_1 : \omega_2 = 2:3$

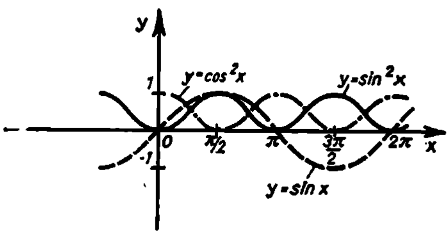
Produkte von trigonometrischen Funktionen:

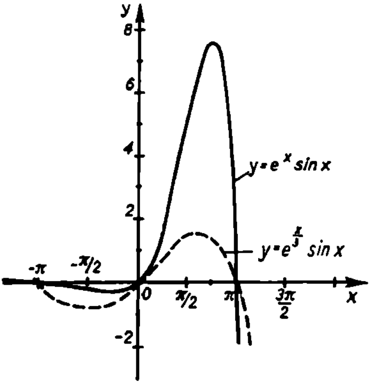
$y = x \sin x$



$y = \sin^2 x$

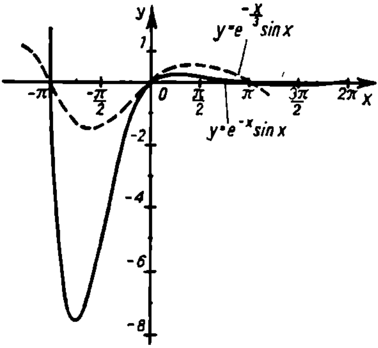
$y = \cos^2 x$





$y = e^{x} \sin x$

$y = e^{\frac{x}{3}} \sin x$



$y = e^{-x} \sin x$

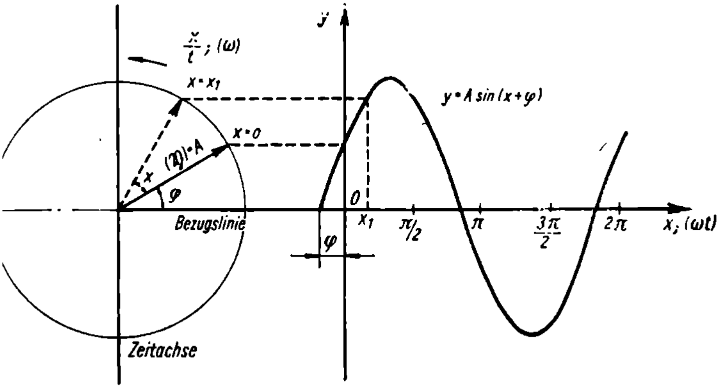
$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin x$

Zeigerdiagramm für sin-Funktionen (harmonische Funktionen)

sin-Funktionen $f = \{x; y \mid y = A \sin (x + \varphi)\}$

lassen sich durch umlaufende *Zeiger* symbolisieren mit den bestimmenden Größen

A	Länge des Zeigers
$\frac{x}{t}$	Winkelgeschwindigkeit
φ	Verschiebung gegenüber der Projektionsachse bei $x = 0$ (bzw. $t = 0$); Nullphasenwinkel

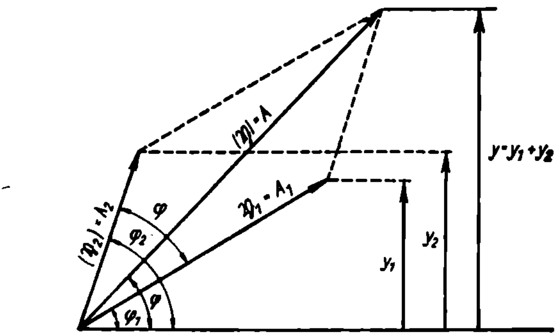


In der Elektrotechnik: $x = \omega t = \frac{t}{T}$ mit ω *Kreisfrequenz*

T *Periodendauer* $\qquad \varphi$ *Phasenlage*

Den physikalisch realen Momentanwert erhält man durch Projektion des Zeigers auf eine Ebene senkrecht zur Projektionsachse.

Da man beim Zeigerdiagramm sinusförmigen Verlauf mit $\frac{x}{t} = \omega =$ $=$ konst voraussetzt, charakterisieren A und φ die Funktion, wodurch ruhende Zeiger genügen, die man auch erhält, wenn man die senkrecht zur Projektionsachse stehende Zeitachse in entgegengesetzter Richtung umlaufen läßt. Obwohl diese *ruhenden Zeiger* sich wie Vektoren behandeln lassen, unterscheiden sie sich auf Grund ihrer Definition.



Im Zeigerdiagramm lassen sich zwei Zeiger wie Vektoren addieren. Der Summenzeiger spiegelt die physikalische bzw. geometrische Realität der Addition der Momentanwerte $y = y_1 + y_2$ wider, entsprechend der skalaren Addition der Komponenten bei Vektoren. Seine Größe und Lage gegenüber der Projektionsachse (Phasenlage) lassen sich dem Zeigerdiagramm entnehmen. Seine Winkelgeschwindigkeit ist gleich der der beiden Einzelzeiger.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= A_1 \sin(x + \varphi_1)\\
y_2 &= A_2 \sin(x + \varphi_2)\\
y = y_1 + y_2 &= A \sin(x + \varphi)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\\
\tan\varphi &= \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}
\end{aligned}
$$

Man erkennt die Einfachheit der Zeigeraddition gegenüber der analytischen Lösung. Die eingehende Zeichnungsungenauigkeit spielt oft eine untergeordnete Rolle.

3.4.2. Goniometrische Gleichungen

Erklärung

Goniometrische Gleichungen enthalten neben bekannten Größen goniometrische Terme mit variablen Winkeln.

Lösungsweg (rechnerisch)

Mittels goniometrischer Formeln müssen evtl. vorkommende verschiedene Argumente in den goniometrischen Termen auf ein Argument zurückgeführt werden. Danach sind evtl. verschiedenartige goniometrische Terme auf eine Termart umzuwandeln. Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen hat jede goniometrische Gleichung eine unendliche Lösungsmenge. Meist beschränkt man sich auf die Lösungen, die zwischen 0° und 360° (0 und 2π) liegen (Hauptwerte).
Jede Lösung ist durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auf ihre Gültigkeit zu prüfen, wenn während der Auflösung der Gleichung durch Quadrieren der Grad der Gleichung erhöht wurde.

Beispiel 1:

$\{x \mid \sin 2x = \sin x\}$ (Formel für $\sin 2x$ anwenden)

$2 \sin x \cos x = \sin x$

$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$

(Ausklammern! Nicht durch $\sin x$ teilen, da sonst Lösungen verlorengehen)

$$\left.\begin{array}{l} \sin x(2\cos x - 1) = 0 \\ \sin x = 0 \text{ ergibt } x_1 = 0^\circ \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_2 = 180^\circ \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 = 360^\circ \\ 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \text{ ergibt } x_4 = 60^\circ \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_5 = 300^\circ \end{array}\right\} \text{(Hauptwerte)}$$

Überprüfung zeigt, daß alle Lösungen gültig sind.
Also $E = \{0^\circ; 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$

Beispiel 2: (Quadratischer Typ)

$$\{x \mid 17\sin^2 x - 3\cos^2 x = 2\}$$

$$17\sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) = 2$$

$$20\sin^2 x = 5$$

$$(\sin x)_{1;2} = \pm\frac{1}{2}$$

$(\sin x)_1 = +\frac{1}{2}$ liefert als Hauptwerte $x_1 = 30^\circ$ und $x_2 = 150^\circ$,

$(\sin x)_2 = -\frac{1}{2}$ liefert als Hauptwerte $x_3 = 210^\circ$ und $x_4 = 330^\circ$

Sämtliche Lösungen sind gültig.

Also $E = \{30^\circ; 150^\circ; 210^\circ; 330^\circ\}$

Beispiel 3:

$$\{x \mid 2\sin x + \cos x = 2\}$$

Lösungsweg 1:

$$\cos x = 2 - 2\sin x \quad \text{(quadrieren)}$$

$$\cos^2 x = 4 - 8\sin x + 4\sin^2 x$$

$$1 - \sin^2 x = 4 - 8\sin x + 4\sin^2 x$$

$$(\sin x)_{1;2} = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{15}{25}} = \frac{4}{5} \pm \frac{1}{5}$$

$(\sin x)_1 = 1$ ergibt $x_1 = 90°$ als Hauptwert

$(\sin x)_2 = \frac{3}{5}$ ergibt $x_2 = 36° 52'$ $[x_3 = 143° 8']$

Nachprüfung ergibt, daß x_3 die Gleichung nicht befriedigt.
Also $E = \{90°; 36° 52'\}$

Lösungsweg 2:

Hilfswinkelmethode

Typ: $a \sin x + b \cos x = c$; Substitution $\tan z = \frac{b}{a}$

$2 \sin x + \cos x = 2 \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1$

Substitution $\tan z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 26° 34'$

$$\sin x + \tan z \cos x = 1$$

$$\sin x + \frac{\sin z}{\cos z} \cos x = 1$$

$$\sin x \cos z + \sin z \cos x = \cos z$$

$$\sin (x + z) = \cos z = \cos 26° 34' = 0{,}8944$$

$(x + z)_1 = 63° 26'$ führt zu $x_1 = 36° 52'$

$(x + z)_2 = 116° 34'$ führt zu $x_2 = 90°$

Beispiel 4:

$$\{x \mid \sin 2x = \tan x\}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \sin x = 0 \text{ ergibt } x_1 &= 0° \\ x_2 &= 180° \\ x_3 &= 360° \end{aligned}\right\} \text{ als Hauptwerte}$$

$$2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$(\cos x)_{1;2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ ergibt } x_4 = 45^\circ$$
$$x_5 = 135^\circ$$
$$x_6 = 225^\circ$$
$$x_7 = 315^\circ$$

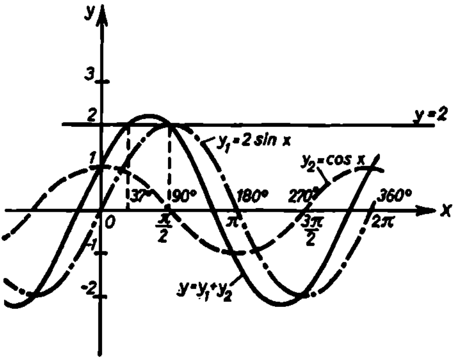
Alle Werte sind möglich.

Also $E = \{0^\circ; 45^\circ; 135^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 315^\circ; 360^\circ\}$

Lösungsweg (graphisch):

Man formt die Gleichung um in $\varphi(x) = \psi(x)$ und stellt $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ graphisch dar. Die Lösungen sind die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven.

Beispiel: $\{x \mid 2 \sin x + \cos x = 2\}$ (oben rechnerisch gelöst)

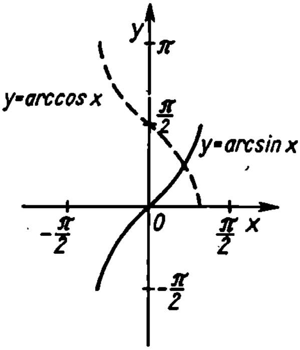


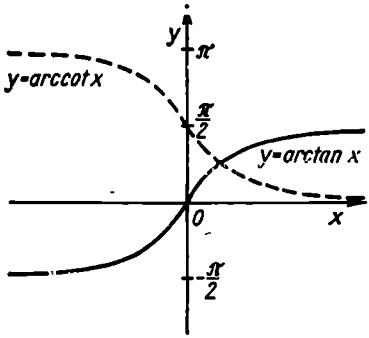
3.4.8. Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen)

Zu den trigonometrischen Funktionen gehören als inverse Funktionen die Arcusfunktionen. Wegen der Periodizität sind die trigonometrischen Funktionen nur in bestimmten Intervallen streng monoton, und es existiert dort die Umkehrung.

$$f = \left\{(x; y) \mid y = \arcsin x; x \in [-1; 1]; y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$
$$f = \{(x; y) \mid y = \arccos x; x \in [-1; 1]; y \in [0, \pi]\}$$
$$f = \left\{(x; y) \mid y = \arctan x; x \in R; y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$f = \{(x; y) \mid y = \operatorname{arccot} x; x \in R; y \in (0; \pi)\}$$

Die graphische Darstellung der Arcusfunktionen erreicht man durch Spiegelung der trigonometrischen Funktionen an der Geraden $y = x$ im Definitionsbereich.





Berechnung eines Terms durch einen anderen desselben Winkels

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0$$

$$= \arctan \frac{1}{x} + \pi \quad \text{für } x < 0$$

Arcusfunktionen negativer Argumente

$$y = \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$y = \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$y = \arctan(-x) = -\arctan x$$

$$y = \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

Summen und Differenzen von zyklometrischen Termen

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}\right)$$
$$\text{für } x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$$

$$\arcsin x_1 - \arcsin x_2 = \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_2^2} - x_2\sqrt{1-x_1^2}\right)$$
$$\text{für } x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$$

$$\arccos x_1 + \arccos x_2 = \arccos\left(x_1x_2 - \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\right)$$
$$\text{für } x_1 + x_2 \geqq 0$$

$$\arccos x_1 - \arccos x_2 = -\arccos\left(x_1x_2 + \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\right)$$
$$\text{für } x_1 \geqq x_2$$

$$= \arccos\left(x_1x_2 + \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}\right)$$
$$\text{für } x_1 < x_2$$

$$\arctan x_1 + \arctan x_2 = \arctan\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$$
$$\text{für } x_1x_2 < 1$$

$$\arctan x_1 - \arctan x_2 = \arctan\frac{x_1-x_2}{1+x_1x_2}$$
$$\text{für } x_1x_2 > -1$$

$$\operatorname{arccot} x_1 + \operatorname{arccot} x_2 = \operatorname{arccot}\frac{x_1x_2-1}{x_1+x_2}$$
$$\text{für } x_1 \neq -x_2$$

$$\operatorname{arccot} x_1 - \operatorname{arccot} x_2 = \operatorname{arccot}\frac{x_1x_2+1}{x_2-x_1}$$
$$\text{für } x_1 \neq x_2$$

Zusammenhang zwischen den Arcusfunktionen und der logarithmischen Funktion

$$y = \arcsin x = -\mathrm{j}\ln\left(x\mathrm{j} + \sqrt{1-x^2}\right)$$
$$y = \arccos x = -\mathrm{j}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$y = \arctan x = \frac{1}{2\mathrm{j}}\ln\frac{1+x\mathrm{j}}{1-x\mathrm{j}}$$
$$y = \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{2\mathrm{j}}\ln\frac{x\mathrm{j}+1}{x\mathrm{j}-1}$$

3.4.4. Hyperbelfunktionen

Definition

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

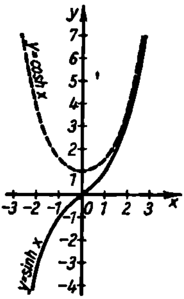
Verlauf der Hyperbelfunktionen

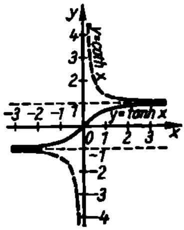
$$f = \{(x; y) \mid y = \sinh x; x \in R; y \in R\}$$

$$f = \{(x; y) \mid y = \cosh x; x \in R; y \in [1; \infty)\}$$

$$f = \{(x; y) \mid y = \tanh x; x \in R; y \in (-1; 1)\}$$

$$f = \{(x; y) \mid y = \coth x; x \in R \setminus \{0\}; y \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)\}$$





Periode der Hyperbelfunktionen

$y = \sinh(x + 2k\pi j) = \sinh x; \quad y = \tanh(x + k\pi j) = \tanh x$

$y = \cosh(x + 2k\pi j) = \cosh x; \quad y = \coth(x + k\pi j) = \coth x$

Besondere Werte

$\sinh 0 = 0$

$\cosh 0 = 1$

$\tanh 0 = 0$

$\coth 0 = \pm\infty$

Negative Argumente

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

$$\coth(-x) = -\coth x$$

Zusammenhang zwischen den Funktionswerten desselben Arguments

$$\sinh x + \cosh x = e^x \qquad \sinh x - \cosh x = -e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \coth^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

Ersatz eines Terms durch einen anderen bei gleichem Argument

	sinh	cosh	tanh	coth
$\sinh x =$	—	$\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
$\cosh x =$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$	$\frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
$\tanh x =$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	—	$\frac{1}{\coth x}$
$\coth x =$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$	$\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\tanh x}$	—

ADDITIONSTHEOREME

Terme der Summe und Differenz zweier Argumente

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

Terme des doppelten Arguments

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$\coth 2x = \frac{1 + \coth^2 x}{2 \coth x}$$

Terme von weiteren Vielfachen des Arguments

$$\sinh 3x = \sinh x\,(4 \cosh^2 x - 1)$$

$$\sinh 4x = \sinh x \cosh x\,(8 \cosh^2 x - 4)$$

$$\sinh 5x = \sinh x\,(1 - 12 \cosh^2 x + 16 \cosh^4 x)$$

$$\cosh 3x = \cosh x\,(4 \cosh^2 x - 3)$$

$$\cosh 4x = 1 - 8 \cosh^2 x + 8 \cosh^4 x$$

$$\cosh 5x = \cosh x\,(5 - 20 \cosh^2 x + 16 \cosh^4 x)$$

$$\sinh nx = \binom{n}{1} \cosh^{n-1} x \sinh x + \binom{n}{3} \cosh^{n-3} x \sinh^3 x + \\ + \binom{n}{5} \cosh^{n-5} x \sinh^5 x + \cdots$$

$$\cosh nx = \cosh^n x + \binom{n}{2} \cosh^{n-2} x \sinh^2 x + \\ + \binom{n}{4} \cosh^{n-4} x \sinh^4 x + \cdots$$

Terme des halben Arguments

$$\sinh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} = \frac{\sinh x}{\sqrt{2(\cosh x + 1)}}$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} = \frac{\sinh x}{\sqrt{2(\cosh x - 1)}}$$

$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$$

$$\coth\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}}$$

Terme von Potenzen

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$\sinh^3 x = \frac{1}{4}(-3\sinh x + \sinh 3x)$$

$$\cosh^3 x = \frac{1}{4}(3\cosh x + \cosh 3x)$$

$$\sinh^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4\cosh 2x + \cosh 4x)$$

$$\cosh^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4\cosh 2x + \cosh 4x)$$

$$\sinh^5 x = \frac{1}{16}(10\sinh x - 5\sinh 3x + \sinh 5x)$$

$$\cosh^5 x = \frac{1}{16}(10\cosh x + 5\cosh 3x + \cosh 5x)$$

$$\sinh^6 x = \frac{1}{32}(-10 + 15\cosh 2x - 6\cosh 4x + \cosh 6x)$$

$$\cosh^6 x = \frac{1}{32}(10 + 15\cosh 2x + 6\cosh 4x + \cosh 6x)$$

Terme von Summen und Differenzen

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh \frac{x-y}{2} \cosh \frac{x+y}{2}$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$$

$$\tanh x + \tanh y = \frac{\sinh (x+y)}{\cosh x \cosh y}$$

$$\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh (x-y)}{\cosh x \cosh y}$$

$$\coth x + \coth y = \frac{\sinh (x+y)}{\sinh x \sinh y}$$

$$\coth x - \coth y = \frac{\sinh (y-x)}{\sinh x \sinh y}$$

Satz von Moivre

$$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx$$

$$(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh nx - \sinh nx$$

Terme von Produkten

$$\sinh x \sinh y = \frac{1}{2} [\cosh (x+y) - \cosh (x-y)]$$

$$\cosh x \cosh y = \frac{1}{2} [\cosh (x+y) + \cosh (x-y)]$$

$$\sinh x \cosh y = \frac{1}{2} [\sinh (x+y) + \sinh (x-y)]$$

$$\tanh x \tanh y = \frac{\tanh x + \tanh y}{\coth x + \coth y}$$

Zusammenhänge zwischen Hyperbel- und Exponentialfunktionen

$$y = \sinh x + \cosh x = e^x \qquad y = \sinh x - \cosh x = -e^{-x}$$

$$e^x = \frac{1 + \tanh \frac{x}{2}}{1 - \tanh \frac{x}{2}}$$

(Weitere Zusammenhänge siehe Definition S. 178)

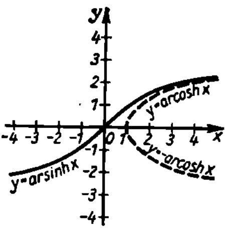
Zusammenhänge zwischen verschiedenen Termen

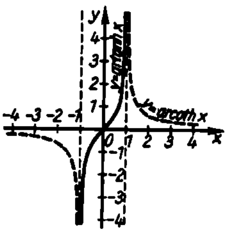
$$\cosh xj = \cos x \qquad \cosh x = \cos xj$$
$$\sinh xj = j \sin x \qquad \sinh x = -j \sin xj$$
$$\tanh xj = j \tan x \qquad \tanh x = -j \tan xj$$
$$\coth xj = -j \cot x \qquad \coth x = j \cot xj$$
$$\sin (x \pm yj) = \sin x \cosh y \pm j \cos x \sinh y$$
$$\cos (x \pm yj) = \cos x \cosh y \mp j \sin x \sinh y$$
$$\tan (x \pm yj) = \frac{\sin 2x \pm j \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} = \frac{\sin 2x \pm j \sinh 2y}{2 (\cos^2 x + \sinh^2 y)}$$
$$\cot (x \pm yj) = \frac{\sin 2x \mp j \sinh 2y}{2 (\sin^2 x + \sinh^2 y)} = -\frac{\sin 2x \mp j \sinh 2y}{\cos 2x - \cosh 2y}$$
$$\sinh (x \pm yj) = \sinh x \cos y \pm j \cosh x \sin y$$
$$\cosh (x \pm yj) = \cosh x \cos y \pm j \sinh x \sin y$$
$$\tanh (x \pm yj) = \frac{\sinh 2x \pm j \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$
$$\coth (x \pm yj) = \frac{\sinh 2x \mp j \sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$$

3.4.5. Areafunktionen

Zu den Hyperbelfunktionen gehören als inverse Funktionen die Areafunktionen.

$$f = \{(x; y) \mid y = \operatorname{arsinh} x; x \in R; y \in R\}$$
$$f = \{(x; y) \mid y = \operatorname{arcosh} x; x \in [1; \infty); y \in [0; \infty)\}$$
$$f = \{(x; y) \mid y = \operatorname{artanh} x; x \in (-1; 1); y \in R\}$$
$$f = \{(x; y) \mid y = \operatorname{arcoth} x; x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty); \\ y \in R \setminus \{0\}\}$$





Darstellung einer Areafunktion durch eine andere

$$y = \operatorname{arsinh} x = \operatorname{arcosh} \sqrt{x^2+1} \qquad \text{für } x > 0$$

$$= -\operatorname{arcosh} \sqrt{x^2+1} \qquad \text{für } x < 0$$

$$= \operatorname{artanh} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcoth} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$y = \operatorname{arcosh} x = \pm \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2-1} =$$

$$= \pm \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \pm \operatorname{arcoth} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \operatorname{artanh} x = \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } x > 0$$

$$= -\operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } x < 0$$

$$= \operatorname{arcoth} \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{arcoth} x = \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \operatorname{arcosh} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{für } x > 0$$

$$= -\operatorname{arcosh} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{für } x < 0$$

$$= \operatorname{artanh} \frac{1}{x}$$

Terme von Summen und Differenzen

$$\operatorname{arsinh} x \pm \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh} \left(x \sqrt{1+y^2} \pm y \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\operatorname{arcosh} x \pm \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arcosh} \left[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$$

$$\operatorname{artanh} x \pm \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

Zusammenhang zwischen Area- und Arcusfunktionen

$$y = \operatorname{arsinh} x\mathrm{j} = \mathrm{j} \arcsin x$$

$$y = \operatorname{arcosh} x\mathrm{j} = \mathrm{j} \arccos x$$

$$y = \operatorname{artanh} x\mathrm{j} = \mathrm{j} \arctan x$$

$$y = \operatorname{arcoth} x\mathrm{j} = -\mathrm{j} \operatorname{arccot} x$$

Zusammenhang zwischen Areafunktionen und logarithmischer Funktion

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad \text{für } x \in (-\infty; +\infty)$$

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \text{für } x \in [1; \infty)$$

$$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \qquad \text{für } |x| > 1$$

3.5. Sphärische Trigonometrie

3.5.1. Allgemeines

Erklärung

Großkreise sind die Schnittlinien, in denen Ebenen durch den Kugelmittelpunkt die Kugeloberfläche schneiden.

Nebenkreise sind die Schnittlinien, in denen nicht durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebenen die Kugeloberfläche schneiden.

Sphärische Zweiecke (Kugelzweiecke) werden von zwei Großkreisen begrenzt.

Sphärische Dreiecke (Kugeldreiecke) werden von drei Großkreisen begrenzt.

Da drei Großkreise auf der Kugel mehrere sphärische Dreiecke bilden, wird festgelegt, daß das Kugeldreieck mit Seiten und Winkeln kleiner als 180° in Betracht kommt.

Bezeichnungen im sphärischen Dreieck

$$\left.\begin{array}{l}\text{Seiten } a, b, c\\ \text{Winkel } \alpha, \beta, \gamma\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(entsprechend der Bezeichnung}\\ \text{im ebenen Dreieck)}\end{array}$$

Bedingungen für die Seiten und Winkel des Kugeldreiecks

$$0 < a + b + c < 360°$$

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

$a \gtreqqless b$, je nachdem $\alpha \gtreqqless \beta$ ist.

$a + b \gtreqqless 180°$, je nachdem $\alpha + \beta \gtreqqless 180°$ ist (entsprechend für andere Seiten und Winkel)

$\alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon$ (*sphärischer Exzeß*)

$360° - a - b - c = d$ (*sphärischer Defekt*)

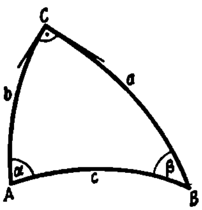
3.5.2. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck

Bezeichnungen wie beim ebenen Dreieck (d.h., ist $\gamma = 90°$, sind a und b die Katheten und c die Hypotenuse).

$$\sin a = \sin \alpha \sin c$$

$$\sin a = \tan b \cot \beta$$

$$\sin b = \sin c \sin \beta$$



$$\sin b = \tan a \cot \alpha$$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta$$

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \cot c \tan b$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b$$

$$\cos \beta = \cot c \tan a$$

Zusammenfassung der oben angeführten Formeln in der **Neperschen Regel:**

Wenn man den rechten Winkel ausschließt und statt der Katheten ihre Komplemente setzt, so ist der Cosinus eines Stückes

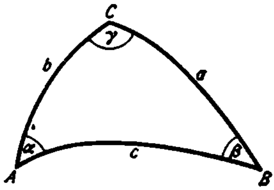
gleich dem Produkt der Sinus der beiden nicht benachbarten Stücke oder

gleich dem Produkt der Cotangenten der beiden anliegenden Stücke.

Mit Hilfe der NEPERschen Regel läßt sich jedes rechtwinklige Kugeldreieck aus zwei gegebenen Stücken berechnen.

3.5.3. Schiefwinkliges sphärisches Dreieck

Sinussatz



$$\sin a : \sin b : \sin c =$$

$$= \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Seitencosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Winkelcosinussatz

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Halbseitensatz des Kugeldreiecks

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}} \qquad \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}}$$

Durch zyklische Vertauschung entstehen Formeln für $\frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2}$.

Halbwinkelsatz des Kugeldreiecks

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die entsprechenden Formeln für $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$.

Gaußsche Formeln

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

Durch zyklische Vertauschung entstehen weitere acht Formeln.

Nepersche Analogien

$$\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

Durch zyklische Vertauschung entstehen weitere Formeln.

Umkreisradius r und Inkreisradius ϱ des Kugeldreiecks

$$\cot r = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}} \qquad \sigma \text{ s. S. } 187$$

$$\tan\varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \qquad s \text{ s. S. } 188$$

$$\left.\begin{aligned} \cot r &= \cot\frac{a}{2}\cos(\sigma-\alpha) \\ \tan\varrho &= \tan\frac{\alpha}{2}\sin(s-a) \end{aligned}\right\}$$

Durch zyklische Vertauschung entstehen weitere Formeln.

L'Huiliersche Formel

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}} \qquad s \text{ s. S. } 188$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}}} \qquad \varepsilon \text{ s. S. } 186$$

Sphärischer Defekt

$$\tan\frac{d}{4} =$$

$$= \sqrt{-\tan(45^\circ-\sigma)\tan\left(45^\circ-\frac{\sigma-\alpha}{2}\right)\tan\left(45^\circ-\frac{\sigma-\beta}{2}\right)\tan\left(45^\circ-\frac{\sigma-\gamma}{2}\right)}$$

$$\text{für} \quad \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

(Flächeninhalt für sphärisches Dreieck und Zweieck siehe Abschnitt „Stereometrie", S. 155)

BERECHNUNG DER SCHIEFWINKLIGEN SPHÄRISCHEN DREIECKE

Grundaufgabe 1:

Gegeben die drei Seiten

Lösungsweg 1:

Ein Winkel nach dem Seitencosinussatz (z. B. α)

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin a} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Lösungsweg 2:

Alle Winkel nach dem Seitencosinussatz

Lösungsweg 3:

Alle Winkel nach dem Halbwinkelsatz bzw. ein Winkel nach dem Halbwinkelsatz und die anderen nach dem Sinussatz wie bei 1

Grundaufgabe 2:

Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (z. B. b, c, α)

Lösungsweg 1:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \qquad \text{(Seitencosinussatz)}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a} \text{ (Sinussatz)}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin a} \text{ (Sinussatz)}$$

Lösungsweg 2:

$$\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b - c}{2} \cot \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{b + c}{2}} \qquad \text{(Nepersche Analogie)}$$

$$\tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b - c}{2} \cot \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{b + c}{2}} \qquad \text{(Nepersche Analogie)}$$

Aus $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta-\gamma}{2}$ ergeben sich die beiden Winkel β und γ.

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\tan\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \text{(NEPERsche Analogie)}$$

Grundaufgabe 3:

Gegeben zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel (z. B. b, c, β)

Lösung:

$$\sin\gamma = \frac{\sin c \sin\beta}{\sin b} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\tan\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \text{(NEPERsche Analogie)}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}} \qquad \text{(NEPERsche Analogie)}$$

oder Winkel α mit Sinussatz

Grundaufgabe 4:

Gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (z. B. a, β, γ)

Lösungsweg 1:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \qquad \text{(Winkelcosinussatz)}$$

$$\sin b = \frac{\sin\beta\sin a}{\sin\alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\sin c = \frac{\sin\gamma\sin a}{\sin\alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Lösungsweg 2:

$$\tan\frac{b+c}{2} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\tan\frac{a}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \text{(NEPERsche Analogie)}$$

$$\tan\frac{b-c}{2} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\tan\frac{a}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \text{(NEPERsche Analogie)}$$

Aus $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ ergeben sich die beiden Seiten b und c.

$$\sin\alpha = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin b} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Grundaufgabe 5:

Gegeben eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel (z.B. b, β, γ)

Lösung:

$$\sin c = \frac{\sin\gamma \sin b}{\sin\beta} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\tan\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \text{(NEPERsche Analogie)}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin b} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Grundaufgabe 6:

Gegeben die drei Winkel

Lösungsweg 1:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \qquad \text{(Winkelcosinussatz)}$$

$$\sin b = \frac{\sin\beta\sin a}{\sin\alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

$$\sin c = \frac{\sin\gamma\sin a}{\sin\alpha} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Lösungsweg 2:

Eine Seite nach dem Halbseitensatz; weiter wie oben

3.5.4. Mathematische Geographie

Längenmaße

Die Erde wird als Kugel aufgefaßt.
Mittlerer *Erdradius* $r \approx 6370$ km
Erdumfang ≈ 40000 km

Länge eines *Bogengrades* $\approx$ 111,3 km (gültig für Hauptkreise)

Länge einer *Bogenminute* $\approx$ 1,852 km = 1 *Seemeile* (sm) (gültig für Hauptkreise)

1 *geographische Meile* = 4 sm $\approx$ 7,420 km

1 *Strich* der Kompaßrose = $11\frac{1}{4}°$

Koordinatensystem der Erde

Abszissenachse ist der *Äquator*. Ordinatenachse ist der *Nullmeridian* (Meridian von Greenwich).

Geographische Koordinaten

Geographische Länge λ wird gemessen entweder
auf dem Äquator als Bogenstück zwischen dem Nullmeridian und dem Meridian des Ortes

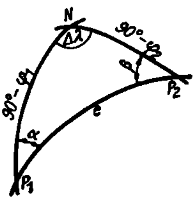
oder

als Winkel zwischen der Meridianebene des Ortes und der Ebene des Nullmeridians (gemessen von 0° bis 180°, östlich positiv, westlich negativ).

Geographische Breite φ ist der sphärische Abstand des Ortes vom Äquator (gemessen von 0° bis 90° nördlich positiv, südlich negativ).

Kürzeste Entfernung zweier Punkte

Der Hauptkreisbogen zwischen den Punkten $P_1(\varphi_1; \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2; \lambda_2)$ (*Orthodrome*) bestimmt die kürzeste Entfernung (orthodrome Entfernung).



Im Dreieck P_1P_2N sind bekannt

$$NP_1 = 90° - \varphi_1$$

$$NP_2 = 90° - \varphi_2$$

$$\text{Winkel } P_1NP_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$$

(siehe *Grundaufgabe 2* des sphärischen Dreiecks)

$$\cos e = \cos(90° - \varphi_1)\cos(90° - \varphi_2) + \\ + \sin(90° - \varphi_1)\sin(90° - \varphi_2)\cos\Delta\lambda;$$

$$\cos e = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda$$

(Seitencosinussatz)

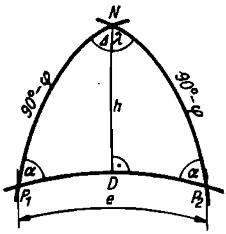
Berechnung der Kurswinkel

Im sphärischen Dreieck P_1P_2N (siehe Bild S. 193) lassen sich die Winkel α und β berechnen, wenn vorher die Entfernung e bestimmt worden ist.

$$\sin\alpha = \frac{\sin\Delta\lambda \sin(90^\circ - \varphi_2)}{\sin e} = \frac{\sin\Delta\lambda \cos\varphi_2}{\sin e} \quad \text{(Sinussatz)}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\Delta\lambda \cos\varphi_1}{\sin e}$$

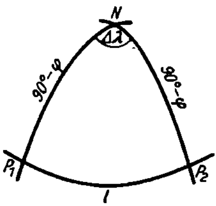
Entfernungen zweier Orte gleicher geographischer Breite



Orthodrome Entfernung $e = \widehat{P_1P_2}$ berechnet sich leicht aus dem rechtwinkligen Teildreieck P_1DN, das durch die Höhe h in dem gleichschenkligen Dreieck gebildet wird.

$$\sin\frac{e}{2} = \cos\varphi \sin\frac{\Delta\lambda}{2} \quad \text{(Neperсche Regel)}$$

Loxodrome Entfernung (Bogen auf dem Breitenkreis) l berechnet sich nach der Formel



$$l = \Delta\lambda \cos\varphi \quad \text{(in Grad)}$$

oder

$$l = \frac{\pi r \Delta\lambda \cos\varphi}{180^\circ} \quad \text{(in km)}$$

$$r \approx 6370 \text{ km}$$

Anmerkung: Die *Loxodrome* ist eine Linie auf der Kugeloberfläche, die alle Meridiane unter gleichem Winkel schneidet. Ist der Winkel verschieden von 90°, dann nähert sich die Loxodrome spiralförmig dem Pol. Jeder Breitenkreis ist eine Loxodrome, die die Meridiane rechtwinklig schneidet.

4. Analytische Geometrie

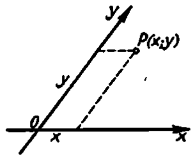
4.1. Analytische Geometrie der Ebene

4.1.1. Die verschiedenen Koordinatensysteme

O Koordinatenursprung, Nullpunkt

Schiefwinkliges Koordinatensystem

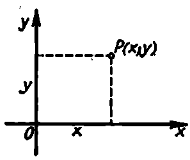
Die Lage des Punktes P ist durch zwei Parallelen zu den schiefwinkligen Koordinatenachsen bestimmt.



x Abszisse, y Ordinate

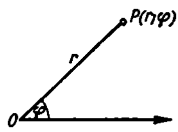
Rechtwinkliges (cartesisches) Koordinatensystem

Die Koordinaten des Punktes P sind Abszisse x und Ordinate y.
Schreibweise $P(x; y)$
Es handelt sich um eine eineindeutige Zuordnung der Ebenenpunkte zu Zahlenpaaren $(x; y) \in R \times R$.



Polarkoordinatensystem

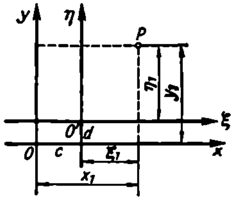
Die Lage des Punktes P ist bestimmt durch seine Entfernung von einem festen Punkt O (*Pol*) und durch den Winkel φ, den die Gerade OP mit einer gegebenen, durch O gehenden Geraden (*Polarachse*) bildet (φ positiv, wenn im mathematischen Drehsinn gerechnet).



r *Radiusvektor, Abstand, Modul, Leitstrahl*

φ *Phase, Polarwinkel, Argument, Richtungswinkel*

Parallelverschiebung des rechtwinkligen Koordinatensystems

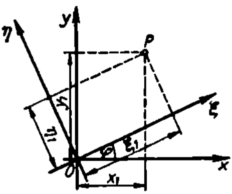


Koordinaten des Punktes P im ursprünglichen System $x; y$

Koordinaten im neuen System $\xi; \eta$

$$x = \xi + c \qquad \xi = x - c$$

$$y = \eta + d \qquad \eta = y - d$$



Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems um den Winkel φ

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi$$

$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi$$

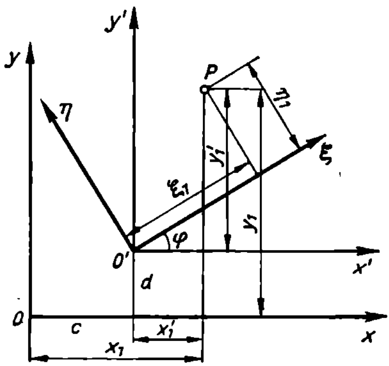
$$\xi = x \cos\varphi + y \sin\varphi$$

$$\eta = -x \sin\varphi + y \cos\varphi$$

Parallelverschiebung und Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems um den Winkel φ

Koordinaten des Punktes P_1 im ursprünglichen System $x_1; y_1$
Koordinaten im Zwischensystem $x_1'; y_1'$
Koordinaten im endgültigen System $\xi_1; \eta_1$

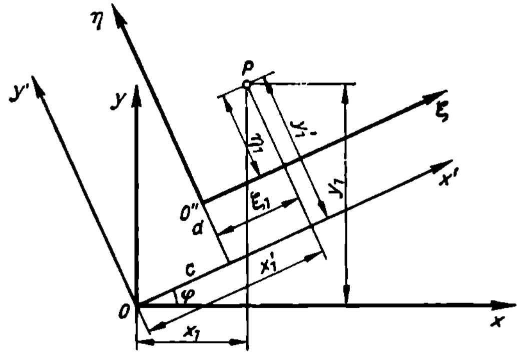
Parallelverschiebung—Drehung



$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi + c \mid \xi = x \cos\varphi + y \sin\varphi - c \cos\varphi - d \sin\varphi$$

$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi + d \mid \eta = -x \sin\varphi + y \cos\varphi - c \sin\varphi - d \cos\varphi$$

Drehung — Parallelverschiebung



$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi + c \cos\varphi - d \sin\varphi$$

$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi + c \sin\varphi + d \cos\varphi$$

$$\xi = x \cos\varphi + y \sin\varphi - c$$

$$\eta = -x \sin\varphi + y \cos\varphi - d$$

Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem

x; y	Koordinaten im rechtwinkligen System
ξ; η	Koordinaten im schiefwinkligen System
φ_1	Winkel zwischen x-Achse und ξ-Achse
φ_2	Winkel zwischen x-Achse und η-Achse

$$x = \xi \cos\varphi_1 + \eta \cos\varphi_2 \qquad \xi = \frac{-x \sin\varphi_2 + y \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$y = \xi \sin\varphi_1 + \eta \sin\varphi_2 \qquad \eta = \frac{x \sin\varphi_1 - y \cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\varphi$$

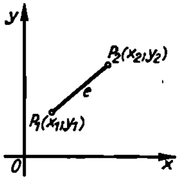
$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

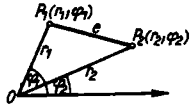
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \wedge \varphi \in [0°; 360°] \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$$

4.1.2. Punkte und Strecken

Entfernung e zweier Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$





Entfernung e zweier Punkte $P_1(r_1; \varphi_1)$ und $P_2(r_2; \varphi_2)$

$$e = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Teilung einer Strecke P_1P_2 im Verhältnis λ

$P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, Teilpunkt $T(x_t; y_t)$, $\lambda = \overline{P_1T} : \overline{TP_2}$

$$x_t = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad \lambda \begin{cases} > 0 \text{ für inneren Teilpunkt} \\ < 0 \text{ für äußeren Teilpunkt} \end{cases}$$

$$y_t = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Mittelpunkt $P_0(x_0; y_0)$ der Strecke P_1P_2

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Schwerpunkt $S(x_s; y_s)$ des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \qquad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Handelt es sich dabei um materielle Punkte mit den Massen m_1, m_2, m_3, so gilt

$$x_s = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \qquad y_s = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

und allgemein bei n Massenpunkten

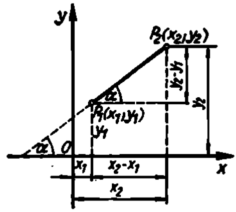
$$x_s = \frac{\sum_1^n m_k x_k}{\sum_1^n m_k}; \qquad y_s = \frac{\sum_1^n m_k y_k}{\sum_1^n m_k}$$

Richtung der Strecke P_1P_2

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

α Winkel der Strecke mit der positiven Richtung der Abszissenachse

$\tan\alpha = m$ *Richtungsfaktor* oder *Steigung* der Strecke



Bedingung für drei auf einer Geraden liegende Punkte P_1, P_2, P_3:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Flächeninhalt eines n-Ecks

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \cdots +$$

$$+ x_n(y_1 - y_{n-1})] =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \cdots +$$

$$+ (x_n - x_1)(y_n + y_1)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}) \qquad y_n = y_0$$

4.1.8. Gerade

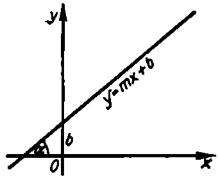
Cartesische Normalform

$$y = mx + b \qquad x, y \in R$$

b Abschnitt auf der y-Achse
$m = \tan\alpha$ Richtungsfaktor, Richtungskoeffizient, Steigung

$m > 0$: steigende Gerade

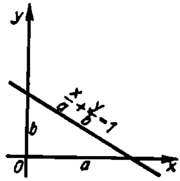
$m < 0$: fallende Gerade



Abschnittsform

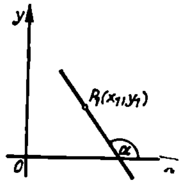
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a Abschnitt auf der x-Achse
b Abschnitt auf der y-Achse



Punkt-Richtungs-Form

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

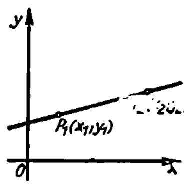


Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

in Determinantenform:

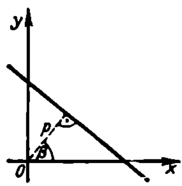
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Hessesche Normalform

$$x \cos\beta + y \sin\beta - p = 0$$

p Abstand des Ursprungs von der Geraden
β Winkel, den p mit der positiven Richtung der x-Achse bildet

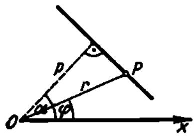


Allgemeine Gleichung der Geraden

$Ax + By + C = 0$ — A, B, C Konstanten
$x, y \in R$ — (A und B nicht gleichzeitig Null)
siehe auch S. 96

Polarform

$$r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$$



Überführung der allgemeinen Form in andere Formen

In die cartesische Form:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad B \neq 0$$

$$m = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

In die Abschnittsform:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \qquad A, B, C \neq 0$$

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

In die Hessesche Normalform:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} < 0$$

Besondere Geraden

Gerade durch den Ursprung

$$y = mx \qquad Ax + By = 0$$

Parallele zur x-Achse

$$y = b \qquad By + C = 0$$

Parallele zur y-Achse

$$x = a \qquad Ax + C = 0$$

Gleichung der x-Achse

$$y = 0$$

Gleichung der y-Achse

$$x = 0$$

Abstand d des Punktes $P_1(x_1; y_1)$ von der Geraden in Hessescher Normalform

$$d = x_1 \cos\beta + y_1 \sin\beta - p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} < 0$$

d ergibt sich positiv, wenn der Punkt P_1 und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, sonst negativ. d ist in dem letzten Fall absolut zu nehmen.

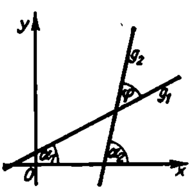
Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ zweier Geraden

$y = m_1x + b_1 \wedge y = m_2x + b_2$ sind als Gleichungssystem zu betrachten, dessen Lösungsmenge die Koordinaten des Schnittpunktes darstellt.

Bedingung für drei einander in einem Punkt schneidende Geraden

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Winkel φ zwischen zwei Geraden



$$\left.\begin{aligned} y &= m_1x + b_1 \\ y &= m_2x + b_2 \end{aligned}\right\} \tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}\right|$$

φ spitzer Winkel $\qquad m_1m_2 \neq -1$

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tan\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$$

$\varphi < 90°$

Bedingung für parallele Geraden

$$\left.\begin{aligned} y &= m_1x + b_1 \\ y &= m_2x + b_2 \end{aligned}\right\} m_1 = m_2$$

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} A_1 : A_2 = B_1 : B_2$$

Bedingung für senkrechte Geraden

$$\left.\begin{aligned} y &= m_1x + b_1 \\ y &= m_2x + b_2 \end{aligned}\right\} m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{bzw.} \quad m_1m_2 = -1$$

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Geradenbüschel

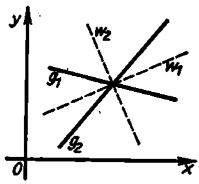
$$\left.\begin{aligned} g_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ g_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{gegebene Geraden}$$

Gleichung des Geradenbüschels durch den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2:

$$g_1 + \lambda g_2 = 0 \qquad \lambda \in R$$

Winkelhalbierende w_1 und w_2 zwischen 2 Geraden g_1 und g_2

$$\left.\begin{aligned} g_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ g_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{gegebene Geraden} \\ \text{(allgemeine Form)}\end{matrix}$$



Gleichungen der Winkelhalbierenden:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

$$\frac{C_i}{\pm\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} < 0, \quad i \in \{1, 2\}$$

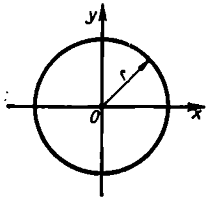
Folgen g_1, w_1, g_2, w_2 im positiven Drehsinn aufeinander, gilt für den zweiten Summanden für w_1 das positive Vorzeichen, für w_2 das negative.

$$\left.\begin{aligned} g_1 &\equiv x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1 - p_1 = 0 \\ g_2 &\equiv x\cos\beta_2 + y\sin\beta_2 - p_2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{gegebene Geraden} \\ \text{(Hessesche Form)}\end{matrix}$$

Gleichungen der Winkelhalbierenden:

$$x(\cos\beta_1 \pm \cos\beta_2) + y(\sin\beta_1 \pm \sin\beta_2) - (p_1 \pm p_2) = 0$$

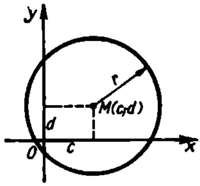
4.1.4. Kreis



Gleichungen des Kreises

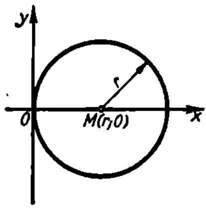
Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Allgemeine Kreisgleichung

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$



Scheitelgleichung des Kreises

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Allgemeine Gleichung 2. Grades als Kreis

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y)

Bedingung für Kreis:

$$A = C; \quad B = O; \quad D^2 + E^2 - AF > 0$$

demnach Kreisgleichung

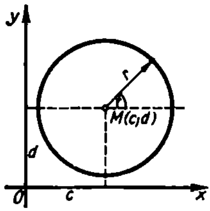
$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Mittelpunkt $M\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A}\right)$

Radius $r = \frac{1}{A}\sqrt{D^2 + E^2 - AF}$

Parametergleichung

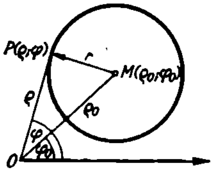
$$x = r\cos t + c$$
$$y = r\sin t + d$$



Kreisgleichung in Polarkoordinaten

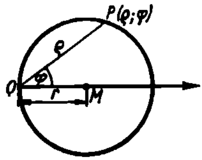
Mittelpunkt $M(\varrho_0; \varphi_0)$ in beliebiger Lage:

$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \varrho_0^2 = r^2$$



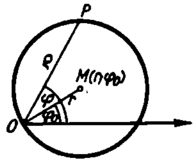
Der Pol O liegt auf dem Kreis; der durch O gehende Durchmesser ist die Polarachse:

$$\varrho = 2r\cos\varphi$$



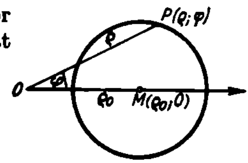
Der Pol O liegt auf dem Kreis; die Polarachse schließt mit dem durch O gehenden Durchmesser den Winkel φ_0 ein:

$$\varrho = 2r\cos(\varphi - \varphi_0)$$



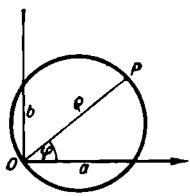
Der Pol liegt nicht auf dem Kreis; der durch den Pol gehende Durchmesser ist Polarachse:

$$r^2 = \varrho^2 - 2\varrho\varrho_0\cos\varphi + \varrho_0^2$$



Der Kreis geht durch O; Abschnitte auf den rechtwinkligen Koordinatenachsen a und b:

$$\varrho = a\cos\varphi + b\sin\varphi$$



Schnittpunkte der Geraden $y = mx + b$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x_{1;2} = -\frac{bm}{1+m^2} \pm \frac{1}{1+m^2}\sqrt{r^2(1+m^2) - b^2}$$

$$y_{1;2} = \frac{b}{1+m^2} \pm \frac{m}{1+m^2}\sqrt{r^2(1+m^2) - b^2}$$

Radikand $r^2(1 + m^2) - b^2 = D$ (Diskriminante)

$D > 0$ Der Kreis wird von der Geraden in zwei Punkten geschnitten.
$D = 0$ Der Kreis wird von der Geraden in einem Punkt (Doppelpunkt) berührt.
$D < 0$ Der Kreis wird von der Geraden gemieden.

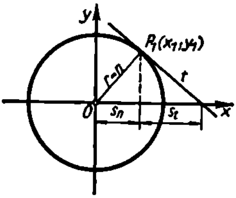
Tangente und Normale für Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente: $xx_1 + yy_1 = r^2$

Richtungsfaktor $m_t = -\dfrac{x_1}{y_1}$

Gleichung der Normalen: $yx_1 - xy_1 = 0$

Richtungsfaktor $m_n = \dfrac{y_1}{x_1}$



Tangentenlänge $t = \left|\dfrac{ry_1}{x_1}\right|$

Normalenlänge $n = r$

Subtangente $s_t = \left|\dfrac{y_1^2}{x_1}\right|$

Subnormale $s_n = x_1$

Polare des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$xx_0 + yy_0 = r^2$ $\qquad P_0$ heißt Pol.

Zur Geraden $Ax + By + C = 0$ als Polare gehört der Pol P_0 mit den Koordinaten $x_0 = -\dfrac{Ar^2}{C}$; $y_0 = -\dfrac{Br^2}{C}$.

Potenz p des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$p = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

Tangente und Normale für Kreis $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente:

$$(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2$$

Richtungsfaktor $\quad m_t = -\dfrac{x_1 - c}{y_1 - d}$

Gleichung der Normalen:

$$(y - y_1)(x_1 - c) = (x - x_1)(y_1 - d)$$

Richtungsfaktor $\quad m_n = \dfrac{y_1 - d}{x_1 - c}$

Gleichung des Kreises durch 3 Punkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Polare des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf den Kreis $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$

$$(x - c)(x_0 - c) + (y - d)(y_0 - d) = r^2$$

Potenz p des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf den Kreis $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$

$$p = (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 - r^2$$

Chordale (Potenzlinie) von zwei Kreisen

$$\left.\begin{aligned} K_1 &\equiv (x - c_1)^2 + (y - d_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ K_2 &\equiv (x - c_2)^2 + (y - d_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ gegebene Kreise}$$

$K_1 - K_2 = 0$ Gleichung der Chordalen

Die Potenzlinie steht senkrecht auf der Zentralen der beiden Kreise.

Kreisbüschel

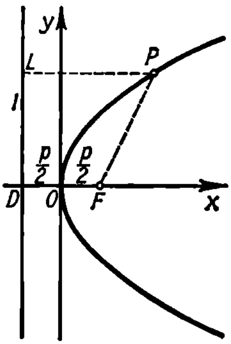
$$\left.\begin{aligned} K_1 &\equiv (x - c_1)^2 + (y - d_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ K_2 &\equiv (x - c_2)^2 + (y - d_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ gegebene Kreise}$$

$K_1 + \lambda K_2 = 0$ Gleichung des Kreisbüschels für $\lambda \neq -1$

4.1.5. Parabel

Definition

Die Parabel ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt (dem *Brennpunkt*) und einer festen Geraden (der *Leitlinie*) gleichen Abstand haben.



Bezeichnungen

O Scheitel der Parabel

x-Achse = Achse der Parabel

l Leitlinie $\left(\text{Gleichung } x = -\frac{p}{2}\right)$; *Direktrix*

$p = \overline{DF}$ Halbparameter;

$2p$ Parameter

$\overline{OF} = \overline{OD} = \frac{p}{2}$

$F\left(\frac{p}{2}\,;0\right)$ Brennpunkt, Fokus

$\overline{PF}$ Brennstrahl, $\overline{PL}$ Leitstrahl ($\overline{PF} = \overline{PL}$)

Gleichungen der Parabel

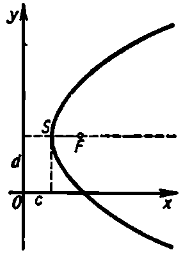
Scheitelgleichung

$y^2 = 2px$

$p > 0$ Parabel nach rechts geöffnet

$p < 0$ Parabel nach links geöffnet

Allgemeine Gleichung bei achsenparalleler Lage



$(y - d)^2 = 2p(x - c)$

Scheitel $S(c; d)$

Parabelachse || x-Achse

$p > 0$ Parabel nach rechts geöffnet

$p < 0$ Parabel nach links geöffnet

Allgemeine Gleichung 2. Grades als Parabel bei achsenparalleler Lage

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y)

Bedingung für Parabel: $A = O$; $B = O$; demnach Parabelgleichung

$$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Parameter $2p = -\dfrac{2D}{C}$

Scheitel $S\left(\dfrac{E^2 - CF}{2CD}; -\dfrac{E}{C}\right)$

Parabelachse parallel zur x-Achse

Bei nicht achsenparalleler Lage wird für eine Parabel $AC - B^2 = 0$.

Parametergleichung

$x = t^2$

$y = \pm ct$

Inverse Gleichungen

$x^2 = 2py$ — Parabel mit y-Achse als Parabelachse
Scheitel $S(0; 0)$
$p > 0$ nach oben geöffnet
$p < 0$ nach unten geöffnet

$(x - c)^2 = 2p(y - d)$ — Parabelachse parallel zur y-Achse
Scheitel $S(c; d)$

$Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$	Parabelachse parallel zur y-Achse Scheitel $S\left(-\frac{E}{C}; \frac{E^2 - CF}{2CD}\right)$ und Parameter $2p = -\frac{2D}{C}$

Siehe auch S. 97

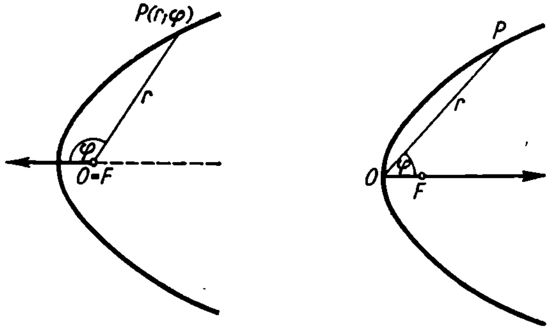
Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

(Pol = Brennpunkt; Polarachse durch Scheitel)

$$r = 2p\cos\varphi(1 + \cot^2\varphi)$$

(Pol = Scheitel; Polarachse = Parabelachse)



Schnittpunkte der Geraden $y = mx + b$ mit der Parabel $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

$$x_{1;2} = \frac{p - bm}{m^2} \pm \frac{1}{m^2}\sqrt{p(p - 2bm)}$$

$$y_{1;2} = \frac{p}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{p(p - 2bm)}$$

Radikand $p(p - 2bm) = D$ (Diskriminante)

$D > 0$	Die Parabel wird von der Geraden geschnitten.
$D = 0$	Die Parabel wird von der Geraden berührt.
$D < 0$	Die Parabel wird von der Geraden gemieden.

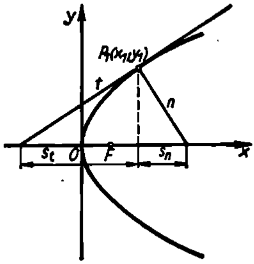
Tangente und Normale für Parabel $y^2 = 2px$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente: $yy_1 = p(x + x_1)$

$$\text{Richtungsfaktor } m_t = \frac{p}{y_1}$$

Gleichung der Normalen: $p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$

Richtungsfaktor $m_n = -\dfrac{y_1}{p}$



Tangentenlänge

$$t = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2}$$

Normalenlänge

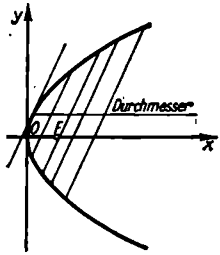
$$n = \sqrt{y_1^2 + p^2}$$

Subtangente $s_t = 2x_1$

Subnormale $s_n = p$

Polare des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf die Parabel $y^2 = 2px$

$$yy_0 = p(x + x_0) \qquad P_0 \text{ Pol}$$



Durchmesser der Parabel $y^2 = 2px$

$$y = \frac{p}{m}$$

m Richtungsfaktor der zugeordneten parallelen Sehnen, die vom Durchmesser halbiert werden.
Die Tangente im Schnittpunkt eines Durchmessers mit der Parabel ist der zugeordneten Sehnenschar parallel.

Tangente und Normale an Parabel $(y - d)^2 = 2p(x - c)$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente:

$$(y - d)(y_1 - d) = p(x + x_1 - 2c)$$

$$\text{Richtungsfaktor } m_t = \frac{p}{y_1 - d}$$

Gleichung der Normalen:

$$p(y - y_1) + (y_1 - d)(x - x_1) = 0$$

Richtungsfaktor $m_n = -\dfrac{y_1 - d}{p}$

Parabelsegment

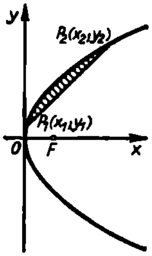
Sehne P_1P_2 hat beliebige Richtung.

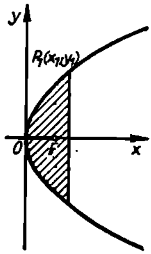
$$A = \left|\frac{(y_1 - y_2)^3}{12p}\right| = \left|\frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^2}{6(y_1 + y_2)}\right|$$

Sehne senkrecht zur Parabelachse

$$A = \frac{4}{3} x_1 y_1$$

Die Parabelsehne, die im Brennpunkt auf der Abszisse senkrecht steht, hat die Länge $2p$.





Rotationsparaboloid

Der Parabelbogen rotiert um die x-Achse

$$V = \frac{1}{2}\pi x_1 y_1^2$$

Krümmungsradius ϱ und Krümmungsmittelpunkt $M_k(\xi;\eta)$ der Parabel $y^2 = 2px$ im Punkt $P_1(x_1;y_1)$ und im Scheitel S

Für P_1 gilt:

$$\varrho = \frac{\sqrt{(y_1^2 + p^2)^3}}{p^2} = \frac{n^3}{p^2} \qquad n \text{ Normalenlänge (s. S. 211)}$$

$$\xi = 3x_1 + p$$

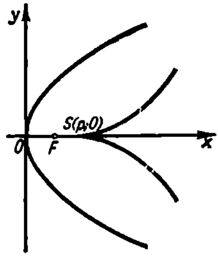
$$\eta = -\frac{y_1^3}{p^2}$$

Für Scheitel $S(0; 0)$ gilt:

$$\varrho = |p|; \quad \xi = p; \quad \eta = 0$$

Evolute der Parabel $y^2 = 2px$

$$\eta^2 = \frac{8(\xi - p)^3}{27p} \quad \text{für} \quad \xi \geqq p$$



NEILsche oder semikubische Parabel

Länge des Parabelbogens OP_1 der Parabel $y^2 = 2px$

$$\widehat{OP_1} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x_1}{p}}\left(1 + \frac{2x_1}{p}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2x_1}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x_1}{p}}\right)\right] =$$

$$= \frac{y_1}{2p}\sqrt{p^2 + y_1^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{y_1 + \sqrt{p^2 + y_1^2}}{p} =$$

$$= \frac{y_1}{2p}\sqrt{p^2 + y_1^2} + \frac{p}{2}\operatorname{arsinh}\frac{y_1}{p}$$

Näherungswert für kleines $\frac{x_1}{y_1}$:

$$\widehat{OP_1} \approx y_1\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^4\right]$$

Länge l des Brennstrahls zum Punkt $P_1(x_1; y_1)$

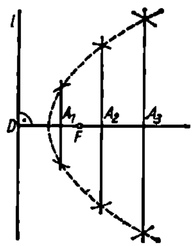
$$l = x_1 + \frac{p}{2}$$

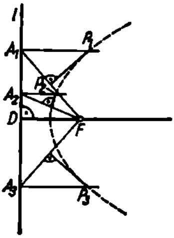
PARABELKONSTRUKTIONEN

Gegeben: *Brennpunkt und Leitlinie*

Man fällt von F (Brennpunkt) auf die Leitlinie l das Lot FD (Parabelachse) und errichtet in beliebigen Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dieser Achse Senkrechten zur Achse. Dann schlägt man um F mit den Radien DA_1, DA_2, DA_3, ... Kreise, die die entsprechenden Senkrechten in Parabelpunkten schneiden.

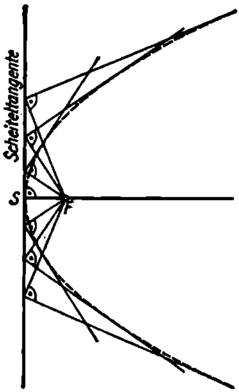
Mittelpunkt von $\overline{FD}$ ist der Scheitel der Parabel.





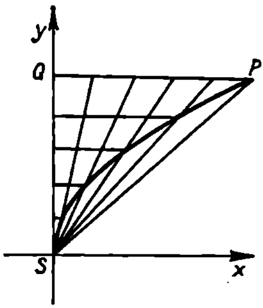
Gegeben: *Brennpunkt und Leitlinie*

Man verbindet einen beliebigen Punkt A_1 der Leitlinie mit dem Brennpunkt F und errichtet auf $\overline{A_1F}$ die Mittelsenkrechte, die die Senkrechte in A_1 auf der Leitlinie in einem Parabelpunkt schneidet.



Gegeben: *Brennpunkt und Scheiteltangente*

Man verbindet verschiedene Punkte der Scheiteltangente mit dem Brennpunkt F und errichtet auf diesen Verbindungslinien in den einzelnen Punkten die Senkrechten, die die Parabel umhüllen.



Gegeben: *Koordinatenachsen, Scheitel im Ursprung und ein Punkt P der Parabel*

Man fällt von P das Lot PQ auf die y-Achse und teilt $\overline{PQ}$ und $\overline{SQ}$ in gleich viele untereinander gleiche Teile. Die Teilpunkte auf $\overline{PQ}$ verbindet man mit S und zieht durch die Teilpunkte auf $\overline{SQ}$ Parallelen zur x-Achse. Die Schnittpunkte der entsprechenden Parallelen mit den Verbindungslinien von S aus sind Parabelpunkte.
Die unterhalb der x-Achse liegenden Parabelpunkte sind als symmetrische leicht zu finden.

4.1.6. Ellipse

Definition

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Entfernun-

gen von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) eine konstante Summe haben.
(abgeleitet: Fadenkonstruktion)

Bezeichnungen

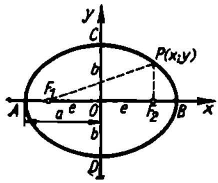
F_1, F_2 Brennpunkte
A, B Hauptscheitel
C, D Nebenscheitel
M Mittelpunkt

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (konstante Summe)

$\overline{PF_1}, \overline{PF_2}$ Brennstrahlen

$\overline{AB} = 2a$ große Achse; a große Halbachse

$\overline{CD} = 2b$ kleine Achse; b kleine Halbachse



$\overline{F_1F_2} = 2e$

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ *lineare Exzentrizität*

$\frac{e}{a} = \varepsilon$ *numerische Exzentrizität* $(\varepsilon < 1)$

$2p = \frac{2b^2}{a}$ *Parameter* = zur Hauptachse senkrechte Sehne im Brennpunkt

Gleichungen der Ellipse

Mittelpunktsgleichung

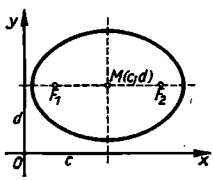
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

siehe Bild oben

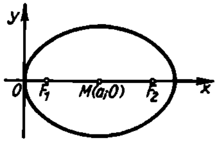
Allgemeine Gleichung bei achsenparalleler Lage

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

Mittelpunkt $M\,(c;\,d)$
Ellipsenachsen || Koordinatenachsen



Scheitelgleichung



$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

Allgemeine Gleichung 2. Grades als Ellipse bei achsenparalleler Lage

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y)

Bedingung für Ellipse in achsenparalleler Lage:

$$\operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} C, \quad B = 0, \quad A \neq C$$

demnach Ellipsengleichung

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

große Halbachse $a = \sqrt{\dfrac{CD^2 + AE^2 - ACF}{A^2C}}$

kleine Halbachse $b = \sqrt{\dfrac{CD^2 + AE^2 - ACF}{AC^2}}$

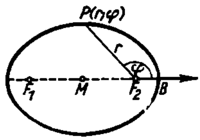
Mittelpunkt $M\left(-\dfrac{D}{A}; -\dfrac{E}{C}\right)$

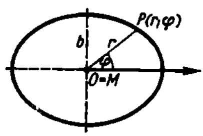
Ellipsenachsen || Koordinatenachsen

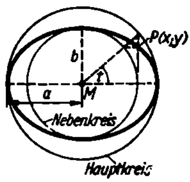
Inverse Gleichungen

$\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ Ellipse mit y-Achse als großer Achse
a große Halbachse, b kleine Halbachse
Mittelpunkt im Ursprung

$x^2 = 2py - \dfrac{p}{a}y^2$ Ellipse mit y-Achse als großer Achse
a große Halbachse, Mittelpunkt $M(0; a)$







Polargleichungen

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \qquad \varepsilon < 1 \qquad \text{(Bilder siehe Seite 216 unten)}$$

(Brennpunkt F_2 Pol; Polarachse in Richtung B)

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \qquad \varepsilon < 1$$

(Pol im Mittelpunkt; große Achse ist Polarachse)

Parametergleichung

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

t exzentrische Anomalie

Schnittpunkte der Geraden $y = mx + b_1$ mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$x_{1;2} = -\frac{a^2 m b_1}{b^2 + a^2 m^2} \pm \frac{ab}{b^2 + a^2 m^2} \sqrt{a^2 m^2 + b^2 - b_1^2}$$

$$y_{1;2} = \frac{b^2 b_1}{b^2 + a^2 m^2} \pm \frac{abm}{b^2 + a^2 m^2} \sqrt{a^2 m^2 + b^2 - b_1^2}$$

Radikand $a^2 m^2 + b^2 - b_1^2 = D$ (Diskriminante)

$D > 0$ Die Ellipse wird von der Geraden geschnitten.

$D = 0$ Die Ellipse wird von der Geraden berührt.

$D < 0$ Die Ellipse wird von der Geraden gemieden.

Länge der Brennstrahlen PF_1 und PF_2

$$\left.\begin{aligned} \overline{PF_1} &= a + \varepsilon x \\ \overline{PF_2} &= a - \varepsilon x \end{aligned}\right\} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Tangente und Normale für Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

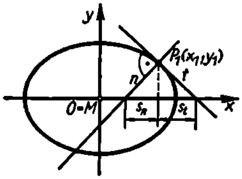
Gleichung der Tangente: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$

Richtungsfaktor $m_t = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$.

Gleichung der Normalen: $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$

Richtungsfaktor $m_n = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$

Tangentenlänge $t = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2}$



Normalenlänge $n = \frac{b\sqrt{a^4 - e^2 x_1^2}}{a^2}$

Subtangente $s_t = \left|\frac{a^2}{x_1} - x_1\right|$

Subnormale $s_n = \left|\frac{b^2 x_1}{a^2}\right|$

Tangente und Normale für Ellipse $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2} + \frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2} = 1$$

Richtungsfaktor $m_t = -\frac{b^2(x_1-c)}{a^2(y_1-d)}$

Gleichung der Normalen:

$$y - y_1 = \frac{a^2(y_1-d)}{b^2(x_1-c)}(x - x_1)$$

Richtungsfaktor $m_n = \frac{a^2(y_1-d)}{b^2(x_1-c)}$

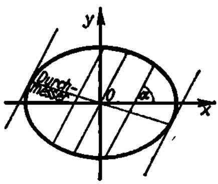
Polare des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad P_0 \text{ Pol}$$

Durchmesser der Ellipse

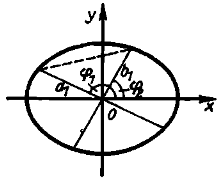
$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$$

m Richtungsfaktor der zugeordneten parallelen Sehnen, die vom Durchmesser halbiert werden



Der Durchmesser einer Schar paralleler Sehnen geht durch die Berührungspunkte der diesen Sehnen parallelen Tangenten. Der Durchmesser einer Berührungssehne geht durch den Schnittpunkt ihrer Tangenten.

Konjugierte Durchmesser sind Durchmesser, von denen jeder die dem anderen parallelen Sehnen halbiert. Die beiden Achsen sind konjugierte Durchmesser.



$y = m_1 x$ und $y = m_2 x$ sind konjugierte Durchmesser, wenn

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

Für zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ gilt:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

$$a_1 b_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = ab$$

In Worten:

Der Inhalt des aus zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte gebildeten Dreiecks ist konstant.

Gleichung der Ellipse, bezogen auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$, lautet:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

Krümmungsradius ϱ und Krümmungsmittelpunkt $M_k(\xi; \eta)$ für Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

$$\varrho = \frac{1}{a^4 b^4}\sqrt{(a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)^3} = \frac{\sqrt{(a^4 - e^2 x_1^2)^3}}{a^4 b} = \frac{n^3}{p^2}$$

n Normalenlänge (s. S. 218)

$$\xi = \frac{e^2 x_1^3}{a^4}; \quad \eta = -\frac{e^2 y_1^3}{b^4} = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}$$

Im Hauptscheitel $A(-a; 0)$

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = -\frac{e^2}{a}; \quad \eta = 0$$

Im Hauptscheitel $B(a; 0)$

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = \frac{e^2}{a}; \quad \eta = 0$$

Im Nebenscheitel $D(0; -b)$

$$\varrho = \frac{a^2}{b}; \quad \xi = 0; \quad \eta = \frac{e^2}{b}$$

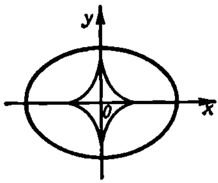
Im Nebenscheitel $C(0; b)$

$$\varrho = \frac{a^2}{b}; \quad \xi = 0; \quad \eta = -\frac{e^2}{b}.$$

Haupt- und Nebenkreis der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = b^2$$

Evolute der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ (Astroide)}$$

für

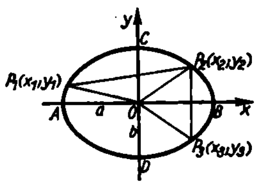
$$|\xi| \leq \frac{e^2}{a}$$

Flächeninhalt der Ellipse, des Ellipsensegments und des Ellipsensektors

Ellipse: $A = \pi ab$

Ellipsensegment P_1P_2C:

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right)$$



Ellipsensegment P_2P_3B:

$$A = ab \arccos\frac{x_2}{a} - x_2y_2$$

Ellipsensektor P_2OP_3B:

$$A = ab \arccos\frac{x_2}{a}$$

Ellipsensektor P_1OP_2C:

$$A = \frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right)$$

Rotationsellipsoid

Rotation um die x-Achse: $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ (längliches Ellipsoid)

Rotation um die y-Achse: $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ (Sphäroid)

Ellipsenumfang

$$u = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right]$$

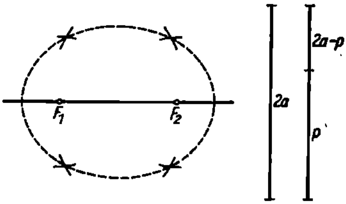
Näherungsformeln:

$$u \approx \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]; \quad u \approx \frac{\pi}{2}\left[a + b + \sqrt{2(a^2+b^2)}\right]$$

ELLIPSENKONSTRUKTIONEN

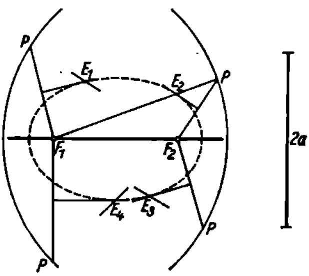
Gegeben: *Brennpunkte und große Achse* $2a$

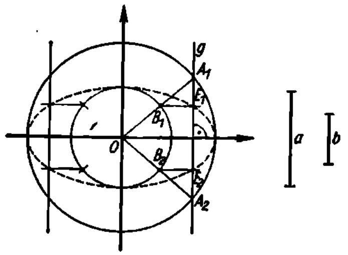
Man schlägt um die Brennpunkte F_1 und F_2 Kreise mit den Radien $p < 2a$ und $(2a - p)$ und erhält als Schnittpunkte vier symmetrisch liegende Ellipsenpunkte. Durch Variieren von $p < 2a$ ergeben sich weitere Ellipsenpunkte.



Gegeben: *Brennpunkte und große Achse* $2a$

Man schlägt um F_1 den Kreis mit dem Radius $2a$ (Leitkreis), verbindet einen beliebigen Punkt P des Leitkreises mit dem 2. Brennpunkt F_2 und errichtet auf dieser Verbindungsstrecke die Mittelsenkrechte. Ihr Schnittpunkt mit $\overline{PF_1}$ ist ein Ellipsenpunkt. Das gleiche Verfahren kann mit dem Leitkreis um F_2 durchgeführt werden.





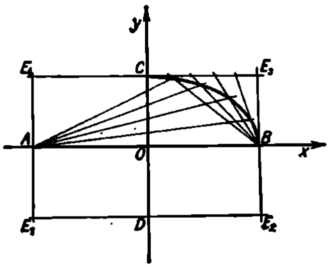
Gegeben: *Halbachsen a und b*

1. Lösungsweg:

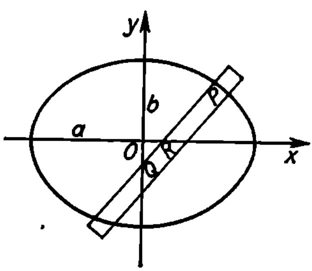
Man schlägt um O den Haupt- und Nebenkreis. Dann errichtet man auf der waagerechten Achse eine beliebige Senkrechte g, die den Hauptkreis in A_1 und A_2 schneidet. Die Verbindungslinien OA_1 und OA_2 schneiden den Nebenkreis in B_1 und B_2. Die Parallelen durch B_1 und B_2 zur waagerechten Achse ergeben auf der Senkrechten g zwei Ellipsenpunkte E_1 und E_2.

2. Lösungsweg:

Man zieht durch die Scheitelpunkte A, B, C, D zu den Koordinatenachsen die Parallelen, die einander in E_1, E_2, E_3, E_4 schneiden. Dann teilt man die Strecken OC und E_3C in gleich viele untereinander gleiche Teile. Durch die Teilpunkte von $\overline{OC}$ zieht man von A aus und durch die Teilpunkte von $\overline{E_3C}$ von B aus Strahlen. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen sind Ellipsenpunkte. Durch Zeichnen der zur x- bzw. y-Achse symmetrischen Punkte ergibt sich die vollständige Ellipse.



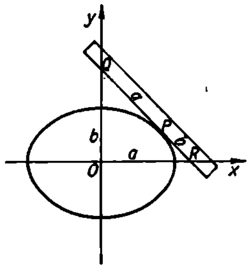
3. Lösungsweg:



Man trägt auf einem Papierstreifen mit gerader Kante die beiden Halbachsen $PQ = a$ und $PR = b$ von P aus aufeinander ab ($\overline{QR} = a - b$). Verschiebt man nun den Papierstreifen so, daß sich der Punkt Q auf der y-Achse und der Punkt R auf der x-Achse bewegt, dann beschreibt der Punkt P eine Ellipse (Prinzip des Ellipsenzirkels).

4. Lösungsweg:

Man trägt auf einem Papierstreifen mit gerader Kante die beiden Halbachsen $\overline{PQ} = a$ und $\overline{PR} = b$ nacheinander ab ($\overline{QR} = a + b$). Verschiebt man nun den Papierstreifen so, daß sich der Punkt Q auf der y-Achse und der Punkt R auf der x-Achse bewegt, dann beschreibt der Punkt P eine Ellipse.



4.1.7. Hyperbel

Definition

Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Entfernungen von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) eine konstante Differenz ergeben.

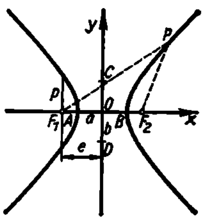
Bezeichnungen

F_1, F_2 Brennpunkte

A, B Hauptscheitel

C, D Nebenscheitel (imaginär)

M Mittelpunkt



$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ (konstante Differenz)

$\overline{PF_1}, \overline{PF_2}$ Brennstrahlen

$\overline{AB} = 2a$ reelle Achse

$\overline{CD} = 2b$ imaginäre Achse

$\overline{F_1F_2} = 2e$

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ *lineare Exzentrizität*

$\frac{e}{a} = \varepsilon$ *numerische Exzentrizität*; $\varepsilon > 1$

$2p = \frac{2b^2}{a}$ *Parameter* = zur Hauptachse senkrechte Sehne im Brennpunkt

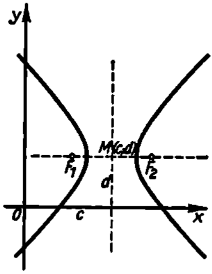
Gleichungen der Hyperbel

Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder} \qquad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

s. Bild S. 223

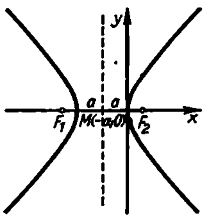
Allgemeine Gleichung bei achsenparalleler Lage



$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

Mittelpunkt $M\,(c;\,d)$
Hyperbelachsen || Koordinatenachsen

Scheitelgleichung



$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

Mittelpunkt $M(-a;\,0)$

Allgemeine Gleichung 2. Grades als Hyperbel bei achsenparalleler Lage

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y)

Bedingung für Hyperbel: $\operatorname{sgn} A \neq \operatorname{sgn} C$ und $B = 0$; demnach Hyperbelgleichung

$$Ax^2 - Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

reelle Halbachse $\qquad a = \sqrt{\dfrac{CD^2 - AE^2 - ACF}{A^2C}}$

imaginäre Halbachse $b = \sqrt{\dfrac{CD^2 - AE^2 - ACF}{AC^2}}$

Mittelpunkt $M\left(-\dfrac{D}{A}; \dfrac{E}{C}\right)$

Inverse Gleichungen

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ Hyperbel mit y-Achse als reeller Achse

a reelle Halbachse, b imaginäre Halbachse, Mittelpunkt im Ursprung

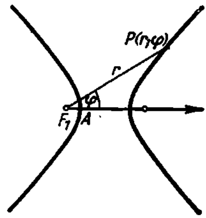
$x^2 = 2py + \dfrac{p}{a} y^2$ Hyperbel mit y-Achse als reeller Achse

a reelle Halbachse, p Halbparameter Mittelpunkt $M(0; -a)$

Polargleichungen

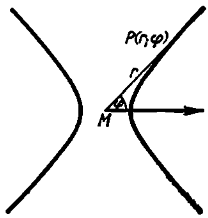
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varepsilon > 1$$

(Brennpunkt F_1 als Pol; $\overline{F_1A}$ Polarachse)



$$r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1}, \quad \varepsilon > 1$$

(Mittelpunkt als Pol; x-Achse als Polarachse)



Parametergleichungen

$$x = \frac{a}{\cos t}; \quad y = \pm b \tan t$$

$$x = \pm a \cosh t; \quad y = b \sinh t$$

Gleichung der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (b = a)$$

Brennstrahlen der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left.\begin{aligned}\overline{PF_1} &= \varepsilon x + a\\ \overline{PF_2} &= \varepsilon x - a\end{aligned}\right\}\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$$

Schnittpunkte der Geraden $y = mx + b_1$ mit Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\left.\begin{aligned}x_{1;2} &= \frac{a^2mb_1}{b^2 - a^2m^2} \pm \frac{ab}{b^2 - a^2m^2}\sqrt{b^2 + b_1^2 - a^2m^2}\\ y_{1;2} &= \frac{b^2b_1}{b^2 - a^2m^2} \pm \frac{abm}{b^2 - a^2m^2}\sqrt{b^2 + b_1^2 - a^2m^2}\end{aligned}\right\}b^2 - a^2m^2 \neq 0$$

Radikand $b^2 + b_1^2 - a^2m^2 = D$ (Diskriminante)

$D > 0$ Die Hyperbel wird von der Geraden geschnitten.
$D = 0$ Die Hyperbel wird von der Geraden berührt.
$D < 0$ Die Hyperbel wird von der Geraden gemieden.

Sonderfälle

1. $b^2 - a^2m^2 = 0;\quad m \neq 0;\quad b_1 \neq 0$

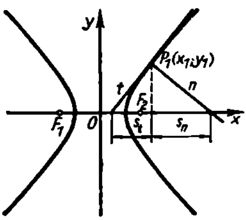
Die Gerade schneidet die Hyperbel nur in einem Punkt $(x_s; y_s)$ und ist einer der beiden Asymptoten parallel:

$$x_s = -\frac{b_1^2 + b^2}{2mb_1};\qquad y_s = \frac{b_1^2 - b^2}{2b_1}$$

2. $b^2 - a^2m^2 = 0;\quad m \neq 0;\quad b_1 = 0$

Die Gerade ist Asymptote und hat die Form einer der beiden Asymptotengleichungen: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Tangente und Normale für Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

Richtungsfaktor $m_t = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Gleichung der Normalen:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

Richtungsfaktor $m_n = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$

Tangentenlänge $t = \sqrt{y_1^2 + \left(x_1 - \frac{a^2}{x_1}\right)^2}$

Normalenlänge $n = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2 x_1^2 - a^4}$

Subtangente $s_t = \left|x_1 - \frac{a^2}{x_1}\right|$

Subnormale $s_n = \left|\frac{b^2 x_1}{a^2}\right|$

Tangente und Normale für Hyperbel $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2} - \frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2} = 1$$

Richtungsfaktor $m_t = \frac{b^2(x_1-c)}{a^2(y_1-d)}$

Gleichung der Normalen:

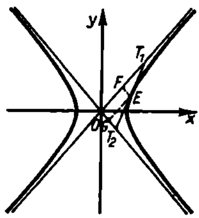
$$y - y_1 = -\frac{a^2(y_1-d)}{b^2(x_1-c)}(x - x_1)$$

Richtungsfaktor $m_n = -\frac{a^2(y_1-d)}{b^2(x_1-c)}$

Asymptoten

Die Tangenten in den unendlich fernen Punkten heißen Asymptoten. Sie gehen durch den Mittelpunkt.

Gleichungen: $y = \pm\frac{b}{a}x$



Das Stück der Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert:

$$\overline{T_1E} = \overline{T_2E}$$

Satz vom konstanten Dreieck

Die Fläche des Dreiecks T_1OT_2 ist konstant ($A = ab$).

Satz vom konstanten Parallelogramm

Sind $\overline{EF}$ und $\overline{EG}$ die Parallelen zu den Asymptoten, so ist der Flächeninhalt des entstandenen Parallelogramms $OGEF$ konstant $\left(A = \frac{ab}{2}\right)$.

Asymptotengleichung der Hyperbel

Wählt man die Asymptoten als Koordinatenachsen, so ergibt sich für die Hyperbel ($a \neq b$) ein schiefwinkliges System, in dem die Gleichung der Hyperbel lautet:

$$x'y' = \frac{e^2}{4}$$

Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel ($a = b$) stehen senkrecht aufeinander, so daß dann ein rechtwinkliges Koordinatensystem vorliegt, wenn man die Asymptoten als Achsen wählt. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel lautet dann $x'y' = \frac{a^2}{2}$.

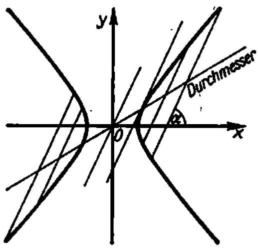
Jede Gleichung von der Form $y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ mit $AD - BC \neq 0$ und $C \neq 0$ stellt eine Hyperbel dar, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind.

Polare des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ in bezug auf die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad P_0 \text{ Pol}$$

Durchmesser der Hyperbel

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x$$



m Richtungsfaktor der zugeordneten parallelen Sehnen, die vom Durchmesser halbiert werden

Konjugierte Durchmesser sind Durchmesser, von denen jeder die dem anderen parallelen Sehnen halbiert.
$y = m_1x$ und $y = m_2x$ sind zwei konjugierte Durchmesser, wenn

$$m_1m_2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Für zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ gilt:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$$

Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt $M_k(\xi; \eta)$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Im Punkt $P_1(x_1; y_1)$

$$\varrho = \frac{1}{a^4b^4}\sqrt{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^3} = \frac{\sqrt{(e^2x_1^2 - a^4)^3}}{a^4b} = \frac{n^3}{p^2}$$

n Normalenlänge (s. S. 227)

$$\xi = \frac{e^2x_1^3}{a^4}; \quad \eta = -\frac{e^2y_1^3}{b^4} = -\frac{\varepsilon^2a^2y_1^3}{b^4}$$

Im Scheitel $A(-a; 0)$

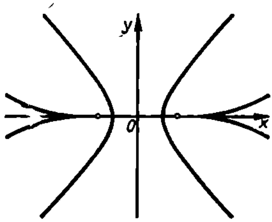
$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = -\frac{e^2}{a}; \quad \eta = 0$$

Im Scheitel $B(a; 0)$

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = \frac{e^2}{a}; \quad \eta = 0$$

Hauptkreis der Hyperbel

$$x^2 + y^2 = a^2$$

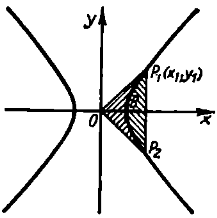


Evolute der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

für $|\xi| \geqq \frac{e^2}{a}$

Flächeninhalt des Hyperbelsegments P_1BP_2 und des Sektors OP_2BP_1



$$A = x_1y_1 - ab\ln\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) =$$

$$= x_1y_1 - \operatorname{arcosh}\frac{x_1}{a} \text{ (Segment)}$$

$$A = ab\ln\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) = \operatorname{arcosh}\frac{x_1}{a}$$

(Sektor)

Rotationshyperboloide $\left(\text{rotierende Kurve } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

Rotation um die x-Achse in den Grenzen a bis x_1 und $-a$ bis $-x_1$:

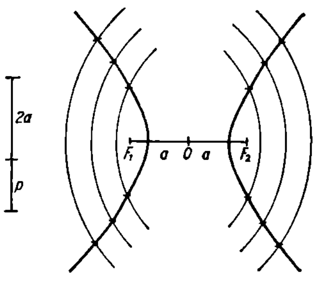
$$V = \frac{2\pi b^2(x_1 - a)^2\,(x_1 + 2a)}{3a^2}$$ (*zweischaliges* Rotationshyperboloid)

Rotation um die y-Achse in den Grenzen von y_1 bis $-y_1$:

$$V = \frac{2\pi a^2 y_1(y_1^2 + 3b^2)}{3b^2}$$ (*einschaliges* Rotationshyperboloid)

HYPERBELKONSTRUKTIONEN

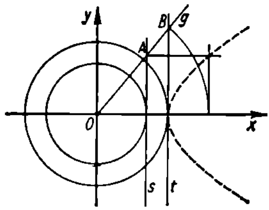
Gegeben: *Brennpunkte und Hauptachse* $2a$



Man schlägt um die Brennpunkte F_1 und F_2 Kreise mit beliebigem Radius p und dem Radius $2a + p$ und erhält als Schnittpunkte vier symmetrisch liegende Hyperbelpunkte. Durch Variieren von p ergeben sich weitere Hyperbelpunkte.

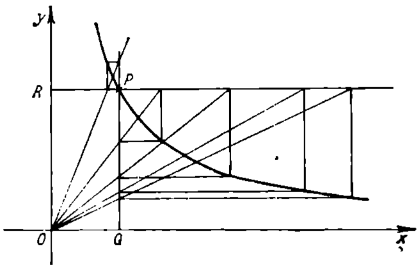
Gegeben: *Halbachsen a und b*

Man schlägt um den Mittelpunkt O Kreise mit den Radien a und b. An diese „Leitkreise“ zieht man die lotrechten Tangenten s und t. Eine beliebige Gerade g durch O schneidet die Tangenten in A und B. Dann schlägt man um O den Kreisbogen mit dem Radius OB und errichtet in seinem Schnittpunkt mit der x-Achse die Senkrechte zur x-Achse. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Parallelen durch A zur x-Achse ist ein Hyperbelpunkt. Durch Variieren der Geraden g ergeben sich weitere Hyperbelpunkte.



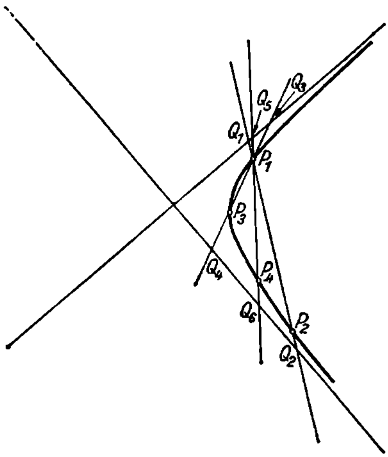
Gegeben: *Koordinatenachsen als Asymptoten und ein Punkt P der gleichseitigen Hyperbel.*

Man fällt von P die Lote PQ und PR auf die Koordinatenachsen, verlängert $\overline{PR}$ über P hinaus und verbindet beliebige Punkte auf der Verlängerung mit dem Ursprung O. Durch die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit $\overline{PQ}$ zieht man Parallelen zur x-Achse. Dann zieht man durch die Teilpunkte auf der Verlängerung von $\overline{PR}$ Parallelen zur y-Achse. Ihre Schnittpunkte mit den entsprechenden Parallelen zur x-Achse sind Hyperbelpunkte.
Entsprechende Zeichnung im 3. Quadranten ergibt den 2. Zweig der Hyperbel.



Gegeben: *Asymptoten und ein Hyperbelpunkt P_1*

Man zeichnet eine beliebige Gerade durch P_1, die die Asymptoten in Q_1 und Q_2 schneidet, und trägt auf ihr $\overline{Q_2P_2} = \overline{Q_1P_1}$ ab. Der Punkt P_2 ist dann ein weiterer Hyperbelpunkt.



Durch Variieren der Geraden ergeben sich weitere Punkte.

4.1.8. Die allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y

$$F(x;y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Die *Invarianten* einer Kurve 2. Ordnung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Anmerkung: In den Determinanten gilt $a_{ik} = a_{ki}$.

Invarianten sind Größen, die bei Koordinatentransformationen erhalten bleiben.

Die allgemeine Funktionsgleichung 2. Grades stellt einen eigentlichen Kegelschnitt dar, wenn $\Delta \neq 0$ ist, dagegen einen zerfallenden Kegelschnitt, wenn $\Delta = 0$ ist.

Für $\delta \neq 0$ wird durch die allgemeine Gleichung 2. Grades eine Ellipse oder Hyperbel definiert, während für $\delta = 0$ eine Parabel erklärt wird.

FALL 1: $\delta \neq 0$

Parallelverschiebung des Koordinatensystems

$x = x' + u \qquad x; y$ ursprüngliche Koordinaten

$y = y' + v \qquad x'; y'$ neue Koordinaten

$(u; v)$ neuer Ursprung, bezogen auf das alte System.

$$u = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{\delta}; \qquad v = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\delta}$$

Bestimmungsgleichungen für u und v sind

$$\frac{\partial F(x; y)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x; y)}{\partial y} = 0$$

$(u; v)$ wird Mittelpunkt des Kegelschnittes.
Die transformierte Gleichung lautet

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_{44} = 0,$$

wobei

$$a_{44} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Drehung des $x'; y'$-Koordinatensystems um den Winkel α:

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \qquad \alpha \leqq 90°$$

$$\begin{aligned} x' &= \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha \\ y' &= \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha \end{aligned} \qquad \xi; \eta \text{ neue Koordinaten}$$

Die transformierte Gleichung lautet

(I) $\quad b_{11}\xi^2 + b_{22}\eta^2 + a_{44} = 0,\quad$ wobei

$$b_{11} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]$$

Das obere Vorzeichen vor der Wurzel ist bei positivem a_{12} zu nehmen, das untere bei negativem a_{12}.

$$b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22} = S \quad \text{(Invariante)}$$

Gleichung (I) stellt für $\delta > 0$; $\Delta \neq 0$ eine Ellipse dar, und zwar

$$\text{reelle Ellipse} \begin{cases} b_{11} > 0 \\ b_{22} > 0 \\ a_{44} < 0 \end{cases} \qquad \text{imaginäre Ellipse} \begin{cases} b_{11} > 0 \\ b_{22} > 0 \\ a_{44} > 0 \end{cases}$$

Ist $\delta > 0$, aber $\Delta = 0$, so zerfällt die Ellipse in ein imaginäres Geradenpaar mit reellem Schnittpunkt im Endlichen. Wenn $\Delta = 0$, ist auch $a_{44} = 0$.
Gleichung (I) stellt für $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$ eine Hyperbel dar, die bei $\Delta = 0$ in ein reelles, sich schneidendes Geradenpaar entartet.

FALL 2: $\delta = 0$

Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\ ; \quad \alpha \leqq 90°$$

$x; y$ ursprüngliche Koordinaten

$x'; y'$ neue Koordinaten

Die transformierte Gleichung lautet

$$b_{11}x'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0, \quad \text{wobei}$$

$$b_{11} = a_{11} + a_{22}$$

$$b_{13} = \frac{a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$$

$$b_{23} = \frac{a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$$

Parallelverschiebung des $x'; y'$-Systems:

$$x' = \xi - \frac{b_{13}}{b_{11}}\ ; \qquad y' = \eta - \frac{b_{11}a_{33} - b_{13}^2}{2b_{11}b_{23}}$$

Die transformierte Gleichung lautet

$$\text{(II)} \qquad \xi^2 = -\frac{2b_{23}}{b_{11}}\,\eta$$

Die Gleichung (II) stellt für $\Delta \neq 0$ eine Parabel dar. Falls $\Delta = 0$ ist, zerfällt die Kurve in ein Geradenpaar, und zwar

in zwei reelle und verschiedene Parallelen für $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} > 0$,

in ein zusammenfallendes Parallelenpaar (Doppelgerade) für $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0$,

in zwei imaginäre Parallelen für $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} < 0$.

ZUSAMMENSTELLUNG

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$\delta \neq 0$
Kegelschnitte mit Mittelpunkt</td><td colspan="3" rowspan="2">$\delta = 0$
Kegelschnitt
ohne Mittelpunkt</td></tr>
<tr><td>$\delta > 0$</td><td>$\delta < 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta \neq 0$
eigentliche
Kegelschnitte</td><td>$\Delta \cdot S < 0$
reelle Ellipse</td><td rowspan="2">Hyperbel</td><td colspan="3" rowspan="2">Parabel</td></tr>
<tr><td>$\Delta \cdot S > 0$
imaginäre
Ellipse</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta = 0$
uneigentliche
(entartete)
Kegelschnitte</td><td colspan="2">nicht paralleles
(sich schneidendes) Geradenpaar</td><td colspan="3">Parallelenpaar</td></tr>
<tr><td rowspan="3">imaginär mit
reellem
Schnittpunkt
im Endlichen</td><td rowspan="3">reell</td><td colspan="3">$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$</td></tr>
<tr><td>> 0
2 verschiedene
reelle</td><td>$= 0$
2 zusammenfallende</td><td>< 0
2 imaginäre</td></tr>
<tr><td colspan="3">Parallelen</td></tr>
</table>

Beispiel 1:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0$$

$$a_{11} = 5; \quad a_{12} = 2; \quad a_{22} = 2; \quad a_{13} = -9;$$

$$a_{23} = -6; \quad a_{33} = 15$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & -6 \\ -9 & -6 & 15 \end{vmatrix} \neq 0; \; \delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 > 0$$

Die Gleichung definiert eine **Ellipse.**

Bestimmung von u und v:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(x;y)}{\partial x} &= 10x + 4y - 18 = 0 \\ \frac{\partial F(x;y)}{\partial y} &= 4x + 4y - 12 = 0 \end{aligned}\right|$$

$$x = u = 1; \quad y = v = 2$$

Mittelpunkt der Ellipse $M(1; 2)$ im ursprünglichen System
Bestimmung von a_{44}:

$$a_{44} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = (-9) \cdot 1 + (-6) \cdot 2 + 15 = -6$$

Transformierte Gleichung nach Parallelverschiebung:

$$5x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 - 6 = 0$$

Bestimmung des Drehungswinkels α:

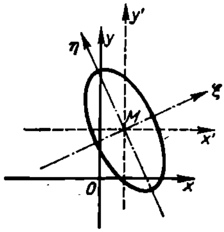
$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{4}{3}; \quad \alpha = 26^\circ\, 34'$$

$$b_{11} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]$$

(oberes Vorzeichen, da a_{12} positiv ist)

$$b_{11} = \frac{1}{2}\left[5 + 2 + \sqrt{(5 - 2)^2 + 4 \cdot 2^2}\right] = 6$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right] = \frac{1}{2}(7 - 5) = 1$$



Transformierte Gleichung nach Drehung:

$$6\xi^2 + 1\eta^2 - 6 = 0$$

$$\frac{\xi^2}{1} + \frac{\eta^2}{6} = 1$$

d.i. Ellipse mit $a = \sqrt{6}$ und $b = 1$ und mit Mittelpunkt im Ursprung des ξ; η-Systems. Große Achse ist die η-Achse.

Frage: Wie muß das Absolutglied a_{33} in der Gleichung lauten, damit die Ellipse entartet?

Bedingung heißt: $\Delta = 0$ oder $a_{44} = 0$

$$a_{44} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = 0; \quad -9 - 12 + a_{33} = 0$$

$$a_{33} = 21$$

Die Gleichung $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 21 = 0$ stellt eine Ellipse dar, die in ihren Mittelpunkt entartet.

Beispiel 2:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 220x - 40y - 100 = 0$$

$$a_{11} = 9; \quad a_{12} = -12; \quad a_{22} = 16; \quad a_{13} = 110$$

$$a_{23} = -20; \quad a_{33} = -100$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 & 110 \\ -12 & 16 & -20 \\ 110 & -20 & -100 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 144 - 144 = 0$$

Die Gleichung definiert eine **Parabel.**

Drehung des Koordinatensystems:

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-24}{-7} = \frac{24}{7}; \quad \alpha = 36^\circ\, 52'$$

$$b_{11} = a_{11} + a_{22} = 25$$

$$b_{13} = \frac{a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}} = \frac{110\sqrt{9} + (-20)\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = 50$$

$$b_{23} = \frac{a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}} = \frac{-20\sqrt{9} - 110\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = -100$$

Transformierte Gleichung nach Drehung:

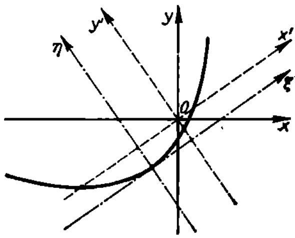
$$25x'^2 + 100x' - 200y' - 100 = 0$$

$$x'^2 + 4x' - 8y' - 4 = 0$$

Transformierte Gleichung nach Parallelverschiebung:

$$\xi^2 = -\frac{-200}{25}\eta; \quad \xi^2 = 8\eta$$

d.i. Parabel mit Scheitel im Ursprung des ξ; η-Systems und dem Parameter $2p = 8$. Parabelachse ist die η-Achse.



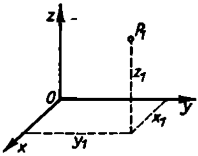
4.2. Analytische Geometrie des Raumes

4.2.1. Die verschiedenen Koordinatensysteme

Rechtwinkliges (cartesisches) Koordinatensystem

Rechtssystem:

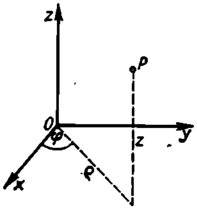
Drehung der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse unter gleichzeitiger Verschiebung in positiver z-Richtung stellt eine *Rechtsschraubung* dar.
Die Koordinaten des Punktes P sind x; y; z.
Schreibweise: $P(x; y; z)$



Die x-, y-, z-Linien, d.h. die Linien, längs denen sich nur eine Koordinate ändert, sind *achsenparallele Geraden*. Die Flächen, für die eine Koordinate konstant ist, also die Ebenen $x =$ konst, $y =$ konst, $z =$ konst, sind *achsenparallele Ebenen.*

Beim räumlichen cartesischen Koordinatensystem handelt es sich um eine eineindeutige Zuordnung der Raumpunkte zu Zahlentripeln $(x; y; z)$, $x, y, z \in R$.

Zylinderkoordinatensystem



Die Koordinaten des Punktes P sind $\varrho; \varphi; z$.

Schreibweise: $P(\varrho; \varphi; z)$

$\varrho; \varphi$ sind die Polarkoordinaten der Projektion des Punktes auf die $x; y$-Ebene. z ist der Abstand des Punktes von der $x; y$-Ebene.
Die Flächen $\varrho =$ konst sind Zylinderflächen mit gemeinschaftlicher z-Achse, die Flächen $\varphi =$ konst sind Ebenen durch die z-Achse, die Flächen $z =$ konst sind Ebenen senkrecht zur z-Achse.

Beziehungen zwischen Zylinderkoordinaten und rechtwinkligen Koordinaten

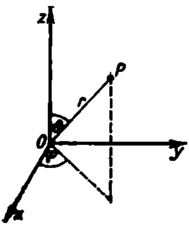
$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\varrho}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\varrho} \qquad \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}; \quad \varphi \in [0; 2\pi)] \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$$

$$x = \varrho\cos\varphi; \quad y = \varrho\sin\varphi; \quad z = z$$

Polar- (Kugel-) Koordinatensystem



Die Koordinaten des Punktes P sind $r; \varphi; \vartheta$.

Schreibweise: $P(r; \varphi; \vartheta)$

r Betrag des Radiusvektors OP

φ Winkel, den die Projektion von $\overline{OP}$ auf die $x; y$-Ebene mit der x-Achse bildet ($0 \leq \varphi < 2\pi$).
ϑ Winkel zwischen $\overline{OP}$ und positiver z-Achse ($0 \leq \vartheta < \pi$).

Die Flächen $r =$ konst sind konzentrische Kugeln mit dem Pol O als Mittelpunkt.
Die Flächen $\varphi =$ konst sind Halbebenen durch die z-Achse.
Die Flächen $\vartheta =$ konst sind Kegel mit der Spitze in O und der z-Achse als Achse.

Beziehungen zwischen Kugelkoordinaten und rechtwinkligen Koordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \varphi \in [0;\, 2\pi]$$

$$\cos\vartheta = \frac{z}{r}\,;\quad \tan\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad \vartheta \in [0;\, \pi]$$

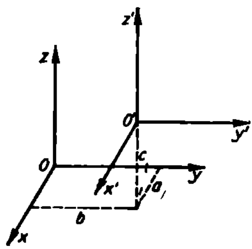
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}\,;\quad \varphi \in [0;\, 2\pi] \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$$

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi;\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi;\quad z = r\cos\vartheta$$

Transformation des rechtwinkligen Koordinatensystems

1. Parallelverschiebung:

$$x = x' + a \qquad x' = x - a$$
$$y = y' + b \qquad y' = y - b$$
$$z = z' + c \qquad z' = z - c$$



$x;\, y;\, z$ ursprüngliche Koordinaten

$x';\, y';\, z'$ neue Koordinaten

$a;\, b;\, c$ Koordinaten des neuen Ursprungs im alten System

2. Drehung

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3$$
$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3$$
$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1$$
$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2$$
$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ Winkel, die die x'-Achse mit den ursprünglichen Achsen bildet.

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ Winkel, die die y'-Achse mit den ursprünglichen Achsen bildet.

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ Winkel, die die z'-Achse mit den ursprünglichen Achsen bildet.

Beziehungen zwischen den Richtungscosinus der neuen Achsen:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$

$$\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0$$

Weitere Formeln entstehen durch zyklische Vertauschung.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

4.2.2. Punkte und Strecken im Raum

Entfernung zweier Punkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = e$$

Projektion der Strecke e auf die Koordinatenachsen

$$e_x = e\cos\alpha; \quad e_y = e\cos\beta; \quad e_z = e\cos\gamma$$

α, β, γ Winkel, die die durch den Ursprung gehende Parallele zu der Geraden, auf der die Strecke e liegt, mit den Koordinatenachsen bildet.

$$e^2 = e_x^2 + e_y^2 + e_z^2$$

$$e = e_x\cos\alpha + e_y\cos\beta + e_z\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ Richtungscosinus von e

Teilung einer Strecke P_1P_2 im Verhältnis λ

$$x_t = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$ $\lambda > 0$ für inneren Teilpunkt
$\lambda < 0$ für äußeren Teilpunkt

$$y_t = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z_t = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Mittelpunkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$ der Strecke P_1P_2

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Schwerpunkt $S(x_s; y_s; z_s)$ des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad z_s = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Für materielle Punkte in den Ecken des Dreiecks gilt:

$$x_s = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad y_s = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$z_s = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

und allgemein bei n Massenpunkten

$$x_s = \frac{\sum\limits_1^n m_kx_k}{\sum\limits_1^n m_k}; \quad y_s = \frac{\sum\limits_1^n m_ky_k}{\sum\limits_1^n m_k}; \quad z_s = \frac{\sum\limits_1^n m_kz_k}{\sum\limits_1^n m_k}$$

Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad \text{wobei}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

A ergibt sich positiv, wenn die Aufeinanderfolge der Vektoren $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$ der eines Rechtssystems entspricht.

Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ (P_1 Spitze)

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

V ergibt sich positiv, wenn die Aufeinanderfolge der Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$ der eines Rechtssystems entspricht.
Vier Punkte in einer Ebene: $V = 0$

Winkel τ zwischen zwei Radiusvektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$

$$\cos\tau = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \\ = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2}$$

$\left.\begin{matrix}\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2\end{matrix}\right\}$ Richtwinkel der Radiusvektoren $\mathfrak{r}_1$ bzw. $\mathfrak{r}_2$

$$\mathfrak{r}_1 \perp \mathfrak{r}_2 \Rightarrow \cos\tau = 0$$

4.2.3. Ebene im Raum

Allgemeine Gleichung der Ebene

$$E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

(A, B, C nicht gleichzeitig Null)

Abschnitte auf den Koordinatenachsen

$$a = -\frac{D}{A}; \quad b = -\frac{D}{B}; \quad c = -\frac{D}{C}$$

Lot vom Ursprung auf die Ebene

$$p = -\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Wurzel muß das entgegengesetzte Vorzeichen von D erhalten.

Richtungscosinus der Ebene

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

α, β, γ sind die Winkel, die das Lot p mit den positiven Richtungen der Achsen bildet.

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Vorzeichen der Wurzel wie oben

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Sonderfälle

$D = 0$	Die Ebene geht durch den Ursprung: $Ax + By + Cz = 0$
$A = 0$	Die Ebene ist der x-Achse parallel: $By + Cz + D = 0$
$B = 0$	Die Ebene ist der y-Achse parallel: $Ax + Cz + D = 0$
$C = 0$	Die Ebene ist der z-Achse parallel: $Ax + By + D = 0$
$A = B = 0$	Die Ebene ist der $x; y$-Ebene parallel: $Cz + D = 0$
$A = C = 0$	Die Ebene ist der $x; z$-Ebene parallel: $By + D = 0$
$B = C = 0$	Die Ebene ist der $y; z$-Ebene parallel: $Ax + D = 0$
$A = D = 0$	Die Ebene geht durch die x-Achse: $By + Cz = 0$
$B = D = 0$	Die Ebene geht durch die y-Achse: $Ax + Cz = 0$
$C = D = 0$	Die Ebene geht durch die z-Achse: $Ax + By = 0$

Spezielle Ebenen

$z = 0$ Gleichung der $x; y$-Ebene

$y = 0$ Gleichung der $x; z$-Ebene

$x = 0$ Gleichung der $y; z$-Ebene

Abschnittsform der Ebenengleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ a, b, c Abschnitte auf den Achsen (s. S. 242)

Hessesche Normalform der Ebenengleichung

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

p Lot vom Ursprung auf die Ebene
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ Richtungscosinus der Ebene (s. S. 242)
Überführung der allgemeinen Form in die Hessesche Normalform:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$ wobei der Wurzel das entgegengesetzte Vorzeichen von D zu geben ist.

Abstand des Punktes $P_0(x_0; y_0; z_0)$ von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$d < 0$, wenn P_0 auf derselben Seite der Ebene wie der Ursprung liegt, sonst positiv.

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p$$

Ebene durch 3 Punkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$, $P_3(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ebene durch Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ebenenbüschel

$$\left.\begin{aligned} E_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ E_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ gegebene Ebenen}$$

Ebenenbüschel durch die Schnittgerade der beiden Ebenen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$:

$$E_1 + \lambda E_2 = 0, \quad \lambda \in R \setminus \{0\}$$

Winkelhalbierende Ebenen zu 2 Ebenen

$E_1 = 0$, $E_2 = 0$ gegebene Ebenen

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0$$

Vorzeichen der Wurzeln entgegengesetzt dem Vorzeichen von D_1 bzw. D_2.

Schnittpunkt $S(x_s; y_s; z_s)$ von 3 Ebenen

$E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ gegebene Ebenen

$$x_s = -\frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y_s = -\frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z_s = -\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

wobei

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

Bedingung: $\Delta \neq 0$

Vier Ebenen durch einen Punkt

Die 4 Ebenen sind in der allgemeinen Form gegeben.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

Winkel τ zwischen 2 Ebenen

$E_1 = 0$, $E_2 = 0$ gegebene Ebenen

$$\cos\tau = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}} \right| \qquad \tau \leqq 90°$$

Die Ebenen sind *parallel*, wenn

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$$

Die Ebenen stehen *senkrecht aufeinander*, wenn

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Gleichungen zweier paralleler Ebenen

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0$$

Projektion der ebenen Fläche A auf die $x; y$-, $y; z$-, $x; z$-Ebene

$$A_{xy} = A\cos\gamma, \quad A_{yz} = A\cos\alpha, \quad A_{xz} = A\cos\beta$$

Dabei sind α, β, γ die Winkel, die das Lot vom Ursprung aus auf die Ebene, in der die Fläche A liegt, mit den Koordinatenachsen bildet.

$$A^2 = A_{xy}^2 + A_{yz}^2 + A_{xz}^2$$

$$A = A_{xy}\cos\gamma + A_{yz}\cos\alpha + A_{xz}\cos\beta$$

4.2.4. Gerade im Raum

Allgemeine Gleichungsform der Geraden

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \text{ abgekürzt } E_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \text{ abgekürzt } E_2 = 0 \end{cases}$$

Die Gerade ist der Schnitt der beiden beliebigen Ebenen.

Geradengleichung in zwei projizierenden Ebenen

$$\begin{cases} y = mx + b \text{ (Ebene senkrecht zur } x; y\text{-Ebene)} \\ z = nx + c \text{ (Ebene senkrecht zur } x; z\text{-Ebene)} \end{cases}$$

Umrechnung der allgemeinen Form in die letztere:

$$A_1 = -m; \quad B_1 = 1; \quad C_1 = 0; \quad D_1 = -b$$

$$A_2 = -n; \quad B_2 = 0; \quad C_2 = 1; \quad D_2 = -c$$

Sonderfälle

Gerade parallel zur $x; y$-Ebene $\begin{cases} y = mx + b \\ z = c \end{cases}$

Gerade parallel zur $x; z$-Ebene $\begin{cases} z = nx + c \\ y = b \end{cases}$

Gerade parallel zur $y; z$-Ebene $\begin{cases} z = py + q \\ x = a \end{cases}$

Gerade parallel zur x-Achse $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$

Gerade parallel zur y-Achse $\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$

Gerade parallel zur z-Achse $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

Gerade durch den Ursprung $\begin{cases} y = mx \\ z = nx \end{cases}$

Gleichungen der Achsen:

$$x\text{-Achse}\ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y\text{-Achse}\ \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$z\text{-Achse}\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Winkel α, β, γ zwischen der Geraden $\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{cases}$ und den Achsen

$$\cos\alpha = \frac{1}{N}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad \cos\beta = \frac{1}{N}\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{N}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$N^2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2$$

Winkel α, β, γ zwischen der Geraden $\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases}$ und den Achsen

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}; \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Gleichung der Geraden durch $P_1(x_1; y_1; z_1)$ mit Richtwinkeln α, β, γ

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

Geradengleichung durch $P_1(x_1; y_1; z_1)$ in Parameterform

$$x = x_1 + t\cos\alpha$$

$$y = y_1 + t\cos\beta$$

$$z = z_1 + t\cos\gamma$$

Allgemeine Parameterdarstellung einer Geraden

$$x = a_1 t + a_2; \quad y = b_1 t + b_2; \quad z = c_1 t + c_2,$$

worin a_1, b_1, c_1 nicht einmal mehr der Richtungscosinusrelation zu genügen brauchen, sondern wie a_2, b_2, c_2 beliebige gegebene Zahlen sind.

Gerade durch 2 Punkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Sonderfälle

1. Gerade durch $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und den Ursprung

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

2. Gerade durch $P_1(x_1; y_1; z_1)$ senkrecht zur Ebene $E = 0$

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

Schnittpunkt der Geraden $\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$ mit der Ebene $E = 0$

$$x_s = x_1 - t\cos\alpha \qquad t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}$$
$$y_s = y_1 - t\cos\beta$$
$$z_s = z_1 - t\cos\gamma$$

Gerade parallel der Ebene:

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

Schnittpunkt der Geraden $\left\{\begin{array}{l} y = mx + b \\ z = nx + c \end{array}\right.$ mit der Ebene $E = 0$

$$x_s = -\frac{bB + cC + D}{A + mB + nC};$$ y_s und z_s durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung

Gerade parallel der Ebene: $A + mB + nC = 0$

Bedingung für den Schnitt zweier Geraden

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ E_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l} E_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ E_4 \equiv A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{array}\right\}$$

gegebene Geraden

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

Schnittpunkt zweier Geraden

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} y = m_2 x + b_2' \\ z = n_2 x + c_2 \end{cases}$$

$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} = \frac{c_2 - c_1}{n_1 - n_2}; \quad y_s = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2};$$

$$z_s = \frac{n_1 c_2 - n_2 c_1}{n_1 - n_2}$$

Bedingung für Schnittpunkt: $\dfrac{b_1 - b_2}{c_1 - c_2} = \dfrac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2}$

Winkel τ zwischen der Geraden
$\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_1}{\cos\beta} = \dfrac{z - z_1}{\cos\gamma}$ **und der Ebene $E = 0$**

$$\sin\tau = \left| \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad \tau \leqq 90^\circ$$

Gerade *parallel* der Ebene: $A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$

Gerade *senkrecht* auf der Ebene: $\dfrac{A}{\cos\alpha} = \dfrac{B}{\cos\beta} = \dfrac{C}{\cos\gamma}$

Schnittwinkel τ der Geraden $\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y - y_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z - z_1}{\cos\gamma_1}$ **und**
$\dfrac{x - x_2}{\cos\alpha_2} = \dfrac{y - y_2}{\cos\beta_2} = \dfrac{z - z_2}{\cos\gamma_2}$

$$\cos\tau = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

Parallele Geraden:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2, \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$$

Senkrecht stehende Geraden:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$

Schnittwinkel τ der Geraden

$$\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ z = n_1x + c_1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y = m_2x + b_2 \\ z = n_2x + c_2 \end{cases}$$

$$\cos\tau = \frac{1 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(1 + m_1^2 + n_1^2)(1 + m_2^2 + n_2^2)}}$$

Parallele Geraden: $m_1 = m_2$; $n_1 = n_2$

Senkrecht stehende Geraden: $1 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

Abstand zweier windschiefer Geraden im Raum

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma_1} \\ \frac{x - x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos\beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos\gamma_2} \end{aligned}\right\} \quad \text{gegebene Geraden}$$

$$e = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix}^2}} \right|$$

4.2.5. Flächen 2. Ordnung

Kugel

Allgemeine Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

Mittelpunkt $M(a; b; c)$
r Radius

Mittelpunktsgleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \qquad \text{Mittelpunkt im Ursprung}$$

Quadratische Gleichung als Kugel:

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0 \quad \text{für} \quad A \neq 0$$

Mittelpunkt $M\left(-\frac{B}{2A};\ -\frac{C}{2A};\ -\frac{D}{2A}\right)$

Radius $r = \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 4AE}$

für $B^2 + C^2 + D^2 > 4AE$

Tangentialebene im Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$ an die Kugel $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$:

$$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-c)(z_0-c) - r^2 = 0$$

Liegt P_0 nicht auf der Kugel, so stellt die Gleichung die *Polarebene* von P_0 in bezug auf die Kugel dar.
Potenz p des Punktes $P_0(x_0; y_0; z_0)$ in bezug auf die Kugel $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$

$$p = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 - r^2$$

Potenzebene

$$\left.\begin{aligned} K_1 &\equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ K_2 &\equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{gegebene Kugeln}$$

$$K_1 - K_2 = 0$$

Die Potenzebene steht senkrecht auf der Zentralen der beiden Kugeln.

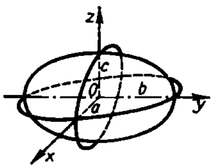
Potenzlinie in bezug auf drei Kugeln

$K_1 = 0$; $K_2 = 0$; $K_3 = 0$ drei gegebene Kugeln

$$\left.\begin{aligned} K_1 - K_2 &= 0 \\ K_1 - K_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Potenzlinie}$$

Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Mittelpunkt im Ursprung; a, b, c Halbachsen der Hauptschnitte

Sind 2 Achsen gleich, so liegt ein Rotationsellipsoid vor.
Sind 3 Achsen gleich, so liegt eine Kugel vor.

Polarebene zum Pol $P_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Liegt P_0 auf der Fläche des Ellipsoids, so stellt die Gleichung die Tangentialebene dar.

Durchmesserebene (*Diametralebene*):

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2} = 0$$

α, β, γ Richtwinkel des zugeordneten Durchmessers

Drei *konjugierte Durchmesser:*

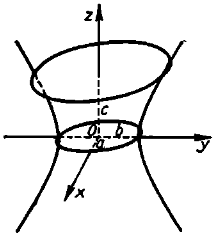
$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{a^2} + \frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{b^2} + \frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{c^2} = 0$$

$$\frac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{a^2} + \frac{\cos\beta_2\cos\beta_3}{b^2} + \frac{\cos\gamma_2\cos\gamma_3}{c^2} = 0$$

$$\frac{\cos\alpha_3\cos\alpha_1}{a^2} + \frac{\cos\beta_3\cos\beta_1}{b^2} + \frac{\cos\gamma_3\cos\gamma_1}{c^2} = 0$$

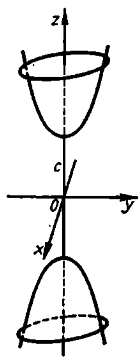
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ Richtwinkel der drei konjugierten Durchmesser
Jede Ebene schneidet das Ellipsoid in einer reellen oder imaginären Ellipse.

Hyperboloid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

einschaliges Hyperboloid
(a,b reelle Halbachsen,
c imaginäre Halbachse)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

zweischaliges Hyperboloid

(c reelle Halbachse, a und b imaginäre Halbachsen)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ *Asymptotenkegel* für beide Hyperboloide

$a = b$ Rotationshyperboloide (z-Achse Drehachse)

a, b, c Halbachsen der Hauptschnitte

Durchmesserebene (*Diametralebene*):

$\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} - \frac{z \cos \gamma}{c^2} = 0$ gültig für beide Hyperboloide

α, β, γ Richtwinkel des zugeordneten Durchmessers

Polarebene zum Pol $P_0(x_0; y_0; z_0)$:

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} \pm 1 = 0$ Pluszeichen für zweischaliges, Minuszeichen für einschaliges Hyperboloid

Liegt P_0 auf der Fläche, so stellt die Gleichung die *Tangentialebene* dar.
Die geradlinigen *Erzeugenden* des einschaligen Hyperboloids:

$$\text{1. Schar} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \varkappa\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\varkappa}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \varkappa, \lambda \in R \setminus \{0\}$$

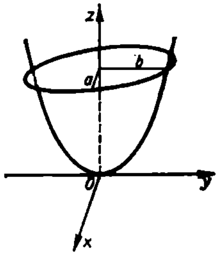
$$\text{2. Schar} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

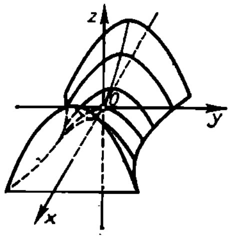
Jede Erzeugende der 1. Schar schneidet jede Erzeugende der 2. Schar. Eine Ebene schneidet das Hyperboloid in einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die Ebene parallel zu zwei Mantellinien, zu einer oder zu keiner Mantellinie des Asymptotenkegels liegt.

Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

elliptisches Paraboloid | *hyperbolisches* Paraboloid





Die Achse des Paraboloids ist die z-Achse.
Scheitel im Ursprung
$a = b$ beim elliptischen Paraboloid ergibt ein *Rotationsparaboloid* mit der z-Achse als Drehachse.
Die $x; y$-Ebene ist Tangentialebene an beide Paraboloide im Ursprung.
Jede zur z-Achse parallele Ebene schneidet das elliptische Paraboloid in einer Parabel, jede andere Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse.
Jede zur z-Achse parallele Ebene schneidet das hyperbolische Paraboloid in einer Parabel, jede andere Ebene in einer Hyperbel. Die $x; z$- und die $y; z$-Ebene sind Symmetrieebenen für beide Paraboloide.
Tangentialebene in $P_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} - (z + z_0) = 0$$

Liegt P_0 nicht auf der Fläche, so stellt die Gleichung die *Polarebene* dar.
Die geradlinigen *Erzeugenden* des hyperbolischen Paraboloids:

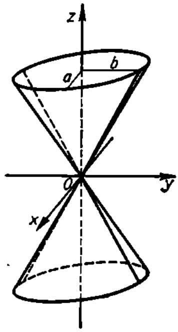
1. Schar $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \varkappa \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\varkappa} 2z \end{cases}$ parallel der Ebene $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$

2. Schar $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \lambda \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\lambda} 2z \end{cases}$ parallel der Ebene $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$

$\varkappa, \lambda \in R \setminus \{0\}$

Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{(I)}$$



a, b Halbachsen der Ellipse, die Leitkurve des Kegels ist und deren Ebene senkrecht zur z-Achse steht
c Abstand der Ellipsenebene von der $x; y$-Ebene; Spitze im Ursprung

Tangentialebene an Kegel (I) in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0$$

Gerader Kreiskegel

Für $a = b$ wird die Leitkurve zum Kreis; die Kreiskegelfläche hat dann die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und ihre *Tangentialebene*

$$\frac{xx_0 + yy_0}{a^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0$$

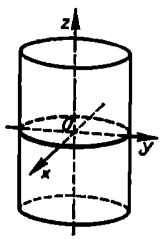
Gleichungen der *Erzeugenden* des Kegels:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{y}{b} \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = -\lambda\dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Schar geht durch Spitze des Kegels
$\lambda \in R \setminus \{0\}$

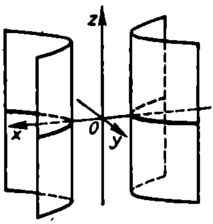
Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Elliptischer Zylinder senkrecht zur $x; y$-Ebene.

$x; z$- und $y; z$-Ebene sind Symmetrieebenen.



Die Gleichung ist gleichbedeutend mit der Schnittellipse in der $x; y$-Ebene.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbolischer Zylinder senkrecht zur $x; y$-Ebene

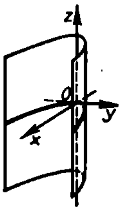
$x; z$- und $y; z$-Ebene sind Symmetrieebenen

Schnittkurve in der $x; y$-Ebene ist eine Hyperbel.

$y^2 = 2px$ *parabolischer* Zylinder senkrecht zur $x; y$-Ebene

Die $x; z$-Ebene ist Symmetrieebene.

Die $y; z$-Ebene ist Tangentialebene, die die Fläche in der z-Achse berührt.



Schnitte senkrecht zur $x; y$-Ebene ergeben ein reelles oder imaginäres Geradenpaar. Jede andere Ebene schneidet den elliptischen, hyperbolischen bzw. parabolischen Zylinder in einer Ellipse, Hyperbel bzw. Parabel.

Gleichung der *Tangentialebene* in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

für elliptischen Zylinder $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

für hyperbolischen Zylinder $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

für parabolischen Zylinder $yy_0 = p(x + x_0)$

4.2.6. Die allgemeine Gleichung 2. Grades in x, y und z

$$\begin{aligned} f(x; y; z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned}$$

Die *Invarianten* der Fläche 2. Ordnung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{31} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Anmerkung: In den Determinanten gilt $a_{ik} = a_{ki}$.

Die allgemeine Funktionsgleichung 2. Grades stellt eine **Fläche 2. Ordnung** dar. Sie besitzt einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt, wenn $\delta \neq 0$ ist (sog. *Mittelpunktsfläche*). Sehnen durch den Mittelpunkt heißen *Durchmesser*. Der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen ist eine *Durchmesserebene* (*Diametralebene*). Der zu den Sehnen gehörige Durchmesser ist konjugiert zu der Diametralebene.

Ein *Zerfallen der Fläche* 2. Ordnung in ein Ebenenpaar tritt ein, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Für reelle, nicht zerfallende Flächen 2. Ordnung gelten folgende Bedingungen:

FALL 1: $\delta \neq 0$ (Mittelpunktsflächen)

	$\delta s > 0, t > 0$	δs und t nicht beide > 0
$\Delta < 0$	Ellipsoid	zweischaliges Hyperboloid
$\Delta > 0$	imaginäres Ellipsoid	einschaliges Hyperboloid
$\Delta = 0$	imaginärer Kegel	Kegel

FALL 2: $\delta = 0$

	$\Delta < 0, t > 0$		$\Delta > 0, t < 0$
$\Delta \neq 0$	elliptisches Paraboloid		hyperbolisches Paraboloid
	$t > 0$	$t < 0$	$t = 0$
$\Delta = 0$	elliptischer Zylinder	hyperbolischer Zylinder	parabolischer Zylinder

5. Differentialrechnung

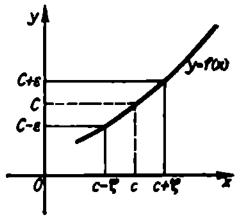
5.1. Grenzwerte

Eine Zahlenfolge $\{a_k\}$ hat den Grenzwert C, wenn sich zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $K = K(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß für alle $k > K$ gilt:

$$|a_k - C| < \varepsilon$$

Schreibweise: $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = C$; $\{a_k\} \underset{k\to\infty}{\to} C \Rightarrow \{a_k - C\}$ Nullfolge

Eine Folge ist konvergent, wenn der Grenzwert existiert, sonst divergent.
Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle $x = c$ den Grenzwert C, wenn bei unbegrenzter Annäherung von x an die Stelle c der Funktionswert $f(x)$ sich unbegrenzt dem Wert C nähert.



Schreibweise: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = C$

Genaue Definition

Eine Funktion f hat an der Stelle $x = c$ den Grenzwert C, wenn sich zu jeder kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\zeta > 0$ so angeben läßt, daß x-Werten im Intervall $x \in (c - \zeta; c + \zeta)$ Funktionswerte im Intervall $f(x) \in (C - \varepsilon; C + \varepsilon)$ entsprechen.
Es darf $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ nicht mit $f(c)$ verwechselt werden.

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert

C ist *linksseitiger* Grenzwert, wenn die Funktion $y = f(x)$ für $x \underset{\to}{<} c$ sich dem Wert C unbegrenzt nähert.

Schreibweise: $C = \lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ bzw. $C = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$.

C ist *rechtsseitiger* Grenzwert, wenn die Funktion $y = f(x)$ für $x \underset{\to}{>} c$ sich dem Wert C unbegrenzt nähert.

Schreibweise: $C = \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ bzw. $C = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$

Ist $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = \lim\limits_{x \to c-0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = C.$

Rechnen mit Grenzwerten

Unter der Voraussetzung, daß die in den Regeln auftretenden Grenzwerte existieren, gilt:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [c f(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \text{für} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

$$\lim_{x \to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \qquad c \in R$$

$$\lim_{x \to a} [\log_c f(x)] = \log_c [\lim_{x \to a} f(x)]$$

Ist $g(x) < f(x) < h(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = C$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = C$, so gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C.$

Beispiele für Grenzwerte:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + a^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } |a| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } a = 1, \text{ divergent für } a = -1 \\ 0 & \text{für } |a| > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -0} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{n \to 0} \frac{\sin nx}{n} = x$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1; \quad \lim_{n\to 0} \frac{\tan nx}{n} = x$$

$$\lim_{h\to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \qquad \text{für } a > 1; \quad n \in N; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0; \quad \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{für } a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C = 0{,}5772\ldots$$

(EULERsche *Konstante*)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \quad \text{(STIRLINGsche \textit{Formel})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

(WALLISsches *Produkt*)

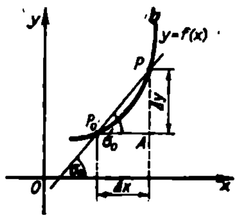
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{\cos x}} = 1 \quad \text{(MASKELYNEsche \textit{Regel})}$$

5.2. Differenzenquotient, Differentialquotient, Differential

Schreibweise: *Differenzenquotient* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

y', $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha_0$$

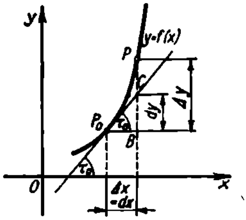
Der Differenzenquotient gibt den *Anstieg der Sekante* P_0P an.

Dreieck P_0AP heißt *Sekantendreieck.*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \tan \tau_0 \qquad x_0 \in X; \qquad x_0 + \Delta x \in X; \qquad y_0 = f(x_0) \in Y$$

Der Differentialquotient (*die Ableitung*) der Funktion an der Stelle x_0 gibt die *Steigung der Tangente* im Punkt P_0 an. Das Dreieck P_0BC heißt *Tangentendreieck.*



Die Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar, wenn sie dort definiert ist und der Grenzwert $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ an dieser Stelle existiert.

Die Funktion $y = f(x)$ ist in einem Intervall, das dem Definitionsbereich angehört ($x \in X$), differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls differenzierbar ist. Jede an der Stelle x_0 *differenzierbare Funktion* ist dort stetig (gilt nicht umgekehrt!).

Linksseitige Ableitung $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

rechtsseitige Ableitung $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Sind an der Stelle x_0 rechts- und linksseitige Ableitung verschieden, ist die Funktion bei x_0 nicht differenzierbar.

Begriff des Differentials

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}y$ heißt das Differential von y, das zum Differential $\mathrm{d}x$ gehört.

Ableitungsfunktion

$$f' = \{(x; y') \mid y' = f'(x)\}$$

Höhere Ableitungen und Differentiale

Jede Ableitung, die selbst wieder eine differenzierbare Funktion von x darstellt, kann abermals differenziert werden.

Zweite Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y'' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}$$

Dritte Ableitung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{df''(x)}{dx}$$

n-te Ableitung

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}$$

Entsprechend

2. Differential: $d^2y = d(dy) = f''(x)\,dx^2$

3. Differential: $d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\,dx^3$

$\vdots$ $\vdots$

n-tes Differential: $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n$

5.3. Differentiationsregeln

1. $y = C; \quad y' = 0$
2. $y = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \quad y' = u_1' + u_2' + \cdots + u_n'$
   $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Funktionen von x
3. $y = uv; \qquad y' = u'v + uv'$ (*Produktregel*)
   $y = uvw; \qquad y' = u'vw + uv'w + uvw'$
4. $y = cu; \qquad y' = cu'$
5. $y = \frac{u}{v}; \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (*Quotientenregel*) für $v \neq 0$
6. $y = f(u); \quad u = g(v); \quad v = h(x)$
   $$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,g'(v)\,h'(x) \quad (\textit{Kettenregel})$$
7. Vereinfachter Fall: $y = f(u); \qquad u = g(x)$
   $y = f(u)$ *äußere Funktion,* $\qquad u = g(x)$ *innere Funktion*
   $$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,g'(x)$$
8. Ist $x = g(y)$ die Umkehrung von $y = f(x)$, so gilt
   $$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{für } f'(x) \neq 0,\ g'(y) \neq 0$$

Beispiele:

1. $y = -9;\quad \underline{\underline{y' = 0}}$

2. $y = x^5 + x^2 - x^7;\quad \underline{\underline{y' = 5x^4 + 2x - 7x^6}}$

3. $y = (x^3 + a)(x^2 + 3b) \qquad x^3 + a = u;\quad u' = 3x^2$

$y' = 3x^2(x^2 + 3b) + \qquad x^2 + 3b = v;\quad v' = 2x$

$\quad + (x^3 + a)\,2x$

$\underline{\underline{y' = 5x^4 + 9bx^2 + 2ax}}$

4. $y = 10x^6;\quad y' = 10 \cdot 6x^5$

$\underline{\underline{y' = 60x^5}}$

5. $y = \dfrac{x^3 + 2x}{4x^2 - 7} \qquad \begin{array}{ll} x^3 + 2x = u; & u' = 3x^2 + 2 \\ 4x^2 - 7 = v; & v' = 8x \end{array}$

$$y' = \frac{(3x^2 + 2)(4x^2 - 7) - (x^3 + 2x)\,8x}{(4x^2 - 7)^2}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{4x^4 - 29x^2 - 14}{(4x^2 - 7)^2}}}$$

6. $y = (1 - \cos^4 x)^2 = u^2 = f(u),$ wobei $u = 1 - \cos^4 x$

$f'(u) = 2u = 2(1 - \cos^4 x)$

$u = 1 - \cos^4 x = 1 - v^4 = g(v),$ wobei $v = \cos x$

$g'(v) = -4v^3 = -4\cos^3 x$

$v = \cos x = h(x);\quad h'(x) = -\sin x$

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,g'(v)\,h'(x) = 2(1 - \cos^4 x)(-4\cos^3 x)(-\sin x)$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = 8\sin x \cos^3 x(1 - \cos^4 x)}}$$

7. $y = \arctan x \qquad$ Umkehrung: $x = \tan y = g(y)$

$$g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + x^2}}}$$

Logarithmische Differentiation

Mitunter ist es notwendig, zur Bestimmung der Ableitung der Funktion $y = f(x)$ zuerst den natürlichen Logarithmus der Funktion zu bilden und diesen dann nach x zu differenzieren (logarithmische Ableitung).
Besonders günstig ist dieses Verfahren bei Funktionen der Form $y = u(x)^{v(x)}$.

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$y' = y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

Beispiel:

$$y = (\arctan x)^x$$

$$\ln y = x \ln (\arctan x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln (\arctan x) + \frac{x}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y' = (\arctan x)^x \left[\ln (\arctan x) + \frac{x}{(1 + x^2) \arctan x}\right]$$

Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher $z = f(x; y)$

Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = f_{xx} = z_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = f_{yy} = z_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = f_{xy} = z_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = f_{yx} = z_{yx}$$

Unter der Bedingung, daß diese letzten beiden Ableitungen an der Stelle $(x; y)$ stetig sind, gilt der **Satz von Schwarz**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

Totale Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

Totale Differentiale

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2$$

Bei n unabhängigen Variablen:

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

Beispiel:

$$z = y^2 \mathrm{e}^x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2\mathrm{e}^x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\mathrm{e}^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\mathrm{e}^x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\mathrm{e}^x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2y\mathrm{e}^x$$

$$\mathrm{d}z = y^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + 2y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y = y\mathrm{e}^x\,(y\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y)$$

$$\mathrm{d}^2 z = y^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2 + 2\cdot 2y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y^2 =$$

$$= \mathrm{e}^x(y^2\,\mathrm{d}x^2 + 4y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}y^2)$$

Differentiation unentwickelter (impliziter) Funktionen $f(x; y) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x}{f_y}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y'' = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3} =$$

$$= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

Beispiel:

$$f(x; y) = x^3 - x^2y + y^5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - x^2 = f_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3 = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -2x = f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3x^2 - 2xy}{5y^4 - x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$$

$$= -\frac{(6x - 2y)(5y^4 - x^2)^2 - 2(-2x)(3x^2 - 2xy)(5y^4 - x^2) + 20y^3(3x^2 - 2xy)^2}{(5y^4 - x^2)^3}$$

Differentiation von Funktionen in Parameterform $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} \qquad \dot\varphi(t) \neq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3} = \frac{\ddot\psi(t)\,\dot\varphi(t) - \ddot\varphi(t)\,\dot\psi(t)}{[\dot\varphi(t)]^3}$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Beispiel:

$$x = \ln t$$

$$y = \frac{1}{1-t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}; \qquad \frac{dt}{dx} = t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1-t)^2}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{(1-t)^3}$$

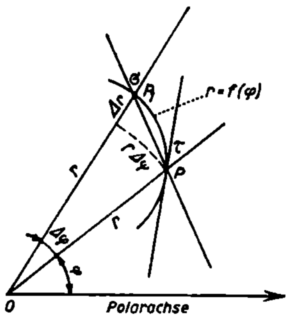
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-t)^2} : \frac{1}{t} = \frac{t}{(1-t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2}{(1-t)^3} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{(1-t)^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} = \frac{2t^2 + t - t^2}{(1-t)^3} = \frac{t^2 + t}{(1-t)^3}$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{t}{(1-t)^2}\right] t = \frac{1+t}{(1-t)^3}\, t = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}$$

Differentiation von Funktionen in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$



Differenzenquotient $\frac{\Delta r}{\Delta \varphi} = \frac{r}{\tan \sigma} = r \cot \sigma$, wobei σ den Winkel darstellt, den die Sekante PP_1 mit dem Leitstrahl OP_1 bildet.

Differentialquotient (Ableitung)

$$\frac{dr}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta \varphi} = \frac{r}{\tan \tau} = r \cot \tau$$

τ Winkel, den die Tangente in P mit dem Leitstrahl OP bildet.

Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad y' = \frac{\dfrac{dy}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}} = \frac{\dfrac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dfrac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

5.4. Ableitungen der Elementarfunktionen

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1} \quad n \in R \setminus \{0\}$
$y = x$	$y' = 1$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{1}{x}\log_a e$
$y = \lg x$	$y' = \dfrac{1}{x}\lg e \approx \dfrac{0{,}4343}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ für $\|x\| < 1$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ für $\|x\| < 1$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$

$$y = \tanh x \qquad y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$y = \coth x \qquad y' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

$$y = \operatorname{arsinh} x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \operatorname{arcosh} x \qquad y' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{für} \quad x > 1$$

$$y = \operatorname{artanh} x \qquad y' = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{für} \quad |x| < 1$$

$$y = \operatorname{arcoth} x \qquad y' = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{für} \quad |x| > 1$$

$$y = \ln f(x) \qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Einige Ableitungen höherer Ordnung

$$y = x^m \qquad y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

$$y = x^n \qquad y^{(n)} = n! \quad \text{für} \quad n \in N$$

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0;$$

$$y^{(n)} = a_n n!$$

$$y = \ln x \qquad y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$y = \log_a x \qquad y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}$$

$$y = e^x \qquad y^{(n)} = e^x$$

$$y = e^{mx} \qquad y^{(n)} = m^n e^{mx}$$

$$y = a^x \qquad y^{(n)} = a^x \ln (a)^n$$

$$y = \sin x \qquad y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos x \qquad y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \sin mx \qquad y^{(n)} = m^n \sin\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos mx \qquad y^{(n)} = m^n \cos\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \sinh x \qquad y^{(n)} = \begin{cases} \sinh x & \text{für gerades } n \\ \cosh x & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

$$y = \cosh x \qquad y^{(n)} = \begin{cases} \cosh x & \text{für gerades } n \\ \sinh x & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

$$y = uv \quad y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} \quad (\text{LEIBNIZsche Formel})$$

(Der Aufbau der Formel entspricht dem binomischen Lehrsatz.)

5.5. Differentiation einer Vektorfunktion

Erklärung:

$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(t)$ heißt Vektorfunktion der skalaren Veränderlichen t, wenn jedem Wert von t ein bestimmter Wert von $\mathfrak{v}$ entspricht.

Vektorfunktion in Komponentendarstellung:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_y + \mathfrak{v}_z = v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k}$$

v_x, v_y, v_z skalare Funktionen von t

Ableitung der Vektorfunktion:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \dot{\mathfrak{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathfrak{v}(t + \Delta t) - \mathfrak{v}(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathfrak{k}$$

Differential der Vektorfunktion:

$$d\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{v}}\, dt$$

Differentiationsregeln für Vektoren:

$$\frac{d(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3)}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} + \frac{d\mathfrak{v}_3}{dt}$$

$$\frac{d(g\mathfrak{v})}{dt} = \frac{dg}{dt}\mathfrak{v} + g\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \quad \text{wobei } g \text{ eine skalare Funktion von } t \text{ ist}$$

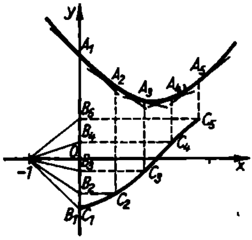
$$\frac{d(\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt}\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1\frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt}\mathfrak{v}_2 + \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt}\mathfrak{v}_1$$

$$\frac{d(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2)}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} \times \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1 \times \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} \times \mathfrak{v}_2 - \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} \times \mathfrak{v}_1$$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{v}[\varphi(t)] = \frac{d\mathfrak{v}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

5.6. Graphische Differentiation

Wenn eine Funktion $y = f(x)$ durch ihre Kurve gegeben ist, so läßt sich die abgeleitete Kurve angenähert wie folgt konstruieren:



Man legt in möglichst zahlreichen Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ der Stammkurve die Tangenten an und zieht durch den auf der Abszisse liegenden Punkt $(-1; 0)$, den sog. Pol, die Parallelen zu ihnen, die die y-Achse in den entsprechenden Punkten $B_1, B_2, B_3, \ldots$ schneiden. Durch die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ legt man Parallelen zur x-Achse, die die Lote von $A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf die x-Achse in $C_1, C_2, C_3, \ldots$ schneiden. Die Punkte $C_1, C_2, C_3, \ldots$ liegen auf der abgeleiteten Kurve.

5.7. Extremstellen von Funktionen (Maxima und Minima)

Extremstellen von entwickelten Funktionen

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ (Extremstelle)

ein **Maximum,** wenn $f'(x_0) = 0; \quad f''(x_0) < 0$

ein **Minimum,** wenn $f'(x_0) = 0; \quad f''(x_0) > 0$

Allgemein: Verschwinden die ersten $(n - 1)$ Ableitungen der Funktion $y = f(x)$ für $x = x_0$, so hat die Funktion an der Stelle $x = x_0$ für $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein Maximum, für $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein Minimum (n gerade).

Beispiel:

Die Funktion $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3$ ist auf Extremstellen zu untersuchen.

$$y' = 3x^2 - 30x + 48$$

$$y'' = 6x - 30$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 30x + 48 = 0$$

$$x_1 = 8; \; x_2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad E = \{8; 2\}$$

$$f''(x_1) = 6 \cdot 8 - 30 = 18 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(x_2) = 6 \cdot 2 - 30 = -18 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Zugehörige Extremwerte: $y_1 = -67; \quad y_2 = 41$

Die Extremstellen sind: $E_1(8; -67)$ Minimum

$E_2(2; \; 41)$ Maximum

Vereinfachte Berechnung der Extremstellen bei gebrochenen Funktionen

Ist $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, so ist die 1. Ableitung $f'(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ebenfalls eine gebrochene Funktion, so daß die Bedingung für das Eintreten eines Extremums lautet: $p(x) = 0$; $q(x) \neq 0$.
Die Art des Extremums wird durch das Vorzeichen der 2. Ableitung entschieden, die für die Nullstellen von $p(x)$ die einfache Form $f''(x) = \frac{p'(x)}{q(x)}$ annimmt.

Beispiel:

Die Funktion $y = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}$ ist auf Extremstellen zu untersuchen.

$$y' = \frac{(-3 + 2x)(2 + 3x + x^2) - (2 - 3x + x^2)(3 + 2x)}{(2 + 3x + x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 12}{(2 + 3x + x^2)^2} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$y'' = \frac{12x}{(2 + 3x + x^2)^2}$$ [in vereinfachter Form für die Nullstellen von $p(x)$]

$$y' = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12 = 0 \quad \text{mit} \quad E = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

$$f''(\sqrt{2}) = \frac{12\sqrt{2}}{(2 + 3x + x^2)^2} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(-\sqrt{2}) = \frac{-12\sqrt{2}}{(2 + 3x + x^2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Zugehörige Extremwerte:

$$y_1 = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}; \quad y_2 = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}$$

Die Extremstellen sind:

$$E_1\left(\sqrt{2}; \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}\right) \quad \text{Minimum}$$

$$E_2\left(-\sqrt{2}; \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}\right) \quad \text{Maximum}$$

Extremstellen von unentwickelten Funktionen

Die Funktion $f(x; y) = 0$ hat Extremwerte, wenn für diese folgende Bedingungsgleichungen gelten:

$$\boldsymbol{f(x; y) = 0}$$
$$\boldsymbol{f_x = 0, f_y \neq 0}$$

Maximum liegt vor, wenn für die betreffende Stelle $\boldsymbol{f_{xx} : f_y > 0}$, **Minimum** dagegen, wenn für die betreffende Stelle $\boldsymbol{f_{xx} : f_y < 0}$ ist.

Beispiel:

Die Funktion $f(x; y) = x^3 - 3a^2x + y^3 = 0$ ist auf Extremstellen zu untersuchen.

$$f_x = 3x^2 - 3a^2; \quad f_y = 3y^2; \quad f_{xx} = 6x$$

$$f(x; y) = 0 \quad \text{und} \quad f_x = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x^3 - 3a^2x + y^3 &= 0 \\ 3x^2 - 3a^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad E = \left\{\left(a; a\sqrt[3]{2}\right); \left(-a; -a\sqrt[3]{2}\right)\right\}$$

Für $\left(a; a\sqrt[3]{2}\right)$ wird

$$\left.\begin{aligned} f_y &= 3a^2\sqrt[3]{4} \neq 0 \\ f_{xx} &= 6a \end{aligned}\right\} f_{xx} : f_y = \frac{6a}{3a^2\sqrt[3]{4}} > 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

für $\left(-a; -a\sqrt[3]{2}\right)$ wird

$$\left.\begin{aligned} f_y &= 3a^2\sqrt[3]{4} \neq 0 \\ f_{xx} &= -6a \end{aligned}\right\} f_{xx} : f_y = \frac{-6a}{3a^2\sqrt[3]{4}} < 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Extremstellen von Funktionen in Parameterdarstellung

Die Funktion $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ hat Extremwerte, wenn für diese folgende Bedingungsgleichungen gelten:

$$\dot{\psi}(t) = 0; \qquad \dot{\varphi}(t) \neq 0$$

Maximum liegt vor, wenn für die betreffende Stelle $\ddot{\psi}(t) < 0$; Minimum, wenn $\ddot{\psi}(t) > 0$.

Beispiel:

Die Funktion $x = a \cos t = \varphi(t)$
$\qquad\qquad\quad y = b \sin t = \psi(t)$

ist auf Extremstellen zu untersuchen.

$$\dot{\varphi}(t) = -a \sin t; \quad \dot{\psi}(t) = b \cos t; \quad \ddot{\psi}(t) = -b \sin t$$

$$\dot{\psi}(t) = 0 \Rightarrow b \cos t = 0 \quad \text{mit} \quad t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\dot{\varphi}(t_1) \neq 0; \quad \dot{\varphi}(t_2) \neq 0$$

$$\ddot{\psi}(t_1) = -b \sin \frac{\pi}{2} = -b < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$\ddot{\psi}(t_2) = +b > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Zugehörige Extremstellen:

$$x_1 = a \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad y_1 = b \sin \frac{\pi}{2} = b$$

$$x_2 = a \cos \frac{3\pi}{2} = 0; \quad y_2 = b \sin \frac{3\pi}{2} = -b$$

Es ergeben sich $E_1 = \{0; b\}$ als Maximum und $E_2 = \{0; -b\}$ als Minimum.

Extremstellen der Funktion $z = f(x; y)$

(*Maximal-* und *Minimalpunkte* einer **Fläche**)

Bedingungsgleichungen

$$f_x = 0; \quad f_y = 0; \quad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$$

Maximum für $f_{xx} < 0$
Minimum für $f_{xx} > 0$

Für $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ ist der betreffende Punkt ein *Sattel-* oder *Jochpunkt.*
Für $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ kann nicht entschieden werden, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden vorhanden ist.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen (Multiplikatorenmethode)

Sollen für die Funktion $z = f(x; y)$ die Extremstellen bestimmt werden, die durch die Gleichung (Nebenbedingung) $\varphi(x; y) = 0$ miteinander verknüpft sind, dann gelten folgende *Bedingungsgleichungen:*

$$\varphi(x; y) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial x}[f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)] = 0 \quad \lambda \in R$$

Aus den drei Gleichungen bestimmen sich die drei Variablen x, y, λ.
Entscheidung über die Art des Extremums:

$$\Delta = \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]^2 - 2\,\frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial y^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]^2 \begin{array}{l} < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \\ > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \end{array}$$

[f bedeutet hierbei $f(x; y)$ und φ bedeutet $\varphi(x; y)$.]
Die Methode ist sinngemäß auch für n unabhängige Variablen mit m Nebenbedingungen ($n + m$ Gleichungen) anwendbar.

Beispiel:

Die Funktion $z = f(x; y) = x^2 + xy + y^2$ ist auf Extremstellen zu untersuchen. Nebenbedingung:

$$\varphi(x; y) = xy - 9 = 0$$

Bedingungsgleichungen, aus denen sich x, y, λ berechnen lassen:

$$\begin{array}{l|l} xy - 9 = 0 & [\varphi(x; y) = 0] \\ 2x + y + \lambda y = 0 & \left(\frac{\partial}{\partial x}[f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)] = 0\right) \\ x + 2y + \lambda x = 0 & \left(\frac{\partial}{\partial y}[f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)] = 0\right) \\ \hline \end{array}$$

$$x_{1;2} = \pm 3$$

$$y_{1;2} = \pm 3; \quad \lambda = -3$$

Extremwerte bei $P_1(3; 3; 27)$ und bei $P_2\,(-3; -3; -27)$
Entscheidung über die Art des Extremums:

$$\frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} = 2; \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = x^2; \quad \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y} = 1 + \lambda;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} = 2$$

Demnach

$$\Delta = 2x^2 - 2(1 + \lambda)\,xy + 2y^2$$

Für P_1 gilt:

$$\Delta = 2 \cdot 9 - 2(1 - 3) \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 72 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Für P_2 gilt:

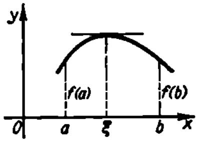
$$\Delta = 2 \cdot 9 - 2(1 - 3) \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 72 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

5.8. Mittelwertsätze

Satz von Rolle

Wenn $y = f(x)$ eindeutig, im Intervall $[a, b]$ stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar ist und wenn außerdem $f(a) = f(b)$ ist, dann gibt es im Intervall (a, b) mindestens eine Stelle $x = \xi$, für die gilt

$$f'(\xi) = 0$$



Geometrisch sagt der Satz von Rolle aus, daß es im Intervall mindestens einen Punkt mit zur x-Achse paralleler Tangente gibt.

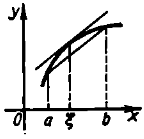
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wenn $y = f(x)$ eindeutig, im Intervall $[a, b]$ stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar ist, dann gibt es im Intervall mindestens einen Wert $x = \xi$, für den gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad \text{für} \quad \xi \in (a, b)$$

Andere Fassung

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h) \quad \text{für} \quad \vartheta \in (0, 1)$$



Geometrisch sagt der Mittelwertsatz aus, daß unter den angegebenen Voraussetzungen in dem Intervall eine Stelle existiert, wo die Tangente an die Kurve der Sehne zwischen den Endpunkten des Intervalls parallel ist.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wenn die beiden Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar sind, wobei $g'(x) \neq 0$ ist, so gibt es im Intervall mindestens eine Stelle $x = \xi$, für die gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{für} \quad \xi \in (a, b)$$

5.9. Unbestimmte Ausdrücke

Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$"

Wenn $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$"

annimmt, so gilt die **l'Hospitalsche Regel:**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn dieser Grenzwert existiert.
Wenn der neue Grenzwert wieder in unbestimmter Form erscheint, ist das Verfahren zu wiederholen.

Beispiel:

$$\varphi(x) = \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}; \ \varphi(0) \text{ hat die Form } \frac{„0“}{„0“}.$$

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos 2x - 2 \cos x}{2e^x - 2x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4 \sin 2x + 2 \sin x}{2e^x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-8 \cos 2x + 2 \cos x}{2e^x} = -3$$

Ausdrücke der Form „0 · ∞“

Wenn $\varphi(x) = f(x)\, g(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form „$0 \cdot \infty$“ annimmt, so gilt:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

womit der Fall zurückgeführt ist auf die Form $\frac{„0“}{„0“}$ oder $\frac{„\infty“}{„\infty“}$.

Beispiel:

$\varphi(x) = (1 - \sin x) \tan x$; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ hat dann die Form „$0 \cdot \infty$“.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x \sin^2 x) = 0$$

Ausdrücke der Form „∞ − ∞“

Wenn $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form

„$\infty - \infty$" annimmt, so gilt:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}},$$

womit der Fall zurückgeführt ist auf die Form $\dfrac{0}{0}$".

Beispiel:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\,;\ \varphi(1) \text{ hat die Form „}\infty - \infty\text{".}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x} - 1}{1 + \ln x - \dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x + x\ln x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{1 + 1 + \ln x} = -\frac{1}{2}$$

Ausdrücke der Form „0^0", „∞^0", „1^∞"

Wenn $\varphi(x) = f(x)^{g(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form „0^0" oder „∞^0" oder „1^∞" annimmt, so gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)},$$

womit der Exponent auf die Form „$0\cdot\infty$" zurückgeführt ist.

Beispiel:

$$\varphi(x) = (\sin x)^{\tan x};\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ hat die Form „}1^\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\tan x\,\ln\sin x} \text{ hat die Form „}e^{\infty\cdot 0}\text{".}$$

Für den Exponenten gilt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\sin x}\cos x}{-\dfrac{1}{\tan^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[-\cot x\tan^2 x\cos^2 x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin x\cos x) = 0;$$

demnach $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$

Anmerkung: Mitunter führt die Entwicklung nach steigenden Potenzen von x (Reihenentwicklung) schneller zum Ziel.

Beispiel:

$$\varphi(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,; \quad \varphi(0) \quad \text{hat die Form } „\frac{0}{0}“$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + - \cdots = x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + - \cdots\right)$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots\right)^2 = x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2$$

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2!} - \dfrac{x^2}{4!} + - \cdots}{\left(\dfrac{1}{1!} - \dfrac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

6. Differentialgeometrie

Die Differentialgeometrie untersucht Kurven und Flächen mit Hilfe der Differentialrechnung. Jeder stetigen Funktion entspricht eine stetige Kurve. Jeder differenzierbaren Funktion entspricht eine *glatte* Kurve, d.h. ohne Unstetigkeiten, Ecken und Spitzen.

6.1. Ebene Kurven

6.1.1. Hauptelemente ebener Kurven

Bogenelement einer Kurve

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für Kurve} \quad y = f(x)$$

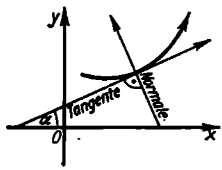
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{\varphi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für Kurve} \quad x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{für Kurve} \quad r = f(\varphi)$$

Bogenlänge und Kurve weisen dabei positive Richtung (entspricht wachsenden x-, t-, φ-Werten) auf.

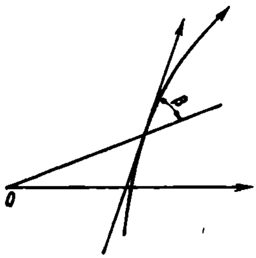
Tangente und Normale

Positive Richtung der Tangente entspricht der positiven Richtung der Kurve. Positive Richtung der Normalen ergibt sich durch Drehung der positiven Tangente um 90° im positiven Drehsinn (entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers).



Für den Winkel α, den die positive Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, gilt

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}; \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}; \qquad \tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$



Winkel β, den die positive Tangente mit der positiven Richtung des Leitstrahles bildet, errechnet sich aus

$$\sin\beta = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}; \qquad \cos\beta = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s};$$

$$\tan\beta = \frac{r}{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)}$$

Gleichung der *Tangente*; Berührungspunkt $P(x; y)$; laufende Koordinaten ξ; η

$$\eta - y = y'(\xi - x) \qquad \text{für Kurve } y = f(x)$$

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{für Kurve } f(x; y) = 0$$

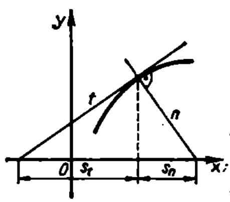
$$(\xi - x)\,\dot\psi - (\eta - y)\,\dot\varphi = 0 \quad \text{für Kurve } x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$$

Gleichung der *Normalen*; Kurvenpunkt $P(x; y)$; laufende Koordinaten ξ; η

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x) \qquad \text{für Kurve } y = f(x)$$

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{für Kurve } f(x; y) = 0$$

$$(\xi - x)\,\dot\varphi + (\eta - y)\,\dot\psi = 0 \quad \text{für Kurve } x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$$



$$\left.\begin{aligned} &\textit{Tangentenlänge } t = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right| \\ &\textit{Normalenlänge } n = \left| y\sqrt{1 + y'^2}\right| \\ &\textit{Subtangente} \quad s_t = \left|\frac{y}{y'}\right| \\ &\textit{Subnormale} \quad s_n = |yy'| \end{aligned}\right\} \text{für Kurve } y = f(x)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Tangentenlänge} & t = & \left|\dfrac{r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}}\sqrt{r^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\right| \\ \textit{(Polartangentenlänge)} & & \\ \textit{Normalenlänge} & n = & \left|\sqrt{r^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\right| \\ \textit{(Polarnormalenlänge)} & & \\ \textit{Subtangente} & s_t = & \left|\dfrac{r^2}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}}\right| \\ \textit{(Polarsubtangente)} & & \\ \textit{Subnormale} & s_n = & \left|\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right| \\ \textit{(Polarsubnormale)} & & \end{array}\right\} \text{für Kurve } r = f(\varphi)$$

Berührung zweier Kurven

Die beiden Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ haben im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ eine Berührung n-ter Ordnung, wenn

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \quad f''(x_0) = g''(x_0), \ldots$$

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), \quad \text{aber} \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0) \quad \text{ist.}$$

Bei geradem n durchdringen die Kurven einander im gemeinsamen Berührungspunkt, bei ungeradem n berühren sie einander, ohne sich zu schneiden.

Krümmungskreis, Krümmungsradius, Krümmung, Krümmungsmittelpunkt

Unter dem *Krümmungskreis* einer Kurve in einem Punkt versteht man den Kreis, der mit der Kurve in dem Punkt eine Berührung von mindestens 2. Ordnung aufweist. Sein Radius ist der *Krümmungsradius* ϱ.
Sein Mittelpunkt (*Krümmungsmittelpunkt*) $M_\mathrm{K}(\xi; \eta)$ liegt auf der Normalen in dem Kurvenpunkt.

Der reziproke Wert von ϱ heißt *Krümmung* k: $\varrho = \dfrac{1}{|k|}$

Für Kurve $y = f(x)$ gilt [Berührungspunkt $P(x; y)$]

$$\varrho = \left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|; \qquad k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}; \qquad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Für Kurve $f(x; y) = 0$ gilt

$$\varrho = m\sqrt{f_x^2 + f_y^2}; \qquad k = \frac{1}{m\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\xi = x - m f_x; \qquad \eta = y - m f_y,$$

wobei

$$m = \frac{f_x^2 + f_y^2}{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}$$

Für Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ gilt

$$\varrho = \left| \frac{(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} \dot\varphi & \dot\psi \\ \ddot\varphi & \ddot\psi \end{vmatrix}} \right| \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} \dot\varphi & \dot\psi \\ \ddot\varphi & \ddot\psi \end{vmatrix}}{(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

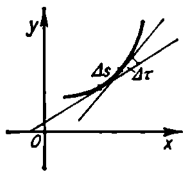
$$\xi = x - \frac{\dot\psi(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)}{\begin{vmatrix} \dot\varphi & \dot\psi \\ \ddot\varphi & \ddot\psi \end{vmatrix}}; \qquad \eta = y + \frac{\dot\varphi(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)}{\begin{vmatrix} \dot\varphi & \dot\psi \\ \ddot\varphi & \ddot\psi \end{vmatrix}}$$

Für Kurve $r = f(\varphi)$ gilt

$$\varrho = \left| \frac{\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2}} \right| \qquad k = \frac{r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xi = r\cos\varphi - \frac{\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]\left[r\cos\varphi + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi\right]}{r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2}}$$

$$\eta = r\sin\varphi - \frac{\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]\left[r\sin\varphi - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi\right]}{r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2}}$$



Für ϱ bzw. k gilt ferner

$$\varrho = \frac{1}{|k|} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}$$

Hierin stellt $\Delta\tau$ den Winkel dar, um den man die eine der beiden positiven Tangenten drehen muß, damit sie in die Lage der zweiten fällt.

Δs ist der Bogen der Kurve zwischen den Berührungspunkten.

$d\tau$ heißt *Kontingenzwinkel.*

Punkte einer Kurve, in denen die Krümmung ein Maximum oder Minimum hat, heißen *Scheitelpunkte* (Hauptscheitel bzw. Nebenscheitel).

Konvexes und konkaves Verhalten einer Kurve

Die Kurve ist an der Stelle P von oben konvex (Rechtskrümmung), wenn $k < 0$; konkav (Linkskrümmung), wenn $k > 0$.

Wendepunkte

Wendepunkte sind Stellen der Kurve, an denen das konvexe Verhalten der Kurve in konkaves übergeht und umgekehrt.
Ein Wendepunkt liegt vor, wenn $f''(x_1) = 0$; $f'''(x_1) = 0$; ...; $f^{(n-1)}(x_1) = 0$; $f^{(n)}(x_1) \neq 0$ für ungerades $n \geqq 3$ gilt.
Ist im Wendepunkt gleichzeitig $f'(x_1) = 0$, so verläuft die Wendetangente horizontal.
Die Bedingung $f''(x) = 0$ für Wendepunkte lautet bei der Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$:

$$\begin{vmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi} & \ddot{\psi} \end{vmatrix} = 0$$

bei der Kurve $r = f(\varphi)$:

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$$

bei der Kurve $f(x; y) = 0$:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Singuläre Punkte

Bedingungsgleichungen:

$$f(x; y) = 0; \quad f_x = 0; \quad f_y = 0$$

Doppelpunkt, wenn außerdem $f_{xy}^2 > f_{xx}f_{yy}$,
Rückkehrpunkt, wenn außerdem $f_{xy}^2 = f_{xx}f_{yy}$,
isolierter Punkt, wenn außerdem $f_{xy}^2 < f_{xx}f_{yy}$ ist.

Doppelpunkte haben zwei reelle verschiedene Tangenten.

Rückkehrpunkte (*Spitzen*) haben eine gemeinsame Tangente.

Isolierte Punkte (*Einsiedlerpunkte*) haben keine reellen Tangenten.

Beispiel 1:

Die Kurve $f(x; y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ist auf singuläre Punkte zu untersuchen.

$$f_x = 3x^2 - 3ay$$
$$f_y = 3y^2 - 3ax$$
$$f_{xy} = -3a; \quad f_{xx} = 6x; \quad f_{yy} = 6y$$
$$f_x = 0 \quad \text{und} \quad f_y = 0 \Rightarrow E = \{0; 0\} \Rightarrow P(0; 0)$$
$$\Rightarrow f_{xy}^2 = 9a^2 \quad \text{und} \quad f_{xx} = 0 \quad \text{und} \quad f_{yy} = 0$$
$$\Rightarrow f_{xy}^2 > f_{xx}f_{yy} \Rightarrow \text{Doppelpunkt}$$

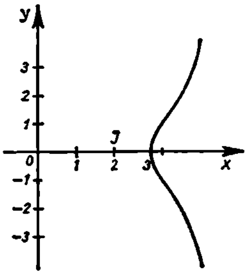
Siehe Cartesisches Blatt S. 297.

Beispiel 2:

Die Kurve $f(x; y) = x^3 - y^2(a - x) = 0$ ist auf singuläre Punkte zu untersuchen.

$$f_x = 3x^2 + y^2$$
$$f_y = 2xy - 2ay$$
$$f_{xy} = 2y; \quad f_{xx} = 6x; \quad f_{yy} = 2x - 2a$$
$$f_x = 0 \quad \text{und} \quad f_y = 0 \Rightarrow E = \{0; 0\} \Rightarrow P(0; 0)$$
$$\Rightarrow f_{xy}^2 = 0 \quad \text{und} \quad f_{xx} = 0 \quad \text{und} \quad f_{yy} = -2a$$
$$\Rightarrow f_{xy}^2 = f_{xx}f_{yy} \Rightarrow \text{Rückkehrpunkt}$$

Siehe Zissoide S. 297.



Beispiel 3:

Die Funktion

$$f(x; y) = y^2 - x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$$

ist auf singuläre Punkte zu untersuchen.

$$f_x = -3x^2 + 14x - 16$$
$$f_y = 2y$$
$$f_{xy} = 0; \quad f_{xx} = -6x + 14; \quad f_{yy} = 2$$
$$f_x = 0 \quad \text{und} \quad f_y = 0 \Rightarrow E = \{2; 0\} \Rightarrow P(2; 0)$$
$$\Rightarrow f_{xy}^2 = 0 \quad \text{und} \quad f_{xx} = 2 \quad \text{und} \quad f_{yy} = 2$$
$$\Rightarrow f_{xy}^2 < f_{xx}f_{yy} \Rightarrow \text{isolierter Punkt } I(2; 0)$$

Asymptoten

Eine Gerade heißt Asymptote einer sich ins Unendliche erstreckenden Kurve, wenn der Abstand eines Kurvenpunktes P von der Geraden gegen Null konvergiert, sobald P längs der Kurve ins Unendliche geht.
Zu den Achsen parallele Asymptoten der Kurve $y = f(x)$ haben die Gleichungen

$$\eta = \lim_{x \to \infty} y \quad \text{bzw.} \quad \xi = \lim_{y \to \infty} x \quad (\xi;\, \eta \text{ laufende Koordinaten})$$

Asymptoten beliebiger Richtung haben die Gleichung

$$\eta = m\xi + b, \quad \text{wobei} \quad m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}; \quad b = \lim_{x \to \infty} (y - mx)$$

Asymptoten bei Polarkoordinaten:
Wenn $\lim\limits_{\varphi \to \alpha} r = \infty$ ist, wird durch α die Richtung der Asymptote bestimmt. Für den Abstand der Asymptote vom Pol wird $p = \lim\limits_{\varphi \to \alpha} [r \sin(\alpha - \varphi)]$.

Einhüllende Kurve (Enveloppe)

Eine einparametrische Kurvenschar der Gleichung $f(x; y; p) = 0$, worin p einen veränderlichen, von x und y unabhängigen Parameter darstellt, kann von einer Kurve eingehüllt werden. Die Gleichung dieser Einhüllenden ergibt sich durch Elimination von p aus

$$f(x; y; p) = 0; \qquad \frac{\partial f(x; y; p)}{\partial p} = 0$$

Die Tangente in einem Punkt der Hüllkurve ist gleichzeitig Tangente an eine Kurve der Kurvenschar.

Evolute

Die *Evolute* einer Kurve ist die Menge aller Krümmungsmittelpunkte.
Die Gleichung der Evolute ergibt sich durch Elimination von x und y aus der Gleichung der Kurve und den Gleichungen für die Koordinaten ξ; η des Krümmungsmittelpunktes, wobei ξ; η dann die laufenden Koordinaten darstellen.
Die Tangenten der Evolute sind gleichzeitig Normalen der gegebenen Kurve.

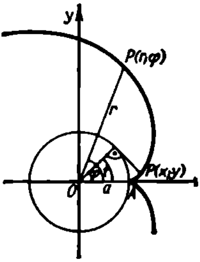
Der Unterschied zweier Krümmungsradien ist gleich der Länge des Evolutenbogens zwischen den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten. (Evolutengleichungen für Parabel, Ellipse, Hyperbel s. S. 213, 220, 229.)

Evolvente

Bei Abwicklung der Evolutentangente von der Evolute beschreibt jeder Punkt der Tangente eine zur ursprünglichen Kurve parallele Kurve. Diese Schar paralleler Kurven, zu denen auch die ursprüngliche Kurve gehört, nennt man *Evolventen* der gegebenen Kurve.
Jeder Krümmungsradius ist Normale zur Evolvente und Tangente an die Evolute.
Die Krümmungsradien der Evolute und Evolvente verhalten sich wie die zugehörigen Bogenelemente.

Kreisevolvente

Bei Abwicklung der Tangente von einem gegebenen Kreis beschreibt jeder Punkt der Tangente eine Kreisevolvente.



$$x = a(\cos t + t \sin t)$$

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

a Radius des gegebenen Kreises

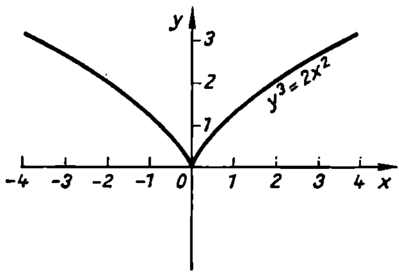
t Wälzwinkel

In Polarkoordinaten

$$\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} - \arctan \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}$$

(Beginn der Abwicklung in A)

6.1.2. Einige wichtige ebene Kurven



Semikubische Parabel
(NEILsche Parabel)

$$y^3 = ax^2$$

Zykloiden (Radkurven)

Gewöhnliche (gespitzte) Zykloide

Ein Punkt eines Kreises, der auf einer Geraden ohne zu gleiten abrollt, beschreibt eine gewöhnliche (gespitzte) Zykloide.

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

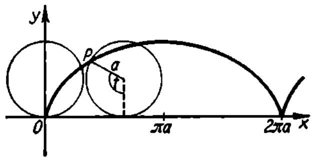
$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{y(2a - y)}$$

a Radius des Kreises

t Wälzwinkel

Länge des Bogens OP:

$$l_1 = 8a \sin^2 \frac{t}{4}$$



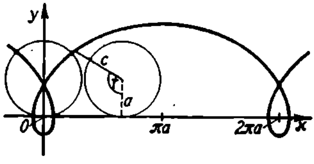
Länge eines vollen Bogens: $l = 8a$
Fläche unter einem vollen Zykloidenbogen: $A = 3\pi a^2$
Periode $= 2\pi a$
Die Evolute einer Zykloide ist eine kongruente Zykloide, um πa in Richtung der positiven x-Achse, um $2a$ in Richtung der negativen y-Achse verschoben.

Verlängerte (verschlungene) Zykloide (Trochoide)

Der erzeugende Punkt liegt außerhalb des abrollenden Kreises im Abstand c vom Mittelpunkt ($c > a$).

$$x = at - c \sin t$$

$$y = a - c \cos t$$

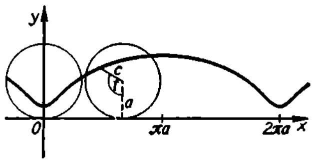


Verkürzte (gestreckte) Zykloide (Trochoide)

Der erzeugende Punkt liegt innerhalb des rollenden Kreises im Abstand c vom Mittelpunkt ($c < a$).

$$x = at - c \sin t$$

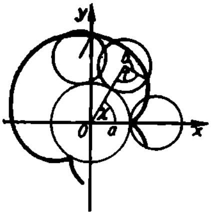
$$y = a - c \cos t$$



Epizykloiden

Gewöhnliche Epizykloide

Ein Punkt des Umfanges eines Kreises, der ohne zu gleiten auf der Außenseite eines festen Kreises rollt, beschreibt eine Epizykloide.



$$x = (a + b)\cos\frac{b}{a}t - b\cos\frac{a+b}{a}t$$

$$y = (a + b)\sin\frac{b}{a}t - b\sin\frac{a+b}{a}t$$

a Radius des festen Kreises

b Radius des rollenden Kreises

t Wälzwinkel

oder

$$x = (a + b)\cos\chi - b\cos\frac{a+b}{b}\chi$$

$$y = (a + b)\sin\chi - b\sin\frac{a+b}{b}\chi$$

χ Drehwinkel

Ist das Verhältnis $\frac{a}{b} = m$ ganzzahlig, so besteht die Kurve aus m zusammenhängenden Bogen, anderenfalls überschneiden die Bogen einander.
Ist m rational, schließt sich die Kurve nach einer Anzahl Umdrehungen in sich.

Länge eines Bogens: $l_1 = \frac{8(a+b)}{m}$

Länge der ganzen Kurve (bei ganzzahligem m): $l = 8(a + b)$
Fläche unter einem vollen Bogen (zwischen Epizykloide und festem Kreis): $A = \frac{\pi b^2(3a + 2b)}{a}$

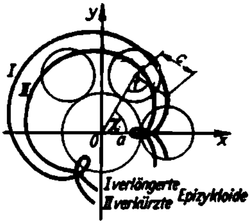
Verkürzte und verlängerte Epizykloide (*Epitrochoiden*)

Der erzeugende Punkt liegt innerhalb bzw. außerhalb des rollenden Kreises im Abstand c vom Mittelpunkt des rollenden Kreises.

$c < b$: verkürzte (gestreckte) Epizykloide
$c > b$: verlängerte (verschlungene) Epizykloide

$$x = (a + b)\cos\frac{b}{a}t - c\cos\frac{a + b}{a}t$$

$$y = (a + b)\sin\frac{b}{a}t - c\sin\frac{a + b}{a}t$$



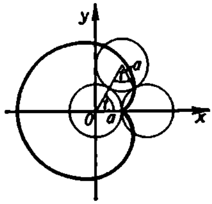
oder

$$x = (a + b)\cos\chi - c\cos\frac{a + b}{b}\chi$$

$$y = (a + b)\sin\chi - c\sin\frac{a + b}{b}\chi$$

Sonderfall:

Die gewöhnliche Epizykloide wird für $m = 1$, also für $a = b$ zur *Kardioide* (Herzkurve).



$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

oder

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x - a)^2 + y^2]$$

oder

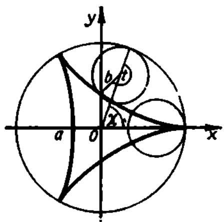
$$r = 2a(1 - \cos\varphi)$$ (Pol auf dem Umfang des festen Kreises, Polarachse in Verlängerung des zum Pol gehörenden Durchmessers)

Hypozykloiden

Ein Punkt des Umfanges eines Kreises, der ohne zu gleiten auf der Innenseite eines festen Kreises rollt, beschreibt eine Hypozykloide.

$$x = (a - b)\cos\frac{b}{a}t + b\cos\frac{a - b}{a}t$$

$$y = (a - b)\sin\frac{b}{a}t - b\sin\frac{a - b}{a}t$$



oder

$$x = (a - b)\cos\chi + b\cos\frac{a - b}{b}\chi$$

$$y = (a - b)\sin\chi - b\sin\frac{a - b}{b}\chi$$

a Radius des festen Kreises

b Radius des rollenden Kreises

t Wälzwinkel; χ Drehwinkel

Ist das Verhältnis $\frac{a}{b} = m$ ganzzahlig (im Bild z.B. für $m = 3$), so besteht die Kurve aus m zusammenhängenden Bogen; anderenfalls überschneiden die Bogen einander.
Ist m rational, schließt sich die Kurve nach einer Anzahl von Umdrehungen in sich.
Länge eines Bogens: $l_1 = \frac{8(a-b)}{m}$
Länge der ganzen Kurve (bei ganzzahligem m): $l = 8(a - b)$
Fläche unter einem vollen Bogen (zwischen Hypozykloide und festem Kreis): $A = \frac{\pi b^2(3a - 2b)}{a}$

Verkürzte und verlängerte Hypozykloide (Hypotrochoiden)

Der erzeugende Punkt liegt innerhalb bzw. außerhalb des rollenden Kreises im Abstand c vom Mittelpunkt des rollenden Kreises.

$c < b$: verkürzte (gestreckte) Hypozykloide

$c > b$: verlängerte (verschlungene) Hypozykloide

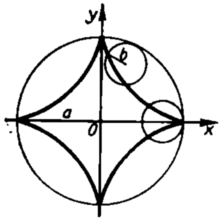
$$x = (a - b)\cos\frac{b}{a}t + c\cos\frac{a-b}{a}t$$

$$y = (a - b)\sin\frac{b}{a}t - c\sin\frac{a-b}{a}t$$

oder

$$x = (a - b)\cos\chi + c\cos\frac{a-b}{b}\chi$$

$$y = (a - b)\sin\chi - c\sin\frac{a-b}{b}\chi$$



Sonderfälle:

Die gewöhnliche Hypozykloide wird für $m = 4$, also für $b = \frac{1}{4}a$ zur *Astroide* (*Sternlinie*).

$$x = a\cos^3\frac{1}{4}t$$

$$y = a\sin^3\frac{1}{4}t$$

oder

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$$

Die gewöhnliche Hypozykloide wird für $m = 2$, also für $b = \frac{1}{2}a$ zu einer Geraden, und zwar artet sie in den Durchmesser des festen Kreises aus (Möglichkeit zur Umwandlung einer Drehbewegung in eine Hin- und Herbewegung).
(Technische Anwendung: Verzahnungstechnik)
Die verkürzte und die verlängerte Hypozykloide werden für $m = 2$, also für $b = \frac{1}{2}a$, zu Ellipsen mit der Gleichung

$$x = \left(\frac{a}{2} + c\right)\cos\frac{t}{2}; \quad y = \left(\frac{a}{2} - c\right)\sin\frac{t}{2}$$

(Möglichkeit zur Umwandlung einer Drehbewegung in eine elliptische Bewegung)

Cassinische Kurven

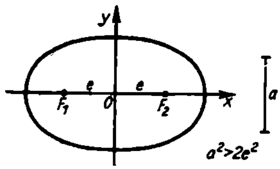
Eine Cassinische Kurve ist die Menge aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten konstantes Produkt a^2 haben.

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$$

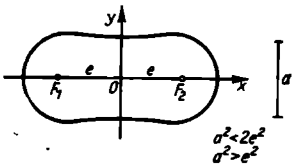
oder

$$r^2 = e^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{e^4\cos^2 2\varphi + a^4 - e^4} \qquad (\overline{F_1F_2} = 2e)$$

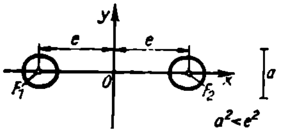
Für $a^2 > 2e^2$ und für $a^2 = 2e^2$ hat die Kurve ellipsenähnliche Gestalt.



Für $a^2 < 2e^2$, aber $a^2 > e^2$ weist die Kurve 2 Einbuchtungen auf.



Für $a^2 = e^2$ ergibt sich die *Lemniskate* (siehe unten).



Für $a^2 < e^2$ besteht die Kurve aus zwei getrennten eiförmigen Teilen um je einen der festen Punkte.

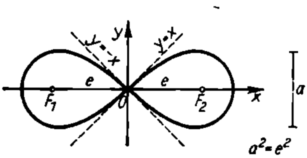
Lemniskate

Die Lemniskate stellt einen *Sonderfall der Cassinischen Kurve* dar, und zwar für $a^2 = e^2$.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

oder

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right] \wedge \left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$$

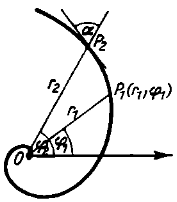


Der Ursprung ist ein Doppelpunkt und zugleich Wendepunkt.

Krümmungsradius: $\varrho = \dfrac{2a^2}{3r}$

Fläche einer Schleife: $A = a^2$

Spirallinien



Logarithmische Spirale

$$r = e^{k\varphi} \quad (k > 0)$$

Die logarithmische Kurve schneidet alle vom Ursprung ausgehenden Strahlen unter dem gleichen Winkel α.

$$\cot\alpha = k$$

Der Pol ist ein asymptotischer Punkt.

Länge des Bogens P_1P_2: $l = \dfrac{1}{k}\sqrt{1 + k^2}\,(r_2 - r_1) = \dfrac{r_2 - r_1}{\cos\alpha}$

Grenzfall: P_1 nähert sich dem Ursprung.

$$\widehat{OP_2} = \frac{1}{k}\sqrt{1 + k^2} \cdot r_2$$

Fläche des Sektors für diesen Grenzfall: $A = \dfrac{r^2}{4k}$

Krümmungsradius: $\varrho = r\sqrt{1 + k^2}$

Archimedische Spirale

Ein Punkt, der sich auf einem Leitstrahl (vom Ursprung aus) mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, während der Leitstrahl selbst sich gleichförmig um den Pol dreht, beschreibt eine Archimedische Spirale.

$$r = a\varphi$$

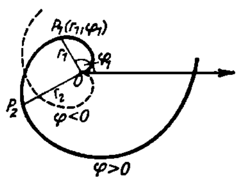
Länge des Bogens OP:

$$l = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{arsinh}\varphi\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right) \approx \frac{a\varphi^2}{2} \quad (\text{für großes } \varphi)$$

Fläche des Sektors P_1OP_2:

$$A = \frac{a^2}{6}\left(\varphi_2^3 - \varphi_1^3\right)$$



Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2} = \frac{a(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2+2}$$

Hyperbolische Spirale

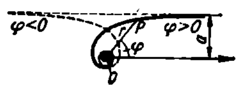
$$r = \frac{a}{\varphi}$$

Asymptote: $y = a$

Der Pol ist asymptotischer Punkt.

Fläche des Sektors P_1OP_2:

$$A = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$$

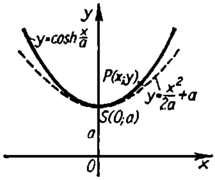


Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3 = r\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

Kettenlinie

Jeder vollkommen biegsame, schwere, an zwei Punkten aufgehängte Faden nimmt in der Gleichgewichtslage die Form der Kettenlinie an.



$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\cosh\frac{x}{a}$$

Scheitel $S(0; a)$

In der Nähe des tiefsten Punktes (S) schmiegt sich die Parabel $y = \frac{x^2}{2a} + a$ der Kettenlinie sehr eng an (Berührung 3. Ordnung).

Fläche zwischen der Kettenlinie, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = x$:

$$A = a^2 \sinh\frac{x}{2} = a^2 \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$

Länge des Bogens SP:

$$l = a\sinh\frac{x}{a} = a\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{y^2}{a} = a\cosh^2\frac{x}{a}$$

Traktrix (Schleppkurve)

Ein materieller Punkt am Ende eines nicht dehnbaren Fadens von der Länge a beschreibt eine Traktrix, wenn der Anfangspunkt des Fadens längs der Geraden $y = 0$ geführt wird; Anfangslage des Punktes $(0; a)$.

$$x = a\,\mathrm{arcosh}\frac{a}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2} = a\ln\left|\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| \mp$$

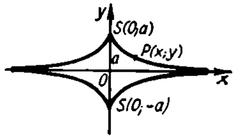
$$\mp\sqrt{a^2 - y^2} \qquad \frac{a}{y} \in [1; \infty)$$

Asymptote: $y = 0$

Die Punkte $S(0; a)$ und $S(0; -a)$ sind *Rückkehrpunkte.*

Länge des Bogens SP: $l = a \ln \left| \frac{a}{y} \right|$

Krümmungsradius: $\varrho = a \left| \cot \frac{x}{y} \right|$



Cartesisches Blatt

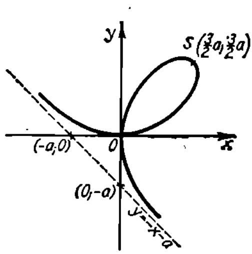
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

oder

$$r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$$

Asymptote der Kurve: $y = -x - a$

Scheitel $S\left(\frac{3}{2}a;\ \frac{3}{2}a\right)$



Fläche der Schleife = Fläche zwischen der Kurve und ihrer Asymptote: $A = \frac{3}{2} a^2$

Zissoide

$$y^2(a - x) = x^3$$

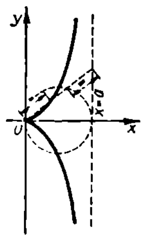
oder

$$r = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = a \sin \varphi \tan \varphi$$

Asymptote: $x = a$

Fläche zwischen der Kurve und der Asymptote:

$$A = \frac{3}{4} \pi a^2$$



Strophoide

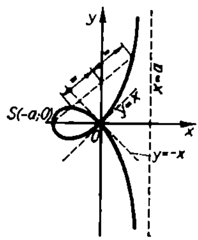
$$(a - x)\, y^2 = (a + x)\, x^2$$

oder

$$r = \frac{-a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$$

Scheitel $S(-a; 0)$

Asymptote: $x = a$



Flächeninhalt der Schleife:

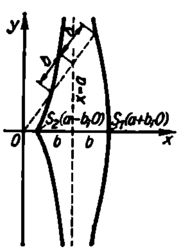
$$A_1 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}$$

Fläche zwischen der Kurve und der Asymptote:

$$A_2 = 2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$$

Konchoide (des Nikomedes)

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2x^2$$



oder

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$$

Scheitel $S_1(a + b; 0)$ und $S_2(a - b; 0)$
Asymptote: $x = a$

Ursprung für $b < a$ ein isolierter Punkt (vgl. Bild)
für $b > a$ ein Doppelpunkt
für $b = a$ ein Rückkehrpunkt

Fläche zwischen dem äußeren Zweig und der Asymptote: $A = \infty$

6.2. Raumkurven

Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten

Als Schnittkurve von zwei Flächen

$$f(x; y; z) = 0 \wedge g(x; y; z) = 0$$

Durch die Projektionen der Kurve auf zwei Ebenen, z. B. die $x; y$-Ebene und die $x; z$-Ebene

$$y = \varphi_1(x); \quad z = \varphi_2(x)$$

In Parameterdarstellung

$x = \varphi(t); y = \psi(t); z = \chi(t)$ (t beliebiger Parameter)

$x = x(s); y = y(s); z = z(s)$ (Parameter s ist die Bogenlänge von einem festen Ausgangspunkt P_0 bis zum laufenden Punkt P)

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + \dot\chi^2}\, dt$$

Darstellung in Vektorform

$$\mathfrak{r} = r(t) = x(t)\,\mathfrak{i} + y(t)\,\mathfrak{j} + z(t)\,\mathfrak{k} \qquad (t \text{ siehe oben})$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s) = x(s)\,\mathfrak{i} + y(s)\,\mathfrak{j} + z(s)\,\mathfrak{k} \qquad (s \text{ siehe oben})$$

Bogenelement einer Raumkurve

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathfrak{r}| = |\dot{\mathfrak{r}}(t)\,\mathrm{d}t| = \left|\frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}(s)}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s\right|$$

In Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2}$$

In Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2}$$

Definitionen

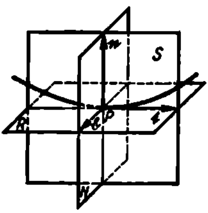
Die *Tangente* in einem Punkt P_0 ist die Grenzlage einer Sekante P_0P_1 für $P_1 \to P_0$.

Die *positive Richtung* der Tangente entspricht der positiven Richtung der Kurve (im Sinne wachsender Werte der Veränderlichen bzw. des Parameters t).

Die *Schmiegungsebene* im Punkt P_0 ist die Grenzlage einer Ebene durch die Tangente in P_0 und einen Kurvenpunkt P_1 für $P_1 \to P_0$.

Die *Normalebene* ist die Ebene, die auf der Tangente in deren Berührungspunkt senkrecht steht. Jede durch den Berührungspunkt gehende, in der Normalebene liegende Gerade heißt *Normale*. Die Normale, die gleichzeitig der Schmiegungsebene angehört, heißt *Hauptnormale*.

Die Normale, die auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, heißt *Binormale*.



Die Ebene, die durch Tangente und Binormale gebildet wird, heißt *rektifizierende Ebene*.

$\mathfrak{t}$ *Tangentenvektor* (Einheitsvektor in Richtung der Tangente)

$\mathfrak{n}$ *Hauptnormalenvektor* (Einheitsvektor in Richtung der Hauptnormalen)

$\mathfrak{b}$ *Binormalenvektor* (Einheitsvektor in Richtung der Binormalen)

N Normalebene, S Schmiegungsebene, R rektifizierende Ebene

Richtwinkel der Tangente, der Hauptnormalen, der Binormalen

Für die Richtwinkel α, β, γ der Tangente gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}; \quad \cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}; \qquad \cos\gamma = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

Für die Richtwinkel l, m, n der Hauptnormalen gilt:

$$\cos l = \varrho\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}; \quad \cos m = \varrho\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}; \quad \cos n = \varrho\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}$$

Für die Richtwinkel λ, μ, ν der Binormalen gilt:

$$\cos\lambda = \varrho\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)$$

$$\cos\mu = \varrho\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)$$

$$\cos\nu = \varrho\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)$$

ϱ Krümmungsradius

Zu beachten: In den folgenden Formeln auf den S. 300 bis 303 sind alle auftretenden Ableitungen im Punkt P_0 zu berechnen.

Gleichung der Tangente an die Raumkurve in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}$$

für Kurve $f(x; y; z) = 0$; $\quad g(x; y; z) = 0$

$$\frac{x - x_0}{\varphi'} = \frac{y - y_0}{\psi'} = \frac{z - z_0}{\chi'}$$

für Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \chi(t)$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{für Kurve } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t); \quad \lambda \in R$$

($\mathfrak{r}$ laufender Radiusvektor; $\mathfrak{r}_0$ Radiusvektor nach P_0)

Gleichung der Normalebene in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = 0 \text{ an Kurve } f(x; y; z) = 0, \quad g(x; y; z) = 0$$

$$\dot{\varphi}(x - x_0) + \dot{\psi}(y - y_0) + \dot{\chi}(z - z_0) = 0$$

an Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \chi(t)$

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0 \qquad \text{an Kurve } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$$

($\mathfrak{r}$ laufender Radiusvektor; $\mathfrak{r}_0$ Radiusvektor nach P_0)

Gleichung der Schmiegungsebene in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{\varphi} & \dot{\psi} & \dot{\chi} \\ \ddot{\varphi} & \ddot{\psi} & \ddot{\chi} \end{vmatrix} = 0 \text{ für Kurve } x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0 \qquad \text{für Kurve } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$$

Gleichung der Binormalen in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{\psi} & \dot{\chi} \\ \ddot{\psi} & \ddot{\chi} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{\chi} & \dot{\varphi} \\ \ddot{\chi} & \ddot{\varphi} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi} & \ddot{\psi} \end{vmatrix}} \qquad \text{für Kurve } x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) \qquad \text{für Kurve } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$$

Gleichung der Hauptnormalen in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{\psi} & \dot{\chi} \\ \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{\chi} & \dot{\varphi} \\ \cos\nu & \cos\chi \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\psi} \\ \cos\lambda & \cos\mu \end{vmatrix}} \qquad \text{für Kurve } x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

λ, μ, ν Richtwinkel der Binormalen (s. S. 300)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \times \left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) \text{ für Kurve } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t);\ \lambda \in R$$

Gleichung der Tangentialebene in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f_z(z - z_0) = 0$$

an Fläche $f(x; y; z) = 0$

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$$

an Fläche $z = f(x; y)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

an Fläche $x = x(u; v)$
$y = y(u; v)$
$z = z(u; v)$

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)\,\mathfrak{n} = 0$$

an Fläche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u; v)$

($\mathfrak{r}$ laufender Radiusvektor; $\mathfrak{r}_0$ Radiusvektor nach P_0; $\mathfrak{n}$ Vektor in Richtung der Flächennormalen)

Gleichung der Flächennormalen in $P_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = \frac{z - z_0}{f_z}$$

für Fläche $f(x; y; z) = 0$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}} = z_0 - z$$

für Fläche $z = f(x; y)$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

für Fläche $x = x(u; v)$
$y = y(u; v)$
$z = z(u; v)$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda\mathfrak{n}$$

für Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u; v)$

($\mathfrak{r}$ laufender Radiusvektor; $\mathfrak{r}_0$ Radiusvektor nach P_0; $\mathfrak{n}$ Vektor in Richtung der Flächennormalen)

Gleichung der rektifizierenden Ebene mit $P_0(x_0; y_0; z_0)$ als Berührungspunkt der Tangente

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot\varphi & \dot\psi & \dot\chi \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für Kurve } \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t) \end{aligned}$$

λ, μ, ν Richtwinkel der Binormalen

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) = 0 \qquad \text{für Kurve } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$$

Krümmungskreis, Krümmungsradius, Krümmung, Krümmungsmittelpunkt

Der *Krümmungsradius* einer Raumkurve im Punkt P_0 ist die Grenzlage eines Kreises durch die Kurvenpunkte P_1, P_0, P_2 für $P_1 \to P_0$ und $P_2 \to P_0$. Sein Mittelpunkt (*Krümmungsmittelpunkt*) liegt auf der Hauptnormalen. Sein Radius ist der *Krümmungsradius* ϱ.

Der reziproke Wert von ϱ heißt *Krümmung*: $k = \dfrac{1}{\varrho}$.

k und ϱ sind stets positiv.

$$\frac{1}{\varrho} = k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds},$$

wobei $\Delta\tau$ den Winkel darstellt, um den sich die Tangente dreht, wenn die Berührungspunkte um Δs auseinanderliegen. $d\tau$ heißt *Kontingenzwinkel*.

$$k = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \qquad \text{für Kurve } \begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned}$$

$$k^2 = \frac{\left(\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2 \left(\dfrac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \dfrac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)^2}{\left[\left(\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2\right]^3} =$$

$$= \frac{(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)(\ddot x^2 + \ddot y^2 + \ddot z^2) - (\dot x\ddot x + \dot y\ddot y + \dot z\ddot z)^2}{(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)^3}$$

für Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) = x(t)\,\mathfrak{i} + y(t)\,\mathfrak{j} + z(t)\,\mathfrak{k}$;

$$k = \left|\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

für Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s) = x(s)\,\mathfrak{i} + y(s)\,\mathfrak{j} + z(s)\,\mathfrak{k}$

Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = x + \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2}; \qquad \eta = y + \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2}; \qquad \zeta = z + \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}$$

Windung (Torsion)

Bezeichnet man das Bogenstück zwischen zwei benachbarten Kurvenpunkten P_1 und P_2 mit Δs und den Winkel, den die Binormalen in P_1 und P_2 miteinander bilden, mit $\Delta\varepsilon$, so gilt:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\tau} = T$$

T Torsion; τ *Torsionsradius*; $d\varepsilon$ *Torsionswinkel*

Die Torsion ist *positiv* oder *negativ*, je nachdem die Kurve *rechts-* oder *linksgewunden* ist (Windungssinn entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers oder im Uhrzeigersinn).

$T = 0 \Rightarrow$ ebene Kurve

$T \neq 0 \Rightarrow$ windschiefe (doppelt gekrümmte) Kurve

$$T = \varrho^2 \left(\frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3}\right) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

mit $\dot{x} = \dfrac{dx}{ds}$; $\quad \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{ds^2}$; $\quad \dddot{x} = \dfrac{d^3x}{ds^3}$; $\quad \varrho$ Krümmungsradius

für Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s) = x(s)\,\mathfrak{i} + y(s)\,\mathfrak{j} + z(s)\,\mathfrak{k}$

$$T = \varrho^2 \frac{\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \dfrac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \cdot \dfrac{d^3\mathfrak{r}}{dt^3}}{\left[\left(\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2\right]^3} = \varrho^2 \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}$$

für Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) = x(t)\,\mathfrak{i} + y(t)\,\mathfrak{j} + z(t)\,\mathfrak{k}$

Beispiel:

Gewöhnliche *Schraubenlinie*

$$\left\{(x; y; z) \,\middle|\, x = r\cos t,\ \ y = r\sin t,\ \ z = \frac{h}{2\pi}\, t \wedge h, t \in R\right\}$$

h Steigung

Berechnung der Krümmung und Windung

$$k^2 = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2)-(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3} =$$

$$= \frac{\left(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)}{\left(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)^3} -$$

$$- \frac{(r^2\sin t\cos t - r^2\sin t\cos t)^2}{\left(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)^3} = \frac{r^2}{\left(r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)^2}$$

$$k = \frac{r}{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

$$T = \varrho^2 \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{\left(r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)^2}{r^2\left(r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)^3} \cdot \begin{vmatrix} -r\sin t & r\cos t & \frac{h}{2\pi} \\ -r\cos t & -r\sin t & 0 \\ r\sin t & -r\cos t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2\left(r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)} \cdot \frac{hr^2}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{\frac{h}{2\pi}}{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}}}$$

6.3. Krumme Flächen

Darstellung

$f(x; y; z) = 0$ (implizite Form)

$z = f(x; y)$ (explizite Form)

$x = x(u; v);\ y = y(u; v);\ z = z(u; v)$ (Parameterform)

$u; v \in R$

$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u; v) = x(u; v)\,\mathfrak{i} + y(u; v)\,\mathfrak{j} + z(u; v)\,\mathfrak{k}$ (Vektorform)

Die Parameterwerte u; v werden als *krummlinige Koordinaten* des Flächenpunktes $P(x; y; z)$ bezeichnet.
Für konstantes u und veränderliches v bzw. für konstantes v und veränderliches u ergeben sich die sog. v- bzw. u-Linien.
Extremwerte der Funktion $z = f(x; y)$ siehe S. 275.

Singuläre Flächenpunkte

Ist der Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ein singulärer Punkt der Fläche $f(x; y; z) = 0$, so erfüllt er mit seinen Koordinaten die Gleichungen

$$f_x = 0; \quad f_y = 0; \quad f_z = 0.$$

Während Tangenten durch einen gewöhnlichen Flächenpunkt in der Tangentialebene liegen, bilden die Tangenten durch einen singulären Punkt einen *Kegel zweiter Ordnung*.

7. Integralrechnung

7.1. Definition des unbestimmten Integrals

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, wobei $F'(x) = f(x)$ ist. $f(x)$ heißt *Integrand*, x *Integrationsvariable*.

$y = F(x) + C$ ist die Menge der *Stammfunktionen* (*Integralfunktionen*) zur gegebenen Funktion f (*allgemeine Lösung*). Infolge des Auftretens der beliebigen Konstanten C (*Integrationskonstante*) sind zu einem vorgelegten Integranden unzählig viele Integrale möglich. Für einen bestimmten Wert von C entsteht eine *partikuläre Lösung*. Geometrisch bedeutet das, daß unendlich viele Integralkurven existieren, die durch Parallelverschiebung in Richtung der Ordinatenachse auseinander hervorgehen.

7.2. Grundintegrale

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \in R \setminus \{-1\}$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$

3. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

4. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a \mathrm{e} + C \qquad a > 0; \quad a \neq 1$

5. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$

7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}; \quad n \in G$

8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad x \neq n\pi; \quad n \in G$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \quad \text{für } |x| < 1$

10. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctan} x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$

11. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

12. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \qquad x \neq 0$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) + C \qquad |x| > 1$

17. $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C \qquad |x| < 1$

18. $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{arcoth} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} + C \qquad |x| > 1$

19. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\operatorname{arcoth} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x - 1}{x + 1} + C \qquad |x| > 1$

7.8. Integrationsregeln

Integration einer Summe oder Differenz:

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx - \int h(x) \, dx$$

Integration einer Funktion mit konstantem Faktor:

$$\int c f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

Substitutionsregel:

$$\int f(x) \, dx = \int f[\varphi(t)] \, \dot{\varphi}(t) \, dt,$$

wobei

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad dx = \dot{\varphi}(t) \, dt$$

Häufig vorkommende *Substitutionen:*

$ax + b$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t$
$\frac{x}{a}$	$= t$	$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$
$\frac{a}{x}$	$= t$	$\mathrm{d}x = -\frac{a}{t^2}\,\mathrm{d}t$
a^x	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t \ln a}$
$\sqrt{x}$	$= t$	$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$
e^x	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
$\ln x$	$= t$	$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
$a + bx$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\,\mathrm{d}t$
$a^2 + x^2$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t - a^2}}$
$\sqrt{a + bx}$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{b}$
$a + bx^2$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{bt - ab}}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - a^2}}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$= t$	$\mathrm{d}x = -\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 - t^2}}$
$\sqrt[n]{a + bx}$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}\,\mathrm{d}t}{b}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$= t$	$\mathrm{d}x = \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + a^2}}$

Substitutionen für spezielle Integrale

1. $\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$

   Substitution: $x = a \sin t$; $\mathrm{d}x = a \cos t\,\mathrm{d}t$

   ergibt $\int f(a \sin t; a \cos t)\, a \cos t\,\mathrm{d}t$

Dabei gelten:

$$\sin t = \frac{x}{a}; \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}; \qquad \cot t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

2. $\int f\left(x;\ \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$

Substitution: $x = a \tanh t;\quad \mathrm{d}x = \dfrac{a\,\mathrm{d}t}{\cosh^2 t}$

ergibt $\int f\left(a \tanh t;\ \dfrac{a}{\cosh t}\right) \dfrac{a\,\mathrm{d}t}{\cosh^2 t}$

Dabei gelten:

$$\sinh t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \qquad \tanh t = \frac{x}{a}$$

$$\cosh t = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \qquad \coth t = \frac{a}{x}$$

3. $\int f\left(x;\ \sqrt{a^2 + x^2}\right) \mathrm{d}x$

Substitution: $x = a \tan t;\quad \mathrm{d}x = \dfrac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$

ergibt $\int f\left(a \tan t; \dfrac{a}{\cos^2 t}\right) \dfrac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$

Dabei gelten:

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \qquad \tan t = \frac{x}{a}$$

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \qquad \cot t = \frac{a}{x}$$

4. $\int f\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right) \mathrm{d}x$

Substitution: $x = a \sinh t;\ \mathrm{d}x = a \cosh t\,\mathrm{d}t$

ergibt $\int f(a \sinh t;\ a \cosh t)\ a \cosh t\,\mathrm{d}t$

Dabei gelten:

$$\sinh t = \frac{x}{a} \qquad \tanh t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\cosh t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}; \quad \coth t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

5. $\int f\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$

Substitution: $x = \dfrac{a}{\cos t}$; $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{a \sin t \,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$

ergibt $\int f\left(\dfrac{a}{\cos t}; \quad a \tan t\right) \dfrac{a \sin t \,dt}{\cos^2 t}$

Dabei gelten:

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}; \qquad \tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$\cos t = \frac{a}{x}; \qquad \cot t = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

6. $\int f\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$

Substitution: $x = a \cosh t$; $x = a \sinh t \,\mathrm{d}t$

ergibt $\int f(a \cosh t; a \sinh t)\, a \sinh t \,\mathrm{d}t$

Dabei gelten:

$$\sinh t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}; \qquad \tanh t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

$$\cosh t = \frac{x}{a}; \qquad \coth t = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

7. $\int f(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x)\, \mathrm{d}x$

Substitution: $\tan \dfrac{x}{2} = t$; $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1 + t^2} \mathrm{d}t$

ergibt $\int f\left(\dfrac{2t}{1 + t^2}; \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}; \dfrac{2t}{1 - t^2}; \dfrac{1 - t^2}{2t}\right) \dfrac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2}$

Hierbei muß der Integrand des Ausgangsintegrals ein rationaler Term der vier trigonometrischen Funktionen sein.

8. $\int R(\sinh x; \cosh x; \tanh x; \coth x)\, \mathrm{d}x \quad R$ rationaler Term

Substitution: $\tanh \dfrac{x}{2} = t$; $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1 - t^2}$

ergibt $\int f\left(\dfrac{2t}{1 - t^2}; \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2}; \dfrac{2t}{1 + t^2}; \dfrac{1 + t^2}{2t}\right) \dfrac{2\mathrm{d}t}{1 - t^2}$,

wobei der Integrand des Ausgangsintegrals ein rationaler Term der Hyperbelfunktionen sein muß.

9. $\int f(e^x)\,dx$

Substitution: $e^x = t$; $\quad dx = \dfrac{dt}{t}$

ergibt $\int f(t)\,dt$

10. $\int f\left(x; \sqrt[k]{ax+b}\right) dx$

Substitution: $ax + b = t$; $\quad dx = \dfrac{kt^{k-1}\,dt}{a}$

ergibt $\int f(t)\,dt$

11. $\int f\left[x; \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^p; \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^q; \dots\right] dx$

Substitution: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$

ergibt $\int f(t)\,dt$

(n ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Exponenten p, $q, \dots$; $ad - bc \neq 0$)

12. $\int f\left(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$

Substitutionen von Euler ergeben $\int f(t)\,dt$.

Fall 1

$a > 0$, Substitution: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}; \qquad dx = 2\,\frac{-t^2\sqrt{a} + bt - c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2}\,dt$$

Fall 2

$c > 0$, $x \neq 0$, Substitution: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}; \qquad dx = \frac{2a\sqrt{c} - 2bt + 2t^2\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}\,dt$$

Fall 3

Der Radikand hat die reellen Wurzeln x_1 und x_2.

Substitution: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$

$$x = \frac{t^2 x_1 - a x_2}{t^2 - a}; \qquad dx = \frac{2at(x_2 - x_1)}{(t^2 - a)^2}\,dt$$

13. $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$

Substitution: $\varphi(x) = u$

ergibt $\int f(u)\,\mathrm{d}u$

Partielle Integration

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x, \quad \text{wobei} \quad u = u(x); \quad v = v(x)$$

Andere Schreibweise: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

Beispiel:

$$\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \begin{array}{r|l} u = \ln x & \mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x & v = \dfrac{x^4}{4} \end{array}$$

$$\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C}}$$

Integration nach Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung eines echten Bruches $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Fall 1

Die Gleichung $g(x) = 0$ hat *nur einfache reelle Wurzeln* $x_1, x_2, \ldots$ Dann kann $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ in folgender Weise in Partialbrüche entwickelt werden:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \cdots,$$

wobei

$$A = \frac{f(x_1)}{g'(x_1)}, \quad B = \frac{f(x_2)}{g'(x_2)}, \quad C = \frac{f(x_3)}{g'(x_3)} \quad \text{usw.}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = A\int\frac{\mathrm{d}x}{x - x_1} + B\int\frac{\mathrm{d}x}{x - x_2} + C\int\frac{\mathrm{d}x}{x - x_3} + \cdots$$

Die Zähler A, B, C, ... der Partialbrüche können auch, und zwar oftmals schneller, durch den Ansatz *unbestimmter Koeffizienten* und deren Bestimmung mittels *Koeffizientenvergleichs* gefunden werden.

Beispiel:

$$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}\,\mathrm{d}x$$

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 7$$

$$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-7} =$$

$$= \frac{A(x+3)(x-7) + B(x-2)(x-7) + C(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x-7)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)\,x^2 - (4A + 9B - C)\,x - (21A - 14B + 6C)}{(x-2)(x+3)(x-7)}$$

Das Gleichsetzen der Koeffizienten gleicher Potenzen von x im Zähler des 1. und letzten Bruches ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 15 \\ 4A + 9B - C &= 70 \\ 21A - 14B + 6C &= 95 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 7;\ B = 5;\ C = 3$$

bzw.

$$A = \frac{f(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{-175}{-25} = 7 \quad \text{usw.}$$

Demnach gilt:

$$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}\,\mathrm{d}x = 7\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} +$$

$$+ 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-7} = \underline{\underline{7 \ln|x-2| + 5\ln|x+3| + 3\ln|x-7| + C}}$$

Fall 2

Die Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ sind *reell*, treten aber *mehrfach* auf, z.B. die Wurzel x_1 α-mal, die Wurzel x_2 β-mal usw.

$$\frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{\alpha-2}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-x_1} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-x_2)^\beta} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{\beta-1}} + \frac{B_3}{(x-x_2)^{\beta-2}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-x_2} +$$

$$+ \frac{C_1}{(x-x_3)^\gamma} + \frac{C_2}{(x-x_3)^{\gamma-1}} + \frac{C_3}{(x-x_3)^{\gamma-2}} + \cdots + \frac{C_\gamma}{x-x_3} + \cdots$$

Die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ berechnen sich nach der Methode des Koeffizientenvergleichs.

Beispiel:

$$\int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = x_4 = -1$$

$$\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)} =$$

$$= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1)^2(x-1) + B_1(x-1)^2 + B_2(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(A_2 + B_2)x^3 + (A_1 + A_2 + B_1 - B_2)x^2 + (2A_1 - A_2 - 2B_1 - B_2)x}{(x-1)^2(x+1)^2} +$$

$$+ \frac{(A_1 - A_2 + B_1 + B_2)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Methode des Koeffizientenvergleichs führt zu dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} A_2 + B_2 &= 3 \\ A_1 + A_2 + B_1 - B_2 &= 10 \\ 2A_1 - A_2 - 2B_1 - B_2 &= -1 \\ A_1 - A_2 + B_1 + B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &A_1 = 3;\ A_2 = 4; \\ &B_1 = 2;\ B_2 = -1 \end{aligned}$$

Demnach gilt:

$$\int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} =$$

$$= -\frac{3}{x-1} + 4\ln|x-1| - \frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C$$

Fall 3

Die Gleichung $g(x) = 0$ hat neben reellen Wurzeln auch *einfache komplexe Wurzeln*, die konjugiert komplex auftreten. Die oben besprochenen Methoden der Partialbruchzerlegung sind auch hier anwendbar, wobei allerdings komplexe Zähler mit auftreten. Vermieden werden kann das Rechnen mit komplexen Größen, indem man die Partialbrüche, die durch die komplexen Wurzeln zustande kommen, auf einen Hauptnenner bringt. Sind z. B. x_1 und x_2 zwei konjugiert komplexe Wurzeln, so lautet der Ansatz:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)},$$

worin die Koeffizienten wieder nach der Methode des Koeffizientenvergleichs ermittelt werden.
Integration des Ausdruckes

$$\frac{Px+Q}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{Px+Q}{x^2+px+q}:$$

$$\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{P}{2}\ln|x^2+px+q| +$$

$$+\frac{Q-\frac{Pp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \quad \text{für } q-\frac{p^2}{4}>0$$

Beispiel:

$$\int \frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$x^3-3x^2+9x+13=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-1; \quad x_2=2+3\mathrm{j}; \quad x_3=2-3\mathrm{j}$$

$$\frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13} = \frac{A}{x+1} + \frac{Px+Q}{x^2-4x+13} =$$

$$= \frac{A(x^2-4x+13)+(Px+Q)(x+1)}{x^3-3x^2+9x+13} =$$

$$= \frac{(A+P)x^2-(4A-Q-P)x+(13A+Q)}{x^3-3x^2+9x+13}$$

Methode des Koeffizientenvergleichs führt zu dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} A+P &= 7\\ 4A-Q-P &= 10\\ 13A+Q &= 37\end{aligned}\right\} \Rightarrow A=3; \quad P=4; \quad Q=-2$$

Demnach gilt:

$$\int \frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13}\,\mathrm{d}x =$$

$$=3\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\int\frac{4x-2}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x =$$

$$\underline{\underline{=3\ln|x+1|+2\ln|x^2-4x+13|+2\arctan\frac{x-2}{3}+C}}$$

Fall 4

Die Gleichung $g(x) = 0$ hat neben *reellen Wurzeln* auch *mehrfache komplexe Wurzeln*. Dann erfolgt am besten wieder Zusammenfassung der Brüche, die durch die konjugiert komplexen Wurzeln entstehen. Die Zerlegung lautet:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^3} + \frac{A_2}{(x - x_2)^2} + \frac{A_3}{x - x_1} + \\ + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2 + px + q)}$$

x_1 tritt in dem hier gewählten Beispiel als dreifache *reelle* Wurzel auf, und die konjugiert komplexen Wurzeln treten als zweifache Wurzeln auf.

7.4. Einige besondere Integrale

Zur Beachtung: Bei den unbestimmten Integralen sind der Übersichtlichkeit wegen die Integrationskonstanten weggelassen.

7.4.1. Integrale rationaler Funktionen

1. $\int (ax + b)^n \, dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)} \qquad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b|$

3. $\int x(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+2}}{a^2(n + 2)} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{a^2(n + 1)} \qquad (n \neq -1; -2)$

$$= \frac{a(n + 1)\, x - b}{a^2(n + 1)\,(n + 2)} (ax + b)^{n+1}$$

4. $\int \frac{x \, dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b|$

5. $\int \frac{x \, dx}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \ln |ax + b|$

6. $\int \frac{x \, dx}{(ax + b)^n} = \frac{a(1 - n)\, x - b}{a^2(n - 1)\,(n - 2)\,(ax + b)^{n-1}} \qquad (n \neq 1; 2)$

7. $\int \frac{x^2 \, dx}{ax + b} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax + b)^2}{2} - 2b(ax + b) + b^2 \ln |ax + b|\right]$

8. $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3}\left[ax + b - 2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right]$$

9. $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3}\left[\ln|ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2}\right]$$

10. $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^3}\left[-\frac{1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2b}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}\right]$$
$(n \neq 1; 2; 3)$

11. $$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$$

12. $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$$

13. $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -a\left[\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|\right]$$

14. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

15. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x} \qquad (|x| < |a|)$$

16. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \qquad (|x| > |a|)$$

17. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad \text{für } 4ac-b^2 > 0$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \qquad \text{für } 4ac-b^2 < 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| \qquad \text{für } 4ac-b^2 < 0$$

18. $$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| -$$
$$- \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

19. $$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + {}$$
$$+ \frac{2an-bm}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad \text{für } 4ac-b^2>0$$
$$= \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - {}$$
$$- \frac{2an-bm}{a\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \qquad \text{für } 4ac-b^2<0$$

20. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + {}$$
$$+ \frac{(2n-3)\,2a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

21. $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - {}$$
$$- \frac{b(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

22. $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\ln\left|\frac{x^2}{ax^2+bx+c}\right| - {}$$
$$- \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

7.4.2. Integrale irrationaler Funktionen

1. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) \qquad (|x| \leqq |a|)$$

2. $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} = {}$$
$$= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2} \qquad (|x| \leqq |a|)$$

3. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x} = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| \qquad (|x| \leqq |a|)$$

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \qquad (|x| \leqq |a|)$$

5. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \qquad (|x| \leqq |a|)$$

6. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right)$

7. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

8. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$

10. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$

11. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} =$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{arsinh}\frac{a}{x} =$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$$

13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$

14. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} \mp a^2 \operatorname{arcosh}\left|\frac{x}{a}\right|\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} \mp a^2\ln(|x|+\sqrt{x^2-a^2})\right) \qquad (|x| \geqq |a|)$$

wobei das Minuszeichen für $x > 0$, das Pluszeichen für $x < 0$ gilt.

15. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} =$

$$= \frac{1}{3}(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} \qquad (|x| \geqq |a|)$$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} \qquad (|x| \geqq |a|)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(|x|+\sqrt{x^2-a^2}\right) \qquad (|x| > |a|)$

18. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$ $\qquad (|x| > |a|)$

19. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\left|\frac{x}{a}\right| =$

$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} + a^2\ln\left(|x| + \sqrt{x^2-a^2}\right)\right]$ $\qquad (|x| > |a|)$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} + 2ax + b\right|$

$(a > 0)$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arsinh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} =$ $\qquad (a > 0;\ 4ac - b^2 > 0)$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b| =$ $\qquad (a > 0;\ 4ac - b^2 = 0)$

$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ $\qquad (a < 0;\ 4ac - b^2 < 0)$

21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

7.4.3. Integrale trigonometrischer Funktionen

1. $\int \sin cx\,dx = -\frac{1}{c}\cos cx$

2. $\int \sin^n cx\,dx = -\frac{\sin^{n-1} cx\cos cx}{nc} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} cx\,dx$

$(n > 0)$

3. $\int x\sin cx\,dx = \frac{\sin cx}{c^2} - \frac{x\cos cx}{c}$

4. $\int x^n \sin cx\,dx = -\frac{x^n}{c}\cos cx + \frac{n}{c}\int x^{n-1}\cos cx\,dx$ $\qquad (n > 0)$

5. $\int \frac{\sin cx}{x}\,dx = cx - \frac{(cx)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(cx)^5}{5\cdot 5!} - + \cdots$

6. $\int \frac{\sin cx}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\sin cx}{x^{n-1}} + \frac{c}{n-1}\int \frac{\cos cx}{x^{n-1}}\,dx$

7. $\int \frac{dx}{\sin cx} = \frac{1}{c}\ln\left|\tan\frac{cx}{2}\right|$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^n cx} = -\frac{1}{c(n-1)} \frac{\cos cx}{\sin^{n-1} cx} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} cx} \quad (n > 1)$$

9. $$\int \frac{dx}{1 \pm \sin cx} = \frac{1}{c} \tan\left(\frac{cx}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

10. $$\int \frac{x\,dx}{1 + \sin cx} = \frac{x}{c} \tan\left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{c^2} \ln\left|\cos\left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

11. $$\int \frac{x\,dx}{1 - \sin cx} = \frac{x}{c} \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2}\right) + \frac{2}{c^2} \ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2}\right)\right|$$

12. $$\int \frac{\sin cx\,dx}{1 \pm \sin cx} = \pm x + \frac{1}{c} \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{cx}{2}\right)$$

13. $$\int \cos cx\,dx = \frac{1}{c} \sin cx$$

14. $$\int \cos^n cx\,dx = \frac{\cos^{n-1} cx \sin cx}{nc} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} cx\,dx$$

15. $$\int x \cos cx\,dx = \frac{\cos cx}{c^2} + \frac{x \sin cx}{c}$$

16. $$\int x^n \cos cx\,dx = \frac{x^n \sin cx}{c} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} \sin cx\,dx$$

17. $$\int \frac{\cos cx}{x}\,dx = \ln|cx| - \frac{(cx)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(cx)^4}{4 \cdot 4!} - + \cdots$$

18. $$\int \frac{\cos cx}{x^n}\,dx = -\frac{\cos cx}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{c}{n-1} \int \frac{\sin cx\,dx}{x^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

19. $$\int \frac{dx}{\cos cx} = \frac{1}{c} \ln\left|\tan\left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

20. $$\int \frac{dx}{\cos^n cx} = \frac{1}{c(n-1)} \frac{\sin cx}{\cos^{n-1} cx} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} cx} \quad (n > 1)$$

21. $$\int \frac{dx}{1 + \cos cx} = \frac{1}{c} \tan \frac{cx}{2}$$

22. $$\int \frac{dx}{1 - \cos cx} = -\frac{1}{c} \cot \frac{cx}{2}$$

23. $$\int \frac{x\,dx}{1 + \cos cx} = \frac{x}{c} \tan \frac{cx}{2} + \frac{2}{c^2} \ln\left|\cos \frac{cx}{2}\right|$$

24. $$\int \frac{x\,dx}{1 - \cos cx} = -\frac{x}{c} \cot \frac{cx}{2} + \frac{2}{c^2} \ln\left|\sin \frac{cx}{2}\right|$$

25. $$\int \frac{\cos cx\,dx}{1 + \cos cx} = x - \frac{1}{c} \tan \frac{cx}{2}$$

26. $$\int \frac{\cos cx\, dx}{1-\cos cx} = -x - \frac{1}{c}\cot\frac{cx}{2}$$

27. $$\int \frac{dx}{\cos cx \pm \sin cx} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{cx}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right) \right|$$

28. $$\int \frac{dx}{(\cos cx \pm \sin cx)^2} = \frac{1}{2c}\tan\left(cx \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

29. $$\int \frac{\cos cx\, dx}{\cos cx + \sin cx} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx + \cos cx|$$

(siehe 60)

30. $$\int \frac{\cos cx\, dx}{\cos cx - \sin cx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c}\ln|\sin cx - \cos cx|$$

(siehe 61)

31. $$\int \frac{\sin cx\, dx}{\cos cx + \sin cx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c}\ln|\sin cx + \cos cx|$$

(siehe 62)

32. $$\int \frac{\sin cx\, dx}{\cos cx - \sin cx} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2c}\ln|\sin cx - \cos cx|$$

(siehe 63)

33. $$\int \frac{\cos cx\, dx}{\sin cx(1+\cos cx)} = -\frac{1}{4c}\tan^2\frac{cx}{2} + \frac{1}{2c}\ln\left|\tan\frac{cx}{2}\right|$$

34. $$\int \frac{\cos cx\, dx}{\sin cx(1-\cos cx)} = -\frac{1}{4c}\cot^2\frac{cx}{2} - \frac{1}{2c}\ln\left|\tan\frac{cx}{2}\right|$$

35. $$\int \frac{\sin cx\, dx}{\cos cx(1+\sin cx)} = \frac{1}{4c}\cot^2\left(\frac{cx}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2c}\ln\left|\tan\left(\frac{cx}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

36. $$\int \frac{\sin cx\, dx}{\cos cx(1-\sin cx)} = \frac{1}{4c}\tan^2\left(\frac{cx}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2c}\ln\left|\tan\left(\frac{cx}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

37. $$\int \sin cx \cos cx\, dx = \frac{1}{2c}\sin^2 cx$$

38. $$\int \sin c_1x \sin c_2x\, dx = \frac{\sin(c_1-c_2)x}{2(c_1-c_2)} - \frac{\sin(c_1+c_2)x}{2(c_1+c_2)}$$

$|c_1| \neq |c_2|$

39. $\int \cos c_1 x \cos c_2 x \,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin(c_1 - c_2)\,x}{2\,(c_1 - c_2)} + \dfrac{\sin(c_1 + c_2)\,x}{2\,(c_1 + c_2)}$

$|c_1| \neq |c_2|$

40. $\int \sin c_1 x \cos c_2 x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos(c_1 + c_2)\,x}{2\,(c_1 + c_2)} - \dfrac{\cos(c_1 - c_2)\,x}{2\,(c_1 - c_2)}$

$|c_1| \neq |c_2|$

41. $\int \sin^n cx \cos cx \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{c(n+1)} \sin^{n+1} cx \qquad (n \neq -1)$

42. $\int \sin cx \cos^n cx \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{c(n+1)} \cdot \cos^{n+1} cx \qquad (n \neq -1)$

43. $$\int \sin^n cx \cos^m cx \,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} cx \cos^{m+1} cx}{c(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} cx \cos^m cx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} cx \cos^{m-1} cx}{c(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n cx \cos^{m-2} cx \,\mathrm{d}x$$

$(m;\, n > 0)$

44. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin cx \cos cx} = \dfrac{1}{c} \ln |\tan cx|$

45. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin cx \cos^n cx} = \dfrac{1}{c(n-1)\cos^{n-1} cx} + \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin cx \cos^{n-2} cx} \qquad (n \neq 1)$

46. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^n cx \cos cx} = -\dfrac{1}{c(n-1)\sin^{n-1} cx} + \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} cx \cos cx} \qquad (n \neq 1)$

47. $\int \dfrac{\sin cx \,\mathrm{d}x}{\cos^n cx} = \dfrac{1}{c(n-1)\cos^{n-1} cx} \qquad (n \neq 1)$

48. $\int \dfrac{\sin^2 cx \,\mathrm{d}x}{\cos cx} = -\dfrac{1}{c} \sin cx + \dfrac{1}{c} \ln \left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{cx}{2}\right)\right|$

49. $\int \dfrac{\sin^2 cx \,\mathrm{d}x}{\cos^n cx} = \dfrac{\sin cx}{c(n-1)\cos^{n-1} cx} - \dfrac{1}{n-1}\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} cx} \qquad (n \neq 1)$

50. $$\int \frac{\sin^n cx\,\mathrm{d}x}{\cos cx} = -\frac{\sin^{n-1} cx}{c(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} cx\,\mathrm{d}x}{\cos cx} \qquad (n \neq 1)$$

51. $$\int \frac{\sin^n cx\,\mathrm{d}x}{\cos^m cx} = \frac{\sin^{n+1} cx}{c(m-1)\cos^{m-1} cx} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n cx\,\mathrm{d}x}{\cos^{m-2} cx} = \qquad (m \neq 1)$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} cx}{c(n-m)\cos^{m-1} cx} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} cx\,\mathrm{d}x}{\cos^m cx} \qquad (m \neq n)$$

$$= \frac{\sin^{n-1} cx}{c(m-1)\cos^{m-1} cx} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-2} cx\,\mathrm{d}x}{\cos^{m-2} cx} \qquad (m \neq 1)$$

52. $$\int \frac{\cos cx\,\mathrm{d}x}{\sin^n cx} = -\frac{1}{c(n-1)\sin^{n-1} cx} \qquad (n \neq 1)$$

53. $$\int \frac{\cos^2 cx\,\mathrm{d}x}{\sin cx} = \frac{1}{c}\left(\cos cx + \ln\left|\tan\frac{cx}{2}\right|\right)$$

54. $$\int \frac{\cos^2 cx\,\mathrm{d}x}{\sin^n cx} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos cx}{c\sin^{n-1} cx} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} cx}\right) \qquad (n \neq 1)$$

55. $$\int \frac{\cos^n cx\,\mathrm{d}x}{\sin cx} = \frac{\cos^{n-1} cx}{c(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} cx\,\mathrm{d}x}{\sin cx} \qquad (n \neq 1)$$

56. $$\int \frac{\cos^n cx\,\mathrm{d}x}{\sin^m cx} = -\frac{\cos^{n+1} cx}{c(m-1)\sin^{m-1} cx} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n cx\,\mathrm{d}x}{\sin^{m-2} cx} = \qquad (m \neq 1)$$

$$= \frac{\cos^{n-1} cx}{c(n-m)\sin^{m-1} cx} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} cx\,\mathrm{d}x}{\sin^m cx} = \qquad (m \neq n)$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} cx}{c(m-1)\sin^{m-1} cx} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} cx\,\mathrm{d}x}{\sin^{m-2} cx} \qquad (m \neq 1)$$

57. $$\int \tan cx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{c}\ln|\cos cx|$$

58. $\int \tan^n cx\,dx = \frac{1}{c(n-1)}\tan^{n-1} cx - \int \tan^{n-2} cx\,dx \qquad (n \neq 1)$

59. $\int \frac{\tan^n cx\,dx}{\cos^2 cx} = \frac{1}{c(n+1)}\tan^{n+1} cx \qquad (n \neq -1)$

60. $\int \frac{dx}{\tan cx + 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx + \cos cx|$

61. $\int \frac{dx}{\tan cx - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx - \cos cx|$

62. $\int \frac{\tan cx\,dx}{\tan cx + 1} = \int \frac{dx}{1 + \cot cx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c}\ln|\sin cx + \cos cx|$

63. $\int \frac{\tan cx\,dx}{\tan cx - 1} = \int \frac{dx}{1 - \cot cx} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx - \cos cx|$

64. $\int \cot cx\,dx = \frac{1}{c}\ln|\sin cx|$

65. $\int \cot^n cx\,dx = -\frac{1}{c(n-1)}\cot^{n-1} cx - \int \cot^{n-2} cx\,dx \quad (n \neq 1)$

66. $\int \frac{\cot^n cx\,dx}{\sin^2 cx} = -\frac{1}{c(n+1)}\cot^{n+1} cx \qquad (n \neq -1)$

67. $\int \frac{dx}{1 + \cot cx} = \int \frac{\tan cx\,dx}{\tan cx + 1}$

68. $\int \frac{dx}{1 - \cot cx} = \int \frac{\tan cx\,dx}{\tan cx - 1}$

7.4.4. Integrale der Hyperbelfunktionen

1. $\int \sinh cx\,dx = \frac{1}{c}\cosh cx$

2. $\int \cosh cx\,dx = \frac{1}{c}\sinh cx$

3. $\int \sinh^2 cx\,dx = \frac{1}{4c}\sinh 2cx - \frac{x}{2}$

4. $\int \cosh^2 cx\,dx = \frac{1}{4c}\sinh 2cx + \frac{x}{2}$

5. $$\int \sinh^n cx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{cn} \sinh^{n-1} cx \cosh cx -$$

$$- \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} cx \,\mathrm{d}x = \qquad (n > 0)$$

$$= \frac{1}{c(n+1)} \sinh^{n+1} cx \cosh cx -$$

$$- \frac{n+2}{n+1} \int \sinh^{n+2} cx \,\mathrm{d}x \qquad (n < 0;\ n \neq -1)$$

6. $$\int \cosh^n cx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{cn} \sinh cx \cosh^{n-1} cx +$$

$$+ \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} cx \,\mathrm{d}x = \qquad (n > 0)$$

$$= - \frac{1}{c(n+1)} \sinh cx \cosh^{n+1} cx +$$

$$+ \frac{n+2}{n+1} \int \cosh^{n+2} cx \,\mathrm{d}x \qquad (n < 0;\ n \neq -1)$$

7. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh cx} = \frac{1}{c} \ln \left| \tanh \frac{cx}{2} \right| = \frac{1}{c} \ln \left| \frac{\cosh cx - 1}{\sinh cx} \right| =$$

$$= \frac{1}{c} \ln \left| \frac{\sinh cx}{\cosh cx + 1} \right| = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{\cosh cx - 1}{\cosh cx + 1} \right|$$

8. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh cx} = \frac{2}{c} \arctan \mathrm{e}^{cx}$$

9. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^n cx} = - \frac{1}{c(n-1)} \frac{\cosh cx}{\sinh^{n-1} cx} -$$

$$- \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^{n-2} cx} \qquad (n \neq 1)$$

10. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^n cx} = \frac{1}{c(n-1)} \frac{\sinh cx}{\cosh^{n-1} cx} +$$

$$+ \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n-2} cx} \qquad (n \neq 1)$$

11. $$\int \frac{\cosh^n cx}{\sinh^m cx}\, dx = \frac{1}{c(n-m)} \frac{\cosh^{n-1} cx}{\sinh^{m-1} cx} +$$
$$+ \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\cosh^{n-2} cx}{\sinh^m cx}\, dx = \qquad (m \neq n)$$
$$= -\frac{1}{c(m-1)} \frac{\cosh^{n+1} cx}{\sinh^{m-1} cx} +$$
$$+ \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cosh^n cx}{\sinh^{m-2} cx}\, dx = \qquad (m \neq 1)$$
$$= -\frac{1}{c(m-1)} \frac{\cosh^{n-1} cx}{\sinh^{m-1} cx} +$$
$$+ \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cosh^{n-2} cx}{\sinh^{m-2} cx}\, dx \qquad (m \neq 1)$$

12. $$\int \frac{\sinh^m cx}{\cosh^n cx}\, dx = \frac{1}{c(m-n)} \frac{\sinh^{m-1} cx}{\cosh^{n-1} cx} -$$
$$- \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sinh^{m-2} cx}{\cosh^n cx}\, dx = \qquad (m \neq n)$$
$$= \frac{1}{c(n-1)} \frac{\sinh^{m+1} cx}{\cosh^{n-1} cx} -$$
$$- \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sinh^m cx}{\cosh^{n-2} cx}\, dx = \qquad (n \neq 1)$$
$$= -\frac{1}{c(n-1)} \frac{\sinh^{m-1} cx}{\cosh^{n-1} cx} +$$
$$+ \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sinh^{m-2} cx}{\cosh^{n-2} cx}\, dx \qquad (n \neq 1)$$

13. $$\int x \sinh cx\, dx = \frac{1}{c} x \cosh cx - \frac{1}{c^2} \sinh cx$$

14. $$\int x \cosh cx\, dx = \frac{1}{c} x \sinh cx - \frac{1}{c^2} \cosh cx$$

15. $$\int \tanh cx\, dx = \frac{1}{c} \ln |\cosh cx|$$

16. $$\int \coth cx\, dx = \frac{1}{c} \ln |\sinh cx|$$

17. $$\int \tanh^n cx\, dx = -\frac{1}{c(n-1)} \tanh^{n-1} cx + \int \tanh^{n-2} cx\, dx \qquad (n \neq 1)$$

18. $$\int \coth^n cx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{c(n-1)}\coth^{n-1} cx + \int \coth^{n-2} cx\,\mathrm{d}x \qquad (n \neq 1)$$

19. $$\int \sinh bx \sinh cx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-c^2}(b \sinh cx \cos bx - c \cosh cx \sinh bx) \qquad (b^2 \neq c^2)$$

20. $$\int \cosh bx \cosh cx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-c^2}(b \sinh bx \cosh cx - c \sinh cx \cosh bx) \qquad (b^2 \neq c^2)$$

21. $$\int \cosh bx \sinh cx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-c^2}(b \sinh bx \sinh cx - c \cosh bx \cosh cx) \qquad (b^2 \neq c^2)$$

22. $$\int \sinh(ax+b)\sin(cx+d)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+c^2}\cosh(ax+b)\sin(cx+d) - \frac{c}{a^2+c^2}\sinh(ax+b)\cos(cx+d)$$

23. $$\int \sinh(ax+b)\cos(cx+d)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+c^2}\cosh(ax+b)\cos(cx+d) + \frac{c}{a^2+c^2}\sinh(ax+b)\sin(cx+d)$$

24. $$\int \cosh(ax+b)\sin(cx+d)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+c^2}\sinh(ax+b)\sin(cx+d) - \frac{c}{a^2+c^2}\cosh(ax+b)\cos(cx+d)$$

25. $$\int \cosh(ax+b)\cos(cx+d)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+c^2}\sinh(ax+b)\cos(cx+d) + \frac{c}{a^2+c^2}\cosh(ax+b)\sin(cx+d)$$

7.4.5. Integrale der Exponentialfunktionen

1. $\int e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}\,e^{cx}$

2. $\int x e^{cx}\,dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx - 1)$

3. $\int x^2 e^{cx}\,dx = e^{cx}\left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3}\right)$

4. $\int x^n e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}\,x^n e^{cx} - \frac{n}{c}\int x^{n-1} e^{cx}\,dx$

5. $\int \frac{e^{cx}\,dx}{x} = \ln|x| + \frac{cx}{1\cdot 1!} + \frac{(cx)^2}{2\cdot 2!} + \cdots$

6. $\int \frac{e^{cx}\,dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{cx}}{x^{n-1}} + c\int \frac{e^{cx}\,dx}{x^{n-1}}\right)$ $\qquad (n \neq 1)$

7. $\int e^{cx}\ln x\,dx = \frac{1}{c}\left(e^{cx}\ln|x| - \int \frac{e^{cx}\,dx}{x}\right)$

8. $\int e^{cx}\sin bx\,dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2}(c\sin bx - b\cos bx)$

9. $\int e^{cx}\cos bx\,dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2}(c\cos bx + b\sin bx)$

10. $$\int e^{cx}\sin^n x\,dx = \frac{e^{cx}\sin^{n-1} x}{c^2 + n^2}(c\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{c^2 + n^2}\int e^{cx}\sin^{n-2} x\,dx$$

11. $$\int e^{cx}\cos^n x\,dx = \frac{e^{cx}\cos^{n-1} x}{c^2 + n^2}(c\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{c^2 + n^2}\int e^{cx}\cos^{n-2} x\,dx$$

7.4.6. Integrale der logarithmischen Funktionen

Für $x > 0$ gilt:

1. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

2. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$

3. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$ $\qquad (n \neq -1)$

4. $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \cdots$

5. $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$

6. $\int x^m \ln x \, dx = x^{m+1}\left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \qquad (m \neq -1)$

7. $\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} -$

$- \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx \qquad (m;\, n \neq -1)$

8. $\int \frac{(\ln x)^n \, dx}{x} = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$

9. $\int \frac{\ln x \, dx}{x^m} = -\frac{\ln x}{(m-1)\, x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2\, x^{m-1}} \qquad (m \neq 1)$

10. $\int \frac{(\ln x)^n \, dx}{x^m} = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)\, x^{m-1}} +$

$+ \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1} \, dx}{x^m} \qquad (m \neq 1)$
$(n \neq -1)$

11. $\int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$

12. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x|$

13. $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln|\ln x| - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} -$

$- \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + - \cdots$

14. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$

15. $\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

16. $\int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

17. $\int e^{cx} \ln x \, dx = \frac{1}{c}\left(e^{cx}\ln x - \int \frac{e^{cx} \, dx}{x}\right)$

7.4.7. Integrale der Arcusfunktionen

1. $\int \arcsin\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{c} + \sqrt{c^2 - x^2}$

2. $\int x\arcsin\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{c} + \frac{x}{4}\sqrt{c^2 - x^2}$

3. $\int x^2\arcsin\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{c} + \frac{x^2 + 2c^2}{9}\sqrt{c^2 - x^2}$

4. $\int \arccos\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{c} - \sqrt{c^2 - x^2}$

5. $\int x\arccos\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{c} - \frac{x}{4}\sqrt{c^2 - x^2}$

6. $\int x^2\arccos\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{c} - \frac{x^2 + 2c^2}{9}\sqrt{c^2 - x^2}$

7. $\int \arctan\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{c} - \frac{c}{2}\ln\left(c^2 + x^2\right)$

8. $\int x\arctan\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{c^2 + x^2}{2}\arctan\frac{x}{c} - \frac{cx}{2}$

9. $\int x^2\arctan\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{c} - \frac{cx^2}{6} + \frac{c^3}{6}\ln\left(c^2 + x^2\right)$

10. $\int x^n\arctan\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan\frac{x}{c} -$

$$- \frac{c}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{c^2 + x^2} \qquad (n \neq -1)$$

11. $\int \operatorname{arccot}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot}\frac{x}{c} + \frac{c}{2}\ln\left(c^2 + x^2\right)$

12. $\int x\operatorname{arccot}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{c^2 + x^2}{2}\operatorname{arccot}\frac{x}{c} + \frac{cx}{2}$

13. $\int x^2\operatorname{arccot}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\operatorname{arccot}\frac{x}{c} + \frac{cx^2}{6} - \frac{c^3}{6}\ln\left(c^2 + x^2\right)$

14. $\int x^n\operatorname{arccot}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arccot}\frac{x}{c} + \frac{c}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{c^2 + x^2}$

$$(n \neq -1)$$

7.4.8. Integrale der Areafunktionen

1. $\int \operatorname{arsinh}\frac{x}{c}\,dx = x\operatorname{arsinh}\frac{x}{c} - \sqrt{x^2+c^2}$

2. $\int \operatorname{arcosh}\frac{x}{c}\,dx = x\operatorname{arcosh}\frac{x}{c} - \sqrt{x^2-c^2}$

3. $\int \operatorname{artanh}\frac{x}{c}\,dx = x\operatorname{artanh}\frac{x}{c} + \frac{c}{2}\ln|c^2-x^2|$

4. $\int \operatorname{arcoth}\frac{x}{c}\,dx = x\operatorname{arcoth}\frac{x}{c} + \frac{c}{2}\ln|x^2-c^2|$

7.5. Bestimmtes Integral

7.5.1. Allgemeines

Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ nimmt für $x = a$ und $x = b$ die nicht eindeutigen Werte $F(a) + C$ bzw. $F(b) + C$ an.

Bildet man die Differenz, so fällt die unbestimmte Integrationskonstante heraus, und es ergibt sich der Wert des bestimmten Integrals zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Rechenregeln für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiel:

$$\int_1^3 (2x + 3x^2)\,\mathrm{d}x = (x^2 + x^3)\Big|_1^3$$

$$= (9 + 27) - (1 + 1) = \underline{\underline{34}}$$

7.5.2. Mittelwertsätze der Integralrechnung

Ist $y = f(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig, so existiert im Inneren des Intervalls mindestens ein Wert ξ; für den gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)\,f(\xi)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)\,f[a + \vartheta(b - a)] \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sind $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig und behält $y = g(x)$ im Intervall das Vorzeichen bei, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

ξ ein Wert im Intervall (a, b)
oder

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f[a + \vartheta(b - a)]\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Mittelwert

der Funktion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen a und b

$$\mathrm{AM} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Quadratischer Mittelwert

der Funktion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen a und b

$$\mathrm{QM} = \sqrt{\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}$$

Bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze

Das bestimmte Integral mit veränderlicher oberer Grenze ist eine stetige Funktion dieser Integrationsgrenze.

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

7.5.3. Geometrische Deutung des bestimmten Integrals

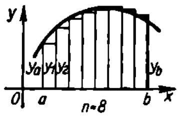
Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gibt zahlenmäßig den Inhalt der Fläche an, die von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ begrenzt wird. Flächen unterhalb der x-Achse ergeben sich rechnerisch als negative Werte. Verläuft die Kurve teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse, so stimmt der Wert des bestimmten Integrals mit der Differenz der Flächeninhalte überein.

7.5.4. Näherungsmethoden für bestimmte Integrale

Rechteckformel

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_a + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

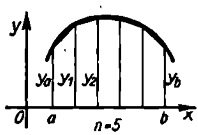
n Anzahl der gleichen Teile des Intervalls



Trapezformel

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}(y_a + 2y_1 + 2y_2 + \\ + \cdots + 2y_{n-1} + y_b)$$

n siehe oben



Tangentenformel

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \approx \frac{2(b-a)}{n}(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) \quad (n \text{ gerade})$$

Simpsonsche Regel

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}(y_a + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + \\ + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_b)$$

$$(n = 2k,\ k \in N)$$

Keplersche Faßregel

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}(y_a + 4y_1 + y_b) \qquad (n = 2)$$

Beispiel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

Mit der KEPLERschen Faßregel ergibt sich

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{6}(0 + 4 \cdot 1 + 0) = \frac{2\pi}{3} \approx \underline{\underline{2{,}094}}$$

Integration nach Reihenentwicklung

Läßt sich die zu integrierende Funktion in eine konvergente Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ entwickeln und liegen die Integrationsgrenzen innerhalb des Konvergenzbereiches, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_a^b \mathrm{d}x + a_1 \int_a^b x\,\mathrm{d}x + a_2 \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x + \cdots,$$

wobei

$$|a| < r; \quad |b| < r \qquad (r \text{ Konvergenzradius})$$

Anwendungen

Integralsinus $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} +$

$$+ \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + - \cdots \qquad \text{für } |x| < \infty$$

Integralcosinus $\mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = C - \ln|x| -$

$$- \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + - \cdots \text{ für } |x| < \infty$$

C **(Eulersche Konstante)** $= 0{,}5772\ldots$

Exponentialintegral $\mathrm{Ei}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt = C +$

$$+ \ln|x| + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots \text{ für } x < 0$$

C s. o.

Integrallogarithmus $\mathrm{Li}(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\ln t} = C + \ln|\ln x| +$

$$+ \frac{\ln x}{1 \cdot 1!} + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \cdots \quad \text{für} \quad 0 < x < \infty \qquad C \text{ s. o.}$$

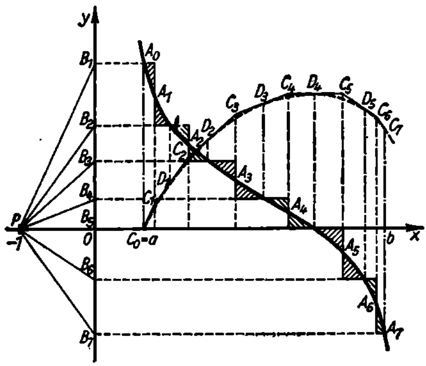
Gaußsches Fehlerintegral $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 5 \cdot 2!} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^7}{2^3 \cdot 7 \cdot 3!} + - \cdots \right) \qquad \text{für } |x| < \infty$$

7.5.5. Graphische Integration

Zur Konstruktion der zu einer gegebenen Kurve $y = f(x)$ gehörigen Integralkurve $F(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ ersetzt man die Kurve $y = f(x)$



durch eine Treppe mit zur Abszisse parallelen Stufen, und zwar so, daß jeweils die beiden zwischen zwei Stufen schraffierten Zipfel gleichen Flächeninhalt aufweisen. Die Ordinaten der Stufen trägt man auf der y-Achse ab, $\overline{OB_1}$, $\overline{OB_2}$ usw., verbindet die Punkte B_1, B_2 usw. mit dem Pol $P(-1; 0)$. Zu diesen Verbindungslinien zieht man die Parallelen, beginnend im Punkt C_0, so daß $\overline{C_0C_1} \parallel \overline{PB_1}$, $\overline{C_1C_2} \parallel \overline{PB_2}$, $\overline{C_2C_3} \parallel \overline{PB_3}$ usw. wird. Der dadurch erhaltene Polygonzug stellt einen Tangentenzug an die gesuchte Integralkurve dar, der die Kurve in den Punkten C_0, D_1, D_2, D_3 usw. berührt. Mit dem Kurvenlineal wird die Integralkurve selbst gezeichnet.

7.5.6. Uneigentliche Integrale

Erklärung

Integrale mit unendlichen Grenzen und Integrale, die am Rande des Integrationsintervalls unendlich werden, werden als *uneigentliche Integrale* bezeichnet.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ a\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

Existiert der Grenzwert, so wird er als Wert des uneigentlichen Integrals gesetzt.
Bei Integralen unstetiger Funktionen bestimmt man folgenden Grenzwert:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \text{für} \quad \lim_{x\to b} f(x) = \infty$$

Existiert dieser Grenzwert, so wird er als Wert des uneigentlichen Integrals bezeichnet.

Beispiele:

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to0} \left\{\frac{x^{1-n}}{1-n}\right\}_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-n}\left(1 - \lim_{\varepsilon\to0} \varepsilon^{1-n}\right)$$

Der letzte Grenzwert existiert für $1 - n > 0 \Rightarrow n < 1$ und hat den Wert 0.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n} \qquad (n < 1)$$

2. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to\infty} \left\{\frac{x^{1-n}}{1-n}\right\}_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{1}{b^{n-1}} - 1}{1-n}$$

Dieser Grenzwert existiert für $n - 1 > 0 \Rightarrow n > 1$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \qquad (n > 1)$$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ existiert nicht, da $\ln 0$ nicht existiert.

7.5.7. Einige bestimmte Integrale

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

3. $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

4. $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

5. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$$

6. $$\int_a^b \frac{dx}{x^2-a^2} = -\infty$$

7. $$\int\limits_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

8. $$\int\limits_0^a \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{3\pi a^2}{8}$$

9. $$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{x}} = 0$$

10. $$\int\limits_0^{2b} \sqrt{2bx-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi b^2}{2}$$

11. $$\int\limits_{-1}^{+1} a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^2-1}{a\ln a} \qquad (a > 0)$$

12. $$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^n\,\mathrm{d}x = n! \qquad (n \in N \setminus \{0\})$$

13. $$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

14. $$\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\pi^2}{12}$$

15. $$\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

16. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax\,\mathrm{d}x}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{für } a > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

17. $$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{d}x}{x} = \infty$$

18. $$\int\limits_0^\pi \sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos a\pi}{a}$$

19. $$\int\limits_0^\pi \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin a\pi}{a}$$

20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$(n \in N \setminus \{0\})$

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$

$(n \in N \setminus \{0\})$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1$

23. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\tan ax \, dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a < 0 \end{cases}$

24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \frac{1}{2} \ln 2$

25. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x}} = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

26. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{x+1} \, dx = -\frac{\pi^2}{12}$

27. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{x-1} \, dx = \frac{\pi^2}{6}$

28. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln (x+1)}{x^2+1} \, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$

29. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx = \frac{\pi^2}{8}$

7.5.8. Anwendungen der bestimmten Integrale

Geometrische Anwendungen

Flächeninhalte (Quadratur)

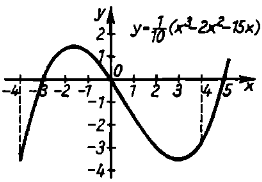
1. Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(s. S. 335)}$$

Für die Ermittlung des *absoluten Flächeninhalts* sind die sich negativ ergebenden Maßzahlen der Flächenteile unterhalb der Abszisse absolut zu nehmen.

Beispiel:

Wie groß ist die Fläche, die von der Kurve



$$y = \frac{1}{10}(x^3 - 2x^2 - 15x),$$

der x-Achse und den Parallelen $x = -4$ und $x \doteq 4$ begrenzt wird?

Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5$

$$x_1;\, x_2 \in X$$

$$A = \left|\int_{-4}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{10}\int_{-4}^{-3}(x^3 - 2x^2 - 15x)\,\mathrm{d}x\right| + \frac{1}{10}\int_{-3}^{0}(x^3 - 2x^2 - 15x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left|\frac{1}{10}\int_{0}^{4}(x^3 - 2x^2 - 15x)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{10}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2}\right]_{-4}^{-3}\right| + \frac{1}{10}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2}\right]_{-3}^{0} +$$

$$+ \left|\frac{1}{10}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2}\right]_{0}^{4}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{10}\left(-\frac{117}{4} + \frac{40}{3}\right)\right| + \frac{1}{10}\cdot\frac{117}{4} + \left|\frac{1}{10}\left(-\frac{296}{3}\right)\right| =$$

$$= \underline{\underline{14\,\frac{23}{60}\ \text{Flächeneinheiten}}}$$

2. Fläche zwischen der Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, der x-Achse und den Ordinaten $\psi(t_1)$ und $\psi(t_2)$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw. der y-Achse und den Abszissen $\varphi(t_1)$ und $\varphi(t_2)$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\dot{\psi}(t)\,\mathrm{d}t$$

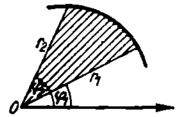
3. Fläche, die oben von der Kurve $y = f(x)$ und unten von der Kurve $y = g(x)$ begrenzt wird und zwischen den Parallelen $x = x_1$ und $x = x_2$ liegt

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

4. Fläche zwischen der Kurve $r = f(\varphi)$ und den Radiusvektoren

$$r_1 = f(\varphi_1) \quad \text{und} \quad r_2 = f(\varphi_2)$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,\mathrm{d}\varphi \qquad \textbf{(Leibnizsche Sektorenformel)}$$



5. Fläche zwischen der Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ und den Radiusvektoren OP_1 und OP_2

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [\varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi]\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(Leibnizsche Sektorenformel)}$$

Bemerkung: Formeln 2, 4 und 5 sind auch für geschlossene Kurven verwendbar.

Bogenlänge (Rektifikation)

Länge s eines Kurvenstückes zwischen den Punkten P_1 und P_2

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für Kurve } y = f(x)$$

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y \qquad \text{für Kurve } x = f(y)$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für Kurve } x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

für Kurve $r = f(\varphi)$

Mantelflächen von Rotationskörpern (Komplanation)

$A_{M_x} = 2\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ bei Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse

$A_{M_y} = 2\pi \int\limits_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ bei Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die y-Achse

$A_{M_x} = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2}\,dt$ bei Rotation der Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ um die x-Achse

bzw.

$A_{M_y} = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2}\,dt$ um die y-Achse

$A_{M_x} = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$ bei Rotation der Kurve $r = r(\varphi)$ um die x-Achse

bzw.

$A_{M_y} = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$ um die y-Achse

Volumen von Rotationskörpern (Kubatur)

$V_x = \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$ bei Rotation von $y = f(x)$ um die x-Achse

$V_y = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2\,dy =$ bei Rotation von $y = f(x)$ um die y-Achse

$= \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 y'\,dx$ $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$

$V_x = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi^2\dot{\varphi}\,dt$ bei Rotation der Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ um die x-Achse

$V_y = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi^2\dot{\psi}\,dt$ bzw. um die y-Achse

$$V_x = \pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin^2\varphi\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)d\varphi$$

bei Rotation der Kurve $r = f(\varphi)$ um die x-Achse

$V_y = \pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\cos^2\varphi\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)d\varphi$ um die y-Achse

Anwendungen in der technischen Mechanik

Arbeit

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \, \mathrm{d}s$$

Statische Momente

1. Statisches Moment eines homogenen ebenen Kurvenstückes (Dichte $\varrho = 1$)

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x$$ (bezogen auf die x-Achse) für Kurve $y = f(x)$

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x$$ (bezogen auf die y-Achse)

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \psi \sqrt{\dot{\varphi} + \dot{\psi}} \, \mathrm{d}t$$ (bezogen auf die x-Achse) für Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi \sqrt{\dot{\varphi} + \dot{\psi}} \, \mathrm{d}t$$ (bezogen auf die y-Achse)

$$M_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sqrt{r^2 + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$ (bezogen auf die x-Achse) für Kurve $r = f(\varphi)$

$$M_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$ (bezogen auf die y-Achse)

2. Statisches Moment eines homogenen ebenen Flächenstückes, das von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, \mathrm{d}x$$ (bezogen auf die x-Achse)

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy \, \mathrm{d}x$$ (bezogen auf die y-Achse)

3. Statisches Moment eines homogenen ebenen Flächenstückes, das oben von der Kurve $y = f(x)$, unten von der Kurve $y = g(x)$ und

den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird ($\varrho = 1$)

$$M_x = \frac{1}{2} \int\limits_{x_1}^{x_2} [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx \qquad \text{(bezogen auf die } x\text{-Achse)}$$

$$M_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} x[f(x) - g(x)]\,dx \qquad \text{(bezogen auf die } y\text{-Achse)}$$

4. Statisches Moment eines homogenen Drehkörpers ($\varrho = 1$)

$$M_{yz} = \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx$$

(bezogen auf die zur Drehachse x im Ursprung senkrechte y; z-Ebene)

Schwerpunkt

1. Schwerpunkt eines homogenen ebenen Kurvenstückes der Kurve $y = f(x)$ zwischen den Punkten P_1 und P_2

$$x_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx} = \frac{M_y}{s}\,; \quad y_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx} = \frac{M_x}{s}$$

2. Schwerpunkt eines homogenen ebenen Flächenstückes, das von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird

$$x_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} xy\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx} = \frac{M_y}{A}\,; \qquad y_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}{2\int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx} = \frac{M_x}{A}$$

3. Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche, die oben von der Kurve $y = f(x)$ und unten von der Kurve $y = g(x)$ begrenzt wird

$$x_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} x[f(x) - g(x)]\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx} = \frac{M_y}{A}$$

$$y_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx}{2\int\limits_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx} = \frac{M_x}{A}$$

4. Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entstanden ist

$$x_S = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} xy^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x} = \frac{M_{yz}}{V}; \quad y_S = 0; \quad z_S = 0$$

5. Schwerpunkt eines Körpers

$$x_S = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\int\limits_V x\,\mathrm{d}V}{V}; \quad y_S = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{\int\limits_V y\,\mathrm{d}V}{V}$$

$$z_S = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\int\limits_V z\,\mathrm{d}V}{V}$$

Für die Kurven in Parameterdarstellung bzw. Polarkoordinaten ist der Schwerpunkt aus Moment und Bogen bzw. Fläche zu bilden.

Flächenträgheitsmomente (Festigkeitslehre)

1. *Äquatoriales Trägheitsmoment* eines ebenen Kurvenbogens s

$$I_x = \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$ (bezogen auf die x-Achse) für Kurve $y = f(x)$

$$I_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$ (bezogen auf die y-Achse)

$$I_x = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi^2 \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,\mathrm{d}t$$ (bezogen auf die x-Achse) für Kurve $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$

$$I_y = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi^2 \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,\mathrm{d}t$$ (bezogen auf die y-Achse)

$$I_x = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$ (bezogen auf die x-Achse) für Kurve $r = f(\varphi)$

$$I_y = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$ (bezogen auf die y-Achse)

2. *Äquatoriale Trägheitsmomente* der Fläche A, allgemein

$$I_x = \int\limits_A y^2\,\mathrm{d}A; \quad I_y = \int\limits_A x^2\,\mathrm{d}A$$ $\mathrm{d}A$ Flächenelement

Satz von STEINER: $I = I_S + a^2 A$ — I_S Trägheitsmoment in bezug auf Schwerpunkt; a Abstand Bezugsachse—Schwerpunkt

3. *Äquatoriales Trägheitsmoment* einer homogenen ebenen Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} y^3 \, dx \qquad \text{(bezogen auf die } x\text{-Achse)}$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 y \, dx \qquad \text{(bezogen auf die } y\text{-Achse)}$$

Siehe auch S. 356.

4. *Äquatoriales Trägheitsmoment* einer homogenen ebenen Fläche, die oben von der Kurve $y = f(x)$, unten von der Kurve $y = g(x)$ und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} \{[f(x)]^3 - [g(x)]^3\} \, dx \qquad \text{(bezogen auf die } x\text{-Achse)}$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 [f(x) - g(x)] \, dx \qquad \text{(bezogen auf die } y\text{-Achse)}$$

5. *Polares Trägheitsmoment*

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = I_x + I_y \qquad \text{(bezogen auf den Ursprung)}$$

Siehe auch S. 357.

6. *Zentrifugales Trägheitsmoment*

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

dA Flächenelement

Massenträgheitsmomente (Dynamik)

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

dm Massenelement $= \varrho \, dV$
dV Volumenelement
r Abstand vom Drehpunkt

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers der Dichte ϱ, der durch Drehung der ebenen Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ um die x-Achse entsteht

$$J_x = \frac{\pi\varrho}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^4 \, dx$$

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers der Dichte ϱ, der durch Drehung der ebenen Fläche zwischen den Kurven $x = g(y)$ und den Geraden $y = y_1$ und $y = y_2$ um die y-Achse entsteht

$$J_y = \frac{\pi\varrho}{2} \int_{y_1}^{y_2} x^4 \, dy$$

7.6. Linienintegral

7.6.1. Linienintegral in der Ebene

Unter einem Linienintegral versteht man ein bestimmtes Integral, dessen Integrationsweg nicht von zwei Punkten der x-Achse, sondern von einem Stück einer als Gleichung gegebenen Kurve $C[x = f(t);\, y = g(t)]$ festgelegt wird. Die Integrationsgrenzen sind A und B mit $t = t_A$ und $t = t_B$.

$$L = \int_A^B [P(x; y) \, dx \underset{(C)}{+} Q(x; y) \, dy]$$

Man spricht in diesem Fall von dem Linienintegral längs der Kurve C zwischen den Punkten A und B.
Zur Berechnung dient das bestimmte Integral

$$L = \int_{t_A}^{t_B} \{P[f(t);\, g(t)]\, \dot{f}(t) + Q[f(t);\, g(t)]\, \dot{g}(t)\} \, dt$$

Der Wert des Linienintegrals ist sowohl von der Lage des Koordinatensystems als auch von der Wahl des Parameters unabhängig.
Vertauschung der Grenzen A und B ergibt

$$\int_A^B [P(x; y) \, dx \underset{(C)}{+} Q(x; y) \, dy] = \\ = - \int_A^B [P(x; y) \, dx \underset{(C)}{+} Q(x; y) \, dy]$$

Wird als Integrationsweg eine in sich geschlossene Kurve gewählt, die man so durchläuft, daß ihr Inneres links liegt, so schreibt man $\oint$ (*Randintegral*).

Flächeninhalt einer ebenen Figur

$$A = \frac{1}{2} \oint\limits_{(C)} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \qquad C \text{ Randkurve der ebenen Figur}$$

Linienintegral eines vollständigen Differentials

Ist die *Integrabilitätsbedingung* (SCHWARZsche Bedingung)

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

erfüllt, ist also $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ ein vollständiges Differential einer Funktion $\varphi(x; y) = 0$, so ist das Linienintegral *unabhängig vom eingeschlagenen Integrationsweg.* Es hängt nur noch von den Grenzen A und B ab.
Daraus folgt: Der Wert des Linienintegrals eines vollständigen Differentials über einen geschlossenen Integrationsweg ist Null.
Umkehrung: Ist der Wert eines Linienintegrals über einen geschlossenen Integrationsweg in einem einfach zusammenhängenden Bereich gleich Null, so ist der Integrand ein vollständiges Differential.
Ist die Integrabilitätsbedingung für den Vektor $\mathfrak{F} = P\mathfrak{i} + Q\mathfrak{j}$ gegeben, heißt das Feld *Potentialfeld*, $\varphi(x; y) = 0$ *Potentialfunktion.*

Beispiel:

Berechne das Linienintegral $\int\limits_A^B [(xy + y^2)\,\mathrm{d}x \underset{(C)}{+} x\,\mathrm{d}y]$ längs der Parabel $y = 2x^2$ zwischen den Grenzen $A(0; 0)$ und $B(2; 8)$.
Man wählt bei expliziter Form der Kurve eine der Unbekannten selbst als Parameter. Wir wählen x, also $y = 2x^2$, $\mathrm{d}y = 4x\,\mathrm{d}x$.

$$L = \int\limits_0^2 (x \cdot 2x^2 + 4x^4 + x \cdot 4x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{44\frac{4}{15}}}$$

7.6.2. Linienintegral im Raum

Die Lehrsätze des Abschnittes „Linienintegral in der Ebene" lassen sich unmittelbar auf räumliche Probleme übertragen.

$$L = \int\limits_A^B [P(x; y; z)\,\mathrm{d}x \underset{(C)}{+} Q(x; y; z)\,\mathrm{d}y + R(x; y; z)\,\mathrm{d}z],$$

wobei C in der Form gegeben ist:

$$x = f(t);\; y = g(t);\; z = h(t);\; A(x_A; y_A; z_A);\; B(x_B; y_B; z_B).$$

$$L = \int_{t_A}^{t_B} \{P[f(t); g(t); h(t)]\, \dot{f}(t) + Q[f(t); g(t); h(t)]\, \dot{g}(t) +$$
$$+ R[f(t); g(t); h(t)]\, \dot{h}(t)\}\, dt$$

Das Linienintegral wird *unabhängig vom Integrationsweg*, wenn die Integrabilitätsbedingung gilt:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0;\; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0;\; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

7.6.3. Linienintegral eines Vektors

$$\mathfrak{F} = P(x; y; z)\, \mathfrak{i} + Q(x; y; z)\, \mathfrak{j} + R(x; y; z)\, \mathfrak{k}$$

Der Vektor heißt *Feldvektor*, der zugehörige Raumteil *stationäres Feld des Vektors* $\mathfrak{F}$.
Die Raumkurve C, entlang der sich das Linienintegral erstreckt, wird in der vektoriellen Form $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ gegeben.
Das skalare Produkt

$$\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} = (P\mathfrak{i} + Q\mathfrak{j} + R\mathfrak{k}) \cdot (dx\, \mathfrak{i} + dy\, \mathfrak{j} + dz\, \mathfrak{k}) =$$
$$= P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

erweist sich als der Integrand des Linienintegrals (s. 7.6.1.).
Damit gilt:

$$L = \int_A^B \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}_{(C)}$$

Dieses Linienintegral wird Linienintegral des Vektors $\mathfrak{F}$ längs der Kurve C in den Grenzen A und B genannt.

Arbeitsintegral $W = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$

Beispiel:

Gegeben ist das Kraftfeld $\mathfrak{F} = -y\mathfrak{i} + x\mathfrak{j} + \frac{1}{z+1}\mathfrak{k}$. Welche Arbeit $W = \int \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$ ist zu verrichten, um einen Massenpunkt in dem Kraftfeld längs der Schraubenlinie $\mathfrak{r} = (a \cos t)\, \mathfrak{i} + (a \sin t)\, \mathfrak{j} + + ct\mathfrak{k}$ von $P_1(a; 0; 0)$ nach $P_2(a; 0; 2\pi c)$ zu bringen ($c \in N$)?

Aus der Gleichung der *Schraubenlinie* folgt

$$x = a\cos t;\quad y = a\sin t;\quad z = ct$$

$$\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t;\quad \mathrm{d}y = a\cos t\,\mathrm{d}t;\quad \mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}t$$

Damit wird $\mathrm{d}\mathfrak{r} = [(-a\sin t)\,\mathfrak{i} + (a\cos t)\,\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}]\,\mathrm{d}t$
Grenzen:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t;\quad t = \arctan\frac{y}{x}$$

Für P_1 gilt $t_1 = \arctan\frac{0}{a} = \arctan 0 = 0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots;$

$$\text{mit } z_1 = ct_1 = 0 \text{ ist nur } t_1 = 0 \text{ möglich.}$$

Für P_2 gilt $t_2 = \arctan\frac{0}{a} = 0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots;$

$$\text{mit } z_2 = ct_2 \doteq 2\pi c \text{ ergibt sich } t_2 = 2\pi.$$

Hier muß arctan x als mehrdeutige Funktion aufgefaßt werden, da c Windungen der Schraubenlinie vorliegen.
Damit lautet das Linienintegral:

$$W = \int_0^{2\pi}\left[(-a\sin t)\,\mathfrak{i} + (a\cos t)\,\mathfrak{j} + \frac{1}{ct+1}\,\mathfrak{k}\right][(-a\sin t)\,\mathfrak{i} +$$

$$+ (a\cos t)\,\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{c}{ct+1}\right)\mathrm{d}t =$$

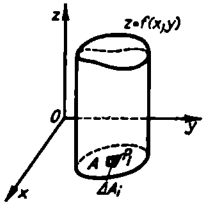
$$= \underline{\underline{2\pi a^2 + \ln(2\pi c + 1)}}$$

7.7. Mehrfache Integrale

7.7.1. Doppelintegral

Doppelintegrale werden von Funktionen zweier Veränderlicher $z = f(x;\ y)$ [bzw. $f(r;\ \varphi)$], erstreckt über eine Fläche A in der $x; y$-Ebene [bzw. $r; \varphi$-Ebene], gebildet. Sie ergeben eine Zahl als Summe des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i}^{n} f(x_i;\ y_i)\,\Delta A_i$, alle $\Delta A_i \to 0$, wobei $f(x_i;\ y_i)$ den Wert der Funktion z für einen beliebigen Punkt P_i (P_i liegt in der Fläche A bzw. auf deren Rand) und ΔA_i das zugehörige Flächenelement bedeuten.

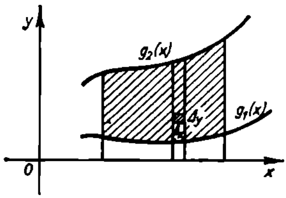
Geometrisch stellt das Doppelintegral die Maßzahl des Rauminhaltes für den zylindrischen Körper dar, der von der Fläche A in der $x; y$-Ebene, den auf dem Rand von A errichteten Loten parallel zur z-Achse und einem Teil der Fläche $z = f(x; y)$ begrenzt wird.



Das ermittelte Volumen wird positiv, wenn z positiv ist, andernfalls negativ. Schneidet die Fläche $z = f(x; y)$ die $x; y$-Fläche im Bereich A, so ist die Volumenbestimmung in entsprechende Teilgebiete zu unterteilen, deren Maßzahlen absolut zu nehmen sind.

Für $z = f(x; y) = 1$ geht die Berechnung des Doppelintegrals in eine Flächenberechnung über:

$$A = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$



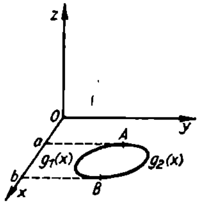
$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ Flächendifferential,

wobei $g_1(x)$ und $g_2(x)$ die variablen Grenzen der Veränderlichen y sind.

Berechnung des Doppelintegrals

In cartesischen Koordinaten gilt:

$$\int_A f(x;y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

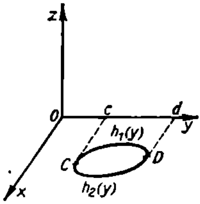


$g_1(x)$ und $g_2(x)$ sind die variablen Grenzen der Veränderlichen y. Stets wird *zuletzt* über die Veränderliche mit *festen Grenzen* integriert. Mit $h_1(y)$ und $h_2(y)$ als veränderliche Grenzen wird obiges Integral

$$\int_A f(x;y)\,\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

In Polarkoordinaten gilt:

$$\int_A f(r;\varphi)\,\mathrm{d}A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r;\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$



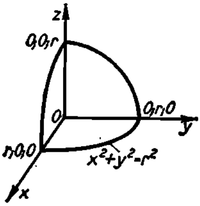
Beispiel:

Berechne das Volumen der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
Es genügt die Bestimmung für den ersten Oktanten $x \geqq 0$; $y \geqq 0$; $z \geqq 0$, da ein symmetrischer Körper vorliegt.

$$\frac{V}{8} = \int_A f(x; y)\, \mathrm{d}A,$$

wobei $f(x; y) = z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$



Grenzen:

x läuft von 0 bis $\sqrt{r^2 - y^2}$.

(Aus Gleichung der Kugel für $z = 0$, d.h. in der x; y-Ebene)

y läuft von 0 bis r.

Damit wird:

$$\frac{V}{8} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad x \geqq 0;\ y \geqq 0$$

Substitution $x = \sqrt{r^2 - y^2} \sin \varphi$ mit $\mathrm{d}x = \sqrt{r^2 - y^2} \cos \varphi\, \mathrm{d}\varphi$

Neue Grenzen:

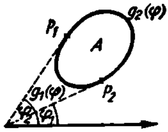
Für $x = 0$ wird $\varphi = 0$, für $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{V}{8} = \int_0^r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - (r^2 - y^2)\sin^2\varphi - y^2}\, \sqrt{r^2 - y^2} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^r \int_0^{\pi/2} \sqrt{(r^2 - y^2)(1 - \sin^2\varphi)}\, \sqrt{r^2 - y^2} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^r \int_0^{\pi/2} (r^2 - y^2) \cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^r \left[(r^2 - y^2)\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\right]_0^{\pi/2} \mathrm{d}y = \int_0^r (r^2 - y^2)\frac{\pi}{4}\, \mathrm{d}y =$$



$$= \frac{\pi}{4}\left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^r = \frac{\pi r^3}{6};$$

also $\underline{\underline{V = \frac{4}{3}\pi r^3}}$;

Anwendungen der Doppelintegrale

1. *Inhalt einer ebenen Fläche* in der $x; y$-Ebene allgemein

$$A = \int_A \mathrm{d}A$$

in cartesischen Koordinaten

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

in Polarkoordinaten

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$$

2. *Inhalt des Teiles einer Fläche* $z = f(x; y)$, deren Projektion in der $x; y$-Ebene A ist,

allgemein

$$A_O = \int_A \frac{\mathrm{d}A}{\cos\gamma},$$ wobei γ der Winkel zwischen der Tangente

an das Flächenelement und der $x; y$-Ebene ist,
in cartesischen Koordinaten

$$A_O = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

in Polarkoordinaten

$$A_O = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \sqrt{f_\varphi^2 + r^2 f_r^2 + r^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$$

3. *Statisches Moment*

allgemein

$$M_x = \int_A y\, \mathrm{d}A; \qquad M_y = \int_A x\, \mathrm{d}A$$

in cartesischen Koordinaten

$$M_x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x; \quad M_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

in Polarkoordinaten

$$M_x = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^2 \sin \varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

$$M_y = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^2 \cos \varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

in Parameterdarstellung:
Man rechnet zweckmäßigerweise in eine der angegebenen Darstellungen um.

4. *Axiale Flächenträgheitsmomente*

allgemein

$$I_x = \int\limits_A y^2 \, \mathrm{d}A$$

$$I_y = \int\limits_A x^2 \, \mathrm{d}A$$

in cartesischen Koordinaten

$$I_x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

$$I_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

in Polarkoordinaten

$$I_x = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^3 \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

$$I_y = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^3 \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

in Parameterdarstellung
siehe Bemerkung unter 3.

5. *Polares Trägheitsmoment*

allgemein

$$I_\mathrm{p} = \int_A r^2 \,\mathrm{d}A$$

in cartesischen Koordinaten

$$I_\mathrm{p} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

in Polarkoordinaten

$$I_\mathrm{p} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$$

in Parameterdarstellung
siehe Bemerkung unter 3.

6. *Volumen eines Zylinders*

allgemein

$$V = \int_A z \,\mathrm{d}A$$

in cartesischen Koordinaten

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

in Polarkoordinaten

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} zr \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$$

7.7.2. Dreifache Integrale

Dreifache Integrale werden von Funktionen dreier Veränderlicher $u = f(x; y; z)$, in Zylinderkoordinaten $u = f(\varrho; \varphi; z)$ bzw. in Kugelkoordinaten $u = f(r; \varphi; \vartheta)$ gebildet, erstreckt über ein Volumen im Raum.

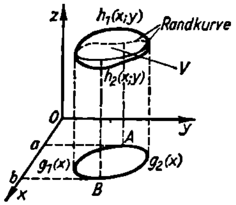
Berechnung der dreifachen Integrale

In cartesischen Koordinaten gilt:

$$\int_V f(x; y; z)\,\mathrm{d}V = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{h_1(x;y)}^{h_2(x;y)} f(x; y; z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x;y)}^{h_2(x;y)} f(x; y; z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Hierbei bedeuten die Grenzen $h_1(x; y)$ und $h_2(x; y)$ die untere bzw. obere Begrenzungsfläche des Volumens V, die durch die Randkurve des Volumens (Verbindungslinie der Berührungspunkte sämtlicher zur z-Achse parallelen Tangentialebenen an das Volumen) getrennt werden. Die Grenzen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ sind der untere bzw. obere Teil der Kurve in der $x; y$-Ebene, die durch Projektion der Randkurve auf die $x; y$-Ebene entsteht. Die Grenzen $x = a$ und $x = b$ trennen die beiden Kurven $g_1(x)$ und $g_2(x)$.



Analog dem Doppelintegral kann auch das dreifache Integral in beliebiger Reihenfolge integriert werden, wobei sich allerdings die Grenzen ändern. Wieder wird zuletzt über die Veränderliche mit den festen Grenzen integriert.
In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\int_V f(\varrho; \varphi; z)\,\mathrm{d}V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \int_{h_1(\varrho;\varphi)}^{h_2(\varrho;\varphi)} f(\varrho; \varphi; z)\,\varrho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi$$

In Kugelkoordinaten gilt:

$$\int_V f(r; \varphi; \vartheta)\,\mathrm{d}V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \int_{h_1(\vartheta;\varphi)}^{h_2(\vartheta;\varphi)} f(r; \varphi; \vartheta)\,r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Anwendungen der dreifachen Integrale

1. *Volumen* eines Körpers

allgemein

$$V = \int_V \mathrm{d}V$$

in cartesischen Koordinaten

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x;y)}^{h_2(x;y)} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

in Zylinderkoordinaten

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \int_{h_1(\varrho;\varphi)}^{h_2(\varrho;\varphi)} \varrho\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\varphi$$

in Kugelkoordinaten

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \int_{h_1(\vartheta;\varphi)}^{h_2(\vartheta;\varphi)} r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$$

2. *Schwerpunkt* eines homogenen Körpers

allgemein

$$x_S = \frac{\int\limits_V x\, \mathrm{d}V}{V}; \qquad y_S = \frac{\int\limits_V y\, \mathrm{d}V}{V}; \qquad z_S = \frac{\int\limits_V z\, \mathrm{d}V}{V}$$

$$x_S = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x;y)}^{h_2(x;y)} x\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

$$y_S = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x;y)}^{h_2(x;y)} y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

$$z_S = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x;y)}^{h_2(x;y)} z\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

Beispiel:

Berechne das Volumen des durch folgende Flächen begrenzten Körpers: $z = 2x^2y$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $y \geqq 0$.

Grenzen:

z läuft von 0 bis $2x^2y$

y läuft von 0 bis $\sqrt{4x - x^2}$, denn $(x-2)^2 + y^2 = 4;$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4;$$

$$y = \sqrt{4x - x^2}$$

x läuft von 0 bis 4, was aus der Kreisgleichung folgt.

$$V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \int_0^{2x^2y} dz\, dy\, dx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} 2x^2y\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^4 [x^2y^2]_0^{\sqrt{4x-x^2}}\, dx = \int_0^4 (4x^3 - x^4)\, dx =$$

$$= \left(x^4 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4 = \underline{\underline{51{,}2 \text{ Volumeneinheiten}}}$$

8. Differentialgleichungen

8.1. Allgemeines

Definition der Differentialgleichung

Gleichungen, die neben einer oder mehreren Variablen auch Funktionen dieser Variablen und deren Ableitungen enthalten, heißen Differentialgleichungen (abgekürzt Dgl.).
Gewöhnliche Dgl. sind Bestimmungsgleichungen für eine Funktion einer unabhängigen Variablen, die mindestens eine Ableitung der unbekannten Funktion nach dieser Variablen enthalten.

$$f(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(k)}) = 0$$

Partielle Dgl. sind Bestimmungsgleichungen für eine Funktion von mehreren unabhängigen Variablen, die mindestens eine Ableitung der unbekannten Funktion nach einer der unabhängigen Variablen enthalten.

Zum Beispiel für $z(x; y)$: $f(x; y; z; z_x; z_y; z_{xx}; z_{yy}; z_{xy}; \ldots) = 0$

Definition der Lösung einer Differentialgleichung

Unter der Lösung (dem Integral) einer Dgl. versteht man die Menge aller Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Dgl. identisch erfüllen. Die *allgemeine Lösung* einer Dgl. n-ter Ordnung ist die Menge aller Lösungsfunktionen, die genau n willkürliche Parameter (Konstanten) enthalten.
Eine *partikuläre Lösung* einer Dgl. erhält man, wenn durch zusätzliche *Anfangs-* oder *Randbedingungen* den Parametern spezielle Werte erteilt werden.
Eine Lösung der Dgl. heißt *singulär*, wenn sie nicht durch Wahl eines speziellen Parameters aus der allgemeinen Lösung gefunden wird.

Ordnung, Grad einer Differentialgleichung

Die Ordnung einer Dgl. wird durch die höchste auftretende Ableitung der gesuchten Funktion bestimmt (n-te Ableitung $\Rightarrow$ Dgl. n-ter Ordnung).

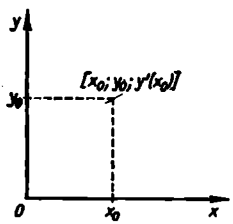
Der Grad einer Dgl. wird durch die höchste auftretende Potenz der gesuchten Funktion bzw. deren Ableitungen bestimmt.

Geometrische Deutung der Differentialgleichung

Die graphische Darstellung der allgemeinen Lösung einer Dgl. n-ter Ordnung stellt eine Kurvenschar mit n Parametern dar. Umgekehrt hat jede Kurvenschar ihre Dgl.

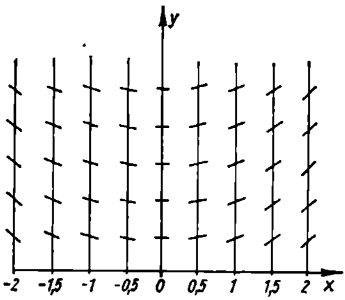
Die partikuläre Lösung entspricht einer bestimmten Kurve aus der Kurvenschar (*Lösungskurve, Integralkurve*).

Dgln. 1. Ordnung bestimmen für jeden Punkt $(x; y)$ des Definitionsbereichs der Funktion die Richtung $y' = \tan \alpha$ der durch diesen Punkt verlaufenden Kurve aus der Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Dgl. $f(x; y; y') = 0$ bzw. $y' = f(x; y)$. Durch die Wertetripel $(x; y; y')$ wird jeweils ein Linienelement aus der Kurvenschar der Lösungsmenge festgelegt; alle Linienelemente ergeben das *Richtungsfeld* im cartesischen Koordinatensystem. Zur Kurvenschar der Lösungsmenge der Dgl. gehören alle Kurven, deren Richtung in jedem Punkt mit dem Richtungsfeld übereinstimmt.



Die Verbindungslinien aller Punkte mit gleicher Richtung der Linienelemente heißen *Isoklinen* (y' = konst).

Aus der Kenntnis der Isoklinen kann man mit guter Näherung Lösungskurven der Dgl. ableiten und graphisch darstellen.



Beispiele:

1. $y' = f(x) = \frac{1}{2} x$

für

$y > 0$;

$x \in [-2; 2]$

Isoklinengleichung:

$y' = C \Rightarrow x = 2c$

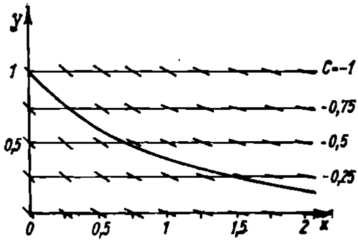
2. $y' = -y$

Isoklinengleichung:

$y' = C \Rightarrow y = -C$

Man erkennt die fallende Exponentialfunktion

$y = e^{-x}$



Dgl. 2. Ordnung bestimmen für jeden Punkt des Definitionsbereiches Richtung und Krümmung der Bogenelemente. Das Isoklinenverfahren ist anzuwenden, indem $y' = f(t) = z$ (t Parameter) gesetzt wird und die Dgl. 2. Ordnung in x in eine Dgl. 1. Ordnung in z umgewandelt wird.
Kurven, die jede Kurve einer Kurvenschar genau einmal schneiden, heißen *Trajektorien* dieser Kurvenschar.
Kurven, die eine gegebene Kurvenschar unter konstantem Winkel schneiden, heißen *isogonale Trajektorien.* Erfolgt der Schnitt unter dem Winkel von 90°, heißen sie *orthogonale Trajektorien.*
Anwendung: Bestimmung der *Potentialflächen* bzw. *Potentiallinien* aus gegebenem *Feldlinienverlauf.*

Für Dgl. 1. Ordnung gilt:

Gegebene Kurvenschar $\quad F(x; y; c) = 0 \qquad y = f(x; c)$

Dgl. der Kurvenschar durch Elimination von c aus $F(x; y; c)$ und

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \quad \text{bzw.} \quad y = f(x; c) \quad \text{und} \quad y' = g(x; y)$$

Richtung der Kurven $\quad y' = \dfrac{-F_x}{F_y} \qquad y' = g(x; y)$

Orthogonale Trajektorien $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x} y' = 0 \quad y' = -\dfrac{1}{g(x; y)}$

Isogonale Trajektorien (Schnittwinkel φ) $\quad y' = \dfrac{-F_x/F_y + \tan\varphi}{1 + F_y/F_x \tan\varphi}$

$$y' = \frac{g(x; y) + \tan\varphi}{1 - g(x; y)\tan\varphi}$$

Beispiel:

Gegebene Kurvenschar	$4x^2 + 5y + c = 0$
Dgl. der Kurvenschar	$8x + 5y' = 0$
Orthogonale Trajektorien	$5 - 8xy' = 0$

Isogonale Trajektorien (Schnittwinkel $\varphi = 30°$) $\quad y' = \dfrac{\dfrac{-4x}{5} + \tan 30°}{1 + \dfrac{5}{4x} \tan 30°}$

$$48x^2 - 20x\sqrt{3} - (60x + 25\sqrt{3})\, y' = 0$$

Aufstellen von Differentialgleichungen

Man differenziert die Gleichung der Kurvenschar so oft, bis alle Parameter eliminiert werden können.

Beispiel:

Es ist die Dgl. aller Parabeln, die nach rechts geöffnet sind, zu bestimmen.

Lösung:

Ansatz der Gleichung für die Kurvenschar unter Verwendung der Parameter c; d und p:

$$(y - d)^2 = 2p(x - c)$$
$$2(y - d)\, y' = 2p$$
$$(y - d)\, y'' + y'^2 = 0$$
$$y'y'' + (y - d)\, y''' + 2y'y'' = 0$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt die Dgl. aller Parabeln

$$y'''y'^2 - 3y'y''^2 = 0$$

8.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

8.2.1. Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \Rightarrow \psi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

$$\int \psi(y)\,\mathrm{d}y = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Beispiele:

1. $xe^{x+y} = yy'$ oder $xe^{x+y}\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y$

$$xe^x\,\mathrm{d}x = ye^{-y}\,\mathrm{d}y$$
$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \int ye^{-y}\,\mathrm{d}y$$
$$xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = -ye^{-y} + \int e^{-y}\,\mathrm{d}y \quad \text{(partielle Integration)}$$
$$e^x(x - 1) = -e^{-y}(1 + y) + C$$

2. $$y'(2x-7) + y(2x^2 - 3x - 14) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2x-7) = -y(2x^2 - 3x - 14)$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2x^2 - 3x - 14}{2x-7}\,dx = -(x+2)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int (x+2)\,dx$$

$$\ln y = -\frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2} - 2x + C} = e^C \cdot e^{-\frac{x^2}{2} - 2x} = C_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2} - 2x}$$

8.2.2. Gleichgradige Differentialgleichung 1. Ordnung

(Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, homogene Differentialgleichung)

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\varphi(x;y)}{\psi(x;y)} \Rightarrow \varphi(x;y)\,dx - \psi(x;y)\,dy = 0,$$

wobei $\varphi(x;y)$ und $\psi(x;y)$ Terme mit Summanden von gleichem Grad hinsichtlich der Veränderlichen x und y sind.

Lösung: Die Substitution $\frac{y}{x} = z$ führt auf eine Dgl., auf die die Methode der Trennung der Variablen anwendbar ist.

Beispiel:

$$(3x - 2y)\,dx - x\,dy = 0$$

Substitution $\frac{y}{x} = z;\ y = zx;\quad y' = xz' + z;$

$$dy = x\,dz + z\,dx$$

eingesetzt:

$$(3x - 2zx)\,dx - x(x\,dz + z\,dx) = 0$$

$$\frac{3}{x}\,dx = \frac{dz}{1-z} \quad \text{(Trennung der Variablen)}$$

$$3\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{1-z}$$

$$3\ln|x| = -\ln|1-z| + C$$

$$\ln|x^3| = -\ln\left|1 - \frac{y}{x}\right| + C$$

$$\ln\left|x^3\,\frac{x-y}{x}\right| = C; \quad \ln|x^3 - x^2y| = C$$

$$x^3 - x^2y = e^C = C_1$$

Für $y' = \varphi(ax + by + c)$ führt die Substitution $z = ax + by + c$ zur Trennung der Variablen.

8.2.3. Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'\varphi(x) + y\psi(x) + \omega(x) = 0$$

Normalform $y' + yP(x) + Q(x) = 0$

Homogene lineare Differentialgleichung für $Q(x) = 0$

$$y' + yP(x) = 0$$

Lösung durch Trennung der Variablen: $y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$. Ist eine partikuläre Lösung bekannt, erhält man die allgemeine Lösung durch Multiplikation mit einer Konstanten.

Inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' + yP(x) + Q(x) = 0$$

Lösungsweg 1:

Integration durch Substitution

Substitution $P(x) = \dfrac{u'}{u}$ ergibt $u = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = u(x)$

Eingesetzt:

$$y' + \frac{u'}{u}y + Q(x) = 0$$

$$y'u + u'y = -Q(x)\,u \quad \text{integriert}$$

Lösungsformel

$$y = -\frac{1}{u(x)}\int u(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad u(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

Beispiel:

$$(4 + x)\,y' + y = 6 + 2x$$

$$y' + y\frac{1}{4 + x} = \frac{6 + 2x}{4 + x}$$

Substitution $\dfrac{1}{4 + x} = \dfrac{u'}{u} \Rightarrow \ln|u| = \ln|4 + x|$

$$u = 4 + x$$

$$y' + \frac{u'}{u}y = \frac{6 + 2x}{4 + x}$$

$$y'u + u'y = 6 + 2x \quad \text{integriert}$$

$$uy = 6x + x^2 + C$$

$$y = \frac{6x + x^2 + C}{4 + x}$$

Lösungsweg 2:

Integration durch Variation der Konstanten
Gelöst wird zunächst die homogene Differentialgleichung (allgemeine Lösung).
Zur Bestimmung einer partikulären Lösung ersetzt man die Konstante C durch den Term $z(x)$.

$$y = z(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y' = z'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + z\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(-P(x)\right)$$

Aus der Ausgangsgleichung und der Gleichung für y' ergibt sich z und schließlich y.

Beispiel:

$$(4 + x)\,y' + y = 6 + 2x$$

Homogene Dgl. $(4 + x)\,y' + y = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{4 + x} \text{ integriert}$$

$$\ln|y| = -\ln|4 + x| \cdot \ln C$$

$$y = \frac{C}{4 + x}$$

Variation der Konstanten ergibt

$$y = z(x)\frac{1}{4 + x}; \quad y' = z'\frac{1}{4 + x} - z\frac{1}{(4 + x)^2} \text{ eingesetzt}$$

$$(4 + x)\left[z'\frac{1}{4 + x} - z\frac{1}{(4 + x)^2}\right] + z\frac{1}{4 + x} = 6 + 2x$$

$$z' = 6 + 2x$$

$$z = 6x + 2\frac{x^2}{2} + C_1 = 6x + x^2 + C_1$$

$$y = \frac{6x + x^2 + C_1}{4 + x}$$

Lösungsweg 3:

Integration bei bekannter partikulärer Lösung y_{p}
Man ermittelt die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. y_{h}.
Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. ist dann $y = y_{\mathrm{p}} + y_{\mathrm{h}}$.
Sind 2 partikuläre Lösungen bekannt, ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. $y = y_{\mathrm{p}_1} + C(y_{\mathrm{p}_2} - y_{\mathrm{p}_1})$.

8.2.4. Totale (exakte) Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\varphi(x; y)\,dx + \psi(x; y)\,dy = 0$$

mit der Bedingung, daß die linke Seite ein *vollständiges Differential* darstellt:

$$\frac{\partial\varphi(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial\psi(x; y)}{\partial x} \quad (\textit{Integrabilitätsbedingung})$$

Unmittelbare Integration führt zur Lösung

$$\int \varphi(x; y)\,dx + \int \left[\psi(x; y) - \int \frac{\partial\varphi(x; y)}{\partial y}\,dx\right] dy = C \qquad \text{(I)}$$

oder

$$\int \psi(x; y)\,dy + \int \left[\varphi(x; y) - \int \frac{\partial\psi(x; y)}{\partial x}\,dy\right] dx = C \qquad \text{(II)}$$

Beispiel:

$$(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)\,dx + (4bxy + 3x + 5)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)}{\partial y} = 4by + 3$$

$$\frac{\partial(4bxy + 3x + 5)}{\partial x} = 4by + 3$$

Die linke Seite der Gleichung stellt also ein vollständiges Differential dar.

Anwendung der Lösungsformel (I)

$$\int (3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)\,dx + \\ + \int \left[4bxy + 3x + 5 - \int (4by + 3)\,dx\right] dy = C$$

$$x^3 + 4ax^2 + 2bxy^2 + 3xy + \\ + \int \left[4bxy + 3x + 5 - (4bxy + 3x + C_1)\right] dy = C$$

$$x^3 + 4ax^2 + 2bxy^2 + 3xy + (5 + C_1)\,y = C_2$$

8.2.5. Integrierender Faktor

Ein Term $\mu(x; y)$ heißt *integrierender Faktor* der Dgl. $\varphi(x; y)\,dx + \psi(x; y)\,dy = 0$, wenn die linke Seite der Gleichung durch Multiplikation mit $\mu(x; y)$ zu einem vollständigen Differential wird:

$$\frac{\partial[\mu(x; y)\,\varphi(x; y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x; y)\,\psi(x; y)]}{\partial x}$$

Meist kann man sich die Lösung vereinfachen, indem man $\mu(x;\,y)$ als nur von x oder y abhängig annimmt bzw. besondere Verknüpfungen beider, wie $x^2 + y^2$, $\frac{x}{y}$ usw., ansetzt.

Besondere integrierende Faktoren

Der integrierende Faktor enthält nur x:

$$\mu = e^{-\int \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x}$$

Der integrierende Faktor enthält nur y:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}y}$$

Der integrierende Faktor enthält nur xy:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x\varphi - y\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}z}; \quad z = xy$$

Der integrierende Faktor enthält nur $\frac{y}{x}$:

$$\mu = e^{\int \frac{x^2}{x\varphi + y\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}z}; \quad z = \frac{y}{x}$$

Der integrierende Faktor enthält nur $x^2 + y^2$:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{2(y\varphi - x\psi)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}z}; \quad z = x^2 + y^2$$

Anmerkung: Der Kürze halber steht in diesen Formeln φ an Stelle von $\varphi(x;\,y)$ und ψ an Stelle von $\psi(x;\,y)$.

Beispiel:

$$(3x - 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

Kontrolle der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial(3x - 2y)}{\partial y} = -2; \quad \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$$

Integrabilitätsbedingung ist nicht erfüllt.
Annahme: Der integrierende Faktor enthalte nur x.

$$\mu = e^{-\int \frac{1}{-x}(-1+2)\mathrm{d}x} = e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{\ln x} = x$$

Multiplikation der Ausgangsgleichung mit $\mu = x$ ergibt

$$(3x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{(totale Dgl.)}$$

Lösung: $x^3 - x^2y = C$

8.2.6. Bernoullische Differentialgleichung

$$y' + \varphi(x)y = \psi(x)y^n \qquad (n \neq 1)$$

Substitution:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}; \; y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} \cdot z'$$

$$z' + (1-n)\,\varphi(x)\,z = (1-n)\,\psi(x)$$

Beispiel:

$$y' + \frac{y}{x} - x^2y^3 = 0$$

Substitution: $y = z^{\frac{1}{1-3}} = z^{-\frac{1}{2}}; \; y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z'$

$$-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' + \frac{1}{x} z^{-\frac{1}{2}} = x^2 z^{-\frac{3}{2}}$$

$$z'x - 2z = -2x^3$$

Diese Differentialgleichung ergibt durch Variation der Konstanten als Lösung $z = x^2(C - 2x)$.

$$x^2y^2(C - 2x) - 1 = 0$$

8.2.7. Clairautsche Differentialgleichung

$$y = xy' + \varphi(y')$$

Differentiation nach x ergibt

$$0 = y''[x + \varphi'(y')]$$

Diese Gleichung wird befriedigt entweder durch $y'' = 0$ mit der Lösung $y = C_1x + C_2$ (allgemeines Integral) oder durch $x + \varphi'(y') = 0$. Eliminiert man y' aus der letzten sowie aus der ursprünglichen Gleichung, so erhält man $y = g(x)$ (singuläre Lösung).

Das allgemeine Integral stellt, geometrisch gedeutet, eine *Schar von Geraden* dar, während die singuläre Lösung die *Einhüllende dieser Geradenschar* ist.

Beispiel:

$$y = xy' - 2y'^2 + y'$$

$$0 = xy'' - 4y'y'' + y'' = y''(x - 4y' + 1)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow y = C_1x + C_2 \quad \text{(allgemeines Integral)}$$

$$x - 4y' + 1 = 0; \quad y' = \frac{x+1}{4}$$

Lösung:

$$y = x\frac{x+1}{4} - 2\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{x+1}{4} = \frac{x^2+2x+1}{8}$$

8.2.8. Riccatische Differentialgleichung

$$y' = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \omega(x)$$

Eine Lösung ist nur möglich, wenn ein *partikuläres Integral* y_1 gefunden werden kann.

Substitution: $y - y_1 = \frac{1}{z}$

Beispiel:

$$x^2y' + xy - x^2y^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

$$y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} \tag{2}$$

Auf Grund der Gleichungsform kann man zur Bestimmung eines partikulären Integrals mit dem Ansatz $y = \frac{A}{x}$ probieren:

$$y = \frac{A}{x};\quad y' = -\frac{A}{x^2}$$

$$-A + A - A^2 + 1 = 0$$

$$A^2 = 1;\quad A_1 = 1,\ A_2 = -1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{x}$$

Substitution: $y - \frac{1}{x} = \frac{1}{z}$; $y' = -\frac{1}{z^2}z' - \frac{1}{x^2}$

$$-\frac{1}{z^2}z' - \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}$$

$$z' + \frac{z}{x} + 1 = 0$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten wird

$$z = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{C_1 - x^2}$$

8.3. Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

8.3.1. Sonderfälle

Differentialgleichung ohne y und y'

$$y'' = \varphi(x)$$

$$y = \int \left[\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

Beispiel:

$$y'' = 4x^2 + 5x$$

$$y' = \int (4x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x = \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C_1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{3} + \frac{5x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Differentialgleichung ohne x und y'

$$y'' = \varphi(y)$$

Substitution: $y' = p \Rightarrow y'' = p' = \varphi(y)$

$$p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p = \varphi(y)$$

Lösung durch Trennung der Variablen ergibt eine Gleichung für y', deren Integration zu y führt.

Beispiel:

$$y'' = \frac{y}{a^2}; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p = \frac{y}{a^2}; \quad p = y'$$

$$p\,\mathrm{d}p = \frac{y}{a^2}\,\mathrm{d}y; \qquad \int p\,\mathrm{d}p = \frac{1}{a^2} \int y\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2a^2} + C_1; \qquad p = y' = \sqrt{\frac{y^2 + 2C_1 a^2}{a^2}}$$

$$\frac{a\,\mathrm{d}y}{\sqrt{C_2 + y^2}} = \mathrm{d}x; \qquad a \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_2 + y^2}} = x$$

$$x = a \operatorname{arsinh} \frac{y}{\sqrt{C_2}} + C_3; \qquad y = \sqrt{C_2} \sinh \frac{x - C_3}{a}$$

Differentialgleichung ohne x und y

$$y'' = \varphi(y')$$

Substitution: $y' = p$

Beispiel:

$$y'' = 2y'^2; \quad y' = p; \quad y'' = p'$$

$$p' = 2p^2$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int 2dx$$

$$-\frac{1}{p} = 2x + C_1; \quad p = -\frac{1}{2x + C_1} = y'$$

$$\int dy = -\int \frac{dx}{2x + C_1}$$

$$y = -\frac{1}{2}\ln|2x + C_1| + C_2 = \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2x + C_1}}\right| + \ln C_3$$

$$y = \ln\left|\frac{C_3}{\sqrt{2x + C_1}}\right|$$

Differentialgleichung ohne y

$$y'' = \varphi(x; y')$$

Substitution: $y' = p$

Beispiel:

$$xy'' + y' - 1 = 0$$

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{1}{x}$$

$$p' = -\frac{p}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{dp}{1 - p} = \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|p - 1| = \ln|x| + \ln|C_1| = \ln|C_1 x|$$

$$\frac{1}{p - 1} = C_1 x$$

$$p = \frac{1}{C_1 x} + 1 = y'$$

$$\int dy = \int \frac{dx}{C_1 x} + \int dx$$

$$y = \frac{1}{C_1}\ln|x| + x + C_2 = x + C_3 \ln|x| + C_2$$

Differentialgleichung ohne x

$$y'' = \varphi(y; y')$$

Substitution: $y' = p$

Beispiel 1:

$$y'' = y'^2 y + 3y; \quad y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dy} p$$

$$p \frac{dp}{dy} = p^2 y + 3y$$

$$\frac{dp}{dy} - py = \frac{3y}{p}$$ BERNOULLIsche Gleichung, Lösungsweg siehe S. 370

Beispiel 2:

$$y'' = y'^2 \frac{1}{y}; \quad y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dy} p$$

$$p \frac{dp}{dy} = p^2 \frac{1}{y}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln |p| = \ln |y| + \ln |C_1| = \ln |C_1 y|$$

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1 y$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 \, dx$$

$$\ln |y| = C_1 x + C_3 \Rightarrow y = e^{C_1 x + C_3} = C_3 e^{C_1 x}$$

Differentialgleichung ohne y'

$y'' = \varphi(x; y)$ siehe die folgenden Abschnitte

8.3.2. Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

Ansatz $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}$ und $y'' = r^2 e^{rx}$

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r_{1;2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Fall 1: $r_1 \neq r_2; \quad r_1, r_2 \in R$

Lösung der Differentialgleichung

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Fall 2: $r_1 = r_2 = r; \quad r \in R$

Lösung der Differentialgleichung

$$y = e^{rx}(C_1 x + C_2)$$

Fall 3: $r_{1;2} = \alpha + j\beta$

Lösung der Differentialgleichung

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = R e^{\alpha x} \sin (\beta x + \varphi)$$

Beispiel 1:

$$2y'' - 8y' + 6y = 0$$

$$2r^2 - 8r + 6 = 0$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad \text{mit} \quad r_1 = 3; \quad r_2 = 1 \qquad \textbf{(Fall 1)}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$$

Beispiel 2:

$$3y'' + 18y' + 27y = 0$$

$$3r^2 + 18r + 27 = 0; \quad r_{1;2} = -3 \qquad \textbf{(Fall 2)}$$

$$y = e^{-3x}(C_1 x + C_2)$$

Beispiel 3:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0; \quad r_{1;2} = -1 \pm 2j \qquad \textbf{(Fall 3)}$$

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

8.3.3. Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

$$\boldsymbol{y''\varphi(x) + y'\psi(x) + y\omega(x) = 0}$$

Zu ihrer Lösung muß ein *partikuläres Integral* y_1 gefunden werden.

Lösungsansatz:

$$y = y_1 z$$

Es entsteht mit einer weiteren Substitution $z' = u$ eine Differentialgleichung 1. Ordnung (*Erniedrigung der Ordnung*).

Beispiel:

$$x^2(\ln|x| - 1)\,y'' - xy' + y = 0$$

$$y_1 = x$$

$$y = y_1 z = xz$$

$$y' = xz' + z$$

$$y'' = xz'' + 2z'$$

$$x^3(\ln|x| - 1)\,z'' + x^2(2\ln|x| - 3)\,z' = 0; \quad z' = u; \quad z'' = u'$$

$$xu'(\ln|x| - 1) = u(3 - 2\ln|x|)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{3 - 2\ln|x|}{x(\ln|x| - 1)}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $\ln|x| = v; \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}v$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u} = 3\int\frac{\mathrm{d}v}{v-1} - 2\int\frac{v\,\mathrm{d}v}{v-1}$$

$$\ln|u| = 3\ln|v-1| - 2\int\left(1 + \frac{1}{v-1}\right)\mathrm{d}v$$

$$\ln|u| = 3\ln|v-1| - 2v - 2\ln|v-1| + \ln|C_1|$$

$$u = C_1\,\frac{\ln|x| - 1}{x^2}$$

$$\mathrm{d}z = C_1\,\frac{\ln|x| - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$z = C_2 - \frac{C_1}{x}\ln|x|$$

$$y = C_2 x - C_1\ln|x|$$

8.8.4. Eulersche Differentialgleichung

Eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung ohne Störfunktion (Homogene Eulersche Differentialgleichung)

$$\boldsymbol{ax^2y'' + bxy' + cy = 0}$$

Lösungsansatz:

$$y = x^r; \quad y' = rx^{r-1}; \quad y'' = r(r-1)\,x^{r-2}$$

$$ax^2r(r-1)\,x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0$$

$$x^r[ar(r-1) + br + c] = 0$$

$x^r = 0$ ergibt die triviale Lösung $y = 0$.

Charakteristische Gleichung für r

$$ar(r-1) + br + c = 0$$

$$r_{1;2} = \frac{a-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Fall 1: $r_1 \neq r_2$; $r_1, r_2 \in R$

Lösung der Dgl. $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$

Fall 2: $r_1 = r_2 = r$; $r \in R$

Lösung der Dgl. $y = x^r(C_1 \ln|x| + C_2)$

Fall 3: $r_{1;2} = a_1 \pm b_1 \mathrm{j}$

Lösung der Dgl. $y = x^{a_1}[C_1 \cos(b_1 \ln|x|) + C_2 \sin(b_1 \ln|x|)]$

Beispiel 1:

$$3x^2y'' + 15xy' - 36y = 0$$

$$x^2y'' + 5xy' - 12y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$r^2 + (5-1)\,r - 12 = 0 \text{ mit } r_1 = 2,\ r_2 = -6 \qquad \text{(Fall 1)}$$

Lösung der Dgl. $y = C_1x^2 + C_2x^{-6} = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^6}$

Beispiel 2:

$$4x^2y'' - 16xy' + 25y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$4r^2 + (-16-4)\,r + 25 = 0$$

$$4r^2 - 20r + 25 = 0 \quad \text{mit} \quad r_1 = r_2 = \frac{5}{2} \qquad \text{(Fall 2)}$$

Lösung der Dgl.

$$y = x^{\frac{5}{2}}(C_1 \ln|x| + C_2) = \sqrt{x^5}\,(C_1 \ln|x| + C_2) =$$
$$= x^2\sqrt{x}\,(C_1 \ln|x| + C_2)$$

Beispiel 3:

$$x^2y'' - 7xy' + 20y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$r^2 + (-7-1)\,r + 20 = 0$$

$$r^2 - 8r + 20 = 0 \quad \text{mit} \quad r_{1;2} = 4 \pm 2\mathrm{j} \qquad \text{(Fall 3)}$$

Lösung der Dgl. $y = x^4[C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|)]$

Eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung mit Störfunktion (Vollständige Eulersche Differentialgleichung)

$$ax^2y'' + bxy' + cy = \varphi(x)$$

Man löst zuerst die homogene EULERsche Dgl.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Lösung siehe vorstehenden Abschnitt.

Durch Wahl eines geeigneten Ansatzes, der durch den Grad und die Form des Störgliedes $\varphi(x)$ verlangt wird, läßt sich oft ein partikuläres Integral der vollständigen Dgl. zusätzlich bestimmen. Die Lösung der Dgl. ist dann die Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung und dem partikulären Integral.

Ansätze zur Bestimmung eines partikulären Integrals

a) Das Störglied $\varphi(x)$ ist ein ganzrationaler Term n-ten Grades.
Ansatz: $y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots + K$

b) Das Störglied ist ein Term mit e^{nx}.
Ansatz: $y = Ae^{nx}$, wobei e^{nx} der im Störglied auftretende Term ist.

c) Das Störglied ist ein Term von $\sin mx$ oder $\cos mx$ oder einer Linearkombination beider.
Ansatz: $y = A \sin mx + B \cos mx$

d) Das Störglied ist ein Term von $\sinh mx$ oder $\cosh mx$ oder einer Linearkombination beider.
Ansatz: $y = A \sinh mx + B \cosh mx$

e) Das Störglied ist eine algebraische Summe der oben einzeln angeführten Terme.
Ansatz: Der Ansatz ist dann ebenfalls eine algebraische Summe der Einzelansätze.

Beispiel:

$$x^2y'' - 2xy' - 10y = 2x^2 - 3x + 10$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 2xy' - 10y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$r^2 + (-2 - 1)\,r - 10 = 0$$

$$r^2 - 3r - 10 = 0 \quad \text{ergibt} \quad r_1 = 5; \quad r_2 = -2$$

Damit wird für die homogene Differentialgleichung

$$y = C_1x^5 + C_2x^{-2}$$

Bestimmung eines partikulären Integrals:
Ansatz

$$y = Ax^2 + Bx + C$$
$$y' = 2Ax + B$$
$$y'' = 2A$$

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$x^2 \cdot 2A - 2x(2Ax + B) - 10(Ax^2 + Bx + C) =$$
$$= 2x^2 - 3x + 10$$

Durch *Koeffizientenvergleich* folgt

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -1$$

Partikuläres Integral $y_1 = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

Damit Lösung der vollständigen Dgl.:

$$y = C_1x^5 + C_2x^{-2} + y_1 = C_1x^5 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$$

8.3.5. Lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = s(x) \quad s(x) \not\equiv 0 \quad \text{(Störfunktion)}$$

Man löst zuerst die homogene Gleichung für $s(x) = 0$, wie in den entsprechenden Abschnitten für homogene Differentialgleichungen angegeben.
Danach sucht man eine partikuläre Lösung, indem man auf die inhomogene Dgl. (mit Störfunktion) die Methode der Variation der Konstanten anwendet. In einzelnen Fällen kann man kürzer durch einen der folgenden Ansätze zum Ziel kommen:

$$y = Ae^{nx}$$

oder

$$y = A \sin mx + B \cos nx$$

oder

$$y = A \sinh mx + B \cosh nx$$

oder

$$y = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$$

oder eine algebraische Summe der angeführten Funktionen.

Die Wahl des Lösungsansatzes erfolgt auf Grund der in der Dgl. enthaltenen Terme.
Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich dann aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und dem partikulären Integral zusammen.
Ist die Störfunktion oder ein Glied von ihr zugleich Lösung der homogenen Differentialgleichung (*Resonanzfall*), so führt die Variation der Konstanten zum Ziel; allerdings erfordert dieser Weg oft erheblichen Rechenaufwand.
Zur Lösung von inhomogenen Dgl. 2. Ordnung kann nebenstehender Programmablaufplan dienen.

Beispiel 1:

$$y'' - 2y' - 8y = 3\sin x + 4$$

Lösung der homogenen Dgl.

$$y'' - 2y' - 8y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$r^2 - 2r - 8 = 0 \quad \text{mit} \quad r_1 = 4; \quad r_2 = -2$$

Lösung der homogenen Dgl. somit:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$$

Ansatz zur Bestimmung eines partikulären Integrals:

$$\begin{aligned} y &= A\sin x + B\cos x + C \\ y' &= A\cos x - B\sin x \\ y'' &= -A\sin x - B\cos x \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung

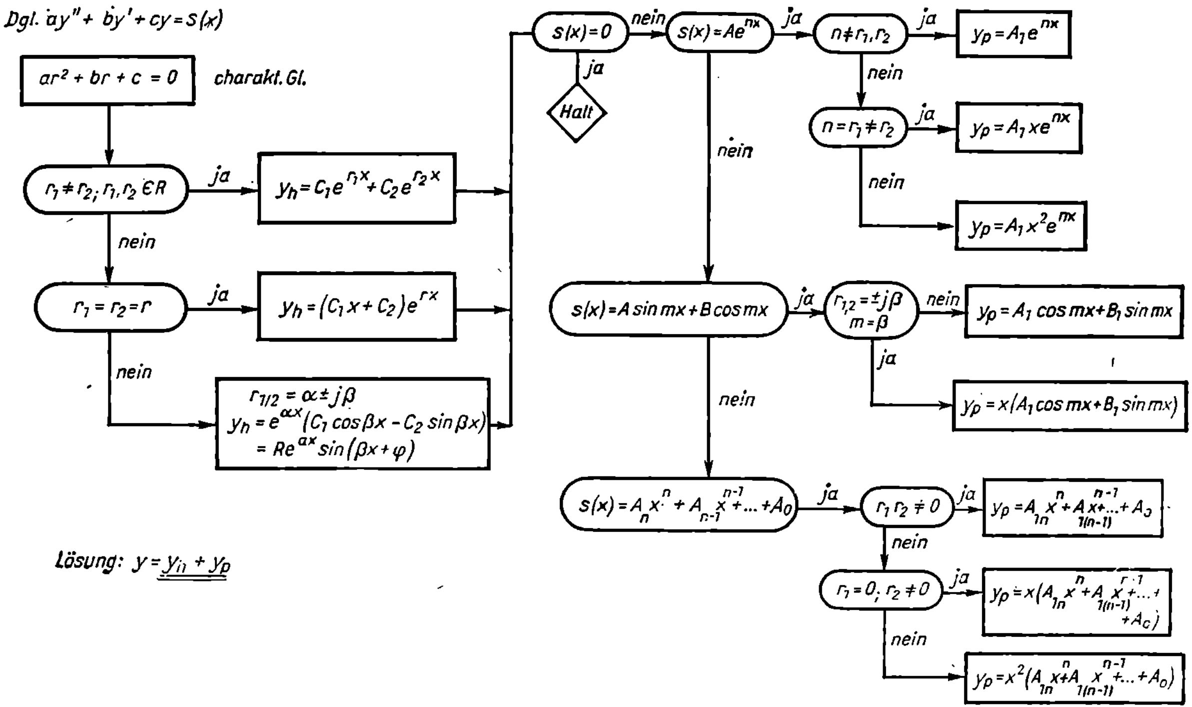
$$\begin{aligned} -A\sin x - B\cos x - 2A\cos x + 2B\sin x - \\ - 8A\sin x - 8B\cos x - 8C = 3\sin x + 4 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$A = -\frac{27}{85}; \quad B = \frac{6}{85}; \quad C = -\frac{1}{2}$$

Folglich Lösung der Dgl.

$$y = C_1 e^{4x} + \frac{C_2}{e^{2x}} - \frac{27}{85}\sin x + \frac{6}{85}\cos x - \frac{1}{2}$$



Dgl. ay'' + by' + cy = s(x)
ar² + br + c = 0
charakt. Gl.
r₁ ≠ r₂; r₁, r₂ ∈ R
ja
y_h = C₁e^(r₁x) + C₂e^(r₂x)
nein
r₁ = r₂ = r
ja
y_h = (C₁x + C₂)e^(rx)
nein
r_1/2 = α ± jβ
y_h = e^(αx)(C₁ cos βx − C₂ sin βx)
= Re^(αx) sin(βx + φ)
s(x) = 0
ja
Halt
nein
s(x) = Ae^(nx)
ja
n ≠ r₁, r₂
ja
y_p = A₁e^(nx)
nein
n = r₁ ≠ r₂
ja
y_p = A₁xe^(nx)
nein
y_p = A₁x²e^(nx)
nein
s(x) = A sin mx + B cos mx
ja
r₁,₂ = ±jβ
m = β
nein
y_p = A₁ cos mx + B₁ sin mx
ja
y_p = x(A₁ cos mx + B₁ sin mx)
nein
s(x) = A_n x^n + A_(n−1) x^(n−1) + ... + A₀
ja
r₁r₂ ≠ 0
ja
y_p = A_1n x^n + A_1(n−1) x^(n−1) + ... + A₀
nein
r₁ = 0; r₂ ≠ 0
ja
y_p = x(A_1n x^n + A_1(n−1) x^(n−1) + ... + A₀)
nein
y_p = x²(A_1n x^n + A_1(n−1) x^(n−1) + ... + A₀)
Lösung: y = y_h + y_p

Beispiel 2 (Resonanzfall):

$$y'' + y' - 2y = \cosh x$$

Charakteristische Gleichung der homogenen Dgl.

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \text{mit} \quad r_1 = 1; \quad r_2 = -2$$

Lösung der homogenen Dgl.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Für $\cosh x$ kann man setzen $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Mit $C_1 = \frac{1}{2}$ und $C_2 = 0$ wird aber die Lösung der homogenen Gleichung zu einem Glied der Störfunktion, also Resonanzfall. Weitere Behandlung durch Variation der Konstanten:

$$y = z_1 e^x + z_2 e^{-2x}$$

$$y' = z_1' e^x + z_1 e^x + z_2' e^{-2x} - 2z_2 e^{-2x}$$

Zusatzbedingung: $z_1' e^x + z_2' e^{-2x} = 0$

$$y'' = z_1' e^x + z_1 e^x - 2z_2' e^{-2x} + 4z_2 e^{-2x}$$

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung:

$$z_1' e^x + z_1 e^x - 2z_2' e^{-2x} + 4z_2 e^{-2x} + z_1 e^x - 2z_2 e^{-2x} -$$
$$-2z_1 e^x - 2z_2 e^{-2x} = \cosh x$$

Daraus

$$z_1' e^x - 2z_2' e^{-2x} = \cosh x$$ (Die Glieder mit z_1 und z_2 fallen stets weg.)

In Verbindung mit dem oben gemachten Ansatz ergibt sich ein Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten z'_1 und z'_2:

$$\begin{aligned} z_1' e^x - 2z_2' e^{-2x} &= \cosh x \\ z_1' e^x + z_2' e^{-2x} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus $z_1' = \dfrac{\cosh x}{3e^x}$ und $z_2' = -\dfrac{\cosh x}{3e^{-2x}}$

$$z_1' = \frac{e^x + e^{-x}}{6e^x}$$

Trennung der Variablen

$$dz_1 = \frac{1}{6}(1 + e^{-2x})\, dx$$

$$z_1 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}e^{-2x} + K_1$$

$$z_2 = -\frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{6}e^x + K_2$$

Lösung der Differentialgleichung

$$y = \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{12}e^{-2x} + K_1\right)e^x - \left(\frac{1}{18}e^{3x} + \frac{1}{6}e^x - K_2\right)e^{-2x}$$

$$y = e^x\left(K_3 + \frac{x}{6}\right) - \frac{1}{4}e^{-x} + K_2 e^{-2x}$$

8.3.6. Lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

$$y''\varphi_1(x) + y'\varphi_2(x) + y\varphi_3(x) = \varphi_4(x) \qquad \varphi_1(x) \not\equiv 0$$

$$\varphi_4(x) \not\equiv 0$$

oder nach Division durch $\varphi_1(x)$

$$y'' + y'\varphi(x) + y\psi(x) = \omega(x) \quad \text{mit} \quad \omega(x) \not\equiv 0 \quad \text{(Normalform)}$$

Lösungsweg:

Es sei $y_1 = y_1(x)$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Gleichung $y'' + y'\varphi(x) + y\psi(x) = 0$. Setzt man $z = z(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$, so geht diese Gleichung in die lineare homogene

Dgl. erster Ordnung

$$z' + \left(\varphi + \frac{2y_1'}{y_1}\right)z = 0, \quad \varphi = \varphi(x)$$

über, die man nach der Methode der Trennung der Variablen integrieren kann. Ist z ein partikuläres Integral, so ist $y_2 = y_2(x) = y_1 \int z\, dx$ ein zweites, von y_1 linear unabhängiges partikuläres Integral von

$$y'' + y'\varphi + y\psi = 0, \quad \psi = \psi(x)$$

Also ist $y = C_1y_1 + C_2y_2$ das allgemeine Integral der homogenen Dgl.

Das allgemeine Integral der inhomogenen Dgl.

$$y'' + y'\varphi + y\psi = \omega(x)$$

findet man dann durch Variation der Integrationskonstanten.

Beispiel:

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)\,y = x^4$$

Division durch x^2 führt zur Normalform

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{x^2+2}{x^2}\,y = x^2$$

Man löst zunächst die homogene Dgl.

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{x^2+2}{x^2}\,y = 0,$$

die das partikuläre Integral $y_1 = x \sin x$ hat.

Setzt man $z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x \sin x}\right)$, so folgt $y = x \sin x \int z\,\mathrm{d}x$

und

$$y' = (\sin x + x \cos x) \int z\,\mathrm{d}x + xz \sin x$$

$$y'' = (2 \cos x - x \sin x) \int z\,\mathrm{d}z + 2z\,(\sin x + x \cos x) + xz' \sin x$$

Durch Einsetzen in die Dgl. ergibt sich

$$(2 \cos x - x \sin x) \int z\,\mathrm{d}x + 2z\,(\sin x + x \cos x) + xz' \sin x - \left(\frac{2}{x}\sin x + 2\cos x\right)\int z\,\mathrm{d}x - 2z \sin x + x \sin x \int z\,\mathrm{d}x + \frac{2}{x} \sin x \int z\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{oder} \quad xz' \sin x + 2xz \cos x = 0;$$

$$\frac{z'}{z} = -\frac{2 \cos x}{\sin x}; \quad \ln|z| = -2 \ln|\sin x|$$

Demnach ist $z = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Für das zweite von y_1 linear unabhängige Integral folgt hieraus

$$y_2 = x \sin x \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -x \sin x \cot x = -x \cos x$$

Das gesuchte allgemeine Integral der homogenen Dgl. ist also

$$y = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Das allgemeine Integral der inhomogenen Differentialgleichung findet man nun durch Variation der Konstanten.
Ersetzt man C_1 und C_2 durch die Funktionen $z_1 = z_1(x)$ und $z_2 = z_2(x)$, so wird $y = z_1 y_1 + z_2 y_2$.
Wenn man diese in die inhomogene Dgl. einsetzt, muß den Funktionen z_1 und z_2, um sie bestimmen zu können, noch eine weitere Bedingung auferlegt werden:

Zusatzbedingung: $z_1' y_1 + z_2' y_2 = 0$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} y' &= z_1 y_1' + z_2 y_2' \\ y'' &= z_1' y_1' + z_2' y_2' + z_1 y_1'' + z_2 y_2'' \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Normalform ergibt sich

$$z_1' y_1' + z_2' y_2' + z_1 y_1'' + z_2 y_2'' - \frac{2}{x} z_1 y_1' - \frac{2}{x} z_2 y_2' + z_1 y_1 + \\ + z_2 y_2 + \frac{2}{x^2} z_1 y_1 + \frac{2}{x^2} z_2 y_2 = x^2$$

$$z_1' y_1' + z_2' y_2' + z_1 \left(y_1'' - \frac{2}{x} y_1' + y_1 + \frac{2}{x^2} y_1 \right) + \\ + z_2 \left(y_2'' - \frac{2}{x} y_2' + y_2 + \frac{2}{x^2} y_2 \right) = x^2$$

Da y_1 und y_2 partikuläre Integrale der homogenen Differentialgleichung sind, sind die Klammerausdrücke gleich Null.
Zusammen mit der Zusatzbedingung gilt demnach folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} z_1' y_1' + z_2' y_2' &= x^2 \\ z_1' y_1 + z_2' y_2 &= 0 \end{aligned} \right|$$

Seine Determinante ist $\Delta = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = y_1' y_2 - y_2' y_1 =$

$$= (\sin x + x \cos x)(-x \cos x) -$$

$$- (-\cos x + x \sin x)\, x \sin x = -x^2 \not\equiv 0$$

Obiges Gleichungssystem liefert

$$z_1' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & y_2' \\ 0 & y^2 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{und} \quad z_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1' & x^2 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Integration ergibt $z_1 = \int \frac{x^2 y_2 \, dx}{\Delta}$ und $z_2 = -\int \frac{x^2 y_1 \, dx}{\Delta}$.

$$z_1 = \int \frac{x^2 (-x \cos x)}{-x^2} \, dx = \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + C_3$$

$$z_2 = -\int \frac{x^2 \cdot x \sin x}{-x^2} \, dx = \int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C_4$$

Allgemeines Integral der inhomogenen Dgl.

$$\begin{aligned} y &= (\cos x + x \sin x + C_3)\, x \sin x + \\ &\quad + (\sin x - x \cos x + C_4)(-x \cos x) = \\ &= x^2 + C_3\, x \sin x - C_4\, x \cos x \end{aligned}$$

8.3.7. Besselsche Differentialgleichung

Es handelt sich um die homogene lineare Dgl. mit variablen Koeffizienten

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2)\, y = 0 \qquad p \text{ Index der Dgl.}$$

Die Lösungen heißen BESSEL*sche Funktionen*, die sich nur für $p = \frac{2n+1}{2}$, $n \in G$ aus elementaren Funktionen kombinieren lassen. Mit dem Potenzreihenansatz

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

erhält man nach Einsetzen in die Ausgangsgleichung für die Koeffizienten a_k:

$$a_{2m-1} = 0 \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!\, (p+1)(p+2) \cdots (p+m)}$$

$m \in N \setminus \{0\}$

Mit $a_0 = \dfrac{1}{2^p \Gamma(n+1)}$ unter Verwendung der *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \text{für} \quad x > 0 \quad (\text{Zweites } \textit{Eulersches Integral}) \\ \text{oder} \\ \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p!\,p^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)} \quad x \in R \end{cases}$$

und deren Beziehungen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

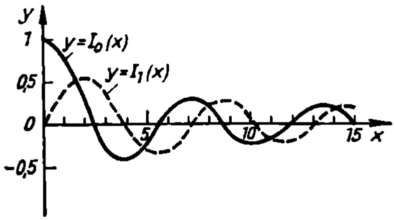
$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x)$$

und für $x \in N$

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

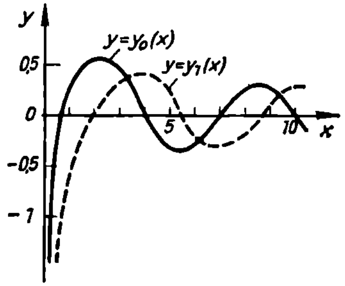
erhält man schließlich aus der Reihenentwicklung die Besselsche Funktion p-ter Ordnung erster Art (*Zylinderfunktion*)



$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m+p} k!\,\Gamma(p+m+1)}$$

Die allgemeine Lösung der Besselschen Dgl. ist dann für $p \in R$, nicht ganzzahlig

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$$



Für $p \in N$ setzt sich die allgemeine Lösung aus der Summe der BESSEL-Funktionen erster und zweiter Art zusammen:

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$$

mit

$$Y_p(x) = \lim_{m \to p} \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$$

$J_p(x)$ und $Y_p(x)$ sind für $p \in N$ tabelliert worden. (Siehe Bräuning, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 134.)
Zusammenhänge zwischen BESSEL-Funktionen verschiedener Indizes:

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}J_p(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x)$$

Analog gelten diese Formeln auch für $Y_p(x)$.

8.4. Gewöhnliche Differentialgleichungen 3. Ordnung

8.4.1. Lineare homogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

Entsprechend S. 374 führt der Ansatz $y = \mathrm{e}^{rx}$ zur charakteristischen Gleichung

$$r^3 + ar^2 + br + c = 0$$

Fall 1:

$$r_1 \neq r_2 \neq r_3; \quad r_1, r_2, r_3 \in R$$

Lösung der Dgl.

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x}$$

Fall 2:

$$r_1 = r_2 = r; \quad r_3 \neq r; \quad r, r_3 \in R$$

Lösung der Dgl.

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{rx} + C_3 e^{r_3 x}$$

Fall 3:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r; \quad r \in R$$

Lösung der Dgl.

$$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)\, e^{rx}$$

Fall 4:

$$r_1 \in R; \quad r_{2;3} = \alpha \pm \mathrm{j}\beta$$

Lösung der Dgl.

$$y = C_1 e^{r_1 x} + (C_2 \cos \beta x + C_3 \sin \beta x)\, e^{\alpha x}$$

Dieses Verfahren läßt sich leicht verallgemeinern auf eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Liegen bei einer linearen homogenen Dgl. n-ter Ordnung n voneinander unabhängige (ohne die triviale Lösung $y = 0$) Lösungen vor, so lautet die allgemeine Lösung

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

8.4.2. Lineare inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boldsymbol{y''' + ay'' + by' + cy = \varphi(x)}$$

Diese Differentialgleichung wird analog der inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung (s. S. 379) behandelt, indem man erst die zugehörige homogene Gleichung löst und durch einen geeigneten Lösungsansatz ein partikuläres Integral sucht. Die Addition beider ergibt die allgemeine Lösung der Dgl.
Das Verfahren läßt sich auch bei Dgl. höherer Ordnung entsprechend anwenden.

8.5. Integration von Differentialgleichungen durch Potenzreihenansatz

Diese Methode ergibt eine Näherungslösung. Sie wird dann angewendet, wenn sich die Dgl. nicht in eine der bisher behandelten Formen bringen läßt.
Man setzt

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit den entsprechenden Ableitungen in die Differentialgleichung ein und vergleicht die Koeffizienten gleicher Potenzen von x. Durch die Anfangsbedingungen erhält man a_0, mit dem sich alle anderen Koeffizienten bestimmen lassen (*Methode der unbestimmten Koeffizienten, Koeffizientenvergleich*).
Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man sowohl die Differentialgleichung als auch den Reihenansatz mehrfach differenziert und $x = 0$ setzt, wodurch sich die Koeffizienten beim Gleichsetzen entsprechender Ableitungen ergeben.

Beispiel:

$$y' = y^2 + x^3 \text{ mit der Anfangsbedingung } x = 0,\ y = -1$$

Ansatz:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

mit

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

eingesetzt in die Dgl.

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^2 + x^3 = \\ &= a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)\, x^2 + \\ &\quad + (1 + 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)\, x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 \\ 2a_2 &= 2a_0 a_1 \\ 3a_3 &= a_1^2 + 2a_0 a_2 \\ 4a_4 &= 1 + 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 \end{aligned}$$

usw.

Mit der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = -1$ ergibt sich

$$a_0 = -1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = 1; \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

Die angenäherte Lösung der Dgl. lautet folglich

$$y \approx -1 + x - x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

8.6. Partielle Differentialgleichungen

Allgemeine Form: $f(x; y; z; z_x; z_y; z_{xx}; z_{yy}; z_{xy}; \ldots) = 0$ für eine Funktion $z = z(x; y)$.
Eine partielle Dgl. heißt linear, wenn sie in den Größen z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, ... linear ist.
Eine partielle Dgl. 1. Ordnung heißt *homogen*, wenn kein von z und seinen Ableitungen freies Glied vorkommt, sonst *inhomogen*.
Die Ordnung einer partiellen Dgl. wird bestimmt durch die Ordnung der höchsten vorkommenden partiellen Ableitung.
Die allgemeine Lösung einer partiellen Dgl. unterscheidet sich von der gewöhnlicher Differentialgleichungen dadurch, daß an Stelle willkürlicher Konstanten willkürliche Funktionen der unabhängigen Variablen auftreten.

8.6.1. Einfache partielle Differentialgleichungen

		Lösung:
z_x	$= 0$	$z = w(y)$
z_y	$= 0$	$z = w(x)$
z_{xx}	$= 0$	$z = xw_1(y) + w_2(y)$
z_{yy}	$= 0$	$z = yw_1(x) + w_2(x)$
z_{xy}	$= 0$	$z = w_1(x) + w_2(y)$
$z_x - z_y$	$= 0$	$z = w(x + y)$
z_{xy}	$= f(x; y)$	$z = \iint f(x; y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + w_1(x) + w_2(y)$
$z_{xx} - z_{yy}$	$= 0$	$z = w_1(x + y) + w_2(x - y)$
$z_x + z_y$	$= 0$	$z = w(x - y)$
$z_{xx} - \dfrac{z_{yy}}{t^2}$	$= 0$	$z = w_1(x + ty) + w_2(x - ty)$

(t^2 reelle Konstante)

$az_x + bz_y = 0$	$z = w(ay - bx)$
$z_{xx} + z_{yy} = 0$	$z = w_1(x + \mathrm{j}y) + w_2(x - \mathrm{j}y)$
$z_x g_y - z_y g_x = 0$ (g gegebene Funktion von x und y)	$z = w[g(x; y)]$
$xz_x - yz_y = 0$	$z = w(xy)$
$yz_x - xz_y = 0$	$z = w(x^2 + y^2)$

8.6.2. Lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $z = f(x; y)$

$$Pz_x + Qz_y = R,$$

wobei P, Q, R gegebene Terme von x, y, z sind.

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}z = P : Q : R$$

oder in anderer Schreibweise

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{P}{Q}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{P}{R}; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{Q}{R}$$

Je zwei dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben die Lösungen

$$u(x; y; z) = C_1 \quad \text{und}$$

$$v(x; y; z) = C_2,$$

aus denen die *allgemeine Lösung* der partiellen Differentialgleichung folgt:

$$w(u; v) = 0$$

Aus der Vielzahl dieser Lösungen, die durch die willkürliche Funktion w bedingt ist, sucht man *spezielle Lösungen*, indem man durch zusätzliche *Randbedingungen* die willkürliche Funktion w bestimmt.

Beispiel:

$$2xyz_x + 4y^2z_y = x^2y$$

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}z = 2xy : 4y^2 : x^2y$$

Differentialgleichung zur Bestimmung von u

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2xy}{4y^2} = \frac{x}{2y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y}$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln y + C_1'$$

$$2 \ln x - \ln y = C_1''$$

$$\ln \frac{x^2}{y} = \ln C_1; \quad C_1 = \frac{x^2}{y} = u$$

Differentialgleichung zur Bestimmung von v

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 y}{2xy} = \frac{x}{2}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$z = \frac{x^2}{4} + C_2; \quad C_2 = z - \frac{x^2}{4} = v$$

Allgemeine Lösung

$$w\left(\frac{x^2}{y}; \quad z - \frac{x^2}{4}\right) = 0$$

Weiterhin bestimme man die spezielle Lösung, für die $y = 4$ die Werte $z(x; 4) = \frac{5}{4} x^2$ annimmt.

$$C_1 = \frac{x^2}{4}$$

$$C_2 = \frac{5}{4} x^2 - \frac{1}{4} x^2 = x^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$C_1 = \frac{1}{4} C_2$$

Spezielle Lösung

$$\frac{x^2}{y} = \frac{1}{4}\left(z - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$4x^2 = yz - \frac{x^2 y}{4}$$

$$z = \frac{4x^2}{y} + \frac{x^2}{4} = x^2\left(\frac{4}{y} + \frac{1}{4}\right)$$

9. Unendliche Reihen, Fourier-Reihen, Fourier-Integral, Laplace-Transformation

9.1. Unendliche Reihen

9.1.1. Allgemeines

Die unendliche Folge $\{a_k\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ hat die *Partialsummen* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, deren Folge die *Partialsummenfolge*

$$\{s_k\} = s_1, s_2, s_3, \ldots = a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

der ursprünglichen Folge $\{a_k\}$ ist.

Definition:

$$\text{Unendliche Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Diese stellt eine andere Form der Partialsummenfolge dar.

Beispiel:

$$\{a_k\} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$$

$$\{s_k\} = 1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}; \ldots =$$

$$= 1; 1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}; 1\frac{7}{8}; \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

9.1.2. Konvergenzkriterien

Konvergente und divergente unendliche Reihen

Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert*, wenn für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} s_n$ existiert und einen endlichen Wert s hat. Man nennt s die Summe der konvergenten Reihe.

Eine unendliche Reihe heißt „*bestimmt divergent*", wenn $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ ist (uneigentlicher Grenzwert), oder „*unbestimmt divergent*", wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nicht existiert.

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *unbedingt konvergent*, wenn ihre Summe von der Reihenfolge der Glieder unabhängig ist, anderenfalls *bedingt konvergent.*

Das Restglied R_n ist die Differenz der Summe s der Reihe und der Partialsumme s_n:

$$R_n = s - s_n$$

Für konvergente Reihen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Hauptkriterium für Reihen mit beliebigen Gliedern

$$\lim_{k\to\infty} (s_{k+p} - s_k) = 0 \quad p \in N$$

Dieses Kriterium ist *notwendig* und auch *hinreichend.*

Notwendige, aber *nicht hinreichende* Konvergenzbedingung ist

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Hinreichende, aber *nicht notwendige* Konvergenzkriterien sind:

Quotientenkriterium: $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqq q < 1$

(D' ALEMBERT)

Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{|a_k|} \leqq q < 1$

(CAUCHY)

Die beiden Kriterien in anderer Form:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1; \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$$

Wenn ein K existiert, so daß für alle $k \geqq K$ die Kriterien erfüllt sind.

Sind die Grenzwerte $> 1 \Rightarrow$ Divergenz
$= 1$, so kann keine unmittelbare Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz getroffen werden.

Methode der Reihenvergleichung
(für Reihen mit positiven Gliedern)

Wenn in den Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ stets $b_k \leqq a_k$ ist, so folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt in diesem Falle *konvergente Majorante* oder *Oberreihe* der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Wenn in den Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ stets $b_k \geqq a_k$ ist, so folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt in diesem Falle *divergente Minorante* oder *Unterreihe* der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Alternierende Reihen

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \cdots$$

Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert.

Hinreichendes Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:

$\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, wobei die Folge $\{a_k\}$ monoton abnimmt (LEIBNIZ*sches Konvergenzkriterium*).

Konvergente Reihen können gliedweise addiert oder subtrahiert werden.

Absolut konvergente Reihen können wie Polynome miteinander multipliziert werden.

9.1.3. Einige unendliche konvergente Zahlenreihen

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e \qquad \left(a_k = \frac{1}{(k-1)!}\right)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2 \qquad \left(a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \qquad \left(a_k = \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \left(a_k = \frac{1}{k^2}\right)$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12} \qquad \left(a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \qquad \left(a_k = \frac{1}{(2k-1)^2}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1 \qquad \left(a_k = \frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2} \qquad \left(a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$\left(a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$$

Weitere unendliche Reihen für die Zahl π ergeben sich aus den Reihenentwicklungen der zyklometrischen Funktionen (siehe S. 404).

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \qquad \text{(Leibniz)}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots \qquad \text{(Euler)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - + \cdots\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515}$$

9.1.4. Potenzreihen

Definition

Potenzreihen sind unendliche Reihen von der Form

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Das Intervall, in dessen Innerem die Potenzreihe konvergiert, heißt *Konvergenzbereich*. Seine Grenze heißt *Konvergenzradius* r. Für alle $|x| < r$ konvergiert die Potenzreihe, für alle $|x| > r$ divergiert sie. Für den Konvergenzradius r gilt der Satz:

Ist α der größte Häufungspunkt der Folge

$$|a_1|;\ \sqrt{|a_2|};\ \sqrt[3]{|a_3|};\ \ldots;\ \sqrt[k]{|a_k|};\ \ldots,$$

also $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$,

so ist $r = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Für $\alpha = 0$ bedeutet dies $r = \infty$, d.h., die Potenzreihe ist *beständig konvergent*. Für $\alpha = \infty$ ist $r = 0$, d.h., die Potenzreihe ist nur für $x = 0$ konvergent.

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Innerhalb des Konvergenzbereichs konvergiert eine Potenzreihe absolut.

Jede Potenzreihe kann innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert oder integriert werden.

Die neue Potenzreihe hat gleichen Konvergenzradius wie die alte.

Methoden zur Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

Taylorsche Reihe

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \\ + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n,$$

wobei die Reihe für $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ konvergiert.

Allgemeine Form des Restgliedes:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!\,p} (1-\vartheta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(x+\vartheta h) \qquad \text{für } 0 < \vartheta < 1$$

(Lagrange)

$p \in N$

Sonderfälle

1. $p = n + 1$

Restglied $R_n = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\vartheta h)$ für $0 < \vartheta < 1$

(Lagrange)

2. $p = 1$

Restglied $R_n = \dfrac{h^{n+1}}{n!} (1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(x+\vartheta h)$ für $0 < \vartheta < 1$

(Cauchy)

Andere Formen der Taylorschen Reihe:

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n + R_n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \\ + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n$$

Restglied $R_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \vartheta(x-a)]$ für $0 < \vartheta < 1$

(Lagrange)

Restglied $R_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1-\vartheta)^n f^{(n+1)}[a + \vartheta(x-a)]$ für $0 < \vartheta < 1$ (Cauchy)

Bedingung für Gültigkeit der Taylorschen Reihe:
Die Funktion f muß beliebig oft differenzierbar sein.

MacLaurinsche Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

Restglied $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x)$ für $0 < \vartheta < 1$ (LAGRANGE)

Restglied $R_n = \frac{x^{n+1}}{n!}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(\vartheta x)$ für $0 < \vartheta < 1$

(CAUCHY)

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Bedingung für Gültigkeit der MACLAURINschen Reihe: Die Funktion f muß beliebig oft differenzierbar sein.

Reihenentwicklung durch Integration

Eine Potenzreihe darf über ein Intervall gliedweise integriert werden, wenn sie in diesem Intervall gleichmäßig konvergiert.

Beispiel:

$\arctan x = \int\limits_0^x \frac{dz}{1+z^2}$. Im Intervall $0 \leqq z \leqq x$ konvergiert die Reihe $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + - \cdots$ für jedes $|z| < 1$ gleichmäßig. Durch Integration folgt $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$ für $|x| < 1$. Diese Reihe konvergiert außerdem noch für $x = \pm 1$ nach dem LEIBNIZschen Konvergenzkriterium über alternierende Reihen (siehe S. 397).

ZUSAMMENSTELLUNG FERTIG ENTWICKELTER REIHEN

Binomische Reihen

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \pm \binom{n}{3}x^3 + \pm \cdots$$

für $|x| \leqq 1;\quad n \in R$

Bei ganzzahligem positivem n bricht die Reihe beim $(n+1)$-ten Glied ab.

$(a \pm x)^n = a^n \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n$ kann mit Hilfe der obigen Reihe entwickelt werden, indem x ersetzt wird durch $\frac{x}{a}$.

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm - \cdots \qquad \text{für } |x| \leqq 1$$

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{1}{3} x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \pm - \cdots \qquad \text{für } |x| \leqq 1$$

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{4}} = 1 \pm \frac{1}{4} x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \pm - \cdots \qquad \text{für } |x| \leqq 1$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}} = 1 \mp \frac{1}{3} x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \pm + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{4}} = 1 \mp \frac{1}{4} x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8} x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \mp + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

Exponentialreihen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{für } |x| < \infty$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \cdots \qquad \text{für } |x| < \infty, \quad a > 0$$

Logarithmische Reihen

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \cdots \qquad \text{für } 0 < x \leqq 2$$

$$\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \cdots; \qquad \text{für } x > \frac{1}{2}$$

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \cdots\right] \qquad \text{für } x > 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \qquad \text{für } -1 < x \leqq 1$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right) \qquad \text{für } -1 \leqq x < 1$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{artanh} x = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right] \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{arcoth} x = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\right] \qquad \text{für } |x| > 1$$

Trigonometrische Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \qquad \text{für } |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots; \qquad \text{für } |x| < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \qquad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \cdots \qquad \text{für } 0 < |x| < \pi$$

Reihen für zyklometrische Funktionen

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots; \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} - \cdots; \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \quad \text{für } |x| \leqq 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - + \cdots \quad \text{für } |x| \leqq 1$$

Reihen für Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots; \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + - \cdots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - + \cdots \quad \text{für } 0 < |x| < \pi$$

Reihen für Areafunktionen

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + - \cdots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcosh} x = \pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \cdots\right] \quad \text{für } x > 1$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots \quad \text{für } |x| > 1$$

9.1.5. Näherungsformeln

Für sehr kleine ε-Werte ergeben sich aus den Potenzreihen Näherungsformeln, die in der Praxis viel angewendet werden.

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon \qquad \varepsilon \in R; \quad |\varepsilon| \ll 1$$

$$(a \pm \varepsilon)^n \approx a^n\left(1 \pm n\frac{\varepsilon}{a}\right) \qquad \text{für} \quad \varepsilon \ll a$$

Speziell:

$$(1 \pm \varepsilon)^2 \approx 1 \pm 2\varepsilon \qquad (a \pm \varepsilon)^2 \approx a^2\left(1 \pm \frac{2\varepsilon}{a}\right)$$

$$(1 \pm \varepsilon)^3 \approx 1 \pm 3\varepsilon \qquad (a \pm \varepsilon)^3 \approx a^3\left(1 \pm \frac{3\varepsilon}{a}\right)$$

$$\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \sqrt{a \pm \varepsilon} \approx \sqrt{a}\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2a}\right)$$

$$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \mp \varepsilon \qquad \frac{1}{a \pm \varepsilon} \approx \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{\varepsilon}{a}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \varepsilon}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \frac{1}{\sqrt{a \pm \varepsilon}} \approx \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 \mp \frac{\varepsilon}{2a}\right)$$

$$\sqrt[q]{(1 \pm \varepsilon)^p} \approx 1 \pm \frac{p}{q}\varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt[q]{(1 \pm \varepsilon)^p}} \approx 1 \mp \frac{p}{q}\varepsilon$$

$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \qquad a^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln a$$

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$$

$$\ln\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \approx 2\varepsilon \qquad \ln\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}\right) \approx \varepsilon$$

$$\sin \varepsilon \approx \varepsilon \qquad \tan \varepsilon \approx \varepsilon$$

$$\cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \qquad \cot \varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\arcsin \varepsilon \approx \varepsilon \qquad \arctan \varepsilon \approx \varepsilon$$

$$\sinh \varepsilon \approx \varepsilon \qquad \tanh \varepsilon \approx \varepsilon$$

$$\cosh \varepsilon \approx 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \qquad \coth \varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{arsinh} \varepsilon \approx \varepsilon \qquad \operatorname{artanh} \varepsilon \approx \varepsilon$$

Allgemein gilt:

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + f'(0)\,\varepsilon$$

9.2. Allgemeines zu Fourier-Reihen, Fourier-Integral und Laplace-Transformation

Jede eindeutige periodische Funktion $y = f(x) = f(x + kT_0)$, die stückweise monoton und stetig ist, ist eindeutig als FOURIER-Reihe darstellbar. Dabei erfolgt eine Zerlegung in das Spektrum von $f(x)$ nach diskreten Frequenzen kf_0.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega_0 x + b_k \sin k\omega_0 x] \qquad k \in N$$

mit $$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x) \cos k\omega_0 x \, dx \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x) \sin k\omega_0 x \, dx$$

$\frac{a_0}{2}$ Mittelwert der Funktion $f(x)$; Gleichglied

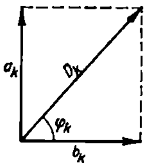
Speziell gilt für die *Periode* $T_0 = 2\pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad k \in N$$

mit $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Mit $D_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k}$ ergibt sich die *Spektraldarstellung:*



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin (k\omega_0 x + \varphi_k)$$

Komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\pm k} e^{jk\omega_0 x} \qquad k \in N$$

mit $$c_{\pm k} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(x) \, e^{\mp jk\omega_0 x} \, dx \qquad T_0 c_{\pm k} \text{ \textit{Spektrum} von } f(x)$$

Die Lage des Integrationsintervalls ist gleichgültig und kann ebenso von $-\frac{T_0}{2}$ bis $+\frac{T_0}{2}$ erstreckt werden.

Speziell gilt für die Periode $T_0 = 2\pi$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\pm k}\, e^{jkx} \qquad \text{mit} \qquad c_{\pm k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{\mp jkx}\, dx$$

An den Unstetigkeitsstellen x_0 gilt:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$

Zusammenhang

$$a_k = c_{+k} + c_{-k} \qquad k \in N$$

$$b_k = j(c_{+k} - c_{-k})$$

Jede eindeutige, auch nichtperiodische Funktion F (einmalig ablaufender Vorgang), die stückweise monoton und stetig ist, ist eindeutig als Fourier-Integral darstellbar (Fourier-*Transformation*). Dabei folgt eine Zerlegung in ein kontinuierliches Spektrum von Frequenzen y im unendlichen Intervall $T_0 \to \infty$; $t \in (-\infty; +\infty)$.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{jyt}\, dy \quad \text{Bedingung: } \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)\, dt| < \infty$$

mit $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-jyt}\, dt$ Funktionswert der *Spektralfunktion von F*

Einschränkung des Intervalls auf $t \in [0; +\infty)$ liefert:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{jyt}\, dy = \begin{cases} F(t) & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Das Intervall $t \in [0; +\infty)$ gestattet, die Amplitude mit e^{-xt} zu bedämpfen (Erreichen der Konvergenz).

$$F(t) \to e^{-xt} F(t)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(y)\, e^{jyt}\, dy = \begin{cases} e^{-xt} F(t) & \text{für} \quad t \geqq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

mit $\quad f_x(y) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t)\, e^{-jyt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(x+jy)t} F(t)\, dt$

Setzt man $s = x + jy$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\omega}^{x+j\omega} e^{st} f(s)\, ds = \begin{cases} F(t) & \text{für} \quad t \geqq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{komplexe} \\ \text{Umkehrformel} \end{matrix}$$

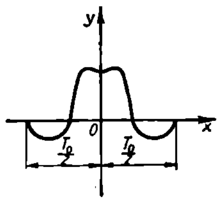
mit $\quad f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \qquad$ LAPLACE-Integral, LAPLACE-Transformation

In der Regelungstechnik wird oft s durch $p = \sigma + j\omega$ ersetzt. $f(s)$ ist der Funktionswert der Spektralfunktion der gedämpften Zeitfunktion $\psi(t) = e^{-xt} F(t)$.

9.3. Fourier-Reihen

Symmetrieverhältnisse für Fourier-Reihen

Fall 1:

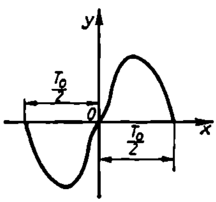


Funktion, symmetrisch zur Ordinatenachse, gerade Funktion

$$f(x) = f(-x)$$

$b_k = 0$, die Reihe enthält keine sin-Glieder.

Fall 2:

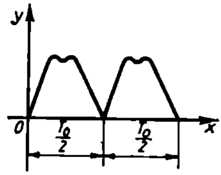


Funktion, zentralsymmetrisch zum Ursprung, ungerade Funktion

$$f(x) = -f(-x)$$

$a_k = 0$, die Reihe enthält nur sin-Glieder.

Fall 3:



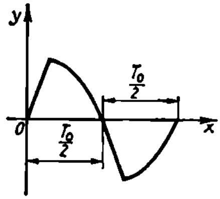
Gleiche Form und gleiche Lage der Halbperioden zur x-Achse

$$f(x) = f\left(x + \frac{T_0}{2}\right)$$

$$a_{2k+1} = 0; \qquad b_{2k+1} = 0$$

Die Reihe enthält nur sin- und cos-Glieder mit geraden Argumenten.

Fall 4:



Gleiche Form, aber verschiedene Lage der Halbperioden zur x-Achse.

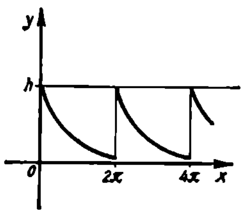
$$f(x) = -f\left(x + \frac{T_0}{2}\right)$$

$$a_{2k} = 0; \qquad b_{2k} = 0$$

Die Reihe enthält nur sin- und cos-Glieder mit ungeraden Argumenten.

Berechnung einer Fourier-Reihe

Nachfolgender rhythmisch verlaufender Ausgleichsvorgang soll in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden:



$$f(x) = he^{-x}$$

$$x \in [0; 2\pi],$$

$$T_0 = 2\pi$$

1. Lösungsweg (Berechnung der Koeffizienten über die trigonometrische Form)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} he^{-x}\cos kx\,dx = \frac{h}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos kx\,dx \qquad k \in N$$

Lösung des unbestimmten Integrals durch partielle Integration

$$\int e^{-x}\cos kx\,dx = \frac{e^{-x}}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int e^{-x}\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{e^{-x}}{k}\sin kx - \frac{e^{-x}}{k^2}\cos kx - \frac{1}{k^2}\int e^{-x}\cos kx\,dx$$

Rechts tritt dasselbe Integral wie links auf. Zusammengefaßt:

$$\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\int e^{-x}\cos kx\,dx = \frac{e^{-x}}{k}\sin kx - \frac{e^{-x}}{k^2}\cos kx;$$

$$\int e^{-x}\cos kx\,dx = \frac{k^2}{1+k^2}\left(\frac{e^{-x}}{k}\sin kx - \frac{e^{-x}}{k^2}\cos kx\right)$$

Unter Berücksichtigung der Grenzen folgt $a_k = \dfrac{h(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+k^2)}$

Entsprechende Rechnung liefert $b_k = \dfrac{hk(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+k^2)}$

Daraus $a_0 = \dfrac{h(1-e^{-2\pi})}{\pi}$; $\quad a_1 = \dfrac{h(1-e^{-2\pi})}{2\pi}$;

$$a_2 = \frac{h(1-e^{-2\pi})}{5\pi}; \ldots$$

$$b_0 = 0; \quad b_1 = \frac{h(1-e^{-2\pi})}{2\pi}; \quad b_2 = \frac{2h(1-e^{-2\pi})}{5\pi}; \ldots$$

Die FOURIER-Reihe lautet somit:

$$f(x) = \frac{h(1-e^{-2\pi})}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{5}\sin 2x + \cdots\right)$$

2. **Lösungsweg** (Berechnung der Koeffizienten über die komplexe Form)

$$c_{\pm k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} he^{-x}\,e^{\mp jk}\,dx = \frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-(1\pm jk)x}\,dx$$

Integration liefert sofort:

$$c_{\pm k} = \frac{-he^{-(1\pm kj)x}}{2\pi(1\pm kj)}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-h}{2\pi(1\pm kj)}\,(e^{-2}\underbrace{e^{\mp 2\pi kj}}_{1} - 1)$$

$$c_{\pm k} = \frac{h(1-e^{-2\pi})}{2\pi(1\pm kj)}$$

Aus $c_{\pm k}$ berechnen sich die Koeffizienten a_k und b_k:

$$a_k = c_{+k} + c_{-k} = \frac{h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}\left(\frac{1}{1 + k\mathrm{j}} + \frac{1}{1 - k\mathrm{j}}\right) =$$

$$= \frac{h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi} \cdot \frac{1 - k\mathrm{j} + 1 + k\mathrm{j}}{1 + k^2} = \frac{h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{\pi(1 + k^2)}$$

$$b_k = \mathrm{j}(c_{+k} - c_{-k}) = \frac{\mathrm{j}h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}\left(\frac{1}{1 + k\mathrm{j}} - \frac{1}{1 - k\mathrm{j}}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{j}h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi} \cdot \frac{1 - k\mathrm{j} - 1 - k\mathrm{j}}{1 + k^2} = \frac{hk(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{\pi(1 + k^2)}$$

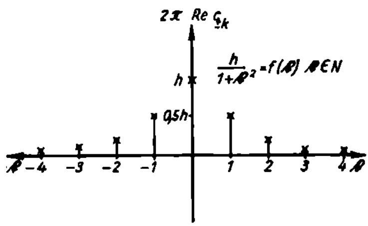
Die Koeffizienten aus beiden Rechnungen stimmen natürlich überein. Man erkennt aber, daß die Berechnung über die komplexe Form wesentlich einfachere Integrale ergibt, weshalb teilweise diese Methode weniger Rechenaufwand erfordert, vor allen Dingen, wenn f eine e-Funktion ist.

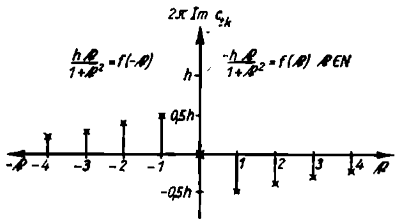
Das Linienspektrum von f ergibt sich zu

$$2\pi c_{\pm k} = \frac{h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{1 \pm k\mathrm{j}} = \frac{h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})\,(1 \mp k\mathrm{j})}{1 + k^2} =$$

$$= \frac{h(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{1 + k^2} + \mathrm{j}\,\frac{\mp hk(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{1 + k^2} \approx \frac{h}{1 + k^2} +$$

$$+ \mathrm{j}\,\frac{\mp hk}{1 + k^2}, \quad \text{da} \quad \mathrm{e}^{-2\pi} \ll 1 \text{ ist.}$$

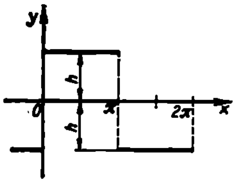




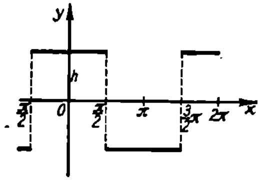
Besondere Fourier-Reihen

1. *Rechteckkurve*

$$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$



Zu 1.



Zu 2.

2. *Rechteckkurve*

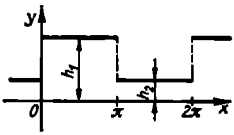
$$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\right)$$

3. *Rechteckkurve* (verschoben in Richtung y-Achse)

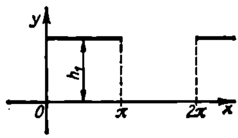
$$f(x) = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{2(h_1 - h_2)}{\pi} \times$$

$$\times \left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

$h_2 = 0$ führt zu Rechteckimpuls (Bild rechts)



Zu 3.



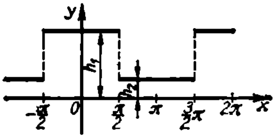
Zu 3.

4. *Rechteckkurve* (verschoben in Richtung y-Achse)

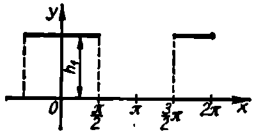
$$f(x) = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{2(h_1 - h_2)}{\pi} \times$$

$$\times \left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\right)$$

$h_2 = 0$ führt zu Rechteckimpuls (Bild rechts)



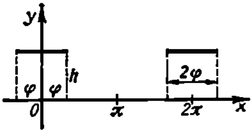
Zu 4.



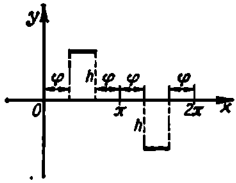
Zu 4.

5. *Rechteckimpuls*

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{1}\cos x + \frac{\sin 2\varphi}{2}\cos 2x + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 3\varphi}{3}\cos 3x + \cdots\right)$$



Zu 5.



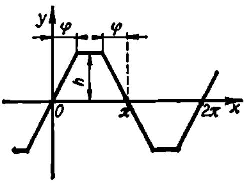
Zu 6.

6. *Rechteckimpuls*

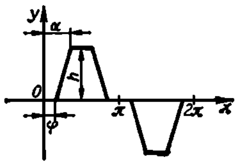
$$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{1}\sin x + \frac{\cos 3\varphi}{3}\sin 3x + \frac{\cos 5\varphi}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

7. *Trapezkurve* (gleichschenkliges Trapez)

$$f(x) = \frac{4h}{\pi\varphi}\left(\frac{1}{1^2}\sin\varphi\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\varphi\sin 3x + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5^2}\sin 5\varphi\sin 5x + \cdots\right)$$



Zu 7.



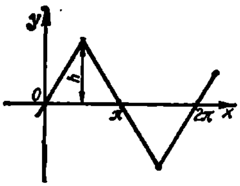
Zu 8.

8. *Trapezimpuls* (gleichschenkliges Trapez)

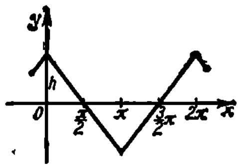
$$f(x) \doteq \frac{4h}{\pi(\alpha-\varphi)}\left(\frac{\sin\alpha-\sin\varphi}{1^2}\sin x + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 3\alpha-\sin 3\varphi}{3^2}\sin 3x + \frac{\sin 5\alpha-\sin 5\varphi}{5^2}\sin 5x + \cdots\right)$$

9. *Dreieckkurve* (gleichschenkliges Dreieck)

$$f(x) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - + \cdots\right)$$



Zu 9.



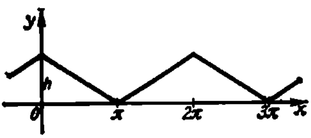
Zu 10.

10. *Dreieckkurve* (gleichschenkliges Dreieck)

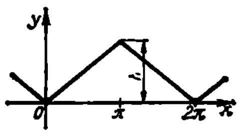
$$f(x) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

11. *Dreieckkurve* (gleichschenkliges Dreieck)

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$



Zu 11.



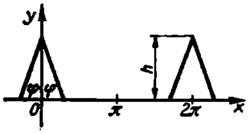
Zu 12.

12. *Dreieckkurve* (gleichschenkliges Dreieck)

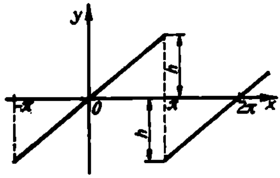
$$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

13. *Dreieckimpuls* (gleichschenkliges Dreieck)

$$f(x) = \frac{h\varphi}{2\pi} + \frac{2h}{\pi\varphi}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{1^2}\cos x + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2^2}\cos 2x + \right.$$
$$\left. + \frac{1 - \cos 3\varphi}{3^2}\cos 3x + \cdots\right)$$



Zu 13.



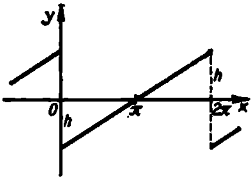
Zu 14.

14. *Sägezahnkurve* (steigend)

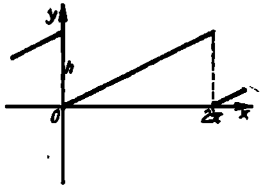
$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right)$$

15. *Sägezahnkurve* (steigend)

$$f(x) = -\frac{2h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$$



Zu 15.



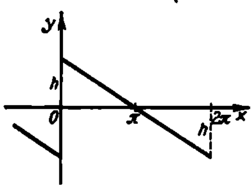
Zu 16.

16. *Sägezahnkurve* (steigend)

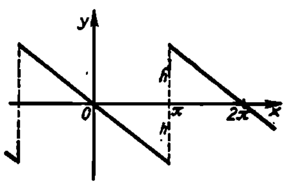
$$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$$

17. *Sägezahnkurve* (fallend)

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$$



Zu 17.



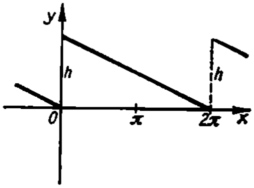
Zu 18.

18. *Sägezahnkurve* (fallend)

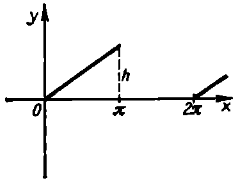
$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(-\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + - \cdots\right)$$

19. *Sägezahnkurve* (fallend)

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$$



Zu 19.



Zu 20.

20. *Sägezahnimpuls* (steigend)

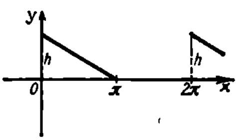
$$f(x) = \frac{h}{4} + \frac{h}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right) -$$

$$- \frac{2h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

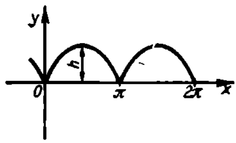
21. *Sägezahnimpuls* (fallend)

$$f(x) = \frac{h}{4} + \frac{h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right) +$$

$$+ \frac{2h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$



Zu 21.



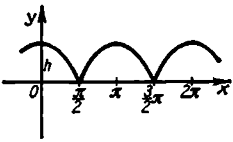
Zu 22.

22. *Gleichgerichtete Sinuskurve* (Zweiweggleichrichtung)

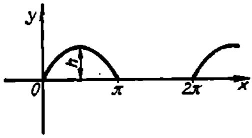
$$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x - \cdots\right)$$

23. *Gleichgerichtete Cosinuskurve* (Zweiweggleichrichtung)

$$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x - + \cdots\right)$$



Zu 23.



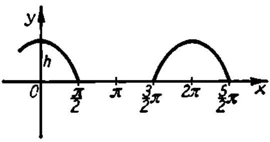
Zu 24.

24. *Sinusimpuls* (Einweggleichrichtung)

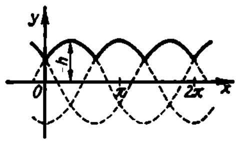
$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2}\sin x - \frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x + \cdots\right)$$

25. *Cosinusimpuls* (Einweggleichrichtung)

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2}\cos x + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x - + \cdots\right)$$



Zu 25.



Zu 26.

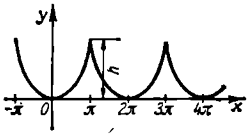
26. *Gleichgerichteter Drehstrom*

$$f(x) = \frac{3h\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3x - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9x - \cdots\right)$$

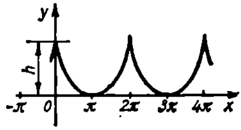
27. *Parabelbögen*

$$\left(\text{Parabelgleichung } y = \frac{h}{\pi^2}x^2 \quad \text{für} \quad [-\pi;\pi]\right)$$

$$f(x) = \frac{h}{3} - \frac{4h}{\pi^2}\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - + \cdots\right)$$



Zu 27.



Zu 28.

28. *Parabelbögen*

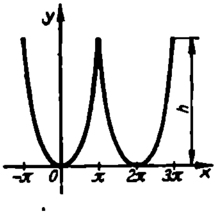
$$\left(\text{Parabelgleichung } y = \frac{h}{\pi^2}(x-\pi)^2 \quad \text{für} \quad [0;2\pi]\right)$$

$$f(x) = \frac{h}{3} + \frac{4h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots\right)$$

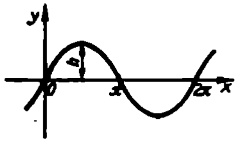
29. *Parabelbögen*

$$(\text{Parabelgleichung } y = x^2 \quad \text{für} \quad [-\pi;\pi])$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - + \cdots\right)$$



Zu 29.



Zu 30.

30. *Parabelbögen*

$$\left(\text{Parabelgleichung } y = \frac{4h}{\pi^2}x(\pi - x) \quad \text{für} \quad [0;\pi]\right.$$

$$\left.\text{und } y = \frac{4h}{\pi^2}(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2) \quad \text{für} \quad [\pi; 2\pi]\right)$$

$$f(x) = \frac{32h}{\pi^3}\left(\sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \cdots\right)$$

31. *Ausgleichsvorgang*

$f(x) = h\mathrm{e}^{-x}$ s. S. 409

9.4. Fourier-Integral, Berechnungsbeispiel

Der oben (S. 409) behandelte Ausgleichsvorgang $f(x) = h\mathrm{e}^{-x}$ mit $T_0 = 2\pi$ soll als nichtperiodischer, einmaliger Vorgang betrachtet werden:

$$h\mathrm{e}^{-t} = \begin{cases} F(t) & \text{für} \quad t \in [0;\infty) \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Der Wert der Spektralfunktion lautet:

$$f(y) = \int_0^\infty F(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}yt}\,\mathrm{d}t = h\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}yt}\,\mathrm{d}t = h\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}y)t}\,\mathrm{d}t$$

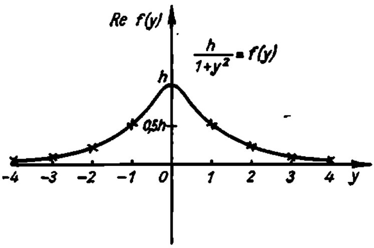
Die Integration ergibt:

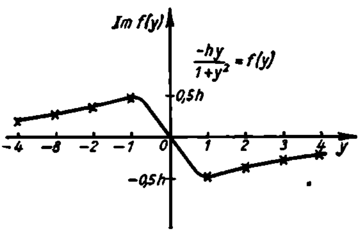
$$f(y) = h\frac{-1}{1+\mathrm{j}y}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}y)t}\Big|_0^\infty = \frac{h}{1+\mathrm{j}y} = \frac{h}{1+y^2} + \mathrm{j}\frac{-hy}{1+y^2}$$

Das FOURIER-Integral lautet:

$$F(t) = h\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{1+\mathrm{j}y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}yt}\,\mathrm{d}y = \frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{j}y}{1+y^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}yt}\,\mathrm{d}y$$

Die graphische Darstellung von f ergibt das kontinuierliche Spektrum:





9.5. Laplace-Transformation

Schreibweise:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = \mathfrak{L}\{F(t)\} \quad s \in K;\ s = x + jy$$

wobei *Oberfunktion, Originalfunktion* F im Bereich $t \in (0; \infty)$, *Unterfunktion, Bildfunktion,* LAPLACE-*Transformierte* f.

LAPLACE-Transformation $\mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s)$

$F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, f(s)$ (Korrespondenz)

Umkehrtransformation $\mathfrak{L}^{[-1]}\{f(s)\} = F(t)$

$f(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, F(t)$ (Korrespondenz)

$$\mathfrak{L}^{[-1]}\{\mathfrak{L}\{f(s)\}\} = f(s); \quad \mathfrak{L}^{[-1]}\{\mathfrak{L}\{F(t)\}\} = F(t)$$

Im Bereich stückweise stetiger und monotoner Funktionen f existiert, wenn überhaupt, nur eine Oberfunktion F.

Kriterien für die Existenz der LAPLACE-*Transformierten f im Bereich* $t > 0$

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|\, dt < \infty$; F stückweise stetig

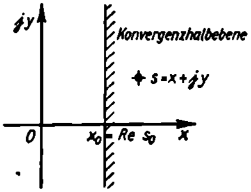
2. $\int_0^{T_1} |F(t)|\, dt = \lim\limits_{\delta \to 0} \int_\delta^{T_1} |F(t)|\, dt$

3. $T_2 > T_1$; für mindestens ein $s_0 \in K$

$$\lim_{T_2 \to \infty} \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-s_0 t} F(t)\, dt \right| = 0$$

Funktionen, die 1 bis 3 erfüllen, heißen $\mathfrak{L}$-Funktionen.

4. Ist die Konvergenz von $\mathfrak{L}\{F(t)\}$ für x_0 gegeben, konvergiert sie auch für alle $x > x_0$ bzw. $R(s) > R(s_0)$. Der kleinste mögliche Wert von x_0 heißt Konvergenzabszisse β (K.A.). Wenn $\mathfrak{L}\{F(t)\}$ absolut konvergiert, schreibt man: $\mathfrak{L}_a$-Funktion.



$$\int_0^\infty |e^{-st} F(t)|\, dt < \infty \quad \text{für } x > \beta$$

$\mathfrak{L}_a$-Funktionen sind auch $\mathfrak{L}$-Funktionen.

Rechenregeln

Linearität:

$$\mathfrak{L}\{aF_1(t) + bF_2(t)\} = a\mathfrak{L}\{F_1(t)\} + b\mathfrak{L}\{F_2(t)\}$$

K.A. Max. $(\beta_1; \beta_2)$ d.h., Konvergenzabszisse ist der größere der Werte von β_1 und β_2.

Umkehr $\mathfrak{L}^{[-1]}\{af_1(s) + bf_2(s)\} = a\mathfrak{L}^{[-1]}\{f_1(s)\} + b\mathfrak{L}^{[-1]}\{f_2(s)\}$

Dämpfungssatz: $\mathfrak{L}\{e^{-\alpha t} F(t)\} = f(s + \alpha)$ K.A. $= \beta - R(\alpha)$

$e^{-\alpha t}$ Dämpfungsfaktor für $\alpha > 0$ $\alpha \in R$

Umkehr $\mathfrak{L}^{[-1]}\{f(s + \alpha)\} = e^{-\alpha t} \mathfrak{L}^{[-1]}\{f(s)\}$

Ähnlichkeitssatz: $\mathfrak{L}\{F(\alpha t)\} = \dfrac{1}{\alpha} f\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$ K.A. $\alpha\beta$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\gamma} F\left(\frac{1}{\gamma} t\right)\right\} = f(s\gamma) \qquad \gamma > 0$$

Umkehr $\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{f\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)\right\} = \alpha F(\alpha t)$

$$\mathfrak{L}^{[-1]} f(\gamma s) = \frac{1}{\gamma} F\left(\frac{t}{\gamma}\right) \qquad \gamma > 0$$

Verschiebungssatz: $\mathfrak{L}\{F_1(t)\} = e^{-st_0} \mathfrak{L}\{F(t)\}$ mit $F_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t \in [0, t_0] \\ F(t - t_0) \text{ für } t \in [t_0, \infty) \end{cases}$

oder $\mathfrak{L}\{F(t - t_0)\} = e^{-st_0} f(s)$ $t \in (t_0, \infty)$

$$\mathfrak{L}\{F(t + \alpha)\} = e^{\alpha s} [f(s) - \int_0^{\alpha} e^{-st} F(t)\, dt] \qquad \alpha > 0$$

Umkehr $\mathfrak{L}^{[-1]}\{e^{-st_0} f(s)\} = \begin{cases} 0 \text{ für } t \in [0, t_0) \\ F(t - t_0) \text{ für } t > t_0 \end{cases}$

Differentiationssatz:

Für die Oberfunktion gilt

$$\mathfrak{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(+0) - s^{n-2}\dot{F}(+0) -$$
$$-s^{n-3}\ddot{F}(+0) - \cdots F^{n-1}(+0)$$

demnach 1. Ableitung: $\mathfrak{L}\left\{\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sf(s) - F(+0)$

2. Ableitung: $\mathfrak{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2F(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} = s^2f(s) -.sF(+0) - \ddot{F}(+0)$

Umkehr: $\mathfrak{L}^{[-1]}\{sf(s) - F(+0)\} = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$

Für die Unterfunktion gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^n f(s)}{\mathrm{d}s^n} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\,\mathfrak{L}\{F(t)\} = (-1)^n\,\mathfrak{L}\{t^nF(t)\} = (-1)^n\,t^nf(s)$$

demnach $f'(s) = -t\mathfrak{L}\{F(t)\}$

$f''(s) = +t^2\mathfrak{L}\{F(t)\}$

Umkehr: $\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(s)}{\mathrm{d}s^n}\right\} = (-1)^n\,t^nF(t)$

Integrationssatz:

Für die Oberfunktion gilt:

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t F(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\,f(s) \qquad x > x_0$$

Umkehr: $\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s}\,f(s)\right\} = \int_0^t F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

Für die Unterfunktion gilt:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \qquad \sigma \in K$$

Umkehr: $\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\int_s^\infty f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right\} = \frac{F(t)}{t}$

Faltungsintegral: $F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau)\, F_2(t-\tau)\, d\tau$

Faltungssatz: $f_1(s)\, f_2(s) = \mathfrak{L}\{F_1(t)\}\, \mathfrak{L}\{F_2(t)\} =$

$$= \mathfrak{L}\{F_1(t) * F_2(t)\} = \mathfrak{L}\left\{\int_0^t F_1(\tau)\, F_2(T-\tau)\, d\tau\right\}$$

Kommutatives Gesetz: $F_1(t) * F_2(t) = F_2(t) * F_1(t)$

Assoziatives Gesetz: $[F_1(t) * F_2(t)] * F_3(t) =$

$$= F_1(t) * [F_2(t) * F_3(t)]$$

Umkehr: $\mathfrak{L}^{[-1]}\{f_1(s)\, f_2(s)\} = \mathfrak{L}^{[-1]}\{f_1(s)\} * \mathfrak{L}^{[-1]}\{f_2(s)\}$

Grenzwertsätze:

$$\lim_{t \to +0} F(t) = \lim_{s \to \infty} s f(s)$$

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{s \to 0} s f(s)$$

9.6. Anwendung der Laplace-Transformation; Lösung von Differentialgleichungen

Schematischer Rechengang:

Differentialgl. + Anfangsbedingungen → Lösung y | Originalraum

↓ ↑

LAPLACE-Transformation $\mathfrak{L}^{[-1]}$-Transformation

(Rechenregeln, Tabellen) (Rechenregeln, Tabellen)

↓ ↑

Lineare algebraische Gleichung → Lösung für $\mathfrak{L}\{y\}$ | Bildraum

An Stelle der direkten Lösung wählt man durch die $\mathfrak{L}$-Transformation den Weg über den Bildraum, wodurch die Lösung der Dgl. vereinfacht wird zu einer Lösung einer linearen algebraischen Gleichung.

Vorteilhaft ist die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen von vornherein. Außerdem wird der Lösungsweg inhomogener Dgln. ebenso einfach wie bei homogenen Dgln. (Bedingung: Störglied muß eine $\mathfrak{L}$-Transformierte haben.)

Beispiel 1:

Man löse die Dgl.

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = t \quad \text{mit} \quad y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = 0$$

Anwendung des Differentiationssatzes

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) + 5s\mathfrak{L}\{y\} - 5y(0) + 4\mathfrak{L}\{y\} = \mathfrak{L}\{t\}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen wird

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} + 5s\mathfrak{L}\{y\} + 4\mathfrak{L}\{y\} = \mathfrak{L}\{t\}$$

$$\mathfrak{L}\{y\} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+4}$$

nach Tabelle 9.7/3

Rücktransformation

$$y = \mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+4}\right\}$$

Umformung in eine Summe durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+4} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+4}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+4)} = \frac{A(s+1)(s+4) + Bs(s+1)(s+4)}{s^2(s+1)(s+4)} + \frac{Cs^2(s+4) + Ds^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$A = \frac{1}{4};\ B = -\frac{5}{16};\ C = \frac{1}{3};\ D = -\frac{1}{48}$$

Damit ergibt sich

$$y = \frac{1}{4}\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{5}{16}\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{48}\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{t}{4} - \frac{5}{16} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t}}} \text{ nach Tabelle 9.7./3;/1;/5}$$

Beispiel 2:

Man löse die Dgl.

$$\ddot{y} - 4y = 2\sinh t \quad \text{mit} \quad y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = 0!$$

Anwendung des Differentiationssatzes

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) - 4\mathfrak{L}\{y\} = 2\mathfrak{L}\{\sinh t\}$$

Mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - 4\mathfrak{L}\{y\} = 2\mathfrak{L}\{\sinh t\}$$

$$\mathfrak{L}\{y\} = \frac{2}{s^2-4}\,\mathfrak{L}\{\sinh t\}$$

Lösungsweg 1:

$$\frac{2}{s^2-4} = \mathfrak{L}\{\sinh 2t\}$$

$$\mathfrak{L}\{y\} = \mathfrak{L}\{\sinh 2t\}\,\mathfrak{L}\{\sinh t\}$$

Anwendung des Faltungssatzes

$$\mathfrak{L}\{y\} = \mathfrak{L}\{\sinh 2t * \sinh t\}$$

$$y = \mathfrak{L}^{[-1]}\mathfrak{L}\{\sinh 2t * \sinh t\} = \sinh 2t * \sinh t$$

(Faltungsintegral)

$$y = \int_0^t \sinh(t-\tau)\cdot\sinh 2\tau\,d\tau$$

Lösung durch zweimalige partielle Integration

$$y = \left[\frac{1}{2}\sinh(t-\tau)\cosh 2\tau\right]_{\tau=0}^{t} + \frac{1}{2}\int_0^t \cosh(t-\tau)\cosh 2\tau\,d\tau$$

$$y = -\frac{1}{2}\sinh t + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cosh(t-\tau)\right)\sinh 2\tau\right]_0^t +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^t \sinh 2\tau\sinh(t-\tau)\,d\tau$$

$$y = -\frac{1}{2}\sinh t + \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{1}{4}y$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{2}{3}\sinh t + \frac{1}{3}\sinh 2t}}$$

Lösungsweg 2:

$$\mathfrak{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{s^2 - 1} \text{ nach Tabelle 9.7./9}$$

$$\mathfrak{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 - 4} \cdot \frac{1}{s^2 - 1}$$

Rücktransformation:

$$y = \mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{2}{s^2 - 4} \cdot \frac{1}{s^2 - 1}\right\}$$

Umformung in eine Summe durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{2}{(s^2 - 4)(s^2 - 1)} = \frac{A}{s^2 - 4} + \frac{B}{s^2 - 1}$$

(Eine Zerlegung in die Nenner $(s - 2)(s + 2)(s - 1)(s + 1)$ ist unzweckmäßig, da $\frac{a}{s^2 - a^2}$ $\mathfrak{L}$-Transformierte ist.)

$$A = \frac{2}{3}; \qquad B = -\frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}\,\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{2}{s^2 - 4}\right\} - \frac{2}{3}\,\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3}\sinh 2t - \frac{2}{3}\sinh t}} \text{ (wie oben) nach Tabelle 9.7./9}$$

Beispiel 3:

Man löse die Dgl. der gleichmäßig beschleunigten Bewegung $\ddot{y} = b$ mit $y(0) = y_0$; $\dot{y}(0) = v_0$.
Anwendung des Differentiationssatzes

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) = \mathfrak{L}\{b\}$$

Mit den Anfangsbedingungen wird

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - sy_0 - v_0 = \frac{b}{s}; \qquad s^2\mathfrak{L}\{y\} = \frac{b}{s} + sy_0 + v_0$$

$$\mathfrak{L}\{y\} = \frac{b}{s^3} + \frac{y_0}{s}\frac{v_0}{s^2}$$

Anwendung des Faltungssatzes auf

$$\frac{b}{s^3} = \frac{b}{s^2} \cdot \frac{1}{s} = \mathfrak{L}\{bt\}\,\mathfrak{L}\{1\} \text{ nach Tabelle 9.7./1;/3}$$

$$y = \mathfrak{L}^{[-1]}\mathfrak{L}\{bt\}\,\mathfrak{L}\{1\} + \mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{y_0}{s}\right\} + \mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{v_0}{s^2}\right\} =$$

$$= \mathfrak{L}^{[-1]}\mathfrak{L}\{bt * 1\} + y_0 + v_0 t = \int_0^t b\tau\, 1\, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ y_0 + v_0 t \quad \text{(Faltungsintegral)}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{2}\, t^2 + v_0 t + y_0}}$$

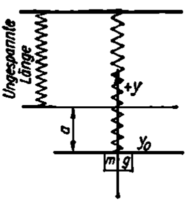
Man erkennt, daß die Methode der Lösung von Dgln. mittels $\mathfrak{L}$-Transformation nur bei komplizierteren Gleichungen den Lösungsweg vereinfacht.

Beispiel 4:

Man löse die Dgl. der harmonischen Schwingung

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg + k(a - y) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = v_0$$

(k Federkonstante)



Mit $-mg = ka$ wird $m\ddot{y} = -ky$; $\ddot{y} + \frac{k}{m}\, y = 0$

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) + \frac{k}{m}\,\mathfrak{L}\{y\} = 0$$

Mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$s^2\mathfrak{L}\{y\} - v_0 + \frac{k}{m}\,\mathfrak{L}\{y\} = 0; \quad \left(s^2 + \frac{k}{m}\right)\mathfrak{L}\{y\} = v_0$$

$$\mathfrak{L}\{y\} = \frac{v_0}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

Rücktransformation:

$$y = v_0\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\;\mathfrak{L}^{[-1]}\left\{\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\}$$

$$\underline{\underline{y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}} \qquad \text{nach Tabelle 9.7./17}$$

9.7. Korrespondenzentabelle einiger rationaler Laplace-Integrale

Oberfunktion F	Unterfunktion $f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}$
1. h	$\frac{h}{s}$
2. $\sigma(t)$ Sprungfkt.	$\frac{1}{s}$ $\quad s > 0$
3. t	$\frac{1}{s^2}$
4. $\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$ $\quad n \in G$
5. $e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$ $\quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$
6. a^t	$\frac{1}{s - \ln\lvert a\rvert}$

	Oberfunktion F	Unterfunktion $f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}$	
7.	$(a + e^{-t})^n$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^{n-k}}{s+k}$	
8.	$-ae^{-at}$	$\frac{s}{s+a}$	
9.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	
10.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	
11.	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{s(s-a)}$	
12.	$te^{\pm at}$	$\frac{1}{(s \mp a)^2}$	
13.	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	
14.	$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b - a}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	
15.	$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	
16.	$e^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	
17.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$a \neq 0$
18.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$a \neq 0$
19.	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\cos\varphi \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin\varphi \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$	
20.	$1 - 2\sin at$	$\frac{(s-a)^2}{s(s^2 + a^2)}$	$a \neq 0$

Oberfunktion F	Unterfunktion $f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}$	
21. $\cos^2 at$	$\dfrac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$a \neq 0$
22. $\cosh^2 at$	$\dfrac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$	$a \neq 0$
23. $\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{s^n}$	$n > 0$

Ausführlichere Tabellen siehe Spezialliteratur, z.B. Doetsch: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, Verlag R. Oldenbourg, München.

10. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung

10.1. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ereignisse

Zufällige Ereignisse können unter bestimmten Bedingungen eintreten, ihr Eintreffen ist jedoch nicht sicher.
Deterministische Ereignisse treten bei bestimmten Bedingungen mit Sicherheit ein (*Sicheres Ereignis*).
Die Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung tragen Massencharakter, d.h., sie sind nur für eine genügend große Anzahl Versuche gültig.
Einzig mögliche Ereignisse liegen vor, wenn unter gewissen Bedingungen eines dieser Ereignisse mit Sicherheit eintritt.
Unvereinbare Ereignisse liegen vor, wenn ein Ereignis das andere mit Sicherheit ausschließt.
E_1 ist *Teilereignis* von E_2, wenn nach E_1 stets E_2 folgt.

$$E_1 \subset E_2 \text{ bzw. } E_2 \supset E_1 \text{ (lies } E_1 \text{ ist Teilereignis von } E_2\text{)}$$

Gleichwertige (äquivalente) Ereignisse treten stets gleichzeitig auf oder nicht auf. $E_1 = E_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2 \wedge E_2 \subset E_1$
Die logische *Summe der Ereignisse* E_1 und E_2 ist das Ereignis E_3, in dem mindestens eines der Ereignisse E_1 oder E_2 eingetreten ist.

$$E_3 = E_1 \cup E_2 \text{ (lies } E_3 \text{ ist gleich } E_1 \text{ vereinigt mit } E_2\text{)}$$

Das *logische Produkt der Ereignisse* E_1 und E_2 ist das Ereignis E_3, in dem E_1 und E_2 gleichzeitig eingetreten sind.

$$E_3 = E_1 \cap E_2 \text{ (lies } E_3 \text{ ist gleich } E_1 \text{ geschnitten mit } E_2\text{)}$$

Die *logische Differenz der Ereignisse* E_1 und E_2 ist das Ereignis E_3, in dem E_1 eingetreten, E_2 nicht eingetreten ist.

$$E_3 = E_1 \setminus E_2$$

Unmögliche Ereignisse $\emptyset$ treten nicht ein.
Entgegengesetzte Ereignisse E_1 und $\overline{E}_1$ liegen vor, wenn das Eintreten des einen das Nichteintreten des anderen bedingt.

Definitionen

Jedem *Ereignis* E, d.h. jedem möglichen Ergebnis eines Versuchs, wird eine Zahl $P(E)$ zugeordnet, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E.

$$0 \leqq P(E) \leqq 1$$

Sicheres Ereignis $P(E) = 1$

Unmögliches Ereignis $P(E) = 0$

Elementare Definition der Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{g}{n} \qquad n \text{ endlich}$$

Für das Ereignis E sind von den n möglichen Ausgängen eines Versuchs g günstig.

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf eine 6 zu würfeln, beträgt $P = \frac{1}{6}$.

Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{h}{n}$$

Bei n-maliger Ausführung des Versuchs tritt h-mal das Ereignis E ein.

Die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{E})$ für das Nichteintreten des Ereignisses E (*entgegengesetztes Ereignis* $\overline{E}$) ist:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Teilereignis $E_1 \subset E_2$

$$P(E_1) \leqq P(E_2)$$

Additionssatz der Wahrscheinlichkeit — Wahrscheinlichkeit des „Entweder — Oder“

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eines der *unvereinbaren* Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eintritt, ist:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$$

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei einem Wurf die Zahl 3 oder 6 erhält, ist $P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

E_1, E_2 nicht notwendig einander ausschließend

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 unter der Voraussetzung, daß das Ereignis E_1 schon eingetreten ist, heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_2/E_1)$ des Ereignisses E_2.

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Sind E_1 und E_2 voneinander unabhängig, heißen $P(E_1)$ und $P(E_2)$ **unbedingte Wahrscheinlichkeiten.**

Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeit — Wahrscheinlichkeit des „sowohl — als auch"

Für voneinander unabhängige Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_1)\, P(E_2) \ldots P(E_k),$$

für abhängige Ereignisse (bedingte Wahrscheinlichkeiten)

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\, P(E_2/E_1) = P(E_2)\, P(E_1/E_2)$$

Beispiel:

Zieht man aus einem Kartenspiel (32 Karten) eine Karte, so ist die Wahrscheinlichkeit, einen König zu ziehen, $P(E_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Ist die gezogene Karte ein König und zieht man nun eine weitere Karte, so ist die Wahrscheinlichkeit, wieder einen König zu ziehen, $P(E_2/E_1) = \frac{3}{31}$. Zieht man aus dem Kartenspiel zwei Karten, so ist daher die Wahrscheinlichkeit, zwei Könige zu ziehen,

$$\underline{\underline{P}} = P(E_1)\, P(E_2/E_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} \approx \underline{\underline{0{,}012}}.$$

Für unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(E_2/E_1) = P(E_2) \quad \text{bzw.} \quad P(E_1/E_2) = P(E_1)$$

Für k unabhängige Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

sie gleichzeitig eintreten: $P = P(E_1)\,P(E_2) \cdots P(E_k)$

keines eintritt: $P = [1 - P(E_1)]\,[1 - P(E_2)] \cdots [1 - P(E_k)]$

mindestens eines eintritt:

$$P = 1 - [1 - P(E_1)]\,[1 - P(E_2)] \cdots [1 - P(E_k)]$$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Das Ereignis E soll stets mit genau einem der k unvereinbaren Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eintreten. Dann gilt:

$$P(E) = P(E_1)\,P(E/E_1) + P(E_2)\,P(E/E_2) + \\ + \cdots + P(E_k)\,P(E/E_k) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)\,P(E/E_i)$$

Formel von Bayes (Formel über die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen)

Das Ereignis E soll stets mit genau einem der k unvereinbaren Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eintreten. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_i unter der Voraussetzung, daß E bereits eingetreten ist, beträgt:

$$P(E_i/E) = \frac{P(E_i)\,P(E/E_i)}{\sum\limits_{j=1}^{k} P(E_j)\,P(E/E_j)}$$

Folgen von unabhängigen Versuchen

Zwei Versuche heißen *unabhängig*, wenn das Ergebnis des einen Versuchs ohne Einfluß auf das Ergebnis des anderen ist. Es werden n unabhängige Versuche ausgeführt, wobei in jedem Versuch genau eines von den k unvereinbaren Ergebnissen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P_1 = P(E_1)$, $P_2 = P(E_2), \ldots, P_k = P(E_k)$ eintritt. Bezeichnet man mit $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei n Versuchen das Ereignis E_1 m_1-mal, E_2 m_2-mal usw. eintritt $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n)$, so gilt:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\,m_2! \cdots m_k!}\,P_1^{m_1} P_2^{m_2} \cdots P_k^{m_k}$$

Speziell erhält man für $k = 2$ das **Bernoulli-Schema:**

$$P_1 = P; \quad P_2 = 1 - P = Q, \quad m_1 = m, \quad m_2 = n - m$$

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n - m)!}\,P^m Q^{n-m}$$

Eigenschaften von $P_n(m)$

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$$

$P_n(m)$ ist der Koeffizient von x^m in der Entwicklung des Polynoms $(Q + Px)^n$ nach Potenzen von x (*Binomialgesetz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen*).

$$P_n(m) < P_n(m+1) \quad \text{für} \quad m < nP - Q$$

$$P_n(m) > P_n(m+1) \quad \text{für} \quad m > nP - Q$$

$$P_n(m) = P_n(m+1) \quad \text{für} \quad m = nP - Q$$

Das Maximum von $P(m)$ liegt bei $\mu = \overline{m}_0 m_0 = nP - Q$.

$$\overline{m}_0 = \left\{\begin{matrix} m_0 \\ \text{der kleinsten ganzen} \\ \text{Zahl, die } m_0 \text{ enthält} \end{matrix}\right\} \text{ falls } m_0 \left\{\begin{matrix} \text{ganzzahlig} \\ \\ \text{nicht ganzzahlig} \end{matrix}\right.$$

Zufallsgrößen

Zufallsgrößen ξ (zufällige Variable) sind Veränderliche, deren Wert bei konstanten Bedingungen vom Zufall abhängt, wobei jeder dieser Werte mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auftritt. Zufallsvariable können diskret (x_k) bzw. stetig sein. Sie besitzen eine diskrete bzw. stetige *Verteilungsfunktion* der Wahrscheinlichkeiten:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

Eigenschaften von F

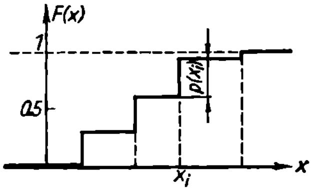
F ist eine monotone nichtfallende Funktion, d.h., aus $x_1 < x_2$ folgt $F(x_1) \leqq F(x_2)$.
F hat höchstens abzählbar viele Sprungstellen.
F ist linksseitig stetig.

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$$

Besonders wichtige Typen von Verteilungsfunktionen

Diskrete Verteilungsfunktionen (*Treppenfunktionen*)

Eine zufällige Veränderliche ξ, die nur endlich viele Werte x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) annehmen kann, bestimmt eine diskrete Verteilungsfunktion. Die angenommenen Werte sind die *Sprungstellen* und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten die *Sprunghöhen* der Verteilungsfunktion.



Verteilung der Wahrscheinlichkeit, daß ξ den Wert x_i annimmt:

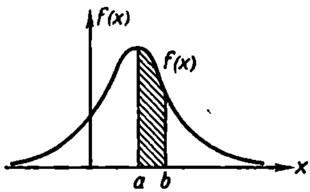
$$p(x_i) = P(\xi = x_i) \qquad i \in N$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$$

Diese Funktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß ξ einen Wert kleiner x annimmt.

Stetige Verteilungsfunktion



Die schraffierte Fläche stellt die Wahrscheinlichkeit $P(a \leqq \xi \leqq b) = F(b) - F(a)$ dar

Eine stetige Zufallsgröße ξ besitzt die stetige Verteilungsfunktion F:

$$F(x) = P(\xi < x) = P(-\infty < \xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\, dz$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

f heißt *Dichtefunktion* (*Wahrscheinlichkeitsdichte*), $f(x) \geqq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad P(a \leqq \xi \leqq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Momente

$$m(\xi - x)^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p(x_i) \qquad \text{für diskrete Zufallsgröße } \xi$$

(*Moment k-ter Ordnung*)

$$m(\xi - c)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - c)^k f(x)\, dx \qquad \text{für stetige Zufallsgröße } \xi$$

Für $c = 0$ heißen die $m(\xi)$ *Anfangsmomente*. Für $c = \mu$ heißen die $m(\xi - \mu)^k$ *Zentralmomente*.

Erwartungswert

Der Erwartungswert μ ist das Anfangsmoment 1. Ordnung bzw. das *gewogene arithmetische Mittel.*

$$\mu = E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \qquad \text{für diskrete Zufallsgröße } \xi$$

$$\mu = E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \qquad \text{für stetige Zufallsgröße } \xi$$

Varianz (Streuung)

Die Varianz σ^2 ist das Zentralmoment 2. Ordnung, σ heißt **Standardabweichung** bzw. **mittlere quadratische Abweichung.**

$$\sigma^2 = D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\, p(x_i)$$

für diskrete Zufallsgröße ξ

$$\sigma^2 = D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2\, f(x)\, dx$$

für stetige Zufallsgröße ξ

Rechenregeln

(C Konstante; ξ, η verschiedene Zufallsgrößen)

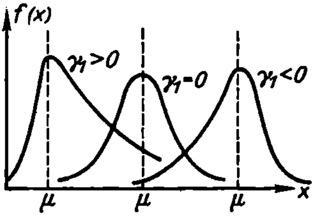
$\mu(C) = C$	$\sigma^2(C) = 0$
$\mu(\xi + \eta) = \mu(\xi) + \mu(\eta)$	$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$
$\mu(\xi\eta) = \mu(\xi)\,\mu(\eta)$	
$\mu(C\xi) = C\mu(\xi)$	$\sigma^2(C\xi) = C^2\sigma^2(\xi)$
$\mu(\xi + C) = \mu(\xi) + C$	$\sigma^2(\xi + C) = \sigma^2(\xi)$

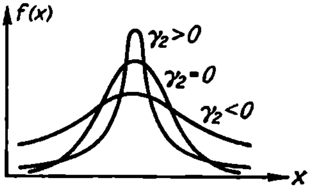
Variationskoeffizient: $v = \dfrac{\sigma}{\mu}$

Schiefe: $\gamma_1 = \dfrac{m(\xi - \mu)^3}{\sigma^3}$

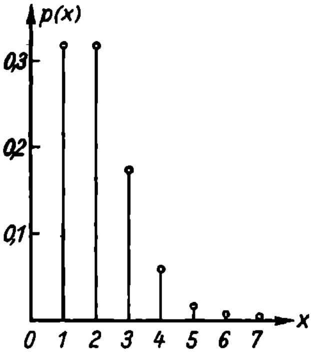
Exzeß: $\gamma_2 = \dfrac{m(\xi - \mu)^4}{\sigma^4} - 3$

Die Schiefe ist ein Maß für die *Symmetrie* und der Exzeß ein Maß für die *Steilheit* der Kurve.





Binomialverteilung (mit Zurücklegen der gezogenen Elemente!)



$$p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

$$p + q = 1$$

N, p, q, n siehe unten

$x_i = 1, 2, \ldots, n \qquad n \in N$

$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$

$$\gamma_1 = \frac{q-p}{\sigma}; \; \gamma_2 = \frac{1-6pq}{\sigma^2}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

Hypergeometrische Verteilung

Entgegen der Binomialverteilung werden die einmal ausgewählten Einheiten der Ausgangsgesamtheit (beliebig groß bei der Binomialverteilung), die hierbei endlich ist, nicht wieder in die Ausgangsgesamtheit zurückgeführt.

$$p(x_i) = \frac{\binom{Np}{x_i}\binom{Nq}{n-x_i}}{\binom{N}{n}}$$

N Ausgangsgesamtheit

p Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E_1

$p + q = 1$

$q = 1 - p$ dsgl. für E_2

$x_i = 1, 2, \ldots, n \quad n \in N$

n Anzahl der Stichproben

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq\,\frac{N-n}{N-1}$$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \sum_{x_i<x} \frac{\binom{Np}{x_i}\binom{Nq}{n-x_i}}{\binom{N}{n}}$

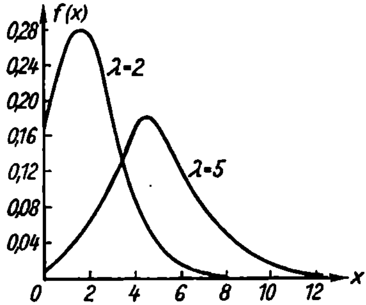
Poisson-Verteilung

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\mu = \lambda, \qquad \sigma^2 = \lambda$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\mu}$$



Verteilungsfunktion: $F(x) = \int\limits_0^x \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}\,dz$

Diese Verteilung ist praktisch nur für kleine p $\left(< \frac{1}{2}\right)$ anwendbar. Für große p-Werte rechnet man mit $q = 1 - p$.

Normalverteilung (Gauß-Laplace-Verteilung)

Gausssche Dichtefunktion:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{(Glockenkurve)} \quad x \in (-\infty; \infty)$$

mit μ (Erwartungswert) und σ^2 (Varianz) als Parameter. Dabei ist $\mu = x_{\text{Max}}$ und $\mu \pm \sigma = x_{\text{Wendep.}}$

Verteilungsfunktion: $F(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dz$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, \mu, \sigma^2)\,dx = 1$$

Näherungswerte für das Zeichnen der Glockenkurve

$x =$	$\mu \pm \frac{1}{2}\sigma$	$\mu \pm \sigma$	$\mu \pm \frac{3}{2}\sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$
$y =$	$\frac{7}{8} y_{\max}$	$\frac{5}{8} y_{\max}$	$\frac{2{,}5}{8} y_{\max}$	$\frac{1}{8} y_{\max}$	$\frac{1}{80} y_{\max}$

Wertetafel für Normalverteilung

x	$f(x, 0, 1)$	$F(x, 0, 1)$
0,0	0,3989	0,5000
1	3970	5398
2	3910	5793
3	3814	6179
4	3683	6554
5	3521	6915
6	3332	7257
7	3123	7580
8	2897	7881
9	2661	8159
1,0	2420	8413
1	2179	8643
2	1942	8849
3	1714	9032
4	1497	9192
5	1295	9332
6	1109	9452
7	0940	9554
8	0790	9641
9	0656	9713
2,0	0540	9772
1	0440	9821
2	0355	9861
3	0283	9893
4	0224	9918
5	0175	9938
6	0136	9953
7	0104	9965
8	0079	9974
9	0060	9981
3,0	0044	99865
2	0024	99931
4	0012	99966
6	00061	99984
8	00029	99993
4,0	000134	999968
4,5	000016	999997
5,0	000002	99999997

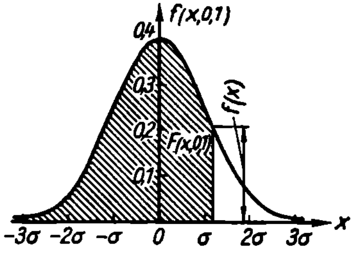
Normalform der Normalverteilung: ($\sigma = 1$, $\mu = 0$)

Dichtefunktion der normierten Normalverteilung:

$$f(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Jede Normalverteilung $f(x, \mu, \sigma^2)$ läßt sich durch die Transformation $x_{\text{norm}} = \dfrac{x_{\text{unnorm}} - \mu}{\sigma}$ (*Normalisierung*) auf die Normalform bringen.

10.2. Statistik

10.2.1. Summenzeichen

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad m, n \in N \ (m < n)$$

Summenkonvention von Gauss: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = [a] = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad c \text{ Konstante}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{m} a_i \qquad (k < m < n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=m+1}^{k-1} a_i \qquad (m < k < n)$$

$$\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1)\, c \qquad c \text{ Konstante}; \ (m < n)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_i(x)$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=c}^{n+c-m} a_{k-c+m}$$ Transformation der Indizes

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}$$ Doppelsumme = Zeilensumme + Spaltensumme

10.2.2. Produktzeichen

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n \qquad m, n \in N;\ m < n \Rightarrow n! = \prod_{x=1}^{n} x$$

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$ auch für Division gültig!

$$\prod_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad (m < n)$$

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=k}^{m} a_i \qquad (k < m < n)$$

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i : \prod_{i=m+1}^{k-1} a_i \qquad (m < k < n)$$

$$\prod_{i=m}^{n} c = c^{n-m+1}$$ c Konstante $(m < n)$

10.2.3. Mittelwerte

Arithmetisches Mittel ($\bar{x}$ oder AM)

$$\bar{a} = \mathrm{AM} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

$h_i = h,\ (i = 1, 2, \dots, n)$

Gewogenes arithmetisches Mittel:

$$\mu = \mathrm{AM}' = \frac{a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h_i}{N}$$

h_i Häufigkeit, Gewicht (s. S. 451)

N Anzahl der Beobachtungen

a_i Einzelwerte der Beobachtungen

Liegen die Werte nicht einzeln, sondern bereits gruppiert vor, treten an Stelle der a_i die Gruppenmitten m_i.

Schwerpunkteigenschaft des AM: $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - \text{AM})\, h_i = 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (a_i - c)\, h_i = \text{AM} - c$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} c a_i h_i = c \cdot \text{AM} \quad \text{aber} \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{h_i}{c}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{h_i}{c}} = \text{AM}$$

Quadratische Minimumeigenschaft: $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - \text{AM})^2\, h_i = \text{Minimum}$

Für Teilgruppen gilt: $\text{AM} = \dfrac{\text{AM}_1 N_1 + \text{AM}_2 N_2}{N_1 + N_2}$

Geometrisches Mittel ($\dot{x}$ oder GM)

$$\dot{a} = \text{GM} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad a_i > 0$$

$$\lg \text{GM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lg a_i$$

gewogenes geometrisches Mittel: $\text{GM}' = \sqrt[N]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{h_i}}; \quad N = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$

Durchschnittliches *Wachstumstempo*:

$$\overline{W} = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \cdot 100\,\%$$

Quadratisches Mittel (QM)

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2}$$

Gewogenes quadratisches Mittel: $\text{QM}' = \sqrt{\dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 h_i}; \quad N = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$

Harmonisches Mittel (HM)

$$\mathrm{HM} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Gewogenes harmonisches Mittel: $\mathrm{HM}' = \dfrac{N}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} h_i}$; $N = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$

Satz von CAUCHY: $a_{\mathrm{Max}} > \mathrm{QM} > \mathrm{AM} > \mathrm{GM} > \mathrm{HM} > a_{\mathrm{Min}}$

für $a_i \neq a_k$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$

Zentralwert, Median (Mittelwert der Lage) ($\tilde{x}$ oder Z)

Nach Ordnen der Beobachtungswerte a_i nach steigenden Werten wird der Median der mittelste Zahlenwert, dessen Index bei

n ungerade $\quad \dfrac{n+1}{2} \Rightarrow Z = a_{\frac{n+1}{2}}$

n gerade $\quad \dfrac{n}{2}$ und $\dfrac{n}{2} + 1$ ist, wobei der Median das AM der beiden mittelsten Werte ist $\Rightarrow Z = \dfrac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$

Lineare Minimumeigenschaft des Medians:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - Z|\, h_i < \sum_{i=1}^{n} |a_i - k|\, h_i \quad \text{für} \quad Z \neq k$$

Häufigster Wert, Dichtemittel, Modalwert

Der Modalwert ist der Beobachtungswert, der am häufigsten auftritt ($h_{i\mathrm{Max.}}$).

10.2.4. Streuungsmaße

Variationsbreite, Spannweite $R = a_{\mathrm{Max}} - a_{\mathrm{Min}}$

Durchschnittliche Abweichung, lineare Streuung

$d = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - M|\, h_i$; $N = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$; M typischer Wert (AM oder Z)

Für gruppierte Werte wird wieder $a_i \Rightarrow m_i$.

Mittlere quadratische Abweichung, Standardabweichung, quadratische Streuung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mathrm{AM})^2\, h_i}$$

Für $h_i = 1$ wird

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]}$$

Für gruppierte Werte wird wieder $a_i \Rightarrow m_i$.

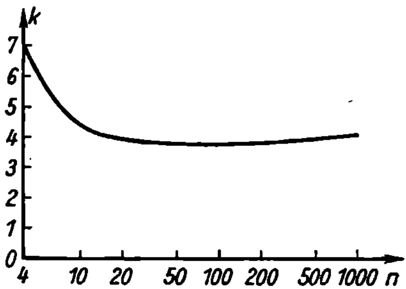
Variationskoeffizient, Variabilitätskoeffizient (relatives Streuungsmaß)

$$v = \frac{\sigma}{\mathrm{AM}} \cdot 100\,\%$$

Ausreißerproblem

In einer Stichprobe von $n + 1$ Meßwerten ist einer (x_{n+1}) auffallend groß. Die Grundgesamtheit sei normal verteilt, $\bar{x}$ und σ seien Mittelwert bzw. Standardabweichung der Stichprobe *ohne* den Ausreißer. Der Ausreißer wird fortgelassen, wenn

$$x_{n+1} > \bar{x} + k\sigma$$



Der Wert von k ist aus dem Bild abzulesen. Im praktischen Gebrauch ist es ausreichend, für $10 \leq N \leq 1000$ mit $k = 4$ zu rechnen.

Bei großen Werten von a_i empfiehlt sich die Einführung eines vorläufigen Durchschnitts D: $z_i = a_i - D$.

$$\bar{a} = D + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = D + \bar{z} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}$$

10.2.5. Methode der kleinsten Quadrate

Die Basis bildet eine *Zeitreihe* (dynamische Reihe), in der empirische Werte einem Zeitpunkt (Zeitraum) zugeordnet sind. Die erkennbare Entwicklungsrichtung heißt *Grundrichtung, Entwicklungsrichtung* oder *Trend*. Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt eine Näherungsfunktion, bei der die Summe der Quadrate der Abweichungen der Funktionswerte y_i von den statistischen Werten s_i ein Minimum ergibt.

$$S = \sum_{i=1}^{n}(s_i - y_i)^2 \to \text{Min.} \qquad \textit{Gaußsche Minimumbedingung}$$

Mit dem Ansatz $y_i = f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m$ wird

$$S = \sum_{i=1}^{n}(s_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m)^2 \to \text{Min.}$$

Die a_k findet man durch partielle Ableitung die Normalgleichungen und Nullsetzen.
Praktisch genügt meist die Beschränkung auf lineare und quadratische (progressive bzw. degressive) *Tendenz:* (Siehe auch Ausgleichsrechnung S. 452).

Linear:
$$\sum_{i=1}^{n} s_i = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Quadratisch (Summationsgrenzen wie oben):
$$\sum s_i = a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2$$
$$\sum s_i x_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3$$
$$\sum s_i x_i^2 = a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4$$

Vereinfacht wird die Berechnung der a_k, wenn man die Zeitabschnitte x_i so wählt, daß

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2k-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

Linear: $\sum s_i = a_0 n; \quad s_i x_i = a_1 \sum x_i^2$ Summationsgrenzen wie S. 446

Quadratisch: $\sum s_i = a_0 n + a_2 \sum x_i; \quad s_i x_i = a_1 \sum x_i^2$

$$\sum s_i x_i^2 = a_0 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^4$$

Erreicht wird die o.a. Bedingung, wenn je eine Hälfte der x_i-Werte positiv bzw. negativ wird (mittelstes Glied erhält Zeitwert Null).

Grad der absoluten Anpassung $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (s_i - y_i)^2}{n}}$

Grad der relativen Anpassung $v = \dfrac{\sigma}{\dfrac{\sum s_i}{n}} \cdot 100\,\%$

10.2.6. Lineare Regression, lineare Korrelation

Meßreihen mit 2 Merkmalen werden auf Abhängigkeiten untersucht (korrelativer Zusammenhang zwischen den x_i und y_i). Die *Regressionsgleichung* stellt den analytischen Zusammenhang zwischen den Variablen her, die entstehende Gerade paßt sich dem Punktschwarm optimal an (*Regressionsgerade, Beziehungsgerade*).

Ansatz $\tilde{y} = a_0 + a_1 x \qquad a_1$ *Regressionskoeffizient*

Lineare Regressionsgleichung:

$$\tilde{y} = \bar{y} + \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i} (x - \bar{x})$$ Summationsgrenzen wie S. 446

mit $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n-2} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2}$

Der Grad der Abhängigkeit (Exaktheit des linearen Zusammenhangs) wird im *Korrelationskoeffizienten* r_{xy} ausgedrückt:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - x)^2 \cdot \sum (y_i - y)^2}} \qquad r_{xy} \in [-1, 1]$$

Mit der *Kovarianz* $\sigma_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}\right)$

werden $r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, $a_1 = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$$r_{xy} = a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Das *Bestimmtheitsmaß* $B_{xy} = r_{xy}^2$.

10.3. Fehlerrechnung

Grundbegriffe

X wahrer Wert, x_i *gemessener Wert*

wahrer Fehler $\varepsilon_i = X - x_i$ *Korrektion* $-\Delta x$

absoluter Fehler Δx $x_i - \Delta x \leqq X \leqq x_i + \Delta x$

relativer Fehler $\delta = \left|\frac{\Delta x}{X}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x_i}\right| \Rightarrow$ in Prozent *prozentualer Fehler*

Eingangsfehler

Fehler des Resultats einer Rechnung, der infolge der Ungenauigkeit der eingehenden Daten entsteht.
Sind $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ die Fehler der Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so hat die Größe $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Eingangsfehler

$$\Delta y \approx \sum_{\nu=1}^{n} \Delta x_\nu \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_\nu} = \mathrm{d}y$$

Maximaler absoluter Eingangsfehler

$$\Delta y_{\max} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \left| \Delta x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \right| \qquad \text{für } y = f(x)\text{:}\quad \Delta y_{\max} = f'(x)\,\Delta x$$

Maximaler relativer Eingangsfehler

$$\delta_{\max} = \left|\frac{\Delta y_{\max}}{y}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \Delta x_\nu \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_\nu}}{f}\right|$$

Sonderfälle

a) $$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\Delta y \leqq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n$$

$$\delta \leqq \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right|$$

b) $$y = x_1 - x_2$$

$$\Delta y \leqq \Delta x_1 + \Delta x_2; \quad \delta \leqq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2} \qquad (x_1 \neq x_2)$$

c) $$y = C x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$\Delta y \leqq |C| \, [|\Delta x_1 x_2 \cdots x_n| + |x_1 \Delta x_2 x_3 \cdots x_n| + \cdots + \\ + |x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \Delta x_n|]$$

$$\delta \leqq |C| \left[\left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right|\right]$$

d) $$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad (x_2 \neq 0)$$

$$\Delta y \leqq \frac{|x_2| \, \Delta x_1 + |x_1| \, \Delta x_2}{x_2^2}$$

$$\delta \leqq \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| \qquad x_1 \neq 0$$

e) $$y = x^n \qquad (x > 0)$$

$$\Delta y \leqq \Delta x \, |n x^{n-1}| \qquad \delta \leqq \left| n \frac{\Delta x}{x} \right|$$

f) $$y = C \log_a x \qquad (x > 0)$$

$$\Delta y \leqq \left|\frac{C}{\ln a}\right| \left|\frac{\Delta x}{x}\right|; \qquad \delta \leqq \left|\frac{1}{\ln a}\right| \left|\frac{\Delta x}{x \log_a x}\right|$$

10.4. Ausgleichsrechnung

Beobachtungen gleicher Genauigkeit

X wahrer Wert, x_i gemessener Wert

Summenkonvention (Gauss): $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = [x]$

Scheinbarer Wert (Mittelwert) $\bar{x} = \dfrac{[x]}{n}$

scheinbarer Fehler $v_i = \bar{x} - x_i \Rightarrow [v] = 0$ (Probe)

wahrer Fehler $\varepsilon_i = X - x_i$

mittlerer Fehler des Einzelwertes (Streuungsmaß)

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \approx \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

mittlerer Fehler des Mittelwertes $\bar{x}$:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}} \approx \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

Das Ergebnis einer Meßreihe ist dann $\bar{x} \pm m_{\bar{x}}$.

Ausgleichsbedingung $[vv] \to$ Min.

Fehlerfortpflanzungsgesetz für mittlere Fehler von Gauß:

Bei mehreren Meßreihen mit den Ergebnissen $x_i \pm m_{\bar{x}_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ hat die Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ den mittleren Fehler

$$m_y = \pm \sqrt{\sum_{\nu=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)^2 m_{\bar{x}_\nu}^2}$$

Beispiel:

Bestimmung der Wanddicke eines Hohlzylinders; Außendurchmesser D, Innendurchmesser d

Wanddicke $w = \frac{1}{2}(D - d)$ $\quad \frac{\partial w}{\partial D} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial d} = -\frac{1}{2}$

Für D und d wurden jeweils 5 Messungen durchgeführt:

D	v_i	v_iv_i	d	v_i	v_iv_i
9,98	−0,01	0,0001	9,51	+0,01	0,0001
9,97	−0,02	0,0004	9,47	−0,03	0,0009
10,01	+0,02	0,0004	9,50	±0,00	0,0000
9,98	−0,01	0,0001	9,49	−0,01	0,0001
10,02	+0,03	0,0009	9,52	+0,02	0,0004
49,96	0,00	0,0019	47,49	−0,01	0,0015

$$\bar{D} = \frac{49{,}96}{5} = 9{,}99 \qquad \bar{d} = \frac{47{,}49}{5} = 9{,}50$$

$$m = \sqrt{\frac{0{,}0019}{4}} = 0{,}02 \qquad m = \sqrt{\frac{0{,}0015}{4}} = 0{,}02$$

$$m_{\bar{D}} = 0{,}01 \qquad m_{\bar{d}} = 0{,}01$$

Für die Wanddicke erhält man dann nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\bar{w} = \frac{1}{2}(\bar{D} - \bar{d}) = \frac{0{,}49}{2} = 0{,}245$$

$$m_w = \sqrt{\frac{1}{4} m_{\bar{D}}^2 + \frac{1}{4} m_{\bar{d}}^2} = \sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}0001 + 0{,}25 \cdot 0{,}0001}$$

$$m_w = \frac{0{,}01}{\sqrt{2}} = 0{,}00707 \approx 0{,}007$$

Beobachtungen ungleicher Genauigkeit

Bei der Kombination eines Ergebnisses aus mehreren Teilergebnissen unterschiedlicher Genauigkeit sind diese mit *Gewichtsfaktoren* h_i zu belegen. Aus dem einfachen wird das gewogene arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{[h\bar{x}]}{[h]} = \frac{h_1 x_1 + h_2 x_2 + \cdots + h_n x_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$$

h_i Gewichte

x_i Mittelwert der i-ten Meßreihe

$$h_1 : h_2 = m_2^2 : m_1^2$$

m_i mittlerer Fehler

scheinbarer Fehler des Mittelwertes x_i $\quad v_i = x - x_i \qquad [hv] = 0$

mittlerer Fehler der Gewichtseinheit $m_0 = \pm\sqrt{\frac{[hvv]}{n-1}}$

(*Gewichtseinheitsfehler*)

mittlerer Fehler des gewogenen arithmetischen Mittels

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[h]}} = \pm\sqrt{\frac{[hvv]}{[h](n-1)}}$$

Verschieden genaue Messungen werden auf gleiche Genauigkeit normiert, indem man die x_i mit $\sqrt{h_i}$ multipliziert.

Ausgleichsbedingung: $[hvv] \to$ Min.

Vermittelnde Beobachtungen

a) *Linearer Zusammenhang*

Es sind n Wertepaare $(x_i; y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit gleicher Genauigkeit gemessen $(n > 2)$, die der linearen Gleichung $y = a_0 + a_1 x$ (*Ausgleichsgerade*) genügen sollen.

Ansatz: $a_0 + a_1 x_i - y_i = v_i$ $\qquad [vv] \to \text{Min.}$

a_0, a_1 werden aus den *Normalgleichungen* bestimmt:

$$na_0 + a_1[x] = [y]$$
$$a_0[x] + a_1[xx] = [yx]$$

mittlerer Fehler von y_i $\quad m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}$

Sollen die Werte $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ri})$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ n > r + 1)$ einer linearen Gleichung genügen, so sind die Koeffizienten a_i der linearen Gleichung $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r$ aus den folgenden *Normalgleichungen* zu bestimmen:

$$na_0 + a_1[x_1] + a_2[x_2] + \cdots + a_r[x_r] = [y]$$
$$a_0[x_i] + a_1[x_1 x_i] + a_2[x_2 x_i] + \cdots + a_r[x_r x_i] = [yx_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

Beispiel:

Es sind $n = 5$ Wertepaare gemessen worden:

(4; 3), (7; 4,5), (8; 5), (9; 6,1), (10; 6,4).

Es soll die Ausgleichsgerade ermittelt werden.

$$[x] = 4 + 7 + 8 + 9 + 10 = 38$$
$$[y] = 3 + 4{,}5 + 5 + 6{,}1 + 6{,}4 = 25$$
$$[xx] = 16 + 49 + 64 + 81 + 100 = 310$$
$$[yx] = 12 + 31{,}5 + 40 + 54{,}9 + 64 = 202{,}4$$

Normalgleichungen: $5a_0 + 38a_1 = 25$

$$38a_0 + 310a_1 = 202{,}4$$

$$a_0 = \frac{25 \cdot 310 - 38 \cdot 202{,}4}{5 \cdot 310 - 38 \cdot 38} = 0{,}555$$

$$a_1 = \frac{5 \cdot 202{,}4 - 25 \cdot 38}{5 \cdot 310 - 38 \cdot 38} = 0{,}585$$

Ausgleichsgerade: $y = 0{,}555 + 0{,}585x$

Bei ungleicher Genauigkeit der einzelnen Werte, d.h., wenn $(y_i, x_{1i}, \ldots, x_{ri})$ das Gewicht h_i hat, werden die a_j aus den folgenden Normalgleichungen bestimmt:

$$a_0[h] + a_1[hx_1] + \cdots + a_r[hx_r] = [hy]$$

$$a_0[hx_i] + a_1[hx_1x_i] + \cdots + a_r[hx_rx_i] = [hyx_i]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

b) *Nichtlinearer Zusammenhang*

Die n gemessenen Wertepaare $(x_i; y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sollen einer ganzen rationalen Funktion $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_rx^r$ $(r + 1 < n)$ genügen.
Man löst die Aufgabe mit den Normalgleichungen des Falles a), indem man x_i durch x^i ersetzt.

Beispiel:

Im Fall der *Ausgleichsparabel* erhält man die Normalgleichungen:

$$na_0 + a_1[x] + a_2[x^2] = [y]$$

$$a_0[x] + a_1[xx] + a_2[x^2x] = [yx]$$

$$a_0[x^2] + a_1[xx^2] + a_2[x^2x^2] = [yx^2]$$

Bedingte Beobachtungen

Aus einer Meßreihe sind die Werte $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ mit gleicher Genauigkeit bestimmt worden. Die Werte sollen t lineare Bedingungsgleichungen

$$[a_ix] = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ir}x_r = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

streng erfüllen.
Die an die gemessenen Werte anzubringenden *Korrekturen* v_n $(n = 1, 2, \ldots, r)$ werden aus den *Korrelaten* k_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$ berechnet:

$$v_n = \sum_{i=1}^{t} a_{in}k_i \qquad (n = 1, 2, \ldots, r)$$

Die Korrelaten werden aus den *Normalgleichungen* berechnet:

$$[a_ia_1]\,k_1 + [a_ia_2]\,k_2 + \cdots + [a_ia_t]\,k_t = w_i \quad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

$$w_i = c_i - [a_ix']$$

Sind die Werte $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ mit verschiedener Genauigkeit ermittelt worden, d.h., ist x_n mit dem Gewicht h_n bestimmt worden, so hat man für v bzw. k die Bestimmungsgleichungen:

Korrekturen: $v_n = \sum_{i=1}^{t} \frac{a_{in}k_i}{h_n}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots, r)$

Normalgleichungen für die Korrelaten:

$$\left[\frac{a_i a_i}{h}\right] k_1 + \left[\frac{a_i a_2}{h}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{a_i a_t}{h}\right] k_t = w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

$$w_i = c_i - [a_i x']$$

Beispiel:

Die Werte $x_1' = -1{,}2$ und $x_2' = 1{,}9$ sollen die Gleichungen

$$3x_1 + 4x_2 = 5$$
$$-7x_1 + 2x_2 = 11$$

streng erfüllen. Es gilt dann

$$w_1 = 5 - 3x_1' - 4x_2' = 5 + 3{,}6 - 7{,}6 = 1$$
$$w_2 = 11 + 7x_1' - 2x_2' = 11 - 8{,}4 - 3{,}8 = -1{,}2$$
$$[a_1a_1] = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$$
$$[a_1a_2] = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 2 = -13$$
$$[a_2a_1] = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} = (-7) \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -13$$
$$[a_2a_2] = a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} = (-7)(-7) + 2 \cdot 2 = 53$$

Normalgleichungen:

$$25k_1 - 13k_2 = 1$$
$$-13k_1 + 53k_2 = -1{,}2$$

Daraus erhält man $k_1 = 0{,}032$ und $k_2 = -0{,}015$.
Nun kann man die Korrekturen berechnen. Es gilt

$$v_1 = a_{11}k_1 + a_{21}k_2 = 3 \cdot 0{,}032 + (-7) \cdot (-0{,}015) = 0{,}2$$
$$v_2 = a_{12}k_1 + a_{22}k_2 = 4 \cdot 0{,}032 + 2 \cdot (-0{,}015) = 0{,}1$$

Bringt man diese Korrekturen an die Meßergebnisse x_1', x_2' an, so erhält man als endgültige Werte $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$, welche die Bedingungsgleichungen streng erfüllen.

11. Lineare Optimierung

11.1. Allgemeines

Unter Optimierung versteht man Verfahren, mit denen bestimmte Zielstellungen durch rationellsten Einsatz der gegebenen Möglichkeiten optimiert werden können. Die Aufgabenstellung führt entweder zu einer Maximal- oder einer Minimalaufgabe, die meist eine Vielzahl von Variablen enthält.
Lineare Optimierung ist ein mathematisches Verfahren zur Bestimmung des Optimums mit Hilfe eines mathematischen Modells aus linearen Gleichungen oder Ungleichungen, wobei die ebenfalls lineare *Ziel-* oder *Zweckfunktion* unter gewissen einschränkenden Bedingungen zu einem Optimum geführt wird. Das mathematische Modell ist die mathematische Formulierung der Aufgabenstellung.
Die Lösung des Optimierungsproblems stellt die Erfüllung des aufgabenspezifischen Optimalkriteriums dar.
Die Anwendung der linearen Optimierung erfolgt in der Hauptsache zur Lösung ökonomischer und technisch-ökonomischer Probleme, von denen nur relativ einfache (mit nur wenigen Variablen) unter ökonomischem Aufwand manuell lösbar sind. Komplizierte Probleme erfordern den Einsatz der elektronischen Datenverarbeitung mit z.T. erheblichen Anforderungen an die Speicherkapazität der Anlage. Das Verfahren der Extremwertbestimmung mittels Differentialrechnung versagt, da bei der Differentiation die Variablen aus linearen Gleichungen verschwinden.
Normalform der linearen Optimierung nennt man die Maximalaufgabe, bei der die einschränkenden Bedingungen nur positive Absolutwerte aufweisen.
Der Algorithmus des verwendeten mathematischen Modells ist die Zusammenfassung aller Vorschriften zur Berechnung der Lösung. Aus der Vielzahl der Verfahren werden die graphische Methode und der Simplex-Algorithmus behandelt.

Aufstellen des mathematischen Modells

Ziel- oder Zweckfunktion:

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n = \sum_{k=1}^{n} c_kx_k \rightarrow \text{Optimum}$$

in Matrizenschreibweise mit

Zeilenvektor $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$

$$\text{Spaltenvektor } \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{x} \to \text{Optimum} \qquad \begin{aligned} a_{ik} &= \text{konst} \\ b_i &= \text{konst} \\ c_k &= \text{konst} \\ x_k &= \text{variabel} \end{aligned}$$

Einschränkende Bedingungen
(für Maximalaufgabe $\leqq b_i$; für Minimalaufgabe $\geqq b_i$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\gtreqless b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\gtreqless b_m \end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \gtreqless b_i \qquad i, k \in N$$

in Matrizenschreibweise mit

$$\text{Koeffizientenmatrix } \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} \gtreqless b \qquad \text{Normalform } b_i \geqq 0$$

Nicht-Negativitätsbedingung:

$$x_k \geqq 0 \quad k = 1; 2; \ldots; n$$

Die einschränkenden Bedingungen und die Nicht-Negativitätsbedingung bestimmen den Definitionsbereich.
Die Bedingung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \leqq b$ bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \geqq b$ ist durch Anwendung der Ungleichung $a \geqq b \Leftrightarrow -a \leqq -b$ stets erreichbar.
Die Menge aller zulässigen Lösungen sind alle Vektoren $\mathfrak{x}$, für die die einschränkenden Bedingungen gelten.

Die Lösung $\mathfrak{x}_0$, für die die Zielfunktion ein Optimum wird, heißt *optimales Programm.*

11.2. Graphisches Lösungsverfahren

Dieses Verfahren ist nur anwendbar auf Zielfunktionen mit zwei Variablen.
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Achsen x_1 und x_2 wird zunächst graphisch der Bereich aller geordneten Wertepaare $(x_1; x_2)$ ermittelt, für den die einschränkenden und Nicht-Negativitätsbedingungen erfüllt sind, in dem die Geraden

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

usw.

graphisch dargestellt werden.
Sind die einschränkenden Bedingungen als Ungleichungen vorgegeben, teilt jede dieser Geraden die Fläche in einen für diese Bedingung möglichen und einen unmöglichen Bereich. Die zulässigen Lösungen liegen in dem Bereich, der für alle Bedingungen zulässig ist.
Die optimale Lösung findet man durch Einzeichnen des Bildes der abgewandelten Zielfunktion $z(x_1; x_2) = c$ (c willkürliche Konstante) und Parallelverschiebung dieser $c \to c_{\max} \Rightarrow$ Optimum $=$ $=$ Maximum. Die optimale Lösung ist eindeutig, wenn die Gerade für $c_{\max}$ durch eine Ecke des möglichen Bereichs verläuft (*Eckenlösung*), sie ist mehrdeutig, wenn die graphisch dargestellte Zielfunktion parallel zu einer der o.a. Geraden aus den einschränkenden Bedingungen verläuft.
Bei Minimisierung ist die Gerade in Richtung $c \to c_{\min}$ zu verschieben.

Beispiel:

Es ist das optimale Programm der Zielfunktion $z(x_1; x_2) = 10x_1 + 15x_2 \to$ Maximum zu ermitteln.

Einschränkende Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 102 \\ 15x_1 + 3x_2 &\leq 450 \\ x_1 \qquad &\leq \ 25 \\ x_2 &\leq \ 45 \end{aligned}$$

Nicht-Negativitätsbedingung:

$$x_1 \geqq 0$$
$$x_2 \geqq 0$$

Lösung:

$x_1; x_2 \geqq 0 \Rightarrow$ 1.Quadrant

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & \leqq 25 \Rightarrow \text{Gerade} \parallel x_1\text{-Achse} \\ x_2 & \leqq 45 \Rightarrow \text{Gerade} \parallel x_2\text{-Achse} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Rechteck abgetrennt}$$

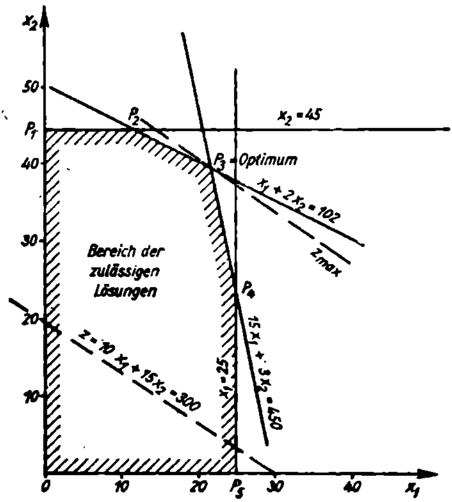
$x_1 + 2x_2 = 102 \wedge 15x_1 + 9x_2 = 450$ zwei Geraden

Bereich der zulässigen Lösungen: Sechseck $O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$
Mit $c = 300 \Rightarrow z(x_1; x_2) \equiv 10x_1 + 15x_2 = 300$ Gerade, eine Menge zulässiger Lösungen, kein Optimum.
Parallelverschiebung der Geraden durch $P_3 \Rightarrow$ Optimum = Maximum.

$$\mathfrak{x}_0 = (22; 40)$$

Wert der Zielfunktion für Optimum:

$$z_{\max} = 10 \cdot 22 + 15 \cdot 40 = 820$$



11.3. Simplexverfahren (Simplex-Algorithmus)

Das Simplexverfahren ist ein Iterationsverfahren zur schrittweisen Annäherung an das Optimum und ist für 2 und mehr Variable anwendbar. Es läßt sich für den Aufgabenkomplex Transportoptimierung vereinfachen (Minimisierung der Kostenmatrix).

Unter *Basislösung* versteht man eine die einschränkenden Bedingungen erfüllende Lösung, die höchstens so viele Variable (*Basisvariable*) mit einem Wert $\neq 0$ besitzt, wie voneinander unabhängige einschränkende Bedingungen vorhanden sind. Die Menge der Basisvariablen heißt *Basis*, die nicht zur Basis gehörenden, Null gesetzten Variablen heißen *Nichtbasisvariable.*

Die Nicht-Negativitätsbedingungen werden beim Verfahren automatisch berücksichtigt und zählen nicht mit bei der Wahl der Anzahl der Basisvariablen.

Jede Basislösung entspricht einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs bei der graphischen Methode (siehe 11.2.).

Lösungsweg:

1. *Normalform der linearen Optimierung*

Die als Ungleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{b}$ gegebenen einschränkenden Bedingungen werden durch Einführen fiktiver Variabler (Schlupfvariable) in Gleichungen umgewandelt:

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + u_1 & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + u_2 & & & = b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & + u_m & = b_m.
\end{array}$$

Die Schlupfvariablen vermitteln in den Basislösungen ein Bild von den noch ungenutzten Reserven.

Die Zielfunktion wird:

$$z(x_1; x_2; \ldots; x_n; u_1; u_2; \ldots; u_m) =$$
$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + \cdots \rightarrow \text{Max.}$$

Zielfunktionen $z \rightarrow$ Min. werden durch Multiplikation mit (-1) in $z' \rightarrow$ Max. überführt.

Die als Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ gegebenen einschränkenden Bedingungen werden wie oben durch Einführen künstlicher Variabler in die Normalform überführt, wobei die Zielfunktion sich wie folgt ändert:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - N(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)$$

mit $N \gg c_1; c_2; \ldots$

Die als Ungleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \geqq \mathfrak{b}$ gegebenen einschränkenden Bedingungen werden durch Einführen negativer Schlupfvariabler in Gleichungen umgewandelt.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - u_1 = b_1$$

usw.

Um die Normalform zu erhalten, müssen die Schlupfvariablen positiv werden, wozu jede Zeile von derjenigen mit dem größten b_i abgezogen wird. Die Differenzen und die Zeile mit größerem b_i bilden das Gleichungssystem der Normalform.

2. *1. Basislösung (Ausgangslösung)*

Setze alle $x_k = 0$, alle $u_1 \neq 0 \Rightarrow$ alle u_1 gehören zur Basis der 1. Basislösung.
Basisdarstellung der 1. Basislösung:

$$\begin{array}{lllll}
u_1 = b_1 & - a_{11}x_1 & - a_{12}x_2 & - \cdots & - a_{1n}x_n \\
u_2 = b_2 & - a_{21}x_1 & - a_{22}x_2 & - \cdots & - a_{2n}x_n \\
\vdots \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & & \quad \vdots \\
u_m = b_m & - a_{m1}x_1 & - a_{m2}x_2 & - \cdots & - a_{mn}x_n
\end{array}$$

Basisdarstellung der Zielfunktion der 1. Basislösung:

$$z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots$$

Basislösung $(0; 0; \ldots; b_1; b_2; \ldots; b_m)$
[in der Reihenfolge der speziellen Werte für

$$(x_1; x_2; \ldots; u_1; u_2; \ldots)$$

angegeben].

3. *Prüfung der Zielfunktion der 1. Basislösung auf Optimalität*

Kriterium: Bei Maximalaufgaben läßt sich das Ergebnis verbessern, solange in der Basisdarstellung der Zielfunktion Koeffizienten $c_i > 0$ auftreten.

4. *Auswahl einer bisherigen Nichtbasisvariablen zum Austausch gegen eine Basisvariable*

Einführen derjenigen Nichtbasisvariablen aus z_1, die den größten Koeffizienten c_i aufweist, da diese die größte Werterhöhung von z bringt.

5. ***Auswahl der auszutauschenden bisherigen Basisvariablen***

Man bildet alle Quotienten $\frac{b_i}{a_{ij}}$, wobei x_j die neue einzuführende Basisvariable ist. Der kleinste dieser Quotienten bestimmt die auszuwechselnde Basisvariable, die zur gleichen Gleichung gehört (u_l): $a_{ij} \gtrdot 0$.

6. *Austausch der Variablen*

Durch Umformen der entsprechenden Gleichung aus der Basisdarstellung der 1. Basislösung ergibt sich eine Gleichung für die neue Basisvariable: $x_j = b_j/a_{ij} - a_{i1}/a_{ij} \cdot x_1 - \cdots - u_l$, deren rechte Seite in die übrigen Gleichungen für x_j eingesetzt wird.

7. *2. Basislösung*

$$
\begin{aligned}
u_1 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - \\
&\quad - a_{1j}\left(\frac{b_j}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \cdots - u_l\right) - \cdots - a_{1n}x_n \\
u_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - \cdots; \\
\vdots &\qquad \vdots \\
u_{j-1} &= \cdots; \\
u_{j+1} &= \cdots; \\
\vdots &\qquad \vdots \\
x_j &= \frac{b_j}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \cdots - u_l
\end{aligned}
$$

Links steht die neue Basis, in der gegenüber der 1. Basis x_l und u_l ausgetauscht sind.
Das Verfahren wird dann weiter wie ab 2. beschrieben fortgesetzt, und zwar solange, bis alle Koeffizienten der Basisdarstellung der Zielfunktion der p-ten Basislösung $= 0$. Dann ist das Optimum erreicht.

Beispiel:
Das bereits in 11.2. graphisch gelöste Beispiel soll mit Hilfe der Simplexmethode wiederholt werden.

$$z(x_1; x_2) = 10x_1 + 15x_2 \to \text{Maximum}$$

Einschränkende Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 102 \\ 15x_1 + 3x_2 &= 450 \\ x_1 &= 25 \\ x_2 &= 45 \end{aligned}$$

Nicht-Negativitätsbedingung:

$$\begin{aligned} x_1 &\geqq 0 \\ x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Simplexmethode wird bei nur 2 Variablen gegenüber der graphischen Methode bedeutend aufwendiger.

1. *Normalform*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + u_1 &= 102 \\ 15x_1 + 3x_2 + u_2 &= 450 \\ x_1 + u_3 &= 25 \\ x_2 + u_4 &= 45 \end{aligned}$$

2. *1. Basislösung*

Basisdarstellung:

$$\begin{aligned} u_1 &= 102 - x_1 - 2x_2 \\ u_2 &= 450 - 15x_1 - 3x_2 \\ u_3 &= 25 - x_1 \\ u_4 &= 45 - x_2 \end{aligned}$$

Basislösung: $(0; 0; 102; 450; 25; 45)$ entspricht Punkt P_0 der graphischen Lösung

Basisdarstellung der Zielfunktion:

$$z_1' = 10x_1 + 15x_2$$

Wert der Zielfunktion:

$$z_1 = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 102 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 25 + 0 \cdot 45 = 0$$

3. *Prüfung auf Optimalität*

Nicht optimal, da in der Basisdarstellung $c_1 > 0$; $c_2 > 0$.

4. *Neue Basisvariable* x_2, da in Basisdarstellung größten Koeffizienten.

5. *Auszutauschende bisherige Basisvariable*

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{102}{2} = 51; \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{450}{3} = 150; \quad \frac{b_4}{a_{42}} = \frac{45}{1} = 45 \text{ kleinster Wert}$$

$\Rightarrow u_4$ ist zu entfernen

6. *Austausch der Variablen*

$$x_2 = 45 - u_4$$

7. *2. Basislösung*

$$\begin{aligned}
u_1 &= 102 - x_1 - 2(45 - u_4) &&= 12 - x_1 + 2u_4 \\
u_2 &= 450 - 15x_1 - 3(45 - u_4) &&= 315 - 15x_1 + 3u_4 \\
u_3 &= \ 25 - x_1 &&= 25 - x_1 \\
x_2 &= \ 45 - u_4 &&= 45 - u_4
\end{aligned}$$

Basislösung: $(0;\ 45;\ 102;\ 450;\ 25;\ 0) \Rightarrow$ Punkt P_1

Basisdarstellung: $z_2' = 10x_1 + 15(45 - u_4) = 10x_1 - 15u_4 + 675$

Zielfunktion: $z_2 = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 45 = 675$

8. *Nicht optimal*, da Faktor von $x_1 > 0 \Rightarrow$ auszutauschen x_1

9. $\dfrac{b_1'}{a_{11}'} = \dfrac{12}{1} = 12$ kleinster Wert $\Rightarrow$ entfernen von u_1

$$\frac{b_2'}{a_{21}'} = \frac{315}{15} = 21$$

$$\frac{b_3'}{a_{31}'} = \frac{25}{1} = 25$$

10. *3. Basislösung*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ 12 - u_1 + 2u_4 &&= \ 12 - u_1 + 2u_4 \\
x_2 &= \ 45 - u_4 &&= \ 45 - u_4 \\
u_2 &= 315 - 15(12 - u_1 + 2u_4) + 3u_4 &&= 135 + 15u_1 - 27u_4 \\
u_3 &= \ 25 - (12 - u_1 + 2u_4) &&= \ 13 + u_1 - 2u_4
\end{aligned}$$

Basislösung: (12; 45; 0; 135; 13; 0) $\Rightarrow$ Punkt P_2

Basisdarstellung:

$$z_3' = 10(12 - u_1 + 2u_4) + 15(45 - u_4) =$$
$$= -10u_1 + 5u_4 + 795$$

Zielfunktion: $z_3 = 10 \cdot 12 + 15 \cdot 45 = 795$

11. *Nicht optimal,* da Faktor von $u_4 > 0 \Rightarrow$ auszutauschen u_4

12. $\left(\dfrac{b_1''}{a_{16}'} = \dfrac{12}{-2} = -6\text{, entfällt wegen } a_{16}'' < 0\right)$

$$\frac{b_2''}{a_{26}''} = \frac{45}{1} = 45; \quad \frac{b_3''}{a_{36}''} = \frac{135}{27} = 5 \Rightarrow \text{entfernen von } u_2$$
$$\frac{b_4''}{a_{46}''} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

13. *4. Basislösung*

$$x_1 = 12 - u_1 + 2\left(5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2\right) = 22 + \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{27}u_2$$
$$x_2 = 45 - \left(5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2\right) = 40 - \frac{5}{9}u_1 + \frac{1}{27}u_2$$
$$u_3 = 13 + u_1 - 2\left(5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2\right) = 3 - \frac{1}{9}u_1 + \frac{2}{27}u_2$$
$$u_4 = 5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2 = 5 + \frac{5}{9}u_1 - \frac{1}{27}u_2$$

Basislösung: (22; 40; 0; 0; 3; 5) $\Rightarrow$ Punkt P_3

Basisdarstellung:

$$z_4' = 10\left(22 + \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{27}u_2\right) + 15\left(40 - \frac{5}{9}u_1 + \frac{1}{27}u_2\right) =$$
$$= 820 - 7\frac{2}{9}u_1 - \frac{5}{27}u_2$$

$$z_4 = 10 \cdot 22 + 15 \cdot 40 = \underline{\underline{820}}$$

11.4. Simplextabelle

Die Simplextabelle stellt den unter 11.3. beschriebenen Rechengang übersichtlich tabellarisch dar.

Variable und Schlupfvariable		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
Basisvariable	0	10	15	0	0	0	0	
I u_1	102	1	2	1	0	0	0	51
u_2	450	15	3	0	1	0	0	150
u_3	25	1	0	0	0	1	0	–
u_4	45	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	45
	−675	10	0	0	0	0	−15	
II u_1	12	$\boxed{1}$	0	1	0	0	2	12
u_2	315	15	0	0	1	0	−3	21
u_3	25	1	0	0	0	1	0	25
$\to x_2$	45	0	1	0	0	0	1	–
	−795	0	0	−10	0	0	+5	
III $\to x_1$	12	1	0	1	0	0	−2	(−6) entfällt
u_2	135	0	0	15	1	0	$\boxed{27}$	5
u_3	13	0	0	−1	0	1	2	6,5
x_2	45	0	1	0	0	0	1	45
	−820	0	0	$\frac{-65}{9}$	$\frac{-5}{27}$	0	0	⇒ Optimum
IV x_1	22	1	0	$\frac{-3}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	0	
$\to u_4$	5	0	0	$\frac{-15}{27}$	$\frac{1}{27}$	0	1	
u_3	8	0	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{-2}{27}$	1	0	
x_2	40	0	1	$\frac{15}{27}$	$\frac{-1}{27}$	0	0	

Erläuterung

In der Kopfzeile stehen die Variablen und Schlupfvariablen.

1. Spalte: Basisvariable der jeweiligen Basis

2. Spalte: Wert der Basisvariablen

3. bis 8. Spalte: Koeffizienten der Variablen und Schlupfvariablen in den Basisdarstellungen
9. Spalte: Quotienten aus Absolutglied und Koeffizient der auszuwechselnden Variablen

1. Basislösung

1. Zeile: Zielfunktion; größter Koeffizient 15 bestimmt, x_2 auszutauschen
2. bis 5. Zeile: Normalform
Der kleinste Quotient 45 bestimmt den Austausch von u_4.
Hauptelement: Koeffizient von x_2 in der Gleichung von u_4, $\boxed{1}$ umrandet

2. Basislösung

5. Zeile: Man dividiert die 5. Zeile von I durch das Hauptelement 1
1. Zeile: Man subtrahiert das 15fache der 5. Zeile von der 1. Zeile in I, damit in der Spalte der auszutauschenden Variablen x_2 der Koeffizient 0 erscheint
$\Rightarrow$ Basisdarstellung der 2. Basislösung
2. Zeile: Man subtrahiert das 2fache der 5. Zeile von der 2. Zeile in I
3. Zeile: Man subtrahiert das 3fache der 5. Zeile von der 3. Zeile in I
4. Zeile: Man subtrahiert das Nullfache der 5. Zeile von der 4. Zeile in I, d.h. übernimmt diese unverändert.
Der kleinste Quotient 12 bestimmt den Austausch von u_1 gegen x_1, das den größten Koeffizienten in der Zielfunktion aufweist. Hauptelement $\boxed{1}$

3. Basislösung

2. Zeile: Man dividiert die 2. Zeile von II durch das Hauptelement 1
1. Zeile: Man subtrahiert das 10fache der 2. Zeile von der 1. Zeile in II $\Rightarrow$ Basisdarstellung der 3. Basislösung
3. Zeile: Man subtrahiert das 15fache der 2. Zeile von der 3. Zeile in II
Das Verfahren wird fortgesetzt, bis die 1. Zeile (Basisdarstellung) keine Koeffizienten größer Null mehr aufweist.

Sonderfälle:

Treten in der z-Zeile für die Nichtbasisvariablen teilweise oder vollständig Nullen auf, ist ein weiterer Austausch möglich, wodurch eine andere Variante der Optimallösung entsteht.
Das Problem entartet, wenn eine Basisvariable den Wert Null annimmt.

12. Algebra der Logik (Schaltalgebra)

12.1. Allgemeines

Grundlage ist die als Kalkül (*Logikkalkül*) zur Beschreibung logischer Beziehungen geschaffene BOOLE*sche Algebra,* die die Aussagen *wahr* oder *falsch* mathematisch symbolisiert. Ihre Weiterführung zur Schaltalgebra gründet sich auf die Tatsache, daß auch in der digitalen Technik mit speicherfreien binären Gliedern nur die Zustände *ein* und *aus* möglich sind:

$$x = \mathrm{L}, \quad \text{wenn} \quad x \neq 0$$

$$x = \mathrm{O}, \quad \text{wenn} \quad x \neq \mathrm{L}$$

Die Variable x ist zweiwertig und heißt BOOLE*sche Variable.*

Eine k-stellige aussagenlogische Verknüpfung F (k-stellige BOOLEsche Funktion) ordnet jedem k-Tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ von Aussagen (Argument) eindeutig eine Aussage $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ (Funktionswert) zu.

BOOLEsche Funktionen sind zweiwertig, da sie nur den Wertevorrat L/O besitzen. Ihre Darstellung erfolgt übersichtlich mittels *Wertetabelle*, in der Steuerungstechnik auch *Schaltbelegungstabelle* genannt.

Bezeichnungen:

Aussagen: wahr — falsch, ja — nein, ein — aus

Symbole: L—O

Eingangsvariable: x_ν; Anzahl der Eingangsvariablen k
Funktionswert y bzw. $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$
ständige Verbindung: L; ständige Unterbrechung: O
Belegung der Eingangsvariablen mit L bzw. O: f_n (n siehe unten)
Bei k Variablen sind 2^k Belegungen möglich.

BOOLEsche Funktion: F_n^k — k Anzahl der Eingangsvariablen; n Dezimale Äquivalente der Belegung f (siehe Tabelle 12.3)

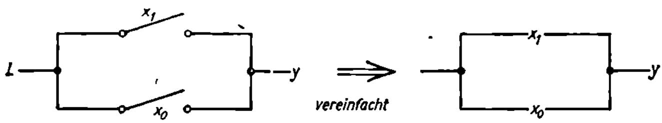
Anzahl der möglichen BOOLEschen Funktionen bei k Eingangsvariablen $n = 2^{2^k}$, z.B. $k = 2$ ergibt 16 Möglichkeiten (siehe Tabelle 12.3).

Logische Grundverknüpfungen:

Ihre Menge ist funktional vollständig, da aus ihr alle zweiwertigen Funktionen darstellbar sind.

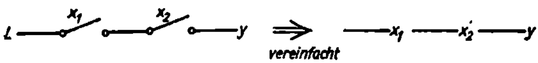
Disjunktion, logische Addition, logisches *Oder*, Alternative

Schreibweise: $y = x_1 \vee x_2$ (lies x_1 oder x_2) (andere gebräuchliche Rechenzeichen $+$; $\cup$)
Schaltungstechnik: Parallelschaltung



Konjunktion, logisches Produkt, logisches *Und*

Schreibweise: $y = x_1 x_2$ (lies x_1 und x_2) (andere gebräuchliche Rechenzeichen: $\wedge$; $\cdot$; $\cap$; &)
Ohne Rechenzeichen wird immer eine Konjunktion verstanden.
Schaltungstechnik: Reihenschaltung



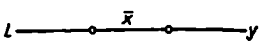
Schaltbelegungstabelle

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$	$y = x_1 x_2$
O	O	O	O
O	L	L	O
L	O	L	O
L	L	L	L

Negation, logische Verneinung, Inversion

Schreibweise: $y = \bar{x} = \sim x$ (lies x quer; x nicht)
Schaltungstechnik: Ruhekontakt

x	$y = \bar{x}$
O	L
L	O



12.2. Rechengesetze, Rechenregeln

Kommutatives Gesetz:

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \qquad x_1 x_2 = x_2 x_1 \qquad x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_2 \Leftrightarrow x_1$$

Assoziatives Gesetz:

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2)\, x_3 = x_1 x_2 x_3$$

$$x_1 \Leftrightarrow (x_2 \Leftrightarrow x_3) = (x_1 \Leftrightarrow x_2) \Leftrightarrow x_3 = x_1 \Leftrightarrow x_2 \Leftrightarrow x_3$$

Distributive Gesetze:

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$$

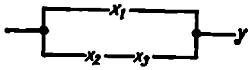
$$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee x_3)$$

Bemerkung: Für die letztgenannte Beziehung gibt es nichts Entsprechendes in der konventionellen Algebra.
Festlegung: Bei kombinierten Rechnungen ist die Konjunktion vorrangig vor der Disjunktion auszuführen.

Beispiel:

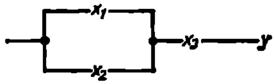
$$y = x_1 \vee x_2 \wedge x_3 = x_1 \vee (x_2 x_3)$$

richtig



dagegen $\neq (x_1 \vee x_2)\, x_3$ (unteres Bild)

falsch



Rechenregeln, Rechengesetze (Zusammenstellung)

$O \vee O = O$	$O \wedge O = O \wedge L = L \wedge O = O$	$\overline{O} = L$
$O \vee L = L \vee O = L \vee L = L$	$L \wedge L = L$	$\overline{L} = O$
$x \vee O = x$	$x \wedge O = O$	$\bar{\bar{x}} = x$
$x \vee L = L$	$x \wedge L = x$	$(\bar{x}) = \bar{x}$
$x \vee x \vee x \ldots = x$ (idempotent)	$xxx \ldots = x$	$\overline{(\bar{x})} = \bar{\bar{x}} = x$
$x \vee \bar{x} = L$ (ausgeschl. Dritter)	$x\bar{x} = O$ (ausgeschl. Widerspruch)	

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$	$x_1 x_2 = x_2 x_1$ (kommutatives Gesetz)
$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 =$ $= x_1 \vee x_2 \vee x_3$	$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2)\, x_3 = x_1 x_2 x_3$ (assoziatives Gesetz)
$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee x_3)$	$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$ (distributives Gesetz)
$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (DE-MORGANsches Theorem)
$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k} =$ $= \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_k$	$\overline{x_1 x_2 \wedge \cdots \wedge x_k} =$ $= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \cdots \vee \bar{x}_k$
$x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1$ (Kürzung)	$(x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$
$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1(\mathrm{L} \vee x_2) = x_1$ (Absorption)	$x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$
$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2$	$x_1(\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 x_2$
$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = x_1(x_2 \vee x_3)$ (Ausklammern)	$(x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 x_3$
$(x_1 \vee x_2)\,(\bar{x}_1 \vee x_3) = x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2$	
$x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 = x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$	$(x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee \bar{x}_3)\,(x_2 \vee x_3) =$ $= x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 \wedge F(1, x_2, \ldots, x_k) \vee \bar{x}_1 \wedge F(0, x_2, \ldots, x_k)$$

(Zerlegung von F nach der Variablen x_1)

Mit $x_i^{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \{0; 1\}$ und $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$, d.h. $\sigma_i = 0 \Rightarrow$ negierte Variable x_i, $\sigma_i = 1 \Rightarrow$ nicht negierte Variable x_i wird die Zerlegung allgemein darstellbar:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_h, \ldots, x_k) =$$
$$= \bigvee_{[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h]} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_h^{\sigma_h}\, F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h, x_{h+1}, \ldots, x_k)$$

12.3. Weitere Verknüpfungsmöglichkeiten von zwei Eingangsvariablen (Lexikographische Ordnung)

n \ x_1 / x_2	L L O O L O L O	F_n^2	
0	O O O O	$F_0^2 = 0$	Konstanz, Unterbrechung
1	O O O L	$F_1^2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2$	NOR; Weder-noch
2	O O L O	$F_2^2 = \bar{x}_1 x_2$	Inhibition
3	O O L L	$F_3^2 = \bar{x}_1$	Negation
4	O L O O	$F_4^2 = x_1\bar{x}_2$	Inhibition
5	O L O L	$F_5^2 = \bar{x}_2$	Negation
6	O L L O	$F_6^2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$	Antivalenz, ausschl. Oder
7	O L L L	$F_7^2 = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	NAND; *Sheffer*-Funktion
8	L O O O	$F_8^2 = x_1 x_2$	Konjunktion
9	L O O L	$F_9^2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$	Äquivalenz
10	L O L O	$F_{10}^2 = x_2$	Identität
11	L O L L	$F_{11}^2 = \bar{x}_1 \vee x_2$	Implikation
12	L L O O	$F_{12}^2 = x_1$	Identität
13	L L O L	$F_{13}^2 = x_1 \vee \bar{x}_2$	
14	L L L O	$F_{14}^2 = x_1 \vee x_2$	Disjunktion
15	L L L L	$F_{15}^2 = L$	Konstanz; Kurzschluß

Von den 16 Möglichkeiten sind 6 trivial (0; 3; 5; 10; 12; 15).

NOR-Verknüpfung

(negiertes *Oder*; *Weder-noch*)

$$y = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2$$

NAND-Verknüpfung

(negiertes *Und*; *Sheffer*-Funktion)

x_1	x_2	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$\overline{x_1x_2}$
O	O	L	L
O	L	O	L
L	O	O	L
L	L	O	O

$$y = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

Bemerkung: Mit der NOR- bzw. NAND-Funktion sind ebenfalls alle BOOLEschen Funktionen darstellbar (funktional vollständig!)

Implikation

$$y = x_1 \Rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 >\!=\!< x_2$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$
O	O	L	O	L
O	L	L	L	O
L	O	O	L	O
L	L	L	O	L

Antivalanz

(ausschließendes *Oder*)

$$y = x_1 >\!=\!< x_2 = x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$$

$$x_1 \mathrel{\ddagger} x_2$$

Äquivalenz

$$y = x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$$

$$x_1 \equiv x_2$$

12.4. Normalformen

Vollkonjunktion (Elementarkonjunktion)

$K_n^k = \bigwedge\limits_{\nu=0}^{k} x_\nu$ (lies Summe aller Konjunktionen für $\nu = 1$ bis k)

Anzahl der möglichen Vollkonjunktionen 2^k

Der Term K_n^k heißt Vollkonjunktion, wenn er die konjunktive Bindung aller k Eingangsvariablen (negiert oder nichtnegiert), bewertet nach Potenzen von 2, enthält.

Zum Beispiel $K_{38}^6 = \bigwedge_{\nu=1}^{6} x_\nu = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \bar{x}_6$ bewertet LOOLLO $\triangleq$

$\triangleq 38 = n$

Volldisjunktion (Elementardisjunktion)

$D_n^k = \bigvee_{\nu=0}^{k} x_\nu$ (lies Summe aller Disjunktionen für $v = 1$ bis k)

Anzahl der möglichen Volldisjunktionen 2^k

Der Term D_n^k heißt Volldisjunktion, wenn er die disjunktive Bindung aller k Eingangsvariablen (negiert oder nichtnegiert), bewertet nach Potenzen von 2, enthält.

Zum Beispiel: $D_{11}^4 = \bigvee_{\nu=1}^{4} x_\nu = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$, bewertet LOLL $\triangleq$

$\triangleq 11 = n$

Disjunktive Normalform, konjunktive Normalform

Jede disjunktive Verknüpfung von Konjunktionen (*Fundamentalterme*) heißt disjunktive Normalform, z.B. $y = x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee x_2$. Analog die konjunktive Normalform, z.B. $y = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$.

Fundamentalterme, die sich nicht mehr vereinfachen lassen, heißen *Primimplikanten* der Funktion.

Kanonische alternative (disjunktive) Normalform (Reihen-Parallelschaltung).

Kanonische konjunktive Normalform (Parallel-Reihenschaltung)

Jede disjunktive Bindung von Vollkonjunktionen heißt kanonische alternative Normalform: $y^k = \bigvee_n K_n^k$ (bevorzugt angewendet!).

Analog $y^k = \bigwedge_n D_n^k$.

Anzahl der möglichen kanonischen alternativen Normalformen

$n = (2)^{2k}$ $\qquad$ k Anzahl der Eingangsvariablen

Beispiel:

Die 3 Eingangsvariablen x_1, x_2, x_3 sind mit der Ausgangsvariablen y gemäß einer technischen Aufgabe nachfolgend verknüpft. Berechne eine Minimalform der Schaltfunktion!

n	x_1	x_2	x_3	K_n
0	O	O	O	L
1	O	O	L	L
2	O	L	O	L
3	O	L	L	L
4	L	O	O	L
5	L	O	L	L
6	L	L	O	O
7	L	L	L	O

Ansprechtabelle
mit 2^k Möglichkeiten
k Anzahl der Eingangsvariablen

Für $y = \mathrm{L}$ gilt die kanonische alternative Normalform:

$$y = \bigvee_n K_n \quad \text{für} \quad n = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\begin{aligned} y &= K_0 \vee K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee \bar{x}_1x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee x_3) = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \\ &= \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2 = \underline{\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}} \end{aligned}$$

Da nur in 2 Zeilen $y = \mathrm{O}$ auftritt, ist es besser, die kanonische alternative Normalform der O-Entscheidung zu wählen und das Ergebnis zu invertieren:

$$\bar{y} = K_6 \vee K_7 =$$

$$\bar{y} = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1x_2$$

$$y = \overline{x_1x_2} = \underline{\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}} \quad \text{wie oben}$$

12.5. Karnaugh-Tafel

Jedes Feld stellt die Konjunktion der am Rande angegebenen Eingangsvariablen dar. Karnaugh-Tafeln werden in der Ebene bis zu 5 Eingangsvariablen aufgestellt (entspricht 32 Feldern). Bei größerer Variablenzahl werden die Tafeln unhandlich.
Von Spalte zu Spalte und Zeile zu Zeile wechselt jeweils nur 1 Variable (Gray-Code!). Das gilt auch für die Ränder z.B. zwischen 1. und 4. Spalte bzw. Zeile.

z.B. $K_{13}^4 = x_1x_2\bar{x}_3x_4 \triangleq \mathrm{LLOL}$

	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	OOOO K_0	OOOL K_1	OOLL K_3	OOLO K_2
$\bar{x}_1x_2$	OLOO K_4	OLOL K_5	OLLL K_7	OLLO K_6
x_1x_2	LLOO K_{12}	LLOL K_{13}	LLLL K_{15}	LLLO K_{14}
$x_1\bar{x}_2$	LOOO K_8	LOOL K_9	LOLL K_{11}	LOLO K_{10}

In die Schnittpunkte der Zeilen und Spalten wird zu den entsprechenden Elementarkonjunktionen K_n der Eingangsvariablen der gewünschte Ausgangswert L oder O eingetragen. Die Felder sind durch *Oder* verknüpft.
Die Auswertung erfolgt, indem möglichst große Zweier-, Vierer- oder Achterblöcke mit $K_n = \mathrm{L}$ (bzw. $K_n = \mathrm{O}$) gebildet werden, die sich auch über die Ränder erstrecken dürfen. Wertet man die Blöcke aus, wobei alle Eingangsvariablen entfallen, deren Wert sich innerhalb der Blöcke ändert, so erhält man die Primimplikanten der Schaltfunktion.

Beispiel:

Von 4 Pumpen x_1; x_2; x_3; x_4 sollen jeweils höchstens 2 arbeiten. Es ist zu verhindern, daß mehr als 2 gleichzeitig eingeschaltet werden können (Ansprechen einer Verriegelung $K_n = \mathrm{L}$).
Arbeiten einer Pumpe: $x = \mathrm{L}$
Anzahl der möglichen Verknüpfungen: $n = 2^k = 16$

n	x_1	x_2	x_3	x_4	K_n	n	x_1	x_2	x_3	x_4	K_n
0	O	O	O	O	O	8	L	O	O	O	O
1	O	O	O	L	O	9	L	O	O	L	L
2	O	O	L	O	O	10	L	O	L	O	L
3	O	O	L	L	L	11	L	O	L	L	L
4	O	L	O	O	O	12	L	L	O	O	L
5	O	L	O	L	L	13	L	L	O	L	L
6	O	L	L	O	L	14	L	L	L	O	L
7	O	L	L	L	L	15	L	L	L	L	L

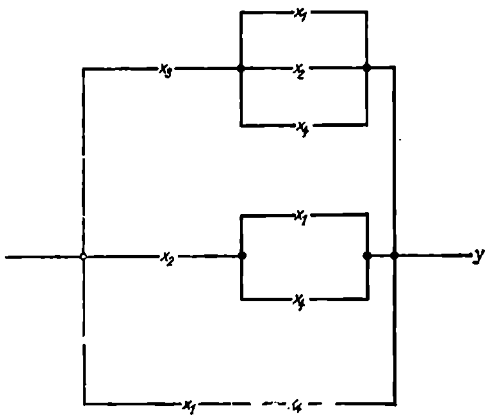
Die Zeilen 7; 11; 13; 14; 15 könnten entfallen, da diese Kombinationen der Variablen lt. Aufgabenstellung nicht eintreten dürfen. Ihre Beachtung erleichtert oft die Rechnung.

	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	O	O	L	O
$\bar{x}_1 x_2$	O	L	L	L
$x_1 x_2$	L	L	L	L
$x_1\bar{x}_2$	O	L	L	L

Viererblock · dsgl. dsgl. dsgl.
3. Spalte 3. Zeile Mitte Mitte unten Mitte rechts rechts unten

$$y = x_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$$

$$= \underline{\underline{[x_3(x_1 \vee x_2 \vee x_4)] \vee [x_2(x_1 \vee x_4)] \vee x_1x_4}}$$



Anhang

Polyadische Zahlensysteme

Ziffernfolge $\sum_{k=-\infty}^{n} a_k B^k \qquad B \geqq 2;\ 0 \leqq a_k < B;\ a_k \in N$

Dualsystem (Zweiersystem, dyadisches System)

Grundsymbole: O, L $\qquad \sum_{k=-\infty}^{n} a_k 2^k \quad a_k = 0; 1$

Stellenwert: Potenzen von 2

z.B. 5,75 $\triangleq$ LOL,LL

Dekadische Zahl	zugehörige Dualzahl
0	O
1	L
2	LO
3	LL
4	LOO
5	LOL
6	LLO
7	LLL
8	LOOO
9	LOOL
⋮	⋮
30	LLLLO

usw.

Römisches Zehnersystem

Grundsymbole: I = 1; V = 5; X = 10; L = 50; C = 100;
D = 500; M = 1000

Schreibweise: links beginnend mit dem Symbol der größten Zahl; die Symbole I, X, C werden bis zu dreimal geschrieben; die Symbole V, L, D werden nur einmal geschrieben.
Steht ein Symbol einer kleineren Zahl vor dem einer größeren, so wird sein Wert von dem folgenden größeren subtrahiert.

Beispiel:

1972 = MCMLXXII

Griechisches Alphabet

Buchstabe groß	Buchstabe klein	Benennung	Buchstabe groß	Buchstabe klein	Benennung
A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	ϑ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	$\varkappa$	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

Deutsches Alphabet

Buchstabe groß	Buchstabe klein	Buchstabe groß	Buchstabe klein
𝔄	𝔞	𝔑	𝔫
𝔅	𝔟	𝔒	𝔬
ℭ	𝔠	𝔓	𝔭
𝔇	𝔡	𝔔	𝔮
𝔈	𝔢	ℜ	𝔯
𝔉	𝔣	𝔖	𝔰
𝔊	𝔤	𝔗	𝔱
ℌ	𝔥	𝔘	𝔲
ℑ	𝔦	𝔙	𝔳
𝔍	𝔧	𝔚	𝔴
𝔎	𝔨	𝔛	𝔵
𝔏	𝔩	𝔜	𝔶
𝔐	𝔪	ℨ	𝔷

Häufig gebrauchte Zahlen und ihre dekadischen Logarithmen
(aus Müller, Logarithmentafeln)

	n	$\lg n$
π	3,1416	0,49715
2π	6,2832	0,79818
3π	9,4248	0,97427
4π	12,566	1,09921
$\frac{\pi}{2}$	1,5708	0,19612
$\frac{\pi}{3}$	1,0472	0,02003
$\frac{2\pi}{3}$	2,0944	0,32106
$\frac{4\pi}{3}$	4,1888	0,62209
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	0,89509 — 1
$\frac{\pi}{6}$	0,52360	0,71900 — 1
π^2	9,8696	0,99430
$4\pi^2$	39,478	1,59636
$\frac{\pi^2}{4}$	2,4674	0,39224
π^3	31,006	1,49145
$\frac{\pi}{360}$	$8{,}7266 \cdot 10^{-3}$	0,94085 — 3

	n	$\lg n$
$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$	$1{,}7453 \cdot 10^{-2}$	$0{,}24188 - 2$
$\operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}$	$2{,}9089 \cdot 10^{-4}$	$0{,}46373 - 4$
$\operatorname{arc} 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$	$4{,}8481 \cdot 10^{-6}$	$0{,}68557 - 6$
$1\ \mathrm{rad};\ \varrho^\circ = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$	$57{,}296$	$1{,}75812$
$\varrho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi}$	$3437{,}7$	$3{,}53627$
$\varrho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}$	$2{,}0626 \cdot 10^{5}$	$5{,}31443$
$\frac{1}{\pi}$	$0{,}31831$	$0{,}50285 - 1$
$\frac{1}{2\pi}$	$0{,}15915$	$0{,}20182 - 1$
$\frac{1}{4\pi}$	$7{,}9577 \cdot 10^{-2}$	$0{,}90079 - 2$
$\frac{3}{4\pi}$	$0{,}23873$	$0{,}37791 - 1$
$\frac{1}{\pi^2}$	$0{,}10132$	$0{,}00570 - 1$
$\frac{1}{4\pi^2}$	$2{,}5330 \cdot 10^{-2}$	$0{,}40364 - 2$
$\sqrt{\pi}$	$1{,}7725$	$0{,}24857$
$2\sqrt{\pi}$	$3{,}54491$	$0{,}54960$

	n	$\lg n$
$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,39909
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,2533	0,09806
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,56419	0,75143 − 1
$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,1284	0,05246
$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,88623	0,94754 − 1
$c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}}$	3,5682	0,55246
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,79788	0,90194 − 1
$\pi\sqrt{2}$	4,4429	0,64766
$\pi\sqrt{3}$	5,4414	0,73571
$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	2,2214	0,34663
$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	1,8138	0,25859
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,16572
e	2,7183	0,43429
e^2	7,3891	0,86859
$M = \lg e$	0,43429	0,63778 −1

	n	$\lg n$
$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,3026	0,36222
$\frac{1}{e}$	0,36788	0,56571 − 1
$\frac{1}{e^2}$	0,13534	0,13141 − 1
e^{π}	23,141	1,36438
$\sqrt{e}$	1,6487	0,21715
g	9,80665	0,99152
g^2	96,170	1,98304
$\frac{1}{g}$	0,10197	0,00848 − 1
$\frac{1}{2g}$	$5{,}0986 \cdot 10^{-2}$	0,70745 − 2
$\frac{1}{g^2}$	$1{,}0398 \cdot 10^{-2}$	0,01696 − 2
$\sqrt{g}$	3,1316	0,49576
$\sqrt{2g}$	4,4287	0,64628
$\pi\sqrt{g}$	9,8381	0,99291
$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0,31933	0,50424 − 1
$\frac{\pi}{\sqrt{g}}$	1,0032	0,00139

	n	$\lg n$
$\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$	2,0064	0,30242
$\sqrt{2}$	1,4142	0,15051
$\sqrt{3}$	1,7321	0,23856
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,70711	0,84949 − 1
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0,57735	0,76144 − 1

LITERATUR- UND QUELLENVERZEICHNIS

Autorenkollektiv: Algebra und Geometrie für Ingenieure. 9. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975

Autorenkollektiv: Analysis für Ingenieure. 11. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974

Autorenkollektiv: Ausgewählte Kapitel der Mathematik. 8. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974

Autorenkollektiv: Das Grundwissen des Ingenieurs. 9. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974

BÄR, D.: Einführung in die Schaltalgebra. 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik 1966

BAULE: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Leipzig: S. Hirzel Verlag

Band I Differential- und Integralrechnung, 14. Aufl., 1964
Band II Ausgleichs- und Näherungsrechnung, 7. Aufl., 1963
Band III Analytische Geometrie, 7. Aufl., 1964
Band IV Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Aufl., 1963
Band V Variationsrechnung, 6. Aufl., 1963
Band VI Partielle Differentialgleichungen, 6. Aufl., 1962
Band VII Differentialgeometrie, 6. Aufl., 1965
Band VIII Aufgabensammlung 1963

BRÄUNING, G.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 4. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975

BRONSTEIN-SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik. 19. Aufl. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1979

DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der LAPLACE-Transformation. 3. Aufl. München: R. Oldenbourg Verlag 1967

GNEDENKO, B. W., und A. J. CHINTSCHIN: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 9. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973

GÖLDNER, K.: Mathematische Grundlagen für Regelungstechniker. 3. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1970

GRABOWSKI, H., FUCKE, R., und R. SCHROEDTER: Praktische Mathematik. 2. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974

GREUEL, O.: Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker. 9. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1978

HOLTMANN, F.: Mathematik Band I und II. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1969

JOOS, G., und TH. KALUZA: Höhere Mathematik für den Praktiker. 10. Aufl. Leipzig: Verlag Ambrosius Barth 1964

KREKÓ, BÉLA: Lehrbuch der linearen Optimierung. 6. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973

Autorenkollektiv: Lehrgang der Elementarmathematik. 16. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980

v. MANGOLDT, H.: Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig: S. Hirzel Verlag
Band I Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre. 15. Aufl. 1974
Band II Differentialrechnung, Unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und Funktionentheorie. 14. Aufl. 1972
Band III Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. 13. Aufl. 1970

METZ, J., und G. MERBETH: Schaltalgebra. 2. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972

NAAS, J., und H. L. SCHMID: Mathematisches Wörterbuch. Berlin: Akademie-Verlag, und Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1961

ROTHE, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Teil I Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 20. Aufl. 1962
Teil II Integralrechnung. Unendliche Reihen. Vektorrechnung nebst Anwendungen. 17. Aufl. 1965
Teil III Flächen im Raume. Linienintegrale und mehrfache Integrale und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. 12. Aufl. 1962

RICHTER, K.-J.: Methoden der Optimierung. Band I: Lineare Optimierung. 5. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975

RUMPF, K.-H., und M. PULVERS: Transistor-Elektronik. 5. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik 1973

SPEISER, A.: Digitale Rechenanlagen. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1965

STORM, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. 7. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980

WILLERS, FR. A.: Elementarmathematik. 13. Aufl. Dresden: Verlag Steinkopff 1968

SACHWORTVERZEICHNIS