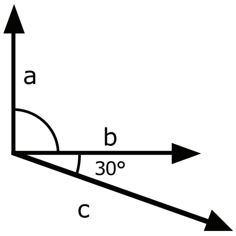
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind gegeben, wobei gilt:
$a = 2\text{cm}$, $b = 2.5\text{cm}$, $c = 3\text{ cm}$.
Konstruieren Sie den Vektor:

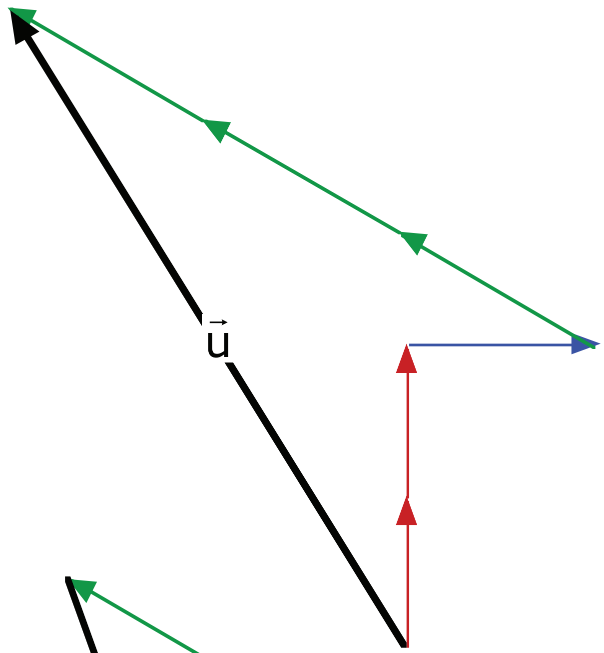
a) $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$

b) $\vec{v}$ so, dass: $3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} + \vec{v} = \vec{0}$

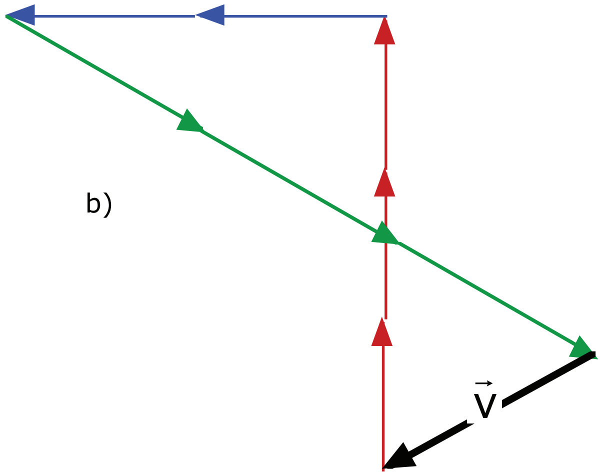
c) $\vec{w}$ so, dass: $\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} + 2\vec{w} = \vec{0}$



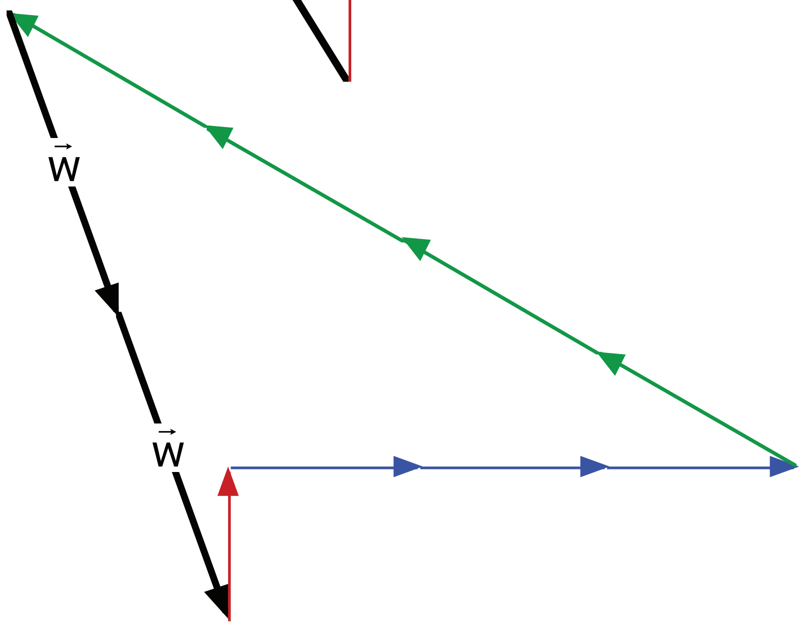
a)



b)



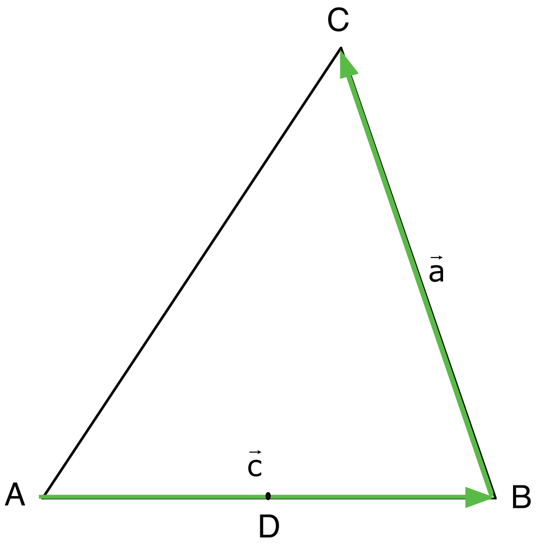
c)



Beachten Sie die Richtungen von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$! $\vec{u}$ steht auf der andern Seite des Gleichheitszeichens.
Wenn die Summe $\vec{0}$ ergibt, bedeutet das, dass die Kette sich schliesst, dass man zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Ein Dreieck ABC ist gegeben durch $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.
Der Punkt D ist Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aus.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{c} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

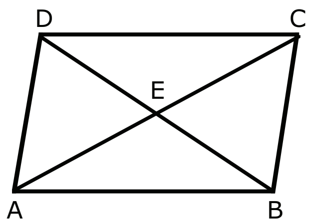
Gegeben ist ein Parallelogramm durch die Vektoren

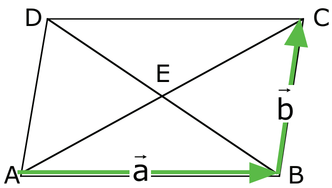
a) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

b) $\overrightarrow{AC} = \vec{e}$ und $\overrightarrow{BD} = \vec{f}$

Berechnen Sie die noch fehlenden Vektoren:

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{EC}$ aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{e}$ und $\vec{f}$.



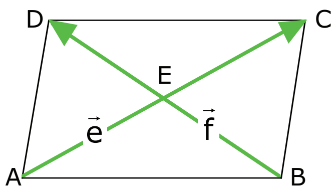


$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\vec{e} + \frac{1}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{e} + \frac{1}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\vec{f}$

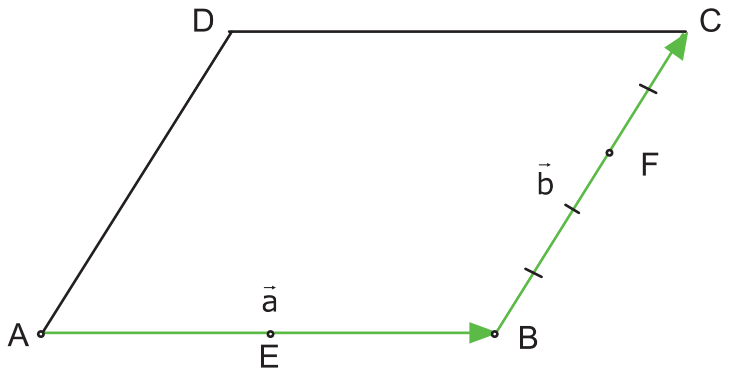
$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec{e}$

Ein Parallelogramm ABCD ist mit $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ gegeben.

Der Punkt E ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$;

F liegt auf $\overline{BC}$ so, dass $\overline{BF} : \overline{FC} = 3 : 2$ gilt.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{EF}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = -\vec{a}$

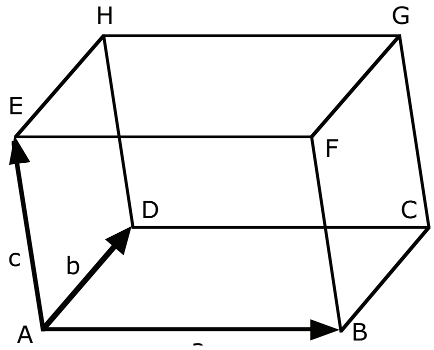
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

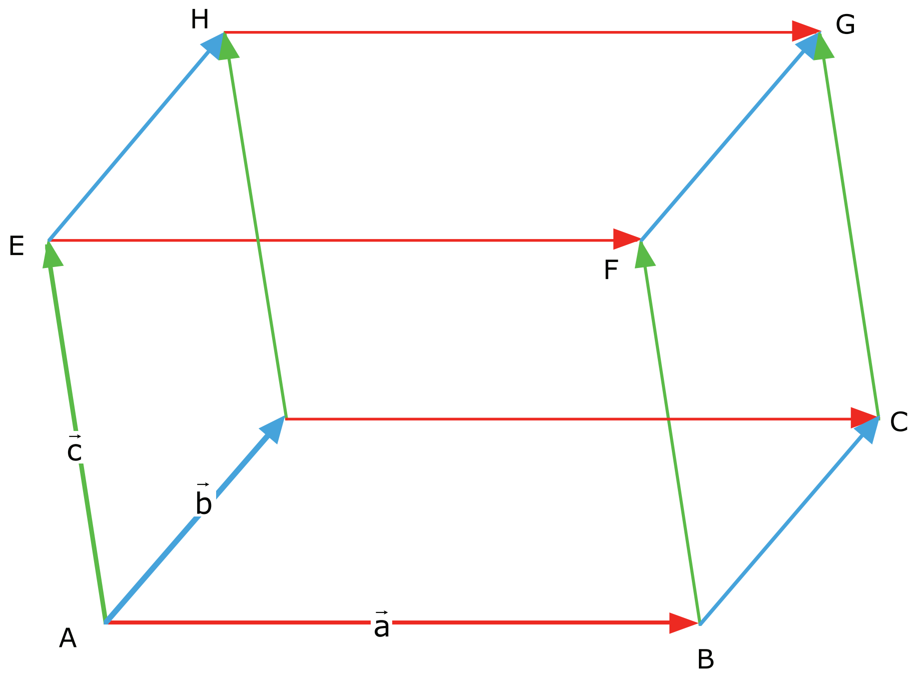
$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

Gegeben ist ein Spat durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{HF}$ aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.





Alle roten Vektoren sind gleich $\vec{a}$, alle blauen Vektoren sind gleich $\vec{b}$, alle grünen Vektoren sind gleich $\vec{c}$.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BG} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

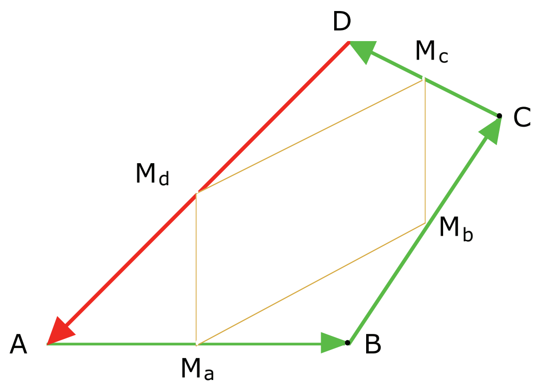
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + c$$

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \vec{a} - \vec{b}$$

Ein ebenes Viereck ABCD ist durch $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ gegeben.

a) Drücken Sie $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

b) Zeigen Sie vektoriell, dass die Seitenmittelpunkte des Vierecks Ecken eines Parallelogramms sind.



Zur Erinnerung:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = \vec{c}$

a) $\vec{d} = \overrightarrow{DA} = -\vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$

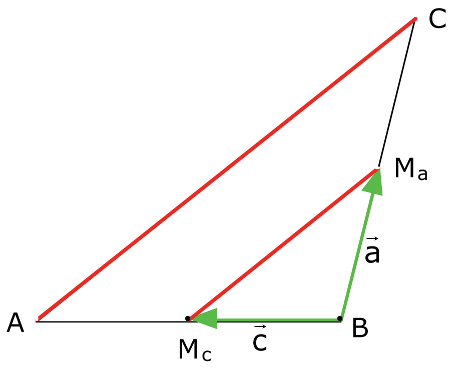
b) $\overrightarrow{M_a M_b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

und

$$\overrightarrow{M_d M_c} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\vec{c} = -\frac{1}{2}(-\vec{c} - \vec{b} - \vec{a}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{M_a M_b}$$

Ein Viereck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten Parallel und gleich lang sind, ist ein Parallelogramm!

Zeigen Sie vektoriell, dass die Mittellinie im Dreieck parallel zur Grundlinie und halb so lang wie diese ist.



Das Dreieck ABC ist durch $\vec{a}$ und $\vec{c}$ gegeben.

Wenn ich die halben Seiten mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$ bezeichne, komme ich ohne Brüche durch.

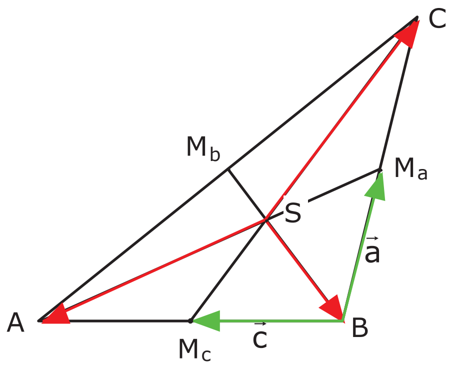
Eine Mittellinie verbindet zwei Seitenmittelpunkte.

$$\overrightarrow{AC} = -2\vec{c} + 2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{M_c M_a} = -\vec{c} + \vec{a} = \frac{1}{2}(-2\vec{c} + 2\vec{a}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

was zu beweisen war!

Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC mit dem Schwerpunkt S gilt: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$.



Etwas Elementargeometrie:

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Schwerelinien oder Seitenhalbierenden.

Der Schwerpunkt teilt die Schwerelinien im Verhältnis 1 : 2.

Um das Bruchrechnen etwas einfacher zu gestalten, bezeichne ich die halben Seitenvektoren mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Damit ist auch das Dreieck bestimmt.

Nun lässt sich aus der Figur ablesen:

$$\overrightarrow{M_aA}=-\vec{a}+2\vec{c} \qquad \overrightarrow{SA}=\frac{2}{3}(-\vec{a}+2\vec{c}) \qquad 1)$$

$$\overrightarrow{M_cC}=-\vec{c}+2\vec{a} \qquad \overrightarrow{SC}=\frac{2}{3}(-\vec{c}+2\vec{a}) \qquad 2)$$

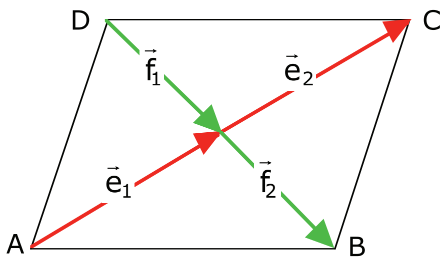
und – weil $\overrightarrow{AC}=-2\vec{c}+2\vec{a}$ -

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_bB}&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\vec{c}\\&=-\frac{1}{2}(-2\vec{c}+2\vec{a})-2\vec{c}\\&=\vec{c}-\vec{a}-2\vec{c}\\&=-\vec{a}-\vec{c}\end{aligned} \qquad \overrightarrow{SB}=\frac{2}{3}(-\vec{a}-\vec{c}) \qquad 3)$$

Aus 1), 2) und 3) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}&=\frac{2}{3}(-\vec{a}+2\vec{c})+\frac{2}{3}(-\vec{a}-\vec{c})+\frac{2}{3}(-\vec{c}+2\vec{a})\\&=\frac{2}{3}(-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{a}-\vec{c}-\vec{c}+2\vec{a})=\vec{0}\ \textbf{!}\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass ein Viereck, in dem sich die Diagonalen halbieren, ein Parallelogramm ist.



In diesem Viereck ist: $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 + \vec{f}_2$

$\overrightarrow{DC} = \vec{f}_1 + \vec{e}_2$

Da sich die Diagonalen halbieren gilt: $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ und $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$

Folglich ist: $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 + \vec{f}_1$

$\overrightarrow{DC} = \vec{f}_1 + \vec{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Ein Viereck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, ist ein Parallelogramm!

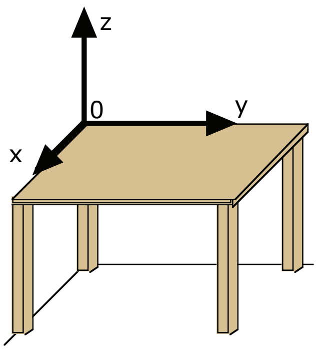
Welche besondere Lage haben die folgenden Punkte?

a) A(x|0|0)	b) B(x|y|0)	c) C(x|0|z)	d) D(0|y|4)
e) E(3|y|z)	f) F(x|2|z)	g) G(x|1|1)	h) H(0|a|a)

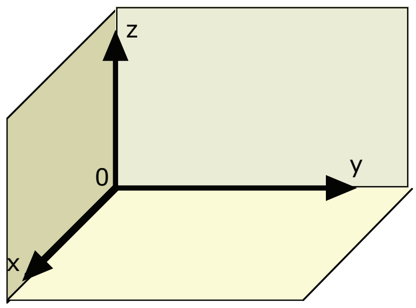
Es geht in dieser Übung darum, das Koordinatensystem jederzeit in der richtigen Lage und Anordnung vor sich zu sehen und sich darin bewegen zu können!

Wenn ich sage "bewegen" dann meine ich das physisch – nicht nur in Gedanken! Fixieren Sie das System irgendwo.

Wenn z. B. ihr Schreibtisch zufällig in einer linken Zimmerecke steht:



Oder nehmen Sie einen Teil einer Schuhschachtel und malen Sie mit dickem Filzstift die Achsen in die Kanten:



$\left(x|y|z\right)$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

Sie bewegen sich zuerst um x in Richtung x-Achse (auf Sie zu bei positivem x),
dann um y in Richtung der y-Achse (nach rechts bei positivem y),
dann um z in Richtung der z-Achse (nach oben bei positivem z).

Zeigen Sie die Lage des fraglichen Punktes mit dem Finger an!

Die Lösungen sind auf der nächsten Seite

A liegt auf der x-Achse: 0 Abweichung in Richtung y und z

B liegt in der xy-Ebene: 0 Abweichung nach oben

C liegt in der xz-Ebene: 0 Abweichung in Richtung y-Achse

D liegt in der yz-Ebene: 0 Abweichung Richtung x-Achse
und zwar auf einer Parallelen zur y-Achse auf der Höhe 4

E liegt in einer Parallelebene zur yz-Ebene 3 weiter vorne

F liegt in einer Parallelebene zur xz-Ebene um 2 weiter rechts

G liegt auf einer Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $(0|1|1)$.

H liegt auf der Winkelhalbierenden in der yz-Ebene durch $(0|0|0)$ und $(0|3|3)$

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Man berechne die Komponenten von:

a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b} + 3\vec{c}$

b) $\vec{v} = 3(\vec{a} - 4\vec{b}) - 5\vec{c}$

c) $\vec{w} = 5\vec{a} - 2(\vec{b} + 3\vec{c})$

Tipp!
multiplizieren Sie den Vektor mit −1.5
- so gibt es weniger Vorzeichenfehler!

a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b} + 3\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 1.5 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = 3(\vec{a} - 4\vec{b}) - 5\vec{c}$

$= 3\vec{a} - 12\vec{b} - 15\vec{c} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 178 \\ 60 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\vec{w} = 5\vec{a} - 2(\vec{b} + 3\vec{c})$

$= 5\vec{a} - 2\vec{b} - 6\vec{c} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear (parallel) sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Gemäss der 1. Komponente müsste $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$ sein.
Nachrechnen für die 2. und 3. Komponente zeigt, dass das bei der 3. Komponente nicht stimmt
Die Vektoren sind nicht kollinear.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gemäss der 1. Komponente müsste $\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$ sein.
Nachrechnen für die 2. und 3. Komponente zeigt, dass tatsächlich $\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$.
Die Vektoren sind kollinear.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

Gemäss der 1. Komponente müsste $4\vec{b} = -9 \cdot \vec{a}$ sein.
Nachrechnen für die 2. und 3. Komponente zeigt, dass tatsächlich $4\vec{b} = -9 \cdot \vec{a}$.
Die Vektoren sind kollinear.

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gemäss der 1. Komponente müsste $3 \cdot \vec{a} = -4 \cdot \vec{b}$ sein.
Das stimmt nicht für die 3. Komponente
Die Vektoren sind nicht kollinear.

Die Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ sollen parallel sein:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

---

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

Gemäss der 2. Komponente muss $\vec{b} = -4 \cdot \vec{a}$ sein. Man erhält $x = 12$ und $z = -32$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Gemäss der 1. Komponente muss $\vec{b} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{a}$ sein. Man erhält $y = 0$ und $z = \frac{2}{3}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

Nach der 3. Komponente ist $5 \cdot \vec{b} = 8 \cdot \vec{a}$ sein.

Man erhält $\quad -10 = 8x \quad$ und $\quad 5y = 56$

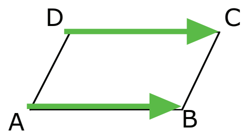
$\qquad\qquad x = -\frac{5}{4} \qquad\qquad y = 11.2$

Sind A (5 | - 1 | 6) , B (8 | 10 | - 3) , C (10 | 13 | - 1) und D (7 | 2 | 8) Ecken eines Parallelogramms?

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind.

In der Vektorrechnung heisst das:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ 10+1 \\ -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 10-7 \\ 13-2 \\ -1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}$$

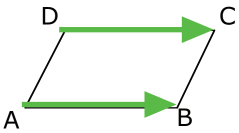
Das Viereck ist ein Parallelogramm.

Ergänzen Sie die Punkte A (2 | - 1 | 7) , B (5 | 3 | 0) und C (- 1 | 8 | - 6) zum Parallelogramm ABCD

Es muss $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ sein:

Wir setzen $D(x|y|z)$:

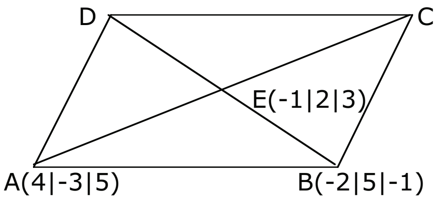
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{D(-4|4|1)}$$

Von einem Parallelogramm ABCD sind A (4 | - 3 | 5) und B (- 2 | 5 | - 1) sowie der Diagonalenschnittpunkt E (- 1 | 2 | 3) gegeben.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.



Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren sich gegenseitig.

Es gilt also: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$

Wir geben C vorübergehend die Koordinaten $C(x|y|z)$; dann gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C(-6|7|1)}$$

D berechnen wir genau so mit der Beziehung $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{D(0|-1|7)}$$

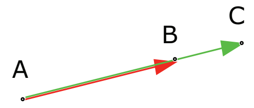
Liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B?

a) A (- 2 | 5 | - 4) , B (10 | - 1 | 0) , C (- 8 | 8 | - 6)

b) A (6 | - 3 | 4) , B (2 | 7 | - 6) , C (- 4 | 22 | - 18)

Wenn C auf der Geraden AB liegt, dann muss der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches von $\overrightarrow{AC}$ sein.

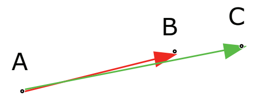
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$

Die Punkte liegen auf einer Geraden.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ -22 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}$ ist kein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$; die Punkte liegen **nicht** auf einer Geraden.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.
A(-1 | 2 | -5), B(1 | 12 | 6), C(3 | 6 | -3)

Es sind drei Seitenvektoren und ihre Länge zu berechen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 12-2 \\ 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 6-2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left| \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 6-12 \\ -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \left| \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{4+36+81} = \sqrt{121} = 11$$

Der Umfang ist: $\mathbf{u} = 15+6+11 = \mathbf{32}$

Wie lang ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Welche Komponenten hat ein Vektor $\vec{b}$ mit gleicher Richtung und der Länge 22.5?

Länge von $\vec{a}$: $a = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9$

Quadrate sind immer positiv!
Wenn Sie direkt die Quadrate hinschreiben (Kopfrechnung!)
ersparen Sie sich einige Klammern! Nur die Schreibweise $(-3)^2$ ist korrekt!

$22.5 = \mathbf{2.5} \cdot 9$ Die Länge von $\vec{b}$ ist das 2.5-fache der Länge von $\vec{a}$.

Also gilt: $\vec{b} = 2.5 \cdot \vec{a} = 2.5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$

Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ mit A (7 | 1 | 5) und B (6 | y | - 3) beträgt 9

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y-1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Länge: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1 + (y-1)^2 + 64} = 9$

wir quadrieren:

$$1 + (y-1)^2 + 64 = 81$$

$$(y-1)^2 = 16$$

$$y - 1 = \pm 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 5, \; y_2 = -3$$

und erhalten als Lösung: B_1 (6 | 5 | - 3) , B_2 (6 | - 3 | - 3)

Welche Punkte der z-Achse haben von $P(-6\,|\,3\,|\,7)$ den Abstand $d = 7$?

Punkte auf der z-Achse haben die Koordinaten $Q(0\,|\,0\,|\,z)$.

Wir berechnen den Vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ z-7 \end{pmatrix}$

und erhalten für den Abstand die Gleichung: $\sqrt{36 + 9 + (z-7)^2} = 7$

Auflösung dieser Gleichung:

$$36 + 9 + (z-7)^2 = 49$$

$$(z-7)^2 = 4$$

$$z - 7 = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 9,\ z_2 = 5$$

Lösung: $Q_1(0|0|9)$, $Q_2(0|0|5)$

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$ hat die Länge $v = 7$.

Die x-Komponente ist um 8 grösser als die y- Komponente

Die beiden Bedingungen ergeben je eine Gleichung:

(1) $\sqrt{x^2 + y^2 + 9} = 7 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 9 = 49 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 40$

(2) $x = y + 8$

Ein derartiges System löst man mit Substitution:

$$(y+8)^2 + y^2 = 40$$

$$y^2 + 16y + 64 + y^2 = 40$$

$$2y^2 + 16y + 24 = 0$$

$$y^2 + 8y + 12 = 0$$

$$(y+6)(y+2) = 0$$

$y_1 = -6$, $x_1 = 2$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$y_2 = -2$ $x_2 = 6$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Punkt P auf der y-Achse ist von A (3 | 4 | - 7) und B (- 1 | 2 | 1) gleich weit entfernt.

Ein Punkt auf der y-Achse hat die Koordinaten P (0 | y | 0) .

Wir berechnen die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ und ihre Längen:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ y-4 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{9 + (y-4)^2 + 49}$$

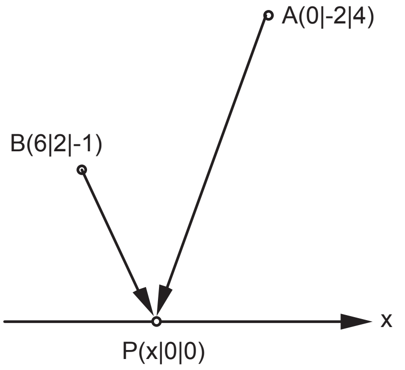
$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y-2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{1 + (y-2)^2 + 1}$$

Durch Gleichsetzung ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{BP} \\ \sqrt{9 + (y-4)^2 + 49} &= \sqrt{1 + (y-2)^2 + 1} \\ (y-4)^2 + 58 &= (y-2)^2 + 2 \\ y^2 - 8y + 16 + 58 &= y^2 - 4y + 4 + 2 \\ 68 &= 4y \\ 17 &= y \end{aligned}$$

Gesuchter Punkt: P (0 | 17 | 0)

Welcher Punkt P auf der x-Achse ist von A (0 | - 2 | 4) doppelt so weit entfernt wie von B (6 | 2 | - 1) ?



Wir berechnen die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ und ihre Längen:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + 4 + 16} = \sqrt{x^2 + 20}$$

$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(x-6)^2 + 4 + 1} = \sqrt{(x-6)^2 + 5}$$

Die Abstandsbedingung ergibt: $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{BP}$

Überlegen Sie immer sorgfältig, ob das "2 ·" auf der richtigen Seite steht!

$$\sqrt{x^2 + 20} = 2 \cdot \sqrt{(x-6)^2 + 5}$$

$$x^2 + 20 = 4 \cdot \left((x-6)^2 + 5\right)$$

$$x^2 + 20 = 4\left(x^2 - 12x + 36 + 5\right)$$

$$x^2 + 20 = 4x^2 - 48x + 164$$

$$0 = 3x^2 - 48x + 144$$

$$0 = x^2 - 16y + 48$$

$$0 = (x-4)(x-12)$$

Die Aufgabe hat zwei Lösungen:

$x_1 = 4$ $\qquad P_1 = \left(4 | 0 | 0\right)$

$x_2 = 12$ $\qquad P_2 = \left(12 | 0 | 0\right)$

Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des Dreiecks
A (6 | 1 | - 3) , B (7 | - 7 | 4) , C (- 4 | 0 | 5)

Benützen Sie die Formel!

Der x-Wert des Schwerpunktes ist gleich dem Mittelwert der 3 gegebenen x-Werte
Der y-Wert des Schwerpunktes ist gleich dem Mittelwert der 3 gegebenen y-Werte
Der z-Wert des Schwerpunktes ist gleich dem Mittelwert der 3 gegebenen z-Werte

$$x = \frac{6+7-4}{3} = \frac{9}{3} = 3 \qquad y = \frac{1-7+0}{3} = \frac{-6}{3} = -2 \qquad z = \frac{-3+4+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Damit gilt: S (3 | - 2 | 2)

Das Dreieck ABC ist durch A (- 3 | 1 | 4) und B (2 | 0 | 5) sowie den Schwerpunkt S (- 1 | 2 | 2) gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten von C sowie die Länge der von S aus gehenden Schwerelinie.

Wir benützen die Schwerpunktsformel, um die Koordinaten von C (x | y | z) zu berechnen.

$$-1 = \frac{-3+2+x}{3} \qquad -3 = -1 + x \qquad x = -2$$

$$2 = \frac{1+0+y}{3} \qquad 6 = 1 + y \qquad y = 5$$

$$2 = \frac{4+5+z}{3} \qquad 6 = 9 + z \qquad z = -3$$

Damit ist C (- 2 | 5 | - 3) .

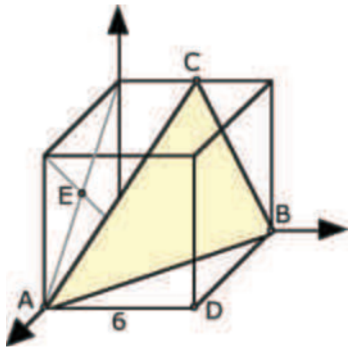
Die gesuchte Schwerelinie s_a geht von A zum Mittelpunkt M_a der Seite BC

B (2 | 0 | 5) , C (- 2 | 5 | - 3)

$$M_a = \left(\frac{2-2}{2} \middle| \frac{0+5}{2} \middle| \frac{5-3}{2} \right) = (0|2.5|1)$$

$$\overrightarrow{M_aA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad s_a = \sqrt{9+2.25+9} = \sqrt{20.25} = 4.5$$

C ist der Kantenmittelpunkt des Würfels;
S ist der Schwerpunkt des Dreieck ABC.
Welche Koordinaten hat der Punkt T in der yz-Ebene,
wenn die Vektoren $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{ST}$ parallel sind?



Aus der Figur liest man für die benötigten
Punkte folgende Koordinaten ab:

$$D(6|6|0) \quad A(6|0|0)$$
$$E(3|0|3) \quad B(0|6|0)$$
$$C(0|3|6)$$

Beachten Sie dazu auch Aufgabe 1
Online | **Offline**

Weiter ist der Schwerpunkt zu berechnen:

$$S\left(\frac{6+0+0}{3}\left|\frac{0+6+3}{3}\right|\frac{0+0+6}{3}\right) = S(2|3|2)$$

Damit erhalten wir $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}$

und – wenn wir für T $(0|y|z)$ setzen: $\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\y-3\\z-2\end{pmatrix}$

Aus der 1. Komponente erkennen wir, dass:

$$\overrightarrow{ST} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DE} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix}-2\\y-3\\z-2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix}y-3=-4\\z-2=2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}y=-1\\z=4\end{matrix}$$

Es ist also $T(0|-1|4)$

Der Punkt $P(5|2|1)$ wird gespiegelt:

a) an der xy-Ebene
b) an der xz-Ebene
c) an der x-Achse
d) an der z-Achse
e) am Ursprung

Sie sollten das Vorstellungvermögen in Anspruch nehmen und auf keinen Fall etwas auswendig lernen!

Beachten Sie auch die einleitenden Bemerkungen bei Aufgabe 1!

a) P' liegt genau unterhalb des Punktes P;
beide Punkte haben denselben Abstand von der xy-Ebene: $P'(5|2|-1)$

b) P' wandert in y-Richtung nach links: $P'(5|-2|1)$

c) Spiegelung rechtwinklig zu x-Achse: $P'(5|-2|-1)$

d) Spiegelung rechtwinklig zur z-Achse:

e) Punktspiegelung: $P'(-5|-2|-1)$