Bogenlänge der Normalparabel

Die Bestimmung der Bogenlänge der Normalparabel $y = x^2$ im Intervall $[0; 1]$ ist nicht trivial: Dazu ist das Integral

$$b = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

zu lösen.

Unbestimmtes Integral

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

Substitution $2x = r; dx = 1/2\, dr$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + r^2}\, dr =$$

$r = \sinh z; \frac{dr}{dz} = \cosh z$

$$= \frac{1}{2} \int \left[\sqrt{1 + \sinh^2 z} \cdot \cosh z \right] dz =$$

$1 + \sinh^2 z = \cosh^2 z$

$$= 1/2 \int \cosh^2 z\, dz$$

Mit partieller Integration wird $(u = \cosh z; v = \cosh z)$

$$\int \cosh^2 z\, dz = \sinh z \cosh z - \int \sinh^2 z\, dz =$$

$$= \sinh z \cosh z - \int (\cosh^2 z - 1)\, dz$$

und somit

$$\int \cosh^2 z\, dz = \frac{1}{2}(\sinh z \cosh z + z)$$

Rücksubstitution ergibt

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{4} \left(\sinh(\text{arsinh } r) \cosh(\text{arsinh } r) + \text{arsinh } r\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(2x\sqrt{1 + 4x^2} + \text{arsinh } 2x \right) + c$$

Wird die Areafunktion arsinh s durch den Logarithmus ersetzt, bleibt

$$= \frac{1}{4} \left(2x\sqrt{1 + 4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right) \right) + c$$

Für die Bogenlänge im Intervall $[0; a]$ gilt allgemein

$$b = \int\limits_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{4} \left(2a\sqrt{1 + 4a^2} + \ln\left(2a + \sqrt{1 + 4a^2}\right) \right)$$

Für das Integral $[0; 1]$ ergibt sich $\approx$ 1,47894....
Bemerkenswert ist, dass schon Archimedes (ohne Kenntnisse in Integralrechnung!) in der Lage war, die Normalparabel zu rektifizieren.