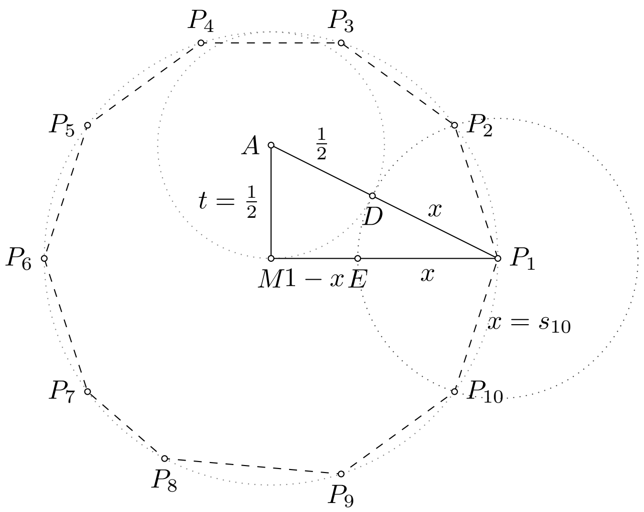
Näherungsweise Konstruktion von regelmäßigen Vielecken und Berechnung ihrer Seitenlängen

Autor: Dieter Behrendt, 2025

Ein in den Einheitskreis eingeschriebenes regelmäßiges 10-Eck kann u.a. gemäß Abb. 1 (mit $r = \overline{MP_1} = 1$) konstruiert werden.



Konstruktion eines regelmäßigen 10-Ecks

Auf der Radius wird zum Kreismittelpunkt M das Lot gefällt und auf diesem die Strecke $t = \frac{1}{2}$ (Wir nennen t Teilung) abgetragen mit Punkt A als Schnittpunkt. Die Strecke AP_1 ist die Hypotenuse des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks MAP_1.
Mit $t = \frac{1}{2}$ wird ein Kreisbogen um A gezeichnet mit dem Schnittpunkt D auf der Hypotenuse. Die Hypotenuse wird dadurch geteilt in $t = \frac{1}{2}$ und die noch unbekannte Größe X.

Wie aus Abb. 1 zu entnehmen ist, entspricht dieses $x = \overline{DP_1}$ genau der Länge einer Seite des regelmäßigen 10-Ecks. Wir berechnen die Seitenlänge mit dem Satz des Pythagoras. Es ist:

$$1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \qquad \text{(Gl 1.10)}$$

Dadurch ergibt sich nachstehende Gleichung in der Normalform

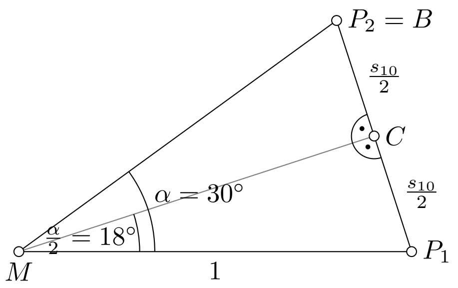
$$x^2 + x - 1 = 0$$

mit der positiven Lösung

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = s_{10} \approx 0{,}618$$

(Besonderheit: Die Seitenlänge s_{10} des regelmäßigen 10-Ecks ist gleich der größeren Teilstrecke des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Radius $r = 1$, die kleinere Teilstrecke ist $1 - s_{10} = \overline{EM}$, also $1 - 0{,}618 = 0{,}382$.)

Wir berechnen nun die Seitenlänge des regelmäßigen 10-Ecks mit Hilfe der Sinusfunktion, Abb. 2.



$$s_{\frac{AD}{2}} = \sin 18° = 0{,}309,\ s_{10} = 2 \cdot 0.309 = 0{,}618$$

Der Zentriwinkel α des gleichschenkligen Dreiecks MBP_1 beträgt $\alpha = \frac{360°}{n}$, mit $n = 10$ also $\alpha = \frac{360°}{10} = 36°$.
Die Winkelhalbierende $\overline{MC}$ ist gleichzeitig die Höhe vom Dreieck MBP_1. Sie steht senkrecht auf der Seite $s_{10} = \overline{AP_1}$ und halbiert diese. Das Dreieck MCP_1 ist rechtwinklig. Es gilt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 18° = \frac{s_{10}}{2}$$

$$s_{10} = 2\sin 18° = 2 \cdot 0{,}309 = 0{,}618 \qquad \text{(Gl. 2.10)}$$

Wir sehen die Übereinstimmung mit dem Resultat nach Gl. 1.10. Allgemein gilt dann für

$$s_n = 2 \cdot \sin\frac{180°}{n} \qquad \text{(Gl. 2.n)}$$

Aus diesem Sachverhalt kann man schließen, dass es einen grundsätzlichen Zusammenhang zwischen der Teilung t_n und der Seitenlänge s_n bei regelmäßigen Vielecken gibt. Gl. 1.10 kann man dann allgemein so schreiben:

$$1^2 + t_n^2 = (t_n + s_n)^2 \qquad \text{(Gl. 1n)}$$

Nach t_n umgestellt ergibt sich

$$t_n = \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \qquad \text{(Gl. 3n)}$$

Setzen wir in Gleichung 3n für $s_n = 2\sin\frac{180°}{n}$ ein, können wir für beliebige n-Ecke die zugehörige Teilung t_n berechnen. Es ist:

$$t_n = \frac{1 - \left(2\sin\frac{180°}{n}\right)^2}{2\left(2\sin\frac{180°}{n}\right)} = \frac{1 - 4\sin^2\frac{180°}{n}}{4\sin\frac{180°}{n}}$$

Für das regelmäßige 10-Eck ergibt sich damit die Teilung t_{10} zu (siehe Abb. 1, Gl. 1.10):

$$t_{10} = \frac{1 - 4\sin^2 18°}{4\sin 18°} = \frac{1 - 4 \cdot 0{,}309^2}{4 \cdot 0{,}309} = 0{,}5$$

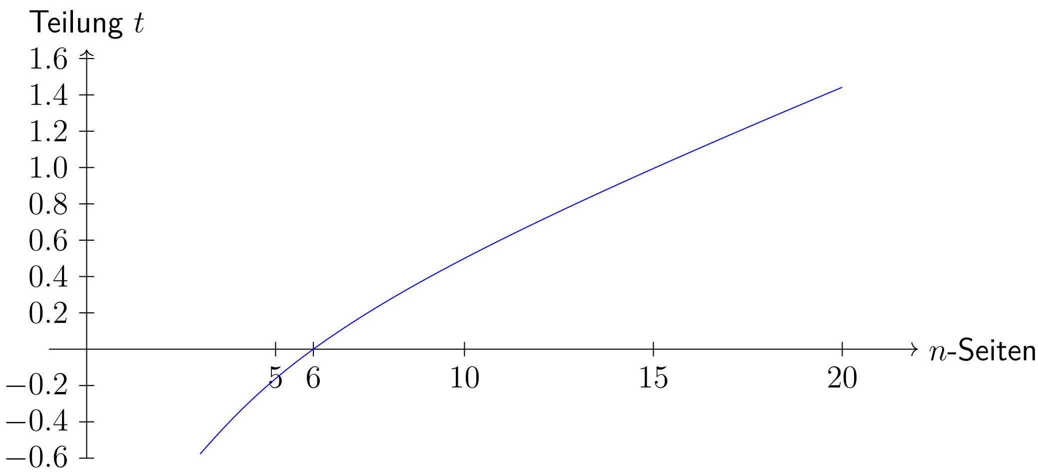
Tabelle 1 zeigt die Zahlenwert für t_n in Abhängigkeit von der Seitenzahl n bzw. von der Seitenlänge s_n.

Tabelle 1 (für $r = 1$)

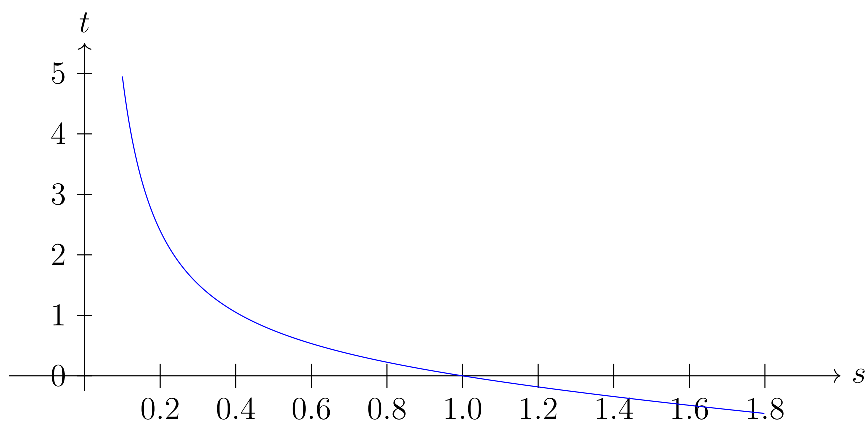
n	s_n	t	n	s_n	t	
3	1,732	-0,577	13	0,479	0,805	
4	1,414	-0,354	14	0,445	0,901	
5	1,172	-0,163	15	0,416	0,995	≈ 1
6	1,000	0	16	0,390	1,087	
7	0,863	0,142	17	0,367	1,177	
8	0,765	0,270	18	0,347	1,266	
9	0,684	0,389	19	0,329	1,354	
10	0,618	0,500	20	0,313	1,442	
11	0,564	0,606	30	0,209	2,105	
12	0,518	0,707	60	0,1046	4,724	

In den Kurven 1-3 sind die funktionalen Zusammenhänge grafisch dargestellt. Die bekannten Besonderheiten spiegeln sich darin natürlich wieder.

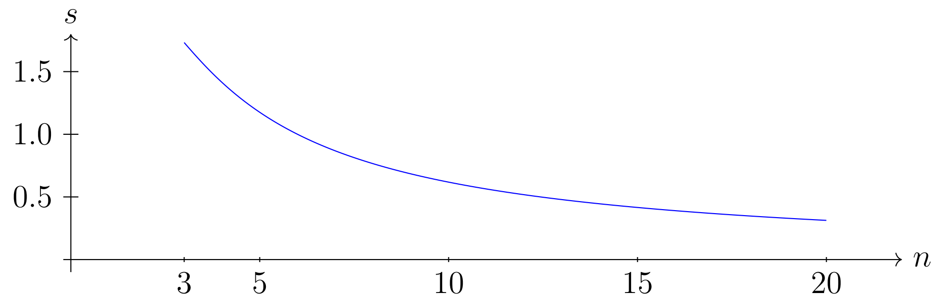
Kurve 1 $\quad t_n = \frac{1-s_n^2}{2s_n} = \frac{1-\left(2\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2}{2\left(2\sin\frac{180^\circ}{n}\right)} = \frac{1-4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}{4\sin\frac{180^\circ}{n}}$



Kurve 2 $\quad t = f(s) = \frac{1-s^2}{2s}$



Kurve 3: Regelmäßige Vielecke eingeschrieben in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$
Seitenlänge $s = f(n) = 2 \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$



Für $n = 6$ wird $t_6 = 0$, d.h. der Radius des Kreises entspricht der Seitenlänge des regelmäßigen 6-Ecks. Für $n < 6$ also $n = 3$, 4 und 5, sind die Werte für t negativ. Hier ist bei der Konstruktion zu beachten, dass t als Verlängerung der Hypotenuse in die entgegengesetzte Richtung abgetragen werden muss. (Abb. 3, z.B. für $n = 5$)

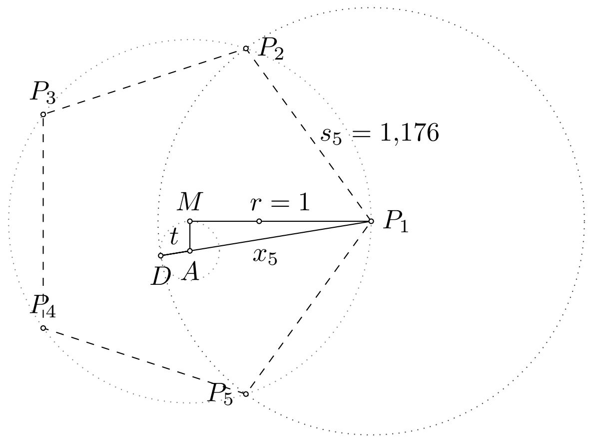


Abb. 3: Konstruktion eines regelmäßigen 5-Ecks
$s_5 = |t_5| + x_5$ mit $t = -0{,}163$
$x_5 = \sqrt{0{,}163^2 + 1^2} = 1{,}013$, $s_5 = 1{,}013 + 0{,}163 = 1{,}176$

Die Teilung t_5 ist negativ, das heißt der Betrag wird zum Wert x addiert, um die Seitenlänge s_5 zu erhalten. Diese ist größer als Kreisradius und beträgt das 1,176-fache vom Radius r. Analog ergeben sich die Seitenlängen der gleichmäßigen 4- und 3-Ecke zu $s_4 = \sqrt{2} = 1{,}414$ und $s_3 = \sqrt{3} = 1{,}732$.

Mit der Verfügbarkeit von t_n für ein beliebiges regelmäßiges Vieleck sind wir sofort in der Lage ohne Winkelmesser und ohne die Sinusfunktion zu kennen, das entsprechende regelmäßige n-Eck näherungsweise zu konstruieren.
Die zugehörige Seitenlänge s_n berechnen wir dann nach Gl. 1n, umgestellt nach s_n:

$$s_n^2 + 2 \cdot s_n \cdot t_n - 1 = 0$$

Mit $t = \frac{1}{2}$ ergibt sich dann $s_{10}^2 + s_{10} - 1 = 0$ und

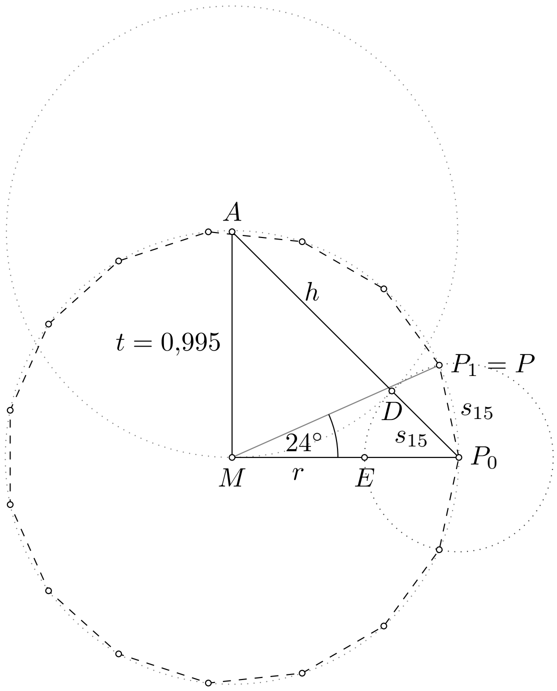
$$s_{10} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0{,}618$$

Weiteres Beispiel: $t = -0{,}354$ für $n = 4$

$$s_4^2 + 2s_4(-0{,}354) - 1 = 0 \qquad , \qquad s_4^2 - 0{,}708 s_4 - 1 = 0$$

$$s_4 = -0{,}354 + \sqrt{0{,}1253 + 1} = -0{,}354 + \sqrt{1{,}1253} \approx 1{,}414 = \sqrt{2}$$

Konstruktion eines regelmäßigen 15-Ecks



Konkretes Beispiel: $r = 5$ cm

$$\cos 24° = \frac{x_P}{r} \quad \Rightarrow \quad x_P = r \cdot \cos 24° = 4{,}568$$

$$\sin 24° = \frac{y_P}{r} \quad \Rightarrow \quad y_P = r \cdot \sin 24° = 2{,}034 \qquad P_1(4{,}569; 2{,}034)$$

$$x_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 = 4{,}568^2 + 2{,}034^2 = 25{,}0026 \approx 25 = r^2$$

$$s_{15} = \overline{P_0P_1} = \sqrt{(5 - 4{,}568)^2 + (2{,}034 - 0)^2 0} = \sqrt{4{,}3236} \approx 2{,}08 \text{ cm}$$