Zahl, Menge, Gleichung

Manfred Rehm

Mein kleines Lexikon

Manfred Rehm

Zahl, Menge, Gleichung

Illustrationen

von Rudolf Schultz-Debowski

Der Kinderbuchverlag Berlin

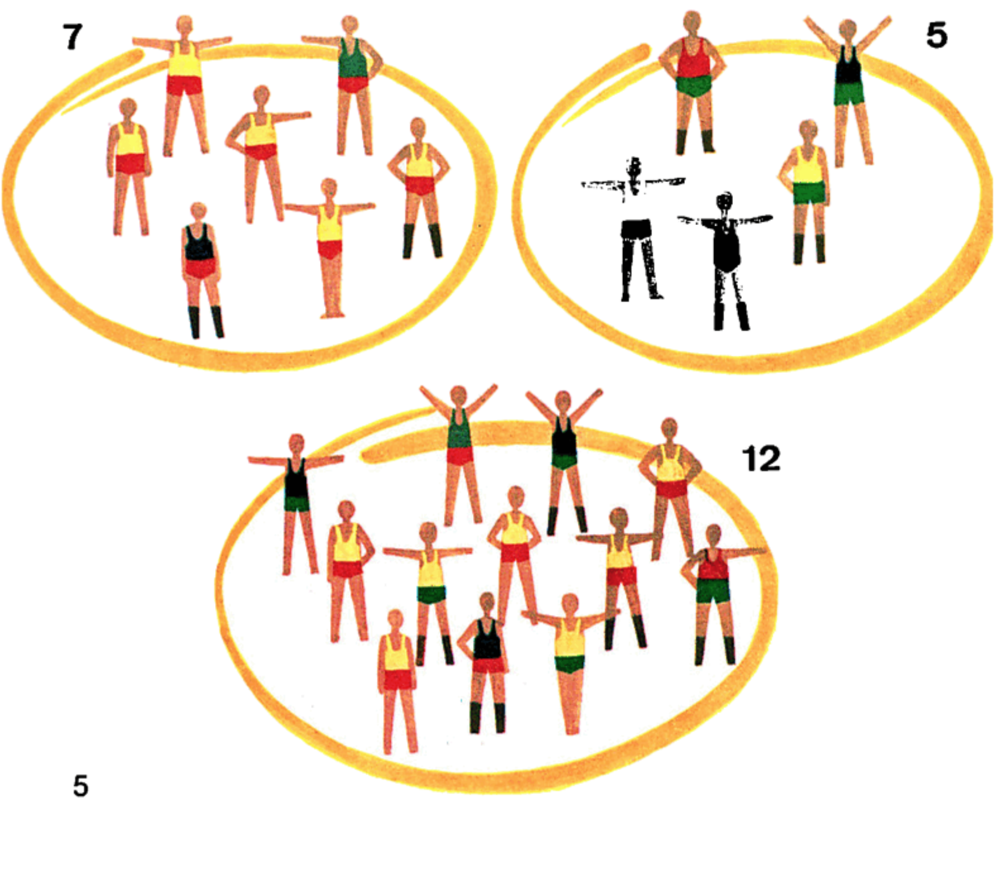
Mathematische Schülerbücherei Nr. 76

Lizenz-Nr. 304-270/339/76-(45)
Satz: Interdruck Leipzig
Repro: Karl-Marx-Werk Pößneck
Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Sachsendruck Plauen
2. Auflage
LSV 7842
Für Leser von 9 Jahren an
Bestell-Nr. 629 077 9
EVP 5,80 M

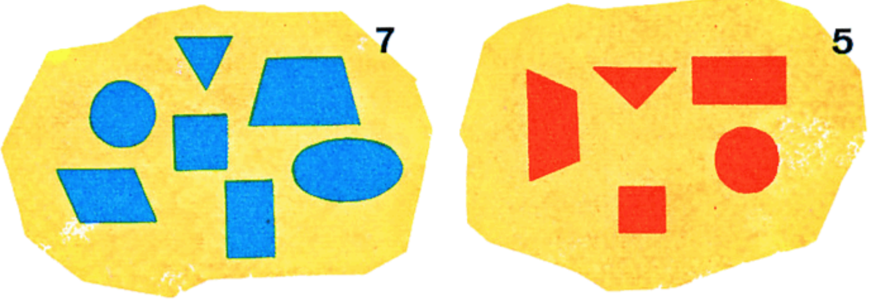
Addieren Das Addieren natürlicher Zahlen oder, wie man auch sagt, die Addition ist eine Rechenoperation. Dabei wird zwei natürlichen Zahlen nach einer bestimmten Vorschrift eine dritte natürliche Zahl zugeordnet, die man als Summe der beiden Zahlen bezeichnet.

Beispiele: $[7; 5] \rightarrow 12 = 7 + 5$
$[0; 3] \rightarrow 3 = 0 + 3$
$[6; 1] \rightarrow 7 = 6 + 1$

Die Vorschrift, nach der die zugeordnete Zahl zu finden ist, kann man mit Hilfe von Mengen angeben. Zum Beispiel läßt sich die Zahl 7 durch eine Siebenermenge von Jungen mit roten Turnhosen und die Zahl 5 durch eine Fünfermenge von Jungen mit grünen Turnhosen veranschaulichen. Vereinigt man beide Mengen, so erhält man eine Zwölfermenge von Jungen mit roten oder grünen Hosen. Diese Menge gehört zur Zahl 12.



Man könnte für 7 und 5 selbstverständlich auch andere Siebener- und Fünfermengen benutzen.



Was ist aber, wenn man als Siebenermenge die Menge der Jungen mit gelben Hemden und als Fünfermenge die Menge der Jungen mit braunen Strümpfen wählt?

In diesem Fall erhält man keine Zwölfermenge, da es Jungen gibt, die sowohl zur Siebenermenge als auch zur Fünfermenge gehören. Man muß also für die natürlichen Zahlen 7 und 5 solche Mengen auswählen, die keine gemeinsamen Elemente aufweisen. Achtet man darauf, so erhält man bei der Vereinigung dieser Mengen jeweils Mengen, die alle zur Zahl 12 gehören. Daher sagt man: Die natürlichen Zahlen 7 und 5 haben als Summe die Zahl 12; also $7+5=12$. Diese Überlegungen lassen sich ganz entsprechend für zwei beliebige natürliche Zahlen anstellen. Sind a und b beliebige natürliche Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl – nennen wir sie c –, die als Summe der beiden Zahlen a und b bezeichnet wird: $c=a+b$. Es gibt also stets eine, aber auch nur eine solche Zahl. Da es auf die Reihenfolge der Zahlen beim Addieren nicht ankommt, erhalten die beiden Zahlen a und b den gleichen Namen.

a	+	b	=	c
Summand		Summand		Summe

Übrigens wird nicht nur c, sondern auch $a+b$ als Summe bezeichnet.

$$0+7=7 \qquad 12+0=12$$
$$0+1235=1235 \qquad 37541+0=37541$$

Für alle natürlichen Zahlen a ist

$$0+a=a \qquad a+0=a$$

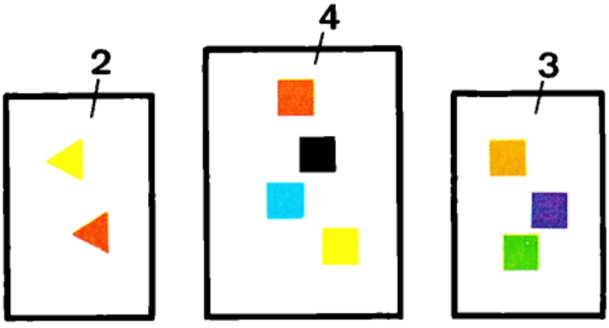
Assoziativgesetze Soll man die drei natürlichen Zahlen 2, 4 und 3 addieren, so muß man diese Aufgabe zerlegen in zwei Teilaufgaben, da stets nur zwei Zahlen addiert werden können. Man kann zuerst die Zahlen 2 und 4 addieren und zu deren Summe $2+4=6$ die Zahl 3 hinzufügen:

$$(2+4)+3=6+3=9.$$

Die Klammer soll angeben, welche Zahlen zunächst addiert werden. Man kann aber ebensogut zuerst die Zahlen 4 und 3 addieren und deren Summe 7 zur Zahl 2 addieren:

$$2 + (4 + 3) = 2 + 7 = 9.$$

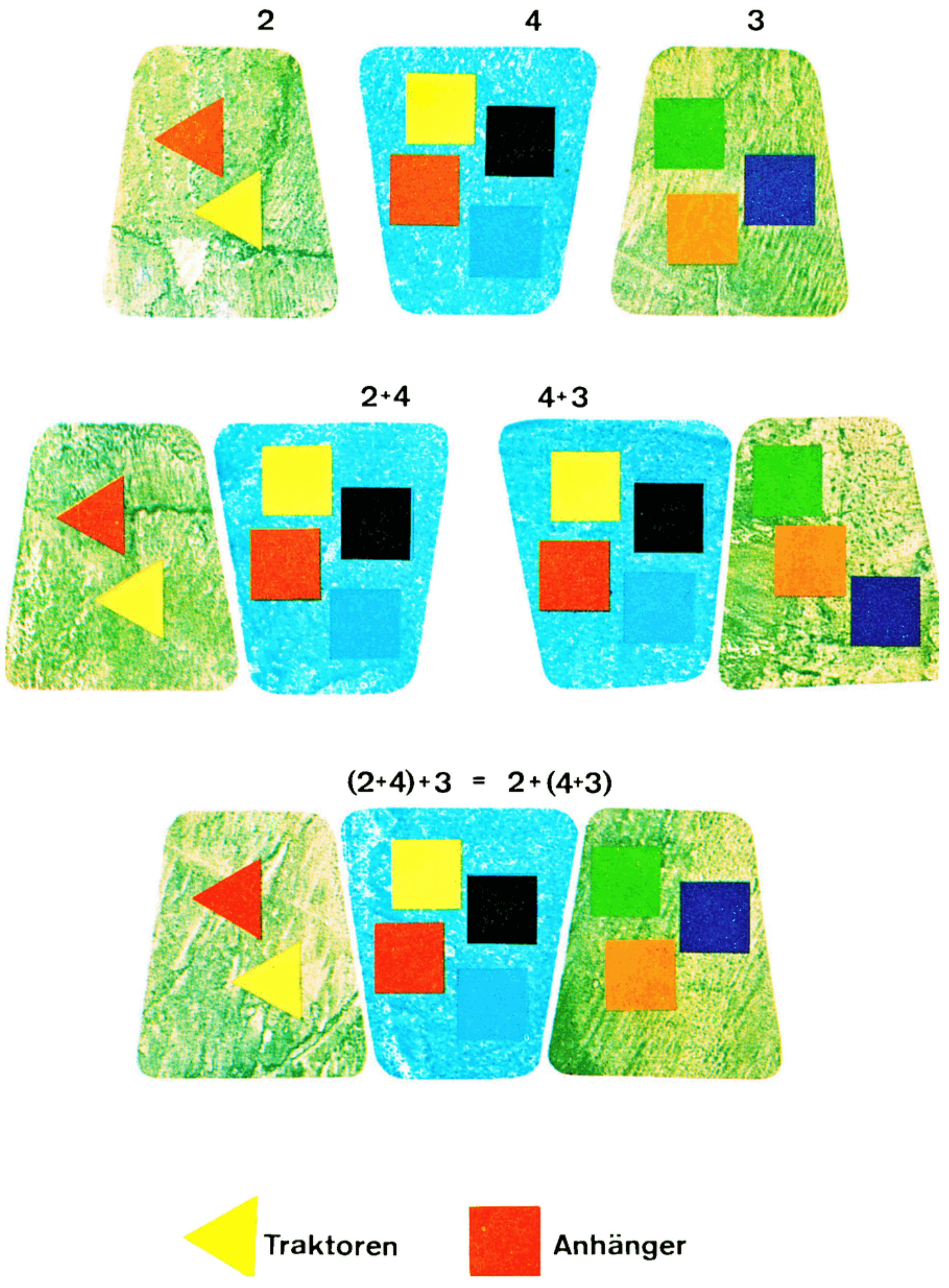
Es ist also gleichgültig, ob man zunächst die ersten beiden Zahlen und danach zur Summe die dritte Zahl addiert oder ob man zunächst die letzten beiden Zahlen und danach die Summe zur ersten Zahl addiert.
Bei der Begründung dieser Gesetzmäßigkeit kann man sich auf Mengen stützen, da die Addition mit Hilfe von Mengen erklärt wird.



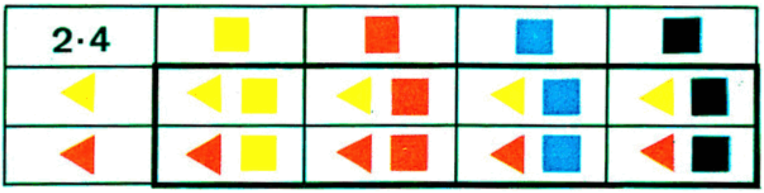
Welche Mengen auch vereinigt werden, stets erhält man schließlich dieselbe Menge.
Daher ist $(2 + 4) + 3 = 2 + (4 + 3)$.
Die gleichen Überlegungen kann man auch anstellen, wenn beliebige natürliche Zahlen a, b und c zu addieren sind.

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c ist also
$(a + b) + c = a + (b + c)$

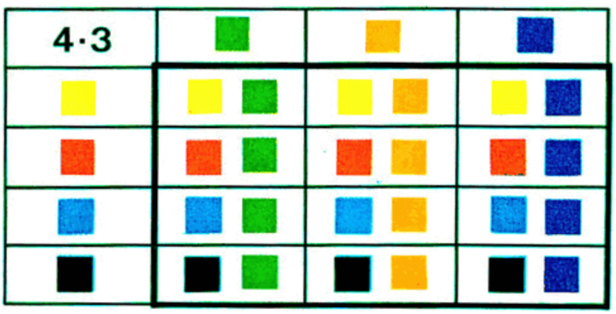
Dieses Gesetz heißt Assoziativgesetz der Addition natürlicher Zahlen.
Ebenso verhält es sich bei der Multiplikation. Soll man die drei Zahlen 2, 4 und 3 multiplizieren, so muß man auch diese Aufgabe in zwei Teilaufgaben zerlegen. Man kann zuerst


2
4
3
2+4
4+3
(2+4)+3 = 2+(4+3)
Traktoren
Anhänger

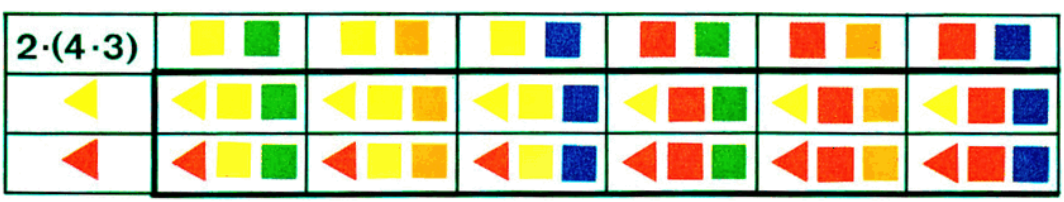
die ersten beiden multiplizieren ($2 \cdot 4 = 8$) und danach deren Produkt mit der dritten Zahl ($8 \cdot 3 = 24$). Man kann aber auch zunächst die letzten beiden Zahlen multiplizieren ($4 \cdot 3 = 12$) und danach die erste Zahl mit dem Produkt ($2 \cdot 12 = 24$). Es ist also $(2 \cdot 4) \cdot 3 = 2 \cdot (4 \cdot 3)$.
In jedem Fall erhält man 24 als Produkt der drei Zahlen. Bei der Begründung kann man sich ebenfalls auf Mengen stützen, da die Multiplikation mit Hilfe von „Paar-Mengen" erklärt werden kann.
Daher muß $(2 \cdot 4) \cdot 3 = 2 \cdot (4 \cdot 3)$ sein.



Man hängt an die Traktoren der Zweiermenge die Anhänger der Vierermenge.



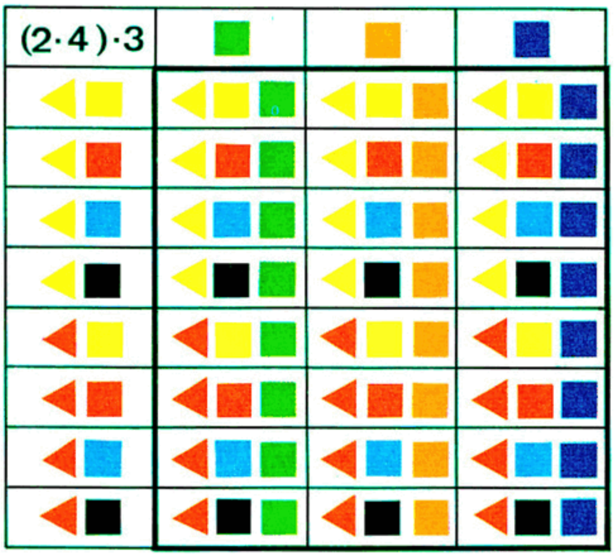
Man hängt an die Anhänger der Vierermenge die Anhänger der Dreiermenge.



Die gleichen Überlegungen lassen sich auch anstellen, wenn beliebige natürliche Zahlen a, b und c zu multiplizieren sind.

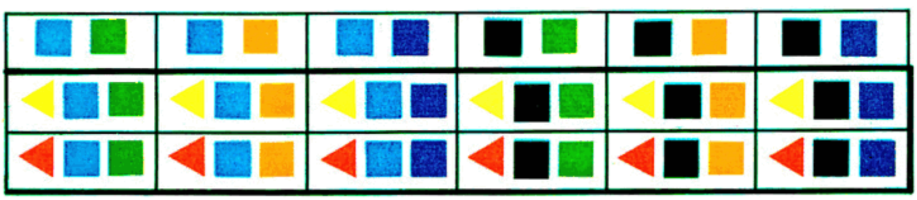
Für alle natürlichen Zahlen a, b und c ist also
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Dieses Gesetz heißt Assoziativgesetz der Multiplikation natürlicher Zahlen.



Man hängt an die Traktor-Anhänger-Paare die Anhänger der Dreiermenge.

Man hängt vor die Anhänger-Anhänger-Paare die Traktoren der Zweiermenge.



In beiden Fällen erhält man die gleichen Traktor-Anhänger-Anhänger-Gespanne.

Für die Rechenoperation Potenzieren gilt ein solches Gesetz nicht. Zum Beispiel ist

$$(2^3)^4 = (2\cdot 2\cdot 2)^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$
$$= 2^{12},$$

aber es ist $2^{(3^4)} = 2^{(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)} = 2^{81}$.

Es ist also *nicht* für alle natürlichen Zahlen a, b und c: $(a^b)^c \;\; = a^{(b^c)}$.

Ebenso verhält es sich beim Subtrahieren und Dividieren:

$(15 - 10) - 4 = 1 \qquad 15 - (10 - 4) = 9$

$(24 : 6) : 2 = 2 \qquad 24 : (6 : 2) = 8$

Nicht für jede Rechenoperation gilt also ein Assoziativgesetz.

Nützliche Anwendungen zu den Assoziativgesetzen:

$15 + 7 = 15 + (5 + 2) = (15 + 5) + 2 = 20 + 2 = 22$

$(5 + 12) + 8 = 5 + (12 + 8) = 5 + 20 = 25$

$3\cdot 50 = 3\cdot(5\cdot 10) = (3\cdot 5)\cdot 10 = 15\cdot 10 = 150$

$(15\cdot 25)\cdot 4 = 15\cdot(25\cdot 4) = 15\cdot 100 = 1500$

Beweisen Rolf, Lilo und Inge erledigen gemeinsam die Hausaufgaben. Beim Addieren der Zahlen 42 und 14 fällt Inge auf, daß beide Zahlen Vielfache von 7 sind und daß auch ihre Summe 56 ein Vielfaches von 7 ist. Sie überlegt: Ob die Summe von zwei Vielfachen von 7 immer ein Vielfaches von 7 sein muß? Sie fragt Rolf danach.

Rolf behauptet: „Immer wenn man zwei Vielfache von 7 addiert, so erhält man als Summe wieder ein Vielfaches von 7."

Lilo ergänzt: „Und genauso ist es bei Nicht-Vielfachen. Immer wenn man zwei Nicht-Vielfache von 7 addiert, so erhält man als Summe wieder ein Nicht-Vielfaches von 7."

Sind Rolfs und Lilos Behauptungen richtig? Beide begründen ihre Behauptung, indem sie Zahlenbeispiele dafür angeben.

Rolf:

a Vielfaches von 7	b Vielfaches von 7	a + b Summe der beiden Vielfachen von 7
35	21	35 + 21 = 56
21	28	21 + 28 = 49
14	7	14 + 7 = 21

„Die Summen 56, 49 und 21 sind Vielfache von 7. Also muß die Summe zweier Vielfacher von 7 stets ein Vielfaches von 7 sein."

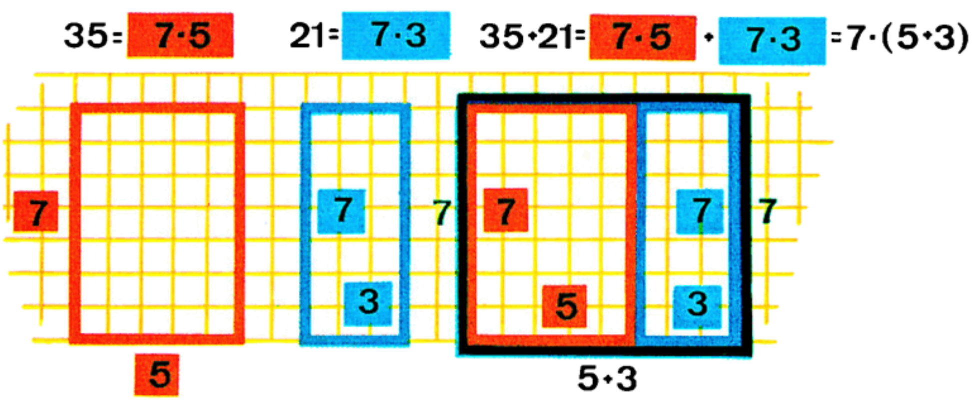
Lilo:

a Nicht-Vielfache von 7	b Nicht-Vielfache von 7	a + b Summe der beiden Nicht-Vielfachen von 7
23	30	23 + 30 = 53
36	26	36 + 26 = 62
15	10	15 + 10 = 25

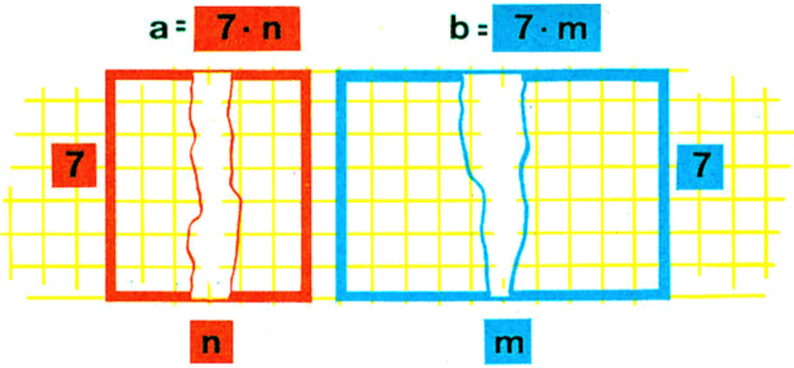
„Die Summen 53, 62 und 25 sind Nicht-Vielfache von 7. Also muß die Summe zweier Nicht-Vielfacher von 7 stets ein Nicht-Vielfaches von 7 sein."
Inge überzeugen diese Begründungen nicht ganz. Sie denkt nach und meint dann sogar: „Lilos Behauptung stimmt trotz der angegebenen Beispiele nicht. 23 und 26 sind Nicht-Vielfache von 7, ihre Summe 23 + 26 = 49 ist aber ein Vielfaches von 7."
Inge gibt also ein Beispiel an, auf das Lilos Behauptung nicht zutrifft. Also muß Lilos Behauptung falsch sein.

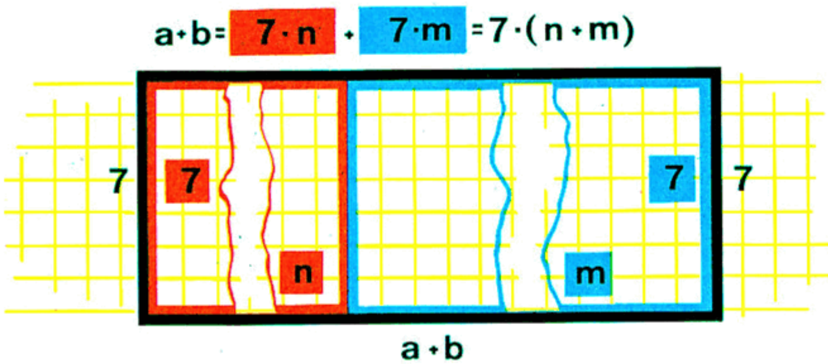
Zu Rolfs Behauptung ist Inge allerdings kein

solches Gegenbeispiel eingefallen. Deshalb muß sie aber noch nicht unbedingt richtig sein. Vielleicht hat Inge nicht genügend lange nach einem solchen Gegenbeispiel gesucht. Will man so begründen, daß Rolfs Behauptung doch stimmt, so müßte man *alle* Beispiele für das Addieren zweier Vielfacher von 7 angeben. Das kann man aber nicht, da es beliebig viele solcher Beispiele gibt.
An Rolfs erstem Beispiel wollen wir nun herausfinden, warum tatsächlich die Summe zweier Vielfacher von 7 auf jeden Fall ein Vielfaches von 7 sein muß.
35 ist ein Vielfaches von 7, denn $35 = 7 \cdot 5$.
21 ist ein Vielfaches von 7, denn $21 = 7 \cdot 3$.
Diese beiden Vielfachen lassen sich veranschaulichen durch zwei Rechtecke, auf Karopapier gezeichnet. In jedem dieser Rechtecke liegen 7 Kästchen an einer Seite.



Fügt man beide Rechtecke aneinander, erhält man wieder ein Rechteck, an dessen einer Seite 7 Kästchen liegen.
Die Summe von 35 und 21 muß also wieder ein Vielfaches von 7 sein. Wie man sieht, kommt es dabei gar nicht darauf an, welche Vielfache von 7 die beiden Zahlen sind. Jedes Vielfache von 7 läßt sich durch solche Rechtecke veranschaulichen: an einer Seite liegen 7 Kästchen, an der anderen kann eine beliebige Anzahl von Kästchen liegen.





Man erkennt: Welche Vielfachen von 7 die Zahlen a und b auch immer sind, stets ist ihre Summe wieder ein Vielfaches von 7. Rolf hatte also recht mit seiner Behauptung. Dennoch war seine Begründung nicht ausreichend. Nur wenn man alle Vielfachen von 7 erfaßt, hat man die Gewißheit, daß die Behauptung richtig ist. Alle Vielfachen von 7 lassen sich aber nur erfassen, wenn man mit beliebigen Zahlen a und b arbeitet, die für die beliebig vielen Vielfachen von 7 stehen. Eine solche Begründung nennt man Beweis.

Der Beweis zu Rolfs Behauptung kann auch ohne die Veranschaulichung durch Rechtecke aufgeschrieben werden:

> Ist a ein beliebiges Vielfaches von 7, so muß es eine natürliche Zahl geben, die, mit 7 multipliziert, a ergibt. Nennen wir diese Zahl n, so ist $a = 7 \cdot n$.
>
> Ist b ein beliebiges Vielfaches von 7, so muß es eine natürliche Zahl geben, die,

mit 7 multipliziert, b ergibt. Nennen wir diese Zahl m, so ist $b = 7 \cdot m$.

Dann ist die Summe $a + b = 7 \cdot n + 7 \cdot m$. Da nach dem Distributivgesetz stets $7 \cdot n + 7 \cdot m = 7 \cdot (n + m)$ ist, kann man für diese Summe a + b auch schreiben:

$a + b = 7 \cdot (n + m)$

Da man stets die Summe der Zahlen n und m bilden kann, gibt es also eine Zahl, nämlich $n + m$, die beim Multiplizieren mit 7 die Zahl $a + b$ ergibt. Daher ist die Summe $a + b$ ein Vielfaches von 7.

Will man also eine Behauptung beweisen, so muß man zeigen, daß sie auf *alle* angegebenen Fälle zutrifft. Dann ist die Behauptung richtig, oder, wie man auch sagt, die Aussage ist wahr. Kann man ein Gegenbeispiel angeben, so ist sie falsch.

Chinesische Aufgabe In einem alten Mathematikbuch aus dem China von vor 2000 Jahren findet man folgende Aufgabe: „In einem Stall sind 25 Tiere, und zwar Hasen und Hühner, eingesperrt. Zusammen haben sie 66 Füße. Wieviel Hasen und wieviel Hühner sind in dem Stall?" Natürlich würde niemand die Zahl der eingesperrten Tiere und die Zahl ihrer „Füße" zählen, um herauszubekommen, wieviel Hasen und wieviel Hühner sich in dem Stall befinden. Dennoch hat diese humorvoll verpackte Aufgabe einen interessanten mathematischen „Kern".

Wie läßt sich diese Aufgabe lösen? Wir wissen, daß sich 25 Tiere in dem Stall aufhalten; wir wissen aber nicht, wieviel davon Hasen (also „vierfüßige" Tiere) und wieviel davon Hühner (also „zweifüßige" Tiere) sind. Zusammen sollen die 25 Tiere jedenfalls 66 „Füße" haben. Wir könnten nun probieren. Vielleicht sind es 2 Hasen. Dann müssen es 23 Hühner sein. Das ergäbe $2 \cdot 4$, also 8 Hasen-„Füße" und $23 \cdot 2$, also 46 Hühner-„Füße", zusammen

$66 - 2 \cdot 25 = 16$

$16 = 2 \cdot \boxed{8}$

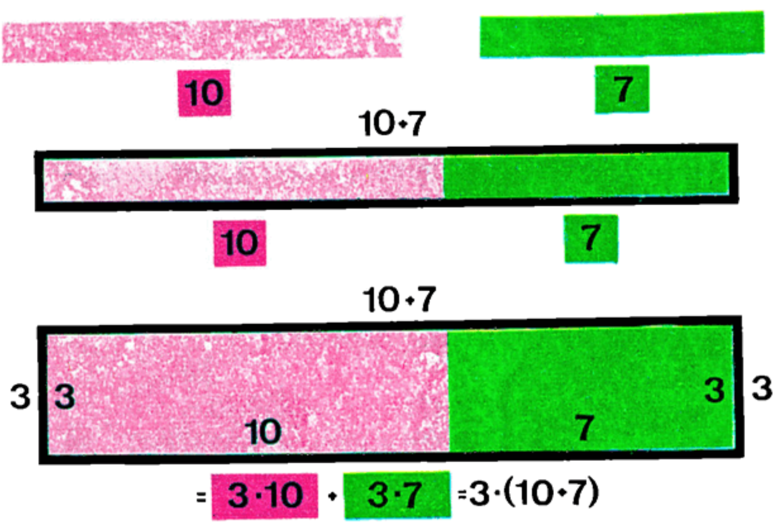
$25 - \boxed{8} = 17$

also 54 „Füße", das heißt: zuwenig. Wir könnten nun weiter probieren, indem wir es mit einer etwas größeren Anzahl von Hasen versuchten. Aber wer weiß, ob wir dabei die richtigen Zahlen erwischen würden?
Die Chinesen damals wußten aber schon, wie man diese Aufgabe, auch ohne zu probieren, lösen kann. Sie zeichneten sich 25 Punkte auf, die die eingesperrten Tiere darstellten. Da jedes Tier mindestens ein „Zweifüßler" ist, brachten sie an jedem Punkt zunächst einmal 2 Striche für die „Füße" an. Von den insgesamt zu „verteilenden" 66 „Füßen" blieben also noch 16 übrig, die danach zu je 2 Stück aufgeteilt wurden. Man sieht: 8 Hasen und 17 Hühner befinden sich in dem Stall.
Der mathematische „Kern" dieser Aufgabe ist also der: Es sind zwei natürliche Zahlen gesucht, deren Summe 25 ist. Ferner ist das Vierfache der einen Zahl und das Zweifache der anderen Zahl zusammen 66. Aber wer wäre bei dieser Formulierung auf das einfache Verfahren der Chinesen gekommen? Es läßt sich immer anwenden, wenn zwei natürliche Zahlen gesucht werden, von denen ihre Summe und eine Summe von Vielfachen dieser Zahlen bekannt ist. Wer Lust hat, kann es einmal bei folgender Aufgabe ausprobieren: „In einem Güterzug befinden sich 50 Wagen mit entweder 4 oder 6 Achsen. Die Gesamtzahl der Achsen dieser Wagen ist 256. Wieviel vierachsige und wieviel sechsachsige Wagen hat der Zug?"

Dekadisches Stellenwertsystem
(siehe **Ziffer**)

Distributivgesetz Udo soll das Produkt $3 \cdot 17$ im Kopf berechnen. Anstelle dieses Produkts berechnet er die beiden einfache-

ren Produkte $3 \cdot 10 = 30$ und $3 \cdot 7 = 21$ und addiert diese: $30 + 21 = 51$. Diese Summe 51 soll genauso groß sein wie das Produkt $3 \cdot 17$, behauptet er. Er hat recht: $17 + 17 + 17 = 51$. Kommt man tatsächlich auf diese Weise immer zum richtigen Ergebnis? Wir wollen die Aufgabe einmal näher betrachten.
Die Zahl 17 läßt sich zerlegen in $10 + 7$. Das gegebene Produkt kann daher auch so aufgeschrieben werden: $3 \cdot (10 + 7)$. Die Summe $10 + 7$ ist also mit 3 zu multiplizieren. Um dieses Produkt zu veranschaulichen, zeichnen wir ein Rechteck auf Karopapier. An einer Seite liegen 3, an der anderen $10 + 7$ Kästchen. Dieses schwarze Rechteck setzt sich zusammen aus dem roten Rechteck und dem grünen Rechteck. Das rote Rechteck veranschaulicht das Produkt $3 \cdot 10$, das grüne das Produkt $3 \cdot 7$, beide zusammen die Summe $3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$. Also ist $3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$. Man kann daher das Produkt $3 \cdot (10 + 7)$ durch die Summe $3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$ ersetzen. Udos Rechenweg ist also richtig.



Die gleichen Überlegungen lassen sich auch anstellen, wenn eine beliebige natürliche Zahl mit einer Summe beliebiger natürlicher Zahlen zu multiplizieren ist.

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c ist daher
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Man kann also eine Zahl mit einer Summe von Zahlen multiplizieren, indem man diese Zahl mit jedem Summanden multipliziert und danach die erhaltenen Produkte addiert. Dieses Gesetz heißt Distributivgesetz. Es bezieht sich auf die Multiplikation und die Addition natürlicher Zahlen.
Manchmal ist es vorteilhaft, dieses Gesetz auch in der umgekehrten Richtung zu nutzen. Soll die Summe $37 \cdot 7 + 37 \cdot 3$ berechnet werden, so kann man zunächst die beiden Produkte berechnen und diese anschließend addieren. Da die beiden Produkte aber den Faktor 37 gemeinsam haben, kann man hier auf Grund des Distributivgesetzes auch so rechnen: $37 \cdot 7 + 37 \cdot 3 = 37 \cdot (7 + 3)$. Das ist viel zweckmäßiger, denn es ist $7 + 3 = 10$ und $37 \cdot 10 = 370$. In diesem Fall ersetzt man also die Summe $37 \cdot 7 + 37 \cdot 3$ durch das nützlichere Produkt $37 \cdot (7 + 3)$.
Es hängt also von der Aufgabenstellung und von den Zahlen ab, wann man das Distributivgesetz in der einen, wann in der anderen Richtung nutzt.

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c ist
$\mathbf{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$

$\mathbf{6 \cdot 27 + 6 \cdot 13 = 6 \cdot (27 + 13)} = 6 \cdot 40 = 240$
$\mathbf{8 \cdot 16 + 8 \cdot 84 = 8 \cdot (16 + 84)} = 8 \cdot 100 = 800$

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c ist
$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

$6 \cdot 43 = \mathbf{6 \cdot (40 + 3) = 6 \cdot 40 + 6 \cdot 3} = 240 + 18 = 258$
$8 \cdot 58 = \mathbf{8 \cdot (50 + 8) = 8 \cdot 50 + 8 \cdot 8} = 400 + 64 = 464$

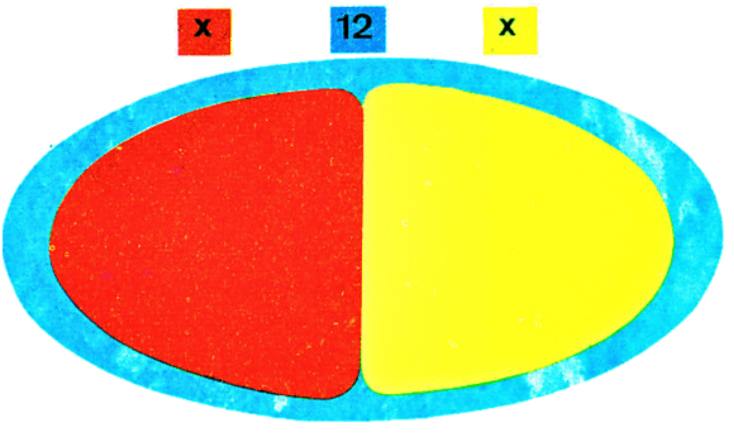
Dividieren Das Dividieren natürlicher Zahlen oder, wie man auch sagt, die Division ist eine Rechenoperation. Dabei wird zwei natürlichen Zahlen nach einer bestimmten Vorschrift eine dritte natürliche Zahl zugeordnet, die man als Quotienten der beiden Zahlen bezeichnet.

Beispiele: [12; 2] → 6 = 12 : 2
[7; 1] → 7 = 7 : 1
[9; 9] → 1 = 9 : 9
[0; 12] → 0 = 0 : 12

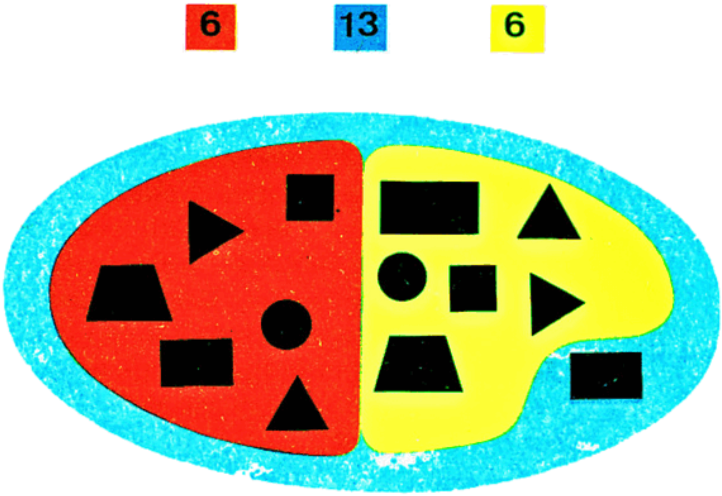
Die Vorschrift, nach der diese Zuordnung zu erfolgen hat, kann man mit Hilfe von Mengen angeben. Die natürliche Zahl 12 läßt sich zum Beispiel durch eine Zwölfermenge von Pferden veranschaulichen. Diese Menge

soll nun in zwei Mengen aufgeteilt werden, die gleich viel Elemente enthalten. Wie auch immer diese Zerlegung vorgenommen wird, stets erhält man zwei Sechsermengen.

Die Teilmengen gehören also stets zur natürlichen Zahl 6. Daher sagt man: Die natürlichen Zahlen 12 und 2 haben als Quotienten die natürliche Zahl 6. Man schreibt $12:2=6$.
Es ist nicht weiter verwunderlich, daß sich beim Zerlegen der Zwölfermenge in zwei Mengen mit gleich vielen Elementen stets Sechsermengen ergeben. Wenn man nämlich umgekehrt zwei Mengen, die gleich viele, aber keine gemeinsamen Elemente enthalten, zu einer Zwölfermenge vereinigen soll, so müssen es Sechsermengen sein. Wenn nämlich x die Anzahl der Elemente jeder der beiden Mengen ist, so muß $x+x$, also $2 \cdot x$ die Anzahl der Elemente der Vereinigungsmenge sein, also 12. Es ist also $2 \cdot x = 12$. Welche Zahl x, mit 2 multipliziert, ergibt 12? Nur $x=6$.



$12:2=x$ bedeutet also: Gesucht ist eine natürliche Zahl x, für die $2 \cdot x = 12$ ist. Man sagt daher: Das Dividieren ist die Umkehrung des Multiplizierens.
Hat man $24:8$ zu berechnen, so bedeutet das: Es wird eine Zahl x gesucht, die, mit 8 multipliziert, 24 ergibt. Also: $8 \cdot x = 24$. Es gibt nur die Zahl 3 mit dieser Eigenschaft: $8 \cdot 3 = 24$. Daher ist $24:8=3$.
Aber nicht immer gibt es eine natürliche Zahl, die der Quotient zweier natürlicher



Zahlen ist. Bei der Aufgabe $13:2$ wäre eine natürliche Zahl zu finden, die, mit 2 multipliziert, 13 ergibt: $2 \cdot x = 13$. Eine solche Zahl gibt es nicht, denn $2 \cdot 6 = 12$ und $2 \cdot 7 = 14$. Die Zahl 6 ist zu klein, die Zahl 7 ist zu groß. Zwischen beiden gibt es aber keine natürliche Zahl. Das Dividieren ist also im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar.
Allerdings: Wenn es zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen a und b einen Quotienten c gibt, dann gibt es auch nur einen solchen Quotienten: $a:b = c$
Beim Dividieren kann man die beiden gegebenen Zahlen a und b allenfalls dann vertauschen, wenn beide Zahlen gleich sind.
Beispiel: $12:2 = 6$, aber $\cancel{2:12}$
Es kommt also auf die Reihenfolge der Zahlen a und b an. Daher erhalten diese Zahlen beim Dividieren auch verschiedene Namen.

a	:	b	=	c
Dividend		Divisor		Quotient

Übrigens wird nicht nur c, sondern auch $a:b$ als Quotient bezeichnet.

Durch die Zahl 0 kann nicht dividiert werden. Die Aufgabe „8 : 0" zum Beispiel würde ja bedeuten: Gesucht ist eine Zahl x, die, mit 0 multipliziert, 8 ergibt! Also $0 \cdot x = 8$. Da jede Zahl, mit 0 multipliziert, 0 ergibt und nicht 8, so gibt es keine solche Zahl x. Also: $\cancel{8:0}$.
Anders ist es bei „0 : 0". Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit $0 \cdot x = 0$. Hier kann x jede Zahl sein, denn zum Beispiel ist $0 \cdot 17 = 0$, $0 \cdot 5 = 0$, $0 \cdot 17654 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, ... Da man aber auch vom Dividieren erwartet, daß stets nur eine Zahl als Quotient in Frage kommt, wird auch das Dividieren von Null durch Null ausgeschlossen. Also: $\cancel{0:0}$.
Wenn durch zwei oder mehrere Zahlen zu dividieren ist, so ist der Reihe nach zu dividieren, sofern die Division möglich ist. $36:6:2 = (36:6):2 = 6:2 = 3$.
$36:6:2$ ist aber nicht gleich $36:(6:2)$, denn $36:(6:2) = 36:3 = 12$. Für das Dividieren gibt es also kein Assoziativgesetz.

$0:17=0$	$\cancel{25:0}$	$0:1=0$
$0:22=0$	$\cancel{33:0}$	$5217:1=5217$
$\cancel{0:0}$	$\cancel{0:0}$	$457:1=457$

Für alle natürlichen Zahlen a ist

$0:a=0$ $(a \neq 0)$	$\cancel{a:0}$	$a:1=a$

Einmaleins Wer hat nicht schon darüber gestöhnt, wenn in der Schule wieder einmal das kleine Einmaleins geübt wurde. Das Einmaleins für die Zahlen 2 und 5, also die Zweierfolge und die Fünferfolge, sind ja noch leicht. Aber bis man sich die Einmaleinsfolge für 7 gemerkt hat, braucht man schon einige Zeit. Dabei kommt es gar nicht so sehr darauf an, daß man sie der Reihe nach aufsagen kann, etwa: $0 \cdot 7 = 0$, $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 14$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 7 = 28$, und so weiter bis $9 \cdot 7 = 63$ und vielleicht auch $10 \cdot 7 = 70$. Wenn der Lehrer nach $4 \cdot 7$ fragt, kann man nicht erst die Einmaleinsfolge der Zahl 7 von vorn durchgehen, bis man schließlich bei $4 \cdot 7$ anlangt. Vielmehr muß man sofort wissen, daß $4 \cdot 7 = 28$ ist.

Warum aber ist es denn so wichtig, die Einmaleinsfolgen für die Zahlen 0 bis 9 auswendig zu wissen?

Wer sicher ist im Einmaleins der Zahlen von 0 bis 9, der kann auch sämtliche Produkte mit größeren Zahlen berechnen. Man muß dafür allerdings noch außerdem wissen, wie man eine Zahl mit 10, 100, 1000, ... multipliziert.

Man erhält die Ziffer für das Zehnfache, Hundertfache, Tausendfache, ... einer Zahl, indem man an die Ziffer dieser Zahl 0, 00, 000, ... anhängt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 7 &= 70 \\ 100 \cdot 7 &= 700 \\ 1000 \cdot 7 &= 7000 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Soll man nun $600 \cdot 7$ berechnen, so zerlegt man 600 in $100 \cdot 6$ und rechnet

$$\begin{aligned} 600 \cdot 7 &= (100 \cdot 6) \cdot 7 = 100 \cdot (6 \cdot 7) \\ &= 100 \cdot 42 \\ &= 4200. \end{aligned}$$

Man braucht also nur $6 \cdot 7 = 42$ auswendig zu wissen. Dann hängt man an 42 noch 00 an, und schon hat man das Produkt

$$600 \cdot 7 = 4200.$$

Ebenso ist es bei $4000 \cdot 9$. Man rechnet $4 \cdot 9 = 36$. An 36 hängt man 000 an und erhält das Produkt

$$4000 \cdot 9 = 36\,000.$$

Soll man nun aber $584 \cdot 3$ berechnen, so zerlegt man 584 in $500 + 80 + 4$ und rechnet so:

$$\begin{aligned} 584 \cdot 3 &= (500 + 80 + 4) \cdot 3 \\ &= 500 \cdot 3 + 80 \cdot 3 + 4 \cdot 3. \end{aligned}$$

Jetzt wird nur noch überlegt:

$5 \cdot 3 = 15$	00 anhängen, also	1500
$8 \cdot 3 = 24$	anhängen, also	240
$4 \cdot 3 = 12$		12

Die erhaltenen Zahlen werden addiert: 1752
Also ist $584 \cdot 3 = 1752$.
Man multipliziert also eigentlich immer nur einstellige Zahlen miteinander, also die Zahlen bis 9. Geradeso macht man es auch beim schriftlichen Multiplizieren.

$584 \cdot 3$

Man rechnet:	Man schreibt:				
$3 \cdot 4 = 12$				2	und addiert 1 zum Produkt, das man beim Rechnen an der nächsten Stelle erhält.
$3 \cdot 8 = 24$ $24 + 1 = 25$			5		und addiert 2 zum Produkt, das man beim Rechnen an der nächsten Stelle erhält.
$3 \cdot 5 = 15$ $15 + 2 = 17$	1	7			
$584 \cdot 3 =$	1	7	5	2	

Es ist also $584 \cdot 3 = 1752$.
Man sieht: Wer mehrstellige Zahlen miteinander multipliziert, muß sicher sein beim Multiplizieren einstelliger Zahlen, also im kleinen Einmaleins.

Folge von Zahlen Folgen von Zahlen sind zum Beispiel:

(1)	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30
(2)	3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43
(3)	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78
(4)	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Die Folge (1) erkennt man leicht als Einmaleins-Folge der Drei, die Folge (4) als Folge der Primzahlen bis 29.

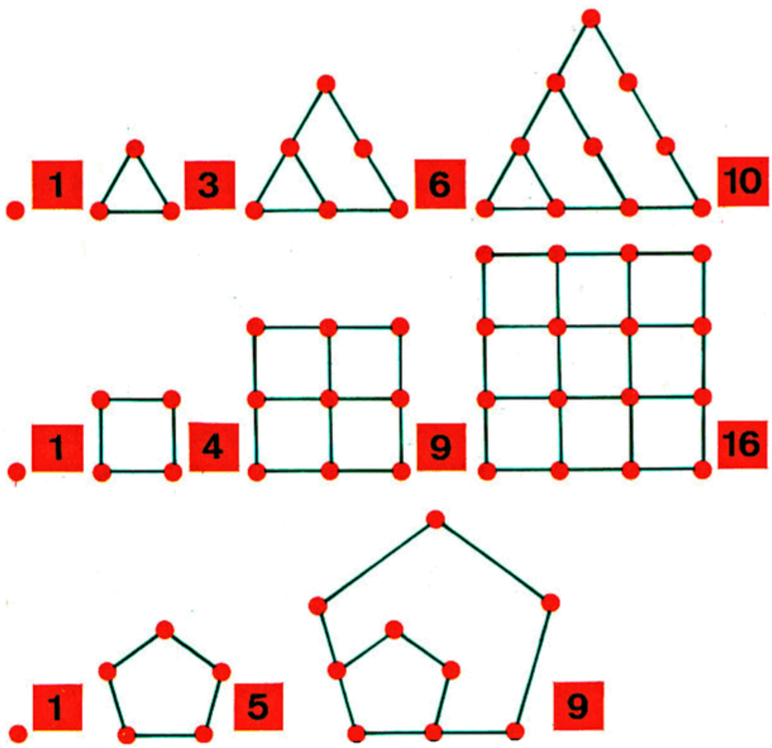
In jedem dieser Beispiele ist eine Menge von Zahlen gegeben, wobei festgelegt ist, welche Zahl an erster, welche an zweiter, welche an dritter Stelle und so weiter steht. Zum Beispiel steht bei der Folge (1) an erster Stelle 3, an zweiter Stelle 6, ..., an sechster Stelle 18, ...; bei der Folge (3) steht an erster Stelle 1, ..., an zehnter Stelle 55, ... Müßte man sehr schnell die Zahl finden, die an zehnter Stelle in der Folge (2) steht, wäre es günstiger, die Folge in dieser Form aufzuschreiben:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43

Jeder natürlichen Zahl von 1 bis 11 wird also hier eine ganz bestimmte Zahl zugeordnet. Das gleiche läßt sich auch für die übrigen Folgen vornehmen. Im Beispiel (3) ist dann jeder natürlichen Zahl von 1 bis 12 und in den Beispielen (1) und (4) von 1 bis 10 jeweils eine ganz bestimmte Zahl zugeordnet. Jede zugeordnete Zahl nennt man ein Glied der

Folge. Zum Beispiel ist in der Folge (2) das erste Glied 3, das zweite Glied 7, ..., das elfte Glied 43.
Es gibt aber auch Folgen ohne letztes Glied, Folgen, die also beliebig viele Glieder haben. Solche Folgen heißen unendliche Folgen. Bei ihnen wird jeder natürlichen Zahl eine ganz bestimmte Zahl zugeordnet. Hier kann man die Folge nicht mehr gliedweise angeben. Statt dessen muß man eine allgemeine Vorschrift dafür angeben, wie zu jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied bestimmt werden kann. Setzt man die Einmaleins-Folge für 3 aus dem Beispiel (1) über das zehnte Glied hinaus unbegrenzt fort, so könnte diese Vorschrift heißen: Jeder natürlichen Zahl von 1 an wird ihr Dreifaches zugeordnet. Also wird zum Beispiel der Zahl 25 die Zahl 75 zugeordnet, denn $3 \cdot 25 = 75$. Das 25. Glied dieser Folge ist 75. Setzt man die Folge (2) über das elfte Glied hinaus unbegrenzt fort, so könnte die Vorschrift heißen: Jeder natürlichen Zahl von 1 an wird ihr Vierfaches, vermindert um 1, zugeordnet. Also wird zum Beispiel der Zahl 25 die Zahl 99 zugeordnet, denn $4 \cdot 25 - 1 = 99$. Das 25. Glied dieser Folge ist daher 99.
Man könnte diese Folgen aber auch noch anders angeben, indem man das erste Glied der Folge angibt, und ferner, wie man jedes weitere Glied der Folge aus dem vorhergehenden Glied erhalten kann. Bei der Folge (1) ist das erste Glied 3. Das zweite Glied ergibt sich, wenn man 3 zum ersten Glied addiert. Das dritte Glied ergibt sich, wenn man 3 zum zweiten Glied addiert, und so weiter. Man erhält also ein beliebiges Folgenglied, außer dem ersten, indem man 3 zur vorhergehenden Zahl addiert. Die Folge (2) könnte man entsprechend angeben: Das erste Glied ist 3. Man erhält jedes weitere Folgenglied, indem man zur vorhergehenden Zahl 4 addiert.

Etwas schwerer ist es schon bei der Folge (3), denn hier verändert sich die Zahl, die jeweils zur vorhergehenden Zahl addiert wird. Das 1. Glied ist 1. Das 2. Glied erhält man, wenn man zum ersten die Zahl 2 addiert. Das 3. Glied ergibt sich, wenn man zum zweiten die Zahl 3 addiert, und so weiter. Das 25. Glied ergibt sich, wenn man zum 24. Glied die Zahl 25 addiert.
Noch schwieriger ist es bei der unendlichen Folge der Primzahlen. Es ist den Mathematikern bis heute noch nicht gelungen, für sie eine solche Bildungsvorschrift zu finden.
Die Zahlenfolge (3) läßt sich auch geometrisch deuten. Man könnte sie eine Folge von „Dreieckszahlen" nennen. Ebenso ließen sich Folgen von „Viereckszahlen", „Fünfeckszahlen", ... bilden.
Auch für diese Folgen lassen sich Bildungsgesetze angeben. Wer etwas nachdenkt, wird sie bestimmt finden.



Geburtstagsraten Ralf möchte gern wissen, an welchem Tag und in welchem Monat Jana Geburtstag hat. Jana will es nicht sagen. Ralf meint, er könne das Datum ihres Geburtstages auch „raten", wenn nur Jana mit der Tageszahl und der Monatszahl ihres Geburtstages ein wenig rechnen und ihm das Ergebnis ihres Rechnens sagen würde. Jana willigt ein. Zunächst soll sie die Tageszahl ihres Geburtstages mit 7 multiplizieren. Danach soll sie die erhaltene Zahl verdoppeln. Schließlich soll sie zu der so erhaltenen Zahl die Monatszahl ihres Geburtstages addieren. Jana rechnet. Sie erhält die Zahl 175. Ralf überlegt ein wenig. Schließlich sagt er: „Du hast am 12. 7., also am 12. Juli, Geburtstag." Jana staunt. Wie hat Ralf aus der 175 den 12. 7. „abgelesen"?

Ralf erklärt es ihr: „Die Sache ist ganz einfach. Du multiplizierst die Tageszahl mit 7 und das Produkt anschließend mit 2. Die so erhaltene Zahl ist also das 14fache der Tageszahl. Danach addierst du die Monatszahl.

Da es nur 12 Monate gibt, kommen dafür nur die Zahlen von 1 bis 12 in Frage. Die Zahl 175, die du mir nennst, muß also das 14fache der Tageszahl sein, vermehrt um eine Zahl, die auf alle Fälle kleiner als 14 ist. Das zu 175 nächstkleinere 14fache einer Zahl ist 168, denn $14 \cdot 12 = 168$. Die Tageszahl muß also 12 sein. Da man zu 168 noch 7 addieren muß, um 175 zu erhalten, muß 7 die Monatszahl sein: $14 \cdot 12 + 7 = 175$. Also hast du am 12. 7. Geburtstag. Das zu 175 nächstkleinere 14fache findet man übrigens schnell, wenn man versucht, 175 durch 14 zu dividieren.

$$\begin{array}{l} 175 : 14 = 12 \quad \text{n. l.} \\ \underline{14} \\ \;\;35 \\ \;\;\underline{28} \\ \;\;\;\;7 \end{array}$$

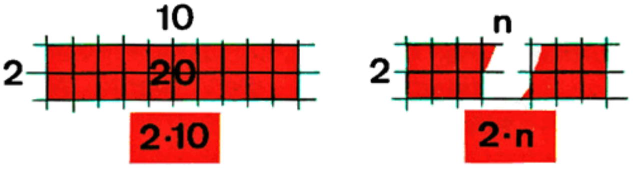
Die Divisionsaufgabe ist zwar nicht lösbar, dennoch findet man die gesuchten Zahlen. Aber nun kannst du meinen Geburtstag ‚raten'! Wenn ich mit der Tageszahl und der Monatszahl meines Geburtstages genauso rechne wie du vorhin, erhalte ich 152." Jana überlegt: „Dann hast du am 10. 12. Geburtstag." Ralf freut sich, daß Jana nun auch ein Geburtstagsdatum „raten" kann. Wer kann es ebenso?

Gerade Zahl

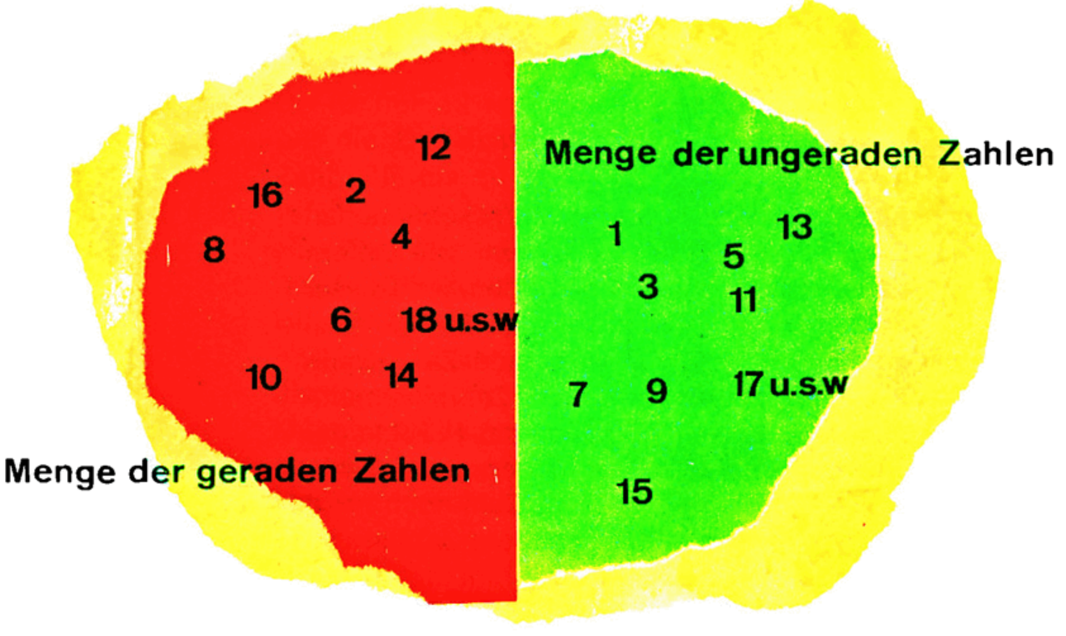
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
3750	3751	3752	3753	3754	3755	3756	3757	3758	3759
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Alle Zahlen, die in der so aufgeschriebenen Folge der natürlichen Zahlen rote Ziffern haben, nennt man gerade Zahlen. Jede dieser Zahlen ist ein Vielfaches der Zahl 2. Man erhält daher stets eine gerade Zahl, wenn man eine beliebige natürliche Zahl mit 2 multipliziert. Also weiß man, daß das Produkt der Zahlen 2 und 789 437 eine gerade Zahl sein muß, auch wenn man diese Zahl noch nicht ausgerechnet hat. Eine gegebene Zahl ist also eine gerade Zahl, wenn man eine natürliche Zahl finden kann, von der sie das Zweifache ist. 3576 ist eine gerade Zahl, denn 3576 ist das Zweifache von 1788. 3577 ist keine gerade Zahl, denn es gibt keine natürliche Zahl, von der sie das Zweifache ist: $2 \cdot 1788 = 3576$, $2 \cdot 1789 = 3578$.

Jede gerade Zahl läßt sich durch ein Rechteck auf Karopapier veranschaulichen, an dessen einer Seite 2 Kästchen liegen. An der anderen Seite kann eine beliebige Anzahl dieser Kästchen liegen.



Zahlen, die nicht Vielfache der Zahl 2 sind, nennt man ungerade Zahlen. Die Zahlen, die in der Folge oben grüne Ziffern haben, sind also ungerade Zahlen.
Die Menge der natürlichen Zahlen kann man also aufspalten in die Menge der geraden Zahlen und die Menge der ungeraden Zahlen.

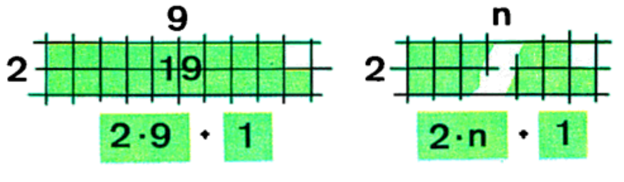


Jede Zahl, die nicht eine gerade Zahl ist, muß eine ungerade Zahl sein. Jede Zahl, die nicht eine ungerade Zahl ist, muß eine gerade Zahl sein.

In der Folge der natürlichen Zahlen folgt auf eine gerade Zahl stets eine ungerade Zahl und auf eine ungerade Zahl stets eine gerade Zahl. Addiert man also zu jeder geraden Zahl die Zahl 1, so erhält man jede ungerade Zahl.

gerade Zahl				ungerade Zahl
4	+	1	=	5
26	+	1	=	27
3752	+	1	=	3753

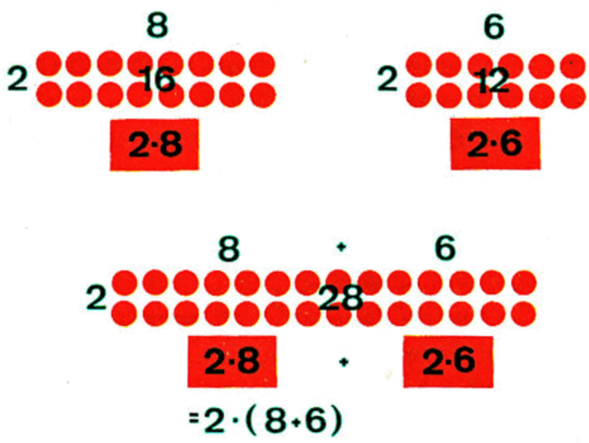
Man kann dafür auch sagen: Addiert man zu jedem Vielfachen von 2 die Zahl 1, so ergeben sich alle ungeraden Zahlen.
Man weiß also, daß die Summe $2 \cdot 789\,437 + 1$ eine ungerade Zahl sein muß, auch ohne daß man sie ausgerechnet hat.
Eine vorgegebene Zahl ist also eine ungerade Zahl, wenn ihr Vorgänger eine gerade Zahl ist.
6347 ist eine ungerade Zahl, denn ihr Vorgänger 6346 ist eine gerade Zahl.
Jede ungerade Zahl läßt sich ebenfalls durch eine Figur veranschaulichen. Man zeichnet dazu auf Karopapier ein Rechteck, an dessen



einer Seite 2 Kästchen liegen. An der anderen Seite kann eine beliebige Anzahl von Kästchen liegen. An dieses Rechteck fügt man dann noch 1 Kästchen an.

Es gibt eine sehr nützliche Regel, nach der man ohne Rechnen entscheiden kann, ob eine gegebene Zahl eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Aus der Tabelle am Anfang erkennt man: Alle Zahlen, deren Ziffern auf 0, 2, 4, 6 oder 8 enden, sind gerade Zahlen. Alle Zahlen, deren Ziffern auf 1, 3, 5, 7 oder 9 enden, sind ungerade Zahlen. 68 423 ist eine ungerade Zahl, da ihre Ziffer auf 3 endet. 79 516 ist eine gerade Zahl, da ihre Ziffer auf 6 endet.
Immer wenn man zwei gerade Zahlen addiert, so erhält man als Summe wieder eine gerade Zahl.

16	+	12	=	28
gerade Z.		gerade Z.		gerade Z.



Immer wenn man eine gerade Zahl und eine ungerade Zahl addiert, so erhält man als Summe eine ungerade Zahl.

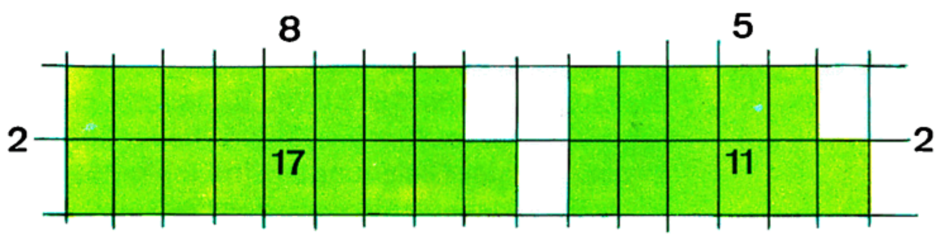
16	+	11	=	27
gerade Z.		ungerade Z.		ungerade Z.

$\boxed{2\cdot 8} + \boxed{2\cdot 5} + \boxed{1}$

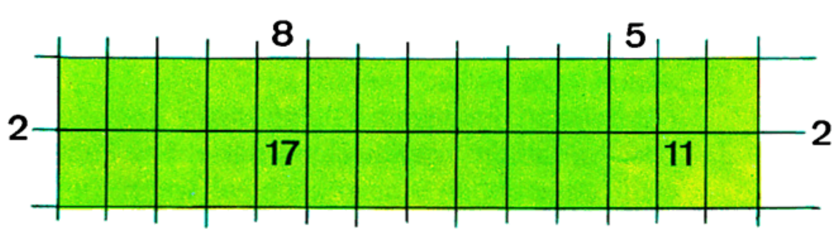
$2\cdot(8+5)+1$

Immer wenn man zwei ungerade Zahlen addiert, so erhält man als Summe eine gerade Zahl.

17	+	11	=	28
ungerade Z.		ungerade Z.		gerade Z.



$\boxed{2\cdot 8} + \boxed{1}$ $\boxed{2\cdot 5} + \boxed{1}$



$\boxed{2\cdot 8} + \boxed{1}$ $\boxed{2\cdot 5} + \boxed{1}$

$2\cdot 8+2\cdot 5+2\cdot 1$

$2\cdot(8+5+1)=2\cdot 14$

Gleichung

$2 = 1 + 1$	$5 + 3 = 2 \cdot 4$	$16 - 5 = 18 : 3$
$z + 7 = 9$	$u + 6 = 2$	$7 \cdot a = 42$
$a + 5 = 5 + a$	$x + 1 = x + 3$	$2 \cdot x + 7 = x + 12$

Das sind Gleichungen. So unterschiedlich sie auch sind, eines haben sie dennoch gemeinsam: Sie enthalten alle ein Gleichheitszeichen. In den ersten drei Gleichungen stehen links und rechts vom Gleichheitszeichen außer den Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ nur Ziffern. Solche Gleichungen sind Aussagen über die Gleichheit von Zahlen. Man nennt sie daher auch Gleichheitsaussagen. Solche Gleichheitsaussagen sind entweder wahr oder falsch. Die Gleichungen $2 = 1 + 1$ und $5 + 3 = 2 \cdot 4$ sind wahre Aussagen. Die Gleichung $16 - 5 = 18 : 3$ ist eine falsche Aussage, denn es ist $16 - 5 = 11$ und $18 : 3 = 6$.
In den übrigen Gleichungen sind außerdem noch Buchstaben enthalten, zum Beispiel u, z oder x. Diese Buchstaben stehen anstelle von Zahlen, die wir beliebig aus dem Bereich der natürlichen Zahlen wählen können. Man nennt diese Buchstaben, die also durch natürliche Zahlen ersetzt werden können, auch Variable.
Setzt man in diesen Gleichungen anstelle der Variablen irgendwelche natürliche Zahlen, so ergeben sich manchmal wahre (w) und manchmal falsche (f) Aussagen.

z	$z + 7 = 9$		u	$u + 6 = 2$		a	$7 \cdot a = 42$	
0	$0 + 7 = 9$	f	0	$0 + 6 = 2$	f	3	$7 \cdot 3 = 42$	f
5	$5 + 7 = 9$	f	3	$3 + 6 = 2$	f	6	$7 \cdot 6 = 42$	**w**
2	$2 + 7 = 9$	**w**	1	$1 + 6 = 2$	f	8	$7 \cdot 8 = 42$	f

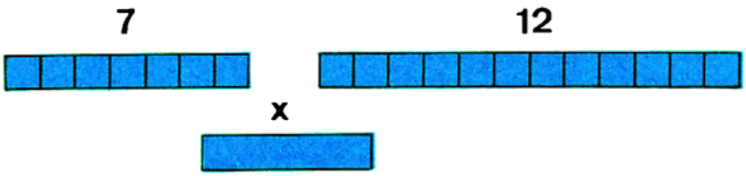
a	$a+5=5+a$		x	$x+1=x+3$		x	$2\cdot x+7=x+12$	
7	$7+5=5+7$	**w**	6	$6+1=6+3$	f	0	$2\cdot 0+7=0+12$	f
1	$1+5=5+1$	**w**	2	$2+1=2+3$	f	2	$2\cdot 2+7=2+12$	f
0	$0+5=5+0$	**w**	3	$3+1=3+3$	f	5	$2\cdot 5+7=5+12$	**w**

Ersetzt man also z in der Gleichung $z+7=9$ durch 2, so erhält man eine wahre Aussage. Dafür sagt man auch: Die Zahl 2 erfüllt die Gleichung $z+7=9$, oder auch: Die Zahl 2 ist eine Lösung der Gleichung. Ersetzt man dagegen z durch 5, so erhält man eine falsche Aussage. Die Zahl 5 erfüllt nicht die Gleichung, sie ist nicht Lösung dieser Gleichung.
Ist 2 die einzige Zahl, die die Gleichung $z+7=9$ erfüllt? Wenn es eine weitere Zahl geben sollte, so müßte ihre Summe mit 7 gleich 9 sein. Sie müßte sich also ergeben, wenn man 7 von 9 subtrahiert: $9-7=2$. Es gibt also nur eine einzige solche Zahl. Nur die Zahl 2 erfüllt diese Gleichung.
Entsprechend kann man alle Zahlen finden, die die Gleichung $7\cdot a=42$ erfüllen. Es müssen hier alle die Zahlen gefunden werden, deren Produkt mit 7 gleich 42 ist. Also müssen sich diese Zahlen ergeben, wenn man 42 durch 7 dividiert: $42:7=6$. Nur die Zahl 6 erfüllt die Gleichung $7\cdot a=42$. Man findet in diesen Beispielen die Lösungen, indem man die Umkehroperationen zu den in der Gleichung gegebenen Operationen benutzt.
Für $u+6=2$ haben wir bisher noch keine Zahlen gefunden, die diese Gleichungen erfüllen. Eine solche Zahl müßte sich ergeben, wenn man 6 von 2 subtrahiert. Diese Subtraktion ist aber im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ausführbar. Daher wird $u+6=2$ durch keine natürliche Zahl erfüllt. Genauso ist es mit $x+1=x+3$. Es gibt keine natürliche Zahl, die, um 1 vermehrt, dasselbe ergibt wie um 3 vermehrt. Für $a+5=5+a$ haben wir dagegen sogar schon drei Zahlen angegeben, die diese Gleichung er-

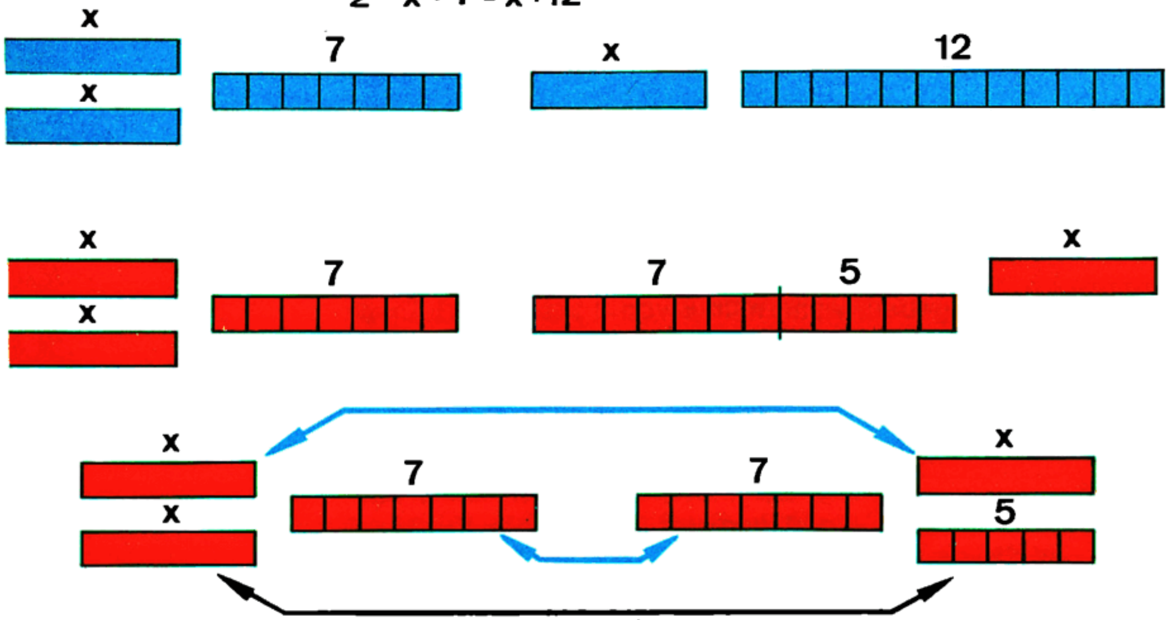
füllen. Aber nicht nur 0, 1 und 7 lassen diese Gleichung zu einer wahren Aussage werden, sondern auch 13, 888, 137 389, ja jede natürliche Zahl erfüllt diese Gleichung.
Nur für die Gleichung $2 \cdot x + 7 = x + 12$ haben wir noch nicht angegeben, wie man Zahlen finden kann, die Lösungen sind. Ihre Lösung ist auch am schwierigsten. Wir wollen diese Zahlen dadurch finden, daß wir die linke und die rechte Seite der Gleichung etwas umformen, und zwar so, daß beide möglichst gleich aussehen:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot x + 7 &= x + 12 \\
x + x + 7 &= x + 7 + 5
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{x} \quad + \quad x + 7 \quad = \quad x + 7 \quad + \quad \mathbf{5}$$



$$2 \cdot x + 7 = x + 12$$



Es wird deutlich: Links kann sich nur dann die gleiche Zahl wie rechts ergeben, wenn für x die Zahl 5 eingesetzt wird. Es gibt also Gleichungen, die von keiner natürlichen Zahl, von nur einer natürlichen Zahl, ja sogar beliebig vielen natürlichen Zahlen erfüllt werden.

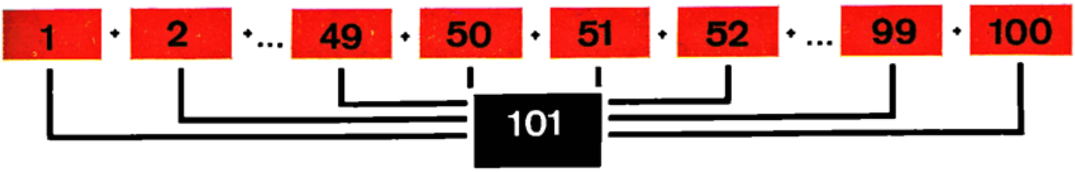
Hundert Zahlen addieren Von dem Mathematiker Karl Friedrich Gauß, der vor mehr als hundert Jahren lebte, erzählt man sich eine interessante Begebenheit aus seiner Schulzeit. Eines Tages soll der Rechenlehrer des kleinen Karl Friedrich die Klasse mit einer Aufgabe beschäftigt haben, von der er annahm, daß die Schüler einige Zeit dafür brauchen würden. Sie sollten die Summe aller natürlichen Zahlen von eins bis hundert bestimmen.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

Die meisten Schüler begannen sofort zu rechnen: $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, und so weiter. Ob sie wohl so bis zur 100 kommen würden? Und ob sie sich dabei auch nicht verrechneten? Karl Friedrich dagegen überlegte erst einmal, ob man nicht dieses langweilige Addieren vermeiden könnte. Nach angestrengtem Nachdenken hatte er plötzlich einen großartigen Einfall. Die Sache war ja ganz einfach. Er ging zum Lehrer und nannte ihm die richtige Summe 5050. Wie erstaunt der Lehrer, aber auch die Mitschüler waren, läßt sich denken.
Auf welchem Wege hatte aber nun Karl Friedrich so schnell die Summe bestimmen können? Er addierte die Zahlen nicht der Reihe nach, sondern er addierte zur ersten die letzte Zahl, zur zweiten die vorletzte Zahl, und


Carl Friedrich Gauß
geb. 30.4.1777
gest. 23.2.1855
9 + 10 69 + 70 + 71
79
79 · 31 + 71 = 2520

so weiter. Bei jedem dieser Zahlenpaare ist die Summe 101. Da es 50 solcher Zahlenpaare gibt, muß die Summe genauso groß sein wie das Produkt $101 \cdot 50 = 5050$.

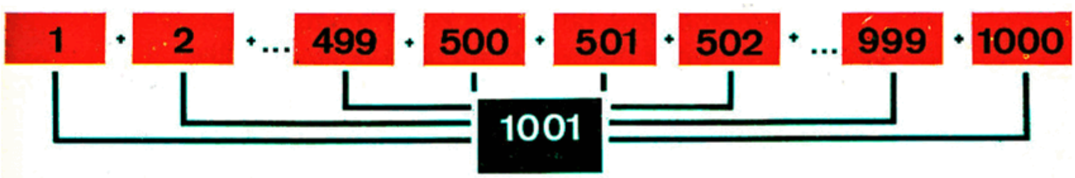


$101 \cdot 50 = 5050$

Das großartigste an seinem Einfall ist aber, daß man auf dem gleichen Wege auch andere Summen bestimmen kann.

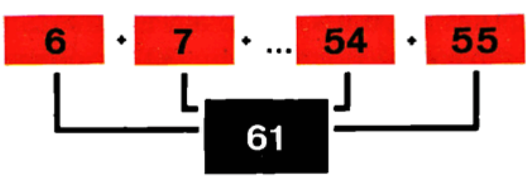
Beispiele:

1. Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000
   Aus den 1000 Zahlen lassen sich 500 Zahlenpaare bilden. Jedes Paar hat die Summe 1001.



$1001 \cdot 500 = 500\,500$

2. Die Summe aller natürlichen Zahlen von 6 bis 55
   Aus den $55 - 5 = 50$ Zahlen lassen sich 25 Zahlenpaare bilden. Jedes Paar hat die Summe 61.

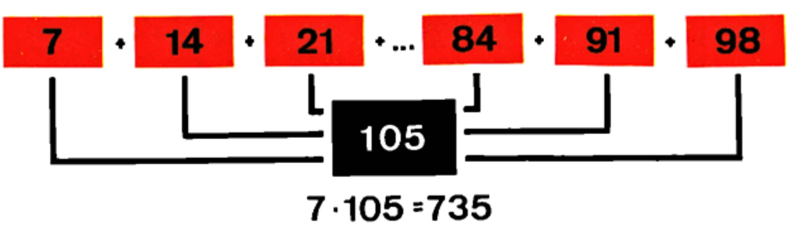


$61 \cdot 25 = 1525$

3. Die Summe aller natürlichen Zahlen von 9 bis 71
   Aus den $71 - 8 = 63$ Zahlen lassen sich 31 Zahlenpaare bilden; eine Zahl bleibt übrig.

4. Die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis 100
   $2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98 + 100$
   Aus den 50 Zahlen lassen sich 25 Zahlenpaare bilden.
   Jedes Paar hat die Summe 102. Also ist die Summe der geraden Zahlen bis 100 gleich $25 \cdot 102 = 2550$.

5. Die Summe aller Vielfachen von 7 zwischen 1 und 100
   $7 + 14 + 21 + \cdots + 84 + 91 + 98$
   Aus den 14 Zahlen lassen sich 7 Zahlenpaare bilden. Jedes Paar hat die Summe 105.
   Also ist die Summe der Vielfachen von 7 zwischen 1 und 100 gleich $7 \cdot 105 = 735$.



Klammern Ute erhält von ihrer Mutti wöchentlich ein Taschengeld von 80 Pfennig. Damit sie ihrer Mutti am Wochenende sagen kann, wie sie das Geld ausgegeben hat, schreibt sie ihre Geldausgaben in ein kleines Heft. Diesmal hat sie sich ein Eis für 15 Pf. und eine Tüte Bonbons für 30 Pf. gekauft. Da sie von ihren 80 Pf. 15 Pf. *und* 30 Pf. ausgegeben hat, schreibt sie in ihr Heft:

$80 - 15 + 30.$

Am Sonnabend zeigt Ute ihre Rechnung.

Die Mutti lacht. „Rechne doch einmal nach!" sagt sie. „$80 - 15 = 65$, $65 + 30 = 95$. Du müßtest also jetzt noch 95 Pf. besitzen, mehr also, als du am Wochenanfang hattest."
Ute meint dagegen: „Ich rechne aber: $15 + 30 = 45$, $80 - 45 = 35$. Und 35 Pf. habe ich tatsächlich noch." Hat Ute also doch recht?
Auf keinen Fall ist es so, daß ein und dieselbe Rechenaufgabe mal dieses oder mal jenes Ergebnis hat, je nachdem, wie man rechnet. Bei einer Rechenaufgabe, bei der nur addiert oder subtrahiert wird, muß zunächst in der Reihenfolge der aufgeschriebenen Rechenoperationen addiert oder subtrahiert werden, also von links nach rechts. Zum Beispiel errechnet man das Ergebnis der Aufgabe $80 - 23 + 37 - 12$ so: $80 - 23 = 57$, $57 + 37 = 94$, $94 - 12 = 82$.
Also ist $80 - 23 + 37 - 12 = 82$.
Utes Mutti hat also die Aufgabe $80 - 15 + 30$ richtig gerechnet. Will Ute aber das ihr verbliebene Geld ausrechnen, so kann sie tatsächlich zunächst 15 und 30 addieren und diese Summe danach von 80 subtrahieren. Will Ute diese Aufgabe in ihr Heft schreiben, so muß sie eine Klammer verwenden: $80 - (15 + 30)$. Die Klammer deutet an, welche Rechenoperation zunächst ausgeführt werden soll.
Bei der Aufgabe $80 - (23 + 37) - 12$ zum Beispiel müßte man entsprechend so vorgehen: 1. $23 + 37 = 60$, 2. $80 - 60 = 20$, 3. $20 - 12 = 8$. Also ist $80 - (23 + 37) - 12 = 8$.

Genauso ist es bei Aufgaben, in denen nur multipliziert oder dividiert wird. Stehen in der Aufgabe keine Klammern, so werden von links nach rechts fortlaufend die gegebenen Zahlen entsprechend den aufgeschriebenen Rechenoperationen multipliziert oder dividiert. Zum Beispiel berechnet man $96 : 8 \cdot 2$ so: 1. $96 : 8 = 12$, 2. $12 \cdot 2 = 24$. Also ist $96 : 8 \cdot 2 = 24$. Kommen dagegen

Klammern vor, so werden zuerst die in der Klammer stehenden Rechenoperationen ausgeführt. $96:(8\cdot 2)$ wird also so berechnet: 1. $8\cdot 2 = 16$, 2. $96:16 = 6$. Daher ist $96:(8\cdot 2) = 6$.

Schwieriger ist es bei Aufgaben, in denen sowohl addiert oder subtrahiert als auch multipliziert oder dividiert wird. Hier hat man festgelegt: Kommen keine Klammern in der Aufgabe vor, so wird zunächst mit den Zahlen gerechnet, zwischen denen die Operationszeichen „·" oder „:" stehen. Erst danach wird addiert (+) oder subtrahiert (−). Man sagt daher manchmal auch: Punktrechnung geht vor Strichrechnung. Zum Beispiel berechnet man $3\cdot 12 + 24:4 + 2$ so: 1. $3\cdot 12 = 36$, 2. $24:4 = 6$, 3. $36 + 6 = 42$, 4. $42 + 2 = 44$. Also ist $3\cdot 12 + 24:4 + 2 = 44$. Kommen dagegen Klammern vor, so werden zunächst die in der Klammer stehenden Rechenoperationen ausgeführt. Demnach berechnet man also $3\cdot(12 + 24):4 + 2$ so: 1. $12 + 24 = 36$, 2. $3\cdot 36 = 108$, 3. $108:4 = 27$, 4. $27 + 2 = 29$. Also ist $3\cdot(12 + 24):4 + 2 = 29$.

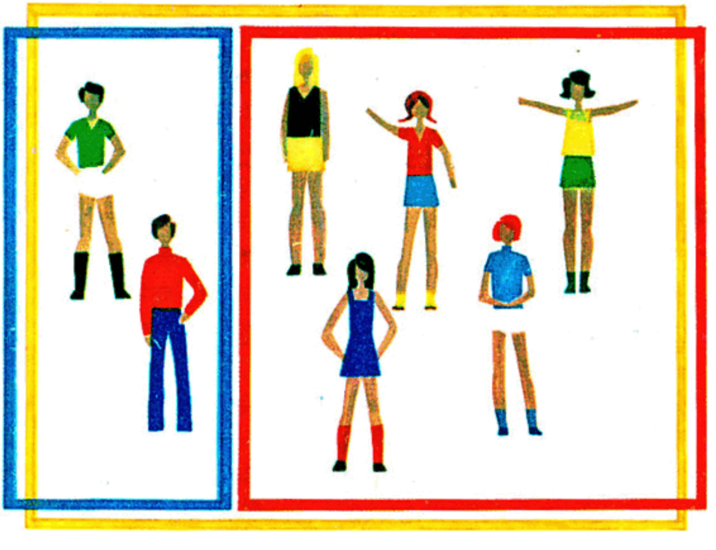
Man muß also stets beachten, ob in einer Rechenaufgabe Klammern vorkommen oder nicht. Und man muß, wie Ute, auch aufpassen, ob man in einer Rechenaufgabe Klammern setzen muß oder nicht. Manchmal allerdings ist es auch egal, ob man Klammern setzt. Wenn man nämlich nur addiert, zum Beispiel die Zahlen 2, 4 und 3, dann sind Klammern überflüssig. $(2 + 4) + 3$ ergibt dasselbe wie $2 + (4 + 3)$, nämlich 9. Und genauso ist es, wenn nur multipliziert wird: $(2\cdot 4)\cdot 3 = 2\cdot(4\cdot 3) = 2\cdot 4\cdot 3$.

Kommutativgesetze Im Bereich der natürlichen Zahlen kann man beim Addieren stets die Summanden und beim Multiplizieren stets die Faktoren vertauschen, ohne daß sich an der Summe oder am Produkt etwas ändert.

Beispiel: $2 + 5 = 5 + 2$ $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$

Bei der Begründung dieser Gesetzmäßigkeiten stützt man sich auf Mengen, da sowohl das Addieren als auch das Multiplizieren mit Hilfe von Mengen erklärt werden. Anstelle der natürlichen Zahlen 2 und 5 wähle man zum Beispiel folgende Mengen, die keine gemeinsamen Elemente enthalten:

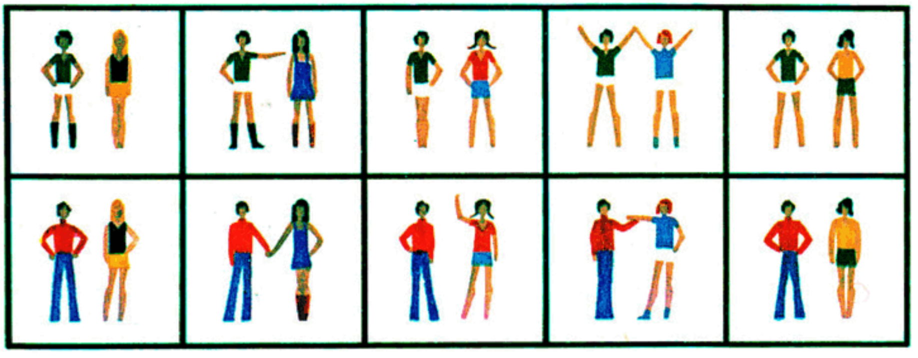
Das Addieren beruht auf der Vereinigung von Mengen. Ob man nun die Zweiermenge mit der Fünfermenge oder die Fünfermenge mit der Zweiermenge vereinigt, stets erhält man dabei dieselbe Menge. Daher ist
$2 + 5 = 5 + 2$.

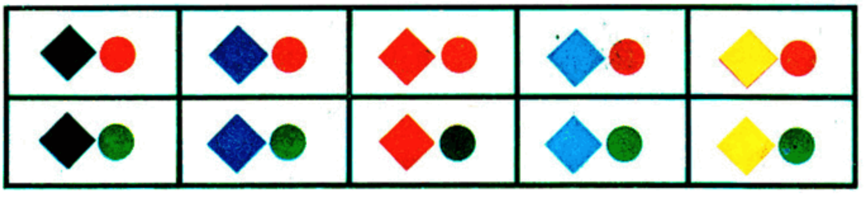


Die gleichen Überlegungen lassen sich auch anstellen, wenn beliebige natürliche Zahlen a und b zu addieren sind.

Für alle natürlichen Zahlen a und b ist also
$a + b = b + a$.

Dieses Gesetz heißt Kommutativgesetz der Addition natürlicher Zahlen.
Das Multiplizieren kann mit Hilfe von „Paar-Mengen" erklärt werden. Bildet man aus den Mengen oben, die die Zahlen 2 und 5 veranschaulichen, die zu $2 \cdot 5$ und $5 \cdot 2$ gehörigen „Paar-Mengen", so stellt man fest: Beide haben gleichviel Elemente. Daher ist
$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$.





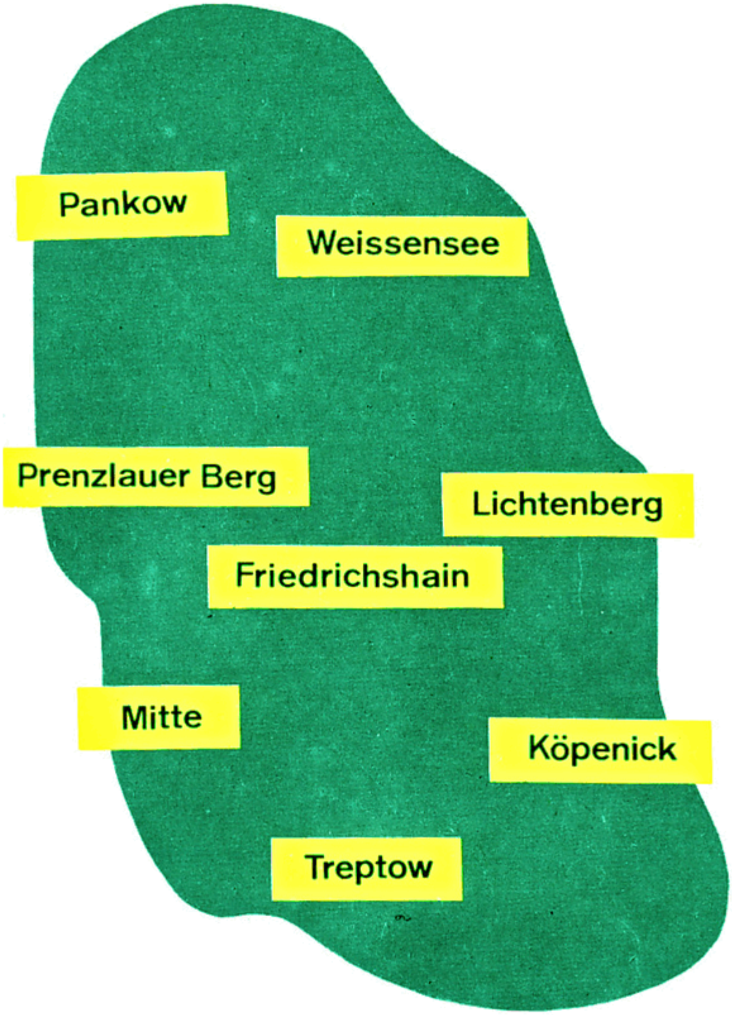
Die gleichen Überlegungen lassen sich auch anstellen, wenn beliebige natürliche Zahlen a und b zu multiplizieren sind.

Für alle natürlichen Zahlen a und b ist also $a \cdot b = b \cdot a$.

Dieses Gesetz heißt Kommutativgesetz der Multiplikation.
Für die Rechenoperation Potenzieren gilt ein solches Gesetz nicht. Vertauscht man bei einer Potenz die Basis und den Exponenten, so verändert sich fast immer der Zahlenwert der Potenz. Zum Beispiel ist $2^3 \neq 3^2$, denn $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ und $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$. Es ist also *nicht* stets $a^b = b^a$.
Ebenso verhält es sich beim Subtrahieren und Dividieren. Nicht für jede Rechenoperation gibt es also ein Kommutativgesetz.

Lösung (siehe **Gleichung** und **Ungleichung**)

Menge Das Wort *Menge* wird sowohl in der Umgangssprache als auch in der Mathematik sehr häufig verwendet. Betrachten wir dazu einige Beispiele:
(1) Peter hat eine Menge Wasser verschüttet.
(2) Die Mutter hat eine Menge Kummer wegen Ralfs schlechter Leistungen in der Schule.
(3) Treptow gehört zur Menge der Stadtbezirke unserer Hauptstadt.
(4) Die Menge aller Teiler der Zahl 12 besteht aus sechs Zahlen.
(5) In der Menge aller Vielfachen von 3 liegt die Zahl 24.
In diesen Beispielen bedeutet *Menge* nicht immer das gleiche. Bei (1) und (2), wie überhaupt meistens in der Umgangssprache, kann man das Wort *Menge* durch das Wort



viel ersetzen. Anders ist es bei den übrigen Beispielen. Hier soll das Wort *Menge* andeuten, daß bestimmte einzelne Dinge, zum Beispiel Stadtbezirke, Personen oder Zahlen, zu einer Gemeinschaft zusammengefaßt werden. Nur in diesem Sinne wird das Wort *Menge* in der Mathematik verwendet.

Unter einer Menge versteht man also eine Gemeinschaft, eine Zusammenfassung von einzelnen, unterscheidbaren Dingen. Dabei muß feststehen, ob ein Ding zu einer bestimmten Menge gehört oder nicht. Diejenigen Dinge, die zu einer Menge zusammengefaßt sind, nennt man Elemente dieser

Menge. Treptow ist zum Beispiel ein Element der Menge der Stadtbezirke unserer Hauptstadt.

Mengen können auf verschiedene Weise angegeben werden. Eine Möglichkeit besteht darin, daß man alle Elemente einzeln aufschreibt oder -zeichnet. Um die Zusammengehörigkeit dieser Elemente anzudeuten, verwendet man dabei Klammern. Auch durch Umranden der dargestellten Elemente kann man deren Zusammengehörigkeit ausdrükken. Die Mengen aus den Beispielen (3) und (4) kann man daher so angeben:

{ Friedrichshain, Köpenick, Mitte, Pankow, Prenzlauer Berg, Lichtenberg, Treptow, Weißensee }

{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 }

Dadurch, daß alle Elemente der jeweiligen Menge angegeben sind, erkennt man auch deutlich, welche Dinge nicht zur Menge gehören. Da die Zahl 5 in der Menge

1, 2, 3, 4, 6, 12

nicht angegeben ist, gehört sie nicht dazu.

Die Menge aller Zahlen, die Vielfache von 3 sind, läßt sich dagegen nicht Element für Element vollständig angeben. Dennoch ist diese Menge durch die geforderte Eigenschaft ihrer Elemente genau bestimmt. Alle Zahlen, die Vielfache von 3 sind, sind Elemente dieser Menge. 21 ist Element der Menge, denn 21 ist das Siebenfache von 3. Alle Zahlen, die nicht Vielfache von 3 sind, sind nicht Elemente dieser Menge. So ist 16 nicht Element der Menge, denn 16 ist nicht Vielfaches von 3.

Bei einer *Menge Kummer* oder einer *Menge Wasser* ist es natürlich sinnlos, von Elementen solcher „Mengen“ zu sprechen.

Wir wollen weitere Beispiele für Mengen angeben:

Die Menge K der hier abgebildeten Kinder.
Die Menge J der hier abgebildeten Jungen.
Die Menge M der hier abgebildeten Mädchen.
Die Menge RP der hier abgebildeten Kinder mit roten Pullis.
Die Menge MT der „Milchtrinker" unter diesen Kindern.

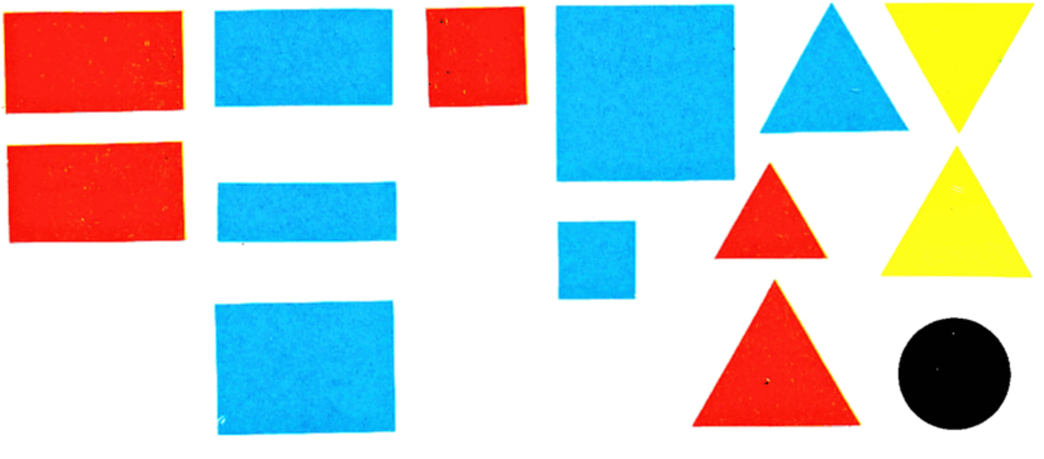
Sieht man sich diese Menge etwas näher an, so stellt man fest: Jedes Element der Menge J ist zugleich Element der Menge K. Man sagt daher: Die Menge J ist eine Teilmenge der Menge K. Ebenso sind auch die Mengen M, RP und MT Teilmengen der Menge K. Die Menge J ist aber auch Teilmenge der Menge MT. Es gibt Elemente der Menge M, die zugleich Elemente der Menge RP sind. Aber nicht alle Elemente der Menge M sind zugleich Elemente der Menge RP. Daher ist die Menge M nicht Teilmenge der Menge RP. Ebenso verhält es sich bei den Mengen M und MT sowie bei J und RP. Die Mengen J und M enthalten dagegen keine gemeinsamen Elemente.
Nimmt man alle Elemente der Menge M zur Menge J hinzu, so erhält man die Menge K. Man sagt auch: Man vereinigt die Mengen M und J. Die dabei erhaltene Menge K nennt man die Vereinigungsmenge der beiden Mengen. Jedes Element der Vereinigungsmenge gehört zur Menge J oder zur Menge M. Vereinigt man die Mengen J und RP, die ja gemeinsame Elemente enthalten, so werden zur Menge J nur noch die Elemente von RP hinzugefügt, die nicht schon zur Menge J gehören. Man erhält als Vereinigungsmenge die Menge MT. Aber auch hier gilt: Jedes Element der Vereinigungsmenge MT gehört zur Menge J oder zur Menge RP. Vereinigt man aber die Menge J mit der Menge MT, so ist deren Vereinigungsmenge selbstverständlich die Menge MT, da die Menge J Teilmenge der Menge MT ist.

In der Mathematik arbeitet man sehr häufig mit Mengen. Wir benutzen sie hier vor allem, wenn wir die Rechenoperationen erklären.

1. Gib eine gemeinsame Eigenschaft der Elemente der abgebildeten Mengen an!

2. Lege ein Blatt durchsichtiges Papier auf die Menge der abgebildeten Figuren und umrande darauf farbig
   a) die Menge der Rechtecke,
   b) die Menge der Dreiecke,
   c) die Menge der Kreise,
   d) die Menge der roten Figuren,
   e) die Menge der blauen Figuren.

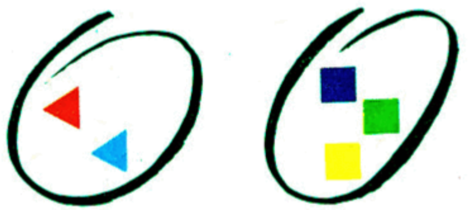
Welche dieser Mengen sind Teilmengen von anderen dieser Mengen? Bilde die Vereinigungsmenge der Mengen aus (b) und (c) sowie der Mengen aus (b) und (d)!



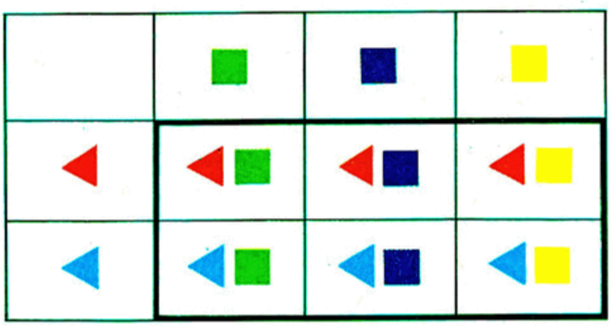
Multiplizieren Das Multiplizieren natürlicher Zahlen oder, wie man auch sagt, die Multiplikation ist eine Rechenoperation. Dabei wird zwei natürlichen Zahlen nach einer bestimmten Vorschrift eine dritte natürliche Zahl zugeordnet, die man als Produkt der beiden Zahlen bezeichnet.

Beispiele: $[2; 3] \rightarrow 6 = 2 \cdot 3$
$[0; 3] \rightarrow 0 = 0 \cdot 3$
$[6; 1] \rightarrow 6 = 6 \cdot 1$

Die Vorschrift, wie die zugeordnete Zahl zu finden ist, kann man mit Hilfe von Mengen angeben. Zum Beispiel läßt sich die Zahl 2 durch eine Zweiermenge von Traktoren und die Zahl 3 durch eine Dreiermenge von Anhängern veranschaulichen.

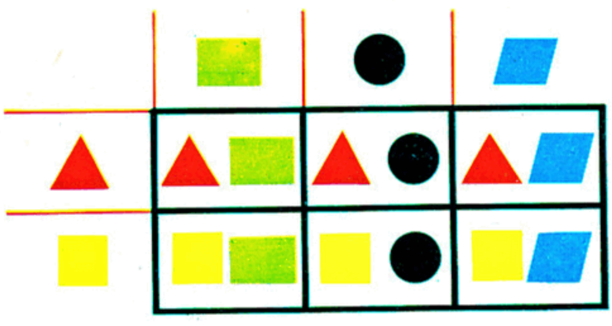


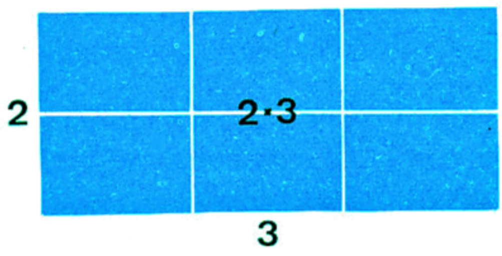
Man überlegt nun, auf wieviel verschiedene Weisen diese Anhänger an die Traktoren angehängt werden können.



Solche Paare, bei denen es auf die Reihenfolge ankommt, nennt man übrigens geordnete Paare. Die Traktor-Anhänger-Paare bilden eine Sechsermenge. Sie gehört also zur Zahl 6.

Man kann für 2 und 3 selbstverständlich auch andere Zweier- und Dreiermengen benutzen. Auch hier gehört die „Paarmenge" zur Zahl 6. Die Anzahl der geordneten Paare, die man aus den Elementen einer Zweiermenge und den Elementen einer Dreiermenge bilden kann, ist stets gleich. Diese Anzahl nennt man das Produkt der beiden natürlichen Zahlen 2 und 3: $2 \cdot 3 = 6$. Das Produkt von 2 und 3 kann auch durch ein Rechteck veranschaulicht werden. Zeichnet man auf Karopapier ein Rechteck, an dessen einer Seite 2 und an dessen anderer Seite 3 Kästchen liegen, so enthält es genau 6 Kästchen: $2 \cdot 3 = 6$. Die Sechsermenge der Kästchen in diesem Rechteck stellt also das Produkt $2 \cdot 3$ dar. Diese Überlegungen lassen sich ganz entsprechend für zwei beliebige natürliche Zahlen anstellen. Sind a und b beliebige natürliche Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl – nennen wir sie c –, die als Produkt der beiden Zahlen a und b bezeichnet wird: $c = a \cdot b$. Es gibt also stets eine, aber auch nur eine solche Zahl.

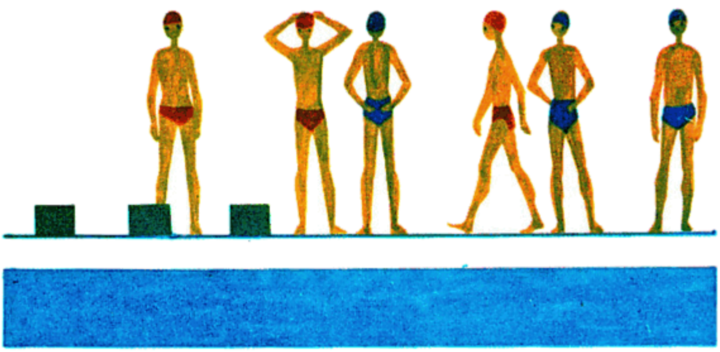




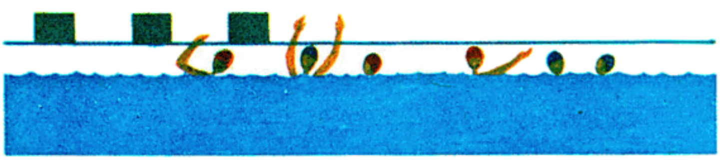
Da es auf die Reihenfolge der Zahlen beim Multiplizieren nicht ankommt, erhalten beide den gleichen Namen.

a	$\cdot$	b	$=$	c
Faktor		Faktor		Produkt

Übrigens wird nicht nur c, sondern auch $a \cdot b$ als Produkt bezeichnet.
Man kann das Multiplizieren aber auch als mehrfaches Addieren der gleichen Zahl erklären: $2 \cdot 3 = 3 + 3$. Die Zahl 3 wird also zweimal als Summand geschrieben. Entsprechend ist: $5 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$.



$3 \cdot 2 = 3 + 3$



$1213 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $1213 \cdot 1 = 1213$

$17 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $17 \cdot 1 = 17$

Für alle natürlichen Zahlen a ist

$a \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $a \cdot 1 = a$

Nachfolger Da man die natürlichen Zahlen, bei der kleinsten beginnend, der Größe nach aufeinanderfolgend aufschreiben kann, hat jede natürliche Zahl in dieser Folge einen festen Platz. Außer der kleinsten natürlichen Zahl, der Null, liegt jede natürliche Zahl zwischen einer unmittelbar vorangehenden und einer unmittelbar nachfolgenden Zahl. Zum Beispiel: 7 zwischen 6 und 8, 69 zwischen 68 und 70, 999 zwischen 998 und 1000. Man sagt: 8 ist der Nachfolger von 7, 70 der Nachfolger von 69, 1000 der Nachfolger von 999; 6 ist der Vorgänger von 7, 68 der Vorgänger von 69, 998 der Vorgänger von 999. Die kleinste natürliche Zahl, die Null, hat keinen Vorgänger, wohl aber einen Nachfolger, die Eins. Jede natürliche Zahl hat also einen Nachfolger.

Der Nachfolger einer Zahl ist die nächstgrößere Zahl.

Man erhält den Nachfolger einer Zahl, indem man zu ihr die Zahl 1 addiert. Von 6 ist der Nachfolger $7 = 6 + 1$, von 69 ist er $70 = 69 + 1$, von 999 ist er $1000 = 999 + 1$, von einer beliebigen natürlichen Zahl a ist er $a + 1$. Geht man von 0 aus, so kann man durch fortlaufendes Addieren von 1 jede beliebige natürliche Zahl erreichen.

Der Vorgänger einer Zahl ist die nächstkleinere Zahl.

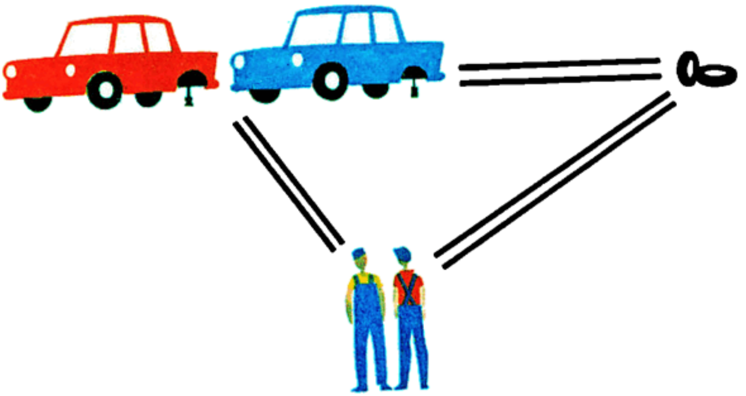
Man erhält den Vorgänger einer Zahl, indem man von ihr die Zahl 1 subtrahiert. Von 6 ist der Vorgänger $5 = 6 - 1$, von 69 ist er $68 = 69 - 1$, von 999 ist er $998 = 999 - 1$, von einer beliebigen natürlichen Zahl a ist er $a - 1$.

Die Zahl a darf dabei selbstverständlich nicht die Zahl 0 sein. Jede natürliche Zahl, außer Null, ist also Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl.

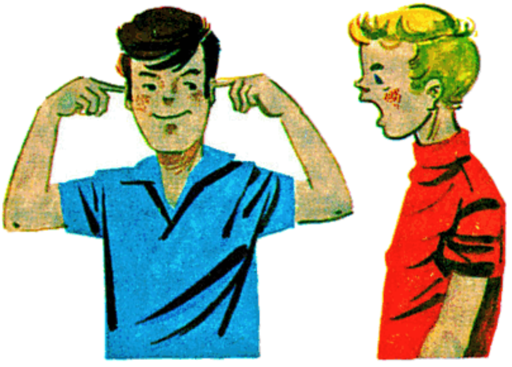
Da jede natürliche Zahl einen Nachfolger besitzt, kann die Folge der natürlichen Zahlen niemals abbrechen. Zu jeder natürlichen

Zahl, sei sie auch noch so groß, gibt es einen Nachfolger, der um 1 größer ist. Daher kann es keine größte natürliche Zahl geben.

Natürliche Zahl Natürliche Zahlen sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 9, 10, 11, ..., 99, 100, 101, ..., 999, 1000, 1001, ... Die Punkte zwischen 5 und 9, zwischen 11 und 99, zwischen 101 und 999 sollen andeuten, daß es zwischen diesen Zahlen noch weitere natürliche Zahlen gibt. Die Punkte hinter 1001 sollen dagegen noch viel mehr andeuten, nämlich, daß die Folge der natürlichen Zahlen niemals abbricht, daß es also keine letzte, keine größte natürliche Zahl gibt.
Wenn man es ganz genau nimmt, sind das, was in den Zeilen am Anfang zu sehen ist, eigentlich keine natürlichen Zahlen, sondern nur Zeichen für natürliche Zahlen, Zahlzeichen, auch Ziffern genannt, genauso wie die Enten, die man malt, eigentlich nur Bilder von Enten sind, die weder schnattern noch watscheln können wie richtige Enten. Was ist die Zahl Zwei aber, wenn *2* nur ein „Bild", ein Zeichen für diese natürliche Zahl ist? Die hier dargestellten Mengen haben, so unterschiedlich sie auch sein mögen, eines gemeinsam: Sie bestehen aus einem Element und noch einem anderen Element, aber kei-

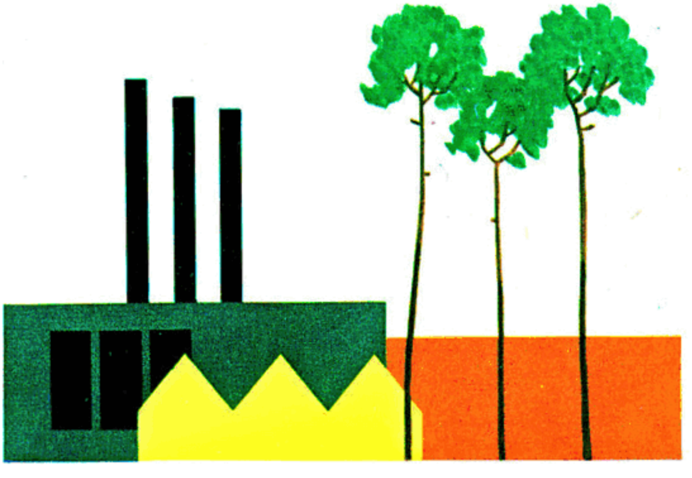


nem weiteren. Es gibt selbstverständlich noch viel mehr solcher Mengen, zum Beispiel die Menge der Ohren oder die Menge der Zeigefinger eines Menschen. Wenn man sich mit den Zeigefingern die Ohren zuhält, dann gehört zu jedem Zeigefinger ein Ohr und zu jedem Ohr ein Zeigefinger.



Genauso kann man mit je zwei anderen dieser Mengen verfahren: Jedem Element der einen Menge kann man ein Element der anderen zuordnen, wobei jedes Element genau einmal genommen wird. Man sagt: Die Anzahl ihrer Elemente ist die natürliche Zahl Zwei. Alle diese Zweiermengen gehören zur Zahl Zwei. Ihre Ziffer ist *2*.

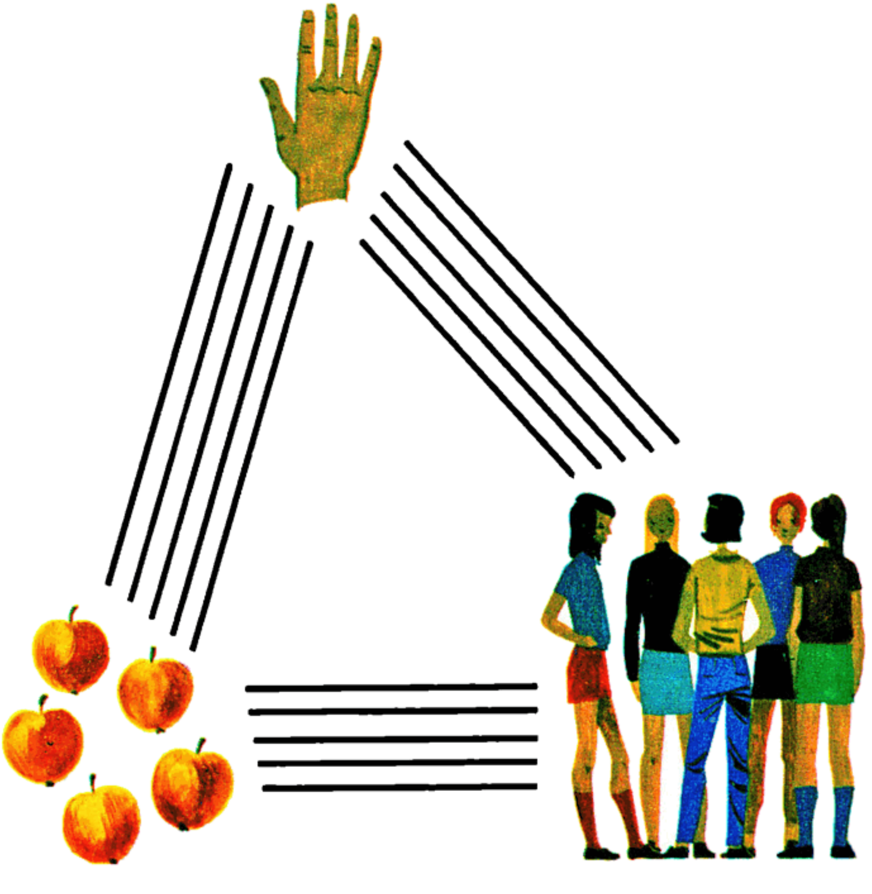
Ebenso läßt sich erklären, was die natürliche Zahl Drei ist. Alle Mengen, die ein Element,



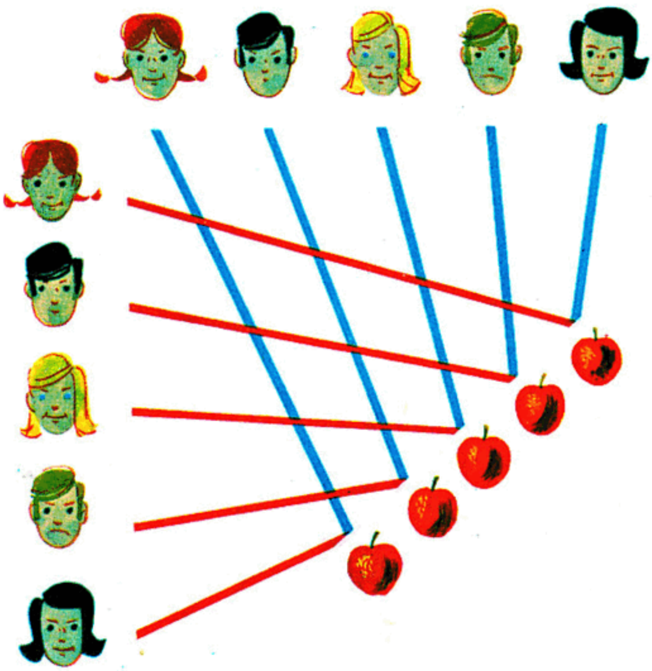
ein anderes Element und noch ein anderes Element, aber kein weiteres enthalten, nennt man Dreiermengen. Gemeinsam ist allen Dreiermengen, daß sie gleich viel Elemente besitzen. Die Anzahl der Elemente von jeder Dreiermenge ist die natürliche Zahl Drei. Ihre Ziffer ist *3.*

Und zur natürlichen Zahl Eins gehören alle Mengen, die ein einziges Element enthalten. Die Anzahl der Elemente jeder dieser Einermengen ist Eins. Ihre Ziffer ist *1.*

Kennt man eine bestimmte Fünfermenge, zum Beispiel die Menge der Finger an einer Hand, und will man feststellen, ob die hier abgebildeten Mengen auch Fünfermengen sind, so kann dies auch so geschehen: Man versucht, jedem Element dieser Menge ein Element der „Fingermenge" zuzuordnen.



Ist dabei auch umgekehrt jedem Element der „Fingermenge" ein Element der anderen Menge zugeordnet, so handelt es sich um eine Fünfermenge, da beide Mengen dann gleich viel Elemente enthalten. Dabei kommt es selbstverständlich nicht darauf an, wie man zuordnet. Wenn die Elemente der Menge selbst oder die der „Fingermenge" beim



Zuordnen nicht ausreichen, so ist die untersuchte Menge keine Fünfermenge. Man sieht: Sowohl die „Fingermenge" als auch die Menge der Früchte, aber auch die Menge der hier abgebildeten Kinder sind Fünfermengen. Sie gehören alle zur gleichen natürlichen Zahl, zur Fünf.

Soll die natürliche Zahl Fünf veranschaulicht werden, so kann sie auch umgekehrt durch eine beliebige Fünfermenge vertreten werden.

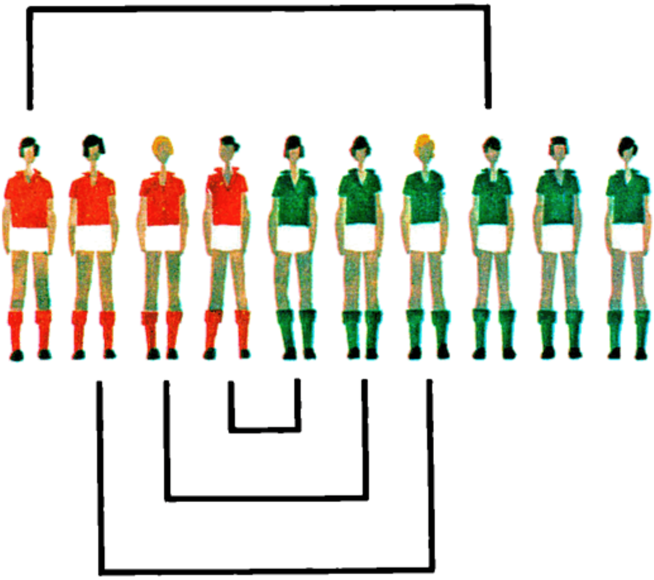
Mit Hilfe von Mengen kann man alle natürlichen Zahlen erklären, sogar die Null. Ißt zum Beispiel Monika alle Äpfel dieser Dreiermenge auf, so bleibt die leere Menge übrig.

Ebenso ergeht es Peter, wenn er seine Pfeile, die eine Achtermenge bilden, verschossen hat. Der leeren Menge entspricht die Zahl Null. Ihre Ziffer ist 0. Also ist

$0 = 3 - 3 = 15 - 15 = 20 - 20 = \cdots$

Ordnung Vergleicht man die Menge der Fußballspieler in roten Hemden mit der Menge der Spieler in blauen Hemden, so stellt man fest: Beide Mengen enthalten gleich viel Elemente. Man kann die Elemente so einander zuordnen, daß zu jedem roten Spieler ein blauer gehört und auch umgekehrt zu jedem blauen ein roter. Die Anzahl der Elemente beider Mengen ist Vier.

Anders ist es, wenn man die Menge der „roten Fußballer" mit der Menge der „grünen Fußballer" vergleicht. Diese Mengen haben nicht gleich viel Elemente. Wie auch immer man hier die Elemente einander zuzuordnen versucht, stets bleiben Elemente der zweiten Menge übrig. Die erste Menge enthält weniger Elemente als die zweite. Die Anzahl der Elemente der ersten Menge ist kleiner als die Anzahl der Elemente der zweiten Menge: Vier ist kleiner als Sechs, oder in Zeichen $4 < 6$. Statt dessen sagt man auch Sechs ist größer als Vier, in Zeichen $6 > 4$.

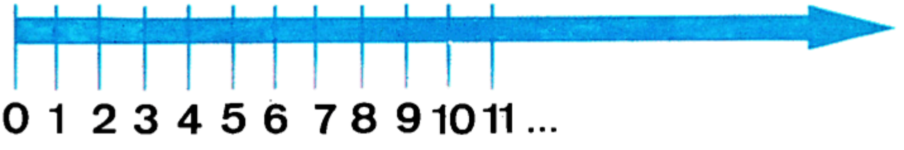


Soll man die Zahlen 3 und 5 miteinander vergleichen, so könnte man für zwei zugehörige Mengen untersuchen, ob man die Elemente dieser Mengen entsprechend einander zuordnen kann. Da dabei stets Elemente der gelben Fünfermenge übrigbleiben, ist $3 < 5$ beziehungsweise $5 > 3$.

Stets kann man auf diese Weise für je zwei verschiedene natürliche Zahlen feststellen, welche Zahl die kleinere, welche die größere ist. Man sagt: Die natürlichen Zahlen kann man ihrer Größe nach ordnen.

Die Ordnung der natürlichen Zahlen wird am deutlichsten, wenn man den Zahlen Punkte eines Strahles zuordnet. Einen solchen Strahl nennt man auch Zahlenstrahl. Diejenige von zwei Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl weiter links liegt, ist die kleinere von beiden.

10 liegt links von 14	$10 < 14$



Soll man Zahlen, vor allem größere, miteinander vergleichen, zum Beispiel 2573 und 999, 5754 und 5794 oder 43 687 und 43 673, wird man sicherlich nicht mehr auf zugehörige Mengen zurückgreifen. Statt dessen benutzt man eine sehr praktische Regel:

> Man vergleicht zuerst die Anzahl der Stellen beider Ziffern. Diejenige Zahl, deren Ziffer weniger Stellen hat, ist kleiner.

Also ist $999 < 2573$, denn 999 ist eine dreistellige, 2573 eine vierstellige Zahl.

Die anderen beiden Paare von Zahlen haben aber gleiche Stellenzahl.

Sind die Anzahlen der Stellen beider Ziffern gleich, so betrachtet man nacheinander, und zwar von links nach rechts, die Grundziffern, aus denen sich die beiden Ziffern zusammensetzen. Der erste auftretende Unterschied läßt erkennen, welche der gegebenen Zahlen die kleinere ist.

5754 5794	43687 43673
5 = 5	4 = 4
7 = 7	3 = 3
5 < 9	6 = 6
	8 > 7
Also ist	Also ist
5754 < 5794	43687 > 43673

Obwohl manche Ziffern der folgenden Zahlen nicht mehr zu erkennen sind, kann man entscheiden, welche der jeweils nebeneinanderstehenden Zahlen die kleinere ist.

4xxx	3xxx
72xxx	75xxx
9xxx	1xxx
x3xxx	x8xx

Wer findet es heraus?

Potenzieren Man schreibt anstelle von $10 \cdot 10 \cdot 10$ auch kürzer 10^3, gelesen 10 hoch 3, ebenso anstelle von $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ auch 2^6.
10^3 und 2^6 nennt man Potenzen. Diese Potenzschreibweise ist zweckmäßig, da man so eine Vielzahl gleicher Faktoren nicht Stück für Stück aufschreiben muß. Statt dessen gibt man einfach an, welche Zahl sich beim Multiplizieren als Faktor ständig wiederholt und aus wieviel Faktoren das Produkt besteht. 5^4

bedeutet also: Der Faktor 5 wird viermal geschrieben, also $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.
Will man die Potenz 3^4 berechnen, so überlegt man: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Man rechnet $3 \cdot 3 = 9$, $9 \cdot 3 = 27$, $27 \cdot 3 = 81$. Also ist $3^4 = 81$. Die Zahl 81 nennt man den Potenzwert der Potenz 3^4. Der Potenzwert der Potenz 2^6 ist 64. Entsprechend ist $10^3 = 1000$, $5^4 = 625$ oder $7^2 = 49$.

$2^6 = 64$

Exponent
Basis Potenzwert

Manchmal findet man auch die Potenzen 10^1, 5^1 oder auch 2^1. Eigentlich sind solche Potenzen sinnlos, da beim Multiplizieren mindestens zwei Faktoren vorhanden sein müssen. Dennoch sind sie oft recht nützlich. Da man sie nicht über das Multiplizieren gleicher Faktoren erklären kann, setzt man einfach fest: $10^1 = 10$, $5^1 = 5$, $2^1 = 2$.
Durch die Potenz wird also wie beim Addieren oder Multiplizieren zwei natürlichen Zahlen, nämlich der Basis und dem Exponenten, eine dritte natürliche Zahl, der Potenzwert zugeordnet.
Beispiele: $[2; 6] \rightarrow 64 = 2^6$
$[3; 4] \rightarrow 81 = 3^4$
$[5; 1] \rightarrow 5 = 5^1$
$[1; 5] \rightarrow 1 = 1^5$
Daher spricht man auch hier von einer Rechenoperation. Man nennt sie Potenzieren.
Vertauscht man bei einer Potenz die beiden Zahlen, so verändert sich fast immer der Potenzwert: $2^6 = 64$, $6^2 = 36$. Eine Ausnahme ist: $2^4 = 16$, $4^2 = 16$. Für das Potenzieren gibt es also kein Kommutativgesetz.
Die Potenzschreibweise verwendet man gern, wenn man sehr große Zahlen schrei-

ben muß. Zum Beispiel kann man anstelle von $1\,km = 1\,000\,000\,mm$ kürzer schreiben: $1\,km = 10^6\,mm$. Liest man in einem Buch, daß die Entfernung der Erde zum Mond fast $4 \cdot 10^5\,km$ beträgt, so bedeutet das 400 000 km, denn $10^5 = 100\,000$ und $4 \cdot 100\,000 = 400\,000$. Aber auch bei unserer Zahlenschreibweise spielen Potenzen eine Rolle:

$$
\begin{aligned}
&34756\\
&= 30\,000 + 4000 + 700 + 50 + 6\\
&= 3 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6\\
&= 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6
\end{aligned}
$$

Primzahl Jede natürliche Zahl hat die Zahl 1 als Teiler.

1 ist Teiler von	13,	denn	$13 = 1 \cdot 13$
1 ist Teiler von	235,	denn	$235 = 1 \cdot 235$
1 ist Teiler von	0,	denn	$0 = 1 \cdot 0$

Jede natürliche Zahl hat sich selbst als Teiler.

13 ist Teiler von	13,	denn	$13 = 13 \cdot 1$
235 ist Teiler von	235,	denn	$235 = 235 \cdot 1$
0 ist Teiler von	0,	denn	$0 = 0 \cdot 1$
		oder	$0 = 0 \cdot 7$

Jede natürliche Zahl hat also die Zahl 1 und sich selbst als Teiler.
Es gibt Zahlen, die nur diese beiden Zahlen als Teiler besitzen.

13 hat als einzige Teiler die Zahlen 1 und 13
7 hat als einzige Teiler die Zahlen 1 und 7
421 hat als einzige Teiler die Zahlen 1 und 421

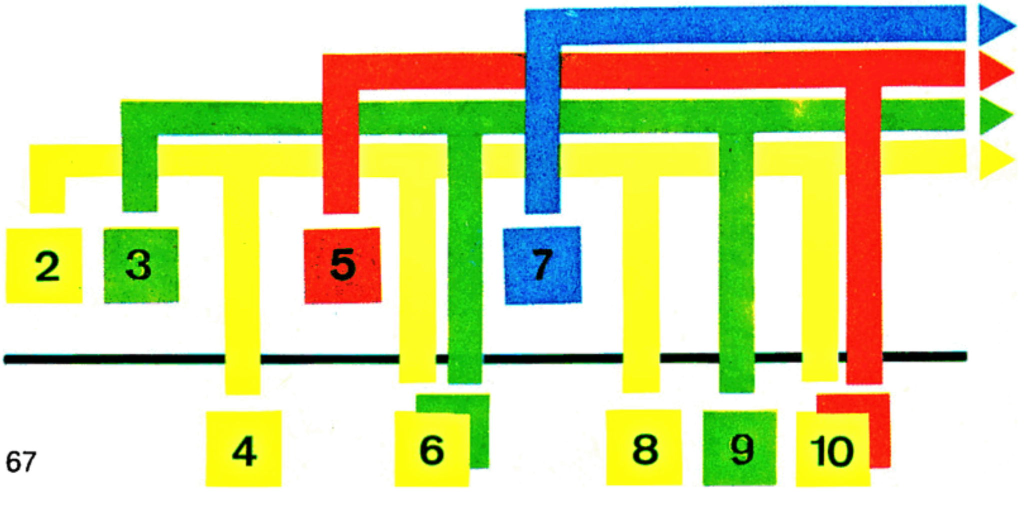
Es gibt aber auch Zahlen, die mehr als zwei Teiler besitzen.

12 hat als Teiler die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12
9 hat als Teiler die Zahlen 1, 3, 9
30 hat als Teiler die Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Zahlen, die genau zwei verschiedene Teiler haben, nämlich die Zahl 1 und sich selbst, nennt man Primzahlen. Daraus ergibt sich, daß die Zahl 1 keine Primzahl ist, da sie nur einen einzigen Teiler hat, nämlich sich selbst.

Also: Jede natürliche Zahl, außer 1, heißt Primzahl, wenn sie nur die Zahl 1 und sich selbst als Teiler besitzt.

Primzahlen sind zum Beispiel: 7, 13, 421, 2.
Es gibt ein einfaches Verfahren, wie man alle Primzahlen der Reihe nach, zum Beispiel von 1 bis 20, schnell finden kann. Man schreibt zunächst die Folge der natürlichen Zahlen von 1 bis 20 auf. 1 ist keine Primzahl, wird also gestrichen. Da 2 Primzahl ist, wird



sie nicht gestrichen. Dann können aber alle übrigen Vielfachen von 2, also 4, 6, 8, ..., das heißt, jede zweite Zahl nach 2, keine Primzahlen sein. Diese werden daher gestrichen. Die Zahl 3 ist Primzahl, wird also nicht gestrichen. Dann kann aber jede dritte Zahl nach 3 keine Primzahl sein. Diese werden wieder gestrichen, sofern sie nicht schon gestrichen sind. Die nächste noch ungestrichene Zahl nach 3 muß eine Primzahl sein. Es ist die Zahl 5. Nun wird wieder jede fünfte Zahl nach 5 gestrichen, sofern dies noch nicht geschehen ist, und so weiter. Entsprechend könnte man auch die Primzahlen bis zur Zahl 100 oder auch 1 000 000 finden.

Aus der Tabelle der Primzahlen zwischen 1 und 100 ersieht man, daß sie recht unregelmäßig verteilt sind. Man könnte denken, daß am Anfang der Folge der natürlichen Zahlen verhältnismäßig viele Primzahlen auftreten, mit zunehmender Größe der Zahlen aber immer weniger Primzahlen erscheinen und schließlich die Primzahlen überhaupt verschwinden. Das ist jedoch keineswegs der Fall.

Die Folge der Primzahlen bricht niemals ab. Wie groß auch immer eine Primzahl sein mag, es gibt stets noch eine größere Zahl, die ebenfalls Primzahl ist.

Unter den Primzahlen gibt es nur eine einzige gerade Zahl, nämlich die 2. Keine Primzahl sonst endet also auf 0, 2, 4, 6 oder 8. Ebenso endet nur eine Primzahl auf 5, nämlich die 5 selbst. Außer den Zahlen 2 und 5 enden alle anderen Primzahlen auf 1, 3, 7 oder 9. Allerdings sind nicht alle Zahlen, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden, auch Primzahlen. Zum Beispiel sind 21, 33, 27, 39 und viele andere Zahlen keine Primzahlen.

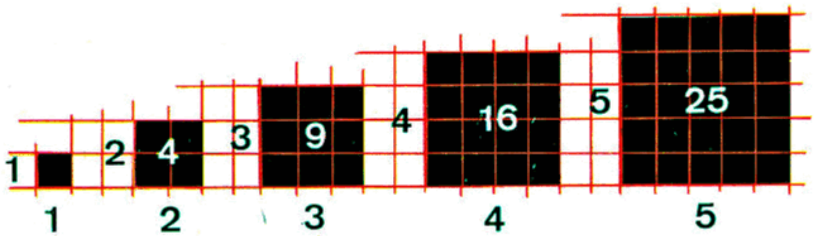
Eine Vorschrift, wie man eine beliebige Primzahl finden kann, ist bisher noch nicht gefunden worden.

2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
43
47
53
59
61
67
71
73
79
83
89
97

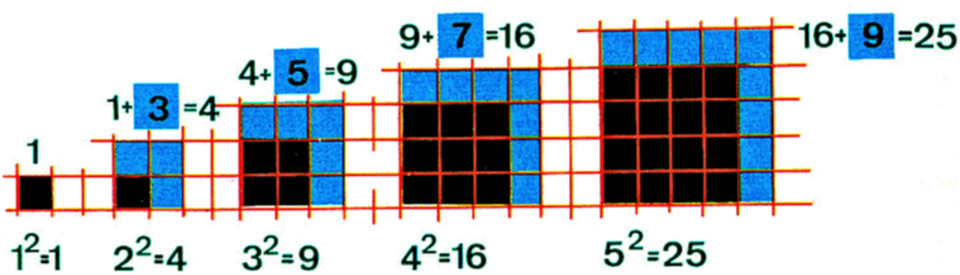
Quadratzahlen Multipliziert man nacheinander jede natürliche Zahl mit sich selbst, so erhält man diese Zahlenfolge:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**…**
(0·0)	(1·1)	(2·2)	(3·3)	(4·4)	(5·5)	(6·6)	(7·7)	(8·8)	…

Zeichnet man auf Karopapier Quadrate, an deren Seite 1, 2, 3, 4, … Kästchen liegen, so enthalten die Quadrate 1, 4, 9, 16, … Kästchen. Daher heißen die Glieder dieser Folge, also **0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,** …, auch Quadratzahlen. Da die Quadratzahlen Produkte von zwei gleichen Zahlen sind, kann



man sie auch in Potenzschreibweise angeben: $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, … Anstelle von *0 hoch 2 gleich 0, 1 hoch 2 gleich 1, 2 hoch 2 gleich 4, 3 hoch 2 gleich 9,* … liest man auch *0 Quadrat gleich 0, 1 Quadrat gleich 1, 2 Quadrat gleich 4, 3 Quadrat gleich 9,* …



Die Folge der Quadratzahlen **0, 1, 4, 9, 16,** ... hängt eng zusammen mit der Folge der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, ... Bestimmt man nacheinander die Abstände von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen, so ergibt sich: **1 – 0** = 1, **4 – 1** = 3, **9 – 4** = 5, **16 – 9** = 7, ... Man erhält dabei die Folge der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ...

Rechenoperation Rechenoperationen sind: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren. Bei jeder Rechenoperation wird zwei natürlichen Zahlen nach einer bestimmten Vorschrift eine dritte natürliche Zahl zugeordnet. Beim Addieren und Multiplizieren gibt es zu je zwei beliebigen natürlichen Zahlen stets eine solche zugeordnete Zahl, die man Summe beziehungsweise Produkt nennt. Bei den anderen Rechenoperationen gibt es zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen nicht immer eine solche Zahl. Beim Subtrahieren darf die zweite Zahl nicht größer sein als die erste. Wenn aber die zweite Zahl nicht größer als die erste ist, dann gibt es zu je zwei beliebigen natürlichen Zahlen stets eine zugeordnete Zahl, die man als Differenz der beiden Zahlen bezeichnet. Und beim Dividieren muß die erste Zahl ein Vielfaches der zweiten sein; nur dann gibt es zu je zwei beliebigen natürlichen Zahlen stets eine zugeordnete Zahl, die Quotient der beiden Zahlen heißt. Wenn die zweite Zahl nicht die Zahl 0 ist, gibt es auch beim Potenzieren zu je zwei beliebigen natürlichen Zahlen stets eine zugeordnete Zahl, die man Potenzwert nennt.
Die Vorschrift, nach der diese Zuordnung erfolgt, ist für jede Rechenoperation anders erklärt. Während zum Beispiel das Addieren auf dem Vereinigen von Mengen beruht, kann man sich beim Multiplizieren auf das Bilden von „Paar-Mengen“ stützen. Ganz an-

ders erfolgt wiederum das Zurodnen beim Potenzieren. Das Potenzieren wird auf das Multiplizieren gleicher Zahlen zurückgeführt.
Damit man weiß, welche Rechenoperation für zwei gegebene Zahlen jeweils ausgeführt werden soll, hat man für jede Rechenoperation eine bestimmte Schreibweise festgelegt. Für das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren gibt es besondere Zeichen, Operationszeichen: + − · :. Man schreibt zum Beispiel: $6+3$, $6-3$, $6\cdot 3$, $6:3$. Für das Potenzieren gibt es ein solches Operationszeichen nicht. Hier bringt man durch die unterschiedliche Stellung der beiden gegebenen Zahlen zum Ausdruck, daß es sich um das Potenzieren handelt. Man schreibt zum Beispiel 6^3.
Bei jeder Rechenoperation haben die beiden gegebenen Zahlen und die zugeordnete Zahl besondere Namen:

	1. Zahl	2. Zahl	zugeordnete Zahl
Addieren	Summand	Summand	Summe
Subtrahieren	Minuend	Subtrahend	Differenz
Multiplizieren	Faktor	Faktor	Produkt
Dividieren	Dividend	Divisor	Quotient
Potenzieren	Basis	Exponent	Potenzwert

[a; b]	$a+b$	$a-b$	$a\cdot b$	$a:b$	a^b
[8; 2]	$10=8+2$	$6=8-2$	$16=8\cdot 2$	$4=8:2$	$64=8^2$
[4; 1]	$5=4+1$	$3=4-1$	$4=4\cdot 1$	$4=4:1$	$4=4^1$
[4; 4]	$8=4+4$	$0=4-4$	$16=4\cdot 4$	$1=4:4$	$256=4^4$
[0; 3]	$3=0+3$	$\cancel{0-3}$	$0=0\cdot 3$	$0=0:3$	$0=0^3$
[2; 3]	$5=2+3$	$\cancel{2-3}$	$6=2\cdot 3$	$\cancel{2:3}$	$8=2^3$
[1; 4]	$5=1+4$	$\cancel{1-4}$	$4=1\cdot 4$	$\cancel{1:4}$	$1=1^4$
[7; 0]	$7=7+0$	$7=7-0$	$0=7\cdot 0$	$\cancel{7:0}$	$\cancel{7^0}$
[0; 0]	$0=0+0$	$0=0-0$	$0=0\cdot 0$	$\cancel{0:0}$	$\cancel{0^0}$

Runden Petras Vater will den Fußboden des Wohnzimmers streichen. Petra soll beim Ausmessen der Fußbodenfläche helfen. Sie mißt Länge und Breite mit einem Bandmaß und will es ganz genau machen. Um auf keinen Fall einen Fehler zu begehen, mißt sie mehrmals. Sie erhält aber jedesmal andere Werte.

Länge des Zimmers

433 cm 8 mm = 4338 mm
432 cm 4 mm = 4324 mm
434 cm 6 mm = 4346 mm
431 cm 4 mm = 4314 mm

Breite des Zimmers

268 cm 7 mm = 2687 mm
269 cm 3 mm = 2693 mm
266 cm 6 mm = 2666 mm
267 cm 4 mm = 2674 mm

Und dabei hat sie sich solche Mühe gegeben!

Ihr Vater erklärt ihr, daß sich eine solche Mühe nicht lohnt. Es ist sinnlos, die Länge eines Zimmers in Millimetern genau zu messen, da bei mehrfachem Messen Abweichungen auftreten können. Außerdem brauche er für den Kauf der Fußbodenfarbe sowieso nur die ungefähre Länge und Breite des Zimmers. Ihm würde es ausreichen, wenn Länge und Breite auf Dezimeter genau angegeben wären. Er nimmt daher für die Länge den ungefähren Wert 43 dm und für die Breite den ungefähren Wert 27 dm. In seinem Notizbuch schreibt er sich auf: „Wohnzimmer: $l \approx 43\,\text{dm}$, $b \approx 27\,\text{dm}$". Das Zeichen $\approx$ soll daran erinnern, daß es sich nur um ungefähre Werte, um Näherungswerte handelt. „$l \approx 43\,\text{dm}$" liest man als „l ist angenähert gleich 43 dm" oder „l ist rund 43 dm".

Die Entfernungen zwischen verschiedenen Städten werden stets nur als Näherungswerte angegeben. Man würde jemanden auslachen, der behauptete, die Entfernung von Berlin nach Moskau betrage 1623 km 427 m. Eine solche Genauigkeit wäre nur vorgetäuscht und daher sinnlos.

Wenn man liest, daß die Hauptstadt der DDR 1 700 000 Einwohner oder der Bezirk Frankfurt 653 000 Einwohner hat, dann nimmt man nicht an, daß diese Zahl auf die letzte Stelle genau ist. Durch Geburten und Todesfälle ändert sich die genaue Zahl tagtäglich. Es handelt sich also um angenäherte oder, wie man auch sagt, um gerundete Zahlen.

Beim Runden ersetzt man eine oder mehrere Grundziffern durch Nullen. Man rundet also auf Vielfache von 10, 100, 1000 und so weiter, je nachdem es sinnvoll erscheint. Die Einwohnerzahlen sind zum Beispiel auf Vielfache von 1000 gerundet. Für das Runden von Zahlen gibt es bestimmte Regeln. Wir wollen uns diese Regeln beim Runden auf Vielfache von 10 verdeutlichen.

$431 \approx 430$	$266 \approx 270$
$432 \approx 430$	$267 \approx 270$
$433 \approx 430$	$268 \approx 270$
$434 \approx 430$	$269 \approx 270$

Ist die letzte Grundziffer 1, 2, 3, 4, so wird nur die letzte Grundziffer durch 0 ersetzt. Die gerundete Zahl ist in diesen Fällen stets kleiner als die gegebene Zahl. Daher spricht man hier von Abrunden.

Ist die letzte Grundziffer 6, 7, 8, 9, so wird die letzte Grundziffer durch 0 ersetzt und die vorletzte Grundziffer um 1 erhöht.
Die gerundete Zahl ist in diesen Fällen stets größer als die gegebene Zahl. Daher spricht man hier von Aufrunden.

Etwas schwieriger ist es, wenn die letzte Grundziffer eine 5 ist. Hier wird teils abgerundet, teils aufgerundet. Man rundet so, daß die vorletzte Grundziffer der gerundeten Zahl eine gerade Zahl bezeichnet. Die Regel nennt man „Geradezahlregel".

Also: $435 \approx 440$ $265 \approx 260$

Steht also vor 5 eine ungerade Zahl, so wird aufgerundet. Steht vor 5 eine gerade Zahl, so wird abgerundet.

$405 \approx 400$ (ab)	$415 \approx 420$ (auf)	$425 \approx 420$ (ab)
$435 \approx 440$ (auf)	$445 \approx 440$ (ab)	$455 \approx 460$ (auf)
$465 \approx 460$ (ab)	$475 \approx 480$ (auf)	$485 \approx 480$ (ab)
$495 \approx 500$ (auf)		

Entsprechend verfährt man, wenn man auf Vielfache von 100, 1000 und so weiter rundet. Zum Beispiel werden alle Zahlen von 3201 bis 3249 abgerundet auf 3200, von 3251 bis 3299 aufgerundet auf 3300. Es wird also so gerundet, daß die Zahl durch das nächstliegende Vielfache von 100 ersetzt wird. Nur wenn die Zahl genau in der Mitte von zwei Vielfachen von 100 liegt, wird die „Geradezahlregel" entsprechend angewendet. 3250 wird abgerundet auf 3200, da vor 5 die Ziffer 2 steht, die eine gerade Zahl bezeichnet.

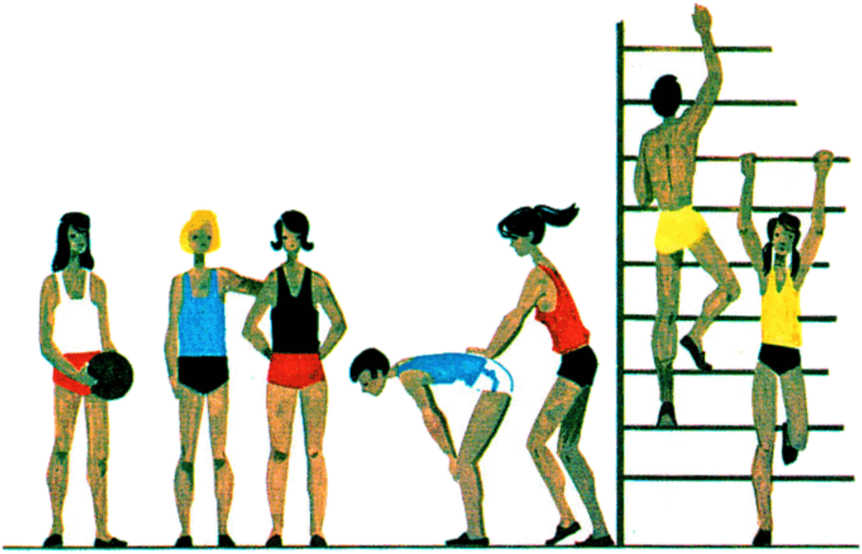
Subtrahieren Das Subtrahieren natürlicher Zahlen oder, wie man auch sagt, die Subtraktion ist eine Rechenoperation. Dabei wird zwei natürlichen Zahlen nach einer bestimmten Vorschrift eine dritte natürliche Zahl zugeordnet, die man als Differenz der beiden Zahlen bezeichnet.

Beispiele: $[7;\ 5] \rightarrow 2 = 7-5$

$[12;\ 12] \rightarrow 0 = 12-12$

$[6;\ 0] \rightarrow 6 = 6-0$

Die Vorschrift, nach der diese Zuordnung zu erfolgen hat, kann man mit Hilfe von Mengen angeben. Die natürliche Zahl 7 läßt sich zum Beispiel durch eine Siebenermenge von Kindern veranschaulichen. Für die Zahl 5 soll die Fünfermenge der Mädchen gewählt werden, die eine Teilmenge der Siebenermenge ist. Nimmt man nun alle Elemente dieser Fünfermenge aus der Siebenermenge heraus, so bleibt eine Zweiermenge von Jungen übrig. Diese Menge gehört zur Zahl 2. Man hätte auch alle Kinder mit schwarzen Haaren, die ja auch eine Fünfermenge bilden, aus der Siebenermenge entfernen können. Auch dann hätte man eine Zweiermenge übrigbehalten. Daher sagt man auch: Die natürlichen Zahlen 7 und 5 haben die Differenz 2, also $7-5=2$.



Die Überlegungen für 7 und 5 lassen sich entsprechend für beliebige natürliche Zahlen anstellen, sofern die erste Zahl nicht kleiner als die zweite ist. Man kann ja aus der ersten Menge nicht mehr Elemente entfernen, als in ihr vorhanden sind.

Das Subtrahieren ist also im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar. Ist die zweite Zahl größer als die erste, so gibt es keine natürliche Zahl, die Differenz dieser Zahlen ist.

$\cancel{3-5}$ $\cancel{7-10}$

Sind a und b beliebige natürliche Zahlen, wobei $a > b$ oder $a = b$ ist, so gibt es stets eine, aber auch nur eine natürliche Zahl – nennen wir sie c –, die Differenz der beiden Zahlen ist: $c = a - b$.

Beim Subtrahieren kann man daher auch nicht immer die beiden Zahlen a und b vertauschen. Es kommt hier also auf die Reihenfolge der Zahlen an. Daher erhalten diese Zahlen verschiedene Namen.

a	–	b	=	c
Minuend		Subtrahend		Differenz

Übrigens wird nicht nur c, sondern auch a – b als Differenz bezeichnet.
Das Subtrahieren ist die Umkehrung des Addierens.

7 – 5 = 2 2 + 5 = 7

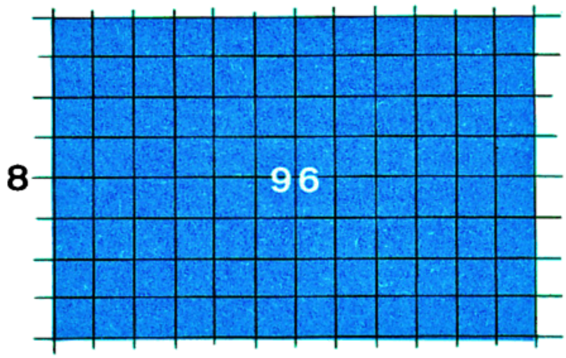
Addiert man zur Differenz den Subtrahenden, so erhält man den Minuend. So läßt sich leicht überprüfen, ob eine Subtraktionsaufgabe richtig gelöst wurde.
Beispiel: Jemand rechnet 26 – 18 = 7. Er überprüft: 7 + 18 = 25. Also ist 7 als Differenz falsch. Man muß 8 zu 18 addieren, um 26 zu erhalten. Daher ist 26 – 18 = 8.
Sind zwei oder mehrere Zahlen zu subtrahieren, sind die Subtrahenden der Reihe nach zu subtrahieren.
Will man zum Beispiel 25 – 12 – 8 berechnen, so rechnet man zunächst 25 – 12 = 13 und danach 13 – 8 = 5. Also ist 25 – 12 – 8 = (25 – 12) – 8 = 13 – 8 = 5.
25 – 12 – 8 ist aber nicht gleich 25 – (12 – 8), denn 25 – (12 – 8) = 25 – 4 = 21. Für das Subtrahieren gilt also kein Assoziativgesetz.
Am bequemsten subtrahiert man zwei oder mehrere Zahlen, indem man die Subtrahenden addiert und deren Summe vom Minuenden subtrahiert:

25 – 12 – 8

Minuend: 25	Erster Subtrahend:	12	
	Zweiter Subtrahend:	8	+
	Summe der Subtrahenden:	20	
25	– 20 = 5		

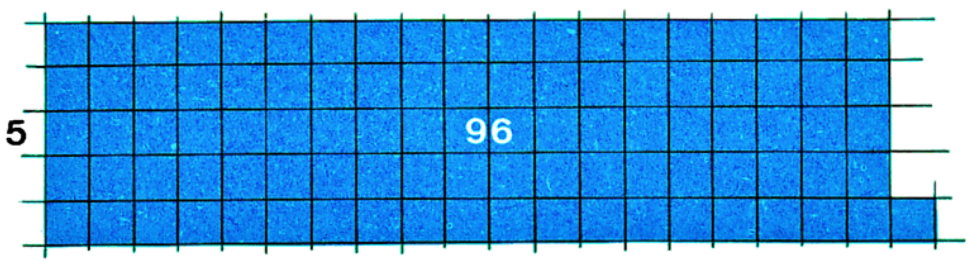
Also ist 25 – 12 – 8 = 25 – (12 + 8) = 25 – 20 = 5.

Teiler einer natürlichen Zahl Die Aufgabe $63:7$ lösen bedeutet: Es ist eine natürliche Zahl zu bestimmen, die, mit 7 multipliziert, 63 ergibt. Da es eine solche Zahl gibt, nämlich die Zahl 9, ($7 \cdot 9 = 63$), sagt man auch: 7 ist ein Teiler von 63. Anders ist es bei der Aufgabe $52:6$. Hier gibt es keine natürliche Zahl, die, mit 6 multipliziert, 52 ergibt. Die Zahl 8 ist zu klein, denn $6 \cdot 8 = 48$, und die Zahl 9 ist zu groß, denn $6 \cdot 9 = 54$. Die Aufgabe $52:6$ ist also im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. In diesem Fall sagt man auch: 6 ist nicht Teiler von 52.



$96 = 8 \cdot 12$

Soll man feststellen, ob 8 ein Teiler von 96 ist, so muß man überlegen: Gibt es eine natürliche Zahl, die beim Multiplizieren mit 8 die Zahl 96 ergibt? 12 ist eine solche Zahl, denn $12 \cdot 8 = 96$. Also ist 8 ein Teiler von 96. Dagegen ist 5 nicht Teiler von 96, da es keine natürliche Zahl gibt, die beim Multiplizieren mit 5 die Zahl 96 ergibt: $5 \cdot 19 = 95$,



$96 = 5 \cdot 19 + 1$

$5 \cdot 20 = 100$. Für *8 ist ein Teiler von 96* kann man übrigens auch umgekehrt sagen: *96 ist ein Vielfaches von 8* und für *5 ist nicht Teiler von 96* auch *96 ist nicht Vielfaches von 5.* Anstelle von *8 ist ein Teiler von 96* schreibt man oft kürzer $8 \mid 96$ und entsprechend für *„5 ist nicht Teiler von 96"* $5 \nmid 96$.
Jede natürliche Zahl hat die Zahl 1 und sich selbst als Teiler, also, mit Ausnahme der Zahl 1, mindestens zwei verschiedene Teiler.

$1 \mid 8$, denn $8 = 1 \cdot 8$ $\quad$ $8 \mid 8$, denn $8 = 8 \cdot 1$
$1 \mid 178$, denn $178 = 1 \cdot 178$ $\quad$ $178 \mid 178$, denn $178 = 178 \cdot 1$
$1 \mid 0$, denn $0 = 1 \cdot 0$ $\quad$ $0 \mid 0$, denn $0 = 0 \cdot 1$

Für alle natürlichen Zahlen a gilt
$1 \mid a$, denn $a = 1 \cdot a$ $\quad$ $a \mid a$, denn $a = a \cdot 1$

Soll man alle Teiler einer Zahl, zum Beispiel von 24, bestimmen, so geht man der Reihe nach alle natürlichen Zahlen von 1 bis 24 durch und überprüft, ob sie Teiler von 24 sind. Eine Zahl, die größer als 24 ist, kann nicht Teiler von 24 sein.
$1 \mid 24$, denn $24 = 1 \cdot 24$ $\quad$ $2 \mid 24$, denn $24 = 2 \cdot 12$
$3 \mid 24$, denn $24 = 3 \cdot 8$ $\quad$ $4 \mid 24$, denn $24 = 4 \cdot 6$
$5 \nmid 24$
Die weiteren Teiler ergeben sich von selbst. Da $24 = 4 \cdot 6$ ist, muß nicht nur 4, sondern auch 6 ein Teiler von 24 sein. Entsprechend kommen als weitere Teiler nur noch 8, 12 und 24 hinzu. Man braucht daher nicht alle Zahlen von 1 bis 24 zu überprüfen. Man überprüft nur alle die Zahlen, deren Quadrat nicht größer als die gegebene Zahl ist. Da $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ kleiner und $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ größer als die gegebene Zahl 24 ist, braucht man nur alle Zahlen von 1 bis 4 zu untersuchen, ob sie Teiler von 24 sind. Die übrigen Teiler ergeben sich von selbst. Die Menge der

Teiler von 24 ist also: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Bei 36 muß man alle Zahlen von 1 bis 6 untersuchen, ob sie Teiler von 36 sind, denn $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$. Da ferner $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$ ist, ist die Menge der Teiler von 36 die Menge $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Zu jeder natürlichen Zahl, die größer als 1 ist, gibt es eine bestimmte Menge von Teilern. Sie besteht aus mindestens zwei Elementen, nämlich aus der Zahl 1 und der Zahl selbst.

Für einige Zahlen läßt sich sehr leicht feststellen, ob sie Teiler von vorgegebenen Zahlen sind oder nicht. Am einfachsten ist es bei den Zahlen 10, 100, 1000, ..., aber auch für 5 und 2 gibt es einfache Regeln.

Wenn die Ziffer einer Zahl auf 0 endet, so ist 10 ein Teiler dieser Zahl. Wenn sie nicht auf 0 endet, so ist 10 nicht Teiler dieser Zahl.

Beispiele: $10 \mid 3757\mathbf{0}$ $\quad 10 \nmid 47000\mathbf{6}$

Wenn die Ziffer einer Zahl auf 00 endet, so ist 100 ein Teiler dieser Zahl. Wenn sie nicht auf 00 endet, so ist 100 nicht Teiler dieser Zahl.

Beispiele: $100 \mid 5342\mathbf{00}$ $\quad 100 \nmid 36700\mathbf{045}$

Wenn die Ziffer einer Zahl auf 0 oder 5 endet, so ist 5 ein Teiler dieser Zahl. Wenn sie nicht auf 0 oder 5 endet, so ist 5 nicht Teiler dieser Zahl.

Beispiele: $5 \mid 243\mathbf{5}$ $\quad 5 \mid 4768\mathbf{0}$ $\quad 5 \nmid 5505\mathbf{7}$

Wenn die Ziffer einer Zahl auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endet, so ist 2 Teiler dieser Zahl. Wenn sie nicht auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endet, so ist 2 nicht Teiler dieser Zahl.

Beispiele: $2 \mid 135\mathbf{0}$ $\quad 2 \mid 753\mathbf{4}$ $\quad 2 \mid 17\,93\mathbf{8}$

$2 \nmid 135\,79\mathbf{7}$ $\quad 2 \nmid 24\,68\mathbf{3}$

Überschlag Jörg soll das Produkt 724·2609 berechnen. Er erhält 214 756. Sein Freund Klaus, dem er das Ergebnis zeigt, meint sofort, das könne auf keinen Fall stimmen. Er wisse zwar nicht das richtige Ergebnis, aber

$$\begin{array}{r}
724 \cdot 2609 \\
\hline
1448 \\
4344 \\
6516 \\
\hline
214756
\end{array}$$

diese Zahl könne es jedenfalls nicht sein. Klaus ist seiner Sache so sicher, weil er anstelle der gegebenen Aufgabe einfach 700·2000 im Kopf berechnet und dabei 1 400 000 erhalten hat. Er hat also die gegebenen Zahlen durch Vielfache von 100 beziehungsweise von 1000 ersetzt und erst danach multipliziert. Da beide Vielfache kleiner als die gegebenen Zahlen sind, muß auch ihr Produkt kleiner als das Ergebnis der gegebenen Multiplikationsaufgabe sein.

$$724 \cdot 2609$$

$$700 < 724 \qquad 2000 < 2609$$
$$700 \cdot 2000 < 724 \cdot 2609$$
$$1\,400\,000 < 724 \cdot 2609$$

Jörgs Ergebnis ist aber kleiner als 1 400 000; also kann es nicht richtig sein.
Man sagt, Klaus hat einen Überschlag zu der gegebenen Aufgabe ausgeführt. Eine Rechnung, bei der man ermittelt, wie groß das Ergebnis ungefähr ist, nennt man eine Überschlagsrechnung. Klaus hätte selbstverständlich die beiden Faktoren auch durch Vielfache von 100 beziehungsweise 1000 ersetzen können, die größer als die gegebenen Zahlen sind. Dann muß ihr Produkt größer sein als das Ergebnis der gegebenen Aufgabe.

$$724 \cdot 2609$$

$$724 < 800 \qquad 2609 < 3000$$
$$724 \cdot 2609 < 800 \cdot 3000$$
$$724 \cdot 2609 < 2\,400\,000$$

Auch dieser Überschlag hätte darauf hingewiesen, daß Jörgs Ergebnis falsch sein muß, denn 214 756 ist ja ungefähr nur der zehnte Teil von 2 400 000. Überzeugender ist aber sicherlich der erste Überschlag. Macht man für diese Aufgabe beide Überschläge, so weiß man, daß das richtige Produkt zwischen 1 400 000 und 2 400 000 liegen muß.

$$700 \cdot 2000 < 724 \cdot 2609 < 800 \cdot 3000$$
$$1\,400\,000 < 724 \cdot 2609 < 2\,400\,000$$

Erhält man beim schriftlichen Rechnen ein Ergebnis, das nicht zwischen diesen Zahlen liegt, kann es nicht richtig sein. Klaus hätte aber auch die Zahlen den Rundungsregeln entsprechend durch Vielfache von 100 beziehungsweise 1000 ersetzen können.

$$724 \approx 700$$
$$2609 \approx 3000$$
$$700 \cdot 3000 = 2\,100\,000$$
$$724 \cdot 2609 \approx 2\,100\,000$$

Da er diesmal eine Zahl abgerundet, die andere aufgerundet hat, weiß er hier nur, das genaue Ergebnis muß nahe bei 2 100 000 liegen. Ob es größer oder kleiner als diese Zahl ist, kann er nicht sagen. Da 214 756 nicht nahe bei 2 100 000 liegt, hätte er aber auch so feststellen können, daß Jörgs Ergebnis nicht stimmt.

Mit einem Überschlag kann man also sehr grobe Rechenfehler schnell nachweisen.

Jörg und Klaus rechnen, jeder für sich, die Aufgabe noch einmal. Diesmal erhält Jörg 1 947 236; das Ergebnis von Klaus ist 1 888 916. Beide Zahlen liegen zwischen 1 400 000 und 2 400 000; sie liegen auch nahe bei 2 100 000. Eines der beiden Ergebnisse kann aber nur richtig sein. Sicher hat jeder schon gemerkt, daß das Ergebnis von Klaus stimmt. Obwohl Jörgs Zahl dem Überschlag entspricht, ist sie falsch. Durch einen Überschlag kann man also nur feststellen, wie groß das zu erwartende Ergebnis ungefähr sein wird. Kleinere Abweichungen lassen sich so nicht nachweisen.

```
724 · 2609          724 · 2609
1448                1448
 43440               43440
   64836                6516
1947236             1888916
```

Die Zahlen sollten stets so durch kleinere oder größere, in der Nähe liegende Zahlen ersetzt werden, daß man den Überschlag im Kopf ausführen kann.

Auch für andere Rechenoperationen sind Überschläge möglich.

Dividieren:	$320\,760 : 495$
1. Man ersetzt den Divisor durch eine kleinere, den Dividenden durch eine größere Zahl	$400 < 495$ $320\,760 < 360\,000$ $360\,000 : 400 = 900$
2. Man ersetzt den Divisor durch eine größere, den Dividenden durch eine kleinere Zahl	$495 < 500$ $300\,000 < 320\,760$ $300\,000 : 500 = 600$
	Also ist $600 < 320\,760 : 495 < 900$ Es ist $320\,760 : 495 = 648$ Tatsächlich ist $600 < 648 < 900$
Anderer Überschlag: Man ersetzt den Divisor und den Dividenden durch größere Zahlen.	$495 < 500$ $320\,760 < 350\,000$ $350\,000 : 500 = 700$
	Also ist $320\,760 : 495 \approx 700$ Es ist $320\,760 : 495 = 648$ Tatsächlich ist $648 \approx 700$

Ungerade Zahl (siehe **Gerade Zahl**)

Ungleichung

$5 < 4 + 2$	$5 + 3 > 2 \cdot 3$	$15 - 3 > 4 \cdot 3$	$24 : 6 < 10 - 8$	
$a + 7 < 12$	$c + 5 < 2$	$a + 7 > 12$	$c + 5 > 2$	
$x + 2 < 3$	$x + 5 < 8$	$a + 1 > a + 2$	$3 \cdot z < 15$	$4 \cdot z > 6$

Das sind Ungleichungen. So unterschiedlich diese Ungleichungen auch sein mögen – eines haben sie gemeinsam: Sie enthalten alle entweder das Kleiner-als-Zeichen oder das Größer-als-Zeichen. In den ersten vier Ungleichungen stehen links und rechts von den Zeichen $<$ oder $>$ außer den Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ nur Ziffern. Solche Ungleichungen sind Aussagen über die Ungleichheit von Zahlen. Solche Ungleichheitsaussagen sind entweder wahr oder falsch. Die Ungleichungen $5<4+2$ und $5+3>2\cdot 3$ sind wahre Aussagen, die Ungleichungen $15-3>4\cdot 3$ und $24:6<10-8$ sind falsche Aussagen. In den übrigen Ungleichungen sind außerdem noch Buchstaben enthalten, zum Beispiel a, c oder z. Diese Buchstaben stehen anstelle von Zahlen, die wir beliebig aus dem Bereich der natürlichen Zahlen wählen können. Man nennt diese Buchstaben, die also durch natürliche Zahlen ersetzt werden können, auch Variable. Setzt man in diesen Ungleichungen anstelle der Variablen irgendwelche natürlichen Zahlen, so ergegen sich manchmal wahre (w) und manchmal falsche (f) Aussagen.

a	$a+7<12$	
3	$3+7<12$	**w**
5	$5+7<12$	f
6	$6+7<12$	f

a	$a+7>12$	
3	$3+7>12$	f
5	$5+7>12$	f
6	$6+7>12$	**w**

c	$c+5<2$	
0	$0+5<2$	f
1	$1+5<2$	f
2	$2+5<2$	f

c	$c+5>2$	
0	$0+5>2$	**w**
1	$1+5>2$	**w**
2	$2+5>2$	**w**

x	$x+2<3$	
0	$0+2<3$	**w**
1	$1+2<3$	f
2	$2+2<3$	f

x	$x+5<8$	
0	$0+5<8$	**w**
2	$2+5<8$	**w**
3	$3+5<8$	f

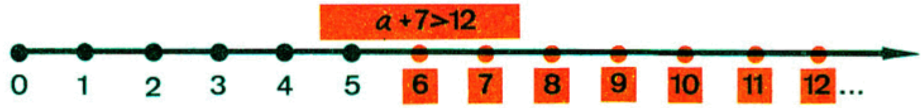
z	$3\cdot z<15$	
1	$3\cdot 1<15$	**w**
4	$3\cdot 4<15$	**w**
5	$3\cdot 5<15$	f

z	$4\cdot z>6$	
1	$4\cdot 1>6$	f
2	$4\cdot 2>6$	**w**
3	$4\cdot 3>6$	**w**

a	$a+1>a+2$	
0	$0+1>0+2$	f
5	$5+1>5+2$	f
9	$9+1>9+2$	f

Ersetzt man in der Ungleichung $a + 7 < 12$ also a durch 3, so erhält man eine wahre Aussage. Man sagt: Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $a + 7 < 12$, oder: Die Zahl 3 ist eine Lösung der Ungleichung. Ersetzt man dagegen a durch 5, so erhält man eine falsche Aussage. Die Zahl 5 erfüllt nicht die Ungleichung, sie ist nicht Lösung dieser Ungleichung. Wie aber erhält man alle die Zahlen, die diese Ungleichung erfüllen? Es müssen alle natürlichen Zahlen gefunden werden, deren Summe mit 7 kleiner als 12 ist. Alle diese Zahlen müssen also kleiner als $12 - 7$ sein. Da $12 - 7 = 5$ ist, können nur die Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4 die Ungleichung $a + 7 < 12$ erfüllen. Man kann diese Lösung auch am Zahlenstrahl veranschaulichen.

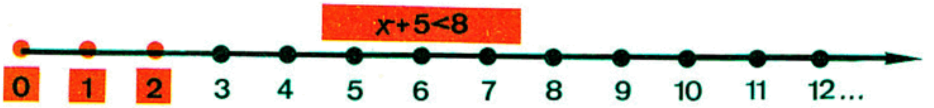
Entsprechend kann man alle natürlichen Zahlen finden, die die Ungleichung $a + 7 > 12$ erfüllen. Es müssen alle die Zahlen gefunden werden, deren Summe mit 7 größer als 12 ist. Diese Zahlen müssen also größer als $12 - 7$ sein. Daher können nur die Zahlen 6, 7, 8, ... die Ungleichung $a + 7 > 12$ erfüllen.



Für die Ungleichungen $x + 2 < 3$ und $x + 5 < 8$ ergibt sich auf diese Weise:

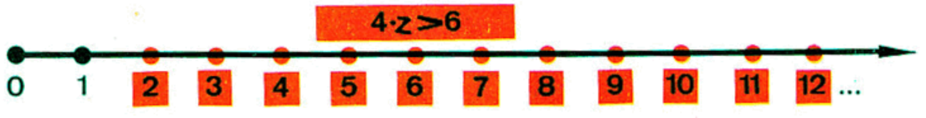
$x + 2 < 3$
Nur die Zahl 0 ist Lösung.

$x + 5 < 8$
Nur die Zahlen 0, 1 und 2 sind Lösungen.

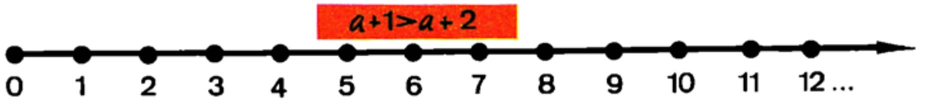


Für die Ungleichung $3 \cdot z < 15$ sind alle die natürlichen Zahlen zu finden, deren Produkt mit 3 kleiner als 15, höchstens also gleich 12 ist, denn 12 ist das nächstkleinere Vielfache von 3. Die größte solche Zahl erhält man, wenn man 12 durch 3 dividiert: $12 : 3 = 4$. Daher können nur die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4 die Ungleichung $3 \cdot z < 15$ erfüllen.

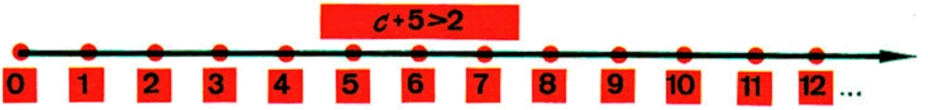
Für die Ungleichung $4 \cdot z > 6$ ergibt sich auf diese Weise: Nur die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, ... erfüllen die Ungleichung, also alle natürlichen Zahlen außer 0 und 1.



Für die Ungleichung $c + 5 < 2$ haben wir bisher noch keine Lösungen gefunden. Solche Zahlen kann es auch nicht geben, denn addiert man zu einer beliebigen natürlichen Zahl die Zahl 5, so muß deren Summe mindestens gleich 5 sein. Daher wird $c + 5 < 2$ durch keine natürliche Zahl erfüllt. Genauso ist es mit $a + 1 > a + 2$. Es gibt keine Zahl, die,



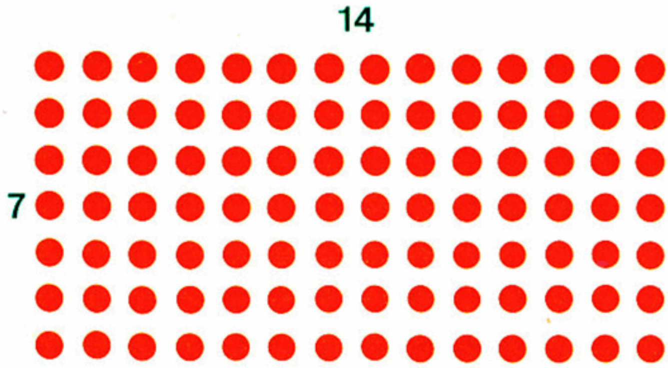
um 1 vermehrt, größer ist als um 2 vermehrt. Die Ungleichung $c + 5 > 2$ dagegen wird nicht nur von 0, 1 und 2 erfüllt, sondern jede natürliche Zahl ist Lösung dieser Ungleichung.

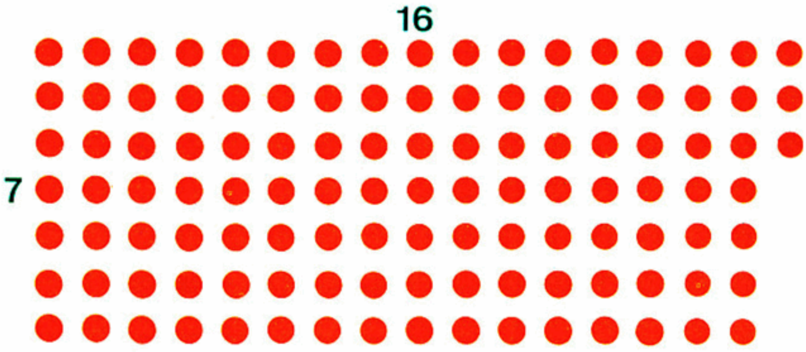


Es gibt also Ungleichungen, die von keiner natürlichen Zahl, von nur einer natürlichen Zahl, aber auch von mehreren, sogar beliebig vielen Zahlen erfüllt werden.

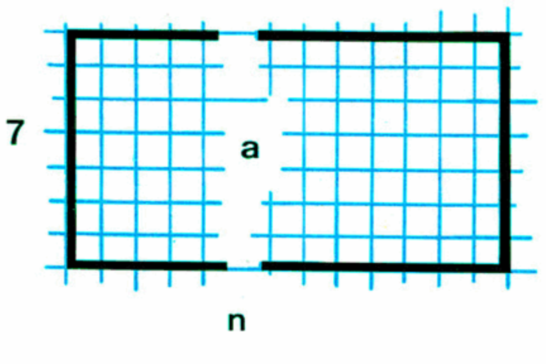
Variable
(siehe **Gleichung** und **Ungleichung**)

Vielfaches einer natürlichen Zahl Anstelle von $7 \cdot 10 = 70$ sagt man auch: *Das Zehnfache der Zahl 7 ist 70,* anstelle von $7 \cdot 4 = 28$ entsprechend *Das Vierfache von 7 ist 28.* Soll man das Fünffache von 7 bestimmen, so rechnet man: $7 \cdot 5 = 35$. Das Fünffache von 7 ist also 35. Das Vervierfachen, Verfünffachen, Verzehnfachen einer natürlichen Zahl bedeutet also, diese Zahl mit 4, 5 oder 10 zu multiplizieren. Immer, wenn man die Zahl 7 mit einer beliebigen natürlichen Zahl – nennen wir sie n – multipliziert, erhält man ein Vielfaches von 7, nämlich $7 \cdot n$.
Wir wollen nun umgekehrt eine Zahl, sagen wir 98, vorgeben und feststellen, ob sie ein Vielfaches von 7 ist. Wenn 98 ein Vielfaches von 7 ist, so muß es eine natürliche Zahl – wir wollen sie wieder n nennen – geben, mit der man 7 multipliziert, um 98 zu erhalten: $7 \cdot n = 98$. Eine solche Zahl n gibt es tatsächlich, nämlich $n = 14$, denn es ist $7 \cdot 14 = 98$. 98 ist also ein Vielfaches von 7, und zwar das Vierzehnfache von 7. Ist 115

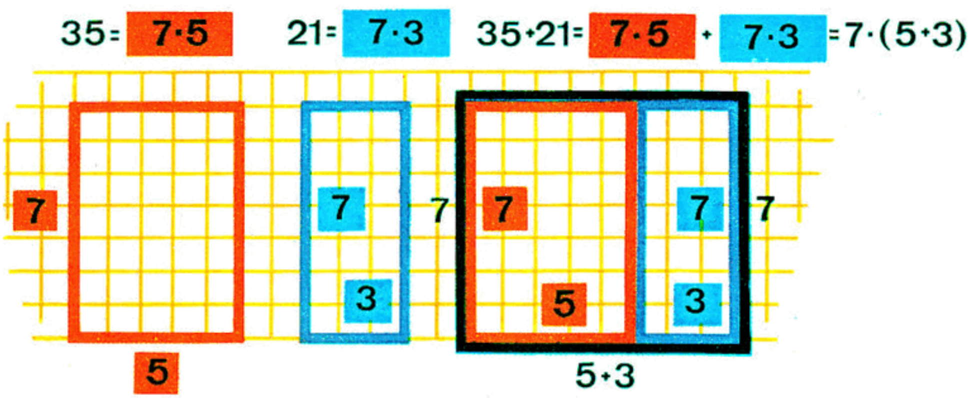




auch ein Vielfaches von 7? Dann müßte es eine natürliche Zahl n geben, so daß $7 \cdot n = 115$ ist. Da $7 \cdot 16 = 112$ und $7 \cdot 17 = 119$ ist und zwischen 16 und 17 keine natürliche Zahl liegt, gibt es keine Zahl, mit der man 7 multiplizieren muß, um 115 zu erhalten. 115 ist also nicht Vielfaches von 7. Eine beliebige natürliche Zahl a nennt man also dann ein Vielfaches von 7, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $a = 7 \cdot n$ ist. Wenn es eine



solche Zahl nicht gibt, so nennt man die Zahl a Nicht-Vielfaches von 7. Anstelle von 7 kann man selbstverständlich auch jede andere natürliche Zahl wählen. Von jeder natürlichen Zahl gibt es beliebig viele Vielfache. Addiert man zwei Vielfache einer Zahl, so muß ihre Summe stets wieder ein Vielfaches dieser Zahl sein.



Fast alle Vielfachen einer Zahl sind größer als die Zahl selbst.

$$7 \cdot 2 = 14 > 7$$
$$7 \cdot 3 = 21 > 7$$
$$7 \cdot 4 = 28 > 7$$

Nur das *Nullfache* und das Einsfache machen eine Ausnahme:

$$7 \cdot 0 = 0 < 7$$
$$7 \cdot 1 = 7 = 7$$

Daher kann man also auch nicht eine Zahl auf das Dreifache verkleinern, wie auf der Betriebswandzeitung zu lesen ist.

Ziffer Jede natürliche Zahl hat einen Namen. Diesen Namen nennt man Zahlwort. „Vier", „zwölf", aber auch „dreihundertneun" oder „fünftausendachthundertsechsundsiebzig" sind Namen für natürliche Zahlen, also Zahlworte. Anstelle der oft sehr langen Zahlworte verwendet man zur Bezeichnung der Zahlen fast immer bestimmte Zahlzeichen. Jede natürliche Zahl kann durch ein Zahlzeichen bezeichnet werden. Wir verwenden für vier das Zeichen 4, für zwölf das Zeichen 12, für dreihundertneun das Zeichen 309, für fünftausendachthundertsechsundsiebzig das Zeichen 5876. Diese Zahlzeichen nennt man auch Ziffern. Alle diese Ziffern setzen sich zusammen aus den Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese Zeichen nennt man Grundziffern. Besteht eine Ziffer aus drei Grundziffern, wie zum Beispiel 309, so sagt man: sie ist eine dreistellige Ziffer. Entsprechend ist 12 eine zweistellige, 5876 eine vierstellige Ziffer.

32 523 ist eine kurze Schreibweise für $30\,000 + 2000 + 500 + 20 + 3$ oder $3 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$.
Für 10 000 kann man auch die Potenz 10^4 setzen, denn es ist $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$. Entsprechend kann man für 1000 auch 10^3, für 100 auch 10^2 schreiben. 32 523 ist also eine verkürzte Schreibweise für $\mathbf{3} \cdot 10^4 + \mathbf{2} \cdot 10^3 + \mathbf{5} \cdot 10^2 + \mathbf{3}$.
Man sagt: Jede Grundziffer hat entsprechend ihrer Stellung innerhalb einer Ziffer einen bestimmten Stellenwert. Die 3 vorn hat den Stellenwert 10^4 oder 10 000, die 2 danach den Stellenwert 10^3 oder 1000, die 5 in der Mitte den Stellenwert 10^2 oder 100, die 2 danach den Stellenwert 10 und die 3 hinten den Stellenwert 1, da für 3 auch $\mathbf{3} \cdot 1$ geschrieben werden kann. Es kommt also darauf an, an welcher Stelle eine Grundziffer steht. In unserer Zahlenschreibweise unterscheiden sich also die Stellenwerte durch Potenzen der Basis 10. Man bezeichnet diese Zahlenschreibweise daher als Zehnersystem oder dekadisches System oder, noch genauer, als dekadisches Stellenwertsystem.
Besonders deutlich wird das Stellenwertsystem mit der Grundzahl 10, wenn man die Zahlen mit Hilfe einer Stellentafel darstellt:

	....	10^6 1 000 000	10^5 100 000	10^4 10 000	10^3 1000	10^2 100	10 10	1 1
3 400 406		3	4	0	0	4	0	6
72 061				7	2	0	6	1
300 154			3	0	0	1	5	4

Es gibt aber auch Stellenwertsysteme mit anderen Grundzahlen. Besonders wichtig ist das System mit der Grundzahl 2. Es wird genutzt, wenn man Berechnungen mit einem

Rechenautomaten ausführen läßt. Während im Zehnersystem die Stellenwerte Potenzen der Basis 10 sind, sind sie im Zweiersystem Potenzen der Basis 2. Der „Kopf" der Stellentafel der Grundzahl 2 ist also:

....	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2	1
	64	32	16	8	4	2	1

Während im Zehnersystem die zehn Grundziffern von 0 bis 9 zur Darstellung der Zahlen benötigt werden, sind es im Zweiersystem nur zwei Grundziffern, nämlich 0 und 1.

Zehnersystem	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**....**
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
Zweiersystem	**0**	**1**	**10**	**11**	**100**	**101**	**110**	**111**	**1000**	**....**

Die Ziffer 110 101 im Stellenwertsystem mit der Grundzahl 2 bedeutet also: $\mathbf{1}\cdot 2^5 + \mathbf{1}\cdot 2^4 + \mathbf{0}\cdot 2^3 + \mathbf{1}\cdot 2^2 + \mathbf{0}\cdot 2 + \mathbf{1}$. Rechnet man diese Summe aus, so erhält man: $32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 53$. Die Ziffer 110 101 im Zweiersystem stellt also die gleiche Zahl dar wie die Ziffer 53 im Zehnersystem.

Umgekehrt kommt man von der Ziffer 86 im Zehnersystem zur Ziffer der gleichen Zahl im Zweiersystem, indem man 86 in eine Summe von Zweierpotenzen zerlegt. Dabei beginnt man mit der größten Zweierpotenz, die kleiner als 86 ist: $86 = 64 + 22$. Nun zerlegt man entsprechend den zweiten Summanden 22 und so weiter. $22 = 16 + 6$, $6 = 4 + 2$. So erhält man:

$86 = 64 + 16 + 4 + 2$ oder

$86 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2$ oder

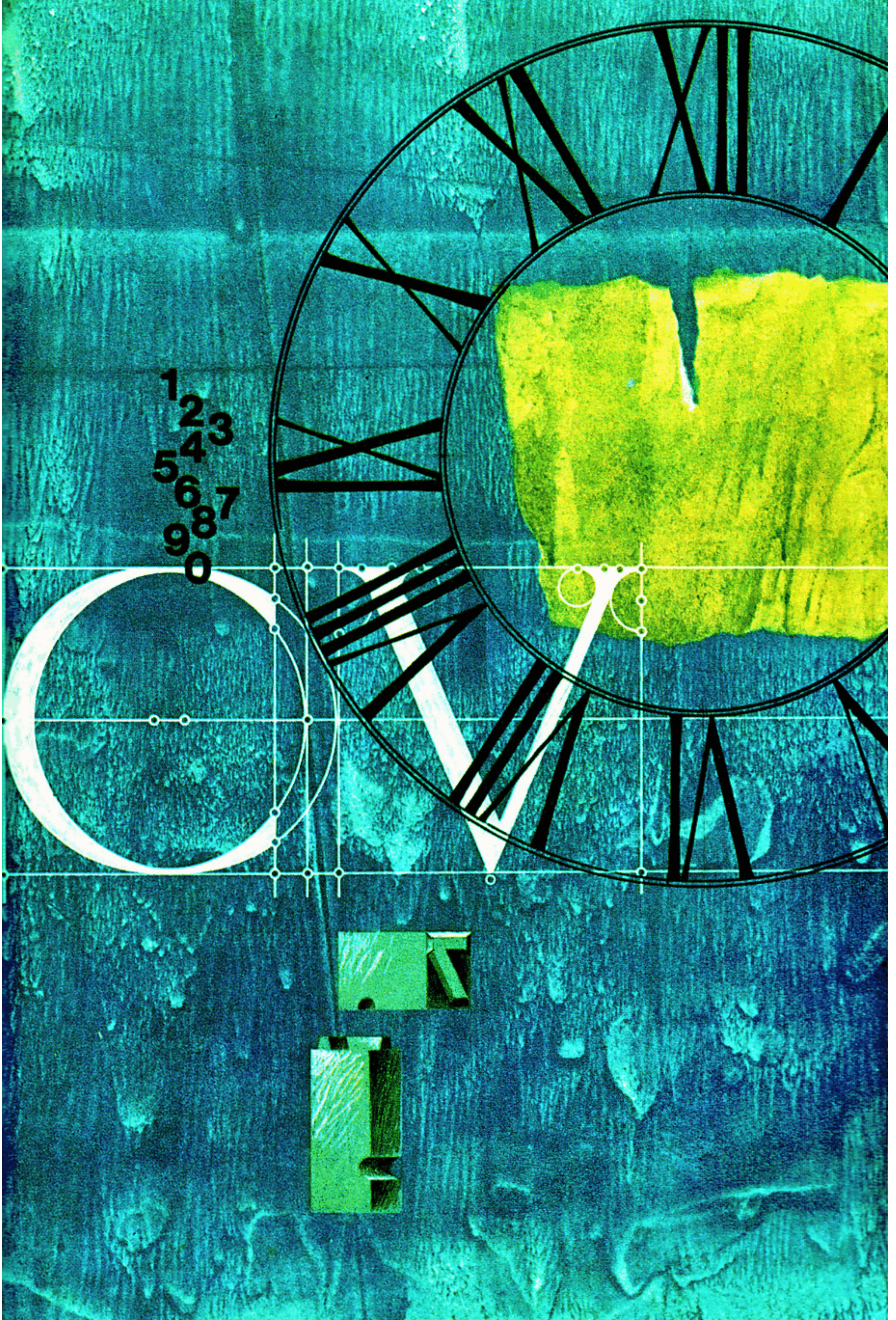
$86 = \mathbf{1}\cdot 2^6 + \mathbf{0}\cdot 2^5 + \mathbf{1}\cdot 2^4 + \mathbf{0}\cdot 2^3 + \mathbf{1}\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2 + \mathbf{0}\cdot 1$.

Die Ziffer 86 im Zehnersystem stellt also die gleiche Zahl wie die Ziffer 1010110 im Zweiersystem dar.
Wir haben uns heute so an unsere dekadische Zahlenschreibweise gewöhnt, daß wir uns kaum noch vorstellen können, daß die Menschen in früheren Zeiten ganz andere Zahlenschreibweisen benutzten. Ab und zu finden wir auch heute noch eine Zahlenschreibweise, bei der sich die Zahlzeichen aus folgenden Grundzeichen zusammensetzen:

I V X L C D M

Man nennt solche Zahlzeichen römische Zahlzeichen.
Die römische Zahlenschreibweise beruht darauf, daß jede Zahl als eine Summe oder eine Differenz der Zahlen 1 (römisch: I), 5 (römisch: V), 10 (römisch: X), 50 (römisch: L), 100 (römisch: C), 500 (römisch: D) und 1000 (römisch: M) geschrieben werden kann. Sollen die übrigen Zahlen nun als *Summe* solcher Zahlen geschrieben werden, so stehen die Grundzeichen in der Reihenfolge: links steht stets das Zeichen für die größere Zahl oder das gleiche Zeichen noch einmal. Sollen sie als *Differenz* geschrieben werden, so steht rechts das Zeichen für die größere Zahl.

1	**I**	**8** = 5 + 1 + 1 + 1	**VIII**
2 = 1 + 1	**II**	**9** = 10 − 1	**IX**
3 = 1 + 1 + 1	**III**	**10**	**X**
4 = 5 − 1	**IV**	**11** = 10 + 1	**XI**
5	**V**	**35** = 10 + 10 + 10 + 5	**XXXV**
6 = 5 + 1	**VI**	**125** = 100 + 10 + 10 + 5	**CXXV**
7 = 5 + 1 + 1	**VII**	**149** = 100 + 50 − 1	**CIL**


1234567890

Man erkennt, daß das Zeichen I stets die Zahl Eins darstellt, V stets die Zahl Fünf, gleichgültig, an welcher Stelle dieses Zeichen steht. Das System dieser Zahlenschreibweise ist daher kein Stellenwertsystem. Da die Darstellung der Zahlen in diesem Fall durch Aneinanderreihen der Grundzeichen erfolgt, das einem Addieren oder Subtrahieren entspricht, nennt man dieses System ein Additionssystem. Man erkennt leicht, wie unübersichtlich eine solche Schreibweise für Zahlen ist. Will man größere Zahlen, wie zum Beispiel 12347, darstellen, so werden die römischen Zahlzeichen für solche Zahlen sehr lang:

12347	MMMMMMMMMMMMCCCXLVII

Andererseits ist die „Länge" des Zahlzeichens kein Kennzeichen für die Größe der entsprechenden Zahl:

$99 > 88$	IC > LXXXVIII

Vor allem aber wird es schwierig, in einem solchen System zu rechnen. Hierbei vor allem erkennt man die große Überlegenheit eines Stellenwertsystems gegenüber dem Additionssystem der Römer.

$239 + 63 = 302$

$$\begin{array}{rl} & 239 \\ + & \\ & 63 \\ \hline & \mathbf{302} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 + 9 = \mathbf{12} \\ 1 + 6 + 3 = \mathbf{10} \\ 1 + 2 \quad = \mathbf{3} \end{array}$$

CCXXXIX + LXIII = CCCII

IX + I = X
X + X + X + X + X = L
L + L = C

CCCII

Der Kinderbuchverlag Berlin

Zahl, Menge, Gleichung

EVP 5,80 M

Mein kleines Lexikon

Mein kleines Lexikon ist eine für Kinder herausgegebene Serie populärwissenschaftlicher Einführungen in verschiedene Wissensgebiete, die wesentliche Begriffe in alphabetischer Reihenfolge verständlich und unterhaltsam erklären.
Mein kleines Lexikon „Zahl, Menge, Gleichung" festigt und erweitert auf dem Gebiet der Arithmetik gewonnene Kenntnisse, macht Zusammenhänge deutlich, begründet sie und erweckt Freude am Mitdenken.
In Vorbereitung sind:
„Weltall, Sterne und Planeten"
„Autos, Straßen und Verkehr"
„Bücher, Leser, Bibliotheken"