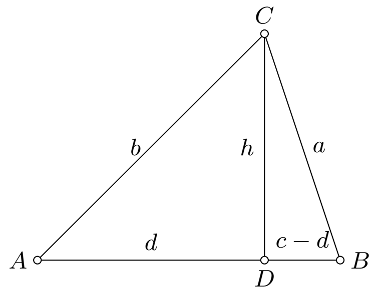
Heronsche Dreiecksformel



Nach dem Satz des Pythagoras gilt $b^2 = h^2{+}d^2$ und $a^2 = h^2{+}(c{-}d)^2$ (siehe Abbildung). Subtraktion ergibt $a^2 - b^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot d$, also

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot c}$$

Für die Höhe h des Dreiecks gilt $h^2 = b^2 - d^2$.
Einsetzen der letzten Gleichung liefert mit $s = \dfrac{a + b + c}{2}$:

$$\begin{aligned}
h^2 = b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot c}\right)^2 &= \left(\frac{2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot c}\right)^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot c}\right)^2 \\
&= \frac{(2 \cdot b \cdot c + (-a^2 + b^2 + c^2)) \cdot (2 \cdot b \cdot c - (-a^2 + b^2 + c^2))}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{((b + c)^2 - a^2) \cdot (a^2 - (b - c)^2)}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{((b + c) + a) \cdot ((b + c) - a) \cdot (a + (b - c)) \cdot (a - (b - c))}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{2 \cdot s \cdot 2 \cdot (s - a) \cdot 2 \cdot (s - c) \cdot 2 \cdot (s - b)}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{4 \cdot s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{c^2}
\end{aligned}$$

Anwenden der Quadratwurzel auf beiden Seiten ergibt

$$h = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks

$$A = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Heronische Zahlentripel, Heronische Dreiecke

Heronische Tripel sind Tripel a,b,c ganzer Zahlen, für die ein Dreieck mit a,b,c als Seitenlängen ganzzahligen Flächeninhalt (mindestens eine Höhe hat ganzzahlige Länge!) besitzt.
Beispiel: $(a,b,c) = (13,14,15)$

Sind u, v, w, x teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist a,b,c ein derartiges Tripel mit

$$a = wx\frac{u^2 + v^2}{2}; \qquad b = uv\frac{w^2 + x^2}{2}; \qquad c = (ux + vw)\frac{uw - vx}{2}$$

Die kleinsten Heronischen Dreiecke haben die Seitenlängen (3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (4, 13, 15), (13, 14, 15), (9, 10, 17), ...