Lehrmaterial zur Ausbildung von Diplomlehrern
MATHEMATIK

AUFGABENSAMMLUNG

zu den Bänden 4 und 5 der Studienbücherei Mathematik für Lehrer

1975

Das vorliegende Lehrmaterial wurde von der Hauptabteilung Lehrerbildung des Ministeriums für Volksbildung als Manuskriptdruck herausgegeben.
Es wurde unter Anleitung der Zentralen Fachkommission Mathematik beim Ministerium für Volksbildung und beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen erarbeitet.

Autor:

Wolfgang Baumann — Pädagogische Hochschule „Liselotte Herrmann“ Güstrow

Hergestellt im Wissenschaftlich-Technischen Zentrum der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam

Druck: VEB Kongreß- und Werbedruck Oberlungwitz
III/12/12 Ag 124/91/75 1187

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das wesentliche Ziel des vorliegenden Heftes ist es, dem Lehrerstudenten ein Material in die Hand zu geben, mit dessen Hilfe er das Stoffgebiet der Analysis an Hand von Fragen überdenken und durch das Lösen von Aufgaben üben kann. Es nimmt sehr engen Bezug auf das Lehrwerk Mathematik für Lehrer Band 4 und Band 5. Fragen, Beispiele und Aufgaben sind nach Kapiteln (1. Dezimale) des Lehrwerks geordnet. Als Kapitelüberschriften wurden die des Lehrwerks verwendet. Jedes Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte: A. Fragen, B. Beispielaufgaben und C. Aufgaben. Die Fragen sollen das Verständnis des betreffenden Kapitels als Ganzes fördern. Nach den Beispielaufgaben folgen Aufgaben zum selbständigen Rechnen. Zu diesen werden Hinweise und bei numerischen Problemen auch die Resultate am Ende des Heftes angegeben. Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad sind mit einem Stern versehen. Es wird empfohlen, stets vor dem Lösen der Übungsaufgaben die Beispielaufgaben sorgfältig durchzuarbeiten, da der Leser durch sie mit der Technik des Beweisens bzw. Lösens von Aufgaben vertrauter wird und einige dieser Beispiele später notwendiges Wissen bereitstellen.

Güstrow, im August 1975 W. Baumann

1. EINIGE GRUNDLEGENDE BEGRIFFSBILDUNGEN DER ANALYSIS

A. Fragen

1. Charakterisieren Sie die reellen Zahlen als einen stetigen archimedisch geordneten Körper!
2. Charakterisieren Sie die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen der Menge der reellen Zahlen!
3. Geben Sie die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen an!
4. Welche Arten von Intervallen gibt es?
5. Definieren Sie die Begriffe obere (untere) Schranke, nach oben (unten) beschränkt, Maximum (Minimum), Supremum (Infimum) und geben Sie Beispiele an!
6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen obere (untere) Schranke, Maximum (Minimum) und Supremum (Infimum)?
7. Klassifizieren Sie die nach oben (unten) beschränkten Mengen rationaler bzw. reeller Zahlen bezüglich ihrer oberen (unteren) Schranken!
8. Definieren Sie das „größte Ganze" einer reellen Zahl!
9. Definieren Sie den absoluten Betrag einer reellen Zahl, und geben Sie die Rechenregeln für absolute Beträge an!
10. Charakterisieren Sie die komplexen Zahlen als einen Körper! Welche Beziehung besteht zwischen dem Bereich der reellen Zahlen und dem Bereich der komplexen Zahlen? Kann man im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen eine Ordnungsrelation erklären, so daß $\mathbb{C}$ damit ein geordneter Körper wird?
11. Was versteht man unter der Basisdarstellung einer komplexen Zahl? Geben Sie die Regeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen unter Verwendung der Basisdarstellung an!
12. Wie ist der absolute Betrag einer komplexen Zahl definiert? Stellen Sie die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Beträgen zusammen!

13. Was versteht man unter der zur komplexen Zahl z konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$? Geben Sie die für den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl geltenden Rechenregeln an!

14. Lassen sich die im Bereich der reellen Zahlen eingeführten Begriffe obere (untere) Schranke, Maximum (Minimum), Supremum (Infimum) auf den Bereich der komplexen Zahlen übertragen?

15. Wie kann man die komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen? Deuten Sie den Betrag einer komplexen Zahl geometrisch!

16. Was versteht man unter einer Funktion von n Variablen ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 1$)? Erläutern Sie die folgenden Begriffe:
Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion, Umkehrkorrespondenz, Umkehrfunktion, Einschränkung und Fortsetzung einer Funktion!

17. Wie ist eine Folge in einer Menge M definiert? Was versteht man unter einer reellen (komplexen) Zahlenfolge?

18. Erklären Sie die folgenden Eigenschaften reeller Funktionen: nach unten (oben) beschränkt, beschränkt, periodisch, gerade, ungerade, monoton wachsend (fallend), streng monoton wachsend (fallend)!
Welche dieser Eigenschaften bleiben für reell- (komplex-)wertige Funktionen sinnvoll?

19. Beschreiben Sie die folgenden Verknüpfungen von reellwertigen bzw. komplexwertigen Funktionen: Zusammensetzung, Vielfaches, Summe, Differenz, Produkt und Quotient!

20. Welche Kriterien für das Vorliegen einer umkehrbar eindeutigen Funktion sind Ihnen bekannt?

21. Was läßt sich über die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden (fallenden) reellen Funktion bezüglich der Monotonie aussagen?

22. Was versteht man unter einer reellen (komplexen) ganzrationalen bzw. rationalen Funktion?

23. Geben Sie je ein Beispiel einer Funktion, die algebraisch bzw. nicht algebraisch ist!

24. Definieren Sie den Begriff der Potenz a^x für $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \in \mathbb{Q}$! Welche Basen sind jeweils zulässig? Gehen Sie auf die Existenz der n-ten Wurzel aus einer nichtnegativen reellen Zahl ein.

25. Welche Eigenschaften hat die Funktion $f: r \mapsto a^r$ $(r \in \mathbb{Q},\ a > 0)$?

26. Unter welchen Voraussetzungen kann eine streng monotone Funktion, deren Definitionsbereich nur aus einer Teilmenge der Punkte eines Intervalls besteht, auf genau eine Weise zu einer auf dem ganzen Intervall definierten streng monotonen Funktion fortgesetzt werden?

27. Wie ist die Exponentialfunktion zur Basis a definiert? Geben Sie die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion an (Definitionsbereich, Wertebereich, Monotonieeigenschaften, Funktionalgleichung)!

28. Definieren Sie die Logarithmusfunktion zur Basis a! Welche Eigenschaften besitzt die Logarithmusfunktion?

29. Geben Sie die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion und deren Bedeutung an! Formulieren Sie weitere Logarithmen- und Potenzgesetze.

30. Was versteht man unter dem p-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}_p$?

31. Was versteht man unter einem metrischen Raum?

32. Welche Begriffe können in metrischen Räumen mit Hilfe des Abstandsbegriffes definiert werden?

33. Welche Eigenschaften besitzt die Norm eines Elementes x aus $\mathbb{R}_p$?

34. Wie lautet die Schwarzsche Ungleichung? Wie lautet die Dreiecksungleichung?

35. Wie können die Koordinaten eines Punktes $x \in \mathbb{R}_p$ mit Hilfe der Norm und die Norm mit Hilfe der Koordinaten abgeschätzt werden?

36. Definieren Sie die Begriffe Verbindungsstrecke zweier Punkte, konvexe Punktmenge, sternförmige Punktmenge.

37. Mit welcher Metrik wird die Menge der reellen Zahlen bzw. der euklidische Raum $\mathbb{R}_p$ ein metrischer Raum?

38. Definieren Sie die Begriffe ϵ-Umgebung, punktierte ϵ-Umgebung, Durchmesser einer Menge, beschränkte Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}_p$!

39. Definieren Sie die Begriffe innerer Punkt, äußerer Punkt, Begrenzungspunkt, Häufungspunkt, isolierter Punkt einer Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}_p$. Erläutern Sie diese durch Beispiele!
Was versteht man unter int M, ext M ?

40. Was versteht man unter einer offenen bzw. abgeschlossenen Menge im Raum $\mathbb{R}_p$? Geben Sie je ein Beispiel für eine offene Menge, für eine abgeschlossene Menge und eine Menge, die weder abgeschlossen noch offen ist!

41. Was versteht man unter einem Gebiet im euklidischen Raum $\mathbb{R}_p$?

B. Beispielaufgaben

Aufgabe I:

Man beweise die Ungleichung $\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)^2 < \frac{1}{2}$.

Beweis: Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)^2 \leqq n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+\nu)^2}.$$

Weiterhin gelten die Beziehungen

$$n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+\nu)^2} < n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+\nu-1)(n+\nu)} = n \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{1}{n+\nu-1} - \frac{1}{n+\nu}\right]$$

$$= \quad n\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right]$$

$$= \quad n\left[\frac{1}{n} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{n+\nu} - \frac{1}{2n}\right]$$

$$= \quad n\left[\frac{1}{n} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \frac{1}{2n}\right] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe II:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die gilt

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}>\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$,

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$,

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}<\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$.

Lösung: Die Lösung der Aufgabe ist der Untersuchung äquivalent, wann der Ausdruck

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x(x+\frac{1}{2})(x+1)}$$

positiv, gleich Null bzw. negativ ist. Der Ausdruck ist nur für $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$ und $x \neq -1$ definiert und wird für keinen Wert von x gleich Null, also gilt b) für keinen Wert von x. Der Ausdruck ist genau dann positiv bzw. negativ, wenn der Nenner positiv bzw. negativ ist. Es gilt

$2x(x+\frac{1}{2})(x+1)>0$ genau dann, wenn

1. $x>0$ oder
2. $x>-1$ und $x<-\frac{1}{2}$ ist. Das heißt, a) gilt für alle x mit
   $-1<x<-\frac{1}{2}$ oder $0<x<+\infty$.

Es gilt $2x(x+\frac{1}{2})(x+1)<0$ genau dann, wenn

1. $x<-1$ oder
2. $x<0$ und $x>-\frac{1}{2}$ ist. D.h., c) ist für alle x aus den Intervallen
   $-\infty<x<-1$ und $-\frac{1}{2}<x<0$ erfüllt.

Aufgabe III:

Man zeige, daß die Menge $M = \{ x : x \in Q_+ \wedge x^2 > 2 \}$ kein Minimum besitzt.

Beweis: Wir werden zeigen, daß es zu jedem $r \in M$ ein $r' \in M$ gibt, so daß $r' < r$ ist.
Sei $r \in M$ beliebig, d.h. $r \in Q_+$ und $r^2 > 2$.
Wir zeigen nun, daß für natürliche Zahlen n mit $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$ stets $(r - \frac{1}{n})^2 > 2$ gilt. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es mindestens eine derartige natürliche Zahl.
Sei also $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$. Dann folgt $r^2 - 2\frac{r}{n} > 2$. Wegen

$r^2 - 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2\ 2\frac{r}{n}$ ist $(r - \frac{1}{n})^2 = r^2 - 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$ und $r - \frac{1}{n}$ ist ein

Element von M, da $r - \frac{1}{n} > 0$ ist (n ist mindestens 1, weil $\frac{2r}{r^2 - 2} > 0$).
Andererseits ist $r - \frac{1}{n} < r$. Setzen wir $r' = r - \frac{1}{n}$, so sind die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe IV:

Es ist $| x - a | \leqq \epsilon$ genau dann, wenn $a - \epsilon \leqq x \leqq a + \epsilon$

Beweis: Es sei $| x - a | \leqq \epsilon$.
Wegen $\pm(x - a) \leqq | x - a |$ ist $\pm(x - a) \leqq \epsilon$. Aus $-(x - a) \leqq \epsilon$ folgt $a - \epsilon \leqq x$. Aus $x - a \leqq \epsilon$ folgt $x \leqq a + \epsilon$, d.h., es ist $a - \epsilon \leqq x \leqq a + \epsilon$.
Es sei umgekehrt $a - \epsilon \leqq x \leqq a + \epsilon$. Dann ist $a - x \leqq \epsilon$ und $x - a \leqq \epsilon$.
Aus $\pm(x - a) \leqq \epsilon$ folgt aber $| x - a | \leqq \epsilon$.

Aufgabe V:

Man veranschauliche die Relation

$$R = \{ (x,y) : x,y \in \mathbb{R} \wedge |x| + |y| \leqq 1 \} \text{ in der } x,y\text{-Ebene.}$$

Lösung:

1. $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$. Dann folgt $x + y \leqq 1$
2. $x \geqq 0$ und $y \leqq 0$. Dann folgt $x - y \leqq 1$
3. $x \leqq 0$ und $y \leqq 0$. Dann folgt $-x - y \leqq 1$
4. $x \leqq 0$ und $y \geqq 0$. Dann folgt $-x + y \leqq 1$

Offenbar ergibt sich als geometrische Veranschaulichung das Innere und der Rand des Quadrates mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$.

Aufgabe VI:

Für alle komplexen Zahlen z gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leqq |z| \leqq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| .$$

Lösung: Sei $z = x + iy$, also $\operatorname{Re} z = x$ und $\operatorname{Im} z = y$.
Stets gilt $(|x| - |y|)^2 \geqq 0$.

Daraus folgt $2|x||y| \leqq x^2 + y^2$ und

$(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 \leqq 2(x^2 + y^2)$. Durch Wurzelziehen ergibt sich $|x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leqq \sqrt{2}|z|$,

also $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leqq |z|$. Damit ist die erste der beiden Behauptungen bewiesen. Die zweite Behauptung wird folgendermaßen bewiesen: Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt $2|x||y| \geqq 0$. Durch Addition von x^2 und y^2 ergibt sich $x^2 + 2|x||y| + y^2 \geqq x^2 + y^2$, also $(|x| + |y|)^2 \geqq x^2 + y^2$.

Schließlich erhalten wir $|x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \geqq |z|$.

Aufgabe VII:

Wo liegen alle Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene, für die gilt

$$|z-2| > |2z-1|\,?$$

Lösung: Wir werden zeigen, daß

$\{z : z \in \mathbb{C} \wedge |z-2| > |2z-1|\} = \{z : z \in \mathbb{C} \wedge |z| < 1\}$ ist, d.h., die Punkte z bilden das Innere des Einheitskreises. Die auf der linken Seite der obigen Gleichung stehende Menge ist nicht leer, da z.B. $z = \frac{1}{2}$ aus dieser Menge ist.

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z-2| > |2z-1|$ genau dann, wenn $|z-2|^2 > |2z-1|^2$ bzw. $(z-2)(\overline{z-2}) > (2z-1)(\overline{2z-1})$ ist. Durch elementare Umformungen der beiden Seiten der Ungleichung kommen wir zu der äquivalenten Ungleichung $z \cdot \bar{z} - 2(z+\bar{z}) + 4 > 4z \cdot \bar{z} - 2(z+\bar{z}) + 1$

bzw. zu $\qquad z \cdot \bar{z} < 1$ oder $|z| < 1$.

Damit ist die Gleichheit der beiden Mengen bewiesen.

Aufgabe VIII:

Man ermittle alle komplexen Zahlen z mit $z^3 = i$.

Lösung: Es sei $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ und

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - ib^3 = i.$$

Hieraus folgt

$$a(a^2 - 3b^2) = 0,$$
$$b(3a^2 - b^2) = 1.$$

Fall 1: Es ist $a = 0$. Dann ist $-b^3 = 1$, und dies tritt nur für $b = -1$ ein. $z_1 = -i$ ist eine Zahl mit $z_1^3 = i$.

Fall 2: Es ist $a \neq 0$. Dann ist $a^2 - 3b^2 = 0$, und aus der zweiten Gleichung folgt $8b^3 = 1$, $b = \frac{1}{2}$. Für a ergibt sich $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Somit ist $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, und es gilt

$$z_2^3 = z_3^3 = i.$$

Aufgabe IX:

Man bestimme den (größtmöglichen) Definitionsbereich $D(f)$ und den Wertebereich $W(f)$ der reellen Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lösung: Die Bestimmung des Definitionsbereiches von f ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Menge der reellen Zahlen, für die

$$1 - x^2 > 0 \text{ ist.}$$

Offensichtlich ist $D(f) =]\!]-1, +1[\![$.
Zur Bestimmung des Wertebereiches $W(f)$ ist zu untersuchen, für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $a = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ eine Lösung besitzt.

Wenn es eine Zahl x_a gibt mit $a = \frac{x_a}{\sqrt{1-x^2}}$, dann folgt $a^2 = \frac{x_a^2}{1-x_a^2}$.

Aus der letzten Gleichung ergeben sich folgende Werte für x_a:

$$x_a = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad \text{und} \qquad x_a = \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Durch Einsetzen der für x_a erhaltenen Werte in die Ausgangsgleichung erkennt man, daß nur $x_a = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ Lösung ist.

Wegen $-1 < x_a < 1$ gilt $x_a \in D(f)$ für alle reellen Zahlen a, und es ist $f(x_a) = a$. Damit ergibt sich $W(f) = \mathbb{R}$.

Aufgabe X:

Man untersuche, ob die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ in $]\!]-1, +1[\![$ monoton ist.

Lösung: Für alle $0 \leqq x < 1$ ist $f(x) \geqq 0$, und für alle $-1 < x \leqq 0$ ist $f(x) \leqq 0$. Daher erhält man aus $x_1 < x_2$ mit $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Sei nun $0 \leqq x_1 < x_2 < 1$, so folgt

$$0 \leqq x_1^2 < x_2^2 < 1,$$

$$-1 \leqq x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1 < 0,$$

$$1 \geqq 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 > 0,$$

$$1 \geqq \sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} > 0,$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}},$$

$$0 < \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} < \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2}}, \text{ d.h. } f(x_1) < f(x_2).$$

Schließlich gelte $-1 < x_1 < x_2 \leqq 0$. Dann ist $0 \leqq -x_2 < -x_1 < 1$, und aus dem Bewiesenen folgt

$$0 < \frac{-x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} < \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}},$$

d.h., es ist

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} < \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2}}.$$

Die betrachtete Funktion f ist in $]\!]-1, +1[\![$ streng monoton wachsend.

Aufgabe XI:

Man zeige, daß für positive reelle Zahlen a,b,c mit $a,b \neq 1$ die Identität $\log_a b \log_b c = \log_a c$ erfüllt ist.

Beweis: Es sei $x = \log_b c$ und $y = \log_a c$. Dann ist $c = b^x = a^y$.

Wir logarithmieren beide Seiten der Gleichung $b^x = a^y$ zur Basis a und erhalten

$$x \log_a b = y.$$

Somit gilt

$$\log_a b \log_b c = \log_a c.$$

Aufgabe XII:

Gegeben sei folgende Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

a) Man bestimme den Definitionsbereich $D(f)$.

b) Man zeige, daß f in $[\![1, \rightarrow [\![$ streng monoton wachsend ist.

c) Man zeige, daß $W(f) = [\![0,1 [\![$ ist.

d) Man beweise, daß der Graph axialsymmetrisch ist.

Lösung:

a) Für alle reellen x gilt $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$.
Also gilt $D(f) = R$.

b) Sei $1 \leqq x_1 < x_2$. Es folgt:

$$0 \leqq x_1 - 1 < x_2 - 1,$$

$$(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 (x_1 - 1)^2 < (x_2-1)^2 + (x_2-1)^2 (x_1-1)^2,$$

$$(x_1 - 1)^2 [1+(x_2 - 1)^2] < (x_2-1)^2 [1+(x_1 - 1)^2],$$

$$\frac{(x_1-1)^2}{1+(x_1-1)^2} < \frac{(x_2-1)^2}{1+(x_2-1)^2},$$

$$\frac{|x_1 - 1|}{\sqrt{(x_1-1)^2+1}} < \frac{|x_2 - 1|}{\sqrt{x_2-1)^2+1}}, \text{ also } f(x_1) < f(x_2).$$

c) Es ist $f(1) = 0$. Für alle $x \neq 1$ gilt

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}}.$$

Mithin gilt $W(f) \subseteq [\![0,1 [\![$. Ist $y \in]\!] 0,1 [\![$ beliebig,

so gilt für $x > 1$ die Beziehung $y = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}}$ genau dann, wenn $x = 1 + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ ist. Daher gilt $W(f) = [\![0,1 [\![$.

d) Für alle reellen a gilt

$$f(1+a) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-a|}{\sqrt{a^2+1}} = f(1-a) .$$

Die Gerade $x = 1$ ist also die Symmetrieachse des Graphen der Funktion f.

Aufgabe XIII:

ρ sei eine Metrik auf einer Menge M . Man zeige, daß

$$q(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

ebenfalls eine Metrik auf der Menge M ist.

Lösung:

a) Da $\rho(x,y) \geqq 0$, folgt $1 + \rho(x,y) > 0$.
   Also ist $q(x,y) \geqq 0$ für alle $x,y \in M$.

b) 1. Sei $q(x,y) = 0$. Dann gilt $\rho(x,y) = 0$. Daraus folgt $x = y$.
   2. Sei $x = y$. Dann folgt wegen $\rho(x,y) = 0$ sofort $q(x,y) = 0$.

c) Aus $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ folgt sofort

$$q(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = q(y,x) .$$

d) Wir betrachten die Funktion $f(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ für $\lambda \geqq 0$.

   Diese Funktion ist monoton wachsend.
   Für alle Elemente x,y,z der Menge M gilt $\rho(x,y) \leqq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.
   Daraus ergibt sich

$$q(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leqq \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$

$$= \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$

$$= \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)} = q(x,z) + q(z,y) .$$

Aufgabe XIV:

x_0 sei ein beliebiger Punkt des $\mathbb{R}_2$ und r eine positive reelle Zahl. Man zeige, daß jeder Punkt x_1 mit $\rho(x_0,x_1) = r$ Häufungspunkt der Menge $U_r(x_0)$ ist.

Lösung:

Es sei $x_0 = (a,b) \in \mathbb{R}_2$ beliebig und $x_1 = (c,d) \in \mathbb{R}_2$ ein Punkt mit

$\rho(x_0,x_1) = \| x_0 - x_1 \| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = r$. Wir haben nun zu zeigen,

daß jede Umgebung $U_\epsilon(x_1) = \quad (x,y) : \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} < \epsilon$ mindestens einen Punkt $x_2 = (e,f)$ enthält, für den $x_2 \in U_r(x_0)$ und $x_2 \neq x_1$ gilt.

Hierzu wählen wir eine natürliche Zahl k mit $k > \frac{\epsilon}{r}$ und setzen

$$x_2 := x_1 + \frac{\epsilon}{2kr} (x_0 - x_1) .$$

Dann ist $x_1 \neq x_2$ und

$\| x_2 - x_1 \| = \frac{\epsilon}{2kr} \| x_0 - x_1 \| = \frac{\epsilon}{2k} < \epsilon$, also $x_2 \in U_\epsilon(x_0)$.

Wegen $x_2 - x_0 = x_1 - x_0 + \frac{\epsilon}{2kr}(x_0 - x_1) = (1 - \frac{\epsilon}{2kr})\,(x_1 - x_0)$

und $1 > \frac{\epsilon}{2kr} > 0$ gilt $\| x_2 - x_0 \| = (1 - \frac{\epsilon}{2kr}) \| x_0 - x_1 \| < r$, d.h.,

es ist $x_2 \in U_r(x_0)$.

C. Aufgaben

Aufgabe 1.1:

Für welche reellen Zahlen besteht die Ungleichung

$$|x-2| < |x-3| \,?$$

Hinweis: Man quadriere die Ungleichung oder wende Fallunterscheidung an.

Aufgabe 1.2:

Aus $b = \frac{a}{1+|a|}$ folgt $|b| < 1$ und $a = \frac{b}{1-|b|}$.

(Beweis durch Fallunterscheidung).

Aufgabe 1.3:

Man beweise folgende Ungleichungen:

a) $\prod\limits_{\nu=1}^{n} (1-a_\nu) > 1 - \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$ $(n \geqq 2,\ 0 < a_\nu < 1$ für $\nu = 1,2,\ldots,n)$,

b) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} < 1$,

c) $2^n > n$,

d) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} < 2$.

Hinweise: Man beweise a) durch vollständige Induktion. Bei b) beachte man, daß $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1})$ gilt. Die Aufgabe c) kann mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes bzw. durch vollständige Induktion bewiesen werden. Die Aufgabe d) kann durch eine Abschätzung unter Zuhilfenahme von b) bewiesen werden.

Aufgabe 1.4:

Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_i| .$$

Aufgabe 1.5:

Man beweise, daß für positive reelle Zahlen a und b stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$ ist.

Aufgabe 1.6:

Man beweise die verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung: Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit $a_i > -1$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Ferner gelte $a_j \cdot a_k > 0$ für $j, k = 0, \ldots, n$. Dann gilt

$$\prod_{i=0}^{n} (1+a_i) > 1 + \sum_{i=0}^{n} a_i .$$

Aufgabe 1.7:

Für welche reellen Zahlen a, b ist

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 ?$$

Aufgabe 1.8:

Man ermittle alle ganzzahligen Paare (x,y), für die $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ und $x > 2$, $y > 2$ gilt.

Aufgabe 1.9:

Für alle reellen Zahlen a,b und t mit $a < b$ und $0 < t < 1$ gilt
$a < ta + (1-t)\,b < b$.

Aufgabe 1.10:

Man ermittle alle reellen Zahlen, für die gilt

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1$,

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$,

c) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} < 1$!

Aufgabe 1.11:

Man zeige, daß die Menge $M = \{x : x \in \mathbb{Q}_+ \wedge x^2 < 2\}$ kein Maximum besitzt.

Aufgabe 1.12:

Man beweise:

a) $\sup\,]a,b[\, = b$, $\inf\,]a,b[\, = a$.

b) Für $M = \left\{x : x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \wedge n \in \mathbb{N}^*\right\}$ gilt $\sup M = \max M = \frac{1}{2}$, $\inf M = 0$.

c) Für $M = \left\{x : x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}^*\right\}$ gilt $\inf M = 0$.

Aufgabe 1.13*:

M und N seien nichtleere nach oben beschränkte Mengen reeller Zahlen. Dann gilt $\sup(M \cup N) = \max \{ \sup M, \sup N \}$.

Aufgabe 1.14:

Es sei $\inf M = h$ und h_1 sei untere Schranke von M. Dann gilt

$h_1 \leqq h$.

Aufgabe 1.15:

Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge M besitzt eine größte untere Schranke.

Hinweis: Die Menge $M^* := \{ x : -x \in M \}$ liegt auf der Zahlengeraden spiegelbildlich zu M bezüglich 0. Auf diese Menge wende man das Grundgesetz der Stetigkeit an.

Aufgabe 1.16:

M und N seien nichtleere nach unten beschränkte Mengen reeller Zahlen. Dann ist die Menge $M \cup N$ nach unten beschränkt, und es gilt

$$\inf (M \cup N) = \min \{ \inf M, \inf N \} .$$

Aufgabe 1.17:

M sei eine beschränkte Zahlenmenge und $N := \{ -x : x \in M \}$. Dann gilt $\sup N = -\inf M$ und $\inf N = -\sup M$.

Aufgabe 1.18:

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und für alle reellen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gilt

$$\max \{ a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n \} \leqq$$

$$\leqq \max \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \} + \max \{ b_1, b_2, \ldots, b_n \} .$$

Aufgabe 1.19:

Man beweise folgende Rechenregeln für komplexe Zahlen:

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$

e) $|z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Aufgabe 1.20:

Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene, für die gilt

a) $|z+3| \leqq 2$ b) $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$ c) $\operatorname{Re} z \geqq \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{Re}(z^2) = a$ (reell) ?

Aufgabe 1.21:

z_0, z_1, z_2 seien 3 Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, für die $z_0 + z_1 + z_2 = 0$ und $|z_0| = |z_1| = |z_3| = 1$ gilt. Man zeige, daß z_0, z_1, z_2 die Ecken eines dem Einheitskreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks bilden.

Aufgabe 1.22:

Es sei z eine von 0 verschiedene komplexe Zahl. Welche komplexe Zahl entspricht dem Spiegelbild von z

a) am Nullpunkt,
b) an der Achse des Reellen,
c) an der Achse des Imaginären,
d) an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten,
e) an der Winkelhalbierenden des 2. Quadranten?

Aufgabe 1.23*:

Wann liegen 3 Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ auf einer Geraden?

Hinweis: Man betrachte den Quotienten $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

Aufgabe 1.24:

Ist $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ eine Gleichung mit reellen Koeffizienten a_i, so ist mit jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bi$ Lösung dieser Gleichung.

Hinweis: Durch die Zuordnung $z \to \bar{z}$ entsteht ein Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen.

Aufgabe 1.25:

Sind a, b, c komplexe Zahlen mit $a \neq 0$, so besitzt die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ im Bereich der komplexen Zahlen im Fall $b^2 = 4ac$ genau eine und im Fall $b^2 \neq 4ac$ genau zwei verschiedene Lösungen.

Hinweis: Man gehe zu der äquivalenten Gleichung

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

über und schließe durch Fallunterscheidung weiter.

Aufgabe 1.26:

Im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kann man keine Ordnungsrelation erklären, so daß $\mathbb{C}$ damit ein geordneter Körper wird.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

Aufgabe 1.27:

Man bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich und den Wertebereich der reellen Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0)$.

Aufgabe 1.28:

Man ermittle den größtmöglichen Definitionsbereich folgender reeller Funktionen

a) $f_1(x) = \sqrt{1 - |x|}$, c) $f_3(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 6}$,

b) $f_2(x) = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ $(a > 0)$, d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$.

Aufgabe 1.29:

Man zeige, daß die Funktionen $f(x) = \frac{1}{3}(4x - x^2)$ auf $]\!] \leftarrow, 2]\!]$ streng monoton wachsend und auf $[\![2, \rightarrow [\![$ streng monoton fallend ist.

Aufgabe 1.30:

Man beweise:

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$, f eine Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und f auf $D(f)$ monoton wachsend. Die Funktion cf ist dann für $c > 0$ monoton wachsend und für $c < 0$ monoton fallend.

b) f, g seien zwei Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $D(f) = D(g) = A$.
Dann ist die Funktion $f + g$ auf A monoton wachsend (fallend), wenn f und g auf A monoton wachsend (fallend) sind.

c) f, g seien zwei Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $D(f) = D(g) = A$.
Wenn $f(x) > 0$ und $g(x) > 0$ für alle x aus A und f und g auf A monoton wachsend (fallend) sind, so ist auch $f \cdot g$ auf A monoton wachsend (fallend).
Wenn $f(x) < 0$ und $g(x) < 0$ für alle $x \in A$ und f und g auf A monoton wachsend (fallend) sind, so ist $f \cdot g$ auf A monoton fallend (wachsend).

Aufgabe 1.31:

f sei eine Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. f sei auf $D(f)$ monoton, $[\![a,b]\!] \subset D(f)$
Man zeige, daß f auf $[\![a,b]\!]$ ein Maximum und ein Minimum besitzt und gebe diese Werte an.

Aufgabe 1.32:

Man bestimme von der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

a) den Definitionsbereich $D(f)$,
b) den Wertebereich $W(f)$ und
c) die Monotonieintervalle.

Hinweis: $f(x) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. Man untersuche, wie der Graph von f aus der Normalparabel (Graph der Funktion $g(x) = x^2$) entsteht.

Aufgabe 1.33:

Man untersuche, ob die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gerade oder ungerade sind:

a) $f_1(x) = x^3 \operatorname{sgn} x$,

b) $f_2(x) = \dfrac{x^2+3x}{|x|+2}$,

c) $f_3(x) = \dfrac{x^5+3x^3-6x}{1+x^4}$.

Man stelle f_2 als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dar.

Aufgabe 1.34:

Man untersuche die folgenden Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ auf Beschränktheit:

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

b) $f_2(x) = -\dfrac{1}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad (x > -1)$

d) $f_4(x) = x\,|x| \quad (x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 1.35:

Man beweise folgende Aussagen:

a) Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

b) Das Produkt zweier gerader (ungerader) Funktionen ist eine gerade Funktion.

c) Eine ungerade Funktion, die an der Stelle $x = 0$ definiert ist, besitzt dort den Funktionswert Null.

Aufgabe 1.36:

f, g seien monotone Funktionen. Es gelte $W(f) \subseteqq D(g)$.
Dann ist die Funktion $g \cdot f$ monoton. Es ist

a) $g \cdot f$ monoton wachsend, wenn f und g monoton wachsend bzw. monoton fallend sind,

b) $g \cdot f$ monoton fallend, wenn eine der beiden Funktionen monoton wachsend und die andere Funktion monoton fallend ist.

Aufgabe 1.37:

Man zeige, daß die Funktion $f(x) = x - [x]$ $(x \in \mathbb{R})$ periodisch mit der Periode $p = 1$ ist.

Aufgabe 1.38:

Ist f eine periodische Funktion mit der Periode p, so ist auch $n \cdot p$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ Periode.

Aufgabe 1.39:

f sei eine Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und $D(f) = R$. Weiterhin erfülle f für alle $x \in R$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a-x) & &\text{und} \\ f(b+x) &= f(b-x), & &0 < a < b. \end{aligned}$$

Man zeige, daß f eine periodische Funktion mit der Periode $p=2(b-a)$ ist.

Aufgabe 1.40:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad (x \in [\![2, \to [\![\,)$.
Man beweise die Existenz der Umkehrfunktion und gebe diese an.

Aufgabe 1.41:

Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Gleichungen erfüllt:

a) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x - 4}} = 4 \qquad (x \in [\![2, \to [\![\,)$,

b) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 3} = 6 \qquad (x \in [\![\frac{2}{3}, \to [\![\,)$,

c) $\lg(2x+3) - \lg(3x-2) = 2 \qquad (x \in]\!]\frac{2}{3}, \to [\![\,)$,

d) $\log_4 \{ 2 \log_3 [1 + \log_2 (1+3 \log_2 x)] \} = \frac{1}{2}$,

e) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$,

f) $9^{x-1} + 3^{x+2} - 324 = 0$,

g) $(a^{3x-5})^{8x-2}(a^{5x+3})^{2x-1} = (a^{6x-5})^{3x+2}(a^{4x-7})^{4x-3}$

a positive reelle Zahl, $a \neq 1$.

Aufgabe 1.42:

Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.

b) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} .$$

Es ist zu beweisen, daß die Funktion f periodisch ist, d.h., daß es eine von Null verschiedene Zahl λ gibt, so daß

$$f(x) = f(x + k\lambda)$$

für alle x des Definitionsbereiches und für alle ganzen Zahlen k gilt.

Hinweis: Zunächst zeige man durch vollständige Induktion, daß wegen a) mit x auch stets $x + ka$ mit allen ganzzahligen k zum Definitionsbereich gehört. Wegen b) ergibt sich

$f(x + 2a) = -\frac{1}{f(x)}$, woraus sich $f(x + 4a) = f(x)$

ergibt.

Aufgabe 1.43:

Es seien f,g für alle positiven reellen Zahlen x erklärte Funktionen. Für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ gelte

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x), \quad f(x) \neq 0.$$

Man beweise: Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle positiven reellen Zahlen x die Gleichung

$$\varphi(x+1) = (x+1)\,\varphi(x),$$

wenn $g(x) = g(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ ist.

Aufgabe 1.44:

Es sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $|a| \neq |b|$. Man ermittle alle Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

genügen.

Ferner diskutiere man den Fall $|a| = |b|$.

Hinweis: Man setze in die gegebene Gleichung für x zunächst $1 + x$ und danach $1 - x$. Aus dem sich ergebenden Gleichungssystem erhält man im Fall $|a| \neq |b|$ für alle reellen x die Funktion

$f(x) = \frac{c}{a-b}x + \frac{c}{a+b}$. Dann untersuche man die Fälle $|a| = |b|$

und $c \neq 0$, $a = b \neq 0$ und $c = 0$, $a = -b \neq 0$ und $c = 0$, $a = b = c = 0$.

Aufgabe 1.45*:

ρ sei eine Metrik auf der Menge X, M eine Teilmenge von X. Man zeige für die Funktion $\rho(x,M) := \inf\limits_{z \in M} \rho(x,z)$

(Abstand eines Punktes x von der Menge M) die folgende Beziehung:

$|\rho(x,M) - \rho(y,M)| \leqq \rho(x,y)$ für $x,y \in X$.

Aufgabe 1.46*:

Es sei $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Für beliebige $x = (x_1,x_2)$ aus X und $y = (y_1,y_2)$ aus X setzen wir:

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

$$\rho_2(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$\rho_3(x,y) = \max \left\{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \right\},$$

$$\rho_4(x,y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1+|x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1+|x_2 - y_2|}.$$

Man untersuche, welche dieser Funktionen von $X \times X$ in $\mathbb{R}$ die Menge X zu einem metrischen Raum macht.
Wo liegen alle Punkte $x = (x_1,x_2)$, die vom Koordinatenursprung $0 = (0,0)$ den Abstand $\rho_i(x,0) = 1$ $(i = 1,3)$ haben?

Aufgabe 1.47:

(X, ρ) sei ein metrischer Raum. Man zeige:

a) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

b) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.

Aufgabe 1.48:

(X, ρ) sei ein metrischer Raum. Unter der Kugel $K_r(x_0)$ mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius r verstehen wir die Menge aller Punkte x mit $x \in X$, deren Abstand vom Punkte x_0 nicht größer als r ist, Man zeige, daß jede Kugel $K_r(x_0)$ eine abgeschlossene Menge ist.

Hinweis: Man zeige, daß jeder nicht zu $K_r(x_0)$ gehörende Punkt kein Häufungspunkt von $K_r(x_0)$ ist.

Aufgabe 1.49:

Man zeige, daß jede Umgebung und jede Kugel im $\mathbb{R}_p$ konvexe Mengen sind.

Aufgabe 1.50:

Für alle x,y mit $x,y \in \mathbb{R}_p$ gilt die Parallelogrammgleichung

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Man gebe eine geometrische Deutung dieser Gleichung im $\mathbb{R}_2$.

2. DER GRENZWERTBEGRIFF

A. Fragen

1. Welche Möglichkeiten bestehen, reelle bzw. komplexe Zahlenfolgen graphisch darzustellen? Geben Sie Beispiele an!
2. Welche Begriffe, die von Funktionen her bekannt sind, lassen sich auf reelle bzw. komplexe Folgen übertragen?
   (Beschränktheit, Monotonie)
3. Geben Sie verschiedene Definitionen für den Begriff Nullfolge an! Demonstrieren Sie diese an mehreren Beispielen!
4. Nennen Sie Rechenregeln und Kriterien für Nullfolgen, und wenden Sie diese auf selbstgewählte Beispiele an!
5. Führen Sie den Begriff der Konvergenz auf den Begriff der Nullfolge zurück! Dabei sind auch die Begriffe Grenzwert und Divergenz zu erläutern.
6. Nennen Sie Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen. Beweisen Sie, daß die Summenfolge und die Produktfolge zweier konvergenter Folgen konvergent sind. Geben Sie Beispiele an, in denen man die Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Grenzwertsätze auf bekannte Grenzwerte zurückführt.
7. Geben Sie mehrere Beispiele für konvergente, divergente und bestimmt divergente Folgen an!
8. Übertragen Sie die Definition der reellen Nullfolge und Sätze über reelle Nullfolgen auf den euklidischen Raum $\mathbb{R}_p$ und auf komplexe Zahlenfolgen. Geben Sie Beispiele für Nullfolgen komplexer Zahlen und Nullfolgen im Raum $\mathbb{R}_p$ an!
9. Übertragen Sie die Begriffe der Konvergenz und des Grenzwertes auf komplexe Folgen bzw. auf Folgen im euklidischen Raum $\mathbb{R}_p$! Definieren Sie den Konvergenzbegriff in beliebigen metrischen Räumen! Welche der für konvergente reelle Nullfolgen gültigen Sätze bleiben bestehen?
10. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von Folgen im Raum $\mathbb{R}_p$ an! Was läßt sich über den Grenzwert aussagen?

11. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz monotoner Zahlenfolgen an!

12. Welche Aussagen können über die Konvergenz bzw. Divergenz monotoner Zahlenfolgen gemacht werden? Was versteht man unter einer Intervallschachtelung? Geben Sie eine Intervallschachtelung für die Zahl e an!

13. Formulieren Sie den Satz über Intervallschachtelungen! Worin sehen Sie die Bedeutung dieses Satzes?

14. Wie kann man die Funktionen $y = \ln x$ und $y = e^x$ durch monotone Zahlenfolgen darstellen?

15. Definieren Sie den Begriff des Häufungswertes einer reellen Zahlenfolge! Warum kann der Häufungswert einer Zahlenfolge als Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffes angesehen werden?

16. Stellen Sie Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert, Häufungswert und größter Häufungswert her! Geben Sie Beispiele an!

17. Leiten Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass aus dem folgenden Satz ab: Jede reelle Zahlenfolge besitzt eine monotone Teilfolge.

18. Nennen Sie Sätze aus der Analysis, zu deren Beweis der Satz von Bolzano-Weierstrass benötigt wird!

19. Was versteht man unter einer Fundamentalfolge und wie lautet das Konvergenzkriterium von Cauchy? Worin ist die Bedeutung dieses Kriteriums bei Konvergenzuntersuchungen zu sehen?
Übertragen Sie den Begriff der Fundamentalfolge auf allgemeine metrische Räume.

20. Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?

21.* Untersuchen Sie die Ihnen bekannten metrischen Räume auf Vollständigkeit!

22.* Wie lautet die als Satz von Cantor bezeichnete Verallgemeinerung des Satzes über Intervallschachtelungen? Was besagt der Satz von Heine-Borel?

23. Wie ist eine Reihe definiert? Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe Glied einer Reihe, Partialsumme einer Reihe, Rest einer Reihe und Ausschnitt einer Reihe!

24. Wann heißt eine Reihe konvergent, divergent bzw. bestimmt divergent? Geben Sie Beispiele an!

25. Erläutern Sie anhand von Beispielen das Konvergenz- und das Summenproblem bei Reihen!

26. Nennen Sie Konvergenzsätze für Reihen!

27. Geben Sie ein (nur) notwendiges und ein notwendiges und hinreichendes Konvergenzkriterium für Reihen mit beliebigen (mit nichtnegativen) Gliedern an!

28. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe!

29. Erläutern Sie am Beispiel des Satzes $\Sigma\,(a_n \pm b_n) = \Sigma\, a_n \pm \Sigma\, b_n$ das Beweisprinzip für Konvergenzsätze über Reihen.

30. Welchem Kriterium für Zahlenfolgen entspricht das notwendige und hinreichende Kriterium für Reihen mit nichtnegativen reellen Gliedern?

31. Wie lautet das Leibnizsche Konvergenzkriterium für alternierende Reihen?

32. Erläutern Sie das Prinzip der Fehlerabschätzung bei alternierenden Reihen!

33. Was versteht man unter einer absolut konvergenten Reihe? Welcher Zusammenhang besteht zwischen absoluter Konvergenz und Konvergenz einer Reihe?

34. Nennen Sie die wichtigsten Kriterien für die absolute Konvergenz!

35. Beweisen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert!

36. Erläutern Sie die Begriffe bedingt konvergente bzw. unbedingt konvergente Reihe! Worin besteht die Bedeutung des kleinen Umordnungssatzes?

37. Geben Sie ein Beispiel für eine bedingt konvergente Reihe an!

38. Kann man zu jeder bedingt konvergenten Reihe und zu jeder reellen Zahl eine Umordnung dieser Reihe angeben, so daß deren Summe gleich dieser reellen Zahl ist?

39. Geben Sie Einteilungsprinzipien für unendliche Reihen an!

40. Was besagt der große Umordnungssatz? Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe Doppelfolge, Doppelreihe, lineare Anordnung für die Glieder einer Doppelfolge. Was versteht man unter der Cauchyschen Produktreihe zweier Reihen?

41. Geben Sie verschiedene Darstellungen der Zahl e an!

42. Geben Sie zwei äquivalente Definitionen für die Stetigkeit einer reellen (bzw. komplexen) Funktion an der Stelle a an. Erläutern Sie den Begriff der Stetigkeit geometrisch. Wann heißt eine reelle (bzw. komplexe) Funktion in der Menge M stetig? Wann heißt eine reelle (bzw. komplexe) Funktion stetig?

43. Formulieren Sie die Aussage: Die Funktion f ist an der Stelle a nicht stetig. Geben Sie Beispiele für Funktionen, die an der Stelle a stetig bzw. nicht stetig sind. Welche Fälle können dabei auftreten?

44. Übertragen Sie den Begriff der Stetigkeit einer reellen (bzw. komplexen) Funktion an der Stelle a auf Funktionen aus einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y

45. Auf welche Klasse von Folgen kann man sich beim Nachweis der Stetigkeit reeller Funktionen beschränken?

46. Was läßt sich über die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall definierten und streng monotonen Funktion aussagen?

47. Geben Sie zwei äquivalente Definitionen für den Grenzwert einer Funktion an der Stelle a! Stellen Sie Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert und Stetigkeit her! Verallgemeinern Sie den Grenzwertbegriff auf Funktionen aus einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y!

48. Nennen Sie Grenzwertsätze und Sätze über Verknüpfungen stetiger Funktionen.

49. Charakterisieren Sie das Verhalten einer reellen ganzrationalen Funktion für $x \to \pm\infty$.

50. Charakterisieren Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \text{ für } x \to 0.$$

51. Definieren Sie die Begriffe linksseitige (rechtsseitige) Stetigkeit und linksseitiger (rechtsseitiger) Grenzwert.

52. Nennen Sie Beispiele für stetige reelle Funktionen!

53. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion an, die in einem Punkt a einen einseitigen Grenzwert aber keinen Grenzwert besitzt.

54. Nennen Sie Sätze über Funktionen, die auf abgeschlossenen Mengen stetig sind.

55. Erläutern Sie ein auf dem Satz von Bolzano beruhendes einfaches Verfahren zur Berechnung von Nullstellen einer Funktion.

56. Begründen Sie, daß der Zwischenwertsatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano darstellt.

57. Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt? Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine Teilmenge des euklidischen Raumes $\mathbb{R}_p$ kompakt ist!

58. Wann heißt eine reelle Funktion gleichmäßig stetig? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Stetigkeit und der gleichmäßigen Stetigkeit?

59. Beweisen Sie, daß die Funktion $f(x) = ax + b$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich gleichmäßig stetig ist! $(a, b \in \mathbb{R}\,,\ a \neq 0)$

60. Übertragen Sie den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit auf Funktionen aus $\mathbb{R}_p$ in $\mathbb{R}_q$

61. Formulieren Sie die Aussage: Die reelle Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig.

62. Nennen Sie Sätze über Nullstellen ganzrationaler Funktionen! Gehen Sie dabei besonders auf den Fundamentalsatz der klassischen Algebra ein.

63. Wie lautet der Satz über die Zerlegung einer ganzrationalen Funktion in Linearfaktoren bzw. in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen?

64. Nennen Sie den Fixpunktsatz von Banach! Erläutern Sie die Begriffe „Fixpunkt einer Funktion" und „kontrahierende Funktion"! Verallgemeinern Sie den Banachschen Fixpunktsatz auf vollständige metrische Räume.

65. Geben Sie Beziehungen an, die eine Fehlerabschätzung nach Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ermöglichen!

66. Geben Sie Definitionen für die trigonometrischen Funktionen an! Gehen Sie dabei auf die jeweiligen Definitionsbereiche, Wertebereiche und Graphen ein!

67. Welche Stetigkeits- bzw. Monotonieeigenschaften besitzen die trigonometrischen Funktionen?

68. Wie lauten die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen? Leiten Sie aus ihnen Formeln für $\cos x \pm \cos y$ und $\sin x \pm \sin y$ her!

69. Welche Grenzwertformel ist für die Differentiation der trigonometrischen Funktionen von grundlegender Bedeutung?

70. Definieren Sie die zyklometrischen Funktionen und stellen Sie die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen zusammen (Definitions- und Wertebereiche, Stetigkeitseigenschaften, Graphen)!

71. Was versteht man unter der trigonometrischen Darstellung einer komplexen Zahl? Stellen Sie die komplexe Zahl $z = -\sqrt{3} - i$ in der trigonometrischen Form dar!

72. Geben Sie eine Regel für die Multiplikation bzw. für die Division von komplexen Zahlen mit Hilfe der trigonometrischen Darstellung komplexer Zahlen an!

73. Nennen Sie die Eulersche Relation! Nach welchem Prinzip kann man aus ihr die Formeln von Moivre ableiten?

74. Geben Sie alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f(z) = z^n - 1$ in der trigonometrischen Form an! Wo liegen diese Nullstellen in der komplexen Zahlenebene?

75. Definieren Sie die hyperbolischen Funktionen, und geben Sie deren wichtigste Eigenschaften an (Definitions- und Wertebereiche, Reihendarstellungen, Stetigkeitseigenschaften, Graphen, Additionstheoreme, Monotonieintervalle)! Welche Analogien ergeben sich zwischen den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen?

76. Geben Sie durch Auflösung der Gleichung $x = \sinh y$ eine Darstellung der Funktion $y = \operatorname{arsinh} x$ an!

77. Definieren Sie die komplexen Funktionen $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ und $\sinh z$ durch Reihen!

78. Definieren Sie die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz für Folgen reeller oder komplexer Funktionen! Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Begriffen?

79. Erläutern Sie geometrisch die Annäherung der Folgenglieder einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger reeller Funktionen an die Grenzfunktion!

80. Geben Sie das Kriterium von Weierstrass für die Untersuchung von Reihen auf gleichmäßige Konvergenz an! Wenden Sie es auf Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{an!}$$

81. Erläutern Sie die Aufgabenstellung der Interpolation von Funktionen durch ganzrationale Funktionen! Was kann man über die Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms aussagen?

82. Was versteht man unter linearer Interpolation?

83. Beweisen Sie die Einzigkeit des Interpolationspolynoms mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra, indem Sie annehmen, es gäbe zwei Interpolationspolynome P_1 und P_2, und deren Differenz betrachten!

84. Was versteht man unter einem trigonometrischen Polynom? Nennen Sie Eigenschaften trigonometrischer Polynome!

85. Geben Sie die beiden Sätze von Weierstrass über die gleichmäßige Approximation von stetigen Funktionen an.

B. Beispielaufgaben

Aufgabe I:

Man untersuche die Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

auf Monotonie und Beschränktheit.

Lösung: Für alle $n \geqq 1$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 .$$

Mithin ist die Folge (a_n) streng monoton wachsend.

Ferner gilt $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \geqq 1$. Die Folge (a_n) ist also nach oben beschränkt. $a_1 = \frac{1}{2}$ ist eine untere Schranke. Stets gilt $a_n \in [\![\frac{1}{2}, 1]\!]$, die Folge ist also beschränkt.

Aufgabe II:

Man zeige, daß die Zahl 3 eine obere Schranke der Folge (a_n) mit

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \text{ ist.}$$

Beweis: Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k .$$

Andererseits gilt

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqq \frac{1}{k!} \leqq \frac{1}{2^{k-1}}\,.$$

Nun folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 1+2=3.$$

Damit haben wir $(1+\frac{1}{n})^n < 3$ für alle $n \geqq 1$.

Aufgabe III:

Man zeige, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n-2}{n^2+3}$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ folgt aus

$$\epsilon \leqq \left|\frac{3n-2}{n^2+3}\right| = \frac{3n-2}{n^2+3} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} \quad \text{stets} \quad n < \frac{3}{\epsilon}\,.$$

Setzen wir also $N(\epsilon) = \frac{3}{\epsilon}$, so folgt aus $n \geqq N(\epsilon)$ stets $|\,a_n\,| < \epsilon$.

Aufgabe IV:

Man beweise, daß die Zahlenfolge $\left(\frac{n^4}{2^n}\right)$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 4$ gilt

$$\left|\frac{n^4}{2^n}\right| = \frac{n^4}{(1+1)^n} < \frac{n^4}{\binom{n}{5}} = \frac{5!\,n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\,.$$

Wir benutzen nun die für alle natürlichen Zahlen p,q mit $q > p$ gültige Ungleichung

$$q-p \geqq \frac{q}{p+1}\,.$$

Wir erhalten

$$\frac{5!n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \leqq \frac{5!n^4}{n\frac{n}{2}\frac{n}{3}\frac{n}{4}\frac{n}{5}} = \frac{(5!)^2}{n}$$

Nach dem Vergleichskriterium ist die Folge $\frac{n^4}{2^n}$ eine Nullfolge.

Aufgabe V:

(a_n) sei eine Folge positiver reeller Zahlen, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ gelte.

Man zeige, daß die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Wir setzen $c_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle n. Nach Voraussetzung gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = q$. Wir wählen eine Zahl p mit $q < p < 1$. Sei $\epsilon = p - q$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = q$ gibt es eine natürliche Zahl N mit $|c_n - q| < \epsilon$ für $n \geqq N$.

Also gilt $c_n \leqq p$ für alle $n \geqq N$, d.h. $a_{n+1} \leqq p \cdot a_n < a_n$ für $n \geqq N$.

Aus der letzten Ungleichung läßt sich ableiten, daß $a_{N+i} \leqq p^i a_N$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.

Sei $n \geqq N$, dann gibt es eine natürliche Zahl i mit $N + i = n$. Für alle $n \geqq N$ gilt

$$a_n = a_{N+(n-N)} = a_{N+i} \leqq p^i a_N = p^n \frac{a_N}{p^N}.$$

Damit haben wir $0 < a_n \leqq p^n \frac{a_N}{p^N}$ für $n \geqq N$.

Nach dem Vergleichskriterium gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe VI:

Man zeige, daß die Zahlenfolge (a_n) mit den induktiv definierten Folgengliedern

$$a_1 = 0\,,\; a_2 = 1\,,\; a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \text{ für } n \geqq 2$$

eine Fundamentalfolge ist.

Beweis: Die Untersuchung der Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder führt zu der Vermutung

$$(1) \qquad d_n := a_{n+1} - a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ für } n \geqq 1\,,$$

die durch vollständige Induktion bewiesen wird.

1. Die Gleichung (1) gilt für $n = 1$.
2. Induktionsannahme: (1) gelte für $n = k$.
   Induktionsbehauptung: (1) gilt für $n = k + 1$.

Beweis:

$$d_{k+1} = a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_k) - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k - a_{k+1})$$

$$= -\frac{1}{2} d_k = (-1)^k \frac{1}{2^k}\,.$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

m und n seien zwei natürliche Zahlen mit $m > n$. Dann gilt

$$a_m - a_n = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \ldots + (a_m - a_{m-1})\,,$$

$$|a_m - a_n| \leqq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \ldots + |a_m - a_{m-1}|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}}\,,$$

$$|a_m - a_n| \leqq \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right),$$

$$|a_m - a_n| \leqq \frac{1}{2^n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right) < \frac{1}{2^n} \text{ für } m > n\,.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine reelle Zahl $N(\epsilon)$, so daß $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ für $n \geqq N(\epsilon)$. Mithin ist $|a_m - a_n| < \epsilon$ für $m > n \geqq N(\epsilon)$. Damit ist gezeigt, daß (a_n) eine Fundamentalfolge ist.

Aufgabe VII:

Man zeige, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ konvergent ist, indem man die Summe dieser Reihe berechnet.

Beweis: Wir berechnen $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)}$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2} .$$

Nun gilt $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Aufgabe VIII:

Mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy ist die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nachzuweisen.

Beweis: Für alle $n, k \geqq 1$ gilt

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+k)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} .$$

Die Summanden der letzten Summe können jeweils in Differenzen zerlegt werden, so daß folgt:

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}|<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}.$$

Sei $\epsilon>0$ beliebig vorgegeben. Wählen wir $N(\epsilon)>\frac{1}{\epsilon}$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n,k mit $k\geqq 1$ und $n>N(\epsilon)$ stets

$$|a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}|<\epsilon.$$

Die vorgelegte Reihe ist also konvergent.

Aufgabe IX:

Man untersuche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ auf Konvergenz.

Lösung: Es gilt bekanntlich $\ln(1+x)<x\,(x\neq 0,\,-1<x<\infty)$.
Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

Andererseits ist

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\frac{n+1-1}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

Demzufolge gilt:

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist als konvergent bekannt. Nach dem ersten Majoranten-kriterium ist die vorgelegte Reihe konvergent.

Aufgabe X:

Man zeige, daß die Gaußsche hypergeometrische Reihe

$$F(a,b,c,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)}\,x^n$$

für $|x| < 1$ absolut konvergiert, sobald $a,b,c \neq 0$ und keine negativen ganzen Zahlen sind.

Beweis: Man verwendet das Quotientenkriterium und erhält

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right| |x| = \left|\frac{(\frac{a}{n}+1)(\frac{b}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n})(\frac{c}{n}+1)}\right| |x|,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|$. Also ist die hypergeometrische Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ sind gesonderte Betrachtungen notwendig.

Aufgabe XI:

Für welche reellen Zahlen x mit $x \neq -1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)} \quad \text{konvergent?}$$

Lösung: Man wendet das Quotientenkriterium an und erhält

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} |x| & \text{für } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

Damit konvergiert die gegebene Reihe absolut für alle Werte $x \neq -1$.

Aufgabe XII:

Man untersuche die Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2-1} \right] .$$

Lösung: Man beweist leicht die Ungleichung

$$\frac{2}{n+1} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2-1} < \frac{2}{n} \text{ für } n \geqq 1 .$$

Die Absolutbeträge der Glieder der Reihe bilden also eine monotone Nullfolge. Nach dem Leibnizschen Kriterium ist die gegebene Reihe konvergent.

Aufgabe XIII:

Man zeige, daß die Cauchysche Produktreihe der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} \text{ konvergent ist.}$$

Beweis: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ist nach dem Leibnizschen Kriterium konvergent. Sie ist aber bekanntlich nicht absolut konvergent. Wir bilden die Cauchysche Produktreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j+1} \frac{(-1)^{k-j}}{k-j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(j+1)(k-j+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \sum_{j=0}^{k} \left[\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k-j+1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} 2 \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1} .$$

Die Cauchysche Produktreihe ist alternierend. Wir wollen das Leibnizsche Kriterium anwenden:

Wir setzen $c_k = \frac{(-1)^k 2}{k+2} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}$. Nun ist zu zeigen, daß $\lim\limits_{k \to \infty} |c_k| = 0$

gilt.

Ferner gilt $|c_k| \leqq |c_{k-1}|$ für $k = 1,2,3,\ldots$, denn sicher ist die Ungleichung

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} \leqq \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1}$$

für $k = 1,2,3,\ldots$ richtig.

Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} \leqq \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1},$$

$$\frac{1}{k+2}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}\right) \leqq \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1},$$

$$\frac{2}{k+2} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1} \leqq \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1},$$

$$|c_K| \leqq |c_{K-1}|.$$

Man sieht, daß die absolute Konvergenz der Reihen für die Konvergenz der Cauchyschen Produktreihe zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Aufgabe XIV:

Man weise mit Hilfe der Umgebungsdefinition die Stetigkeit der Funktion

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \geqq 1)$ nach.

Beweis: Zunächst weisen wir die Gültigkeit folgender Aussage nach: Für alle reellen Zahlen a,b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq b$ gilt

$|a - b| < \frac{|a^n - b^n|}{b^{n-1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Bekanntlich gilt für alle reellen Zahlen a,b

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Da wir $a \neq b$ vorausgesetzt hatten, können wir schreiben

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} .$$

Weiterhin gilt wegen $a > 0$ und $b > 0$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} > b^{n-1} > 0 .$$

Also gilt $\left|\frac{a^n - b^n}{a - b}\right| > b^{n-1}$. Aus der letzten Ungleichung folgt die Behauptung. Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben und a eine beliebige aber feste positive reelle Zahl.
Für alle x aus dem Intervall $[\![0, \rightarrow [\![$ gilt dann

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leqq \frac{|x-a|}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}} \quad (*) .$$

Diese letzte Ungleichung gilt auch für $x = 0$ bzw. $x = a$.

Wir wählen nun δ mit $0 < \delta < \epsilon\ (\sqrt[n]{a})^{n-1}$ und zeigen:
Für alle $x \in [\![0, \rightarrow [\![$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$.
Sei $x \in [\![0, \rightarrow [\![$ und $|x - a| < \delta < \epsilon\ (\sqrt[n]{a})^{n-1}$. Dann ist

$\frac{|x-a|}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}} < \epsilon$ und wegen (*) gilt $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$.

Damit ist die Stetigkeit der Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ an allen Stellen a mit $a > 0$ nachgewiesen. Von der Stetigkeit im Nullpunkt überzeuge sich der Leser selbst.

Aufgabe XV:

Man zeige, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an jeder Stelle des Intervalls $]\!]\, 0, \rightarrow [\![$ stetig ist.

Beweis: Zum Nachweis der Stetigkeit verwenden wir die Umgebungsdefinition. Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben und a eine beliebige aber feste positive reelle Zahl. Wir betrachten die Größen $f(a) + \epsilon$ und $f(a) - \epsilon$. Sei $\epsilon < f(a)$. Wir bestimmen Zahlen x_1, x_2 mit $f(x_1) = f(a) + \epsilon$, $f(x_2) = f(a) - \epsilon$.

Es ergeben sich $x_1 = \frac{a}{1+a\,\epsilon}$ und $x_2 = \frac{a}{1-a\,\epsilon}$.

Für δ nehmen wir die kleinere der beiden Zahlen $x_2 - a$ und $a - x_1$, d.h.,

wir setzen $\delta = \frac{a^2\epsilon}{1+a\epsilon}$. Auch für den Fall, daß $f(a) \leqq \epsilon$ gilt, wird für δ

die Zahl $\frac{a^2\epsilon}{1+a\epsilon}$ verwendet. Wir zeigen nun:

Für alle $x \in \,]\!]\, 0, \rightarrow [\![$ und $|x - a| < \frac{a^2\epsilon}{1+a\epsilon}$ folgt $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$.

Es gilt $0 < a - \frac{a^2\epsilon}{1+a\epsilon} < x < a + \frac{a^2\epsilon}{1+a\epsilon}$.

Es folgen die Ungleichungen:

$$\frac{1}{a+\delta} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a-\delta},$$

$$\frac{1}{a+\delta} - \frac{1}{a} < \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \frac{1}{a-\delta} - \frac{1}{a},$$

$$\frac{-a^2\epsilon}{a^2+2a^3\,\epsilon} < \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \epsilon\,,$$

$$-\epsilon < \frac{-\epsilon}{1+2a\epsilon} < \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \epsilon\,, \text{ also } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon\,.$$

Man kann die Stetigkeit der Funktion im gesamten Definitionsbereich zeigen. Dann nimmt man für δ den Wert

$$\frac{a^2\epsilon}{1+|a|\epsilon}\,.$$

Aufgabe XVI:

Man zeige, daß für jede reelle Zahl a

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots) \text{ ist.}$$

Beweis: a ist Häufungspunkt des Definitionsbereiches der Funktion

$$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}).$$

Aus $x_n \in D(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ folgt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^m - a^m}{x_n - a} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} x_n^{m-k} \cdot a^{k-1} = m a^{m-1}.$$

Aufgabe XVII:

Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$.

Lösung: Der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

ist $D(f) = [\![-1, 0[\![\cup]\!] 0, \to [\![$. Die Stelle $x = 0$ ist Häufungspunkt des Definitionsbereiches. Um den Grenzwert zu berechnen, können wir verschiedene Wege einschlagen:

a) Wir führen eine neue Veränderliche u ein:

$u^3 = 1 + x$. Dann erhalten wir $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u-1}{u^3 - 1}$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{3}.$$

b) Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1\right)} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe XVIII:

Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

Lösung:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{-2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}})(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}})} = -\frac{1}{4}.$$

Aufgabe XIX:

Man zeige mit Hilfe der Definition, daß die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[\![a,b]\!]$ mit $0 \leqq a < b$ gleichmäßig stetig ist.

Beweis: Zu beliebigem $\epsilon > 0$ wählen wir $\delta = \frac{\epsilon}{2b}$.

Dann gilt für alle $x, x' \in [\![a,b]\!]$ mit $|x - x'| < \frac{\epsilon}{2b}$

$$|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |x + x'|\,|x - x'| < |x + x'| \frac{\epsilon}{2b} < \epsilon.$$

Aufgabe XX:

Man ermittle näherungsweise eine Nullstelle der Funktion

$$g(x) = x^3 - 99x + 1$$

mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Lösung: Wir suchen eine Lösung der kubischen Gleichung

$x^3 - 99x + 1 = 0$. Wir setzen $f(x) = \frac{x^3+x+1}{100}$. Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) f ist eine stetige Funktion,

(2) f bildet das Intervall $[\![0,1]\!]$ in sich ab und

(3) f ist kontrahierend.

Beweis zu (2): Aus $0 \leqq x \leqq 1$ folgt $0 \leqq x^3 \leqq 1$ und schließlich

$1 \leqq x^3 + x + 1 \leqq 3$. Also gilt $\frac{1}{100} \leqq f(x) \leqq \frac{3}{100}$ für alle $x \in [\![0,1]\!]$.

Beweis zu (3): Wegen

$$| f(x_1) - f(x_2) | = \frac{1}{100} | x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 |$$

$$= \frac{1}{100} | (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) |$$

$$= \frac{1}{100} |x_1 - x_2| | x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 | \leqq \frac{1}{100} | x_1 - x_2 | (| x_1^2 |$$

$$+ | x_1 \cdot x_2 | + | x_2^2 | + 1) \leqq \frac{4}{100} | x_1 - x_2 | \qquad (x_1, x_2 \in [\![0,1]\!])$$

ist f kontrahierend mit dem Kontraktionsfaktor $q = 0{,}04$. Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt, und f besitzt demzufolge genau einen Fixpunkt $a \in [\![0,1]\!]$. Dieser Fixpunkt ist Lösung der kubischen Gleichung, denn aus $f(a) = a$ folgt $g(a) = 0$.
Mit dem Startwert $a_o = 0$ erhalten wir

$$a_1 = f(a_o) = 0{,}01 \,,$$

$$a_2 = f(a_1) = 0{,}01010001 \,.$$

Die Fehlerabschätzung ergibt

$$| a - a_2 | \leqq \frac{1}{24} \, 0{,}00010001 < 0{,}000005 \, .$$

Aufgabe XXI:

Man zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2^2} \; \ldots \; \cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ ist. φ ist dabei eine beliebige von Null verschiedene reelle Zahl.

Lösung: Aus dem Additionstheorem für die Sinusfunktion erhält man die Beziehung $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$, die für alle reellen Zahlen φ gültig ist. Mittels vollständiger Induktion beweist man nun die Gültigkeit der Gleichung $\sin\varphi = 2^n \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2^2} \; \ldots \; \cos\frac{\varphi}{2^n} \cdot \sin\frac{\varphi}{2^n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$. Der interessierende Ausdruck kann somit in der Form

$$\frac{\sin\varphi}{2^n \cdot \sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \quad \text{geschrieben werden.}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi}{2^n} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} = 1$.

Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2^2} \; \ldots \; \cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Aufgabe XXII:

Man berechne $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

Lösung: Man nutzt die Beziehung $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(vgl. MfL 4) aus und erhält

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Sodann setzt man für x den Wert $(\pi + u)$ ein und läßt u gegen Null streben. Dann erhält man:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(3\pi+3u)}{\tan(5\pi+5u)} = \lim_{u\to 0} \frac{-\sin 3u}{\tan 5u} = -\lim_{u\to 0} \frac{\frac{\sin 3u}{3u}}{\frac{\tan 5u}{5u}} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Aufgabe XXIII:

Man berechne $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cos 2x}$.

Lösung: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Diese Beziehung ausnutzend, erhalten wir

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln[1+(\tan x-1)]}{(1-\tan^2 x)} (1+\tan^2 x)$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln[1+(\tan x-1)]}{(\tan x-1)(\tan x+1)} (\tan^2 x+1) = -1.$$

Aufgabe XXIV:

Man ermittle alle Paare (x,y) von reellen Zahlen x und y, für die die Gleichung $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ erfüllt ist!

Lösung: Wegen der für alle reellen α und β gültigen Beziehungen

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ äquivalent mit

(1) $$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right) = 0\,.$$

Da für alle reellen α und β

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

gilt, ist (1) äquivalent mit

$$-4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0\,.$$

Die letzte Gleichung gilt genau dann, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\sin\frac{x+y}{2} = 0,\ \text{d.h. } x + y = 2k\pi$$

oder

$$\sin\frac{x}{2} = 0,\ \text{d.h. } x = 2k\pi$$

oder

$$\sin\frac{y}{2} = 0,\ \text{d.h. } y = 2k\pi \qquad \text{mit } k\in\mathbb{Z}.$$

Aufgabe XXV:

Man zeige, daß $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ist.

Beweis: Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist für alle $x > 0$ erklärt. Da stets

$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leqq \frac{1}{x}$ oder $-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$ ist, so liegt der Graph dieser Funktion

zwischen den beiden Hyperbeln, die durch die Gleichungen $y = -\frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x}$ dargestellt werden.

Zu beliebigem $\epsilon > 0$ wählen wir $k > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gilt $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \epsilon$ für alle

$x \geqq k$.

Aufgabe XXVI:

Man beweise, daß $\frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ ist.

$(x = 2k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

Beweis: Es ist

$$\sin \frac{2n+1}{2} x = \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{2k+1}{2} x - \sin \frac{2k-1}{2} x\right).$$

Auf die rechte Seite der Gleichung wenden wir das für alle reellen α und β gültige Additionstheorem

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ an. Wir erhalten dann

$$\sin \frac{2n+1}{2} x = \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos kx = 2 \sin \frac{x}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right].$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Behauptung.

Aufgabe XXVII:

Man untersuche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{1+x^{2k}} - \frac{x^{2(k-1)}}{1+x^{2(k-1)}} \right)$$

auf punktweise Konvergenz.

Lösung: Es ist $s_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, und somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } |x| > 1, \\ 0 \text{ für } x = 1, \\ -\frac{1}{2} \text{ für } |x| < 1. \end{cases}$$

Die Reihe ist für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Aufgabe XXVIII:

Man leite die Lagrangesche Interpolationsformel her! (Vgl. MfL 4, S. 198/199)

Lösung: Zunächst werden die $n+1$ Polynome n-ten Grades $\ell_k(x)$ mit

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = i, \\ 0 \text{ für } k \neq i \end{cases} \qquad (k,i=0,1,\ldots,n)$$

bestimmt. Da $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ Nullstellen des Polynoms $\ell_k(x)$ sind, muß dieses die Form

$\ell_k(x) = c(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$ haben.

c wird aus der Bedingung $\ell_k(x_k) = 1$ bestimmt. Man erhält dann für $\ell_k(x)$ den folgenden Ausdruck:

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_o)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{k+1})}$$

Das gesuchte Interpolationspolynom $P(x)$ schreibt sich nun in der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x)\,.$$

In der Summe $P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x_i)$ werden alle Summanden Null, in denen $k \neq i$ ist. Wegen $\ell_i(x_i) = 1$ gilt $P(x_i) = f(x_i)$.

Die Polynome $\ell_k(x)$ heißen Lagrangesche Koeffizienten.

Aufgabe XXIX:

Es ist das Lagrangesche Interpolationspolynom vierten Grades für die folgenden gegebenen Werte aufzustellen:

$x_0 = 1$, $f(x_0) = 17$; $x_1 = 2$, $f(x_1) = 27{,}5$; $x_2 = 3$, $f(x_2) = 76$;

$x_3 = 4$, $f(x_3) = 210{,}5$; $x_4 = 7$, $f(x_4) = 1970$.

Lösung: Wir setzen die gegebenen Werte in die Lagrangesche Interpolationsformel ein und erhalten

$$\begin{aligned}
P(x) = {} & 17\,\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-7)} + 27{,}5\,\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-7)} \\
& + 76\,\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-7)} + 210{,}5\,\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-7)} \\
& + 1970\,\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)} = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8{,}5x + 20{,}5\,.
\end{aligned}$$

C. Aufgaben

Aufgabe 2.1:

Man stelle fest, welche der Zahlenfolgen (a_n) monoton wachsend bzw. monoton fallend sind:

a) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$, b) $a_n = \frac{n-1}{n}$, c) $a_n = \frac{2n-1}{n}$,

d) $a_n = \frac{2n}{n+2}$, e) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1}$, f) $a_n = \sqrt[n]{a}\ (a > 1)$,

g) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, h) $a_n = \frac{2n+1}{3n^2+2}$.

Aufgabe 2.2 :

(a_n) sei eine streng monoton wachsende Zahlenfolge. Dann gilt $a_n < a_m$ für alle natürlichen Zahlen n und m mit $n < m$.

Hinweis: Den Beweis führe man durch vollständige Induktion nach m.

Aufgabe 2.3:

Man untersuche die Zahlenfolgen (a_n) mit

a) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

auf Monotonie und Beschränktheit.

Aufgabe 2.4 :

Man prüfe, ob die Zahlenfolgen (a_n) Nullfolgen sind:

a) $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$, b) $a_n = \frac{1}{n!}$, c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

d) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ e) $a_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}$, f) $a_n = \frac{n!}{n^n}$,

g) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, h) $a_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\right)^n$, i) $a_n = \left(\frac{1+i\sqrt{n}}{n}\right)^n$,

j) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, k) $a_n = \frac{n}{3^n}$.

Aufgabe 2.5:

Man beweise: Ist (a_n) eine Nullfolge und a eine reelle Zahl mit $|a| \leqq a_n$ für alle n, so folgt $a = 0$.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

Aufgabe 2.6 :

Es sei (a_n) eine Nullfolge und a,b seien reelle Zahlen mit $a < b + a_n$ für alle n.

Man zeige, daß dann $a \leqq b$ gilt.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

Aufgabe 2.7:

Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $((-1)^n a_n)$ ebenfalls eine Nullfolge.

Aufgabe 2.8:

Man ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{\log_a n}{n} \quad (a > 1)\,.$$

Aufgabe 2.9:

(a_n) sei eine Nullfolge. Man zeige, daß dann auch die Folge (b_n) mit

$$b_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2.10:

Man gebe jeweils ein allgemeines Glied a_n so an, daß die folgenden Zahlen die ersten Glieder der Zahlenfolge (a_n) sind!

a) $0\,,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{16},\ \frac{4}{25}$

b) $1\,,\ 1\,,\ \frac{5}{7},\ \frac{7}{13},\ \frac{9}{21}$

c) $1\,,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2}$

Aufgabe 2.11:

Man untersuche die Zahlenfolgen (a_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-2}{3n^2+5}$,

b) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$,

c) $a_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$,

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$,

e) $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$,

f) $a_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}$,

g) $a_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,

h) $a_n = \sqrt[3]{n^4} - \sqrt[3]{(n^2-1)^2}$,

i) $a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$,

j) $a_n = \sum_{i=0}^{n} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^i$,

k) $a_n = \dfrac{3^{2n+1}-7}{9^n+4}$,

l) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Aufgabe 2.12:

Man berechne den Grenzwert der Folge mit dem allgemeinen Glied

$$a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}.$$

Hinweis: Man zeige zunächst, daß $7 < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < 7\sqrt[n]{3}$ für alle $n \geqq 1$ gilt. Dann wende man das Vergleichskriterium an.

Aufgabe 2.13:

Man zeige, daß die Zahlenfolge (a_n) mit den induktiv definierten Folgengliedern

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \qquad (n = 3)$$

den Grenzwert $\frac{2}{3}$ besitzt.

Hinweis: Man beweise zunächst $a_n - \dfrac{2}{3} = \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{2}{3}$ für $n \geqq 1$ durch vollständige Induktion.

Aufgabe 2.14:

Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Zahlenfolgen:

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

Hinweis: Bei a) zeige man, daß die Folge monoton wächst und nach oben beschränkt ist. Bei b) beachte man, daß die Folge (a_n) mit

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ bestimmt divergent ist.

Aufgabe 2.15:

Man gebe solche Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) an, daß gilt:

a) $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, $a_n + b_n \to \infty$

b) $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, $a_n + b_n \to -\infty$

c) $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, $a_n + b_n \to c$ (beliebig reell)

d) $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, $a_n + b_n$ unbestimmt divergent

e) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n \to \infty$

f) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n \to -\infty$

g) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n \to c$ (beliebig reell)

h) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n$ unbestimmt divergent .

Aufgabe 2.16:

(a_n) und (b_n) seien zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Die Folgen (c_n) und (d_n) seien definiert durch $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ und $d_n := \min\{a_n, b_n\}$.

Man zeige, daß die Folgen (c_n) und (d_n) konvergent sind und daß $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \max\{a,b\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \min\{a,b\}$ gilt.

Hinweis: Man benutze die Beziehungen

$$\max\{a,b\} = \tfrac{1}{2}[a+b+|a-b|] \text{ und } \min\{a,b\} = \tfrac{1}{2}[a+b-|a-b|].$$

Aufgabe 2.17:

Man berechne die Grenzwerte der Folgen (a_n).

a) $a_n = n^p \cdot q^n \qquad (p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqq q < 1)$,

b) $a_n = \dfrac{q^n}{n!} \qquad$ (q nicht negativ),

c) $a_n = \sqrt[k]{n}\, q^n \qquad (0 < q < 1)$.

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe V dieses Kapitels.

Aufgabe 2.18:

Es seien m positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gegeben. Man zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = A := \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \text{ ist.}$$

Hinweis: Man beweise die Ungleichung

$$A \leqq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} \leqq A \sqrt[n]{m}.$$

Aufgabe 2.19*:

Die Fibonaccische** Zahlenfolge (a_n) ist rekursiv gegeben durch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$. Man zeige, daß sich das allgemeine Glied in der Form

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right\} \quad (n \geqq 1)$$

darstellen läßt.

Hinweis: Man versuche, ohne die Anfangsbedingungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ zu beachten, eine geometrische Folge $a_n = a \cdot q^{n-1}$ zu finden, die der Rekursionsgleichung $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ genügt. Man erhält zwei Folgen aq^n und $a'q'^n$, die der Gleichung genügen; ebenfalls genügt die Summe dieser beiden Folgen dieser Gleichung. Die Konstanten a und a' wähle man so, daß die Anfangsbedingungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ erfüllt sind.

Aufgabe 2.20:

Man weise nach, daß (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung ist, falls:

a) $a_n = \frac{n-1}{n}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$, b) $a_n = \frac{3n^2+2}{n^2}$, $b_n = \frac{3n^2-4}{n^2+1}$,

c) $a_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^2}{n^3}$, $b_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3}$.

d) Es seien a_1, b_1 reelle Zahlen mit $0 < a_1 < b_1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad (n \geqq 1).$$

** Benannt nach Fibonacci (Leonardo von Pisa) – 13. Jahrhundert.

Aufgabe 2.21:

Es seien a_0, b_0 reelle Zahlen mit $0 < a_0 < b_0$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n \geqq 0).$$

Man beweise, daß (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung ist und daß der durch sie bestimmte Grenzwert gleich $\sqrt{a_0 b_0}$ ist.

Hinweis: Man beachte die Beziehungen zwischen arithmetischem, harmonischem und geometrischem Mittel.

Aufgabe 2.22:

Die Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ und } a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \qquad (n \geqq 2).$$

Man untersuche das Konvergenzverhalten und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Man zeige zunächst, daß die Folge (a_n) monoton wachsend ist. Sodann zeige man, daß die Zahl 2 eine obere Schranke ist. Nachdem man so bewiesen hat, daß der Grenzwert existiert, bestimme man ihn aus der Gleichung $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: $a_1 = \sqrt{c}$ $(c > 0)$, $a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}$ $(n \geqq 2)$.

Als Grenzwert erhält man $\dfrac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$.

Aufgabe 2.23:

a_0 sei eine reelle Zahl mit $0 < a_0 < 1$. Die Folge (a_n) sei induktiv definiert durch $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1}) \qquad (n \geqq 1)$.

Man untersuche das Konvergenzverhalten dieser Folge und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Man wende das Hauptkriterium über monotone Funktionen an.

Aufgabe 2.24:

Gegeben seien die Zahlenfolgen (a_n) mit den Gliedern:

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{n+1} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$

b) $a_n = n$,

c) $a_n = 2 + n^{(-1)^n}$

d) $a_n = -n$

e) $a_n = \frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \begin{cases} 2^k & \text{für } n = 2k, \\ 3^k & \text{für } n = 2k+1, \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$

g) $a_n = (-1)^n(1 - a^{\frac{1}{n}}) \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 0)$,

h) $a_n = n - 3\left[\frac{n-1}{3}\right] + \frac{1}{2 + \left[\frac{n-1}{3}\right]} \qquad (n \geqq 1)$.

Man bestimme jeweils Limes inferior und Limes superior.

Aufgabe 2.25:

Man beweise, daß die Folge (a) mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$ eine Fundamentalfolge ist.

Hinweis: Zunächst zeige man, daß $| a_{n+1} - a_n | \leqq \frac{1}{n}$. Sodann weise man nach, daß alle auf a_{n+1} folgenden Glieder zwischen a_n und a_{n+1} liegen. Dann gilt für beliebige $n_1, n_2 > \frac{1}{\epsilon}$

$$| a_{n_1} - a_{n_2} | \leqq | a_{n+1} - a_n | < \epsilon .$$

Aufgabe 2.26:

Man weise nach, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ das Cauchysche Konvergenzkriterium nicht erfüllt.

Hinweis: Man wähle ϵ mit $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Dann gibt es zu jedem n_0 zwei Zahlen n_1, n_2, n_0, für die $| a_{n_1} - a_{n_2} | > \epsilon$ ist.

Aufgabe 2.27:

(v_n) sei eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = g$ und es sei

$a_n = v_n - v_{n+1}$.

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = v_0 - g$.

Aufgabe 2.28:

Man berechne die Summen der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

Hinweis: Bei d) und e) zerlege man das allgemeine Glied der Reihe in Partialbrüche.

Aufgabe 2.29:

Man untersuche die Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ $(0 < a \leqq 1)$

auf Konvergenz.

Aufgabe 2.30:

Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe des Kriteriums von Cauchy:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $(|q| < 1)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Hinweise:

a) $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| \leqq |q|^{n+1} \frac{1-|q|^k}{1-|q|} < |q|^{n+1} \frac{1}{1-|q|}$,

b) $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| \leqq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

Aufgabe 2.31:

Man untersuche die Konvergenz folgender Reihen mit Hilfe des Kriteriums für Reihen mit nichtnegativen Gliedern:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 2.32:

Man untersuche die Konvergenz folgender Reihen mit Hilfe des Leibnizschen Konvergenzkriteriums:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\sqrt[n]{a})$ $(a > 0)$.

Aufgabe 2.33:

Man prüfe, ob das Leibnizsche Konvergenzkriterium für die Reihe

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{9^3} + \ldots$$

erfüllt ist.

Aufgabe 2.34:

Wieviel Glieder der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ genügen, um die Summe auf vier Dezimalen genau zu erhalten?

Aufgabe 2.35:

Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe von Vergleichskriterien:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$,

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(1+n)}}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$,

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n^2+6n+1}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Aufgabe 2.36:

Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit dem Quotientenkriterium oder dem Wurzelkriterium:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$ $(a > 0)$,

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} 2^n$ ($\alpha \neq 0$, keine natürliche Zahl),

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(a > 1)$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ $(a > 1)$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (\frac{1}{2})^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} (\frac{1}{6})^n \quad (\alpha > 0)$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_1 = 1$, $a_{2k} = k^2 (\frac{1}{3})^{2k}$, $a_{2k+1} = \sqrt{k} (\frac{1}{3})^{2k+1}$ $(k=1,2,\ldots)$,

k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k b^n \quad (k \in \mathbb{N},\ 0 < b < 1)$.

Aufgabe 2.37:

Für welche Werte von x sind die folgenden Reihen konvergent:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{x^{2n+1}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)!}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (|x| \neq 1)$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$?

Aufgabe 2.38:

Man untersuche die Konvergenz bzw. die Divergenz folgender Reihen, indem man die Partialsummenfolgen auf Konvergenz bzw. Divergenz untersucht:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+n+p)}$ (α beliebige reelle, von $-1, -2, -3, \ldots$ verschiedene Zahl, $p \geq 1$)

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}$ $(|x| \neq 1)$.

Aufgabe 2.39:

Man bilde von den folgenden absolut konvergenten Reihen jeweils die Cauchysche Produktreihe und gebe deren Grenzwert an:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ $(|q|<1)$,

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ $(|q|<1)$.

Aufgabe 2.40:

$C(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$

a) Man beweise mit Hilfe des Quotientenkriteriums, daß beide Reihen für alle Werte von x absolut konvergieren.
b) Durch Multiplikation dieser beiden Reihen leite man die folgenden Beziehungen her:

$$C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y),$$
$$S(x+y) = S(x)C(y)+C(x)S(y).$$

Aufgabe 2.41:

Man untersuche, ob die Funktion f mit $f(x) = [x]$ $(x \in \mathbb{R})$ in allen Punkten stetig ist.

Hinweis: Man mache eine Fallunterscheidung, indem man zunächst die Untersuchung für ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und dann für ein $x \in \mathbb{Z}$ durchführt.

Aufgabe 2.42:

Man untersuche die Funktionen

a) $f(x) = | x - 1 | \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leqq 1 \\ 1 - x & \text{für } x \geqq 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leqq x < 1 \\ 3 - x & \text{für } 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases} \quad (x \in [\![0,2]\!])$,

d) $i(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < -1 \\ x + 2 & \text{für } x \geqq -1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$

in ihren Definitionsbereichen auf Stetigkeit.

Hinweis: Man wende die Folgendefinition an.

Aufgabe 2.43:

Man ermittle diejenigen Werte von x, für die die Funktion $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ eine Unstetigkeitsstelle besitzt $(x \geqq 0)$.

Aufgabe 2.44:

Besitzt die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$

Unstetigkeitsstellen?

Aufgabe 2.45:

Man weise nach, daß die Funktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ an den Stellen $+1$ und -1 unstetig ist $(x \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 2.46:

Man untersuche, in welchen Punkten ihres Definitionsbereiches die reellen Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+7x}}{x-2\sqrt{x}+1}$, b) $g(x) = \dfrac{2x^2+3\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x-1}}{x-3\sqrt{x}+6}$

stetig sind.

Aufgabe 2.47:

Gegeben seien die Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{für } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \qquad (x \in [\![0,1]\!]),$$

$$h(x) = g(x-[x])$$

und

$$f(x) = \begin{cases} h(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Man zeige, daß die Funktion f an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit besitzt.

Aufgabe 2.48:

Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$,

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-12x+35}{x^2+2x-35}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$,

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$, f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m und n ganz),

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\,...\,(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\,...\,(x^k-1)}$ $(k,n \in N,\ 0 < k \leqq n)$,

h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Hinweis: Man kürze Zähler und Nenner durch $(x-a)$, falls Zähler und Nenner an der Stelle a verschwinden.

Aufgabe 2.49:

Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \geqq 1)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

Aufgabe 2.50:

Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$, c) $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\lg x - 1}{x-10}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

Hinweis: Man beachte, daß $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ und

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0) \text{ gilt.}$$

Aufgabe 2.51:

Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-7}{x^3+x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Aufgabe 2.52:

Bekanntlich gibt es zu jeder ganzrationalen Funktion f und zu jedem $x_0 \in D(f)$ eine eindeutig bestimmte positive natürliche Zahl p und eine eindeutig bestimmte ganzrationale Funktion g mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^p g(x) \quad \text{und} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Man gebe diese Darstellung für die Funktion

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 14 \quad (x \in \mathbb{R})$ für $x_0 = 3$ an.

Aufgabe 2.53:

Die Funktion $f(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16$ hat bei $x = 2i$ eine doppelte Nullstelle. Man gebe die restlichen Nullstellen dieser Funktion an!

Aufgabe 2.54:

Man bestimme die ganzrationale Funktion niedrigsten Grades, die bei $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ einfache Nullstellen, bei $x_3 = 2$ eine doppelte Nullstelle hat und deren Graph durch den Punkt $(3,20)$ geht!

Aufgabe 2.55:

Man zerlege die ganzrationale Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 26$ $(x \in \mathbb{R})$ in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen

Aufgabe 2.56:

Man ermittle näherungsweise eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} - x + 2$

a) mit dem Halbierungsverfahren (vgl. MfL 4, Beweis von 2.4.2., Satz 2),

b) mit dem Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 2.57:

a) Man zeige, daß durch $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ eine stetige und kontrahierende Funktion gegeben ist, die das Intervall $[\![1,2]\!]$ in sich abbildet und $\sqrt{2}$ gemäß der Vorschrift

$$a_{n+1} = f(a_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

iterativ berechnet werden kann.

b) Indem man $a_0 = 1,4$ setzt, berechne man einige Näherungswerte und führe anschließend eine Fehlerabschätzung durch.

Aufgabe 2.58:

Man berechne gegebenenfalls die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

Aufgabe 2.59:

Man prüfe, ob die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0 stetig sind.

Aufgabe 2.60:

Man berechne die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{1-\cot x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln \frac{2a+x}{a+x}$.

Aufgabe 2.61:

Unter Benutzung der Beziehung $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ beweise man

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k-1)a}{n^2} = a.$$

Aufgabe 2.62:

Man stelle die folgenden Funktionen graphisch dar:

a) $f(x) = \sin \frac{x}{a}$ für $a = \frac{1}{2}, 1, 2,$

b) $g(x) = A \cdot \sin x$ für $A = \frac{1}{2}, 1, 2,$

c) $h(x) = 2 \cdot \sin(3x + \frac{\pi}{3}),$

d) $k(x) = \frac{3}{2} \sin(-2x - \frac{\pi}{2}),$

e) $\ell(x) = \sin \frac{1}{x},$

f) $m(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}.$

Aufgabe 2.63:

Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $0 < x < \pi$, für die

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2 \cot 2x}{\cot x} \leqq 1 \text{ gilt!}$$

Hinweis: Man zeige, daß für $x \neq k \cdot \frac{\pi}{4}$ $(k = 1,2,3)$ die gegebene Ungleichung äquivalent ist mit der Ungleichung

$$\frac{2 + \tan^2 x - \tan^4 x}{1 - \tan^2 x} \leqq 2.$$

Aufgabe 2.64:

Man ermittle für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \qquad (a \neq 0\,,\ b \neq 0)$$

den größtmöglichen Definitionsbereich und untersuche, ob dort Unstetigkeiten vorhanden sind!

Aufgabe 2.65:

Man beweise die Gleichungen

a) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ für $x > 0$,

b) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ für $x < 0$.

Dabei ist für $\arctan x$ und $\arctan \frac{1}{x}$ stets der Hauptwert zu wählen.

Aufgabe 2.66:

Man beweise die Gleichung

$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für $x \cdot y < 1$.

Aufgabe 2.67:

Man beweise die folgenden Gleichungen:

a) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,

b) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

d) $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$,

e) $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$,

f) $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh\frac{x-y}{2}$,

g) $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$.

Aufgabe 2.68:

Man beweise die Gleichung $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$.

Aufgabe 2.69:

Man gebe alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f(z)$ in der trigonometrischen Form an:

a) $f(z) = z^2 - (1 + i)$ b) $f(z) = z^4 + 1$

Aufgabe 2.70:

Man gebe die trigonometrische Darstellung für die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}\,i$, $z_4 = 1$ an.

Aufgabe 2.71:

Man ermittle den Betrag und das Argument von $\frac{1+3i}{2+i}$.

Aufgabe 2.72:

Man löse die quadratische Gleichung

$$z^2 + (5 - 2i)z + (5 - 5i) = 0 .$$

Aufgabe 2.73:

Man berechne gegebenenfalls die Grenzfunktionen der Folgen (f_n) mit

$$f_n(x) = x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ |x| \leqq 1),$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Man untersuche die Grenzfunktionen auf Stetigkeit und überprüfe im Falle der Stetigkeit, ob gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Aufgabe 2.74*:

Man zeige, daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$$

gleichmäßig in R konvergieren. Darüber hinaus zeige man, daß die Reihe

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ zwar konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

Hinweis: Man benutze das Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen und schätze den Absolutbetrag des Reihenrestes ab (vgl. MfL 4, S. 120/S. 121).

Aufgabe 2.75*:

Man beweise, daß durch eine lineare Transformation der Veränderlichen x die Form der Lagrangeschen Koeffizienten nicht geändert wird!

Hinweis: Man substituiere $x = at + b$, $x_k = at_k + b$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Aufgabe 2.76:

Man leite die Lagrangesche Interpolationsformel für äquidistante (gleichabständige) Stützstellen her!

Hinweis: Man setze $x_k = x_0 + t_k h$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\; t_k = k$ für $k = 0, 1, \ldots, n;\; h \neq 0)$.

Aufgabe 2.77:

Man bestimme durch kubische Interpolation einen Näherungswert für $e^{0,15} = 1{,}16183$ aus den vier Werten

$x_0 = 0,\; f(x_0) = 1;$ $\qquad x_1 = 0{,}1,\; f(x_1) = 1{,}10517;$

$x_2 = 0{,}2,\; f(x_2) = 1{,}22140;$ $\qquad x_3 = 0{,}3,\; f(x_3) = 1{,}34986.$

Man vergleiche den Näherungswert mit dem exakten Wert!

Aufgabe 2.78:

Aus dem Ansatz

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

ist das Interpolationspolynom $P(x)$ zu bestimmen.

Aufgabe 2.79:

Man interpoliere die Funktion $f(x) = 2^x$ durch eine Funktion

$r(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$, wobei man Gleichheit von $f(x)$ und $r(x)$

für $x = 0, 1, 2, 3$ verlangt.

Bemerkung: Nach den Polynomen sind die rationalen Funktionen für numerische Rechnungen am geeignetsten. Man ist daher auch an Interpolation durch rationale Funktionen interessiert.

3. DIFFERENTIALRECHNUNG

A. Fragen

1. Erläutern Sie den Begriff des Differentialquotienten geometrisch und geben Sie eine exakte Definition!

2. Nennen Sie die Weierstraßsche Zerlegungsformel, und erläutern Sie diese geometrisch! Welche Differentiationsregeln können mit Hilfe der Weierstraßschen Zerlegungsformel bewiesen werden?

3. Was versteht man unter der Tangente des Graphen einer an der Stelle a differenzierbaren reellen Funktion im Punkt $P(a,f(a))$?

4. Leiten Sie eine Gleichung der Normalen der Funktion $f(x) = \sin x$ in dem zu $x = \frac{\pi}{6}$ gehörenden Kurvenpunkt her!

5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

6. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion an, die stetig, aber nicht an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist!

7. Beweisen Sie die Regel für die Differetiation des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen!

8. Bilden Sie die Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ mit Hilfe der Regel für die Differentiation der Umkehrfunktion!

9. Geben Sie ein Beispiel für eine zusammengesetzte Funktion an, und differenzieren Sie diese Funktion!

10. Was versteht man unter dem Begriff logarithmische Ableitung? In welchen Fällen wird diese zweckmäßig angewendet?

11. Nennen Sie den Satz von Rolle und skizzieren Sie den Beweisgedanken!

12. Geben Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in zwei verschiedenen Formen an! Interpretieren Sie diesen Satz geometrisch!

13. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Satz von Rolle und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

14. Nennen Sie Lehrsätze, die Rückschlüsse aus den Eigenschaften der Ableitung $f'(x)$ auf Eigenschaften von $f(x)$ ermöglichen!

15. Erläutern Sie die Begriffe Kurve, Kurvenstück, geschlossene Kurve, und geben Sie Beispiele an!

16. Was versteht man unter einer glatten Kurve?

17. Was versteht man unter einer partiellen Ableitung einer Funktion von zwei (bzw. p) Variablen?

18. Wann heißt eine Funktion $z = f(x,y)$ im Punkt $(a,b) \in D(f)$ differenzierbar?

19. Ist die Existenz der partiellen Ableitungen einer Funktion $z = f(x,y)$ für die Differenzierbarkeit hinreichend?

20. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ an den Graphen der Funktion

    $f(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2} \quad (x_0^2 + y_0^2 < r^2)$?

21. Wie kann $\frac{df(x(t),y(t))}{dt}$ berechnet werden (verallgemeinerte Kettenregel)? Geben Sie ein Beispiel an!

22. Erläutern Sie die Begriffe Gradient und Richtungsableitung einer Funktion $w = f(x,y,z)$!

23. Wann heißt eine Punktmenge des Raumes $\mathbb{R}_3$ ein Flächenstück? Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe glattes Flächenstück und Tangentialebene der Fläche.

24. Wie ist die n-te Ableitung einer reellen Funktion einer Variablen definiert?

25. Wie lautet die Leibnizsche Produktformel für die n-te Ableitung eines Produkts zweier reeller Funktionen?

26. Was besagt der Satz von H.A. Schwarz?

27.* Erläutern Sie die Zielstellung der Taylorentwicklung einer Funktion! Geben Sie die Taylorsche Formel mit dem Restglied von Lagrange an!

28. Inwiefern kann der Mittelwertsatz der Differentialrechnung als besonderer Fall des Taylorschen Satzes angesehen werden? Warum mußte trotzdem ein gesonderter Beweis des Mittelwertsatzes gegeben werden?

29. Was versteht man unter der MacLaurinschen Form des Taylorschen Satzes? Geben Sie das Restglied von Lagrange für die MacLaurinsche Form an!

30. Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x}$ mit dem Restglied 2ter Ordnung an!

31. Erklären Sie die Besonderheit des Taylorschen Satzes bei Anwendung auf ganze rationale Funktionen!

32. Unter welchen Voraussetzungen kann man von der Taylorschen Formel zur Taylorschen Reihe übergehen? Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für diesen Sachverhalt an!

33. Wie kann man die Potenzreihenentwicklung der Tangensfunktion erhalten?

34. Wie lautet die Taylorsche Formel für eine Funktion von zwei Veränderlichen mit dem Restglied 2ter Ordnung?

35. Definieren Sie die verschiedenen Formen von Extremwerten! Wann liegt ein Wendepunkt bzw. Stufenpunkt vor?

36. Nennen Sie (notwendige bzw. hinreichende) Bedingungen für das Auftreten von Extremwerten bzw. Wendepunkten!

37. Charakterisieren Sie das lokale Verhalten einer m-mal stetig differenzierbaren Funktion mit $f^{(m)}(a) \neq 0$ für wenigstens ein $m \geqq 2$ mit Hilfe der Taylorentwicklung!

38. Stellen Sie die bei einer Kurvendiskussion wesentlichen Einzeluntersuchungen zusammen!

39. Geben Sie (notwendige bzw. hinreichende) Bedingungen für das Auftreten von Extremwerten bei einer differenzierbaren Funktion von zwei Variablen an!

40. Was versteht man unter unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$? Erläutern Sie an Beispielen die verschiedenen Formen der Regel von Bernoulli-l'Hospital! Wie führt man unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 usw. auf die Grundform der Regel von Bernoulli-l'Hospital zurück?

41. Unter welchen hinreichenden Voraussetzungen über die Funktionen f und g gilt die Regel

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \; ?$$

42. Was versteht man unter der Potenzreihendarstellung einer Funktion f an der Stelle a?

43. Definieren Sie die Begriffe Konvergenzbereich und Divergenzbereich einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a.

44. Welche Fälle sind für den Konvergenzbereich einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a möglich? Gehen Sie dabei auf den Begriff Konvergenzradius ein!

45. Geben Sie eine Methode zur Bestimmung des Konvergenzradius' einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a an!

46. Welche Beziehung besteht zwischen dem Konvergenzbereich und dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a? Welche Fälle sind bei reellen Potenzreihen für den Konvergenzbereich möglich, wenn der Konvergenzradius von Null verschieden ist?

47. Wann heißt eine Funktion im Punkt a ihres Definitionsbereiches analytisch? Inwiefern ist jedes Polynom in jedem Punkt analytisch?

48. Wie wird eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion im Innern des Konvergenzkreises differenziert?

49. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine Funktion im Punkt a ihres Definitionsbereiches analytisch ist!

50. Welche Aussagen gelten für die Verknüpfungen analytischer Funktionen?

51. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, daß eine in einem abgeschlossenen Intervall differenzierbare Funktion genau einen Fixpunkt in diesem Intervall besitzt!

52. Erläutern Sie das Verfahren von Newton zur Nullstellenermittlung einer Funktion! Geben Sie eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Folge der Näherungswerte gegen die Nullstelle der Funktion an.

53. Zeigen Sie durch Betrachtung der Funktion $f(x) = x^2 - c$ $(c > 0)$, daß durch $x_0 = c$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$ eine Näherungsfolge für $\sqrt{c}$ gegeben ist!

54. Geben Sie ein Kriterium dafür an, daß sich die Folge der Newton-Näherungen von oben bzw. von unten einer Lösung x_0 von $f(x) = 0$ nähert!

55. Erläutern Sie das sogenannte modifizierte Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung! Welche Vor- und Nachteile besitzt dieses Verfahren gegenüber dem eigentlichen Newton-Verfahren?

56. Geben Sie den Satz über implizit definierte Funktionen an! Erläutern Sie diesen Satz an einem Beispiel!

57. Geben Sie eine zum modifizierten Newton-Verfahren analoge Methode an, mit deren Hilfe Funktionswerte der „aufgelösten" Gleichung $y = f(x)$ der Gleichung $F(x,y) = 0$ mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden können!

58. Was versteht man unter einer Niveau- oder Höhenlinie der Funktion $z = f(x,y)$? Geben Sie einige Beispiele an!

B. Beispielaufgaben

Aufgabe I:

Man bestimme die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ an der Stelle $x = a$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$!

Lösung:
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} .$$

Wegen $x - a = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k} (\sqrt[n]{a})^{k-1}$

(vgl. MfL 4, S. 12 (7)) gilt

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} = \frac{(x-a)}{(x-a) \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k} (\sqrt[n]{a})^{k-1}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k} (\sqrt[n]{a})^{k-1}} .$$

Aus der letzten Beziehung folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{a})^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}} = f'(a) .$$

Aufgabe II:

Man untersuche die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit!

a) $f(z) = z^3 \qquad (z \in \mathbb{C})$,

b) $f(z) = \operatorname{Re} z \qquad (z \in \mathbb{C})$.

Lösung: a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} = 3z^2 + 3zh + h^2 \text{ , und somit ist}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = 3z^2$. Die Funktion $f(z) = z^3$ ist stetig differenzierbar.

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\operatorname{Re}(z+h) - \operatorname{Re} z}{h} = \frac{\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} h - \operatorname{Re} z}{h} = \frac{\operatorname{Re} h}{h} .$$

Die Funktion $g(h) = \frac{\operatorname{Re} h}{h}$ $(h \in C - \{0\})$ besitzt an der Stelle $h = 0$ keinen Grenzwert, denn für die Nullfolge (h_n) mit $h_n = \frac{i}{n}$ bzw. $h_n = \frac{1}{n}$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} g(h_n) = 0$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} g(h_n) = 1$.

Die Funktion $f(z) = \operatorname{Re} z$ ist somit an keiner Stelle z differenzierbar.

Aufgabe III:

Nach der Zahlentafel ist $\ln 720 = 6{,}5793$. Man ermittle mit Hilfe des Mittelwertsatzes einen Näherungswert für $\ln 721$!

Lösung: Mit $a = 720$ und $h = 1$ gilt

$$f(a+h) = \ln 721 = \ln 720 + 1 \cdot \frac{1}{720+\vartheta} \quad (0 < \vartheta < 1) .$$

Für $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = 1$ ist $\frac{1}{720+\vartheta} = \frac{1}{720} = 0{,}0013\overline{8}$ bzw.

$\frac{1}{720+\vartheta} = \frac{1}{721} = 0{,}001386$. Da ϑ zwischen 0 und 1 liegt, die Werte

$\frac{1}{720}$ und $\frac{1}{721}$ jedoch erst in der 6. Dezimale voneinander abweichen, ist

wegen der Monotonie von $\frac{1}{720+\vartheta}$ die genaue Kenntnis von ϑ gar nicht

erforderlich. Man erhält $\ln 721 \approx 6{,}5793 + 0{,}0013 = 6{,}5806$.

Aufgabe IV:

Man untersuche die Funktion

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkte $P(0,0)$ auf Stetigkeit.

Lösung: a sei eine fest gewählte reelle Zahl. Es wird die Folge

$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{a}{n})$ betrachtet. Offenbar gilt $\lim\limits_{n\to\infty} ((x_n, y_n)) = 0$ für jedes

fest gewählte a.

Wegen $f(x_n, y_n) = \frac{a}{1+a^2}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \frac{a}{1+a^2}$.

Für alle $a \neq 0$ ergibt sich demnach ein vom Funktionswert verschiedener Grenzwert. f ist im Punkte $P(0,0)$ nicht stetig.

Aufgabe V:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige, daß die Funktion f stetig differenzierbar ist.

Lösung: Für alle $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f_x(x,y) = y \, \frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad f_y = x \, \frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Die Funktionen f_x und f_y sind für $(x,y) \neq (0,0)$ stetig.

Ferner ist $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$,

$f_y(0,0) = 0$.

Es muß nun gezeigt werden, daß die Funktionen f_x und f_y auch an der Stelle $(0,0)$ stetig sein.
Setzen wir $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, so gilt
$f_x(x,y) = r \cdot \sin\varphi\,(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi + 4\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi)$. Da aus $(x,y) \to (0,0)$ stets $r \to 0$ folgt, haben wir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0).$$

Analog zeigt man, daß $f_y(x,y)$ an der Stelle $(0,0)$ stetig ist. f ist also stetig differenzierbar.
Eine im Bereich $b \subseteqq \mathbb{R}_p$ definierte reellwertige Funktion f wird homogen vom Grad n genannt, wenn sich bei der Multiplikation der einzelnen Argumente mit dem Faktor t die Funktion mit dem Faktor t^n multipliziert, d.h., wenn die Gleichung

$$f(tx_1, \ldots, tx_p) = t^n f(x_1, \ldots, x_p)$$

identisch erfüllt ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, $x_1, \ldots, x_p$ und t seien positiv. Der Bereich B möge mit jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_p)$ auch alle Punkte der Form $(tx_1, \ldots, tx_p)$ für alle t mit $0 < a \leqq t \leqq b$ enthalten.

Aufgabe VI:

Die Funktion $u = f(x,y,z)$ sei homogen vom Grade n (n eine beliebige reelle Zahl). f habe im offenen Bereich $B \subseteqq \mathbb{R}_3$ stetige partielle Ableitungen f_x, f_y, f_z. Man zeige, daß die Beziehung

$$xf_x + yf_y \; zf_z = nf(x,y,z)$$

gilt. (Eulersche Formel)

Beweis: Sei $(x_0, y_0, z_0) \in B \subseteqq \mathbb{R}_3$ beliebig. Dann gilt für jedes $t > 0$

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0).$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$f_x(tx_0,ty_0,tz_0)x_0 + f_y(tx_0,ty_0,tz_0)y_0 + f_z(tx_0,ty_0,tz_0)z_0 = n\,t^{n-1} f(x_0,y_0,z_0).$$

Für $t = 1$ folgt

$$f_x(x_0,y_0,z_0)x_0 + f_y(x_0,y_0,z_0)y_0 + f_z(x_0,y_0,z_0)z_0 = n \cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

Also gilt für jeden Punkt (x,y,z)

$$xf_x(x,y,z) + yf_y(x,y,z) + zf_z(x,y,z) = nf(x,y,z).$$

Aufgabe VII:

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und $P_n(x)$ sei ein Interpolationspolynom n-ten Grades mit $f(x_i) = P_n(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots n$; $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$. $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$ wird Restglied der Interpolation genannt. Für eine auf einem Intervall J $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion führe man eine Abschätzung des Restgliedes durch!

Lösung: Sei $x \neq x_i$ $(i = 0,1, \ldots, n)$ ein fest gewählter Punkt aus J. Wir betrachten die Funktion $F(t)$, die definiert ist durch

$$F(t) = R_{n+1}(t) - k(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_n)$$

mit
$$k = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}.$$

Es gilt dann $F(x_i) = 0$ für $i = 0,1,\ldots,n$ und $F(x) = 0$. Die Funktion besitzt also mindestens $n+2$ verschiedene Nullstellen in J. Nach mehrfacher Anwendung des Satzes von Rolle ergibt sich dann, daß die $(n+1)$-te Ableitung der Funktion $F(t)$ mindestens eine Nullstelle ζ besitzt, wobei ζ in dem kleinsten Intervall liegt, das die Punkte $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ enthält. Es ist also $F^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - k(n+1)! = 0$, d.h, nach Definition von k

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Aufgabe VIII:

Die Funktionen f und g mögen an der Stelle a Ableitungen bis zur n-ten Ordnung besitzen. Dann existiert auch die n-te Ableitung des Produkts beider Funktionen, und es gilt:

$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k)}(a)$. Die letzte Beziehung heißt

Leibnizsche Produktregel.

Beweis: Die Beziehung gilt für $n = 1$. Unter der Annahme, daß die Beziehung für ein beliebiges $n \geqq 1$ gilt, zeigen wir, daß

$(f \cdot g)^{(n+1)}(a) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a)$ gilt.

Aus der Induktionsannahme folgt

$$\left[(f \cdot g)^{(n)}(a)\right]' = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k)}(a)\right]'.$$

Aus der letzten Beziehung erhalten wir

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) + f^{(n-k)}(a) g^{(k+1)}(a)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) + f^{(n+1)}(a)\, g(a) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) g^{(k+1)}(a) + f(a)\, g^{(n+1)}(a)$$

$$= f^{(n+1)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a) +$$

$$+ f(a)\, g^{(n+1)}(a)$$

$$= f^{(n+1)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) +$$

$$+ f(a)\, g^{(n+1)}(a)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) .$$

Aufgabe IX:

Die Funktion $y = f(x)$ sei im Intervall J differenzierbar, die Ableitung $f'(x)$ sei in J beschränkt. Dann ist die Funktion $y = f(x)$ in J gleichmäßig stetig.

Beweis: Es gibt eine reelle Zahl $K > 0$ mit $| f'(x) | \leqq K$ für alle $x \in J$.

Zu jedem positiven ϵ ist dann auch $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ positiv. Für alle $x', x'' \in J$ mit $| x' - x'' | < \delta$ ergibt sich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung zunächst $f(x') - f(x'') = f'(\vartheta)(x' - x'')$.

Schließlich folgt

$$| f(x') - f(x'') | = | f'(\vartheta) | \, | x' - x'' | < K\delta = \epsilon .$$

Aufgabe X:

Man gebe die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = a^x\,(a > 0)$ an der Stelle 0 an.

Lösung: Aus $f(x) = a^x$ folgt $f^{(n)}(x) = (\ell n\ a)^n a^x$. Es gilt somit

$$a^x = 1 + \ell n\ a x + \frac{(\ell n\ a)^2}{2!} x^2 + \dots + \frac{(\ell n\ a)^n}{n!} x^n + \frac{(\ell n\ a)^{n+1} a^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} .$$

Es wird nun gezeigt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(0,x) = \lim_{n\to\infty} a^{\vartheta x} \frac{(x \cdot \ell n\ a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 .$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein K mit $0 < a^{\vartheta x} \leqq K$ für $0 < \vartheta < 1$.

Die Folge $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge.

Die gesuchte Taylorentwicklung lautet

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} (\ell n\ a)^n \frac{x^n}{n!} .$$

Aufgabe XI:

Man entwickle die Funktion $f(x,y) = \cos x \cos y$ in der Umgebung des Nullpunktes mit einem Restglied dritter Ordnung.

Lösung: Die Funktion f ist in $\mathbb{R}_2$ beliebig oft differenzierbar. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}_2$ gilt

$$\begin{array}{llll}
f(x,y) & = \cos x \cos y, & & f(0,0) = 1, \\
f_x(x,y) & = -\sin x \cdot \cos y, & & f_x(0,0) = 0, \\
f_y(x,y) & = -\cos x \sin y, & & f_y(0,0) = 0, \\
f_{xx}(x,y) & = -\cos x \cos y, & & f_{xx}(0,0) = -1, \\
f_{xy}(x,y) & = \sin x \sin y, & & f_{xy}(0,0) = 0, \\
f_{yy}(x,y) & = -\cos x \cos y, & & f_{yy}(0,0) = -1,
\end{array}$$

$$f_{xxx}(x,y) = \sin x \cos y,$$
$$f_{xxy}(x,y) = \cos x \sin y,$$
$$f_{xyy}(x,y) = \sin x \cos y,$$
$$f_{yyy}(x,y) = \cos x \sin y.$$

Es gibt ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \\ & + \frac{1}{2}\left[x^2 f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)\right] + \\ & + \frac{1}{6}\left[x^3 f_{xxx}(\vartheta x, \vartheta y) + 3x^2 y f_{xxy}(\vartheta x, \vartheta y) + \right. \\ & \left. + 3xy^2 f_{xyy}(\vartheta x, \vartheta y) + y^3 f_{yyy}(\vartheta x, \vartheta y)\right] \end{aligned}$$

gilt.

Die gesuchte Taylorentwicklung in der Umgebung des Nullpunktes lautet

$$\begin{aligned} \cos x \cos y = {} & 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}\left[x^3 \sin(\vartheta x)\cos(\vartheta y) + \right. \\ & + 3x^2 y \cos(\vartheta x)\sin(\vartheta y) + 3xy^2 \sin(\vartheta x)\cos(\vartheta y) + \\ & \left. + y^3 \cos(\vartheta x)\sin(\vartheta y)\right]. \end{aligned}$$

Aufgabe XII:

Gegeben seien n Punkte (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Man bestimme einen Punkt (x,y), für den die Funktion

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2\right]$$

ein lokales Minimum besitzt.

Lösung:

$$f_x = \sum_{i=1}^{n} 2(x - x_i), \qquad f_y = \sum_{i=1}^{n} 2(y - y_i),$$

$$f_{xx} = 2n, \qquad f_{yy} = 2n, \qquad f_{xy} = 0.$$

Für $x = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, $y = \dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$ gilt $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$.

Ferner gilt $f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 4n^2 > 0$, so daß

f im Punkt $(x,y) = \dfrac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n} \quad \dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$ einen eigentlichen lokalen Extremwert besitzt. Da $f_{xx} > 0$ ist, liegt ein eigentliches lokales Minimum vor.

Aufgabe XIII:

Man zeige unabhängig von den Ergebnissen des Lehrwerks MfL 5, 3.3.3. (26), daß

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig) gilt.

Beweis: Zunächst ist klar, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle x mit $|x| < 1$ absolut konvergent ist. Wir setzen $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Für alle x mit $|x| < 1$ gilt

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n .$$

Durch Multiplikation mit $(1+x)$ folgt

$$(1+x)T'(x) =$$

$$= \alpha \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \right] = \alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n \right]$$

$$= \alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \quad x^n \right] = \alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right]$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha T(x) .$$

Für alle x mit $-1 < x < 1$ gilt also $(1+x)T'(x) = \alpha\, T(x)$.

Sei $f(x) := \dfrac{T(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ $(|x| < 1)$. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{T'(x)(1+x)^{\alpha} - \alpha T(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{T'(x)(1+x)^{\alpha} - T'(x)(1+x)^{\alpha}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, daß

$f(x) = a$ für $x \in]\!] -1, +1 [\![$ ist. Aus $T(x) = a(1+x)^{\alpha}$ und

$T(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ folgt, indem man für $x = 0$ setzt, $a = 1$. Damit ist gezeigt worden, daß $T(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $|x| < 1$ ist.

Aufgabe XIV:

Man bestimme die Punktmenge, in der die komplexe Funktion $f(x) = e^{\frac{-1}{|x|}}$ analytisch ist.

Lösung: Wir werden zeigen, daß f in keinem Punkt differenzierbar ist, also erst recht nicht analytisch ist. Sei x_0 eine beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl. Wir untersuchen den Differenzenquotienten

$$\frac{e^{-\frac{1}{|x_0|}} - e^{-\frac{1}{|x|}}}{x_0 - x}$$

Für $x \to x_0$. Ist $|x| = |x_0|$, dann strebt der Differenzenquotient für $x \to x_0$ gegen 0. Ist $x = re^{i\varphi}$, $x_0 = r_0 e^{i\varphi}$ und $r \neq r_0$, dann strebt für $r \to r_0$ der Differenzenquotient

$$\frac{e^{-\frac{1}{r_0}} - e^{-\frac{1}{r}}}{(r_0-r)e^{i\varphi}} = \frac{e^{-\frac{1}{r_0}} - e^{-\frac{1}{r}}}{-\frac{1}{r_0} - (-\frac{1}{r})} \cdot \frac{1}{r_0 r} \cdot e^{-i\varphi}$$

gegen $\frac{1}{r_0^2} e^{-\frac{1}{r_0}} \cdot e^{-i\varphi} \neq 0$. f ist also in keinem Punkt differenzierbar.

C. Aufgaben

Aufgabe 3.1:

Man ermittle die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) \quad 3\sqrt{x^3} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \geqq 0)$,

b) $f(x) = \frac{\sin\alpha}{3} x^6 \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt[3]{n-2}} \quad (x \in \mathbb{R},\ n > 2)$,

d) $f(x) = x^3 + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 3.2:

Man beweise, daß die Funktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0)$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3.3:

Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen:

a) $f(x) = |x-2| \quad (x \in \mathbb{R})$, b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{für } x \leqq -2 \\ 0 & \text{für } x > -2 , \end{cases}$

Aufgabe 3.4:

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 , \\ 0 & \text{für } x = 0 , \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 , \\ 0 & \text{für } x = 0 . \end{cases}$$

Man untersuche die Funktionen auf Stetigkeit und gebe $D(f_1')$ und $D(f_2')$ an.

Aufgabe 3.5:

Die an den Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Man zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes P ist!

Aufgabe 3.6:

Vom Punkt $P(x_0, y_0)$ des Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ wird das Lot auf die Abzissenachse gefällt; der Fußpunkt sei L. Die Tangente an den Graphen von f im Punkte P schneide die Abzissenachse in T. Man zeige, daß $\overline{TL} = 1$ für jeden Punkt P gilt!

Aufgabe 3.7:

Man beweise, daß bei der Kettenlinie $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ die Ordinate das geometrische Mittel der Normalen und der Größe a ist.

Aufgabe 3.8:

Gegeben seien die Funktionen

a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = \ln x,\ x > 0$, c) $f(x) = \sin x$,

d) $f(x) = \cos x$.

Man gebe die Gleichungen der Normalen für diejenigen Punkte der Graphen der Funktionen an, in denen die Tangente den Anstieg 1 besitzt.

Aufgabe 3.9:

Man gebe die Ableitung der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$, b) $f(x) = \frac{(x-7)}{(x-1)(x+3)}$

c) $f(x) = \left[\frac{x^2+7x}{(x-4)^4}\right]^9$, d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,

e) $f(x) = 3 \sin x \cdot \cos^2 x$, f) $f(x) = 3 \cos^3 x$,

g) $f(x) = \frac{\sin(x+1)^2}{x+1}$, h) $f(x) = \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$,

i) $f(x) = \ln(\sin^2 x + 1)$.

Aufgabe 3.10:

Man gebe die Ableitungen der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = e^{\sqrt{2x^2+3x+4}}$, b) $f(x) = a^{\tan x} + \tan a^x$,

c) $f(x) = a^{\frac{1}{\sin x}}$, d) $f(x) = \sinh 2x - 2 \cosh x$,

e) $f(x) = (\tanh x - 1)^4$, f) $f(x) = \arcsin \frac{2 \cos x + 1}{\cos x + 2}$,

g) $f(x) = a^{\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}$, h) $f(x) = x^{\sin x}$ $(x > 0)$,

i) $f(x) = (\ln x)^{\sin x} \quad (x > 1)$, j) $f(x) = (x \cos x)^{x+\cos x}$ $\quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

k) $f(x) = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$

l) $f(x) = x \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$

m) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$.

Aufgabe 3.11:

Aus der Beziehung $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ leite man eine Formel für die Summe $1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1)x^k$ her!

Aufgabe 3.12:

Aus der Gleichung $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ (vgl. Aufgabe XXVI, S. 57) leite man eine Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx$ her!

Aufgabe 3.13:

Man bestimme für die folgenden Funktionen f aus $\mathbb{R}$ den (größtmöglichen) Definitionsbereich $D(f)$ und ermittle die Ableitungen der Funktionen. Man gebe jeweils $D(f')$ an.

a) $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, b) $f(x) = \ln(\ln x)$,

c) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$, d) $f(x) = \ln \frac{x^2-x-6}{x^3}$,

e) $f(x) = \sin[(3x^2-2x+7)]^4$.

Aufgabe 3.14:

Man zeige, daß die Nullstellen der Ableitung des Polynoms

$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ reell sind und stelle fest, zwischen welchen Grenzen sie liegen!

Aufgabe 3.15:

Man untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ auf Monotonie!

Aufgabe 3.16:

Man zeige, daß die Funktion $f(x) = x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ für alle x mit $0 < x < n$ monoton wächst und für alle x mit $x > n$ monoton fällt.

Aufgabe 3.17:

Man beweise die Ungleichung $\frac{x}{1+x} < \ell n(1+x) < x$ für $x > 0$.

Hinweis: Man wende den Mittelwertsatz an.

Aufgabe 3.18:

Man ermittle ϑ aus $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\vartheta h)$ für die Funktionen

a) $f(x) = e^x$ und b) $f(x) = \ell n\, x$.

Aufgabe 3.19:

Man bestimme mit Hilfe des Mittelwertsatzes zwei Zahlen a, b mit

$a < \sqrt{80} < b$, indem man $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ setzt und geeignet abschätzt.

Aufgabe 3.20:

Man zeige, daß durch $\mathfrak{x}(t) = (r\,\frac{2t}{1+t^2}\,,\; r\,\frac{1-t^2}{1+t^2}),\; -\infty < t < +\infty$, eine Parameterdarstellung des Kreises um den Koordinatenursprung mit dem Radius r gegeben ist.

Hinweis: Man eliminiere den Parameter t.

Aufgabe 3.21:

Durch $\mathfrak{x}(t) = (a\cos^3 t\,,\; a\sin^3 t),\; 0 \leqq t \leqq 2\pi$, ist die Parameterdarstellung einer sogenannten Astroide gegeben.

a) Man skizziere den Kurvenverlauf der Astroide

b) Man eliminiere den Parameter t.

Aufgabe 3.22:

Man gebe die Tangentengleichung der durch die folgenden Parameterdarstellungen gegebenen Kurven an!

a) $\mathfrak{x}(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t),\; 0 \leqq t \leqq 2\pi$,

b) $\mathfrak{x}(t) = (t-\cos t,\; t-\sin t),\; -\infty < t < +\infty$.

Aufgabe 3.23:

Man berechne die Tangenteneinheitsvektoren der Kurve

$$\mathfrak{x}(t) = (\sin^3 \frac{t}{3}\,\cos t,\; \sin^3 \frac{t}{3}\sin t),\; 0 \leqq t \leqq 3\pi\,,$$

in den Punkten mit den Parameterwerten $t, t+\pi$, $t+2\pi$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ und zeige, daß die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Aufgabe 3.24:

Man bestimme den (größtmöglichen) Definitionsbereich und den Wertevorrat der folgenden Funktionen:

a) $z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, b) $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$,

c) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

Aufgabe 3.25:

Man untersuche die Funktion

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkte $P(0,0)$ auf Stetigkeit.

Aufgabe 3.26:

Man berechne die partiellen Ableitungen f_x, f_y der Funktionen:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, b) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y^2 + 3y^3$

c) $f(x,y) = x^y$, d) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}$,

e) $f(x,y) = e^{xy}$, f) $f(x,y) = e^{\cos(x+y)} + e^{\sin(x\cdot y)}$

g) $f(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$, h) $f(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y)$.

Aufgabe 3.27:

Man berechne die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_z der Funktionen:

a) $f(x,y,z) = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^3$

b) $f(x,y,z) = e^x \ln y + z^2 \cos y$, c) $f(x,y,z) = (x \cdot y)^z$,

d) $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$.

Aufgabe 3.28:

Man bestimme das totale Differential folgender Funktionen:

a) $z = f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$, b) $z = f(x,y) = \ln \tan \frac{x}{y}$,

c) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$, d) $u = f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Aufgabe 3.29:

Man bilde $\frac{df(x(t),y(t))}{dt}$ mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel:

a) $f(x,y) = \sin(x \cdot y)$, $\mathfrak{x}(t) = (t,t^2)$,

b) $f(x,y) = x \sin(x \cdot y)$, $\mathfrak{x}(t) = (t^2, \ln(t^2 + 1))$.

Aufgabe 3.30:

Man überprüfe an folgenden Beispielen die Gültigkeit der Eulerschen Beziehung (vgl. Aufgabe VI, S. 95) durch unmittelbare Berechnung der partiellen Ableitungen:

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, b) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{z}}$,

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ln \frac{x}{y}$.

Aufgabe 3.31:

Man berechne den Gradienten der Funktionen

a) $f(x,y,z) = 4x + \frac{9y}{z}$, b) $f(x,y,z) = xy + yz + zx + 10$,

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, d) $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Aufgabe 3.32:

Man bestimme für die Funktion $f(x,y,z) = \frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ im Punkt (a,b,c) die Ableitung in Richtung des Ortsvektors dieses Punktes.

Aufgabe 3.33:

Wie groß ist die Richtungsableitung der Funktion $z = f(x,y) = e^x \sin y$ im Punkt (x_0,y_0) in beiden Richtungen der Geraden $y - y_0 = (x_0 - x)\tan y_0$?

Aufgabe 3.34:

Man bestimme für die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1,1)$ und $(-1,1)$ die Ableitung in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

Aufgabe 3.35:

Man berechne eine Gleichung der Tangentialebene für

a) die Halbkugel $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

b) das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$,

c) die Sattelfläche $z = x \cdot y$

in dem zu (x_0,y_0) gehörenden Flächenpunkt.

Aufgabe 3.36:

Man berechne $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ für

a) $\mathfrak{v} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$,

b) $\mathfrak{v} = (0, x, z \sin x^2 + y^2)$, c) $\mathfrak{v} = (x,y,z)$.

Aufgabe 3.37:

Man bestimme durch vollständige Induktion die n-te Ableitung der Funktionen

a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, c) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

d) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, e) $f(x) = \sin^2 x$.

Aufgabe 3.38:

Ist M eine obere Schranke für $f^{(n+1)}(x)$ im Intervall J, so gilt für das Restglied der Interpolation

$|R_{n+1}(x)| \leqq \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$ für alle $x \in J$

(vgl. Aufgabe VII, S. 95 f.). Wie groß ist der größtmögliche Fehler bei linearer Interpolation?

Aufgabe 3.39:

Es sei eine fünfstellige Tafel für den dekadischen Logarithmus $f(x) = \log_{10} x = \lg x$ für $x \in [\![1,10]\!]$ mit einem Abstand der Stützstellen von $h = 10^{-3}$ gegeben. Ist bei linearer Interpolation der Interpolationsfehler kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$?

Aufgabe 3.40:

Man bestimme mit Hilfe der Leibnizschen Formel folgende Ableitungen:

a) $(x^2 \cdot \cos ax)^{(50)}$, b) $(x^2 \cdot e^{2x})^{(50)}$.

Aufgabe 3.41:

In den folgenden Aufgaben sind die angegebenen partiellen Ableitungen zu bestimmen:

a) f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} ; $f(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$,

b) f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} ; $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$,

c) f_{xxy} für $f(x,y) = \ln(x+y)$,

d) f_{xyz} für $f(x,y,z) = e^{xyz}$.

Aufgabe 3.42:

Man beweise folgende Identitäten:

a) $f_x + f_y + f_z = \frac{3}{x+y+z}$; $f(x,y,z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

b) $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$; $f(x,y,z) = \dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Aufgabe 3.43:

Man bestimme die ganze rationale Funktion 6. Grades aus den Angaben $f(0) = f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -4$, $f^{(4)}(0) = 6$, $f^{(5)}(0) = f^{(6)}(0) = 1$.

Aufgabe 3.44:

Man entwickle das Polynom

$P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ bzw. $P_2(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$

nach Potenzen von $(x - 2)$ bzw. $(x + 1)$.

Aufgabe 3.45:

Folgende Funktionen sind an den Stellen $a = 0$ und $a = 1$ bis zur dritten Potenz zu entwickeln! Eine Restgliedform ist jeweils anzugeben!

a) $f(x) = e^{1-x}$, b) $f(x) = \ln(2 + x)$, c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Aufgabe 3.46:

a) Man zeige, daß für $\sinh x$ und $\cosh x$ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(0,x)$ gilt und gebe die Reihenentwicklungen an der Stelle $a = 0$ für beide Funktionen an.

b) Man benutze die Entwicklungen von e^x und e^{-x} für die Reihenentwicklungen der hyperbolischen Funktionen.

Aufgabe 3.47:

Man entwickle $f(x) = \log_a(1 + x)$ nach Potenzen von x unter Benutzung der Umrechnungsbeziehung von Logarithmen!

Aufgabe 3.48:

Mit Hilfe der binomischen Reihe beweise man die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots; \quad |x| < 1.$$

Aufgabe 3.49:

Man zeige, daß für $|x| < 1$ die folgenden Entwicklungen gelten:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k.$$

Aufgabe 3.50:

Man entwickle die folgenden Funktionen nach Potenzen von x :

a) $\sqrt{1+x}$, b) $\ell n\frac{a+x}{a-x}$, c) $\ell n(a+x)$.

Aufgabe 3.51:

Man entwickle die Funktionen $f_1(x) = \sin x \cos x$ und $f_2(x) = \sin^2 x$ in MacLaurinsche Reihen!

Aufgabe 3.52:

a) Man entwickle die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2 + \sin x \cos y$ an der Stelle $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ mit einem Restglied 2ter Ordnung!

b) Man bestimme nach dieser Entwicklung den Funktionswert $f(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{3} + k)$ für $h = 0{,}01$ und $k = 0{,}02$ unter Vernachlässigung der Glieder von höherer als erster Ordnung!

Aufgabe 3.53:

Die Funktion $f(x,y) = \sin(x-y)$ ist mit Hilfe der MacLaurinschen Formel nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

Aufgabe 3.54:

Man bestimme die Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x^3}{16} - \frac{3x^2}{4} + \frac{9}{4}x + 1$, b) $f(x) = (x-a)^6$,

c) $f(x) = \cos c + \frac{x^2}{2}$, d) $f(x) = \cos x + \cosh x$,

e) $f(x) = \sqrt{x(x^2-9)}$.

Aufgabe 3.55:

Man diskutiere den Verlauf der Graphen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$, b) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, c) $f(x) = \frac{x}{e^{2x^2}}$,

d) $f(x) = x - \sin x$.

Aufgabe 3.56:

Unter welchem Winkel α muß ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen werden (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes), damit die horizontale Wurfweite ein Maximum wird?

Aufgabe 3.57:

Einem gegebenen Zylinder mit dem Radius a sei ein Zylinder so einbeschrieben, daß seine Achse die Achse des gegebenen Zylinders unter einem rechten Winkel schneidet. Wann hat ein solcher Zylinder den größten Inhalt und wie groß ist dieser?

Aufgabe 3.58:

Man bestimme bei den folgenden Funktionen die Punkte, in denen die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremwertes erfüllt sind, und untersuche, ob in ihnen die hinreichenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x - 5x + \frac{y^3}{3} - 5y$,

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$,

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$, d) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{xy}$ $(x,y > 0)$.

Aufgabe 3.59:*

Eine positive Zahl w ist so in drei Summanden zu zerlegen, daß das Produkt xyz ein Maximum wird.

Aufgabe 3.60:

Man bestimme die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\cot x\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\uparrow 0}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\cdot\arctan x$, h) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(\cot x)^{\sin x}$,

i) $\lim\limits_{x\uparrow 1} x^{\tan\frac{\pi x}{2}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, k) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(2^x-1)^{\sin x}$.

Aufgabe 3.61:

Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{n!}x^n$, d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}x^n$,

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n^2}}{n!}x^n$ $(a>0)$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$,

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2 10^n}x^n$.

Aufgabe 3.62:

Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, wenn
$$a_n = \begin{cases} 2^k & \text{für } n = 2k \\ 3^k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}) ,$$
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } n = 2k \\ k \ln k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ist.

Aufgabe 3.63:

Für $|x| < 1$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Man zeige

a) durch sukzessive Multiplikation und
b) durch mehrmaliges gliedweises Differenzieren, daß

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n \text{ gilt.}$$

Aufgabe 3.64:

Es sei f eine für $|x| < r$ analytische Funktion und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Potenzreihenentwicklung von f im Punkte 0. Ist f eine gerade Funktion, dann gilt $a_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, und ist f eine ungerade Funktion, dann gilt $a_{2k} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 3.65:

Man berechne

a) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^2$ $(x \in \mathbb{R})$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, |x| < 1)$.

Aufgabe 3.66:

Die Gleichung $x^4 - 3x^2 + 75x - 10\,000 = 0$ besitzt eine Wurzel zwischen -11 und -10 und eine weitere zwischen 9 und 10. Man bestimme beide Wurzeln mit einer Genauigkeit von 0,01!

Aufgabe 3.67:

Man bestimme die zwischen 2 und 3 liegende Wurzel der Gleichung $\lg x^x - 1 = 0$ nach dem Newton-Verfahren. Als Startwert nehme man $a_0 = 2$ und berechne die Näherungswerte a_1 und a_2. Man führe eine Fehlerabschätzung durch!

Aufgabe 3.68: *

a) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Man bestimme y' für $x = y$.

b) $x^y = y^x$. Man bestimme y' für $x \neq y$.

c) $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$. Man bestimme y'.

Aufgabe 3.69:

Man zeichne die Niveaulinien der folgenden Funktionen:

a) $F(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ für $c = 0$, $c = 1$ und $c = 2$,

b) $F(x,y) = x^2 + 2y^2$ für $c = 0$ und $c = 4$.

Aufgabe 3.70: *

Man zeichne die Niveaulinien der Funktion $F(x,y) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ für $c = 1$ und $c = 2$ und zeige, daß der Gradient in den zu $x = 5$ und $x = 8$ gehörenden Punkten auf den Niveaulinien senkrecht steht.

4. INTEGRALRECHNUNG

A. Fragen

1.* Wann heißt eine beschränkte Teilmenge des Raumes $\mathbb{R}_p$ quadrierbar? Erläutern Sie die Schritte und Begriffsbildungen, die zur Definition des Riemannschen oder Peano-Jordanschen Inhalts einer beschränkten Teilmenge des Raumes $\mathbb{R}_p$ führen!

2.* Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Quadrierbarkeit einer Punktmenge an!

3.* Geben Sie Eigenschaften quadrierbarer Punktmengen an!

4.* Nennen Sie die Formeln zur Berechnung der Inhalte eines Rechteckbereiches und eines Zylinderbereiches!

5.* Wie berechnet sich der Inhalt einer Punktmenge M^*, die aus einer quadrierbaren Menge M durch eine lineare Abbildung hervorgeht? Wie lautet die Formel zur Berechnung des Inhalts der Punktmenge M^* für den Fall, daß M^* aus M durch eine Kongruenztransformation bzw. durch eine zentrische Streckung hervorgeht?

6. Erläutern Sie die Schritte und Begriffsbildungen, die zur Definition des Riemannschen Integrals führen: Zerlegung, Durchmesser einer Zerlegung, ausgezeichnete Zerlegungsfolge, Untersumme, Obersumme, Zwischensumme, unteres Integral, oberes Integral, Riemannsches Integral.

7. Geben Sie ein Beispiel für den Fall an, daß

   $\underline{I}(f;a,b) < \overline{I}(f;a,b)$!

8. Geben Sie das Riemannsche Integrabilitätskriterium an.

9. Wie können Integrale mit Hilfe von ausgezeichneten Folgen von Zwischensummen berechnet werden? Geben Sie ein Beispiel an!

10. Nennen Sie Klassen integrierbarer Funktionen!

11. Geben Sie Eigenschaften Riemannscher Integrale an:
Homogenität und Additivität bezüglich des Integranden,
Additivität bezüglich des Integrationsintervalls!

12. Geben Sie Abschätzungen und Ungleichungen für Riemannsche Integrale an!

13. Erläutern Sie, wie man mit Hilfe von Riemannschen Integralen Flächeninhalte berechnen kann!

14. Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung und interpretieren Sie ihn geometrisch! Wie lautet seine Verallgemeinerung?

15. Definieren Sie das Riemannsche Integral mit Hilfe von Zwischensummen!

16. Unter welchen Voraussetzungen ist es möglich, den Begriff der Integrierbarkeit auf Funktionen zu erweitern, die auf halboffenen bzw. offenen Intervallen erklärt sind? Erläutern Sie in diesem Zusammenhang den Begriff des uneigentlichen Integrals!

17. Erläutern Sie die Begriffe Stammfunktion und bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze!

18. Formulieren und beweisen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Umkehrung. Diskutieren Sie die Bedeutung dieser Sätze (Lösbarkeit des Umkehrproblems der Differentialrechnung für die Klasse der auf abgeschlossenen Intervallen stetigen Funktionen, numerische Berechnung von bestimmten Integralen).

19. Definieren Sie den Begriff des unbestimmten Integrals!
Geben Sie einige Grundintegrale an!

20. Was versteht man unter einer in einem offenen Intervall elementar integrierbaren Funktion? Geben Sie Beispiele für Funktionen an, die in keinem offenen Intervall elementar integrierbar sind!

21. Formulieren und beweisen Sie die Regeln für die partielle Integration, und geben Sie einige Beispiele an. Wie lautet die Regel der partiellen Integration für bestimmte Integrale?

22. Formulieren und beweisen Sie die Regel für die Integration durch Substitution für unbestimmte und bestimmte Integrale! Geben Sie einige Beispiele an!

23. Wie wird eine rationale Funktion integriert? Geben Sie die einzelnen Rechenschritte an!

24. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, daß man bei einer Folge von auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a,b]\!]$ stetigen Funktionen die Reihenfolge von Grenzwertbildung und Integration vertauschen darf. Geben Sie ein Beispiel an!

25. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, daß man eine Folge von auf dem Intervall $[\![a,b]\!]$ stetig differenzierbaren Funktionen „gliedweise differenzieren" darf!

26. Geben Sie Anwendungen der Integralrechnung an! Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die folgenden Begriffe:
Rektifizierbarkeit, Bogenlänge, Krümmung, Rotationskörper, Oberfläche des Mantels eines Rotationskörpers und Rauminhalt eines Rotationskörpers. Geben Sie die entsprechenden Berechnungsformeln an!

27.* Nennen und Erläutern Sie das Prinzip von Cavalieri!

28.* Wie kann die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen auf die sukzessive Berechnung von eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden? Wann darf die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden? Erläutern Sie in diesem Zusammenhang den Begriff des Normalbereiches.

29.* Geben Sie Transformationsformeln für mehrfache Integrale an!

B. Beispielaufgaben

Aufgabe I:

Man berechne das Integral $\int\limits_1^a x^\alpha dx \quad (a \geqq 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

Lösung: Für $a = 1$ gilt $\int\limits_1^a x^\alpha dx = 0$. Wir setzen $a \neq 1$ voraus und verwenden geometrische Zerlegungsfolgen

$$x_j^{(n)} = (\sqrt[n]{a})^j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Wegen $\sqrt[n]{a} > 1$ ist $(\sqrt[n]{a})^{k-1} < (\sqrt[n]{a})^k$ bzw. $x_{k-1}^{(n)} < x_k^{(n)}$

für $k = 1, 2, \ldots, n$. Da $d(\mathfrak{Z}^{(n)}) = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)$ ist, gilt

$\lim\limits_{n \to \infty} d(\mathfrak{Z}^{(n)}) = 0$. Die Folge von Zerlegungen $\mathfrak{Z}^{(n)}$ ist also eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Nun berechnen wir die Zwischensumme

$S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \zeta^{(n)})$, wobei als Zwischenwerte die Endpunkte der Teilintervalle gewählt werden:

$$S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (q^j)^\alpha q^j \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{q}(q-1) \sum_{j=1}^{n} q^{j(\alpha+1)}$$ mit $q = \sqrt[n]{a}$. Die hierin auftretende endliche geometrische Reihe $\sum\limits_{j=1}^{n} (q^{\alpha+1})^j$ mit dem Quotienten

$q^{\alpha+1}$ veranlaßt uns zu folgender Fallunterscheidung:

1.) $\alpha \neq -1$. Wegen $a \neq 1$ ist $q \neq 1$ und $q^{\alpha+1} \neq 1$. Für die Reihe ergibt sich dann der Wert

$$\sum_{j=1}^{n} (q^{\alpha+1})^j = q^{\alpha+1} \frac{(q^{\alpha+1})^n - 1}{q^{\alpha+1} - 1} = q^{\alpha+1} \frac{a^{\alpha+1} - 1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Für die Zwischensumme ergibt sich

$S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = q^{\alpha}(a^{\alpha+1}-1)\ \dfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} q^{\alpha} = 1$ und

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} = \dfrac{1}{\alpha+1}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \dfrac{a^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} = \int\limits_1^a x^{\alpha}dx$.

2.) $\alpha = -1$. In diesem Fall ist $q^{\alpha+1} = 1$. Für die Reihe ergibt sich nun

$\sum\limits_{j=1}^{n} (q^{\alpha+1})^j = n$. Also ist $S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \frac{1}{q}\ (q-1)n = \frac{1}{q}\frac{q-1}{\frac{1}{n}}$.

Schließlich erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \ln a = \int\limits_1^a \frac{dx}{x}\ .$$

Aufgabe II:

Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ über ein Intervall $[\![a,b]\!]$.

Lösung: Wir verwenden äquidistante Zerlegungsfolgen

$$x_j^{(n)} = a + j\ \frac{b-a}{n} \quad (j = 0, 1, \ldots, n)\ .$$

Da $d(\mathfrak{z}^{(n)}) = \frac{b-a}{n}$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathfrak{z}^{(n)}) = 0$. Somit liegt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge vor. Für die Zwischensumme erhalten wir, wenn wir jeweils den rechten Endpunkt als Zwischenpunkt wählen:

$$\begin{aligned} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\ \frac{b-a}{n} = \sum_{j=1}^{n} (a + j\ \frac{b-a}{n})^2\ \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\ (na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\ \sum_{j=1}^{n} j + (\frac{b-a}{n})^2\ \sum_{j=1}^{n} j^2) \\ &= (b-a)(a^2 + \frac{2a(b-a)}{n^2}\ \frac{n}{2}\ (n+1) + \frac{(b-a)^2}{n^3}\ \frac{n}{3}\ (n+1)(n+\frac{1}{2})) \end{aligned}$$

$$= (b-a)(a^2 + a(b-a)(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{3}(b-a)^2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})) .$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = (b-a)\,\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{b^3-a^3}{3} .$$

Abschließend wollen wir das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ über ein Intervall $[\![a,b]\!]$ $(0 < a < b)$ berechnen, indem wir geometrische Zerlegungsfolgen verwenden.
Die Zerlegung sei gegeben durch die $n+1$ Punkte

$$x_j^{(n)} = a(\sqrt[n]{\frac{b}{a}})^j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) .$$

Der Leser überzeuge sich selbst davon, daß die Beziehungen

$$x_{k-1}^{(n)} < x_k^{(n)} \quad \text{für } k = 1,2,\ldots,n \text{ und } \lim_{n\to\infty} d(\mathfrak{z}^{(n)}) = 0 \text{ gelten.}$$

Für die Zwischensumme erhalten wir, wenn wir jeweils den rechten Endpunkt als Zwischenpunkt wählen und $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = c$ setzen:

$$S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (ac^j)^2 a(c^j - c^{j-1})$$

$$= a^3(1-\frac{1}{c}) \sum_{j=1}^{n} c^{3j} = a^3(-\frac{1}{c})\, c^3\, \frac{(c^3)^n - 1}{c^3-1}$$

$$= a^3(c-1)c^2\, \frac{(c^n)^3-1}{c^3-1} = a^3[(\frac{b}{a})^3 - 1]\,\frac{c^2(c-1)}{c^3-1}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \frac{1}{3}a^3\,[(\frac{b}{a})^3 - 1] = \frac{b^3-a^3}{3} .$$

Aufgabe III:

Man beweise, daß eine Funktion, die aus einer über das Intervall $[\![a,b]\!]$ integrierbaren Funktion f durch Abänderung der Funktionswerte an endlich vielen Stellen entsteht, über dieses Intervall integrierbar ist.

Beweis: Die Funktion g_c ist die Differenz der monotonen Funktionen

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < c, \\ 1 & \text{für } x \geqq c \end{cases} \quad \text{und} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq c, \\ 1 & \text{für } x > c \end{cases}$$

und damit integrierbar. Jede Funktion, die aus f durch Abänderung an endlich vielen Stellen entsteht, kann in der Form

$g(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} t_j g_{c_j}(x)$ dargestellt werden, und mit f ist auch g

integrierbar.

Aufgabe IV:

Das Integral $\int_1^\infty x^\alpha dx$ existiert für alle $\alpha < -1$,

aber nicht für $\alpha \geqq -1$.

Beweis: Für jedes $b > 1$ und $\alpha \neq -1$ ist

$\int_1^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. Ferner gilt für $b > 1$ stets $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b$.

Für $\alpha < -1$ ist nun $\lim_{b\to\infty} \int_1^b x^\alpha dx = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha+1}$,

also $\int_1^\infty x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1}$. Für $\alpha > -1$ ist aber $\lim_{b\to\infty} b^{\alpha+1} = \infty$,

ebenso ist $\lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$. Für $\alpha \geqq -1$ existiert das Integral also nicht.

Aufgabe V:

Man berechne das Integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{(n eine natürliche Zahl)} .$$

Lösung: Partielle Integration ergibt

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx .$$

Der erste Summand verschwindet beim Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ und 0.

Ersetzen wir im zweiten Summanden $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$,

so erhalten wir

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n .$$

Aus der letzten Beziehung folgt

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel kann das Integral I_n durch I_0 oder I_1 ausgedrückt werden.
Für $n = 2m$ gilt nämlich

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{(2m-1)(2m-3) \ldots 3 \cdot 1}{2m(2m-2) \ldots 4 \cdot 2} \, \frac{\pi}{2} ;$$

für $n = 2m + 1$ gilt

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m(2m-2) \ldots 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1) \ldots 3 \cdot 1} .$$

Zur kürzeren Schreibweise führen wir das Symbol $n!!$ ein. Es bezeichnet das Produkt der geraden natürlichen Zahlen $\leqq n$, falls n gerade ist, oder das Produkt der ungeraden natürlichen Zahlen $\leqq n$, falls n ungerade ist.

Wir erhalten dann:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{für } n \text{ gerade,} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

C. Aufgaben

Aufgabe 4.1:

Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = x^3$ über das Intervall $[\![0,1]\!]$.

Hinweis: Es gilt $\sum\limits_{j=0}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Aufgabe 4.2:

Man berechne mit Hilfe der Identität

$$2 \sin \frac{\alpha}{2n} \sum_{j=1}^{n} \sin \frac{\alpha j}{n} = \cos \frac{\alpha}{2n} - \cos \frac{\alpha(2n+1)}{2n}$$

das Integral der Funktion $y = \sin x$ über das Intervall $[\![0, \frac{\pi}{2}]\!]$.

Aufgabe 4.3:

Man berechne mit Hilfe der Identität

$$2 \sin \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{n} \cos(a + ih) = \sin(a + (n + \frac{1}{2})h) - \sin(a + \frac{1}{2}h)$$

das Integral der Funktion $f(x) = \cos x$ über ein Intervall $[\![a,b]\!]$.

Aufgabe 4.4:

Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = e^x$ über ein Intervall $[\![0,a]\!]$.

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}}-1} = 1$.

Aufgabe 4.5:

Mit Hilfe der Beziehung

$$x^{2n}-1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1)$$

beweise man

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x \cos\varphi + x^2)\,d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ \pi \ln(x^2) & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

(Poissonsches Integral)

Hinweise: Berücksichtigt man die Werte der 2-ten Einheitswurzeln, so hat die Zerlegung von $x^{2n} - 1$ in Linearfaktoren die Gestalt

$$x^{2n} - 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n}),$$ wobei i die imaginäre Einheit ist. Trennt man die Faktoren $x + 1$ und $x - 1$ ab (sie entsprechen den Werten $k = -n$ bzw. $k = 0$) und faßt die konjugiert komplexen Faktoren zusammen, so ist

$$x^{2n}-1 = (x^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n})(x - \cos\frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n})$$

$$= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + x^2) .$$

Wegen $(1 - |x|)^2 \leqq 1 - 2x \cos \varphi + x^2$ erkennen wir, wenn wir $|x| \neq 1$ voraussetzen, daß der Integrand stetig ist. Zur Berechnung des Integrals verwende man die äquidistante Zerlegungsfolge

$$x_k^{(n)} = k \frac{\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) .$$

Aufgabe 4.6: *

Man beweise: Ist eine über das Intervall $[\![a,b]\!]$ integrierbare Funktion $f(x)$ positiv und gilt $a < b$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx > 0 .$$

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

Aufgabe 4.7:

Ist die stetige Funktion f auf dem Intervall $[\![a,b]\!]$ nicht negativ und gilt

$$\int_a^b f(x)dx = 0 ,$$

so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [\![a,b]\!]$.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

Aufgabe 4.8:

Es sei f eine über das Intervall $[\![a,b]\!]$ integrierbare Funktion. Es gelte $|f(x)| \leqq C$ für alle $x \in [\![a,b]\!]$.

Man beweise, daß $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqq C\,|b - a|$ gilt.

Aufgabe 4.9:

Man zeige, daß $\left| \int_a^b (px + q)dx \right| = \max \left\{ |pa + q|, |pb + q| \right\} |b - a|$ gilt.

Aufgabe 4.10:

Man gebe eine untere und eine obere Schranke des Integrals I mit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$$

an.

Aufgabe 4.11:

Man beweise, daß $\int_0^1 \sin^2 x \, dx \leqq \frac{1}{3}$ ist.

Aufgabe 4.12:

Man beweise, daß $\int_0^1 \cos^2 x \, dx \geqq \frac{2}{3}$ ist.

Aufgabe 4.13:

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x^2$.
Man berechne den Inhalt der Punktmenge

$$I_f^g = \left\{ (x,y) : -1 \leqq x \leqq 1 \wedge f(x) \leqq y \leqq g(x) \right\}.$$

Aufgabe 4.14:

Man beweise die folgenden Ungleichungen:

a) $$0 < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx < \frac{1}{20}\,,$$ b) $$0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{20+x}\,dx < \frac{1}{100}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es für eine auf dem Intervall $[\![a,b]\!]$ stetige Funktion f ein $\zeta \in [\![a,b]\!]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a)\,.$$

$f(\zeta)$ heißt Mittelwert der Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[\![a,b]\!]$.

Aufgabe 4.15:

Man bestimme den Mittelwert der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2$ im Intervall $[\![a,b]\!]$,

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[\![1,3]\!]$,

c) $f(x) = \sin x$ im Intervall $[\![0,\pi]\!]$.

Aufgabe 4.16:

Man berechne die folgenden Integrale:

a) $$-\int_\pi^{2\pi} \cos x\,dx\,,$$ b) $$\int_0^2 (x^5 - 3x^2 + x - 7)\,dx\,,$$

c) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx\,,$$ d) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,,$$ e) $$\int r\cos t\,dt\,,$$

f) $$\int \frac{dx}{2x}\,,$$ g) $$\int x\sqrt{x}\,dx\,,$$

h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$, i) $\int \frac{x^2-3x+4}{x}\,dx$, j) $\int \frac{x^2-x+1}{x-2}\,dx$.

k) $\int \frac{x^4}{x-1}\,dx$, l) $\int e^{-x}dx$.

Aufgabe 4.17:

Man berechne folgende Integrale durch partielle Integration:

a) $\int x^2 \ln x\,dx$, b) $\int x \cosh x\,dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$,

d) $\int (x^2+x)\ln(x+1)dx$, e) $\int x^2 \sin x\,dx$, f) $\int x \ln(x^2-1)dx$,

g) $\int \ln x\,dx$, h) $\int x \ln^2 x\,dx$, i) $\int x \arctan x\,dx$,

j) $\int_1^2 x^{-2}\ln x\,dx$, k) $\int (x^2-1)\cos x\,dx$, l) $\int_0^{2\pi} x^3 \cos x\,dx$,

m) $\int \sin^2 x\,dx$.

Aufgabe 4.18:

Man beweise, daß die Integrale

a) $\int x^n e^x dx$, b) $\int x^n \cos x\,dx$, c) $\int x^n \sin x\,dx$

für natürliche Zahlen n elementar integrierbar sind und für negative ganzzahlige n auf die (nicht elementar auswertbaren) Integrale

a) $\int \frac{e^x}{x}dx$, b) $\int \frac{\cos x}{x}dx$, c) $\int \frac{\sin x}{x}dx$

zurückgeführt werden können.

Aufgabe 4.19:

Man entwickle eine Rekursionsformel für folgende Integrale

a) $\int \sin^n x\, dx$.

b) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 4.20:

Man beweise die Formeln

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(n+2)x\, dx = 0$,

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(x+2)x\, dx = \frac{1}{n+1}$,

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos(n+2)x\, dx = -\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$.

Aufgabe 4.21:

Man berechne mit Hilfe bestimmter Integrale die Grenzwerte der folgenden Summen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{2n-1} \frac{j}{n^2}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+j^2}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \sin\frac{j\pi a}{n}$.

Aufgabe 4.22:

Man werte die folgenden Integrale aus:

a) $\int \frac{3\, dx}{\cos^2(4x-2)}$,

b) $\int \sin(ax+b)dx$ $(a \neq 0)$,

c) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a \neq 0)$, d) $\int \sin mx \sin nx \, dx$ $(m,n \in \mathbb{N}^*, m \neq n)$,

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} \, dx$, f) $\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+7} \, dx$,

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{a+b \cos x} \, dx$ $(a \neq 0, b \neq 0)$, h) $\int \frac{x^2-\frac{1}{9}}{15x^3-5x+7} \, dx$,

i) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$, j) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$, k) $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} \, dx$,

l) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, m) $\int \frac{\operatorname{artanh} 3x}{1-9x^2} \, dx$.

Aufgabe 4.23:

Man berechne folgende Integrale:

a) $\int \frac{x-a}{x+a} \, dx$, b) $\int \frac{2a}{a^2-x^2} \, dx$, c) $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3} \, dx$,

d) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$, e) $\int \frac{e^x}{e^x-e^{-x}} \, dx$, f) $\int \sqrt{e^x+1} \, dx$,

g) $\int \sqrt{e^x-1} \, dx$, h) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$, i) $\int \frac{\cos x}{1+2 \sin x} \, dx$,

j) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$, k) $\int \frac{dx}{\cosh x}$, l) $\int \cosh^2 x \sinh^3 x \, dx$.

Aufgabe 4.24:

Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$, b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$, d) $\int \frac{dx}{\sin x}$, e) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Aufgabe 4.25:

Man werte die folgenden Integrale aus:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\,\ln(1+\sin x)dx$, b) $\int\limits_0^{\pi} (2x+2\cos x)e^{x^2+2\sin x}dx$,

c) $\int\limits_{-1}^{1} x^4(1+x^5)^5 dx$, d) $\int\limits_0^{2} e^{\sqrt{x}}\,dx$,

e) $\int\limits_0^{1} \frac{2x}{1+x^4}\,dx$, f) $\int\limits_1^{2} \sin\sqrt[4]{x-1}\,dx$.

Aufgabe 4.26:

Man bestimme den Mittelwert der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \tan x$ im Intervall $[\![0, \frac{\pi}{3}]\!]$,

b) $f(x) = \ln x$ im Intervall $[\![1,e]\!]$,

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ im Intervall $[\![-1,+1]\!]$.

Vgl. die Vorbemerkungen zu Aufgabe 4.15.

Aufgabe 4.27:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln x$. Man bestimme eine Zahl ζ mit

$1 < \zeta < e$, für die $\int\limits_1^e f(x)dx = f(\zeta)(e-1)$ gilt.

Aufgabe 4.28:

Man berechne folgende Integrale:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, b) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, c) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$,

d) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Aufgabe 4.29:

Die Funktion f sei durch $f(x) = \begin{cases} 5\sin x + 3x & \text{für } x \leqq 1 \\ \frac{1}{x} + 3x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

gegeben. Man berechne das Integral $\int\limits_{-2}^5 f(x)dx$.

Aufgabe 4.30:

Man berechne den Inhalt der Fläche F, die durch die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 \ln x$, $g(x) = -(\ln x)^2$ $(1 \leqq x \leqq e)$ und die Gerade $x = e$ begrenzt wird.

Aufgabe 4.31:

Man zeige, daß die Graphen der Funktionen

$$f(x) = 2 + x^2 + \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

$$g(x) = 2 + x^2 - \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

den Rand einer Fläche F bilden, und bestimme den Inhalt von F.

Aufgabe 4.32:

Die Fläche, die von der y-Achse, der x-Achse und vom Graphen der Funktion $f(x) = \cos x$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ begrenzt wird, soll durch eine Parallele zur y-Achse halbiert werden. In welchem Abstand von der y-Achse ist die Parallele zu ziehen?

Aufgabe 4.33:

Man werte die folgenden Integrale aus:

a) $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx$, b) $\int \frac{x^2-31x+94}{x^3+4x^2-19x+14}\,dx$,

c) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx$, d) $\int \frac{2x^4+6x^3-7x+2}{x^3+3x^2-x-3}\,dx$,

e) $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5}\,dx$, f) $\int \frac{2x^4+5x^3-2x^2+3x}{x^3+6x^2+9x}\,dx$,

g) $\int \frac{6x^3+13x^2+101x-7}{(x^2+1)(x^2+4x+20)}\,dx$, h) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$,

i) $\int \frac{15x^3-41x^2+65x-149}{(x^2-4x+5)(x^2+4)^2}\,dx$, j) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

Aufgabe 4.34:

Man werte die folgenden Integrale aus:

a) $\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Aufgabe 4.35:

Man gebe eine Potenzreihenentwicklung der Funktionen

a) $\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad (x > 0)$, b) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ an .

Aufgabe 4.36:

Man gebe die Potenzreihenentwicklung folgender Funktionen mit Hilfe des Verfahrens der gliedweisen Integration an:

a) $f(x) = \arcsin x$, b) $g(x) = \ln \frac{1}{1-x}$, c) $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Aufgabe 4.37:

Man berechne die Bogenlänge der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven zwischen den Punkten mit den Abzissen $x = a$ und $x = b$:

a) $y = \sqrt{x^3}$ (Neilsche Parabel); $a = 0$, $b = 4$,

b) $y = \ln x$; $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{8}$,

c) $y = 1 - \ln \cos x$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 4.38:

Man berechne die Bogenlänge folgender ebener Kurven bzw. Raumkurven:

a) $x = a\cos^5 t$, $\quad y = a\sin^5 t$ im Intervall $0 < x < a$,

b) $x = a\cos t$, $\quad y = a\sin t$, $z = bt$ $\quad$ im Intervall $0 < t < t_0$,

c) $x = e^t\cos t$, $\quad y = e^t\sin t$, $z = e^t$ $\quad$ im Intervall $-\infty < t < 0$.

Aufgabe 4.39:*

Man bestimme die größte Krümmung für die Kurve

$$\mathfrak{x}(t) = (a\cos t,\ b\sin t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi).$$

Aufgabe 4.40:*

Bei Rotation einer durch die Gleichung $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (0 < a < b)$ bestimmten Kreisfläche um die x-Achse wird ein sogenannter Torus erzeugt. Man berechne die Oberfläche und das Volumen des Torus'.

Aufgabe 4.41:*

Man berechne $\int\limits_B f(x,y)\,d(x,y)$ für

a) $f(x,y) = xy^2$ und B die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $y = 2x$,

b) $f(x,y) = x^2$ und B die obere Hälfte des Einheitskreises,

c) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ und B die Fläche, die von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzt wird.

Aufgabe 4.42: *

Man berechne $\int\limits_B xy\, d(x,y)$, wenn B durch folgende Ungleichungen charakterisiert wird:

a) $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b\,(1 - \frac{x}{a})$, b) $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b$,

c) $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Aufgabe 4.43:

Man bestimme das Volumen desjenigen Körpers, den der Zylinder $x^2 + y^2 = rx$ aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ herausschneidet (Vivianischer Körper).

Hinweis: Man führe Polarkoordinaten ein und wende die Transformationsformel für mehrfache Integrale an.

5. EINIGES ÜBER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

A. Fragen

1. Was versteht man unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung? Erläutern Sie die Begriffe Lösung, Lösungsmannigfaltigkeit und Lösungskurve!

2. Definieren Sie den Begriff des Richtungselementes für eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung! Was versteht man unter einer Isokline einer expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung? Geben Sie ein Beispiel an!

3. Wie lautet die zum Anfangswertproblem $y' = F(x,y)$ und $y(a) = b$ äquivalente Integralgleichung?

4. Formulieren Sie den Existenz- und Einzigkeitssatz für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung! Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion der Lösung des Anfangswertproblems $y' = F(x,y)$, $y(a) = b$ an!

5. Erläutern Sie die Methode der Trennung der Variablen zur Lösung der Anfangswertprobleme $y' = g(x)h(y)$, $y(a) = b$ und $y' = F(\frac{y}{x})$, $y(a) = b$ an je einem Beispiel!

6. Geben Sie die Schritte an, die zur Lösung des Anfangswertproblems $y' + g(x)y = h(x)$, $y(a) = b$ führen!

7. Erläutern Sie die Rechenschritte, die zur Lösung des Anfangswertproblems $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$, $y(a) = b_0$, $y'(a) = b_1$, $y''(a) = b_2$ führen! Unterscheiden Sie dabei die folgenden Fälle: das charakteristische Polynom hat nur reelle, einfache Nullstellen; es hat nur reelle, aber mehrfache Nullstellen; es besitzt auch komplexe Nullstellen.

B. Beispielaufgabe

Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' + xy = 0\,, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

durch Potenzreihenansatz.

Lösung: Wir machen den Ansatz $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, aus dem sofort $c_0 = 2$ und $c_1 = 3$ folgt. Wir setzen die Potenzreihe in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0\,.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$c_2 = 0\,, \quad c_3 = -\frac{c_0}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}, \quad c_4 = -\frac{c_1}{3\cdot 4} = -\frac{1}{4}\,, \quad c_5 = -\frac{c_2}{4\cdot 5} = 0\,,$$

$$c_6 = -\frac{c_3}{5\cdot 6} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 6}\,, \quad c_7 = -\frac{c_4}{6\cdot 7} = \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{4\cdot 6\cdot 7}\,.$$

Allgemein ergibt sich:

$$c_{3k-1} = 0\,, \quad c_{3k} = (-1)^k \frac{1}{3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)3k}\,,$$

$$c_{3k+1} = (-1)^k \frac{1}{4\cdot 6\cdot 7\ldots 3k(3k+1)}\,.$$

C. Aufgaben

Aufgabe 5.1:

Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y^2 + x^2 y' = 0, \quad y(1) = 0,$ b) $xy' = y \ln y, \quad y(1) = 2,$

c) $y' \sin x = y \ln y, \quad y(0) = 1,$ d) $yy' = x, \quad y(1) = 1,$

e) $yy' + x + 2y = 0, \quad y(1) = -1.$

Aufgabe 5.2:

Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0, \quad y(0) = 1,$ b) $y' + \frac{y}{x} + e^x = 0, \quad y(1) = 0.$

Aufgabe 5.3:

Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y''' + 8y'' + 17y' + 10y = 0, \quad y(1) = 6, \; y'(1) = 0, \; y''(1) = 0,$

b) $y^{(4)} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = -1,$
$y'''(0) = 0,$

c) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -2, \; y''(0) = 4.$

LÖSUNGEN

1.1. $-\infty < x < \frac{5}{2}$

1.7. Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $a + b \geqq 0$ oder wenn $a = b$ ist.

1.8. (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)

1.20. a) Kreisperipherie und Kreisinneres um (-3,0) mit dem Radius 2.

b) Mittelsenkrechte auf der Strecke mit den Endpunkten z_1, z_2.

c) Halbebene einschließlich der Randgeraden $x = \frac{1}{2}$.

d) Hyperbel für $a \neq 0$ bzw. Geradenpaar für $a = 0$.

1.22. a) $-z$, b) $\bar{z}$, c) $-\bar{z}$, d) $i\bar{z}$, e) $-i\bar{z}$.

1.23. Dann und nur dann, wenn der Quotient $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ reell ist.

1.27. $D(f) = [\![-r, +r]\!]$, $W(f) = [\![0, r]\!]$.

1.28. a) $D(f_1) = [\![-1, +1]\!]$, b) $D(f_2) = [\![-a, a[\![$,

c) $D(f_3) = \mathbb{R}$, d) $D(f_4) =]\!]\rightarrow, -2]\!] \cup [\![3, \rightarrow[\![$.

1.33. a) f_1 ist gerade, b) f_2 weder gerade noch ungerade,

c) f_3 ist ungerade

1.34. a) f_1 ist beschränkt, eine Schranke ist 4,

b) f_2 ist nach oben, aber nicht nach unten beschränkt (0 ist eine obere Schranke),

c) f_3 ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt (0 ist eine untere Schranke),

d) f_4 ist nicht beschränkt.

1.40. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} + 2$ und $D(f^{-1}) = [\![-3, \rightarrow[\![$.

1.41. a) $x = 10$, b) $x = 6$, c) $x = 0,68$, d) $x = 2$, e) $x = 16$
(Man schreibe alle Logarithmen zur gemeinsamen Basis 2 um.),
f) $x = 3$, g) $x = -2$.

2.1. a) f), g) monoton fallend, b) monoton wachsend,
c), d), e) monoton wachsend,
h) Da $a_0 < a_1$ und $a_1 > a_2$ gilt, ist die Zahlenfolge nicht monoton.
Für $n \geqq 1$ ist sie monoton fallend.

2.3. a) (a_n) ist streng monoton wachsend. Die Zahl 3 ist eine Schranke der Zahlenfolge.
b) (a_n) ist streng monoton wachsend. Sie ist nicht beschränkt.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$

2.10. a) $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$, b) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n+1}$, c) $a_n = \frac{n!}{n^2}$.

Es gibt zahlreiche weitere Lösungen.

2.11. Alle Folgen sind konvergent. Die Grenzwerte sind:

a) $\frac{1}{3}$, b) 0, c) 3, d) 0, e) $\frac{5}{4}$, f) $\frac{1}{2}$,

g) $-\frac{1}{2}$, h) -1, i) $\frac{1}{2}$, j) $\frac{2}{3}$, k) 3.

2.17. a) Nullfolge, b) Nullfolge, c) Nullfolge.

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2.24.

	$\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$		$\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$
a)	1	0	e)	0	0
b)	∞	∞	f)	∞	∞
c)	∞	2	g)	0	0
d)	$-\infty$	$-\infty$	h)	3	1

2.28. a) $S = \frac{1}{2}$, b) $S = 1$, c) $S = 1$, d) $S = \frac{1}{24}$, e) $S = \frac{1}{4}$.

2.29. Sämtliche Reihen sind divergent, da ihre Glieder keine Nullfolgen bilden.

2.31. a) bestimmt divergent, b) $S_n < 2$, konvergent,
c) $S_n < 3$, konvergent, d) $S_n < 2$, konvergent,
e) bestimmt divergent, $S_n > \sqrt{n}$.

2.32. a), b), c), d) konvergent.

2.33. Das Leibnizsche Kriterium ist nicht erfüllt, da die Glieder zwar gegen Null streben, die Folge der Absolutglieder aber nicht monoton ist. Die Reihe ist konvergent.

2.34. $4 \cdot 10^8 + 2$ Glieder

2.35. a) $\frac{n}{n!} > n$ für $n > 2$, divergent,

b) $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$ für $n > 1$, konvergent,

c) $0 < \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{n^2}$ für $n > 1$, konvergent,

d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geqq \frac{1}{2(n+1)}$, divergent,

e) $\dfrac{1}{\sqrt{n^3(1+n)}} < \dfrac{1}{n^2}$ für $n \geqq 1$, konvergent,

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ für $n \geqq 1$, konvergent,

g) $\dfrac{7}{n^2+6n+1} \leqq 7\ \dfrac{1}{n^2+3n+2}$ für $n \geqq 1$, konvergent,

h) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \leqq \dfrac{1}{2^n}$.

2.36. a) $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \leqq \dfrac{5}{6}$ für $n \geqq 4$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{4}{e^2} < 1$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{3} < 1$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{a}{e}$, konvergent für $a < e$, divergent für $a > e$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{1}{a} < 1$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = a > 1$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{2} < 1$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{1}{6} < 1$,

j) konvergent,

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b < 1$.

2.37. a) divergent für alle $x \neq 0$;

b) konvergent für $|x| > 3$, divergent für $|x| < 3$, für $|x| = 3$ bestimmt divergent;

c) für alle x konvergent;

d) für $|x| < 1$ konvergent, für $|x| > 1$ divergent;

e) für $|x| < e$ konvergent, für $|x| > e$ divergent,
für $|x| = e$ divergent;

f) für $|x| < 1$ konvergent, für $|x| > 1$ divergent (das notwendige Kriterium für die Konvergenz von Reihen ist nicht erfüllt);

g) für $x \leqq 1$ divergent, für $x > 1$ konvergent.

2.38. a) konvergent, $S = \dfrac{1}{p(\alpha+1)\,\ldots\,(\alpha+p)}$,

b) divergent gegen $+\infty$,

c) konvergent, $S = \dfrac{x}{1-x}$ für $|x| < 1$, $S = \dfrac{1}{1-x}$ für $|x| > 1$.

2.39. a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} q^j q^{k-j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k = \dfrac{1}{(1-q)^2}$,

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} (j+1)q^j q^{k-j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} q^k$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} q^k = \dfrac{1}{(1-q)^3}$. Durch vollständige Induktion läßt sich zeigen, daß $\dfrac{1}{(1-q)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} q^n$ gilt.

2.43. Für $x = n^2$, wobei $n \in \mathbb{N}^*$.

2.44. f ist überall stetig.

2.46. f und g sind stetig.

2.48. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $-\frac{1}{6}$, d) $\frac{3}{2}$, e) 6, f) $\frac{m}{n}$,

g) $\binom{n}{k}$, h) -1.

2.49. a) $\frac{1}{n}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{15}{2}$, d) 3.

2.50. a) 1, b) $\frac{1}{e}$, c) $\frac{1}{10} \frac{1}{\ell n\, 10} = \frac{M}{10}$,

d) $\ell n \frac{a}{b}$, e) $a - b$.

2.51. a) 2, b) ± 1, c) $\frac{a}{2}$, d) 0, e) $\frac{1}{2}$.

2.52. $f(x) = 5 + (x-3)^2 (x^2+1)$

2.53. $-2i$ (doppelte Nullstelle) und 1.

2.54. $f(x) = 2(x-1)(x+2)(x-2)^2$

2.55. $f(x) = (x-2)[(x-2)^2 + 9]$

2.58. a) $\frac{1}{2}$, b) 4, c) 1, d) $\frac{n^2-m^2}{2}$,

e) $\frac{1}{2}$, f) $2 \cos a$.

2.59. f und h sind an der Stelle 0 nicht stetig, während g an der Stelle 0 stetig ist.

2.60. a) $\ell n\, a$, b) 1, c) 4, d) $\ell n\, a - \ell n\, b$, e) a.

2.63. $\rrbracket \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rrbracket \cup \llbracket \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi \llbracket$

2.64. $D(f) = \mathbb{R}$, f ist stetig.

2.69. a) $z_0 = \sqrt[4]{2}\,(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$, $z_1 = \sqrt[4]{2}\,(\cos \frac{17}{16}\pi + i \sin \frac{17}{16}\pi)$,

b) $z_0 = 1(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $z_1 = 1(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$,

$z_2 = 1(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$, $z_3 = 1(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$.

2.70. $z_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$,

$z_3 = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$, $z_4 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.

2.71. $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

2.72. $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -3 + i$

2.76. $P(x) = P(x_0 + ht) = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} f(x_k)}{(t-k)k!(n-k)!}$

2.78. $c_0 = f(x_0)$; $c_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$; $c_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$;

usw.

2.79. Das inhomogene Gleichungssystem für die Koeffizienten hat die Lösung $a = 3$, $b = 6$, $c = -1$, $d = 6$.

3.1. a) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, b) $f'(x) = 2x^5 \sin\alpha$,

c) $f'(x) = x^{n-1} + \sqrt{n-1}\,x^{n-2} + \sqrt[3]{(n-2)^2}\,x^{n-3}$

d) $f'(x) = 3x^2 + \cos x$.

3.4. f_1 und f_2 sind stetig, $D(f_1') = \mathbb{R}$, $D(f_2') = \mathbb{R} - \{0\}$.

3.8. Die Gleichungen der Normalen lauten:

a) $y = -x + 1$, b) $y = -x + 1$, c) $y = -x + 2k\pi$ (k ganz),

d) $y = -x + (4k-1)\frac{\pi}{2}$ (k ganz).

3.9. a) $f'(x) = \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}$ b) $f'(x) = \frac{-x^2+14x+11}{(x-1)^2(x+3)^2}$,

c) $f'(x) = -9 \left[\frac{x^2+7x}{(x-4)^4}\right]^8 \quad \frac{2x^2+29x+28}{(x-4)^5}$,

d) $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$,

e) $f'(x) = 3(\cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x)$,

f) $f'(x) = -9 \cos^2 x \sin x$,

g) $f'(x) = 2 \cos(x+1)^2 - \frac{\sin(x+1)^2}{(x+1)^2}$,

h) $f'(x) = -\frac{4 \sin x \cos x}{(1+\sin^2 x)^2}$, i) $f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x+1}$.

3.10. a) $f'(x) = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+4}} e^{\sqrt{2x^2+3x+4}}$,

b) $f'(x) = \ln(a)[\frac{a^{\tan x}}{\cos^2 x} + \frac{a^x}{\cos^2 a^x}]$,

c) $f'(x) = -\frac{\ln a \cos x}{\sin^2 x} a^{\frac{1}{\sin x}}$,

d) $f'(x) = 2(\cosh 2x - \sinh x)$, e) $f'(x) = \frac{4(\tanh x - 1)^3}{\cosh^2 x}$

f) $f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\cos x + 2} \operatorname{sgn}(\sin x)$,

g) $f'(x) = -\frac{2 \ln a}{1+x^2} a^{\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)} \operatorname{sgn} x$,

h) $f'(x) = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$,

i) $f'(x) = (\ln x)^{\sin x}[\cos x \ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x \ln x}]$,

j) $f'(x) = (x\cos x)^{x+\cos x}\left[(1-\sin x)\ell n(x\cos x)\right.$

$$\left. + \frac{x+\cos x}{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\right],$$

k) $f'(x) = \operatorname{arsinh} x$, l) $f'(x) = \operatorname{arcoth} x$, m) $f'(x) = -\frac{1}{\cos x}$.

3.11. $1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)x^k = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

3.12. $\sum_{k=1}^{n} k\sin kx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$

3.13. a) $D(f) = [\![-1, +1]\!]$, $f'(x) = 2\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $D(f') =]\!]-1, +1[\![$,

b) $D(f) =]\!]1, \rightarrow[\![$, $f'(x) = \frac{1}{x\,\ell n\,x}$, $D(f') = D(f)$,

c) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$,

$D(f') = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

d) $D(f) =]\!]-2, 0[\![\cup]\!]3, \rightarrow[\![$, $f'(x) = \frac{-x^2+2x+18}{x^3-x^2-6x}$, $D(f') = D(f)$,

e) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4(3x^2-2x+7)^3(6x-2)\cos(3x^2-2x+7)^4$,

$D(f') = D(f)$.

3.14. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$. Diese Wurzeln existieren nach dem Satz von Rolle. Die Ableitung kann nicht mehr Wurzeln besitzen, da sie ein Polynom 4-ten Grades ist.

3.15. f ist in dem Intervall $]\!]-1, +1[\![$ monoton wachsend und in $]\!]\leftarrow, -1[\![\cup]\!]+1, \rightarrow[\![$ monoton fallend.

3.19. $8{,}9375 < \sqrt{80} < 8{,}9445$

3.22. a) $\zeta \sin t_0 + \eta \cos t_0 - a \cos t_0 \sin t_0 = 0$,

b) $(1 + \sin t_0)\eta - (1 - \cos t_0)\zeta + \sin t_0 (1 - t_0) - \cos t_0 (1 + t_0) + 1 = 0$.

Hierbei ist t_0 der zum Berührungspunkt $P(x_0, y_0)$ gehörende Parameterwert.

3.24. a) $D(f) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq 4\}$, $W(f) = [\![0, 2]\!]$,

b) $D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $W(f) = [\![0, \rightarrow[\![$,

c) $D(f) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 9\}$, $W(f) = [\![\frac{1}{3}, \rightarrow[\![$.

3.25. f ist in P stetig.

3.26. a) $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = 3y^2 - 3x$,

b) $f_x = 6x^2 - 6xy^2$, $f_y = -6x^2y + 9y^2$,

c) $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$,

d) $f_x = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$,

e) $f_x = ye^{xy}$, $f_y = xe^{xy}$,

f) $f_x = -\sin(x + y)e^{\cos(x+y)} + y \cos(xy)e^{\sin(xy)}$

$f_y = -\sin(x + y)e^{\cos(x+y)} + x \cos(xy)e^{\sin(xy)}$,

g) $f_x = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, $f_y = -\dfrac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$,

h) $f_x = -\sin 2x$, $f_y = -\sin 2y$.

3.27. a) $f_x = 5x^4 + 18x^2y - 4xyz$,

$f_y = 6x^3 - 2x^2z + 3z^3$,

$f_z = -2x^2y + 9yz^2$,

b) $f_x = e^x \ell n\, y$,

$f_y = \dfrac{e^x}{y} - z^2 \sin y$,

$f_z = 2z \cos y$,

c) $f_x = zx^{z-1}y^z$,

$f_y = zx^zy^{z-1}$,

$f_z = (xy)^z \ell n(xy)$,

d) $f_x = \dfrac{1}{x+y+z}$,

$f_y = \dfrac{1}{x+y+z}$,

$f_z = \dfrac{1}{x+y+z}$.

3.28. a) $dz = \cos(x^2 + y^2)(2xdx + 2ydu)$,

b) $dz = \dfrac{2}{\sin \dfrac{2x}{y}} \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$,

c) $dz = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$,

d) $du = \dfrac{xdx + ydu + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3.29. a) $t^2 \cos t^3 + 2t^2 \cos t^3$,

b) $[\sin(t^2 \ell n(t^2 + 1)) + t^2 \ell n(t^2 + 1)\cos(t^2 \ell n(t^2 + 1))]\, 2t$

$+ t^4 \cos(t^2 \ell n(t^2 + 1)) \dfrac{2t}{t^2 + 1}$.

3.31. a) $\text{grad } f = (4, \frac{9}{z}, -\frac{9y}{z^2})$,

b) $\text{grad } f = (y + z,\ x + z,\ y + x)$,

c) $\text{grad } f = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$,

d) $\text{grad } f = (-\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}, -\frac{1}{z^2})$.

3.32. $-\dfrac{3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

3.33. Beide Richtungsableitungen haben den Wert Null. Der Gradient in (x_0, y_0) steht senkrecht auf der Geraden.

3.34. Beide Richtungsableitungen haben den Wert Null.

3.35. a) $f^*(x,y) = \sqrt{r^2 - x_0^2 - y_0^2} - (x - x_0)\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2 - y_0^2}} - (y - y_0)\dfrac{y_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2 - y_0^2}}$

oder $x = x_0 + \lambda$, $y = y_0 + \mu$,

$z = \sqrt{r^2 - x_0^2 - y_0^2} - \lambda\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2 - y_0^2}} - \mu\dfrac{y_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2 - y_0^2}}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$,

b) $f^*(x,y) = (x_0^2 + y_0^2) + (x - x_0)2x_0 + (y - y_0)2y_0$ oder

$x = x_0 + \lambda$, $y = y_0 + \mu$, $z = x_0^2 + y_0^2 + 2\lambda x_0 + 2\mu y_0$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$,

c) $f^*(x,y) = x_0 y_0 + (x - x_0)y_0 + (y - y_0)x_0$ oder

$x = x_0 + \lambda$, $y = y_0 + \mu$, $z = x_0 y_0 + \lambda y_0 + \mu x_0$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

3.37. a) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = 2n!\,(1 - x)^{-n-1}$

b) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right)$,

c) $((1 + x)^{\alpha})^{(n)} = n!\binom{\alpha}{n}(1 + x)^{\alpha - n}$,

d) $\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = (n - 1)!\,[(1 - x)^{-n} + (-1)^{n-1}(1 + x)^{-n}]$,

e) $(\sin^2 x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin(2x + \frac{n+3}{2}\pi)$.

3.38. $|R_2(x)| \leqq \frac{(x_1-x_0)^2}{8} M$

3.39. $|R_2(x)| < 6 \cdot 10^{-8}$ für alle $x \in [\![1, 10]\!]$.

3.40. a) $a^{48}[(2450 - a^2x^2)\cos ax - 100\, ax \sin ax]$,

b) $2^{49} e^{2x}(2x^2 + 100x + 1225)$.

3.41. a) $f_{xx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,

b) $f_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$,

c) $f_{xxy} = \frac{2}{(x+y)^3}$, d) $f_{xyz} = (x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}$.

3.43. $f(x) = 2 + 2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$.

3.44. $P_1(x) = -7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$,

$P_2(x) = (x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$.

3.45. a) $e^{1-h} = e(1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{e^{-\vartheta h}h^4}{4!})$,

$e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{e^{-\vartheta h}}{4!}h^4$,

b) $\ln(2+h) = \ln 2 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{24}h^3 - \frac{h^4}{4(2+\vartheta h)^4}$,

$\ln(3+h) = \ln 3 + \frac{1}{3}h - \frac{1}{18}h^2 + \frac{1}{81}h^3 - \frac{h^4}{4(3+\vartheta h)^4}$,

c) $\sqrt{1+h^2} = 1 + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1-4(\vartheta h)^2\, h^4}{8(\sqrt{1+(\vartheta h)^2})^7}$

$$\sqrt{1+(1+h)^2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,h + \frac{1}{8}\sqrt{2}\,h^2 - \frac{1}{16}\sqrt{2}\,h^3$$
$$- \frac{1}{8}\,\frac{1-4(1+\vartheta h)^2}{(\sqrt{1+(1+\vartheta h)^2})^7}\,.$$

3.47. $\log_a(1+x) = \frac{1}{\ln a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1\,.$

3.50. a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + - \ldots\,; |x| < 1\,,$

b) $2[\frac{x}{a} + \frac{1}{3}(\frac{x}{a})^3 + \frac{1}{5}(\frac{x}{a})^5 + \ldots]; \quad |x| < a\,,$

c) $\ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - + \ldots\,.$

3.51. $f_1(x) = x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + - \ldots \quad (x \in \mathbb{R})\,,$

$f_2(x) = x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + - \ldots \quad (x \in \mathbb{R})\,.$

3.52. a) $f(\frac{\pi}{2} + h\,, \frac{\pi}{3} + k) = (\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2}) + h\pi - k(2\,\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$$+ \frac{1}{2}[h^2 \left\{ 2 - \sin(\frac{\pi}{2} + \vartheta h)\cos(\frac{\pi}{3} + \vartheta k) \right\}$$

$$- 2hk\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta h)\sin(\frac{\pi}{3} + \vartheta k)$$

$$- k^2 \left\{ 2 + \sin(\frac{\pi}{2} + \vartheta h)\cos(\frac{\pi}{3} + \vartheta k) \right\}]\,.$$

b) $f(\frac{\pi}{2} + 0{,}01;\ \frac{\pi}{3} + 0{,}02) \approx 1{,}8430\,.$

3.53. $\sin(x - y) = \frac{x-y}{1!} - \frac{(x-y)^3}{3!} + \frac{(x-y)^5}{5!} - \frac{(x-y)^7}{7!} + - \ldots$

3.54. a) f besitzt an der Stelle $x = 2$ ein Maximum, an der Stelle $x = 6$ ein Minimum,

b) f besitzt an der Stelle $x = a$ ein Minimum,

c) f besitzt an der Stelle $x = 0$ ein Minimum,

d) f besitzt an der Stelle $x = 0$ ein Minimum,

e) f besitzt an der Stelle $x = -\sqrt{3}$ ein Maximum.

3.55. a) Minimum an der Stelle $x = 1$, $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \uparrow 0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

b) $D(f) =]\!]-1, +1[\![$, Nullstelle bei $x = 0$, Wendepunkt bei $x = 0$,

$\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = -\infty$, f ist ungerade, in $]\!]-1, 0[\![$ von unten konkav, in $]\!]0, 1[\![$ von unten konvex,

c) f ist ungerade, $x = 0$ ist Nullstelle von f.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ besitzt f ein Maximum und an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ ein Minimum. Wendepunkte besitzt f an den Stellen $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d) f besitzt bei $x = 0$ eine Nullstelle und ist ungerade. f besitzt an den Stellen $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Wendepunkte, die an den Stellen $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Stufenpunkte sind. f besitzt keine Extrema. f ist in den Intervallen $]\!]2k\pi, (2k+1)\pi[\![$ $(k \in \mathbb{Z})$ von unten konvex, in den Intervallen $]\!](2k-1)\pi, 2k\pi[\![$ von unten konkav.

3.56. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

3.57. Die Höhe des gesuchten Zylinders ist $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

3.58. a) An den Stellen $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$, $(-2,-1)$ sind die notwendigen Bedingungen erfüllt. An der Stelle $(2,1)$ besitzt f ein Minimum. An der Stelle $(-2,-1)$ besitzt f ein Maximum. In den anderen Punkten sind die hinreichenden Bedingungen nicht erfüllt.

b) f besitzt an der Stelle $(5,3)$ ein Minimum.

c) An den Stellen $(0,0)$ und $(2,2)$ sind die notwendigen Bedingungen erfüllt. An der Stelle $(2,2)$ besitzt f ein Minimum. An der Stelle $(0,0)$ sind die hinreichenden Bedingungen nicht erfüllt.

d) f besitzt keinen Extremwert, da die notwendigen Bedingungen an keiner Stelle erfüllt sind.

3.59. Die Funktion $f(x,y) = wxy - x^2y - xy^2$ ist auf Extremwerte zu untersuchen. w ist eine Konstante. $x = y = z = \frac{w}{3}$.

3.60. a) $\frac{1}{5}$, b) 0, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{3}$, e) $\frac{1}{e}$, f) 0, g) -1,

h) $$\lim_{x\downarrow 0} \sin x \ln \cot x = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln \cot x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow 0} (\cot x)^{\sin x} = \lim_{x\downarrow 0} e^{\sin x \ln \cot x} = 1,$$

i) $-\frac{2}{\pi}$, j) $\frac{1}{2}$, k) 1.

3.61. a) $R = 2$, b) $R = \infty$, c) $R = \infty$, d) $R = \frac{1}{3}$,

e) $R = \infty$ für $0 < a \leqq 1$, $R = 0$ für $a > 1$,

f) $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e},$$

g) $R = \infty$, h) $R = 0$.

3.62. a) $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, b) $R = 0$.

3.65. a) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$,

b) $(1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n$.

3.66. $x_1 = -10{,}26$, $x_2 = 9{,}88$.

3.67. $a_1 = 2{,}541$, $a_2 = 2{,}506$, $|a_2 - a| \leqq 0{,}009$ (a exakter Wert).

3.68. a) $y' = -1$. b) $y' = \dfrac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}$,

c) $y' = \dfrac{-\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}$.

4.10. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{\pi}{3} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\,dx \leqq \frac{\pi}{3}$

4.15. a) $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$, b) $\frac{\ln 3}{2}$, c) $\frac{2}{\pi}$.

4.16. a) 0, b) $-\frac{28}{3}$, c) $\frac{\pi}{4} + 1$, d) $\frac{\pi}{4}$, e) $r \sin t + C$,

f) $\frac{1}{2} \ln|x| + C$, g) $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$, h) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$,

i) $\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x| + C$, j) $\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x-2| + C$,

k) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$, l) $-e^{-x} + C$.

4.17. a) $\frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + C$, b) $x\sinh x - \cosh x + C$,

c) 1, d) $\frac{2x^3+3x^2}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right] + C$,

e) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$,

f) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{x^2-1}{2} + C$,

g) $x(\ln x - 1) + C$, h) $\frac{x^2}{2}(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C$,

i) $\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C$, j) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$,

k) $(x^2-3)\sin x + 2x\cos x + C$, l) $12\pi^2$,

m) $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$.

4.21. a) $\ln 2$, b) 2, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{1-\cos a\pi}{n}$.

4.22. a) $\frac{3}{4}\tan(4x-2) + C$, b) $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$,

c) $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$,

d) $\frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + C$,

e) $\frac{3}{2}$, f) $\ln|3x^2+4x+7| + C$,

g) $\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a+b}{a}\right|$, h) $\frac{1}{45}\ln|15x^3 - 5x + 7| + C$,

i) $\frac{\pi^2}{32}$, j) $-\cos(\ln x) + C$, k) $-\sin\frac{1}{x} + C$,

l) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}\right) + C$, m) $\frac{1}{6}(\operatorname{artanh} 3x)^2 + C$.

4.23. a) $x - 2a \ln|x+a| + C$, b) $2 \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$,

c) $-\frac{1}{4(2+3x^2)^2} + C$, d) $\arctan(x+2) + C$,

e) $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| + C$, f) $2\sqrt{e^x+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right) + C$,

g) $2(\sqrt{e^x-1} - \arctan\sqrt{e^x-1}) + C$, h) $-\cot\frac{x}{2} + C$,

i) $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + C$, j) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$,

k) $2\arctan e^x + C$, l) $\frac{\cosh^5 x}{5} - \frac{\cosh^3 x}{3} + C$.

4.24. a) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + C$, b) $\arcsin\frac{x}{a} + C$,

c) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{3}(2a^2+x^2) + C$, d) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$,

e) $\tan\frac{x}{2} + C$.

4.25. a) $2\ln 2 - 1$, b) $e^{\pi^2} - 1$, c) $\frac{32}{15}$,

d) $2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1) + 2$, e) $\frac{\pi}{4}$, f) $20\cos 1 - 12\sin 1$.

4.26. a) $\frac{3\ln 2}{\pi}$, b) $\frac{1}{e-1}$, c) $\frac{\pi}{4}$.

4.27. $\zeta = e^{\frac{1}{e-1}}$

4.28. a) 1, b) $\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{\pi-2}{8}$.

4.29. $5(\cos 2 - \cos 1) + \ln 5 + 119 + \frac{1}{2}$.

4.30. $\mu(F) = \frac{2}{9}(e^3 - 4) + e$

4.31. $\mu(f) = \pi$

4.32. $x = \frac{\pi}{6}$

4.33. a) $\frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{17}{6}\ln|x+4| + C$,

b) $-8\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + 5\ln|x+7| + C$,

c) $\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x-2| + C$,

d) $x^2 + \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+1| + \frac{23}{8}\ln|x+3| + C$

e) $-\frac{1}{x+1} - 2\ln|x+1| + 3\ln|x-5| + C$,

f) $x^2 - 7x + 22\ln|x+3| + C$,

g) $\frac{5}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+20| - \frac{9}{4}\arctan\frac{x+2}{5} + C$,

h) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,

i) $\ln|x^2-4x+5| - \ln|x^2+4| - \frac{33}{16}\arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\frac{x+4}{x^2+4} + C$,

j) $\frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}$.

4.34. a) $-\cot\frac{x}{2} - x + C$, b) $\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2}) + C$.

4.35. a) $\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n \cdot n!} - \frac{1}{n \cdot n!}\right)$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

4.36. a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$

b) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; |x| < 1,$ c) $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

4,37. a) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1),$ b) $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2},$ c) $\ln \tan \frac{3\pi}{8}.$

4.38. a) $\frac{3}{2} a^2,$ b) $t_0 \sqrt{a^2+b^2},$ c) $\sqrt{3}.$

4.39. $\frac{a}{b^2}$ $(a > b)$ in den Endpunkten der Hauptachse.

4.40 $O(M) = 4ab\pi^2, \quad \mu(M) = 2a^2 b\pi^2$

4.41 a) $\frac{32}{5},$ b) $\frac{\pi}{8},$ c) $\frac{9}{4}.$

4.42. a) $\frac{1}{24} a^2 b^2,$ b) $\frac{1}{4} a^2 b^2,$ c) $\frac{1}{8} a^2 b^2.$

4.43. $\frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{8}{9} r^3$

5.1. a) $y \equiv 0,$ b) $y = e^{x \ln 2},$ c) $y = 1,$

d) $y = x,$ e) $y = -x.$

5.2. a) $y = \dfrac{1 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}}{1+x},$ b) $y = e^x(\frac{1}{x} - 1).$

5.3. a) $y = 15e^{-(x-1)} - 10e^{-2(x-1)} + e^{-5(x-1)},$

b) $y = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{4}{17} e^{3x} + e^{-x} \left(\frac{25}{34} \cos x + \frac{15}{34} \sin x\right),$

c) $y = e^{-2x}.$