J. I. PERELMAN

Unterhaltsame GEOMETRIE

420·43-1

J. I. PERELMAN

UNTERHALTSAME GEOMETRIE

J. I. PERELMAN

UNTERHALTSAME GEOMETRIE

Eine Sammlung allgemeinverständlicher geometrischer Aufgaben

zur Unterhaltung und Übung

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG · BERLIN 1954

Titel der Originalausgabe: Я. И. Перельман, Занимательная Геометрия
Die Übersetzung besorgte das Staatssekretariat für Berufsausbildung, Berlin
Redakteur: Werner Golm, Berlin
Technischer Redakteur: Paul Padeck, Berlin

Umschlaggestaltung: Paul Padeck, Berlin
Illustration nach den Vorlagen der sowjetischen Ausgabe
vom Kollektiv Siegfried Kranl, Berlin
Bestell-Nr. 42043-1 · 3.80 DM · 1.–20. Tausend (E) · Lizenz-Nr. 203 · 1000-P-425403
Satz: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)
Druck: VEB Greif Graphischer Großbetrieb, Berlin N 54

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Die »Unterhaltsame Geometrie« ist sowohl für Freunde der Mathematik als auch für solche Leser gedacht, die Geometrie nur an der Schultafel gelernt haben oder heute noch lernen. Für viele Menschen ist die Mathematik geheimnisvoll und undurchdringlich. Sie sind nicht gewöhnt, in den uns umgebenden Dingen und Vorgängen geometrische Beziehungen zu erblicken, weil sie wenig angeregt wurden, Lehrsätze der Geometrie im praktischen Leben anzuwenden oder sich ihrer im Zeltlager, beim Wandern usw. zu bedienen.

Den Lesern die Geometrie durch eine Auswahl reizvoller und fesselnder Erscheinungen näherzubringen oder, um die Worte des Verfassers zu gebrauchen, »Freude an der Geometrie und Lust zu ihrem Studium zu erwecken«, ist die Aufgabe dieses Buches. Darum verlegt der Verfasser die Geometrie aus dem Raum der Schule hinaus ins Freie, in den Wald, aufs Feld, zum Fluß, auf die Landstraße. Dort, unter freiem Himmel, widmet er sich ohne Tafeln und ohne Lehrbücher ungezwungen dieser Wissenschaft. Er lenkt die Aufmerksamkeit des Lesers auf die Werke Puschkins, Gogols, Tschechows und anderer Dichter, findet Themen für geometrische Aufgaben in den Werken Mark Twains, Jules Vernes und Jack Londons und bietet dem Leser eine Reihe von Aufgaben aus vielen Gebieten des täglichen Lebens, deren oft überraschende Ergebnisse ihm manches Wissenswerte vermitteln.

Gerade durch die lebendige und anschauliche Darstellung ist dieses Werk auch dazu geeignet, den Geometrieunterricht in unseren Schulen zu beleben. Es ist kein geometrisches Lehrbuch, kann aber dem Lehrer zahlreiche Hinweise für die abwechslungsreiche Gestaltung des Unterrichts geben.

Wenn das Ziel erreicht wird, viele Menschen für einige Stunden durch die anregende Lektüre zu unterhalten und sie dadurch für die Probleme der Mathematik zu gewinnen, so hat dieses Buch seine Aufgabe erfüllt.

Wir danken dem Staatsverlag für theoretisch-technisches Schrifttum in Moskau/Leningrad, dessen 8. Auflage aus dem Jahre 1951 der deutschen Ausgabe zugrunde liegt. Alle in der sowjetischen Ausgabe enthaltenen Angaben, Beispiele und Formeln wurden durchgesehen und einige Angaben ergänzt.

Perelmans Buch »Unterhaltsame Geometrie« wird auch in Deutschland der Mathematik neue Freunde zuführen. Wieweit das gelungen ist, hoffen wir durch den Leser zu erfahren.

DER VERLAG

Inhaltsverzeichnis

ERSTER TEIL

Geometrie im Freien

1. Kapitel

Geometrie im Walde

2. Kapitel

Geometrie am Fluß

3. Kapitel

Geometrie auf freiem Felde

4. Kapitel

Geometrie auf der Wanderung

11. Kapitel

Das Große und das Kleine in der Geometrie

12. Kapitel

Ökonomische Geometrie

ERSTER TEIL

GEOMETRIE IM FREIEN

Die Natur spricht die Sprache der Mathematik:
die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und
andere mathematische Figuren.

GALILEI

Geometrie im Walde

Die Höhenmessung nach der Schattenlänge

Heute noch erinnere ich mich daran, wie erstaunt ich war, als ich zum ersten Male den grauhaarigen Förster sah, der neben einer hohen Kiefer stand und ihre Höhe mit Hilfe eines winzigen Tascheninstruments zu bestimmen versuchte. Als er mit dem kleinen, viereckigen Täfelchen nach der Baumkrone peilte, dachte ich, der Alte würde nun den Stamm hinaufklettern und mit der Meßkette die Höhe messen. Statt dessen steckte er sein Gerät in die Tasche und erklärte, er sei fertig. Und ich hatte mir eingebildet, er sei überhaupt erst am Anfang!

Damals war ich noch sehr jung. Ein Meßverfahren, bei dem ein Mensch die Höhe eines Stammes bestimmt, ohne ihn zu erklettern oder zu fällen, hielt ich für ein kleines Wunder. Erst später, als ich mit den Anfängen der Geometrie vertraut wurde, begriff ich, wie einfach solche »Wunder« geschehen. Es gibt verschiedene Methoden, um derartige Messungen durchzuführen, für die nur sehr primitive oder überhaupt keine Vorrichtungen gebraucht werden.

Die leichteste und wohl älteste Methode ist zweifellos die des griechischen Weisen Thales, der sechs Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung die Höhe einer ägyptischen Pyramide bestimmte. Er benutzte dazu ihren Schatten. Der Pharao und die Priester versammelten sich am Fuße der Pyramide und beobachteten erstaunt den Fremdling aus dem Norden, der die Höhe des gewaltigen Bauwerks aus seinem Schatten feststellte. Wie die Sage erzählt, wählte Thales die Stunde eines Tages, zu der die Länge des eigenen Schattens seiner Körpergröße entsprach. In diesem Augenblick mußte ja die Höhe der Pyramide ebenfalls der Länge ihres Schattens gleich sein*.

Dieses ist vielleicht der einzige Fall, daß ein Mensch aus seinem Schatten Nutzen zog.

Heute erscheint uns die Aufgabe des griechischen Weisen kindlich einfach. Vergessen wir aber nicht, daß wir auf sie von der Höhe des Gebäudes herabblicken, das nach Thales errichtet wurde. Er lebte lange vor Euklid, dem Verfasser jenes wunderbaren Werkes, nach dem die Menschheit noch zwei Jahrtausende nach seinem Tode Geometrie studiert. Die Erkenntnisse dieses Buches sind heute jedem Schulbuben vertraut, zu Thales' Zeiten waren sie aber noch unbekannt. Die Lösung der Aufgabe, die Höhe der Pyramide durch die Schattenlänge zu bestimmen, setzt einige geometrische Kenntnisse über das Dreieck voraus. Es handelt sich um zwei Eigenschaften, deren erste Thales selbst entdeckt hat:

---

* Natürlich mußte der Schatten vom Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche der Pyramide gerechnet werden. Thales konnte die Größe dieser Grundfläche ja unmittelbar messen.

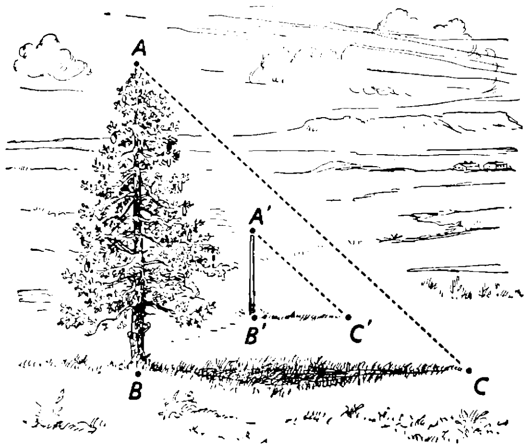


Abb. 1. Messen der Baumhöhe mit Hilfe der Schatten.

1. Die an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gelegenen Winkel sind einander gleich; umgekehrt sind die den gleichen Winkeln eines Dreiecks gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

2. Die Summe der Winkel eines beliebigen Dreiecks (also auch eines rechtwinkligen!) ist zwei rechten Winkeln gleich.

Nur mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, durfte Thales behaupten, daß die Sonnenstrahlen auf eine waagerechte Ebene unter einem halben rechten Winkel dann auftreffen, wenn sein Schatten seiner Köıperlänge gleichkam; also die Spitze der Pyramide, der Mittelpunkt ihrer Grundfläche und das Ende des Schattens ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Es hat den Anschein, als wäre dieses einfache Verfahren durchaus geeignet, an klaren, sonnigen Tagen die Höhe einzeln stehender Bäume zu messen, deren Schatten nicht mit dem Schatten der Nachbarbäume verschmelzen. In unseren Breiten ist es jedoch nicht so leicht wie in Ägypten, den richtigen Augenblick zum Messen abzupassen. Die Sonne erhebt sich nicht so hoch über den Horizont, und die Schatten sind nur im Sommer in den Mittagsstunden der Länge der sie erzeugenden

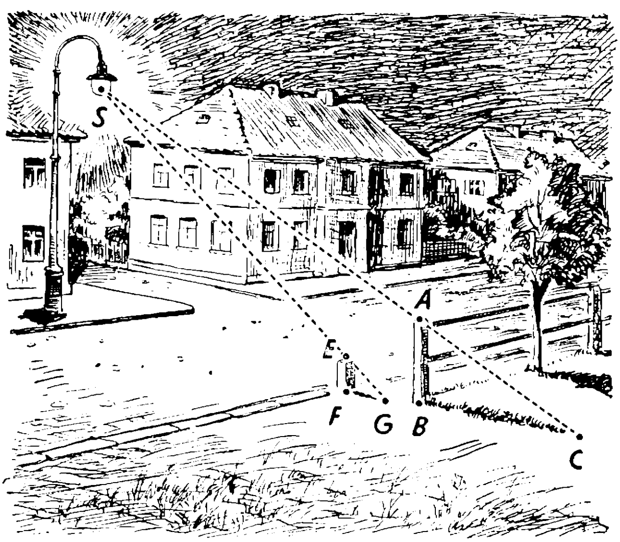


Abb. 2. Das Schattenverfahren ist unbrauchbar.

Gegenstände gleich. Daher ist das Verfahren des Thales in der beschriebenen Form für uns nicht immer anwendbar.

Es kann indessen ohne besondere Schwierigkeiten so abgeändert werden, daß man bei sonnigem Wetter einen beliebig langen Schatten benutzt. Außerdem mißt man den eigenen Schatten bzw. den Schatten eines senkrechten Stabes. Die zu messende Höhe wird durch folgende Proportion (Abb. 1) errechnet:

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

d. h. die Höhe des Baumes übersteigt die des eigenen Körpers bzw. die der Meßlatte um so viele Male, wie der Schatten des Baumes länger ist als Ihr eigener Schatten (bzw. die Schattenlänge des Stabes). Diese Tatsache ist auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ohne weiteres klar.

Mancher Leser wird vielleicht erwidern, daß ein so einfaches Verfahren überhaupt keinerlei geometrischer Begründung bedarf. Ist es denn nicht ohne weiteres klar, daß ein Baum um so höher ist, je länger sein Schatten ist? Nun, ganz so einfach ist die Sache nicht. Versuchen Sie einmal, die gleiche Regel bei Schatten anzuwenden, die durch das Licht einer Straßenlaterne oder einer Lampe geworfen werden.

Die Regel versagt! Abb. 2 zeigt, daß der Zaunpfosten AB etwa dreimal so hoch ist wie der Bordstein EF. Der Schatten des Zaunpfostens dagegen übertrifft den des Bordsteins etwa um das Achtfache ($BC : FG$). Ohne Geometrie ist es im vorliegenden Fall unmöglich zu erklären, warum unser Verfahren nicht angewendet werden kann.

Aufgabe

Betrachten wir nun die Angelegenheit näher. Der Kern der Sache ist der, daß die Sonnenstrahlen als parallel angesehen werden und die Strahlen der Straßenlaterne nicht. Diese letzte Tatsache ist ohne weiteres klar. Warum aber betrachten wir die Strahlen der Sonne als parallel, obwohl sie sich unbedingt in ihrem Entstehungspunkt schneiden?

Lösung

Die auf die Erde einfallenden Sonnenstrahlen können darum als parallel betrachtet werden, weil der Winkel zwischen den einzelnen Strahlen äußerst gering, praktisch gar nicht feststellbar ist. Sie können sich durch eine einfache Rechnung davon überzeugen. Stellen Sie sich einmal zwei von irgend einem Punkt der Sonne ausgehende Strahlen vor, die auf die Erde in einer Entfernung von einem Kilometer voneinander entfernt einfallen. Wenn wir eine Spitze des Zirkelfußes auf diesen Punkt der Sonne setzen und mit dem anderen Fuß einen Halbmesser beschreiben, dessen Länge der Entfernung zwischen der Sonne und der Erde (also etwa 150 Mill. km) gleich ist, so haben wir zwischen unseren beiden Strahlen einen Kreisbogen von einem Kilometer Länge. Der volle Umfang dieses Riesenkreises beträgt $\pi \cdot 2 \cdot 150000000$ km $= 942000000$ km. Ein Grad ist natürlich nur dem 360. Teil gleich, also etwa 2600000 km. Eine Bogenminute = rd. 43000 km, eine Bogensekunde ist 60mal kleiner und beträgt etwa 720 km. Unser Bogen mißt jedoch nur 1 km, folglich entspricht er einem Winkel von nur etwa $\frac{1}{720}$ Sekunde. Einen so

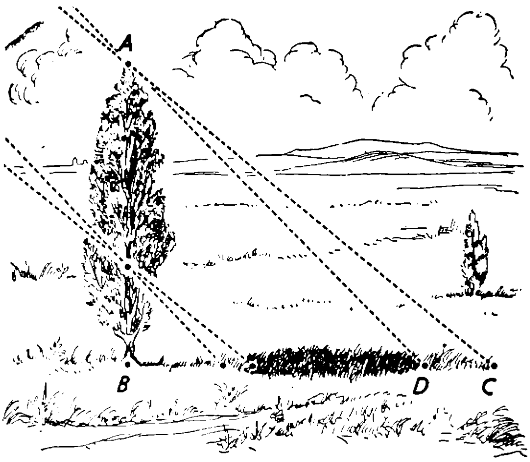


Abb. 3. Der Halbschatten bei Sonnenschein.

winzig kleinen Winkel können wir nicht einmal mit astronomischen Präzisionsgeräten messen. Daraus können wir schließen, daß die auf die Erde einfallenden Sonnenstrahlen geradlinig parallel sind*. Wären uns diese geometrischen Überlegungen unbekannt, so hätten wir keine Möglichkeit, aus der Schattenlänge die Höhe zu bestimmen.

Sollten Sie jedoch den praktischen Versuch machen, das Schattenmeßverfahren anzuwenden, so können Sie sich bald von seiner Unzuverlässigkeit überzeugen. Schatten sind niemals so deutlich abgegrenzt, daß ihre Länge wirklich genau gemessen werden kann; jeder von der Sonne geworfene Schatten weist einen unscharf begrenzten grauen Rand, den sogenannten Halbschatten auf, der den Schatten verschwommen und undeutlich macht. Die Ursache dieser Erscheinung liegt darin, daß die Sonne kein Punkt, sondern ein sehr großer leuchtender Körper ist, dessen Licht aus unzähligen Punkten ausgestrahlt wird. Abb. 3 zeigt, warum der Schatten *BC* des Baumes einen Ansatz hat, den Halbschatten *CD*, der allmählich zur Spitze hin abnimmt.

Der Winkel *CAD* zwischen den Grenzen des Halbschattens gleicht dem Winkel, unter dem die Sonnenscheibe sichtbar ist, d. h. $\frac{1}{2}$°. Dadurch entstehen Fehler beim ungenauen Messen beider Schatten; sogar bei einem verhältnismäßig hohen Stand der Sonne kann er 5% und mehr erreichen. Es kommen noch weitere Fehler hinzu, z. B. Unebenheiten des Terrains usw., so daß das Endergebnis unsicher ist. In hügeligem Gelände ist das beschriebene Verfahren gänzlich unbrauchbar.

Zwei weitere Verfahren

Die Höhen von Bäumen, Gebäuden usw. können wir auch ohne ihre Schatten bestimmen. Es gibt mehrere Verfahren. Wir beginnen mit dem einfachsten:

Als erstes wenden wir gewisse Eigenschaften eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks an; wir benutzen dazu ein recht einfaches Gerät, das wir aus einem kleinen Brett und drei Stecknadeln anfertigen. Man markiert auf einem Brett oder auf einem flachen Stück Baumrinde drei Punkte: es sind die Spitzen eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks. In jede Spitze setzen wir eine Nadel

* Anders verhält es sich bei Strahlen, die von einem bestimmten Punkt der Sonne ausgesandt werden und auf die beiden Ränder des Erddurchmessers auftreffen; der dadurch gebildete Winkel läßt sich bestimmen (17″). Durch diese Winkelbestimmung konnten die Astronomen die Entfernung zwischen Sonne und Erde messen.

(Abb. 4). Angenommen, es fehlt Ihnen ein Winkel (Gerät zum technischen Zeichnen) zum Markieren des rechten Winkels und ein Zirkel zum Abstecken der gleichen Dreieckseiten. Dann brauchen Sie nur ein beliebiges Stück Papier einmal und dann noch einmal quer so zu

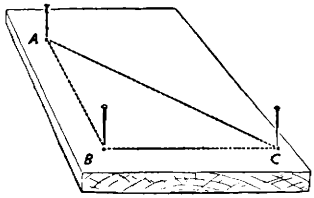


Abb. 4. Stecknadelgerät für Höhenmessungen.

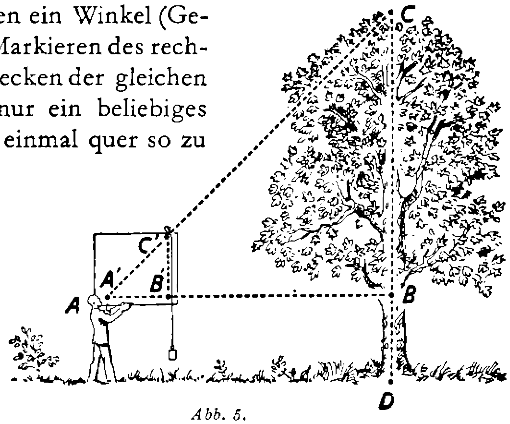


Abb. 5. Die Höhe eines Baumes wird mit dem Stecknadelgerät gemessen.

falten, daß beide Teile des ersten Falzes zusammenfallen: dadurch entsteht ein rechter Winkel. Das gleiche Stück Papier ersetzt den Zirkel zum Messen gleicher Strecken.

Sie können daraus sehen, daß man dieses Gerät auch bequem unter primitiven Verhältnissen, etwa in einem Zeltlager, anfertigen kann.

Genau so einfach, wie Sie das Gerät hergestellt haben, kann es verwendet werden. Entfernen Sie sich etwas von dem zu messenden Baum und halten Sie das Gerät so, daß die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks senkrecht nach oben zeigt! Zu diesem Zweck benutze man ein Gewicht als Lot, das Sie mit einem Faden an die eine Stecknadel am Brett anbinden. Wenn Sie sich nun abwechselnd dem Baum nähern und sich wieder von ihm entfernen, finden Sie stets einen Ort A (Abb. 5), von dem aus Sie die beiden Nadelspitzen A' und C' mit der Baumspitze C in Dekkung sehen. Das heißt mit anderen Worten, daß die Fortsetzung der Hypotenuse $A'C'$ durch den Punkt C geht. In diesem Fall ist die Entfernung $AB = CB$, weil Winkel $C'A'B' = 45°$ ist.

Haben wir also die Entfernung AB (oder die entsprechende Entfernung AD, falls das Gelände eben ist) gemessen und BD, d. h. die Entfernung des Auges über der Erdoberfläche, hinzugezählt, so erhalten wir die gesuchte Höhe des Baumes.

Nach einem anderen Verfahren können Sie sogar die Stecknadelapparatur entbehren. Sie benutzen dabei eine Meßlatte, die Sie senkrecht so in die Erde stecken, daß der oberhalb

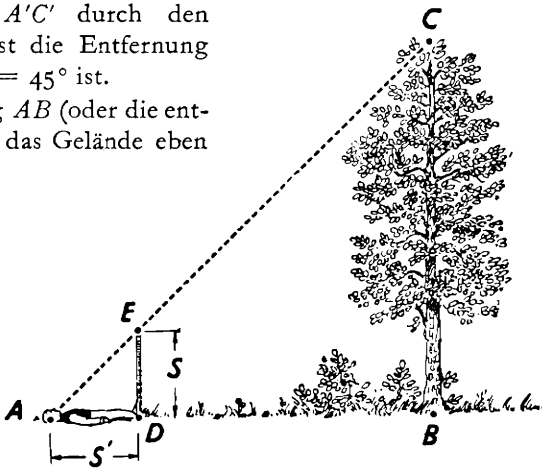


Abb. 6. Ein weiteres Höhenmeßverfahren.

der Erdoberfläche stehende Teil genau Ihrer Körperlänge entspricht und daß die Spitze des Stabes und der Baumgipfel auf einer Geraden liegen, wenn Sie (siehe Abb. 6) sich flach auf den Rücken legen und die beiden genannten Punkte betrachten. Da das Dreieck ADE gleichschenklig-rechtwinklig ist, so ist der Winkel $EAD = 45°$. Folglich ist $AB = BC$, d. h., AB ist die gesuchte Höhe des Baumes.

Das Jules-Verne-Verfahren

In seinem bekannten Roman »Die geheimnisvolle Insel« beschreibt Jules Verne anschaulich das folgende, ebenfalls sehr einfache Verfahren zur Messung hoher Gegenstände.

»Heute wollen wir die Höhe des ›Platzes der schönen Aussicht‹ messen«, sagte der Ingenieur.

»Sie werden wohl dazu irgendein Instrument brauchen?« fragte Herbert.

»Nein, ich brauche keines. Wir werden hier anders vorgehen, und dennoch ist das Verfahren einfach und genau.«

Der Jüngling, stets bemüht, etwas Neues zu lernen, folgte dem Ingenieur, der inzwischen den Granitfelsen hinuntergeklettert war und den Strand erreicht hatte.

Nun ergriff der Ingenieur eine gerade, etwa 12 Fuß lange Holzstange und maß ihre Länge möglichst genau, indem er sie mit seiner eigenen Körperlänge verglich, deren Maß ihm natürlich bekannt war. Herbert trug ein Lot, das ihm der Ingenieur in die Hand gedrückt hatte und das einfach aus einem Stein und einem Bindfaden bestand.

Der Ingenieur blieb in einem Abstand von etwa 500 Fuß vor dem senkrechten Felsen stehen, grub die Holzstange etwa 2 Fuß tief in den Ufersand ein, stampfte ihn fest und prüfte die senkrechte Lage der Stange mit Hilfe des Lotes.

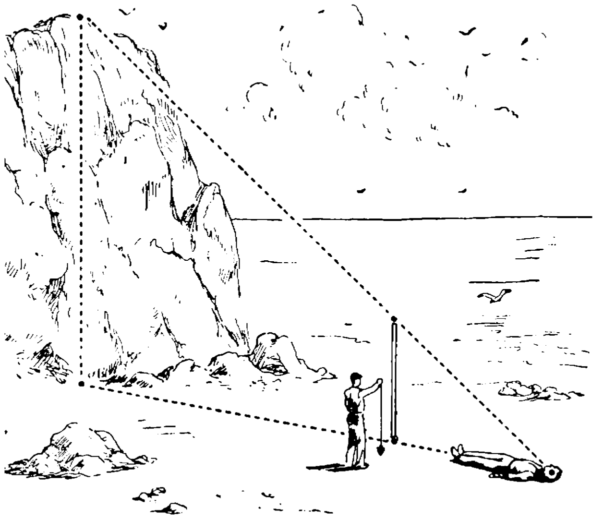


Abb. 7. Die Helden bei Jules Verne ermitteln die Höhe der Felsen.

Dann trat er zurück und legte sich platt auf den Rücken, und zwar so, daß er in dieser Lage den Felsenkamm und die Pfahlspitze in Deckung sah (Abb. 7). Sorgfältig steckte er diesen Punkt mit einem kleinen Pflock ab.

»Kennst du die Anfänge der Geometrie?« fragte er Herbert, indem er aufstand und den Sand von seinem Rock abklopfte.

»Ja.«

»Erinnerst du dich an die Eigenschaften ähnlicher Dreiecke?«

»Gewiß! Ihre ähnlichen Seiten sind doch proportional.«

»Stimmt! Ich werde jetzt zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke konstruieren. Die eine Kathete des kleineren Dreiecks ist die Stange, d. h. unser Pfahl, die andere ist die Entfernung zwischen dem Pflock und dem Fußpunkt der Holzstange; die Hypotenuse ist die Entfernung zwischen Auge und Pfahlspitze. Das große Dreieck besitzt als Katheten erstens die Felsenwand, deren Höhe ich bestimmen will, zweitens die Entfernung zwischen dem Pflock, d. h. meinem Auge und der Grundlinie der Felsenwand; die Hypotenuse ist meine Sehlinie, d. h. die Fortsetzung der Hypotenuse des ersten Dreiecks.«

»Aha, ich verstehe!« rief der Knabe, »die Entfernung zwischen dem Pflock und dem Fußpunkt der Holzstange verhält sich zu der Entfernung zwischen Pflock und Fels wie die Höhe des Pfahls zu der Höhe der Felswand.«

»Richtig! Messen wir also die beiden ersten Entfernungen und kennen wir die Höhe unseres Pfahls, so sind wir in der Lage, das unbekannte vierte Glied der Proportion, d. h. die Felsenhöhe, zu berechnen. Wir brauchen daher die Felsenhöhe nicht unmittelbar zu messen.«

Nun wurden beide waagerechten Entfernungen gemessen: die kleinere betrug 15, die größere 500 Fuß.

Als sie mit dem Messen fertig waren, schrieb der Ingenieur folgende Proportion nieder:

$$\begin{aligned} 15 : 500 &= 10 : x \\ 15x &= 5000 \\ x &= 5000 : 15 \\ x &= 333{,}3 \end{aligned}$$

Also war der Granitfels 333 Fuß hoch.

Was tat der Sergeant?

Einige der beschriebenen Meßverfahren sind lästig, weil man gezwungen ist, sich der Länge nach auf den Boden zu legen. Diese unbequeme Lage kann man aber vermeiden. Folgendes ereignete sich eines Tages an der Front während des Großen Vaterländischen Krieges. Der von Leutnant Iwandjuk befehligte Truppenteil erhielt den Befehl, eine Brücke über einen breiten Gebirgsbach zu schlagen. Am anderen Ufer hatte sich der Feind verschanzt. Der Leutnant schickte einen Spähtrupp unter dem Befehl des Sergeanten Popow aus, der die Lage erkunden sollte. Der Spähtrupp maß den Durchmesser und die Höhe der Stämme in dem in der Nähe gelegenen Waldstück und wählte eine Anzahl passender Bäume für den Bau einer Brücke aus. Die Baumhöhe wurde mit Hilfe eines Pfahles gemessen (Abb. 8).

Das Verfahren sieht folgendermaßen aus:

Einen Pfahl, dessen Länge unsere Körpergröße übertrifft, stecken wir in einer bestimmten Entfernung von dem zu messenden Baum in die Erde. Wir treten etwas zurück auf der Fortsetzung der Geraden ED bis zu dem Punkt A, von dem aus wir feststellen, daß Baum- und Pfahlspitze C und C' sowie unser Auge eine Gerade bilden. Darauf beobachten wir, ohne die Körperhaltung zu ändern, in der Richtung

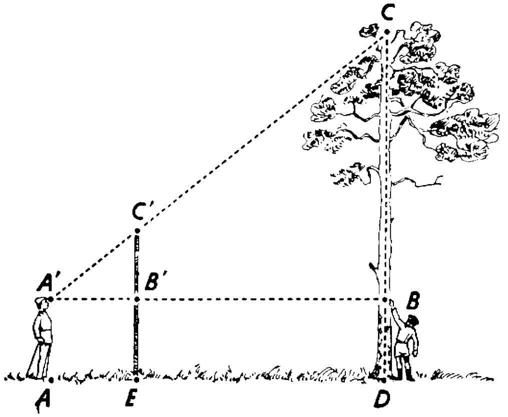


Abb. 8. Messen der Baumhöhe mit dem Pfahl.

$A'B$ und merken uns die Punkte B' und B, in denen unsere Sehlinie den Pfahl und den Baumstamm schneidet. Unser Helfer muß diese Schnittpunkte einkerben und beendet damit die Beobachtung. Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke $A'B'C'$ und $A'BC$ bleibt nur noch übrig, aus der Proportion

$$BC : B'C' = A'B : A'B'$$

BC zu berechnen. Wir ermitteln:

$$BC = B'C' \cdot \frac{A'B}{A'B'} .$$

Die Strecken $B'C'$ und $A'B'$ lassen sich unmittelbar leicht messen. Wir fügen der so ermittelten Länge BC noch BD hinzu und stellen auf diese Weise die gesuchte Höhe des Baumes fest.

Zur Bestimmung der Anzahl der Bäume befahl der Sergeant den Soldaten, die Fläche des Waldstückes auszumessen. Dann zählte er die Bäume auf einem kleinen Stück von 50 m · 50 m und stellte durch Multiplikation den gesamten Baumbestand fest.

Durch die von dem Spähtrupp ermittelten Unterlagen konnte nunmehr der Kommandeur Ort und Art der zu bauenden Brücke bestimmen. Die Brücke wurde rechtzeitig geschlagen und der Auftrag somit erfolgreich ausgeführt.

Mit Hilfe des Notizbuches

Sofern Ihrem Notizbuch ein Bleistift beigefügt ist, wie er häufig, in einer kleinen Lederschlaufe steckend, mitgeliefert wird, können Sie ihn ebenfalls als Meßgerät benutzen, mit dessen Hilfe man die Höhe eines unzugänglichen Gegenstandes bestimmen kann. Das Notizbuch ist ein Hilfsmittel, durch das Sie die beiden ähnlichen Dreiecke zur Feststellung der Höhe konstruieren können. Sie halten das Buch senkrecht zwischen Ihren Augen, wie es in der vereinfachten Skizze (Abb. 9) dargestellt ist. Das Notizbuch zeigt mit der Kante nach der Höhe hin, der Bleistift wird über die obere Kante so hochgehoben, daß Sie von A' aus die Baumspitze B und die Bleistift-

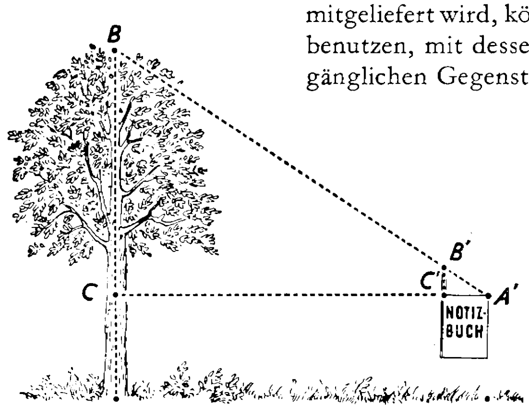


Abb. 9. Messen der Baumhöhe mit dem Notizbuch.

spitze B' in Deckung sehen. Auf Grund der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $A'B'C'$ und ABC läßt sich die Höhe BC mit Hilfe der Proportion

$$BC : B'C' = A'C : A'C'$$

errechnen. Die Entfernungen $B'C'$, $A'C'$ und $A'C$ werden unmittelbar gemessen. Sie fügen der erhaltenen Größe noch die Größe CD hinzu, – CD ist die Augenhöhe über dem ebenen Boden.

Da die Breite des Notizbuches $A'C'$ konstant ist, so hängt die Höhenbestimmung des Baumes, sofern Sie sich immer in der gleichen Entfernung vom Baum aufstellen (z. B. 10 m), nur von dem aus dem Notizbuch herausragenden Teil des Bleistifts ab. Sie können daher die Höhe, die einer größeren oder kleineren Länge des hinausgehobenen Bleistifts entspricht, von vornherein berechnen und die entsprechenden Zahlen auf dem Bleistift einkerben. Ihr Notizbuch wird damit zu einem einfachen Höhenmeßgerät, da Sie mit seiner Hilfe die jeweilige Höhe unmittelbar bestimmen können.

Ohne sich dem Baum zu nähern

Es kommt vor, daß es aus diesem oder jenem Grunde nicht möglich ist, dicht an den Baum heranzugehen. Kann man die Höhe trotzdem bestimmen?

Ja, selbstverständlich! Zu diesem Zwecke ist ein recht sinnreiches Gerät erfunden worden. Genau wie die vorher beschriebenen Instrumente kann man es selbst leicht herstellen. Man setzt zwei dünne Leisten EF und GH (siehe Abb. 10 oben) so zusammen, daß $EF = FG$ und $FH = \frac{EF}{2}$ ist. Das ist die ganze Kunst. Um die Höhe zu messen, hält man das Gerät so in der Hand, daß die Leiste GH senkrecht nach oben zeigt (zu diesem Zwecke bringt man am besten ein Lot an dem Gerät an).

Dann stellt man sich an folgenden Punkten auf: zuerst im Punkt A, wobei man das Gerät mit der Leiste G nach oben hält; sodann am Punkt A', also etwas weiter als A, und hält das Gerät so, daß jetzt das Ende H nach oben zeigt. Man wählt den Punkt A derart, daß das Leistenende G und die Baumspitze B in Deckung liegen, wenn man von E schaut. Der Punkt A' wird so gewählt, daß beim Beobachten des Punktes H' von A' aus B und H' einander decken. Gemessen wird nur die Entfernung zwischen A und A'*, weil der gesuchte Teil der Höhe des Baumes BC der Entfernung AA' gleich ist. Die

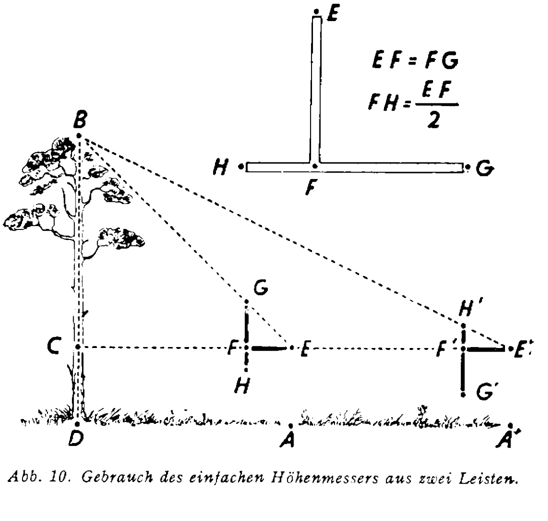


Abb. 10. Gebrauch des einfachen Höhenmessers aus zwei Leisten.

* Diese beiden Punkte müssen mit dem Fuß des Baumstammes unbedingt eine Gerade bilden.

Gleichheit der Entfernungen ist offensichtlich darauf zurückzuführen, daß $EC = BC$ und $E'C = 2BC$ ist; folglich ist

$$E'C - EC = BC.$$

Man ersieht daraus, daß beim Gebrauch dieses einfachen Gerätes die Baumhöhe gemessen werden kann, wenn dabei ein Abstand vom Baum beibehalten wird, der mindestens so groß ist wie seine Höhe.

Ist man dagegen in der Lage, an ihn direkt heranzugehen, so genügt es, nur einen einzigen Punkt – A oder A' – festzulegen, um die Höhe zu messen.

An Stelle der zwei Leisten kann man auch ein kleines Brett verwenden, in das man 4 Stecknadeln entsprechend einsteckt. In dieser Form ist das Gerät noch einfacher.

Der Höhenmesser des Försters

Es ist nunmehr an der Zeit zu erklären, wie die »richtigen« Höhenmesser beschaffen sind, die die Forstbeamten in ihrem Beruf verwenden.

Nachstehend wird solch ein Höhenmesser beschrieben. Seine Konstruktion ist etwas abgewandelt, damit das Gerät leicht selbst angefertigt werden kann. Das Messen mit dieser Vorrichtung ist aus der Zeichnung (Abb. 11) zu erkennen. Ein aus Pappe oder Holz angefertigtes Rechteck $EFGH$ hält man so in der Hand, daß man längs der Kante EF die Baumspitze B erblickt. In dem Winkel EFG hängt ein Lot q. Man merkt sich den Punkt N, in dem sich der Lotfaden und die Gerade GH schneiden. Die Dreiecke FBC und FNG sind ähnlich, denn sie sind rechtwinklig und ihre Winkel FBC und FNG sind außerdem gleich (die Seiten sind entsprechend parallel). Wir dürfen also ohne weiteres folgende Proportion niederschreiben:

$$BC : NG = FC : FG$$

Daraus folgt:

$$BC = FC \cdot \frac{NG}{FG}$$

Da FC und FG unmittelbar meßbar sind, erhält man sehr leicht die gesuchte Höhe des Baumes, wenn man zu dem Ergebnis die Länge des unteren Stammteiles, d. h. die Höhe des Geräts über dem Boden, hinzuzählt.

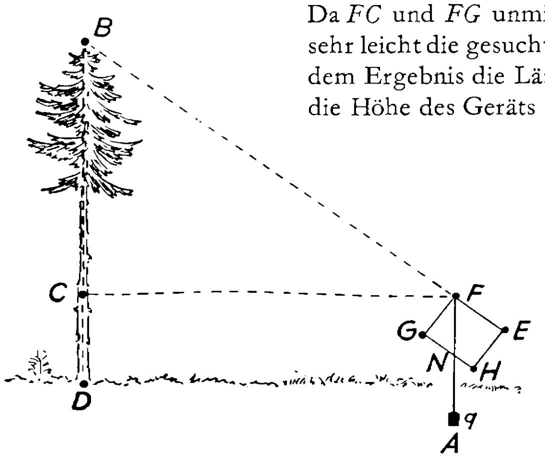


Abb. 11. Zeichnung für den Gebrauch des Höhenmessers des Försters.

Es seien noch einige Verbesserungen erwähnt. Sieht man für die Kante FG des Brettes eine Länge von 10 cm vor und eicht auch HG in cm, so wird das Verhältnis $\frac{NG}{FG}$ immer durch einen Dezimalbruch ausgedrückt; dieser Bruch zeigt unmittelbar, welchen Teil der Entfernung FC, bezogen auf die Höhe BC, ausmacht. Nehmen wir einmal an, der Lotfaden deckt den Teilstrich 7 (d. h. $NG = 7$ cm), so bedeutet das, daß die Höhe des Baumes über der Augenhöhe 0,7 der Entfernung zwischen dem Auge des Beobachters und dem Stamm beträgt.

Eine weitere Verbesserung bezieht sich auf die Beobachtungsmethode. Damit man einen bequemen Blick längs der Geraden EF hat, biegt man an den oberen Ecken des Papprechtecks zwei kleinere Quadrate ab und versieht diese mit Löchern. Man sieht dann ein kleines Loch zum Durchschauen und ein zweites größeres zum Anvisieren der Baumspitze vor (Abb. 12).

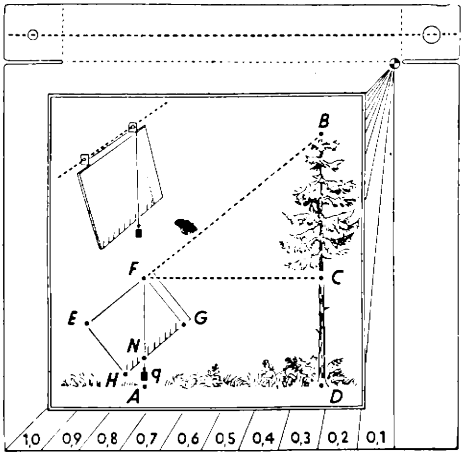


Abb. 12. Der Höhenmesser des Försters.

Noch genauer und sicherer ist das auf der Abb. 12 beinahe in natürlicher Größe gezeigte Gerät. Ein Instrument dieser Bauart läßt sich mit sehr einfachen Mitteln herstellen und erfordert keine besondere Fertigkeit. Es beansprucht nur sehr wenig Platz und gestattet, während eines Ausflugs die Höhe der unterwegs angetroffenen Gegenstände, Bäume, Masten oder Gebäude sofort festzustellen.

Aufgabe

Läßt sich mit Hilfe des soeben beschriebenen Geräts die Höhe von Bäumen messen, die nicht unmittelbar zugänglich sind? Wenn ja, wie verfährt man in solchen Fällen?

Lösung

Man richtet das Gerät auf die Baumspitze B (Abb. 13), abwechselnd von zwei Punkten A und A' aus. Nehmen wir an, daß wir durch die Messung von Punkt A aus $BC = 0{,}9\,AC$ und durch die Messung von Punkt A' aus $BC = 0{,}4\,A'C$ ermittelt haben. Wir wissen dann, daß

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}$$

und $$A'C = \frac{BC}{0{,}4}$$ ist.

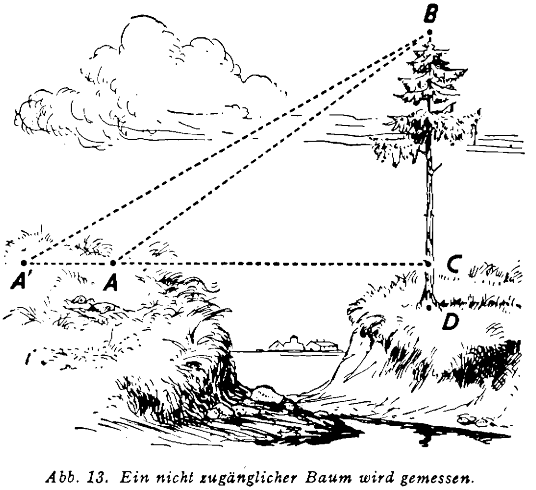


Abb. 13. Ein nicht zugänglicher Baum wird gemessen.

Daraus folgt:

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18}\,BC$$

$$AA' = \frac{25}{18}\,BC \quad \text{bzw.} \quad BC = \frac{18}{25}\,AA' = 0{,}72\,AA'$$

Sie ersehen aus dieser Rechnung, daß wir eine unzugängliche und »uneinnehmbare« Höhe gemessen haben, indem wir die Entfernung AA' zwischen den beiden Beobachtungsstandpunkten feststellten und einen bestimmten Teil dieser Größe als Ergebnis bekommen haben.

Mit Hilfe eines Spiegels...

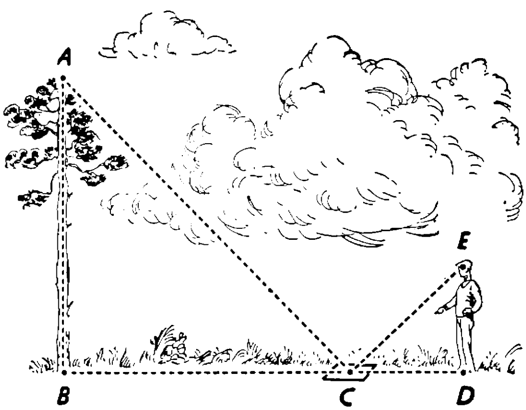


Abb. 14. Höhenmessung mit dem Spiegel.

Und hier bringen wir eine weitere, recht eigenartige Methode der Höhenbestimmung mit Hilfe eines Spiegels. Wir legen in einem gewissen Abstand von dem Baum (Abb. 14) im Punkt C einen Spiegel waagerecht auf den Boden; dann treten wir etwas zurück bis zu dem Punkt D, von dem wir die Baumspitze A im Spiegel erblicken. Der Baum (AB) ist so viele Male höher als der Beobachter (ED), wie die Entfernung BC zwischen Spiegel und Baum größer ist als die Entfernung CD zwischen Spiegel und Beobachter. Warum?

Lösung

Das Verfahren beruht auf der Lichtspiegelung. Die Baumspitze A wird in dem Punkt A' reflektiert (siehe Abb. 15), so daß AB gleich $A'B$ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCA' und CED folgt

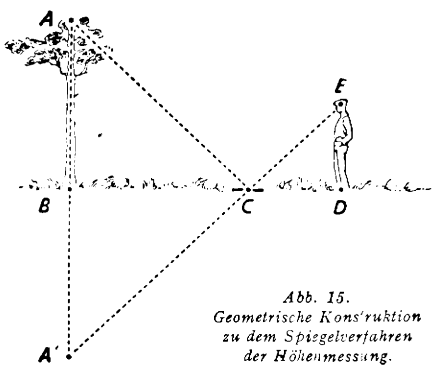


Abb. 15. Geometrische Konstruktion zu dem Spiegelverfahren der Höhenmessung.

$$A'B : ED = BC : CD.$$

Wir brauchen in dieser Proportion nur $A'B$ durch die gleichlange Strecke AB zu ersetzen, um das in der Aufgabe erwähnte richtige Verhältnis zu erzielen,

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$$

$$\text{und} \quad AB = ED \cdot \frac{BC}{CD}$$

Dieses bequeme, nur wenige Handgriffe beanspruchende Verfahren kann bei jedem Wetter angewendet werden; allerdings nicht in einem dichten Waldbestand, sondern nur bei einzeln stehenden Bäumen.

Aufgabe

Wie verfährt man, wenn man aus irgendeinem Grund nicht unmittelbar an den Baum herantreten kann?

Lösung

Das ist eine sehr alte Aufgabe, die seit 500 Jahren besteht. Der Mathematiker Antonius de Cremona (um 1400) erwähnt sie in seinem Werk »Über praktische Erdmessungen«.

Wir wenden das oben beschriebene Spiegelverfahren zweimal von verschiedenen Orten D und D' an und erhalten die Proportionen (siehe Abb. 16):

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \quad \text{und} \quad \frac{AB}{E'D'} = \frac{BC'}{C'D'}$$

Wenn wir beachten, daß $E'D' = ED$ ist, so ergibt sich für BC und BC'

$$BC = \frac{AB}{ED} \cdot CD$$

$$BC' = \frac{AB}{ED} \cdot C'D'.$$

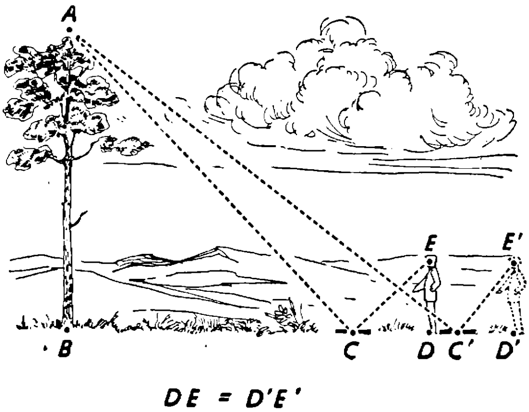


Abb. 16. Das Spiegelverfahren wird zweimal angewendet.

Damit erhalten wir die Möglichkeit, die nicht zu messenden Größen BC und BC' durch den meßbaren Abstand der beiden Spiegellagen zu ersetzen.

$$BC' - BC = CC'$$

$$CC' = \frac{AB}{ED} \cdot C'D' - \frac{AB}{ED} \cdot CD$$

$$CC' = \frac{AB}{ED} (C'D' - CD)$$

Die von uns gesuchte Baumhöhe AB ist also

$$AB = ED \cdot \frac{CC'}{C'D' - CD}.$$

Die gesuchte Baumhöhe ist also gleich der Augenhöhe des Beobachters über dem Boden multipliziert mit dem Verhältnis der beiden Spiegellagen zur Differenz der Entfernung zwischen Beobachter und Spiegel.

Die Form des Baumstammes

Sie sind nun gut gerüstet und können während des Spazierganges im Walde die Höhe eines jeden beliebigen Baumes bestimmen. Zu diesem Zweck verfügen Sie über ein halbes Dutzend verschiedener Verfahren. Manchmal dürfte auch die Bestimmung des *Volumens* interessant sein, man will doch hie und da wissen, wieviel Festmeter Holz so ein Baum ergibt. Auch das *Gewicht* zu kennen, ist manchmal sehr nützlich, – man ist oft gezwungen, eine Entscheidung zu treffen, ob z. B. ein Bauernwagen genügt, um den Stamm abzufahren. Beide Aufgaben sind nicht ganz so einfach wie die Höhenbestimmung. Fachleute haben keine *genauen* Lösungsverfahren ausgearbeitet und begnügen sich mit einer mehr oder weniger genauen Schätzung. Die Aufgabe ist nicht einmal bei einem von Ästen befreiten und auf der Erde vor uns liegenden Stamm einfach.

Die Ursache liegt darin, daß ein Baumstamm, mag er noch so glatt sein und keine Dickten aufweisen, weder einen Zylinder, noch Kegel, noch Kegelstumpf darstellt; ja, er gehört überhaupt nicht zu jenen geometrischen Körpern, deren Volumen sich nach einer bestimmten Formel errechnen läßt. Wir haben es nicht mit einem Zylinder zu tun, denn der Stamm verjüngt sich nach der Spitze hin; er ist aber auch kein Kegel, weil seine Mantellinie nicht gerade, sondern gekrümmt ist, und zwar bildet sie nicht etwa einen Kreisbogen, nein – sie ist ganz anders geformt: Sie ist eine Kurve, die mit ihrem erhabenen Teil der Stammachse zugekehrt ist*.

Die einigermaßen genaue Volumenberechnung eines Baumstammes ist nur mit Hilfe der Integralrechnung möglich. Manchem Leser mag es vielleicht sonderbar erscheinen, daß man zur höheren Mathematik greifen muß, um einen einfachen Baumstamm zu bestimmen. Viele Menschen sind der Meinung, daß die höhere Mathematik sich nur auf ganz bestimmte Dinge bezieht und daß man im täglichen Leben ausschließlich mit der Elementarmathematik auskommt. Diese Annahme ist falsch. Man kann wohl z. B. das Volumen eines Planeten oder eines Sterns mit Hilfe der einfachen Geometrie berechnen; handelt es sich aber um die genaue Bestimmung des Volumens eines langen Stammes oder eines Bierfasses, so wird die analytische Geometrie und die Integralrechnung unentbehrlich.

Unser Büchlein setzt indessen keine Kenntnisse der höheren Mathematik voraus; wir müssen uns daher begnügen, das Volumen des Stammes angenähert zu bestimmen. Wir gehen von der Annahme aus, daß das Volumen des Stammes dem Volumen eines Kegelstumpfes ungefähr gleichkommt; dabei ähnelt der von Ästen befreite lange Stamm eher einem Kegel, ein kurzer dagegen einem Zylinder. Das Volumen aller drei Körper läßt sich leicht berechnen. Gibt es vielleicht eine Formel zur Volumenberechnung, mit deren Hilfe wir gleich sämtliche drei genannten Körper ermitteln können? In diesem Falle wäre eine angenäherte Volumenberechnung des Stammes möglich, wobei wir seine Form – ob Kegel, Kegelstumpf oder Zylinder – unberücksichtigt lassen könnten.

Die Universalformel

Jawohl, diese Formel gibt es! Es geht sogar noch weiter: Diese Formel ist nicht nur für die Volumenberechnung eines Zylinders, eines Kegels oder Kegelstumpfes,

* Die Kurve ähnelt wohl am meisten der sogenannten Neilschen Parabel ($y^3 = ax^2$). Ein durch Rotation dieser Parabel entstehender Körper heißt das »Neiloid« (genannt nach dem im Mittelalter bekannten Mathematiker Neil, der ein Verfahren zur Bestimmung der Bogenlänge einer derartigen Kurve fand). Der Stamm eines im Walde gewachsenen Baumes ist einem Neiloid sehr ähnlich. Die Volumenberechnung eines Neiloides erfolgt mit Hilfe der höheren Mathematik.

sondern auch für Prismen aller Art, für Pyramiden oder Pyramidenstümpfe, ja sogar für die Kugel brauchbar. Nachstehend geben wir diese (unter der Bezeichnung Simpsonsche Formel bekannte) ausgezeichnete Formel wieder:

$$V = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3)$$

wobei h – die Höhe des Körpers

b_1 – die untere Grundfläche

b_2 – die mittlere* Grundfläche

b_3 – die obere Grundfläche ist.

Aufgabe

Beweisen Sie, daß mit Hilfe der dargestellten Formel das Volumen folgender sieben geometrischen Körper bestimmt werden kann: Prisma, Pyramide, Pyramidenstumpf, Zylinder, Kegel, Kegelstumpf und Kugel.

Lösung

Von der Richtigkeit der Formel kann man sich leicht überzeugen, indem man sie bei den aufgezählten Körpern anwendet.

Für Prisma und Zylinder erhalten wir (Abb. 17a)

$$V = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h$$

für Kegel und Pyramide gilt (Abb. 17b)

$$V = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1 h}{3}$$

und für den Kegelstumpf (Abb. 17c)

$$V = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right]$$

$$= \frac{h}{6}(\pi R^2 + \pi R^2 + \pi 2Rr + \pi r^2 + \pi r^2)$$

$$V = \pi\frac{h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

In ähnlicher Weise erfolgt der Beweis für den Pyramidenstumpf; bei der Kugel (Abb. 17d) sieht die Formel dann folgendermaßen aus:

$$V = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

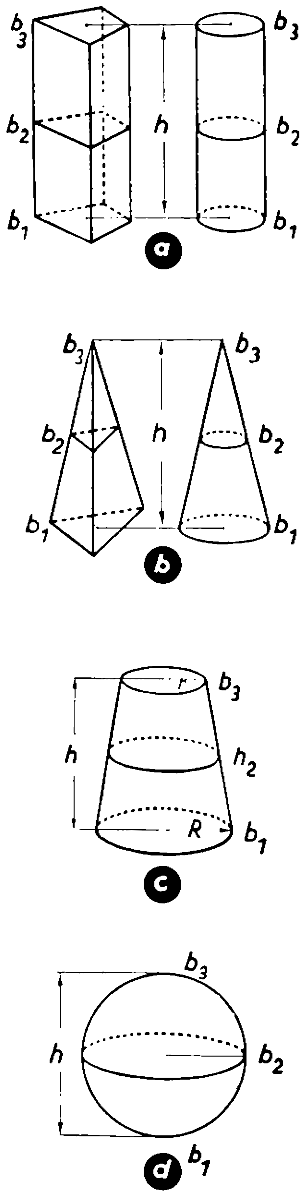


Abb. 17. Geometrische Körper, deren Volumen mit Hilfe einer einzigen Formel bestimmt werden können.

* Mittlere Grundfläche ist die Fläche des Querschnittes in dem Höhenmittelpunkt des Körpers.

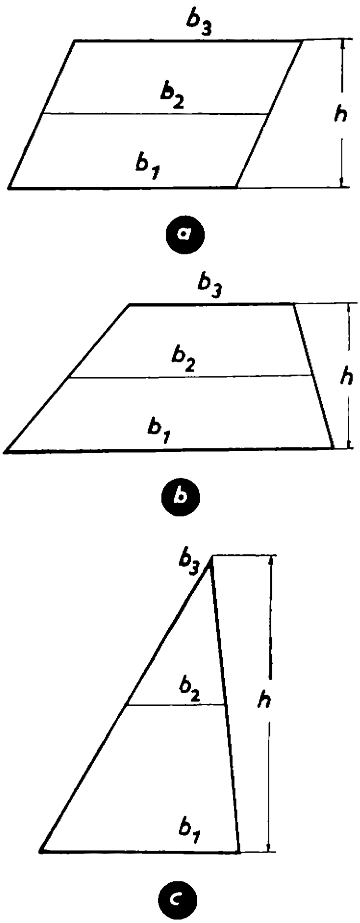


Abb. 18. Mit der Einheitsformel können auch Flächen berechnet werden.

Aufgabe

Wir weisen auf eine weitere Eigenart unserer Universalformel hin: Sie ist für die Berechnung der Fläche

eines Parallelogramms
eines Trapezes
eines Dreiecks

ebenfalls brauchbar, sofern wir wie oben

h – für die Höhe einer Figur
b_1 – für die Länge der unteren Grundlinie
b_2 – für die Länge der mittleren Grundlinie
b_2 – für die Länge der oberen Grundlinie

einsetzen.

Wir wollen uns überzeugen, daß auch diese Behauptung richtig ist.

Lösung

Es gelten folgende Beziehungen:
Für das Parallelogramm (Abb. 18a):

$$F = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h$$

Für das Trapez (Abb. 18b):

$$F = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\,\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3)$$

Für das Dreieck (Abb. 18c):

$$F = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\,\frac{b_1}{2} + 0\right) = \frac{b_1 h}{2}$$

Daraus ersehen Sie, daß unsere Formel wohl mit Recht als *Universalformel* bezeichnet wird.

Volumen und Gewicht eines Baumes

Sie verfügen also über eine Formel, mit der Sie das Volumen eines *gefällten* Baumes bestimmen können, ohne sich die Frage vorlegen zu müssen, ob der Baum die Form eines Zylinders, eines Kegels oder eines Kegelstumpfes besitzt. Wir messen zu diesem Zweck die Länge des Stammes und drei Querschnitte: den oberen, den unteren und den mittleren. Der obere und untere Querschnitt kann leicht gemessen werden.

Eine unmittelbare Messung des mittleren Stammquerschnitts ohne eine besondere Vorrichtung (die sogenannte »Meßkluppe« des Försters; (siehe Abb. 19 und 20)

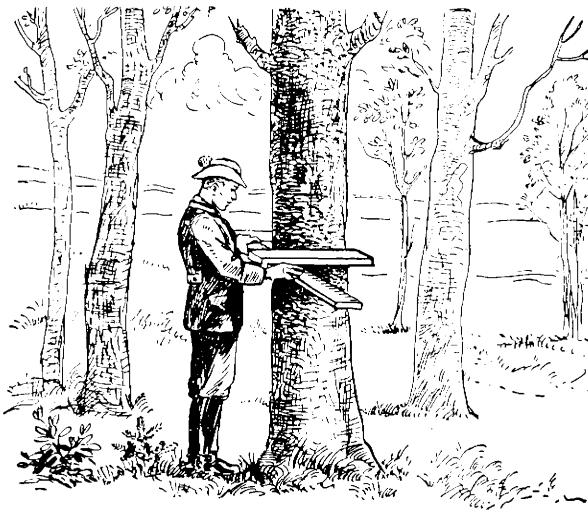


Abb. 19. Der Förster bestimmt den Baumdurchmesser.

ist ziemlich unbequem. Man kann diese Schwierigkeit indessen meistern, indem man um die Mitte des Stammes einen Bindfaden legt und den gemessenen Stammumfang durch $3\frac{1}{7}$ teilt; man erhält auf diese Weise den Stammdurchmesser.*

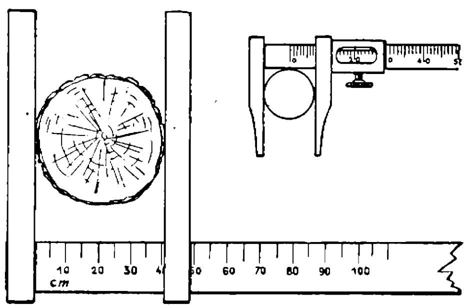


Abb. 20. Meßkluppe und Schublehre.

Das nach diesem Meßverfahren ermittelte Volumen des Baumstammes reicht für die meisten im praktischen Leben vorkommenden Fälle aus; die Lösung wird noch einfacher (jedoch ungenauer), wenn wir den Stamm als Zylinder betrachten und seinen Rauminhalt nach dem Durchmesser in der Mitte des Stammes bestimmen: das Ergebnis weist in diesem Fall Fehler nach unten bis zu 12% auf. Wenn wir jedoch den Stamm in zwei Meter lange Abschnitte unterteilen, das Volumen dieser nahezu zylindrischen Teile bestimmen und die so gewonnenen Ergebnisse addieren, so ist das endgültige Ergebnis ziemlich genau. Der Fehler (und zwar nur nach unten!) beträgt nicht mehr als zwei bis drei Prozent.

Alle diese Überlegungen sind jedoch bei ungefällten Bäumen unbrauchbar. Wenn Sie den Baum nicht erklettern wollen, so können Sie nur den unteren Durchmesser bestimmen. Sie müssen sich in diesem Fall mit einer grob angenäherten Volumenbestimmung begnügen. Ein schwacher Trost sei Ihnen hierbei gegeben: Der Förster im Walde kann es auch nicht genauer. Er benutzt hierbei eine besondere

* Das bekannte Gerät zur Messung der Durchmesser von runden Werkstücken weist ähnlichen Aufbau auf: es ist die Schublehre (Abb. 20).

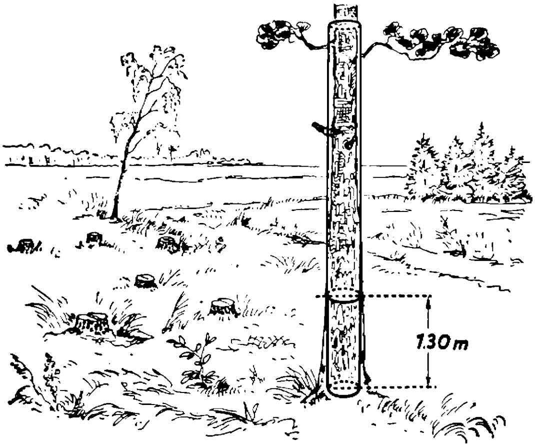


Abb. 21. Was bedeutet »Formzahl«?

Zahlentabelle. Die Zahlen geben einen Bruchteil des Volumens des zu messenden Baumes an, und zwar des Teilvolumens eines Zylinders von der Höhe und dem Durchmesser, gemessen in Brusthöhe eines erwachsenen Menschen, d. h. 130 cm über dem Erdboden (in dieser Höhe werden Messungen am bequemsten ausgeführt). Abb. 21 gibt die Messung besonders klar wieder. Je nach der Art und Höhe des Baumes gibt es in der Tabelle besondere Zahlen, weil die Stämme der verschiedenen Bäume ja in verschiedener Form gewachsen sind. Die Schwankungen sind jedoch nicht besonders stark. So schwanken z. B. die Beiwerte (sogenannte »Formzahlen«) für Kiefern- und Fichtenstämme, sofern sie in dichten Beständen wachsen, zwischen 0,45 und 0,51, d. h. sie bewegen sich um rd. $\frac{1}{2}$.

Man kann also annehmen, daß das Volumen eines ungefällten Nadelbaumes dem halben Volumen eines Zylinders gleicher Höhe entspricht, wenn man als Zylinderdurchmesser den Durchmesser des Baumes in Brusthöhe zugrunde legt.

Der erhaltene Wert ist natürlich nur annähernd richtig, und dennoch weicht er von dem wirklichen Volumen nur wenig ab: Die Ungenauigkeit beträgt bis zu 2% über und bis zu 10% unter dem wirklichen Volumen*.

Jetzt haben wir auch keine Mühe mehr, das *Gewicht* eines wachsenden Baumes festzustellen. Es genügt hierfür die Kenntnis, daß ein m^3 frisch geschnittenen Fichten- oder Kiefernholzes etwa 600 bis 700 kg wiegt. Angenommen, Sie stehen neben einer Fichte, deren Höhe Sie eben mit 28 m festgestellt haben, während der Stammumfang in Brusthöhe 120 cm ist. Die entsprechende Kreisfläche beträgt also 1100 cm^2 bzw. 0,11 m^2. Demnach ist das Volumen

$$0{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}11\,\text{m} \cdot 28\,\text{m} = 1{,}5\,\text{m}^3.$$

1 m^3 frisch geschnittenes Fichtenholz wiegt etwa 650 kg, wir stellen fest, daß unser Baum rd. 1 Tonne (1000 kg) wiegt.

Die Geometrie der Blätter

Aufgabe

Im Schatten einer Silberpappel wachsen dicht an der Wurzel junge Triebe, sog. Stockausschläge. Wenn Sie ein Blatt abreißen, bemerken Sie, daß es viel größer

* Es sei darauf hingewiesen, daß die »Formzahlen« nur für Bäume gelten, die im Walde gewachsen sind, also für hohe, schlanke, gerade Stämme ohne Verknotungen. Bei einzeln stehenden Bäumen mit breiter buschiger Krone und knorrigen Stämmen gibt es keine allgemeinen Meßregeln.

ist als die an der Sonne wachsenden Blätter des Mutterbaumes. Das Schattenlaub ist bestrebt, den Lichtmangel durch eine entsprechend größere Fläche auszugleichen, die das notwendige Sonnenlicht auffangen kann. Der Botaniker erforscht die Zusammenhänge. Aber auch der Geometer hat hierbei ein Wort mitzusprechen: er kann bestimmen, wie viele Male die Oberfläche eines Schattenblattes größer ist als die eines Lichtblattes.

Wie würden Sie an die Lösung dieser Aufgabe herangehen?

Lösung

Zwei Lösungswege sind möglich. Man kann z. B. die Oberfläche jedes einzelnen Blattes bestimmen und das Zahlenverhältnis ermitteln. Die Oberfläche mißt man, indem man ein durchsichtiges Blatt Karopapier auflegt, wobei jedes Quadrat, sagen wir 4 mm^2 groß ist. Das Verfahren ist zwar durchaus richtig, aber viel zu langwierig*.

Eine weniger zeitraubende Methode beruht auf der Tatsache, daß beide Blätter wohl verschieden groß sind, jedoch die gleiche Form aufweisen; es handelt sich, mit anderen Worten, um ähnliche geometrische Figuren. Wir wissen, daß sich die Flächen derartiger Figuren zueinander wie die Quadrate ihrer linearen Größen verhalten. Es genügt also, zu bestimmen, um das Wievielfache ein Blatt das andere an Länge oder an Breite übertrifft, damit wir durch einfache Potenzierung der gefundenen Zahl das Verhältnis ihrer Oberflächen ermitteln. Angenommen, die Länge eines Stockausschlagblattes beträgt 15 cm, die Länge eines Laubblattes dagegen nur 4 cm. Das Verhältnis der linearen Größen beträgt somit 15:4, die Fläche des Stockausschlagblattes ist also $\frac{15^2}{4^2} = \frac{225}{16}$ mal so groß, d. h. rund 14mal größer als die Fläche eines Blattes aus der Baumkrone. Runden wir die ermittelte Größe ab (genaue Werte kann es hierbei nicht geben), so können wir mit Recht behaupten, daß ein Blatt des Stockausschlages das Laubblatt um rund das 15fache an Fläche übertrifft. Hier ist ein weiteres Beispiel.

Aufgabe

Das Blatt eines im Schatten wachsenden Löwenzahns ist 15 cm lang. Ein anderes Exemplar der Pflanze, unter glühender Sonne gewachsen, besitzt ein Blatt von nur 3,3 cm Länge.

Wie viele Male ist das erste Blatt größer als das zweite?

Lösung

Wir verfahren wie oben. Das Flächenverhältnis beträgt:

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} = 87$$

Also übertrifft das erste Blatt das zweite um das 90fache.

Man kann ohne weiteres eine größere Anzahl von Blattpaaren von gleicher Form, aber verschiedener Größe sammeln; man erhält auf diese Weise interessantes

---

* Es hat indessen auch seine Vorteile: man kann damit nämlich die Oberflächen von Blättern *verschiedener Form* miteinander vergleichen; mit Hilfe des nachstehend beschriebenen Verfahrens ist dies jedoch nicht möglich.

Material für geometrische Aufgaben über Flächenverhältnisse ähnlicher Figuren. Dem ungeübten Auge scheint die Tatsache verblüffend, daß ein verhältnismäßig geringer Unterschied in der Länge oder der Breite eines Blattes erhebliche Flächenunterschiede zur Folge hat. Zwei geometrisch ähnliche Blätter, von denen das eine nur um 20% länger ist als das andere, unterscheiden sich ihrer Fläche nach um das

$$1{,}2^2 = 1{,}44\text{fache}.$$

Die Fläche des größeren Blattes ist bereits um 40% größer als diejenige des kleineren. Beträgt der Längenunterschied 40%, so hat das größere Blatt eine doppelt so große Fläche wie das kleinere, denn es ist

$$1{,}4^2 \approx 2.$$

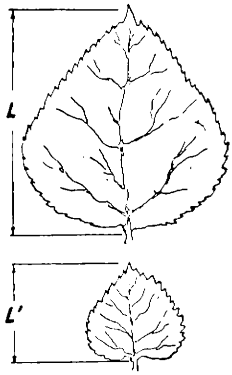


Abb. 22. Geometrie des Blattes.

Wir schlagen dem Leser vor, die Fläche der in den Abb. 22 und 23 dargestellten Blätter zu bestimmen.

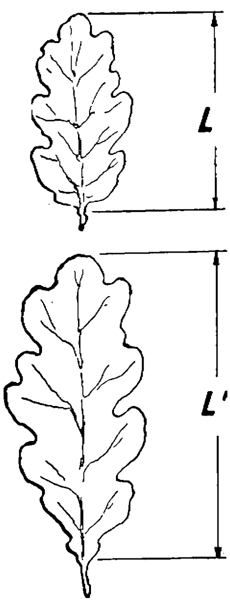


Abb. 23. Bestimmen Sie das Flächenverhältnis dieser Blätter!

Die sechsbeinigen Kraftmeier

Ameisen sind doch wirklich sonderbare Geschöpfe! Da klettert so eine Ameise den Halm senkrecht empor und schleppt eine für ihre winzige Körpergröße unerhört schwere Last, die sie fest zwischen ihren Kiefern hält (Abb. 24). Für einen aufmerksamen Beobachter scheint das ein ziemliches Rätsel zu sein: Woher nimmt das Insekt die Kraft, um anscheinend ohne besondere Anstrengung eine Last zu schleppen, die sein eigenes Körpergewicht um das 10fache übertrifft? Ein Mann, der mit einem Klavier auf dem Rücken eine senkrechte Leiter mühelos emporklimmt, ist doch einfach undenkbar! Wir haben indessen das Gewichtsverhältnis durchaus richtig gewählt. Also ist die Ameise viel stärker als der Mensch! Stimmt das?

Nun, ohne Geometrie kommen wir nicht aus. Wir wollen einmal den Fachmann (Prof. A. F. Brandt) hören, was er über Muskelkraft zu sagen hat, und dann überlegen wir uns die oben gestellte Frage über das Verhältnis zwischen Mensch und Insekt.

»Ein lebender Muskel gleicht einer elastischen Schnur. Die Zusammenziehung (Kontraktion) eines Muskels erfolgt jedoch nicht durch die Elastizität, sondern hat andere Ursachen und entsteht normalerweise durch Nervenreiz oder, im Rahmen eines physiologischen Experiments, durch Anlegen stromführender Elektroden an den entsprechenden Nerv, bzw. unmittelbar an den Muskel. Die Versuche können sehr leicht an Muskeln durchgeführt werden, die man soeben getöteten Fröschen entnimmt, weil die Muskeln von Kaltbluttieren die Fähigkeit beibehalten, ihre Lebensfunktionen außerhalb des Organismus, sogar bei Zimmertemperatur, noch längere Zeit auszuüben. Der Versuch gestaltet sich sehr einfach. Man schneidet den Hauptbiegemuskel des Beines (Wadenmuskel) zusammen mit einem Stück des Oberschenkels, wo der Muskel beginnt, und zusammen mit einem Stück Sehne heraus. Zum Präparieren ist dieser Muskel wegen seiner Form und Größe am bequemsten. Man hängt nun den Muskel an dem Stück des Oberschenkelknochens an einem Gestell auf, während an der Sehne ein Haken mit einem daranhängenden Gewicht angebracht wird. Berührt man den Muskel mit zwei von einem elektrischen Element führenden Drähten, so zieht er sich sofort zusammen (kontrahiert) und hebt das Gewicht. Durch Auflegen von Zusatzgewichten können wir feststellen, wie hoch der Muskel belastet werden kann. Wenn wir jetzt zwei, drei oder vier Muskel aneinanderbinden und einen derart verlängerten Muskel reizen, so wächst die Muskelkraft nicht; das Gewicht wird jedoch, entsprechend der Summe der Einzelkontraktionen, höhergehoben. Binden wir dagegen zwei, drei oder vier Muskeln zu einem *Bündel* zusammen, so wird das ganze System bei entsprechender Reizung auch ein mehrfaches Gewicht heben. Das gleiche Ergebnis würde auch dann offenbar zu Tage treten, wenn die Muskeln miteinander verwachsen wären. Wir haben uns also davon überzeugen können, daß die Hebkraft der Muskeln nicht etwa von ihrer Länge oder Gesamtmasse, sondern einzig und allein von ihrer *Dicke*, d. h. ihrem Querschnitt abhängt.«

Nach dieser Abschweifung wenden wir uns wieder dem Vergleich zwischen geometrisch ähnlichen und gleichgebauten, aber verschieden großen Tieren zu. Stellen wir uns zwei Tiere vor: ein Ausgangstier und ein weiteres Tier von in allen Dimensionen doppelten linearen Maßen. Volumen und Gewicht des zweiten Tieres, seines gesamten Körpers und jedes einzelnen Organs sind achtmal so groß wie die des ersten Tieres. Alle Flächenmaße dagegen, darunter auch Muskelquerschnitt, sind nur 4mal so groß. Wie ersichtlich, wächst bei einem Tier von doppelter Länge und achtfachem Gewicht die Muskelkraft nur um das Vierfache, mit anderen Worten: Das Tier ist relativ um die Hälfte *schwächer* geworden, bzw. es ist nur *halb so stark* wie das erste Tier. Aus dem gleichen Grunde besitzt ein dreimal so langes Tier, dessen Muskelquerschnitt neunmal größer ist, und dessen Körpergewicht das Gewicht des Ausgangstieres um das 27fache übertrifft, relativ nur den dritten Teil, ein viermal so langes Tier relativ nur ein Viertel der Kraft des ersten Tieres usw.

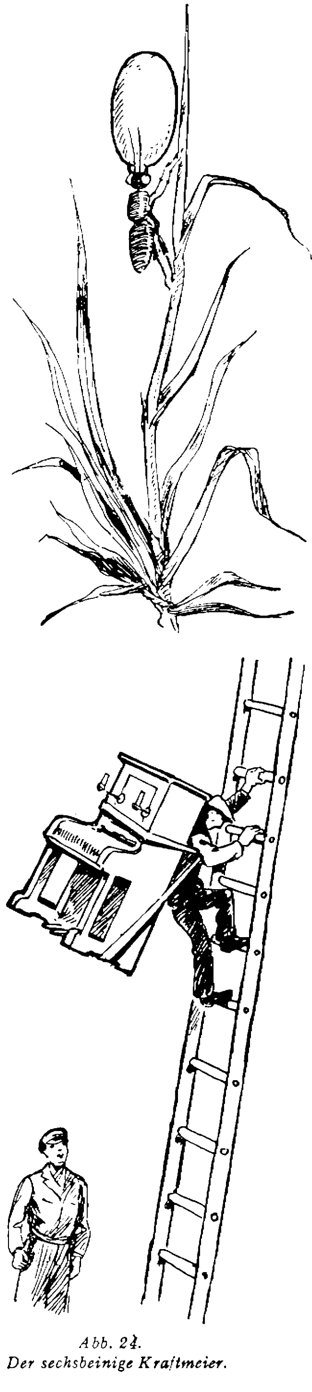


Abb. 24.
Der sechsbeinige Kraftmeier.

Die Tatsache, daß ein Insekt – wir können dies bei Ameisen, Wespen und anderen Tieren feststellen – Lasten zu tragen vermag, die sein eigenes Körpergewicht um das 30- bis 40fache übersteigen, während ein normaler Mensch (von Athleten und Packern abgesehen) nur etwa $\frac{9}{10}$, und ein Pferd – das wir als Musterbeispiel einer vorzüglichen Arbeitsmaschine ansehen – noch weniger, nämlich $\frac{7}{10}$ seines eigenen Körpergewichts zu heben vermag, findet ihre Erklärung in dem Gesetz der ungleichen Steigerung von Volumen, Gewicht und Muskelkraft des Tieres.

Nach dieser Erklärung werden wir die »Heldentaten« der Ameise, über die der Fabeldichter I. A. Krylow spottete, mit anderen Augen betrachten.

ZWEITES KAPITEL

Geometrie am Fluß

Wie mißt man die Breite eines Flusses?

Für den Menschen, der mit der Geometrie auf du und du steht, ist es ebenso einfach, die Breite eines Flusses zu bestimmen, ohne ihn zu überqueren, wie die Höhe eines Baumes zu errechnen, ohne ihn zu erklettern. Unzugängliche Strecken werden mit den gleichen Verfahren ermittelt wie unzugängliche Höhen. In beiden Fällen wird die gesuchte Entfernung nach Strecken bestimmt, die ohne weiteres gemessen werden können.

Von den zahlreichen Methoden zur Lösung der gestellten Aufgabe seien hier einige einfache wiedergegeben:

1. Für das erste Verfahren brauchen wir wieder unser »Gerät« mit den drei Stecknadeln als Spitzen eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks (Abb. 25). Es soll die Breite eines Flusses AB bestimmt werden (Abb. 26). Der Beobachter steht an der mit B bezeichneten Uferseite; das andere Ufer ist nicht zugänglich. Er stellt sich in einem beliebigen Punkt auf und hält das Stecknadelbrett in Augenhöhe, und zwar so, daß er beim Schauen in der Richtung zweier Stecknadeln die Punkte A und B in Deckung sieht. In diesem Augenblick befindet sich der Beobachter selbstverständlich auf der Verlängerung von AB. Ohne die Lage des Brettes zu ver-

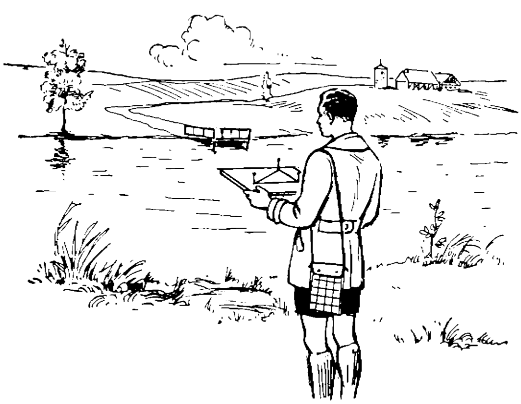


Abb. 25. Die Flußbreite wird mit dem Stecknadelgerät ermittelt.

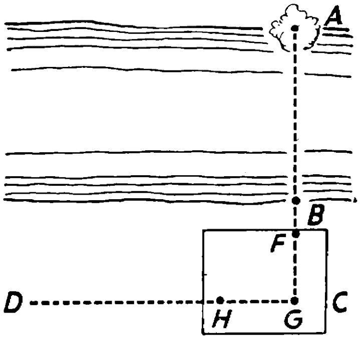


Abb. 26. Erste Stellung des Geräts.

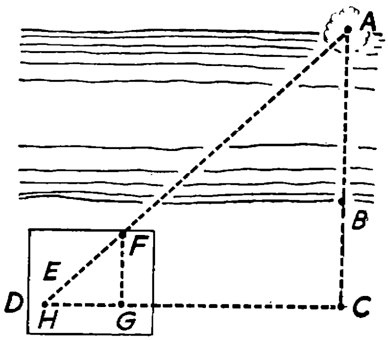


Abb. 27. Zweite Stellung des Geräts.

ändern, schaut nun der Beobachter in Richtung der beiden anderen Stecknadeln (also senkrecht zu der ursprünglichen Richtung) und visiert einen Punkt D an, der mit den beiden Stecknadeln in Deckung liegt. Dieser Punkt liegt also auf einer zu der Geraden AC senkrecht verlaufenden Geraden. Daraufhin markiert der Beobachter den Punkt C mit einem Pflock, verläßt seinen Platz und begibt sich mit dem Gerät längs der Geraden CD, bis er einen Punkt E ausmacht (Abb. 27), von dem aus Punkt C durch die Stecknadel G und Punkt A durch die Stecknadel F verdeckt erscheint. Das bedeutet, daß er am Ufer die dritte Spitze des Dreiecks ACE ermittelt hat, wobei der Winkel bei C ein rechter Winkel und der Winkel bei E dem Spitzwinkel des Geräts gleicht, d. h. ein halber rechter Winkel ist. Daraus folgt, daß auch bei A ein halber rechter Winkel und $AC = CE$ ist. Jetzt kann man die Entfernung CE mit Schritten ausmessen; dadurch wird auch AC bestimmt. Zieht man hiervon die leicht auszumessende Strecke BC ab, so erhält man die gesuchte Flußbreite. Die Aufgabe ist damit gelöst.

Es ist ziemlich schwierig, das Stecknadelgerät längere Zeit stillzuhalten; es ist daher zweckmäßig, das Brett auf einen zugespitzten Stock aufzusetzen und dessen anderes Ende in den Boden zu stecken.

2. Das nächste Verfahren ist dem ersten ähnlich. Auch hier wird auf der Verlängerung von AB der Punkt C ermittelt und mit Hilfe des Geräts die senkrecht zu CA verlaufende Gerade CD abgesteckt. Dann aber verfährt man anders (Abb. 28).

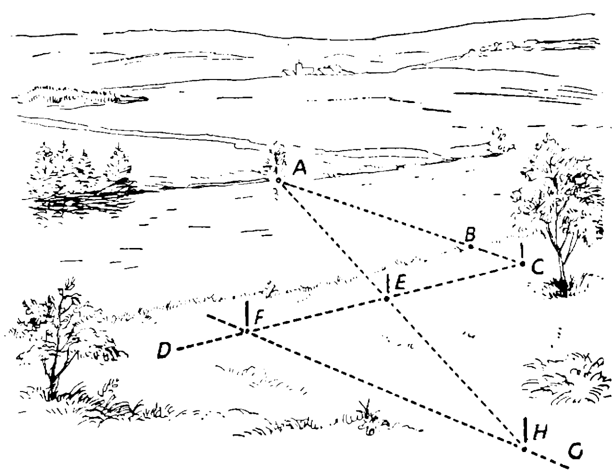


Abb. 28. Die Eigenschaften deckungsgleicher Dreiecke kommen uns zugute.

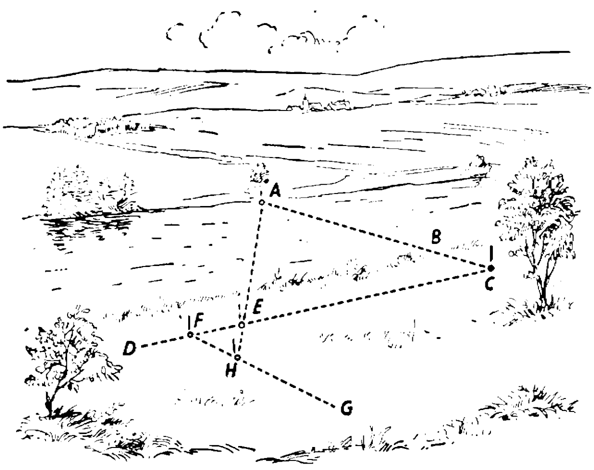


Abb. 29. Die Eigenschaften ähnlicher Dreiecke werden angewandt.

Auf der Geraden CD werden die beliebigen gleichlangen Strecken CE und EF abgesteckt und die Punkte E und F durch Pflöcke markiert. Man stellt sich mit dem Gerät in Punkt F auf und visiert in der zu FC senkrechten Richtung FG. Dann geht man längs FG so lange, bis ein Punkt gefunden wird, von dem aus der Pflock E den Punkt A deckt.

Das bedeutet, daß die Punkte H, E, A auf einer Geraden liegen.

Die Aufgabe ist nunmehr gelöst: Die Entfernung HF ist der Entfernung AC gleich. Man braucht nur BC abzuziehen und hat dann die gesuchte Flußbreite ermittelt. (Der Leser weiß natürlich selbst, wieso $FH = AC$ ist.)

Dieses Verfahren beansprucht mehr Platz als das erste. Erlauben die Geländeverhältnisse die Durchführung beider Verfahren, so ist es interessant, beide Ergebnisse miteinander zu vergleichen.

3. Das beschriebene Verfahren kann abgewandelt werden. Man steckt zu diesem Zweck an der Geraden CF nicht zwei gleichgroße Strecken ab, sondern die eine Strecke übertrifft die andere um ein Mehrfaches. So wird z. B. (Abb. 29) die Strecke EC viermal länger genommen als FE; dann verfährt man nach 2. Man findet auf der zu FC senkrecht verlaufenden Geraden FG den Punkt H, von dem aus der Pflock E den Punkt A zu decken scheint. Nun ist FH nicht mehr gleich AC; die Strecke vielmehr nur einem vierten Teil der von AC gleich; die Dreiecke ACE und EFH sind nicht gleich, sondern einander ähnlich mit ungleichen Seiten und gleichen Winkeln. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke wird folgende Proportion abgeleitet:

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1$$

Wir brauchen also nur FH auszumessen, mit 4 zu multiplizieren und von dem so ermittelten AC das Stück BC abzuziehen – dann haben wir die gesuchte Flußbreite ermittelt.

Wie ersichtlich, erfordert das Verfahren weniger Platz, es ist also praktischer als das vorige.

4. Dem vierten Verfahren liegt folgende Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks zugrunde: Ist ein Spitzwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks gleich 30°, so ist die gegenüberliegende Kathete gleich der Hälfte der Hypotenuse.

Von der Richtigkeit dieser Behauptung kann man sich leicht überzeugen. Angenommen, der Winkel B eines rechtwinkligen Dreiecks ist 30° (Abb. 30, links). Es soll bewiesen werden, daß $AB = \frac{1}{2}\,AC$ ist. Zu diesem Zweck wird das Dreieck

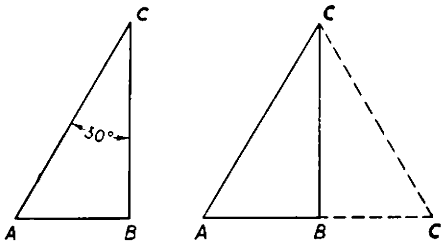


Abb. 30. Die Kathete ist der halben Hypotenuse gleich.

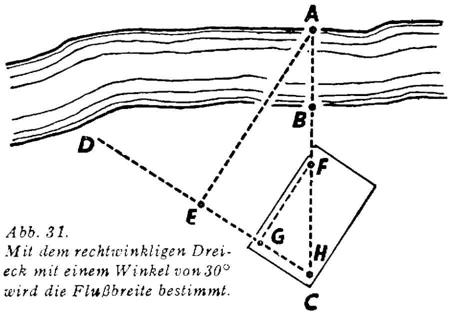


Abb. 31. Mit dem rechtwinkligen Dreieck mit einem Winkel von 30° wird die Flußbreite bestimmt.

ABC um BC so gedreht, daß es eine zu seiner ursprünglichen Lage symmetrische Stellung einnimmt (Abb. 30, rechts). Es entsteht somit ein Gesamtdreieck ADC. ABD ist eine Gerade, weil beide Winkel an B rechte Winkel sind. Der Winkel A des Dreiecks ADC ist 60°, da er aus zwei Winkeln von je 30° zusammengesetzt ist. Folglich sind AD und BD als gleichen Winkeln gegenüberliegende Seiten einander gleich. AB ist jedoch $\frac{1}{2}$ AD; folglich ist AB auch $\frac{1}{2}$ AC.

Wollen wir diese Eigenschaft des Dreiecks ausnützen, so müssen wir die Stecknadeln auf dem Brett so anordnen, daß sie ein rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Kathete halb so lang ist wie die Hypotenuse. Mit diesem Gerät ausgerüstet, stellen wir uns in Punkt C auf (Abb. 31), und zwar so, daß die Richtung AC mit der Hypotenuse des Stecknadeldreiecks übereinstimmt. Schauen wir in der Richtung der kurzen Kathete dieses Dreiecks, so visieren wir die Richtung CD an und finden dort einen Punkt E, von dem aus die Richtung EA senkrecht zu der Geraden CD verläuft. (Wir führen diese Operation ebenfalls mit Hilfe unseres Stecknadelgerätes aus.) Daraus kann unschwer gefolgert werden, daß die Entfernung CE, d. h. die dem 30°-Winkel gegenüberliegende Kathete, gleich der Hälfte von AC ist. Wenn wir also EC ausmessen, die Entfernung verdoppeln und BC abziehen, haben wir die gesuchte Flußbreite ermittelt.

Das sind also vier Verfahren, nach denen ohne weiteres die Breite eines Flusses ausreichend genau bestimmt werden kann, ohne sich auf das gegenüberliegende Ufer zu begeben. Wir wollen keine weiteren Methoden betrachten, die kompliziertere (wenn auch selbstgebaute) Geräte erfordern.

Mit dem Mützenschirm...

Nachstehend wird beschrieben, wie sich der Obersergeant Kuprijanow ein einfaches Verfahren an der Front zunutze machte, um die Breite eines Flusses zu messen, den die Truppe später überqueren mußte.

Seine Abteilung schlich sich ans Ufer und nahm im Gebüsch Deckung. In Begleitung des Soldaten Karpow näherte sich der Obersergeant dem Fluß, von dem aus er das von den Faschisten besetzte gegenüberliegende Ufer deutlich sehen konnte. Unter diesen Verhältnissen mußte die Flußbreite geschätzt werden.

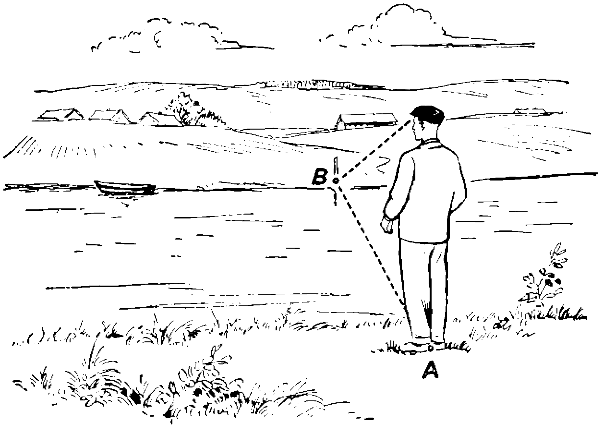


Abb. 32. Mit dem Rand des Mützenschirmes wird ein Punkt am anderen Ufer anvisiert.

»Nun, Karpow, was meinen Sie? Wie weit ist es?« fragte Kuprijanow.

»Ich denke, so 100 bis 110 m breit, nicht mehr« antwortete Karpow.

Kuprijanow stimmte zwar der Schätzung zu, beschloß jedoch, den Fluß mit Hilfe seines Mützenschirmes auszumessen und dadurch die geschätzte Entfernung nachzuprüfen.

Das Verfahren sieht folgendermaßen aus. Sie stellen sich mit dem Gesicht zum Fluß und setzen die Mütze so tief auf, daß der Schirmrand mit der gegenüberliegenden Uferlinie genau zusammenfällt (Abb. 32). Der Mützenschirm ist auch durch die flache Hand oder ein Notizbuch zu ersetzen, das Sie mit der Kante an die Stirn pressen. Ohne Kopfwendung drehen Sie sich dann nach rechts oder links um oder machen eine volle Kehrtwendung, und zwar dorthin, wo ein Stück ebenes, für eine Messung geeignetes Gelände ist. Nun merken Sie sich den weitesten Punkt, der unter dem Mützenschirm bzw. der Hand oder dem Notizbuch hervor zu sehen ist. Die Entfernung bis zu diesem Punkt gleicht ungefähr der Flußbreite.

Kuprijanow wandte diese Methode an, indem er, vom Gebüsch verdeckt, eilig aufstand, sein Notizbuch an die Stirn legte, sich dann umdrehte und einen weit entfernten Punkt anvisierte. Dann verließ er kriechend seinen Standort, erreichte

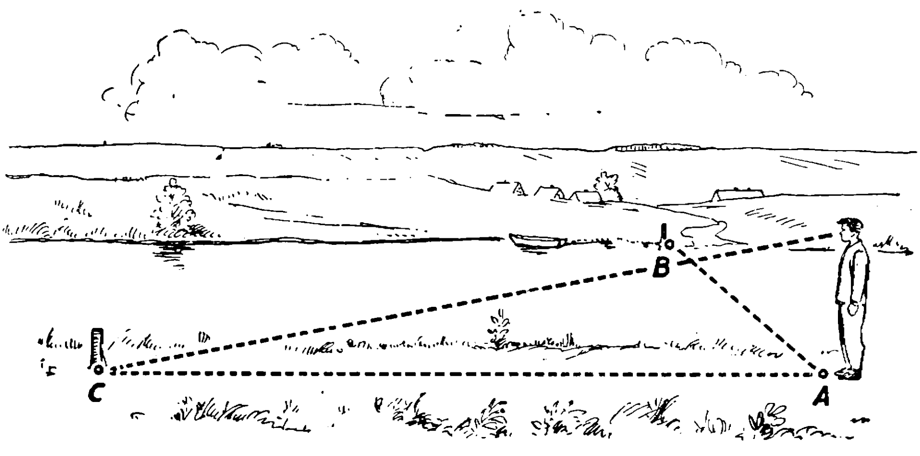


Abb. 33. In der gleichen Weise visiert man mit dem Mützenschirm einen Punkt diesseits des Stromes.

den anvisierten Punkt und bestimmte mit Karpow die Entfernung mit Hilfe eines Bindfadens. Das Ergebnis war 105 m. Kuprijanow meldete das Ergebnis seinem Kommandeur.

Aufgabe

Begründen Sie das »Mützenschirmverfahren«.

Lösung

Der Blick, der am oberen Mützenschirmrand vorbei geht, ist zuerst auf das gegenüberliegende Ufer gerichtet (Abb. 32). Beim Wenden gleicht der Blickstrahl einem Zirkelfuß. Er beschreibt einen Bogen, so daß AC und AB als Halbmesser eines Kreises einander gleich sind (Abb. 33).

Die Länge der Insel

Aufgabe

Jetzt kommt eine schwierige Aufgabe. Sie stehen am Ufer eines Flusses oder eines Sees (Abb. 34) und sehen eine Insel, deren Länge Sie, ohne das Ufer zu verlassen, wissen möchten. Ist eine derartige Messung ausführbar?

Obwohl beide Enden der unbekannten Strecke für uns nicht zugänglich sind, kann die Aufgabe dennoch ohne komplizierte Geräte gelöst werden.

Lösung

Nehmen wir an, wir wollen die Länge AB (Abb. 35) einer Insel erkunden, ohne das Festlandufer zu verlassen. Wir wählen am Ufer zwei willkürliche Punkte P und Q und stecken sie mit Pflöcken ab. Dann stecken wir auf der Geraden PQ die Punkte M und N so ab, daß die Richtung AM und BN mit der Geraden PQ rechte Winkel

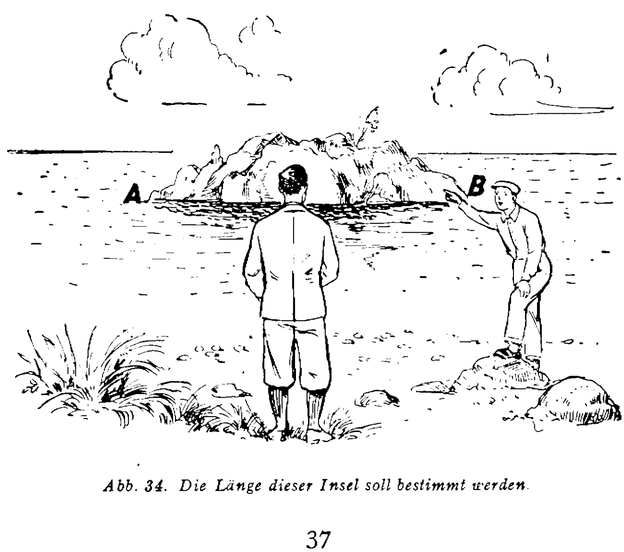


Abb. 34. Die Länge dieser Insel soll bestimmt werden.

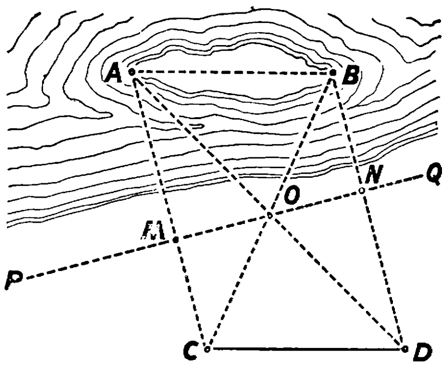


Abb. 35. Die mit der Gleichheit von rechtwinkligen Dreiecken zusammenhängenden Eigenschaften kommen uns auch hier zugute.

bilden. (Zu diesem Zwecke benutzen wir das bekannte Stecknadelgerät.) Wir stecken weiterhin den Mittelpunkt O der Strecke MN mit einem Pflock ab und ermitteln auf der Geraden AM einen Punkt C, von dem aus der Pflock O und der Punkt B in Deckung liegen. In ähnlicher Weise wird auch auf der Fortsetzung der Geraden BN ein Punkt D ausgemacht, von dem aus O und das andere Ende der Insel A in Deckung liegen. Die Gerade CD ist die gesuchte Insellänge.

Die Beweisführung ist einfach. Betrachten Sie die Dreiecke AMO und OND! Sie sind rechtwinklig, und ihre Katheten MO und NO sind einander gleich. Außerdem sind die Winkel AOM und NOD gleich, folglich sind die Dreiecke einander gleich, so daß $AO = OD$ ist. In ähnlicher Weise wird bewiesen, daß $BO = OC$ ist. Durch Vergleich der beiden Dreiecke ABO und COD stellen wir fest, daß sie einander gleich sind; folglich sind auch die Strecken AB und CD einander gleich.

Der Fußgänger am anderen Ufer

Aufgabe

Ein Mann geht am Flußufer entlang. Sie können vom anderen Ufer aus deutlich seine Schritte verfolgen. Sind Sie in der Lage, ohne Ihren Standort zu verlassen, die Entfernung annähernd zu bestimmen, ohne dabei irgendwelche Hilfsmittel in Anspruch zu nehmen?

Lösung

Sie haben zwar keine Geräte zur Hand, aber Sie haben Augen und Arme – das genügt. Sie strecken die Hand in der Richtung zu dem Manne am anderen Ufer aus und schauen mit dem rechten Auge auf die Fingerspitze, wenn der Fußgänger nach rechts, und mit dem linken Auge, wenn er nach links wandert. In dem Augenblick, in dem der Fußgänger durch Ihren Finger gedeckt ist, schließen Sie das Auge, mit dem Sie soeben geschaut haben und öffnen das andere Auge. Es hat den Anschein, als sei der Wanderer zurückgeblieben. Jetzt zählen Sie, wieviel Schritte er zurücklegt, ehe er wieder mit Ihrem Finger in Deckung kommt. Damit haben Sie sämtliche Unterlagen in der Hand, um die Entfernung annähernd zu bestimmen.

Wir wollen den Vorgang erklären. Auf der Abb. 36 stellen C und D Ihre Augen, Punkt M den Finger der ausgestreckten Hand und Punkt A die erste, Punkt B die zweite Stellung des Fußgängers dar. Die Dreiecke CDM und ABM sind ähnlich (Sie müssen sich dem Fußgänger so zuwenden, daß die Strecke CD seiner Gehrichtung ungefähr parallel ist). Es folgt $BM : DM = AB : CD$. In dieser Proportion ist nur das eine Glied BM unbekannt, alle anderen lassen sich ohne weiteres bestimmen. In der Tat ist DM die Entfernung zwischen dem Auge und den Fingerspitzen des ausgestreckten Armes, CD die Entfernung zwischen den Pupillen, AB ist durch die Zahl der Schritte des Wanderers bestimmt (wir nehmen dabei im Mittel einen Schritt von 0,75 m an). Folglich beträgt die unbekannte Entfernung zwischen Ihnen und dem Mann am anderen Ufer:

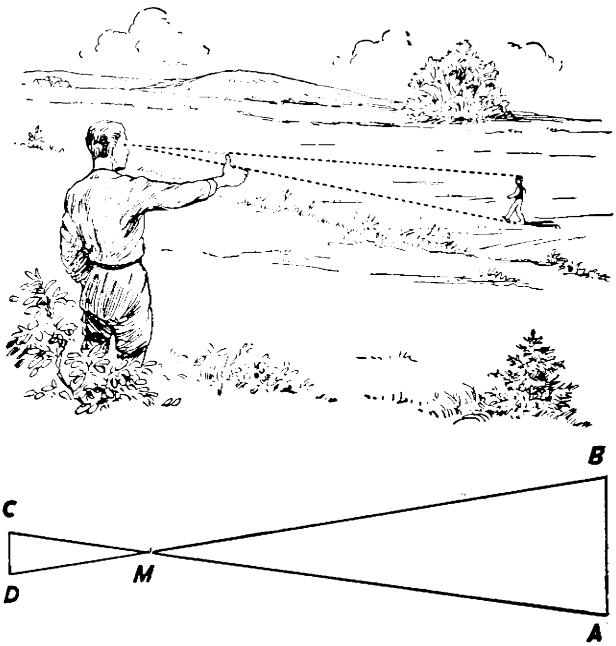


Abb. 36. a und b. Die Entfernung bis zu einem Wanderer wird gesucht.

$$BM = AB \cdot \frac{DM}{CD}$$

Beträgt z. B. die Entfernung zwischen den Pupillen 6 cm, die Länge DM zwischen dem Ende des ausgestreckten Armes und dem Auge 60 cm, und legt der Fußgänger 14 Schritte zurück, so ist er von Ihnen

$$BM = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140, \text{ d. h. } 140 \text{ Schritt, also etwa } 105 \text{ m entfernt.}$$

Sie brauchen nur einmal gelegentlich die Entfernung zwischen den Pupillen sowie den Abstand zwischen dem Auge und den Fingerspitzen des ausgestreckten Armes zu messen. Wenn Sie das Verhältnis $\frac{DM}{CD}$ behalten, so können Sie ohne weiteres den Abstand von weit entfernten Gegenständen bestimmen. Sie brauchen nur noch AB mit diesem Verhältnis zu multiplizieren und haben dann das gewünschte Ergebnis. Das Verhältnis $\frac{DM}{CD}$ ist bei den meisten Menschen mit sehr geringen Abweichungen gleich 10.

Nur die Entfernung AB ist schwierig zu bestimmen. In unserem Falle haben wir uns die Schritte eines Wanderers zunutze gemacht. Es können aber auch andere Hilfsmittel herangezogen werden. Handelt es sich z. B. darum, die Entfernung bis zu einem weit entfernt fahrenden Güterzug zu bestimmen, so kann man die Strecke AB nach der Länge eines gewöhnlichen Güterwagens ausmessen; diese Länge wird als bekannt (etwa 7,6 m zwischen den Puffern) vorausgesetzt. Will man die Entfernung bis zu einem Gebäude bestimmen, so schätzt man AB nach der Breite eines Fensters, der Länge eines Ziegelsteins usw.

Das gleiche Verfahren kann auch zur Bestimmung der *Größe* eines Gegenstandes angewandt werden, wenn seine Entfernung von dem Standort des Beobachters bekannt ist. Zu diesem Zweck können aber auch andere Entfernungsmesser benutzt werden, deren Aufbau wir nachstehend beschreiben.

Die einfachsten Entfernungsmesser

Im ersten Kapitel haben wir ein ganz einfaches Instrument zur Bestimmung unzugänglicher Höhen beschrieben, einen »Höhenmesser«. Wir wollen nunmehr eine ebenso einfache Vorrichtung zum Messen von unzugänglichen Strecken beschreiben, den »Entfernungsmesser«. Man fertigt den Entfernungsmesser einfachster Bauart aus einem Streichholz an. Zu diesem Zweck versieht man eine Kante mit Millimeterstrichen und färbt die einzelnen Teilstriche abwechselnd hell und dunkel, damit sie besser unterschieden werden können (Abb. 37).

Abb. 37. Der Entfernungsmesser aus einem Streichholz.

Mit diesem Gerät lassen sich Entfernungen nur dann bestimmen, wenn Ihnen die Größe der betreffenden Objekte bekannt ist (Abb. 38). Diese Bedingung gilt übrigens auch für andere Entfernungsmesser besserer Konstruktion. Angenommen, Sie sehen in der Ferne einen Menschen und wollen die Entfernung bestimmen. Hier dient der »Streichholz-Entfernungsmesser« als geeignetes Hilfsmittel. Sie halten das Streichholz in der ausgestreckten Hand, sehen mit einem Auge darauf und bringen den Kopf des Holzes mit dem oberen Teil des entfernten Objekts in Deckung. Sie gleiten dann langsam mit dem Daumennagel am Streichholz entlang

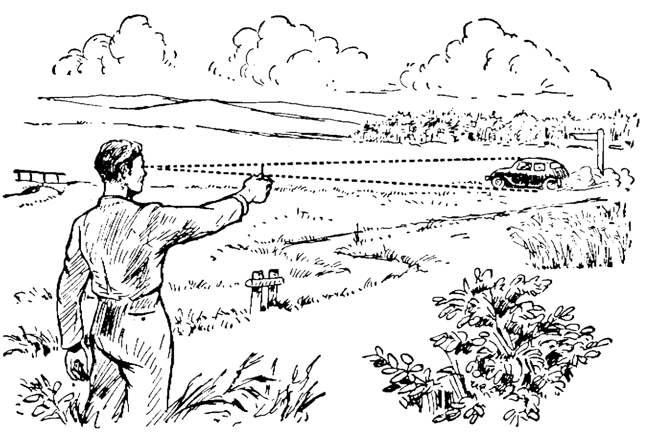


Abb. 38. Mit dem Streichholz werden unzugängliche Entfernungen bestimmt.

und hören mit dieser Bewegung auf, sobald der Nagel den Punkt erreicht, der auf den Fuß der menschlichen Gestalt gerichtet ist. Nun brauchen Sie nur festzustellen, bei welchem Teilstrich Ihr Daumennagel stehengeblieben ist, – dann haben Sie sämtliche Unterlagen zur Hand, um die Aufgabe zu lösen. Sie können sich von der richtigen Proportion leicht überzeugen:

$$\frac{\textit{Gesuchte Entfernung}}{\textit{Entfernung zwischen Auge und Streichholz}} = \frac{\textit{Mittlere Körpergröße}}{\textit{Ausgemessener Streichholzteil}}$$

Daraus kann die gesuchte Entfernung leicht berechnet werden. Ist z. B. die Entfernung bis zum Streichholz 60 cm, die Köipergröße 1,70 cm und der ausgemessene Teil dcs Streichholzes 12 mm, so beträgt die Entfernung

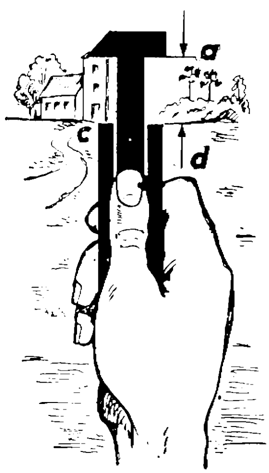
$$60\,\text{cm} \cdot \frac{1700\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = 8500\,\text{cm} = 85\,\text{m}.$$

Damit Sie nun lernen, den Entfernungsmesser geschickt zu handhaben, messen Sie die Körpergröße eines Bekannten, bitten ihn dann, sich etwas zu entfernen und versuchen daraufhin, die Anzahl der Schritte zu bestimmen, die Sie von ihm trennen.

Mit den gleichen Mitteln können Sie die Entfernung zu einem Reiter (Höhe etwa 2,2 m), einem Radfahrer (Raddurchmesser etwa 75 cm), zu einem Telegrafenmast an der Bahn (Höhe 8 m, senkrechter Abstand zweier benachbarter Isolatoren 90 cm), zu einem Eisenbahnzug, der Ziegelfassade eines Hauses und anderen Gegenständen bestimmen, deren Maße man ohne besondere Schwierigkeit abschätzen kann. Während eines Ausfluges bieten sich hierzu zahlreiche Gelegenheiten.

Wer gut bastelt, kann ohne Schwierigkeiten ein bequemeres Gerät vom gleichen Typ anfertigen. Das Gerät ist für Entfernungsschätzungen bestimmt, die von der Größe einer weit entfernten menschlichen Gestalt ausgehen.

Der Aufbau des Instruments geht aus den Abb. 39 und 40 klar hervor. Der beobachtete Gegenstand wird so anvisiert, daß er gerade in den Zwischenraum *a*



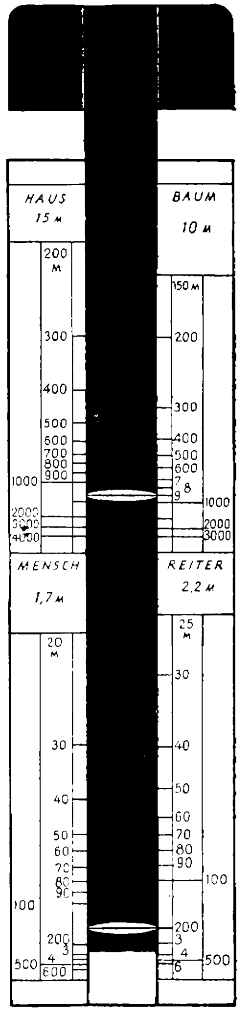


Abb. 39. Der Schieber eines Entfernungsmessers.
Abb. 40. Aufbau eines Entfernungsmessers mit einem Schieber.

hineinpaßt, der durch das Heben der Gleitschiene entsteht. Die Größe dieses Zwischenraumes kann an den Teilstrichen, die an den Elementen *c* und *d* der Leiste angebracht sind, abgelesen werden. Um Rechenoperationen zu vermeiden, können an den einzelnen Teilstrichen der Leiste *c* die entsprechenden Entfernungen aufgetragen werden, sofern das Objekt eine menschliche Gestalt ist. (Das Gerät wird in der waagerecht ausgestreckten Hand gehalten.) Rechts, an dem Teil *d*, können die Entfernungen aufgetragen werden, die für andere Fälle vorher berechnet wurden. Die beiden oberen Leistenteile *c* und *d* sieht man für größere Objektive, z. B. ein Haus von 15 m, ein Baum mit der Höhe 10 m, vor. In diesem Falle sieht das Gerät so aus, wie es in Abb. 40 wiedergegeben ist.

Freilich sind solche Schätzungen nicht genau. Es handelt sich eben um eine *Schätzung* und keine eigentliche Messung. In dem von uns beschriebenen Beispiel mit dem Ergebnis von 85 m würde ein Fehler von 1 mm bei der Bestimmung der Streichholzhöhe eine Fehlschätzung von 7 m zur Folge haben ($\frac{1}{12}$ von 85 m). Wäre die Entfernung viermal so groß, und hätten wir auf unserem Zündholz 3 mm abgesteckt, so hätte eine Fehlmessung von nur 0,5 mm eine Fehlschätzung der Entfernung von 57 m zur Folge. Daher ist unser Beispiel, soweit es sich um Menschen handelt, nur für Entfernungen von 100 bis 200 m einigermaßen sicher. Größere Entfernungen müssen mit entsprechend größeren Objekten geschätzt werden.

Die Energie eines Flusses

Ein Fluß unter 100 km Länge gilt als unbedeutend. Wissen Sie, wieviel unbedeutende Flüsse solcher Art es in der Sowjetunion gibt?

Eine erstaunliche Anzahl – etwa 43 Tausend! Würden wir alle diese Flüsse aneinanderreihen, so ergäbe das ein Band von 1 300 000 km Länge. Ein solches Flußband könnten wir etwa 32mal um den Äquator legen (Äquatorlänge etwa 40 000 km).

Die Flüsse fließen nur langsam dahin, sie bergen aber gewaltige Energiereserven. Nach Annahme der Fachleute beträgt die in den kleinen Flüssen der Sowjetunion verborgene Energie 34 Millionen Kilowatt. Diese Kraft muß bei der Elektrifizierung der in der Nähe von Flüssen gelegenen Dörfer für wirtschaftliche Zwecke genützt werden.

Sie wissen, daß dieser Gedanke durch den Bau von Wasserkraftwerken verwirklicht werden kann. Der Ingenieur, der das Kraftwerk bauen soll, interessiert sich für alles, was mit der Wasserwirtschaft des Flusses zusammenhängt. Er muß wissen, wie die Breite, die Strömungsgeschwindigkeit (Wasserverbrauch), der Querschnitt des Flußbettes (sog. »lebendiger Querschnitt«), der Staudruck gegen das Ufer u. a. ist. Alle diese Faktoren können durch verhältnismäßig einfache Mittel bestimmt werden und lassen sich mit Hilfe einfacher geometrischer Mittel lösen.

Das wollen wir jetzt auch einmal durchführen!

Vorher aber sagen wir, welche einfachen Hilfsmittel wir benötigen, um die Aufgabe annähernd zu lösen:

Eine Uhr, eine Flasche mit Fähnchen und vier gut angespitzte Pflöcke.

Wieviel Wasser strömt nun täglich durch solch einen Fluß? Zwei Personen messen dazu als erstes die Strömungsgeschwindigkeit. Die eine Person hält eine Uhr in der Hand, die andere einen auffallenden Schwimmkörper, etwa eine halbgefüllte, mit einem bunten Fähnchen versehene Flasche. Dann werden an einer geraden Flußstrecke am Ufer längs der Strömung zwei Pflöcke *A* und *B* in einer bestimmten Entfernung voneinander (z. B. 10 m) eingesteckt (Abb. 41).

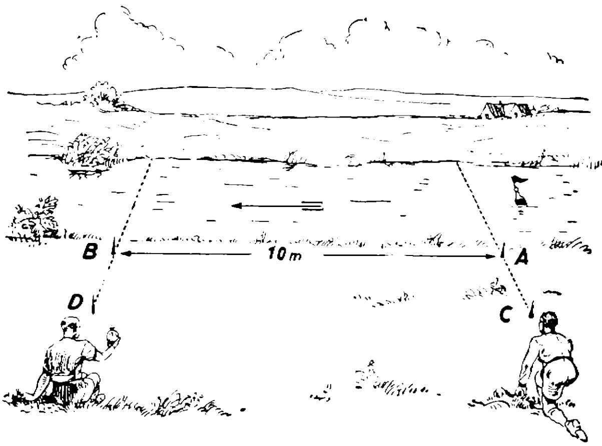


Abb. 41. Messung der Strömungsgeschwindigkeit.

An den zu *A* und *B* senkrechten Geraden werden weitere zwei Pflöcke in die Erde gesteckt (*C* und *D*). Die Person mit der Uhr stellt sich hinter dem Pflock *D* auf.

Die Person mit der Flasche begibt sich ein wenig jenseits des *A*-Pflockes stromaufwärts, wo sie den Schwimmkörper ins Wasser wirft und sich unmittelbar danach hinter dem Pflock *C* aufstellt. Beide schauen nun in der Richtung *CA* bzw. in der Richtung *DB* auf das Wasser. In dem Augenblick, da die Flasche die Fortsetzung der Geraden *CA* schneidet, hebt der Beobachter den Arm. Der zweite Beobachter merkt sich die Zeit und schaut beim Durchgang der Flasche durch die verlängerte Linie *DB* abermals auf die Uhr.

Nehmen wir an, der Zeitunterschied beträgt 20 Sekunden. Die Strömungsgeschwindigkeit ist dann

$$\frac{10\ \text{m}}{20\ \text{sec}} = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Gewöhnlich wird der Versuch etwa 10mal wiederholt, indem man den Schwimmkörper an verschiedenen Stellen auf die Flußoberfläche wirft. Man kann auch gleichzeitig 10 Schwimmkörper in einiger Entfernung voneinander werfen. Die erhaltenen Ergebnisse werden addiert und das arithmetische Mittel berechnet. Man erhält auf diese Weise die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit an der Wasseroberfläche.

In den tieferen Wasserschichten ist die Strömungsgeschwindigkeit geringer, so daß die mittlere Geschwindigkeit mit $\frac{4}{5}$ der Strömungsgeschwindigkeit an der Oberfläche angenommen werden kann. (In unserem Falle ist sie also 0,4 m/sec.)

Die Strömungsgeschwindigkeit an der Oberfläche läßt sich auch anders, wenn auch nicht so zuverlässig, ermitteln. Sie setzen sich in ein Boot und rudern genau einen Kilometer (am Ufer abgesteckt) gegen den Strom und dann wieder zurück stromabwärts, wobei Sie sich bemühen müssen, immer mit dem gleichen Kraftaufwand zu rudern!

Angenommen, Sie brauchen zum Stromaufwärtsrudern 18 Minuten und in der Gegenrichtung 6 Minuten für den Kilometer. Bezeichnet man die gesuchte Strömungsgeschwindigkeit des Wassers mit x, die Geschwindigkeit Ihrer Fahrt über Grund mit y, so lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$\frac{1000}{y-x} = 18; \qquad \frac{1000}{y+x} = 6$$

folglich:

$$y + x = \frac{1000}{6}$$

$$y - x = \frac{1000}{18}$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit an der Oberfläche ist 55 m/min, d. h. etwa $\frac{5}{6}$ m/sec.

Wieviel Wasser strömt den Fluß hinab?

Mit dem einen oder anderen Verfahren läßt sich also die Geschwindigkeit des Wassers errechnen. Der zweite Teil unserer Aufgabe ist bedeutend schwieriger. Der Querschnitt des Stromes ist zu bestimmen, damit die Durchflußmenge berechnet werden kann. Zur Bestimmung des Flächeninhalts (des sogenannten »lebendigen, aktiven Flußquerschnittes«) müssen wir eine Querschnittszeichnung anfertigen. Man geht hierbei folgendermaßen vor:

Erstes Verfahren

Dort, wo Sie die Flußbreite gemessen haben, schlagen Sie an beiden Ufern, und zwar unmittelbar am Wasser, zwei Pflöckchen in die Erde. Dann besteigen Sie, zusammen mit einem Ruderer, ein Boot und rudern von einem Pflock zum anderen, wobei Sie möglichst den geraden Weg zwischen den beiden Pflöcken einhalten. Ein unerfahrener Ruderer wird besonders bei einem Fluß mit schneller Strömung mit dieser Aufgabe kaum fertig. Ihr Ruderfreund muß also gut rudern können. Darüber hinaus brauchen wir einen Beobachter, der am Ufer stehen bleibt und aufpaßt, daß das Boot die Richtung einhält. Rudert Ihr Bootfreund falsch, so gibt der Beobachter am Ufer Zeichen. Während der ersten Flußüberquerung brauchen Sie nur die Anzahl der Ruderschläge zu zählen und daraus zu berechnen, wieviel Ruderschläge für die Fahrt des Bootes über 5 oder 10 m erforderlich sind. Dann überqueren Sie den Fluß noch einmal. Bei dieser Fahrt nehmen Sie eine lange Meßlatte mit; alle 5 bzw. 10 m (nach Ruderschlägen gemessen) stoßen Sie die Meßlatte senkrecht bis auf den Grund und notieren sich die einzelnen Tiefen des Flusses.

Auf diese Weise läßt sich der Flußquerschnitt bei kleinen Flüssen bestimmen. Bei größere Wassermengen führenden breiten Flüssen gibt es andere verwickeltere Verfahren, die von Fachleuten durchgeführt werden. Der Amateur ist nun einmal auf Aufgaben beschränkt, die seinen bescheidenen Vermessungsmitteln entsprechen.

Zweites Verfahren

Ist der Fluß schmal und flach, so kommen Sie auch ohne Boot aus. Sie spannen zwischen den beiden Pflöcken einen senkrecht zur Flußachse führenden Bindfaden, der mit Marken oder Knoten an jedem Meter versehen ist und messen dann die Flußtiefe bei jedem Knoten mit der Latte.

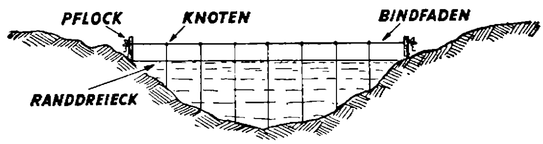


Abb. 42. Der wirksame Flußquerschnitt.

Nachdem alle Maße festliegen, tragen Sie die Zeichnung (das Bild) des Flußbettquerprofils auf Millimeterpapier oder in ein kariertes Blatt ein. Sie erhalten dabei ein Bild in der Art der Abb. 42. Die Bestimmung des Gesamtquerschnittes macht keine Schwierigkeiten, weil er sich in einzelne Trapeze, bei denen beide Grundlinien und die Höhe bekannt sind, sowie in zwei Randdreiecke mit bekannten Grundlinien und Höhen aufgliedern läßt. Wird der Maßstab des Bildes 1 : 100 gewählt, so erhalten wir das Ergebnis unmittelbar in Quadratmetern.

Jetzt besitzen Sie alle Unterlagen und können die durchfließende Wassermenge berechnen. Durch den Flußquerschnitt fließt offenbar in jeder Sekunde eine Wassermenge, deren Volumen dem Volumen eines Prisma entspricht, wobei die Grundfläche des Prismas durch den Flußquerschnitt und seine Höhe durch die mittlere Strömungsgeschwindigkeit je Sekunde dargestellt wird. Beträgt z. B. die Wassergeschwindigkeit 0,4 m/sec und der »lebendige Querschnitt« 3,5 m², so führt der Fluß

$$3{,}5\ \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 1{,}4\ \mathrm{m}^3 \text{ Wasser je Sekunde}$$

bzw. die gleiche Zahl Tonnen*.

Stündlich macht es also

$$1{,}4\ \mathrm{m}^3 \cdot 3600 = 5040\ \mathrm{m}^3 \text{ Wasser aus,}$$

und täglich

$$5040\ \mathrm{m}^3 \cdot 24 = 120960\ \mathrm{m}^3.$$

* 1 Kubikmeter Süßwasser wiegt eine Tonne (1000 kg).

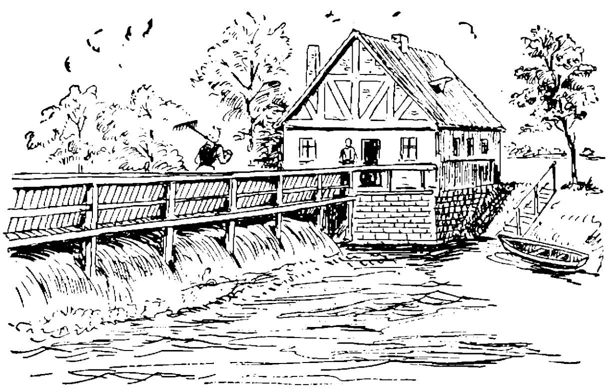


Abb. 43. 80-kW-Wasserkraftwerk der landwirtschaftlichen Genossenschaft von Burmakino; es versorgt sieben Kolchosen mit elektrischem Strom.

Über 100000 Kubikmeter! Nun ist aber ein Fluß mit einem 3,5 m^2 großen Querschnitt eigentlich nur ein Bach. Ist er 1 m tief und 3,5 m breit, so kann man ihn ohne weiteres durchwaten. Dennoch birgt er Energie, die man in den allmächtigen elektrischen Strom verwandeln kann. Wieviel Wasser mag wohl täglich durch den Newa-Strom fließen, der 3300 m^3 je Sekunde führt? Die mittlere Wasserführung des Dnjepr bei Kiew beträgt 700 m^3.

Unsere jungen Forscher und künftigen Erbauer landwirtschaftlicher Kraftwerke müssen noch die Stauhöhe ausrechnen, die das Flußufer zuläßt. Es ist der Höhenunterschied der Wasserspiegel, der durch das Wehr bestimmt wird (Abb. 43). Zu diesem Zwecke steckt man an beiden Ufern, in einer Entfernung von etwa 5 bis 10 m vom Ufer, zwei Pfähle senkrecht zum Fluß. Wir bewegen uns längs der dadurch gebildeten Geraden und stecken die charakteristischen Knickungen der Uferböschung mit kleinen Pflöcken ab (Abb. 44). Die verschiedenen Höhen der einzelnen Pflöcke werden durch Meßlatten gekennzeichnet. An Hand der erhaltenen Maßergebnisse wird das Uferprofil gezeichnet, ähnlich, wie wir bei der Darstellung des Flußbettes verfuhren.

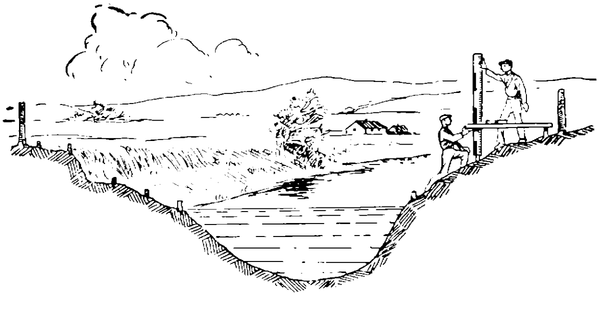


Abb. 44. Messung des Uferprofils.

Aus dem Uferprofil können wir uns ein Urteil über die zulässige Stauhöhe bilden.

Angenommen, der Wasserspiegel wird durch den Staudamm oder das Wehr um 2,5 m gehoben, so sind wir in der Lage, die Leistung des zukünftigen Wasserkraftwerkes zu berechnen. Die Energiewirtschaftler haben für diesen Zweck eine praktische Formel. Sie empfehlen: multipliziere 1,4 (»Wasserverbrauch« des Flusses je Sekunde) mit 2,5 (Höhe des oberen Wasserspiegels) sowie mit 6 (ein Beiwert, der sich je nach Energieverlust in den Maschinen ändert). Man erhält das Ergebnis in Kilowatt. Wir haben also

$$1{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 6 = 21 \text{ Kilowatt.}$$

Da der Wasserspiegel im Fluß je nach der Jahreszeit unterschiedliche Höhen aufweist, so muß man diejenige Wasserführung berechnen, die während der meisten Zeit für den Fluß typisch ist.

Die Ölschicht auf dem Wasser

In einem für Fabrikabwässer benutzten Fluß kann man in der Nähe der Abwässerkanäle schöne, buntschillernde Farben auf der Wasseroberfläche bemerken. Öl (z. B. Maschinenöl), das mit den Abwässern in den Fluß gelangt, bleibt, weil es leichter ist, an der Oberfläche und breitet sich als hauchdünner Film auf dem Wasser aus. Kann man die Stärke eines solchen Filmes messen oder einigermaßen genau bestimmen?

Die Aufgabe scheint reichlich schwer zu sein, dennoch ist die Lösung ziemlich einfach. Sie können sich schon denken, daß wir uns nicht etwa mit der sehr verwickelten unmittelbaren Messung der Decke befassen werden: das wäre geradezu hoffnungslos. Wir bestimmen die Stärke indirekt, indem wir sie berechnen.

Nehmen Sie eine bestimmte Menge Maschinenöl, sagen wir 20 g, und gießen Sie es in einer gewissen Entfernung vom Ufer aus einem Boot ins Wasser. Wenn sich das Öl auf dem Wasser als ein mehr oder weniger runder Fleck ausbreitet, so messen Sie den ungefähren Durchmesser des Kreises und berechnen den Flächeninhalt. Da Ihnen auch der Rauminhalt des Öls durch sein Gewicht bekannt ist, kann die gesuchte Stärke des Ölfilms unschwer ermittelt werden. Nachstehend zeigen wir den Gang der Rechnung an einem Beispiel.

Aufgabe

Ein Gramm Petroleum breitet sich auf dem Wasser in einer Kreisfläche von 30 cm Durchmesser aus. Wie groß ist die Stärke des Petroleumfilms? Ein Kubikzentimeter Petroleum wiegt 0,8 g.

Lösung

Wir ermitteln das Volumen des Films, der selbstverständlich dem Volumen der Petroleummenge gleich ist. Wiegt 1 cm^3 Petroleum 0,8 g, dann ist 1 g gleich 1,25 cm^3 bzw. 1250 mm^3. Die Fläche eines Kreises von 30 cm bzw. 300 mm Durchmesser beträgt rund 70000 mm^2. Die gesuchte Filmstärke ist gleich dem Volumen, geteilt durch die Grundfläche

$$\frac{1250\ \mathrm{mm}^3}{70\,000\ \mathrm{mm}^2} = 0{,}018\ \mathrm{mm},$$

d. h. weniger als $\frac{1}{50}$ mm. Eine direkte Messung dieser geringen Stärke ist mit einfachen Mitteln natürlich ausgeschlossen.

Öl- und Seifenfilme breiten sich zu noch dünneren Filmen aus (bis 0,001 mm). In seinem Buch »Seifenblasen« erzählt uns der englische Physiker Boys folgendes: »Ich führte einmal an einem Teich folgenden Versuch durch: Ich goß einen Löffel Olivenöl ins Wasser. Sofort entstand ein breiter Ölfleck von etwa 20 bis 30 m Durchmesser. Da der Fleck etwa tausendmal länger und tausendmal breiter als der Löffel war, mußte die Ölschicht auf dem Teich rund den millionsten Teil der Ölschicht auf dem Löffel betragen, also etwa 0,000002 mm.«

Die Kreise auf dem Wasser

Aufgabe

Sicherlich haben sie schon mehr als einmal neugierig jene Kreise betrachtet, die sich in einem ruhigen Wasser nach allen Seiten ausbreiten, nachdem ein Stein hineingeworfen wurde (Abb. 45). Sie waren auch bestimmt niemals um die Erklärung dieses Naturphänomens in Verlegenheit: Die Wellen breiten sich von dem Punkt ihrer Entstehung gleichmäßig und mit gleicher Geschwindigkeit nach allen Seiten aus; daher müssen in jedem beliebigen Augenblick alle schwingenden Teilchen im gleichen Abstand vom Ort der Wellenerzeugung, d. h. auf einem Kreisumfang liegen.

Wie sieht aber die Sache aus, wenn das Wasser strömt? Ob sich die von einem in einen schnell dahinströmenden Fluß geworfenen Stein erzeugten Wellen ebenfalls kreisförmig oder vielleicht in länglicher Form ausbreiten?

Abb. 45. Die Kreise auf dem Wasser.

Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als müßten sich in fließendem Wasser die Wellen nach der Richtung strecken, in der sie von der Strömung mitgerissen werden, die Schwingungen breiten sich in Stromrichtung schneller aus als stromaufwärts bzw. seitlich. Also müßten sich die Schwingungen im Wasser in Form einer geschlossenen länglichen Kurve, nicht aber kreisförmig ausbreiten.

In Wirklichkeit verhält es sich jedoch anders. Auch dann, wenn Sie Ihren Stein in einen noch so schnell fließenden Strom werfen, können Sie sich davon überzeugen, daß die Wellenausbreitung genau kreisförmig erfolgt, also genau so, als ob wir es mit stehendem Wasser zu tun hätten. Warum?

Lösung

Wir überlegen folgendermaßen: Würde das Wasser nicht fließen, so wäre die Wellenausbreitung kreisförmig. Wie äußert sich nun die Stromwirkung? Diese ist bestrebt, jedes Teilchen in die mit Pfeilen bezeichnete Richtung mitzureißen (siehe Abb. 46 links), wobei alle Punkte in gradlinigen parallelen Bahnen mit gleicher Geschwindigkeit wandern. Ein paralleles »Mitreißen« hat jedoch keine Veränderung der Ausbreitungsfigur zur Folge. Durch ein derartiges Mitreißen wandert der

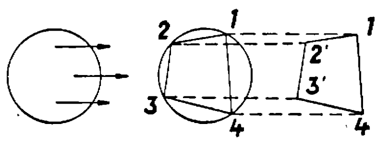


Abb. 46. Die Strömung läßt die Kreisform unverändert.

Punkt 1 (siehe Abb. 46 rechts) nach 1', der Punkt 2 nach 2' usw.; das Viereck 1234 wird durch das Viereck 1'2'3'4' ersetzt, das diesem gleicht, wovon man sich an Hand der gebildeten Parallelogramme 1 2 2'1', 2 3 3'2', 3 4 4'3' usw. leicht überzeugen kann. Wenn wir statt 4 Punkte mehr davon im Kreisumfang nehmen, würden wir ebenfalls gleiche Vielecke erhalten. Wächst die Zahl der Punkte ins Unendliche, d. h. zu einem Kreis, so erhalten wir nach einem entsprechenden Parallelschnitt ebenfalls einen Kreis.

Daher kommt es, daß das strömende Wasser die Wellenform nicht verändert, – auch in fließendem Wasser breiten sich die Wellen kreisförmig aus. Der Unterschied besteht eben nur darin, daß auf der Oberfläche eines Teiches die Kreise nicht wandern, wenn man von der eigentlichen Ausbreitung der Welle als solcher vom Mittelpunkt absieht, während auf der Flußoberfläche der Kreis mit seinem Mittelpunkt mit der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers mitgerissen wird.

Das Phantasie-Schrapnell

Aufgabe

Wir wollen uns jetzt mit einer Aufgabe befassen, die zwar dem Anschein nach in keinerlei Beziehung zu dem behandelten Stoff steht, wie wir aber gleich sehen werden, dennoch mit ihm eng zusammenhängt.

4 [420 43-1]

Stellen Sie sich ein hochfliegendes Schrapnellgeschoß vor. Es sinkt immer tiefer, dann erfolgt die Explosion, die Splitter fliegen nach allen Seiten, wobei sie sich durch die Sprengkraft mit gleicher Geschwindigkeit (der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt) ausbreiten. Wir stellen nun die Frage: Wie verlagern sich die Sprengstücke eine Sekunde nach der Explosion, wenn sie in dieser Zeit den Erdboden noch nicht erreicht haben?

Lösung

Die Aufgabe ist der vorangegangenen Aufgabe über die Ausbreitung kreisförmiger Wellen ähnlich. Scheinbar müssen die Splitter zu einer bestimmten Figur angeordnet fallen, die nach der Fallrichtung gestreckt ist: Die nach oben geschleuderten Splitter fliegen ja langsamer als die unmittelbar nach unten geschleuderten. Es läßt sich jedoch sehr einfach beweisen, daß die Splitter unseres in der Einbildung bestehenden Schrapnellgeschosses kugelförmig auseinandersprühen. Stellen Sie sich für einen Augenblick vor, die Schwerkraft sei aufgehoben. In diesem Falle würden alle Splitter genau die gleichen Strecken, vom Explosionsherd gerechnet, zurücklegen, d. h., sie wären kugelförmig geordnet. Jetzt wirkt sich jedoch die Schwerkraft aus. Unter ihrem Einfluß beginnen die Splitter zu sinken, da, wie wir ja wissen, alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit fallen, müssen auch die Splitter innerhalb einer Sekunde die gleiche Entfernung, und zwar gradlinig, zurücklegen. Eine derartige Parallelwanderung ändert jedoch die Form des Gebildes nicht, – die Kugel bleibt also bestehen.

Folglich bilden die Splitter unseres Phantasieschrapnells eine sich immer weiter ausbreitende Kugel, die mit der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers zur Erde sinkt.

Die Bugwelle

Kehren wir nun zu unserem Fluß zurück. Stellen Sie sich einmal auf eine Brücke, und achten Sie auf die Spur, die ein schnell fahrendes Schiff im Wasser hinterläßt! Sie sehen, daß sich vom Bug aus zwei Wellenkämme ausbreiten (Abb. 47).

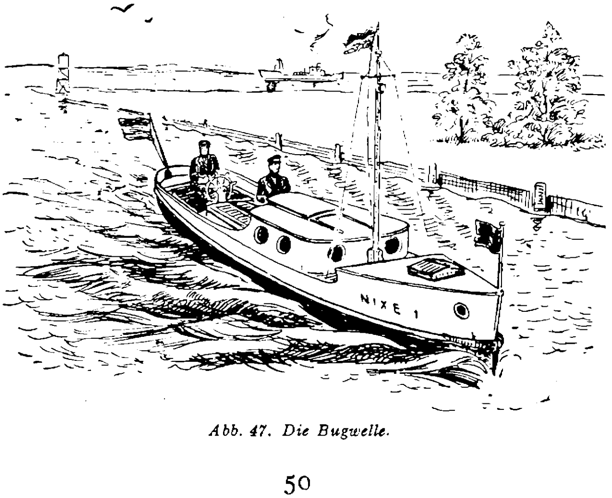


Abb. 47. Die Bugwelle.

Wie entstehen sie? Und warum wird der von beiden Wellen gebildete Winkel mit wachsender Geschwindigkeit des Schiffes immer spitzer?

Wir wenden uns noch einmal unseren Kreisen zu, die bei dem Steinwurf ins Wasser entstehen, um zu klären, wie die beiden Bugwellen entstehen.

Werfen Sie in gleichmäßigen Zeitabständen einen Stein nach dem anderen ins Wasser, so sehen Sie, wie sich auf dem Wasser verschiedene große Kreise bilden. Der Kreis um den zuletzt ins Wasser geworfenen Stein ist natürlich der kleinste. Werfen Sie nun die Steine längs einer Geraden, so erzeugen die dadurch entstandenen Kreise eine Art Bugwelle, wie man sie bei Schiffen sieht. Je kleiner die Steine sind und je häufiger man sie wirft, um so größer wird diese Ähnlichkeit. Tauchen Sie einen Stock ins Wasser und führen Sie ihn durchs Wasser! Sie ersetzen dadurch gewissermaßen die nacheinander ins Wasser geworfenen Steine durch einen stetigen Wurf. Sie beobachten alsdann genau die gleiche Bugwelle, wie sie bei den Schiffen vorkommt.

Wir haben diesem Bild nur wenig hinzuzufügen, um Ihnen über den Vorgang Klarheit zu geben. In jedem Augenblick, da der Steven eines Schiffes das Wasser zerteilt, erzeugt er eine ähnliche kreisförmige Welle wie der ins Wasser geworfene Stein. Zwar breitet sich der Kreis aus, aber inzwischen rückt das Schiff vor und erzeugt die nächste Kreiswelle, der die dritte unmittelbar folgt, usw. Die ruckförmige Entstehung von Wellenkreisen ist durch eine ständige Wellenerzeugung ersetzt. Wir erhalten eine Welle, die in Abb. 48 schematisch dargestellt ist. Beim Begegnen vernichten sich die aufeinanderstoßenden Wellenberge gegenseitig; es bleiben nur die beiden Kreisabschnitte oder Bogen unversehrt, die an der Peripherie entstehen. Beim Zusammenfließen bilden die beiden Außenabschnitte zwei zusammenhängende Wellenberge oder Kämme, deren Lage den Außentangenten aller Kreiswellen entspricht (Abb. 48 rechts).

So entstehen also jene Wellenkämme, die man im Kielwasser eines Schiffes und überhaupt hinter jedem schwimmenden Körper wahrnimmt, der sich schnell genug auf der Wasseroberfläche bewegt.

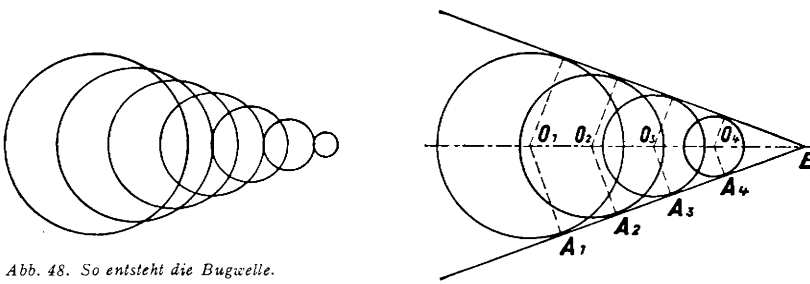


Abb. 48. So entsteht die Bugwelle.

Daraus folgt unmittelbar, daß dieser Vorgang nur dann möglich ist, wenn die Bewegung des Körpers *schneller* ist als diejenige der Wellen. Wenn Sie einen Stock langsam durch das Wasser ziehen, werden Sie keine Wellen bemerken. Die Kreiswellen sind konzentrisch umeinander angeordnet, so daß keine gemeinsame Tangente zu den Kreisen gezogen werden kann.

Man kann die Wellenkämme auch dann beobachten, wenn der Körper still steht und vom Wasser umspült wird. Ist die Strömung schnell, dann sieht man die »Bugwellen« in der die Brückenpfeiler umspülenden Strömung. Die Wellenform ist in diesem Fall ausgeprägter als bei einem Dampfer, weil das Bild nicht durch das Arbeiten der Schiffsschraube verzerrt wird.

Nachdem wir nun die geometrische und physikalische Seite der Angelegenheit kennengelernt haben, versuchen wir einmal, eine Aufgabe zu lösen.

Aufgabe

Wodurch wird die Größe des Winkels bestimmt, der durch die beiden Bugwellen eines Schiffes gebildet wird?

Lösung

Wir zeichnen aus dem Mittelpunkt der Wellenkreise (Abb. 48 rechts) Halbmesser zu den entsprechenden Abschnitten des geraden Wellenberges, d. h. zu den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangente. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß O_1B der innerhalb einer bestimmten Zeit von dem Schiffssteven zurückgelegte Weg ist und O_1A_1 die Entfernung, über die sich in der gleichen Zeit die Welle ausbreitet. Das Verhältnis $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ ist der Sinus des Winkels* O_1BA_1. Es ist gleichzeitig das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Welle und des Schiffes. Folglich ist der von den beiden Kämmen der Bugwelle gebildete Winkel nichts anderes als der doppelte Winkel, dessen Sinus gleich ist dem Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenkreises zur Schiffsgeschwindigkeit.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit kreisförmiger Wellen im Wasser ist annähernd überall gleich; der Winkel zwischen beiden Bugwellen hängt daher hauptsächlich von der Schiffsgeschwindigkeit ab. Der Sinus des Winkels steht aber in direktem Verhältnis zu dieser Geschwindigkeit. Umgekehrt kann aus der Größe des Winkels geschlossen werden, um wievielmal die Schiffsgeschwindigkeit die Wellengeschwindigkeit übertrifft. Beträgt z. B. der von den Bugwellen gebildete Winkel 30° (das ist bei den meisten seegehenden Frachtern der Fall), so beträgt der Sinus der Hälfte dieses Winkels (sin 15°) 0,26; das heißt, daß die Geschwindigkeit des Dampfers die Ausbreitungsgeschwindigkeit der kreisförmigen Welle um das Vierfache (1 : 0,26) übertrifft.

Die Geschoßgeschwindigkeit

Aufgabe

Eine durch die Luft sausende Gewehrkugel oder ein Kanonengeschoß erzeugt ähnliche Wellen.

Abb. 49 und 50 geben zwei Bilder von Geschossen wieder, deren Fluggeschwindigkeit ungleich ist. In beiden Zeichnungen können wir die Bugwelle oder Kopfwelle, wie man sie in diesem Fall nennt, deutlich sehen. Sie verdankt ihre Entstehung der gleichen Ursache wie die Bugwelle eines Schiffes.

* Der Sinus eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck *ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse:*

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Hier gelten auch die gleichen geometrischen Beziehungen; der Sinus des halben von der Kopfwelle gebildeten Winkels ist dem Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Luftwelle zu der Fluggeschwindigkeit gleich. Nun breiten sich

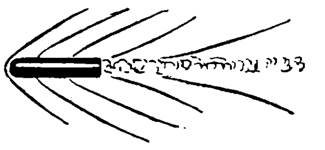


Abb. 49. Die durch ein fliegendes Geschoß erzeugten Luftwellen.

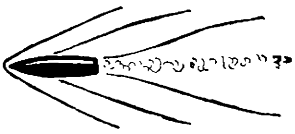


Abb. 50. Dieses Geschoß hat eine andere Geschwindigkeit.

die Wellen im Luftmedium annähernd mit Schallgeschwindigkeit, d. h. mit 330 m/sec, aus. Nach der Aufnahme eines fliegenden Geschosses kann man also unschwer seine Geschwindigkeit annähernd bestimmen. Wie verfährt man in unserem Falle bei den hier dargestellten Bildern?

Lösung

Wir wissen den Divergenzwinkel der Kopfwelle (Abb. 49 und 50). Im ersten Falle beträgt er etwa 80°, im zweiten etwa 55°. Die Hälfte der Winkel ist also jeweils 40° und $27\frac{1}{2}$°. Der sin 40° = 0,64; der sin $27\frac{1}{2}$° = 0,46. Also beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Luftwelle (330 m/sec) im ersten Falle 0,64 (64%) der Geschoßgeschwindigkeit, im zweiten Falle 0,46 (46%). Folglich ist die Geschwindigkeit des ersten Geschosses $\frac{330}{0{,}64} = 520$ m/sec und die des zweiten $\frac{330}{0{,}46} = 720$ m/sec.

Daraus können Sie ersehen, wie man mit Hilfe einfacher geometrischer Überlegungen sowie gewisser physikalischer Kenntnisse eine auf den ersten Blick ziemlich knifflige Aufgabe zu lösen vermag, nämlich die Bestimmung der Geschwindigkeit eines in seiner Flugbahn fotografierten Geschosses. Die Rechnung hat indessen keinen Anspruch auf Genauigkeit, weil wir einige Nebenfaktoren außer acht gelassen haben.

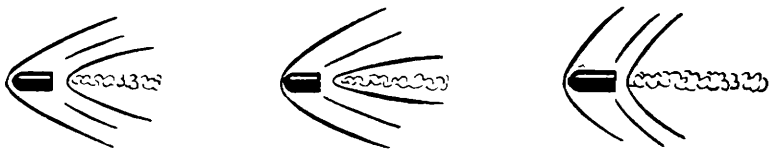


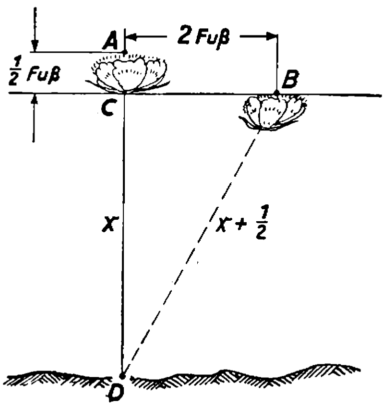
Abb. 51. Die Geschwindigkeiten der fliegenden Geschosse sollen errechnet werden.

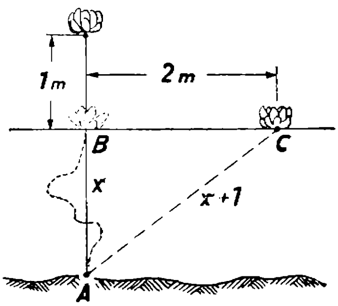
Aufgabe

Hat jemand Lust, die Geschwindigkeit von Geschossen selbständig auszurechnen, so kann er auf Grund der drei dargestellten, mit verschiedener Geschwindigkeit fliegenden Geschosse an die Lösung der Aufgabe gehen (Abb. 51).

Wir wollen jetzt zu dem Flußidyll zurückkehren und eine Hindu-Aufgabe über die Lotosblume betrachten.

Die Lotosblume, wohl halbfuß die Breite,
Wuchs einsam im See und allein,
Da trieb sie ein Windstoß heftig beiseite,
Wo mag unsere Blume nun sein?
Vom Wasserspiegel verschwunden . . .
Im Lenz aber hat sie ein Fischer gefunden
Zwei Fuß weit weg von der Stelle,
Wo einst sie geruht auf der Welle.
Nun sagt, ob ihr's wißt,
Wie tief hier das Wasser ist?





b) Die Tiefe des Sees wird ermittelt.

Abb. 52. a) Eine indische Aufgabe über die Lotosblume.

Lösung

Wir bezeichnen die gesuchte Tiefe CD des Lotosteiches mit x. Nach dem pythagoräischen Lehrsatz gilt:

$$BD^2 = CD^2 + BC^2$$

oder

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$$

und

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2^2$$

woraus folgt, daß $x = 4 - \frac{1}{4}$

und $x = 3\frac{3}{4}$ ist.

Also ist die gesuchte Tiefe $3\frac{3}{4}$ Fuß.

In der Nähe eines Flußufers oder in einem flachen Teich können Sie Wasserpflanzen finden, die Ihnen den Stoff für die erwähnte Aufgabe liefern: Sie können ohne jede Meßvorrichtung die Wassertiefe an der betreffenden Stelle ausrechnen. Es ist dann vorteilhaft, die Aufgabe anders zu lösen als im Gedicht angegeben.

Hier ist eine Aufgabe in Prosa:

> Ein Mann fährt mit einem Kahn an eine Seerose heran und hebt sie senkrecht über der Wurzel 1 m über die Wasseroberfläche. Es ist möglich, den Stengel so weit zur Seite zu biegen, daß die Seerose 2 m weiter die Wasseroberfläche berührt (Abb. 52).

Können Sie helfen, die Tiefe des Sees zu berechnen? Nach unserem Beispiel müßte Ihnen das leicht gelingen.

Der Sternenhimmel im Fluß

Auch zur Nachtzeit stellt der Fluß dem Geometer neue Aufgaben. Denken Sie einmal an die Stelle bei Gogol: »Hoch über der Welt leuchten und funkeln die Sterne und spiegeln sich allesamt im Dnjepr wider. Sie alle hält der Dnjepr in seinem dunklen Schoße fest: Keiner entflieht, es sei denn, er erlischt am Himmelsgewölbe.«

Ja, das ist schon so: Steht man am Ufer eines breiten Stromes, dann hat es den Anschein, als spiegele sich der ganze Himmelsdom im Wasser wider. Wie ist es aber in Wirklichkeit? Schauen wirklich alle Sterne ihr Spiegelbild im Wasser?

Wir fertigen eine Zeichnung an (Abb. 53). A ist das Auge des Beschauers am Flußufer, und zwar am Rande einer steilen Uferböschung. MN ist die Wasseroberfläche. Welche Sterne sieht nun der Beschauer von seinem Standort A? Damit wir diese Frage beantworten können, wollen wir von dem Punkt A die Senkrechte AD auf die Gerade MN fällen und diese um eine gleiche Strecke bis A' verlängern. Wenn das Auge des Beobachters sich in A' befinden würde, so könnte er nur jenen Teil des Himmels sehen, der von den Seiten des Winkels $BA'C$ begrenzt wird. Das Blickfeld des wirklichen Beobachters, der von dem Punkt A aus schaut, ist genau so groß. Sterne, die außerhalb dieses Gesichtswinkels liegen, bleiben unsichtbar. Die reflektierten Strahlen gehen an dem Auge des Beschauers vorbei.

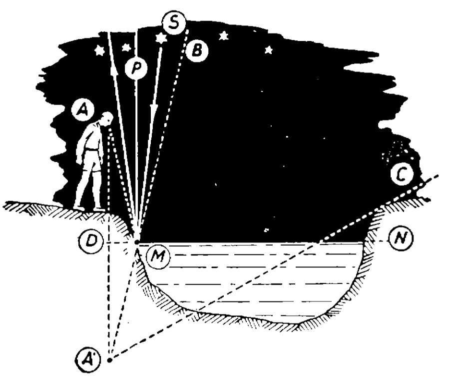


Abb. 53. Welchen Teil des Sternenhimmels sieht man im Wasserspiegel eines Flusses mit hohem Ufer?

Wie können wir uns davon überzeugen? Wie sollen wir beweisen, daß z. B. der Stern S, der außerhalb von $BA'C$ liegt, im Wasser für unseren Beobachter unsichtbar bleibt?

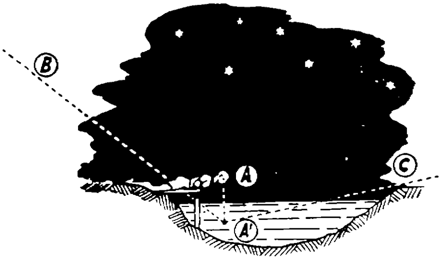


Abb. 54. In einem schmalen Fluß mit flachen Ufern sind mehr Sterne sichtbar.

Wir folgen seinem in der Nähe des Ufers einfallenden Strahl; er trifft auf die Wasseroberfläche in M. Er wird in einem Winkel zurückgeworfen, der dem Einfallwinkel gleich ist (unter einem Winkel zu MP, der dem Einfallwinkel SMP gleich ist). Dieser Winkel ist jedoch kleiner als der Winkel PMA (die Beweisführung folgt unschwer aus der Gleichheit der Dreiecke ADM und $A'DM$). Folglich muß der zurückgeworfene Strahl an A vorbeigehen. Die von den weiter als M entfernten Punkten zurückgeworfenen Strahlen des Sternes S gehen erst recht außerhalb des Blickfeldes des Beobachters vorbei.

Daraus folgt, daß die Beschreibung Gogols übertrieben ist. Der Dnjepr spiegelt nicht alle Sterne wider; es ist weniger als das halbe Himmelsgewölbe.

Das Interessante ist aber dabei, daß die Weite des reflektierten Sternenhimmels noch lange kein Beweis für die Breite eines Gewässers ist. In einem schmalen Fluß mit flachen Ufern können wir nahezu die Hälfte der Himmelskuppel sehen (also mehr als in einem breiten Strom), sofern wir uns tief zum Ufer bücken. Durch eine zeichnerische Konstruktion (Abb. 54) des Blickfeldes können Sie sich hiervon leicht überzeugen.

Der Weg über den Fluß

Aufgabe

Da liegt zwischen den Orten A und B ein Fluß oder auch ein Kanal, dessen Ufer annähernd parallel verlaufen (Abb. 55). Rechtwinklig zu den beiden Ufern soll eine Brücke über den Fluß geschlagen werden. Wo muß die Brücke stehen, damit der Weg von A zu B die kürzeste Entfernung bildet?

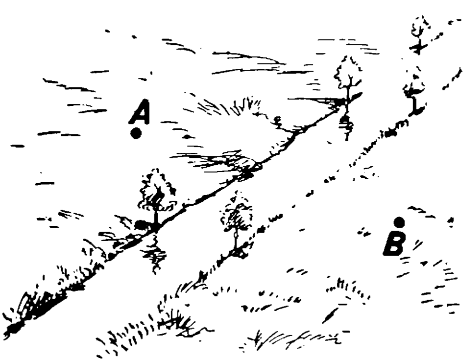


Abb. 55. Wo muß eine Brücke gebaut werden, damit man die kürzeste Entfernung zwischen den Punkten A und B erhält?

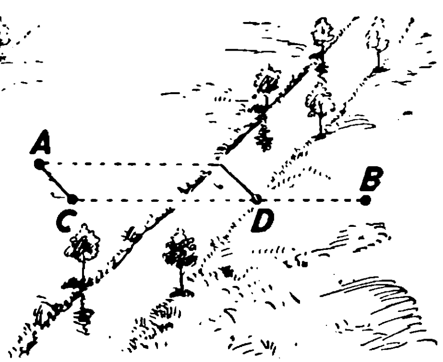


Abb. 56. Jetzt haben wir den richtigen Ort bestimmt!

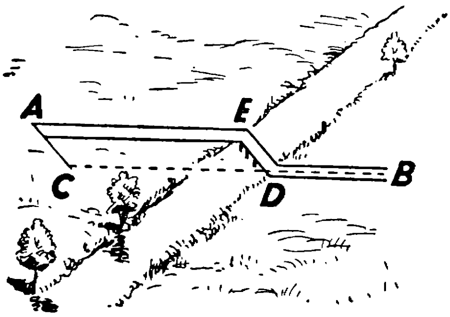


Abb. 57. Die Brücke steht.

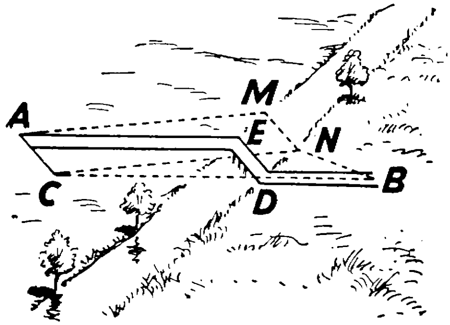


Abb. 58. Der Weg A E D B ist tatsächlich der kürzeste.

Lösung

Wir legen durch den Punkt A (Abb. 56) eine zu der Flußrichtung rechtwinklig verlaufende Gerade, messen eine Strecke AC gleich der Flußbreite ab und verbinden C und B miteinander. Die Brücke muß in D gebaut werden, damit der Weg AB die kürzeste Strecke wird.

Wir prüfen, ob es sich wirklich so verhält. Bauen wir rechtwinklig zum Fluß eine Brücke DE (Abb. 57) und verbinden E mit A, dann erhalten wir den Weg $AEDB$, in dem AE parallel zu CD verläuft. ($AEDC$ ist ein Parallelogramm, weil seine gegenüberliegenden Seiten gleich und parallel sind.) Dabei sind die Strecken $AEDB$ und ACB gleichlang. Es ist leicht zu beweisen, daß jeder andere Weg länger sein muß als dieser. Wir nehmen nun an, daß wir irgend einen anderen Weg – etwa $AMNB$ (Abb. 58) – für günstiger halten. Er sei, so behaupten wir, kürzer als $AEDB$ und folglich kürzer als ACB. Wenn wir C mit N verbinden, dann stellen wir fest, daß $CN = AM$ ist. Folglich ist der Weg $AMNB = ACNB$. $ACNB$ ist offensichtlich länger als ACB und auch länger als $AEDB$. Daher ist der Weg $AMNB$ im Gegensatz zu unserer Annahme nicht kürzer, sondern länger als $AEDB$.

Diese Überlegung gilt für jede Brückenführung, die mit ED nicht übereinstimmt. Mit anderen Worten, der Weg $AEDB$ ist tatsächlich der kürzeste.

Der Bau zweier Brücken

Aufgabe

Es kann auch ein komplizierterer Fall eintreten, wenn es z. B. darum geht, den kürzesten Weg zwischen A und B über einen Fluß zu ermitteln, den wir rechtwinklig zweimal überqueren müssen (Abb. 59). An welchen Punkten sind die Flußarme zu überbrücken?

Lösung

Wir zeichnen von dem Punkt A (Abb. 59) die Strecke AC, gleich der Breite des Flußarmes I; diese Gerade führt rechtwinklig zu dem Flußufer. Von dem Punkt B wird eine der Breite des Flußarmes II gleiche Strecke BD, ebenfalls rechtwinklig

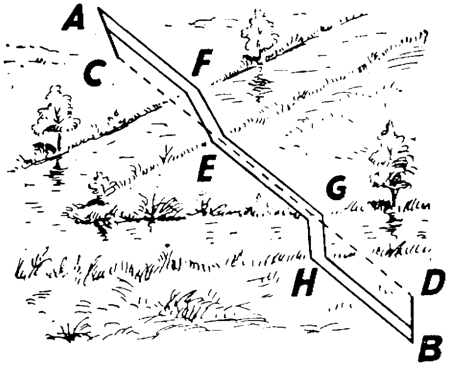


Abb. 59. Zwei Brücken über die beiden Flußarme.

zum Flußarm II, abgemessen. Dann legen wir eine Gerade durch D und C. Im Punkt E wird die Brücke EF und im Punkt G die Brücke GH geschlagen. $AFEGHB$ ist der gesuchte kürzeste Weg zwischen A und B.

Der Beweis dürfte ja dem Leser nicht schwerfallen, wenn er von den gleichen Überlegungen ausgeht, die wir in der vorangegangenen Aufgabe entwickelt haben. Erst dann wollen wir uns dem neuen Kapitel zuwenden.

DRITTES KAPITEL

Geometrie auf freiem Felde

Die scheinbare Mondgröße

Wie groß erscheint uns der Mond am Himmel? Nun, die Menschen geben darauf verschiedene Antworten.

Schätzungen wie »tellergroß«, »wie ein Apfel«, »von der Größe eines Menschengesichts« usw. sind äußerst unklar und unbestimmt und beweisen, daß die Befragten sich über das Wesen der Sache keine Rechenschaft geben.

Die richtige Antwort auf diese, wie es doch scheint, sehr simple Frage kann nur derjenige geben, der eine klare Vorstellung davon hat, was eigentlich mit »sichtbarer« oder »scheinbarer« Größe gemeint ist. Kaum einer kommt auf den Gedanken, daß es sich in diesem Falle um die Größe eines bestimmten Winkels handelt, um denjenigen Winkel nämlich, der durch die beiden von unserem Auge zu den äußersten Punkten des betrachteten Gegenstandes führenden Linien bestimmt wird. Diesen Winkel nennt man *Gesichtswinkel* oder die *Winkelgröße* eines Gegenstandes (Abb. 60). Wenn also die scheinbare Größe des am Himmel wandernden Mondes mit der Größe eines Tellers, eines Apfels unter anderen verglichen wird, dann sind solche Antworten entweder ganz sinnlos, oder sie besagen, daß der betreffende Beobachter den Mond unter dem gleichen Gesichtswinkel sieht wie die soeben erwähnten Gegenstände. Aber dieser Hinweis reicht noch nicht aus. Wir sehen ja einen Teller oder einen Apfel je nach ihrer Entferung unter verschiedenen Gesichtswinkeln. Aus der Nähe betrachtet ist der Winkel groß, aus der Entfernung klein. Das Problem ist eindeutig bestimmt, wenn die Entfernung angegeben wird, aus der wir Teller und Apfel betrachten.

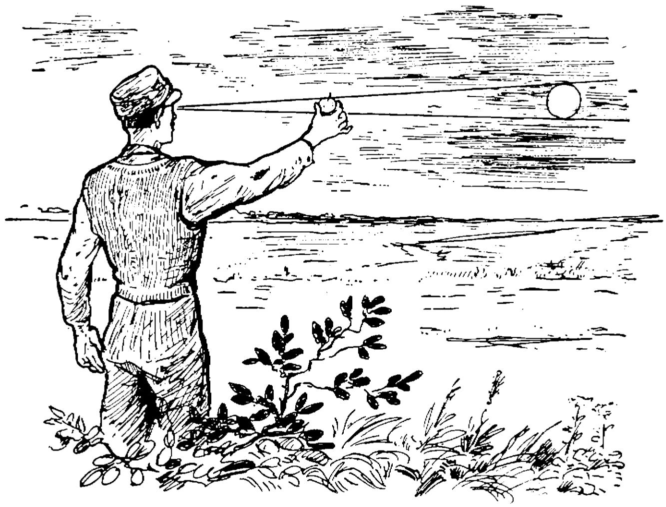


Abb. 60. Der Gesichtswinkel.

Der Vergleich entfernter Gegenstände mit anderen Objekten ist ein sehr be-beliebter literarischer Kunstgriff, der sogar von namhaften Schriftstellern gern angewandt wird. Wir geben ein Beispiel aus Shakesspeares »König Lear« wieder. Edgar beschreibt die Aussicht vom steilen Meeresgestade:

»Kommt Herr, hier ist der Ort; steht still! Wie grauenvoll
Und schwindelnd ist's, so tief den Blick zu senken!
Die Dohlen, die in halber Höhe flattern
Und Krähn, sind klein wie Käfer. Halbwegs hängt
Ein Mann und sammelt Fenchel – schrecklich Handwerk!
Er scheint von hier nicht größer als sein Kopf.
Die Fischer, die am Strande gehn, erscheinen
Wie Mäuse, und das große Schiff vor Anker
zum Boot verkleinert, und das Boot zur Boje,
Zu winzig für den Blick ...«

(*Nach Schlegel-Tieck*)

Die angegebenen Vergleiche würden nur dann eine genaue Vorstellung über die Entfernung geben, wenn sie Hinweise über die Entfernung der Vergleichsobjekte (hier der Fliegen, des Kopfes, der Maus, des Bootes) enthielten. Vergleicht man den Mond mit einem Teller, dann müßte ebenfalls die Entfernung dieses Gebrauchsgegenstandes vom Auge angegeben werden.

Diese Entfernung ist viel größer als sie sich der Laie gewöhnlich vorstellt. Halten Sie einen Apfel in der ausgestreckten Hand, so verdecken Sie damit nicht nur den Mond, sondern noch ein gutes Stück Himmel dazu. Hängen Sie den besagten Apfel an einen Bindfaden auf und entfernen Sie sich von ihm immer weiter, bis er die Mondscheibe gerade noch bedeckt, so ist Mond und Apfel scheinbar gleich groß. Messen Sie die Entfernung von Ihrem Auge zum Apfel, so stellen Sie fest, daß es fast 10 m sind! Soweit müssen Sie also vom Apfel abrücken, damit er gerade den Mond verdeckt. Der Teller müßte entsprechend dreißig Meter weiter gerückt werden, d. h. ein halbes Hundert Schritte.

Diese Tatsache klingt für jeden, der davon hört, völlig unglaubwürdig. Sie ist indessen unzweifelhaft richtig und beruht darauf, daß wir den Mond unter einem Gesichtswinkel von nur einem halben Grad sehen. Im täglichen Leben kommen wir so gut wie niemals dazu, Winkelgrößen abzuschätzen. Über kleine Winkel von 1°, 2° oder 5° haben daher die meisten Menschen nur eine sehr unklare Vorstellung. (Wir lassen Fachleute, wie Landmesser, technische Zeichner usw., die in der praktischen Vermessungskunde erfahren sind, außer acht.) Wir sind aber in der Lage, größere Winkel einigermaßen richtig zu schätzen, besonders, wenn wir diese mit den uns vertrauten Winkeln unserer Uhrzeiger vergleichen. So kennt selbstverständlich jeder die Winkel von 90°, 60°, 30°, 120°, 150° usw., die wir ja täglich auf dem Zifferblatt unserer Uhr beobachten. (Entsprechend 3 Uhr, 2, 1, 4, 5, Uhr usw.). Wir haben uns sogar daran gewöhnt, daß wir die Zeit an dem durch die Zeiger gebildeten Winkel »erraten«, ohne die Zahlen überhaupt zu beachten. Einzelne kleinere Objekte sind jedoch meist unter kleinerem Winkel sichtbar, so daß wir nicht in der Lage sind, ihre Winkel auch nur annähernd genau zu bestimmen.

Der Gesichtswinkel

Wollen wir uns von der Größe eines Winkels von 1° anschaulich überzeugen, so rechnen wir einmal aus, wie weit ein Mensch (Größe 1,70 m) sich von uns entfernen muß, um unter diesem Gesichtswinkel gesehen zu werden. Wenden wir dabei die fachgeometrische Ausdrucksweise an, so sagen wir, daß wir den Halbmesser eines Kreises berechnen wollen, dessen 1°-Bogen eine Länge von 1,7 Metern aufweist. (Es handelt sich, genau ausgedrückt, um eine Sehne; der Unterschied zwischen Bogen und Sehne kann jedoch bei so geringen Winkeln vernachlässigt werden.) Wir überlegen nun folgendermaßen: Ist der Bogen von $1° = 1{,}70$ m, so muß der volle Kreisumfang von 360° eine Länge von $1{,}70\,\text{m} \cdot 360 = 612$ m haben. Der Halbmesser ist $2 \cdot \pi$ kleiner; setzen wir

$$\pi = \frac{22}{7} \quad \text{dann ist der Halbmesser gleich} \quad 612\,\text{m} : \frac{44}{7} \approx 98\,\text{m}.$$

Wir sehen daher einen Menschen unter einem Gesichtswinkel von 1°, wenn er von uns rund 100 m entfernt ist (Abb. 61). Entfernt er sich um das Doppelte, so sehen wir ihn unter einem Winkel von $\frac{1}{2}$°, nähert er sich bis auf 50 m, dann ist der Winkel 2° usw.

Wir können leicht ausrechnen, daß wir einen meterlangen Stock unter dem Winkel von 1° in einer Entfernung von

$$360\,\text{m} : \frac{44}{7} \approx 57\,\text{m}$$

sehen. Unter dem gleichen Winkel erscheint uns 1 cm in einer Entfernung von 57 cm, 1 km in einer Entfernung von 57 km usw., d. h., jeder unter einem Winkel von 1° betrachtete Gegenstand befindet sich in der 57fachen Entfernung seines

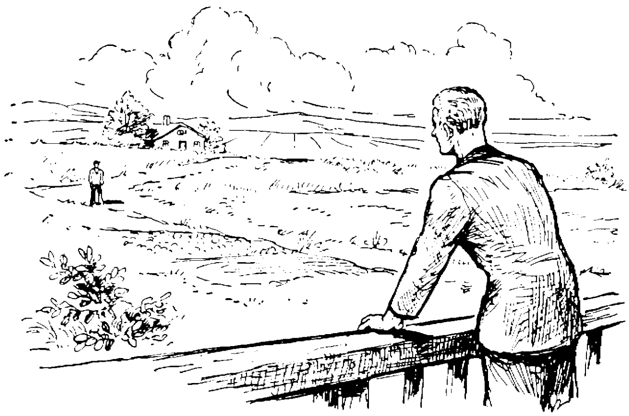


Abb. 61. Eine menschliche Gestalt in 100 m Entfernung erscheint in einem Gesichtswinkel von 1°.

Durchmessers. Merken wir uns die Zahl 57, dann können wir schnell und einfach alle Größen berechnen, die mit dem Winkelmaß eines Gegenstandes zusammenhängen.

Wollen wir z. B. berechnen, wie weit wir einen Apfel von 9 cm Durchmesser entfernen müssen, um ihn unter einem Winkel von einem Grad zu betrachten, so genügt es, 9 cm mit 57 zu multiplizieren; wir erhalten 513 cm oder rund 5 m. Aus der doppelten Entfernung erscheint uns der Apfel unter dem halb so großen Winkel $\frac{1}{2}°$ genau so groß wie der Mond.

In ähnlicher Weise läßt sich für jeden Gegenstand diejenige Entfernung berechnen, in der er die gleiche Größe wie die Mondscheibe hat.

Der Mond und der Teller

Aufgabe

In welcher Entfernung muß ein Teller von 25 cm Durchmesser angebracht werden, damit er ebenso groß wie der Mond ist.

Lösung

$$25\,\text{cm} \cdot 57 \cdot 2 = 28{,}5\,\text{m}$$

Der Mond und die Münzen

Die gleiche Rechnung ist für ein 5-Kopekenstück (Durchmesser 25 mm, bzw. für ein 3-Kopekenstück Durchmesser 22 mm) durchzuführen. (Dem deutschen Leser wird die Lösung der gleichen Aufgabe mit folgenden Maßen empfohlen: 10 Pfennigstück = 21 mm, 5 Pfennigstück = 19 mm, 1 Pfennigstück = 17 mm Durchmesser. Anmerkung der deutschen Redaktion).

Lösung

$$0{,}025 \text{ m} \cdot 57 \cdot 2 = 2{,}85 \text{ m}$$

$$0{,}022 \text{ m} \cdot 57 \cdot 2 = 2{,}5 \text{ m}$$

Halten Sie die Behauptung für unglaubwürdig, der Mond sei nicht größer als ein 3-Kopekenstück, aus einer Entfernung von 4 Schritten verglichen, oder als ein 80 cm entfernter Bleistift, so halten Sie einmal einen Bleistift in der ausgestreckten Hand gegen die Mondscheibe. Der Mond wird durch den Bleistift reichlich verdeckt. Es mag zwar sonderbar erscheinen, aber der passendste Gegenstand, mit dem man den Mond in bezug auf seine relative Größe vergleicht, ist nicht etwa ein Teller, ein Apfel, ja, nicht einmal eine Kirsche – nein – eine Erbse oder noch besser ein Zündholzköpfchen. Vergleicht man den Mond mit einem Teller oder einem Apfel im richtigen Verhältnis, dann setzt man eine sehr große Entfernung dieser Gegenstände vom Auge voraus. Der Apfel in unserer Hand, ebenso wie der Teller auf unserem Tisch, erscheint uns zehn- bis zwanzigmal größer als der Mond. Nur den Zündholzkopf, den wir in einem Abstand von 25 cm vor unserem Auge betrachten (»Klare Sichtentfernung«), sehen wir tatsächlich unter einem Winkel von $\frac{1}{2}°$, er hat also die gleiche Größe wie der Mond.

Die Tatsache, daß die Mondscheibe den Augen der meisten Menschen trügerischerweise zehn- bis zwanzigmal größer erscheint, als sie tatsächlich ist, gehört zu den interessantesten Beispielen optischer Täuschung. Es ist anzunehmen, daß dies mit der *Helligkeit* des Mondes zusammenhängt. Der Vollmond tritt auf dem dunklen Hintergrund des Nachthimmels viel plastischer hervor als unsere Vergleichsgegenstände, wie Teller, Apfel, Münzen usw. in unserer unmittelbaren Umgebung*.

Diese Illusion ist so hartnäckig, daß sogar namhafte Landschaftsmaler, die doch richtig beobachten können, darauf »hereinfallen« wie gewöhnliche Menschen. Auf ihren Bildern stellen sie den Vollmond viel größer dar, als er tatsächlich ist. Sie brauchen nur eine von einem Maler dargestellte Mondscheinlandschaft mit der entsprechenden Fotografie zu vergleichen, um sich zu überzeugen, daß diese Behauptung richtig ist.

Der gleiche Sachverhalt besteht auch bei der Sonne, die wir unter dem gleichen Winkel von $\frac{1}{2}°$ betrachten; wohl ist der wahre Durchmesser des Sonnenballs dreihundertneunzigmal größer als der des Mondes, dafür ist auch die Sonne dreihundertneunzigmal weiter entfernt.

Sensationsaufnahmen

Damit wir uns mit dem wichtigen Begriff des Gesichtswinkels näher vertraut machen, wollen wir ein wenig von unserem direkten Thema – der Geometrie auf freiem Felde – abschweifen und einige Beispiele aus dem Gebiet der Fotografie heranzuziehen.

* Dadurch erklärt sich auch, warum der glühende Leuchtfaden einer Glühbirne viel dicker erscheint, als in kaltem Zustand bei ausgeschaltetem Strom.

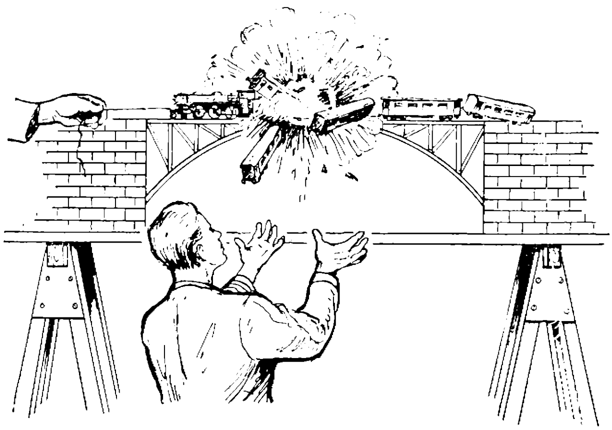


Abb. 62. Aufbau eines Eisenbahnunglücks für eine Filmaufnahme.

Sie haben doch wohl auf der Filmleinwand Unglücksfälle, etwa zusammenstoßende Züge oder unwahrscheinliche Szenen, wie ein auf dem Meeresgrunde fahrendes Auto usw. des öfteren gesehen. Die Szenen von Schiffsuntergängen im Sturm haben sicherlich einen starken Eindruck auf Sie gemacht. Kein Mensch nimmt an, daß diese Aufnahmen etwa wirkliche Geschehnisse wiedergeben.

Wo steckt also hier das Geheimnis?

Die hier wiedergegebenen Bilder lüften es. Da sehen Sie z. B. auf Abb. 62 ein »Zugunglück«. Es ist eine Spielzeugeisenbahn auf einer Spielzeugbrücke. Abb. 63 zeigt ein Spielzeugauto, das an einem Bindfaden hinter einem Aquariumkasten entlanggezogen wird. Das ist die »Natur«, die gefilmt wurde. Warum aber geben wir uns im Kino der Täuschung hin, echte Züge und echte Autos zu sehen? Hier, in der Abbildung im Buch, fällt uns sofort die geringe Größe auf, auch wenn es

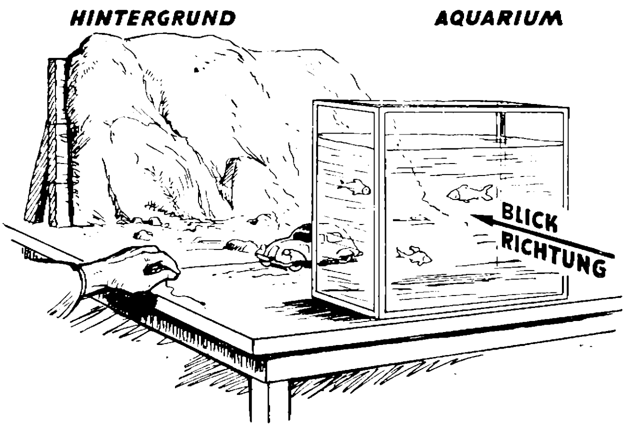


Abb. 63. Das Auto auf dem Meeresgrund.

Abb. 64.
Die in der Natur aufgenommene Zauberlandschaft.

nicht möglich wäre, ihre Größe mit dem Maßstab der anderen Objekte zu vergleichen. Der Grund ist einfach. Die Spielzeugeisenbahn und das Modellauto sind aus unmittelbarer Nähe gefilmt. Daher erscheinen sie dem Beschauer unter dem gleichen Gesichtswinkel, unter dem wir die echten Eisenbahnwagen und Autos sehen. Das ist das ganze Geheimnis.

Abb. 64 zeigt eine seltsame Landschaft, die an die Natur der ältesten geologischen Epochen erinnert. Sie sehen eigenartige Bäume, an denen unnatürlich große Wassertropfen hängen. Im Vordergrund bewegt sich ein Riesenuntier, dessen Form aber an eine gewöhnliche Ameise erinnert. Trotz des unnatürlichen Aussehens ist das Bild nach der Natur gezeichnet. Es ist ein winziges Stück Waldboden, das jedoch aus einem ungewöhnlichen Gesichtswinkel heraus dargestellt ist. Wir bekommen niemals Halme, Moos, Wassertropfen und Ameisen unter diesem sonderbaren Gesichtswinkel zu sehen. Die dargestellte Landschaft erscheint uns daher so unheimlich und fremdartig. Wir haben ein Landschaftsbild vor uns, wie wir es wahrnehmen würden, wenn wir die Größe einer Ameise besäßen.

In ähnlicher Weise verfahren z. B. Bildreporter, um sensationelle Bildwirkungen zu erreichen. Eine im Ausland erscheinende Zeitung brachte einmal eine Notiz

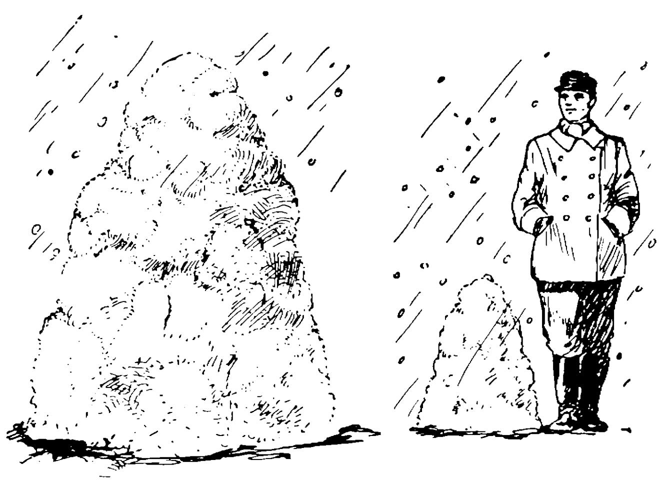


Abb. 65. Ein Schneeberg auf der Fotografie (links) und in Wirklichkeit (rechts).

mit heftigen Vorwürfen gegen die Stadtverwaltung, daß sie ungeheure Schneemengen auf den Straßen dulde. Als Beweis brachte die Zeitung eine Aufnahme solch eines Schneeberges (Abb. 65), der tatsächlich einen recht imposanten Eindruck machte. Bei der Nachprüfung stellte es sich indessen heraus, daß der Berg in Wirklichkeit ein harmloser, kleiner Schneehaufen war (rechts), den der als Spaßvogel bekannte Pressefotograf aus nächster Entfernung, d. h. unter einem sehr großen Gesichtswinkel, aufgenommen hatte.

Der lebende Winkelmesser

Ein einfaches Gerät zum Messen von Winkeln können wir leicht selbst anfertigen, besonders, wenn wir dabei den bekannten Gradbogen verwenden. Aber manchmal haben wir während eines Ausfluges nicht einmal einen einfachen Winkelmesser zur Hand.

In diesem Falle können wir auf jenen lebenden Winkelmesser zurückgreifen, der uns niemals verläßt; es sind unsere eigenen Finger. Wir müssen nur vorher einige Berechnungen und Messungen durchführen, damit wir die Finger als Gerät zum Abschätzen der Winkel benutzen können. Vor allem müssen wir den Gesichtswinkel feststellen, unter dem wir den Nagel des Zeigefingers der ausgestreckten Hand sehen. Die übliche Breite des Nagels ist 1 cm, und sein Abstand vom Auge bei ausgestrecktem Arme beträgt durchschnittlich 60 cm. Wir sehen ihn daher unter einem Winkel von rund 1° (es ist um ein geringes weniger, weil der Winkel 1° bekanntlich in 57 cm Entfernung entsteht). Kinder und Halbwüchsige haben zwar nicht so große Nägel, dafür ist auch ihr Arm kürzer; es bleibt also bei etwa 1°. Der Leser tut gut, Messungen und Angaben praktisch nachzuprüfen und sich nicht etwa auf die gegebenen Daten zu verlassen; dadurch kann er sich nämlich von dem Maß der Abweichung von 1° überzeugen. Ist der Fehler sehr groß, so müssen Sie es mit einem anderen Fingernagel versuchen. Wenn Sie nun den geschilderten Kunstgriff beherrschen, können Sie auch kleine Gesichtswinkel »mit der bloßen Hand« messen. Jeder Gegenstand, der gerade von Ihrem Fingernagel bedeckt ist, ist unter einem Winkel von 1° zu sehen und genau das 57fache seiner Grenzmaße entfernt. Bedeckt der Nagel nur das halbe Objekt, dann ist der Gesichtswinkel 2° und sein Abstand etwa 28 Objektdurchmesser.

Der Vollmond wird nur vom halben Nagel bedeckt; er ist unter einem Gesichtswinkel von $\frac{1}{2}°$ zu sehen. Folglich ist der Mond 114mal weiter entfernt als sein Durchmesser beträgt. Ist das nicht eine wertvolle astronomische Feststellung, die Sie ohne jedes Instrument durchgeführt haben? Bei größeren Winkeln nehmen Sie das Kuppelgelenk des Daumens. *Biegen* Sie den Daumen an, und strecken Sie den Arm aus! Bei einem Erwachsenen beträgt die Länge (wohlgemerkt, die *Länge* und nicht die Breite) dieses Gelenks etwa 3,5 cm. Die Entfernung vom Auge bis zum Gelenk ist etwa 55 cm. Es ist leicht auszurechnen, daß die Größe des Winkels in dieser Lage rund 4° beträgt. Wir haben damit ein Mittel in der Hand, Gesichtswinkel von 4° (folglich auch solche von 8°) ohne weiteres »über den Daumen zu peilen«.

Wir weisen auf die Möglichkeit hin, zwei weitere Winkel mit dem Finger zu bestimmen. Es sind Winkel, unter denen wir über den ausgestreckten Arm folgende Entfernungen wahrnehmen:

1. den Abstand zwischen Mittel- und Zeigefinger in möglichst breiter Spreizlage und

2. den Abstand zwischen ebenfalls möglichst weit gespreiztem Daumen und Zeigefinger.

Man kann leicht ausrechnen, daß der erste Winkel etwa 7 bis 8°, der zweite 15 bis 16° beträgt.

Dieser lebende Winkelmesser kann in zahlreichen Fällen praktisch verwendet werden. Angenommen, wir sehen in einiger Entfernung einen Güterwagen, den wir mit dem halben Daumengelenk bequem verdecken können. Der Wagen ist, wie wir jetzt wissen, in einem Winkel von 2° zu sehen.

Da die Länge eines Güterwagens (etwa 6 m) bekannt ist, können Sie ohne weiteres die Entfernung zwischen sich und dem Objekt berechnen: $6\ \text{m} \cdot 28 = 168\ \text{m}$.

Das Peilen über den Daumen ist freilich nur sehr bedingt richtig, aber es ist dennoch zuverlässiger als das Abschätzen mit bloßem Auge.

Nun zeigen wir Ihnen ein Mittel, rechte Winkel im Gelände lediglich mit Hilfe Ihres Körpers zu visieren, ohne irgendwelche »Geräte« zu verwenden.

Wollen Sie durch einen beliebigen Punkt eine zur gegebenen Richtung senkrechte Gerade legen, so stellen Sie sich an diesem Punkt mit dem Gesicht in die gegebene Richtung. *Ohne eine Kopfwendung zu machen*, strecken Sie den Arm nach der Richtung aus, in der Sie das Lot fällen wollen. Dann strecken Sie den Daumen der ausgestreckten Hand aufwärts, wenden den Kopf zum Daumen und merken sich irgendeinen Gegenstand – einen Stein, ein Gebüsch usw. –, der durch den Daumen verdeckt wird, wenn man mit dem richtigen Auge (d. h. mit dem rechten Auge, wenn der rechte Arm, und mit dem linken Auge, wenn der linke Arm ausgestreckt ist) schaut. Dann brauchen Sie nur noch eine Gerade von Ihrem Standort zu dem angepeilten Gegenstand zu ziehen und haben die gesuchte Senkrechte. Die Methode scheint auf den ersten Blick nicht sehr vielversprechend zu sein, aber nach einiger Übung schätzen Sie dieses lebende Winkelgerät hoch ein.

Mit Hilfe des »lebenden Winkelmessers« können Sie ferner ohne jede Vorrichtung die Winkelhöhe der Gestirne über dem Horizont, die relative Entfernung der Sterne voneinander in Winkelgraden, die sichtbare Länge der Meteorenbahnen und anderes bestimmen. Verstehen Sie es, ohne Geräte rechte Winkel im Gelände zu bestimmen, dann können Sie schließlich auch einen Geländeplan skizzieren. Das Verfahren ist aus der Abb. 66 ersichtlich. Will man einen See kartieren, so müssen das Rechteck *ABCD* sowie die Längen der aus den ausgezeichneten Punkten der Uferlinie gefällten Lote und die Ent-

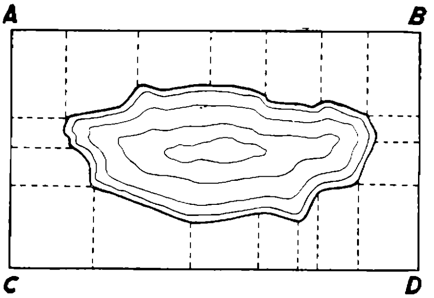


Abb. 66. Ein See wird kartografiert.

fernungen zwischen ihren Fußpunkten und den Ecken des Dreiecks bestimmt werden.

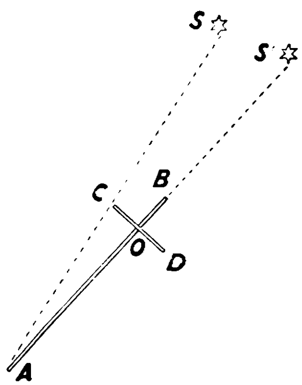
Mit einem Wort, die Beherrschung der Kunst, die Hände zur Winkelmessung bzw. die Füße zum Abschreiten der Entfernungen zu verwenden, kann in den verschiedensten Lebenslagen wertvolle Dienste leisten.

Abb. 67. Der Jacobstab.

Der Jakobstab

Wenn Sie den Wunsch haben, genauere Winkelmesser zu verwenden als das obenbeschriebene »lebende Gerät«, so können Sie sich ein einfaches Gerät bauen, das bequem zu handhaben ist. Es ist der nach seinem Erfinder benannte »Jakobstab« (Abb. 67). Er wurde bis in das 18. Jahrhundert hinein bei der Seefahrt viel verwendet, bis er schließlich von handlicheren und genaueren Winkelmessern (Sextanten) verdrängt wurde.

Der Jakobstab besteht aus einem etwa 70 bis 100 cm langen Lineal oder einer Latte AB, an der die Schubleiste CD entlang gleitet. Die beiden Arme CO und OD der Schubleiste sind einander gleich. Will man mit Hilfe dieses Winkelmessers die Winkelentfernung zwischen zwei Sternen S und S' (Abb. 67) bestimmen, so hält man das Ende A des Lineals dicht an das Auge (am Ende des Lineals ist zum besseren Sehen ein mit einem Schauloch versehenes Brett angebracht) und peilt den Stern mit dem Stab so an, daß der Stern S' am Ende B des Lineals erscheint. Dann schiebt man die Querleiste CD am Lineal entlang, bis der Stern S gerade am Ende C erscheint. Jetzt braucht man nur noch die Entfernung AO zu messen, damit die Größe des Winkels SAS' bestimmt werden kann. Die Länge CO ist bekannt. Wer Trigonometrie kennt, weiß, daß der Tangens des gesuchten Winkels gleich dem Verhältnis $\frac{CO}{AO}$ ist. Diese Rechnung kann übrigens auch mit Hilfe der in dem 5. Kapitel des vorliegenden Buches behandelten »Reisetrigonometrie« durchgeführt werden. Die Länge AC wird nach dem Pythagoreischen Lehrsatz berechnet, worauf der Winkel aus dem Sinus $\frac{CO}{AC}$ bestimmt wird. Schließlich läßt sich der gesuchte Winkel auch grafisch ermitteln. Nachdem man das Dreieck ACO in einem beliebigen Maßstab auf dem Papier konstruiert hat, kann der Winkel CAO mit dem Gradbogen gemessen werden. An der Stelle eines Gradbogens können Sie zu dem in Kapitel 5 »Reisetrigonometrie« beschriebenen Meßverfahren greifen.



Wozu brauchen wir nun den zweiten Querleistenarm? Er ist für die Fälle vorgesehen, in denen der

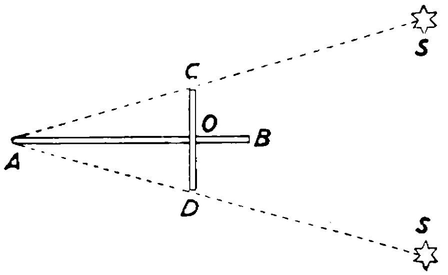


Abb. 68. Bestimmung des Winkels zwischen den Sternen mit dem Jacobstab.

gesuchte Winkel so groß ist, daß er nach der beschriebenen Methode nicht gemessen werden kann. In diesem Falle wird nicht das Lineal AB, sondern die Gerade AD auf den Stern S' gerichtet, indem man die Querleiste so weit schiebt, daß ihr Ende C mit dem Stern S zusammenfällt (Abb. 68). Der Winkel SAS' kann nach einem der oben beschriebenen Verfahren ermittelt werden.

Um bei jeder Messung Rechnungen und Konstruktionen zu vermeiden, können diese bereits bei der Anfertigung des Geräts durchgeführt werden. Die Ergebnisse werden auf dem Lineal AB vermerkt. Beim Richten des Geräts auf einen Stern brauchen Sie dann nur die bei O erscheinende Zahl abzulesen und kennen den gesuchten Winkel.

Der Gitterwinkelmesser

Zur Messung von Winkeln kann man ein weiteres Gerät anfertigen. Es ist noch einfacher und heißt Gitter- oder Harkenwinkelmesser. Sein Aufbau erinnert tatsächlich an einen Rechen oder eine Harke (Abb. 69). Sein wichtigster Teil ist ein kleines Brett von beliebiger Form. An der einen Kante ist ein gelochtes Blech- oder Holzplättchen angebracht. Es ist das »Okular«, durch das der Beobachter schaut. An dem anderen Ende stecken eine Anzahl Nadeln senkrecht im Brett. Die Zwischenräume zwischen den Nadeln sind $\frac{1}{57}$ so breit wie die Entfernung zwischen Schauloch und Nadeln*.

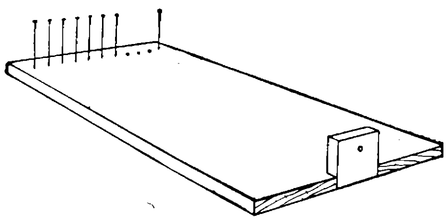


Abb. 69. Der Gitterwinkelmesser.

Wir wissen, daß jeder Zwischenraum in einem Gesichtswinkel von 1° erscheint. Die Stecknadeln lassen sich auf dem Brett auch nach dem nun folgenden Verfahren anordnen, das genauere Ergebnisse ergibt. Man zeichnet auf einer Mauer in einem Abstand von 1 m voneinander zwei Parallelen; dann tritt man senkrecht zu der Mauer 57 m zurück und betrachtet die beiden Parallelen durch das Schauloch unseres Meßbretts. Dann steckt man die Stecknadeln so in das Brett, daß jedes Paar benachbarter Stecknadeln sich mit den beiden Mauerparallelen genau deckt.

Nachdem alle Stecknadeln angebracht sind, kann man einige davon entfernen, damit man Winkel von 2°, 3°, 5° usw. erhält. Mit diesem Winkelmesser lassen sich Gesichtswinkel ziemlich genau (mindestens $\frac{1}{4}$°) bestimmen.

---

* Anstatt Stecknadeln kann man auch einen Rahmen mit aufgespanntem Garnfaden benutzen.

Der Winkel des Artilleristen

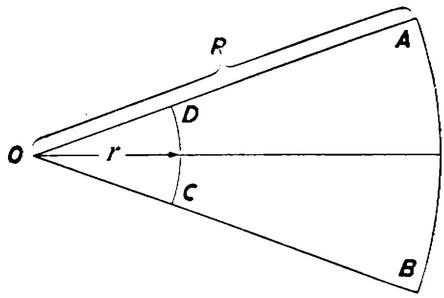


Abb. 70. Der Winkelmesser des Kanoniers.

Der Artillerist schießt nicht etwa blind. Wenn er die Höhe seines Zieles kennt, dann bestimmt er den Winkel und rechnet die Entfernung aus. Bei einem Zielwechsel berechnet er den Drehwinkel seines Geschützes.

Er ist daran gewöhnt, derartige Aufgaben sehr schnell im Kopf auszurechnen. Wie macht er das?

Sehen Sie sich einmal Abb. 70 an! AB ist der Kreisbogen mit dem Halbmesser $OA = R$; CD ist der Kreisbogen mit dem Halbmesser $OC = r$.

Aus den beiden Kreissektoren AOB und COD folgt:

$$\frac{AB}{R} = \frac{CD}{r}$$

oder

$$AB = \frac{CD}{r} \cdot R$$

Der Gesichtswinkel AOB ist durch das Verhältnis $\frac{CD}{r}$ gekennzeichnet. Ist dieses Verhältnis bekannt, dann kann AB aus dem bekannten R bzw. R aus dem bekannten AB leicht berechnet werden.

Die Artilleristen lösen die Aufgabe leichter, indem sie den Kreis nicht in 360°, sondern in 6000 gleiche Kreisbögen einteilen. Die Länge jedes Bogens beträgt in diesem Falle etwa $\frac{1}{1000}$ des Kreishalbmessers.

Nehmen wir einmal tatsächlich an, daß der Kreisbogen CD eine Einheit des Winkelmeßkreises O ist. Der ganze Kreisumfang beträgt $2\pi \cdot r \approx 6r$ (Abb. 70).

Die Länge des Kreisbogens ist dann

$$CD = \frac{6r}{6000} = \frac{1r}{1000}.$$

Bei unseren Artilleristen hat sich denn auch der Ausdruck »Tausendstel« für die Bezeichnung dieses Bogens eingebürgert.

Wir haben also

$$AB = \frac{0{,}001 \cdot r}{r} \cdot R = \frac{1}{1000} \cdot R$$
$$AB = 0{,}001\,R.$$

Um die Entfernung im Gelände zu erfahren, die einem Strich des Teilkreises (d. h. dem »Winkeltausendstel«) entspricht, genügt es, bei der Entfernungszahl R rechts vom Komma bis zu drei Stellen zu rechnen.

Werden Befehle oder Artilleriebeobachtungen durch Feldfernsprecher oder Funk durchgegeben, dann spricht man die Anzahl der »Tausendstel« ähnlich aus wie eine Fernsprechteilnehmer-Nummer. Ein Winkel von 105 »Tausendsteln« wird »eins – null – fünf« ausgesprochen und 1–05 geschrieben. Ein Winkel von 8 »Tausendsteln« wird »null – null – acht« durchgegeben und 0–08 geschrieben.

Nun können Sie ohne weiteres folgende Aufgabe lösen.

Von einem Pak-Geschützstand aus sieht man die Höhe eines Panzers in einem Winkel von 0–05. Geben Sie die Entfernung bis zum Panzer an, wenn die Höhe des Panzers mit 2 m angenommen wird!

Lösung

$$5 \text{ Teilstriche des Teilkreises} \mathrel{\hat{=}} 2 \text{ m}$$

$$1 \text{ Teilstrich des Teilkreises} \mathrel{\hat{=}} \frac{2 \text{ m}}{5} = 0{,}4 \text{ m}$$

Da ein Teilstrich dem tausendsten Teil der Entfernung entspricht, so ist die Entfernung tausendmal größer, also

$$R = 0{,}4 \text{ m} \cdot 1000 = 400 \text{ m}.$$

Hat der Batteriechef oder der Beobachter keinen Winkelmesser zur Verfügung, dann benutzt er die Hand, die Finger oder andere Hilfsmittel so, wie wir es oben geschildert haben (»lebender Winkelmesser«). Ihren Wert muß der Mann aber nicht in Graden, sondern in »Tausendsteln« ausdrücken können.

Wir geben nachstehend die Werte einiger Objekte in »Tausendsteln« an:

Die Hand	1 bis 20
Mittel-, Zeige- oder Ringfinger	0 bis 30
Durchmesser eines runden Bleistiftes	0 bis 12
Länge eines Streichholzes	0 bis 75
Durchmesser eines Streichholzes	0 bis 03

Die Sehschärfe des Menschen

Nachdem Sie mit dem Begriff der Winkelgröße eines Gegenstandes vertraut sind, werden Sie auch die Messung der Sehschärfe leicht verstehen, ja, Sie werden solch eine Messung sogar selbst durchführen können. Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier 20 streichholzlange (5 cm) und millimeterdicke schwarze Striche, und zwar so, daß sie zusammen ein Quadrat bilden (Abb. 71). Befestigen Sie diese Skizze an einer gut beleuchteten Zimmerwand, treten Sie so weit zurück, bis Sie die einzelnen Striche nicht mehr unterscheiden können und zu einem eintönigen Grau verschwimmen. Messen Sie die Entfernung aus, berechnen Sie den Gesichtswinkel (das Verfahren kennen Sie ja bereits), und ermitteln Sie den Winkel, in dem Sie die 1 mm dicken Striche nicht mehr einzeln unterscheiden können. Beträgt der Winkel 1′ (eine Minute), dann ist Ihre Sehschärfe normal; ist sie gleich 3 Minuten, so beträgt Ihre Sehschärfe $\frac{1}{3}$ der normalen usw.

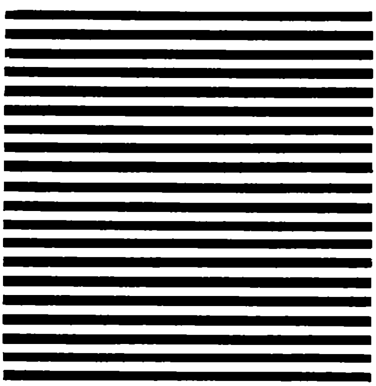


Abb. 71. Zur Messung der Sehschärfe.

Aufgabe

Die auf der Zeichnung (Abb. 71) wiedergegebenen Striche verschwimmen bei Ihrer Sehschärfe in 2 m Entfernung.

Ist Ihre Sehschärfe normal?

Lösung

Wir wissen, daß in einer Entfernung von 57 mm ein 1 mm breiter Strich in einem Winkel von 1°, d. h. 60′ sichtbar ist. In einer Entfernung von 2000 mm ist der gleiche Strich in einem Winkel x zu sehen. Wir bestimmen ihn aus folgender Proportion:

$$x : 60 = 57 : 2000$$

Daraus folgt:

$$x = 1{,}7'$$

Ihre Sehschärfe liegt unter der normalen, sie beträgt

$$1 : 1{,}7 = 0{,}6.$$

Die Grenzminute

Soeben haben wir darauf hingewiesen, daß ein normalsichtiges Auge Striche, die in einem Winkel von weniger als 1′ beobachtet werden, nicht mehr deutlich wahrnehmen kann. Diese Behauptung trifft für jeden Gegenstand zu. Es ist ganz gleich, welche Konturen der beobachtete Gegenstand besitzt: Ein normales Auge kann ihn in einem Winkel von weniger als 1′ nicht mehr unterscheiden. Jedes Objekt schmilzt zu einem kaum sichtbaren Punkt zusammen, »zu klein, um unterschieden zu werden« (Shakespeare). Es ist nur noch ein »Staubkörnchen« ohne Form und Gestalt. Das ist nun einmal die Eigenart des normalen Menschenauges: Eine Winkelminute ist die durchschnittliche Grenze für die Sehschärfe des Menschen. Die tieferen Ursachen für diese Tatsache gehören in ein besonderes Gebiet – sie beruhen auf den physikalischen Gesetzen und der Physiologie des Auges. Wir wollen uns lediglich mit der geometrischen Seite der Angelegenheit befassen.

Das hier Gesagte betrifft in gleichem Maße weit entfernte größere und nahe kleinere Gegenstände. Die Form der in der Luft schwebenden Staubkörnchen können wir mit bloßem Auge nicht unterscheiden.

Vom Sonnenlicht durchflutet, scheinen sie immer die gleichen winzigen Pünktchen zu sein, obwohl ihre wirkliche Form sehr verschieden ist. Wir sind daher auch nicht in der Lage, die Einzelheiten des Körperbaues eines Insektes zu unterscheiden, weil wir diese wiederum unter einem Winkel von weniger als 1′ sehen. Aus dem gleichen Grunde sind wir nicht in der Lage, ohne Fernrohr Einzelheiten auf der Oberfläche des Mondes, der Planeten und anderer Himmelskörper zu unterscheiden.

Wäre der Grenzbereich für das natürliche Sehen erweitert, so würde die ganze Welt in unseren Augen ein anderes Gesicht bekommen. Stellen wir uns einmal einen Menschen vor, bei dem die Grenze der Sehschärfe nicht bei 1′, sondern bei $\frac{1}{2}'$ liegt. Er würde seine Umwelt eingehender und weiter sehen als wir. Diese günstige

Eigenschaft der Sehschärfe ist in Tschechows Erzählungen »Die Steppe« wunderschön wiedergegeben: »Wassjas Sehschärfe war erstaunlich groß. Er konnte so gut sehen, daß die öde, graubraune Steppe für ihn voller Leben und Inhalt war. Er brauchte nur seinen Blick in die Ferne zu richten – und er sah einen Fuchs, einen Hasen, eine Trappe oder ein anderes menschenscheues Tier. Einen laufenden Hasen, eine fliegende Trappe zu sehen – das ist ja für jeden, der einmal durch die Steppe gefahren ist, etwas Alltägliches; nicht jeder ist aber in der Lage, die Tiere der Wildnis in ihrem ureigenen Dasein zu beobachten, nämlich dann, wenn sie weder davonlaufen, noch ängstlich nach allen Seiten Ausschau halten. Wassja beobachtete die Füchse beim Spiel, die Hasen bei ihrer Morgentoilette, er sah die großen Trappen beim Ausbreiten ihrer Schwingen und die Zwergtrappen beim Balzen. Dank seiner Sehschärfe eröffnete sich Wassja außer der für jedermann sichtbaren Welt eine andere, eigene, niemandem zugängliche Welt; sie mußte sehr schön sein, denn jedesmal, wenn er sie sah, sich an ihr ergötzte, mußte man ihn unwillkürlich beneiden.«

Es ist doch sonderbar, daß die Unterscheidungsgrenze von $1'$ auf $\frac{1}{2}'$ verringert werden muß, um diese erstaunliche Veränderung hervorzurufen.

Die zauberhafte Wirkung der Mikroskope und Fernrohre ist auf die gleichen Ursachen zurückzuführen. Diese Instrumente verändern nämlich den Strahlengang des betrachteten Objekts derart, daß die Strahlen das Auge in einem stark auseinandergehenden Bündel treffen; dadurch wird das Objekt unter einem viel größeren Gesichtswinkel betrachtet. Sagt man, ein Teleskop oder ein Mikroskop vergrößere einen Gegenstand um das Hundertfache, so ist damit nichts anderes gemeint, als daß wir diesen Gegenstand unter einem hundertmal größeren Winkel als mit dem bloßen Auge sehen. Die ursprünglich jenseits der Grenze unserer Sehschärfe liegenden Einzelheiten werden dadurch unserem Auge zugänglich.

Wir sehen den Vollmond in einem Gesichtswinkel von etwa $30'$. Der Monddurchmesser beträgt 3476 km; folglich schmilzt jeder Mondbezirk, dessen Durchmesser $3476\ \text{km} : 30 = 116\ \text{km}$ und weniger groß ist, dem bloßen Auge zu einem kaum wahrnehmbaren Punkt zusammen. Durch ein Fernrohr mit hundertfacher Vergrößerung wird die Sichtbarkeitsgrenze ganz gewaltig erweitert. Erst Objekte unter $116\ \text{km} : 100 = 1{,}16\ \text{km}$ werden nicht unterscheidbare Pünktchen. Bei 1000facher Vergrößerung ist der kleinste Gegenstand dann 16 m groß. Daraus folgt u. a., daß wir mit unseren modernen Fernrohren große Bauten, Werkanlagen, Ozeandampfer usw. auf dem Mond sehen könnten, falls dort welche vorhanden wären*.

Auch für unsere alltäglichen Beobachtungen ist die Regel der »Grenzminute« von großer Bedeutung. Durch diese Eigentümlichkeit unseres Sehvermögens hören wir auf, einen Gegenstand zu unterscheiden, der von uns um mehr als das 3400fache seiner größten Abmessung $(57 \cdot 60)$ entfernt ist: Er schmilzt zu einem Punkt zu-

* Vollständige Klarheit und Gleichartigkeit (Homogenität) der Atmosphäre ist hierfür Bedingung. In Wirklichkeit ist jedoch die Luft weder klar noch homogen. Bei starker Vergrößerung wird dadurch das Bild verzerrt und verschwommen. Man ist daher bestrebt, Sternwarten auf den Gipfeln hoher Berge in kristallklarer Luft anzulegen.

sammen. Wenn Ihnen also jemand weismachen sollte, er habe das Gesicht eines Menschen in 250 m Entfernung erkannt – glauben Sie ihm nicht! – es sei denn, seine Sehschärfe wäre außergewöhnlich groß. Der Mindestabstand zwischen den Augen eines Menschen beträgt nämlich nur 3 cm. Schon in einer Entfernung von 3 cm · 3400, d. h. 100 m, verschwimmen sie zu einem Punkt. Die Bedienung von Geschützen benutzt diese Tatsache beim Schätzen der Entfernung. Nach den bei der Artillerie üblichen Faustregeln beträgt die Entfernung bis zu einem anderen Menschen höchstens 100 Schritt (60 bis 70 m), wenn dessen Augen als zwei getrennte Punkte erscheinen. Unser Grenzmaß beträgt dagegen 100 m. Das bedeutet, daß bei der Artillerie eine um 30% verminderte Sehschärfe zugrunde gelegt wird.

Aufgabe

Kann ein normalsichtiger Mensch einen Reiter auf 10 km Entfernung sehen, wenn er hierzu ein Fernglas mit dreifacher Vergrößerung benutzt?

Lösung

Die Höhe des Reiters wird mit 2,2 m angenommen. Für das unbewaffnete Auge schmilzt seine Gestalt in einer Entfernung von

$$2{,}2\ \mathrm{m} \cdot 3400 = 7{,}5\ \mathrm{km}$$

zu einem Punkt zusammen. Wenn ein Fernglas mit dreifacher Vergrößerung verwendet wird, ist diese Grenze erst bei 22,5 km erreicht. Also kann man den Reiter in 10 km Entfernung sehr wohl erkennen, vorausgesetzt, daß die Luft genügend klar ist.

Mond und Sterne am Horizont

Jeder auch noch so oberflächliche Beobachter weiß, daß die in Höhe des Horizontes stehende Mondscheibe viel größer erscheint, als wenn sie hoch am Himmel steht. Der Unterschied ist so beträchtlich, daß er nur schwerlich unbemerkt bleibt. Das gleiche gilt auch für die Sonne; wir alle kennen den »dicken« Sonnenball bei Sonnenaufgang und Sonnenuntergang sehr gut. Er ist beträchtlich größer als zur Mittagszeit, wenn die Scheibe des Tagesgestirns durch die ziehenden Wolken dahinwandert. (Schauen Sie nicht ohne Abblendung in die Sonne – es schadet den Augen!)

Bei den Sternen wirkt sich dieses Phänomen so aus, daß der Abstand zwischen den einzelnen Sternen in Horizontnähe größer geworden zu sein scheint. Wer im Winter das Sternbild des Orion (oder im Sommer das Sternbild des Schwanes) hoch am Himmel und tief am Horizont beobachtet hat, muß über den ungeheuren Größenunterschied der Sternbilder in den beiden Höhenlagen staunen.

Die Sache erscheint noch rätselhafter, wenn man bedenkt, daß beim Betrachten der Gestirne bei ihrem Auf- oder Untergang diese nicht nur näher, sondern sogar um die Größe des Erdhalbmessers weiter von uns entfernt sind, wie man aus der Skizze (Abb. 72) leicht sehen kann. Befindet sich das Gestirn im Zenit, so betrachten wir es von dem Standort A, ist es dagegen in der Nähe des Horizontes, dann sehen wir es von dem Punkt B aus.

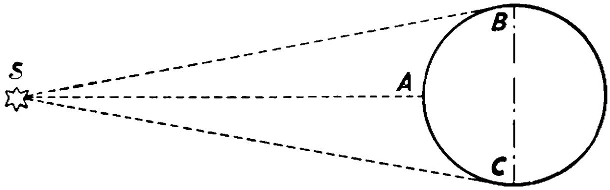


Abb. 72. Die Sonne ist am Horizont weiter von dem Beobachter entfernt als im Zenit.

Warum scheinen Sonne, Mond und Sterne am Horizont größer zu sein?

Es ist eine optische Täuschung. Mit Hilfe eines Gitterwinkelmessers oder eines anderen geeigneten Geräts kann man sich leicht von der Tatsache überzeugen, daß in beiden Fällen die Mondscheibe unter dem gleichen Gesichtswinkel gesehen wird*.

Mit Hilfe des gleichen Gerätes oder des Jakobstabes läßt sich beweisen, daß die Winkelabstände zwischen den Sternen in jeder Lage am Himmel, sei es am Horizont oder im Zenit, unverändert bleiben. Die Vergrößerung beruht also auf einer optischen Täuschung, der alle Menschen ausnahmslos unterworfen sind.

Wie erklärt sich nun diese starke und allgemeine Täuschung? Soweit uns bekannt ist, vermag die Wissenschaft diese Frage noch nicht einwandfrei zu beantworten, obwohl sie sich schon seit Ptolemäus' Zeiten, d. h. seit 2000 Jahren, darum bemüht. Die Illusion hängt damit zusammen, daß uns das Himmelsgewölbe nicht etwa als eine Halbkugel im geometrischen Sinne, sondern als Kugelkappe (Calotte) erscheint, deren Halbmesser an der Grundfläche die Höhe um das Zwei- bis Dreifache übertrifft.

Der Grund liegt darin, daß wir bei der gewöhnlichen Stellung unseres Kopfes und der Augen die waagerechten bzw. annähernd waagerechten Entfernungen größer einschätzen als die senkrechten. Wir sehen auf einen Gegenstand in horizontaler Richtung mit einem »direkten« Blick; in jeder anderen Lage müssen wir den Blick heben oder senken. Beobachten wir den Mond aus der Rückenlage heraus, so wird er im Zenit sogar größer erscheinen als am Horizont**.

Wie die scheinbare Abplattung des Himmelsgewölbes auf die Größe der Gestirne in verschiedenen Teilen des Himmels einwirkt, wird durch die Abb. 73 ohne weiteres klar. Stets sehen wir den Mond am Himmel in einem Winkel von $\frac{1}{2}°$, ganz gleich, ob er sich im Zenit (90°) oder am Horizont (0°) befindet. Unserem Auge jedoch scheint die Mondscheibe nicht überall gleich weit entfernt zu sein. Uns erscheint der Mond im Zenit näher als am Horizont; daher nehmen wir ihn auch in verschiedener Größe wahr; denn der kleinere Kreis rückt zwischen den Schenkeln

* Mit Hilfe von genauen Meßgeräten ist festgestellt worden, daß der sichtbare Durchmesser des Mondes in der Nähe des Erdrandes wegen des durch die Luftbrechung hervorgerufenen Abplattungseffektes sogar noch kleiner erscheint.

** In früheren Ausgaben dieses Buches wurde die scheinbare Vergrößerung des Mondes am Horizont dadurch erklärt, daß wir den Mond am Erdrand neben entfernten anderen Objekten sehen, während er hoch am Himmel allein steht. Nun kann aber die gleiche optische Täuschung am Meereshorizont wahrgenommen werden, wo andere Objekte fehlen; daher erscheint uns diese frühere Erklärung des Phänomens unbefriedigend.

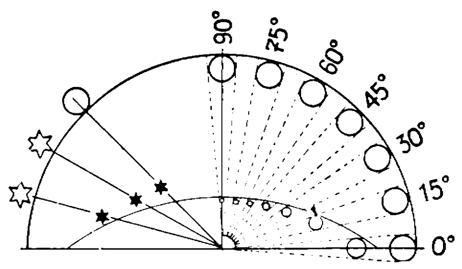


Abb. 73. Die scheinbare Abplattung des Himmelsgewölbes beeinflußt das Bild der Himmelskörper und Gestirne.

eines Winkels näher zu dessen Spitze als ein größerer Kreis. Auf der linken Seite der Abbildung sehen wir, wie die Entfernungen zwischen den Sternen im Verhältnis zu ihrer Annäherung an den Erdrand zu wachsen scheinen; daher scheinen uns die gleichen Winkelverhältnisse ungleich zu sein.

Wir erwähnen noch eine weitere lehrreiche Seite. Wenn Sie die große Mondscheibe am Horizont betrachten, entdecken Sie da vielleicht auch nur ein einziges neues Merkmal, eine neue Einzelheit, die Ihnen nicht bereits bei der Stellung des Mondes hoch am Himmel bekannt war? Nein, keineswegs. Vor Ihnen steht aber doch die vergrößerte Mondscheibe!

Warum können Sie also nichts Neues darauf entdecken?

Ganz einfach: Wir haben es hier nicht mit einer Vergrößerung zu tun, wie das Fernglas sie uns gibt. Die Vergrößerung des Gesichtswinkels, in dem wir den Gegenstand betrachten, fehlt. Neu hinzukommende Einzelheiten verdanken wir indessen nur der Vergrößerung des Gesichtswinkels. Jede andere »Vergrößerung« ist nichts als eine optische Täuschung, die uns keinerlei Nutzen bringt.

Wie lang ist der Schatten des Mondes und eines Stratosphärenballons?

Bei der Berechnung der von verschiedenen Körpern im Raum zurückgeworfenen Schattenlängen können wir den Gesichtswinkel ebenfalls verwenden, so überraschend das auch klingen mag. So wirft z. B. der Mond einen Schatten in den Weltenraum, der ihn überall begleitet.

Wie weit reicht nun dieser Schatten?

Um die Entfernung auszurechnen, brauchen wir keine auf der Ähnlichkeit der Dreiecke beruhende Proportion aufzustellen, zu deren Gliedern der Mond- und der Sonnendurchmesser sowie die Entfernung zwischen Sonne und Mond gehören. Nein, die angenäherte Rechnung ist viel einfacher. Stellen Sie sich einmal vor, daß Sie sich in der Kegelspitze des Mondkernschattens befänden. Von dort würden Sie die schwarze Mondscheibe sehen, die die Sonne verdeckt. Der Gesichtswinkel, in dem wir die Mondscheibe und auch die Sonne betrachten, ist annähernd $\frac{1}{2}°$. Wir wissen auch, daß jeder in einem Winkel von $\frac{1}{2}°$ betrachtete Gegenstand $2 \cdot 57$

$= 114$ seines Durchmessers von uns entfernt ist. Folglich befindet sich die Kegelspitze in einer Entfernung von 114 Monddurchmessern vom Mond entfernt.

Daraus folgt die Länge des Mondschattens mit

$$3476 \text{ km} \cdot 114 = 396\,264 \text{ km}.$$

Er ist also länger als die mittlere und kleinste Entfernung von 384400 km und 363000 km zwischen Mond und Erde; daher gibt es auch totale Sonnenfinsternisse für diejenigen Orte, die vom Schatten vollständig getroffen werden.

Auch die Länge des Erdschattens im Weltraum läßt sich berechnen. Diese Länge verhält sich zu der Länge des Mondschattens wie die Durchmesser der beiden Himmelskörper zueinander (d. h., er besitzt etwa die dreifache Länge).

Nach der gleichen Methode können auch Schattenlängen verschiedener anderer Gegenstände im Raum berechnet werden. Wir wollen z. B. die Länge des Kernschattens eines in der Luft schwebenden Stratosphärenballons berechnen. Bei einem Durchmesser des Ballons von 36 m erreicht sein Schatten die Länge

$$36 \text{ m} \cdot 114 = 4104 \text{ m}.$$

Der Öffnungswinkel an der Kegelspitze ist ebenfalls $\frac{1}{2}°$.

In allen soeben betrachteten Fällen ist selbstverständlich von der Länge des Kernschattens und nicht etwa des Halbschattens die Rede.

Wie hoch schwebt die Wolke über der Erde?

Denken Sie einmal daran, wie Sie gestaunt haben, als Sie zum erstenmal hoch oben im klaren blauen Himmel eine dünne zartflockige Bahn sahen! Heute wissen Sie bereits, was dieses Wolkenband bedeutet – das eigenartige »Autogramm« des Flugzeuges, das es im Luftraum als »Erinnerung« an seinen Aufenthalt hinterläßt.

In kühler, feuchter, staubreicher Luft bilden sich leicht Nebel. Das Flugzeug pufft ununterbrochen kleine Teilchen aus, die Verbrennungsprodukte seiner Motoren sind und zu jenen Partikelchen werden, um die sich der Wasserdampf kondensiert; dadurch entsteht die uns unter der Bezeichnung Kondensstreifen bekannte Wölkchenbahn.

Wenn wir die Höhe des Kondensstreifens bestimmen können, dann sind wir in der Lage, die Flughöhe zu bestimmen, die unser Pilot erklommen hat.

Aufgabe

Bestimmen Sie die Höhe einer Wolke über der Erde, auch wenn die Wolke nicht direkt über Ihnen schwebt!

Lösung

Zur Messung dieser größeren Höhen bedienen wir uns zweier einfacher Fotoapparate mit gleicher Brennweite, die meistens an der Objektivfassung angegeben sind. Die beiden Apparate werden an zwei erhöhten Standorten von möglichst gleicher Höhenlage aufgestellt.

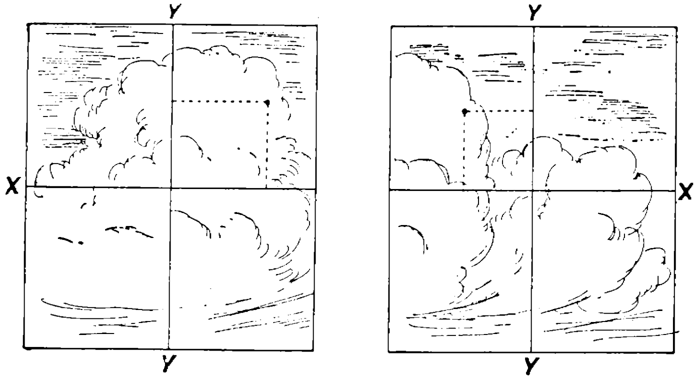


Abb. 74. Zwei Kopien der Wolkenaufnahme.

Im freien Felde können wir mit Stativen arbeiten, in der Stadt benutzen wir auch Vorsprünge an den Häusern. Die Entfernung zwischen den Standorten ist so zu wählen, daß sich die Beobachter einander mit bloßem Auge oder durch ein Fernglas sehen können. Man mißt diese Entfernung oder bestimmt sie nach der Karte bzw. dem Ortsplan. Die Fotoapparate werden so aufgestellt, daß ihre optischen Achsen parallel zueinander verlaufen. Man kann sie z. B. auf den Zenit richten.

Befindet sich das Aufnahmeobjekt im Blickfeld der Fotoobjektive, dann gibt ein Beobachter dem anderen ein Zeichen (durch Schwenken eines Tuches usw.). Beide nehmen nun nach diesem Signal die Wolke auf.

Auf den Kopien, deren einheitliche Größe den Platten oder Filmen genau entsprechen muß, werden die Geraden XX und YY gezogen, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten der Aufnahmen verbinden (Achsenkreuz, Abb. 74). Dann nimmt man auf den beiden Aufnahmen die gleichen Wolkenpunkte und berechnet ihre jeweiligen Entfernungen von den Geraden YY und XX. Man bezeichnet die ermittelten Entfernungen mit x_1, y_1 für die eine und mit x_2, y_2 für die andere Aufnahme. Liegen die beiden Punkte auf den Aufnahmen an verschiedenen Seiten der Geraden YY (so wie es in Abb. 74 dargestellt ist), dann berechnet man die Wolkenhöhe H nach folgender Formel:

$$H = b \frac{f}{x_1 + x_2}$$

wobei b die Länge der Basis (in m), d. h. der Abstand der beiden Plattenkameras, f die Brennweite des Objektivs (in mm) ist. Wenn x_1 und x_2 in mm angegeben werden, so erhalten wir H in m.

Befinden sich dagegen die beiden Punkte auf der gleichen Seite von YY, dann sieht die Höhenformel folgendermaßen aus:

$$H = b \frac{f}{x_1 - x_2}$$

Die Entfernungen y_1 und y_2 können wir bei der Bestimmung von H entbehren. Wenn die Fotoplatten fest und symmetrisch in ihren Kassetten lagen, dann ist

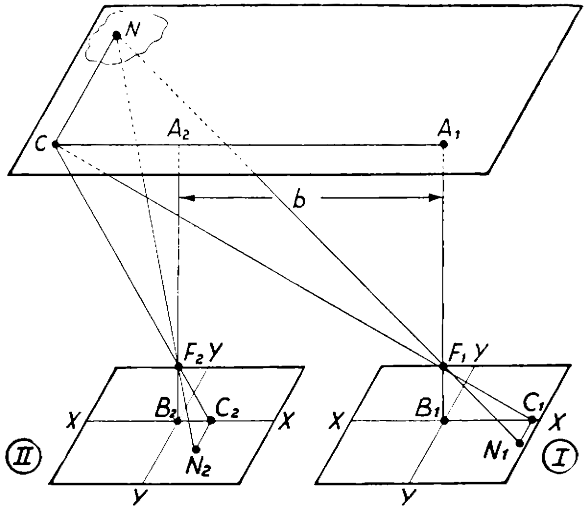


Abb. 75. Schematische Darstellung des Wolkenpunktes auf den Fotoplatten von zwei auf den Zenit gerichteten Fotoapparaten.

$y_1 = y_2$. Praktisch weichen sie aber fast immer ein wenig voneinander ab. Vergleicht man also y_1 mit y_2, so können wir die Aufnahmegenauigkeit nachprüfen.

Die Entfernungen zwischen YY bzw. XX und dem markierten Punkt der Wolke auf dem Fotonegativ seien z. B.

$$x_1 = 32 \text{ mm} \qquad y_1 = 29 \text{ mm}$$
$$x_2 = 23 \text{ mm} \qquad y_2 = 25 \text{ mm}$$

Die Brennweite beider Objektive sei $f = 135$ mm und der Abstand zwischen beiden Fotokameras (die Basis) $b = 937$ m.

Aus den Aufnahmen geht hervor, daß zur Höhenbestimmung der Wolke die Formel

$$H = b \frac{f}{x_1 + x_2}$$

anzuwenden ist.

Daraus folgt:

$$H = 937 \text{ m} \cdot \frac{135 \text{ mm}}{32 \text{ mm} + 23 \text{ mm}} = 2300 \text{ m}$$

oder, mit anderen Worten, die fotografierte Wolke befindet sich 2,3 km über dem Erdboden.

Diejenigen, die ein Interesse daran haben, die Formel für die Bestimmung der Wolkenhöhe abzuleiten, können die schematische Darstellung der Abb. 75 dazu verwenden.

Man betrachte die Zeichnung räumlich.

Die Parallelogramme *I* und *II* sind Abbildungen der Fotoplatten;

F_1 und F_2 sind die optischen Mittelpunkte der beiden Fotoobjektive;

N ist der beobachtete Punkt der schwebenden Wolke;

N_1 und N_2 sind die Bilder des Punktes N auf den Platten;

B_1A_1 und B_2A_2 sind Lote, die aus den Mittelpunkten der Ebene der fotografischen Platten auf die Höhe der Wolke gefällt sind;

$A_1A_2 = B_1B_2 = b$ ist die Länge der Basis.

Bewegt man sich vom optischen Mittelpunkt F_1 nach oben bis A_1, dann von A_1 längs der Basis bis zu Punkt C (Spitze des rechten Winkels A_1CN) und schließlich von C weiter nach N, dann entsprechen in der Fotokamera die Strecken $F_1B_1 = f$ (Brennweite), $B_1C_1 = x_1$ und $C_1N_1 = y_1$ jeweils den Strecken F_1A_1, A_1C und CN. Wir leiten analoge Konstruktionen auch für den zweiten Apparat ab. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgen die Proportionen:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1F_1}{f} = \frac{C_1F_1}{F_1C} = \frac{CN}{y_1}$$

und

$$\frac{A_2C}{x_2} = \frac{A_2F_2}{f} = \frac{C_2F_2}{F_2C} = \frac{CN}{y_2}$$

Vergleicht man diese Proportionen und berücksichtigt, daß $A_2F_2 = A_1F_1$ ist, dann stellt man erstens fest, daß $y_1 = y_2$ ist (Anzeichen bei richtigem Fotografieren), und zweitens, daß

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_2C}{x_2} \text{ ist.}$$

Nach Zeichnung ist jedoch $A_2C = A_1C - b$, folglich gilt:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1C - b}{x_2}$$

woraus folgt, daß

$$A_1C = b\frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

und schließlich

$$A_1F_1 \approx H = b\,\frac{f}{x_1 - x_2} \text{ ist.}$$

Liegt im Gegensatz dazu der Punkt C zwischen den Punkten A_1 und A_2, dann sind die Abbildungen N_1 und N_2 des Punktes N auf verschiedenen Seiten der Geraden YY.

Dann ist $A_2C = \mathrm{b} - A_1C$ und die gesuchte Höhe

$$H = b\frac{f}{x_1 + x_2}.$$

Diese Formeln gelten nur, wenn die optischen Achsen der Apparate auf den Zenit gerichtet sind. Ist die Wolke erheblich vom Zenit entfernt und fällt nicht in das Blickfeld der Apparate, dann können die beiden Kameras auch eine andere Lage einnehmen, sofern ihre optischen Achsen weiterhin parallel verlaufen.

Für jede Lage ist eine entsprechende Zeichnung zu konstruieren. Die Formeln zur Bestimmung der Wolkenhöhe sind einzeln jeweils abzuleiten.

Die Turmhöhe wird nach dem Foto bestimmt

Aufgabe

Mit Hilfe des Fotoapparates können sie nicht nur die Höhe einer Wolke, eines Flugzeuges usw., sondern auch die Höhe eines Bauwerkes, z. B. eines Turmes, Mastes usw. bestimmen.

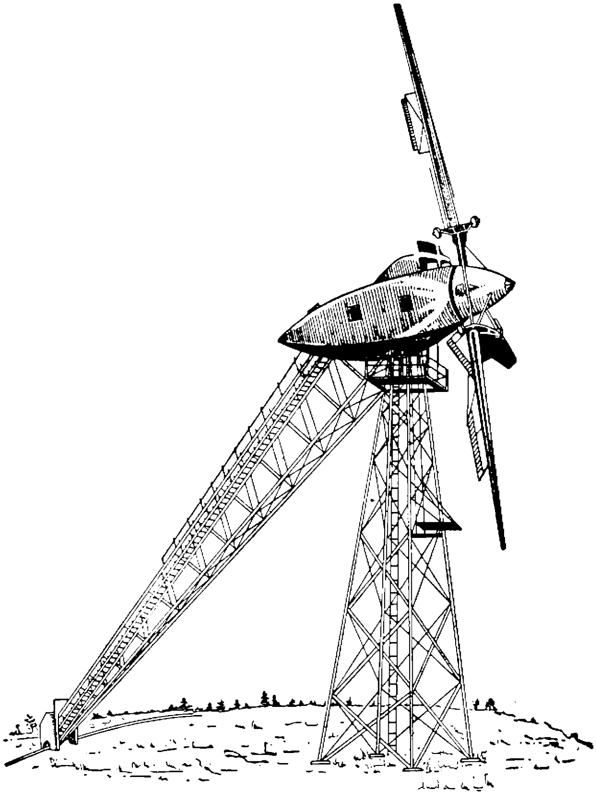


Abb. 76. Der auf der Krim aufgestellte Windmotor.

Die Abb. 76 zeigt das Bild eines Versuchswindmotors, der in der Nähe von Balaklava auf der Krim aufgestellt ist. Die Grundfläche des Turmes ist ein Quadrat, dessen Seitenlänge durch unmittelbare Messung bekannt ist und 6 m beträgt. Führen Sie die erforderlichen Messungen auf dem Bild aus und bestimmen Sie die Höhe H der gesamten Windanlage.

Lösung

Die Maße der Aufnahme und die wahren Abmessungen des Turmes sind geometrisch ähnlich. Folglich ist der Turm so viele Male höher als die Kante seiner Grundfläche, wie die Höhe seiner Abbildung größer ist als die entsprechende Grundflächenlinie.

Die Abmessungen des Bildes sind folgende: Die Länge der am wenigsten bildverkürzten Diagonale der Grundfläche ist 20 mm, die Gesamthöhe der Anlage 70 mm. Da die Seitenlänge der Grundfläche 6 m beträgt, ist die Länge der Grundflächendiagonale $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{2} = 8{,}48$.

Wir haben also die Proportion:

$$\frac{70}{20} = \frac{H}{8{,}48}$$

daraus folgt:

$$H = \frac{70 \cdot 8{,}48}{20} \approx 29{,}6,$$

d. h., der Turm ist etwa 30 m hoch.

Nicht alle Aufnahmen sind für unsere Zwecke brauchbar. Wir können nur solche verwenden, die die Verhältnisse nicht verzerrt wiedergeben, wie es bei Bildern von unerfahrenen Fotoamateuren häufig der Fall ist.

Zur Selbstübung

Jetzt mag der Leser die soeben erworbenen Kenntnisse für die Lösung folgender, recht unterschiedlicher Aufgaben anwenden:

1. Ein mittelgroßer Mann (1,70 m) ist in einem Winkel von 12′ sichtbar. Wie weit ist er vom Beobachter entfernt?

2. Ein Reiter (2,20 m) ist in einem Winkel von 9′ zu sehen. Bestimmen Sie die Entfernung!

3. Ein Telegrafenmast (Höhe 8 m) ist in einem Winkel von 22′ zu sehen. Bestimmen Sie die Entfernung!

4. Ein 42 m hoher Leuchtturm ist von einem Schiff aus in einem Winkel von 1° 10′ zu sehen. Wie groß ist die Entfernung zwischen Schiff und Leuchtturm?

5. Man sieht ein Gebäude unter einem Gesichtswinkel von 12′ in einer Entfernung von 2 km. Wie hoch ist das Haus?

6. Wie groß müssen die Buchstaben auf der Schultafel sein, damit sie die Schüler von ihren Bänken aus ebenso deutlich erkennen können wie die Buchstaben in ihren Büchern? Das Buch soll 25 cm vom Auge entfernt sein. Als mittlere Entfernung der Tafel von der Schulbank werden 5 m angenommen.

7. Ein Mikroskop vergrößert 50mal. Können darin die roten Blutkörperchen des Menschen beobachtet werden, deren Durchmesser bekanntlich 0,007 mm beträgt?

8. Nehmen wir an, es gäbe auf dem Monde Menschen, deren Körperwuchs dem unseren gleich wäre. Eine wievielfache Vergrößerung müßte ein Fernrohr besitzen, damit wir die Mondbewohner sehen könnten?

9. Wieviel »Tausendstel« (Artilleriemaß) enthält ein Grad?

10. Wieviel Grad beträgt ein »Tausendstel«?

11. Ein Flugzeug bewegt sich in einem Winkel von 90° zu unserer Beobachtungslinie und legt innerhalb 10 Sekunden eine Entfernung zurück, die einem Winkel von 300 »Tausendsteln« entspricht. Bestimmen Sie die Fluggeschwindigkeit, wenn das Flugzeug in einer Entfernung von 2000 m an uns vorbeifliegt!

6 [42043-1]

Geometrie auf der Wanderung

Die Kunst des Schrittmessens

Wenn Sie sich während Ihres Ausfluges in der Nähe der Eisenbahngleise aufhalten, dann sind Sie in der Lage, eine Anzahl von geometrischen Übungen durchzuführen. Zuerst benutzen Sie einmal die Landstraße, um die Länge Ihres Schrittes sowie die Marschgeschwindigkeit festzustellen. Dadurch können Sie nämlich die Entfernung in Schritten messen; es ist eine Kunst, die Sie sich nach einiger Übung leicht aneignen. Sie müssen sich vor allem daran gewöhnen, Schritte von der gleichen Länge zu tun. Auf der Landstraße sehen Sie alle 100 m einen weißen Stein. Durchschreiten Sie diese 100 m Entfernung mit Ihrem üblichen Marschschritt, und zählen Sie dabei die Schritte: Sie finden leicht die Durchschnittslänge Ihres Schrittes. Sie wiederholen die Messung jedes Jahr, z. B. in jedem Frühjahr, weil sich die Länge eines Schrittes, besonders bei jungen Leuten, verändert.

Wir wollen gleich auf eine durch zahlreiche Messungen erprobte, eigenartige Tatsache aufmerksam machen. Die durchschnittliche Schrittlänge eines erwachsenen Menschen ist etwa halb so groß wie sein Wuchs bis zur Augenhöhe. Ist z. B. die Körpergröße bis zur Augenhöhe 1,40 m, so beträgt die Länge eines Schrittes 0,70 m. Prüfen Sie gelegentlich die Richtigkeit dieser Regel.

Außer der Schrittlänge ist auch die Gehgeschwindigkeit interessant, sie ist die Anzahl der km/Stunde. Manchmal ist es gut, folgende Regel zu wissen: Wir legen je Stunde ebenso viele Kilometer zurück wie Schritte in drei Sekunden. Bei 4 Schritten in 3 Sekunden ist also unsere Geschwindigkeit 4 km/Stunde. Diese Regel gilt indessen nur bei einer bestimmten Schrittlänge. Diese Länge läßt sich unschwer bestimmen. Bezeichnen wir die Schrittlänge in Metern mit x, die Zahl der Schritte in drei Sekunden mit n, dann können wir folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{3600}{3} \cdot n \cdot x = n \cdot 1000$$

daraus folgt: $1200x = 1000$ und $x = \frac{5}{6}$, d. h., die Schrittlänge ist 80 bis 85 cm.

Das ist schon ein ziemlich großer Schritt. Sollte Ihr Schritt von dieser Größe erheblich abweichen, dann müssen Sie mit anderen Mitteln die Geschwindigkeit ausmessen. Sie messen z. B. die Zeit aus, die Sie für den Weg zwischen zwei Kilometer- bzw. Hundertmetersteinen gebrauchen.

Das Augenmaß

Es ist unterhaltsam und nützlich, Entfernungen mit dem bloßen Auge abzuschätzen.

Diese Kunst führt nur durch Übung zum Erfolg. Als ich noch zur Schule ging und mit meiner Klasse Ausflüge unternahm, waren solche Übungen schon an der Tagesordnung. Sie nahmen Formen eines besonderen selbst erfundenen Wettkampfes an.

Unterwegs bezeichneten wir irgendeinen in der Nähe der Landstraße wachsenden Baum oder einen anderen in größerer Entfernung stehenden Gegenstand und ... der Wettkampf begann.

»Wieviel Schritte sind es bis zum Baum?« fragte ein Teilnehmer.

Die anderen nannten die von ihnen geschätzte, vermutliche Zahl. Dann wurden die Schritte gemeinsam abgezählt und festgestellt, wessen Schätzung am genauesten war; dieser hatte dann das Spiel gewonnen. Dann kam die Reihe an ihn, das nächste Objekt für die Entfernungsschätzung zu bestimmen.

Wer bei der Entfernungsbestimmung das meiste »Glück« hatte, erhielt einen Punkt; nach 10 Schätzungen wurden die Punkte gezählt. Wer die größte Punktzahl hatte, war der Sieger des Wettkampfes.

Ich kann mich noch erinnern, wie oft in der ersten Zeit Entfernungen fehlerhaft geschätzt wurden. Aber sehr bald – eigentlich viel schneller als wir annahmen – hatten wir diese Kunst so gut gelernt, daß Irrtümer nur noch selten vorkamen. Nur bei einem plötzlichen Wechsel des Landschaftsbildes, wenn wir etwa vom freien Felde in einen Wald oder auf eine mit Buschwerk bewachsene Heide traten, oder bei der Rückkehr in die schmalen, staubigen Straßen unserer Stadt zurückkehrten, ferner während der Nacht beim trügerischen Licht des Mondes kamen noch gelegentlich erhebliche Fehlschätzungen vor. Später jedoch gewöhnten wir uns an alle möglichen Situationen und lernten diesen oder jenen Faktor zu berücksichtigen. Schließlich wurde unsere Gruppe beim Schätzen von Entfernungen so vollkommen, daß wir diesen Sport nicht weiter ausübten. Alle rieten mit der gleichen Genauigkeit, und der Wettkampf verlor jedes Interesse. Auf diese Weise eigneten wir uns ein gutes Augenmaß an, das uns bei unseren Ausflügen zugute kam.

Es ist eigentümlich, daß unser Augenmaß mit der Sehschärfe anscheinend nicht zusammenhängt. Wir hatten in unserer Gruppe einen kurzsichtigen Jungen, der den anderen an Genauigkeit der Schätzung keineswegs nachstand; im Gegenteil, er ging oft als Sieger aus unseren Wettbewerben hervor. Andererseits fiel es einem anderen, völlig normalsichtigen Jungen sehr schwer, die richtige Entfernung zu schätzen. Die gleiche Erscheinung hatte ich auch später bei der Bestimmung der Baumhöhe festgestellt.

Als ich mit einer Studentengruppe Entfernungen schätzte – es handelte sich diesmal keineswegs um einen »Spaß«, sondern um die Vorbereitung zum Försterberuf –, entdeckte ich, daß Kurzsichtige diese Kunst genauso gut beherrschen wie Normalsichtige. Mag es für Kurzsichtige ein Trost sein: Obwohl sie nicht scharf sehen, besitzen sie dennoch die Fähigkeit, sich ein vollkommen ausreichendes Augenmaß anzueignen.

Entfernungen kann man in jeder Umgebung, zu jeder Jahreszeit schätzen. Wenn Sie auf der Straße gehen, stellen Sie sich selbst Entfernungsaufgaben, indem

Abb. 77. Der Baum scheint dicht hinter dem Hügel zu sein.

Sie die Schrittzahl zu erraten versuchen, die Sie von dem nächsten Laternenpfahl oder einem anderen am Wege liegenden Gegenstand trennt.

Beim Militär mißt man der richtigen Entfernungsschätzung mit dem bloßen Auge große Bedeutung bei. Es ist auch für uns lehrreich, sich mit den Merkmalen oder Anzeichen vertraut zu machen, derer sich ein Kanonier, ein Schütze oder ein Späher bedient. Wir zitieren hier einige Anweisungen aus einem Lehrbuch der Artillerie.

»Die Schätzung von Entfernungen erfolgt entweder auf Grund vorhandener Erfahrungen, wobei man zu der Kunst greift, den Abstand des Objekts vom Standort des Beobachters nach dem von vornherein bekannten Grad der Unterscheidungsklarheit von sichtbaren Objekten zu bestimmen; oder dadurch, daß man einige bekannte, etwa 100 bis 200 Schritte lange Entfernungen abschätzt, die dem Auge um so kleiner erscheinen, je weiter diese vom Beobachterstandort entfernt sind.

Bestimmt man Entfernungen auf Grund des Erkennbarkeitsgrades sichtbarer Objekte, dann muß berücksichtigt werden, daß beleuchtete, angestrahlte Objekte oder Gegenstände, die durch Farbunterschiede im Gelände bzw. auf dem Wasser plastisch hervortreten, weniger weit entfernt zu sein scheinen als andere nicht besonders hervortretende. Auch Objekte, die höher als andere liegen, ferner An-

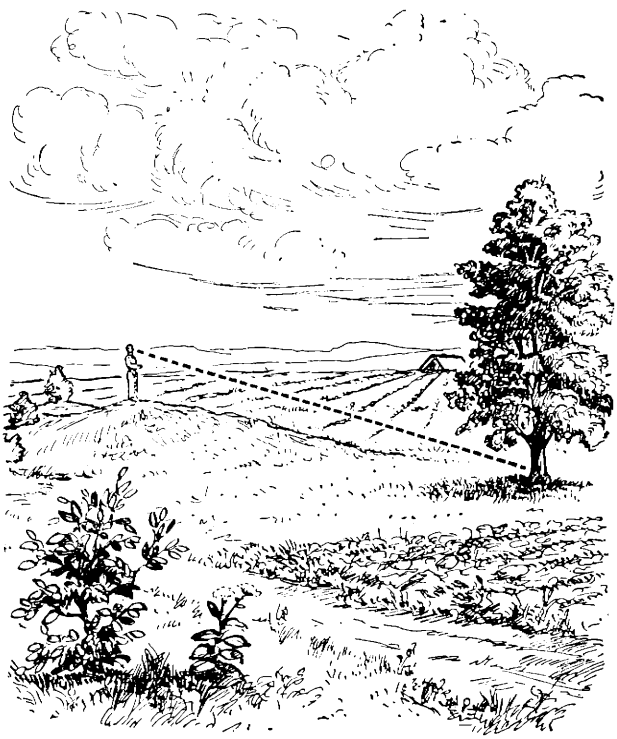


Abb. 78. Vom Hügel ist der Baum doch noch weit entfernt.

häufungen von Gegenständen scheinen, verglichen mit einem Einzelobjekt, näher zu sein; das gleiche trifft auch allgemein für größere Objekte zu.

Man kann sich merken: Mund und Augen können bequem in einer Entfernung von 50 Schritt unterschieden werden; bei Entfernung bis zu 100 Schritt verschmelzen die Augen zu Punkten; auf 200 Schritt können Knöpfe und andere Einzelheiten der Uniform noch unterschieden werden; auf 400 Schritt kann man die Bewegung der Füße unterscheiden; die Farbe der Uniform kann auf 500 Schritt noch erkannt werden.«

Auch das erfahrenste Auge begeht bei Entfernungsschätzungen Fehler bis zu 10% nach oben oder unten.

Es kommen allerdings auch weit gröbere Fehlschätzungen vor, z. B. auf einer völlig ebenen, eintönigen Oberfläche, auf weiten Flüssen oder Seen, in der Sandwüste und auf einem dicht bewachsenen Feld. In solchen Fällen scheint die Entfernung stets geringer als sie in Wirklichkeit ist. Wenn wir hier ans Schätzen gehen, dann »verhauen« wir uns oft um das Doppelte und noch mehr. Darüber hinaus sind Fehler auch dann häufig, wenn wir die Entfernung bis zu einem Gegenstand bestimmen sollen, dessen Grundfläche, Sohle usw. durch einen Bahndamm, einen Hügel, ein Gebäude, überhaupt durch irgendeinen Höhenvorsprung verdeckt ist. Wir neigen in solchen Fällen dazu, den Gegenstand nicht als *hinter* der Erhöhung befindlich, sondern *auf* dieser zu betrachten. Wir machen also von vornherein den Fehler der Entfernungsunterschätzung (Abb. 77 u. 78).

In diesem Falle ist es nicht ratsam, sich auf sein Augenmaß zu verlassen; man muß zu anderen Schätzungsverfahren greifen, die wir bereits besprochen haben und noch besprechen werden.

Abschüssige Strecken

Außer Kilometersteinen sind an dem Eisenbahnstrang noch andere kleine Pfähle aufgestellt, die teils waagerecht, teils schräg angebrachte Schilder tragen, deren Inschriften vielen noch ein Rätsel sind (Abb. 79).

Das sind »Profilzeichen«. In der ersten Inschrift bedeutet die obere Zahl 0,002, daß das Streckengefälle (in der durch das Schild angezeigten Richtung) 0,002

Abb. 79. Profilzeichen bei der Bahn.

beträgt, d. h., das Gleis fällt ab bzw. steigt jeden Meter um 2 mm an. Die untere Zahl (hier 140) zeigt die Streckenlänge an, für die das Gefälle oder die Steigung gelten. Sie beträgt in unserem Fall 140 m; in 140 m steht das nächste Profilzeichen, auf dessen Schild dann die neuen Streckenverhältnisse abgelesen werden können. Das zweite Schild mit der Inschrift $\frac{0{,}006}{55}$ läßt erkennen, daß im Laufe der folgenden 55 m das Gefälle bzw. die Steigung 6 mm für jeden Meter erreicht.

Kennen wir die Bedeutung der Profilzeichen, dann können wir leicht den Höhenunterschied zwischen zwei benachbarten, durch diese Zeichen markierten Streckenpunkten der Bahn ausrechnen. Deshalb beträgt im ersten Falle der Höhenunterschied 0,002 m · 140 = 0,28 m, im zweiten 0,006 m · 55 = 0,33 m.

(In Deutschland sind an den Eisenbahnstrecken ähnliche Profilzeichen vorhanden, auf der ein Verhältnis und eine Weglänge angegeben sind.)

Wie ersichtlich, ist die Bezeichnung des Streckengefälles durch Grade bei der Bahn nicht üblich. Es ist jedoch nicht schwierig, die Profilbezeichnungen in Grad auszudrücken. Da der Winkel bei A sehr klein ist, können AB und AC als Halbmesser des Kreises angenommen werden, dessen Bogen BC* ist. Wenn man das Verhältnis $BC : AB$ kennt, dann ist der Winkel BAC leicht auszurechnen. Beträgt das Gefälle z. B. 0,002, so überlegen wir folgendermaßen: Bei der Bogenlänge

---

* Mancher Leser wird nicht damit einverstanden sein, die schiefe Ebene AB der Waagerechten AC gleichzusetzen. Es ist daher ganz lehrreich, sich von dem sehr geringfügigen Längenunterschied von AC und AB zu überzeugen. Angenommen, BC beträgt 0,01 von AB. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz gilt:

$$AC = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}9999 \cdot AB^2} = 0{,}99995\,AB$$

Also beträgt die Längendifferenz nur 0,00005 AB. Bei angenäherten Rechnungen können wir derartige Ungenauigkeiten selbstverständlich vernachlässigen.

von $\frac{1}{57}$ des Halbmessers beträgt die Größe des Winkels $1°$ (siehe Kapitel 3); wie groß ist dann der Winkel x, der einem Bogen von 0,002 des Halbmessers entspricht?

Wir können x aus folgender Proportion bestimmen:

$$\frac{x}{1°} = \frac{0{,}002}{\frac{1}{57}}$$

daraus folgt: $x = 1° \cdot 0{,}002 \cdot 57 = 0{,}11°$, d. h., x ist $7'$.

Durch eine andere Überlegung wollen wir das Ergebnis prüfen: Der dem Bogen 0,002 zugehörige Winkel x muß sich zu $360°$ verhalten wie die Bogenlänge zum Gesamtumfang.

$$\frac{x}{360} = \frac{0{,}002}{1 \cdot 2 \cdot 3{,}14} \qquad x = \frac{360°}{3140} = \frac{360' \cdot 60}{3140} = 7'$$

Eisenbahnen werden mit verhältnismäßig geringem Gefälle gebaut. In der Sowjetunion beträgt das größte zulässige Gefälle 0,008, oder in Grad ausgedrückt:

$$0{,}008 \cdot 57, \quad \text{also weniger als } \tfrac{1}{2}°$$

Nur für die Transkaukasische Bahn gelten Ausnahmebestimmungen. Dort betragen die höchsten Steigungen 0,025, oder fast $1\frac{1}{2}°$.

Diese geringen Steigungen kann ein Fußgänger überhaupt nicht wahrnehmen. Wir bemerken ein Bodengefälle unter unseren Füßen erst, wenn es etwa $2\frac{1}{2}°$ erreicht.

Wenn Sie mehrere Kilometer am Bahndamm entlanggehen und unterwegs alle Profilzeichen notieren, dann können Sie leicht ausrechnen, um welchen Betrag Sie schließlich auf- oder abgestiegen sind, oder mit anderen Worten, wie groß der Höhenunterschied zwischen dem Beginn und dem Ende Ihrer Wanderung an der Bahn ist.

Aufgabe

Sie begannen Ihre Wanderung längs der Eisenbahn an dem Profilpfahl, der die Bezeichnung $\frac{0{,}004}{153}$ trägt; dann begegnen Sie nacheinander folgenden Zeichen:

$\frac{0{,}000}{60}$*	$\frac{0{,}0017}{84}$	$\frac{0{,}0032}{121}$	$\frac{0{,}000}{45}$	$\frac{0{,}004}{210}$
Waagerechte	Steigung	Steigung	Waagerechte	Gefälle

Sie beenden Ihren Gang an dem nächsten Profilzeichen.

Wie lang ist die von Ihnen zurückgelegte Strecke und wie groß ist der Höhenunterschied zwischen dem ersten und letzten Zeichen?

Lösung

Die Gesamtstrecke beträgt

$$153 \text{ m} + 60 \text{ m} + 84 \text{ m} + 121 \text{ m} + 45 \text{ m} + 210 \text{ m} = 673 \text{ m}$$

Sie sind um $0{,}004 \text{ m} \cdot 153 + 0{,}0017 \text{ m} \cdot 84 + 0{,}0032 \text{ m} \cdot 121 = 1{,}15$ m nach oben und um $0{,}004 \text{ m} \cdot 210 = 0{,}84$ m nach unten gestiegen.

Das Profilzeichen, an dem Sie die Wanderung beenden, ist also

$1{,}15 \text{ m} - 0{,}84 \text{ m} = 0{,}31 \text{ m} = 31$ cm höher als das erste Profilzeichen.

* Das Zeichen 0,000 bedeutet eine völlig waagerechte Strecke.

Der Schotterhaufen

Auch Schotterhaufen gehören zu den Dingen, die die Aufmerksamkeit des »Freiluftgeometers« fesseln können. Wenn Sie nach dem Volumen des vor Ihren Augen liegenden Schotterhaufens fragen, so haben Sie damit einem Menschen, der gewohnt ist, mathematische Schwierigkeiten nur auf dem Papier oder auf der Klassentafel zu meistern, eine ziemlich knifflige Aufgabe gestellt. Man muß hierbei das Volumen eines Kegels berechnen, dessen Höhe und Halbmesser nicht unmittelbar gemessen werden können (Abb. 80). Uns kann aber niemand daran hindern, die gesuchten Größen indirekt zu bestimmen. Man findet den Halbmesser, indem man den Umfang des Haufens mit dem Bandmaß abliest und den ermittelten Betrag durch 6,28 teilt. In der Praxis wird der Umfang mit dem reziproken Wert der Zahl π multipliziert, und zwar mit 0,318, wenn der Durchmesser und mit 0,159, wenn der Halbmesser bestimmt wird. Mit der Höhenberechnung ist es schon nicht mehr so einfach. Man mißt die Länge der Mantellinie AB oder der beiden gegenüberliegenden Mantellinien ABC in einem Zuge, wie es die Wegebauer machen; dabei legt man das Meßband geradeaus über die Kegelspitze. Wenn der Halbmesser bekannt ist, wird die Höhe nach dem Pythagoreischen Lehrsatz bestimmt. Wir wollen ein Beispiel berechnen.

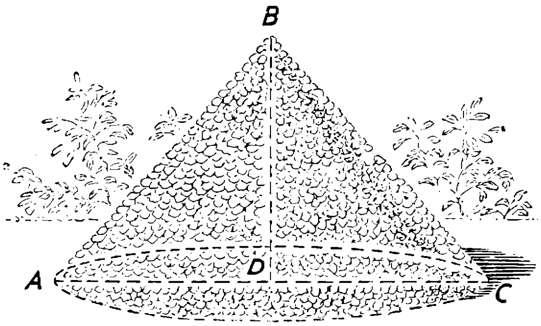


Abb. 80. Das Volumen des Schotterhaufens.

Aufgabe

Der Umfang an der Sohle eines kegelförmigen Schotterhaufens beträgt 12,1 m. Die Länge beider Mantellinien ist 4,6 m. Wie groß ist das Volumen des Schotterhaufens?

Lösung

Der Halbmesser der Grundfläche beträgt

$$12{,}1\ \text{m} \cdot 0{,}159 \quad (\text{anstatt } 12{,}1\ \text{m} : 6{,}28) = 1{,}9\ \text{m}.$$

Die Höhe beträgt

$$\sqrt{(2{,}3\ \text{m})^2 - (1{,}9\ \text{m})^2} = 1{,}2\ \text{m}.$$

Daraus bestimmt man das Volumen zu

$$\frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}9\ \text{m}^2 \cdot 1{,}2\ \text{m} = 4{,}5\ \text{Kubikmeter}$$

»Der stolze Hügel«

Sehe ich einen Sand- oder Schotterkegel, dann denke ich unwillkürlich an die alte Sage der Orientvölker, von der uns Puschkin in seinem »Geizigen Ritter« erzählt:

»...Irgendwo hab' ich gelesen,
Ein Fürst befahl einst seinen Kriegern an,
Je eine Handvoll Erde aufzuhäufen.
Ein stolzer Berg erwuchs draus – und der Fürst
Vermocht' von dessen Gipfel froh zu schauen,
Das weite Tal, bedeckt von weißen Zelten,
Und auf dem fernen Meere Schiff an Schiff.«

Sie gehört zu den Sagen, die, ungeachtet ihrer scheinbaren Möglichkeiten, auch nicht ein Körnchen Wahrheit enthalten.

Wir können unsere Behauptung beweisen. Sollte es einem Despoten der Antike wirklich einmal eingefallen sein, eine derartige Tat zu vollbringen, wäre er von der Kläglichkeit des Ergebnisses maßlos enttäuscht worden. Vor ihm würde sich ein so miserabler kleiner Erdhaufen »türmen«, daß keine noch so rege Phantasie imstande wäre, den legendären »stolzen Hügel« daraus zu formen.

Wir wollen es an einem Rechenbeispiel zeigen. Wieviel Krieger standen dem Fürsten zur Verfügung? Die damaligen Armeen waren nicht so groß wie heute. Ein Heer von 100 000 Mann war für die damalige Zeit recht bedeutend. Wir halten aber an dieser Zahl fest und nehmen nun an, daß 100 000 Handvoll Erde zusammenkamen, um einen Hügel aufzuschütten.

Nehmen Sie eine Handvoll Erde, – soviel Sie nur können! – und schütten Sie sie in ein Wasserglas. Eine Handvoll reicht nicht einmal aus, um das Glas zu füllen. Wir nehmen weiter an, daß ein Krieger des Königs $\frac{1}{5}$ Liter, also 0,2 dm^3, mit der Hand nehmen konnte. Daraus berechnen wir nun das Volumen des »Hügels«.

$$\frac{1}{5}\,dm^3 \cdot 100\,000 = 20\,000\,dm^3 \quad \text{oder} \quad 20\,m^3$$

Folglich ist der ganze Hügel nur einem Kegel von 20 m^3 Rauminhalt gleich. Das Ergebnis ist kläglich genug. Wir fahren mit der Rechnung fort, damit wir die Höhe des Hügels bestimmen können. Zu diesem Zweck müssen wir die Öffnung des Winkels messen, der durch Grundlinie und Mantellinie gebildet wird. In unserem Fall nehmen wir an, daß er gleich dem natürlichen Schüttwinkel, d. h. 45°, ist; steilere Flanken dürfte der Kegel nicht besitzen, da der Sand sonst herunterrieselt. (Es wäre sogar ein flacherer Schüttwinkel von etwa 1 : 1,5 zu veranschlagen.) Wir legen nun 45° zugrunde und wissen, daß die Höhe des Kegels seinem Halbmesser an der Grundfläche gleich ist.

$$V = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3} \qquad 20\,m^3 = \frac{\pi \cdot h^3}{3}$$

und daraus ergibt sich für h:

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20\,m^3}{\pi}} = 2{,}4\,m$$

Man muß schon eine üppige Phantasie haben, um einen 2,4 m hohen Hügel (also 1,5 mal so groß wie ein Mensch) einen »stolzen Hügel« zu nennen. Hätten wir einen noch flacheren Schüttwinkel zugrunde gelegt, dann wäre das Ergebnis noch bescheidener.

Attila befehligte das größte Heer der Antike. Nach Überlieferungen schätzen die Geschichtsschreiber seine Stärke auf 700000 Mann. Wenn sich alle Krieger an dem

Aufschütten eines Hügels beteiligt hätten, dann wäre ein etwas höherer Kegel entstanden – aber die Differenz ist nicht erschütternd! Da das Volumen siebenmal größer wäre als das des bereits berechneten Kegels, so müßten wir eine $\sqrt[3]{7}$fache Höhe erhalten, d. h., der große Kegel würde 1,9mal höher sein; er wäre 2,4 m · 1,9 = 4,6 m hoch. Ich bezweifle, daß ein Hügel von dieser Höhe Attilas Ehrgeiz befriedigt hätte.

Von so einem Hügel könnte man selbstverständlich in das von Zelten übersäte Tal schauen, aber das Meeresgestade wäre nur dann sichtbar, wenn sich der ganze Vorgang in Ufernähe abgespielt hätte.

Über die Fernsicht aus einer bestimmten Höhe ist im 6. Kapitel die Rede.

An der Straßenkurve

Weder die Eisenbahn noch die Landstraße besitzen scharfe Kurven. Der Richtungswechsel erfolgt vielmehr allmählich in einem sanften Bogen. Dieser Bogen ist ein Teil eines Kreises, dessen Tangenten die beiden geraden Straßenausläufe sind. Die beiden in der Abb. 81 sichtbaren geraden Strecken AB und CD werden durch den Bogen BC miteinander derart verbunden, daß AB und CD den Bogen in den Punkten B und C geometrisch so berühren, daß AB und der Halbmesser OB, ferner CD und der Halbmesser OC jeweils rechte Winkel bilden. Der Zweck ist selbstverständlich, daß der Übergang aus der Geraden in die Kurve und umgekehrt stetig und sanft erfolgt.

Der Halbmesser einer Kurve ist meistens groß. Bei den Eisenbahnen beträgt er mindestens 600 m; der übliche Halbmesser der Kurven an Hauptstrecken ist sogar 1000 m und 2000 m.

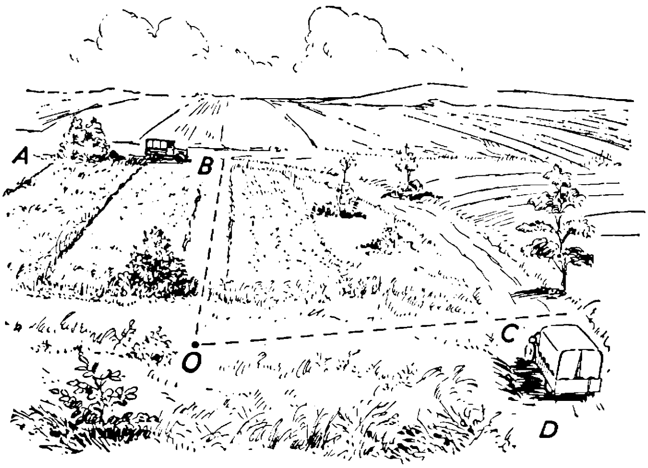


Abb. 81. Die Straßenkurve.

Könnten Sie den Halbmesser einer Kurve bestimmen, wenn Sie sich in der Nähe aufhalten? Das ist freilich nicht so leicht, wie den Halbmesser auf dem Papier zu bestimmen. Auf der Zeichnung ist es nämlich wirklich einfach. Sie ziehen zwei beliebige Sehnen und fällen jeweils ein Lot. Der Mittelpunkt des Kreisbogens liegt bekanntlich im Schnittpunkt der beiden Lote. Die Entfernung zwischen diesem Schnittpunkt und einem beliebigen Punkt des Bogens ist die gesuchte Länge des Halbmessers.

Diese Operationen wären freilich im Gelände sehr langwierig durchzuführen, weil doch der Mittelpunkt der Kurve 1 bis 2 km von der Straße entfernt und sein Ort häufig unzugänglich ist. Die Kurve könnte kartiert und anschließend die Konstruktion gezeichnet werden, – aber auch das ist keineswegs einfach.

Wir vermeiden diese Schwierigkeiten, sofern wir auf die Konstruktion verzichten und zum Rechenverfahren greifen.

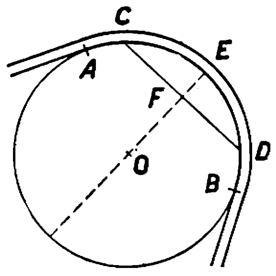


Abb. 82. Der Krümmungshalbmesser.

Es wird folgendermaßen vorgegangen: Wir ergänzen in Gedanken den Bogen AB (Abb. 82) zu einem vollen Kreis. Dann verbinden wir zwei beliebige Punkte C und D des Kreisbogens, messen die Sehne CD und den »Durchhang« EF (es ist die Höhe des Kreissegments CED) aus. Nach diesen Daten kann die gesuchte Größe des Halbmessers leicht berechnet werden. Betrachten wir die Gerade CD und den Kreisdurchmesser als sich überschneidende Sehnen und bezeichnen wir die Sehnenlänge mit s, die Länge des Durchhangs mit h, den Radius mit r, dann gilt nach dem Sehnensatz:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = h(2r - h) = \frac{s^2}{4} = h(2r - h)$$

daraus folgt:

$$\frac{s^2}{4} = 2rh - h^2$$

und der gesuchte Halbmesser* ist dann:

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

Beträgt der Durchhang z. B. 0,5 m und ist die Sehne 48 m, dann ist der gesuchte Halbmesser:

$$r = \frac{(48\,\mathrm{m})^2 + 4 \cdot (0{,}5\,\mathrm{m})^2}{8 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 576{,}25\ \mathrm{m}$$

Die Rechnung wird einfacher, wenn für $2r - h = 2r$ gesetzt wird.

---

* Das gleiche Ergebnis ergibt sich auf anderem Wege. Im rechtwinkligen Dreieck OFC ist $OC = r$, $CF = \frac{s}{2}$ und $OF = r - h$.

Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz gilt:

$$r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

und daraus:

$$r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{s^2}{4}$$

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

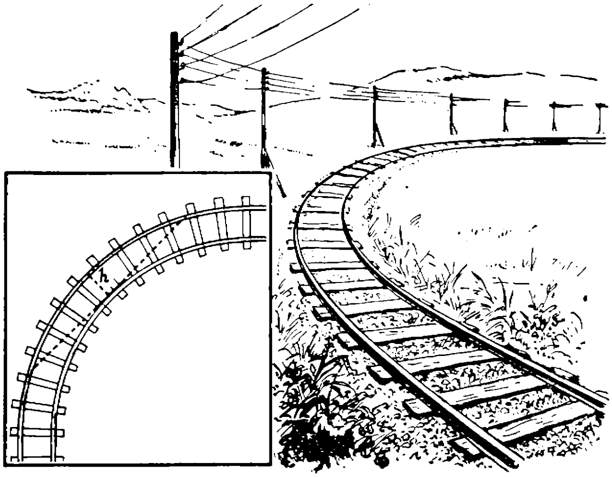


Abb. 83. Der Krümmungshalbmesser eines Eisenbahngleises.

Diese Freiheit ist statthaft, da h im Vergleich zu r sehr klein ist. (r beträgt viele hundert Meter, h ist nur wenige Meter groß.) Die sehr bequeme angenäherte Rechenformel sieht dann so aus:

$$r = \frac{s^2}{8h}$$

Wenden wir in unserem Beispiel diese Rechenformel an, dann erhalten wir $r = 576$ m. Wir bekommen also nahezu das gleiche Ergebnis.

Kennen wir die Länge des Halbmessers und wissen, daß sich der Kurvenmittelpunkt auf dem vom Sehnenmittelpunkt gefällten Lot befindet, dann können wir ungefähr auch den Ort finden, der den Mittelpunkt der Straßenkurve bildet.

Handelt es sich um einen Schienenweg, dann kann der Krümmungshalbmesser noch einfacher ermittelt werden. Spannen wir nämlich eine Schnur in der Gleiskurve derart, daß sie als Tangente zur Innenschiene verläuft, dann erhalten wir die Bogensehne der Außenschiene (Abb. 83), deren Durchhang genau so groß ist wie die Breite unserer Eisenbahnspur, nämlich 1,52 m*. Der Krümmungshalbmesser ist dann annähernd

$$r = \frac{s^2}{8 \cdot 1{,}52} = \frac{s^2}{12{,}16}.$$

Ist $s = 152$ m, dann ist der Krümmungshalbmesser 1900 m.**

Auf dem Meeresgrund

Der Sprung von dem Krümmungshalbmesser einer Eisenbahnkurve zu dem Boden des Ozeans ist Ihnen wahrscheinlich ziemlich überraschend. Er ist zumindest nicht ohne weiteres verständlich. Wie wir sehen werden, verbindet jedoch

* Für Deutschland und das übrige Mitteleuropa 1,435 m.

** Dieses Verfahren ist nicht sehr praktisch, weil bei einem großen Krümmungshalbmesser die Schnur für die Sehnenmessung sehr lang ausfällt.

die Geometrie beide Themen auf ganz natürliche Weise. Während einer Rast können wir uns mit den folgenden Tatsachen beschäftigen.

Wir untersuchen die Krümmung des Ozeanbodens und wollen wissen, welche Gestalt dieser hat: ob hohl (konkav), gerade oder erhaben (konvex). Manchem scheint es unwahrscheinlich, daß die Weltmeere, trotz ihrer gewaltigen Tiefe, keineswegs Vertiefungen oder Mulden auf der Erdoberfläche bilden. Wie wir sehen werden, ist ihr Boden nicht konkav, sondern konvex.

Wenn wir, dem Dichterwort folgend, den Ozean als »bodenlos und uferlos« bezeichnen, so vergessen wir dabei, daß seine »Uferlosigkeit« viel hundertmal größer ist als die »Bodenlosigkeit«. Wir lassen außer acht, daß das nasse Element des Ozeans wohl eine Schicht von ungeheuerer Weite darstellt, die sich aber an die Krümmung unseres Planeten anschmiegt.

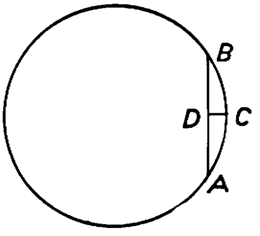


Abb. 84. Ist der Ozeanboden flach?

Nehmen wir als Beispiel den Atlantischen Ozean. Am Äquator beträgt seine Breite etwa ein Sechstel des vollen Erdumfanges. Bezeichnet man auf der Abb. 84 den Äquator mit dem vollen Kreis, dann entspricht der Bogen ACB der Wasserfläche des Atlantiks. Wäre sein Boden flach, so gliche seine Tiefe der Höhe DC. Da wir wissen, daß die Sehne AB die Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen Sechsecks ist (die Sehnenlänge ist so lang wie der Kreishalbmesser), können wir aus der abgeleiteten Formel für Bahnkurven CD berechnen:

$$r = \frac{s^2}{8h} \quad \text{und daraus} \quad h = \frac{s^2}{8r}$$

Da $s = r$ ist, erhalten wir in unserem Falle:

$$h = \frac{r}{8}$$

Der Erdhalbmesser beträgt 6400 km, dann muß $h = 800$ km sein.

Wenn also der Boden des Atlantik vollkommen flach verlaufen würde, müßte seine größte Tiefe 800 km betragen. In Wirklichkeit erreicht sie noch keine 10 km. Daraus ziehen wir den allgemeinen Schluß: Der Boden des Ozeans stellt in groben Zügen eine erhabene Fläche dar, die nur ein geringes weniger gekrümmt ist als die konvexe Wasseroberfläche.

Diese Erkenntnis gilt auch für die übrigen Weltmeere. Ihre Böden weichen nur wenig von der Kugelform der Erdoberfläche ab.

Betrachten wir die Formel $h = \frac{s^2}{8r}$, dann sehen wir ohne weiteres, wie die Tiefe h des Meeres oder des Ozeans mit wachsender Breite s sehr schnell zunehmen müßte (im direkten Verhältnis zum Quadrat der Breite s), damit der Boden flach bliebe. Wir wissen aber, daß mit der Zunahme der Meeresausdehnung s seine Tiefe keineswegs in so »stürmischem« Tempo zunimmt. Ist ein Ozean z. B. 100mal breiter als ein Meer, dann nimmt seine Tiefe keineswegs auf das $100 \cdot 100 = 10000$fache zu. Dabei ist der Boden verhältnismäßig kleiner Wasserflächen konkaver als der der großen. Der Boden des Schwarzen Meeres zwischen der Krim und Kleinasien ist weder erhaben wie bei Ozeanen noch flach – er ist etwas konkav. Die Breite der

Wasserfläche dieses Meeres stellt im Durchschnitt einen Bogen von 2° dar. (Genauer ausgedrückt: $\frac{1}{170}$ des Erdumfanges.) Das Schwarze Meer besitzt eine ziemlich gleichmäßige Tiefe von 2,2 km. Wird der Bogen der Sehne gleichgesetzt, dann stellt sich heraus, daß der Boden dieses Meeres folgende größte Tiefe haben müßte, um geometrisch flach zu sein:

$$h = \frac{\frac{40000^2}{170^2}}{8 \cdot 6400} = \frac{40000^2}{170^2 \cdot 8 \cdot 6400} = 1{,}1 \text{ km}$$

Folglich liegt der Boden des Schwarzen Meeres in Wirklichkeit mehr als einen Kilometer tiefer als die gedachte Ebene, die seine entgegengesetzten Uferränder schneidet. Der Boden ist also eine Senke und keine erhabene Fläche.

Gibt es Wasserberge?

Auch diese Frage wird durch unsere früher abgeleitete Formel für die Berechnung einer Bahnkurve beantwortet.

Durch die vorangegangene Aufgabe sind wir schon ein wenig vorbereitet. Ja, es gibt Wasserberge im geometrischen Sinne. Nicht nur ein Meer, fast jeder See stellt gewissermaßen einen Wasserberg dar. Wenn Sie am Seeufer stehen, sind Sie von dem gegenüberliegenden Uferrand durch eine erhabene Wasserfläche getrennt, deren Höhe mit der Breite des Sees zunimmt. Sie können diese Höhe berechnen. Aus der Formel $r = \frac{s^2}{8h}$ erhalten wir die Höhe der Sehne $h = \frac{s^2}{8r}$. Hier bedeutet s die Entfernung zwischen den beiden Ufern, die durch eine Gerade dargestellt wird, die man der Seebreite gleichsetzen kann (Bogen = Sehne). Ist der See z. B. 100 km breit, dann erreicht die »Höhe« dieses »Wasserberges« etwa 200 m. Der Wasserberg besitzt also eine ganz beachtliche Höhe!

Bereits ein See von 10 km Breite hat in der Mitte einen 2 Meter hohen »Buckel«; die Wölbung übertrifft also die Größe eines Menschen.

Reisetrigonometrie ohne Formeln und Tabellen

Die Sinusrechnung

In diesem Kapitel sehen wir, wie die Seiten eines Dreieckes mit einer Genauigkeit bis zu 2% und die Winkel mit einer Genauigkeit bis zu 1° berechnet werden können. Wir kommen allein mit dem Sinusbegirff aus und brauchen weder Tabellen noch irgendwelche Formeln.

Diese vereinfachte Trigonometrie ist gut zu gebrauchen, wenn auf einem Ausflug die Tabellen nicht zur Hand sind und die Formeln im Kopf nicht mehr recht sitzen. Robinson würde diese Art Trigonometrie bestimmt erfolgreich verwendet haben.

Stellen Sie sich vor, Sie hätten Trigonometrie noch niemals durchgenommen oder total vergessen; sicher kann sich so mancher von meinen Lesern in diese Lage hineinversetzen. Wir wollen also mit der Trigonometrie von neuem beginnen. Was ist der Sinus eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck? Es ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse (siehe Abb. 85). Der Sinus des Winkels ABC ist also $\frac{BC}{AC}$ oder $\frac{DE}{AE}$ oder $\frac{FG}{AG}$. Es ist ersichtlich, daß wegen der Ähnlichkeit der hier entstandenen Dreiecke alle diese Verhältnisse gleich sind.

Wie groß sind nun die Sinus der verschiedenen Winkel von 1 bis 90°? Wie erfährt man es ohne vorhandene Tabellen? Sehr einfach, man legt die Tabellen selbst an. Gerade das wollen wir jetzt tun.

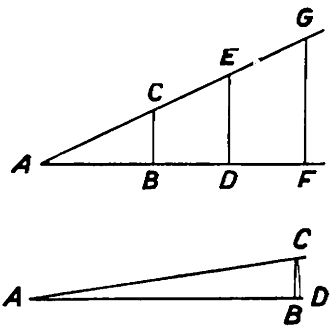


Abb. 85. Der Sinus eines spitzen Winkels.

Wir beginnen mit den Winkeln, deren Sinus uns von der Geometrie her bekannt sind. Es ist dies erstens der 90°-Winkel, dessen Sinus offenbar 1 ist. Der Sinus des Winkels von 45° beträgt, wie man nach dem Pythagoreischen Lehrsatz leicht ausrechnen kann, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d. h. 0,707. Wir kennen auch den Sinus eines 30°-Winkels. Da die Gegenkathete eines solchen Winkels der halben Hypotenuse gleich ist, ergibt sich Sinus 30° $= \frac{1}{2}$. Wir kennen nun die Sinus (oder, wie man »zünftig« schreibt: sin) von drei Winkeln.

$$\sin 30° = 0{,}5$$
$$\sin 45° = 0{,}707$$
$$\sin 90° = 1$$

Das reicht natürlich nicht aus! Wir müssen auch die Sinus aller Zwischenwinkel, mindestens von Grad zu Grad, kennen. Bei sehr kleinen Winkeln kann man ohne allzu große Ungenauigkeit anstatt des Verhältnisses von Kathete zur Hypotenuse das Verhältnis von Bogen zu Halbmesser setzen. Wie aus der Abb. 85 ersichtlich, unterscheidet sich das Linienverhältnis $\frac{BC}{AC}$ nur sehr wenig von dem Bogenverhältnis $\frac{CD}{AC}$, das sich leicht ausrechnen läßt. So erhält man für einen Winkel von 1° den Bogen $CD = \frac{2\pi r}{360}$, daraus folgt:

$$\sin 1^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{2\pi r}{360 r} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175$$

In der gleichen Weise ermitteln wir:

$$\sin 2^\circ = 0{,}0349$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}0524$$
$$\sin 4^\circ = 0{,}0698$$
$$\sin 5^\circ = 0{,}0873$$

Wir müssen indessen vorsichtig sein und nachprüfen, wie weit wir diese Tabelle fortsetzen können, ohne den Fehler unzulässig groß zu machen. Bei der Berechnung von $\sin 30^\circ$ erhalten wir 0,524, anstatt des genauen Wertes 0,500. Die Differenz greift schon in die zweite Dezimalstelle über, der Fehler (Toleranz) ist hier bereits $\frac{24}{500}$ = rund 5%. Das ist sogar für unsere Reisetrigonometrie zuviel. Damit wir die Fehlergrenze bestimmen, bis zu der wir die Sinusberechnung auf Grund des soeben beschriebenen Verfahrens fortsetzen dürfen, machen wir uns einmal die Mühe, den Sinus von 15° genau zu bestimmen. Zu diesem Zweck greifen wir zur folgenden, recht einfachen Hilfskonstruktion (Abb. 86). $\frac{BC}{AC}$ sei $\sin 15^\circ$. Wir verlängern nun BC um einen gleichen Betrag bis D, verbinden A und D und erhalten zwei gleiche Dreiecke ADB und ABC sowie einen Winkel 30°. Dann fällen wir auf AD das Lot CE und erhalten ein rechtwinkliges Dreieck AEC mit einem Winkel 30° (CAE), dann ist $CE = \frac{AC}{2}$. Wir berechnen daraufhin AE aus dem Dreieck AEC nach dem Pythagoreischen Lehrsatz:

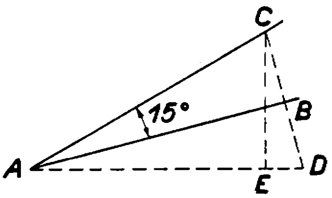


Abb. 86. Wie berechnet man sin 15°?

$$AE^2 = AC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} AC^2 \qquad AE = \frac{AC}{2} \cdot \sqrt{3} = 0{,}866\, AC$$

Es ist

$$ED = AD - AE = AC - 0{,}866\, AC = 0{,}134\, AC.$$

Nun rechnen wir aus CED die Gerade DC aus:

$$DC^2 = CE^2 + ED^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + (0{,}134\, AC)^2 = 0{,}268\, AC^2$$
$$DC = \sqrt{0{,}268\, AC^2} = 0{,}518\, AC$$

Die Hälfte von CD, d. h., $BC = 0{,}259 AC$, also beträgt der gesuchte Sinus:

$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{0{,}259\, AC}{AC} = 0{,}259$$

Es ist der Tabellenwert von $\sin 15°$, sofern man sich auf drei Dezimalstellen beschränkt. Der angenäherte Wert, den wir auf Grund des ursprünglich entwickelten Verfahrens gefunden hätten, ist 0,262. Vergleicht man beide Werte miteinander, nämlich

$$0{,}259 \quad \text{und} \quad 0{,}262$$

dann stellen wir fest, daß das Ergebnis bei Beschränkung auf zwei Stellen

$$0{,}26 \quad \text{und} \quad 0{,}26$$

das gleiche ist. Ersetzen wir also den genauen Wert (0,259) durch den angenäherten (0,26), dann ist der Fehler $\frac{1}{1000}$, d. h. 0,1%. Für unseren Reisegebrauch sind derartige Fehler zulässig; wir dürfen daher getrost die Sinus aller Winkel zwischen 1 und 15° nach dem angenäherten Verfahren ermitteln.

Für den Bereich zwischen 15° und 30° kann man die Sinus nach dem Proportionalitätsgrundsatz berechnen. Wir gehen hierbei von folgender Überlegung aus: Die Differenz zwischen $\sin 30°$ und $\sin 15°$ ist $0{,}50 - 0{,}26 = 0{,}24$. Folglich – und wir sind dazu berechtigt, das anzunehmen – nimmt bei Vergrößerung eines Winkels um 1° sein Sinus jeweils um $\frac{1}{15}$ dieser Differenz (d. h. um 0,016) zu. Natürlich ist das nicht ganz genau der Fall. Die Abweichung kommt indessen erst bei der dritten Dezimalstelle zum Vorschein, die wir aber vernachlässigen. Wenn wir also zu $\sin 15°$ jeweils 0,016 addieren, erhalten wir die Sinus von 16°, 17°, 18° usw.

$$\begin{aligned}
\sin 16° &= 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28\\
\sin 17° &= 0{,}26 + 0{,}032 = 0{,}29\\
\sin 18° &= 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\sin 25° &= 0{,}26 + 0{,}16 \quad = 0{,}42 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Die erhaltenen Werte stimmen in den ersten zwei Dezimalstellen; sie genügen daher für unsere Zwecke.

In der gleichen Weise verfahren wir bei der Winkelberechnung in dem Bereich zwischen 30° und 45°. Die Differenz $\sin 45° - \sin 30° = 0{,}707 - 0{,}5 = 0{,}207$. Wird dieser Betrag durch 15 geteilt, dann ergibt sich 0,014. Wir addieren diese Größe jeweils zu dem $\sin 30°$ und erhalten nunmehr

$$\begin{aligned}
\sin 31° &= 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51\\
\sin 32° &= 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\sin 40° &= 0{,}5 + 0{,}14 \quad = 0{,}64 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Nun brauchen wir nur noch die Werte für den Bereich der spitzen Winkel über 45° zu finden. Hierbei leistet uns der Pythagoreische Lehrsatz Hilfe. Angenommen, wir wollen $\sin 53°$ ermitteln (Abb. 87), d. h. das Verhältnis $\frac{BC}{AC}$. Da Winkel $ACB = 37°$, berechnen wir dessen Sinus nach dem angegebenen

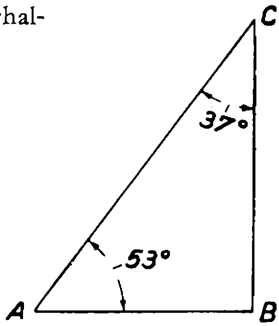


Abb. 87. Der Sinus eines Winkels über 45°.

7 [42043-1]

Verfahren. Er beträgt $0{,}5 + 7 \cdot 0{,}014 = 0{,}6$. Wir wissen andererseits, daß sin $37°$ $= \frac{AB}{AC}$ ist. Folglich ist $\frac{AB}{AC} = 0{,}6$, daraus folgt, daß $AB = 0{,}6 \cdot AC$ ist. Kennen wir AB, dann können wir BC leicht ausrechnen. Die Strecke hat folgende Größe:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{AC^2 - (0{,}6\,AC)^2} = AC\sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8\,AC$$

Die Rechnung ist im allgemeinen einfach, wenn wir die Quadratwurzel ziehen können.

Wurzelziehen

Das in den Lehrbüchern der Algebra angegebene Verfahren zum Ziehen der Quadratwurzel vergißt man sehr leicht. Es kann jedoch entbehrt werden. Nachstehend wird ein sehr altes Verfahren beschrieben, das einfacher ist als die übliche algebraische Methode.

$\sqrt{13}$ ist zu ermitteln. Diese Zahl liegt zwischen 3 und 4; sie ist gleich 3 mit einem Bruch, den wir als x bezeichnen.

Wir haben also: $\sqrt{13} = 3 + x$ oder

$$13 = (3 + x)^2$$
$$13 = 9 + 6x + x^2$$

Das Quadrat des Bruches x ist ein kleiner Bruch, den wir in erster Annäherung vernachlässigen.

Wir erhalten somit:

$$13 = 9 + 6x; \quad \text{daraus folgt} \quad 6x = 4 \quad \text{und} \quad x = \tfrac{2}{3} = 0{,}67$$

Es gilt daher: $\sqrt{13} \approx 3{,}67$.

Wünschen wir eine genauere Bestimmung des Wurzelwertes, dann schreiben wir $\sqrt{13} = 3\tfrac{2}{3} + y$, wo y ein kleiner, positiver oder negativer Bruch ist. Wir erhalten:

$$13 = \left(\frac{11}{3} + y\right)^2$$
$$13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$$

Vernachlässigen wir y^2, dann finden wir den angenäherten y-Wert mit $-\frac{2}{33}$ $= -0{,}06$. Bei der zweiten Annäherung ist daher $\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61$. Die nächste Genauigkeitsstufe wird ähnlich ausgerechnet und so fort.

Nach dem üblichen Lehrbuchverfahren stellen wir fest, daß $\sqrt{13}$ mit zwei Dezimalstellen ebenfalls $= 3{,}61$ ist.

Wie wird der Winkel nach dem Sinus gefunden?

Wir besitzen also die Möglichkeit, den Sinus jedes beliebigen Winkels zwischen $0°$ und $90°$ bis auf zwei Dezimalstellen genau zu berechnen. Damit entfällt die Notwendigkeit, zu der Tabelle zu greifen. Für angenäherte Rechnungen können wir selbst eine Tabelle zusammenstellen.

Die Lösung trigonometrischer Aufgaben setzt allerdings auch den umgekehrten Vorgang voraus, nämlich die Berechnung der Winkel nach gegebenem Sinus. Auch das ist nicht weiter schwierig. Angenommen, wir müssen einen Winkel x finden, dessen Sinus 0,38 ist. Da der Sinuswert unter 0,5 liegt, ist der gesuchte Winkel kleiner als $30°$. Andererseits ist dieser Winkel größer als $15°$, weil sin $15°$, wie wir wissen, 0,26 ist. Um diesen zwischen 15° und 30° liegenden Winkel zu berechnen, greifen wir zu dem beschriebenen Rechenverfahren und teilen die Differenz durch die Zunahme des Sinus für 1° zwischen 15° und 30°, nämlich 0,016.

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5, \quad \text{d. h.} \quad 7{,}5°$$

$$\text{Winkel } x = 15° + 7{,}5° = 22{,}5°$$

Der gesuchte Winkel muß also annähernd 22,5° sein.

Ein anderes Beispiel: Es ist ein Winkel x zu ermitteln, dessen Sinus 0,62 beträgt. Dieser Winkel muß zwischen 30° und 45° liegen. Hier muß die Differenz durch 0,014 geteilt werden.

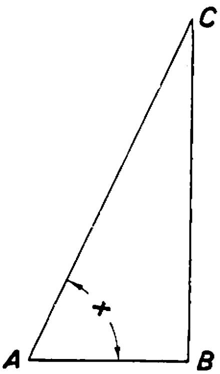


Abb. 88. Ein spitzer Winkel wird nach dem Sinus bestimmt.

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6, \quad \text{d. h.} \quad 8{,}6°$$

$$\text{Winkel } x = 30° + 8{,}6° = 38{,}6°$$

Und zum Schluß ein drittes Beispiel: Man stelle die Winkelgröße fest, wenn der Sinus eines Winkels 0,91 beträgt. Da der Sinuswert zwischen 0,71 und 1,0 liegt, ist der gesuchte Winkel im Bereich zwischen 45° und 90° zu finden.

In Abb. 88 bedeutet $BC = \sin CAB$, wenn $AC = 1$ ist. Kennen wir BC, dann läßt sich $\sin BCA$ leicht feststellen.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 1 - 0{,}91^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$$

$$AB = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42$$

Nun stellen wir die Größe des Winkels BCA, dessen Sinus gleich 0,42 ist, fest und ermitteln dann ohne weiteres den Winkel CAB. Da 0,42 zwischen 0,26 und 0,5 liegt, befindet sich der Winkel im Bereich von 15° bis 30°.

Er wird folgendermaßen bestimmt:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10{,}0, \quad \text{d. h.} \quad 10°$$

$$\text{Winkel } BCA = 15° + 10° = 25°$$

Der Winkel CAB ist somit $90° - 25° = 65°$.

Damit haben wir das gesamte Rüstzeug zur angenäherten Lösung trigonometrischer Aufgaben in der Hand, denn jetzt verstehen wir es, sowohl den Sinus nach dem Winkel als auch den Winkel nach seinem Sinus zu bestimmen, und zwar mit einer für unsere Wanderungen vollkommen ausreichenden Genauigkeit.

Ja, aber – so fragen wir uns – genügt überhaupt der Sinus allein? Brauchen wir nicht auch die übrigen trigonometrischen Funktionen – Cosinus, Tangens und wie sie sonst noch heißen?

Wir wollen jetzt an einigen Beispielen zeigen, daß wir bei unserer vereinfachten Trigonometrie mit dem Sinus allein vollkommen auskommen.

Der Sonnenstand

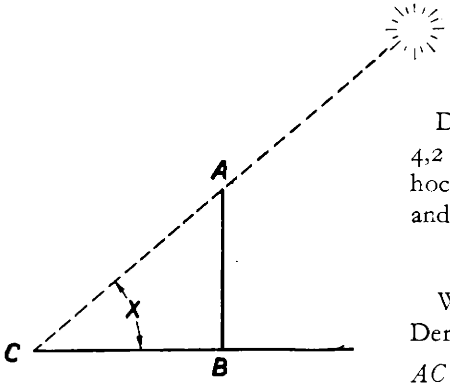


Abb. 89. Die Sonnenhöhe über dem Horizont.

Aufgabe

Der Schatten BC (Abb. 89) des senkrechten 4,2 m hohen Pfahls AB ist 6,5 m lang. Wie hoch steht die Sonne in diesem Augenblick, mit anderen Worten, wie groß ist der Winkel x?

Lösung

Wir sehen sehr schnell, daß $\sin x = \frac{AB}{AC}$ ist. Der Wert AC muß bestimmt werden.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74$$

Der gesuchte Sinus ist daher $\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$.

Nun ermitteln wir nach unserem bewährten Verfahren den entsprechenden Winkel; er beträgt 33°. Die Sonne steht also 33° über dem Horizont. Die Genauigkeit beträgt $\frac{1}{2}$°.

Die Entfernung bis zur Insel

Aufgabe

Wenn Sie mit einem Kompaß in der Hand am Flußufer entlangwandern und mitten im Strom plötzlich eine kleine Insel A entdecken (Abb. 90), so könnten Sie auf den Gedanken kommen, ihre Entfernung von einem Punkt B zu bestimmen. Sie bestimmen nach dem Kompaß den Winkel ABN; dieser entsteht in dem Schnittpunkt der Geraden AB mit der Nordsüdrichtung. Dann messen Sie die Gerade BC aus und bestimmen den durch diese Gerade und die Linie NS gebildeten Winkel NBC. Die Gerade BC wird im Punkt C auf die gleiche Art errechnet. Nehmen wir an, Sie haben folgende Ergebnisse erhalten:

Richtung AB weicht von der Nordsüdrichtung um 52° östlich,
Richtung BC weicht von der Nordsüdrichtung um 110° östlich,
Richtung CA weicht von der Nordsüdrichtung um 27° westlich ab.
BC ist 187 m lang.

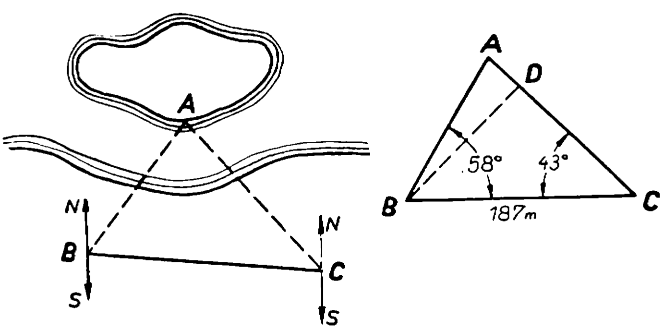


Abb. 90. Wie weit ist die Insel vom Ufer entfernt?

Lösung

In dem Dreieck ABC ist die Seite BC bekannt. Winkel ABC ist $110° - 52° = 58°$; Winkel $ACB = 180° - 110° - 27° = 43°$. Wir fällen in diesem Dreieck (Abb. 90 rechts) das Lot (Höhe) BD. Dann gilt: $\sin 43° = \frac{BD}{187}$. Berechnen wir $\sin 43°$ nach dem beschriebenen Verfahren, so erhalten wir 0,68. Es ist folglich:

$$BD = 187 \text{ m} \cdot 0{,}68 = 127 \text{ m}$$

Nun kennen wir die Kathete des Dreiecks ABD, Winkel $CAB = 180° - (58° + 43°) = 79°$ und Winkel ABD ist $90° - 79° = 11°$. Den $\sin 11°$ können wir berechnen. Er beträgt 0,19. Folglich ist $\frac{AD}{AB} = 0{,}19$. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz gilt anderseits:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

Wir ersetzen AD durch $0{,}19 AB$ und BD durch die Zahl 127 und erhalten dann:

$$AB^2 = 127^2 + (0{,}19\, AB)^2$$

Daraus folgt: $AB \approx 128$ m.

Die Entfernung bis zur Insel beträgt also rund 128 m.

Vermutlich wird es dem Leser bei Bedarf nicht schwerfallen, auch die Seite AC auszurechnen.

Wie breit ist der See?

Aufgabe

Bei der Bestimmung der Seebreite AB (Abb. 91) stellen Sie mit dem Kompaß fest, daß die Gerade AC um 21° westlich, die Gerade BC um 22° östlich abweicht. Die Länge von BC ist 68 m, die von AC ist 35 m.

Berechnen Sie auf Grund dieser Angaben die Breite des Wassers!

In dem Dreieck ABC ist der Winkel 43° sowie dessen Schenkel bekannt (68 m und 35 m). Wir fällen (Abb. 91) das Lot AD und erhalten dann $\sin 43° = \frac{AD}{AC}$. Unabhängig davon berechnen wir den Sinus von 43°, wobei wir 0,68 erhalten.

Daraus folgt $\frac{AD}{AC} = 0{,}68$ und $AD = 0{,}68 \cdot 35 \text{ m} = 24$ m. Nun ermitteln wir CD.

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{35^2 - 24^2} = \sqrt{649}$$
$$CD = 25{,}5 \text{ m}$$
$$BD = BC - CD = 68 \text{ m} - 25{,}5 \text{ m} = 42{,}5 \text{ m}$$

Aus dem Dreieck ABD folgt:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380$$
$$AB \approx 49 \text{ m}$$

Folglich ist die gesuchte Breite unseres Sees 49 m.

Müssen die beiden anderen Winkel des Dreiecks berechnet werden, gehen wir folgendermaßen vor:

$$\sin ABC = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0{,}49,$$

daraus folgt Winkel $ABC = 29°$.

Sie ermitteln den dritten Winkel BAC durch Subtraktion der beiden Winkel 29° und 43° von 180°. Der Winkel BAC ist 108°.

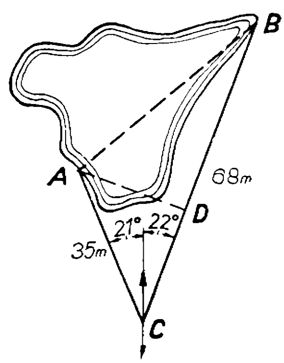


Abb. 91. Berechnung der Breite eines Sees.

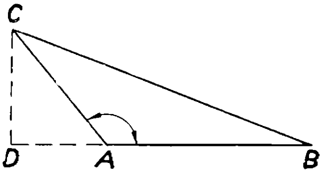


Abb. 92. Ein stumpfwinkliges Dreieck.

Nun kann es vorkommen, daß bei der Lösung der Dreiecksaufgabe (Bestimmung nach 2 Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel) der betreffende Winkel nicht spitz, sondern stumpf ist. Sind z. B. im Dreieck ABC (Abb. 92) der stumpfe Winkel BAC und die beiden Seiten AB und AC bekannt, dann geht die Rechnung so vor sich: Wir fällen die Senkrechte CD und bestimmen CD und AD des Dreiecks CDA. Ist $DA + AB$ bekannt, so ermitteln wir BC und dann $\sin ABC$ durch Berechnung des Verhältnisses $\frac{DC}{BC}$.

Eine dreieckige Parzelle

Aufgabe

Während unseres Ausfluges haben wir ein dreieckiges Stück Land mit Schritten ausgemessen und dabei festgestellt, daß die Seitenlängen 43, 60 und 54 Schritte betragen. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Lösung

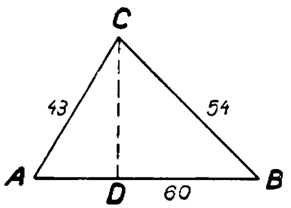


Abb. 93. Bestimmen Sie die Winkel dieses Dreiecks!

Wir haben es hier mit der schwierigsten aller Dreiecksaufgaben zu tun, nämlich der Winkelbestimmung nach den drei Seiten. Aber auch diese Aufgabe wird von uns gelöst, ohne andere trigonometrische Funktionen als den Sinus zu beanspruchen.

Wir fällen die Höhe (Abb. 93) CD auf die längste Seite des Dreiecks AB und erhalten:

$$CD^2 = 43 - AD^2; \qquad CD^2 = 54^2 - DB^2.$$

Dann ist

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DB^2,$$

daraus folgt

$$DB^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1067.$$

Andererseits ist

$$DB^2 - AD^2 = (DB + AD)(DB - AD) = 60\,(DB - AD).$$

Folglich gilt:

$$60\,(DB - AD) = 1067 \quad \text{und somit} \quad DB - AD = 17{,}8.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$DB - AD = 17{,}8 \quad \text{und} \quad DB + AD = 60$$

bestimmen wir

$$2\,DB = 77{,}8 \quad \text{und} \quad DB = 38{,}9.$$

Jetzt kann die Höhe leicht berechnet werden:

$$DC = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4$$

Wir berechnen daraus:

$$\sin BAC = \frac{CD}{AC} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87 \quad \text{und Winkel } DAC \approx 60^\circ$$

$$\sin ABC = \frac{CD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69 \quad \text{und Winkel } DBC \approx 44^\circ$$

Der dritte Winkel ist dann Winkel $ACB = 180^\circ - (60^\circ + 44^\circ) = 76^\circ$.

Wären wir in diesem Falle nach allen Regeln der »echten« Trigonometrie vorgegangen, dann hätten wir in Grad und Minuten ausgedrückte Winkel erhalten. Diese Minutenwerte wären indessen jedoch von vornherein ungenau, weil mit Schritten ausgemessene Dreieckseiten sowieso um 2 bis 3% abweichen. Man sollte sich bei dieser »genauen« Bestimmung nichts »vormachen« und die Minutenwerte mindestens auf volle Grade abrunden. Wir hätten dann nämlich das gleiche Ergebnis erhalten wie hier mit unserem vereinfachten Verfahren. In diesem Falle also haben wir die Zweckmäßigkeit unserer »Reisetrigonometrie« bewiesen.

Winkelbestimmung ohne jede Messung

Für die Winkelbestimmung im Gelände brauchen wir einen Kompaß; manchmal können wir uns auch mit unseren Fingern oder einer Streichholzschachtel zufrieden geben. Es kann aber hier und dort der Fall eintreten, daß wir einen auf der Karte, auf einem Blatt usw. eingetragenen Winkel nachmessen sollen.

Haben wir einen Winkelmesser zur Verfügung, so ist es freilich nicht schwierig. Was aber, wenn so ein Ding fehlt? Wir verlieren auch dabei nicht die Ruhe und lösen die folgende Aufgabe:

Auf Abb. 94 ist ein Winkel AOB (kleiner als 180°) dargestellt. Bestimme seine Größe ohne Messungen!

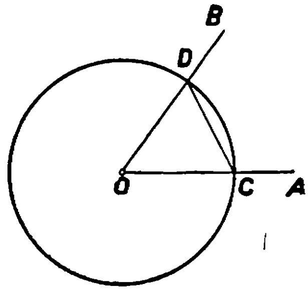


Abb. 94. Wie bestimmt man die Größe des abgebildeten Winkels AOB *nur mit Hilfe des Zirkels?*

Lösung

Man könnte z. B. ein Lot aus einem beliebigen Punkt der Seite BO auf die Seite AO fällen. In dem so konstruierten Dreieck bestimmt man Katheten und Hypotenuse, dann den Sinus des Winkels und schließlich den Winkel. Diese Lösung würde jedoch der eingangs gestellten harten Bedingung – keine Messungen ausführen! – nicht gerecht werden.

Wir greifen zu der von S. Rupeika aus Kaunas im Jahre 1946 vorgeschlagenen Lösung.

Man betrachtet die Spitze des Dreiecks O als Mittelpunkt eines Kreises und zeichnet mit dem Zirkel (mit beliebiger Öffnung) den Kreis. Die Schnittpunkte C und D des Kreises mit den Winkelseiten werden miteinander verbunden. Nun tragen wir, beginnend mit dem Punkt C auf dem Kreisumfang, mit Hilfe des Zirkels die Sehne CD so oft nacheinander in der gleichen Richtung ab, bis die Zirkelspitze wieder den Ausgangspunkt C trifft. Wir zählen, wieviel volle Kreise und wieviel Sehnenlängen zurückgelegt werden. Angenommen, daß wir den Kreis n-mal zurückgelegt und s-mal die Sehne CD aufgetragen haben. Der gesuchte Winkel ist dann

$$\text{Winkel } AOB = \frac{360^\circ \cdot n}{s}.$$

Wir wollen das prüfen.

Der betreffende Winkel sei x°. Tragen wir auf dem Kreisumfang die Sehne CD s-mal ab, so haben wir auch den Winkel von x° gewissermaßen ver-s-facht. Aber da der Kreis gleichzeitig n-mal zurückgelegt wurde, so beträgt der Winkel $360^\circ \cdot n$, also $x^\circ \cdot s = 360^\circ \cdot n$.

Daraus folgt $$x^\circ = \frac{360^\circ \cdot n}{s}.$$

Für den auf Abb. 94 dargestellten Winkel ist $n = 3$, $s = 20$; (prüfen Sie die Richtigkeit nach!); folglich ist der Winkel $AOB = 54^\circ$.

Fehlt ein Zirkel, dann kann man den Kreis auch mit Hilfe einer Stecknadel und eines Stücks Papier ziehen. Auch die Sehne wird mit dem gleichen Papierstreifen aufgetragen.

Bestimmen Sie nach dem beschriebenen Verfahren die Winkel des Dreiecks der Abb. 93.

SECHSTES KAPITEL

Wo Erde und Himmel sich treffen

Die Sichtweite

In der Steppe oder auf freiem Felde betrachten Sie sich selbst im Mittelpunkt eines Kreises, durch den die Ihrem Auge sichtbare Erdoberfläche begrenzt wird. Diese scheinbare Trennungslinie zwischen Erde und Himmelsgewölbe bleibt unerreicht; wenn Sie sich ihr nähern, rückt sie von Ihnen fort. Mag sie unerreichbar sein, sie ist dennoch eine Realität. Es ist keine optische Täuschung und auch kein Trugbild in der Wüste. Es gibt für jeden Beobachtungsort eine bestimmte Grenze der von diesem Ort überschaubaren Erdoberfläche. Diese Grenze kann ziemlich einfach berechnet werden.

Damit wir die Beziehungen kennenlernen, die mit der Sichtweite zusammenhängen, betrachten wir einmal die Abb. 95, die einen Teil des Erdballes darstellt. Das Auge B des Beobachters befindet sich in der Höhe AB über dem Erdboden. Wie weit kann der Beobachter über die Ebene sehen? Offenbar doch nur bis zu den Punkten M und N, wo der Sehstrahl die Erdoberfläche trifft; denn die Erdoberfläche jenseits der Punkte liegt unter dem Sehstrahl. Diese Punkte M, N sowie alle weiteren auf dem Kreisumfang liegenden Punkte bilden die Grenze des für den Beobachter sichtbaren Teils der Erdoberfläche, d. h., sie bilden den Horizont. Der Beobachter gewinnt den Eindruck, als stehe dort das Himmelsgewölbe auf der Erdoberfläche, weil er in diesen Punkten den Himmel und die Erde zugleich betrachtet.

Vielleicht sind Sie der Meinung, daß die Abb. 95 die Wirklichkeit falsch wiedergibt und sich doch der Rand der sichtbaren Erdoberfläche immer in Augenhöhe befindet, während der Kreis auf der Zeichnung tiefer als der Beobachter liegt. In der

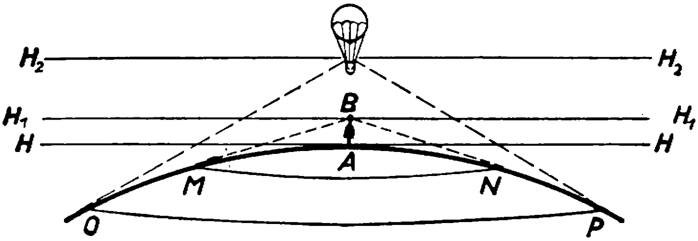


Abb. 95. Die Sichtweite.

Tat, wir empfinden es, als liege der Erdrand mit unserem Auge in gleicher Höhe und als steige er, sobald wir höher klettern. Das ist jedoch eine Täuschung und durch die geringe Krümmung der Erdoberfläche zu erklären. Tatsächlich ist der durch die beiden Geraden BN und BM mit der Geraden BH_1 gebildete Winkel (die sogenannte Kimmtiefe) sehr klein; er läßt sich ohne Meßgerät nicht bestimmen.

Im Zusammenhang damit ist eine weitere bemerkenswerte Tatsache zu erwähnen. Wir sagten soeben, daß die Linie des Horizonts scheinbar in Augenhöhe bleibt, wenn der Beobachter auch im Flugzeug höher steigt. Es hat also den Anschein, als steige der Horizont mit uns. Befindet sich der Beobachter in größeren Höhen, dann scheint es, als liege der Boden unmittelbar unter dem Flugzeug tiefer als der Rand des Gesichtskreises; die Erde macht den Eindruck eines abgeplatteten Hohlgefäßes.

Edgar Allan Poe hat diese Erscheinung in seinem Werk »Hans Pfahls Abenteuer« ganz vortrefflich geschildert. Die Hauptperson des Romans, ein Ballonfahrer, erzählt folgendes: »Am meisten wunderte ich mich über die Tatsache, daß die Erdoberfläche hohl erschien. Als ich stieg, hatte ich mit Sicherheit erwartet, daß die Erde gewölbt sein würde; erst durch Überlegung kam ich der Sache auf den Grund. Das vom Freiballon auf die Erde gefällte Lot wäre die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, das die Gerade zwischen dem Fußpunkt des Lotes und dem Horizont zur Grundlinie und die Luftlinie zwischen dem Horizont und meinem Ballon zur Hypotenuse hätte. Verglichen mit meinem Gesichtsfeld war die Höhe, in der ich schwebte, jedoch winzig klein. Grundlinie und Hypotenuse des gedachten rechtwinkligen Dreiecks waren, mit anderen Worten, so groß im Verhältnis zu der lotrechten Kathete, daß die erwähnten Geraden nahezu als parallel betrachtet werden konnten. Daher scheint jeder unmittelbar unter dem Luftfahrer befindliche Punkt unter dem Horizont zu liegen. Daher entsteht der Eindruck des hohlen Gefäßes. Der Eindruck bleibt, bis die Höhe so groß wird, daß der Eindruck der Parallelität von Grundlinie des Dreiecks und Hypotenuse aufhört.«

Diese Erklärung wird durch folgendes Beispiel ergänzt:

Stellen Sie sich einmal eine gerade Reihe von Telegrafenmasten vor (Abb. 96). Wenn Sie in Höhe der Mastfußpunkte stehen, sieht die Reihe so aus wie auf Bild 2. Für einen Menschen in Höhe der Mastspitzen dagegen sieht es so aus wie Bild 3, d. h., die Erde scheint sich nach dem Horizont hin zu heben.

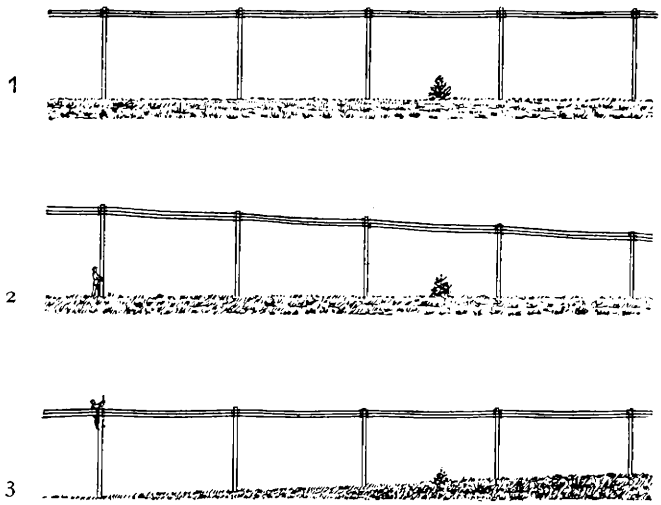


Abb. 96. Eine Reihe von Telegrafenstangen wird je nach dem Stand des Beobachters verschieden gesehen.

Das Schiff am Horizont

Beobachten wir vom Meeresufer ein am Horizont* auftauchendes Schiff, so scheint uns, als sähen wir das Schiff nicht in jenem Punkt, in dem es sich tatsächlich befindet, sondern viel näher, nämlich im Punkt *B* (Abb. 97), dort, wo unsere Sehlinie den Horizont berührt. Beobachtet man mit bloßem Auge, dann ist es sehr schwer, den Eindruck loszuwerden, daß sich das Schiff doch nicht in *B*, sondern weit hinter dem Horizont befindet. Beachten Sie die Ausführungen über die Wirkung, die ein zwischen Auge und Objekt liegender Hügel auf die Beurteilung der Entfernung ausübt, von der im 4. Kapitel die Rede war.

Im Fernrohr wird diese unterschiedliche Entfernung eines Schiffes viel deutlicher wahrgenommen. Das Fernrohr zeigt uns nahe und ferne Gegenstände nicht mit der gleichen Klarheit. Ein auf ferne Objekte eingestelltes Rohr zeigt uns in der Nähe befindliche Gegenstände unscharf. Stellt man dagegen ein Fernrohr auf nahe Objekte scharf ein, dann erscheint die Ferne wie in einem Dunstschleier. Richten wir daher ein Fernrohr (mit guter Vergrößerung) auf den Meereshorizont und stellen es so ein, daß die Wasseroberfläche klar erscheint, dann erblicken wir das Schiff

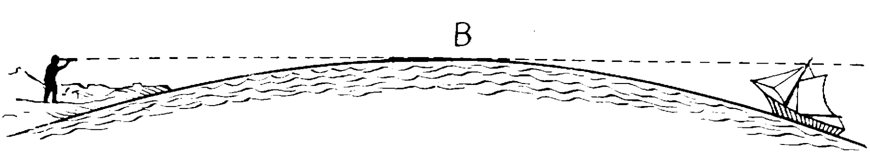


Abb. 97. Ein Schiff unter dem Horizont.

* Der Meereshorizont wird auch Kimm genannt.

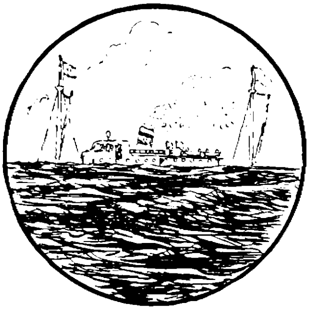


Abb. 98. Ein durch ein Fernrohr beobachtetes Schiff . . .

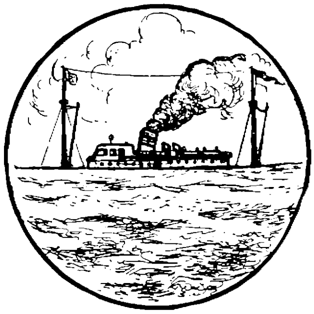


Abb. 99. . . . wird durch den Horizont teilweise verdeckt.

unscharf, woraus wir auf seine recht erhebliche Entfernung schließen können (Abb. 98).

Wir können auch umgekehrt verfahren und unser Rohr auf das ferne, erst zur Hälfte über dem Horizont hinausragende Schiff scharf einstellen. Wir bemerken, daß die bis dahin klare Wasserfläche ihre Klarheit verliert und wie in leichtem Nebel gehüllt erscheint (Abb. 99).

Die Entfernung des Horizonts

Wie weit ist es nun vom Beobachter bis zu der Linie des Horizonts? Wie groß ist mit anderen Worten der Halbmesser des Kreises, in dessen Mittelpunkt wir auf der Ebene stehen? Wie rechnet man die Entfernung des Erdrandes aus, wenn die Höhe des eigenen Standortes bekannt ist?

Die Aufgabe besteht in der Berechnung der Länge der Strecke CN (Abb. 100). Es ist die vom Auge des Beobachters zur Erdoberfläche gezogene Tangente. Aus der Geometrie kennen wir den Tangentensatz, der sagt, daß das Quadrat der Tangente CN gleich ist dem Produkt aus dem äußeren Abschnitt h der Sekante und ihrer Gesamtlänge $h + 2r$, wobei r der Erdhalbmesser ist. Da die Augenhöhe des Beobachters über dem Erdboden im Verhältnis zum Erddurchmesser ($2r$) äußerst gering ist (die größte Steigfähigkeit eines Flugzeuges ist etwa $\frac{1}{1000}$ Erddurchmesser), so kann $2r + h \approx 2r$ angenommen werden. Wir erhalten dadurch eine ziemlich einfache Formel: $CN^2 = 2r \cdot h$

Die Entfernung des Horizonts kann also nach folgender elementarer Formel berechnet werden:

$$CN = \sqrt{2rh}$$

$$\text{Sichtweite} = \sqrt{2rh}$$

worin r der Erdhalbmesser (rd. 6400 km)* und h die Augenhöhe des Beobachters über dem Erdboden ist.

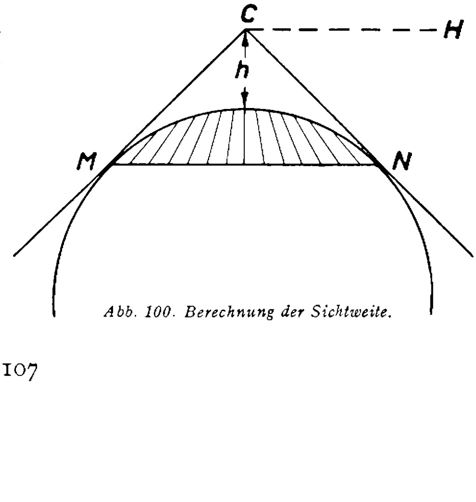


Abb. 100. Berechnung der Sichtweite.

* Genauerer Wert = 6371 km.

Da $\sqrt{6400} = 80$, so nimmt die Formel folgende Gestalt an:

$$\text{Sichtweite} = 80 \sqrt{2h} = 113 \sqrt{h}$$

h ist unbedingt in Kilometern anzugeben!

Das ist eine vereinfachte, rein geometrische Rechnung. Berücksichtigen wir dabei bestimmte physikalische Faktoren, durch die die Größe unseres Gesichtsfeldes beeinflußt wird, dann sei hier vor allem an die atmosphärische Strahlenbrechung (Refraktion) gedacht. Durch die Krümmung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre kann die »Fernsicht« um rund $\frac{1}{15}$ oder 6% der ausgerechneten Entfernung größer werden. Dieser Beiwert von 6% ist ein Mittelwert. Es gibt eine ganze Anzahl von Ursachen, die die Sichtweite verkleinern oder vergrößern. Einige dieser Faktoren sind nachstehend aufgeführt:

Die Sichtweite

wird geringer:	*wird größer:*
bei hohem Luftdruck	*bei tieferem Luftdruck*
in Erdnähe	*mit zunehmender Höhe*
bei kaltem Wetter	*bei warmem Wetter*
morgens und abends	*am Tage*
bei feuchtem Wetter	*bei trockenem Wetter*
über dem Meer	*über dem Festland*

Aufgabe

Wie weit kann ein Mensch in einer Ebene schauen?

Lösung

Wir nehmen an, daß sich das Auge eines Erwachsenen 1,6 m über dem Erdboden befindet (0,0016 km); dann gilt:

$$\text{Sichtweite} = 113 \sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \text{ km}$$

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß durch die Wirkung der Lufthülle der Strahlengang gekrümmt wird; dadurch wird die Sicht durchschnittlich um rund 6% weiter als dies der Formel entspricht. Damit diese Korrektur berücksichtigt wird, müssen wir den errechneten Wert mit 1,06 multiplizieren. Wir erhalten

$$4{,}52 \text{ km} \cdot 1{,}06 \approx 4{,}8 \text{ km}.$$

Folglich sieht ein mittelgroßer Mann in der Ebene höchstens 4,8 km weit. Der Durchmesser des von ihm übersehbaren Kreises beträgt also nur 9,6 km und die Fläche ist 72 km². Das ist viel weniger, als allgemein angenommen wird.

Aufgabe

Wie weit sieht ein in einem Ruderboot sitzender Mensch die Meeresfläche?

Lösung

Nimmt man die Augenhöhe eines im Boot Sitzenden mit 1 m an (0,001 km), so beträgt die

$$\text{Sichtweite} = 113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ km}.$$

Berücksichtigt man die jeweilige mittlere Refraktion der Atmosphäre, dann erhält man 3,8 km. Noch weiter entfernte Gegenstände sind nur teilweise sichtbar; ihre Grundflächen sind durch die Erdkrümmung verdeckt.

Mit abnehmender Augenhöhe wird das Gesichtsfeld enger; in einer Höhe von 0,5 m beträgt es nur 2,5 km. Umgekehrt nimmt das Gesichtsfeld zu, wenn man von einem erhöhten Standort, etwa einem Masttop, beobachtet. Aus 4 m Höhe vergrößert sich die Sicht bis auf 7 km.

Aufgabe

Wie weit breitete sich die Erde für die Reisenden aus, die sich in der Gondel des sowjetischen Stratosphärenballons »COAX-1« an der Grenze seiner Steigfähigkeit in 22 km Höhe befanden?

Lösung

In dieser Höhe beträgt die

$$\text{Sichtweite} = 113\sqrt{22} = 530 \text{ km}.$$

Unter Berücksichtigung der Strahlenbrechung steigt dieser Wert bis auf 580 km.

Aufgabe

Wie hoch muß ein Flieger steigen, damit er 50 km weit im Kreise schauen kann?

Lösung

Aus der Formel der Sichtweite leiten wir in diesem Falle für h folgende Gleichung ab:

$$\text{Sichtweite} = 50 \text{ km}$$

$$50 = \sqrt{2rh}$$

und daraus

$$h = \frac{50^2}{2r} = \frac{2500}{12800} \approx 0{,}2 \text{ km}.$$

Es genügt also eine Höhe von etwa 200 m.

Mit Rücksicht auf die Refraktion können wir 6% von 50 km abziehen und erhalten 47 km; daraus entwickeln wir

$$h = \frac{47^2}{2r} = \frac{2209}{12800} = 0{,}17 \text{ km} \quad \text{oder} \quad 170 \text{ m}.$$

Wir sehen also aus einer Höhe von 170 m 50 km weit.

Auf dem höchsten Punkt der Leninberge bei Moskau befindet sich das Gebäude der Staatlichen Lomonossow-Universität (Abb. 101). Es ist die größte Lehrstätte, das gewaltigste wissenschaftliche Zentrum der Welt. Die höchste Spitze des Hauptgebäudes türmt sich 200 m über dem Wasserspiegel des Moskwaflusses. Folglich blickt man aus dem oberen Stockwerk über ein Panorama von 50 km Halbmesser.

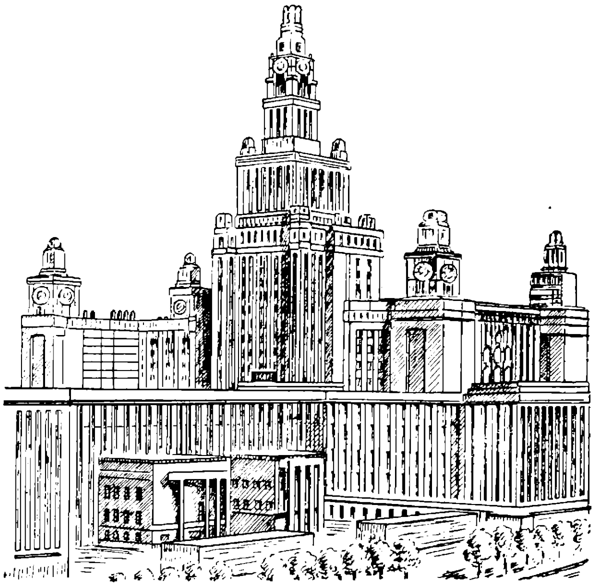


Abb. 101. Die Lomonossow-Universität in Moskau. (Nach dem Entwurf)

Der Turm nach Gogol

Aufgabe

Es ist doch interessant, wenn man weiß, was schneller zunimmt: Steighöhe oder Sichtweite? Oft begegnet man der Ansicht, daß sich die Sichtweite mit der Höhe des Standortes rasch ausdehnt. So dachte auch Gogol, als er in seiner Abhandlung »Über die Architektur unserer Zeit« folgendes schrieb:

»Riesenhafte, gewaltige Türme sind in einer Stadt unentbehrlich... Bei uns pflegt man sich mit einer Turmhöhe zu begnügen, die uns die Aussicht lediglich auf die Stadt selbst bietet, während es sich für eine Hauptstadt ziemt, daß man mindestens hundertfünfzig Werst weit ins Land schauen kann *. Um dies zu erreichen, dürfte eine Erhöhung des Baues um ein bis zwei Stockwerke genügen; das ganze Bild ändert sich. Der Umfang des Erdrandes nimmt mit der Vergrößerung der Höhe in ungemeiner Progression zu.«

Stimmt das?

Lösung

Wir brauchen nur einen Blick auf unsere Formel zu werfen.

$$\text{Sichtweite} = \sqrt{2rh}$$

Sofort wird uns die Unrichtigkeit der Behauptung klar, daß der Umfang des Erdrandes mit der Standorterhöhung sehr schnell zunimmt. Im Gegenteil – die Sichtweite wächst langsamer als die Steighöhe; sie ist nämlich der Quadratwurzel aus der Höhe proportional. Nimmt die Höhe des Beobachterstandpunktes auf das 100fache zu, dann rückt der Horizont nur um das 10fache in die Ferne; wächst die

* 1 Werst = 1067 m.

Steighöhe auf das 1000fache, so erweitert sich das Panorama nur auf das 31fache und so fort.

Die Behauptung »durch Erhöhung des Baues um ein bis zwei Stockwerke wird sich das ganze Bild ändern« ist falsch. Stockt man einen achtgeschossigen Bau um weitere zwei Stockwerke auf, dann nimmt die Sichtweite auf $\sqrt{\frac{10}{8}}$ zu, d. h. nur um etwa 10%. Eine derartig geringe Zunahme ist nicht sehr bedeutend.

Was die Idee eines Turmes anbelangt, von dessen Spitze man »mindestens 150 Werst weit ins Land schauen kann«, so ist sie völlig abwegig. Gogol ahnte nichts von der gewaltigen Höhe so eines Turmes!

Nimmt man 150 Werst gleich 160 km, dann ergibt sich für die Höhe des Turmes

$$h = \frac{160^2}{2r} = \frac{25\,600}{12\,800} = 2 \text{ km}.$$

Das ist die Höhe eines ganz stattlichen Berges. Das im Entwurf fertige, zur Zeit höchste Gebäude unserer Heimat wird das 32stöckige Hauptregierungsgebäude in Moskau sein. Der vergoldete Helm seines Turmes ragt 280 m über den Erdboden und dennoch ist er kaum ein Siebentel so hoch, wie der von Gogol projektierte »Aussichtsturm«.

Einen ähnlichen Fehler begeht auch Puschkin, wenn er seinen »Geizigen Ritter« von dem fernen Erdrand sprechen läßt, der sich dem Beschauer von dem Gipfel des »stolzen Hügels« eröffnet:

»Ein stolzer Berg erwuchs draus – und der Fürst
Vermocht' von dessen Gipfel froh zu schauen,
Das weite Tal, bedeckt von weißen Zelten,
Und auf dem fernen Meere Schiff um Schiff.«

Wie bescheiden dieser »stolze Hügel« war, haben wir ja ausgerechnet; sogar Attilas Riesenheer hätte nach dem beschriebenen Verfahren nur einen 4,5 m hohen Hügel aufschütten können. Jetzt können wir diese Rechnung zu Ende führen, und feststellen, wie weit ein Beobachter zu sehen vermag, der auf dem Hügel steht:

Das Auge des Beschauers ragt über Bodenhöhe 4,5 m + 1,5 m = 6 m. Die Sichtweite ist demnach

$$\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 0{,}006} = 8{,}8 \text{ km}.$$

Das ist nur 4 km mehr, als man ohne »Hügel« sehen kann.

Wo sich die Schienen treffen

Aufgabe

Sie haben selbstverständlich oft beobachtet, wie ein in die Ferne führender Schienenstrang immer schmaler zu werden scheint. Haben Sie aber jemals den Punkt gesehen, in dem sich beide Schienen treffen? Kann man diesen Punkt überhaupt sehen? Nun, Sie haben jetzt das Rüstzeug, um diese Frage zu beantworten.

Wir erinnern uns daran, daß für ein normalsichtiges Auge jeder Gegenstand in dem Augenblick zu einem Punkt zusammenschmilzt, wenn er in einem Winkel von 1′ sichtbar ist, oder anders ausgedrückt, wenn seine Entfernung 3400 Durchmesser erreicht. Die Breite unserer Spur beträgt 1,52 m. Folglich muß der Zwischenraum zwischen den Schienen in einer Entfernung von 1,52 m · 3400 = 5,2 km zu einem Punkt verschmelzen. Wären wir also in der Lage, das Gleis 5,2 km mit dem Auge zu verfolgen, dann könnten wir sehen, wie die beiden Schienen zu einem Punkt verschmelzen. Nun wissen wir aber, daß wir in der Ebene etwa 4,4 km weit sehen können. Ein normalsichtiger Mensch kann also den Verschmelzungspunkt der beiden Schienen nicht sehen, sofern er keinen erhöhten Standort bezieht. Er könnte diesen Punkt unter folgenden Voraussetzungen sehen:

1. Wenn seine Sehschärfe über der normalen liegt, so daß für ihn die Objekte bei einem Winkel unter 1′ zu einem Punkt verschmelzen,
2. wenn die Eisenbahn nicht waagerecht verläuft,
3. wenn das Auge des Beobachters über dem Erdboden höher ist als

$$h = \frac{5{,}2^2}{2r} = \frac{27}{12800} = 0{,}0021 \text{ km, d. h. } 2{,}1 \text{ m.}$$

Leuchtturmaufgaben

Aufgabe

Am Meeresstrand erhebt sich ein Leuchtturm, dessen Spitze 40 m über der Wasseroberfläche ragt. In welcher Entfernung wird der Leuchtturm für den »Mann im Mastkorb« sichtbar, wenn der Matrose sich in einer Höhe von 10 m über der Wasseroberfläche befindet?

Lösung

Aus der Abb. 102 sieht man, daß die Aufgabe auf die Berechnung der Länge einer Geraden AC zurückgeführt werden kann, die aus zwei Teilen – AB und BC – besteht.

Der Teil AB ist die Entfernung zwischen Leuchtturm und Kimm bei einer Höhe von 40 m; BC ist die Sichtweite des Matrosen aus der Höhe von 10 m. Die gesuchte Entfernung beträgt demnach

$$113\sqrt{0{,}04} + 113\sqrt{0{,}01} = 113\,(0{,}2 + 0{,}1) = 33{,}9 \text{ km.}$$

Aufgabe

Welcher Teil des Leuchtturmes wird in einer Entfernung von 30 km sichtbar?

Lösung

Die Abb. 102 erläutert die Rechnung. Man berechnet zuerst BC, zieht das Ergebnis von der Gesamtlänge AC, d. h. 30 km ab und hat dann die Entfernung AB. Mit

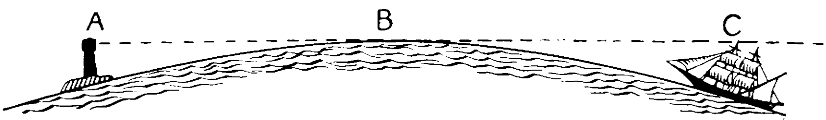


Abb. 102. Prinzipskizze zur Leuchtturmaufgabe.

Hilfe von AB berechnet man die Höhe am Leuchtturm, von der die Entfernung der Kimm gleich AB ist. Die Rechnung sieht folgendermaßen aus:

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3\ \text{km};$$
$$AB = AC - BC = 30\ \text{km} - 11{,}3\ \text{km} = 18{,}7\ \text{km};$$
$$h = \frac{18{,}7^2}{2r} = \frac{350}{12\,800} = 0{,}027\ \text{km}.$$

Folglich bleiben bei Beobachtungen aus 30 km Entfernung 27 m der Turmhöhe unsichtbar; man sieht nur 13 m.

Der Blitz

Aufgabe

1,5 km über Ihrem Kopfe zuckt ein Blitz. Wie weit ist der Blitz zu sehen?

Lösung

Wir berechnen die Sichtweite für 1,5 km Höhe und erhalten

$$113\sqrt{1{,}5} = 138\ \text{km}.$$

Befinden wir uns in einer ebenen Landschaft, dann könnte ein auf dem Erdboden stehender Mensch den Blitz 138 km weit gerade noch sehen (berücksichtigt man die Refraktionskorrektur von 6%, so beträgt die Entfernung sogar 146 km). Von einem 146 km entfernten Punkt aus gesehen, zuckt der Blitz unmittelbar am Horizont auf; da aber der Schall nicht so weit hörbar ist, so sehen wir den Blitz als Wetterleuchten, d. h. als »donnerlosen Blitz«.

Das Segelboot

Aufgabe

Sie stehen unmittelbar am Seeufer und beobachten ein Segelboot, das sich von Ihnen entfernt. Sie wissen, daß die Mastspitze 6 m über dem Wasserspiegel liegt. In welcher Entfernung beginnt das Segelboot scheinbar ins Wasser zu sacken und in welcher Entfernung verschwindet es endgültig?

Lösung

Das Boot beginnt im Punkt B (Abb. 97) zu versinken – es ist die Sichtweite für einen mittelgroßen Mann, d. h., wie wir schon ausrechneten, 4,5 km. Das Boot verschwindet unter dem Horizont in einem Punkt, dessen Entfernung von B

$$113\sqrt{0{,}006} = 8{,}7\ \text{km} \quad \text{ist.}$$

Also verschwindet das Boot in einer Entfernung von

$$AC = 4{,}5\ \text{km} + 8{,}7\ \text{km} = 13{,}2\ \text{km}$$

vom Ufer.

Die Sicht auf dem Mond

Aufgabe

Bisher betrafen sämtliche Rechnungen unseren Erdball. Wie würden sich nun die Sichtverhältnisse ändern, wenn wir die Beobachtungen auf einem anderen Himmelskörper machen könnten, etwa in einer Mondlandschaft?

Lösung

Die Lösung erfolgt natürlich nach der gleichen Grundformel. Die Sichtweite beträgt $\sqrt{2rh}$, an Stelle von $2r$ ist jedoch nicht der Erd-, sondern der Monddurchmesser zu setzen. Dieser beträgt 3500 km, bei einer Augenhöhe über dem Mondboden von 1,5 m erhalten wir:

$$\text{Sichtweite} = \sqrt{3500 \cdot 0{,}0015} = 2{,}3 \text{ km}$$

In einer Mondebene beträgt die Fernsicht also für einen 1,50 m großen Menschen nur $2\frac{1}{3}$ km.

Im Mondkrater

Aufgabe

Beobachtet man den Mond durch ein Fernrohr (es genügt ein schwaches Rohr), so sieht man eine große Zahl von Ringgebirgen, – eine Formation, die auf der Erde nicht vorkommt.

Eines der größten Ringgebirge, der sogenannte Kopernikuskrater, besitzt einen äußeren Durchmesser von 124 km und einen inneren von 90 km. Die höchsten Erhebungen des Ringwalls ragen rund 1500 m über dem Boden des Kraterinnern empor. Gesetzt den Fall, sie ständen in der Mitte des Binnentals, d. h. im Kratermittelpunkt; könnten Sie von dort den Ringwall sehen?

Lösung

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Sichtweite von der Höhe des Ringwallkamms, d. h. 1,5 km, berechnen. Für den Mond beträgt sie

$$\sqrt{3500 \cdot 1{,}5} = 23 \text{ km}.$$

Dazu kommt noch die Sichtweite für einen mittelgroßen Menschen. Wir erhalten dann als Entfernung, in der ein Mondkraterwall unter dem Horizont versinkt

$$23 \text{ km} + 2{,}3 \text{ km} = 25{,}3 \text{ km}.$$

Da aber der Mittelpunkt des Talbodens 45 km von dem Innenrand entfernt ist, können wir diesen Wall vom Mittelpunkt aus nicht sehen, es sei denn, wir erklettern den Abhang des Zentralgebirges, das am Kraterboden 600 m hoch emporragt.

Auf dem Jupiter

Aufgabe

Wie weit liegt der Horizont auf dem Jupiter, dessen Durchmesser den Erddurchmesser um das 11fache übertrifft?

Lösung

Sofern dieser Planet eine feste Rinde mit ebener Oberfläche besitzt, könnte ein Mensch, der mitten in der Jupiterebene steht

$$\sqrt{11 \cdot 12800 \cdot 0{,}0016} = 14{,}4 \text{ km weit sehen.}$$

Zur Selbstübung

1. Berechne die Sichtweite für das Sehrohr eines U-Bootes, das 30 cm über die Wasserfläche einer ruhigen See ragt.

2. Wie hoch muß sich ein Flugzeug über dem Ladogasee erheben, damit der Flieger gleichzeitig die beiden 210 km von einander entfernten Ufer sehen kann?

3. Wie hoch muß ein Flugzeug zwischen Moskau und Leningrad steigen, damit der Pilot gleichzeitig beide Städte sehen kann? Die Entfernung zwischen den beiden Städten beträgt 640 km.

SIEBENTES KAPITEL

Geometrie auf den Spuren Robinsons

(Einige Seiten aus Jules Vernes Werken)

Geometrie des Sternenhimmels

Motto: Ein Abgrund voller Sterne tat sich auf und bodenlos erscheint er; zahllos sind die Sterne...
(Lomonossow)

Es gab eine Zeit, da sich der Verfasser des vorliegenden Buches für eine nicht ganz alltägliche Zukunft vorbereitete: nämlich für den Beruf eines Schiffbrüchigen. Kurz gesagt, ich träumte davon, ein zweiter Robinson zu werden. Hätte sich mein Plan verwirklichen lassen, so wäre vermutlich das Buch interessanter, oder es wäre überhaupt nicht geschrieben worden. Ein Robinson zu werden, war mir indessen nicht vergönnt – nun, heute bedauere ich es auch nicht. Aber in meiner Jugend glaubte ich ganz fest an meinen Robinsonberuf und bereitete mich mit entsprechendem Eifer darauf vor. Es war ja klar – jeder auch noch so mittelmäßige Robinson muß eine Menge wissen und vielerlei Fertigkeiten beherrschen, die Leute in anderen Berufen gut entbehren können.

Was soll ein Mensch, der durch Schiffbruch auf eine einsame, unbewohnte Insel gespült worden ist, zuerst unternehmen? Nun, das ist doch klar – als erstes muß er die geographische Länge und Breite seines unfreiwilligen Aufenthaltsortes bestimmen! Die meisten alten und neuen Robinsonaden behandeln diesen Punkt jedoch leider sehr knapp. In der vollständigen Ausgabe des echten »Robinson Crusoe« finden Sie darüber nur eine einzige Zeile: »... In jenen Breiten, in denen meine Insel gelegen ist, (d. h. auf Grund meiner Berechnungen 9°22′ nördlicher Breite)...«

Diese Kürze empfand ich widerlich und brachte mich damals zur Verzweiflung, als ich alle für meine eingebildete Zukunft erforderlichen Kenntnisse sammelte. Ich war nahe daran, den Beruf des einzigen Bewohners der einsamen Insel an den Nagel zu hängen, als das Geheimnis durch den Jules Verneschen Roman »Die geheimnisvolle Insel« dennoch gelüftet wurde.

Ich fühle mich keineswegs berufen, meine Leser zu Robinsons auszubilden, halte es jedoch für zweckmäßig, einige der einfachsten Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite etwas näher zu erläutern. Diese Kenntnisse kann man auch gebrauchen, ohne Bewohner einsamer exotischer Inseln zu sein. Es gibt auch in unserer Heimat genügend Orte, die auf keiner Karte verzeichnet sind. Außerdem haben wir nicht immer eine Landkarte zur Verfügung, so daß so mancher von meinen Lesern das Problem der geographischen Breitenbestimmung zu lösen haben wird. Allerdings können wir nicht Lermontows Behauptung zustimmen, daß »sogar die Stadt Tambow nicht auf jeder Generalstabskarte zu finden ist«. Dennoch gibt es noch eine Menge kleinerer Ortschaften, Dörfer und Kolchosen, die bis auf den heutigen Tag auf den allgemein gebräuchlichen Landkarten nicht zu finden sind. Wir brauchen also durchaus nicht die Rolle eines Robinsons zu spielen, um den geographischen Ort unseres Heimatdorfes zu bestimmen.

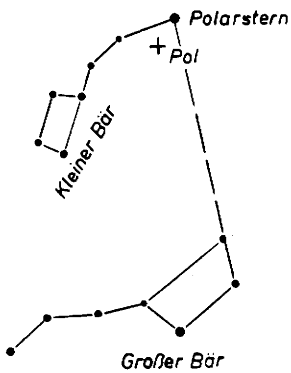


Abb. 103. Lage des Polarsterns.

Im Grunde ist diese Aufgabe keineswegs schwierig.

Wenn Sie in einer sternklaren Nacht den Himmel beobachten, dann bemerken Sie, wie die Sterne langsam auf dem Himmelsgewölbe geneigte Kreise beschreiben; es scheint, als drehe sich die ganze Himmelskuppel ständig um eine unsichtbare schräg verlaufende Achse. In Wirklichkeit kreisen Sie natürlich selbst mit der Erde um ihre Achse, und zwar in umgekehrter Richtung. Der einzige Punkt unseres Sternhimmels, der stillzustehen scheint, ist jener Punkt, den die Verlängerung der Erdachse am Himmel trifft. Es ist der sogenannte »Himmelsnordpol« und liegt am Ende der Wagendeichsel bzw. des Schwanzes im Sternbild des Kleinen Bären. Dieser letzte Stern heißt Polarstern. Wenn wir ihn an unserem nördlichen Himmel entdecken, stellen wir gleichzeitig die Lage des Himmelsnordpols fest.

Der Polarstern ist leicht zu finden. Man geht von dem allen bekannten Großen Bären aus. Verbinden Sie die beiden äußeren Sterne dieses Sternbildes miteinander (Abb. 103). Die fünffache Verlängerung dieser Strecke trifft dann den Polarstern.

Dies ist ein Punkt am Himmel, den wir zur Berechnung der geographischen Ortsbreite brauchen. Ein anderer ebenfalls wichtiger Punkt ist der senkrecht über Ihrem Haupt befindliche Himmelspunkt. Er heißt bekanntlich »Zenit«. Der Winkel (in Grad) am Himmelsbogen zwischen dem Zenit Ihres Standortes und dem Polarstern ist gleich der Entfernung Ihres Standorts (ebenfalls in Graden) vom Erdnordpol. Beträgt z. B. die Entfernung zwischen Ihrem Zenit und dem Polarstern 30°, dann sind Sie auch 30° von dem Erdpol bzw. 60° vom Äquator entfernt. Mit anderen Worten, Sie befinden sich auf dem 60. Breitengrad.

Um die geographische Ortsbreite zu bestimmen, genügt es, den »Zenitabstand« in Graden und Minuten vom Polarstern zu messen (Abb. 104). Dieser wird von 90° abgezogen – und wir haben die geographische Breite damit bestimmt. Praktisch kann man auch anders vorgehen. Da der Winkel zwischen Zenit und Horizont 90° beträgt, kann sofort der Winkel zwischen dem Horizont und dem Polarstern bestimmt werden und wir erhalten so die »Höhe« des Polarsterns über dem Horizont.

Die geographische Breite eines Ortes ist daher der Höhe des Polarsterns über dem Horizont dieses Ortes gleich.

Jetzt begreifen Sie, wie die Breite bestimmt werden muß. Sie warten auf eine sternklare Nacht, suchen am Himmel den Polarstern und messen den Winkel über dem Horizont. Sie erhalten unmittelbar die gesuchte Ortsbreite. Wollen Sie ganz genau vorgehen, dann müssen Sie berücksichtigen, daß die Lage des Polarsterns mit dem Himmelspol nicht genau übereinstimmt, sondern um 70′ von ihm abweicht. Der Polarstern steht daher tatsächlich auch nicht still, sondern beschreibt kleine Kreise um den Himmelspol, so daß er bald 70′ oberhalb, bald 70′ unterhalb des Pols ist. Wenn Sie die Lage des Polarsterns in der höchsten und tiefsten Stellung (oder wie der Astronom sagt »im Augenblick der oberen und unteren Kulmination«) bestimmt haben, nehmen Sie den Mittelwert der beiden Messungen. Das ist dann die tatsächliche Polhöhe und damit auch die gesuchte Ortsbreite.

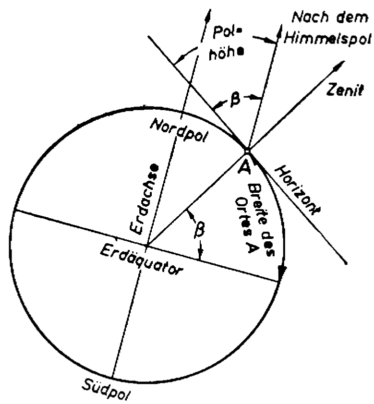


Abb. 104. Mit Hilfe des Polarsterns wird die geographische Breite des Ortes bestimmt.

Wenn sich aber die Sache so verhält, dann brauchen Sie doch nicht unbedingt zum Polarstern zu greifen. Sie können jeden beliebigen nicht untergehenden Stern dazu benutzen und den Mittelwert einsetzen. Das Ergebnis ist immer die Polhöhe über dem Horizont, d. h. die Ortsbreite. Den höchsten und tiefsten Stand des Sterns zu beobachten ist aber etwas schwierig. Auch lassen sich beide im Laufe der Nacht nicht immer feststellen.

Darum ist es in der ersten Zeit zweckmäßig, bei den angenäherten Rechnungen mit dem Polarstern zu arbeiten. Der geringe Polabstand wird dabei von uns einfach vernachlässigt.

Bis jetzt nahmen wir an, wir befänden uns auf der nördlichen Halbkugel. Wie müßten wir verfahren, wenn wir in der südlichen Hemisphäre weilten?

Nun, man geht in der gleichen Weise vor, mit dem Unterschied, daß wir nicht den Nord-, sondern den Südpol bestimmen müssen. Leider gibt es in der Nähe des Himmelssüdpols keinen hellen Stern in der Art des Polarsterns.

Das berühmte Gestirn »Kreuz des Südens« leuchtet ziemlich weit vom Südpol, so daß bei der Bestimmung der geographischen Breite mit Hilfe dieses Sterns der Mittelwert beider Messungen, nämlich des höchsten und tiefsten Standes zu nehmen ist.

Für die Bestimmung der geographischen Breite ihrer »Geheimnisvollen Insel« benutzten die Hauptpersonen in Jules Vernes Roman gerade dieses schöne Sternbild.

Es ist nützlich, einmal die Stelle des Romans nachzulesen, die das Verfahren beschreibt. Gleichzeitig lernen wir, wie die neuen Robinsons ihre Aufgabe ohne die richtigen Winkelmeßinstrumente gelöst haben.

»Es war acht Uhr abends. Der Mond war noch nicht aufgegangen, aber der Horizont hatte bereits jene blasse Silbertönung angenommen, die dem Mondaufgang vorangeht. Im Zenit leuchteten die Sternbilder des südlichen Himmels; darunter auch das »Kreuz des Südens«. Schweigend betrachtete Ingenieur Smith das Sternbild.

›Herbert‹, fragte er nach einigem Nachdenken, ›wir haben heute den 15. April, nicht wahr?‹

›Ja‹, antwortete der Jüngling.

›Wenn ich mich nicht irre, ist morgen einer jener Tage im Jahr, da die wahre Zeit der mittleren Ortszeit gleicht, denn morgen schneidet die Sonne den Meridian genau am Mittag *. Wenn morgen klares Wetter herrscht, werde ich versuchen, die geographische Länge ungefähr zu bestimmen.‹

›Ohne Meßgeräte?‹

›Ja. Der Abend ist klar; ich werde daher heute schon die Breite betimmen, indem ich die Höhe der Sterne im Sternbild des Kreuzes, oder mit anderen Worten, die Höhe des Südpols über dem Horizont messen werde. Morgen Mittag bestimme ich auch die geographische Länge.‹

Wäre der Ingenieur im Besitz eines Sextanten gewesen – eines Gerätes zur genauen Winkelmessung von Objekten mit Hilfe der Strahlenreflexion –, dann wäre die Aufgabe nicht schwer. Hätte er abends die Polhöhe und am nächsten Mittag den Augenblick des Sonnendurchganges durch den Meridian bestimmt, dann hätte er die geographischen Koordinaten der Insel ermittelt. Er hatte jedoch keinen Sextanten zur Hand, so daß er diesen durch ein anderes Gerät ersetzen mußte.

Der Ingenieur betrat die Höhle. Im Lichte des Lagerfeuers schnitt er zwei rechtwinklige Leisten zurecht und band sie wie einen Zirkel zusammen, so daß er die Schenkel auseinander und wieder zusammenklappen konnte. An Stelle eines Scharniers benutzte er einen festen Akaziendorn, den er am Eingang der Höhle im Reisig fand.

Als er das Gerät fertig gebaut hatte, kehrte er ans Ufer zurück. Er wollte die Polhöhe über dem sich scharf abzeichnenden Horizont bestimmen. Der Meeresspiegel bot hierfür die beste Gelegenheit.

Zu diesem Zweck begab er sich auf den »Platz zur fernen Aussicht«. Dabei mußte er auch die Höhe des Ortes über dem Meeresspiegel berücksichtigen. Diese Messung sollte am nächsten Tage mit Hilfe der Elementartrigonometrie ausgeführt werden.

Scharf zeichnete sich der Horizont in den ersten Strahlen des aufgehenden Mondes ab, so daß die Voraussetzungen für die Messung sehr günstig waren. Das Sternbild »Kreuz des Südens« leuchtete am Himmel, wobei es »auf dem Kopf« stand. Der Stern »Alpha«, der den Fußpunkt des Kreuzes darstellt, liegt dem Südpol am nächsten.

* Unsere Uhren gehen nicht genau nach der Sonne; zwischen der „wahren Sternzeit“ und der „mittleren Ortszeit“ besteht ein Unterschied, der nur viermal im Jahr gleich Null ist, nämlich am 16. April, 14. Juni, 1. September und 24. Dezember.

Das Sternbild liegt nicht in der gleichen Polnähe wie der Polarstern zum Himmelsnordpol. Der Abstand vom Südpol beträgt 27°; dem Ingenieur war diese Tatsache bekannt, und er wollte sie bei seiner Rechnung berücksichtigen. Er wartete auf den Augenblick, da der Stern durch den Meridian durchgehen würde; das erleichterte ihm die Aufgabe.

Nun richtete Smith einen Schenkel seines Zirkels waagerecht, den anderen auf den Stern »Alpha« des Kreuzes; die Winkelöffnung ergab damit die Höhe des Sterns über dem Horizont. Damit dieser Winkel ein für allemal feststand, brachte er mit Hilfe zweier Dornen eine weitere Leiste an den beiden Schenkeln quer an, so daß der Zirkel die Winkelöffnung für immer beibehielt.

Jetzt blieb noch eins übrig. Die Größe des Winkels mußte ja in bezug auf den Meeresspiegel bestimmt werden, d. h., die Verringerung der Weite des Horizonts mußte berücksichtigt werden*. Zu diesem Zweck mußte er die Höhe des Felsens wissen. Die Winkelgröße ergibt die Höhe des Sternes »Alpha« des Kreuzes und folglich auch die Polhöhe über dem Horizont, d. h. die geographische Breite der Insel; denn für jeden Ort des Erdballs ist die geographische Breite gleich der Polhöhe über dem Horizont des Orts. Die Berechnung sollte am nächsten Tage durchgeführt werden.«

Meine Leser kennen bereits das Verfahren, mit dessen Hilfe die Höhe des Felsens bestimmt wurde. Wir haben ja im ersten Kapitel das entsprechende Jules-Verne-Zitat gebracht. Wir lassen also die betreffende Stelle aus und fahren in Jules Vernes Erzählung fort:

»Der Ingenieur fertigte einen Zirkel an, der dem Gerät vom Vortage glich, mit dessen Hilfe er den Winkel zwischen dem Stern »Alpha« im »Kreuz des Südens« und dem Horizont bestimmt hatte. Sorgfältig maß er die Winkelöffnung mit Hilfe eines in 360 Grad eingeteilten Kreises. Er stellte fest, daß der Winkel 10° betrug. Nach dem Zuzählen von 27° (Winkelabstand zwischen dem Stern »Alpha« und dem Pol) und Reduzierung des Standortes auf Meereshöhe, erhielt er als Ergebnis 37°.

Das war also die Polhöhe über dem Horizont. Smith folgerte daraus, daß die Lincolninseln eine südliche geographische Breite von 37° haben. Mit Rücksicht auf die ungenauen Messungen wurde eine Lage zwischen dem 35. und 40. Breitengrad als sicher angenommen.

Nun blieb noch die Längenbestimmung übrig. Der Ingenieur wollte sie am gleichen Tage durchführen, genau am Mittag, im Augenblick des Sonnendurchganges durch den Meridian.«

Bestimmung der geographischen Länge

»Wie wollte der Ingenieur nun ohne ein entsprechendes Instrument in der Hand den Augenblick des Sonnendurchganges durch den Meridian bestimmen? Herbert war aufs äußerste gespannt.

---

* Da der Ingenieur die Messung nicht in Meereshöhe, sondern von einem hohen Fels aus durchführte, so war die vom Auge zum Kreise der Sehweite gebildete Linie nicht im rechten Winkel zum Lot des Beobachters, sie bildete vielmehr einen von dem rechten Winkel abweichenden Winkel. Die Abweichung ist indessen so gering, daß man sie vernachlässigen kann (bei 100 m Höhe knapp $^1/_3{}^\circ$). Daher brauchte Smith oder vielmehr Jules Verne seine Rechnung nicht durch diese Korrektur zu komplizieren.

Der Ingenieur traf alle Maßnahmen für die geplante astronomische Beobachtung. Er wählte hierfür eine von der Ebbe geglättete ebene Uferfläche. Dort grub er einen sechs Fuß hohen Pfahl senkrecht in den Uferstrand.

Herbert begriff nun den Plan des Ingenieurs. Er wußte, was er tun würde, um den Augenblick des Sonnendurchganges durch den Meridian zu bestimmen, oder mit anderen Worten, wie der Ingenieur die Mittagsstunde des Orts genau bestimmen würde: Er wollte sie nach der Länge des auf den Sand geworfenen Pfahlschattens bestimmen. Dieses Verfahren war natürlich durch das Fehlen geeigneter Instrumente ungenau. Das Ergebnis mußte aber dennoch befriedigend ausfallen.

Es würde in dem Augenblick Mittag sein, in dem der Schatten am kürzesten war. Es genügte eine sorgfältige Beobachtung des Schattens, um den Augenblick zu bemerken, an dem seine Länge zunehmen würde. In diesem Falle spielte also der Schatten gewissermaßen die Rolle des Uhrzeigers.

Als die Zeit der Beobachtung heranrückte, kniete der Ingenieur nieder und begann das Schattenende mit kleinen Pfählen abzustecken; damit wurde die allmähliche Verkürzung des geworfenen Schattens markiert. Der Journalist* hielt seinen Chronometer in der Hand, bereit, den Zeitpunkt zu notieren, an dem der Schatten am kürzesten sein würde. Da es gerade der 16. April war, d. h. an einem Tage, da die wahre Mittagszeit mit der mittleren Ortszeit übereinstimmt, so mußte der vom Journalisten nach dem Chronometer vermerkte Zeitpunkt nach der Zeit des Washingtoner Meridians (Ort des Reiseantritts) festgelegt werden. Langsam rückte die Sonne höher. Der Schatten wurde immer kürzer. Als der Ingenieur beobachtete, daß der Schatten wieder länger wurde, fragte er:

›Wieviel Uhr ist es jetzt?‹

›Fünf Uhr, eine Minute‹, antwortete der Journalist.

Die Beobachtung war zu Ende. Nun sollte die unkomplizierte Rechenarbeit beginnen.

Sie gingen von folgender Überlegung aus. Wie die Beobachtung ergab, betrug der Zeitunterschied zwischen dem Washingtoner Längengrad und den Lincolninseln nahezu 5 Stunden. Wenn also auf der Insel Mittag war, schlug es in Washington 5 Uhr nachmittags. Nun durchläuft die Sonne während ihres Tagesbogens 1° in 4 Minuten, also 15° je Stunde. In 5 Stunden beträgt die Bahn der Sonne 75°.

Washington liegt 77° 3′ 11″ westlich von Greenwich, dessen Meridian sowohl von Engländern als auch von Amerikanern als der Nullmeridian anerkannt wird. Folglich lag die Insel etwa in 152° westlicher Länge.

Berücksichtigt man wiederum die Meßfehler durch das ungenaue Gerät, dann dürfte die Behauptung stimmen, daß sich die Insel zwischen dem 35. und 40. Grad südlicher Breite und zwischen dem 150. und 155. Meridian westlich Greenwich befindet.«

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß es mehrere Verfahren gibt, nach denen man die geographische Länge eines Ortes bestimmen kann; das von den Personen in dem Roman von Jules Verne angewandte Verfahren ist das sogenannte »Chronometertransportverfahren«. Die meisten anderen Verfahren sind übrigens genauer als das soeben beschriebene, das auf hoher See nicht anwendbar ist.

---

* Eine andere, auf die Insel verschlagene Person des Romans.

ZWEITER TEIL

GEOMETRIE ZWISCHEN SPASS UND ERNST

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst,
daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet
ein wenig unterhaltsamer zu gestalten.

PASCAL

Geometrie im Dunkeln

Im Schiffsladeraum

Wir sagen jetzt der frischen Luft der Felder und des Meeres Lebewohl und suchen in Gedanken den dunklen Laderaum eines altertümlichen Schiffes auf. Einer der Helden aus Mine Reeds Roman »Der junge Seefahrer« hat eine geometrische Aufgabe in einer Umgebung gelöst, in der bestimmt nur wenige von meinen Lesern auf den Gedanken gekommen wären, mathematische Studien zu treiben. In dem Roman »Der junge Seefahrer« oder »Im Laderaum eines Schiffes« erzählt uns der Verfasser die Geschichte eines abenteuersuchenden Jugendlichen, der sich, ohne einen Pfennig in der Tasche, in den Laderaum eines unbekannten Schiffes einschlich und erst als das Schiff in See ging, bemerkte, daß er dort fest eingeschlossen war. Als er die Ladung, die sein dunkles Gefängnis füllte, abtastete, entdeckte er eine Kiste mit Zwieback und ein Faß Wasser. Vernünftig, wie der Knabe war, begriff er, daß er diese beschränkte Menge Speise und Trank sparsam verbrauchen mußte. Er beschloß daher, sie in bestimmte Tagesrationen einzuteilen. Den Zwieback zu zählen war nicht schwierig, aber wie sollte er die »Wasserzuteilung« festlegen, wo er doch die gesamte Vorratsmenge nicht kannte?

Das war das Problem des jungen Abenteurers. Wir wollen einmal sehen, wie er damit fertig wurde.

Die Faßvermessung

»Ich war also vor die Aufgabe gestellt, meine Tagesrationen an Wasser festzulegen. Zu diesem Zweck mußte ich wissen, wie groß der Gesamtvorrat war und meine Portionen danach einteilen.

Zum Glück hatte uns unser Lehrer während des Rechenunterrichts einige Anfänge der Geometrie beigebracht. Ich hatte eine Vorstellung von einem Würfel, einer Pyramide, einer Kugel, einem Zylinder, ja, ich wußte sogar, daß man ein Faß als zwei Kegelstümpfe ansehen kann, die mit ihren größeren Grundflächen aufeinanderliegen.

Damit ich den Rauminhalt meines Fasses bestimmen konnte, mußte ich seine Höhe (es genügte auch die halbe Höhe) kennen. Ich mußte ferner den Umfang des Fasses sowohl am Boden als auch an der breitesten Stelle, also in der Mitte, bestimmen. Kannte ich diese drei Größen, dann konnte ich genau den Rauminhalt des Wasserfasses berechnen.

So brauchte ich nur die aufgezählten Größen zu messen... Das aber war gerade das Schwierigste! Wie sollte ich das tun? Die Höhe des Fasses konnte ich ohne weiteres feststellen. Es stand ja vor mir.

Was den Umfang betraf, so war er nicht feststellbar, da ich zu klein war, um mit den Händen den oberen Rand zu erreichen; unten waren die Kisten im Wege.

Außerdem gab es noch eine Schwierigkeit, ich besaß zum Messen weder Maßstab noch Schnur. Wie sollte ich rechnen, wenn ich überhaupt keine Maße hatte? Ich wollte jedoch den Plan nicht aufgeben, solange ich nicht alle Möglichkeiten erwogen und versucht hatte.«

Der Meßstab

(Aufgabe nach Mine Reed)

»Ich hatte den Entschluß, den Wasservorrat auszumessen, keineswegs aufgegeben und grübelte darüber nach, wie ich wohl die Größe des Fasses bestimmen konnte. Plötzlich wurde mir klar, was mir eigentlich fehlte: Ich brauchte einen Stab von solcher Länge, daß er in der breitesten Stelle die Faßwand durchbohren und gegen die andere Wand stoßen würde. Dann kannte ich ja den Durchmesser. Ich brauchte dann die Länge des Stabes nur zu verdreifachen und hatte den Umfang bestimmt. Das Ergebnis würde zwar nicht genau ausfallen, es würde aber meinen Zwecken vollkommen genügen. Da das Loch, das ich vorhin in das Faß gebohrt hatte, sich gerade an der breitesten Stelle befand, so brauchte ich nur den Stab einzuführen, – dann wußte ich den größten Durchmesser.

Wo sollte ich aber den passenden Stab finden? Nun, das war nicht allzu schwierig. Ich beschloß, ein Kistenbrett der Zwiebackkiste zu benutzen. Ich machte mich sofort ans Werk. Das Brett war allerdings nur 60 cm breit, die Faßbreite war mehr als doppelt so groß. Trotzdem war es kein großes Problem; ich brauchte nur drei gleichlange Stäbchen anzufertigen, aneinanderzubinden und der Stab war fertig.

Ich schnitt das Kistenbrett der Länge nach auf und fertigte drei runde, saubergeschnittene Stäbchen an. Womit sollte ich sie aneinanderbinden? Ich benutzte dazu meine Schnürsenkel – sie waren fast einen Meter lang. Als ich die Stäbchen zu einem Meßstab zusammenband, war er lang genug – nämlich rund anderthalb Meter.

Nun wollte ich messen und stieß auf ein neues Hindernis. Ich konnte den Stab nicht in das Faßloch einführen, dazu war der vorhandene Raum zu eng. Ich durfte den Stab auch nicht biegen; denn er ginge dabei bestimmt zu Bruch.

Schließlich entdeckte ich doch noch die Möglichkeit, den Stab ins Faß zu stoßen. Ich band ihn wieder auseinander, steckte den ersten Teil ein, band an das hinausragende Ende das zweite Stück, stieß dieses weiter und band dann das dritte Ende an.

Ich richtete den Stab möglichst gerade, damit er direkt an die gegenüberliegende Faßwand stieß. Dann kerbte ich die Stelle ein, an der das Ende des Stabes herausguckte.

Ich zog den Stab auf die gleiche Weise wieder heraus und merkte mir die Verbindungsstellen, damit ich beim Zusammenbinden die gleiche Länge erhielt, die er im Faß besaß. Ein kleiner Meßfehler konnte das Ergebnis erheblich beeinflussen.

Jetzt hatte ich also die Größe der unteren Grundfläche des Kegelstumpfes. Mir fehlte aber noch der Durchmesser des Faßbodens – daraus ließ sich dann die obere Grundfläche des Kegelstumpfes bestimmen. Ich legte nun den Stab flach auf das Faß, stieß gegen den gegenüberliegenden Faßrand und merkte mir den Durchmesser. Ich brauchte dafür knapp eine Minute.

Jetzt ging es um die Höhe. Sie könnten vielleicht einwenden, daß es ja zu diesem Zweck genügen würde, den Stab senkrecht neben das Faß zu stellen und die Höhe einzukerben. Bedenken Sie aber, daß der Laderaum vollkommen finster war und ich nicht sehen konnte, wie hoch der obere Faßrand lag. Ich müßte also den Faßboden und die entsprechende Stelle am Meßstab mit den Händen abtasten. Außerdem hätte sich der Stab beim Drehen neben dem Faß zur Seite neigen können, und die Höhenbestimmung hätte einen falschen Wert ergeben.

Nachdem ich sorgfältig überlegt hatte, fand ich endlich einen Weg, um der Schwierigkeit Herr zu werden. Ich band nur zwei Stäbchen zusammen und legte das dritte auf den oberen Faßboden so, daß es über den Faßrand etwa 30 bis 40 cm hinausragte. Dann legte ich den langen Stab so an, daß er mit dem Stäbchen einen rechten Winkel bildete; er war also der Achse des Fasses und damit dessen Höhe parallel. Ich schnitt eine Kerbe in die Stelle der Faßwand ein, wo die Wölbung am größten war, d. h. in der Mitte. Auf diese Weise fand ich nach Abzug der Wandstärke die halbe Faßhöhe oder, was das gleiche war, die Höhe der beiden Kegelstümpfe. Nun hatte ich sämtliche Unterlagen für die Bestimmung des Volumens in der Hand.«

Was nun auszuführen war...

»Den Faßinhalt in Volumeneinheiten zu berechnen und diese anschließend in Gallonen* zu verwandeln war nicht schwierig. Für die schriftliche Berechnung fehlte mir allerdings das Schreibgerät. Dieses wäre auch nutzlos gewesen, weil es in dem Laderaum stockfinster war. Ich war jedoch gewohnt, alle vier Rechenoperationen ohne Feder und Papier im Kopfe auszuführen. Die Zahlen, mit denen ich rechnete, waren ja nicht hoch, so daß mich diese Aufgabe nicht in Verlegenheit brachte. Trotzdem tauchte eine neue Schwierigkeit auf. Wohl hatte ich drei Zahlen: die Höhe und die Durchmesser der beiden Kegelstumpfgrundflächen. Welchen Maßeinheiten aber entsprachen diese Größen? Ehe man ans Rechnen ging, mußte man doch die gegebenen Größen durch bestimmte Zahlen ausdrücken.

Zuerst schien mir das Hindernis unüberwindlich. Ich besaß weder Zoll- noch Metermaß, kein Lineal oder ähnliches Meßgerät. Ich war nahe daran, auf die Lösung zu verzichten.

Schließlich erinnerte ich mich daran, daß ich ja im Hafen meine Körperlänge gemessen hatte: sie betrug 4 Fuß.

Wie sollte ich nun aus dieser Unterlage einen Nutzen ziehen? Ganz einfach, ich konnte ja die vier Fuß auf meinem Stab abmessen und bei meiner Rechnung von diesem Maß ausgehen.

---

* Gallone = englisches Raummaß. Die Gallone enthält 277 Kubikzoll (etwa 4,5 Liter). Die Gallone enthält 4 Quarten, die Quarte = 2 Pints.

Um meine Körperlänge zu markieren, legte ich mich auf den Rücken und den Stab neben mich so, daß das eine Ende meine Füße, das andere meine Stirn berührte. Mit einer Hand hielt ich den Stab fest, mit der anderen merkte ich mir die Stellung meines Scheitels. Dann traten neue Schwierigkeiten hinzu. Ein 4 Fuß langer Maßstab ist völlig nutzlos, wenn er keine kleinen Teilstriche – Zolleinteilungen – enthält. Auf den ersten Blick scheint es einfach zu sein, 4 Fuß in 48 Teile, d. h. Zoll zu teilen und die Teilstriche in ein Lineal einzukerben. In der Theorie ist der Vorgang tatsächlich einfach; in der Praxis dagegen war es keineswegs leicht, wenn man die vollständige Finsternis berücksichtigt, in der ich mich befand.

Wie sollte ich z. B. die Mitte des 4 Fuß langen Stabes feststellen? Wie sollte ich die Hälfte eines jeden Stabes abermals in zwei gleiche Teile und diese nochmals in 12 Teile mit genau gleichen Abständen kerben?

Ich begann damit, daß ich einen kleinen Stab anfertigte, der etwas länger als 2 Fuß maß. Ich verglich ihn mit dem 4 Fuß langen Stab und überzeugte mich davon, daß die doppelte Länge des Stabes die Länge von 4 Fuß etwas übertraf. Dann schnitt ich den Stab kürzer, legte ihn wieder an und wiederholte den Vorgang so oft, bis ich erreichte, daß die doppelte Stablänge genau 4 Fuß betrug. Das nahm viel Zeit in Anspruch, aber mit der Zeit brauchte ich ja nicht zu geizen, im Gegenteil, ich freute mich, daß ich sie irgendwie ausfüllen konnte.

Dennoch entdeckte ich ein Mittel, um die Arbeit zu beschleunigen. Der Stab wurde durch meine Schnürsenkel ersetzt, die ich bequem halbieren konnte. Ich band sie in einem festen Knoten aneinander und ging ans Werk. Bald konnte ich bereits einen Stab von genau 1 Fuß Länge abschneiden. Bisher brauchte ich jede gefundene Länge nur zu halbieren, das war ja nicht schwer. Dann mußten die Strecken in drei gleiche Teile geteilt werden, was wiederum nicht einfach war. Dennoch wurde ich damit fertig, und bald hatte ich drei 4 Zoll lange Abschnitte in meinen Händen. Nach kurzer Zeit hatte ich einen Abschnitt von einem Zoll Länge.

Jetzt besaß ich ein Mittel, um die Teilstriche in den Stab einzukerben. Sorgfältig legte ich ein Längenmuster nach dem anderen zu und schnitt 48 Kerben ein. Nun verfügte ich über ein mit Zollteilung versehenes Lineal, man könnte es auch einen Zollstock nennen, mit dessen Hilfe ich die Strecken endlich zahlenmäßig bestimmen konnte. Erst jetzt war ich in der Lage, die Aufgabe, die von erheblicher Bedeutung für mich war, zu vollenden.

Sofort wurde die Arbeit begonnen. Ich maß die beiden Durchmesser aus, nahm den Mittelwert beider Daten und berechnete die dem mittleren Durchmesser entsprechende Grundfläche. Auf diese Weise erhielt ich die Grundfläche eines Zylinders. Durch Multiplikation des Resultats mit der Höhe erhielt ich das Fassungsvermögen des gesuchten Raumes.

Nachdem ich die erhaltene Zahl Kubikzoll mit 69 teilte (es ist die Zahl von Kubikzoll je Quarte), erfuhr ich, wieviel Quarten mein Wasserfaß enthielt. Der Rauminhalt entsprach über 100 Gallonen – genauer gesagt, 108 Gallonen!«

Der geometriekundige Leser wird zweifellos bereits entdeckt haben, daß die angewandte Methode der Volumenberechnung von zwei Kegelstümpfen, die der junge Seefahrer des Romans gebrauchte, nicht ganz stimmt. Bezeichnen wir (Abb. 105) den Halbmesser der kleinen Grundflächen der Kegelstümpfe mit r, den der größeren mit R und die Faßhöhe, d. h. die doppelte Höhe jedes Kegelstumpfes, mit h, so können wir das von dem Knaben berechnete Volumen durch folgende Formel ausdrücken:

$$V_z = \pi h \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{4}(R^2 + r^2 + 2\,Rr)$$

Verfahren wir dagegen nach den geometrischen Regeln und verwenden die Formel für die Berechnung des Kegelstumpfvolumens, so ist der Ausdruck für das gesuchte Volumen:

$$V_k = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Die beiden Formeln sind nicht identisch, wir können uns leicht davon überzeugen, daß das nach der zweiten Formel berechnete Volumen das erste um folgenden Betrag übertrifft:

$$V_k - V_z = \frac{\pi h}{12}(R - r)^2$$

Wer mit der Algebra vertraut ist, wird sofort erkennen, daß die Differenz

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$$

einen positiven Wert darstellt. Die Rechnung des Knaben ergab einen geringeren Wert, als es der Wirklichkeit entsprach. Wir wollen doch gleich einmal nachrechnen, wie groß der Fehler nach unten war. Meistens werden Fässer so gebaut, daß ihr größter Durchmesser den Durchmesser der Böden um etwa $\frac{R}{5}$ übertrifft, mit anderen Worten:

$$R - r = \frac{R}{5}$$

Nimmt man an, daß es sich in dem zitierten Abenteuerroman um ein Faß dieser Bauart handelte, dann können wir die Differenz zwischen dem erhaltenen und dem tatsächlichen Volumen der beiden Kegelstümpfe ausrechnen.

$$V_k - V_z = \frac{\pi h}{12}(R - r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300}$$

Setzt man $\pi = 3$, so beträgt die Differenz etwa $\frac{hR^2}{100}$.

Wie ersichtlich, entspricht der Fehlbetrag dem Volumen eines Zylinders, dessen Halbmesser dem größten Faßhalbmesser und dessen Höhe dem hundertsten Teil der Faßhöhe entspricht.

In unserem Falle ist es jedoch zweckmäßig, ein etwas übertriebenes Ergebnis zu erhalten, weil ja von vornherein klar ist, daß der Rauminhalt eines Fasses größer sein muß, als das Volumen zweier in das Faß eingeschriebener Kegelstümpfe. Die Tatsache ist aus der Abb. 105 ersichtlich.

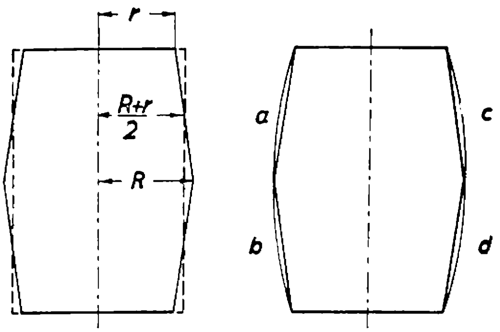


Abb. 105. Die Rechnung des Knaben wird geprüft.

Wir sehen, daß mit Hilfe dieses Verfahrens zur Messung des Volumens ein durch die Buchstaben a, b, c, d bezeichneter Teil unberücksichtigt bleibt.

Der junge Seefahrer hat die Formel für die Berechnung des Faßvolumens nicht selbst ersonnen. Einige Lehrbücher der Elementargeometrie bringen sie als Beispiel einer vereinfachten Rechnung zur Volumenbestimmung eines Fasses. Es sei darauf hingewiesen, daß die genaue Messung des Faßvolumens eine überaus schwierige Aufgabe ist. Sogar der große Kepler hat viel über die Aufgabe nachgedacht. Unter seinen mathematischen Werken gibt es eine besondere Arbeit über die Kunst, das Volumen eines Fasses zu bestimmen. Eine einfache *und* genaue Methode dieser Berechnung gibt es bis auf den heutigen Tag noch nicht. Es gibt nur in der Praxis bewährte Kunstgriffe, die ein mehr oder weniger angenähertes Resultat ergeben. So ist z. B. in Südfrankreich folgende einfache Meßformel üblich:

$$V = 3{,}2\,h\,Rr$$

Sie hat sich in der Praxis durchaus bewährt.

Interessant ist es auch, folgender Frage auf den Grund zu gehen! Warum baut man eigentlich die Fässer in dieser für die Messung höchst unbequemen Form – eines Zylinders mit gewölbten Flanken? Wäre es nicht einfacher, zylinderförmige Fässer herzustellen? Derartige Zylinderfässer gibt es ja wirklich, jedoch nicht aus Holz, sondern aus Stahlblech (Benzinfässer!).

Aufgabe

Warum werden Holzfässer mit gewölbten Faßdauben hergestellt? Worin besteht der Vorteil solch einer Form?

Lösung

Der Vorteil besteht darin, daß man dadurch auf sehr einfache Weise die Faßreifen stramm und dicht aufsetzen kann. Man rückt sie einfach näher zur gewölbten Mitte. Dadurch zieht der Reifen die Dauben zusammen und gewährleistet einen festen Zusammenhalt.

Aus ähnlichen Gründen gibt man Holzbottichen, Bütten usw. keine reine Zylinderform, sondern die eines Kegelstumpfes. Auch hier wird der feste Zusammenhalt der Dauben durch strammen Sitz des Reifens auf dem konischen Teil erreicht (Abb. 106).

Wir wollen einmal Keplers Ansicht über diesen Fall hören. In der Zeit zwischen der Entdeckung des zweiten und dritten Gesetzes der Planetenbewegung widmete der große Mathematiker ein umfangreiches mathematisches Werk dem Problem der Formgebung eines Fasses. Seine »Stereometrie des Fasses« beginnt folgendermaßen:

Abb. 106. Die Reifen umspannen die Dauben fest, wenn sie auf den breiteren Umfang des Fasses getrieben werden.

»Auf Grund der durch das Material, den Bau und den Vertrieb von Fässern gestellten Anforderungen werden die Fässer rund gestaltet. Ihre Form erinnert an einen Konus und zugleich an einen Zylinder. Flüssigkeiten, die in Metallgefäßen längere Zeit gelagert werden, verderben durch Rost; Glas- und Tongefäße sind zu klein und unzuverlässig, Steinkrüge sind ihres hohen Gewichtes wegen unbrauchbar. Es bleibt nichts anderes übrig, als Holzfässer für die Weinlagerung zu verwenden. Nun kann man aber aus einem ganzen Stamm keine Fässer von ausreichendem Fassungsvermögen in genügender Zahl anfertigen, und täte man es doch, so zeigten sie bald Risse. Fässer müssen daher aus einzelnen miteinander verbundenen Holzbrettern angefertigt werden. Man kann indessen ein Durchsickern der Flüssigkeit durch die einzelnen Ritzen weder mit Hilfe irgendeines Materials, noch auf andere Weise verhindern, als nur dadurch, daß man diese mit Bändern zusammenzieht.

Wäre es möglich, aus Holzleisten kugelförmige Gefäße anzufertigen, so wären solche Fässer sehr erwünscht. Da man jedoch mit Hilfe von Bändern eine Kugel nicht zusammenhalten kann, ersetzt man diese durch einen Zylinder. Es handelt sich indessen um keinen genauen Zylinder, da locker gewordene Faßreifen sofort ihren Sinn verlieren. Hätte das Faß keine sich nach beiden Seiten vom Bauch verjüngende Kegelform, dann könnte man die Reifen nicht nachspannen. Außerdem ist diese Gestalt für das Rollen und die Beförderung in Wagen zweckmäßig. Das aus zwei auf einem gemeinsamen Mittelquerschnitt ruhenden ähnlichen Hälften bestehende Faß hat die vorteilhafteste Form beim Rütteln und diese ist auch für das Auge wohlgefällig.« *

* Denken Sie nicht, daß Keplers Arbeit über die Abmessung der Fässer etwa eine mathematische Spielerei darstellt, die der geniale Mathematiker in seinen Mußestunden betrieb. Das ist keineswegs der Fall; es handelt sich vielmehr um eine ernste Arbeit, in deren Rahmen die Begriffe des unendlich Kleinen und der Integralrechnung vorkommen. Die Berechnung des Weinfasses war Ausgangspunkt tiefgründiger und fruchtbarer mathematischer Überlegungen.

9 [420 43-1]

Die Findigkeit, die der Knabe aus Mine Reeds Erzählung in seiner üblen Lage besaß, ist wirklich erstaunlich. In völliger Finsternis, in der er sich befand, hätten sich die meisten Menschen nicht orientieren, geschweige denn Messungen vornehmen oder mathematische Rechenaufgaben lösen können. Es ist sehr lehrreich, wenn man dieser Erzählung eine andere gegenüberstellt, nämlich die sinnverwirrende Wanderung durch ein völlig dunkles Hotelzimmer. Es ist ein Erlebnis, daß angeblich einem Landsmann Mine Reeds, dem berühmten amerikanischen Schriftsteller Mark Twain, widerfuhr. In dieser Erzählung schildert der Verfasser in meisterhafter Weise und mit großem Beobachtungstalent die Schwierigkeit, der man begegnet, wenn man sich im völlig verdunkelten Raum eine richtige Vorstellung von der örtlichen Lage der Gegenstände machen will, mag es sich auch nur um ein gewöhnliches, jedoch unbekanntes Hotelzimmer handeln.

Wir geben diese witzige Episode aus Mark Twains »A Tramp abroad« (Auslandsreise) gekürzt wieder:

»Ich wachte auf und spürte, daß ich Durst hatte. Da kam mir ein wundervoller Gedanke in den Sinn: mich anzukleiden, in den Garten hinabzusteigen und mich am Springbrunnen zu erfrischen.

Leise stand ich auf und tastete nach meinen Kleidern. Ich fand einen Strumpf. Wo der zweite steckte – das konnte ich nicht feststellen. Vorsichtig stellte ich die Beine auf den Fußboden – tastete in der Runde – ohne Erfolg.

Ich fuhr fort zu suchen und mit den Händen um mich zu greifen. Ich bewegte mich immer weiter vorwärts, fand aber keinen Strumpf; ich stieß dauernd gegen die Möbel. Als ich mich schlafen legte, besaß das Zimmer bedeutend weniger Möbel; jetzt war es damit vollgestopft. Besonders zahlreich waren die Stühle – sie schienen überall herumzustehen. Ob hier mittlerweile vielleicht weitere zwei Familien eingezogen waren? In der Dunkelheit sah ich zwar keinen dieser Stühle, aber ich stieß dauernd mit dem Kopf gegen sie. Schließlich sagte ich mir, daß ich auch mit nur einem Strumpf auskommen könne. Ich stand auf und ging auf die Tür zu – so dachte ich wenigstens, plötzlich aber sah ich mein eigenes Abbild, das im Spiegel matt schimmerte.

Nun war mir klar, daß ich mich verirrt hatte und nicht im geringsten ahnte, wo ich mich befand. Wäre im Zimmer ein einziger Spiegel, dann hätte er mir als Anhaltspunkt dienen können, aber es waren zwei davon im Zimmer und das war ebenso scheußlich, als wären es tausend.

Jetzt wollte ich die Tür erreichen, indem ich mich an der Wand entlangtastete. Ich machte den ersten Versuch; dabei fiel ein Bild von der Wand. Es war nicht groß, aber es gab einen Krach, als fiele eine ganze Bühnendekoration herunter. Harris, ein Zimmergenosse, der im anderen Bett schlief, rührte sich nicht, aber ich fühlte, daß er unbedingt aufwachen würde, wenn ich so weitermachte. Ich beschloß daher, auf andere Weise vorzugehen. Ich wollte wieder den runden Tisch finden – ich hatte ihn schon mehrmals ausgemacht – und von dort mein Bett erreichen. Wäre ich am Bett, dann würde ich die Wasserkaraffe finden und den brennenden Durst wenigstens so stillen können. Am besten war es, auf Händen und Knien zu rutschen. Ich hatte diese Methode bereits ausprobiert und traute ihr daher am meisten.

Endlich fand ich den Tisch, ich fühlte ihn mit dem Kopf; das Geräusch war dabei nicht allzu laut. Dann stellte ich mich auf die Füße und ging mit ausgestreckten Händen und gespreizten Fingern vorwärts. Ich fand einen Stuhl, daraufhin eine Wand, wieder einen Stuhl, dann ein Sofa; als nächstes meinen Spazierstock, dann noch ein Sofa; ich wunderte mich sehr darüber, weil ich genau wußte, daß es im Zimmer nur ein Sofa gab. Dann stieß ich wieder heftig gegen den Tisch und daraufhin auf eine ganze Anzahl von Stühlen.

Jetzt fiel mir etwas ein, was ich eigentlich von vornherein hätte berücksichtigen sollen: der Tisch war ja rund und konnte daher bei meiner Wanderung nicht als Ausgangspunkt dienen. Ich schritt nun aufs Geratewohl vorwärts in den Raum zwischen den Stühlen und dem Sofa und befand mich plötzlich in einer gänzlich fremden Umgebung; unterwegs fegte ich den Kerzenständer vom Kamin herunter. Danach fiel die Lampe auf den Fußboden; ihr folgte mit entsprechendem Geräusch die Wasserkaraffe samt Glas.

Aha, dachte ich –, endlich habe ich dich gefunden, Freundchen! ›Diebe! Mörder!‹ rief Harris entsetzt.

Das Schreien weckte das ganze Haus auf. Es kamen Leute mit Kerzen und Laternen bewaffnet, der Hotelwirt, Dienstboten, Gäste.

Ich schaute in die Runde. Ich sah, daß ich neben Harris Bett stand. An der Wand stand ein einziges Sofa; nur ein Stuhl stand so, daß man ihn anstoßen könnte. Ich kreiste um ihn wie ein Planet und stieß mit ihm während der Hälfte der Nacht dauernd zusammen.

Als ich auf meinen Schrittmesser schaute, stellte ich fest, daß ich bei der nächtlichen Wanderung rund 47 Meilen zurückgelegt hatte.«

Diese letzte Behauptung ist natürlich maßlos übertrieben. Es ist einfach unmöglich, innerhalb weniger Stunden siebenundvierzig Meilen zu gehen. Aber die übrigen Einzelheiten dieser netten, witzigen Geschichte sind ziemlich wahrscheinlich; sie charakterisieren treffend jene komischen Hindernisse, denen man häufig begegnet, wenn man planlos aufs Geratewohl durch ein unbekanntes Zimmer wandert.

Berücksichtigen wir diese Tatsache, so müssen wir die ausgezeichnete Denkarbeit, die Schlüssigkeit und Geistesgegenwart des Mine-Reed-Knaben um so höher einschätzen, als dieser es nicht nur fertigbrachte, sich in vollständiger Finsternis zurechtzufinden, sondern darüber hinaus unter diesen schwierigen Bedingungen eine mathematische Aufgabe zu lösen.

Das rätselhafte Irren im Kreise

Im Zusammenhang mit dem Umherirren Mark Twains im dunklen Zimmer weise ich auf eine rätselhafte Erscheinung hin. Menschen mit geschlossenen Augen sind nämlich außerstande, geradeaus zu gehen. Sie schwenken vielmehr seitwärts ab und gehen in einem Bogen, obwohl sie sich einbilden, geradeaus zu gehen (Abb. 107).

Schon seit langem ist bekannt, daß Wanderer, die ohne Kompaß in der Wüste, in der Steppe, bei Schneesturm oder im Nebel vorwärts gehen – überhaupt in allen Fällen, in denen die Orientierung nicht möglich ist – vom geraden Wege abirren

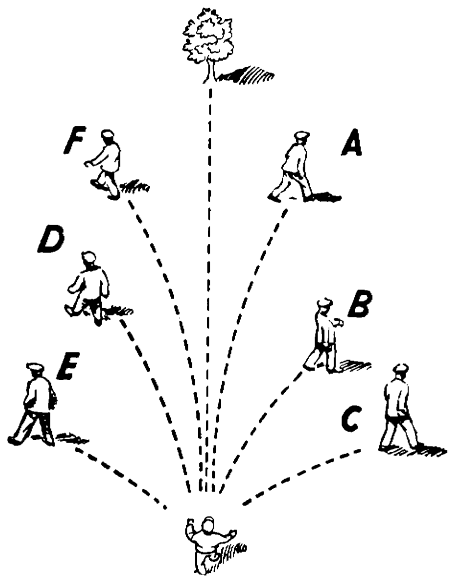


Abb. 107. Das Gehen mit geschlossenen Augen.

und im Kreise wandern, wobei sie mehrmals zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehren. Der Halbmesser des von dem Wanderer beschriebenen Kreises beträgt dabei 60 bis 100 m. Je schneller der Mensch geht, umso kleiner wird der Kreisdurchmesser, d. h., der Kreis schließt sich schon sehr bald.

Das Abirren vom geraden Weg in eine Kreisbahn wurde bei verschiedenen Menschen näher untersucht.

Spirin, Held der Sowjetunion, erzählt darüber folgendes:

»Auf einem ebenen Wiesenflugplatz wurden 100 künftige Flugzeugführer in Reih und Glied aufgestellt. Man band ihnen die Augen zu und befahl ihnen, geradeaus zu marschieren. Die Männer gingen los ... Zuerst geradeaus, dann begannen die einen nach links, andere nach rechts zu schwenken; allmählich beschrieben sie volle Kreise und gingen dann ihrer alten Spur wieder nach.«

Bekannt ist ein auf dem Markusplatz in Venedig durchgeführter ähnlicher Versuch. Man band den Versuchspersonen die Augen zu, stellte sie auf dem Platz an der dem Dom gegenüberliegenden Seite und bat sie, geradeaus auf die Markuskirche zuzugehen. Obwohl die Strecke nur 175 m betrug, erreichte keine der Versuchspersonen die 82 m breite Kirchenfassade! Sämtliche Personen schwenkten ab, beschrieben einen Bogen und stießen gegen die den Platz flankierenden Säulengänge der Procuratien ... (Abb. 108).

Wer jemals den Roman Jules Vernes »Die Abenteuer des Kapitän Hatteras« gelesen hat, erinnert sich vielleicht noch an die Episode mit den Reisenden, die in der einsamen Schneewüste auf unbekannte Menschenspuren stießen.

»Freunde, es sind ja unsere eigenen Spuren!« rief der Arzt, »wir haben uns im Nebel verirrt und sind unserer eigenen Fußspur begegnet ...«

Eine klassische Beschreibung des Herumirrens im Kreise bringt auch Tolstoi in seiner Erzählung »Der Bauer und der Landarbeiter«.

»Wassili Andrejewitsch lenkte sein Pferd in die Richtung, wo er den Wald und die Waldhütte vermutete. Der Schnee verklebte ihm die Augen, und der Wind blies mit solcher Kraft, daß es den Anschein hatte, als halte er ihn auf der Stelle fest Aber unablässig trieb er nach vorn geneigt sein Pferd vorwärts ...

Etwa fünf Minuten lang schien es ihm, als fahre er geradeaus, ohne etwas ande es zu sehen, als die weiße Schneewüste und den Kopf seines Pferdes.

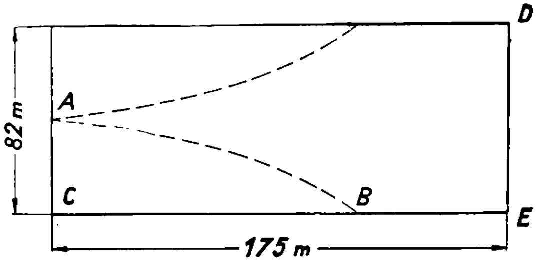


Abb. 108. Schematische Darstellung des Versuches auf dem Markusplatz in Venedig.

Plötzlich schimmerte vor ihm ein dunkler Punkt. Sein Herz klopfte freudig, er fuhr drauf los, das dunkle Etwas schien ihm Wände von Dorfhäusern zu sein. Aber es war nur ein hochgewachsener Beifußstrauch am Feldrain. Beim Anblick dieses vom Winde unbarmherzig hin und her gerissenen Strauches zuckte Wassili unwillkürlich zusammen; hastig schlug er auf sein Pferd ein, ohne zu merken, daß er seine Fahrtrichtung geändert hatte, als er sein Pferd auf den Beifußstrauch lenkte.

Wieder schimmerte etwas Schwarzes undeutlich vor ihm. Und wieder war es ein beifußbewachsener Feldrain. Verzweifelt schaukelte das trockene Unkraut im Sturm. Neben dem Busch sah er eine vom Schnee bedeckte Pferdespur. Wassili Andrejewitsch hielt das Pferd an, bückte sich, dann schaute er in die Runde: Es war eine vom Schnee bereits leicht verwehte Pferdespur – es konnte nur seine eigene Fahrspur sein. Anscheinend irrte er auf einem sehr knappen Raum im Kreise herum.«

Der norwegische Physiologe Guldberg sammelte in einem besonderen Werk (1896) eine Anzahl sorgfältig nachgeprüfter Berichte über das Irren im Kreise. Wir wollen hier zwei Beispiele anführen:

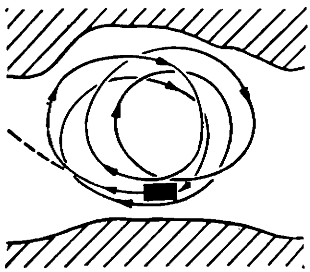


Abb. 109. Die Irrwege der drei Wanderer.

»In einer Nacht, in der starkes Schneetreiben herrschte, wollten drei Reisende eine von ihnen aufgesuchte Waldhütte und das 4 km breite Tal, in dem diese lag, verlassen und ihr Heim erreichen (Abb. 109). Unterwegs schwenkten sie kaum merklich nach rechts und beschrieben den mit Pfeilen bezeichneten Bogen. Nachdem sie auf diese Weise eine Zeitlang wanderten, nahmen sie an, sie hätten ihr Ziel erreicht. In Wirklichkeit gelangten sie jedoch zu der gleichen Waldhütte, die sie verlassen hatten. Sie traten ihre Wanderung von neuem an; die Abweichung von dem geraden Weg war jetzt noch stärker, – und wieder landeten sie in der Waldhütte. Der dritte und vierte Versuch hatte den gleichen Erfolg. Verzweifelt versuchten sie es noch einmal; aber auch dieser Versuch hatte das gleiche Ergebnis. Nach dem fünften Versuch gaben sie ihre Absicht auf und warteten den Morgen ab.

Noch schwieriger ist das Rudern in gerader Richtung auf dem Meer in einer dunklen, sternlosen Nacht oder bei dichtem Nebel. Es ist ein Fall bekannt, bei dem Ruderer versuchten, eine 4 km breite Meerenge im Nebel zu überqueren. Das andere Ufer hatten sie beinahe zweimal erreicht, aber nicht gesehen. Ohne sich dessen bewußt zu werden, waren sie zweimal im Kreise gerudert und landeten schließlich ... an ihrem Ausgangsort.«

Das gleiche kommt bei Tieren vor. Nordlandreisende und Polarforscher berichten über das Herumirren von Tieren im Schlittengespann durch die Schneewüste. Hunde, die man mit verbundenen Augen schwimmen läßt, beschreiben Kreisbogen im Wasser. Geblendete Vögel fliegen ebenfalls im Kreise. Ein gehetztes Tier, das seinen Orientierungssinn vor Schreck verliert, versucht sich nicht etwa geradlinig, sondern in einer Spirale in Sicherheit zu bringen. Zoologen stellten fest, daß Krabben, Kaulquappen, Medusen, ja sogar mikroskopisch kleine Amöben, im Wassertropfen sämtlich im Kreise herumwandern.

Wie erklärt sich nun der rätselhafte Hang von Mensch und Tier zum kreisförmigen Wandern und die Unfähigkeit, sich in der Dunkelheit geradeaus fortzubewegen?

Nun – das Rätsel verliert sofort den Charakter des undurchdringlichen Geheimnisses, sobald die Frage richtig gestellt wird.

Fragen wir einmal nicht, warum ein Tier sich ohne Orientierung kreisförmig bewegt, sondern – was es braucht, um geradeaus zu laufen.

Denken Sie doch einmal an die Bewegung eines Spielzeugwagens mit Uhrwerkantrieb. Es kommt vor, daß das Wägelchen nicht geradeaus rollt, sondern seitlich abschwenkt. Kein Mensch wird in dieser Kurvenbewegung ein Wunder erblicken; jedermann ist sich über die Ursache sofort klar: Es kommt offenbar daher, daß die rechten Räder den linken an Umfang nicht gleichen.

Es ist vollkommen verständlich, daß auch ein Lebewesen sich nur dann ohne Mithilfe der Augen geradeaus bewegen kann, wenn die Muskeln rechts und links vollkommen gleichmäßig arbeiten. Da aber liegt der Hund begraben: Die Körper der Menschen und der Tiere sind nicht vollkommen symmetrisch. Der weitaus größte Teil der Muskulatur der Menschen und Tiere ist rechts und links nicht gleich entwickelt. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß ein Fußgänger, der das rechte Bein etwas weiter als das linke vorstreckt, nicht auf einer Geraden weiterzugehen vermag. Sofern er nicht seine Augen in Anspruch nimmt, wird er unweigerlich nach links abschwenken. Ist ein Ruderer durch Nebel an der Orientierung verhindert, so wird er ebenfalls unbedingt nach links abschwenken, wenn sein rechter Arm sich stärker in die Riemen legt als der linke. Das ist eine geometrische unabwendbare Folge.

Stellen Sie sich einmal vor, daß ein Mensch mit dem linken Fuß einen nur 1 mm längeren Schritt geht als mit dem rechten. Legt er mit dem rechten und linken Fuß je 1000 Schritt zurück, dann ist der vom linken Fuß zurückgelegte Weg 1000 mm oder einen ganzen Meter länger als der Weg des rechten Fußes. Auf geraden parallelen Bahnen ist diese Gehart undurchführbar, wohl aber auf konzentrischen Kreisen.

Wir gehen noch weiter. Nehmen wir den Plan des geschilderten Herumirrens der Wanderer durch das schneebedeckte Tal, so können wir ausrechnen, um wieviel der von dem linken Fuß zurückgelegte Weg den Weg des rechten Fußes übertraf (da die Wanderer nach rechts abbogen, ist es ohne weiteres klar, daß es gerade der linke Fuß war, der längere Schritte ausführte). Der Abstand zwischen den Achsen der beiden Fußspuren (rechts und links) beim Gehen (Abb. 110) beträgt rund 10 cm = 0,1 m. Beschreibt der Mensch einen vollen Kreis, so legt der rechte

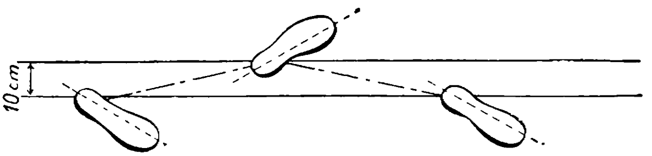


Abb. 110. Der Abstand der beiden Fußspuren.

Fuß $2\pi r$, der linke $2\pi(r + 0{,}1)$ zurück. r ist der Kreishalbmesser in Metern. Die Differenz

$$2\pi(r + 0{,}1) - 2\pi r = 2\pi\, 0{,}1, \quad \text{d. h.} \quad \text{etwa } 0{,}63\,\text{m}$$

oder 630 mm ist der Unterschied in der Länge des vom rechten bzw. vom linken Fuß zurückgelegten Weges.

Aus der Abb. 109 geht hervor, daß unsere Wanderer Kreise von etwa 3,5 km im Durchmesser, d. h. mit einem Umfang von etwa 10000 m beschrieben.

Nimmt man die mittlere Schrittlänge mit 0,7 m an, so wurden während jeder Kreiswanderung insgesamt $10000 : 0{,}7 \approx 14000$ Schritte zurückgelegt, nämlich 7000 mit dem rechten und ebensoviele mit dem linken Fuß. Daraus geht hervor, daß ein linker Schritt einen rechten um $\frac{630}{7000}$ mm übertrifft (d. h. weniger als 0,1 mm). So winzig klein ist der Unterschied und führt doch zu so schwerwiegenden Folgen!

Der Halbmesser des von einem herumirrenden Wanderer beschriebenen Kreises hängt von der Längendifferenz des rechten und linken Schrittes ab. Die Abhängigkeit kann leicht festgestellt werden. Unter Zugrundelegung von 0,7 m je Schritt ist die Anzahl der im Laufe eines Kreises zurückgelegten Schritte gleich $\frac{2\pi r}{0{,}7}$.

Hier ist r der Halbmesser des Kreises in Metern. Es sind $\frac{2\pi r}{2 \cdot 0{,}7}$ linke und ebensoviele rechte Schritte notwendig. Multiplizieren wir diese Zahl mit der Differenz der Schrittlänge x, dann erhalten wir die Längendifferenz der beiden konzentrischen Kreise, die von dem linken und rechten Fuß jeweils zurückgelegt wurden. Wir schreiben

$$\frac{2\pi r x}{2 \cdot 0{,}7} = 2\pi\, 0{,}1 \quad \text{oder} \quad r x = 0{,}14.$$

r und x ist in Metern auszudrücken.

Ist die Längendifferenz der Schritte bekannt, so kann der Kreishalbmesser leicht berechnet werden. Wir wollen diesen für die Teilnehmer des Versuches auf dem Markusplatz in Venedig berechnen und die größten Halbmesser der von den Versuchspersonen beschriebenen Kreise ausrechnen.

Keine der Versuchsperson hat die Gebäudefassade DE (Abb. 108) erreicht. Der größte Halbmesser des Kreisbogens AB läßt sich mit Hilfe der bekannten Entfernung $AC = 41$ m und der Sehne BC (maximal 175 m) berechnen. Man bestimmt ihn mit Hilfe des Sehnensatzes:

$$2r = \frac{BC^2}{AC} + AC = \frac{175^2}{41} + 41 \approx 786 \text{ m}$$

daraus folgt: Der größte Halbmesser r beträgt etwa 393 m.

Wenn dieser Wert bekannt ist, können wir aus der ermittelten Formel $r x = 0{,}14$ die kleinste Längendifferenz der einzelnen Schritte bestimmen:

$$393\, x = 0{,}14 \quad \text{und} \quad x = 0{,}35 \text{ mm}$$

Der Längenunterschied zwischen dem rechten und linken Schritt bei den Versuchsteilnehmern betrug mindestens 0,35 mm.

Hie und da liest und hört man, die Tatsache des Irrens im Kreise, ohne sich orientieren zu können, hänge von der unterschiedlichen Länge des rechten und linken Beines ab. Da bei den meisten Menschen das linke Bein länger als das rechte ist, müssen die Menschen beim orientierungslosen Gehen von der eingeschlagenen Richtung unweigerlich nach rechts abbiegen. Die Erklärung ist jedoch nicht genau genug. Nicht die *Beinlänge*, sondern die *Schrittlänge* ist am wichtigsten und die Ursache für das Abirren vom geraden Wege.

Umgekehrt können auch bei genau gleichlangen Beinen Schritte von verschiedener Länge zurückgelegt werden, und zwar dann, wenn das eine Bein weiter vorgetragen wird als das andere.

Aus dem gleichen Grunde wird ein Mann in einem Ruderboot sein Fahrzeug unweigerlich im Kreise links herumführen, sofern er mit dem rechten Arm weiter ausholt als mit dem linken. Auch Tiere, die rechts und links nicht gleichlange Schritte zurücklegen, Vögel, die ihre Flügel rechts und links nicht mit der gleichen Kraft schwingen – sie alle bewegen sich im Kreise, sooft sie nicht in der Lage sind, die

Geradeausbewegung mit dem Auge zu kontrollieren. Auch hier ist die Differenz zwischen der Bewegungsstärke der rechten und linken Gliedmaßen äußerst gering. Durch die hier entwickelte Betrachtung verlieren die weiter oben berichteten Tatsachen das Odium des Geheimnisvollen und wirken eigentlich ganz natürlich. Im Gegenteil, es wäre sonderbar, wenn Menschen und Tiere die gerade Richtung einhalten könnten, ohne durch das Auge überwacht zu werden. Unentbehrliche Voraussetzung für diese Bewegung wäre strengste körperliche Symmetrie, die für die Geschöpfe der lebenden Natur völlig undenkbar ist. Die geringste Abweichung von der mathematisch vollkommenen Symmetrie muß unweigerlich die Bewegung in einem Kreisbogen zur Folge haben. Nicht das Objekt unseres Staunens ist ein Wunder, sondern umgekehrt, – sonderbar ist es, daß wir immer bereit sind, die geradlinige Bewegung als natürlich anzunehmen.

Die Unmöglichkeit, die gerade Richtung einzuhalten, bildet im Leben des Menschen ein ernstes Hindernis. In den meisten Fällen schützen ihn Kompaß, Wege und Karten vor den Folgen dieses Orientierungsmangels.

Anders verhält es sich bei den Tieren, besonders bei den Bewohnern der Wüste, Steppe und des Meeres. Die körperliche Asymmetrie dieser Tiere, die sie stets zwingt, anstatt auf geraden auf kreisförmigen Bahnen zu wandern, ist ein sehr wesentlicher Existenzfaktor. Durch diese Eigenschaft sind sie nämlich mit einer unsichtbaren Kette an den Ort ihrer Geburt gefesselt; sie sind außerstande, sich von diesem Revier weit zu entfernen. Ein Löwe, der den Mut hat, eine weite Strecke in die Wüste vorzustoßen, kehrt bald unweigerlich zurück; Möwen, die ihren Heimatfelsen verlassen und weit hinaus ins offene Meer fliegen, können es nicht unterlassen, in ihr angestammtes Nest zurückzukehren. Es sei gleich hierzu bemerkt, daß der ferne Zug der Vögel, die in gerader Bahn ganze Kontinente und Ozeane überqueren, angesichts dieser Tatsache um so rätselhafter erscheint.

Messungen mit der Hand

Der Knabe aus dem Mine-Reed-Roman war nur dadurch in der Lage, seine Aufgabe zu lösen, weil er kurz zuvor seine Körpergröße nachgemessen und das Ergebnis noch im Kopf hatte. Es wäre gar nicht übel, wenn sich jedermann sein eigenes »lebendes Metermaß« zunutze macht, damit wir im Notfall mit Hilfe dieses »Geräts« messen können. Man merke sich ferner, daß bei den meisten Menschen die Entfernung zwischen den Spitzen der ausgebreiteten Arme ihrer Körpergröße gleich ist (Abb. 111). Es ist eine Regel, die von dem berühmten Leonardo da Vinci entdeckt wurde. Auf diese Weise können wir unser »lebendes Metermaß« bequemer handhaben als der besagte Knabe im Schiffsladeraum. Die durchschnittliche Körpergröße eines erwachsenen Menschen beträgt etwa 1,70 m. Das kann man sich leicht merken. Man darf sich indessen auf die Durchschnittsgröße nicht verlassen. Jedermann sollte sein Körpermaß und den Abstand zwischen den ausgebreiteten Armen selbst nachmessen.

Für kleinere, ohne Meßlineal durchzuführende Messungen sollte sich jedermann die Länge seiner »Spanne«, d. h. die Entfernung zwischen gespreiztem

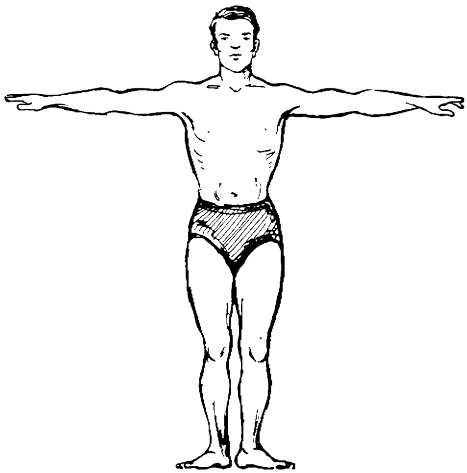


Abb. 111. Die Regel von Leonardo da Vinci.

Daumen und kleinem Finger (Abb. 112), merken. Bei einem Erwachsenen beträgt sie ungefähr 18 cm bis 20 cm. Bei jungen Menschen ist die Spanne kleiner.

Für den gleichen Zweck ist es ratsam, sich die Länge des Zeigefingers zu merken, man merkt sich zwei Größen: einmal die Länge von der Wurzel des Mittelfingers (Abb. 113), ein andermal von der Daumenwurzel. Ebenso sollten Sie die größte Entfernung zwischen den Kuppen des Zeige- und Mittelfingers kennen, die bei einem Erwachsenen rund 10 cm beträgt (Abb. 114), und schließlich sollte man wissen, wie breit die eigenen Finger sind.

Die drei aneinandergepreßten mittleren Finger einer Hand haben eine Breite von 5 bis 6 cm.

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, sind Sie in der Lage, verschiedene Gegenstände sogar in vollständig verdunkelten Räumen ausreichend genau mit den bloßen Händen auszumessen.

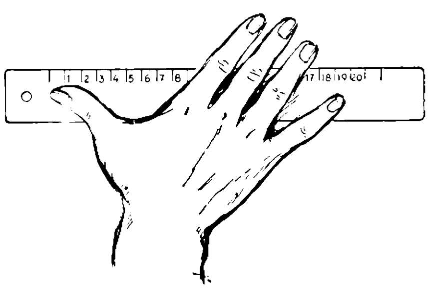


Abb. 112. Der Abstand zwischen den Fingerspitzen.

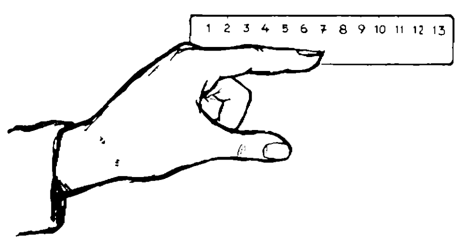


Abb. 113. Die Länge des Zeigefingers.

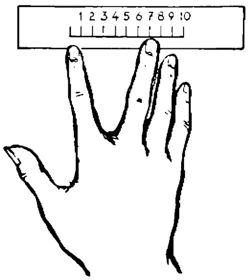


Abb. 114. Der Abstand zwischen den Enden des Zeige- und Mittelfingers.

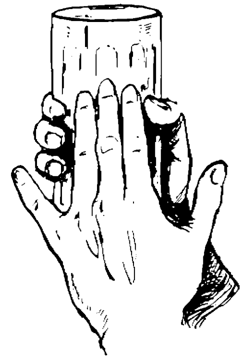


Abb. 115. Der Umfang des Wasserglases wird mit der »bloßen Hand« gemessen.

Abb. 115 ist ein Beispiel hierfür: Wir messen den Umfang eines Wasserglases mit den Fingern. Wenn wir uns das vorher Gesagte gemerkt haben, dann erhalten wir einen Umfang von etwa 18 cm + 5 cm = 23 cm.

Der rechte Winkel im Dunkeln

Aufgabe

Kehren wir noch einmal zu unserem Knaben im finsteren Laderaum zurück und fragen, wie er vorgegangen ist, um einen rechten Winkel zu erhalten. Im Romane lesen wir nach: »Ich legte an den hervorspringenden Stab das lange Ende so an, daß die beiden Stäbe einen rechten Winkel bildeten.«

Führen wir diese Operation im Dunkeln durch und verlassen uns dabei nur auf die Wahrnehmungen unserer Muskulatur, so ist ein beträchtlicher Fehler festzustellen. Dennoch besaß der Knabe in seiner schwierigen Lage ein zuverlässiges Mittel, mit dessen Hilfe er einen rechten Winkel konstruieren konnte. Was war das für ein Mittel?

Lösung

Wir greifen auf den Pythagoreischen Lehrsatz zurück und fertigen aus einigen Leisten ein Dreieck an, dessen Seiten so lang gewählt werden, daß ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. Am einfachsten ist es, zu diesem Zweck Leisten zu nehmen, deren Längen in beliebigen Einheiten ausgedrückt, sich wie 3 zu 4 zu 5 verhalten (Abb. 116). Es ist ein uraltes Verfahren, das schon in Ägypten beim Bau der Pyramiden benutzt wurde. Aber auch heute noch greift man bei manchen Bauarbeiten gern auf das gleiche Verfahren zurück.

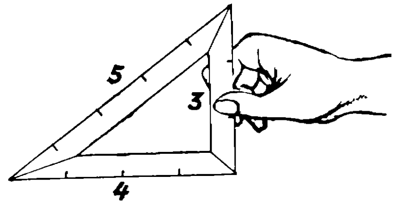


Abb. 116. Das einfachste rechtwinklige Dreieck, dessen Seitenlängen sich zueinander wie ganze einfache Zahlen verhalten.

Altes und Neues über den Kreis

Praktische Geometrie bei den Ägyptern und Römern

Jeder Schuljunge kann heute die Länge des Kreisumfanges nach dem Durchmesser viel genauer ausrechnen als der allerweiseste Priester des alten Pyramidenreiches oder der geschickteste Baumeister der römischen Antike. Die Ägypter nahmen an, daß der Umfang des Kreises seinen Durchmesser um das 3,16fache übertrifft, die Römer dachten um das 3,12fache. Das richtige Verhältnis ist jedoch 1 : 3,14159.

Ägyptische und römische Mathematiker fanden das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser einfach als Erfahrungswert ihrer Versuche und nicht als ein Produkt genauer geometrischer Rechnungen. Wie kam es nun, daß sie so fehlerhaft gemessen haben? Konnten sie nicht einfach einen Bindfaden um irgendeinen runden Gegenstand legen, den Faden dann strecken und seine Länge ausmessen?

Zweifellos verfuhren sie auf diese Weise. Denken Sie aber ja nicht, daß nach dieser Methode ein einigermaßen genaues Ergebnis erzielt wird. Stellen Sie sich eine runde Vase vor, deren Durchmesser 100 mm beträgt. Der Kreisumfang am Boden beträgt doch 314 mm. Wenn Sie jedoch den entsprechenden praktischen Versuch machen, so werden sie durch die Fadenmessung wohl kaum dieses Verhältnis erhalten. Sie können sich leicht um einen Millimeter irren, und dann erhalten Sie $\pi = 3{,}13$ oder 3,15. Wenn Sie dabei bedenken, daß man den Durchmesser der Vase ebenfalls schwerlich genau messen und daß eine Fehlmessung von 1 mm auch hier möglich ist, so werden Sie feststellen, daß π in ziemlich weiten Grenzen schwankt, nämlich zwischen

$$\frac{313}{101} \quad \text{und} \quad \frac{315}{99}$$

oder, in Dezimalbrüchen ausgedrückt, zwischen 3,09 und 3,18.

Sie sehen also, daß man bei der Bestimmung von π nach dem beschriebenen Verfahren zu Ergebnissen kommt, die von dem uns bekannten π abweichen: einmal 3,1, dann 3,12, 3,17 usw. Wohl kann man auch 3,14 erhalten, aber für den Rechner hat ja diese Zahl keine höhere Bedeutung als die anderen Werte.

Derartige empirische Rechenverfahren können niemals einigermaßen annehmbare Werte für π ergeben. Nun begreifen Sie schon eher, warum die Antike das richtige Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises nicht kannte, und es bedurfte schon des Genies eines Archimedes, um für π den Wert $3\frac{1}{7}$ zu ermitteln – und zwar ohne Messungen, ganz allein durch Überlegungen.

In dem Lehrbuch der Algebra des arabischen Mathematikers Mohammed-ben-Musa (um 820) können wir Folgendes über die Berechnung des Kreisumfanges nachlesen:

»Die beste Methode ist die Multiplikation des Durchmessers mit $3\frac{1}{7}$. Es ist das schnellste und leichteste Verfahren. Allah allein mag ein besseres kennen ...«

Wir wissen heute, daß die archimedische Zahl $3\frac{1}{7}$ das Verhältnis vom Kreis zu seinem Durchmesser nicht genau ausdrückt. Es ist theoretisch nachgewiesen, daß man das Verhältnis durch einen genauen Bruch überhaupt nicht wiedergeben kann. Wir können das Verhältnis nur annähernd wiedergeben; allerdings genügt diese Annäherung den allerstrengsten Ansprüchen der Praxis. Ludolf von Ceulen, der im 16. Jahrhundert in Leyden als Mathematiker lebte, brachte es mit kaum vorstellbarer Geduld fertig, die Zahl mit 35 Dezimalstellen genau auszurechnen. In seinem Testament hatte er bestimmt, daß diese Zahl auf seinem Grabmal eingemeißelt werden sollte.*

Hier ist sie:

$$3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

1873 veröffentlichte ein gewisser Shanks die Zahl mit 707 Zahlen hinter dem Komma! Diese unendlich lange, den angenäherten π-Wert ausdrückende Zahlenreihe hat weder praktische noch theoretische Bedeutung. Der in heutiger Zeit geäußerte Wunsch, Shanks Rekord zu brechen, verdankt sein Entstehen lediglich dem Müßiggang und der Jagd nach aufgeblähten »Rekordleistungen.« So haben in den Jahren 1946/47 Herr Ferguson von der Universität Manchester und unabhängig von diesem, Wrench in Washington, π mit 808 Dezimalstellen berechnet. Beide konnten befriedigt feststellen, daß die Rechnung sich gelohnt hatte, weil sie in Shanks Zahl einen Fehler bei dem 528. Dezimalzeichen fanden.

Wenn wir die Länge des Erdäquators mit einer Genauigkeit von 1 cm berechnen wollten und voraussetzten, daß wir den Erddurchmesser wirklich genau kennen, dann hätten zu diesem Zwecke 9 Dezimalstellen hinter dem Komma vollständig ausgereicht. Würden wir die Anzahl der Dezimalstellen verdoppeln, so wäre die erhaltene Genauigkeit so groß, daß wir die Länge des Kreisumfanges mit einem Halbmesser gleich der Entfernung zwischen Sonne und Erde bis zu 0,0001 mm genau (etwa $\frac{1}{1000}$ der Breite eines Menschenhaares) berechnen könnten.

Der sowjetische Mathematiker Grave hat sehr einleuchtend die absolute Nutzlosigkeit bereits der ersten hundert Dezimalstellen von π für den praktischen Gebrauch gezeigt. Er hat folgende Rechnung aufgestellt. Stellen wir uns eine Kugel mit einem Radius gleich der Entfernung zwischen Erde und Sirius (das ist, in Kilometern ausgedrückt, die Zahl 132 mit 10 Nullen oder $132 \cdot 10^{10}$) vor. Füllen wir diese Kugel mit Bazillen, wobei jeder Kubikmillimeter der Kugel eine Billion (10^{10}) Bazillen faßt, und legen wir sämliche Bazillen auf eine gerade Strecke so,

* In jener Zeit wurde das Verhältnis noch nicht mit π bezeichnet; diese Bezeichnung wurde erst im 18. Jahrhundert durch den berühmten Mathematiker Leonhard Euler eingeführt. Euler wurde 1707 in Basel geboren. Er lebte von 1727–1741 und von 1766–1783 in Petersburg und hat hier zahlreiche grundlegende Werke ausgearbeitet.

daß die Entfernung zwischen jeweils zwei benachbarten Bazillen wiederum der Entfernung zwischen Erde und Sirius entspräche, so wären wir in der Lage, den Umfang des auf diese Weise entstandenen Riesenkreises mit mikroskopischer Genauigkeit bis zu einem Millionstel Millimeter zu berechnen, wenn wir zu diesem Zwecke π mit 100 Dezimalstellen einsetzen.

Der französische Mathematiker François Arago bemerkt hierzu ganz richtig: »Wir würden in bezug auf Genauigkeit bei diesen Werten nichts gewinnen, auch wenn das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser durch eine absolut genaue Zahl ausgedrückt werden könnte«.

Für die üblichen Rechnungen mit π genügt es vollständig, wenn wir uns zwei Stellen hinter dem Komma merken (3,14). Für genaue Berechnungen nimmt man 4 Dezimalstellen (3,1416); (die letzte Stelle ist 6, nicht 5, weil nach ihr eine Zahl folgt, die größer ist als 5).

Es gibt kleine Verse oder Sprüche, die dazu verhelfen sollen, die Zahl π zu behalten. In diesen Erzeugnissen mathematischer Poesie werden die Worte derart aneinandergereiht, daß die Zahl der Buchstaben in den Worten jeweils der Zahl der betreffenden Dezimalstelle von π entspricht.

Es gibt ein englisches Gedicht aus 13 Worten; es sind also 12 Dezimalstellen hinter dem Komma vorhanden. Das entsprechende deutsche Gedicht umfaßt 24 Worte, das französische sogar 30 Worte. Es gibt übrigens auch eines mit 126 Worten! Nachstehend bringen wir den Text einiger Gedichte:

Englisches Gedicht

See I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks ofttimes resisting.

Deutsches Gedicht

Wie, o, dies π,
Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.

Französisches Gedicht

Que j'aime a faire apprendre un
nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Sie sind zwar interessant, aber zu schwerfällig. Unter den Schülern Terskows, des Mathematiklehrers an einer Moskauer Mittelschule, ist folgende von ihm geprägte Gedächtnishilfe leicht zu merken:

»Зто	я	знаю	и	помню	прекрасно«
3	1	4	1	5	9

»Das kenne ich und weiß es ganz genau.«

»Пи	многие	знаки	мне	лишни,	напрасны«
2	6	5	3	5	8

»Viele Ziffern für π sind überflüssig und unnötig.«

Der Verfasser des vorliegenden Buches verzichtet auf das Dichten von Versen für π; er schlägt folgende Frage in Prosa vor:

»Что я знаю о кругах?«
3 1 4 1 6
»Was weiß ich vom Kreis?«

Hier irrt Jack London

Folgende Stelle in Jack Londons Roman »Die Herrin des großen Hauses« bietet uns Material für eine geometrische Rechnung.

»Mitten in einem quadratischen Felde befand sich ein stählerner Mast, der tief in die Erde eingegraben war. Von der Mastspitze führte ein Stahlseil, dessen anderes Ende an einem Schlepper befestigt war. Der Traktorenfahrer warf den Hebel um, der Motor begann zu arbeiten.

Nun bewegte sich der Schlepper vorwärts, wobei er einen Kreis um den Mast als Mittelpunkt beschrieb.

Graham meinte dazu: ›Damit die Anlage besser arbeitet, bleibt nur noch übrig, den Kreis in ein Quadrat umzuwandeln.‹

›Stimmt, auf einem quadratischen Acker bleibt bei unserer bisherigen Arbeitsweise viel Boden ungepflügt.‹

Graham rechnete nach und sagte dann: ›Wir verlieren etwa drei Äcker bei einem Feldstück von 10 Äckern.«

Wir schlagen dem Leser vor, die Rechnung nachzuprüfen.

Lösung

Die Rechnung ist falsch. Der Verlust liegt unter 0,3 des Bodens. Angenommen, die Seite eines Quadrats ist a; seine Fläche ist demnach a^2. Der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises ist ebenfalls a und seine Fläche $\frac{\pi a^2}{4}$. Der brachliegende Teil eines Feldquadrats beträgt demnach

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2 = 0{,}22\, a^2 .$$

Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß der unbearbeitete Teil des Ackerbodens nicht 30%, wie Graham angenommen hatte, sondern nur 22% beträgt.

Der Nadelwurf

Das zweifellos eigenartigste und überraschendste Verfahren zur Bestimmung der Zahl π ist folgendes:

Man nimmt eine kurze (etwa 2 cm lange) Nähnadel (am besten eine Nadel mit abgebrochener Spitze, damit sie gleichmäßig stark ist) und zeichnet auf einem Blatt Papier eine Reihe dünner paralleler Striche, die voneinander um die doppelte Nadellänge entfernt sind. Sodann läßt man die Nadel aus einer beliebigen Höhe auf das Papier fallen und merkt sich, ob die Nadel dabei eine der Linien schneidet

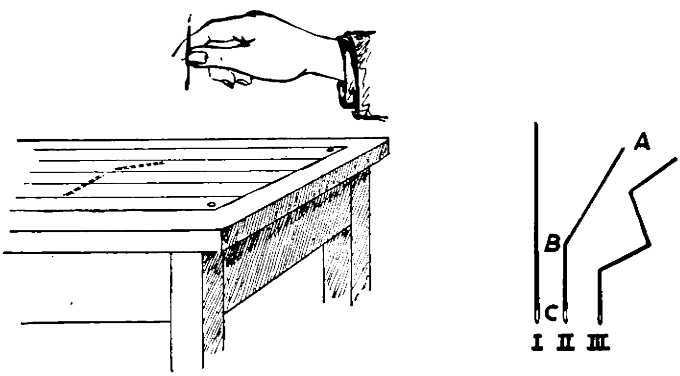


Abb. 117. Der Nadelwurfversuch von Buffon.

oder nicht (Abb. 117, links). Damit die Nadel beim Fall nicht federt, legt man unter das Papier ein Löschblatt oder ein Stück Tuch. Man wiederholt das Experiment sehr häufig, d. h., man wirft die Nadel hundert- oder besser tausendmal und merkt sich jedesmal, ob die Nadel einen Strich geschnitten hat, wobei auch das bloße Anliegen des Nadelendes an eine der Linien als »Schnittpunkt« gewertet wird. Teilt man jetzt die Gesamtzahl der »Nadelfälle« durch die Zahl jener Fälle, wo die Nadel einen Strich schneidet, so erhält man als Ergebnis die Zahl π. (Selbstverständlich nur mehr oder weniger angenähert).

Wir wollen nun erklären, wieso das kommt. Nehmen wir an, die Anzahl der wahrscheinlichen Fälle, in denen die Nadel einen Strich schneidet, ist K. Die Länge unserer Nadel ist 20 mm. Beim Schneiden muß der Schnittpunkt selbstverständlich in irgendeinem dieser Millimeter liegen; kein Millimeter, kein Abschnitt der Nadel ist einem anderen Teil der Nadel gegenüber in Vorteil. Die wahrscheinlichste Zahl der Schnitte eines jeden Millimeters beträgt demnach $\frac{K}{20}$. Damit beträgt die Schnittzahl für 3 mm Nadellänge $\frac{3K}{20}$, für eine laufende Länge von 11 mm gleich $\frac{11K}{20}$ usw. Die wahrscheinliche Schnittzahl steht in einem direkten Verhältnis zur Länge der Nadel.

Diese Proportionalität wird auch dann beibehalten, wenn die Nadel gebogen ist. Nehmen wir an, die Nadel sei nach Abb. 117, II gebogen. Dabei ist das Teilstück $AB = 11$ mm, $BC = 9$ mm. Die wahrscheinlichste Schnittzahl für das Stück AB beträgt demnach $\frac{11K}{20}$ und für BC $\frac{9K}{20}$, während für die gesamte Nadel diese Zahl $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$ ist, d. h. nach wie vor K erreicht.

Wir können die Nadel auch anders biegen oder mehrfach knicken (Abb. 117, III) – die Zahl der Schnitte wird dadurch nicht beeinflußt.

Merken Sie sich bitte, daß eine entsprechend gebogene Nadel die Striche auch in zwei oder mehr Punkten gleichzeitig schneidet. Ein derartiger Fall der Nadel wird entsprechend als zwei, drei usw. Schnitte gewertet, weil der erste Schnitt bei der Berechnung des einen Teilstücks, der zweite bei der Berechnung des nächsten Teilstückes usw. gilt.

Nun stellen Sie sich vor, daß wir eine kreisförmig gebogene Nadel werfen, deren Durchmesser gleich dem Abstand zwischen zwei Parallelen unseres vorbereiteten Blattes ist. Dieser Durchmesser ist also zweimal größer als unsere gerade Nadel. Ein derartiger Ring muß entweder einen Strich zweimal schneiden oder gleichzeitig zwei Gerade berühren, – auf jeden Fall finden zwei Berührungen statt. Ist die Gesamtzahl der Würfe N, so ist die Zahl der Schnittpunkte $2\,N$. Die gerade Nadel ist so lang wie der Halbmesser des Ringes. Der Ring ist also 2π-mal so lang wie die gerade Nadel.

Nun haben wir aber festgestellt, daß die wahrscheinliche Schnittpunktzahl der Nadellänge direkt proportional ist. Daher muß die wahrscheinliche Anzahl K der Überschneidungen der geraden Nadel mit den Strichen $2N$ geteilt durch 2π sein. Wir erhalten daher:

$$K = \frac{2N}{2\pi} \qquad \text{oder} \qquad \pi = \frac{\text{Wurfzahl}}{\text{Schnittpunktzahl}}$$

Je häufiger man die Nadel wirft, um so genauer ist die Zahl.

In der Mitte des vorigen Jahrhunderts führte der Schweizer Astronom R. Wolf 5000 Nadelwürfe durch und erhielt für π den Wert 3,159. Dieser Ausdruck ist allerdings nicht so genau wie die archimedische Zahl.

Wie Sie sehen, kann das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser durch Versuche festgestellt werden. Das Interessanteste dabei ist, daß man hierzu weder einen Kreis, noch einen Durchmesser zu zeichnen braucht, d.h., man kommt ohne Zirkel aus. So vermag ein Mensch, der nicht die geringste Vorstellung von der Geometrie, ja sogar vom Kreis hat, π zu bestimmen, wenn er die Geduld aufbringt, die Nadel sehr oft auf das Papier fallen zu lassen.

Das Aufrollen des Kreises

Aufgabe

In zahlreichen praktischen Fällen genügt es, für π die Zahl $3\frac{1}{7}$ zu setzen; man rollt einen Kreisumfang auf, indem man den Durchmesser auf einer Geraden $3\frac{1}{7}$ mal abmißt. Man kann bekanntlich eine Strecke genau in 7 gleiche Teile teilen.

Es gibt weitere Verfahren zur angenäherten »Streckung« eines Kreisumfanges, die im Handwerk, z. B. bei Tischler- und Klempnerarbeiten, üblich sind. Wir gehen auf diese Methoden nicht weiter ein, wollen hier jedoch eine ziemlich einfache Methode beschreiben, die sehr genaue Resultate ergibt.

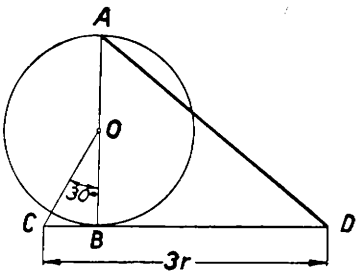


Abb. 118. Ein angenähertes geometrisches Verfahren zum Abwälzen eines Kreises.

Will man den Kreis O mit dem Halbmesser r (Abb. 118) aufrollen, so zeichnet man den Durchmesser AB. Im Punkt B zeichnen wir eine Tangente CD dazu. Dann wird vom Mittelpunkt die Gerade OC unter einem Winkel von 30° zu AB

gezogen. Vom Punkt C aus werden drei Halbmesser des betreffenden Kreises auf CD angelegt. Den Endpunkt D verbindet man mit A. Dann ist die Länge der Strecke AD gleich dem halben Kreisumfang. Verlängern wir AD auf das Doppelte, so erhalten wir den aufgerollten Kreis O.

Der Fehler beträgt weniger als 0,0002 r.

Worauf beruht diese Rechenoperation?

Lösung

Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz gilt:

$$CB^2 + OB^2 = OC^2$$

Bezeichnet man den Radius OB mit r und berücksichtigt man, daß $CB = \frac{OC}{2}$ (die dem Winkel 30° gegenüberliegende Kathete), so erhalten wir:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2$$

Daraus folgt:

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Im Dreieck ABD haben wir ferner:

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2}$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3{,}14153r$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der genau ausgerechneten Zahl π (π = 3,141593), so sehen wir, daß die Differenz nur 0,00006 r beträgt. Wenn wir nach dieser Methode einen Kreis mit 1 m Umfang aufrollen, dann ist der Fehler bei dem halben Kreisumfang nur 0,00006 m und für den ganzen Kreisumfang entsprechend 0,00012 m oder 0,12 mm. Das entspricht etwa der Stärke eines Menschenhaares.

Die Quadratur des Kreises

Es ist unwahrscheinlich, daß der Leser noch niemals etwas von der »Quadratur der Kreises« gehört hat. Es ist jene berühmte geometrische Aufgabe, über die sich schon vor 20 Jahrhunderten die Mathematiker den Kopf zerbrochen haben. Ja, ich bin sogar davon überzeugt, daß dieser oder jener Leser selbst den Versuch zur Lösung der Aufgabe unternommen hat. Die Mehrzahl besteht aber wohl aus jenen, die über die Schwierigkeit der Lösung dieser klassischen, unlösbaren Aufgabe staunen. Viele Leute, die von anderen gehört haben, die Aufgabe über die Quadratur des Kreises sei unlösbar, geben sich weder über das Wesen der Aufgabe selbst, noch über die Schwierigkeit ihrer Lösung Rechenschaft.

In der Mathematik gibt es ja zahlreiche theoretische und praktische Aufgaben, die weit interessanter sind als die Aufgabe über die Quadratur des Kreises. Aber keine dieser Aufgaben ist so »volkstümlich« geworden, wie die Aufgabe über die

Quadratur des Kreises, die bereits zu einer Art Gleichnis wurde. Unzählige Amateure und die bedeutendsten Fachmathematiker der Welt haben sich im Laufe der letzten zwei Jahrtausende mit dieser Aufgabe beschäftigt.

Die Quadratur des Kreises zu finden, bedeutet, ein Quadrat zu zeichnen, dessen Fläche der Fläche des betreffenden Kreises genau gleich ist. In der Praxis kommt die Aufgabe sehr häufig vor, und die praktische Lösung macht keine Schwierigkeiten, weil sie mit einem beliebigen Genauigkeitsgrad durchführbar ist. Die klassische Aufgabe der Antike verlangt jedoch die genaue Ausführung der Zeichnung mit Hilfe von nur zwei Zeichenoperationen, nämlich den Kreis mit dem betreffenden Halbmesser um einen Mittelpunkt zu ziehen und eine Gerade durch zwei gegebene Punkte zu legen.

Man darf – mit einem Wort – nur zwei Zeichengeräte benutzen: Zirkel und Lineal.

In den Kreisen der Nichtmathematiker ist die Ansicht verbreitet, die ganze Schwierigkeit sei darauf zurückzuführen, daß das Verhältnis vom Kreisumfang zum Durchmesser (die Zahl π) nicht durch eine endliche Zahl ausgedrückt werden kann. Das ist insofern richtig, als die Lösbarkeit der Aufgabe von der besonderen Natur der Zahl π abhängt. Aus der Formel der Kreisfläche $F = \pi r^2$ oder (was ja das gleiche ist) $F = \pi r \cdot r$, geht klar hervor, daß der Flächeninhalt eines Kreises der Fläche eines Rechtecks gleichen muß, dessen eine Seite die Länge r hat und dessen andere Seite das π-fache von r lang ist. Folglich handelt es sich um die Zeichnung einer Strecke, die π-mal länger ist als die vorhandene. Wie wir wissen, ist π weder gleich $3\frac{1}{7}$, noch 3,14, noch 3,141459. Die Anzahl der Zahlen, die π ausdrücken, dehnt sich ins Unendliche aus.

Diese Eigentümlichkeit der Zahl π (sie heißt *Irrationalität*) ist bereits im 18. Jahrhundert durch die Mathematiker Lambert und Legendre festgestellt worden. Und trotzdem vermochte das Wissen um die Irrationalität von π die Fachmathematiker von der Mühe um die Lösung der Quadratur des Kreises nicht abzuhalten*. Sie wußten, daß durch die Irrationalität von π die Aufgabe an sich noch keineswegs hoffnungslos war. Es gibt irrationale Zahlen, mit deren Hilfe die Geometrie absolut genaue Konstruktionen ausführen kann. Zum Beispiel ist eine Strecke zu zeichnen, die $\sqrt{2}$-mal länger ist als die betreffende Strecke. Ebenso wie π ist auch die Zahl $\sqrt{2}$ irrational.

Und dennoch gibt es nichts Leichteres, als die gesuchte Strecke abzutragen. Wie wir uns erinnern, ist $\sqrt{2}$ die Seite eines in den Kreis eingezeichneten Quadrats mit dem Halbmesser a. Jeder Schüler bringt auch ohne Schwierigkeiten die Konstruktion des Abschnittes $a\sqrt{3}$ zustande. (Es ist die Seite eines eingezeichneten gleichseitigen Dreiecks.)

Ferner bieten Konstruktionen nach dem sehr verwickelt aussehenden Ausdruck

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

* Die Eigentümlichkeit einer irrationalen Zahl besteht darin, daß sie durch keinen Bruch genau ausgedrückt werden kann.

keinerlei Schwierigkeit, weil sie auf die Konstruktion eines regelmäßigen 64-Ecks zurückgeführt werden.

Sie sehen also, daß man durch Einführung eines irrationalen Faktors in den Ausdruck diesen dennoch mit Hilfe des Lineals und des Zirkels konstruieren kann. Die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises besteht nicht allein in der Tatsache, daß π eine irrationale Zahl ist, sondern sie hängt auch noch von einer anderen Eigenschaft dieser Zahl ab. Die Zahl π ist nämlich keine *algebraische* Zahl, d. h., man kann sie nicht als Resultat der Lösung irgendeiner Gleichung mit rationalen Beiwerten erhalten. Man bezeichnet derartige Zahlen als *transzendente* Zahlen. Vieta, ein Mathematiker im 16. Jahrhundert, fand, daß

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}} \text{ ist.}$$

Mit Hilfe dieser Formel für π wäre die Aufgabe der Quadratur des Kreises lösbar, wenn die Zahl der Rechenoperationen endlich wäre. Man könnte dann nämlich diesen Ausdruck geometrisch konstruieren. Da jedoch die Anzahl der Quadratwurzeln darin unendlich ist, bringt uns die Vietasche Formel der Lösung nicht näher.

Die Aufgabe der Quadratur des Kreises scheitert also an der Transzendenz der Zahl π, d. h., man kann diese Zahl durch Lösung einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten nicht erhalten. Diese Eigenart der Zahl π wurde 1889 durch den deutschen Mathematiker Lindemann klar bewiesen. Eigentlich ist dieser Gelehrte der einzige Mann, der die Quadratur des Kreises gelöst hat, wenn auch in negativem Sinne; er hat ja mit Recht behauptet, daß die gesuchte Konstruktion geometrisch undurchführbar ist. Die Jahrhunderte anhaltenden Forschungen der Mathematiker auf diesem Gebiet waren damit 1889 abgeschlossen. Leider hören zahlreiche mit dem Wesen der Aufgabe nicht vertraute Amateure auch heute noch nicht auf, zwecklose Versuche in dieser Richtung zu unternehmen.

Soweit die theoretische Seite der Angelegenheit. Was nun die Praxis anbelangt, so ist diese auf eine *genaue* Lösung der Aufgabe keineswegs angewiesen. Die verbreitete Ansicht, nach der die Lösung des Problems der Quadratur des Kreises von welterschütternder Bedeutung für das praktische Leben sein würde, ist absolut irreführend. Für das praktische Leben genügt es, Verfahren anzuwenden, die eine ausreichende Annäherung des Wertes gewährleisten.

Die Suche nach der Quadratur des Kreises wurde in dem Augenblick wertlos, als die ersten sieben bis acht Stellen der Zahl π errechnet waren. Für den praktischen Bedarf genügt der Wert $\pi = 3{,}1415926$ für alle Fälle. Keine Längenmessung kann Werte ergeben, die mit mehr als sieben Dezimalstellen ausgedrückt werden. Es hat also nicht den geringsten Zweck, π genauer als mit 8 Zahlen einzusetzen. Die Rechnung wird dadurch nicht genauer.

Drückt man den Halbmesser mit einer siebenstelligen Zahl aus, so erhält der Wert des Umfanges nicht mehr als sieben zuverlässige Stellen, auch dann nicht, wenn wir π mit hundert Dezimalstellen einsetzen. Es hat nicht den geringsten praktischen Wert, daß viele Mathematiker unendliche Mühe aufgewendet haben, um die Zahl π mit möglichst vielen Dezimalstellen ausdrücken zu können. Auch der wissenschaftliche Wert ihrer Arbeiten ist äußerst gering einzuschätzen. Es ist einfach ein Geduldsspiel. Wenn Sie Lust und Muße haben, so können Sie π mit beliebigen Dezimalstellen ausrechnen, wobei Sie die Leibnizsche Formel* als Grundlage verwenden können.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \quad \text{usw.}$$

Es ist eine arithmetische Übung, die, wie gesagt, »niemand« interessiert und die jene berühmte geometrische Aufgabe der Lösung nicht um einen Deut näherbringt.

Der französische Astronom Arago schrieb darüber folgendes: »Diejenigen, die die Quadratur des Kreises lösen wollen, fahren mit einer Rechnung fort, obgleich deren Unmöglichkeit heute als erwiesen gilt. Auch wenn die Lösung möglich wäre, bestünde daran kein praktisches Interesse. Es ist indessen müßig, über diesen Gegenstand weiter ein Wort zu verlieren: Männer, deren Verstand gelitten hat, und die weiterhin um die Lösung der Quadratur des Kreises bemüht sind, sind keinen Einwänden zugänglich. Diese Krankheit des Geistes existiert schon seit dem Altertum.«

Er kommt zu folgendem ironischen Schluß:

»In ihrem Kampf gegen die Sucher der Quadratur ist es den wissenschaftlichen Akademien aller Länder aufgefallen, daß sich diese Krankheit im Frühling meist stärker bemerkbar macht.«

Das Bingsche Dreieck

Wir wollen nun eine der annähernden Lösungen der Quadratur des Kreises betrachten, die für den praktischen Bedarf sehr bequem ist.

Das Verfahren besteht in der Berechnung des Winkels α (Abb. 119), dessen Seiten der Durchmesser AB und die Sehne $AC = x$ sind.

Die Berechnung dieses Winkels geht nicht ohne Hilfe der Trigonometrie. Es ist notwendig, neben der trigonometrischen Funktion

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

auch das Verhältnis der Ankathete durch die Hypotenuse einzuführen. Dieses Verhältnis heißt der »Kosinus« des von der Ankathete und der Hypotenuse eingeschlossenen Winkels:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

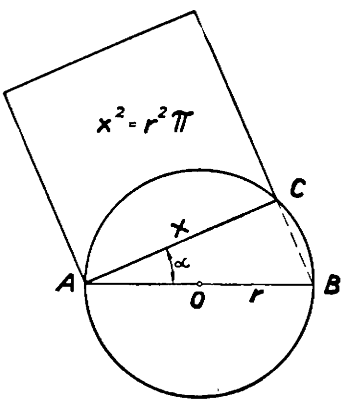


Abb. 119. Das Verfahren von Bing.

* Die Rechnung erfordert sehr viel Geduld, denn, um π mit nur 6 Dezimalstellen auszurechnen, müßte man viele Glieder in der betreffenden Reihe behandeln. Es gibt aber andere Methoden, mit denen π schnell bis auf 10 Dezimalstellen genau ausgerechnet werden kann.

In unserem Beispiel ergibt sich dann

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}$$

wobei r der Kreishalbmesser ist.

Die Seite des gesuchten Quadrats ist also $x = 2\,r\cos\alpha$ und seine Fläche $x^2 = 4\,r^2\cos^2\alpha$.

Andererseits soll jedoch die Fläche des Quadrats gleich πr^2, d. h., sie soll nach unserer Aufgabe der Fläche des betreffenden Kreises gleich sein.

Folglich ist $4\,r^2\cos^2\alpha = \pi r^2$ und daraus:

$$\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886$$

Wir finden in den Tabellen entsprechend:

$$\alpha = 27^\circ\,36'$$

Es genügt also, durch den betreffenden Kreis eine Sehne in einem Winkel $27^\circ\,36'$ zum Durchmesser zu legen, um die Seite eines Quadrats zu erhalten, dessen Flächeninhalt der Fläche des betreffenden Kreises gleich ist. Praktisch verfährt man dabei so, daß man ein Winkellineal (Dreieck) anfertigt, bei dem der eine spitze Winkel $27^\circ\,36'$ beträgt (der andere ist entsprechend $62^\circ\,24'$).

Sind wir im Besitz eines solchen Zeichendreiecks, so finden wir für jeden Kreis sofort die Seitenlänge des Quadrats mit dem gleichen Flächeninhalt*.

Wir geben noch einen Hinweis für diejenigen, die ein solches Dreieck selbst anfertigen wollen:

Da der Tangens von $27^\circ\,36'$ gleich 0,523 oder $\frac{23}{44}$ ist, so verhalten sich die Katheten unseres Dreiecks wie 23 : 44. Fertigen wir daher ein Dreieck an, dessen Katheten 22 cm und 11,5 cm lang sind, dann haben wir das, was wir brauchen. Selbstverständlich kann man solch ein Dreieck wie einen gewöhnlichen Zeichenwinkel benutzen.

Kopf oder Füße?

Ich glaube, es war eine Person aus einem Roman von Jules Verne, die ausrechnen wollte, welcher Körperteil eines Mannes im Laufe einer von ihm unternommenen Weltreise einen längeren Weg zurückgelegt hatte – der Kopf oder die Füße.

Aufgabe

Stellen Sie sich vor, Sie sind einmal um die Erde herumgegangen, und zwar am Äquator entlang. Um welchen Betrag ist die von dem Kopf zurückgelegte Strecke länger als die von den Fußspitzen zurücklegte?

Lösung

Die Füße haben den Weg von $2\pi r$ (wo r Halbmesser des Erdballs ist) zurückgelegt. Der Scheitel hat die Strecke $2\pi(r + 1{,}7)$ zurückgelegt, worin 1,7 m die Normalgröße eines Menschen ist.

---

* Dieses sehr handliche Verfahren wurde erstmalig von dem russischen Ingenieur Bing im Jahre 1830 vorgeschlagen; das beschriebene Zeichengerät wird demnach als Bingsches Dreieck bezeichnet.

Die vom Kopf zurückgelegte Strecke ist folglich um

$$2\pi(r + 1{,}7\,\text{m}) - 2\pi r = 2\pi \cdot 1{,}7\,\text{m} = 10{,}7\,\text{m}$$

länger als der Weg der Füße. Es ist interessant, daß die endgültige Antwort den Wert des Erdhalbmessers nicht enthält. Daraus folgt, daß wir das gleiche Resultat erzielen, wenn die Messung auf dem Jupiter oder auf einem der kleinsten Planetoiden durchgeführt wird.

Überhaupt hängt die Differenz zweier konzentrischer Kreise nicht von ihren Radien, sondern nur von ihrem gegenseitigen Abstand ab. Addieren wir zum Halbmesser der Erdbahn um die Sonne einen Zentimeter, so nimmt ihre Länge genau um den gleichen Betrag zu wie der Umfang eines Zehnpfennigstücks bei der Zunahme seines Halbmessers um ebenfalls einen Zentimeter.

Auf diesem verblüffenden geometrischen Paradoxon* beruht folgende Aufgabe, die in vielen Büchern über geometrische Spielereien vorkommt.

Um den Äquator wird eine Windung Draht fest herumgewickelt und anschließend um einen Meter verlängert. Wäre dann eine Maus in der Lage, unter diesem Draht hindurchzukriechen?

In den meisten Fällen lautet die Antwort, daß der durch die Lockerung um 1 m entstehende Zwischenraum, verglichen mit den 40 Millionen Metern des Erdumfanges, am Äquator winzig klein, kaum haaresbreit sein würde. In Wirklichkeit beträgt der Abstand von der Erdoberfläche

$$\frac{100}{2\pi}\,\text{cm} \approx 16\,\text{cm}.$$

Durch diesen Zwischenraum kriecht nicht nur eine Maus, sondern auch ein ausgewachsener Kater bequem hindurch.

Der Leser kann folgenden Versuch durchführen:

Messen Sie mit einem Stück Schnur den Umfang einer Tasse oder eines Tellers, geben dann einen Meter zu und messen den Abstand zwischen dem Gegenstand und dem neuen Umfang der Schnur. Machen Sie das gleiche bei einem größeren Gegenstand, z. B. Papierkorb oder Waschschüssel, so werden Sie feststellen, daß beide Zwischenräume gleich sind, nämlich 16 cm.

$$\frac{100}{2\pi}\,\text{cm} \approx 16\,\text{cm}.$$

Der Draht längs des Äquators

Aufgabe

Stellen Sie sich einmal vor, daß um die Erdkugel am Äquator ein Stahlband fest anliegend gespannt ist. Was geschieht, wenn dieses Band um 1° abkühlt? Das Band muß kürzer werden. Angenommen, es würde dabei weder reißen, noch sich mechanisch dehnen, wie tief wird es sich in die Erde graben?

* Als *Paradoxon* bezeichnet man eine wahre Erkenntnis, die auf den ersten Blick unwahrscheinlich erscheint, zum Unterschied vom *Sophismus*, einem Trugschluß, der nur den Schein des Wahren besitzt.

Lösung

Scheinbar kann die sehr unbedeutende Temperaturverminderung um einen Grad kein merkliches Eingraben oder keinen Einschnitt des Bandes in das Erdreich verursachen. Die Rechnung beweist allerdings, daß es anders aussieht.

Bei einer Abkühlung um 1° wird das Stahlband um ein Hunderttausendstel seiner Länge kürzer. Beträgt dessen Länge 40 Millionen Meter (Erdumfang am Äquator), so muß das Band, wie man leicht ausrechnen kann, um 400 Meter kürzer werden.

Der Halbmesser dieser kreisförmigen Schleife wird jedoch nicht um 400 Meter, sondern um einen viel geringeren Betrag verkürzt. Damit wir die Verkürzung des Halbmessers feststellen können, müssen wir 400 m durch 6,28, d. h. durch 2π teilen. Wir erhalten ungefähr 64 m. Daraus folgt, daß das um 1° abgekühlte Band sich unter diesen Bedingungen nicht um wenige Millimeter, sondern um mehr als 60 m in das Erdreich hineinpressen würde.

Tatsachen und Rechnungen

Aufgabe

Die Abb. 120 zeigt acht Kreise. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslos ab. Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen über die Kreise 1 bis 6?

Sie können die Angelegenheit freilich praktisch sofort nachprüfen. Legen Sie acht Geldstücke von gleicher Größe auf den Tisch wie auf der Zeichnung, drücken Sie sieben dieser Münzen fest auf den Tisch, und lassen Sie die Kante der achten Münze an den Kanten der übrigen abrollen. Damit Sie die Umdrehungszahl feststellen können, merken Sie sich die Stellung der geprägten Zahl. Jedesmal, wenn die Zahl in die ursprüngliche Stellung zurückkehrt, hat sich das Geldstück einmal um die eigene Achse gedreht.

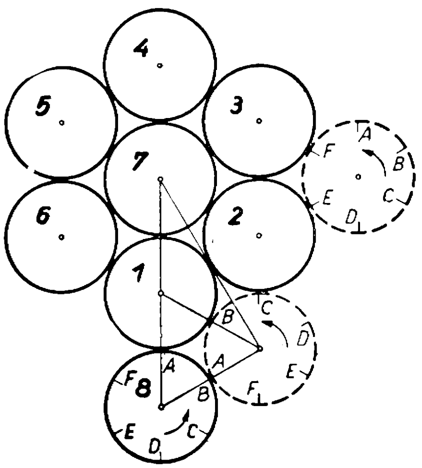


Abb. 120. Wieviel Umdrehungen legt der Kreis 8 zurück, wenn er die anderen Kreise einmal umfährt?

Führen Sie nun den Versuch praktisch durch und Sie werden feststellen, daß sich das Geldstück im ganzen viermal dreht.

Jetzt wollen wir versuchen, die gleiche Antwort durch Rechnen und Überlegen zu erhalten.

Zu diesem Zweck stellen wir zuerst fest, wie groß der Bogen ist, den der abrollende Kreis beschreibt, und überlegen, wie sich der Kreis von der »Kuppe *A*« zum nächsten »Tal« zwischen zwei unbeweglichen Kreisen (Abb. 120) fortbewegt.

Auf Grund der Zeichnung kann man unschwer erkennen, daß der Bogen, an dem der Kreis abgerollt ist, 60° mißt. Jeder feste Kreis enthält zwei dieser Bogen. Sie bilden zusammen einen Bogen von 120° bzw. $\frac{1}{3}$ des vollen Kreises.

Daraus folgt, daß der abrollende Kreis jedesmal, wenn er $\frac{1}{3}$ eines festen Kreises umfährt, sich selbst $\frac{1}{3}$mal dreht. Im ganzen haben wir sechs starre Kreise; also legt der abrollende Kreis $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ Umdrehungen zurück.

Das Ergebnis weicht von dem Beobachtungsergebnis ab. Tatsachen haben aber die Fähigkeit, die Dinge zu erhärten. Ist die Rechnung durch die Beobachtung nicht unterstützt worden, so bedeutet dies, daß uns in der Rechnung irgendwo ein Fehler unterlaufen ist. Stellen Sie den bei den Überlegungen unterlaufenen Fehler fest!

Lösung

Rollt der Kreis auf einer geraden Strecke von der Länge eines Drittels des Kreisumfanges reibungslos ab, dann beschreibt er tatsächlich $\frac{1}{3}$ Umdrehung um seine eigene Achse. Sobald der Kreis jedoch an einem Bogen oder einer Kurvenlinie abrollt, ist diese Behauptung falsch und die Überlegung entspricht nicht den Tatsachen. In der hier behandelten Aufgabe legt der Kreis beim Umfahren des Bogens, dessen Länge z. B. $\frac{1}{3}$ des Kreisumfanges beträgt, nicht etwa $\frac{1}{3}$, sondern $\frac{2}{3}$ Umdrehungen zurück; nach Umfahren von sechs solchen Bogen macht er folglich

$$6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \text{ Umdrehungen!}$$

Sie können sich davon sehr anschaulich überzeugen.

Das gestrichelte Bild (Abb. 120) stellt den rollenden Kreis in jener Stellung dar, die er nach Umfahren des Bogens AB (60°) des festen Kreises eingenommen hat. Die Länge des Bogens beträgt $\frac{1}{6}$ des Kreisumfanges. In der veränderten Lage liegt an der Kuppe des Geldstückes 2 nicht Punkt B, sondern Punkt C an. Wie leicht zu erkennen ist, entspricht dies der Umdrehung der an der Kreisperipherie gelegenen Punkte um 120° oder $\frac{1}{3}$ Umdrehung. Einer »Bahn« von 120° entspricht dann tatsächlich $\frac{2}{3}$ einer Umdrehung des abrollenden Kreises. Rollt ein Kreis längs einer Kurvenbahn oder einer geknickten Linie ab, dann ist seine Umdrehungszahl anders, als wenn der gleiche Kreis auf einer Geraden von der gleichen Länge abrollt.

Wir verweilen noch etwas bei der geometrischen Seite dieser verblüffenden Tatsache, um so mehr, als ihre Erklärung nicht minder überzeugend klingt.

Ein Kreis mit dem Radius r rollt eine gerade Strecke entlang. Er hat sich einmal gedreht, nachdem er die Strecke AB zurückgelegt hat, deren Länge also der Länge des Kreisumfanges $2\pi r$ entspricht. Nun knicken wir die Gerade AB in der Mitte C (Abb. 121) und schwenken den Abschnitt CB um einen Winkel α, bezogen auf die Ausgangsstellung, um.

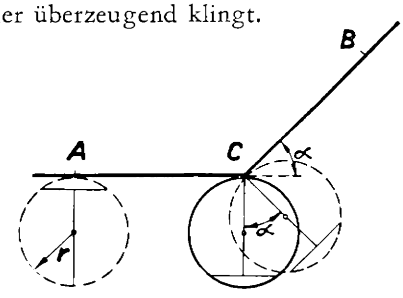


Abb. 121. Die zusätzliche Drehung bzw. das Abwälzen eines Kreises über eine geknickte Strecke wird offenbar.

Nach einer halben Umdrehung erreicht der Kreis C. Um eine Lage einzunehmen, bei der er die Gerade CB im Punkt C berührt, muß er sich, einschließlich seines Mittelpunktes, um den Winkel $\alpha°$ drehen. (Beide Winkel sind gleich, weil sie gegenseitig senkrecht aufeinanderstehende Seiten haben.)

Während der Drehung um den Winkel α bewegt sich ja der Kreis auf der Strecke nicht weiter fort. Gerade auf diese Tatsache ist der zusätzlich entstehende Teil der Umdrehung, verglichen mit dem Abrollen auf der Geraden, zurückzuführen.

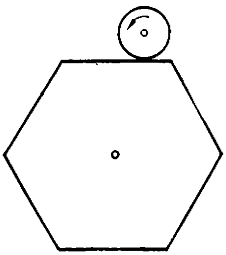


Abb. 122. Wieviel Umdrehungen vollführt der Kreis, wenn er an den Seiten des Sechsecks abrollt?

Diese zusätzliche Drehung, deren Größe $\frac{\alpha°}{360°}$ ist, bildet einen Bruchteil der vollen Umdrehung. Der Kreis legt nun längs des Abschnittes *CB* ebenfalls eine halbe Umdrehung zurück, so daß die Gesamtdrehzahl beim Abrollen über die Strecke *ACB* $1 + \frac{\alpha°}{360°}$ ist. Jetzt ist die Vorstellung, wieviel Umdrehungen der Kreis zurücklegen muß, der an den Seiten eines regelmäßigen Sechsecks abrollt, nicht mehr schwierig (Abb. 122). Er dreht sich offenbar ebenso viele Male wie auf einer geraden Bahn, deren Länge der Summe der Seiten des Sechsecks gleich ist plus einer Drehzahl, die gleich der Summe aller Außenwinkel des Rechtecks geteilt durch 360° ist. Die Summe sämtlicher Außenwinkel jedes Vielecks ist konstant 360°. Wenn also der Kreis ein Sechseck oder jedes beliebige andere Vieleck umfährt, macht er stets eine ganze Umdrehung mehr, als wenn er auf einer Geraden abrollen würde, deren Länge der Summe aller Vielecksseiten gleich wäre.

Bei wiederholter Verdoppelung der Seitenzahl eines regelmäßigen Vielecks nähern wir uns immer mehr dem Kreis. Folglich gelten alle unsere Überlegungen auch für den Kreisumfang. Rollt z. B. entsprechend den ursprünglichen Bedingungen ein Kreis am Bogen von 120° eines gleich großen Kreises ab, dann wird die Behauptung, daß der bewegliche Kreis sich nicht $\frac{1}{3}$-, sondern $\frac{2}{3}$mal dreht, geometrisch vollkommen klar.

Die Seiltänzerin

Verfolgt man die Bahn eines beliebigen Punktes eines Kreises, der gerade oder an einem Kreisumfang abrollt, so erhält man verschiedenartige Kurvenbilder.

Abb. 123 und 124 stellen einige dieser Kurven dar.

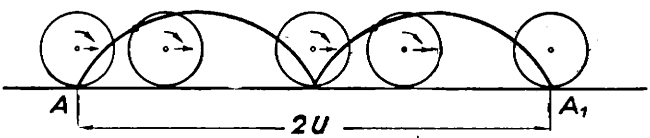


Abb. 123. Die Zykloidenkurve ist die Bahn des Punktes A auf der Peripherie eines Kreises, der ohne Reibung in gerader Richtung vorwärts rollt.

Es entsteht nun die Frage, ob ein wandernder Punkt eines Kreises, der an der Innenseite eines anderen Kreisumfanges abrollt (Abb. 124), nicht eine Kurve, sondern eine Gerade zurücklegen kann. Auf den ersten Blick scheint es nicht möglich zu sein.

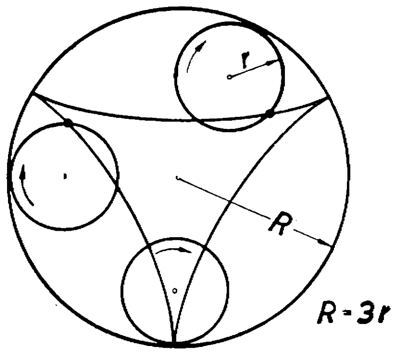


Abb. 124. Eine Dreikanthypozykloide wird von einem Punkt auf einer Kreisscheibe beschrieben, die auf dem inneren Umfang eines größeren Kreises abrollt. R = 3 r.

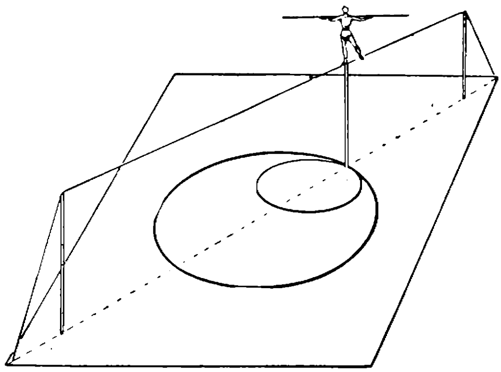


Abb. 125. »Die Seiltänzerin«. Der abrollende Kreis weist Punkte geradliniger Bewegung auf.

Dennoch habe ich eine derartige Konstruktion mit eigenen Augen gesehen. Es handelt sich um ein »Seiltänzerin« genanntes Spielzeug (Abb. 125), das Sie leicht selbst herstellen können.

Sie zeichnen auf ein Stück Pappe oder eine Sperrholzplatte einen Kreis von 30 cm Durchmesser und verlängern den Kreisdurchmesser in den Diagonalen nach beiden Seiten. Die angezeichnete Scheibe wird dann ausgeschnitten. Sie stecken je eine Nadel mit gemeinsam durch beide Nadeln durchgezogenem Faden in die beiden Enden des verlängerten Durchmessers und befestigen die Enden des gespannten Fadens an der Pappe (dem Sperrholz). In das entstandene Loch von 30 cm Durchmesser legen Sie eine aus Pappe oder Sperrholz angefertigte Scheibe, deren Durchmesser 15 cm beträgt. Genau an der Peripherie der Scheibe stecken Sie ebenfalls eine Nadel ein (s. Abb. 125). Dann schneiden Sie aus einem dicken Blatt Papier die Figur einer Seiltänzerin aus und kleben den Fuß der Figur mit Siegellack an den Nadelkopf fest.

Jetzt versuchen Sie, die kleine Scheibe am Umfang der Öffnung ohne Reibung abzurollen. Das Nadelende mit der an ihm befestigten Seiltänzerin wird vorwärts oder rückwärts an dem »Seil« entlanggleiten.

Diese Tatsache findet ihre Erklärung darin, daß der Punkt, an dem die Nadel befestigt ist, genau auf dem Durchmesser des ausgeschnittenen großen Kreises entlangwandert. Warum bewegt sich aber in einem ähnlichen Falle (s. Abb. 124) der Punkt des abrollenden Kreises nicht auf einer Geraden, sondern auf einer Kurvenbahn (Hypozykloide genannt)? Die Ursache liegt einzig und allein in dem Größenverhältnis der Durchmesser des großen und des kleinen Kreises.

Aufgabe

Es ist zu beweisen, daß durch das Abrollen eines Kreises an dem Innenumfang eines anderen Kreises mit doppeltem Durchmesser jeder an der Peripherie des kleinen Kreises gelegene Punkt auf der Geraden wandert, die dem Durchmesser des großen Kreises entspricht.

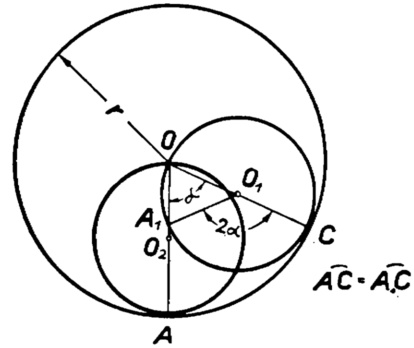


Abb. 126. Die geometrische Erklärung der »Seiltänzerin«.

Lösung

Beträgt der Durchmesser des Kreises O_1 die Hälfte des Durchmessers des Kreises O (Abb. 126), so befindet sich in jedem beliebigen Augenblick der Bewegung des Kreises O_1 einer seiner Peripheriepunkte im Mittelpunkt von O.

Wir wollen jetzt die Wanderung eines Punktes A näher betrachten. Angenommen, der kleine Kreis hat einen Kreisbogen AC am großen Kreis zurückgelegt. Wo befindet sich jetzt der Punkt A in der neuen Stellung des Kreises O_1?

Offenbar muß er sich in einem Punkt A_1 des Umfanges befinden, und zwar so, daß die beiden Bogen AC und A_1C gleiche Länge besitzen (der Kreis rollt reibungslos ab). Es sei $OA = r$ und Winkel $AOC = \alpha$. Dann ist $AC = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$, folglich ist auch $A_1C = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$.

Wir wollen wissen, wie groß der Winkel A_1O_1C ist. Der Bogen A_1C ist $\frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$. Dieser Bogen muß einem bestimmten Winkel des Kreises O_1 entsprechen. Der Durchmesser des Kreises O_1 ist r. Damit ergibt sich für den Umfang $U = \pi \cdot r$ und für den Bogen von einem Grad:

$$\text{Bogenlänge } 1^\circ = \frac{\pi \cdot r \cdot 1^\circ}{360^\circ}$$

Dann ist der Winkel A_1O_1C zu errechnen aus:

$$\frac{\text{Bogenlänge } A_1C}{\text{Bogenlänge } 1^\circ \text{ des Kreises } O_1}$$

$$\text{Winkel } A_1O_1C = \frac{\frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}}{\frac{\pi \cdot r \cdot 1^\circ}{360^\circ}} = \frac{360^\circ \cdot \alpha}{180^\circ} = 2\alpha$$

Der Winkel A_1O_1C ist der Außenwinkel des Dreiecks A_1O_1O und so groß wie die beiden gleichen Winkel $A_1OO_1 + O_1A_1O$.

Es ergibt sich somit:

$$\text{Winkel } A_1OC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Der Punkt A wandert also auf dem Strahl OA.

Das oben beschriebene Spielzeug stellt ein primitives Mittel zur Umwandlung einer Rotationsbewegung in eine geradlinige Bewegung dar.

Techniker, insbesondere Mechaniker, interessieren sich für die Konstruktion derartiger Triebwerke (wissenschaftlich nennt man sie Inversoren) besonders seit Polsunows Zeiten*.

---

* Iwan Iwanowitsch Polsunow, Techniker eines im Ural gelegenen Hüttenwerks, konstruierte Mitte des 18. Jahrhunderts die erste zweizylindrige atmosphärische Dampfmaschine.

Beschäftigen wir uns nun mit dem berühmten Langstreckenflug Gromows, des Helden der Sowjetunion, und seiner Freunde von Moskau nach San Jacinto über den Nordpol. Durch seinen 62 Stunden 17 Minuten andauernden Flug holte sich Gromow zwei Weltrekorde, nämlich für einen Nonstopflug über 10200 km auf gerader Strecke und über 11500 km auf einer geknickten Flugstrecke.

Jetzt überlegen Sie einmal, ob sich das Flugzeug mit der Erde um ihre Achse gedreht hat, als jene Rekordflieger den Pol überquerten. Die Frage wird zwar oft gestellt, man erhält jedoch nicht immer die richtige Antwort.

Jedes Flugzeug, auch ein über den Pol fliegendes, muß unbedingt an der Erdrotation teilnehmen. Die Ursache ist darin zu suchen, daß ein in der Luft befindliches Flugzeug ja nur von der festen Erdoberfläche getrennt ist, aber durch die Lufthülle mit dem Erdball verbunden bleibt. Bei einer Rotation unseres Planeten um seine Achse führt auch das Flugzeug diese Bewegung aus. Folglich drehte sich das Flugzeug beim Flug von Moskau nach Amerika gleichzeitig mit der Erde um ihre Achse. Wie sieht nun diese Flugbahn wirklich aus?

Zuvor noch einen Hinweis, damit wir diese Frage richtig beantworten können. Wenn wir behaupten, ein Körper bewegt sich, so meinen wir, daß die Lage dieses Körpers zur Lage irgendwelcher anderer Körper verändert wird. Das Problem einer Flugbahn und einer Bewegung überhaupt wird dann sinnlos, wenn das »Bezugssystem« – wie der Mathematiker sagt – oder, anders ausgedrückt, der Körper, in bezug auf den die Bewegung stattfindet, nicht genannt oder zumindest nicht als bekannt vorausgesetzt wird.

Auf die Erde bezogen, bewegte sich Gromows Flugzeug fast genau längs des Längengrades von Moskau. Der Meridian von Moskau dreht sich genau wie jeder andere Längengrad mit der Erde um ihre Achse. Auch das Flugzeug, das sich an dem Längengrad hielt, rotierte mit; für den Erdbeobachter ändert sich die Form der Flugbahn nicht.

Für uns, die mit der Erde fest verbunden sind, bleibt die Bahn des Fluges über den Pol der Bogen eines großen Kreises, soweit angenommen werden kann, daß das Flugzeug genau am Meridian entlang flog und dabei immer den gleichen Abstand vom Erdmittelpunkt beibehielt.

Wir stellen die Frage jetzt folgendermaßen: Wir haben es mit einem auf die Erde bezogenen Flug zu tun und wissen, daß das Flugzeug mit der Erde um ihre Achse rotiert. Damit haben wir eine Bewegung von Erde und Flugzeug, die wir beziehen auf irgendeinen außerhalb des »Bezugssystems« der Erde befindlichen dritten Körper. Wie sieht nun die Flugbahn aus, wenn man diese von diesem dritten Ort aus beobachtet?

Wir wollen diese nicht alltägliche Aufgabe vereinfachen.

Stellen wir uns das Polargebiet als eine drehbare Scheibe vor, die von einer senkrecht zur Erdachse stehenden festen Ebene beobachtet werden kann. Wir denken uns diese Ebene als den »dritten Körper« in bezug auf den die Scheibe um die Erdachse rotiert. Auf einem der Durchmesser dieser Scheibe entlang bewegt sich

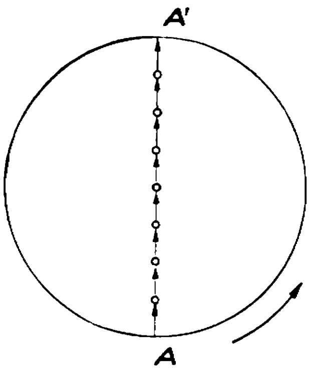


Abb. 127. Ein Wagen überquert in 12 Stunden den Durchmesser einer Scheibe.

gleichförmig ein kleiner Wagen, z. B. mit Uhrwerkantrieb, der als Modell des längs des Meridians fliegenden Flugzeuges dienen soll (Abb. 127).

Wie sieht nun die Linie auf unserer Ebene aus, die die Bahn des Wagens (oder, besser gesagt, den Weg irgendeines Punktes des Wagens, z. B. des Schwerpunktes) abbildet?

Die Zeit, innerhalb der das Wägelchen von einem Ende des Durchmessers bis zum anderen rollt, hängt von seiner Geschwindigkeit ab.

Wir betrachten drei Fälle:

1. Der Wagen legt seinen Weg in 12 Stunden zurück.
2. Er beansprucht hierfür 24 Stunden.
3. Er braucht dazu 48 Stunden.

In allen drei Fällen dreht sich die Scheibe innerhalb von 24 Stunden einmal herum.

Erster Fall (Abb. 128).

Der Wagen legt den Weg entlang des Scheibendurchmessers innerhalb von 12 Stunden zurück. In der gleichen Zeit macht die Scheibe eine halbe Umdrehung, sie dreht sich also um 180°, so daß die Punkte A und A' ihre Orte vertauschen. In Abb. 128 ist der Durchmesser in acht gleiche Abschnitte geteilt, wobei der Wagen $12 : 8 = 1{,}5$ Stunden braucht, um jeweils einen Abschnitt zu durchlaufen. Wir wollen feststellen, wo sich der Wagen anderthalb Stunden nach Beginn der Bewegung befinden wird. Würde die Scheibe unbeweglich verharren, dann hätte der Wagen, nachdem er den Punkt A verlassen hat, den Punkt b nach anderthalb Stunden erreicht. Da jedoch die Scheibe rotiert, dreht sie sich in 1,5 Stunden um $180° : 8 = 22{,}5°$. Der Punkt b der Scheibe wandert nach b'.

Der auf der Scheibe stehende und mit ihm rotierende Beobachter merkt die Bewegung nicht, er würde lediglich sehen, daß der Wagen von Punkt A nach Punkt b gerollt ist. Der außerhalb der Scheibe stehende und an deren Rotation nicht teilnehmende Beobachter dagegen hätte einen anderen Eindruck gewonnen: Für ihn wäre der Wagen auf einer gekrümmten Bahn von A nach b' gewandert. Nach den nächsten anderthalb Stunden hätte der außerhalb der Scheibe stehende Beobachter den Wagen bei c' erblickt. Innerhalb der folgenden 1,5 Stunden hätte sich für ihn der Wagen auf dem Bogen $c'd'$ bewegt und nach weiteren anderthalb Stunden den Mittelpunkt e erreicht.

Wir verfolgen die Bewegung weiter. Der außerhalb der Scheibe stehende Beobachter würde jetzt etwas völlig Unerwartetes entdecken. Für ihn beschreibt der Wagen eine Kurve $ef'g'h'A$.

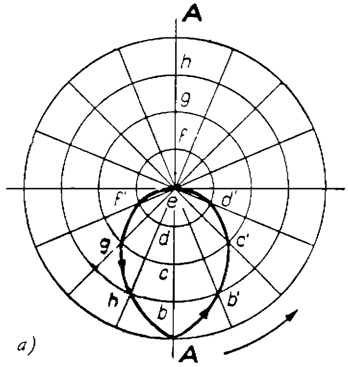
So verblüffend die Angelegenheit sein mag – von seinem Standort aus betrachtet endet die Bewegung nicht etwa in dem gegenüberliegenden Durchmesserpunkt, sondern im Ausgangspunkt.

Die Erklärung des Rätsels ist sehr einfach. Während der 6 Stunden anhaltenden Reise des Wagens entlang des zweiten Durchmesserteiles ist dieser Teil, d. h. der Halbmesser, inzwischen um 180° (mit der Scheibe) weitergerückt und nimmt nunmehr die Stellung des ersten Halbmessers ein. Der Wagen dreht sich samt der Scheibe auch in dem Augenblick, in dem dieser den Scheibenmittelpunkt überfährt. Der Wagen hat natürlich keinen Platz im Mittelpunkt. Er stimmt mit dem Mittelpunkt vielmehr nur in einem einzigen Punkt überein; in diesem Augenblick dreht er sich mit dem Wagen um diesen Punkt. Das gleiche geschieht auch mit dem über den Pol fliegenden Flugzeug. Verschiedene Beobachter, die die Reise des Wägelchens von einem Ende des Scheibendurchmessers zum anderen verfolgen, sehen die Bewegung verschieden. Einem Beobachter auf der Scheibe scheint die Wagenbewegung geradlinig zu sein. Der auf einem festen Punkt stehende, an der Scheibenrotation unbeteiligte Zuschauer nimmt die Bewegung des Wagens auf, als bewege sich dieser über eine Kurvenbahn (Abb. 128), die ähnlich der Form eines Tropfens ist.

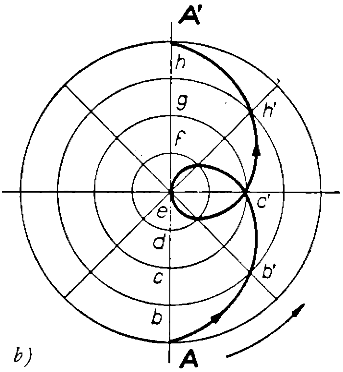
Diese Erkenntnisse lassen sich auf den Flug übertragen. Jedermann, der, sagen wir, vom Erdmittelpunkt aus die Bewegung des Flugzeuges verfolgen würde (also den auf die gedachte Ebene bezogenen Flug), würde die Flugbahn ebenfalls in Form dieser Kurve sehen. Voraussetzung hierfür wäre, daß die Erdkugel durchsichtig wäre und daß weder der Beobachter noch die Ebene an der Erdrotation teilnimmt. Es wäre ferner erforderlich, daß der Flug des beobachteten Flugzeuges über den Pol 12 Stunden dauert.

Wir haben es hier mit einem interessanten Beispiel einer zusammengesetzten, aus zwei Einzelbewegungen bestehenden Bewegung zu tun.

In Wirklichkeit dauerte jedoch der Flug über den Pol von Moskau bis zu einem diametral entgegengesetzten Punkt auf dem gleichen Breitengrad länger als 12 Stunden. Wir werden daher eine weitere ähnliche Erläuterungsaufgabe untersuchen.



a)



b)

Abb. 128 und Abb. 129. Ein Punkt, der unter der Wirkung von zwei zusammengesetzten Bewegungen wandert, beschreibt diese merkwürdigen Kurvenbahnen:

a) *Der Durchmesser wird in 12 Stunden überquert.*

b) *Der Durchmesser wird in 24 Stunden überquert.*

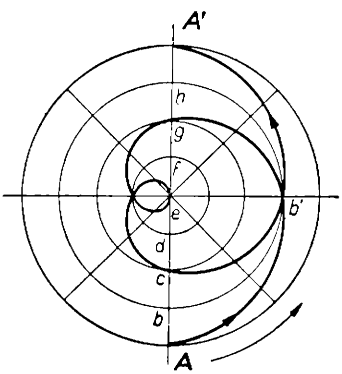


Abb. 130. Eine weitere aus zwei Bewegungsrichtungen zusammengesetzte Kurve.

Zweiter Fall (Abb. 129).

Der Wagen legt den Weg am Durchmesser entlang in 24 Stunden zurück. In dieser Zeit dreht sich die Scheibe einmal. Für den in bezug auf die Scheibe stillstehenden Beobachter nimmt die Kurvenbahn eine in der Abb. 129 dargestellte Form an. Es wäre gut, wenn sich der Leser ähnlich wie beim ersten Fall die Flugbahn skizzieren würde.

Dritter Fall (Abb. 130).

Die Scheibe dreht sich nach wie vor einmal in 24 Stunden. Der Wagen braucht jedoch 48 Stunden, um von einem Ende des Durchmessers zum anderen zu gelangen. Diesmal legt der Wagen $\frac{1}{8}$ des Durchmessers in $48 : 8 = 6$ Stunden zurück. Während der gleichen 6 Stunden dreht sich die Scheibe $\frac{1}{4}$ Umdrehung $= 90°$ weiter. Folglich nimmt der Wagen 6 Stunden nach Beginn der Bewegung am Durchmesser die Stellung *b* ein, wegen der Drehung der Scheibe trifft der Wagen jedoch in Punkt *b'* ein. Nach weiteren 6 Stunden passiert der Wagen den Punkt *g* usw. In 48 Stunden legt der Wagen den gesamten Weg am Durchmesser zurück, während die Scheibe zwei volle Umdrehungen macht. Der in einem Fixpunkt ruhende Beobachter sieht diese zusammengesetzte Bewegung als eine verschnörkelte Kurve (s. Abb. 130).

Der zuletzt betrachtete Fall vermittelt uns eine ungefähre Vorstellung von den wirklichen Verhältnissen beim Überfliegen des Nordpols. Gromow brauchte für die Strecke von Moskau bis zum Pol etwa 24 Stunden. Ein im Erdmittelpunkt stehender Beobachter würde diesen Abschnitt der Flugbahn in Form einer Kurve erblicken, die der ersten Hälfte der in Abb. 130 dargestellten Kurve nahezu entspricht. Die Entfernung vom Pol bis nach San Jacinto beträgt etwa das 1,5fache der Entfernung zwischen Pol und Moskau. Der Beobachter würde also diesen zweiten Teil der Flugbahn als ähnliche Kurve sehen, sie wäre allerdings 1,5mal so lang. Abb. 131 zeigt uns die wirkliche Gestalt der Kurvenbahn.

Mancher wird vielleicht durch die Tatsache überrascht sein, daß Anfangs- und Endpunkt des Fluges auf dem Bilde so nahe beieinander gelegen sind.

Wir dürfen jedoch nicht außer acht lassen, daß auf der Zeichnung nicht die gleichzeitige, wahre Lage der Orte Moskau und San Jacinto dargestellt ist, sondern mit einem Zeitabstand von $2\frac{1}{2}$ Tagen.

So würde uns die Gestalt der Flugbahn Gromows über den Pol erscheinen, wenn wir seinen Flug vom Erdmittelpunkt aus verfolgen könnten. Sind wir im Recht, wenn wir behaupten, daß diese verschnörkelte Kurve die *wirkliche* Flugbahn ist zum Unterschied von den auf Landkarten dargestellten relativen Weg? Nein – denn auch diese Bewegung ist ebenfalls relativ; sie bezieht sich nämlich auf einen bestimmten Körper, der an der Drehung der Erde um ihre Achse ebenfalls nicht teilnimmt, ähnlich wie die übliche Darstellung der Flugroute sich auf die *Erdoberfläche* bezieht. Hätten wir die Möglichkeit, den Weg des Flugzeuges vom Mond oder von der Sonne aus zu verfolgen*, so würde die Form der Flugbahn wiederum andere Gestalt annehmen.

* Gemeint ist ein Koordinatensystem, das mit der Sonne bzw. mit dem Mond verbunden ist.

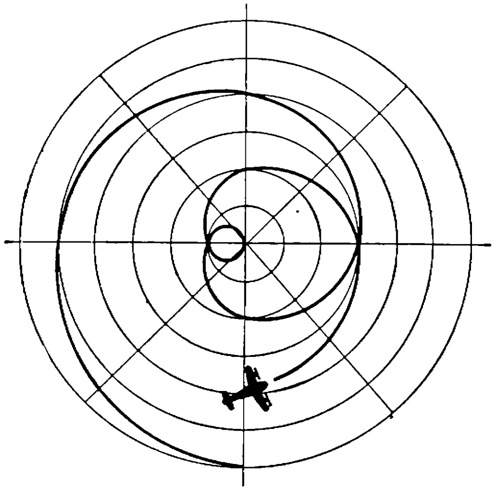


Abb. 131. Die Flugroute Moskau – San Jacinto von einem Standort aus gesehen, der weder am Flug noch an der Erdrotation beteiligt ist.

Der Mond nimmt zwar an der Bewegung der Erde um ihre Achse nicht teil, aber er umkreist unseren Planeten einmal in einem knappen Monat. Während des 62 Stunden dauernden Fluges von Moskau nach San Jacinto legt der Mond einen Kreisbogen von 30° um die Erde zurück. Durch diese Veränderung des Standorts würde die Kurvenbahn des Flugzeuges für einen Mondbeobachter anders aussehen.

Schließlich würde eine weitere Bewegung die Form der Flugbahn beeinflussen – nämlich die Bewegung der Erde um die Sonne. »Es gibt keine Bewegung des einzelnen Körpers, es gibt nur relative Bewegung«, sagt Engels in seiner »Dialektik der Natur«.

Die soeben untersuchte Aufgabe bestätigt diese Erkenntnis in anschaulicher Weise.

Nach dieser recht schwierigen Untersuchung lösen wir eine leichtere Aufgabe, die vielleicht von einigen Lesern schon einmal gelöst wurde.

Die Länge eines Treibriemens

Als die Gewerbeschüler mit ihrer Arbeit fertig waren, schlug der Meister eine Aufgabe für diejenigen vor, die Lust hatten, ein wenig nachzudenken.

Aufgabe

»Für einen Antrieb in unserer Werkstatt«, sagte der Meister, »brauchen wir einen Treibriemen; dieser soll aber nicht über zwei, sondern gleich über drei Riemenscheiben geführt werden.«

11 [42043-1]

Dann zeigte der Meister seinen Schülern die schematische Darstellung des Riemenantriebes (Abb. 132).

»Alle drei Riemenscheiben«, fuhr der Meister fort, »sind gleich groß. Ihr Durchmesser und der Abstand zwischen ihren Mittelachsen sind auch aus der Zeichnung zu entnehmen.

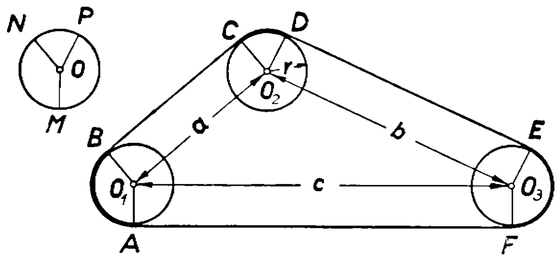


Abb. 132. Schematische Darstellung eines Antriebs. Wie wird die Länge eines Treibriemens bestimmt, wenn nur die hier angegebenen Maße benutzt werden?

Wie kann man die Länge des Treibriemens schnell und ohne zusätzliche Rechnung bestimmen, wenn die erwähnten Maße bekannt sind?«

Die Schüler überlegten.

Nach einigem Nachdenken meinte ein Schüler:

»Meiner Ansicht nach besteht die ganze Schwierigkeit darin, daß die Länge der Bogen *AB*, *CD*, *EF*, über die jeder Treibriemen auf der Riemenscheibe geführt wird, nicht angegeben ist. Damit wir die Länge jedes Bogens bestimmen können, müssen wir die Größe des entsprechenden Zentriwinkels kennen; ich glaube, wir kommen ohne Kreisbogen nicht aus.«

»Die Winkel, die du meinst«, erwiderte der Meister, »lassen sich sogar nach den auf der Zeichnung angegebenen Maßen mit Hilfe trigonometrischer Formeln und Tabellen berechnen. Es ist aber eine langwierige und schwierige Methode. Wir verzichten auch gern auf den Kreisbogen, weil uns die Länge jedes einzelnen Kreisbogens nicht interessiert, es genügt, wenn wir ...«

»Ihre Summe kennen!« fielen ihm einige Lehrlinge ins Wort, die bereits »kapierten«, worauf es ankam.

»So, jetzt macht, daß ihr nach Hause kommt, und morgen zeigt ihr mir die Lösung!« schloß der Meister die Unterhaltung.

Beeilen Sie sich nicht zu sehr, lieber Leser, die richtige Lösung nachzusehen. Nach allem, was der Meister gesagt hat, dürfte auch Ihnen die selbständige Lösung dieser Aufgabe nicht schwerfallen.

Lösung

Die Länge des Treibriemens ist tatsächlich sehr einfach zu ermitteln. Es genügt, zu der Summe der Entfernungen zwischen den Treibriemenachsen die Länge des

Kreisumfanges einer einzigen Riemenscheibe zu addieren. Bezeichnet man die Länge des Treibriemens mit l, dann ist

$$l = a + b + c + 2\pi r.$$

Fast alle Schüler waren sich darüber klar, daß die Summe aller Bogenstücke, über die der Riemen auf den Scheiben geführt wird, gleich einem ganzen Kreisumfang ist, aber es gelang nicht allen, diese Tatsache zu beweisen.

Unter den verschiedenen, ausreichend begründeten Lösungen wählte der Meister folgende kürzeste Rechnung aus.

Es seien BC, DE, FA die Kreistangenten (Abb. 132). Wir ziehen von den Berührungspunkten aus die Halbmesser. Da alle Riemenscheiben gleichen Kreisumfang bzw. gleiche Radien haben, so sind die Gebilde O_1BCO_2, O_2DEO_3 und O_1O_3FA Rechtecke; es gilt daher: $BC + DE + FA = a + b + c$.

Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß die Summe der Bogenlängen $AB + CD + EF$ einem vollen Kreisumfang gleich ist. Zu diesem Zweck konstruieren wir den Kreis O mit dem Radius r (Abb. 132 oben). Wir ziehen OM parallel O_1A, ON parallel O_1B und OP parallel O_2D; dann gilt:

$$\text{Winkel } MON = \text{Winkel } AO_1B$$

$$\text{Winkel } NOP = \text{Winkel } CO_2D$$

$$\text{Winkel } POM = \text{Winkel } EO_3F$$

Wir berücksichtigen dabei, daß die Winkel parallele Seiten haben.

Daraus folgt:

$$AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r.$$

Also beträgt die Länge des Treibriemens

$$l = a + b + c + 2\pi r$$

In der gleichen Weise kann bewiesen werden, daß für jede Anzahl gleich großer Riemenscheiben (also nicht etwa nur für drei) die Länge des um sie geführten Treibriemens der Länge sämtlicher Entfernungen zwischen den Treibriemenachsen plus der Länge eines Riemenscheibenumfanges gleich ist.

Aufgabe

In Abb. 133 ist ein Transportband dargestellt, das über 4 Rollen von gleicher Größe geführt ist. (Die Anlage enthält auch einige Stützrollen, sie sind jedoch fort-

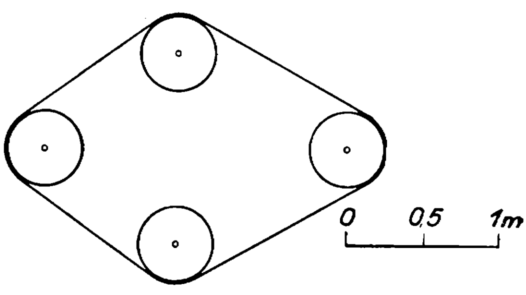


Abb. 133. Berechnen Sie mit den gegebenen Maßen die Länge des Transportbandes!

gelassen, weil sie die Lösung der Aufgabe nicht beeinflussen). Stellen Sie mit Hilfe des der Zeichnung beigefügten Maßstabes die erforderlichen Maße fest und berechnen Sie die Förderbandlänge.

Die Aufgabe vom klugen Raben

In unseren Fibeln gibt es eine amüsante Geschichte vom klugen Raben. Diese sehr alte Erzählung schildert einen durstigen Raben, der einen Krug mit Wasser fand. Der Krug enthielt jedoch nur wenig Wasser; der Rabe konnte mit seinem Schnabel den Wasserspiegel nicht erreichen. Aber der kluge Vogel wußte sich zu helfen; er begann ein Steinchen nach dem anderen ins Wasser zu werfen. Am Ende hatte er so viele Steinchen in den Krug geworfen, daß das Wasser bis an den Rand des Gefäßes stieg und der Rabe seinen Durst stillen konnte.

Aufgabe

Hätte der Rabe seinen Durst stillen können, wenn der Krug bis zur Hälfte voll gewesen wäre?

Lösung

Bei näherer Betrachtung der Aufgabe stellt sich heraus, daß die von dem Raben angewandte Methode nicht bei jedem Wasserstand zum Ziele führt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Krug die Gestalt eines regelmäßigen Prismas und die Steinchen die Form von Kugeln in der gleichen Größe haben. Wie wir uns leicht überzeugen können, wird das Wasser nur dann höher als das Steinhäufchen steigen, wenn das Volumen der ursprünglichen Wassermenge größer war als alle Zwischenräume zwischen den Steinchen: Nur in diesem Falle füllt das Wasser diese Zwischenräume und bedeckt die Steine.

Wir wollen das Volumen der Zwischenräume berechnen. Die Rechnung ist einfach, wenn die Steinchen so angeordnet sind, daß die Mittelpunkte der Steinchen auf der Senkrechten liegen, die die Mittelpunkte der ober- und unterhalb dieses Steinchens liegenden Steinchen miteinander verbindet. Angenommen, der Durchmesser eines Kugelsteins ist d; sein Volumen also $\frac{1}{6}\pi d^3$ und das Volumen des die Kugel umschreibenden Würfels d^3. Die Differenz dieser Volumina ist der Rauminhalt des nicht ausgefüllten Würfelteils.

$$d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3 = 0{,}48\, d^3$$

Wir sehen, daß das unausgefüllte Volumen jedes Würfels 0,48 seines Gesamtvolumens erreicht. Die Summe aller Volumina zwischen den Kugeln im Krug hat den gleichen Anteil an dem Kruginhalt, nämlich eine knappe Hälfte. Besitzt der Krug keine Prismenform und haben die Steinchen keine Kugelgestalt, so ändert das nicht viel an diesem Sachverhalt. Man kann ruhig folgende Behauptung aufstellen: Erreichte der ursprüngliche Wasserstand nicht die Hälfte der Krughöhe, dann wäre es dem Raben niemals gelungen, durch das Einwerfen von Steinchen den Wasserstand bis zum Rande des Kruges zu heben.

Wäre der Rabe so stark, daß er fähig wäre, die Steinchen im Krug durch Schütteln dicht aneinander zu bringen, dann allerdings hätte der Wasserstand mehr als doppelt so hoch wie die ursprüngliche Höhe werden können. Dazu fehlt ihm aber die Kraft; andererseits haben wir die nüchternen Bedingungen der Aufgabe dadurch nicht verletzt, daß wir annehmen, die Steinchen fallen nur locker aufeinander. Es sei noch darauf hingewiesen, daß Krüge meistens eine gewölbte Mitte haben. Dadurch wäre die Steigerung des Wasserstandes noch verzögert worden und die Richtigkeit unserer Schlußfolgerung wird nur erhärtet:

Steht das Wasser im Kruge unter halber Höhe, dann wird der arme Rabe niemals seinen Durst löschen können.

ZEHNTES KAPITEL

Geometrie ohne Messungen und Rechnungen

Konstruktionen ohne Zirkel

Für geometrische Konstruktionen benutzt man in den meisten Fällen Zirkel und Lineal. Wir wollen zeigen, wie auch ohne Zirkel oder ohne Lineal in Fällen gearbeitet werden kann, von denen man zuerst annimmt, daß dieses Gerät unentbehrlich ist.

Aufgabe

Man fälle vom Punkt A (Abb. 134, links) außerhalb des gegebenen Halbkreises ein Lot auf den Kreisdurchmesser, ohne dabei zum Zirkel zu greifen. Der Kreismittelpunkt ist nicht bezeichnet.

Lösung

Wir helfen uns zunächst durch die Eigenschaft des Dreiecks, nach der sich alle Höhen in einem Punkt schneiden. Wir verbinden A mit C und B und erhalten dadurch die Punkte D und E (Abb. 134, rechts). Die dritte Höhe ist die gesuchte

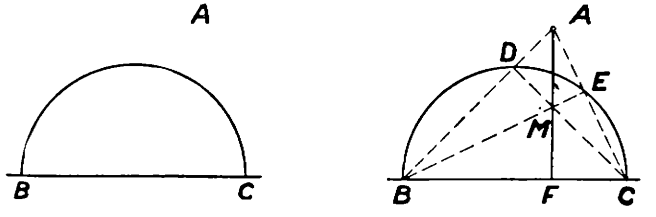
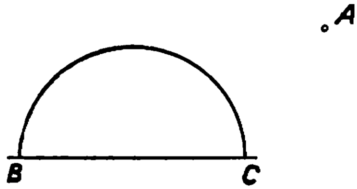


Abb. 134. Eine Konstruktionsaufgabe und ihre Lösung. Erster Fall. Das Lot liegt innerhalb des Durchmessers.



Senkrechte zu BC. Sie muß die anderen beiden Höhen in ihrem Schnittpunkt treffen, d. h. in M. Legen wir mit dem Lineal eine Gerade durch A und M, dann ist die Forderung der Aufgabe erfüllt und wir brauchen nicht zum Zirkel zu greifen. Liegt der Punkt so, daß die gesuchte Senkrechte die Fortsetzung des Durchmessers trifft (Abb. 135), so ist die Aufgabe nur dann zu lösen, wenn wir es nicht mit einem Halbkreis, sondern mit einem ganzen Kreis zu tun haben. Wie Abb. 135 zeigt, unterscheidet sich die Lösung nicht von der bekannten Methode. Allerdings schneiden sich die Höhen des Dreiecks ABC nicht innerhalb, sondern außerhalb dieses Dreiecks.

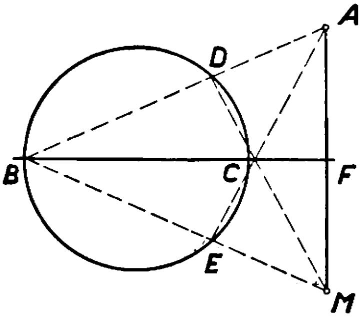


Abb. 135. Die gleiche Aufgabe. Zweiter Fall. Das Lot liegt außerhalb des Durchmessers.

Der Schwerpunkt einer Platte

Aufgabe

Sie wissen vermutlich, daß der Schwerpunkt einer dünnen homogenen Platte von rechteckiger oder rautenförmiger Gestalt im Schnittpunkt der Diagonalen liegt. Ist die Platte dreieckig, dann liegt der Schwerpunkt im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, ist sie kreisförmig – im Kreismittelpunkt.

Überlegen Sie sich jetzt, wie man den Schwerpunkt einer Platte bestimmt, die aus zwei Rechtecken beliebig zusammengesetzt ist (Abb. 136). Bedingung ist, daß wir weder messen noch berechnen und nur mit dem Lineal arbeiten.

Lösung

Wir verlängern die Seite DE bis zum Schnittpunkt N auf der Seite AB und die Seite FE bis zum Schnittpunkt M auf der Seite BC (Abb. 137). Wir betrachten das

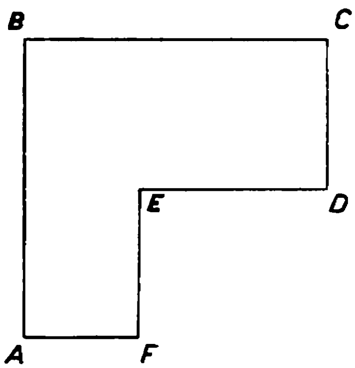


Abb. 136. Der Schwerpunkt der Platte soll mit dem Lineal gefunden werden.

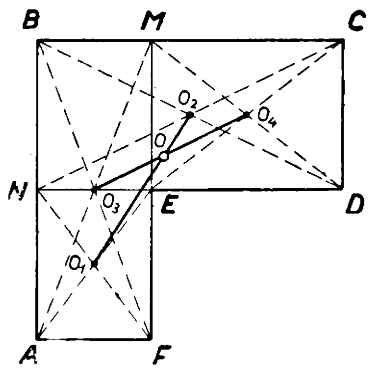


Abb. 137. Der Plattenschwerpunkt ist festgestellt.

Gebilde zunächst als aus den Rechtecken $ANEF$ und $NBCD$ zusammengesetzt. Der Schwerpunkt jedes dieser Gebilde befindet sich jeweils in den Schnittpunkten ihrer Diagonalen O_1 und O_2. Folglich liegt der Schwerpunkt der gesamten Figur auf der Geraden O_1O_2. Nun betrachten wir das gleiche Gebilde als aus den Rechtecken $ABMF$ und $EMCD$ zusammengesetzt, deren Schnittpunkte sich in den Schnittpunkten ihrer Diagonalen O_3 und O_4 befinden. Der Schwerpunkt des gesamten Körpers liegt also auf der Geraden O_3O_4, und zwar im Schnittpunkt O der Geraden O_1O_2 und O_3O_4. Wir stellen fest, daß tatsächlich nur mit Hilfe des Lineals konstruiert wurde.

Die napoleonische Aufgabe

Soeben haben wir allein mit dem Lineal konstruiert; wir haben auf den Zirkel verzichtet, sofern ein Kreis auf der Zeichnung gegeben war. Jetzt betrachten wir einige Aufgaben mit der umgekehrten Beschränkung: Das Lineal darf nicht benutzt, nur mit dem Zirkel darf konstruiert werden. Eine dieser Aufgaben hatte das Interesse Napoleons erregt, der sich bekannlich für Mathematik interessierte. Nachdem er ein Buch des italienischen Mathematikers Mascheroni über solche geometrischen Konstruktionen gelesen hatte, legte er einigen französischen Gelehrten folgende Aufgabe vor:

Aufgabe

Teilen Sie einen gegebenen Kreisumfang in vier gleiche Teile, ohne zum Lineal zu greifen. Die Lage des Kreismittelpunktes ist bekannt.

Lösung

Der Kreis O (Abb. 138) ist in vier Teile zu teilen. Wir tragen nun von einem beliebigen Punkt A den Halbmesser dreimal ab und erhalten die Punkte B, C, D. Wie bekannt, ist die Entfernung AC die Sehne eines Bogens, dessen Länge $\frac{1}{3}$ des Kreisumfanges ist. Außerdem ist sie eine Seite des in den Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und beträgt $r\sqrt{3}$, wobei r der Kreishalbmesser ist. AD ist offensichtlich der Durchmesser. Jetzt tragen wir mit dem Zirkel die Strecke AC von den Punkten A und D ab. Die mit dem Zirkel geschlagenen Kreisbogen schneiden sich in M. Wir wollen nun beweisen, daß MO gleich der Seite eines in unseren Kreis eingeschriebenen Quadrats ist. In dem Dreieck AMO ist die Kathete

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2},$$

d. h., sie ist der Seite eines eingeschriebenen Quadrats gleich. Jetzt brauchen wir nur noch mit dem Zirkel die Strecke OM auf dem Kreisumfang viermal abzutragen und erhalten die 4 Spitzen des eingeschriebenen Quadrats, das den Kreis offensichtlich in 4 gleiche Teile teilt.

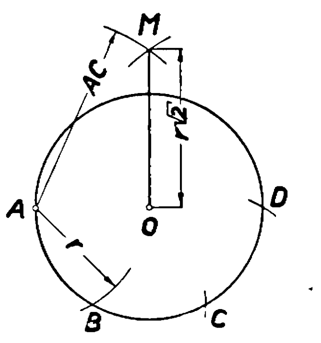


Abb. 138. Teilen Sie den Kreis am Umfang nur mit Hilfe des Zirkels in 4 gleiche Teile!

Aufgabe

Und hier eine ähnliche, aber leichtere Aufgabe. Wie vergrößert man den Abstand zwischen zwei Punkten A und B (Abb. 139) auf das Dreifache.

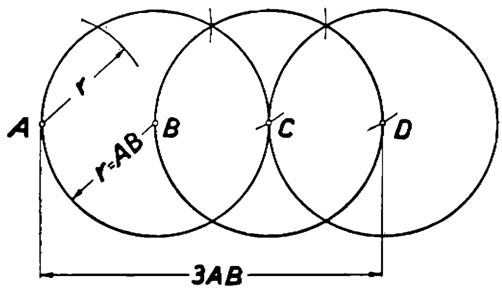


Abb. 139. Wie wird die Entfernung zwischen A und B auf das n-fache vergrößert (n = eine ganze Zahl), wenn dabei nur ein Zirkel benutzt werden darf?

Lösung

Man zieht einen Kreis mit B als Mittelpunkt und dem Halbmesser AB (Abb. 139). Von A aus tragen wir die Strecke AB auf dem Kreis dreimal ab. Wir erhalten den Punkt C, der A diametral entgegengesetzt ist. AC ist offenbar doppelt so lang wie AB. Zieht man den Kreis von Punkt C mit dem Halbmesser BC, so finden wir in ähnlicher Weise einen dem Punkt B diametral entgegengesetzten Punkt; dieser hat die dreifache Entfernung AB von A usw. usf. Mit dieser Methode läßt sich also ein gegebener Abstand beliebig oft vergrößern.

Die Dreiteilung eines Winkels

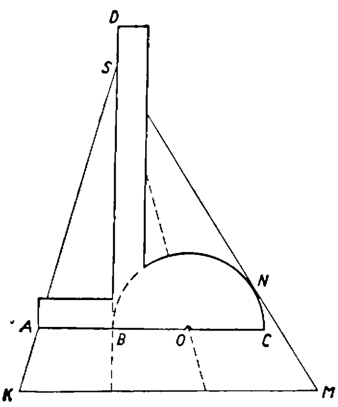


Abb. 140. Der Trisektor.

Ein gegebener Winkel kann mit dem Zirkel oder einem Lineal nicht in drei gleiche Teile geteilt werden. Andererseits leugnen die Mathematiker keineswegs, daß ein Winkel mit anderen Geräten in drei gleiche Winkel geteilt werden kann. Es wurden viele mechanische Instrumente zu diesem Zweck erfunden. Man bezeichnet diese Geräte als Trisektoren. Sie können einen solchen Trisektor aus dickem Papier, Pappe oder dünnem Blech selbst herstellen.

Das Gebilde der Abb. 140 stellt einen Trisektor in verkleinertem Maßstab (etwa $\frac{1}{2}$) dar. Der Streifen AB hat die gleiche Länge wie der Radius des Halbkreises. Die Kante BD steht auf AC senkrecht. Sie berührt den Halbkreis in B. Der

Streifen kann beliebig lang sein. Aus der Zeichnung ist zu ersehen, wie der Trisektor benutzt wird.

Angenommen, der Winkel KSM (Abb. 140) muß in drei gleiche Teile geteilt werden. Man legt den Trisektor so, daß die Spitze des Winkels S auf der Kante BD liegt; ferner muß eine Seite des Winkels durch den Punkt A führen, die andere Seite den Halbkreis berühren*. Dann zieht man die Geraden SB und SO, und fertig ist die Dreiteilung! Zum Beweis wollen wir den Kreismittelpunkt O mit dem Berührungspunkt N verbinden. Wir können uns leicht davon überzeugen, daß das Dreieck ASB gleich dem Dreieck SBO und das Dreieck SBO seinerseits dem Dreieck OSN gleich ist. Aus der Gleichheit dieser 3 Dreiecke folgt, daß die Winkel ASB, BSO und OSN einander gleich sind, was auch bewiesen werden sollte.

Diese Methode der Winkelteilung ist nicht rein geometrisch, sie ist eher als mechanisch zu bezeichnen.

Aufgabe

Kann man mit Zirkel, Lineal und einer Uhr einen Winkel in drei gleiche Teile teilen?

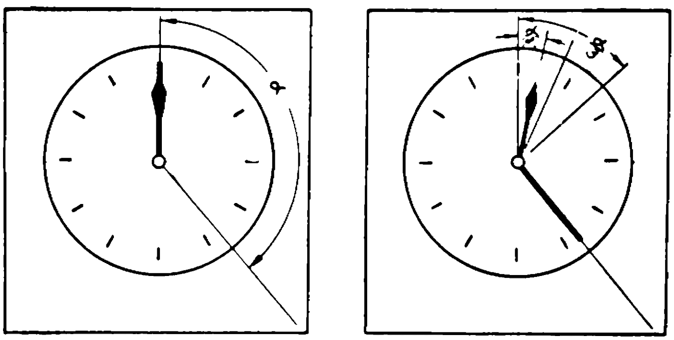


Abb. 141. Die Uhr als Trisektor.

Lösung

Jawohl, man kann es. Zeichnen Sie den Winkel auf Transparentpapier. Legen Sie in dem Augenblick, da beide Zeiger der Uhr übereinanderstehen, die Zeichnung auf das Zifferblatt, und zwar so, daß die Winkelspitze mit der Uhrzeigerachse zusammenfällt und daß eine Seite des Winkels an den Zeigern entlangführt (Abb. 141).

Wenn der Minutenzeiger der anderen Seite parallel ist bzw. mit dieser in Deckung liegt (Sie können natürlich den Zeiger selbst stellen), ziehen Sie von der Winkelspitze aus einen Strahl in der Richtung des Stundenzeigers. Sie erhalten einen

---

* Die Möglichkeit, unseren Trisektor auf den Winkel auf diese Weise zu legen, ist die Folge einer einfachen Eigenschaft der Strahlen, die den Winkel in drei gleiche Teile teilen: Trägt man von einem beliebigen Punkt O des Strahles SO die Strecken ON senkrecht auf SM und OA senkrecht auf SB (Abb. 140) ab, so gilt: $AB = OB = ON$. Der Leser kann es selbst sehr leicht beweisen.

Winkel, der dem Drehwinkel des Stundenzeigers gleich ist. Nun verdoppeln Sie diesen Winkel mit Hilfe des Zirkels und des Lineals (wie ein Winkel verdoppelt werden kann, ist aus der Geometrie bekannt). Dann verdoppeln Sie diesen Winkel abermals. Der auf diese Weise erhaltene Winkel ist $\frac{1}{3}$ des gegebenen Winkels gleich.

In der Tat, jedesmal, wenn der Minutenzeiger um einen Winkel α weiterrückt, rückt der Stundenzeiger um einen Winkel vor, der nur $\frac{1}{12}$ des »Minutenwinkels« beträgt, also um $\frac{\alpha}{12}$. Der viermal größere Winkel ist also

$$\frac{\alpha}{12} \cdot 4 = \frac{\alpha}{3}.$$

Die Teilung des Kreises

Häufig denken vor allem Radioamateure, Konstrukteure, Modellbauer und überhaupt jeder, der gern bastelt, über folgende praktische *Aufgabe* nach:

Wie läßt sich aus einer gegebenen Platte ein regelmäßiges Vieleck mit einer bestimmten Seitenzahl ausschneiden?

Die gleiche Aufgabe kann auf folgende Aufgabe zurückgeführt werden:

Man teile einen Kreis in n gleiche Teile, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Wir denken dabei an die geometrische Lösung mit Hilfe von Zirkel und Lineal.

Zunächst soll die Frage beantwortet werden, in wieviel gleiche Bogen man theoretisch einen Kreis mit Hilfe von Zirkel und Lineal genau teilen kann.

Der Mathematiker gibt darauf eine positive Antwort: Der Kreis kann nicht in beliebig viele gleiche Bogen geteilt werden*.

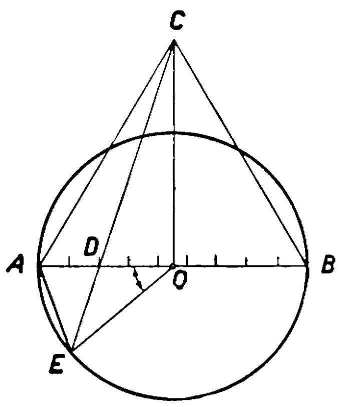


Abb. 142. Ein angenähertes geometrisches Verfahren zur Teilung eines Kreises in n-gleiche Teile. Hier soll der Kreis in 9 gleiche Teile geteilt werden. Die Sehne AE ist eine Seite eines regelmäßigen Neunecks.

Der Kreis ist teilbar in: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, ..., 257, ... Teile. Er ist dagegen nicht in 7, 9, 11, 13, 14, ... Teile teilbar.

Außerdem gibt es kein einheitliches Konstruktionsverfahren. Für 15 Teile wendet man eine andere Methode an als für 12 Teile. Es ist schwer, alle Methoden zu behalten.

Der Praktiker braucht daher ein übersichtliches Verfahren. Mag es auch nur ein angenähertes sein – Hauptsache, es ist einfach und hilft uns, einen Kreis in Bogen von gleicher Länge zu teilen.

Leider beachtet man in den Geometrielehrbüchern diese Frage nicht genügend; wir bringen daher an dieser Stelle eine interessante Methode zur angenäherten Lösung der gestellten Aufgabe.

* Einzelheiten — siehe Geometrielehrbuch.

Ein Kreis (Abb. 142) ist z. B. in 9 gleiche Teile zu teilen. Wir konstruieren zu diesem Zweck auf einem Kreisdurchmesser AB ein gleichseitiges Dreieck ABC und teilen den Durchmesser AB durch den Punkt D im Verhältnis $AD : AB = 2 : 9$ (für den Allgemeinfall $AD : AB = 2 : n$). Wir verbinden die Punkte C und D durch eine Gerade und verlängern diese bis zum Schnittpunkt mit dem Kreis in E. Dann beträgt die Länge des Bogens AE ungefähr $\frac{1}{9}$ des Kreises (für den Allgemeinfall Bogen $AE = \frac{360^\circ}{n}$). Die Sehne AE ist eine Seite eines in den Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Neunecks (n-Ecks). Der relative Fehler beträgt hierbei etwa 0,8%.

Sucht man die Abhängigkeit zwischen der Größe des bei dieser Konstruktion erhaltenen Zentriwinkels und der Anzahl n der Teilungen, so gilt die Formel:

$$\operatorname{tg} \text{Winkel } AOE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4}$$

Bei größeren n-Werten kann diese Formel durch folgende angenäherte Formel ersetzt werden:

$$\operatorname{tg} \text{Winkel } AOE \approx 4\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$$

Bei genauer Teilung des Kreises in n-gleiche Teile beträgt der Zentriwinkel $\frac{360^\circ}{n}$. Vergleicht man $\frac{360^\circ}{n}$ mit Winkel AOE, so können wir die Größe des Rechenfehlers feststellen.

Wir erhalten für einige n-Werte folgende Tabelle:

n	3	4	5	6	7	8	10	20	60
360°: n	120°	90°	72°	60°	51° 26′	45°	36°	18°	6°
∢ AOE	120°	90°	71° 57′	60°	51° 31′	45° 11′	36° 21′	18° 38′	6° 26′
Fehler in %	0	0	0,07	0	0,17	0,41	0,97	3,5	7,2

Wie ersichtlich, kann man auf diese Weise den Kreis annähernd richtig in 5, 7, 8, oder 10 Teile teilen; der relative Fehler bleibt gering - er schwankt zwischen 0,07 und 1%.

In den meisten praktischen Fällen ist ein derartiger Fehler zulässig. Mit großem n-Wert nimmt die Genauigkeit bei diesem Verfahren ab, d. h., der relative Fehler wird größer, bleibt jedoch unter 10%.

Die Stoßrichtung einer Billardkugel

Wenn jemand eine Billardkugel nicht sofort ins Loch stößt, sondern so, daß sie erst zwei- bis dreimal von den Kanten des Tisches zurückgestoßen wird, so bedeutet das, daß der Betreffende eine geometrische Konstruktionsaufgabe »im Kopf« gelöst hat. Es ist äußerst wichtig, den ersten Stoßpunkt gegen die Bande richtig abzuschätzen; der weitere Weg, den die elastische Billardkugel auf einem guten Tisch nimmt, wird durch das Reflexionsgesetz bestimmt (Einfallwinkel = Ausfallwinkel).

Welche geometrischen Erkenntnisse können wohl dabei helfen, die Stoßrichtung zu finden, um eine etwa in der Mitte des Tisches liegende Billardkugel nach drei Anschlägen gegen die Bande in das Loch A (Abb. 143) zu schicken?

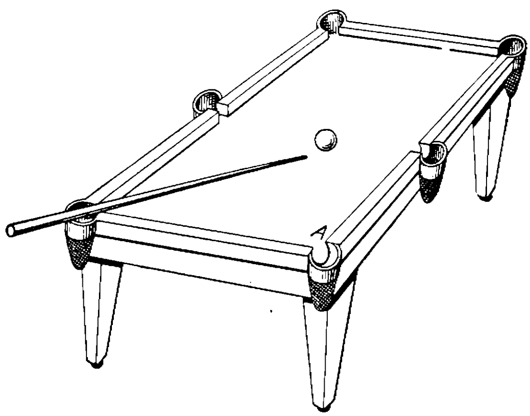


Abb. 143. Geometrische Aufgabe auf einem Billardtisch.

Stellen Sie sich vor, daß unmittelbar längs der Stirnseite des Billardtisches drei weitere Tische angeschlossen sind. Sie müssen dann mit dem Billardstock in das letzte Loch A_1 des am weitesten entfernten Tisches zielen, um die Aufgabe zu lösen.

Abb. 144 erläutert unsere Behauptung. Der Weg der Billardkugel sei $OEFGA$. Setzt man die offensichtliche Gleichheit der Dreiecke als gegeben voraus, werden Sie gleich beweisen können, daß $EF_1 = EF$, $F_1G_1 = FG$ und $G_1A_1 = GA$ ist, d. h., die Länge der Geraden OA_1 ist der Länge der geknickten Strecke $OEFGA$ gleich.

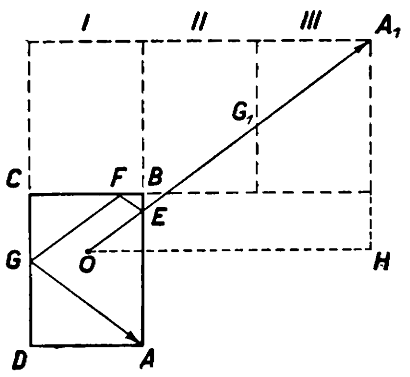


Abb. 144. Stellen Sie sich vor, daß man an den Billardtisch drei weitere Tische herangerückt hat, und stoßen Sie die Kugel in das am weitesten entfernte Loch.

Zielen Sie also in das gedachte Loch A_1, so zwingen Sie die Kugel, den Weg in Richtung der geknickten Bahn $OEFGA$ zu nehmen, so daß sie in das Loch A fällt.

Jetzt untersuchen wir noch folgende Frage: Unter welchen Voraussetzungen sind die Seiten OH und A_1H des rechtwinkligen Dreiecks A_1HO einander gleich?

Wie leicht festgestellt werden kann, ist $OH = \frac{5}{2}\,AD$ und $A_1H = \frac{3}{2}\,AB$.

Ist $OH = A_1H$, dann gilt:

$$\frac{5}{2}AD = \frac{3}{2}AB \quad \text{oder} \quad AD = \frac{3}{5}AB$$

Beträgt die Stirnseite des Billardtisches $\frac{3}{5}$ der Längsseite, so ist $OH = A_1H$; in diesem Falle muß die Billardkugel in einem Winkel von 45° zur Bande gestoßen werden.

Die kluge Billardkugel

Wir waren soeben in der Lage, mit Hilfe einfacher geometrischer Konstruktionen die Aufgabe über die Billardkugel zu lösen. Nun wollen wir eine uralte Aufgabe durch die Billardkugel selbst lösen lassen.

Ja, wie ist denn das möglich? Eine Billardkugel kann doch nicht überlegen. Das stimmt schon, aber in Fällen, in denen eine gewisse Rechenarbeit notwendig ist und man sowohl die Art der Rechenoperationen mit den gegebenen Zahlen als auch die Reihenfolge kennt, in der die Rechnung vor sich geht, dürfen wir die Rechenarbeit getrost einer Maschine überlassen. Diese wird die Arbeit schnell und fehlerlos beenden.

Es wurden zahlreiche mechanische Verfahren ausgearbeitet, die den Menschen das Rechnen erleichtern, angefangen von der einfachen Rechenmaschine bis zu den feinsten »elektrischen Gehirnen«.

Manchmal wird in Zeitschriften die Frage vorgelegt, wie man aus einem Behälter mit bekanntem Fassungsvermögen eine bestimmte Menge Wasser mit Hilfe von zwei leeren Gefäßen entfernt, deren Fassungsvermögen ebenfalls bekannt ist.

Hier ist eine derartige *Aufgabe.*

Ein Faß hat 12 Eimer zum Inhalt und soll mit Hilfe von zwei leeren Fässern in zwei Hälften geteilt werden; das Volumen des einen Fasses ist 9, das des anderen 5 Eimer.

Um die Aufgabe zu lösen, brauchen Sie keinerlei Experimente mit echten Fässern zu machen. Sämtliche erforderlichen »Gießvorgänge« erfolgen auf dem Papier nach folgendem Schema:

1. Faß (Volumen 9 Eimer)	0	7	7	2	2	0	9	6	6
2 Faß (Volumen 5 Eimer)	5	5	0	5	0	2	2	5	0
3. Faß (Volumen 12 Eimer)	7	0	5	5	10	10	1	1	6

Jede Spalte erhält das Ergebnis des jeweiligen Umgießens, das folgendermaßen vor sich geht:

Erste Spalte: Das 5-Eimer-Faß wird gefüllt, das 9-Eimer-Faß bleibt leer (0), im 12-Eimer-Faß bleiben 7 Eimer Wasser.

Zweite Spalte: Aus dem großen Faß wurden 7 Eimer Wasser in das 9-Eimer-Faß gegossen usw.

Die ganze Tabelle enthält 9 Spalten; folglich brauchen wir im ganzen 9 Gießoperationen, um die Aufgabe zu lösen.

Versuchen Sie einmal, eine eigene Lösung der vorgelegten Aufgabe zu finden, bei der die Gießordnung eine andere ist.

Nach einigen Versuchen wird es Ihnen zweifellos gelingen, da die vorgeschlagene Reihenfolge der Gießvorgänge keineswegs die einzig mögliche ist. Wenden Sie jedoch eine andere Gießordnung an, so ist die Zahl der Gießvorgänge allerdings größer als 9.

Im Zusammenhang damit ist es bedeutsam, folgendes festzustellen:

1. Kann man eine bestimmte Reihenfolge der Gießvorgänge feststellen, die für alle Fälle unabhängig von dem Fassungsvermögen der Gefäße gilt?

2. Ist es mit Hilfe von zwei leeren Behältern möglich, aus einem dritten jede beliebig mögliche Wassermenge abzufüllen, d. h., kann man z. B. aus einem 12-Eimer-Faß mit Hilfe von zwei Fässern, von denen das eine 9, das andere 5 Eimer faßt, einen Eimer Wasser oder zwei oder drei usw. bis 11 abfüllen?

Alle die Fragen werden von der klugen Billardkugel beantwortet, sofern wir für sie einen »Billardtisch« besonderer Bauart konstruieren.

Nehmen Sie ein Blatt Papier und liniieren Sie es mit schrägen Karos derart, daß die einzelnen Karos Rhomben und Rauten mit einem spitzen Winkel von 60° darstellen; sodann zeichnen Sie die auf der Abb. 145 dargestellte Figur $OABCD$.

Jawohl, das ist unser »Billardtisch«.

Versetzt man der Billardkugel einen Stoß in der Richtung OA, dann schnellt sie von der Wand AD genau nach dem Gesetz (Einfallwinkel = Ausfallwinkel, denn Winkel OAM = Winkel $MA\ c_4$) in der Richtung Ac_4, die die Spitzen der kleinen Rauten miteinander verbindet. Dann wird sie von der Kante BC in Punkt c_4 zurückgestoßen, rollt in Richtung c_4a_4 und dann über die Strecken a_4b_4, b_4d_4, d_4a_8 usw.

Nach den Bedingungen unserer Aufgabe haben wir drei Fässer, deren Fassungsvermögen jeweils 9, 5 und 12 Eimer ist. Wir konstruieren die Figur so, daß an der Seite OA neun Rhomben, an der Seite OB fünf, an der Seite AD drei (nämlich $12 - 9 = 3$) und an der Seite BC sieben Rhomben ($12 - 5 = 7$) liegen*.

Es sei darauf hingewiesen, daß jeder an den Seiten der Konstruktion befindliche Punkt von den Seiten OB und OA durch eine bestimmte Anzahl Rhomben getrennt ist. So liegt z. B. der Punkt c_4 vier Rhomben von OB und fünf Rhomben von OA, der Punkt a_4 vier Rhomben von OB und null Rhomben von OA entfernt (weil er selbst auf OA liegt); der Punkt d_4 hat einen Abstand von vier Rhomben bis OA usw.

Jeder Punkt unserer Konstruktion, gegen den unsere »Billardkugel« stößt, bestimmt somit zwei Zahlen.

Wir wollen uns darüber einig sein, daß die erste Zahl – es ist die Zahl, die den Abstand des betreffenden Punktes von OB kennzeichnet – die Anzahl Eimer im Neun-Eimer-Faß, während die zweite – d. h. die Zahl, die den Abstand des gleichen Punktes von OA kennzeichnet – die Anzahl Eimer im Fünf-Eimer-Faß bezeichnet. Der Rest des Wassers befindet sich offensichtlich im Zwölf-Eimer-Faß.

So, jetzt ist alles für die Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Billardkugel vorbereitet.

---

* Das volle Faß ist immer das größte, a und b sei das Fassungvermögen der leeren und c das des vollen Fasses. Ist $c \geqq a + b$, so muß der „Billardtisch" in Form eines Parallelogramms konstruiert werden, dessen Karoseiten a und b sind.

Nun lassen Sie die Kugel längs OA rollen und deuten jeden Anschlag gegen die »Bande« so, wie wir es erläutert haben.

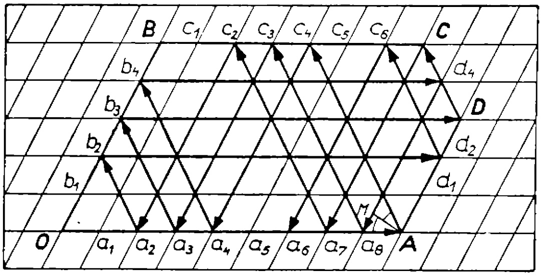


Abb. 145. Der Weg der »klugen Billardkugel«.

Sie verfolgen die Bewegung z. B. bis zum Punkt a_6 (Abb. 145), d. h., bis zwei Gefäße mit je 6 Eimern Wasser gefüllt sind.

Erster Anschlagpunkt: A (Lage 9; 0); also muß der erste Umgießvorgang folgendermaßen gestaltet werden:

9-Eimer-Faß	9
5-Eimer-Faß	0
12-Eimer-Faß	3

Diese Reihenfolge ist durchführbar.

Zweiter Anschlagpunkt: c_4 (Lage 4; 5). Die Kugel empfiehlt uns, nach folgendem Schema umzufüllen:

9-Eimer-Faß	9	4
5-Eimer-Faß	0	5
12-Eimer-Faß	3	3

Auch das läßt sich machen.

Dritter Anschlagpunkt: a_4 (Lage 4; 0); die Kugel rät, 5 Eimer in das große Faß zurückzugießen:

9-Eimer-Faß	9	4	4
5-Eimer-Faß	0	5	0
12-Eimer-Faß	3	3	8

Vierter Anschlagpunkt: b_4 (Lage 0; 4). Und das Ergebnis:

9-Eimer-Faß	9	4	4	0
5-Eimer-Faß	0	5	0	4
12-Eimer-Faß	3	3	8	8

Fünfter Anschlagpunkt: d_4 (Lage 8; 4); beharrlich weist uns die Kugel auf die Notwendigkeit hin, 8 Eimer in das leere 9-Eimer-Faß zu füllen, und zwar nach folgendem Schema:

9-Eimer-Faß	9	4	4	0	8
5-Eimer-Faß	0	5	0	4	4
12-Eimer-Faß	3	3	8	8	0

Fahren Sie mit der Beobachtung der Kugel fort: Sie erhalten zum Schluß folgende Tabelle:

9-Eimer-Faß	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5-Eimer-Faß	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
12-Eimer-Faß	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Endlich ist das Ziel erreicht: Zwei Fässer enthalten jeweils die gleiche Wassermenge! Die Billardkugel hat die Aufgabe gelöst!

So gescheit ist nun unsere Kugel aber doch nicht, sie hat die Aufgabe in 18 Arbeitsgängen erledigt, während wir für die gleiche Aufgabe nur 9 gebraucht haben (s. 1. Tabelle).

Aber auch die Kugel kann die Zahl der Arbeitsgänge kürzen. Versetzen Sie ihr zuerst einen Stoß längs OB, halten Sie sie in B an und stoßen Sie sie dann in Richtung BC. Die Kugel wird sich so bewegen, wie wir verabredet hatten, d. h. »Einfallwinkel gleich Ausfallwinkel«. Der Gießvorgang wird dadurch abgekürzt.

Gestatten Sie der Billardkugel, ihre Bewegung fortzusetzen, dann kann leicht nachgewiesen werden, daß sie in unserem Falle sämtliche markierten Punkte der Figur (überhaupt alle Rhombenspitzen) berührt und erst dann in ihren Ausgangspunkt O zurückkehren wird. Das bedeutet nichts anderes, als daß man jede beliebige Zahl von Eimern Wasser von eins bis neun in das Neun-Eimer-Faß und jede Anzahl Eimer von eins bis fünf in das Fünf-Eimer-Faß gießen kann.

Andererseits gibt es Fälle, in denen die verlangte Lösung undurchführbar ist. Wie zeigt die Kugel einen solchen Fall an? Ganz einfach, indem sie in den Ausgangspunkt O zurückkehrt, ohne gegen den erforderlichen Punkt gestoßen zu haben.

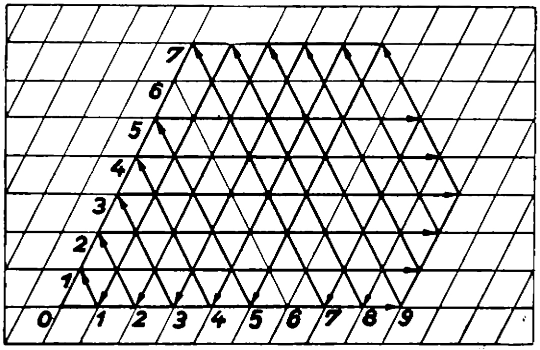


Abb. 146. Der Lauf der Kugel zeigt, daß es unmöglich ist, den Inhalt eines 12 Eimer enthaltenden Fasses mit Hilfe von zwei leeren Fässern von jeweils 9 und 7 Eimern Fassungsvermögen in zwei Hälften zu verteilen.

Abb. 146 zeigt uns den Ablauf der Lösung einer Aufgabe für drei Fässer mit dem jeweiligen Fassungsvermögen von neun, sieben und zwölf Eimern.

9-Eimer-Faß	9	2	2	0	9	4	4	0	8	8	1	1	0	9	3	3	0	9	5	5	0	7	7	0
7-Eimer-Faß	0	7	0	2	2	7	0	4	4	0	7	0	1	1	7	0	3	3	7	0	5	5	0	7
12-Eimer-Faß	3	3	10	10	1	1	8	8	0	4	4	11	11	2	2	9	9	0	0	7	7	0	5	5

Wie der Ablauf der Umgießvorgänge zeigt, kann man mit Hilfe der beiden leeren Fässer von 9 bzw. 7 Eimern Fassungsvermögen aus dem vollen 12-Eimer-Faß jede beliebige Anzahl Eimer Wasser abfüllen mit Ausnahme seines halben Inhalts von sechs Eimern.

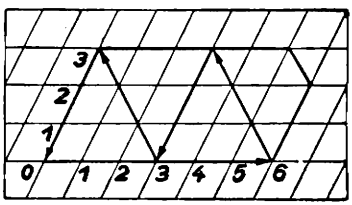


Abb. 147. Eine weitere Aufgabe wird durch die »kluge Billardkugel« gelöst.

Abb. 147 zeigt die Lösung für drei Fässer von drei, sechs und acht Eimern Fassungsvermögen. Hier ist die Anzahl der Anschläge gegen die Bande auf vier beschränkt, danach kehrt die Kugel in die ursprüngliche Lage zurück (Punkt *o*). Die entsprechende Tabelle sieht folgendermaßen aus:

6-Eimer-Faß	6	3	3	0
3-Eimer-Faß	0	3	0	3
8-Eimer-Faß	2	2	5	5

Man ersieht daraus, daß es unmöglich ist, unter diesen Bedingungen vier oder einen Eimer aus einem Acht-Eimer-Faß abzufüllen.

Unser Billard mit der »klugen Billardkugel« stellt tatsächlich eine eigenartige und kuriose Rechenmaschine dar, die imstande ist, Aufgaben der genannten Art zu lösen.

Mit einem Federstrich

Aufgabe

Zeichnen Sie die in Abb. 148 dargestellten Figuren ab und versuchen Sie, diese mit einem einzigen Bleistift- bzw. Federstrich nachzuzeichnen, und zwar so, daß Sie den Bleistift vom Papier nicht abheben und der Stift über jede Linie nur ein einziges Mal fährt.

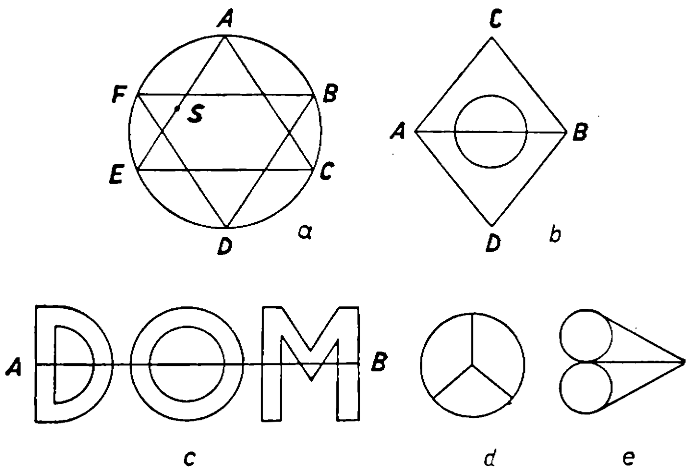


Abb. 148. Versuchen Sie, jede Figur mit einem Federstrich nachzuzeichnen, ohne mehr als einmal mit dem Stift über die gleiche Linie zu fahren.

Die meisten Leser, denen wir diese Aufgabe vorlegten, zogen es vor, mit der vierten Figur (*d*) zu beginnen, weil sie ihnen besonders einfach erschien. Alle Versuche, diese Figur mit einem einzigen Federstrich nachzuzeichnen, schlugen jedoch fehl. Unsicher geworden, gingen sie resigniert zu den übrigen Figuren über und stellten erstaunt und befriedigt fest, daß sie ohne besondere Schwierigkeiten die ersten beiden Figuren, ja sogar die sehr verwickelt aussehende dritte Figur nachzeichnen konnten, die das durchgestrichene Wort *DOM* bedeutet. Keinem gelang es indessen, die vierte und fünfte Figur mit einem Federstrich nachzuzeichnen.

Wie kommt es nun, daß bei einigen Figuren die Lösung gelingt und bei anderen nicht? Liegt die Ursache vielleicht in dem Mangel an unserem Erfindergeist, oder ist die Aufgabe für einige Figuren an sich unlösbar? Ist es möglich, in solchen Fällen irgendein Merkmal nachzuweisen, auf Grund dessen man sich von vornherein über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, die betreffende Konstruktion mit einem Federstrich nachzuzeichnen, im klaren ist?

Jede »Kreuzung«, in der sich die Linien der betreffenden Figur treffen oder schneiden, bezeichnen wir als Knoten. Wir wollen einen Knoten, in dem sich eine gerade Zahl von Linien trifft, einen »geraden Knoten« und einen solchen, in dem sich eine ungerade Zahl von Linien trifft, einen »ungeraden Knoten« nennen. Sämtliche Knoten der Figur *a* sind gerade. Die Figur *b* weist zwei ungerade Knoten auf (*A* und *B*). In der Figur *c* sind die Enden der das Wort *DOM* durchstreichenden Strecke ungerade Knoten, während die Figuren *d* und *e* je vier ungerade Knoten enthalten. Wir betrachten zunächst eine Figur, bei der alle Knoten gerade sind, z. B. *a*. Wir beginnen mit unserer Wanderung in einem beliebigen Punkt *S*. Beim Knoten *A* durchfahren wir zwei Linien, nämlich den Zugang zu *A* und den Abgang von *A*. Da jeder gerade Knoten ebenso viele Abgänge wie Zugänge besitzt, so nimmt während der Wanderung von Knoten zu Knoten die Anzahl der nicht nachgezeichneten Striche um zwei ab; es ist also grundsätzlich durchaus möglich, sämtliche Knoten zu durchwandern und zum Ausgangspunkt zurückzukehren.

Nehmen wir jedoch an, daß wir zum Ausgangspunkt, aus dem es keinen »Ausweg« mehr gibt, zurückgekehrt sind und daß in der Figur trotzdem noch eine nicht nachgezeichnete Linie übriggeblieben ist, die in irgendeinem von uns bereits berührten Knoten anfängt. In diesem Falle müssen wir unseren Reiseweg korrigieren. Nach Erreichen des Knotens *B* müssen wir zunächst die durchgelassenen Linien nachzeichnen und erst nach Rückkehr in *B* die Wanderung auf dem ursprünglichen Weg fortsetzen.

Nehmen wir an, wir haben uns entschlossen, die Figur *a* folgendermaßen nachzuzeichnen. Zuerst führt der Weg an den Seiten des Dreiecks *ACE* entlang, dann kehren wir nach Punkt *A* zurück und wandern an der Peripherie *ABCDEFA* entlang.

Da das Dreieck *BDF* hierbei nicht nachgezeichnet wird, müssen wir, ehe wir den Knoten *B* verlassen und am Bogen *BC* entlangfahren, das Dreieck *BDF* nachzeichnen.

Sind also sämtliche Knoten einer Figur gerade, dann können wir, ganz gleich, in welchem Punkt unser Weg beginnt, die gesamte Figur mit einem Federstrich nachzeichnen, wobei die Zeichnung in diesem Falle im Ausgangspunkt beendet wird.

Jetzt betrachten wir einmal eine Figur mit zwei ungeraden Knoten. Da ist die Figur *b*, die die beiden ungeraden Knoten *A* und *B* aufweist. Auch dieses Gebilde läßt sich mit einem einzigen Federstrich nachzeichnen.

Wir beginnen die Zeichnung im ungeraden Knoten *A*, wandern auf irgendeiner Linie weiter zum Knoten *B* auf dem Wege *ACB* der Figur *b* (Abb. 148). Nach dem Nachzeichnen dieser Linie wird je eine Linie aus dem ungeraden Knoten eliminiert, als sei die betreffende Linie in der Figur einfach nicht vorhanden gewesen. Damit werden beide ehemals ungeraden Knoten zu geraden. Da die Figur keine weiteren ungeraden Knoten erhält, haben wir es nunmehr mit einer Figur zu tun, die nur noch gerade Knoten enthält; nach dem Zeichnen der Linie *ACB* bleibt in der Figur *b* ein Dreieck mit einem Kreis übrig.

Wir haben bereits nachgewiesen, daß man eine derartige Figur mit einem einzigen Federstrich nachzeichnen kann. Für unsere Restfigur gilt somit das gleiche.

Hier übrigens noch ein zusätzlicher Hinweis:

Beginnt man die Wanderung an einem ungeraden Knoten, so ist der Weg zum nächsten ungeraden Knoten so zu wählen, daß keine von der betreffenden Figur isolierten Gebilde übrigbleiben. Beim Nachzeichnen der Figur *b* wäre es z. B. falsch, wenn wir in Eile den Weg vom Knoten *A* zum Knoten *B* über die Gerade *AB* wählten, weil in diesem Falle der Kreis von der übrigen Figur losgelöst bleibt und damit nicht nachgezeichnet werden kann.

Wenn also die Figur zwei ungerade Knoten enthält, so kann man diese nur dann mit Erfolg nachzeichnen, wenn die Wanderung in dem einen Knoten beginnt und in dem anderen endet. In diesem Falle liegen Anfang und Ende an getrennten Orten.

Daraus folgt übrigens, daß eine vier ungerade Knoten enthaltende Figur nicht mit einem, sondern mit zwei Federstrichen nachgezeichnet werden kann; aber das entspricht nicht mehr den Bedingungen unserer Aufgabe. Hierzu gehören die Figuren *d* und *e* (Abb. 148).

Sie sehen also, wenn wir richtig überlegen, können wir voraussehen und damit einen unnötigen Aufwand an Energie und Zeit vermeiden. Möglicherweise hat Sie, mein lieber Leser, die Behandlung der hier dargebotenen Überlegungen ermüdet.

Sie wissen nun aber von vornherein, ob eine Figur nachgezeichnet werden kann, und wissen auch, in welchem Knoten ihre Wanderung beginnen soll.

Darüber hinaus sind Sie jetzt selbst in der Lage, nach Herzenslust zahlreiche verschnörkelte Figuren dieser Art zu konstruieren und Ihren Freunden vorzulegen.

Zum Schluß zeichnen Sie noch ein paar Figuren nach, wie sie in Abb. 149 dargestellt sind. Wenn Sie alles beachten, was gesagt wurde, dann müßten Sie sehr schnell am Ziel sein.

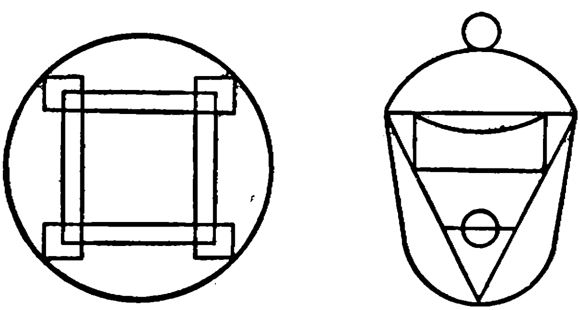


Abb. 149. Zeichnen Sie jede Figur mit einem Federstrich nach!

Die sieben Brücken von Kaliningrad

Vor zweihundert Jahren gab es in der Stadt Kaliningrad sieben Brücken, die die Ufer der Pregel miteinander verbanden (Abb. 150). Der große Mathematiker L. Euler interessierte sich im Jahre 1737 (er war damals 30 Jahre alt) für folgende Aufgabe.

Kann man beim Spaziergang durch die Stadt über sämtliche sieben Brücken nacheinander gehen, ohne eine der Brücken zweimal zu benutzen?

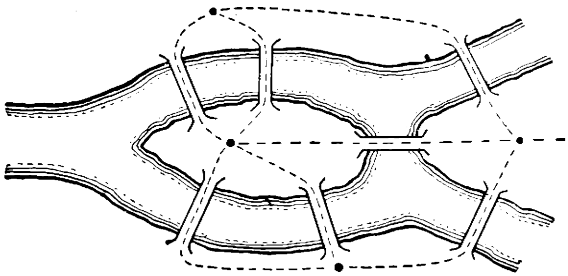


Abb. 150. Es ist ausgeschlossen, über sämtliche sieben Brücken in einem Zuge zu gehen, ohne eine der Brücken ein zweites Mal zu benutzen.

Wie wir leicht begreifen werden, handelt es sich in diesem Falle um eine Aufgabe, die den soeben betrachteten Aufgaben über das Nachzeichnen von Figuren ähnlich sieht.

Sämtliche möglichen Wege sind in Abb. 150 gestrichelt dargestellt. Wir erhalten somit eine geometrische Figur mit vier ungeraden Knoten (Abb. 148, *d*).

Wie wir jetzt wissen, besteht keine Möglichkeit, eine solche Figur mit einem Federstrich nachzuzeichnen; folglich ist es auch unmöglich, über alle sieben Brücken nur einmal zu gehen, wenn man durch die Stadt wandert. Diese Tatsache hat Euler damals auch nachgewiesen.

Ein geometrischer Scherz

Jetzt, da Sie und Ihre Freunde das Geheimnis kennen, Figuren mit einem Federstrich nachzuziehen, erklären Sie ihnen plötzlich, daß Sie nun doch bereit sind, eine Figur mit vier ungeraden Knoten, etwa einen Kreis mit zwei Durchmessern (Abb. 151), mit einem Federstrich nachzuzeichnen, ohne die Feder abzuheben und ohne einen Strich zweimal nachzuzeichnen.

Sie wissen sehr gut, daß es unmöglich ist, trotzdem dürfen Sie auf Ihrer sensationellen Erklärung beharren. Ich werde Ihnen nämlich einen kleinen Kunstgriff beibringen.

Sie beginnen den Kreis in dem Punkt A zu zeichnen (Abb. 151). Sobald Sie einen Viertelkreis (den Bogen AB) zurückgelegt haben, legen Sie ein anderes

Abb. 151. Ein geometrischer Scherz.

Blatt Papier (das Blatt kann auch entsprechend gefalzt werden) auf den Punkt B und setzen die Wanderung mit dem Bleistift über den unteren Halbkreis bis zu dem Punkt D fort, der dem Punkt B gegenüberliegt. Nun nehmen Sie das untergelegte Stück Papier fort. Die Vorderseite des Papiers enthält nur die Zeichnung des Bogens AB, der Bleistift befindet sich aber in D, obwohl er das Papier ständig berührt hat.

Die Figur zu Ende zu zeichnen, ist nicht schwer. Ziehen Sie zuerst den Bogen DA, daraufhin den Durchmesser AC, dann den Bogen CD, den Durchmesser DB und schließlich den Bogen BC. Sie können auch einen anderen Weg wählen. Suchen Sie diesen Weg selbst!

Das Große und das Kleine in der Geometrie

27 000 000 000 000 000 000 in einem Fingerhut

Die hier wiedergegebene Zahl 27 mit achtzehn Nullen kann man auf verschiedene Art lesen. Die einen lesen sie als 27 Trillionen; andere wiederum schreiben kurz $27 \cdot 10^{18}$; sie sagen dazu: 27mal zehn hoch 18. Was für Dinge sind es nun, deren ungeheure Anzahl in einem Fingerhut Platz haben?

Es handelt sich um die Partikel der uns umgebenden Luft. Wie alles Stoffliche in der Natur besteht auch die Luft aus Molekülen. Die Physiker haben festgestellt, daß jeder Kubikzentimeter (es ist ungefähr das Volumen eines Fingerhuts) Luft von 0° rund 27 Trillionen Moleküle enthält. Das ist eine ganz gewaltige Zahl, sozusagen ein Riese unter den Zahlen. Keine noch so lebhafte Phantasie vermag sich diese Zahl vorzustellen. Ja, wahrhaftig, mit welchen Dingen läßt sich diese ungeheure Menge vergleichen? Etwa mit der Erdbevölkerung? Es gibt indessen nur etwa zweitausend Millionen Erdbewohner ($2 \cdot 10^9$). Wäre jeder in unseren stärksten Fernrohren sichtbare Stern gleich unserer Sonne von Planeten

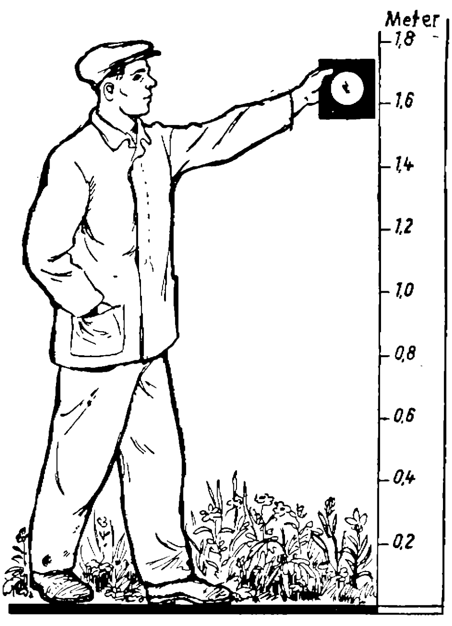


Abb. 152. Ein Mann betrachtet einen Bazillus in 1000facher Vergrößerung.

umgeben und wäre jeder Planet ebenso dicht bevölkert wie unser Erdball, dann wäre die Bewohnerzahl trotzdem kleiner als die Zahl der Moleküle im Fingerhut. Sollten Sie einen Versuch machen, diese unsichtbare Bevölkerung zu zählen, so würden Sie, vorausgesetzt, daß Sie 100 Moleküle in der Minute zählen, etwa 500 Milliarden Jahre brauchen, ehe Sie mit der Arbeit fertig wären.

Aber auch verhältnismäßig bescheidene Zahlen sind unserem Vorstellungsvermögen nicht immer klar.

Was stellen Sie sich z. B. vor, wenn Ihnen gesagt wird, ein Mikroskop vergrößert 1000mal? Tausend ist keine sehr große Zahl, und trotzdem können sich wenige eine rechte Vorstellung einer tausendfachen Vergrößerung machen.

Häufig begreifen wir gar nicht die Winzigkeit jener Objekte, die wir bei 1000facher Vergrößerung durch das Mikroskop betrachten. Ein um das Tausendfache vergrößerter Typhusbazillus scheint die Größe einer Mücke anzunehmen (Abb. 152), die wir in der normalen Entfernung (25 cm) betrachten. Aber, wie klein ist denn der Bazillus in Wirklichkeit? Stellen Sie sich einmal vor, daß Sie selbst mit dem Bazillus zusammen um das Tausendfache wachsen und 1700 m groß werden! Ihr Kopf würde über den Wolken schweben, und keines der neuen Moskauer Hochhäuser würde Ihnen auch nur bis zum Knie reichen (Abb. 153). In Wirklichkeit sind Sie, verglichen mit diesem Übermenschen, ebenso winzig, wie der Typhusbazillus im Vergleich zur Mücke.

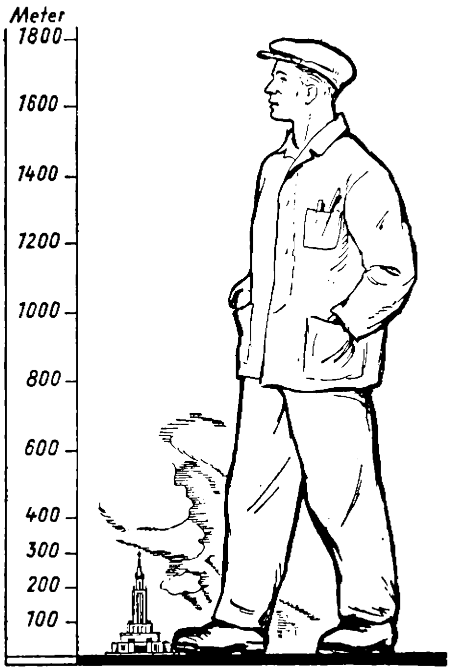


Abb. 153. Der um das 1000fache vergrößerte Mann.

Man könnte im Zweifel darüber sein, ob die 27 Trillionen Luftmoleküle in einem Fingerhut vielleicht sehr eng aneinander gepreßt seien? Nein, keineswegs! Ein Sauerstoff- oder Stickstoffmolekül hat einen Durchmesser von $\frac{3}{10\,000\,000}$ mm (wir schreiben $3 \cdot 10^{-7}$ mm). Setzt man das Volumen eines Moleküls gleich der dritten Potenz seines Durchmessers, dann erhält man

$$\left(\frac{3}{10^7}\text{ mm}\right)^3 = \frac{27}{10^{21}}\text{ mm}^3.$$

In dem Fingerhut haben $27 \cdot 10^{18}$ Moleküle Platz. Folglich beanspruchen sämtliche Bewohner des Fingerhuts ein Volumen von

$$\frac{27}{10^{21}}\text{ mm}^3 \cdot 27 \cdot 10^{18} = \frac{729}{10^3}\text{ mm}^3.$$

Das ist ungefähr 1 mm³, also nur ein Tausendstel Kubikzentimeter.

Die Zwischenräume zwischen den Molekülen übertreffen deren Durchmesser um das Vielfache, folglich haben unsere Moleküle noch reichlich Platz.

In der Tat, wie Sie wissen, liegen Luftpartikelchen nicht artig zu einem Häufchen gesammelt beieinander, sondern bewegen sich blitzschnell und turbulent im Raum durcheinander.

Sauerstoff, Kohlendioxyd, Stickstoff, Wasserstoff und andere Gase werden industriell verwertet; große Mengen dieser Gase würden also sehr große Behälter beanspruchen. Eine Tonne (1000 kg) Stickstoff beansprucht z. B. bei atmosphärischem Druck etwa 800 Kubikmeter Raum. Das heißt, daß wir einen würfelförmigen Behälter mit einer Seitenlänge von 9,28 Metern brauchen, um eine Tonne Stickstoff aufzubewahren. Wasserstoff beansprucht sogar 11 000 Kubikmeter.

Ob man vielleicht die Moleküle zwingen kann, sich mit etwas weniger Raum zu begnügen? Jawohl – der Techniker schafft es, indem er das Gas durch Druck verdichtet. Aber das ist nicht so einfach. Vergessen Sie nicht, daß der Gegendruck eines Gases dem auf ihn ausgeübten Druck gleich ist. Wir brauchen sehr feste Gefäßwandungen, die darüber hinaus chemisch nicht angegriffen werden dürfen.

Die neueste, von unserer einheimischen Industrie aus legierten Stählen hergestellte chemische Apparatur vermag ganz enorme Drücke auszuhalten; sie ist außerordentlich widerstandsfähig gegen die Wirkung hoher Temperaturen und gegen chemische Einflüsse.

Heute verdichten wir Wasserstoff bis auf das 1200fache, so daß eine Tonne Wasserstoff, die unter atmosphärischem Druck 11 000 Kubikmeter beansprucht, in einem nur 9 Kubikmeter fassenden Behälter untergebracht werden kann.

Haben Sie schon über den Druck nachgedacht, der erforderlich ist, um das Volumen auf den 1200. Teil zu verkleinern?

Wenn Sie sich einmal die Physikregel ins Gedächtnis rufen, wonach das Volumen eines Gases sich um so viele Male verkleinert, um wieviele Male der Druck erhöht wird, so werden Sie wohl die gestellte Frage damit beantworten, daß Sie behaupten, der auf den Wasserstoff ausgeübte Druck wächst ebenfalls auf das 1200fache. Wie verhält es sich wirklich?

Ganz anders: in Wirklichkeit müssen wir einen Druck von 5000 Atmosphären anwenden. Wir erhöhen also den Druck auf das 5000fache und nicht nur um das 1200fache. Der Gasdruck ändert sich nämlich nur bei kleinen Drucken im umgekehrten Verhältnis zum Volumen. Bei sehr hohen Drucken kann diese Gesetzmäßigkeit nicht festgestellt werden.

Wird z. B. in einer chemischen Fabrik auf 1 Tonne Stickstoff ein Druck von 1000 at ausgeübt, so hat die ganze Menge in 1,7 m^3 Platz, anstatt in 800 Kubikmetern wie bei normalem atmosphärischem Druck. Wird der Druck noch weiter bis auf 5000 at erhöht, so nimmt das Volumen nur noch wenig ab: 1 Tonne nimmt dann 1,1 m^3 ein.

Zwei Gläser

Vergleichen wir das Große und das Kleine in der Geometrie, so spielt uns unser Vorstellungsvermögen einen ganz besonders bösen Streich – vor allem dann, wenn es darum geht, Flächen und Volumen miteinander zu vergleichen. Jedermann wird sofort zustimmen, daß 5 kg Marmelade mehr sind als 3 kg; aber nicht jeder ist imstande, den Inhalt zweier Marmeladengläser oder sonstiger Gefäße, die vor ihm auf dem Tisch stehen, richtig abzuschätzen.

Aufgabe

Welches der beiden Gläser (Abb. 154) besitzt ein größeres Fassungsvermögen – das breite Glas rechts oder das halb so breite, aber 3mal so hohe Glas links?

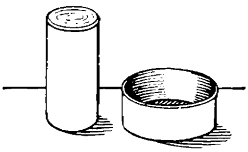


Abb. 154. Welches Glas hat das größere Fassungsvermögen?

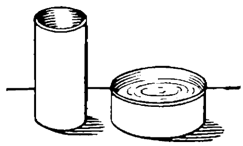


Abb. 155. Der Inhalt ist umgefüllt.

Lösung

Mancher von Ihnen wird verblüfft sein, wenn er erfährt, daß in diesem Falle das hohe Glas weniger Marmelade faßt als das breite. Wir können uns davon jedoch durch Rechnung leicht überzeugen. Der Radius der breiten Büchse ist doppelt so groß wie der der schmalen. Dagegen ist sie $\frac{1}{3}$ so hoch wie die andere. Wenn der Inhalt der schmalen Büchse $r^2 \cdot \pi \cdot h$ ist, dann ergibt sich für den Inhalt der breiten Büchse die Formel

$$(2r)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} h = \frac{4}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Folglich ist das Volumen der breiten Büchse $\frac{4}{3}$ mal so groß wie das der schmalen; gießt man den Inhalt des vollen schmalen Glases in das breite um, dann füllt er das Glas nur zu $\frac{3}{4}$ (Abb. 155).

Die Riesenzigarette

Aufgabe

Im Schaufenster eines Kaufhauses ist eine Riesenzigarette ausgestellt. Sie ist 15mal höher und 15mal dicker als eine normale Zigarette. Es wird vorausgesetzt, daß die zum Stopfen einer normalen Zigarette erforderliche Menge Tabak 0,5 g beträgt. Wieviel Tabak braucht man dann, um den ausgestellten riesigen Glimmstengel zu füllen?

Lösung

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{g} \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 1687{,}5\,\mathrm{g}$$

also über $1\frac{1}{2}$ kg.

Das Straußenei

Aufgabe

Die Abb. 156 zeigt im richtigen Verhältnis zueinander ein Hühnerei (rechts) und ein Straußenei (links). Das Ei in der Mitte ist das Epiornisei (Aepyornis maximus), von dem im nächsten Abschnitt die Rede ist.

Betrachten Sie die Zeichnung genau und sagen Sie, wievielmal das Volumen des Straußeneies das Hühnerei übertrifft. Bei flüchtiger Betrachtung scheint der Unterschied nicht sehr gewaltig zu sein. Um so überraschender ist das durch die Rechnung erzielte Ergebnis.

Lösung

Sie können sich davon überzeugen, daß das Straußenei 2,5mal länger als das Hühnerei ist.

Das Volumen des Straußeneies beträgt also

$$2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 = \frac{125}{8},$$

d. h. rund das Fünfzehnfache eines Hühnereies.

Ein einziges Ei reicht für das Mittagbrot einer fünfköpfigen Familie aus, wenn man eine Portion Rührei von drei normalen Eiern für jedes Familienmitglied zugrunde legt.

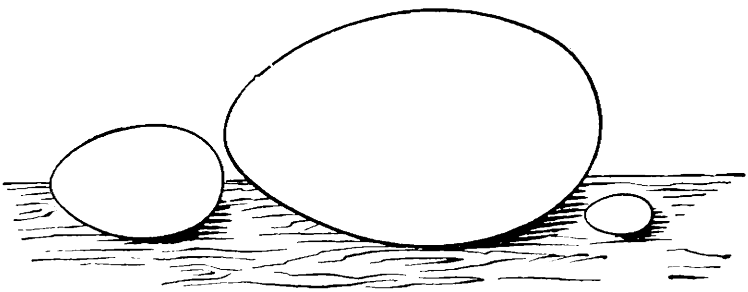


Abb. 156. Vergleichsgröße: Straußen-, Epiornis- und Hühnerei.

Das Epiornisei

Aufgabe

Es gab einst auf der Insel Madagaskar Riesenstrauße, Epiornis (Aepyornis maxismus) genannt. Dieser Vogel hatte eine Höhe von 2,7 bis 4 m und legte Eier von etwa 28 cm Länge (s. Abb. 156). Ein Hühnerei mißt dagegen nur 5 cm. Wieviel Hühnereier ergeben das Volumen eines Madagaskar-Straußeneies?

Lösung

Durch Multiplikation stellen wir es fest:

$$\frac{28}{5} \cdot \frac{28}{5} \cdot \frac{28}{5} = 176$$

Es fehlt nicht viel, und ein Epiornisei wäre beinahe 200mal größer als ein Hühnerei! Ein halbes Hundert Menschen könnte man damit sättigen! Es ist leicht auszurechnen, daß so ein Ei 8 bis 9 kg wiegen müßte.

Die Eier unserer einheimischen Vögel

Kehren wir zu der Natur unserer Heimat zurück. Wir stellen fest, daß auch hier stärkste Gegensätze zu finden sind. Wir brauchen nur ein Schwanenei mit einem Ei des kleinsten unserer Singvögel zu vergleichen, des gelbköpfigen Zaunkönigs. Abb. 157 stellt das Größenverhältnis der beiden Eier in natürlicher Größe dar. Wie groß ist das Volumenverhältnis?

Wir messen 125 mm und 13 mm für die Längen. Dann messen wir die Breiten und erhalten 80 mm und 9 mm. Die Zahlen sind nahezu genau proportional.

Wir prüfen die Proportion:

$$\frac{125}{80} \approx \frac{13}{9}$$

Durch Multiplikation der äußeren und inneren Glieder erhalten wir 1125 und 1040, der Zahlenunterschied ist nicht erheblich. Wir nehmen also an, daß es sich um geometrisch ähnliche Körper handelt. Das Volumenverhältnis beträgt daher etwa

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{512\,000}{729} \approx 700$$

Siebenhundert Eier des Zaunkönigs haben das Volumen eines Schwaneneies!

Bestimme das Gewicht der Eierschale, ohne das Ei zu zerschlagen!

Aufgabe

Vor uns liegen zwei Eier von gleicher Form, aber verschiedener Größe. Wir wollen das angenäherte Gewicht der Eierschalen bestimmen, ohne die Eier dabei zu zerschlagen. Welche Messungen, Wägungen und Rechnungen sind zu diesem Zweck erforderlich? Es wird angenommen, daß beide Eier gleich starke Schalen haben.

Lösung

Wir messen die Längsachse eines jeden Eies und erhalten die Werte D und d. Wir bezeichnen nun das Gewicht der ersten Eierschale mit x, das der zweiten mit y. Das Gewicht der Schale ist ihrer Fläche proportional, d. h. dem Quadrat ihrer Lineargröße. Setzt man also gleich starke Eierschalen voraus, dann können wir folgende Proportion aufstellen:

$$x : y = D^2 : d^2$$

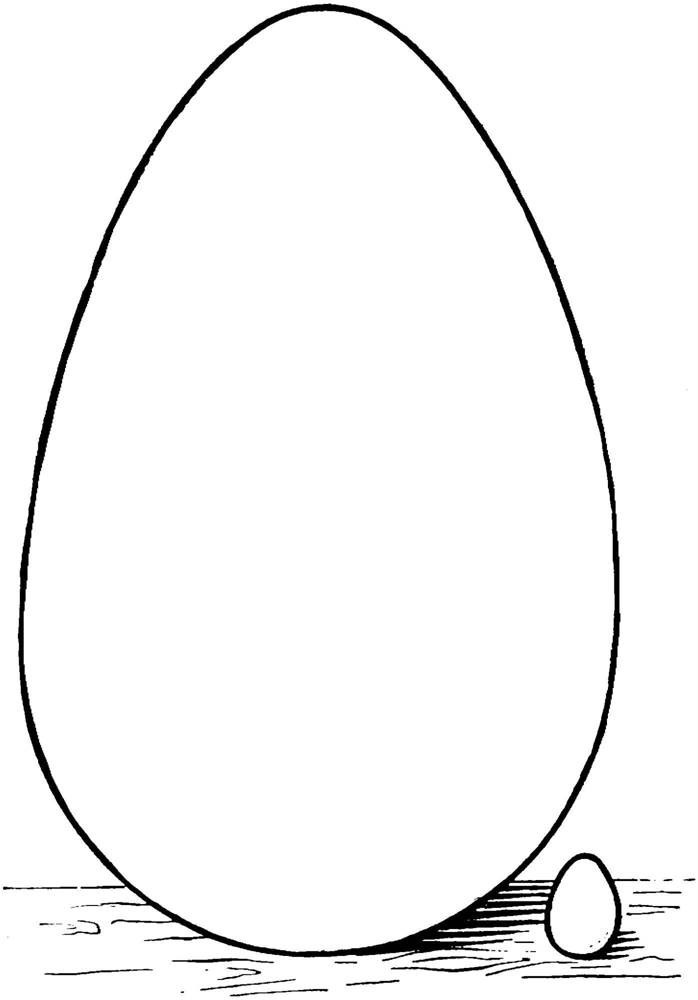


Abb. 157. Größenverhältnis zwischen Schwanenei und dem Ei des Zaunkönigs in natürlicher Größe. Um wievielmal ist das eine Ei größer als das andere?

Die Eier wiegen jeweils P und p. Es kann angenommen werden, daß das Gewicht des Eies in dem gleichen Verhältnis zunimmt wie das Volumen, d. h. wie die dritte Potenz seiner Lineargrößen:

$$(P - x) : (p - y) = D^3 : d^3$$

Wir haben ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Als Ergebnis erhalten wir:

$$x = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{d^2 (D - d)}$$

$$y = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{D^2 (D - d)}$$

Die Größe unserer Münzen

Das Gewicht unserer Geldstücke steigt in direktem Verhältnis zu ihrem Wert, d. h., ein Zweikopekenstück wiegt zweimal soviel wie ein Einkopekenstück, während das Dreikopekenstück das Dreifache wiegt usw. Das gleiche gilt für die silberne Scheidemünze; auch hier besitzt das Zwanzigkopekenstück das doppelte Gewicht des Zehners usw. Da gleichartige Münzen meistens geometrisch ähnlich sind, so können wir den Durchmesser sämtlicher Geldstücke bestimmen, die irgendeiner Münze geometrisch ähnlich sind.

Aufgabe

Der Durchmesser eines Fünfkopekenstückes beträgt 25 mm. Wie groß ist der Durchmesser eines Dreikopekenstückes?

Lösung

Das Gewicht, und folglich auch das Volumen eines Dreikopekenstückes, beträgt 0,6 des Volumens eines Fünfkopekenstückes. Folglich müssen seine Linearmaße $\sqrt[3]{0{,}6}$mal kleiner sein; das entspricht 0,84 der Lineargröße eines Fünfkopekenstückes. Der gesuchte Durchmesser einer Dreikopekenmünze müßte daher $0{,}84 \cdot 25\ \text{mm} = 21\ \text{mm}$ betragen (tatsächlich ist der Durchmesser 22 mm).

Die Millionenrubelmünze

Aufgabe

Stellen Sie sich eine phantastische Silbermünze im Werte von 1 Million Rubel vor, die die gleiche Form hat wie ein Zwanzigkopekenstück und ein entsprechend höheres Gewicht besitzt. Wie groß wäre der Durchmesser des Riesengeldstückes?

Lösung

Das Maß des Geldstückes ist nicht so gewaltig, wie es auf den ersten Eindruck erscheint. Der Durchmesser erreicht nur 3,8 m, d. h. nur wenig mehr als die Höhe des Erdgeschosses. Soll das Volumen der Münze das eines Zwanzigkopeken-

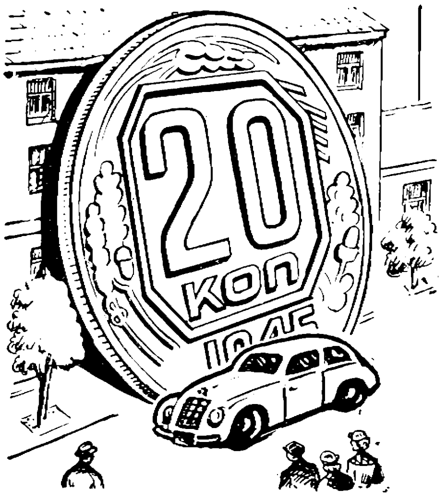


Abb. 158. Welchen Wert hat das Riesengeldstück?

stückes um das 5000000fache übertreffen, so ist ihr Durchmesser tatsächlich nur

$$\sqrt[3]{5\,000\,000} \approx 172 \text{ mal größer.}$$

Auch die Stärke des Geldstücks entspricht der Lineargröße. Durch Multiplikation von 172 mit 22 mm erhalten wir rund 3,8 m, eine Höhe, die im Vergleich zu dem hohen Wert der Münze bescheiden anmutet.

Aufgabe

Rechnen Sie den Geldwert einer Münze aus, deren lineare Abmessungen fünfmal größer sind als die der Millionenrubelmünze (Abb. 158).

Anschauliche Bilder

Der Leser, der an Hand der dargebotenen Beispiele geometrisch ähnliche Körper vergleichen kann und eine gewisse Übung besitzt, läßt sich durch Fragen dieser Art nicht mehr aus der Ruhe bringen. Es wird ihm daher auch leicht fallen, fehlerhafte Darstellungen zu erkennen, die man häufig, z. B. in illustrierten Zeitschriften, zu sehen bekommt.

Aufgabe

Wir bringen hier ein Beispiel. Nimmt man an, daß ein Mensch täglich durchschnittlich 400 g Fleisch verzehrt, so beträgt diese Menge in 60 Jahren rund 9 Tonnen. Da ein Ochse rund 0,5 Tonnen wiegt, kann ein Mensch am Ende seines Lebens getrost behaupten, er habe 18 Ochsen aufgegessen.

Abb. 159 ist ein Bild aus einer englischen Zeitschrift. Es stellt einen Riesenochsen dar, der 18 mal höher ist als der neben ihm stehende Mensch.

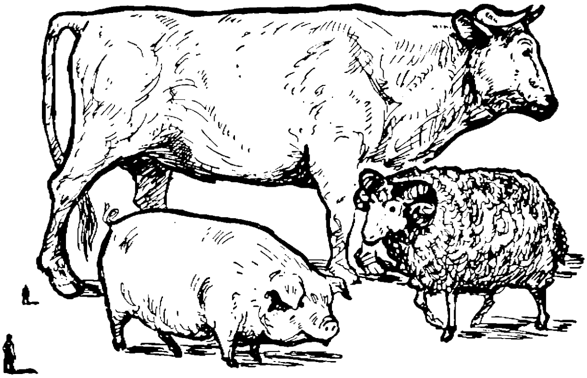


Abb. 159. Wieviel Fleisch verspeist der Mensch in seinem Leben? Finden Sie den Fehler in der Darstellung des Größenverhältnisses!

Stimmt die Zeichnung? Ist das Größenverhältnis richtig?

Lösung

Die Darstellung ist falsch. Der hier dargestellte Ochse ist 18mal so hoch wie ein normaler Ochse. Folglich besitzt er auch die 18fache Länge und Breite. Sein Volumen übertrifft das eines gewöhnlichen Rindviehs um das

$$18 \cdot 18 \cdot 18 = 5832\text{fache.}$$

Einen solchen Ochsen könnte ein Mensch höchstens in zweitausend Jahren aufessen!

Ein Ochse im richtigen Maßstab dürfte nur $\sqrt[3]{18} \approx 2{,}6$mal höher sein als ein gewöhnliches Rind. Diese Größe sieht allerdings nicht so imposant auf einem Bilde aus; der verblüffende Effekt der angeblich verzehrten Fleischmenge würde bei der Darstellung fehlen.

Aufgabe

Abb. 160 stellt ein ähnliches Verhältnis dar. Der Mensch trinkt täglich 7 bis 8 Glas Flüssigkeiten aus (etwa 1,5 l). In 70 Jahren trinkt er also etwa 40000 Liter. Ein Eimer hat ein Fassungsvermögen von 12 Litern. Der Zeichner wollte einen Behälter darstellen, dessen Volumen 3300mal so groß ist wie das Volumen eines Eimers. Er hat eine entsprechende Zeichnung gebracht (Abb. 160). Ist das Größenverhältnis richtig?

Lösung

Die Größe des Wassertanks auf der Zeichnung ist bei weitem übertrieben. Das Gefäß darf nur $\sqrt[3]{3300} \approx 14{,}9$mal höher und breiter sein als ein normaler Eimer. Nimmt man Höhe und Breite eines Eimers zu 30 cm an, so würde ein Behälter von 4,5 m Höhe und von gleicher Breite ausreichen, um die gesamte Flüssigkeits-

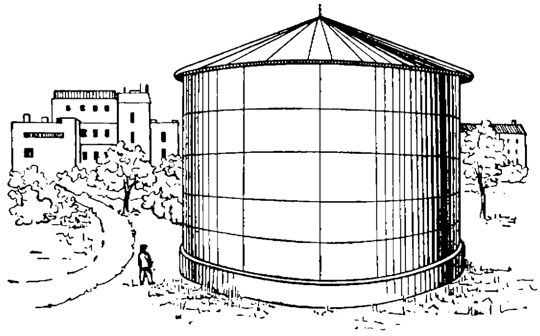


Abb. 160. Wieviel Flüssigkeit trinkt der Mensch während seines ganzens Lebens? Entdecken Sie den Fehler des Zeichners!

menge zu fassen, die wir während unseres ganzen Lebens austrinken. In der Abb. 161 ist das Gefäß im richtigen Maßstab zum Menschen dargestellt.

Wie die soeben gebrachten Beispiele zeigen, ist die Illustration statistischer Werte in richtiger räumlicher Darstellung nicht sehr wirksam, sie ruft nicht die erwartete Wirkung hervor. Säulendiagramme verdienen in solchen Fällen den Vorzug.

Unser Normalgewicht

Wenn wir voraussetzen, daß alle menschlichen Körper annähernd geometrisch ähnliche Gebilde sind, so kann man das Gewicht des Menschen nach dem Wuchs berechnen. (Das Durchschnittsgewicht eines Menschen beträgt 65 kg bei einer Körpergröße von 175 cm.) Die Ergebnisse derartiger Berechnungen wirken oft verblüffend. Nehmen wir an, Ihre Körpergröße ist um 10 cm kleiner als normal. Wie groß ist Ihr Normalgewicht?

Meistens wird die Aufgabe folgendermaßen gelöst: Man zieht vom Normalgewicht prozentual den gleichen Anteil ab, den die Länge von 10 cm, bezogen auf

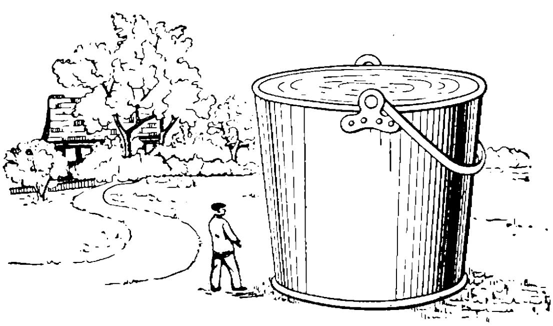


Abb. 161. Hier ist das Größenverhältnis richtig gewählt

die gesamte Körperlänge, ausmacht. In unserem Falle z. B. verkleinern wir das Körpergewicht von 65 kg um $\frac{10 \cdot 100}{175}$% und nehmen das erhaltene Gewicht von etwa 61,5 kg als normal an.

Die Rechnung ist falsch!

Wir erhalten das richtige Normalgewicht, wenn wir folgende Proportion lösen:

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}65^3$$

Wir ermitteln

$$x \approx 54{,}5 \text{ kg}.$$

Also ist der Unterschied im Vergleich zum Normalgewicht beträchtlich, er erreicht fast 11 kg!

Das Normalgewicht eines Menschen, dessen Körperlänge die Normalgröße um 10 cm überragt, läßt sich aus einer ähnlichen Proportion errechnen:

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}85^3$$

Und daraus erhalten wir $x = 77$ kg, also ein um 12 kg höheres Gewicht. Die Zunahme ist viel größer als allgemein angenommen wird.

Zweifellos sind derartige Rechnungen, wenn sie richtig ausgeführt sind, für die medizinische Praxis sehr wertvoll, wenn es z. B. darum geht, das Normalgewicht, eine Arzneidosis usw. zu bestimmen.

Riesen und Zwerge

Wie ist nun das Verhältnis zwischen Riesen und Zwergen?

Viele Leser werden es für unwahrscheinlich halten, daß ein Riese das fünfzigfache Gewicht eines Zwerges besitzt. Wir wollen dies durch eine Rechnung beweisen.

Einer der größten Menschen, dessen Existenz wirklich verbürgt ist, der Österreicher Winkelmayer, war 2,78 m groß; ein anderer, der Elsässer Kranmaß 2,75 m. Ein dritter war ein Engländer, er hieß O'Brick. Man erzählte von ihm, daß er sein Pfeifchen an der Straßenlaterne anrauchte; er war 2,68 m groß. Alle diese Männer überragen normale Menschen um einen Meter. Im Gegensatz hierzu sind erwachsene Zwerge rund 75 cm groß, unterschreiten also die normale Körpergröße um 1 m.

Wie verhält sich nun das Volumen eines Riesen zum Volumen eines Zwerges? Wir ermitteln es mit

$$275^3 : 75^3 = 11^3 : 3^3 = 49.$$

Das gleiche gilt auch für das Gewicht; wir sehen also, daß ein Riese soviel wiegt, wie ein halbes Hundert Zwerge.

Glaubt man an eine Nachricht über die arabische Zwergin Agiba, die nur 38 cm groß war, dann ist der Unterschied noch bedeutender: der größte Riese übertrifft diese Zwergin um das Siebenfache, er ist demnach 343mal schwerer!

Buffons Bericht verdient mehr Vertrauen; er hatte eine Zwergin von 43 cm entdeckt. Der winzige Mensch war also 260mal leichter als der Riese.

Durch seine große Umsicht hat es der Verfasser des Buches »Gullivers Reisen«, Jonathan Swift, vermieden, sich in geometrische Beziehungen zu verstricken. Der Leser wird sich wohl noch daran erinnern, daß im Lande Liliput ein Zoll einem Fuß entsprach, während im Lande der Riesen das Verhältnis umgekehrt war: was für uns ein Fuß war, galt dort nur einen Zoll.

Mit anderen Worten: Im Lande Liliput waren alle Menschen und Gegenstände, alle Schöpfungen der Natur maßstäblich auf den zwölften Teil der Normalgröße zusammengeschrumpft, und im Lande der Riesen herrschte allgemein die zwölffache lineare Vergrößerung. Diese Beziehungen scheinen zwar auf den ersten Blick einfach, die Sache wurde jedoch ziemlich kompliziert, als folgende Fragen zu lösen waren:

1. Die wievielfache Menge Speisen verzehrte Gulliver im Vergleich zu Liliput?
2. Wievielmal mehr Anzugstoff brauchte Gulliver?
3. Wieviel wog ein Apfel im Lande der Riesen?

Jonathan Swift wurde mit den meisten Aufgaben gut fertig. Er hatte richtig gerechnet. Wenn ein Zwerg nur $\frac{1}{12}$ so groß ist wie ein normaler Mensch, dann beträgt das Volumen seines Körpers entsprechend den $12 \cdot 12 \cdot 12$, d.h. den 1728ten Teil des Raumes, den ein normaler Mensch einnimmt. Also – die Liliputaner rechneten ganz richtig – braucht der Mensch soviel Nahrung, daß diese ausreichen würde, um 1728 Liliputaner zu sättigen. Wir lesen die Stelle in »Gullivers Reisen« nach: »Dreihundert Köche wurden mit der Zubereitung der Speisen für mich engagiert. In der Nähe meines Hauses wurden Wohnbaracken errichtet, in denen die Köche mit ihren Familien wohnten und Küchen, in denen sie ihre Kunst zeigten. Zur Mittagszeit nahm ich zwanzig Diener in die Hand und stellte sie auf den Tisch; hundert weitere Bedienstete arbeiteten auf dem Fußboden: die einen schleppten das Essen herbei, andere füllten Fässer mit Wein und anderen Getränken oder trugen sie auf geschulterten Stangen. Die Dienerschaft auf dem Tisch hob die Speisen mit Seilen und Blöcken herauf.«

Auch die Berechnung der Stoffmenge für einen Anzug führte Swift richtig durch. Die Oberfläche seines Körpers übertraf die der Liliputaner $12 \cdot 12 = 144$ mal. Daher brauchte er eine entsprechende Menge Stoff, Schneiderpersonal usw. Swift hatte auch das einkalkuliert; in der Person Gullivers erzählt er, daß 300 Schneider beauftragt wurden, dem Gast aus dem Riesenland einen Anzug nach dem Schnitt der Liliputaner zu nähen (Abb. 162). (Da die Sache eilig war, wurde die Anzahl der Schneider verdoppelt.)

Fast auf jeder Seite der Erzählung werden irgendwelche Rechnungen durchgeführt. Und Swift hat sie im großen und ganzen richtig durchgeführt – das muß man ihm lassen.

In »Gullivers Reisen« sind alle Größenverhältnisse nach geometrischen Gesetzen aufgestellt worden. Fehler unterlaufen Swift nur selten, – vereinzelte Mißverhältnisse kommen in der Beschreibung der Verhältnisse im Lande der Riesen vor.

»Eines Tages«, erzählt Gulliver, »begleitete uns der Hofnarr beim Spaziergang im Garten. Er paßte den Augenblick ab, als ich unter einen Obstbaum ging, packte einen Zweig und schüttelte ihn direkt über meinem Kopf. Ein wahrer Hagel von Äpfeln, groß wie ein Faß, fiel dröhnend auf die Erde. Ein Apfel schlug gegen meinen Rücken, so daß ich der Länge nach hinfiel.«

Abb. 162. Schneider im Lande Liliput nehmen Maß für Gullivers Kleider.

Gulliver erhob sich nach diesem Schlag einigermaßen unverletzt. Man kann sich indessen leicht ausrechnen, daß der Stoß, den ein solcher Apfel beim Fallen verursacht, ganz fürchterlich sein mußte. Der Apfel wog ja 1728mal mehr als unser Obststück, d. h. 80 kg, – und dazu krachte er aus zwölffacher Höhe hernieder. Die Fallenergie mußte die Energie beim Sturz eines gewöhnlichen Apfels etwa um das 20000fache übertreffen und ist höchstens mit dem Aufprall einer Granate zu vergleichen.

Den größten Fehler macht Swift bei der Berechnung der Muskelkraft der Riesen. Bereits im ersten Kapitel haben wir den Fall behandelt und festgestellt, daß die Kraft größerer Tiere in keinem direkten Verhältnis zu ihrer Größe steht.

Wendet man die dargestellten Überlegungen bei Swifts Riesen an, dann stellt sich heraus, daß, obwohl ihre Muskelkraft 144mal größer als Gullivers eigene Kraft war, sie dafür 1728mal mehr wiegen. War Gulliver in der Lage, nicht nur sein eigenes Körpergewicht zu bewegen, sondern auch eine etwa gleiche Last dazu, so konnte ein Riese sein eigenes gewaltiges Körpergewicht wohl nicht überwinden. Die Riesen mußten eigentlich ständig am gleichen Ort liegenbleiben und dürften kaum einer schnellen Körperbewegung fähig gewesen sein. Ihre bei Gulliver so packend geschilderte Riesenkraft war das Ergebnis einer falschen Rechnung.

Warum schweben Staub und Wolken in der Luft?

»Sie sind ja leichter als Luft!« ist die übliche Antwort, die vielen Menschen so selbstverständlich erscheint, daß sie an ihrer Richtigkeit nicht die geringsten Zweifel hegen. So bestechend die Antwort erscheinen mag, sie ist dennoch ganz und gar verkehrt. Staubkörnchen sind nicht nur nicht leichter, nein, sie sind hundertmal, ja sogar tausendmal schwerer als Luft!

Was ist eigentlich ein Staubkörnchen? Es ist ein kleines Partikelchen schwerer Stoffe, z. B. Stein, Glas, Kohle, Holz, Metall, Stoffasern usw. Sind diese Stoffe leichter als Luft? Sie brauchen nur in der Tabelle mit den Angaben über die Wichte nachzusehen und werden sofort darüber belehrt, daß die meisten dieser Stoffe um ein Mehrfaches schwerer sind als Wasser und einige zwei- bis dreimal leichter sind als dieses. Wasser ist jedoch 800mal schwerer als Luft. Staubkörnchen haben somit das vielhundertfache und tausendfache Gewicht der Luft. Dadurch tritt der ganze Widersinn der althergebrachten Ansicht über die Ursache des Schwebens der Staubkörnchen in der Luft klar zutage.

Und welche ist die wahre Ursache? Zuerst sei darauf hingewiesen, daß wir den Vorgang an sich falsch beurteilen, indem wir meinen, die Staubkörnchen vollführten eine Art Schwimmbewegung in der Luft. Nur solche Körper schwimmen in einem Medium, sei es ein Gas oder eine Flüssigkeit, deren Gewicht je Volumeneinheit das entsprechende Gewicht ihres Mediums nicht übersteigt. Wie wir soeben festgestellt haben, übersteigt das Gewicht der Staubkörnchen das der Luft ganz erheblich. Von einem Schwimmvorgang kann hier daher nicht die Rede sein. Sie schwimmen denn auch nicht, sondern schweben, d. h., sie sinken langsam hernieder und werden durch den Luftwiderstand in ihrem Fall gebremst. Ein fallendes Staubkörnchen muß sich einen Weg zwischen den Luftteilchen bahnen, indem es sie beiseite stößt oder mit sich reißt. Beide Vorgänge beanspruchen Energie. Der Aufwand ist um so größer, je größer die Oberfläche des Körpers oder, besser gesagt, sein Querschnitt im Vergleich zu seinem Gewicht ist. Bei dem freien Fall großer massiver Körper bemerken wir keine Bremswirkung der Luft, weil das Gewicht dieser Körper den Luftwiderstand bei weitem übertrifft.

Was aber geschieht, wenn die Körpergröße abnimmt? Die Geometrie hilft uns auch hier bei der Klärung dieser Frage. Wir können leicht feststellen, daß mit dem kleiner werdenden Volumen das Gewicht unverhältnismäßig schneller abnimmt als der Querschnitt. Und zwar ist die Gewichtsabnahme der dritten Potenz seiner linearen Verkürzung proportional, während der Widerstand im gleichen Verhältnis abnimmt wie die Oberfläche im Verhältnis zum Quadrat der Linearverkleinerung.

Die Bedeutung dieser Erkenntnisse für unseren Fall liegt klar auf der Hand. Sie sei durch folgendes Beispiel erläutert:

Wir nehmen einen Tennisball von 10 cm Durchmesser und ein winziges Kügelchen aus dem gleichen Material, dessen Durchmesser 1 mm beträgt. Das Linearverhältnis ist 100, weil 10 cm ja 100mal länger sind als 1 mm. Die kleine Kugel ist 100^3mal leichter als der Tennisball, d. h., sie ist einmillionenmal leichter. Der Luftwiderstand, der der kleinen Kugel beim freien Fall entgegenwirkt, ist dagegen nur 100^2, d. h. 10000mal geringer. Daraus geht klar hervor, daß die kleine Kugel langsamer fallen muß als der Tennisball. Die Ursache hierfür, daß die Staubkörnchen die Fähigkeiten besitzen, in der Luft zu schweben, ist in ihrer sogenannten »Windfähigkeit« zu suchen. Diese wird allein durch die geringe Dimension (Größe), nicht aber dadurch erklärt, daß sie angeblich leichter als Luft sind. Ein Wassertröpfchen mit einem Halbmesser von 0,01 mm fällt in der Luft mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit von 0,1 mm pro Sekunde: eine winzige, ganz unmerkliche Luftströmung genügt bereits, um diesen langsamen Fall aufzuhalten.

Darum setzt sich der Staub in einem Zimmer, in dem man sich viel bewegt, weniger ab als in unbewohnten Räumen. Am Tage setzt sich weniger Staub ab als in der Nacht, obwohl man annehmen müßte, daß es sich umgekehrt verhält. Die Wirbelbewegung der Luft verhindert das Absetzen des Staubes; in der stillen Luft unbewohnter Zimmer fehlt jedoch die Turbulenz fast ganz.

Denken wir uns einen Steinwürfel von 1 cm Seitenlänge in würfelförmige Körnchen mit einer Seitenlänge von 0,001 mm zertrümmert, so vergrößert sich die Oberfläche eines Querschnittes um das Zehntausendfache; ihr Widerstand in der Luft nimmt in dem gleichen Verhältnis zu. Staubkörnchen erreichen diese Größe sehr häufig; es ist daher verständlich, daß diese gewaltige Steigerung des Widerstandes in der Luft den gesamten Fallvorgang verändert.

Bemerkenswert ist, daß die Gesamtoberfläche der Körnchen $10000 \cdot 10000 \cdot 10000 = 1000000000000$mal größer wird als beim ursprünglichen Steinwürfel.

Auf die gleiche Weise erklärt sich auch das Schweben der Wolken. Die veraltete Ansicht, daß Wolken angeblich aus wasserdampfgefüllten Bläschen bestehen, ist längst verworfen.

Wolken sind eine Ansammlung einer sehr großen Menge von kleinsten, aber homogenen Wassertröpfchen, die man mit Wasserstaub bezeichnen kann. Obwohl dieser Wasserstaub nahezu 800mal schwerer als Luft ist, fällt er nur ganz unmerklich; die Fallgeschwindigkeit ist kaum wahrnehmbar. Die Ursache dieses stark gebremsten Falles liegt, genau wie bei den Staubkörnchen, in der sehr großen Oberfläche der Tröpfchen im Verhältnis zu ihrem Gewicht.

Auch ein äußerst schwacher Aufwind vermag daher den sehr langsamen Fall der Wolken nicht nur aufzuhalten und sie in gleichbleibender Höhe schweben zu lassen, sondern bewirkt auch, daß die Wolken steigen.

Der Hauptgrund dieser Vorgänge ist der Luftwiderstand. Im Vakuum fallen Staubkörnchen ebenso schnell wie schwere Steine. Ganz nebenbei sei noch darauf hingewiesen, daß auch das Herabschweben eines Menschen am Fallschirm (Fallgeschwindigkeit 5 m/sec) zu den ähnlichen Vorgängen gehört.

ZWÖLFTES KAPITEL

Ökonomische Geometrie

Wie Pachom sein Land kaufte

(Die Aufgabe nach Leo Tolstoj)

Wir beginnen dieses Kapitel, dessen ungewöhnliche Überschrift im weiteren Verlauf unserer Erzählung klar wird, mit einem gekürzten Auszug aus der Erzählung Tolstojs »Wieviel Erde braucht der Mensch?«.

»Ja, und wie ist der Preis?« fragte Pachom.

»Der Preis ist einheitlich: 1000 Rubel je Tag.«

Pachom verstand nicht.

»Was bedeutet denn dieses sonderbare Maß – ein Tag? Wieviel Hektar sind das?«

»Tja –« antwortete der andere, »das Maß kennen wir nicht. Wir verkaufen unser Land tageweise. Du behälst soviel Land, wie du an einem Tage zu Fuß umgehen kannst. Der Preis ist immer der gleiche – 1000 Rubel!«

Pachom staunte über die sonderbare Rechenart und meinte: »Ja, aber an einem Tage kann man um ein ziemlich großes Stück Land herumwandern.«

Der Älteste lachte.

»Du kannst es trotzdem in Besitz nehmen. Aber eines mußt du dir einprägen: Kommst du am Ende deiner Wanderung nicht an die Stelle zurück, von der du am Morgen ausgegangen bist, so ist dein Geld verloren!«

»Ja, aber wie merke ich mir die Stelle, von der ich ausgehe?«

»Ganz einfach: wir versammeln uns dort, wo du deine Wanderung beginnst und warten auf dich. Nimm eine kleine Schaufel mit auf den Weg, ziehe los und an den Ecken grabe immer ein kleines Loch und lege die Rasenstücke aufeinander. Später kannst du die Zwischenräume zwischen den Stellen mit dem Pflug nachziehen. Dein Weg kann so weit sein, wie du selbst willst; bis zum Sonnenuntergang mußt du an deinem Ausgangspunkt angelangt sein. Das Stück Land, um das du auf diese Weise herumgegangen bist, ist deines.«

Die Baschkiren gingen auseinander und versprachen, am nächsten Tage vor Sonnenaufgang an Ort und Stelle zu sein.

Sie versammelten sich in der Steppe; das Morgenrot färbte den Himmel rosa. Jetzt näherte sich der Dorfälteste Pachom und zeigte mit der Hand in die Ferne.

»Schau«, sagte er, »alles, was dein Auge sieht, ist unser Land: wähle, was dir gefällt!«

Daraufhin legte er die Fuchspelzmütze ab und legte sie neben sich auf den Boden.

»Sieh her«, wandte er sich abermals Pachom zu, »das ist das Zeichen. Hier beginnt dein Weg, hier endet er auch.«

In diesem Augenblick erschien der glühende Rand des Tagesgestirns über dem Horizont; Pachom warf die Schaufel über die Schulter und ging geradeaus in die Steppe.

Er legte etwa 1 km zurück und grub ein kleines Loch. Dann ging er weiter und tat das gleiche.

Nun war er ungefähr 5 km gewandert. Er schaute nach der Sonne, es war schon Zeit zum Frühstücken. »Eine Seite habe ich schon hinter mir, der Tag hat vier ... da kann ich noch 5 km geradeaus gehen und dann werde ich links abbiegen.«

Er ging also weiterhin geradeaus.

Abb. 163. Die Sonne nähert sich schon dem Horizont und Pachom läuft mit letzter Kraft.

»So«, dachte er, »jetzt ist es genug. Nun muß ich links gehen.« Er blieb stehen, grub ein etwas größeres Loch und machte eine scharfe Wendung nach links.

Auch die zweite Seite seines künftigen Landbesitzes wurde sehr lang. Er machte wiederum eine Wende und schaute nach dem kleinen Steppenhügel, von dem aus er seine Wanderung begonnen hatte: kaum sichtbar waren Hügel und Menschen in dem Mittagsdunst der Ferne.

»Die Seiten sind aber sehr lang geworden«, dachte Pachom. »Diese soll kürzer werden.«

Er wanderte jetzt an der dritten Seite. Er schaute nach der Sonne, sie stand hoch am Himmel und er hatte noch kaum 2 km längs der dritten Seite zurückgelegt. Es blieben aber immer noch an die 15 km bis zum Hügel. »Nein«, dachte er, »und wenn das Land schief wird, ich muß dennoch geradeaus gehen, damit ich zurechtkomme.«

Er beeilte sich, ein Mulde zu graben und ging geradeaus weiter auf den Hügel zu.

Immer ging es vorwärts, dann spürte er, daß er müde wurde. Gern hätte er sich ein wenig ausgeruht, wagte es aber nicht; denn er fürchtete, daß er es bis Sonnenuntergang nicht schaffen würde. Die Sonne neigte sich bereits dem Untergange zu.

Je weiter er wanderte, um so schneller ging er; das Gehen fiel ihm immer schwerer; trotzdem legte er immer mehr zu. Schließlich begann er zu laufen. Er lief und lief, das schweißnasse Hemd und die Fußlappen klebten ihm an der Haut, sein Mund war ausgetrocknet. Er hatte ein Gefühl, als pumpe seine Lunge wie ein Blasebalg, das Herz in der Brust schlug zum Bersten ... Er spannte seine Kräfte an und lief was er konnte. Er war schon am Ende seiner Kraft, die Sonne hatte den Erdrand beinahe erreicht: gleich würde sie untergehen (Abb. 163).

Jetzt begann der glühende Sonnenball hinter dem fernen Horizont zu versinken; der Ausgangspunkt seiner Wanderung lag zum Greifen nahe. Jetzt sah er die Mütze aus Fuchspelz auf der Erde und den Dorfältesten, der auf der Erde hockte.

Er schaute sich nach der Sonne um, die inzwischen zur Hälfte hinter dem Erdrand verschwunden war. Er sammelte seine letzten Kräfte und jagte den Hügel hinauf. Da lag die Mütze. Seine Knie gaben nach, er wankte... stürzend berührte er die Mütze mit den Fingerspitzen.

»Haj, das hast du wacker gemacht!« rief der Dorfälteste. »Nennst nun viel Grund und Boden dein eigen!«

Jetzt lief sein Landarbeiter herbei, er wollte ihn aufrichten... da ergoß sich ein Blutstrom aus Pachoms Mund: er war tot.

Die Aufgabe Leo Tolstojs

Wir wollen jetzt den tragischen Ausgang dieser Erzählung für eine Weile vergessen und die geometrische Seite betrachten. Wir legen uns folgende Frage vor: Kann man nach den in dieser Geschichte verstreuten Angaben auf den Flächeninhalt des Bodens schließen, den der unselige Pachom umwandert hatte?

Die Aufgabe scheint zwar auf den ersten Blick unlösbar zu sein, wie wir aber sehen werden, läßt sich das Ergebnis dennoch ziemlich einfach feststellen.

Lösung

Lesen wir die Erzählung aufmerksam durch und merken uns alle darin enthaltenen geometrischen Angaben, so können wir uns leicht davon überzeugen, daß sie vollauf genügen, um eine befriedigende Antwort auf die gestellte Frage zu geben; ja, wir sind sogar in der Lage, einen Plan des Grundstücks zu skizzieren, das Pachom umwandert hatte.

Aus der Erzählung geht zunächst hervor, das Pachom an den Seiten eines Vierecks entlang gegangen ist. Wir lesen noch einmal nach »... 5 km weit gewandert ... ich gehe noch 5 km vorwärts, dann werde ich links abbiegen«.

Also war die erste Viereckseite ungefähr 10 km lang.

Es fehlen Anhaltspunkte über die zweite Seite, die mit der ersten einen rechten Winkel bildete.

Die Länge der dritten (wahrscheinlich rechtwinklig zur zweiten Seite stehenden) Seite wird folgendermaßen angegeben: »Er hatte noch kaum 2 km längs der dritten Seite zurückgelegt.«

Der Hinweis auf die vierte Seite ist eindeutig: »Es blieben aber immer noch an die 15 km bis zum Hügel.«*

Auf Grund dieser Angaben können wir einen Plan des von Pachom umgangenen Landbesitzes nachzeichnen (Abb. 164).

In dem dargestellten Viereck $ABCD$ ist $AB = 10$ km, $CD = 2$ km, $AD = 15$ km, die Winkel ABC und BCD sind rechte Winkel. Die Länge x der unbekannten Seite BC läßt sich unschwer berechnen, wenn von D ein Lot DE auf AB gefällt wird (Abb. 165). In dem rechtwinkeligen Dreieck AED kennen wir die Kathete $AE = 8$ km und die Hypotenuse $AB = 15$ km. Die Länge der unbekannten Kathete ED ist dann

$$ED = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 13.$$

Die zweite Seite ist also 13 km lang. Pachom irrte offensichtlich, als er annahm, daß die zweite Seite kürzer als die erste wäre.

Sie ersehen daraus, daß es nicht schwer fällt, das Land, das Pachom umwanderte, auf der Karte festzuhalten. Es besteht kein Zweifel, daß Tolstoj, als er diese Erzählung schrieb, unsere Skizze nach Abb. 165 vor Augen schwebte.

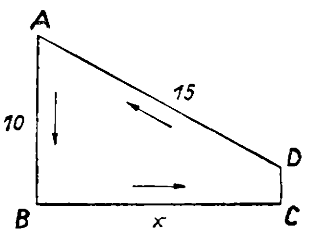


Abb. 164. Der Weg Pachoms.

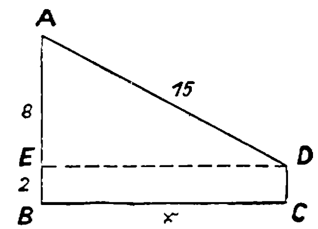


Abb. 165. Genaue Bestimmung des Weges.

---

* Die Stelle ist insofern unwirklich, als es nicht verständlich ist, wieso Pachom aus einer Entfernung von 15 km Menschen unterscheiden konnte.

Jetzt können wir auch den Flächeninhalt des Trapezes *ABCD* berechnen: es besteht aus dem Rechteck *EBCD* und dem rechtwinkeligen Dreieck *AED*. Wir erhalten:

$$2\text{ km} \cdot 13\text{ km} + \frac{1}{2} \cdot 8\text{ km} \cdot 13\text{ km} = 78\text{ km}^2$$

Die Berechnung nach der Formel für die Trapezfläche führt selbstverständlich zu dem gleichen Ergebnis:

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot BC = \frac{10\text{ km} + 2\text{ km}}{2} \cdot 13\text{ km} = 78\text{ km}^2$$

Wie wir daraus entnehmen können, hätte sich Pachom ein ganz stattliches Stück Land »erwandert«: es waren nahezu 8000 ha. Ein ha kostete dann 12,5 Kopeken!

Trapez oder Rechteck?

Aufgabe

An diesem für Pachom so entsetzlichen Tag, da er seine Gehleistung mit dem Leben bezahlen mußte, hatte er 10 km + 13 km + 2 km + 15 km = 40 km zurückgelegt. Er ging an den Seiten eines Trapezes entlang. Eigentlich hatte er die Absicht, ein Rechteck zu umwandern; das Trapez entstand nur durch seine unüberlegte Rechnung. Nun ist folgende Frage interessant: Hatte er dadurch gewonnen, daß das umwanderte Land die Form eines Trapezes und nicht die eines Rechtecks aufwies? In welchem Falle wäre der Flächeninhalt größer ausgefallen?

Lösung

Es gibt sehr viele Rechtecke mit einem Umfang (Seitensumme) von 40 km; der Flächeninhalt dieser Rechtecke kann aber verschieden sein. Hier einige Beispiele:

$$\begin{aligned} 14\text{ km} \cdot 6\text{ km} &= 84\text{ km}^2 \\ 13\text{ km} \cdot 7\text{ km} &= 91\text{ km}^2 \\ 12\text{ km} \cdot 8\text{ km} &= 96\text{ km}^2 \\ 11\text{ km} \cdot 9\text{ km} &= 99\text{ km}^2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Obwohl die Summe der Seiten bei allen Vierecken die gleiche ist, nämlich 40 km, unterscheiden sich die Flächeninhalte jedoch. Andererseits gibt es aber auch Rechtecke mit einer Seitensumme von 40 km Länge, deren Fläche kleiner ist als die eines entsprechenden Trapezes, z. B.:

$$\begin{aligned} 18\text{ km} \cdot 2\text{ km} &= 36\text{ km}^2 \\ 19\text{ km} \cdot 1\text{ km} &= 19\text{ km}^2 \\ 19\tfrac{1}{2}\text{ km} \cdot \tfrac{1}{2}\text{ km} &= 9{,}75\text{ km}^2 \end{aligned}$$

Die durch die Aufgabe gestellte Frage läßt sich demnach nicht eindeutig beantworten. Bei der gleichen Summe der Seitenlängen gibt es Rechtecke, die größer als ein Trapez sind und auch solche mit kleinerem Flächeninhalt. Wir können jedoch eine andere Frage eindeutig beantworten: Welches rechteckige Gebilde mit einer bestimmten Summe aller Seitenlängen besitzt den größten Flächeninhalt?

Vergleicht man die Rechtecke miteinander, so bemerkt man, daß die Fläche des Rechtecks zunimmt, wenn die Seitendifferenzen verringert werden. Die Annahme liegt nahe, daß die größte Fläche dann erreicht wird, wenn diese Seitendifferenz gleich 0 ist, d. h., wenn sich das Rechteck in ein Quadrat verwandelt hat. Wir erhalten dann einen Flächeninhalt von $10\,\text{km} \cdot 10\,\text{km} = 100\,\text{km}^2$. Wir können leicht feststellen, daß ein solches Quadrat alle Rechtecke, deren Seitensumme gleich derjenigen des Quadrats ist, an Flächeninhalt übertrifft.

Wäre Pachom schlauer gewesen, so hätte er an den Seiten eines Quadrats entlang wandern müssen; dann hätte er sich das denkbar größte Stück Land ergattert – $22\,\text{km}^2$ mehr, als er in Wirklichkeit umgangen hatte!

Die ausgezeichneten Eigenschaften des Quadrats

Vielen Menschen ist die merkwürdige Eigenschaft des Quadrats unbekannt, in seinen Grenzen den größtmöglichen Flächeninhalt aller Rechtecke mit gleichem Umfang zu umschließen. Wir wollen daher die aufgestellte Behauptung beweisen.

Wir bezeichnen den Umfang einer rechteckigen Figur mit P. Nimmt man ein Quadrat, dessen Summe der Seitenlängen P ist, so ist die Länge einer Seite offenbar $\frac{P}{4}$. Wir wollen nun folgendes beweisen: Wenn man eine Seite des Quadrats um einen Betrag b kürzt und die anliegende Seite um den gleichen Betrag verlängert, entsteht ein Rechteck, dessen Summe der Seitenlängen gleich der Summe der Seitenlängen eines Quadrats, dessen Flächeninhalt jedoch geringer ist. Das heißt mit anderen Worten, daß die Fläche des Quadrats $(\frac{P}{4})^2$ größer ist als die Fläche des Rechtecks

$$\left(\frac{P}{4} - b\right) \cdot \left(\frac{P}{4} + b\right).$$

Wir formulieren:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4} - b\right) \cdot \left(\frac{P}{4} + b\right)$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung $(\frac{P}{4})^2 - b^2$ ist, so können wir auf beiden Seiten $(\frac{P}{4})^2$ streichen und erhalten:

$$0 > -b^2 \quad \text{oder} \quad b^2 > 0$$

Die Ungleichung rechts ist verständlich, denn ein Quadrat jeder Zahl, ganz gleich, ob es sich um eine positive oder negative Zahl handelt, ist größer als Null. Folglich ist auch die erste Ungleichung, die uns zu dieser Ableitung verhalf, richtig.

Also besitzt das Quadrat die größte Fläche von allen Rechtecken mit der gleichen Summe der Seitenlängen.

Hieraus folgt u. a., daß das Quadrat unter allen rechteckigen Figuren gleichen Flächeninhalts den kleinsten Umfang besitzt. Wir können uns von dieser Tatsache durch folgende Überlegung überzeugen: Wir nehmen zunächst an, unsere Behauptung sei unrichtig. Dann gäbe es ein Rechteck A mit gleichem Flächeninhalt wie ein Quadrat B, jedoch mit kleinerem Umfang als dieses. Wir zeichnen ein Quadrat C mit gleichem Umfang wie das Rechteck A; wir erhalten dadurch ein

Quadrat, dessen Fläche größer als A und folglich auch größer als diejenige des Quadrats B ist. Was ergibt sich aus unserer Untersuchung?

Nun, das Quadrat C hat einen kleineren Umfang als das Quadrat B bei gleichzeitig größerem Flächeninhalt. Das ist doch absurd: ist nämlich die Seite des Quadrats C kleiner als die Seite des Quadrats B, so muß auch sein Flächeninhalt kleiner sein. Wir können daher niemals annehmen, es existiere ein Rechteck A, das bei gleichem Flächeninhalt einen kleineren Umfang hat als ein Quadrat. Mit anderen Worten, das Quadrat besitzt den kleinsten Umfang unter allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt.

Wäre Pachom mit dieser Eigenschaft des Quadrats vertraut gewesen, dann hätte er mit seiner Kraft sparsam haushalten und ein sehr großes Stück Land erwerben können.

Angenommen, er wüßte, daß er, ohne sich zu überanstrengen, 36 km an einem Tage zurücklegen könne. Er hätte an den 9 km langen Seiten eines Quadrats entlang gehen müssen und wäre abends Besitzer eines 81 km² großen Stück Landes gewesen. Wenn er sich andererseits von vornherein mit einer bescheideneren Größe seines Grundbesitzes zufriedengegeben hätte, etwa 36 km², so hätte er mit einem geringen Kraftaufwand sein Ziel erreichen können, indem er gemütlich an den 6 km langen Seiten eines Quadrats entlang gewandert wäre.

Grundstücke von anderer Form

Vielleicht, so könnten wir fragen, wäre es vorteilhafter, wenn sich Pachom dazu entschlossen hätte, die Rechteckform aufzugeben und ein Grundstück in anderer Form zu wählen, etwa ein unregelmäßiges Viereck, ein Dreieck, ein Fünfeck oder ähnliches?

Man könnte die Frage auf streng mathematischem Wege analysieren. Wir wollen den Leser indessen durch die komplizierten Rechenoperationen nicht ermüden und verzichten daher auf die theoretische Beweisführung; wir beschränken uns darauf, dem Leser die Resultate zur Kenntnis zu bringen.

Erstens kann bewiesen werden, daß das Quadrat den größten Flächeninhalt unter allen *Vierecken* gleichen Umfanges hat.

Pachom wäre also niemals in der Lage gewesen, einen Besitz von über 100 km² zu erwandern, wenn wir die höchste Marschleistung mit 40 km je Tag veranschlagen.

Zweitens können wir beweisen, daß das Quadrat einen größeren Flächeninhalt besitzt als jedes Dreieck mit der gleichen Summe aller Seitenlängen. Wie wir im weiteren Verlauf unserer Erzählung beweisen werden, besitzt das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt unter allen Dreiecken mit dem gleichen Umfang. Wenn also dieses »günstige« Dreieck einen kleineren Flächeninhalt als das Quadrat aufweist, dann besitzen alle anderen Dreiecksformen mit gleichem Umfang erst recht einen kleineren Flächeninhalt. Die Länge einer Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit gleichem Umfang beträgt $\frac{40}{3} = 13{,}3$ km und seine Fläche ist:

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

worin F der Flächeninhalt und a die Länge einer Seite bedeuten *. Wir erhalten:

$$F = \frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2 \sqrt{3} \approx 77 \text{ km}^2$$

Dieser Wert ist sogar kleiner als die Fläche jenes Trapezes, das Pachom so unüberlegt umwanderte.

Vergleicht man den Flächeninhalt eines Quadrats mit demjenigen eines Fünf-, Sechsecks usw., dessen Summe aller Seitenlängen der des Quadrats gleich ist, so merken wir, daß hier dem Vorzug des Quadrats Grenzen gesetzt sind.

Ein regelmäßiges Fünfeck hat einen größeren Flächeninhalt, ein Sechseck einen noch größeren usw. Wir können uns an dem Beispiel des regelmäßigen Sechsecks leicht davon überzeugen. Beträgt sein Umfang 40 km, so ist sein Flächeninhalt gemäß der Formel $F = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ folgender:

$$F = \frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2 \sqrt{3} \approx 115 \text{ km}^2$$

Hätte also Pachom ein regelmäßiges Sechseck als Muster für seinen Landbesitz gewählt, so wäre es ihm gelungen, $115 \text{ km}^2 - 78 \text{ km}^2 = 37 \text{ km}^2$ mehr Land zu gewinnen als in Wirklichkeit und 15 km^2 mehr als bei einem Quadrat. Allerdings hätte er mit einem Winkelmesser in der Tasche auf seine Wanderung gehen müssen.

Aufgabe

Stellen Sie aus sechs Streichhölzern eine Figur mit dem größten Flächeninhalt zusammen.

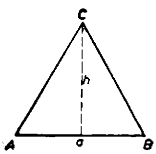
Lösung

Man kann aus sechs Streichhölzern allerhand Figuren aufbauen: ein gleichseitiges Dreieck, ein Rechteck, eine Anzahl Parallelogramme, eine Reihe von unregelmäßigen Fünfecken, eine Anzahl unregelmäßiger Sechsecke und schließlich ein regelmäßiges Sechseck. Ohne die einzelnen Figuren miteinander zu vergleichen, kennt der Geometriekundige von vornherein die Figur mit dem größten Flächeninhalt: es ist das besagte regelmäßige Sechseck.

* Die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist:

$$F = \frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

$$F = \frac{a \cdot h}{2}$$



Die Grundlinie ist a. Die Höhe ergibt sich nach dem Pythagoreischen Lehrsatz:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 3}{4}}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Daraus folgt:

$$F = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2}$$

$$F = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Man kann streng geometrisch beweisen, daß, je mehr Seiten ein regelmäßiges Grundstück in Gestalt eines Vielecks besitzt, desto größer die von der gleichlangen Grenze umschlossene Fläche ist. Die größte Fläche (bei gleichem Umfang) umschließt der Kreis! Wäre Pachom an der Peripherie des Kreises entlang gewandert, so wäre der Flächeninhalt des Landbesitzes nach einem Weg von 40 km

$$F = \pi r^2 \quad \text{und da} \quad r = \frac{40\,\text{km}}{2\pi} \quad \text{ist}$$

$$F = \pi \left(\frac{40\,\text{km}}{2\pi}\right)^2 = 127\,\text{km}^2.$$

Keine einzige andere Figur – ganz gleich, ob geradlinig oder gekrümmt – besitzt bei gleichem Umfang eine gleichgroße oder größere Fläche.

Wir wollen nun diese merkwürdige Eigenschaft des Kreises – einen größeren Flächeninhalt als jede andere zweidimensionale Konstruktion, gleich welcher Form mit gleichlangem Umfang zu umschließen – etwas eingehender betrachten. Möglicherweise interessiert sich einer unserer Leser für eine Methode, mit deren Hilfe diese Behauptung bewiesen wird. Nachstehend bringen wir dann auch einen – allerdings nicht streng genauen – von dem Mathematiker Jacob Steiner vorgeschlagenen Beweis dieser Eigentümlichkeit des Kreises. Er ist allerdings etwas umständlich, so daß diejenigen Leser, die ihn langweilig finden, ohne Schaden für das weitere Verständnis des Lesestoffes die Beweisführung überschlagen können.

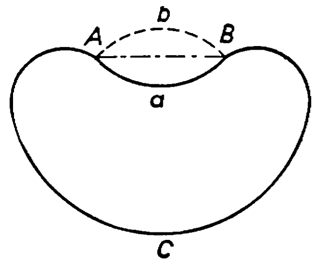


Abb. 166. Die Figur mit größtem Flächeninhalt muß nach außen gewölbt sein.

Es ist zu beweisen, daß die Figur, die mit einem bestimmten Umfang den größten Flächeninhalt aufweist, ein Kreis ist. Als erstes stellen wir fest, daß die gesuchte Figur nach außen gewölbt sein muß. Diese Eigenschaft wird dadurch gekennzeichnet, daß jede die betreffende Figur schneidende Sehne vollständig innerhalb der Figur liegen muß. Angenommen, daß die in Abb. 166 dargestellte Figur $AaBC$ eine Außensehne AB besitzt. Wir ersetzen nun den Bogen a durch den symmetrischen Bogen b. Die Länge des Umfanges ändert sich dadurch nicht, die Fläche wird jedoch offensichtlich größer. Daraus folgt, daß Figuren von der Art $AaBC$ keinesfalls Konstruktionen darstellen, die den größten Flächeninhalt besitzen.

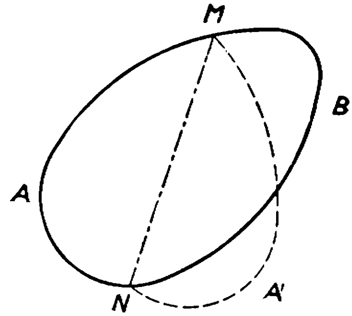


Abb. 167. Jede Sehne, die den Umfang der Figur in zwei gleiche Teile schneidet, muß auch die Fläche in zwei Hälften teilen.

Die gesuchte Figur ist also *erhaben*. Wir sind ferner in der Lage, eine weitere Eigenschaft solch einer Figur festzustellen: Jede Sehne, die den Umfang der Figur in zwei gleiche Teile schneidet, muß auch ihre Fläche in zwei Hälften teilen.

Es sei $AMBN$ (Abb. 167) die gesuchte Figur; die Sehne MN teilt ihren Umfang in zwei Hälften. Wir wollen beweisen, daß die Fläche AMN gleich der Fläche MBN ist. In der Tat, wäre der Flächeninhalt eines der Teile größer als der des anderen, wäre also z. B. $AMN > MNB$, so würden wir durch Falten der Figur AMN in MN eine andere Figur $AMA'N$ erhalten, deren Fläche größer wäre als die der ursprünglichen Figur $AMBN$ bei gleichlangem Umfang. Indessen kann die Figur $AMBN$, in der die den Umfang halbierende Sehne die Fläche in zwei ungleiche Teile teilt, nicht die gesuchte Figur sein. Sie kann, mit anderen Worten, nicht den größten Flächeninhalt bei dem betreffenden Umfang besitzen.

Ehe wir die Beweisführung weiterentwickeln, bringen wir noch folgenden Hilfssatz: Unter allen Dreiecken, von denen jeweils zwei Seiten gleichlang und bekannt sind, besitzt jenes den größten Flächeninhalt, dessen zwei Seiten einen rechten Winkel zueinander bilden. Damit der Lehrsatz bewiesen werden kann, denken wir einmal an den trigonometrischen Ausdruck für die Fläche eines Dreiecks, dessen Seiten a und b und der von ihnen gebildete Winkel mit C bezeichnet werden.

$$F = \frac{1}{2}\, a b \sin C$$

Der Wert dieses Ausdrucks ist offenbar dann am größten, wenn (bekannte Seiten vorausgesetzt) $\sin C$ den größten Wert hat, d. h., wenn er 1 ist. Der Winkel, dessen Sinus jedoch 1 ist, ist ein rechter Winkel. Der Beweis ist also geliefert.

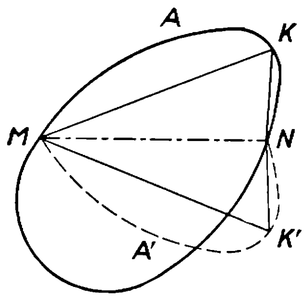


Abb. 168. Wir setzen eine nicht kreisförmige Figur mit dem größten Flächeninhalt voraus.

Wir wenden uns wieder unserer Grundaufgabe zu – dem Beweis, daß der Kreis die größte Fläche unter allen Figuren mit dem Umfang P umschließt. Um sich davon zu überzeugen, nehmen wir einmal an, es gäbe eine andere als eine kreisförmige erhabene Figur (Abb. 168), die diese Eigenschaften aufweist. Wir ziehen die Sehne MN, die den Umfang der Figur in zwei gleich lange Teile trennt. Wie wir wissen, teilt sie auch den Flächeninhalt in zwei gleiche Teile. Wir falten die Hälfte MKN an MN derartig daß sie eine symmetrische Lage einnimmt ($MK'N$).

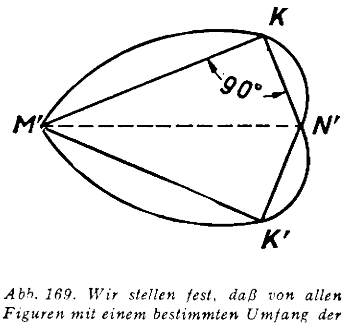


Abb. 169. Wir stellen fest, daß von allen Figuren mit einem bestimmten Umfang der Kreis den größten Flächeninhalt umschließt.

Wir weisen darauf hin, daß $MK'N$ und die ursprüngliche Figur MKN gleiche Fläche und gleichen Umfang besitzen. Da der Bogen MKN keinen Halbkreis darstellt (wenn es so wäre, dann brauchten wir ja nichts zu beweisen), muß er Punkte aufweisen, von denen aus gesehen die Strecke MN nicht im rechten Winkel erscheint. Es sei nun K ein solcher Punkt und K' der entsprechende Punkt im Spiegelbild. Die Winkel K und K' sind demnach keine rechten Winkel.

Durch Auseinanderrücken bzw. Zusammenschieben der Seiten MK, KN, MK', NK' können die von ihnen eingeschlossenen Winkel zu rechten Winkeln werden. Wir erhalten auf diese Weise zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke. Wir legen die beiden Dreiecke mit den Hypotenusen aneinander (Abb. 169) und fügen die Segmente hinzu. Dadurch erhalten wir das Gebilde $M'KN'K'$, das den gleichen Umfang wie die ursprüngliche Figur besitzt, dessen Flächeninhalt jedoch größer ist (weil ja die beiden rechtwinkligen Dreiecke $M'KN'$ und $M'K'N'$ einen größeren Flächeninhalt besitzen als die spitzwinkligen Dreiecke MKN und $MK'N$). Folglich kann keine umrundete Figur einen größeren Flächeninhalt aufweisen als der Kreis, wenn der gleiche Umfang vorausgesetzt wird.

So sehen die Gedankengänge aus, mit deren Hilfe wir beweisen, daß der Kreis diejenige Figur ist, die bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt aufweist.

Ferner läßt sich folgende Behauptung leicht beweisen:

Der Kreis hat den kleinsten Umfang unter allen Figuren von gleichem Flächeninhalt. Zu diesem Zweck wendet man die gleichen Überlegungen an, die sich auf das Quadrat beziehen – natürlich mit entsprechender Abwandlung.

Die Nägel

Aufgabe

Welcher Nagel läßt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, mit quadratischem oder mit dreieckigem Querschnitt? Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben und besitzen die gleiche Querschnittfläche.

Lösung

Wir gehen von der Erkenntnis aus, daß der Nagel den besten Halt aufweist, der den ihn umgebenden Werkstoff in einer größeren Fläche berührt. Und welcher von unseren drei Nägeln hat die größte Berührungsfläche? Wie wir bereits wissen, umschließen die Seiten eines Quadrats eine größere Fläche als die Dreieckseiten, und der Kreis umschließt eine größere Fläche als die Seiten eines Quadrats. Setzen wir die Seite eines Quadrats gleich 1, dann erhalten wir folgende Verhältniswerte:

$$4{,}5 : 4 : 3{,}55$$

Folglich hat der Dreiecknagel den besten Halt.

Solche Nägel werden indessen kaum hergestellt. Die Ursache dürfte darin zu suchen sein, daß derartige Nägel schwieriger herzustellen sind.

Der Körper mit dem größten Volumen

Die Kugelfläche weist ähnliche Eigenschaften auf wie der Kreis. Eine Kugel hat unter allen Körpern mit gleich großer Oberfläche das größte Volumen. Auch umgekehrt entspricht die Analogie dieser Erkenntnis dem Kreis. Die Kugel besitzt die kleinste Oberfläche unter allen Körpern mit gleichem Volumen.

Diese Eigenschaft hat im praktischen Leben eine gewisse Bedeutung. So besitzt eine kugelförmige Teekanne eine kleinere Oberfläche als etwa eine zylinderförmige oder eine Kanne von beliebiger anderer Gestalt von gleichem »Teefassungsvermögen«. Da aber ein Körper nur an seiner Oberfläche Wärme ausstrahlt, d. h. verliert, so kühlt eine kugelige Teekanne langsamer ab als andersgeformte Teekannen mit gleichem Volumen.

Im Gegensatz hierzu pflegt man oft den Quecksilberbehältern unserer Thermometer zylindrische Form und nicht Kugelform zu geben, weil sich das Quecksilber ja schnell abkühlen und erwärmen, d. h. die Temperatur der Umgebung annehmen soll.

Das Produkt gleicher Faktoren

Bei den bisherigen Aufgaben dieses Kapitels wurde versucht, mit dem geringsten Aufwand einen größten Nutzen bzw. das beste Ergebnis zu erzielen.

Die Überschrift dieses Kapitels weist auf diese Tatsache hin: »Ökonomische Geometrie«. Dieser Ausdruck stellt indessen eine Freiheit des Verfassers dar, der dem vorliegenden Buch ein populäres Gepräge geben wollte. Der Mathematiker bezeichnet solche Aufgaben anders und nennt sie »Maxima- und Minima-Aufgaben«. Ihrem Gegenstand und ihrer Schwierigkeit nach sind sie recht unterschiedlich. Viele Aufgaben können nur mit Hilfe der höheren Mathematik gelöst werden. Dennoch gibt es eine stattliche Anzahl von Aufgaben, die auch mit elementarsten Kenntnissen lösbar sind. Nachstehend bringen wir mehrere dieser Aufgaben auf geometrischem Gebiet, die wir dadurch lösen, daß wir eine eigentümliche Eigenschaft des Produktes aus gleichen Faktoren anwenden.

Wir kennen bereits diese Eigenschaft für den Sonderfall mit zwei Faktoren. Wie wir wissen, ist die Fläche eines Quadrats größer als die Fläche jedes anderen Rechtecks mit gleichem Umfang. Ins Arithmetische übersetzt hat das folgende Bedeutung: Soll eine Zahl so in zwei Teile getrennt werden, daß das Produkt beider Teile den größten Wert ergibt, so muß diese Zahl in zwei *gleiche* Teile getrennt werden. So ist z. B. unter allen Produkten, die sich durch Multiplikation folgender Faktoren ergeben:

$$13 \cdot 17,\ 16 \cdot 14,\ 12 \cdot 18,\ 11 \cdot 19,\ 10 \cdot 20,\ 15 \cdot 15 \text{ usw.},$$

deren Summe immer 30 beträgt, das Produkt aus $15 \cdot 15$ die größte Zahl, auch dann, wenn man die Produkte von Brüchen, wie $14{,}5 \cdot 15{,}5$ usw. miteinander vergleicht. Dasselbe gilt auch für Produkte mit gleicher Quersumme aus drei Faktoren. Auch hier ist das Produkt am größten, wenn alle Faktoren gleich sind. Diese Tatsache kann aus der vorangegangenen Behauptung unmittelbar gefolgert werden. Es seien x, y und z drei Faktoren mit der Quersumme a:

$$x + y + z = a$$

Nehmen wir an, x und y sind ungleich. Ersetzt man diese entsprechend durch ein arithmetisches Mittel $\frac{x+y}{2}$, dann bleibt die Quersumme der Faktoren unverändert.

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a$$

Da jedoch nach dem Vorangegangenen

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) > x \cdot y$$

ist, so gilt für das Produkt aus drei Faktoren:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot z$$

ist größer als das Produkt $x \cdot y \cdot z$.

Wir schreiben:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot z > x \cdot y \cdot z$$

Es gilt allgemein folgendes: Sind unter den Faktoren x, y und z zwei ungleich, so können wir immer Zahlen finden, die ohne Veränderung der Quersumme ein größeres Produkt ergeben als $x \cdot y \cdot z$. Nur wenn alle drei Faktoren gleich sind, ist eine derartige Substitution undurchführbar.

Ist also $x + y + z = a$, dann nimmt das Produkt den größten Wert bei

$$x = y = z$$

an. Wir benutzen nun diese Eigenschaft gleicher Faktoren, um einige interessante Aufgaben zu lösen.

Das Dreieck mit der größten Fläche

Aufgabe

Welche Form soll ein Dreieck besitzen, damit es bei bekanntem und gleichbleibendem Umfang den größten Flächeninhalt hat? Wir haben schon vorher darauf hingewiesen, daß das gleichseitige Dreieck diese Eigenschaft besitzt. Aber wie können wir diese Behauptung beweisen?

Lösung

Wir wissen aus der Geometrie, daß die Fläche F eines Dreiecks, dessen Seitensumme $a + b + c = 2s$ bekannt ist, folgendermaßen ausgedrückt wird:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Daraus folgt:

$$\frac{F^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Die Fläche F eines Dreiecks ist am größten, wenn auch F^2 bzw. der Ausdruck $\frac{F^2}{s}$ (wo s der halbe Umfang ist) am größten ist. Nach den Voraussetzungen der Aufgabe ist s konstant. Da beide Teile der Gleichung ihren Höchstwert zugleich erreichen, so wird die Frage folgendermaßen formuliert: Unter welcher Bedingung nimmt das Produkt

$$(s - a)(s - b)(s - c)$$

den höchsten Wert an. Wir weisen noch darauf hin, daß die Summe dieser Faktoren konstant ist. Dann entwickeln wir das Glied folgendermaßen:

$$s - a + s - b + s - c = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s$$

Da die Summe der Faktoren konstant ist, so folgt daraus, daß das Produkt den höchsten Wert annimmt, wenn die Faktoren gleich groß sind, d. h., wenn folgender Gleichung genügt wird:

$$s - a = s - b = s - c$$

Wir erhalten daraus:

$$a = b = c$$

Folglich hat das Dreieck den größten Flächeninhalt, wenn alle Seiten gleich sind.

Die schwerste Bohle

Aufgabe

Aus einem zylindrischen Stamm soll das schwerste Stück Vierkantholz herausgeschnitten werden. Wie lösen wir diese Aufgabe?

Lösung

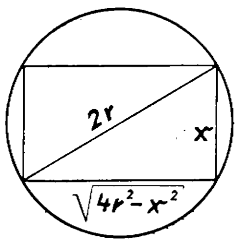


Abb. 170.
Zur Aufgabe über die Bohle.

Die Aufgabe besteht offenbar darin, daß man ein Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in einen Kreis einschreibt. Obwohl der Leser nach allem, was bisher vorgebracht wurde, in Gedanken schon darauf vorbereitet ist, daß dieses Rechteck ja nur ein Quadrat sein kann, ist der genaue Beweis für diese Tatsache dennoch von erheblichem Interesse.

Wir bezeichnen die Seite des gesuchten Rechtecks mit x (Abb. 170). Die andere Seite ist dann

$$\sqrt{4r^2 - x^2},$$

worin r der Halbmesser des Stammquerschnittes ist. Die Fläche des Rechtecks ist

$$F = x\sqrt{4r^2 - x^2},$$

woraus folgt, daß

$$F^2 = x^2(4r^2 - x^2) \quad \text{ist.}$$

Da die Summe der Faktoren x^2 und $4r^2 - x^2$ konstant ist, nämlich $x^2 + 4r^2 - x^2 = 4r^2$, so ist ihr Produkt F^2 dann am größten, wenn

$$x^2 = 4r^2 - x^2 \quad \text{ist,}$$

oder

$$x = \sqrt{2} \cdot r$$

beträgt. Auch der Wert F, d.h. der Flächeninhalt des gesuchten Rechtecks, ist in diesem Falle am größten.

Folglich ist die eine Seite eines Rechtecks mit größtem Flächeninhalt gleich $\sqrt{2} \cdot r$. Das ist aber nichts anderes, als die Seite des in den Kreis eingeschriebenen Quadrats. Also ist das Volumen des geschnittenen Kantholzes am größten, wenn sein Querschnitt ein in den Querschnitt eines zylinderförmigen Stammes eingeschriebenes Quadrat darstellt.

Das Pappdreieck

Aufgabe

Vor uns liegt ein dreieckiges Stück Pappe. Die Aufgabe lautet, daß parallel zur Grundlinie bzw. Höhe ein Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ausgeschnitten werden soll.

Lösung

Das Dreieck sei ABC (Abb. 171) und $MNOP$ jenes Rechteck, daß herausgeschnitten werden soll.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und MNC folgt:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{MN}$$

und daraus

$$MN = \frac{AB \cdot CE}{CD}$$

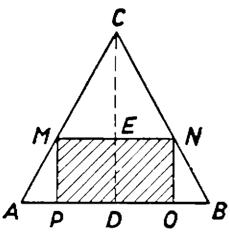


Abb. 171. In ein Dreieck ist ein Rechteck mit dem größten Flächeninhalt einzuzeichnen.

Bezeichnet man die Seite MN des gesuchten Rechtecks mit y, ihre Entfernung CE von der Spitze des Dreiecks mit x, die Seite AB mit a und die Höhe CD mit h, dann hat der frühere Ausdruck folgende Form:

$$y = \frac{a \cdot x}{h}$$

Der Flächeninhalt F des gesuchten Rechtecks $MNOP$ ist:

$$F = MN \cdot NO = MN \cdot (CD - CE) = (h - x) \cdot y = (h - x) \cdot \frac{a \cdot x}{h}$$

Folglich gilt:

$$\frac{F \cdot h}{a} = (h - x)\, x$$

Die Fläche F ist am größten, wenn der Ausdruck $\frac{F h}{a}$ am größten ist. Das ist aber dann der Fall, wenn auch das Produkt der Faktoren $(h - x)$ und x am größten ist. Nun ist jedoch die Summe

$$h - x + x = h$$

konstant. Folglich nimmt das Produkt den höchsten Wert an, wenn

$$h - x = x$$

ist, woraus folgt, daß

$$x = \frac{h}{2}$$

sein muß.

Wir wissen jetzt, daß die Seite MN des gesuchten Rechtecks durch den Höhenmittelpunkt des Dreiecks gelegt werden muß: er verbindet demnach die Mittelpunkte der Dreieckseiten miteinander. Folglich ist diese Seite des Rechtecks gleich $\frac{a}{2}$ und die andere $\frac{h}{2}$.

Der Klempner in Schwierigkeiten

Aufgabe

Ein Klempner erhält den Auftrag, aus einer quadratischen Blechtafel von 60 cm Breite einen Kasten ohne Deckel mit quadratischem Boden anzufertigen, wobei laut Bedingung der Kasten das denkbar größte Volumen besitzen soll. Der Klempner mißt hin und her und kann sich nicht darüber schlüssig werden, wo die Kanten umzubiegen sind (Abb. 172). Vielleicht sind Sie in der Lage, ihm schnell zu helfen?

Lösung

Die Breite der umzubördelnden Streifen sei x (Abb. 173). Dann beträgt die Breite des quadratischen Kastenbodens $60 - 2x$; das Volumen V des Kastens wird wie folgt ausgedrückt:

$$V = (60 - 2x)\,(60 - 2x)\,x$$

Abb. 172. Der Klempner in Schwierigkeiten.

Bei welcher Größe von x besitzt nun dieses Produkt den höchsten Wert?

Wäre die Summe aller drei Faktoren konstant, dann wäre ihr Produkt am größten, wenn die Faktoren einander gleich sind. In diesem Falle aber ist die Summe der Faktoren

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

keine konstante Größe, da sie sich mit x ebenfalls verändert.

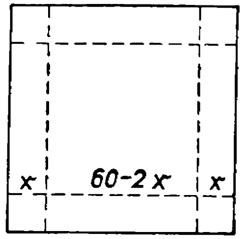


Abb. 173.
Aus diesen Maßen muß die Umbiegekante bestimmt werden.

Wir können jedoch unschwer erreichen, daß alle Faktoren gleich sind. Es genügt, beide Seiten der Gleichung mit 4 zu multiplizieren:

$$4V = (60 - 2x)(60 - 2x)\,4x$$

Die Summe der Faktoren beträgt

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120.$$

Diese Größe ist konstant. Folglich ist das Produkt der drei Faktoren am größten, wenn sie gleich sind, d. h., wenn

$$60 - 2x = 4x$$
$$60 = 6x$$

ist. Daraus folgt:

$$x = 10$$

$4V$ und zugleich V erreicht dann ebenfalls den größten Wert. Wir wissen jetzt, daß der Blechkasten das größte Volumen besitzt, wenn wir das Stück Blech 10 cm von der Kante umbiegen. Dieses größte Volumen beträgt

$$40\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 16000\text{ cm}^3.$$

Biegen wir das Blech 1 cm weiter oder näher zur Kante um, so wird in beiden Fällen das Volumen des Blechkastens kleiner.

$$9\text{ cm} \cdot 42\text{ cm} \cdot 42\text{ cm} = 15900\text{ cm}^3$$
$$\text{und}\quad 11\text{ cm} \cdot 38\text{ cm} \cdot 38\text{ cm} = 15900\text{ cm}^3,$$

also in beiden Fällen weniger als 16000 cm^3.

Für die allgemeine Form der Aufgabe kann festgestellt werden, daß bei der Breite a einer quadratischen Blechtafel die Seitenwände mit der Breite x im Abstand von $x = \frac{1}{6}\,a$ vom Rande umzubiegen sind, wenn man das größte Volumen erzielen will. Das Produkt des allgemeinen Ausdrucks $(a - 2x)(a - 2x)\,x$ bzw. $(a - 2x)(a - 2x)\,4x$ nimmt dann den größten Wert an, wenn $a - 2x = 4x$ ist. Daraus folgt allgemein:

$$6x = a$$
$$x = \frac{a}{6}$$

Wir sehen, daß die geforderte Bedingung dann erfüllt ist, wenn die Seitenwand x gleich ist $\frac{1}{6}$ der Breite a.

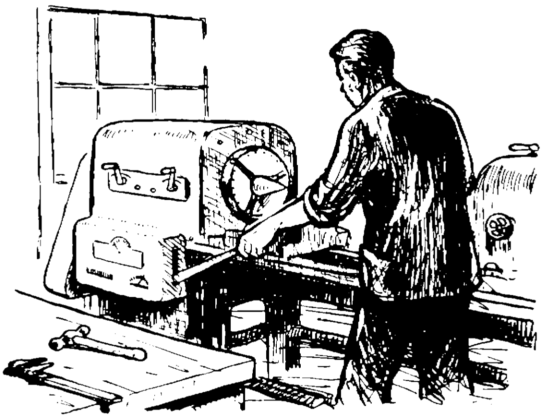


Abb. 174. Die schwierige Aufgabe des Drehers.

Der größte Zylinder im Kegel

Aufgabe

Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte (Abb. 174).

Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach: sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? (Abb. 175 bzw. 176). Er konnte lange Zeit zu keinem Entschluß kommen. Können Sie sagen, wie er verfahren sollte?

Lösung

Es sei ABC (Abb. 177) der Kegelquerschnitt und DC die Höhe, die wir mit h bezeichnen. Den Radius an der Grundfläche ($AD = DB$) bezeichnen wir mit R.

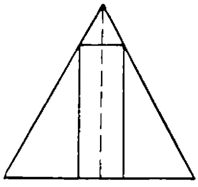


Abb. 175. Aus einem Kegel kann ein hoher schmaler ...

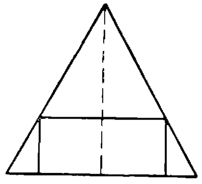


Abb. 176. ... oder ein breiter niedriger Zylinder herausgedreht werden. Welcher Zylinder hat das größte Volumen?

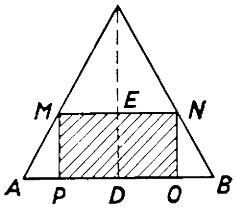


Abb. 177. Achsenschnitt des Kegels und des Zylinders.

Der Zylinder, den man aus dem Kegel herausdrehen kann, hat den Querschnitt *MNOP*. Wir wollen nun die Entfernung $EC = x$ zwischen der oberen Zylindergrundfläche und der Kegelspitze feststellen, bei der der Zylinderinhalt am größten ist.

Man findet den Halbmesser r (PD oder ME) der Zylindergrundfläche leicht aus folgender Proportion:

$$\frac{ME}{AD} = \frac{EC}{DC} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{R} = \frac{x}{h}$$

Daraus folgt:

$$r = \frac{Rx}{h}$$

Die Höhe des Zylinders ist $h - x$. Folglich ist sein Volumen

$$V = \pi \frac{R^2 x^2}{h^2} \cdot (h - x)$$

$$= \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 \cdot (h - x)$$

und weiter

$$\frac{Vh^2}{\pi R^2} = x^2 (h - x)$$

In dem Ausdruck $\frac{Vh^2}{\pi R^2}$ sind die Werte h, π und R konstant, nur V ist veränderlich.

Wir wollen ein solches x finden, bei dem V den höchsten Wert annimmt. Nun wird aber V offensichtlich mit der Zunahme von $\frac{Vh^2}{\pi R^2}$, d. h. mit $x^2 (h - x)$ größer.

Und in welchem Falle erreicht dieser Ausdruck den Höchstwert?

Wir haben es mit drei veränderlichen Faktoren, x, x und $(h - x)$ zu tun. Wäre ihre Summe konstant, dann würde das Produkt am größten sein, wenn alle drei Faktoren gleich wären. Wir können diesen konstanten Wert der Summe ohne weiteres erreichen, wenn wir beide Teile der Gleichung mit 2 multiplizieren. Wir erhalten:

$$\frac{2Vh^2}{\pi R^2} = x^2 (2h - 2x)$$

Nun weisen die drei Faktoren im rechten Teil der Gleichung die konstante Summe

$$x + x + 2h - 2x = 2h \quad \text{auf.}$$

Sind alle Faktoren gleich, dann nimmt das Produkt den höchsten Wert an, d. h.

$$x = 2h - 2x \quad \text{und} \quad x = \frac{2h}{3}.$$

Auch der Ausdruck $\frac{2Vh^2}{\pi R^2}$ wird dabei am größten, und somit hat das Volumen V des abgedrehten Zylinders den höchsten Wert.

Wir wissen also, welche Form der aus einem Stahlkegel hergestellte Zylinder haben muß. Die obere Grundfläche des Zylinders muß $\frac{2}{3}$ Kegelhöhe von der unteren Grundfläche entfernt sein.

Wenn verschiedene Gegenstände im Heim und in der Werkstätte angefertigt werden, dann kommt es häufig vor, daß das Ausmaß des Werkstoffes nicht den gestellten Bedingungen entspricht. In diesem Falle ist es zweckmäßig, die Form des Materials entsprechend zu verändern und dem Zweck anzupassen. Durch Scharfsinn und Geschicklichkeit kann die Arbeit erleichtert werden.

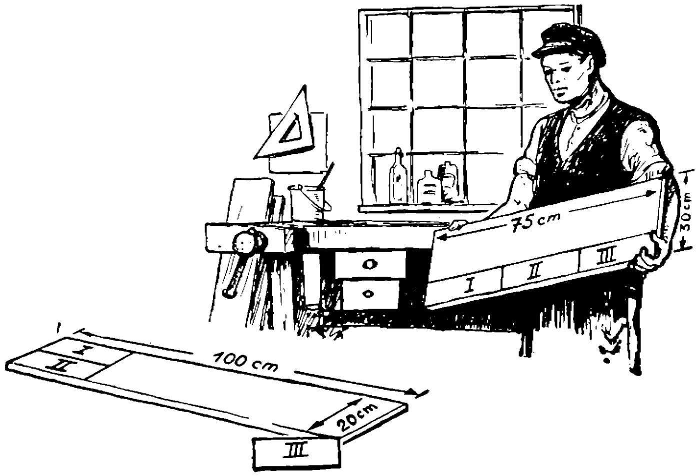


Abb. 178. Ein Brett soll mit drei Sägeschnitten und einer Leimung verlängert werden.

Stellen Sie sich folgenden Fall vor: Sie möchten sich ein Bücherregal anfertigen und benötigen ein Brett von der Größe 1 m lang und 20 cm breit. Sie verfügen jedoch nur über ein breiteres, aber dafür kürzeres Brett, das 75 cm lang und 30 cm breit ist (Abb. 178).

Was tun?

Sie können natürlich einen 10 cm breiten Streifen an der Längsseite abschneiden, ihn in drei Teile von je 25 cm zersägen und das Brett auf diese Weise verlängern (Abb. 178 unten).

Die Lösung wäre wegen der größeren Anzahl der Arbeitsgänge unwirtschaftlich (3 Schnitte, 3mal leimen). Sie würde auch den Ansprüchen an die Festigkeit nur mangelhaft genügen.

Aufgabe

Suchen Sie ein Verfahren, mit dessen Hilfe man nur drei Schnitte und ein einziges Mal zu leimen braucht!

Lösung

Das Brett *ABCD* (Abb. 179) muß diagonal (längs *AC*) geschnitten werden; daraufhin verschiebt man die eine Hälfte (z. B. das Dreieck *ABC*) an der Diagonale, um C_1E (gleich der fehlenden Länge), d. h. um 25 cm. Die Gesamtlänge der beiden Hälften beträgt dann 1 m. Nun werden beide Hälften an AC_1 geleimt und die Enden (schraffierte Dreiecke) abgeschnitten. Unser Brett hat jetzt die passende Größe.

In der Tat folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und C_1EC:

$$AD : DC = C_1E : EC$$

Daraus folgt:

$$EC = \frac{DC}{AD} \cdot C_1E$$

oder

$$EC = \frac{30\,\text{cm}}{75\,\text{cm}} \cdot 25\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$$

$$DE = DC - EC = 30\,\text{cm} - 10\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$$

Das aber ist die gewünschte Breite.

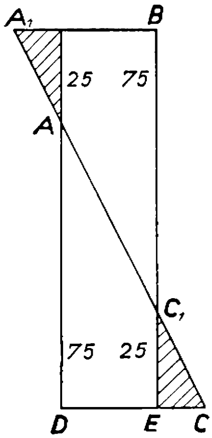


Abb. 179.
Die Lösung der Aufgabe.

Der kürzeste Weg

Zum Schluß betrachten wir noch eine »Maxima-Minima-Aufgabe«, die durch eine verblüffende einfache geometrische Konstruktion zu lösen ist.

Aufgabe

Am Ufer eines Flusses soll ein Wasserturm gebaut werden, dessen Wasser durch eine Rohrleitung in die Orte A und B fließen soll (Abb. 180).

In welchem Punkt steht der Wasserturm, damit ein möglichst kurzes Rohrnetz zwischen den beiden Orten und dem Wasserturm gebaut werden muß?

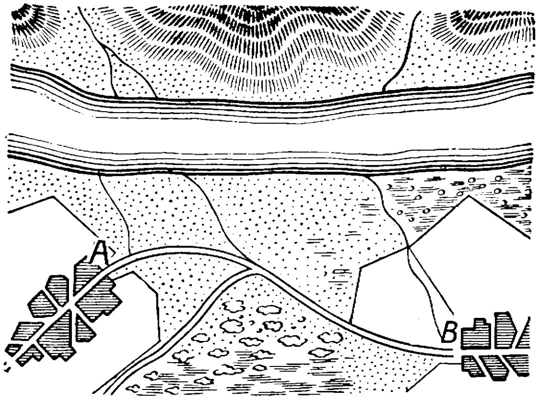


Abb. 180. An welcher Stelle ist der Wasserturm zu bauen?

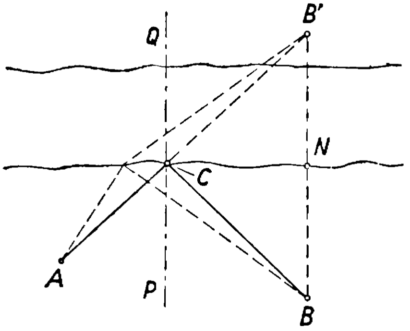


Abb. 181. Der kürzeste Weg wird durch diese geometrische Lösung bestimmt.

Lösung

Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn die geringste Entfernung von A zum Ufer und von dort nach B festgestellt ist.

Nehmen wir an, daß ACB die gesuchte Strecke ist (Abb. 181). Wir falten die Zeichnung längs CN und erhalten den Punkt B'. Wenn ACB der kürzeste Weg ist, so muß auch ACB' kürzer sein als jeder andere Weg, weil $CB' = CB$ ist. Um den kürzesten Weg zu finden, brauchen wir nur den Schnittpunkt C zu ermitteln (Schnittpunkt zwischen der Geraden AB' und der Uferlinie). Wir verbinden A mit C und C mit B und bekommen den damit kürzesten Weg zwischen A und B.

Fällen wir das Lot aus C auf CN, so ist leicht festzustellen, daß die von beiden Strecken des kürzesten Weges gebildeten Winkel ACP und BCP gleich sind, also Winkel ACP = Winkel $B'CQ$ = Winkel BCP.

Ähnlich sieht der Weg eines von einem Spiegel zurückgeworfenen Strahles aus: Einfallwinkel gleich Ausfallwinkel. Daraus folgt übrigens, daß der Lichtstrahl bei der Brechung den *kürzesten* Weg nimmt: diese Tatsache war schon dem Physiker des Altertums, Heron von Alexandrien, bekannt.