1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1985-1986: Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.

1. Het scalair product (inproduct) van twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ wordt voorgesteld door $\vec{u}.\vec{v}$. Men weet nu van drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ dat $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=0$. Hieruit volgt dat

(A) $\vec{c}=-\vec{a}$	(B) $\vec{b}$ orthogonaal is met $\vec{a}+\vec{c}$
(C) $\vec{b}=\vec{0}$ of $\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$	(D) $\vec{a},\vec{b}$ en $\vec{c}$ collineair zijn
(E) $\vec{a}$ orthogonaal is met $\vec{b}$ en $\vec{c}$ is orthogonaal met $\vec{b}$	

2. Beschouw de volgende vierkantsvergelijking in x:

$$\sin\alpha.x^2-\cos\alpha.x+\mathrm{tg}\alpha=0,$$

waarbij α een constante is ($\neq k\dfrac{\pi}{2}$ met $k\in\mathbb{Z}$). Wanneer men de som en het product van de wortels van deze vierkantsvergelijking vermenigvuldigt, dan vindt men

(A) 1	(B) $\sin\alpha$	(C) $-\sin\alpha$	(D) $-\dfrac{1}{\sin\alpha}$	(E) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$

3. Hoeveel verschillende delers heeft het getal 30030 (= 2.3.5.7.11.13)?

(A) 6	(B) 36	(C) 62	(D) 64	(E) 128

4. Een brandweerman staat op de middelste sport van een brandweerladder tijdens het blussen van een brand. Als de rook wat minder dik is, kan hij 9 treden hoger klimmen om beter het bluswerk te doen. Een tijdje later wordt de rook weer dikker en moet hij 11 treden terug naar beneden. Tenslotte is de rookontwikkeling praktisch opgehouden en kan hij tot boven aan de ladder op de hoogste sport klimmen en dit betekent 17 treden naar omhoog. Het aantal sporten van de ladder is

(A) 29	(B) 30	(C) 31	(D) 32	(E) 33

5. $\dfrac{1}{4}$ van 8^{16} is

(A) 2^{16}	(B) 4^{23}	(C) 8^4	(D) 2^{24}	(E) 4^8

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 1986.

6. Eén van de hoeken van een driehoek heeft maat α, een tweede hoek heeft maat 2α. De cosinus van de derde hoek is

(A) $-\cos 3\alpha$	(B) $\cos(2\pi - 3\alpha)$	(C) $\cos 3\alpha$
(D) $\cos(\frac{\pi}{2} + 3\alpha)$	(E) $\cos(\frac{\pi}{2} - 3\alpha)$	

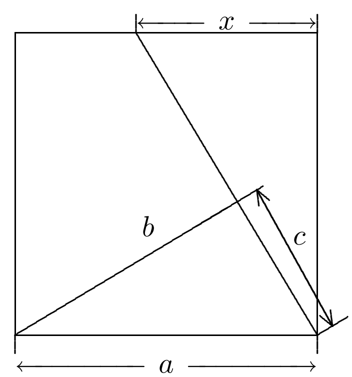
7. Wanneer men een rationaal getal decimaal uitschrijft (als een kommagetal), dan kan het gebeuren dat dit aanleiding geeft tot oneindig veel decimalen. Er treedt dan echter een repeterend gedeelte op b.v.

$$\frac{4}{11} = 0{,}\underline{3636}\ \underline{36}\ \underline{3}\ldots$$

Welk is de 1986-ste decimaal in de decimale ontwikkeling van $\frac{10}{41}$?

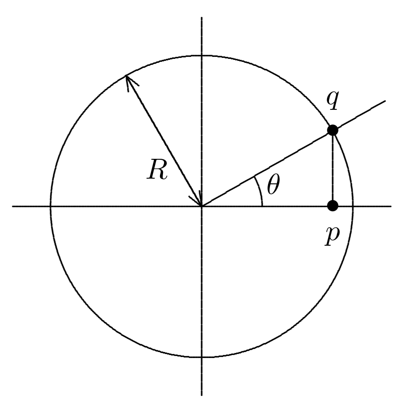
(A) 0	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 9

8. Welk is de waarde van x in volgend vierkant?



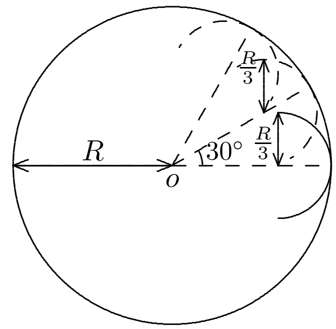
(A) $\frac{ab}{c}$	(B) $\frac{b}{ac}$	(C) $\frac{ac}{b}$	(D) $\frac{c}{ab}$	(E) c

9. Welk is de lengte van de straal R van de gegeven cirkel indien de lengte van $[pq]$ precies tgθ is?



(A) $\frac{\text{tg}\theta}{\cos\theta}$	(B) $\sin\theta.\text{tg}\theta$	(C) $\frac{1}{\sin\theta}$
(D) $\frac{1}{\cos\theta}$	(E) geen van de vorige	

10. In het binnengebied van een cirkel met straal R en middelpunt o construeert men een kleinere cirkel C_0 met straal $\frac{R}{3}$ die de grote cirkel inwendig raakt; daarna construeert men de cirkels C_1, C_2, ... die men verkrijgt door C_0 te laten draaien over $30°$, $60°$, ..., $330°$. Hoe groot is het aantal ontmoetingspunten (d.w.z. snijpunten of raakpunten) van de kleine cirkels?

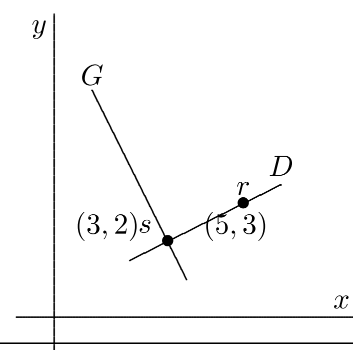


(A) 12	(B) 24	(C) 30	(D) 36	(E) 48

11. Drie punten in het vlak zijn gegeven, nl. $a(2,1)$, $b(6,4)$, $c(2,4)$. Welke zijn de coördinaten van het middelpunt van de cirkel die door a, b en c gaat?

(A) $(4,2)$	(B) $(3,\frac{5}{2})$	(C) $(\frac{5}{2},4)$
(D) $(4,\frac{5}{2})$	(E) geen van de vorige	

12. Ziehier de grafische voorstelling van twee orthogonale rechten D en G, met snijpunt $s(3,2)$. Verder is $r(5,3) \in D$. De richtingscoëfficiënt van de rechte G is



(A) $-\frac{3}{5}$	(B) $-\frac{5}{3}$	(C) 2	(D) $-\frac{1}{2}$	(E) 2

13. Als een daling van 25 naar 5 uitgedrukt wordt als een verlies van 80%, wat is dan de winst wanneer men stijgt van 5 naar 25?

(A) 20%	(B) 80%	(C) 180%	(D) 400%	(E) 500%

14. De oppervlakten van de verschillende zijvlakken van een balk zijn resp. V, W, U. De inhoud van deze balk is dan

(A) VWU	(B) $\frac{V\sqrt{W}+W\sqrt{U}+U\sqrt{V}}{3}$	(C) $\sqrt{VWU}$
(D) $\sqrt[3]{VWU}$	(E) geen van de vorige	

15. Hoeveel punten kan men maximaal in het inwendige van een cirkel aanbrengen, zodat hun afstand twee aan twee minstens gelijk is aan de straal van de cirkel?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 7

16. Zij $f(x) = x^2 + 3$. Als $-2 < x < 3$, dan is

(A) $3 \leq f(x) < 12$	(B) $3 < f(x) < 12$	(C) $-1 < f(x) < 12$
(D) $7 < f(x) < 12$	(E) $7 \leq f(x) < 12$	

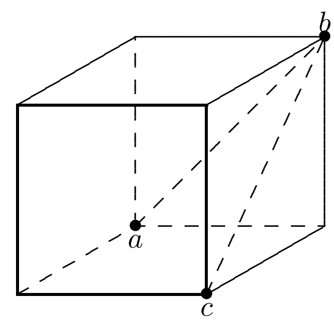
17. Op hoeveel nullen eindigt $100! = 1.2.3.4.\ldots.98.99.100$?

(A) 10	(B) 20	(C) 21	(D) 24	(E) 25

18. Als p een oneven priemgetal is, welk getal is dan ook priem?

(A) $2p + 1$	(B) $p^2 + 1$	(C) $3p + 2$
(D) $p^3 + 2$	(E) geen van de vorige	

19. In de hier voorgestelde kubus is de grootte van de hoek $\widehat{abc}$:



(A) 30°	(B) 45°	(C) 60°	(D) 75°	(E) 90°

20. Als $x = 0{,}5$, dan is $x + x^{-1}$ gelijk aan

(A) 1	(B) $\frac{5}{2}$	(C) 0
(D) 5,5	(E) geen van de vorige	

21. Een echte voetbal wordt gemaakt uit stukken zwart en wit leder die aan elkaar genaaid worden zodanig dat de zwarte stukjes regelmatige vijfhoeken en de witte stukjes regelmatige zeshoeken vormen. Elke (zwarte) vijfhoek is omringd door 5 (witte) zeshoeken. Elke (witte) zeshoek is omringd door evenveel vijfhoeken als zeshoeken. Als je weet dat er op zo'n echte voetbal 12 vijfhoeken aanwezig zijn, hoeveel zeshoeken zijn er dan op te vinden?

(A) 12	(B) 20	(C) 24	(D) 30	(E) 36

22. Hoeveel reële nulpunten bezit $f(x) = \dfrac{x(x^2+1)(x^2-x-6)}{(x-3)^2(5-x)}$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

23. *Gegeven:* $x = 1.2.3.4.5.\ldots.99.100$
$y = 100.100.100.\ldots.100.100.100$ (40 factoren)
$z = 100.99.98.\ldots.62.61$
Gevraagd: Welke (dubbele) ongelijkheid is correct?

(A) $x < z < y$	(B) $y < x < z$	(C) $y < z < x$	(D) $z < x < y$	(E) $z < y < x$

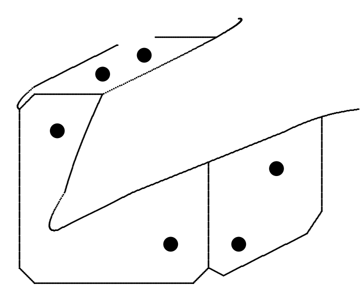
24. De ongelijkheid $\dfrac{-3x-15}{2} < 0$ is gelijkwaardig met

(A) $x > 5$	(B) $x < 5$	(C) $x > -5$	(D) $x < -5$	(E) $x > \dfrac{-17}{3}$

25. Men werpt 3 onvervalste geldstukken op. Stel door $P(i)$ de kans voor om i keer kop te verkrijgen ($i = 0, 1, 2, 3$). Welke gelijkheid is juist?

(A) $P(0) = P(1)$	(B) $P(1) = P(2)$	(C) $P(1) = 2P(0)$
(D) $P(2) = P(3)$	(E) $P(3) = \dfrac{1}{4}$	

26. De afbeelding van deze dobbelsteen is gedeeltelijk verminkt. Wetende dat de som van het aantal ogen op twee tegenoverelkaar liggende vlakken steeds gelijk is aan 7, hoeveel ogen heeft het grondvlak van deze dobbelsteen?



(A) 1	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 9

27. De diagonaal van een vierkant is $2m$ lang. Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkant?

(A) $1m^2$	(B) $\sqrt{2}m^2$	(C) $2m^2$
(D) $2\sqrt{2}m^2$	(E) geen van de vorige	

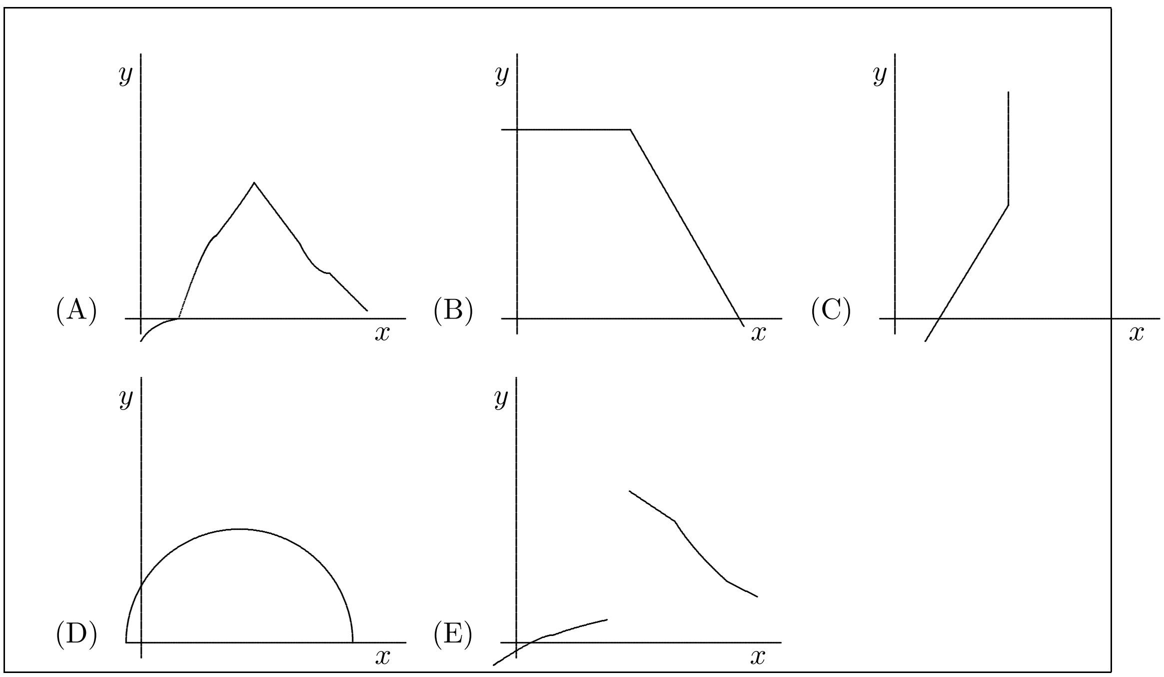
28. Eén van de 5 volgende uitspraken is verkeerd. Welke?

(A) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{2n} = 1$
(B) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$
(C) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{n^2} = (-1)^n$
(D) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{3n} = -(-1)^{2n}$
(E) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{2n-1} = -(1)^{n+1}$

29. Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is oneven $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)$. Welke van volgende functies is oneven?

(A) $f(x) = 3$	(B) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	(C) $x.\sin x$
(D) $x.\cos x$	(E) $\sin x - \cos x$	

30. Welke van de volgende grafieken stelt **geen** functie $y = f(x)$ voor?



1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1985-1986: Tweede Ronde.

De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1.1 De problemen.

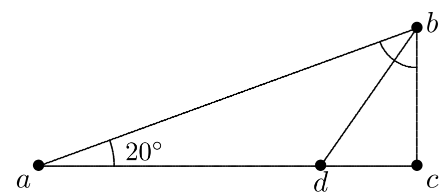
1. $[x-(y-z)]-[(x-y)-z]=$

(A) $2y$	(B) $2z$	(C) $-2y$	(D) $-2z$	(E) 0

2. Gegeven is een rechte L' in het XY-vlak met vergelijking $y=\frac{2}{3}x+4$. De rechte L heeft een richtingscoëfficiënt die de helft is van deze van L' en snijdt een stuk af op de Y-as dat het dubbel is van het stuk afgesneden op de Y-as door L'. De vergelijking van L is

(A) $y=\frac{1}{3}x+8$	(B) $y=\frac{4}{3}x+2$	(C) $y=\frac{1}{3}x+4$
(D) $y=\frac{4}{3}x+4$	(E) $y=\frac{1}{3}x+2$	

3. De driehoek abc is een rechthoekige driehoek, met $\hat{c}=90°$ en $\hat{a}=20°$. Als bd de bissectrice is van $\widehat{abc}$, dan is $\widehat{bdc}$ gelijk aan



(A) $40°$	(B) $45°$	(C) $50°$	(D) $55°$	(E) $60°$

4. Stel volgende bewering voor door S.

   Als de som van de cijfers van een geheel getal n deelbaar is door 6, dan is n deelbaar door 6.

   Een waarde van n die aantoont dat S een valse bewering is, is

(A) 30	(B) 33	(C) 40
(D) 42	(E) geen van de vorige	

5. Vereenvoudig $\left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6 + \frac{3}{4}}\right)^2$.

(A) $\frac{3}{4}$	(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	(D) $\frac{3}{2}$	(E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

6. Door gebruik te maken van een tafeltje met zekere hoogte, worden twee identieke blokken hout geplaatst zoals afgebeeld in figuur 1. De lengte r meet $32cm$. Nadien worden de blokken geplaatst zoals in figuur 2, en de lengte s meet $28cm$. Hoe hoog is het tafeltje?

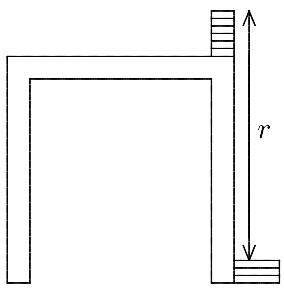


Fig. 1

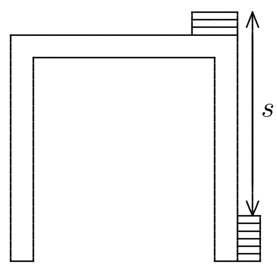


Fig. 2

(A) $28cm$	(B) $29cm$	(C) $30cm$	(D) $31cm$	(E) $32cm$

7. De som van het grootste natuurlijk getal kleiner dan of gelijk aan x en het kleinste natuurlijk getal groter dan of gelijk aan x is gelijk aan 5. De oplossingenverzameling voor x is

(A) $\{\frac{5}{2}\}$	(B) $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$	(C) $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$
(D) $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$	(E) $\{x \mid 2 < x < 3\}$	

8. De U.S.A. telde in 1980 226.504.825 inwoners. De oppervlakte van de U.S.A. is 3.615.122 vierkante mijl. Er zijn $(5.280)^2$ vierkante voet in een vierkante mijl. Welke van de 5 onderstaande getallen benadert het best de gemiddelde vierkante voet per inwoner van de U.S.A.?

(A) 5.000	(B) 10.000	(C) 50.000	(D) 100.000	(E) 500.000

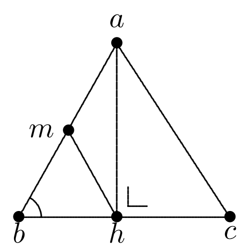
9. Het product $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{9^2})(1 - \frac{1}{10^2})$ is gelijk aan

(A) $\frac{5}{12}$	(B) $\frac{1}{2}$	(C) $\frac{11}{20}$	(D) $\frac{2}{3}$	(E) $\frac{7}{10}$

10. De 120 "woorden" die ontstaan door de 5 letters AHSME te permuteren worden alfabetisch gerangschikt, waarbij het geen belang heeft of het "woord" een betekenis heeft of niet. De laatste letter van het 86-ste woord uit de lijst is

(A) A	(B) H	(C) S	(D) M	(E) E

11. In driehoek abc is $|ab| = 13$, $|bc| = 14$ en $|ca| = 15$. Het punt m is het midden van de zijde $[ab]$ en h is het voetpunt van de loodlijn uit a op bc. De lengte van $[hm]$, nl. $|hm|$ is



(A) 6	(B) 6.5	(C) 7	(D) 7.5	(E) 8

12. Jan scoorde 84 op de eerste ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade. Met het quoteringssysteem van deze tweede ronde zou hij 93 behalen. Hoeveel vragen heeft Jan niet beantwoord?

Ter herinnering. De regels voor de eerste ronde waren de volgende. Men vertrok met 30 punten, per goed antwoord kreeg men 4 punten, per foutief antwoord werd 1 punt afgetrokken, en voor elke niet beantwoorde vraag werd geen enkel punt gegeven of afgetrokken. De regels voor de tweede ronde zijn de volgende. Men vertrekt van nul, per goed antwoord krijgt men 5 punten, voor elke niet beantwoorde vraag krijgt men 2 punten en voor elk foutief antwoord wordt geen enkel punt gegeven of afgetrokken.

(A) 6	(B) 9	(C) 11
(D) 14	(E) niet exact te berekenen	

13. Een parabool $y = ax^2 + bx + c$ heeft top $(4, 2)$. Als $(2, 0)$ op de parabool gelegen is, dan is abc gelijk aan

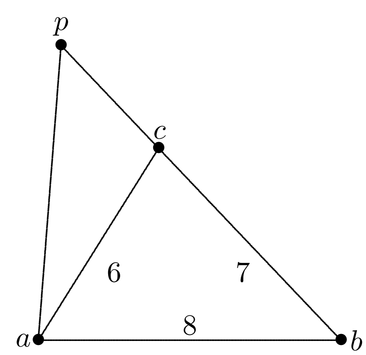
(A) -12	(B) -6	(C) 0	(D) 6	(E) 12

14. Veronderstel dat pief, poef en paf specifieke lengtematen zijn. Veronderstel dat b piefs gelijk zijn aan c poefs, d pafs gelijk zijn aan e piefs, en f pafs gelijk zijn aan g meters. Hoeveel poefs gaan er dan in een meter?

(A) $\frac{bdg}{cef}$	(B) $\frac{cdf}{beg}$	(C) $\frac{cdg}{bef}$	(D) $\frac{cef}{bdg}$	(E) $\frac{ceg}{bdf}$

15. Een student moet het gemiddelde m van drie getallen x, y en z berekenen. Hij doet dit op de volgende manier. Eerst berekent hij het gemiddelde van x en y en nadien berekent hij het gemiddelde van dit resultaat met z. Als $x < y < z$, dan is het eindresultaat van de student

(A) correct	(B) altijd kleiner dan m
(C) altijd groter dan m	(D) soms kleiner dan, soms gelijk aan m
(E) soms groter dan, soms gelijk aan m	



16. In driehoek abc is $|ab| = 8$, $|bc| = 7$ en $|ca| = 6$. De zijde $[bc]$ wordt verlengd (zie figuur) en een punt p wordt - voorbij c - zó gekozen dat driehoek pab gelijkvormig is met driehoek pca. De lengte van $[pc]$, nl. $|pc|$ is

(A) 7	(B) 8	(C) 9	(D) 10	(E) 11

17. Een droogrek staat in een kamer en bevat 100 rode sokken, 80 groene sokken, 60 blauwe sokken en 40 zwarte sokken. Iemand neemt één voor één de sokken van de draad. Aangezien het echter donker is in de kamer, zijn de kleuren van de sokken onmogelijk te zien. Wat is het kleinste aantal sokken dat hij van de draad moet nemen om zeker te zijn dat hij ten minste 10 paar heeft gekozen? (Een paar sokken zijn elke twee sokken van dezelfde kleur. Uiteraard mag geen enkele sok in meer dan één paar geteld worden.)

(A) 21	(B) 23	(C) 24	(D) 30	(E) 50

18. Een vlak snijdt een rechte omwentelingscilinder met straal 1 volgens een ellips. Als de grote as van de ellips 50% langer is dan de kleine as, dan is de lengte van de grote as

(A) 1	(B) $\frac{3}{2}$	(C) 2	(D) $\frac{9}{4}$	(E) 3

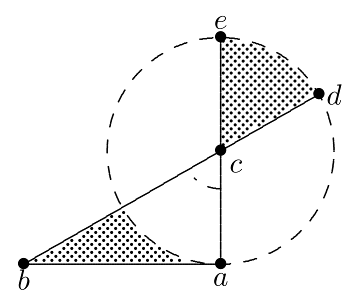
19. Een park heeft de vorm van een regelmatige zeshoek waarvan de lengte van de zijden gelijk is aan 2 km. Annie maakt een wandeling van 5 km langs de omtrek, vertrekkend van een hoekpunt. Hoeveel kilometers (in rechte lijn) is ze dan van haar startplaats verwijderd?

(A) $\sqrt{13}$	(B) $\sqrt{14}$	(C) $\sqrt{15}$	(D) $\sqrt{16}$	(E) $\sqrt{17}$

20. Veronderstel dat x en y omgekeerd evenredig zijn en positief. Als x met $p\%$ toeneemt, dan zal y afnemen met

(A) $p\%$	(B) $\dfrac{p}{1+p}\%$	(C) $\dfrac{100}{p}\%$	(D) $\dfrac{p}{100+p}\%$	(E) $\dfrac{100p}{100+p}\%$

21. In de tekening hiernaast wordt θ gemeten in radialen. Het punt c is het middelpunt van de cirkel en ab is de raaklijn in a aan deze cirkel. De punten b, c en d liggen op één rechte evenals de punten a, c en e. In de onderstelling dat $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ zijn de oppervlakten van de gearceerde gebieden gelijk als en slechts als



(A) $\mathrm{tg}\theta = \theta$	(B) $\mathrm{tg}\theta = 2\theta$	(C) $\mathrm{tg}\theta = 4\theta$	(D) $\mathrm{tg}2\theta = \theta$	(E) $\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2} = \theta$

22. Uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ worden zes verschillende getallen genomen. De kans dat onder de gekozen getallen het tweede kleinste getal 3 is, wordt gegeven door

(A) $\dfrac{1}{60}$	(B) $\dfrac{1}{6}$	(C) $\dfrac{1}{3}$
(D) $\dfrac{1}{2}$	(E) geen van de vorige	

23. Beschouw $N = 69^5 + 5.69^4 + 10.69^3 + 10.69^2 + 5.69 + 1$. Hoeveel natuurlijke getallen zijn deler van N?

(A) 3	(B) 5	(C) 69	(D) 125	(E) 216

24. Veronderstel dat $p(x) = x^2 + bx + c$, met b en c gehele getallen. Als $p(x)$ een deler is van $x^4 + 6x^2 + 25$ en van $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$, dan is $p(1)$ gelijk aan

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 4	(E) 8

25. Men noteert door $\lfloor x \rfloor$ het grootste geheel getal dat kleiner is dan of gelijk is aan x. Dan is

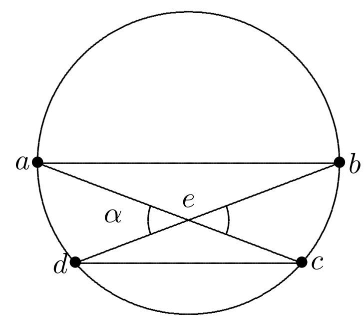
$$\sum_{N=1}^{1024} \lfloor \log_2 N \rfloor =$$

(A) 8192	(B) 8204	(C) 9218
(D) $\lfloor \log_2(1024!) \rfloor$	(E) geen van de vorige	

26. Men wenst een rechthoekige driehoek abc te construeren (in het vlak) zo dat de rechthoekszijden $[ab]$ en $[ac]$ respectievelijk evenwijdig zijn met de X-as en de Y-as van een georthonormeerd assenstelsel. Bovendien wordt vereist dat de zwaartelijnen op die rechthoekszijden gelegen zijn op de rechten met vergelijking $y = 3x + 1$ en $y = mx + 2$. Hoeveel verschillende waarden kan de constante m aannemen zodanig dat de driehoek bestaat?

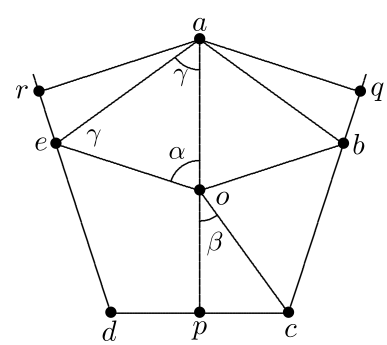
(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

27. In bijgaande figuur is $[ab]$ de middellijn van een cirkel, $[cd]$ een koorde evenwijdig aan ab, e het snijpunt van de lijnstukken $[ac]$ en $[bd]$, $\alpha = \widehat{aed}$. De verhouding van de oppervlakten van driehoek cde en van driehoek abe is



(A) $\cos\alpha$	(B) $\sin\alpha$	(C) $\cos^2\alpha$	(D) $\sin^2\alpha$	(E) $1 - \sin\alpha$

28. $abcde$ is een regelmatige vijfhoek. ap, aq en ar zijn de loodlijnen uit a op resp. $[cd]$ en de verlengden van $[cb]$ en $[de]$ (zie figuur). Als o het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van $abcde$ en als $|op| = 1$, dan is $|ao| + |aq| + |ar|$ gelijk aan



(A) 3	(B) $1 + \sqrt{5}$	(C) 4	(D) $2 + \sqrt{5}$	(E) 5

29. Twee hoogtelijnen van een ongelijkzijdige driehoek abc hebben een lengte 4 en 12. Als de lengte van de derde hoogtelijn eveneens een natuurlijk getal is, wat is dan de grootste waarde die deze lengte kan aannemen?

(A) 4	(B) 5	(C) 6
(D) 7	(E) geen van de vorige	

30. Het aantal reële oplossingen (x, y, z, w) van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2y = x + \dfrac{17}{x} \\ 2z = y + \dfrac{17}{y} \\ 2w = z + \dfrac{17}{z} \\ 2x = w + \dfrac{17}{w} \end{cases}$$

is gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 4	(D) 8	(E) 16

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1986–1987: Eerste Ronde.

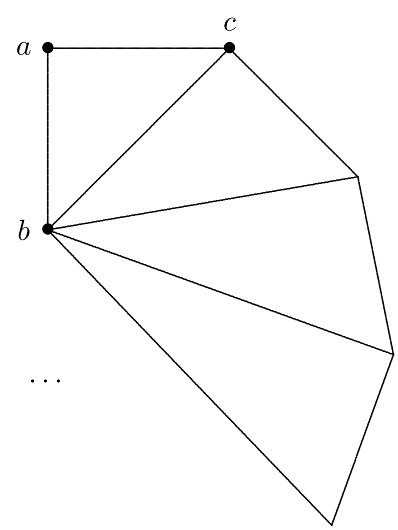
De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.

1. De grafiek van een kwadratische functie $f(x)$ snijdt de Y-as in $+16$ en de X-as in $+2$ en $+8$. De kleinste waarde van $f(x)$ is gelijk aan

(A) -16	(B) -9	(C) -6	(D) -5	(E) 5

2. Vertrekkend van een gelijkbenige rechthoekige driehoek abc met rechthoekszijden 1, als eerste driehoek bouwt men nieuwe rechthoekige driehoeken aan zodanig dat een rechthoekszijde samenvalt met de schuine zijde van de vorige driehoek en de andere rechthoekszijde opnieuw 1 is. Waaraan is de oppervlakte van de 8ste driehoek in de constructie gelijk?



(A) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$	(B) $\dfrac{3}{2}$	(C) $2\sqrt{2}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) 4

3. De helft van -2^{-2} is gelijk aan

(A) -1	(B) $-\dfrac{1}{2}$	(C) $-\dfrac{1}{8}$	(D) $\dfrac{1}{8}$	(E) 2

4. Welke van de volgende vijf uitspraken is waar?

(A) Het kwadraat van een oneven getal is soms even
(B) Als x even is, zijn x en $2x$ twee opeenvolgende even getallen
(C) Als x even is, is $(x-1)(x+1)$ oneven
(D) Als x even is, is $107x$ soms oneven
(E) Als x en y oneven zijn, is $3(x+y)$ oneven

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 1987.

5. Als $V = \{a, b, \{c, d\}\}$ dan geldt

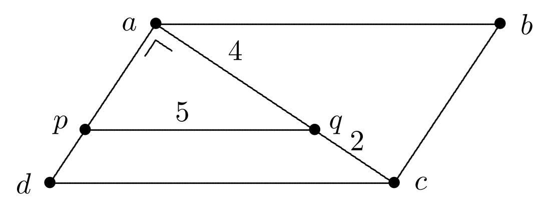
(A) $c \in V$	(B) $\{c, d\} \subset V$	(C) $\{a, b, c, d\} \subset V$
(D) $\{\{c, d\}\} \subset V$	(E) $\{c\} \in V$	

6. Zij $m \in \mathbb{R}_0$ dan heeft de vergelijking

$$x^5 + mx^4 + m^2x^3 + m^3x^2 + m^4x + m^5 = 0$$

(A) 5 verschillende reële oplossingen
(B) precies 3 verschillende reële oplossingen waarvan er 2 dubbele wortels zijn
(C) precies 3 verschillende reële oplossingen die elk één keer voorkomen
(D) juist 1 reële oplossing die driemaal voorkomt
(E) juist 1 reële oplossing die éénmaal voorkomt

7. In het getekende parallellogram $abcd$ is $|aq| = 4$, $|qc| = 2$, $|pq| = 5$, $pq \parallel cd$ en $\widehat{cad}$ een rechte hoek.
Wat is de oppervlakte van dit parallellogram?



(A) 18	(B) 24	(C) 27	(D) 30	(E) 36

8. In een kubus met ribbe van 4 dm passen precies 8 bollen met straal 1 dm (zie Figuur 1). Om die 8 bollen te schilderen heeft men 1 liter verf nodig. In een tweede kubus met ribbe 8 dm passen ook precies 8 bollen maar zij hebben dan ook een straal van 2 dm (zie Figuur 2). Een derde kubus heeft ook een ribbe van 8 dm maar nu liggen er zowel in de breedte, als in de hoogte, als in de diepte 4 bollen (i.p.v. 2) naast elkaar (zie Figuur 3).
Hoeveel liter verf heeft men nodig om de bollen van de tweede en de derde kubus te schilderen?

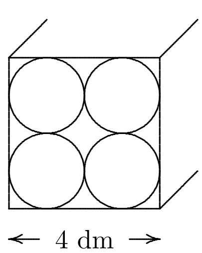


Fig. 1

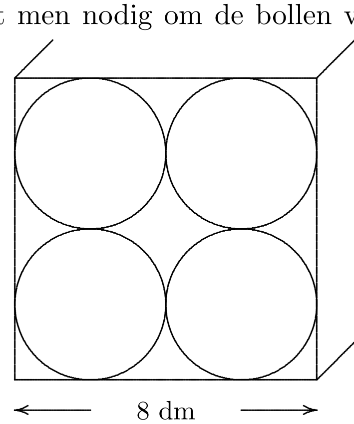


Fig. 2

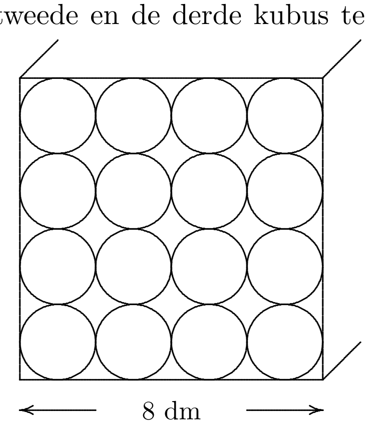
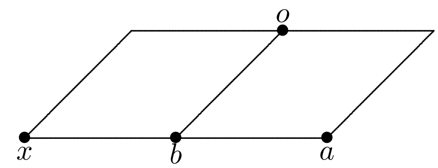


Fig. 3

(A) 4	(B) 8	(C) 10	(D) 12	(E) 16

9. De getekende figuur bestaat uit 2 ruiten die tesamen een parallellogram vormen. Als we vector $\overrightarrow{ox}$ verkort door $\vec{x}$ voorstellen dan is $\vec{x}$ gelijk aan



(A) $2\overrightarrow{ab}$	(B) $\vec{b}-\vec{a}$	(C) $2\vec{a}-\vec{b}$	(D) $\vec{a}-2\vec{b}$	(E) $2\vec{b}-\vec{a}$

10. Een tafel kost inclusief de BTW van 19%, x fr. Zonder de BTW kost deze tafel (in fr.)

(A) $\dfrac{x}{1,19}$	(B) $0,81x$	(C) $x-0,19x$	(D) $\dfrac{x}{0,81}$	(E) $0,19x$

11. Laat α en β reële getallen zijn zodanig dat $\alpha+\beta=1$ en $-\alpha\beta=1$. Welke van de volgende gelijkheden is juist?

(A) $\alpha^2+\beta^2=2$	(B) $\alpha^3+\beta^3=3$	(C) $\alpha^4+\beta^4=6$
(D) $\alpha^5+\beta^5=12$	(E) $\alpha^6+\beta^6=18$	

12. De inverse functie (voor de samenstelling) van $f(x)=2x^3+1$ is

(A) $g_1(x)=\dfrac{1}{2x^3+1}$	(B) $g_2(x)=\dfrac{2}{x^3}+1$	(C) $g_3(x)=2\sqrt[3]{x}+1$
(D) $g_4(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$	(E) $g_5(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}-1$	

13. Hoeveel woorden van 4 verschillende letters kan men vormen als 2 van de 4 letters die er in voorkomen gekend zijn?

(A) 2208	(B) 6624	(C) 13248	(D) 13824	(E) 16224

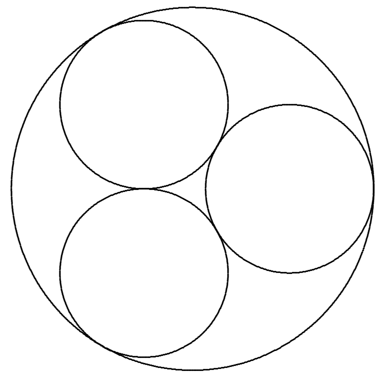
14. De vergelijking

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=k$$

heeft in $[0,\frac{\pi}{2}]$ precies twee verschillende wortels als en slechts als

(A) $k\geq 0$	(B) $k\geq 2$	(C) $k>2$	(D) $k\geq 4$	(E) $k>4$

15. Drie cirkels met zelfde straal r liggen binnen een grotere cirkel met straal R zodanig dat ze elkaar twee aan twee raken en zodanig dat ze alle drie de grote cirkel raken. Welke van de volgende betrekkingen is correct?



(A) $r = \dfrac{R}{3}$	(B) $r = \dfrac{R}{2}$	(C) $r = R(2\sqrt{3} - 3)$
(D) $r = R\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$	(E) geen van de vorige	

16. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking

$$|2x - 3| + |x - 3| = |4x - 1|?$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 8

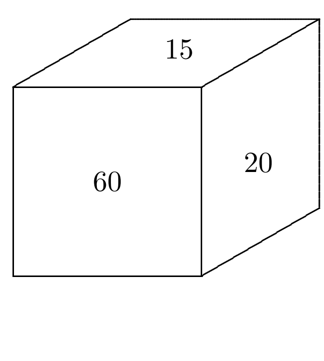
17. Is $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ dan

(A) $\dfrac{1}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	(B) $\dfrac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$	(C) $0 \leq \cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $-\dfrac{1}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	(E) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{1}{2}$	

18. Het aantal positieve delers van 10125×10^3 is

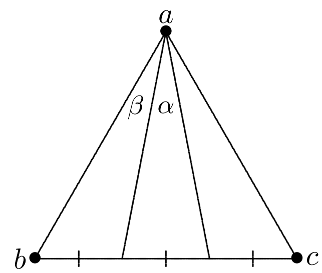
(A) 16	(B) 72	(C) 140	(D) 625	(E) 8192

19. Op deze kubus staan zes verschillende natuurlijke getallen waarvan de som 350 niet overschrijdt. Eén van de twee getallen die op twee evenwijdige, tegenover elkaar liggende vlakken staan is steeds een drie- of viervoud van het andere getal. Wat is de som van de drie ontbrekende getallen?



(A) minder dan 230	(B) 230	(C) 245
(D) 250	(E) 265	

20. In een gelijkzijdige driehoek abc zijn de drie lijnstukjes op de basis [bc] even lang. Dan is



(A) $\alpha = \beta$ en $\alpha + \beta = 40°$	(B) $\alpha < 20° < \beta$ en $\alpha + \beta < 40°$
(C) $\alpha < 20° < \beta$ en $\alpha + \beta > 40°$	(D) $\beta < 20° < \alpha$ en $\alpha + \beta < 40°$
(E) $\beta < 20° < \alpha$ en $\alpha + \beta > 40°$	

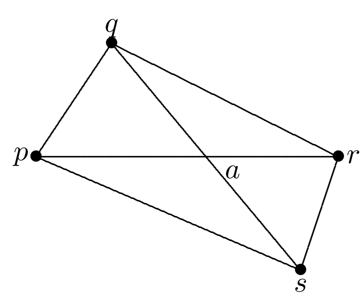
21. a, $n \in \mathbb{N}_0$ en a^n geeft bij deling door 73 rest 2, a^{n+1} geeft bij deling door 73 rest 69. Voor de rest r bij deling van a door 73 geldt

(A) $0 \leq r < 10$	(B) $10 \leq r < 30$	(C) $30 \leq r < 50$
(D) $50 \leq r < 70$	(E) $r \geq 70$	

22. In een roostervoorstelling van een relatie R in een verzameling A duidt men door middel van stippen aan welke koppels tot de relatie behoren. Hoeveel verschillende reflexieve relaties bestaan er in een verzameling van 3 elementen?

(A) 8	(B) 9	(C) 36	(D) 64	(E) 512

23. Zij $pqrs$ een convexe vierhoek en a het snijpunt van zijn diagonalen pr en qs. De oppervlakten van de driehoeken pqa, qra, rsa zijn respectievelijk 72, 54, 72 m^2. De oppervlakte van de driehoek spa is dan (in m^2)



(A) 54	(B) 60	(C) 90	(D) 96	(E) 108

24. Zij a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ dan geldt

(A) $a < b^2$	(B) $a < a^2$	(C) $\sqrt{a} < a$	(D) $\dfrac{1}{a} > b$	(E) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

25. Welke van de volgende getallen is irrationaal?

(A) $0,010010001000010000001\ldots$	(B) $0,1010101010\ldots$
(C) $0,3250202020202\ldots$	(D) $0,9999999\ldots$
(E) $3,14$	

26. A en B zijn verzamelingen. Welk van de volgende uitspralen is FOUT?

(A) $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ en $x \notin B$
(B) $x \in A$ en $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$
(C) $x \in A$ en $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$
(D) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ en $x \notin B$
(E) $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cup B$

27. Welk van de volgende functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ heeft periode 3π

(A) $f_1(x) = \dfrac{3}{2}\sin x$	(B) $f_2(x) = \sin(x + \pi)$	(C) $f_3(x) = \sin(\dfrac{2x}{3} + 1)$
(D) $f_4(x) = \sin\dfrac{3x}{2}$	(E) $f_5(x) = 3\sin 2x$	

28. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van $\dfrac{1}{x} < 3$ is

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{3}\}$	(B) $]0, \dfrac{1}{3}[$	(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{1}{3}\}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$	(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin [0, \dfrac{1}{3}]\}$	

29. De cijfers van 1 tot en met 9 zet men in willekeurige volgorde achter elkaar. Zo bekomt men een getal van 9 cijfers. Wat is de kans dat dit getal deelbaar is door 18?

(A) $\dfrac{1}{18}$	(B) $\dfrac{4}{9}$	(C) $\dfrac{1}{2}$	(D) $\dfrac{5}{9}$	(E) $\dfrac{17}{18}$

30. Hoeveel getallen bestaande uit 3 oneven niet noodzakelijk verschillende cijfers, zijn deelbaar door 3?

(A) 30	(B) 40	(C) 41	(D) 50	(E) 72

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1986–1987: Tweede Ronde.

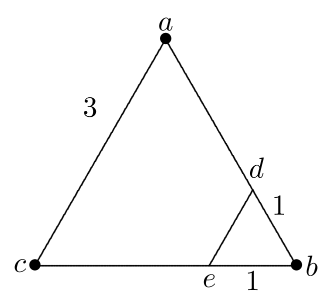
De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1.1 De problemen.

1. $(1+x^2)(1-x^3)$ is gelijk aan

(A) $1-x^5$	(B) $1-x^6$	(C) $1+x^2-x^3$
(D) $1+x^2-x^3-x^5$	(E) $1+x^2-x^3-x^6$	

2. Uit een gelijkzijdige driehoek abc met zijden van lengte 3, snijdt men een driehoekige punt weg zodanig dat de zijden $[db]$ en $[eb]$ lengte 1 hebben (zie figuur).
De omtrek van de overblijvende vierhoek $adec$ is dan



(A) 6	(B) $6,5$	(C) 7	(D) $7,5$	(E) 8

3. Hoeveel priemgetallen kleiner dan 100 hebben 7 als cijfer van de eenheden (wanneer voorgesteld in het tientallig stelsel)?

(A) 4	(B) 5	(C) 6	(D) 7	(E) 8

4. $$\frac{2^1+2^0+2^{-1}}{2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}}$$
is gelijk aan

(A) 6	(B) 8	(C) $\frac{31}{2}$	(D) 24	(E) 512

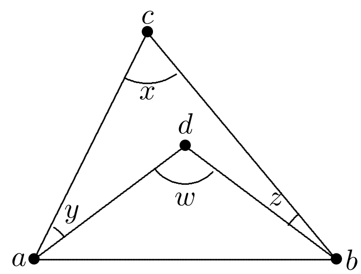
[0]©Committee on the American Mathematics Competitions. Mathematical Association of America, 1987

5. Bij een reeks metingen noteerde een student de exacte relatieve frequentie verdeling (in %) zoals in de rechterkolom weergegeven. Hij verwaarloosde echter het totaal aantal metingen (N) te noteren. Wat is de kleinst mogelijke waarde van N?

meetresultaat	relatieve frequentie in %
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5
	100

(A) 5 (B) 8 (C) 16 (D) 25 (E) 50

6. In de driehoek abc (zie figuur) is d een inwendig punt en zijn x, y, z en w de waarden van de hoeken in zestigdelige graden. Vind x in termen van y, z en w.

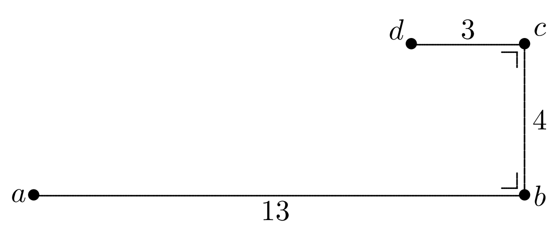


(A) $w - y - z$ (B) $w - 2y - 2z$ (C) $180 - w - y - z$
(D) $2w - y - z$ (E) $180 - w + y + z$

7. Welk van de vier grootheden a, b, c of d is het grootst als je weet dat $a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4$

(A) a (B) b (C) c
(D) d (E) geen enkele is steeds de grootste

8. De som van de afstanden $|ad|$ en $|bd|$ in de figuur is



(A) tussen 10 en 11 (B) 12 (C) tussen 15 en 16
(D) tussen 16 en 17 (E) 17

9. In een rekenkundige rij zijn a, x, b en $2x$ de eerste vier termen. Wat is de verhouding van a tot b?

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{2}{3}$	(E) 2

10. Hoeveel geordende drietallen (a, b, c) bestaande uit van nul verschillende reële getallen hebben de eigenschap dat elk van de drie getallen het produkt van de overige twee is?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

11. Als c een constante is, dan heeft het stelsel

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$$

een oplossing (x, y) in het eerste kwadrant als en slechts als

(A) $c = -1$	(B) $c > -1$	(C) $c < \frac{3}{2}$
(D) $0 < c < \frac{3}{2}$	(E) $-1 < c < \frac{3}{2}$	

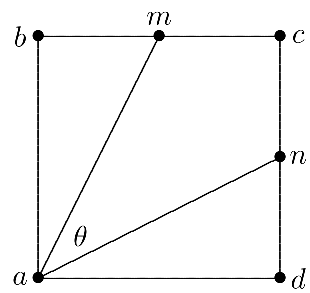
12. Op kantoor bezorgt een diensthoofd zijn secretaresse op verschillende tijdstippen van de dag een te typen brief. Dit doet hij/zij door deze brief telkens bovenaan op de nog te verwerken stapel van briefwisseling bij zijn secretaresse te leggen. Telkens ze tijd heeft, neemt de secretaresse de bovenste brief van deze stapel om deze te typen. In totaal bezorgt het diensthoofd 5 brieven in de volgorde 1-2-3-4-5 aan zijn secretaresse.
Welke van de volgende volgordes kan onmogelijk de volgorde zijn waarin deze brieven getypt worden?

(A) $1-2-3-4-5$	(B) $2-4-3-5-1$	(C) $3-2-4-1-5$
(D) $4-5-2-3-1$	(E) $5-4-3-2-1$	

13. Men maakt een rolletje papier (voor gebruik in kasregisters e.d.) door een lange strook papier van 5 cm breed 600 keren rond een kartonnen buisje van 2cm diameter te winden. Zo wordt een rolletje met een diameter van 10 cm bekomen. Hoe lang is die strook papier bij benadering in meters? (druk uit dat het papier 600 concentrische cirkels beschrijft met een diameter die uniform varieert van 2 cm tot 10 cm)

(A) 36π	(B) 45π	(C) 60π	(D) 27π	(E) 90π

14. $abcd$ is een vierkant; m en n zijn de middelpunten van resp. $[bc]$ en $[cd]$. Dan is $\sin\theta$ gelijk aan



(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$	(B) $\frac{3}{5}$	(C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
(D) $\frac{4}{3}$	(E) geen van deze waarden	

15. Wat is $x^2 + y^2$ als je weet dat (x, y) een oplossing is van het stelsel

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$$

(A) 13	(B) $\frac{1173}{32}$	(C) 55	(D) 69	(E) 81

16. Een specialist in geheimschrift ontwerpt de volgende de methode om de positieve getallen te coderen. Eerst schrijft men het getal in het talstelsel met grondtal 5; daarna legt men een bijectief verband tussen de verschillende cijfers die voorkomen in getallen voorgesteld in het talstelsel met grondtal 5 en de elementen van de verzameling {V,W,X,Y,Z}.
Gebruikmakend van dit codeersysteem vindt deze specialist dat drie opeenvolgende getallen in stijgende volgorde gecodeerd zijn als VYZ, VYX en VVW. Geef de uitdrukking in het 10-tallig stelsel voor het getal dat als XYZ gecodeerd is.

(A) 48	(B) 71	(C) 82	(D) 108	(E) 113

17. In de Vlaamse Wiskunde Olympiade behaalden Jan en Piet samen evenveel punten als An en Karel samen. Zo men de punten van Jan en Karel had omgewisseld, dan zou het gezamenlijk resultaat van An en Karel groter zijn geweest dan het resultaat van beide andere samen. Verder is het zo, dat Piet meer punten behaalde dan Jan en Karel samen.
Bepaal de rangorde - van hoog naar laag - waarin deze 4 deelnemers aan VWO scoorden. (Merk op dat de resultaten niet negatief kunnen zijn).

(A) Piet, An, Karel, Jan	(B) Piet, An, Jan, Karel
(C) Piet, Karel, Jan, An	(D) An, Piet, Karel, Jan
(E) An, Piet, Jan, Karel	

18. Om een boekenrek volledig te vullen heeft men A algebraboeken (allemaal even dik) en H meetkundeboeken (ook alle even dik, maar dikker dan de algebraboeken) nodig. Dit rek kon men evengoed vullen met S algebraboeken en M meetkundeboeken. Men kon het zelfs helemaal vullen met E algebraboeken alleen. Onderstel dat A, H, S, M en E verschillende positieve getallen zijn, dan is E gelijk aan

(A) $\dfrac{AM+SH}{M+H}$	(B) $\dfrac{AM^2+SH^2}{M^2+H^2}$
(C) $\dfrac{AH-SM}{M-H}$	(D) $\dfrac{AM-SH}{M-H}$
(E) $\dfrac{AM^2-SH^2}{M^2-H^2}$	

19. Welk van de volgende getallen benadert het best $\sqrt{65}-\sqrt{63}$?

(A) $0,12$	(B) $0,13$	(C) $0,14$	(D) $0,15$	(E) $0,16$

20. Hoeveel is

$$\log_{10}(\operatorname{tg} 1^\circ)+\log_{10}(\operatorname{tg} 2^\circ)+\log_{10}(\operatorname{tg} 3^\circ)+\ldots+\log_{10}(\operatorname{tg} 88^\circ)+\log_{10}(\operatorname{tg} 89^\circ)$$

(A) 0	(B) $\frac{1}{2}\log_{10}(\frac{\sqrt{3}}{2})$	(C) $\frac{1}{2}\log_{10} 2$
(D) 1	(E) geen van de vorige	

21. Men kan een vierkant op twee natuurlijke wijzen in een gegeven gelijkbenige rechthoekige driehoek inschrijven. Als je het doet zoals getoond in figuur 1 dan vind je 441 cm^2 als oppervlakte voor het vierkant. Geef de oppervlakte (in cm^2) van het vierkant dat in dezelfde driehoek ingeschreven wordt zoals getoond in figuur 2.

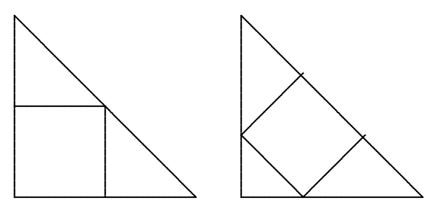


Fig.1 Fig.2

(A) 378	(B) 392	(C) 400	(D) 441	(E) 484

22. Toen het meer dichtvroor dreef er een bal op het water. Men haalde later de bal uit het ijs (zonder het ijs te breken). De opening die in het ijs bleef had een doorsnede van 24 cm bovenaan en was 8 cm diep. Vind de straal van deze bal (in cm).

(A) 8	(B) 12	(C) 13	(D) $8\sqrt{3}$	(E) $6\sqrt{6}$

23. Onderstel dat p een priemgetal is en dat allebei de nulpunten van de vergelijking $x^2 + px - 444p = 0$ gehele getallen zijn. Wat weet je dan van p?

(A) $1 < p \leq 11$	(B) $11 < p \leq 21$	(C) $21 < p \leq 31$
(D) $31 < p \leq 41$	(E) $41 < p \leq 51$	

24. Hoeveel veeltermfuncties f van graad ≥ 1 voldoen aan

$$f(x^2) = (f(x))^2 = f(f(x))?$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) eindig veel maar dan 2	(E) oneindig veel	

25. abc is een driehoek: $a = (0, 0)$, $b = (36, 15)$ en de coördinaten van c zijn allebei gehele getallen. Wat is de kleinst mogelijke oppervlakte die deze driehoek kan hebben?

(A) $\frac{1}{2}$	(B) 1	(C) $\frac{3}{2}$
(D) $\frac{13}{2}$	(E) er is geen kleinst mogelijke oppervlakte	

26. Men splitst lukraak het getal 2,5 in twee niet negatieven reële getallen; bvb. in 2,143 en 0,357, of ook in $\sqrt{3}$ en $2,5 - \sqrt{3}$.
Daarna rondt men elk getal af tot op het dichtsbij zijnde geheel getal. (bvb. tot op 2 en 0 in het eerste hierboven, en 2 en 1 in het tweede) Wat is de kans dat de som van deze twee gehele getallen 3 is?

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{2}{5}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{3}{5}$	(E) $\frac{3}{4}$

27. Men snijdt een blok (kubus) kaas ($K = \{(x, y, z)|0 \leq x, y, z \leq 1\}$) langs de vlakken x=y, y=z en z=x. Hoeveel stukken verkrijgt men dan? (Men verplaatst geen kaas *vóór* dat alle snijdingen gemaakt zijn!)

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

28. a, b, c en d zijn reële getallen. Onderstel dat alle wortels van de vergelijking $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ complexe getallen zijn die op een cirkel liggen in het complexe vlak met middelpunt $0 + 0i$ (de oorsprong) en straal 1. Dan is de som van de inversen van deze wortels

(A) a	(B) b	(C) c	(D) $-a$	(E) $-b$

29. Beschouw de rij getallen gedefinieerd door:

$$t_1 = 1$$

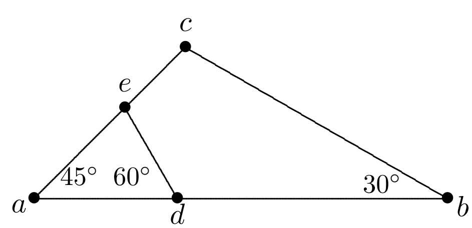
en voor $n > 1$

$$\begin{cases} t_n = 1 + t_{(n/2)} & \text{als n even is} \\ t_n = \frac{1}{t_{n-1}} & \text{als n oneven is} \end{cases}$$

Als je weet dat $t_n = \frac{19}{87}$. Wat is dan de som van de cijfers van n?

(A) 15	(B) 17	(C) 19	(D) 21	(E) 23

30. In de figuur van driehoek abc is de hoek in a 45 graden en die in b 30 graden. Neem een punt d op $[ab]$ zo dat de hoek $\widehat{ade}$ 60 graden meet. Aldus verdeelt de rechte de driehoek abc in twee stukken. Onderstel nu dat deze twee stukken eenzelfde oppervlakte hebben. (Pas op: betrouw niet op de figuur; misschien ligt e op $[cb]$ i.p.v. op $[ac]$.)



Wat is de verhouding $\dfrac{|ad|}{|ab|}$?

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	(B) $\dfrac{2}{(2+\sqrt{2})}$	(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
(D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$	(E) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}$	

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1987-1988 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat steeds uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt: een deelnemer start met 30 punten, per goed antwoord krijgt hij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend.

1.1 De problemen.

1. Voor hoeveel $x-$waarden behorende tot $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ is

$$\frac{2x^2 - 13x + 15}{x - 3}$$

negatief of nul?

A. 1 *B.* 2 *C.* 3 *D.* 4 *E.* 5

---

2. Hoeveel getallen met vier cijfers moet men ten minste nemen om zeker te zijn dat er twee dezelfde som van de cijfers hebben?

A. 36 *B.* 37 *C.* 40 *D.* 41 *E.* geen van de vorige

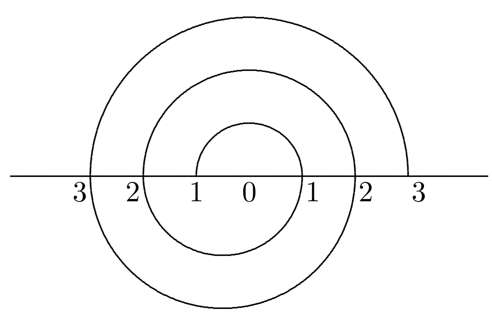
---

3. 2^{1988} eindigt op

A. 1 *B.* 2 *C.* 4 *D.* 6 *E.* 8

---

4. Men vormt een spiraal door het continu aaneensluiten van halve cirkels, beginnend met een halve cirkel met diameter 2, vervolgens diameter 3, diameter 4,... . Hoe lang is de spiraal gevormd door 100 zulke halve cirkels?



A. 2525π *B.* 2550π *C.* 2575π *D.* 5100π *E.* 5150π

---

5. Laat $\vec{u}$ en $\vec{v}$ eenheidsvectoren zijn in het vlak. Dan is $\vec{u} + \vec{v}$ een eenheidsvector als en slechts als

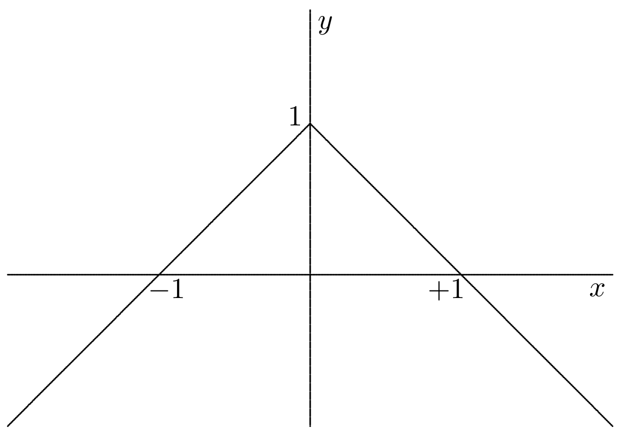
A. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *B.* $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}$ *C.* $\vec{u}.\vec{v} = 1$ *D.* $\vec{u}.\vec{v} = -1$ *E.* altijd

6. Gegeven zijn de funkties f en g in $\mathbb{R}$ met $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $g(x) = \sqrt{x-1}$. Het domein van de samengestelde funktie $f \circ g$ is dan

$A.\quad \{1\} \quad B.\quad [-1,1] \quad C.\quad [1,2] \quad D.\quad [0,1] \quad E.\quad [1,+\infty[$

---

7. Ziehier de grafische voorstelling van een relatie in $\mathbb{R}$.



Het voorschrift van deze relatie is

$A.\quad x+|y|=1 \quad B.\quad |x|+y=1 \quad C.\quad |x|+|y|=1 \quad D.\quad |x+y|=1$
$E.\quad |x|-y=1$

---

8. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\{\sin x, \cos x\}$ (d.w.z. die x afbeeldt op het grootste van de twee getallen $\sin x$ en $\cos x$). Dan is $f(\mathbb{R})$ gelijk aan

$A.\quad \mathbb{R} \quad B.\quad [-1,1] \quad C.\quad [-\frac{\sqrt{2}}{2},1] \quad D.\quad [0,1] \quad E.\quad \{1\}$

---

9. Gegeven de veeltermen x^2+1, x^3+1, x^4+1, x^5+1, x^6+1. Nnewline Hoeveel van deze veeltermen kunnen worden ontbonden als produkt van veeltermen met lagere graad en met reële coëfficiënten?

$A.\quad 0 \qquad B.\quad 1 \qquad C.\quad 2 \qquad D.\quad 3 \qquad E.\quad 4$

---

10. Als $a \in \mathbb{R}, a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$, dan geldt

$$a + a^2 + a^3 + ... + a^n =$$

$A.\quad \frac{a-a^{n+1}}{1-a} \quad B.\quad \frac{1-a^n}{1-a} \quad C.\quad \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad D.\quad \frac{a-a^n}{1-a} \quad E.\quad \frac{a^n-a}{1-a}$

11. Hoeveel getallen kleiner dan 100 zijn het produkt van een priemgetal met het kwadraat van een ander priemgetal?

A. 4 *B.* 5 *C.* 15 *D.* 17 *E.* 44

12. Wat weet je van een reëel getal x dat voldoet aan

$$\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x \ ?$$

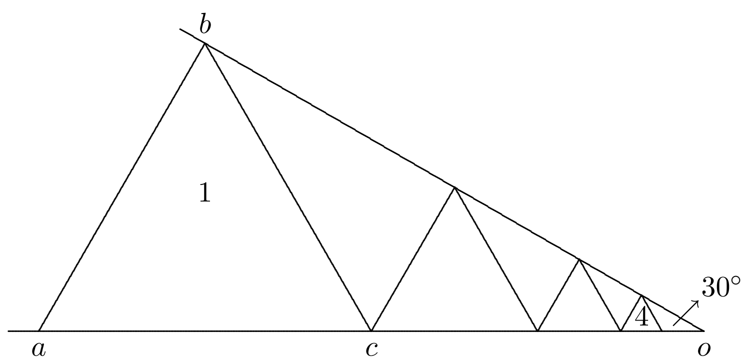
A. x is willekeurig *B.* $x = 1$ *C.* $x = 0$ *D.* $x \leq 0$ *E.* $x \leq 1$

13. De unie (vereniging) van alle intervallen in $\mathbb{R}$ van de vorm

$$[1 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{2}{n}] \text{ met } n \in \mathbb{N}_0 \text{ is}$$

A. $[1,5]$ *B.* $]1,5[$ *C.* $[\frac{3}{2},4]$ *D.* $[2,3]$ *E.* $]1,5]$

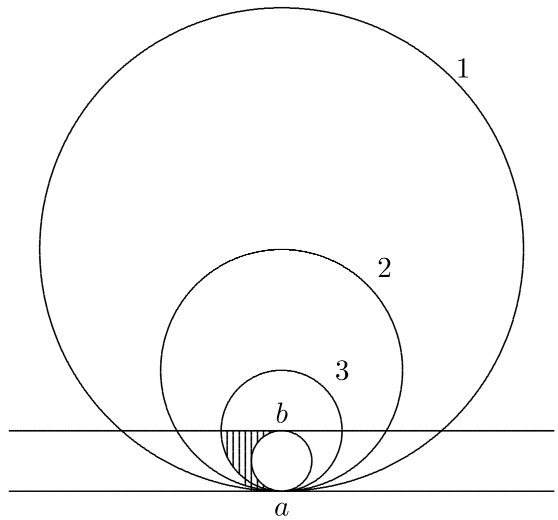
14. In het binnengebied van een sector van 30° tekent men een eerste gelijkzijdige driehoek abc met $ab \perp ob$. Volgens hetzelfde procédé tekent men nog drie driehoeken er bij.



De verhouding van de oppervlakte van driehoek 4 tot de oppervlakte van driehoek 1 is

A. $\frac{1}{8}$ *B.* $\frac{1}{16}$ *C.* $\frac{1}{32}$ *D.* $\frac{1}{64}$ *E.* $\frac{1}{128}$

15. Vier cirkels raken elkaar in een punt a zoals aangegeven op de figuur. De straal van de grootste cirkel is R en elke kleinere cirkel gaat door het middelpunt van de juist grotere. In b (het diametraal tegengesteld punt van a) trekt men een raaklijn aan de vierde cirkel.



Hoe groot is de gearceerde oppervlakte?

$A.\ \dfrac{\pi R^2}{16}$ $B.\ \dfrac{\pi R^2}{64}$ $C.\ \dfrac{3\pi R^2}{64}$ $D.\ \dfrac{3\pi R^2}{128}$ $E.\ \dfrac{\pi R^2}{128}$

16. De ribben van een kubus worden met 25% verlengd. Met hoeveel % (eventueel afronden op 1% na) wordt de inhoud vergroot?

A. 25% *B.* 75% *C.* 95% *D.* 125% *E.* 625%

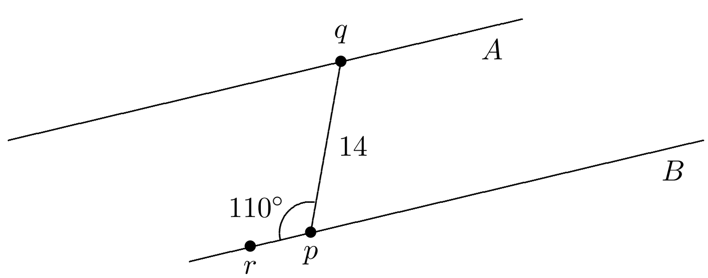
---

17. Als $f(m,n) = f(m+1, n-1)$, met $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ en $f(m,0) = m$, dan is $f(101, 11) =$

A. 90 *B.* 102 *C.* 111 *D.* 112 *E.* 122

---

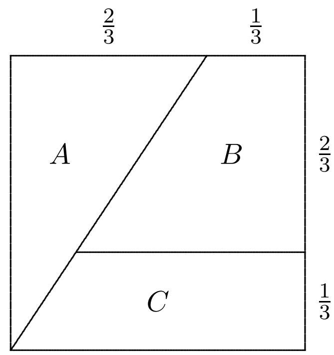
18. Gegeven twee evenwijdige rechten A en B en punten p, q en r op deze rechten zodanig dat $\| pq \| = 14$ en $\widehat{rpq} = 110°$.



Welke is de afstand tussen beide evenwijdige rechten?

$A.\ 14\cos 110°$ $B.\ 14\sin 110°$ $C.\ 14\cos 70°$ $D.\ \dfrac{14}{\cos 110°}$ $E.\ \dfrac{14}{\sin 110°}$

19. De punten x en y worden genomen zo dat ze de zijde van een vierkant verdelen in een $\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{1}{3}$ verhouding (zie figuur).



Dan geldt voor de oppervlakten A, B en C

A. $C < A < B$ *B.* $A < C < B$ *C.* $B < C < A$
D. $C < B < A$ *E.* $A = B = C$

20. Zij $k \in \mathbb{Z}$ en $M = \sqrt{(k^2+1)(k+1)^2 + k^2}$.
Dan geldt

A. $M \geq k^2$ *B.* $M \leq k^2 + 4$ *C.* M even
D. M oneven *E.* M hoeft niet geheel te zijn

21. Uit $a < b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ volgt

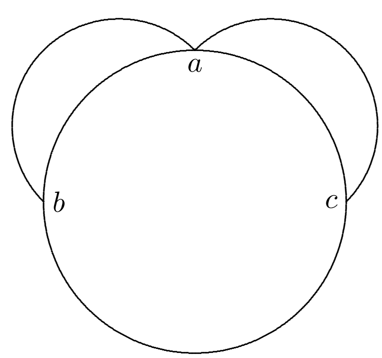
A. $|a| < |b|$ *B.* $a^2 < b^2$ *C.* $a^3 < b^3$ *D.* $a^4 < b^4$ *E.* $\sqrt{|a|} < \sqrt{|b|}$

22. Wat is het minimaal aantal stompe hoeken van een convexe veelhoek met n zijden ($n \geq 5$)?

A. 0 *B.* 1 *C.* $n-3$ *D.* $n-2$ *E.* $n-1$

23. Hoe groot is de oppervlakte van de beide oren van "Mickey Mouse", als men weet dat de grote cirkel straal 1 heeft, de rand van de oren halve cirkels zijn, en a het midden is van de halve cirkel bc?

A. 1 *B.* $\frac{\pi}{2}$ *C.* $\frac{\pi}{3}$ *D.* $\frac{\pi}{4}$ *E.* $\pi - 2$



24. Hoeveel verschillende koppels reële getallen behoren tot ten minste 2 van de volgende 3 verzamelingen:

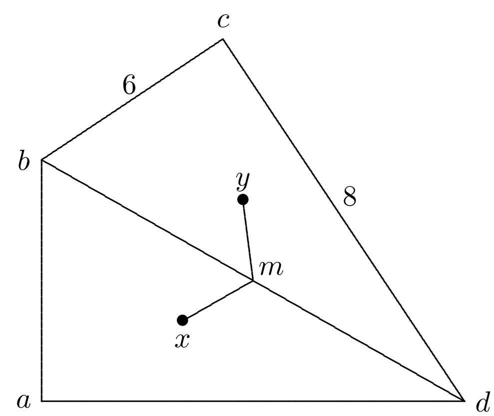
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x - 2\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = (x - 2)^2\}$$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = (x - 2)^3\}$$

A. 1 *B.* 2 *C.* 3 *D.* 4 *E.* meer dan 4

25. In de vierhoek $abcd$ zijn de hoeken $\hat{a}$ en $\hat{c}$ recht en is m het midden van de diagonaal $[bd]$. Verder is x het zwaartepunt van driehoek abd en y het zwaartepunt van driehoek cbd. Hoe groot is de som van de afstanden van x tot m en van m tot y, als je weet dat $\| bc \| = 6$ en $\| cd \| = 8$?



A. $\frac{5}{3}$ *B.* $\frac{9}{3}$ *C.* $\frac{10}{3}$ *D.* $\frac{12}{3}$ *E.* $\frac{15}{3}$

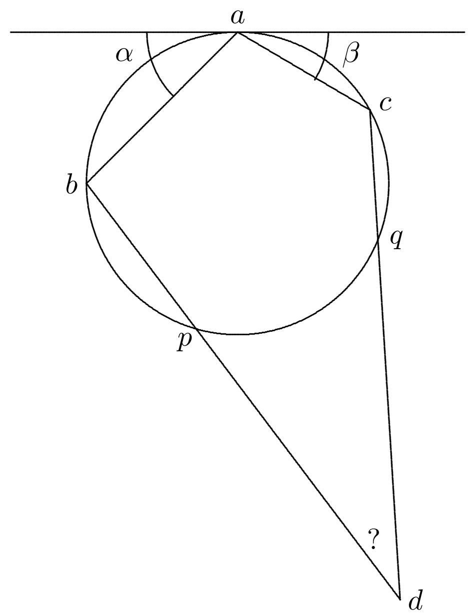
---

26. Als we de bal naar een basketring werpen hebben we succes (als de bal door het net gaat) of hebben we pech. Veronderstel dat we 6 keer werpen. Als de uitspraak ïk heb ten minste 4 keer succes gehad” onwaar is, welke uitspraak is dan wel waar?

A. Ik heb ten minste 3 keer pech gehad.
B. Ik heb ten minste 4 keer pech gehad.
C. Ik heb ten hoogste 2 keer succes gehad.
D. Ik heb ten hoogste 4 keer pech gehad.
E. Ik heb ten hoogste 4 keer succes gehad.

---

27. Door de hoekpunten a, b en c van nevenstaande convexe vierhoek $abdc$ wordt een cirkel geconstrueerd, alsook de raaklijn in a aan de cirkel (d ligt buiten de cirkel). Die raaklijn maakt met ab en ac de hoeken α en β (zie figuur) waarvan de som $80°$ is. Hoe groot is de hoek in d als je weet dat $\widehat{pq}$ een kwart cirkelboog is? (p en q zijn de snijpunten van de cirkel met resp. bd en cd)



A. 30° *B*. 35° *C*. 40° *D*. 45°
E. te weinig gegevens om die hoek te kunnen bepalen

28. De grafieken van $y = ax$ en $y = b - x$ snijden elkaar in het punt (p, q) van het derde kwadrant (dus $p < 0$, $q < 0$). Hieruit volgt dat

$A.\quad p > q \quad B.\quad p = q \quad C.\quad p < q \quad D.\quad ab < 0 \quad E.\quad ab > 0$

---

29. Een aantal jaren geleden werd een internationaal codeersysteem voor boeken ingevoerd. Elk boek krijgt sindsdien een ISBN (International Standard Book Number) toegekend. Zo'n nummer bestaat uit 10 cijfers. Als een ISBN nummer er b.v. als volgt uitziet

$$x_1/x_2x_3/x_4x_5x_6x_7x_8x_9/x_{10}$$

dan is steeds voldaan aan

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i \text{ is een } 11\text{−voud.}$$

Bij het elektronisch doorsturen van een ISBN code zijn storingen opgetreden, waardoor men enkel het volgende met zekerheid juist ontving:

$$0/20/?1?502/7.$$

Hoeveel verschillende ISBN codes zijn nog mogelijk, vertrekkende van dit onvolledig nummer?

$A.\quad 1 \qquad B.\quad 3 \qquad C.\quad 5 \qquad D.\quad 7 \qquad E.\quad 9$

---

30. Hoeveel symmetrievlakken heeft een kubus?

$A.\quad 3 \qquad B.\quad 4 \qquad C.\quad 6 \qquad D.\quad 9 \qquad E.\quad 12$

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1987-1988: Tweede Ronde.

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële ”foreign coordinator” voor de welbekende AHSME-competitie (Annual High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzeproblemen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord.

1.1 De problemen.

1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}=$

$$(A)\quad \sqrt{26} \qquad (B)\quad 2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \qquad (C)\quad 7 \qquad (D)\quad 5\sqrt{2} \qquad (E)\quad 2\sqrt{13}$$

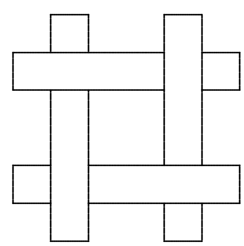
---

2. De driehoeken abc en xyz zijn gelijkvormig; hierbij correspondeert a met x en b met y. Als $|ab| = 3, |bc| = 4$, en $|xy| = 5$, dan is $|yz|$ gelijk aan

$$(A)\quad 3\frac{3}{4} \qquad (B)\quad 6 \qquad (C)\quad 6\frac{1}{4} \qquad (D)\quad 6\frac{2}{3} \qquad (E)\quad 8$$

---

3. Vier rechthoekige stroken papier, elk van lengte 10 en breedte 1, worden plat op een tafel geplaatst zodat ze elkaar loodrecht overlappen zoals getoond in de figuur. Hoe groot is de oppervlakte van de tafel die op deze wijze bedekt wordt?



$$(A)\quad 36 \qquad (B)\quad 40 \qquad (C)\quad 44 \qquad (D)\quad 96 \qquad (E)\quad 100$$

---

4. De richtingscoëfficiënt van de rechte $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ is gelijk aan

$$(A)\quad -\frac{3}{2} \qquad (B)\quad -\frac{2}{3} \qquad (C)\quad \frac{1}{3} \qquad (D)\quad \frac{2}{3} \qquad (E)\quad \frac{3}{2}$$

5. Als b en c constanten zijn en er geldt dat

$$(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$$

dan is c gelijk aan

$$(A)\quad -5 \qquad (B)\quad -3 \qquad (C)\quad -1 \qquad (D)\quad 3 \qquad (E)\quad 5$$

---

6. Een figuur is een parallellogram met gelijke hoeken als en slechts als het een

(A) rechthoek is (B) regelmatige veelhoek is (C) ruit is
(D) vierkant is (E) trapezium is

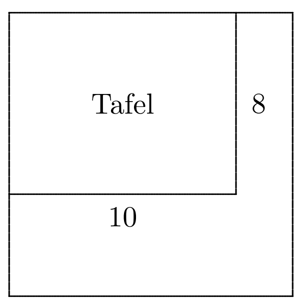
7. Men verstuurt gegevens over een communicatiekanaal in blokken van 512 eenheden. Men kan 120 eenheden doorsturen per seconde. Geef een schatting van de tijd die nodig is om 60 blokken door te sturen.

(A) $0,04$ sec (B) $0,4$ sec (C) 4 sec (D) 4 min (E) 4 uur

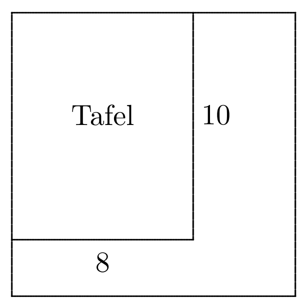
8. Als $\dfrac{b}{a} = 2$ en $\dfrac{c}{b} = 3$, wat is dan de verhouding van $a + b$ tot $b + c$?

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{2}{3}$ (E) $\dfrac{3}{4}$

9. Een tafel (afmetingen 8×10) staat in de hoek van een vierkante kamer, zoals getoond in figuur 1. De eigenaar wil die tafel plaatsen in de positie zoals getoond in figuur 2. De kamer heeft een zijde van lengte S. Wat is de kleinste gehele waarde van S, voor dewelke de tafel in de gewenste positie kan gebracht worden zonder deze te kantelen en/of te demonteren?



Figuur 1



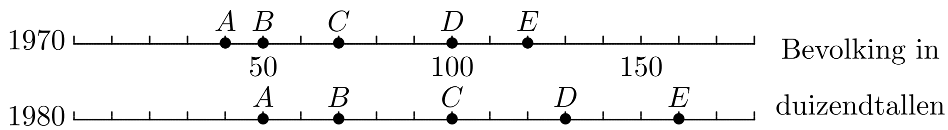
Figuur 2

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

10. Met behulp van een experiment bepaalt men de waarde van een wetenschappelijke constante C op 2,43865 met een fout van ten hoogste $\pm 0,00312$. De onderzoekers wensen een waarde van C aan te kondigen waarin elk cijfer significant is. (Dit wil zeggen, dat, wat C ook is, de aangekondigde waarde correct moet zijn wanneer men C afrondt tot op dat bepaald aantal cijfers.) Geef de meest nauwkeurige waarde die men voor C kan aankondigen.

(A) 2 (B) $2,4$ (C) $2,43$ (D) $2,44$ (E) $2,439$

11. In de figuur hieronder geven de 5 dikke stippen (op elke horizontale lijn) de bevolking aan van de steden A, B, C, D en E in het bijhorende jaar. Welke stad kende de grootste procentuele aangroei van de bevolking in de periode 1970-1980?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

---

12. Men schrijft de getallen 1 t.e.m. 9 op aparte briefjes papier die men daarna in een doos stopt. Jan neemt een van die briefjes lukraak uit de doos en stopt het er terug in. Nu doet Piet hetzelfde. Welk cijfer maakt de grootste kans om het cijfer van de eenheden te zijn van de som van de getallen van Jan en Piet?

(A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) elk cijfer maakt evenveel kans

---

13. Als $\sin x = 3\cos x$ wat is dan $\sin x \cos x$?

(A) 1/6 (B) 1/5 (C) 2/9 (D) 1/4 (E) 3/10

---

14. Men definieert voor elk reëel getal a en voor elk positief geheel getal k

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)...(a-(k-1))}{k(k-1)(k-2)...(2)(1)}.$$

Wat is dan

$$\binom{-\frac{1}{2}}{100} : \binom{\frac{1}{2}}{100} \; ?$$

(A) -199 (B) -197 (C) -1 (D) 197 (E) 199

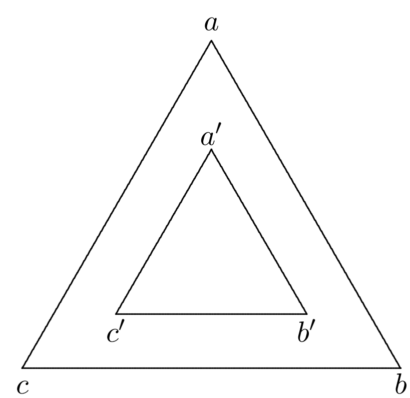
---

15. Als a en b gehele getallen zijn zodat $x^2 - x - 1$ een faktor is van $ax^3 + bx^2 + 1$, dan is b gelijk aan

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

---

16. Driehoeken abc en $a'b'c'$ zijn gelijkzijdige driehoeken met evenwijdige zijden en hetzelfde zwaartepunt (zie figuur). De afstand tussen zijde bc en zijde $b'c'$ is $1/6$ van de de hoogte van $\triangle abc$. Geef de verhouding van de oppervlakte van $\triangle a'b'c'$ tot de oppervlakte van $\triangle abc$.



(A) $\dfrac{1}{36}$ (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\dfrac{9+8\sqrt{3}}{36}$

---

17. Vind $x + y$ als je weet dat $|x| + x + y = 10$ en $x + |y| - y = 12$.

(A) -2 (B) 2 (C) $\dfrac{18}{5}$ (D) $\dfrac{22}{3}$ (E) 22

---

18. Als slot van een professioneel bowling kampioenschap, bekampen de top 5 spelers elkaar in een eindronde. Eerst speelt nr.5 tegen nr.4. De verliezer krijgt de vijfde prijs en de winnaar bekampt nr.3 in een nieuw spel. De verliezer van dit spel krijgt de vierde prijs, terwijl de winnaar tegen nr.2 speelt. Nu bekomt de verliezer de derde prijs en mag de winnaar het opnemen tegen nr.1. De winnaar van deze kamp krijgt de eerste prijs en de verliezer krijgt de tweede prijs. In hoeveel verschillende volgordes kunnen de spelers nr.1 t.e.m. nr.5 de prijzen winnen?

(A) 10 (B) 16 (C) 24 (D) 120 (E) geen van de vorige

---

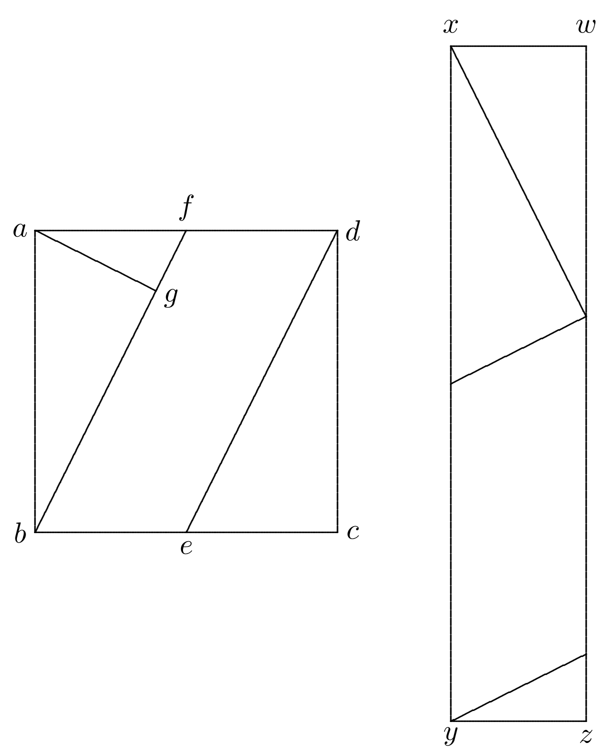
19. Vereenvoudig

$$\frac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}.$$

(A) $a^2x^2+b^2y^2$ (B) $(ax+by)^2$ (C) $(ax+by)(bx+ay)$
(D) $2(a^2x^2+b^2y^2)$ (E) $(bx+ay)^2$

---

20. In een van de bijgaande figuren wordt een vierkant met zijde 2 in 4 stukken verdeeld, zodat de punten e en f de middelpunten van overstaande zijden zijn en zodat ag loodrecht staat op bf. Deze 4 stukken worden daarna terug geassembleerd tot een rechthoek, zoals getoond in de andere figuur. Geef de verhouding van de lengte tot de breedte van deze rechthoek, m.a.w. $|xy|/|yz|$.



(A) 4 (B) $1+2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$ (E) 5

---

21. Het complex getal z voldoet aan $z + |z| = 2 + 8i$. Wat is dan $|z|^2$? (Opmerking: als $z = a + bi$, dan is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.)

(A) 68 (B) 100 (C) 169 (D) 208 (E) 289

---

22. Voor hoeveel gehele getallen x bestaat er een driehoek met zijden van lengte 10, 24 en x, waarvan alle hoeken scherp zijn?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) meer dan 7

---

23. De zes ribben van een tetraeder (viervlak) $abcd$ hebben lengte 7, 13, 18, 27, 36 en 41. Als je weet dat de lengte van de ribbe $[ab]$ 41 is, wat is dan de lengte van de ribbe $[cd]$?

(A) 7 (B) 13 (C) 18 (D) 27 (E) 36

---

24. Een gelijkbenig trapezium is omschreven aan een cirkel. De lengte van de grote basis van dit trapezium is 16 terwijl één van de basishoeken gelijk is aan Bgsin(0,8) (of Arcsin(0,8)). Vind de oppervlakte van dit trapezium.

(A) 72 (B) 75 (C) 80 (D) 90 (E) niet ondubbelzinnig bepaald

---

25. X, Y en Z zijn twee aan twee onderling disjunkte verzamelingen van mensen. De gemiddelde leeftijd van de mensen in de verzamelingen X, Y, Z, $X \cup Y$, $X \cup Z$ en $Y \cup Z$ wordt in onderstaande tabel gegeven:

verzameling	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
gemidd. leeftijd	37	23	41	29	39,5	33

Vind nu de gemiddelde leeftijd van de mensen in de verzameling $X \cup Y \cup Z$.

(A) 33 (B) 33,5 (C) 33,66... (D) 33,833... (E) 34

---

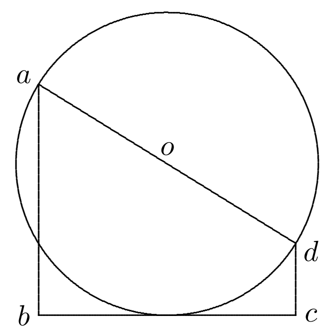
26. Onderstel dat p en q positieve getallen zijn, waarvoor geldt dat

$$\log_9(p) = \log_{12}(q) = \log_{16}(p+q) \ .$$

Vind nu de waarde van $\frac{q}{p}$.

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ (E) $\frac{16}{9}$

27. In de figuur hiernaast geldt: $ab \perp bc$, $bc \perp cd$ en bc raakt aan de cirkel met middelpunt o en diameter ad . In welk van de volgende gevallen is de oppervlakte van $abcd$ een geheel getal?



(A) $|ab| = 3,\ |cd| = 1$ (B) $|ab| = 5,\ |cd| = 2$ (C) $|ab| = 7,\ |cd| = 3$
(D) $|ab| = 9,\ |cd| = 4$ (E) $|ab| = 11,\ |cd| = 5$

28. Bij eenmaal opgooien van een vervalst muntstuk is p de kans voor het bekomen van kop. w is de kans dat je precies 3 keer kop gooit in 5 onafhankelijke worpen. Als $w = \dfrac{144}{625}$, dan geldt :

(A) $p = \dfrac{2}{5}$

(B) $p = \dfrac{3}{5}$

(C) p groter dan $\dfrac{3}{5}$

(D) p niet ondubbelzinnig bepaald

(E) er is geen waarde voor p zodat $w = \dfrac{144}{625}$

29. In een grafiek wordt voor drie van je vrienden het gewicht (y) uitgezet in funktie van de lengte (x). Zo bekom je de punten (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3). Je weet dat $x_1 < x_2 < x_3$ en dat $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$. Welk van de volgende waarden geeft dan de richtingscoefficiënt weer van de rechte die het best deze drie punten volgt? ("Het best volgt" betekent dat de som van de kwadraten van de vertikale afstanden (m.a.w. de afstanden in de richting van de y-as) van de gegeven punten tot die rechte kleiner is dan voor om het even welke andere rechte.)

(A) $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

(B) $\dfrac{(y_2 - y_1) - (y_3 - y_2)}{x_3 - x_1}$

(C) $\dfrac{2y_3 - y_1 - y_2}{2x_3 - x_1 - x_2}$

(D) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

(E) geen van de vorige

---

30. Beschouw de funktie $f(x) = 4x - x^2$. Voor een gegeven x_0 kan men een rij definiëren door $x_n = f(x_{n-1})$ (dit voor alle n ≥ 1). Voor hoeveel reële getallen x_0 zal de rij $x_0, x_1, x_2, ...$ slechts een eindig aantal verschillende termen bevatten?

(A) 0 (B) 1 of 2 (C) 3, 4, 5, of 6
(D) meer dan 6 maar eindig veel (E) oneindig veel

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1988-1989 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt: een deelnemer start met 30 punten, per goed antwoord krijgt hij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend.

1.1 De problemen.

1. Welke van de volgende afbeeldingen f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is geen bijectie?

$(A.)\quad f(x) = x + 1 \quad (B.)\quad f(x) = 2x \quad (C.)\quad f(x) = -x \quad (D.)\quad f(x) = x^2 \quad (E.)\quad f(x) = x^3$

---

2. Als $f(x) = 2^x$, dan is $f(x + 2)$ gelijk aan

$(A.)\quad 4 \quad (B.)\quad f(x) + 2 \quad (C.)\quad f(x) + 4 \quad (D.)\quad 2f(x) \quad (E.)\quad 4f(x)$

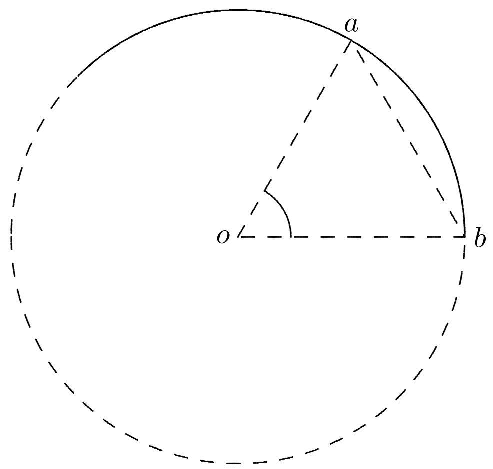
---

3. De voorzitter van een fietsclub is bijgelovig: hij weigert het cijfer 8 te zien in de nummers van de lidkaarten. Hoeveel nummers van 3 cijfers kan de secretaris vormen zonder het cijfer 8 te gebruiken? (de eerste drie nummers zijn 000, 001, 002)

$(A.)\quad 700 \quad (B.)\quad 720 \quad (C.)\quad 729 \quad (D.)\quad 730 \quad (E.)\quad 888$

---

4. In de cirkel met middelpunt o is α een hoek gelegen in het interval $]0°, 135°]$. Noem α_1 de waarde van α waarvoor de omtrek van Δoab maximaal is en α_2 de waarde van α waarvoor de oppervlakte van Δoab maximaal is.



Dan is

$(A.)$	$\alpha_1 = 60°$ en $\alpha_2 = 60°$	$(B.)$	$\alpha_1 = 90°$ en $\alpha_2 = 90°$
$(C.)$	$\alpha_1 = 135°$ en $\alpha_2 = 135°$	$(D.)$	$\alpha_1 = 90°$ en $\alpha_2 = 135°$
$(E.)$	$\alpha_1 = 135°$ en $\alpha_2 = 90°$		

---

5. r1 vr5 Als we beide getallen acht in 8^8 met twee vermenigvuldigen, dan wordt dit getal zelf vermenigvuldigd met

$(A.)$ 2^2 $(B.)$ 2^6 $(C.)$ 2^{16} $(D.)$ 2^{32} $(E.)$ 2^{40}

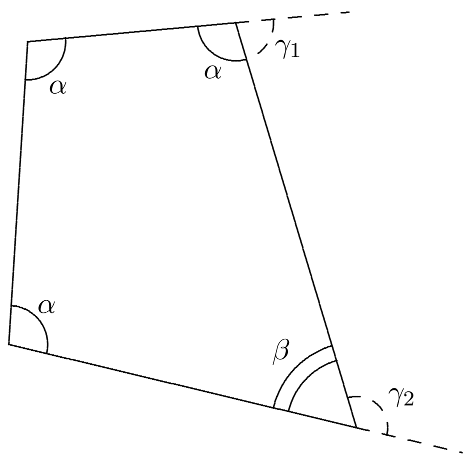
---

6. De negatie van $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < x^4$ is:

$(A.)$	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x^4$	$(B.)$	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x^4$	$(C.)$	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x^4$
$(D.)$	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x^4$	$(E.)$	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x^4$		

---

7. In de onderstaande convexe vierhoek geldt



$(A.)$	$\gamma_2 = 360° - 3\gamma_1$	$(B.)$	$\gamma_2 = 90° + \gamma_1$	$(C.)$	$\gamma_2 = 90° - \gamma_1$
$(D.)$	$\gamma_2 = 360° - \gamma_1$	$(E.)$	$\gamma_2 = 180° - \gamma_1$		

---

8. Een functie f is even en periodiek met periode 2; bovendien geldt dat

$$f(x) = x \text{ als } x \in [0, 1] \ .$$

Bepaal $f(-3.14)$.

$(A.)$ -3.14 $(B.)$ -0.86 $(C.)$ -0.14 $(D.)$ 0.14 $(E.)$ 0.86

---

9. Als de reële getallen x en y voldoen aan de betrekking

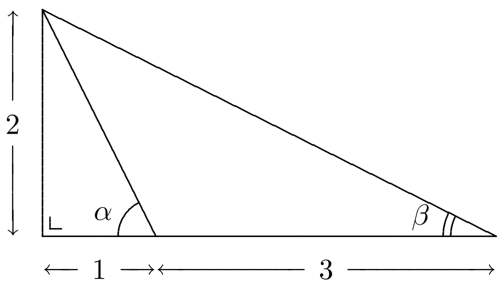
$$2x + y = 3$$

dan is de minimumwaarde van $x^2 + y^2$ gelijk aan

$$(A.)\quad 0 \quad (B.)\quad 2 \quad (C.)\quad \frac{9}{5} \quad (D.)\quad \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (E.)\quad \frac{6}{5}$$

---

10. Hoe groot is $\alpha + \beta$?



(A.) $80° < \alpha + \beta \leq 85°$ (B.) $85° < \alpha + \beta \leq 90°$
(C.) $90° < \alpha + \beta \leq 95°$ (D.) $95° < \alpha + \beta \leq 100°$
(E.) geen van de vorige

11.

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}) + ...$$

$$... + (\frac{1}{80} + \frac{2}{80} + \frac{3}{80} + ... + \frac{79}{80}) =$$

(A.) 1560 (B.) 1580 (C.) 3120 (D.) 3160 (E.) geen van de vorige

---

12. Het getal G is gelijk aan het produkt van alle gehele getallen van 100 tot en met 200. Als we G schrijven als een produkt van priemgetallen, hoeveel factoren 5 komen er dan voor in dat produkt?

(A.) 20 (B.) 21 (C.) 24 (D.) 26 (E.) 27

---

13. Zij $k \in]0,1[$ en zij $x_1 = \cos\alpha$ een oplossing van $4x^3 - 3x - k = 0$. De andere oplossingen zijn

$$
\begin{array}{ll}
(A.) & x_2 = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \\
(B.) & x_2 = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \\
(C.) & x_2 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \\
(D.) & x_2 = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \\
(E.) & x_2 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})
\end{array}
$$

---

14. Het stelsel

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x^2 - y^2 & = & 0 \\
(x-a)^2 + y^2 & = & 1
\end{array}
\right.
$$

(met a als parameter) heeft precies drie oplossingen $(x, y) \in \mathbb{R}2$

$(A.)$ voor geen enkele $a \in \mathbb{R}$
$(B.)$ voor juist één reële waarde van a
$(C.)$ voor juist twee reële waarden van a
$(D.)$ voor een eindig aantal (groter dan twee) reële waarden van a
$(E.)$ voor oneindig veel reële waarden van a

---

15. De middelpunten van de zijvlakken van een kubus zijn de hoekpunten van een regelmatig achtvlak. Welk is de verhouding van de twee inhouden?

$(A.)$ $\frac{1}{8}$ $(B.)$ $\frac{1}{6}$ $(C.)$ $\frac{1}{4}$ $(D.)$ $\frac{1}{3}$ $(E.)$ $\frac{1}{2}$

---

16. Zij $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{17} + x^{16} + x^{15} + ... + x^2 + x$. Dan geldt de volgende bewering

$(A.)$ f neemt alleen waarden aan in $[0, 1[$
$(B.)$ f neemt alle waarden aan in $[0, 17]$
$(C.)$ f wordt nooit groter dan $\frac{1}{2}$
$(D.)$ f neemt alle reële waarden aan
$(E.)$ f neemt alle positieve reële waarden aan

---

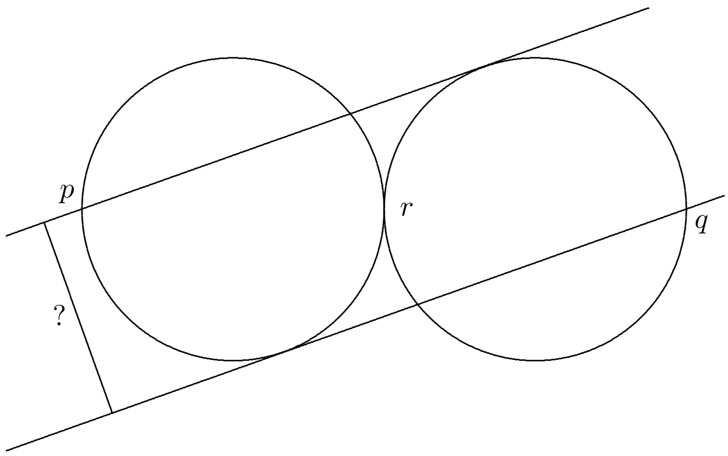
17. Het aantal oplossingen (x, y) van de vergelijking

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

met $x, y \in \mathbb{N}_0$, is gelijk aan

$(A.)$ 1 $(B.)$ 5 $(C.)$ 9 $(D.)$ 10 $(E.)$ oneindig veel

18. pr en rq zijn de middellijnen van twee cirkels met straal 1, die elkaar raken in r. Door p en door q wordt een raaklijn getekend aan de andere cirkel zoals op de figuur. Welk is de afstand tussen die twee raaklijnen?



(*A.*) $\frac{5}{4}$ (*B.*) 1.3 (*C.*) $\frac{4}{3}$ (*D.*) $\sqrt{2}$ (*E.*) $\frac{3}{2}$

---

19. Een onderzoeksrechter ondervraagt 4 verdachten van een diefstal:

- “Chris heeft het gedaan”, zegt Bert
- “Ik ben onschuldig”, zegt Dirk
- “Als Bert zegt dat ik het gedaan heb, dan liegt hij”, zegt Chris
- “Het is Bert”, zegt Andries

Als je weet dat precies één van de vier de diefstal heeft gepleegd en dat ook precies één van de vier gelogen heeft, wie is dan de dief?

(*A.*) Andries (*B.*) Bert (*C.*) Chris (*D.*) Dirk
(*E.*) niet af te leiden uit de gegevens

---

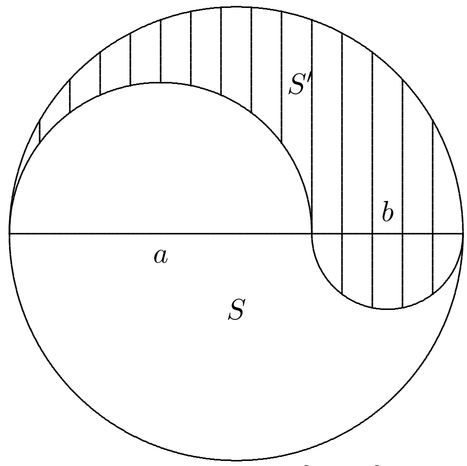
20. $\lfloor x \rfloor$ duidt het grootste geheel getal aan dat kleiner is dan of gelijk aan x. Bijvoorbeeld: $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \frac{13}{2} \rfloor = 6$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
Als

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{3} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = 2n$$

dan is de waarde van n

(*A.*) 80 (*B.*) 81 (*C.*) 85 (*D.*) 90 (*E.*) 95

21. Een diameter van een cirkel met straal R wordt verdeeld in twee stukken met lengten a en b. Met a en b respectievelijk als diameter vormen we halve cirkels aan weerskanten van de gegeven diameter (zie figuur).
Voor de twee ontstane oppervlakten S en S' geldt dat $\frac{S}{S'}$ gelijk is aan



(A.) $\frac{a}{b}$ (B.) $\frac{a^2}{b^2}$ (C.) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (D.) $\frac{a+R}{b+R}$ (E.) $\frac{a^2+R^2}{b^2+R^2}$

---

22. Bij een medisch onderzoek voert men een test uit ter detectie van een besmetting. Men weet uit ervaring dat van de 20% die positief reageren er uiteindelijk 95% besmet zijn; dat van de 70% die negatief reageren op de test er slechts 10% besmet zijn en dat van de 10% die niet reageren op de test er 40% besmet is.
Wat is de kans dat iemand besmet is?

(A.) $\frac{3}{10}$ (B.) $\frac{1}{2}$ (C.) $\frac{3}{20}$ (D.) $\frac{29}{60}$ (E.) geen van de vorige

---

23. Gegeven zijn de drie getallen a, b, c met

$$a = 2^{(3^4)}\ ,\ b = 3^{(4^2)}\ ,\ c = 4^{(2^3)}$$

Welke van de volgende ordeningen is de juiste?

(A.) $a < b < c$ (B.) $b < a < c$ (C.) $c < a < b$ (D.) $c < b < a$ (E.) $b < c < a$

---

24. Zij $x \in \mathbb{R}$ en $|x+1| < 3$, dan geldt

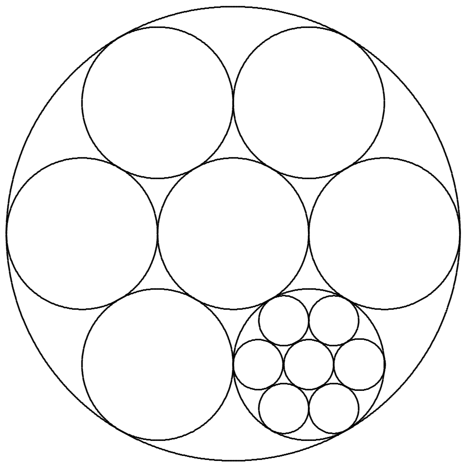
(A.) $|x| < 2$ (B.) $x < 2$ of $-x < 2$ (C.) $x < 2$ en $-x < 2$
(D.) $-2 < x < 2$ (E.) $-4 < x < 2$

---

25. Hoeveel driehoeken bestaan er waarvan de zijden lengten hebben die gehele getallen zijn en waarvan de omtrek gelijk is aan 10? (Geen twee driehoeken mogen congruent zijn.)

(A.) 1 (B.) 2 (C.) 3 (D.) 4 (E.) 5

26. Beginnend met een cirkel met straal R, construeren we in het inwendige ervan zeven cirkels met straal $\frac{R}{3}$ (zie figuur); we hernemen die werkwijze bij elk van de nieuwe cirkels en doen dit daarna nog vier keren zodat er naast de oorspronkelijke cirkel nog cirkels van zes verschillende groottes voorkomen. Over hoeveel cirkels is er hier in totaal sprake?



A. $\frac{7^7+1}{6}$ *B.* $\frac{7^7+1}{8}$ (*C.*) 7^6 (*D.*) $\frac{7^7-1}{6}$ (*E.*) 7^7

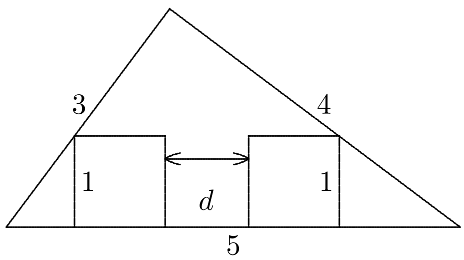
27. Hoeveel elementen moet een deelverzameling van $\{1, 2, 3, 4, ..., 999\}$ minstens hebben om alleszins twee elementen met som 1000 te bevatten?

A. 2 *B.* 500 (*C.*) 501 (*D.*) 998 (*E.*) 999

28. Elk rekeningnummer bij een financiële instelling bestaat uit 12 cijfers, opgesplitst in 3 groepjes als volgt: $123 - 1234567 - 84$. Als x het getal van 10 cijfers is dat men bekomt door de eerste twee groepjes naast elkaar te schrijven, dan vormen de laatste twee cijfers van het rekeningnummer de rest bij deling van x door 97.
Het rekeningnummer van Karel ziet er als volgt uit: $284 - 73604\ ..\ \ - 47$. Vind nu het getal van 2 cijfers dat op de plaats van de stippen moet worden ingevuld.

A. 40 *B.* 47 (*C.*) 54 (*D.*) 57 (*E.*) geen van de vorige

29. In een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5 schuift men twee vierkantjes met zijde 1 over de hypotenusa tot ze elk één van de rechthoekszijden raken. Voor de afstand d tussen de vierkantjes geldt



$A.\quad d \leq 0.9 \quad B.\quad 0.9 < d < 1 \quad (C.)\quad d = 1 \quad (D.)\quad 1 < d < 1.1 \quad (E.)\quad d \geq 1.1$

---

30. De vergelijking $x^5 + x + 1 = 0$ heeft

$A.$ 5 reële wortels
$B.$ geen reële wortels
$(C.)$ positieve en negatieve reële wortels
$(D.)$ één enkele reële wortel in $[-1, 0]$
$(E.)$ enkel positieve reële wortels

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1988-1989: Tweede Ronde

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord.

1.1 De problemen.

1. $(-1)^{5^2} + 1^{2^5} =$

$(A)\ -7 \quad (B)\ -2 \quad (C)\ 0 \quad (D)\ 1 \quad (E)\ 57$

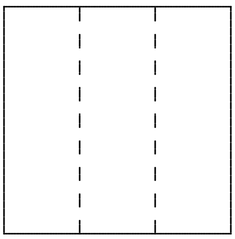
---

2. $\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16}} =$

$(A)\ \dfrac{1}{5} \quad (B)\ \dfrac{1}{4} \quad (C)\ \dfrac{2}{7} \quad (D)\ \dfrac{5}{12} \quad (E)\ \dfrac{7}{12}$

---

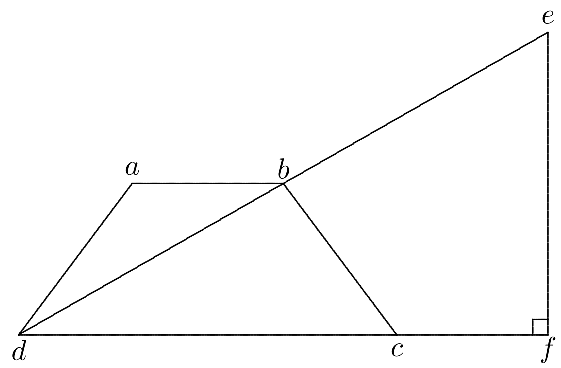
3. Men snijdt een vierkant in 3 rechthoekige stukken door middel van twee lijnen evenwijdig aan een zijde (zie figuur). De omtrek van elk van deze rechthoeken is 24. Bepaal nu de oppervlakte van het vierkant.



$(A)\ 24 \quad (B)\ 36 \quad (C)\ 64 \quad (D)\ 81 \quad (E)\ 96$

---

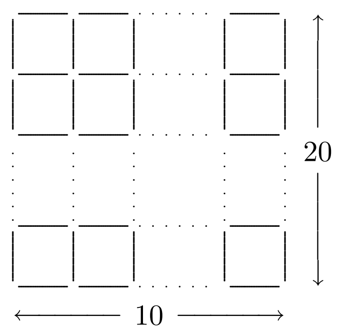
4. In de figuur is $abcd$ een gelijkbenig trapezium waarvan de zijden de volgende lengte hebben:
$|ad| = |bc| = 5$, $|ab| = 4$ en $|dc| = 10$.
Verder is een rechthoekige driehoek def gegeven zodat het punt c op het lijnstuk $[df]$ ligt en zodat b het midden is van de hypotenusa $[de]$.
Bepaal $|cf|$.



(A) 3.25 (B) 3.5 (C) 3.75 (D) 4.0 (E) 4.25

---

5. Met behulp van lucifers (van gelijke lengte) bouwt men een rechthoekig rooster zoals in de figuur aangegeven wordt. Indien dit rooster 20 lucifers hoog is en 10 lucifers breed, hoeveel lucifers heeft men dan gebruikt?



(A) 30 (B) 200 (C) 410 (D) 420 (E) 430

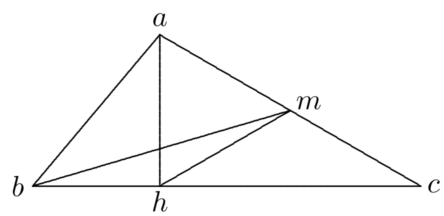
---

6. Onderstel $a, b > 0$. Onderstel verder dat de driehoek in het eerste kwadrant begrensd door de coördinaatassen en de grafiek van $ax + by = 6$ oppervlakte 6 heeft. Dan is ab gelijk aan

(A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 108 (E) 432

---

7. In Δabc geldt: $\angle a = 100°$, $\angle b = 50°$, $\angle c = 30°$, ah is een hoogtelijn en bm is een zwaartelijn. Dan is $\angle mhc$ gelijk aan



(A) 15° (B) 22.5° (C) 30° (D) 40° (E) 45°

8. Voor hoeveel gehele getallen n tussen 1 en 100 kan $x^2 + x - n$ ontbonden worden in een produkt van twee lineaire faktoren met gehele coëfficiënten?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9 (E) 10

9. Mr. en Mevr. Zeta wensen hun kindje, baby Zeta, twee voornamen te geven zodanig dat het monogram van dit kindje (opeenvolging van de initialen van resp. de eerste voornaam, de tweede voornaam en de familienaam) in alfabetische volgorde zal staan (zonder herhaling van letters). Hoeveel dergelijke monogrammen zijn mogelijk?

(A) 276 (B) 300 (C) 552 (D) 600 (E) 15600

10. Beschouw de rij getallen die op de volgende wijze recursief gedefinieerd wordt: $u_1 = a$ (een willekeurig positief getal) en $u_{n+1} = -1/(u_n + 1)$ (voor $n = 1, 2, 3, ...$). Voor welk van de volgende waarden van n geldt: $u_n = a$?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

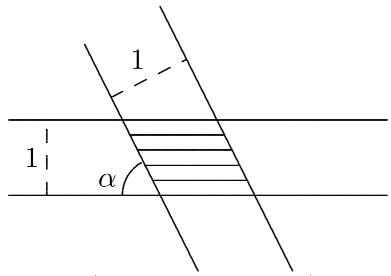
11. Onderstel dat a, b, c en d gehele getallen zijn zodat $a < 2b$, $b < 3c$, en $c < 4d$. Als $d < 100$, dan is de grootst mogelijke waarde voor a gelijk aan

(A) 2367 (B) 2375 (C) 2391 (D) 2399 (E) 2400

12. Het verkeer op een Oost–West autoweg beweegt in beide richtingen met een constante snelheid van 60 kilometer per uur. Een chauffeur die Oostwaarts rijdt ontmoet gedurende een periode van 5 minuten 20 voertuigen die Westwaarts rijden. Onderstel dat de voertuigen die Westwaarts rijden allen even ver van elkaar rijden. Welk van de volgende getallen benadert het best het aantal voertuigen in een 100–kilometer lange strook van de autoweg richting West.

(A) 100 (B) 120 (C) 200 (D) 240 (E) 400

13. Twee stroken, elk van breedte 1, overlappen elkaar schuin in een hoek α (zie figuur). De oppervlakte van het overlapte gebied (gearceerd) bedraagt dan



$$(A)\quad \sin\alpha \quad (B)\quad \frac{1}{\sin\alpha} \quad (C)\quad \frac{1}{1-\cos\alpha} \quad (D)\quad \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (E)\quad \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}$$

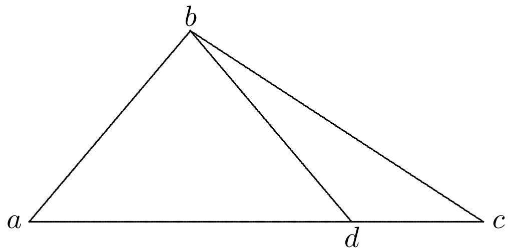
14.

$$\text{cotg } 10 + \text{tg } 5 =$$

$$(A)\quad \text{cosec } 5 \quad (B)\quad \text{cosec } 10 \quad (C)\quad \text{sec } 5 \quad (D)\quad \text{sec } 10 \quad (E)\quad \sin 15$$

---

15. In Δabc geldt: $|ab| = 5$, $|bc| = 7$, $|ac| = 9$ en d ligt op het lijnstuk $[ac]$ met $|bd| = 5$. Vind de verhouding $\dfrac{|ad|}{|dc|}$.



$$(A)\quad \frac{4}{3} \quad (B)\quad \frac{7}{5} \quad (C)\quad \frac{11}{6} \quad (D)\quad \frac{13}{5} \quad (E)\quad \frac{19}{8}$$

---

16. Een punt in het vlak dat gehele getallen als coördinaten heeft, noemt men een *roosterpunt* . Hoeveel roosterpunten liggen er op het lijnstuk met eindpunten $(3, 17)$ en $(48, 281)$? (Tel beide eindpunten van dit lijnstuk mee.)

$$(A)\quad 2 \quad (B)\quad 4 \quad (C)\quad 6 \quad (D)\quad 16 \quad (E)\quad 46$$

---

17. Een gelijkzijdige driehoek heeft een omtrek die 1989 cm groter is dan de omtrek (> 0) van een vierkant. Elke zijde van de driehoek is d cm langer dan de zijden van het vierkant.
Hoeveel positieve gehele getallen zijn geen mogelijke waarde voor d?

(A) 0 (B) 9 (C) 221 (D) 663 (E) oneindig veel

---

18. De verzameling van alle reële getallen x waarvoor

$$x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

een rationaal getal is, is de verzameling van alle

(A) gehele getallen x
(B) rationale getallen x
(C) reële getallen x
(D) x waarvoor $\sqrt{x^2+1}$ rationaal is
(E) x waarvoor $x + \sqrt{x^2+1}$ rationaal is

---

19. Een driehoek is ingeschreven in een cirkel. De hoekpunten van de driehoek verdelen de cirkel in drie bogen met lengte resp. 3, 4 en 5. Bepaal de oppervlakte van de driehoek.

(A) 6 (B) $\frac{18}{\pi^2}$ (C) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$ (D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$ (E) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$

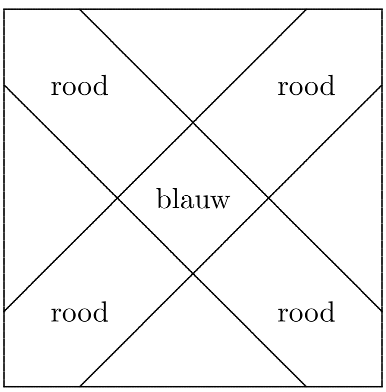
---

20. Zij x een reëel getal lukraak gekozen tussen 100 en 200 (alle getallen maken evenveel kans gekozen te worden). Bepaal de kans dat $\lfloor\sqrt{100x}\rfloor = 120$, als je weet dat $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 12$. ($\lfloor v\rfloor$ staat voor het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan v)

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{241}{2500}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{96}{625}$ (E) 1

---

21. Een vierkante vlag toont een rood kruis met even brede armen, met een blauw vierkant in het centrum en dit alles op een witte achtergrond. (zie figuur) (Het kruis is symmetrisch t.o.v. elk van de diagonalen van het vierkant.) Het volledige kruis (beide rode armen en het blauwe centrum te zamen) beslaat 36 % van de oppervlakte van de vlag. Welk procent van de oppervlakte van de vlag is blauw?



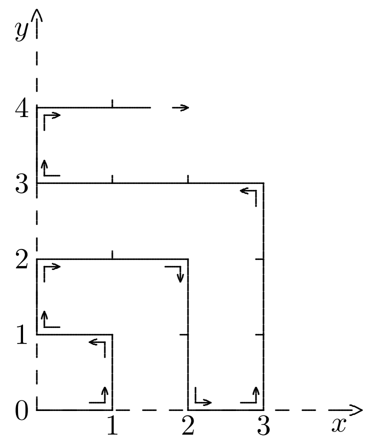
(A) 0.5 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 6

22. Een kind bezit een stel van 96 verschillende blokken. Elk van deze blokken bestaat uit één van de 2 materialen (*plastiek, hout*), in één van de 3 formaten (*klein, gemiddeld, groot*), in één van de 4 kleuren (*blauw, groen, rood, geel*), en in één van de 4 vormen (*rond, zeshoekig, vierkant, driehoekig*). Hoeveel blokken in dit stel verschillen in precies 2 aspecten van de *"plastieken, gemiddelde, rode, ronde"* blokken. (bvb. een *"houten, gemiddelde, rode, vierkante"* blok is er zo een.)

(A) 29 (B) 39 (C) 48 (D) 56 (E) 62

---

23. Een deeltje beweegt doorheen het eerste kwadrant als volgt: het begint bij de oorsprong en verplaatst zich naar het punt $(1, 0)$ tijdens de eerste minuut. Hierna beweegt het heen en weer tussen de positieve x–as en de positieve y–as, zoals in de figuur met behulp van de pijltjes aangegeven wordt. Hierbij legt het telkens 1 eenheid van afstand evenwijdig met een coördinaatas af in een tijdspanne van 1 minuut. Bepaal het punt waar dit deeltje zal zijn aangekomen na precies 1989 minuten.



(A) $(35, 44)$ (B) $(36, 45)$ (C) $(37, 45)$ (D) $(44, 35)$ (E) $(45, 36)$

24. Vijf personen zitten aan een ronde tafel. Noteer $v \geq 0$ voor het aantal personen dat naast ten minste één vrouw zit en $m \geq 0$ voor het aantal personen dat naast ten minste één man zit.
Bepaal het aantal mogelijke koppels (v, m).

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

---

25. In een interprovinciale sportontmoeting bekampen twee ploegen van elk 5 lopers elkaar. Een loper die op de n^{de} plaats eindigt bezorgt zijn ploeg n punten. Uiteindelijk wint de ploeg die het minst punten behaalt. Hoeveel verschillende winnende uitslagen zijn er mogelijk, in de onderstelling dat geen twee lopers gelijk eindigen?

(A) 10 (B) 13 (C) 27 (D) 120 (E) 126

---

26. Men vormt een regelmatig achtvlak door de middelpunten van de overstaande zijvlakken van een kubus te verbinden. De verhouding van het volume van het achtvlak tot het volume van de kubus is dan

(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{16}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

27. Zij n een positief geheel getal. Als de vergelijking $2x + 2y + z = n$ 28 oplossingen heeft in strikt positieve gehele getallen x, y en z, dan moet n gelijk zijn aan

(A) 14 of 15 (B) 15 of 16 (C) 16 of 17 (D) 17 of 18 (E) 18 of 19

28. Vind de som van de wortels, gelegen tussen 0 en 2π (radialen), van de vergelijking $\text{tg}^2 x - 9\text{tg} x + 1 = 0$.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) 3π (E) 4π

29. Bepaal

$$\sum_{k=0}^{49} (-1)^k \binom{99}{2k}$$

waarin $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

$(A)\quad -2^{50} \quad (B)\quad -2^{49} \quad (C)\quad 0 \quad (D)\quad 2^{49} \quad (E)\quad 2^{50}$

---

30. Onderstel dat 7 jongens en 13 meisjes zich in een rij opstellen. Noteer S voor het aantal keren dat in de rij een jongen en een meisje naast elkaar staan. Bijvoorbeeld: voor de rij $MJJMMMMJMJMMMJMJMMJMM$ geldt $S = 12$. Welk van de volgende getallen benadert het best de gemiddelde waarde van S (indien men alle mogelijke ordeningen van deze 20 mensen beschouwt)?

$(A)\quad 9 \quad (B)\quad 10 \quad (C)\quad 11 \quad (D)\quad 12 \quad (E)\quad 13$

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1989-1990: Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt: een deelnemer start met 30 punten, per goed antwoord krijgt hij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen[1].

1. De zevende machtswortel uit $7^{(7^7)}$ is

$$(A.)\quad 7^7 \quad (B.)\quad 7^{(7^7-1)} \quad (C.)\quad 7^{(6^7)} \quad (D.)\quad 7^{(7^6)} \quad (E.)\quad (\sqrt{7})^7$$

---

2. Zij V de verzameling van alle natuurlijke getallen die de som zijn van de kwadraten van drie opeenvolgende natuurlijke getallen. Dan geldt

(*A.*) Alle elementen van V zijn even
(*B.*) Alle elementen van V zijn oneven
(*C.*) Geen enkel element van V is deelbaar door 3
(*D.*) Geen enkel element van V is deelbaar door 5
(*E.*) Geen enkel element van V is deelbaar door 11

---

3. Het aantal oplossingen (x, y) van de vergelijking

$$y + 3x = 100$$

met natuurlijke getallen x en y is

(*A.*) 33 (*B.*) 34 (*C.*) 100 (*D.*) 101 (*E.*) oneindig

4.

$$\sqrt{0{,}4444444\ldots} =$$

(*A.*) 0,2020202... (*B.*) 0,222222... (*C.*) 0,4040404...
(*D.*) 0,6060606... (*E.*) 0,666666...

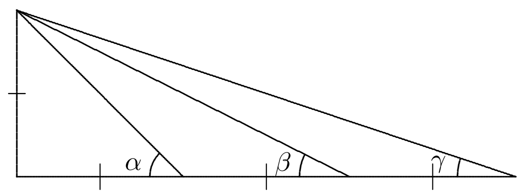
---

5. Zij n het aantal natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 10.000 die deelbaar zijn door alle strikt positieve natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 10. Dan geldt:

(*A.*) $n = 0$ (*B.*) $1 \leq n < 5$ (*C.*) $5 \leq n < 10$
(*D.*) $10 \leq n < 15$ (*E.*) $15 \leq n$

[1]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. . Overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

6. Een gebouw van 100m hoogte ziet men op 100m onder een hoek α, op 200m onder een hoek β en op 300m onder een hoek γ.



Dan geldt

$(A.)$	$75° < \alpha + \beta + \gamma \leq 80°$	$(B.)$	$80° < \alpha + \beta + \gamma \leq 85°$
$(C.)$	$85° < \alpha + \beta + \gamma \leq 90°$	$(D.)$	$90° < \alpha + \beta + \gamma \leq 95°$
$(E.)$	$95° < \alpha + \beta + \gamma \leq 100°$		

7. De som van alle natuurlijke getallen van twee cijfers die bij deling door 4 rest 1 geven, is

$(A.)$	oneven	$(B.)$	deelbaar door 3	$(C.)$	deelbaar door 4
$(D.)$	deelbaar door 7	$(E.)$	deelbaar door 10		

8. Het aantal natuurlijke getallen van twee cijfers die gelijk zijn aan de som van het kwadraat van het cijfer van de tientallen en de derde macht van het cijfer van de eenheden is

$(A.)$ 0 $(B.)$ 1 $(C.)$ 2 $(D.)$ 3 $(E.)$ groter dan 3

9. Het natuurlijk getal n eindigt op een 7. Plaatst men het cijfer van de eenheden vooraan, dan ontstaat het getal $5n$. Hoeveel cijfers bevat n ten minste?

$(A.)$ 4 $(B.)$ 5 $(C.)$ 6 $(D.)$ 7 $(E.)$ 10

10. Uit het hoekpunt b van de gelijkbenige driehoek abc ($|ab| = |ac|$) laat men de loodlijn neer op de zijde $[ac]$. De tophoek in a is α. De hoek gevormd in b door die loodlijn en de basis $[bc]$ is dan

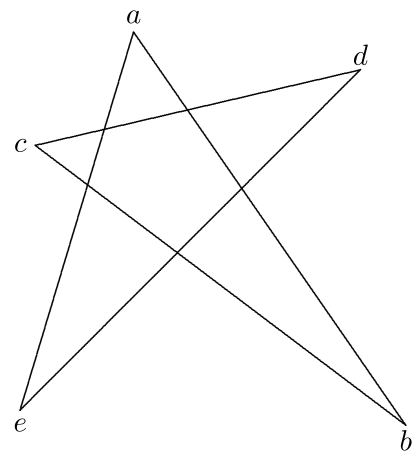
$(A.)$ $\dfrac{\alpha}{2}$ $(B.)$ $90° - \alpha$ $(C.)$ $90° + \alpha$ $(D.)$ α $(E.)$ 2α

11. Beschouw een gelijkzijdige driehoek. De verhouding van de oppervlakte van de ingeschreven cirkel tot de oppervlakte van de omgeschreven cirkel is

$(A.)$ $\dfrac{1}{4}$ $(B.)$ $\dfrac{1}{3}$ $(C.)$ $\dfrac{4}{9}$ $(D.)$ $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $(E.)$ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

12. Voor de som S van de maatgetallen van de hoeken a, b, c, d en e (uitgedrukt in radialen) geldt

(A.) $S < \pi$ (B.) $S = \pi$
(C.) $\pi < S < \dfrac{3\pi}{2}$ (D.) $S = \dfrac{3\pi}{2}$
(E.) $S > \dfrac{3\pi}{2}$



13. De competitie waaraan je meedoet bestaat uit 30 vragen. Het is bekend dat men 4 punten bekomt voor een juist antwoord, -1 voor een foutief antwoord en 0 punten voor een blanco antwoord. Hoeveel deelnemers moeten er minstens zijn om zeker te zijn van het feit dat er twee deelnemers hetzelfde puntenaantal totaliseren?

(A.) 121 (B.) 145 (C.) 146 (D.) 151 (E.) 152

14. In een club wordt elke dag gezongen door Sam Davis, behalve als al zijn begeleiders afwezig zijn. Deze zijn:

(a) een pianist: vandaag afwezig; speelt om beurt bij Sam Davis en in een andere club;
(b) een drummer: speelt telkens twee dagen bij Sam Davis en één dag in een andere club waar hij overigens gisteren heeft gespeeld;
(c) een trompettist: speelt alle dagen behalve zaterdag bij Sam Davis

Als je weet dat het vandaag woensdag is, wanneer mag Sam Davis dan een rustdag nemen omdat alle begeleiders afwezig zijn?

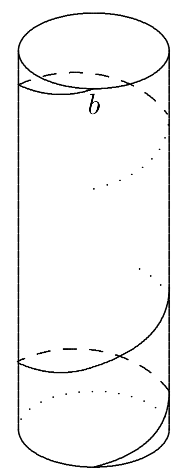
(A.) over 10 dagen (B.) over 17 dagen (C.) over 24 dagen
(D.) over 31 dagen (E.) over 38 dagen

15. De vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$ stelt een kromme voor in het vlak. De verzameling van de $y-$coördinaten van de punten op deze kromme is

(A.) $[-1, 1]$ (B.) $\mathbb{R}^+$ (C.) $[0, 1]$ (D.) $[0, 2]$ (E.) $\mathbb{R}$

16. Een cylindervormige bobijn is 10 cm lang en heeft een doormeter van 1 cm. Een touwtje wordt gelijkmatig van a tot b (zie figuur) opgewonden zodanig dat er precies 10 windingen zijn. Hoe lang is dit touwtje (op 0,1 cm na)?

    $(A.)$ 31,4 cm $(B.)$ 33 cm
    $(C.)$ 41,4 cm $(D.)$ 62,8 cm
    $(E.)$ 64 cm



---

17. Noem $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n-1}n$ (met $n \in \mathbb{N}_0$). Dan is

$$s_{1989} + s_{1990} =$$

$(A.)$ negatief $(B.)$ 0 $(C.)$ 1 $(D.)$ 2 $(E.)$ groter dan 2

---

18. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodiek met periode 1 en zo dat

$$f(x) = x \quad \text{als } x \in]0, 1] \ .$$

Zijn nu k, $n \in \mathbb{N}_0$, dan is

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(kx)}{n}$$

periodiek met periode

$(A.)$ k $(B.)$ 1 $(C.)$ $\frac{1}{k}$ $(D.)$ n $(E.)$ $\frac{1}{n}$

---

19. Definieer $n! = 1.2.3.\ldots.n$ (het produkt van de natuurlijke getallen van 1 tot n). Het aantal priemgetallen p met eigenschap

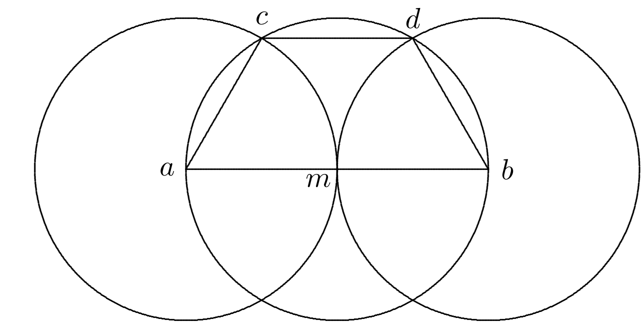
$$77! + 1 < p < 77! + 77$$

is

$(A.)$ 0 $(B.)$ 1 $(C.)$ 7 $(D.)$ 11 $(E.)$ 17

---

20. Twee cirkels met middelpunten a en b en straal 2 raken elkaar in m. Ze worden door een derde cirkel met middelpunt m en straal 2 o.m. gesneden in c en d (zie figuur).

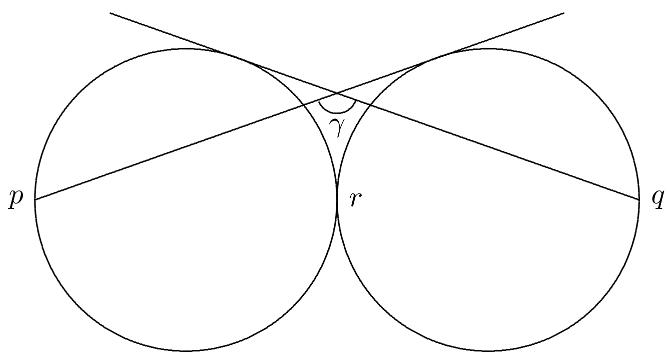


Wat is de oppervlakte van de figuur $abcd$?

$(A.)$ $3\sqrt{2}$ $(B.)$ $3\sqrt{3}$ $(C.)$ $\pi\sqrt{3}$ $(D.)$ 6 $(E.)$ $6\sqrt{3}$

---

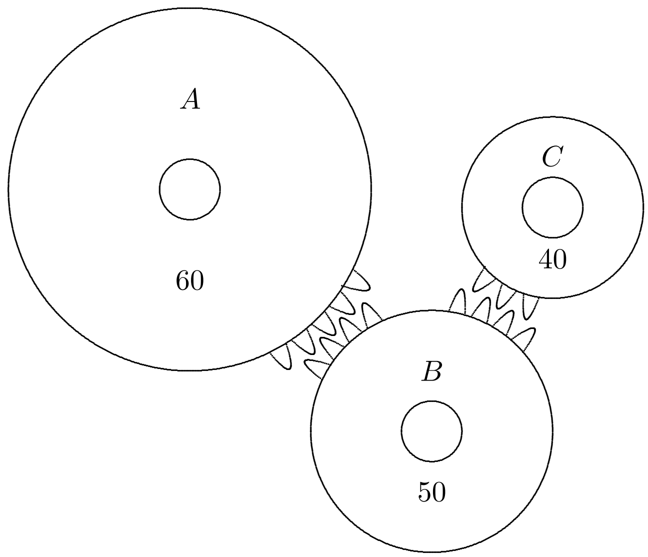
21. pr en rq zijn de middellijnen van twee even grote cirkels die elkaar raken in r. Uit p en q trekt men een raaklijn aan de andere cirkel. (zie figuur) Hoe groot is de sinus van de hoek γ tussen de twee raaklijnen?



$(A.)$ $\dfrac{1}{2}$ $(B.)$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(C.)$ $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ $(D.)$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(E.)$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

---

22. Hoeveel toeren moet het (grootste) tandwiel A minstens doen opdat de drie tandwielen in hun oorspronkelijke stand zouden terugkomen? (Het aantal tanden van elk wiel is op het tandwiel zelf vermeld.)



$(A.)$ 5 $(B.)$ 6 $(C.)$ 10 $(D.)$ 60 $(E.)$ 600

---

23. De som van teller en noemer van de volgende breuken

$$\frac{1}{3979}, \frac{2}{3978}, \frac{3}{3977}, \ldots, \frac{3979}{1}$$

is 3980. Het aantal echte (teller kleiner dan noemer) onvereenvoudigbare breuken uit die rij is

$(A.)$ 587 $(B.)$ 597 $(C.)$ 792 $(D.)$ 796 $(E.)$ 1989

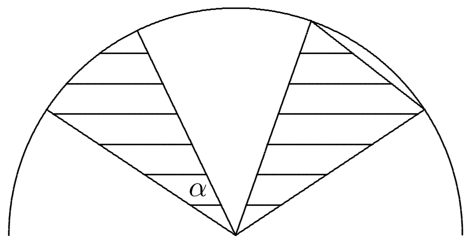
---

24. Een bol met straal 25 cm wordt gesneden door een vlak op 7 cm afstand van het middelpunt; de omtrek van deze doorsnede is

$(A.)$ 24π cm $(B.)$ 36π cm $(C.)$ 48π cm $(D.)$ 50π cm $(E.)$ 576π cm

---

25. Voor kleine middelpuntshoeken α in een cirkel is het mogelijk driehoeken te construeren met top in het middelpunt en de andere hoekpunten op de cirkel, welke dezelfde oppervlakte hebben als de cirkelsector met hoek α. Dat dit niet voor alle hoeken α mogelijk is bewijst het geval $\alpha = \pi$. Welk is de grootste waarde van α, uitgedrukt in radialen, waarvoor zo'n vergelijkende driehoek kan worden geconstrueerd?



(A.) $\frac{\pi}{6}$ (B.) $\frac{\pi}{4}$ (C.) 1 (D.) $\frac{\pi}{3}$ (E.) $\frac{\pi}{2}$

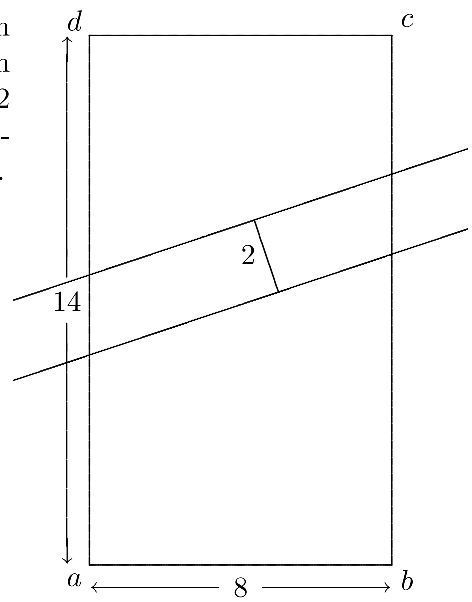
---

26. $abcd$ is een rechthoek met $|ab| = 8$ en $|bc| = 14$. De zijden $[ad]$ en $[bc]$ snijden van een evenwijdige strip met breedte 2 een parallellogram af. Bereken de maximale oppervlakte van dat parallellogram.

(A.) $\frac{76}{3}$ (B.) $\frac{77}{3}$

(C.) $\frac{78}{3}$ (D.) $\frac{79}{3}$

(E.) $\frac{80}{3}$



---

27. De negatie (ontkenning) van

"Er is geen enkel kind dat niet van dieren houdt"

is

(*A*.)	Er is geen enkel kind dat van dieren houdt
(*B*.)	Alle kinderen houden van dieren
(*C*.)	Sommige kinderen houden van dieren
(*D*.)	Er zijn kinderen die niet van dieren houden
(*E*.)	Er zijn kinderen die van dieren houden

---

28. Laat a en b reële getallen zijn, beiden verschillend van nul. Het maximum van de functie

$$\theta \mapsto a\cos\theta + b\sin\theta \quad \text{met } \theta \in \mathbb{R}$$

is gelijk aan

(*A*.) $|a+b|$ (*B*.) $\max\{|a|,|b|\}$ (*C*.) $|a|+|b|$
(*D*.) $\sqrt{a^2+b^2}$ (*E*.) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(|a|+|b|)$

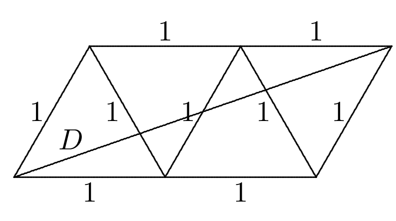
---

29. *abcd* is een viervlak. Hoeveel vlakken bestaan er zodat de afstanden van a, b, c en d tot het vlak gelijk zijn?

(*A*.) 4 (*B*.) 5 (*C*.) 6 (*D*.) 7 (*E*.) 8

---

30. Een parallellogram bestaat uit vier congruente gelijkzijdige driehoeken met zijde 1 (zie figuur). Bepaal de lengte van de grote diagonaal D.



(*A*.) $\sqrt{5}$ (*B*.) $\sqrt{6}$ (*C*.) $\sqrt{7}$ (*D*.) $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$ (*E*.) 3

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1989-1990: Tweede Ronde.

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene antwoordduur is 90 minuten.

1.1 De problemen[1].

1. Als $\dfrac{x/4}{2} = \dfrac{4}{x/2}$ dan is x gelijk aan

   $(A)\quad \pm 1/2 \qquad (B)\quad \pm 1 \qquad (C)\quad \pm 2 \qquad (D)\quad \pm 4 \qquad (E)\quad \pm 8$

2.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} =$$

   $(A)\quad -16 \qquad (B)\quad -\sqrt{2} \qquad (C)\quad -\dfrac{1}{16} \qquad (D)\quad \dfrac{1}{256} \qquad (E)\quad \sqrt{2}$

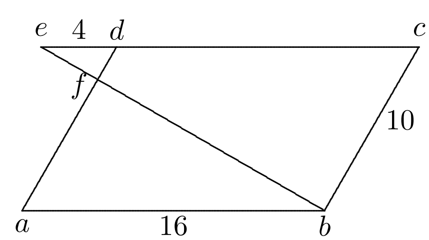
---

3. Van een gegeven trapezium is de rij van de opeenvolgende hoeken een rekenkundige rij. De kleinste hoek in dit trapezium is 75°. Wat is dan de grootste hoek in dit trapezium?

   $(A)\quad 95° \qquad (B)\quad 100° \qquad (C)\quad 105° \qquad (D)\quad 110° \qquad (E)\quad 115°$

---

4. $abcd$ is een parallellogram waarin $\angle abc = 120°$, $|ab| = 16$ en $|bc| = 10$. Verleng nu de zijde cd langs de kant van d tot een punt e zodat $|de| = 4$ (zie figuur). Als f het snijpunt is van be met ad, dan benadert $|fd|$ het best



   $(A)\quad 1 \qquad (B)\quad 2 \qquad (C)\quad 3$
   $(D)\quad 4 \qquad (E)\quad 5$

---

[1]©Committee on The American Mathematics Competitions. Mathematical Association of America, 1990

5. Welk van de volgende getallen is het grootst?

$$(A)\quad \sqrt{\sqrt[3]{5.6}} \quad (B)\quad \sqrt{6\sqrt[3]{5}} \quad (C)\quad \sqrt{5\sqrt[3]{6}} \quad (D)\quad \sqrt[3]{5\sqrt{6}} \quad (E)\quad \sqrt[3]{6\sqrt{5}}$$

---

6. De punten a en b liggen 5 eenheden van elkaar verwijderd. Hoeveel rechten liggen er dan in een gegeven vlak dat a en b bevat, 2 eenheden van a en 3 eenheden van b verwijderd?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

---

7. Van een gegeven driehoek zijn de lengtes van de zijden gehele getallen en bedraagt de omtrek 8. Wat is de oppervlakte van deze driehoek?

$$(A)\quad 2\sqrt{2} \quad (B)\quad \frac{16}{9}\sqrt{3} \quad (C)\quad 2\sqrt{3} \quad (D)\quad 4 \quad (E)\quad 4\sqrt{2}$$

---

8. Het aantal reële oplossingen van de vergelijking $|x-2|+|x-3|=1$ is gelijk aan

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

---

9. Bij een gegeven kubus kleurt men elke ribbe rood of zwart. Elk zijvlak van die kubus bevat evenwel minstens één zwarte ribbe. Het kleinst mogelijke aantal zwarte ribben is dan

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

10. Een houten kubus van afmetingen $11 \times 11 \times 11$ wordt gevormd door het samenkleven van 11^3 eenheidskubussen. Geef het grootst mogelijke aantal eenheidskubussen dat men vanaf één punt in de ruimte kan zien.

(A) 328 (B) 329 (C) 330 (D) 331 (E) 332

---

11. Hoeveel strikt positieve gehele getallen kleiner dan 50 hebben een oneven aantal positieve gehele getallen als deler?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

---

12. Zij f de funktie gedefinieerd door $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$ voor een strikt positieve a. Wanneer je weet dat $f(f(\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$ dan is a gelijk aan

(A) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

---

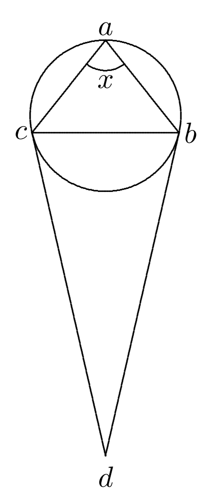
13. Men laat de volgende instrukties door een computer uitvoeren. Welke waarde van X zal er, ten gevolge van instruktie 5, afgedrukt worden?

```
1. Begin met X aan 3 en met S aan 0.
2. Vergroot de waarde van X met 2.
3. Vergroot de waarde van S met de waarde van X.
4. Als S tenminste 10000 is, ga dan naar instruktie 5;
   in het andere geval, ga naar instruktie 2 en doe daar verder.
5. Druk de waarde van X af.
6. Stop.
```

(A) 19 (B) 21 (C) 23 (D) 199 (E) 201

---

14. Een scherphoekige gelijkbenige driehoek abc wordt ingeschreven in een cirkel. Door b en c tekent men raaklijnen aan de cirkel. Deze snijden elkaar in het punt d. Als $\angle abc = \angle acb = 2\angle d$ en als x de grootte van $\angle a$ is in radialen, dan is x gelijk aan



(A) $\dfrac{3}{7}\pi$ (B) $\dfrac{4}{9}\pi$ (C) $\dfrac{5}{11}\pi$

(D) $\dfrac{6}{13}\pi$ (E) $\dfrac{7}{15}\pi$

---

15. Men beschikt over 4 natuurlijke getallen. Telt men telkens 3 van deze getallen bij elkaar op, dan bekomt men de sommen 180, 197, 208 en 222. Geef het grootste van deze vier natuurlijke getallen.

    (A) 77 (B) 83 (C) 89 (D) 95
    (E) dit kan niet uit deze gegevens afgeleid worden

---

16. Bij een van George Washington's feestjes, schudde elke man iedereen de hand, uitgezonderd zijn eigen echtgenote. Er waren geen handdrukken onder vrouwen onderling. 13 gehuwde koppels woonden dit feestje bij. Hoeveel handdrukken vonden er plaats tussen deze 26 mensen?

    (A) 78 (B) 185 (C) 234 (D) 312 (E) 325

---

17. Hoeveel van de getallen 100, 101, ... ,999, hebben drie verschillende cijfers in stijgende orde of in dalende orde?

    (A) 120 (B) 168 (C) 204 (D) 216 (E) 240

---

18. Kies eerst a lukraak uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, en kies daarna b lukraak uit dezelfde verzameling. De kans dat het getal $3^a + 7^b$ het cijfer 8 als cijfer van de eenheden heeft, is gelijk aan

    (A) $\dfrac{1}{16}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{3}{16}$ (D) $\dfrac{1}{5}$ (E) $\dfrac{1}{4}$

---

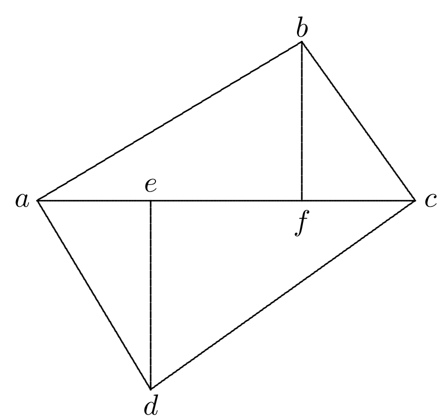
19. Voor hoeveel natuurlijke getallen n tussen 1 en 1990 is de onechte breuk $\dfrac{n^2+7}{n+4}$ vereenvoudigbaar.

    (A) 0 (B) 86 (C) 90 (D) 104 (E) 105

---

20. In de figuur is $abcd$ een vierhoek met rechte hoeken in a en c. De punten e en f op $[ac]$ liggen zó dat $[de]$ en $[bf]$ loodrecht staan op $[ac]$. Als $|ae| = 3$, $|de| = 5$ en $|ce| = 7$ dan is $|bf| =$

    (A) 3,6 (B) 4 (C) 4,2
    (D) 4,5 (E) 5



21. Beschouw een piramide p-$abcd$ waarvan de basis $abcd$ een vierkant is en de top p evenver verwijderd ligt van a, b, c en d. Als gegeven is dat $|ab| = 1$ en $\angle apb = 2\theta$ dan wordt het volume van deze piramide gegeven door

(A) $\dfrac{\sin\theta}{6}$ (B) $\dfrac{\text{cotg }\theta}{6}$ (C) $\dfrac{1}{6\sin\theta}$ (D) $\dfrac{1-\sin 2\theta}{6}$ (E) $\dfrac{\sqrt{\cos 2\theta}}{6\sin\theta}$

---

22. Wanneer de 6 oplossingen van de vergelijking $x^6 = -64$ geschreven worden in de vorm $a+bi$ (waarin a en b reëel zijn), dan wordt het product van die oplossingen waarin $a > 0$ gegeven door

(A) -2 (B) 0 (C) $2i$ (D) 4 (E) 16

---

23. Als $x, y > 0$, $\log_y x + \log_x y = \dfrac{10}{3}$ en $xy = 144$, dan is $\dfrac{x+y}{2} =$

(A) $12\sqrt{2}$ (B) $13\sqrt{3}$ (C) 24 (D) 30 (E) 36

---

24. Alle studenten van het Adams-instituut en van het Baker-instituut nemen deel aan eenzelfde examen. In de tabel hieronder worden de gemiddelde resultaten weergegeven voor de jongens, voor de meisjes en voor de jongens en meisjes gezamenlijk en dit zowel voor het Adams-instituut als voor het Baker-instituut. Ook vinden we er het gemiddelde resultaat voor de jongens van beide instituten gezamenlijk. Wat is het gemiddelde resultaat voor de meisjes over de twee instituten te zamen?

	Adams	Baker	Adams & Baker
Jongens	71	81	79
Meisjes	76	90	?
Jongens en Meisjes	74	84	

(A) 81 (B) 82 (C) 83 (D) 84 (E) 85

---

25. Negen congruente sferen (bollen) zitten opeengepakt in een kubus met zijde van lengte 1. Deze bollen zijn zo gestapeld dat één ervan zijn middelpunt heeft in het middelpunt van de kubus en dat de andere raken aan deze middelste bol en aan telkens drie zijvlakken van de kubus. Geef de straal van deze bollen.

(A) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}$

26. Tien mensen vormen samen een cirkel. Elk van hen bedenkt een getal en zegt het door aan zijn beide buren op deze cirkel. Daarna berekent ieder het gemiddelde van de getallen van zijn twee buren en deelt dit gemiddelde mee. In de figuur hiernaast worden deze gemiddelden weergegeven (dus niet de getallen die elke persoon bedacht). Welk was het getal dat de persoon die een gemiddelde van "6" berekende oorspronkelijk bedacht had?

"1"
"10" "2"
"9" "3"
"8" "4"
"7" "5"
"6"

(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 10
(E) niet eenduidig uit de gegevens te bepalen

27. Welk van de volgende drietallen kan **niet** het drietal van de lengtes van de drie hoogtelijnen in een driehoek zijn?

(A) $1, \sqrt{3}, 2$ (B) $3, 4, 5$ (C) $5, 12, 13$ (D) $7, 8, \sqrt{113}$ (E) $8, 15, 17$

28. Een vierhoek met opeenvolgende zijden van lengte 70, 90, 130 en 110 is ingeschreven in een cirkel en heeft eveneens een ingeschreven cirkel in zich. Het raakpunt van de (in deze vierhoek) ingeschreven cirkel met de zijde van lengte 130 verdeelt die zijde in twee segmenten van lengte x en y (resp.). Bepaal $|x - y|$.

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

29. Een deelverzameling van $\{1, 2, \ldots, 100\}$ heeft de eigenschap dat geen enkel van zijn elementen gelijk is aan het drievoud van een ander element. Wat is het grootste aantal elementen dat deze deelverzameling kan hebben?

(A) 50 (B) 66 (C) 67 (D) 76 (E) 78

30. Als $R_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n)$ waarin $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$ en $n = 0, 1, 2, \ldots$, dan is R_{12345} een geheel getal. Wat is het cijfer van de eenheden in dit getal?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1990-1991: Eerste Ronde.

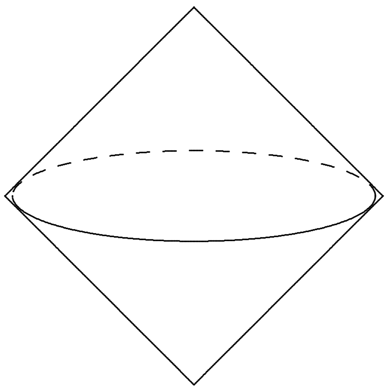
De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt: een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.

1. Het quotiënt van 50^{50} door 25^{25} is gelijk aan

   $(A.)$ 25^{25} $(B.)$ 10^{25} $(C.)$ 100^{25} $(D.)$ 2^{25} $(E.)$ $2 \cdot 25^{25}$

---

2. 

   Een vierkant met zijde z draait om één van zijn diagonalen. Hoe groot is het volume van het beschreven lichaam?

   $(A.)$ $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi z^3$ $(B.)$ $\frac{\pi z^3}{6\sqrt{2}}$ $(C.)$ $\frac{\pi z^3}{\sqrt{2}}$ $(D.)$ $\frac{2}{3}\pi z^3$ $(E.)$ $\frac{\pi z^3}{3\sqrt{2}}$

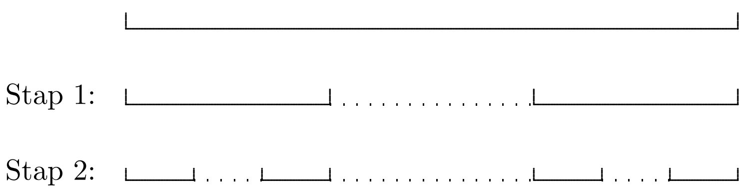
---

3. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van $|\,|x|-1| < 1$ is

   $(A.)$ $]-2,2[$ $(B.)$ $]0,2[$ $(C.)$ $]-2,0[\,\cup\,]0,2[$ $(D.)$ $]-2,0[$ $(E.)$ $]-1,1[$

---

4. Verdeel een interval van lengte 1 in drie gelijke delen en neem het middelste deel weg. Behandel de twee overblijvende intervallen op dezelfde manier. Herhaal dit proces.

0 ©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. . Overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

De totale lengte die overblijft na stap n is gelijk aan

$$(A.)\ \frac{1}{n^2} \quad (B.)\ \frac{1}{2^n} \quad (C.)\ \frac{2}{3^n} \quad (D.)\ \frac{2^n}{3^n} \quad (E.)\ 1-\frac{1}{3^n}$$

---

5. In een rechthoekige driehoek met hoeken a, b en c zijn

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c \qquad \text{en} \qquad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c$$

respectievelijk gelijk aan

(A.) 1 en 1 (B.) 1 en 2 (C.) 1,5 en 1,5 (D.) 2 en 1 (E.) 2 en 2

---

6. Zij $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sqrt{x}$, dan is $f(\mathbb{R}^+)$ gelijk aan

$$(A.)\ \mathbb{R}^+ \quad (B.)\ \mathbb{R} \quad (C.)\ [-\frac{1}{4}, +\infty[\quad (D.)\ \text{begrensd} \quad (E.)\ [-\frac{1}{2}, +\infty[$$

---

7. Hoeveel gehele waarden van x voldoen aan $3^{x+7} \,.\, 9^{x+4} = 27^{x+5}$?

(A.) 0 (B.) 1 (C.) 2 (D.) 3 (E.) oneindig veel

---

8. Vijf leerlingen bespreken de organisatie van een schoolfuif, gezeten aan een ronde tafel. Peeters zit tussen Goossens en Wolters. Greet zit tussen Tom en Bertels. Goossens zit tussen Jan en Greet. Tom is de neef van An. Koen heeft Janssens aan zijn linkerzijde en Wolters aan zijn rechterzijde.
Welk is de familienaam van An?

(A.) Peeters (B.) Wolters (C.) Bertels (D.) Janssens (E.) Goossens

9. Aangenomen dat ons alfabet bestaat uit 6 klinkers en 20 medeklinkers en dat een woord van 3 letters minstens 1 klinker en minstens 1 medeklinker moet bevatten, hoeveel verschillende woorden van drie letters kunnen er dan maximaal gevormd worden?

(A.) 2880 (B.) 3120 (C.) 8640 (D.) 9360 (E.) 18000

---

10. Stel $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $(x \neq 1)$. Als $y = f(x)$, dan is x gelijk aan

$$(A.)\ \frac{1}{f(y)} \quad (B.)\ f(\frac{1}{y}) \quad (C.)\ -\frac{f(y)}{y} \quad (D.)\ -\frac{1}{yf(y)} \quad (E.)\ \frac{1}{yf(y)}$$

11. $x^2 - y^2 = 63$, met $x, y \in \mathbb{N}$. Hoeveel verschillende waarden kan $x^2 + y^2$ aannemen?

(A.) 1 (B.) 2 (C.) 3 (D.) 4 (E.) geen van de vorige

12. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van $x(x+1) > x$ is

(A.) $\mathbb{R}_0$ (B.) $\mathbb{R}_0^+$ (C.) $\mathbb{R}$ (D.) $]-1, +\infty[$ (E.) $\emptyset$

---

13. Een rol papier die 500 aan elkaar hangende blaadjes van 12cm lengte bevat, is regelmatig opgewonden op een kartonnen cilinder van 5 cm doormeter. De uiteindelijke rol heeft een doormeter van 11 cm. Als we aannemen dat het papier gelijkmatig opgewonden is, hoeveel windingen zijn er dan (op 1 nauwkeurig)?

(A.) 119 (B.) 174 (C.) 239 (D.) 375 (E.) 750

---

14. In een $15° - 75° - 90°$ rechthoekige driehoek wordt de lengte van de kortste rechthoekszijde met x aangeduid. De lengte van de langste rechthoekszijde is dan

(A.) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})x$ (B.) $\dfrac{4x}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ (C.) $(\sqrt{3} + 2)x$ (D.) $5x$ (E.) niet te bepalen

---

15. In deze vraag is pu een Chinese lengtemaat en mu een oppervlaktemaat. Gegeven een rechthoekig veld met breedte 21 pu. De oppervlakte bedraagt $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6})$ mu. Als we weten dat 1 pu een dubbele stap is en dat 1 mu = 240 pu^2, wat is dan de lengte van het veld in stappen?

(A.) $2\sqrt{3}$ (B.) 2 (C.) 14 (D.) 28 (E.) 56

---

16. Als de basis van een parallellogram met 20% verlengd wordt en de schuine zijde met 20% verkort, dan wordt de oppervlakte van het parallellogram

(A.) niet gewijzigd (B.) 4% kleiner (C.) 4% groter
(D.) 20% groter (E.) in sommige gevallen groter, in andere kleiner

---

17. Voor een gegeven driehoek is het maatgetal van de oppervlakte gelijk aan het maatgetal van de omtrek. De straal R van de ingeschreven cirkel voldoet dan aan

(A.) $R \leq 1$ (B.) $1 < R \leq 3/2$ (C.) $3/2 < R \leq 2$ (D.) $2 < R$
(E.) R is afhankelijk van het gegeven maatgetal

18. Hoeveel natuurlijke getallen in de rij van 1 tot en met 1000 kan men schrijven als een macht a^b met $a, b \in \mathbb{N}$ en $a, b > 1$?

$(A.)$ 25 $(B.)$ 39 $(C.)$ 40 $(D.)$ 49 $(E.)$ 50

19. Stel door A, B en C de lengten voor van de zijden van een driehoek en door a, b en c de grootte van de overstaande hoeken. Verder weten we dat $\dfrac{B+C}{11} = \dfrac{C+A}{12} = \dfrac{A+B}{13}$. Welke van de volgende uitspraken is juist?

$(A.)$ $\dfrac{\sin a}{10} = \dfrac{\sin b}{12} = \dfrac{\sin c}{14}$ $(B.)$ $\dfrac{\sin a}{10} = \dfrac{\sin b}{14} = \dfrac{\sin c}{12}$

$(C.)$ $\dfrac{\sin a}{12} = \dfrac{\sin b}{14} = \dfrac{\sin c}{10}$ $(D.)$ $\dfrac{\sin a}{14} = \dfrac{\sin b}{12} = \dfrac{\sin c}{10}$

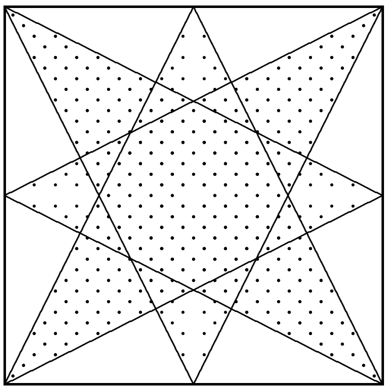
$(E.)$ $\dfrac{\sin a}{14} = \dfrac{\sin b}{10} = \dfrac{\sin c}{12}$

20. Zij $A = \{a, b, c\}$. Het aantal afbeeldingen $f : A \to A$ waarvoor $f \circ f = 1_A$ (de identiteit), is gelijk aan

$(A.)$ 1 $(B.)$ 3 $(C.)$ 4 $(D.)$ 6 $(E.)$ 9

21.

Wat is de oppervlakte van de stervormige figuur die men verkrijgt door in een vierkant met zijde z elk middelpunt van een zijde te verbinden met de hoekpunten van de overstaande zijde?



$(A.)$ $\dfrac{1}{2}z^2$ $(B.)$ $\dfrac{2}{5}z^2$ $(C.)$ $\dfrac{3}{5}z^2$ $(D.)$ $\dfrac{4}{5}z^2$ $(E.)$ $\dfrac{9}{10}z^2$

22. Als $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ met $2^p - 1$ een priemgetal, dan is de som van alle positieve delers van n gelijk aan

$(A.)$ $n - 1$ $(B.)$ n $(C.)$ $2n - 1$ $(D.)$ $2n$ $(E.)$ $2^p + 2^{p-1} - 1$

23. In een zak steken 24 speelkaarten: 2 rode en 22 zwarte. Jan noemt nu een nummer n van 1 tot 24. Rik haalt zonder kijken n kaarten één na één uit de zak. Als de n-de kaart de eerste rode is, heeft Jan gewonnen. Welk nummer moet Jan kiezen om de meeste kans te hebben om te winnen?

(*A.*) 1 (*B.*) 2 (*C.*) 12 (*D.*) 13 (*E.*) om het even als het maar niet 24 is

24. Zij $a, b \in \mathbb{R}$. De rij funkties $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ wordt gedefinieerd door

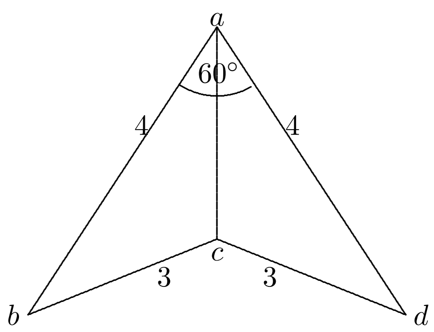
$$f_1(x) = ax + b$$

$$f_n = f_{n-1} \circ f_1 \text{ als } n \geq 2.$$

Er geldt: $f_{1990} = f_{1992} \neq f_{1991}$

(*A.*) voor één enkele waarde van a en b
(*B.*) voor twee waarden van a en één van b
(*C.*) voor drie waarden van a en één van b
(*D.*) voor één waarde van a en elke waarde van b
(*E.*) voor twee waarden van a en elke waarde van b

25. De vierhoek $abcd$ (zie figuur) is symmetrisch t.o.v. ac en niet convex. De totale hoek in a bedraagt 60°. Verder is gegeven dat $|ab| = 4$ en $|bc| = 3$. De lengte van de diagonaal $[ac]$ is gelijk aan



(*A.*) $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ (*B.*) $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

(*C.*) 3 (*D.*) 1/2

(*E.*) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

26. In een driehoek abc geldt voor de lengten van de zijden: $|bc| = 293$, $|ab|$ is een kwadraat van een natuurlijk getal, $|ac|$ is een macht van 2 en $|ac| = 2|ab|$. Noem P de omtrek van deze driehoek, dan geldt:

(*A.*) $P < 900$ (*B.*) $900 \leq P < 980$ (*C.*) $980 \leq P < 1060$ (*D.*) $1060 \leq P$
(*E.*) P is niet te bepalen uit de gegevens

27. Een trapezium wordt door zijn middenparallel verdeeld in twee delen. De oppervlakten van deze twee delen verhouden zich zoals 5 tot 2. De verhouding van de grote basis tot de kleine basis is dan

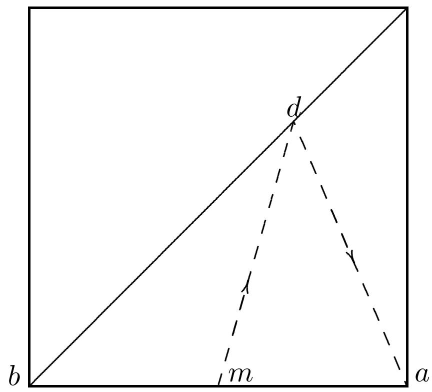
$(A.)\quad \frac{5}{2} \quad (B.)\quad \frac{25}{4} \quad (C.)\quad 7 \quad (D.)\quad 11 \quad (E.)\quad 13$

28. Een rechthoekige vloer is geheel belegd met vierkante tegels: 1274 in de lengte en 990 in de breedte. Beschouw een diagonaal van de vloer. Hoeveel tegels worden door die diagonaal doorgesneden? (We tellen een tegel alleen mee als de diagonaal door zijn binnengebied heen loopt.)

$(A.)\quad 1272 \quad (B.)\quad 1274 \quad (C.)\quad 1613 \quad (D.)\quad 2262 \quad (E.)\quad 2264$

29.

In een vierkant met zijde 1 is een diagonaal getekend. Vanuit het midden m van een zijde (zie figuur) loopt men naar een punt d van de diagonaal en keert men terug naar het hoekpunt a van die zelfde zijde (niet op die diagonaal). Hoever moet d van b (het andere hoekpunt van die zijde) liggen opdat de som van de afstanden $|md| + |da|$ zo klein mogelijk is?



$(A.)\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (B.)\quad \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (C.)\quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (D.)\quad \frac{1}{2} \quad (E.)\quad 0$

30. Men noemt roosterpunt in $\mathbb{R}^3$ elk punt waarvan alle drie de coördinaten gehele getallen zijn. Hoeveel roosterpunten liggen er op het oppervlak van een bol met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal 9?

$(A.)\quad 6 \quad (B.)\quad 30 \quad (C.)\quad 54 \quad (D.)\quad 78 \quad (E.)\quad 102$

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1990-1991: Tweede Ronde.

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene antwoordduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.

1. Als we voor elk drietal verschillende getallen a, b en c $\boxed{a, b, c}$ definiëren als

$$\boxed{a, b, c} = \frac{c+a}{c-b}$$

dan is $\boxed{1, -2, -3}$ gelijk aan

$(A)\ -2 \quad (B)\ -\frac{2}{5} \quad (C)\ -\frac{1}{4} \quad (D)\ \frac{2}{5} \quad (E)\ 2$

---

2. $|3 - \pi| =$

$(A)\ \frac{1}{7} \quad (B)\ 0{,}14 \quad (C)\ 3 - \pi \quad (D)\ 3 + \pi \quad (E)\ \pi - 3$

3.

$$(4^{-1} - 3^{-1})^{-1} =$$

$(A)\ -12 \quad (B)\ -1 \quad (C)\ \frac{1}{12} \quad (D)\ 1 \quad (E)\ 12$

---

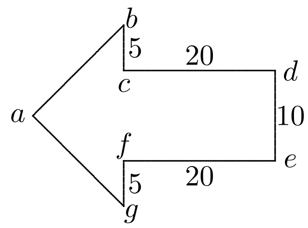
4. Welke van de volgende driehoeken kan niet bestaan?

(A) Een scherphoekige gelijkbenige driehoek
(B) Een rechthoekige gelijkbenige driehoek
(C) Een stomphoekige rechthoekige driehoek
(D) Een ongelijkzijdige rechthoekige driehoek
(E) Een stomphoekige ongelijkzijdige driehoek

---

[0]©Committee on the American Mathematics Competitions, Mathematical Association of America, 1991

5. De figuur toont een veelhoek in de vorm van een pijl. In deze veelhoek zijn de hoeken in de hoekpunten a, c, d, e en f rechte hoeken; verder is $|bc| = |fg| = 5$, $|cd| = |fe| = 20$, $|de| = 10$ en $|ab| = |ag|$. De oppervlakte van deze veelhoek wordt het best benaderd door



(A) 288 (B) 291 (C) 294
(D) 297 (E) 300

---

6. Als $x \geq 0$, dan is $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} =$

(A) $x\sqrt{x}$ (B) $x\sqrt[4]{x}$ (C) $\sqrt[8]{x}$ (D) $\sqrt[8]{x^3}$ (E) $\sqrt[8]{x^7}$

---

7. Als $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$ en $b \neq 0$, dan is $\frac{a+b}{a-b} =$

(A) $\frac{x}{x+1}$ (B) $\frac{x+1}{x-1}$ (C) 1 (D) $x - \frac{1}{x}$ (E) $x + \frac{1}{x}$

---

8. Vloeistof X mengt zich niet met water. Tenzij gehinderd, spreidt zij zich op het wateroppervlak uit en vormt ze een schijfvormige (cirkelvormige) film van 0,1 cm dikte. Een rechthoekige doos met afmetingen 6 cm, 3 cm en 12 cm wordt gevuld met vloeistof X. Daarna laat men de inhoud van deze doos op een groot wateroppervlak uitstromen. Wat zal de straal zijn, uitgedrukt in cm, van de schijfvormige film die zich zal vormen?

(A) $\frac{\sqrt{216}}{\pi}$ (B) $\sqrt{\frac{216}{\pi}}$ (C) $\sqrt{\frac{2160}{\pi}}$ (D) $\frac{216}{\pi}$ (E) $\frac{2160}{\pi}$

---

9. Van tijd $t = 0$ tot tijd $t = 1$ groeide een bevolking aan met $i\%$, en van tijd $t = 1$ tot tijd $t = 2$ groeide die bevolking aan met $j\%$. Met hoeveel % groeide die bevolking dan aan van tijd $t = 0$ tot tijd $t = 2$?

(A) $(i + j)\%$ (B) $ij\%$ (C) $(i + ij)\%$
(D) $(i + j + \frac{ij}{100})\%$ (E) $(i + j + \frac{i+j}{100})\%$

---

10. Het punt p ligt op afstand 9 van het middelpunt van een cirkel met straal 15. Hoeveel verschillende koorden van deze cirkel bevatten p en hebben een geheel getal als lengte?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 29

11. Jan en Els lopen 10 kilometer. Ze starten op een zelfde punt, lopen eerst 5 kilometer naar de top van een heuvel en keren dan langs dezelfde weg naar hun startpunt terug. Jan start met een voorsprong van 10 minuten en loopt met een snelheid van 15 km/uur bergopwaarts en met een snelheid van 20 km/uur bergafwaarts. Els loopt met een snelheid van 16 km/uur bergopwaarts en met een snelheid van 22 km/uur bergafwaarts. Hoever zijn zij van de top van de heuvel wanneer zij elkaar al lopende in tegengestelde richtingen ontmoeten?

(A) $\frac{5}{4}$ km (B) $\frac{35}{27}$ km (C) $\frac{27}{20}$ km (D) $\frac{7}{3}$ km (E) $\frac{28}{9}$ km

---

12. De maatgetallen (in graden) van de binnenhoeken van een convexe zeshoek vormen een rekenkundige rij van positieve gehele getallen. Stel dat de grootste van die hoeken $m°$ meet. Wat is dan de grootst mogelijke waarde van m?

(A) 165 (B) 167 (C) 170 (D) 175 (E) 179

---

13. In een wedren tussen de drie paarden X, Y en Z zijn ex-aequo's niet mogelijk. In de weddenschappen staat de kans dat X niet wint 3-tegen-1 genoteerd en de kans dat Y niet wint staat 2-tegen-3 genoteerd. Hoe staat de kans dat Z niet wint dan genoteerd? ("de kans dat H niet wint staat p-tegen-q genoteerd", betekent dat de kans dat H wint gelijk is aan $\frac{q}{p+q}$.)

(A) 3-tegen-20 (B) 5-tegen-6 (C) 8-tegen-5
(D) 17-tegen-3 (E) 20-tegen-3

---

14. Als x de derdemacht is van een strikt positief geheel getal en d is het aantal strikt positieve gehele getallen die deler zijn van x, dan kan d gelijk zijn aan

(A) 200 (B) 201 (C) 202 (D) 203 (E) 204

---

15. Rond een cirkelvormige tafel staan precies 60 stoelen. Aan deze tafel zijn N personen aangezeten op zo'n wijze dat de volgende persoon die gaat zitten, zeker naast iemand moet aanzitten. Geef de kleinst mogelijke waarde van N.

(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 58

---

16. Vorig jaar namen 100 leerlingen van het Eeuwfeestinstituut deel aan de Vlaamse Wiskunde Olympiade. Hun gemiddelde score was 100. Het aantal niet-zesdejaars dat deelnam was 50% groter dan het aantal zesdejaars en de gemiddelde score van de zesdejaars was 50% hoger dan die van de niet-zesdejaars. Wat was de gemiddelde score van de zesdejaars.

(A) 100 (B) 112,5 (C) 120 (D) 125 (E) 150

---

17. Een strikt positief geheel getal N noemt men een *palindroom* als het gelijk is aan het getal dat men bekomt door de volgorde van zijn cijfers om te keren. Is het bovendien een priemgetal, dan noemt men het een *priempalindroom.* Het jaartal 1991 is het enige in deze eeuw dat de volgende twee eigenschappen heeft:

(a) het is een palindroom.

(b) het ontbindt zich als produkt van een priempalindroom met twee cijfers en een priempalindroom met drie cijfers.

Hoeveel jaartallen in het millenium van het jaar 1000 tot het jaar 2000 (met inbegrip van 1991) hebben deze twee eigenschappen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

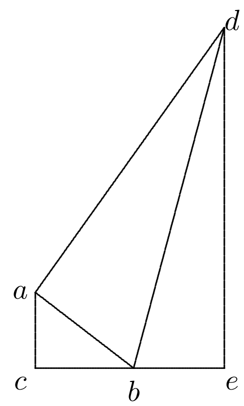
---

18. Als S staat voor de verzameling van de punten z in het complexe vlak waarvoor $(3+4i)z$ een reëel getal is, dan is S

(A) een rechthoekige driehoek (B) een cirkel (C) een hyperbool
(D) een rechte (E) een parabool

19.

Driehoek abc heeft een rechte hoek in c. $|ac| = 3$ en $|bc| = 4$. Driehoek abd heeft een rechte hoek in a en verder is $|ad| = 12$. De punten c en d liggen aan verschillende kanten van de rechte ab. De rechte door d en evenwijdig met de rechte ac snijdt de rechte cb in het punt e. Als $\dfrac{|de|}{|db|} = \dfrac{m}{n}$, waar m en n onderling ondeelbare strikt positieve gehele getallen zijn, dan is $m + n =$



(A) 25 (B) 128 (C) 153 (D) 243 (E) 256

---

20. De som van alle reële getallen x waarvoor $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ is gelijk aan

(A) 3/2 (B) 2 (C) 5/2 (D) 3 (E) 7/2

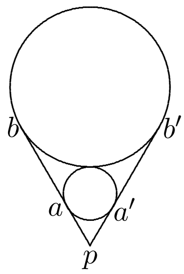
---

21. Als $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \neq 0, 1$ en als $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dan is $f(\sec^2\theta)$ gelijk aan

(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\mathrm{tg}^2\theta$ (D) $\mathrm{cotg}^2\theta$ (E) $\mathrm{cosec}^2\theta$

---

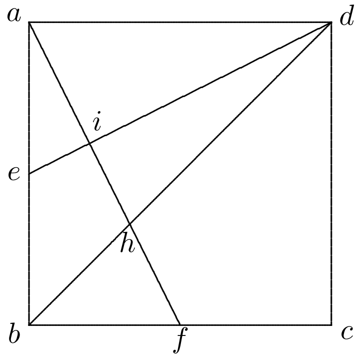
22. Twee cirkels raken elkaar uitwendig. De rechten pab en $pa'b'$ zijn gemeenschappelijke raaklijnen van beide cirkels, waarbij a en a' op de kleinere cirkel en b en b' op de grotere cirkel liggen. Bepaal de oppervlakte van de kleinere cirkel als je weet dat $|pa| = |ab| = 4$.



(A) $1{,}44\pi$ (B) 2π (C) $2{,}56\pi$
(D) $\sqrt{8}\pi$ (E) 4π

---

23. Als $abcd$ een (2×2) vierkant is, e het midden van $[ab]$, f het midden van $[bc]$, $[af]$ en $[de]$ elkaar snijden in i en $[bd]$ en $[af]$ elkaar snijden in h, dan is de oppervlakte van de vierhoek $beih$ gelijk aan



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$ (E) $\frac{3}{5}$

---

24. De grafiek, G, van $y = \log_{10} x$ wordt over een hoek van 90° in tegenwijzerzin geroteerd rond de oorsprong. Zo bekomt men een nieuwe grafiek G'. Welke van de volgende vergelijkingen is een vergelijking voor G'?

(A) $y = \log_{10}(\frac{x+90}{9})$ (B) $y = \log_x 10$ (C) $y = \frac{1}{x+1}$
(D) $y = 10^{-x}$ (E) $y = 10^x$

---

25. Zij $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ en

$$P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \cdot \frac{T_3}{T_3 - 1} \cdot \frac{T_4}{T_4 - 1} \cdot \cdots \cdot \frac{T_n}{T_n - 1} \text{ voor } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Welke van de volgende waarden benadert dan het best P_{1991}?

(A) 2,0 (B) 2,3 (C) 2,6 (D) 2,9 (E) 3,2

---

26. Een strikt positief geheel getal met n cijfers noemt men “snoezig” als zijn cijfers een herschikking van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$ zijn en als zijn eerste k cijfers telkens een getal vormen dat deelbaar is door k (voor $k = 1, 2, \ldots, n$).

Zo is 321 bijvoorbeeld een snoezig getal van 3 cijfers, want 1 deelt 3, 2 deelt 32 en 3 deelt 321. Hoeveel snoezige getallen van 6 cijfers zijn er?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

---

27. Als $x + \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$ dan is $x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}$

(A) 5,05 (B) 20 (C) 51,005 (D) 61,25 (E) 400

---

28. In een urne zitten om te beginnen 100 zwarte en 100 witte knikkers. Men neemt nu telkens 3 knikkers uit die urne weg en vervangt ze met knikkers uit een afzonderlijke voorraad, volgens het volgende patroon:

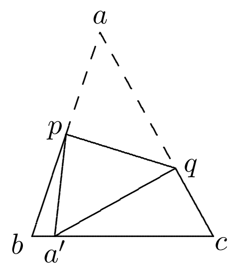
WEGGENOMEN KNIKKERS	-	**WORDEN VERVANGEN DOOR**
3 zwarte	-	1 zwarte
2 zwarte, 1 witte	-	1 zwarte, 1 witte
1 zwarte, 2 witte	-	2 witte
3 witte	-	1 zwarte, 1 witte

Welke van de onderstaande knikker-verzamelingen kan op het einde, wanneer men de procedure hierboven verschillende keren heeft toegepast, de inhoud uitmaken van de urne?

(A) 2 zwarte knikkers (B) 2 witte knikkers (C) 1 zwarte knikker
(D) 1 zwarte knikker en 1 witte knikker (E) 1 witte knikker

---

29. Een gelijkzijdige driehoek abc werd geplooid zó dat hoekpunt a op het punt a' van lijnstuk $[bc]$ terechtgekomen is. Als $|ba'| = 1$ en $|a'c| = 2$, dan is de lengte van de vouwlijn $[pq]$ gelijk aan



(A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{7}{20}\sqrt{21}$ (C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(D) $\frac{13}{8}$ (E) $\sqrt{3}$

---

30. Voor een verzameling V noteren we $|V|$ voor het aantal elementen van V en $n(V)$ voor het aantal deelverzamelingen van V (de lege verzameling en V zelf inbegrepen). Stel nu dat A, B en C verzamelingen zijn waarvoor

$$n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B \cup C) \qquad \text{en} \qquad |A| = |B| = |100|,$$

wat is dan de kleinst mogelijke waarde van $|A \cap B \cap C|$?

(A) 96 (B) 97 (C) 98 (D) 99 (E) 100

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1991–1992 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.[2]

1. Welk van de volgende getallen is het grootst?

$$(A.)\quad 2^{514} \quad (B.)\quad 4^{258} \quad (C.)\quad 8^{171} \quad (D.)\quad 16^{128} \quad (E.)\quad 32^{103}$$

---

2. Hoeveel elementen heeft de volgende deelverzameling van $\mathbb{Q}$

$$\left\{\frac{p}{q} \,||\, p,q \in \mathbb{N};\;\; 1 \leq p \leq 10 \text{ en } 1 \leq q \leq 10\right\}\ ?$$

$$(A.)\quad 20 \quad (B.)\quad 50 \quad (C.)\quad 63 \quad (D.)\quad 83 \quad (E.)\quad 100$$

---

3. Men definieert $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. B.v. $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. Als we 1991! delen door 1992, dan geldt voor de rest r:

$(A.)$ $r = 0$ $(B.)$ $1 \leq r < 191$ $(C.)$ $191 \leq r < 591$
$(D.)$ $591 \leq r < 1291$ $(E.)$ $1291 \leq r \leq 1991$

---

4. Als we a^b noteren als $a \star b$, dan is de breuk

$$\frac{2 \star (2 \star (2 \star 2))}{((2 \star 2) \star 2) \star 2}$$

gelijk aan:

$$(A.)\quad \frac{1}{256} \quad (B.)\quad \frac{1}{4} \quad (C.)\quad 1 \quad (D.)\quad 4 \quad (E.)\quad 256$$

[2]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w., overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

5. Als $-1 < 2x + 3 < 1$, dan is $-2x + 4$ begrepen tussen

(*A.*) 2 en 6 (*B.*) -2 en 0 (*C.*) 0 en 2 (*D.*) 2 en 4 (*E.*) 6 en 8

---

6. Een massieve kubus, ribbe 9 cm, wordt eerst aan de buitenkant volledig geschilderd en daarna in 27 congruente kubusjes van 3 cm ribbe gezaagd. Hoe groot is de totale onbeschilderde oppervlakte van alle kubusjes samen?

(*A.*) 243 cm^2 (*B.*) 324 cm^2 (*C.*) 486 cm^2 (*D.*) 648 cm^2 (*E.*) 972 cm^2

---

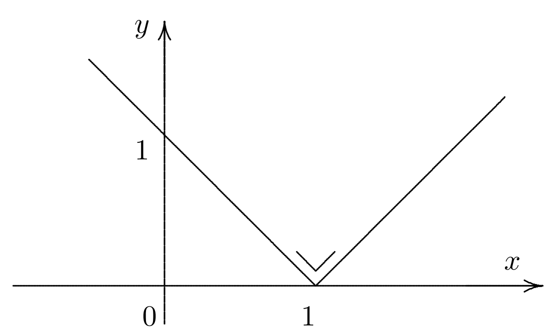
7. In een rechthoekige driehoek abc is het punt p, dat het snijpunt is van de bissectrices uit b en c, $\sqrt{8}$ verwijderd van de schuine zijde. Hoe groot is de afstand van het hoekpunt a (rechte hoek) tot p?

(*A.*) $\sqrt{8}$ (*B.*) 3 (*C.*) $\sqrt{10}$ (*D.*) $\sqrt{12}$ (*E.*) 4

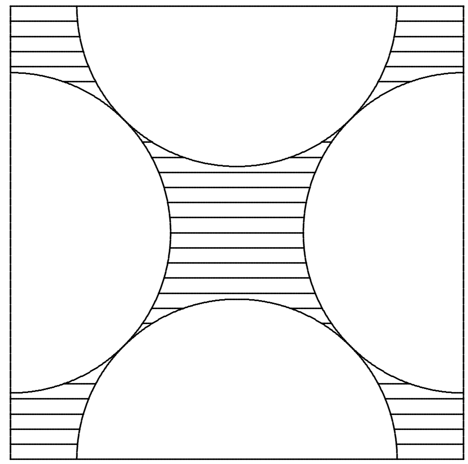
8.

Hiernaast werd de grafiek getekend van de funktie die x afbeeldt op

(*A.*) $|x| + 1$ (*B.*) $|x| - 1$
(*C.*) $|x - 1|$ (*D.*) $|x + 1|$
(*E.*) $1 - |x|$



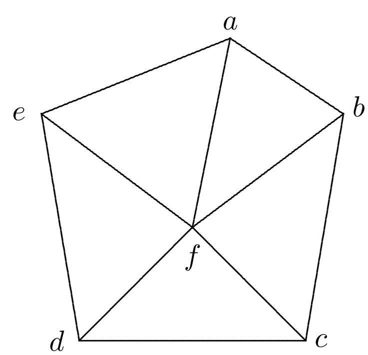
9.



Gegeven een vierkant met zijde 1 en vier even grote halve cirkels die volledig symmetrisch liggen en raken (zie figuur). De oppervlakte van het gearceerde deel is:

$(A.)$ $\frac{\pi}{2}$ $(B.)$ $1-\frac{\pi}{4}$
$(C.)$ $4-\pi$ $(D.)$ $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$(E.)$ geen van de vorige

10.



We wensen de punten a, b, c, d, e en f in de bijgaande figuur te kleuren op zo een manier dat de eindpunten van een lijnstuk steeds een verschillende kleur hebben. Hoeveel verschillende kleuren hebben we hiervoor minstens nodig?

$(A.)$ 2 $(B.)$ 3 $(C.)$ 4
$(D.)$ 5 $(E.)$ 6

---

11. Voor welke van onderstaande n is $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ deelbaar door 5?

$(A.)$ $n = 1980$ $(B.)$ $n = 1988$ $(C.)$ $n = 1990$ $(D.)$ $n = 1992$ $(E.)$ $n = 2000$

---

12. Supervlo verbetert het wereldrecord verspringen! Om op dreef te komen springt ze eerst 1 naar rechts, de tweede sprong is dubbel zo ver maar naar links, dan weer dubbel zo ver naar rechts en zo verder, afwisselend van links naar rechts. Als ze $2n+1$ sprongen maakt, dan voldoet de afstand a tussen begin- en eindpunt aan:

$(A.)$ $a \leq 2^{2n-1}$ $(B.)$ $2^{2n-1} < a < 2^{2n}$ $(C.)$ $a = 2^{2n}$
$(D.)$ $2^{2n} < a < 2^{2n+1}$ $(E.)$ $2^{2n+1} \leq a$

13. Hoeveel natuurlijke getallen n, met $1 \leq n \leq 500$, zijn niet deelbaar door 2 en niet deelbaar door 3?

$(A.)$ 83 $(B.)$ 84 $(C.)$ 166 $(D.)$ 167 $(E.)$ 417

---

14. Voor hoeveel waarden van k heeft het volgende stelsel in x en y minstens één oplossing?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y = 3 \\ x + ky = 5 \end{cases}$$

$(A.)$ 0 $(B.)$ 1 $(C.)$ 2 $(D.)$ 3 $(E.)$ oneindig veel

---

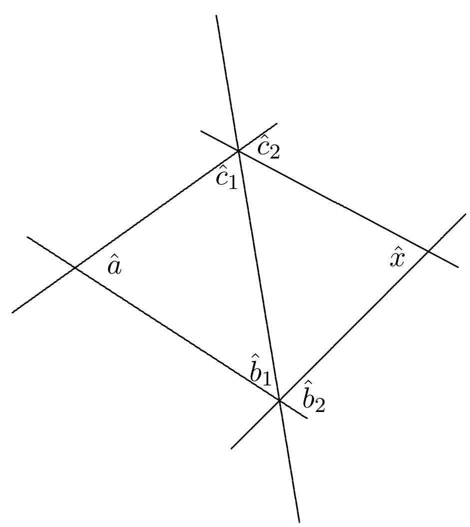
15. In een cirkel met middelpunt o en straal 1 trekt men eerst een middellijn $[ab]$, vervolgens een zijde $[bc]$ van een ingeschreven regelmatige vierhoek, dan een zijde $[cd]$ van een ingeschreven regelmatige achthoek. Tenslotte verbindt men d met het middelpunt o. Men verkrijgt zo een convexe vierhoek $bcdo$ waarvan de oppervlakte gelijk is aan:

$(A.)$ 1 $(B.)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(C.)$ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ $(D.)$ $\frac{4+\sqrt{2}}{8}$ $(E.)$ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

16.

In de figuur hiernaast is $\hat{a} < 60°$, $\hat{c}_1 = 2\hat{c}_2$ en $\hat{b}_1 = 2\hat{b}_2$. Dan is $\hat{x}$ gelijk aan

$(A.)$ $90° - \frac{3}{2}\hat{a}$ $(B.)$ $90° - \hat{a}$
$(C.)$ $180° - 3\hat{a}$ $(D.)$ $\hat{a}$
$(E.)$ $180° - 2\hat{a}$



---

17. Noem $\lfloor a \rfloor$ het grootste geheel getal $\leq a$. B.v. $\lfloor 1992 \rfloor = 1992$, $\lfloor 1{,}5 \rfloor = 1$, $\lfloor -9{,}2 \rfloor = -10$. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking

$$\lfloor 2 - x^2 \rfloor = |2 - x^2| \ ?$$

(*A.*) 0 (*B.*) 2 (*C.*) 3 (*D.*) 5 (*E.*) oneindig veel

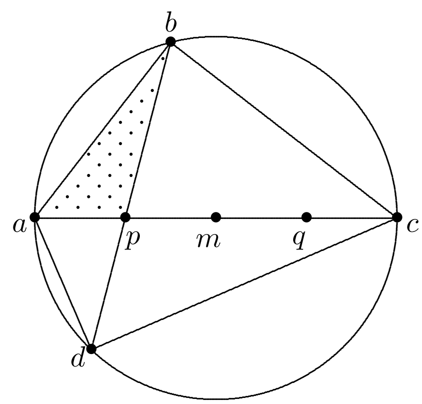
---

18. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x + \cos x$, dan is $f(\mathbb{R}+)$ gelijk aan

(*A.*) $[-1, 1]$ (*B.*) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (*C.*) $[-2, 2]$ (*D.*) $[0, \sqrt{2}]$ (*E.*) $[0, 2]$

19.

De middellijn $[ac]$ van een cirkel wordt door p, m en q in vier gelijke delen verdeeld. Door p trekt men een rechte die de cirkel snijdt in b en d, zodanig dat $|pd| = \frac{3}{2}|ap|$. Als men de oppervlakte van driehoek abp als eenheid neemt, hoe groot is dan de oppervlakte van de vierhoek $abcd$?



(*A.*) 7 (*B.*) 7,75 (*C.*) 8 (*D.*) 8,5 (*E.*) 9,25

---

20. Drie rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden (3 dm, 4 dm), (4 dm, 5 dm) en (5 dm, 3 dm) worden aan elkaar gelast, zodat de rechthoekszijden van gelijke lengte samenkomen. Hoeveel liter water kan het bakje dat zo gevormd wordt maximaal bevatten?

(*A.*) 5 (*B.*) 10 (*C.*) 15 (*D.*) 20 (*E.*) 30

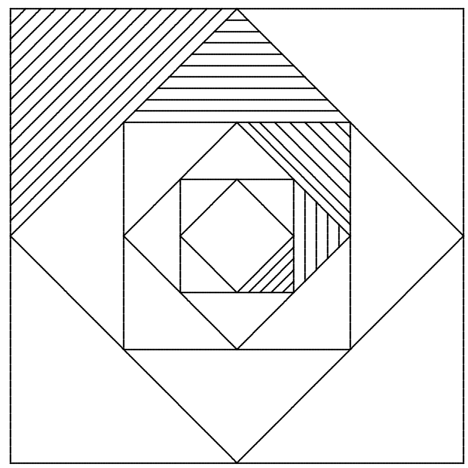
---

21. Bij één pedaalomwenteling legt een wielrenner 6 meter af. Het voorste tandwiel telt 40 tanden, het achterste 15. Als het voorste tandwiel van zijn fiets 60 tanden zou tellen en het achterste 20, hoeveel meter zou een wielrenner dan afleggen bij één pedaalomwenteling?

$(A.)$ 3 $(B.)$ 5,333 . . . $(C.)$ 6 $(D.)$ 6,75 $(E.)$ 12

---

22. In een vierkant met zijde 1 verbindt men de middelpunten van de zijden om een nieuw vierkant te vormen. Met het nieuwe vierkant doen we hetzelfde en zo onbeperkt verder. Beschouw nu een van de vier overgebleven driehoekjes in het oorspronkelijk vierkant en voeg daar het overgebleven driehoekje aan toe uit het tweede vierkant dat grenst aan de rechterkant van zijn hypotenusa (bekeken vanuit het midden van het vierkant). Doe hetzelfde met dit nieuwe driehoekje en met alle volgende (zie figuur voor de eerste vijf stappen). De figuur die ontstaat als unie van al die driehoekjes heeft een oppervlakte die gelijk is aan



$(A.)$ $\frac{1}{5}$ $(B.)$ $\frac{1}{4}$ $(C.)$ $\frac{1}{3}$ $(D.)$ $\frac{3}{8}$ $(E.)$ $\frac{1}{2}$

---

23. Zij $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Kies een willekeurige afbeelding $f : A \to A$. Hoe groot is de kans dat f een bijectie is?

$(A.)$ $\frac{1}{4}$ $(B.)$ $\frac{1}{6}$ $(C.)$ $\frac{1}{16}$ $(D.)$ $\frac{3}{32}$ $(E.)$ $\frac{1}{64}$

---

24. Drie echtparen vieren samen een feestje. Bij het binnenkomen schudt iedereen de hand van alle reeds aanwezige personen, behalve deze van zijn echtgeno(o)t(e). (Let wel, echtgenoten komen niet noodzakelijk samen toe.) In de loop van de avond stelt een van de aanwezigen aan de anderen de vraag hoeveel handen ze geschud hebben toen ze

binnenkwamen en krijgt daarop 5 verschillende antwoorden. Hoeveel handen heeft de vraagsteller zelf geschud toen hij binnenkwam?

(*A.*) 0 (*B.*) 1 (*C.*) 2 (*D.*) 3 (*E.*) 4

---

25. Beschouw in het vlak roosterpunten; dit zijn punten met gehele coördinaten. Hoeveel roosterpunten p_1, p_2, $\ldots$, p_k moet je minstens nemen om er zeker van te zijn dat het midden van minstens één van de lijnstukken $[p_i p_j]$ met $i \neq j$ ook een roosterpunt is.

(*A.*) 2 (*B.*) 3 (*C.*) 4 (*D.*) 5 (*E.*) 6

---

26. Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ is:

(*A.*) 0 (*B.*) 1 (*C.*) 2 (*D.*) 3 (*E.*) 4

---

27. Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$$f(n) = \begin{cases} n - 3 & \text{als } n \geq 1000 \\ f(f(n+6)) & \text{als } n < 1000 \end{cases}$$

dan is $f(1992) - f(1)$ gelijk aan

(*A.*) 989 (*B.*) 992 (*C.*) 1988 (*D.*) 1991 (*E.*) niet te bepalen

---

28. In driehoek abc zijn de punten b en c vast en a variabel. In die driehoek zijn de zwaartelijnen door de hoekpunten a en b orthogonaal. De maximale waarde van de hoogte uit a op bc is:

(*A.*) $\dfrac{|bc|}{2}$ (*B.*) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}|bc|$ (*C.*) $\dfrac{3}{4}|bc|$ (*D.*) $\dfrac{3}{2}|bc|$ (*E.*) willekeurig groot.

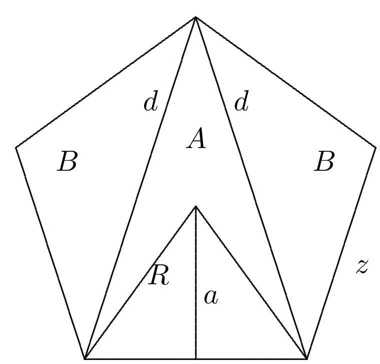
---

29. Men beschouwt drie ribben van een kubus die in verschillende richtingen lopen en die twee aan twee geen gemeenschappelijke hoekpunten hebben. Het vlak bepaald door de middens van deze drie ribben snijdt de kubus volgens:

(A.) een gelijkzijdige driehoek
(B.) een driehoek die niet gelijkzijdig is
(C.) een vierhoek
(D.) een zeshoek die niet regelmatig is
(E.) een regelmatige zeshoek

30.

Een hoekpunt van een regelmatige vijfhoek wordt verbonden met twee tegenoverliggende hoekpunten. Er ontstaan een scherphoekige en twee stomphoekige gelijkbenige driehoeken met respectieve oppervlakten A en B. Zijn nu R, z, a en d respectievelijk de straal van de omgeschreven cirkel, de zijde, het apothema en de lengte van de diagonaal in de vijfhoek, dan geldt



$(A.)$ $Az = Bd$ $(B.)$ $AR = Bd$ $(C.)$ $Aa = Bz$
$(D.)$ $Az = B(a + R)$ $(E.)$ $Az^2 = Bd^2$

---

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1991-1992 : Tweede Ronde.

De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.[2]

1. $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$

$$(A)\quad 6^6 \qquad (B)\quad 6^7 \qquad (C)\quad 36^6 \qquad (D)\quad 6^{36} \qquad (E)\quad 36^{36}$$

---

2. Als $3(4x + 5\pi) = P$, dan is $6(8x + 10\pi) =$

$$(A)\quad 2P \qquad (B)\quad 4P \qquad (C)\quad 6P \qquad (D)\quad 8P \qquad (E)\quad 18P$$

---

3. Een vaas is gevuld met muntstukken en parels, telkens gemaakt uit zilver of goud. Twintig procent van de voorwerpen in de vaas zijn parels. Veertig procent van de muntstukken in de vaas zijn gemaakt van zilver. Hoeveel procent van de voorwerpen in de vaas zijn dan gouden muntstukken?

$$(A)\quad 40\% \qquad (B)\quad 48\% \qquad (C)\quad 52\% \qquad (D)\quad 60\% \qquad (E)\quad 80\%$$

---

4. Als $m > 0$ en de punten $(m, 3)$ en $(1, m)$ op een rechte met richtingscoëfficiënt m liggen, dan is m gelijk aan

$$(A)\quad 1 \qquad (B)\quad \sqrt{2} \qquad (C)\quad \sqrt{3} \qquad (D)\quad 2 \qquad (E)\quad \sqrt{5}$$

---

[2] ©Committee on the American Mathematics Competition, Mathematical Association of America, 1992

5. Als a, b en c positieve gehele getallen zijn en a en b oneven zijn, dan is $3^a + (b-1)^2 c$

(A) oneven voor alle waarden van c
(B) even voor alle waarden van c
(C) oneven als c even is; even als c oneven is
(D) oneven als c oneven is; even als c even is
(E) oneven als c geen drievoud is; even als c een drievoud is

---

6. Als $x > y > 0$, dan is $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$ gelijk aan

(A) $(x-y)^{y/x}$ (B) $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}$ (C) 1 (D) $\left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$ (E) $(x-y)^{x/y}$

---

7. De verhouding van w tot x is $4:3$, die van y tot z is $3:2$ en die van z tot x is $1:6$. Wat is dan de verhouding van w tot y?

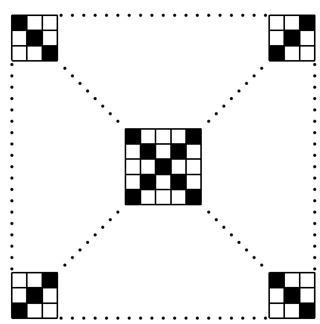
(A) $1:3$ (B) $16:3$ (C) $20:3$ (D) $27:4$ (E) $12:1$

8.

Een vierkante vloer is bedekt met congruente vierkante tegels. De tegels op de twee diagonalen van de vloer zijn zwart. Alle andere tegels zijn wit. Als er 101 zwarte tegels zijn, dan is het totaal aantal tegels gelijk aan

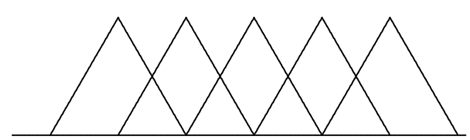
(A) 121 (B) 625 (C) 676

(D) 2500 (E) 2601



---

9. Vijf gelijkzijdige driehoeken, elk met zijden van lengte $2\sqrt{3}$, worden aan eenzelfde kant geplaatst van een rechte die van elke driehoek een zijde bevat. Langs deze rechte gezien, is het midden van de zijde van een driehoek een hoekpunt van de volgende driehoek. Bepaal de oppervlakte van het deel van het vlak dat bedekt is door de unie van deze vijf driehoekige gebieden.

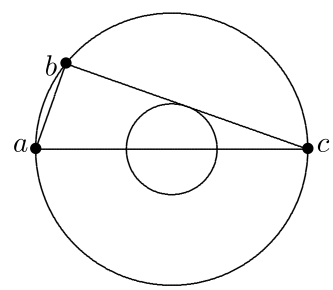


(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) $10\sqrt{3}$ (E) $12\sqrt{3}$

10. Het aantal positieve gehele getallen k waarvoor de vergelijking $kx - 12 = 3k$ een geheel getal als oplossing voor x heeft, is gelijk aan

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

11. De stralen van twee concentrische cirkels verhouden zich als 1 tot 3. Als $[ac]$ een diameter is van de grootste cirkel en $[bc]$ een koorde is van de grootste cirkel die raakt aan de kleinste cirkel en als $|ab| = 12$, dan is de straal van de grootste cirkel gelijk aan



(A) 13 (B) 18 (C) 21

(D) 24 (E) 26

12. Wanneer men de rechte $x - 3y + 11 = 0$ spiegelt ten opzichte van de X-as, bekomt men $y = mx + b$ als beeld. De waarde van $m + b$ is dan gelijk aan

(A) -6 (B) -5 (C) -4 (D) -3 (E) -2

13. Hoeveel koppels positieve gehele getallen (a, b) met $a + b \leq 100$ voldoen aan de vergelijking

$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13 \ ?$$

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 13

14. Welke van de volgende vergelijkingen leveren dezelfde grafische voorstelling op?

I. $y = x - 2$ **II.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ **III.** $(x + 2)y = x^2 - 4$

(A) alleen **I** en **II** (B) alleen **I** en **III** (C) alleen **II** en **III**

(D) **I**, **II** en **III** (E) Geen. Alle vergelijkingen hebben verschillende grafische voorstellingen.

15. Stel $i = \sqrt{-1}$. Definieer een rij complexe getallen zodat $z_1 = 0$ en $z_{n+1} = z_n^2 + i$ (voor $n \geq 1$). Hoe ver ligt z_{111} in het complexe vlak van de oorsprong?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{110}$ (E) $\sqrt{2^{55}}$

16. Als voor drie verschillende positieve getallen x, y en z geldt dat

$$\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$$

dan is $\frac{x}{y}$ gelijk aan

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) 2

17. Schrijf alle gehele getallen van 19 tot 92 achtereen en vorm zo een groot geheel getal

$$N = 19202122\ldots909192.$$

Als 3^k de grootste macht van 3 is die N deelt, dan geldt dat $k =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

18. Voor de stijgende rij van strikt positieve gehele getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geldt de eigenschap dat $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ (voor alle $n \geq 1$). Als $a_7 = 120$, dan is a_8 gelijk aan

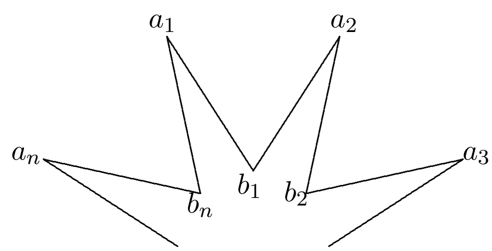
(A) 128 (B) 168 (C) 193 (D) 194 (E) 210

19. Beschouw voor elk hoekpunt van een massieve kubus het viervlak (tetraëder) bepaald door dat hoekpunt en de middens van de drie ribben van de kubus die door dat hoekpunt gaan. Het stuk van de kubus dat overblijft wanneer men de 8 zo gevormde viervlakken wegsnijdt, noemen we een kuboctaëder. Welk van de volgende waarden benadert het best de verhouding van het volume van de kuboctaëder tot het volume van de oorspronkelijke kubus?

(A) 75% (B) 78% (C) 81% (D) 84% (E) 87%

20.

De figuur toont een gedeelte van een "n-puntige regelmatige ster". Dit is een gesloten veelhoek waarin de $2n$ ribben congruent zijn en verder ook de hoeken a_1, a_2, ..., a_n en de hoeken b_1, b_2, ..., b_n congruent zijn. Als de scherpe hoek in a_1 $10°$ kleiner is dan de scherpe hoek in b_1, dan is n gelijk aan



(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36 (E) 60

---

21. Voor een eindige rij getallen $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definieert men de *Cesàro-som* van A als

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n},$$

waarin $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Stel dat de Cesàro-som van de rij (met 99 termen) $(a_1, a_2, \ldots, a_{99})$ gelijk is aan 1000, wat is dan de Cesàro-som van de rij (met 100 termen) $(1, a_1, a_2, \ldots, a_{99})$?

(A) 991 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1009

---

22. Kies 10 punten op de positieve X-as, X^+, en 5 punten op de positieve Y-as, Y^+. Teken nu de 50 lijnstukken die men bekomt door telkens één van die 10 punten (op X^+) te verbinden met één van die 5 punten (op Y^+). Bepaal nu het grootste aantal snijpunten van deze 50 lijnstukken die in het inwendige van het eerste kwadrant kunnen liggen.

(A) 250 (B) 450 (C) 500 (D) 1250 (E) 2500

---

23. Zij S de grootste deelverzameling van $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ zodat geen enkel tweetal verschillende elementen van S een som heeft die deelbaar is door 7. Bepaal het aantal elementen van S.

(A) 6 (B) 7 (C) 14 (D) 22 (E) 23

24. Onderstel dat $abcd$ een parallellogram is met oppervlakte 10, $|ab| = 3$ en $|bc| = 5$. Plaats nu e, f en g resp. op de zijden $[ab]$, $[bc]$ en $[ad]$, zó dat $|ae| = |bf| = |ag| = 2$. Onderstel dat de rechte door g en evenwijdig met $[ef]$ het lijnstuk $[cd]$ snijdt in h. Dan is de oppervlakte van de vierhoek $efhg$ gelijk aan

(A) 4 (B) 4,5 (C) 5 (D) 5,5 (E) 6

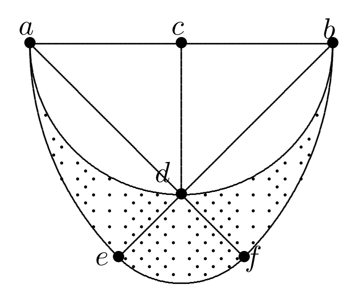
---

25. In driehoek abc is $\angle abc = 120°$, $|ab| = 3$ en $|bc| = 4$. Onderstel dat de loodlijnen op $[ab]$ in a en op $[bc]$ in c elkaar snijden in het punt d. Dan is $|cd|$ gelijk aan

(A) 3 (B) $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ (C) 5 (D) $\dfrac{11}{2}$ (E) $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$

26.

De halve cirkel $\overset{\frown}{ab}$ heeft middelpunt c en straal 1. Het punt d ligt op $\overset{\frown}{ab}$ en $[cd] \perp [ab]$. Verleng $[bd]$ en $[ad]$ resp. tot aan de punten e en f, en wel zó dat de bogen $\overset{\frown}{ae}$ en $\overset{\frown}{bf}$ cirkelbogen zijn met resp. b en a als middelpunt. De cirkelboog $\overset{\frown}{ef}$ tenslotte, heeft middelpunt d. Bepaal de oppervlakte van de gestippelde "glimlach", $aefbda$.



(A) $(2-\sqrt{2})\pi$ (B) $2\pi - \pi\sqrt{2} - 1$ (C) $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\pi$

(D) $\dfrac{5\pi}{2} - \pi\sqrt{2} - 1$ (E) $(3-2\sqrt{2})\pi$

---

27. In een cirkel met straal r zijn koorden $[ab]$ met lengte 10 en $[cd]$ met lengte 7 getrokken. Wanneer men deze koorden $[ab]$ en $[cd]$ verlengt resp. doorheen de punten b en c, dan snijden ze elkaar in het punt p dat buiten de cirkel ligt. Als $\angle apd = 60°$ en $|bp| = 8$, dan is r^2 gelijk aan

(A) 70 (B) 71 (C) 72 (D) 73 (E) 74

28. Zij $i = \sqrt{-1}$. Het produkt van de reële delen van de wortels van de vergelijking $z^2 - z = 5 - 5i$ is gelijk aan

$$(A)\quad -25 \qquad (B)\quad -6 \qquad (C)\quad -5 \qquad (D)\quad \frac{1}{4} \qquad (E)\quad 25$$

29. Bij een "vervalst" muntstuk is de kans om kop te gooien 2/3. Als we dit muntstuk 50 keer opgooien, wat is dan de kans dat het totaal aantal keren dat kop gegooid werd even is?

$$(A)\quad 25\left(\frac{2}{3}\right)^{50} \qquad (B)\quad \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^{50}}) \qquad (C)\quad \frac{1}{2}$$

$$(D)\quad \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3^{50}}) \qquad (E)\quad \frac{2}{3}$$

30. Zij $abcd$ een gelijkbenig trapezium met basissen $|ab| = 92$ en $|cd| = 19$. Onderstel dat $|ad| = |bc| = x$ en dat een cirkel waarvan het middelpunt op $[ab]$ ligt, raakt aan de ribben $[ad]$ en $[bc]$. Als m de kleinst mogelijke waarde voor x is, dan is m^2 gelijk aan

$$(A)\quad 1369 \qquad (B)\quad 1679 \qquad (C)\quad 1748 \qquad (D)\quad 2109 \qquad (E)\quad 8825$$

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1992–1993 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.[2]

1. $\sqrt[6]{a}\,\sqrt[3]{a}$, met $a > 0$, is gelijk aan

(A) $\sqrt{a}$	(B) $\sqrt[9]{a}$	(C) $\sqrt[12]{a}$	(D) $\sqrt[9]{a^2}$	(E) $\sqrt[18]{a^2}$

2. Hoeveel van de volgende vier uitspraken zijn waar?

$$\begin{aligned} 2^{10} + 2^{10} &= 2^{11} \\ 2^{10} - 2^{10} &= 0^{10} \\ 2^{10} \cdot 2^{10} &= 2^{20} \\ 2^{10} : 2^{10} &= 10^{0} \end{aligned}$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

3. $1 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1} + 1}$ is gelijk aan

(A) 2	(B) $\dfrac{1}{x}$	(C) $-\dfrac{1}{x}$	(D) $x - 1$	(E) $\dfrac{x-1}{x}$

4. Voor hoeveel gehele getallen n is $\sqrt{1-(n+2)^2}$ een reëel getal?

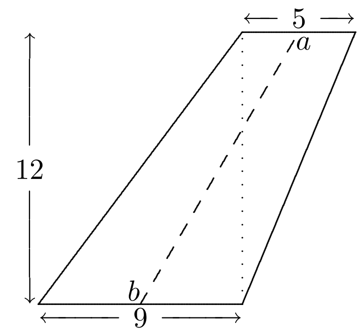
(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) oneindig veel

5. Welk getal is het kleinst?

(A) $0{,}4^2$	(B) $0{,}5^2$	(C) $0{,}5^{-1}$	(D) 5^{-1}	(E) $\sqrt{0{,}25}$

[2]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w., overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

6. Een stomphoekig trapezium (zie figuur) heeft grote basis gelijk aan 9 en kleine basis gelijk aan 5. De hoogte is gelijk aan 12. Bovendien gaat de loodlijn uit een hoekpunt van de kleine basis door het tegenovergestelde hoekpunt van de grote basis. Verbindt men de middens van de kleine basis en de grote basis, dan ontstaat een lijnstuk $[ab]$ waarvan de lengte x voldoet aan

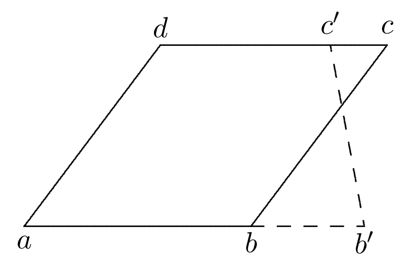


(A) $x \leq 13{,}5$	(B) $13{,}5 < x < 14$	(C) $x = 14$
(D) $14 < x < 14{,}5$	(E) $14{,}5 \leq x$	

7. Hoeveel natuurlijke getallen n met $1 < n < 1000$ zijn een macht met gehele exponent m ($m > 1$) van een oneven getal dat niet priem is?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

8. Gegeven is een parallellogram $abcd$ (zie figuur). De zijde $[dc]$ wordt ingekort met 25%, de zijde $[ab]$ wordt verlengd met 50%. Er ontstaat een trapezium $ab'c'd$. Hoeveel procent is de oppervlakte van dit trapezium groter dan de oppervlakte van het parallellogram $abcd$?



(A) 0%	(B) 12,5%	(C) 20%	(D) 25%	(E) 40%

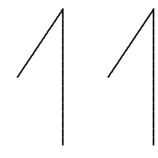
9. $2^{1993} - 1992$ eindigt op

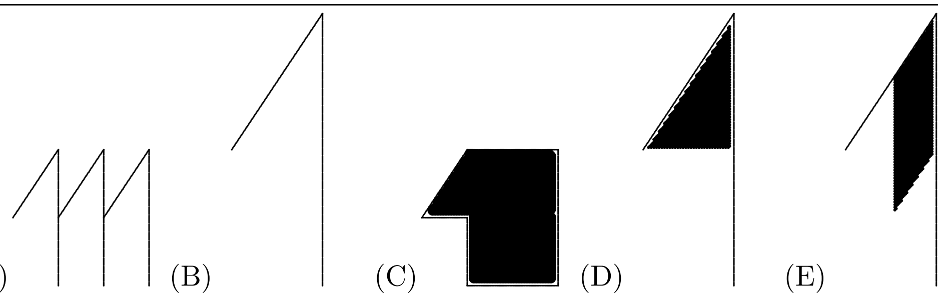
(A) 0	(B) 2	(C) 4	(D) 6	(E) 8

10. Het produkt $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{100})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{25})$ is een veelterm in x. De coëfficiënt van x^{50} is

(A) 1	(B) 25	(C) 26	(D) 50	(E) 51

11. Hoe ziet de figuur eruit gevormd door de eindpunten van alle vectoren $\vec{ov} + \vec{ow}$ als v het linkse cijfer 1 doorloopt en w het rechtse cijfer 1 doorloopt in de figuur hiernaast?





(A) (B) (C) (D) (E)

12. Een vliegtuig op weg van Bombay naar New York maakt een tussenlanding in Londen. Tijdens deze stop moeten de volgende taken uitgevoerd worden.

(1) bagage uitladen (duur : 20 minuten),

(2) passagiers laten uitstappen (duur : 10 minuten),

(3) bagage inladen (duur : 20 minuten, uit te voeren na (1)),

(4) vliegtuig schoonmaken (duur : 15 minuten, uit te voeren na (2)),

(5) bijtanken (duur : 20 minuten),

(6) technische controle (duur : 30 minuten),

(7) maaltijden aan boord brengen (duur : 10 minuten, uit te voeren na (2)),

(8) passagiers laten instappen (duur : 25 minuten, uit te voeren na (4) en (5)).

Hoe lang moet het vliegtuig minstens aan de grond blijven tijdens deze stop?

(A) 30 min	(B) 50 min	(C) 1 u	(D) 1 u 20 min	(E) 2 u 30 min

13. Het papierformaat A4 is zodanig dat de verhouding v van de lange zijde tot de korte zijde dezelfde blijft als men het papier in twee snijdt volgens de lijn die de middens van de lange zijden verbindt. Waaraan voldoet v?

(A) $v = 4$	(B) $v^2 = 4$	(C) $v^3 = 4$	(D) $v^4 = 4$	(E) $v^5 = 4$

14. Op een goniometrische cirkel is

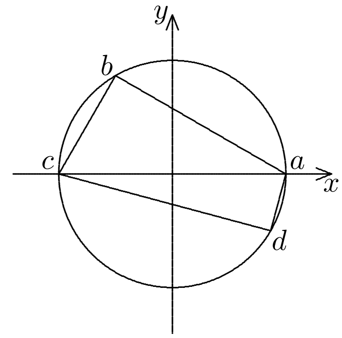
a het beeldpunt van 0°

b het beeldpunt van 120°

c het beeldpunt van 180°

d het beeldpunt van 330°

De oppervlakte van koordenvierhoek $abcd$ is dan gelijk aan



(A) $\sqrt{3}+1$	(B) $\sqrt{3}-1$	(C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$	(D) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$	(E) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{6}$

15. Tijdens de zomervakantie gingen vijf leerlingen (An, Bart, Carla, Doris, en Erik) regelmatig zwemmen. Het toeval wilde dat telkens één van de vijf ontbrak. An ging het minst vaak (5 keer), Erik het meest (8 keer). Wat kun je zeggen over het aantal zwembeurten van Bart, Carla en Doris?

(A) elk zes
(B) elk zeven
(C) twee zes en de andere zeven
(D) één zes en de anderen zeven
(E) geen idee want de informatie is onvoldoende

16. De rechte met vergelijking $y = ax$ en deze met vergelijking $y = -x + b$ snijden elkaar in een punt waarvan de twee coördinaten strikt negatief zijn. Hieruit volgt :

(A) $a > 0$ en $b > 0$
(B) $a > 0$ en $b < 0$
(C) $a < 0$ en $b > 0$
(D) $a < 0$ en $b < 0$
(E) $a \cdot b = 0$

17. Zij a, b, $c \in \mathbb{N}_0$. Welke uitspraak is fout?

(A) a deelt $b \Longrightarrow a$ deelt bc
(B) a deelt 0
(C) a deelt b en $c \Longrightarrow a$ deelt $2b + 5c$
(D) a deelt b en $c \Longrightarrow a$ deelt bc
(E) a deelt $bc \Longrightarrow a$ deelt b of a deelt c

18. Twee congruente kegels met een hoogte die het dubbel is van de straal R van hun grondvlak hebben een gemeenschappelijke as en zijn zodanig geplaatst dat elk van hen zijn top heeft in het grondvlak van de andere. Het deel van de ruimte ingenomen door deze twee kegels heeft volume

(A) $\dfrac{7}{12}\pi R^3$	(B) $\dfrac{2}{3}\pi R^3$	(C) $\dfrac{7}{6}\pi R^3$	(D) $\dfrac{5}{4}\pi R^3$	(E) $\dfrac{4}{3}\pi R^3$

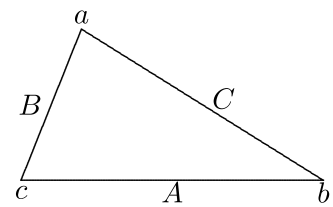
19. We beschikken over een rode, een blauwe en een groene stift en willen de zijden van een gelijkzijdige driehoek kleuren. Op hoeveel verschillende manieren kan dit? (Twee kleuringen van de driehoek worden als gelijk beschouwd als de ene in de andere overgaat door de driehoek **in het vlak** te verplaatsen.)

(A) 6	(B) 10	(C) 11	(D) 12	(E) 27

20. Als je in $(a^b)^c$ voor a, b en c telkens drie verschillende getallen neemt uit de verzameling $\{0,1,2,3\}$, hoeveel verschillende waarden verkrijg je dan?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

21. In driehoek abc staan de zwaartelijnen uit b en c loodrecht op elkaar. Hieruit volgt dat $B^2 + C^2$ gelijk is aan

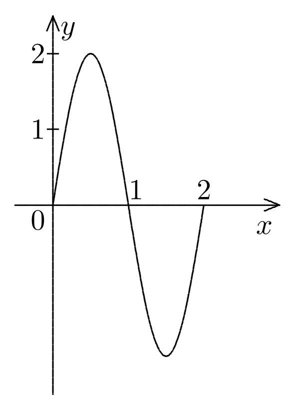


(A) A^2	(B) $2A^2$	(C) $3A^2$	(D) $4A^2$	(E) $5A^2$

22. Een palindroom is een natuurlijk getal dat onveranderd blijft als het van links naar rechts wordt gelezen of van rechts naar links; voorbeelden zijn 121, 0, 2002 en 4. Het aantal palindromen kleiner dan 1 000 000 is

(A) 900	(B) 1991	(C) 1993	(D) 1999	(E) 2220

23. De grafiek hiernaast geeft een volledige periode van een sinusfunctie. Het voorschrift van de functie is

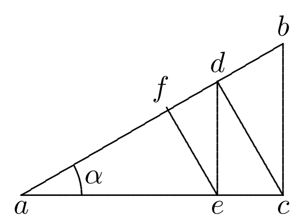


(A) $y = 2\sin\dfrac{x}{\pi}$	(B) $y = 2\sin\dfrac{\pi}{2}x$
(C) $y = \sin 2x$	(D) $y = \sin \pi x$
(E) $y = 2\sin \pi x$	

24. Het domein D van de functie $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x-1}$ is $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. De beeldverzameling $f(D)$ is

(A) $\mathbb{R}\backslash]-1,0[$	(B) $\mathbb{R}\backslash]0,1[$	(C) $\mathbb{R}\backslash]-2,0[$
(D) $\mathbb{R}\backslash]0,2[$	(E) $\mathbb{R}$	

25. In een rechthoekige driehoek abc is $|ab| = 4$ en $\widehat{a} = \alpha$. Verder is $cd \perp ab$, $de \perp ac$ en $ef \perp ab$. De lengte van $[ef]$ is gelijk aan



(A) $4\sin^4\alpha$	(B) $4\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$	(C) $4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$
(D) $4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha$	(E) $4\cos^4\alpha$	

26. Als de hoeken α, β en γ van een driehoek opeenvolgende termen zijn van een rekenkundige rij, dan is

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} =$$

(A) $3\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) 1 (E) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

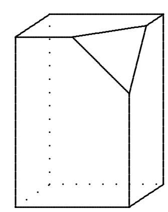
27. Een geslacht bestaat uit een stamouderpaar dat drie kinderen heeft waarvan er twee huwen en één niet. Bij elk gehuwd paar doet zich dezelfde situatie voor (drie kinderen waarvan er twee huwen en één niet). Hoeveel personen komen er dan maximaal voor in de stamboom tot en met de tiende generatie volgend op de stamouders (alle echtgenoten worden meegerekend)?

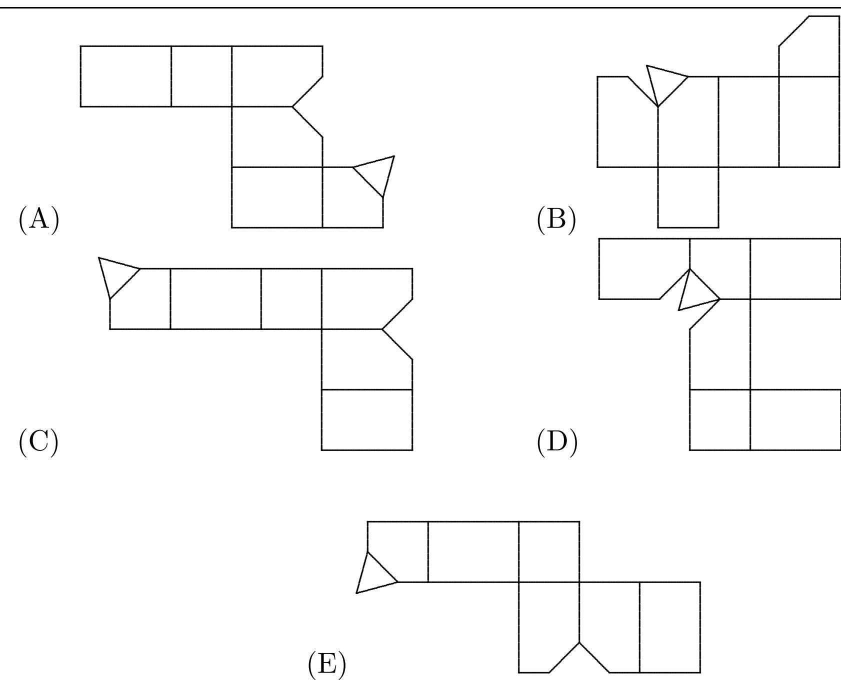
(A) 4095 (B) 4102 (C) 4104 (D) 5115 (E) 5117

28. We stellen door $\lfloor x \rfloor$ het grootste geheel getal voor dat kleiner is dan of gelijk aan x. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Welke van de volgende uitspraken is juist?

(A) $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ (B) $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
(C) $\lfloor x+y \rfloor > \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ (D) $\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
(E) $\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

29. De ruimtefiguur hiernaast is een balk waarvan in een hoekpunt een piramide is weggenomen. Welke van de volgende ontwikkelingen (op schaal getekend) is deze van de ruimtefiguur?





30. Voor hoeveel natuurlijke getallen n, met $100 \leq n \leq 200$, is de breuk $\dfrac{n^2 - 3}{n^2 - 1}$ vereenvoudigbaar?

(A) 0	(B) 25	(C) 50	(D) 76	(E) 101

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1992-1993 : Tweede Ronde.

De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële “foreign coordinator” voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

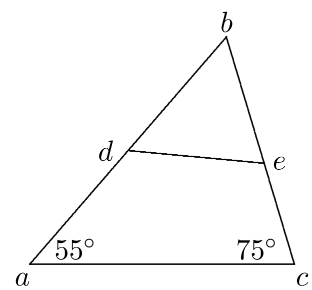
1.1 De problemen.[2]

1. Als a, b en c gehele getallen zijn, noteren we $\boxed{a, b, c}$ voor $a^b - b^c + c^a$.
   Zo is $\boxed{1, -1, 2}$ gelijk aan

(A) -4	(B) -2	(C) 0	(D) 2	(E) 4

2. In Δabc is $\angle a = 55°$ en $\angle c = 75°$. Ook ligt d op de zijde [ab] en e op de zijde $[bc]$. Als je weet dat $|db| = |be|$, dan is de hoek $\angle bed$ gelijk aan

(A) $50°$	(B) $55°$
(C) $60°$	(D) $65°$
(E) $70°$	



3. $\dfrac{15^{30}}{45^{15}} =$

(A) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15}$	(B) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$	(C) 1	(D) 3^{15}	(E) 5^{15}

4. We definiëren de bewerking “$\circ$” (voor alle reële getallen x en y) door te stellen $x \circ y = 4x - 3y + xy$. Voor hoeveel reële getallen y geldt dat $3 \circ y = 12$?

(A) 0	(B) 1	(C) 3	(D) 4	(E) meer dan 4

5. Vorig jaar kostte een fiets 16000 BF en een veiligheidshelm 4000 BF. Dit jaar verhoogde de prijs van de fiets met 5% en die van de helm met 10%. Dit komt neer op een prijsverhoging, voor de fiets en de helm samen, van hoeveel procent?

(A) 6%	(B) 7%	(C) 7,5%	(D) 8%	(E) 15%

6. $\sqrt{\dfrac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} =$

(A) $\sqrt{2}$	(B) 16	(C) 32	(D) $12^{2/3}$	(E) $512,5$

---
[2] ©Committee on the American Mathematics Competition, Mathematical Association of America, 1993

7. We noteren R_k voor een geheel getal waarvan de decimale voorstelling bestaat uit een rij van k enen. Bv. $R_3 = 111$, $R_5 = 11111$, enz... . Als we R_{24} delen door R_4, dan is het quotiënt $Q = \dfrac{R_{24}}{R_4}$ een geheel getal waarvan de decimale voorstelling uit een rij met enkel enen en nullen bestaat. Het aantal nullen in Q is gelijk aan

(A) 10	(B) 11	(C) 12	(D) 13	(E) 15

8. Onderstel dat C_1 en C_2 cirkels zijn met straal 1 die in eenzelfde vlak liggen en elkaar raken. Hoeveel cirkels met straal 3 liggen er dan in dat vlak die raken zowel aan C_1 als aan C_2?

(A) 2	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 8

9. Land A telt $c\%$ van de wereldbevolking en bezit $d\%$ van de wereldrijkdom. Land B telt $e\%$ van de wereldbevolking en heeft $f\%$ van de rijkdom. Onderstel dat de inwoners van A de rijkdom van A onder elkaar gelijk verdelen, en evenzo, dat de inwoners van B de rijkdom van B gelijk verdelen. Bepaal nu de verhouding van de rijkdom van een inwoner van A ten opzichte van de rijkdom van een inwoner van B.

(A) $\dfrac{cd}{ef}$	(B) $\dfrac{ce}{df}$	(C) $\dfrac{cf}{de}$	(D) $\dfrac{de}{cf}$	(E) $\dfrac{df}{ce}$

10. Noteer r voor het getal dat ontstaat door zowel het grondtal als de exponent van a^b te verdrievoudigen $(a, b > 0)$. Als r gelijk is aan het product van a^b en x^b (voor $x > 0$), dan is x gelijk aan

(A) 3	(B) $3a^2$	(C) $27a^2$	(D) $2a^{3b}$	(E) $3a^{2b}$

11. Als $\log_2(\log_2(\log_2(x))) = 2$, hoeveel cijfers bevat de decimale voorstelling van het getal x dan?

(A) 5	(B) 7	(C) 9	(D) 11	(E) 13

12. Onderstel dat $f(2x) = \dfrac{2}{2+x}$ (voor alle $x > 0$), dan is $2f(x)$ gelijk aan

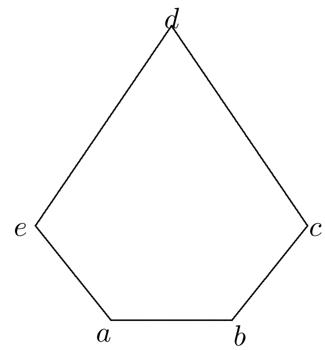
(A) $\dfrac{2}{1+x}$	(B) $\dfrac{2}{2+x}$	(C) $\dfrac{4}{1+x}$	(D) $\dfrac{4}{2+x}$	(E) $\dfrac{8}{4+x}$

13. Een vierkant met omtrek 20 is ingeschreven in een vierkant met omtrek 28. Wat is de grootste afstand tussen een hoekpunt van het binnenste vierkant en een hoekpunt van het buitenste vierkant?

(A) $\sqrt{58}$	(B) $\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$	(C) 8	(D) $\sqrt{65}$	(E) $5\sqrt{3}$

14. In een convexe vijfhoek $abcde$ geldt dat $\angle a = \angle b = 120^\circ$ en verder dat $|ea| = |ab| = |bc| = 2$ en $|cd| = |de| = 4$. Bepaal de oppervlakte van $abcde$.

(A) 10	(B) $7\sqrt{3}$
(C) 15	(D) $9\sqrt{3}$
(E) $12\sqrt{5}$	



15. Voor hoeveel waarden van n zal een regelmatige n-hoek binnenhoeken hebben waarvan de grootte in graden door middel van gehele getallen kan uitgedrukt worden?

(A) 16	(B) 18	(C) 20	(D) 22	(E) 24

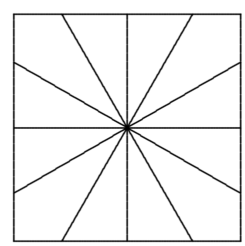
16. Beschouw de niet dalende rij van positieve gehele getallen

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

waarin het n-de positieve gehele getal n keer voorkomt. Wanneer de 1993-de term van deze rij gedeeld wordt door 5, dan is de rest gelijk aan

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

17. Jan schilderde een vogelpikbord op de voorkant van een vierkante klok door de "uur-posities" als randen te gebruiken (zie figuur). Als t staat voor de oppervlakte van één van de 8 driehoekige gebieden zoals dat ingesloten tussen "12 uur" en "1 uur", en als q staat voor de oppervlakte van één van de vier vierhoeken zoals die ingesloten tussen "1 uur" en "2 uur", dan is $\dfrac{q}{t}$ gelijk aan



(A) $2\sqrt{3}-2$	(B) $\dfrac{3}{2}$	(C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$	(D) $\sqrt{3}$	(E) 2

18. Karel en Bart beginnen op dezelfde dag met hun nieuwe job. Karel's werkschema bestaat uit telkens 3 opeenvolgende werkdagen gevolgd door 1 rustdag. Het werkschema van Bart bestaat uit telkens 7 opeenvolgende werkdagen gevolgd door 3 rustdagen. Hoeveel keer hebben Karel en Bart tijdens hun eerste 1000 dagen op dezelfde dag een rustdag?

(A) 48	(B) 50	(C) 72	(D) 75	(E) 100

19. Hoeveel geordende tweetallen (m, n) van positieve gehele getallen zijn oplossing van $\dfrac{4}{m} + \dfrac{2}{n} = 1$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) meer dan 4

20. Beschouw de vergelijking $10z^2 - 3iz - k = 0$, waarin z een complex getal is en waarbij $i^2 = -1$. Geef aan welke van de volgende beweringen waar is.

(A) Voor alle positieve reële getallen k zijn beide wortels zuiver imaginair.
(B) Voor alle negatieve reële getallen k zijn beide wortels zuiver imaginair.
(C) Voor alle zuiver imaginaire getallen k zijn beide wortels reëel en rationaal.
(D) Voor alle zuiver imaginaire getallen k zijn beide wortels reëel en irrationaal.
(E) Voor alle complexe getallen k is geen enkele wortel reëel.

21. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_k$ een eindige rekenkundige rij waarvoor geldt dat

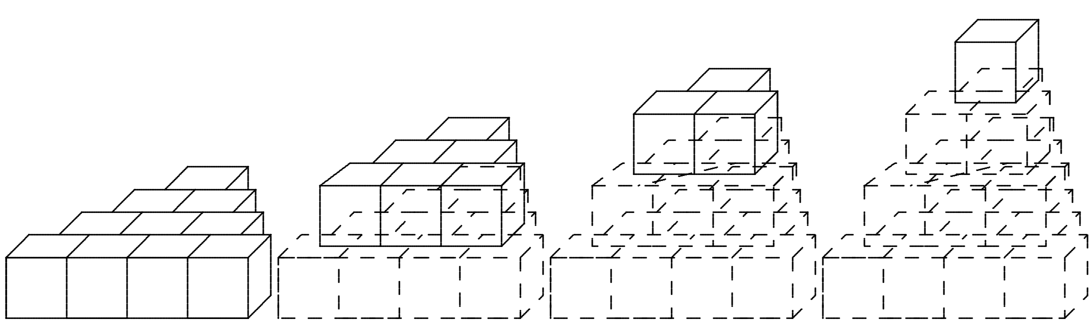
$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17 \text{ en}$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 77.$$

Als nu geldt dat $a_k = 13$, dan is k gelijk aan

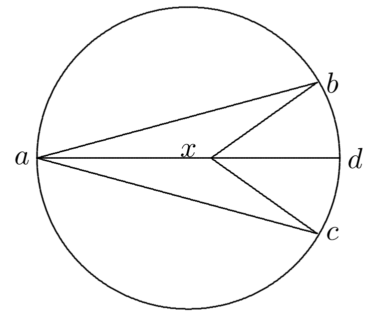
(A) 16	(B) 18	(C) 20	(D) 22	(E) 24

22. Twintig kubussen worden gerangschikt zoals getoond in de figuur. Eerst rangschikt men er 10 volgens een driehoekig patroon; dan komt er een laag met 6 kubussen, eveneens gerangschikt in een driehoekig patroon, gecentreerd op die 10; vervolgens komt een laag met 3 kubussen, opnieuw volgens een driehoekig patroon opgesteld en gecentreerd op de 6 kubussen; uiteindelijk wordt boven op de derde laag 1 kubus, eveneens gecentreerd, geplaatst. De kubussen in de onderste laag worden nu genummerd (in een zekere volgorde) van 1 tot 10. Elke kubus in de lagen 2, 3 en 4 krijgt vervolgens het nummer toegewezen dat de som is van de nummers van de drie kubussen op dewelke die kubus rust. Bepaal nu het kleinst mogelijke getal dat kan toegekend worden aan de top-kubus.



(A) 55	(B) 83	(C) 114	(D) 137	(E) 144

23. Punten a, b, c en d liggen op een cirkel met diameter 1; x is een punt op de diameter $[ad]$. Als $|bx| = |cx|$ en $3\angle bac = \angle bxc = 36°$, dan is $|ax|$ gelijk aan

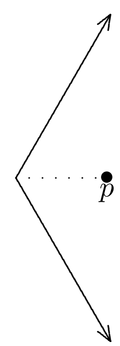


(A) $\cos 6° \cos 12° \sec 18°$
(B) $\cos 6° \sin 12° \text{cosec} 18°$
(C) $\cos 6° \sin 12° \sec 18°$
(D) $\sin 6° \sin 12° \text{cosec} 18°$
(E) $\sin 6° \sin 12° \sec 18°$

24. Een doos bevat 3 glanzende en 4 doffe muntstukken. De muntstukken worden nu lukraak één per één uit de doos getrokken en niet teruggeplaatst. Noteer $\frac{a}{b}$ voor de kans dat je meer dan vier beurten nodig zult hebben om de drie glanzende muntstukken te trekken. Als $\frac{a}{b}$ een onvereenvoudigbare breuk is, wat is dan $a + b$?

(A) 11	(B) 20	(C) 35	(D) 58	(E) 66

25. Noteer S voor de verzameling punten op de halve rechten die een hoek van 120° vormen. Zij p een vast punt dat gelegen is binnen de hoek en op de bissectrice van die hoek. Beschouw nu alle mogelijke gelijkzijdige driehoeken pqr met q en r gelegen in S (de punten q en r mogen op dezelfde halve rechte liggen; bovendien geeft een omwisseling van de namen q en r geen aanleiding tot een nieuwe driehoek). Dan zijn er



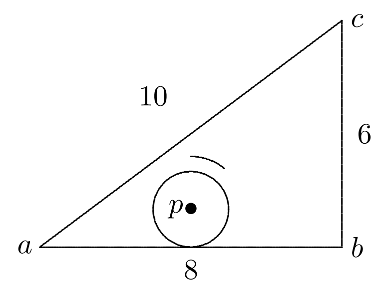
(A) juist 2 zulke driehoeken	(B) juist 3 zulke driehoeken
(C) juist 7 zulke driehoeken	(D) juist 15 zulke driehoeken
(E) meer dan 15 zulke driehoeken	

26. Vind de grootst mogelijke positieve functiewaarde die door de volgende functie bereikt wordt ($x \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}.$$

(A) $\sqrt{7} - 1$	(B) 3	(C) $2\sqrt{3}$	(D) 4	(E) $\sqrt{55} - \sqrt{5}$

27. De zijden van Δabc hebben lengtes 6, 8 en 10. Een cirkel met middelpunt p en straal 1 rolt voortdurend aan de binnenkant rondom de driehoek, zodanig dat hij steeds aan minstens één zijde van de driehoek raakt. Welke afstand heeft het punt p afgelegd op het ogenblik dat p voor het eerst terugkeert op zijn startpositie?



(A) 10	(B) 12	(C) 14	(D) 15	(E) 17

28. Bepaal het aantal driehoeken met een strikt positieve oppervlakte en waarvan de hoekpunten gehele coördinaten (x, y) hebben in het xy-vlak zodanig dat $1 \leq x \leq 4$ en $1 \leq y \leq 4$.

(A) 496	(B) 500	(C) 512	(D) 516	(E) 560

29. Welke van de volgende verzamelingen kan NIET de verzameling lengtes van de uitwendige diagonalen van een balk zijn? (Een *uitwendige diagonaal* is een diagonaal van één van de rechthoekige zijvlakken van de balk.)

(A) $\{4, 5, 6\}$	(B) $\{4, 5, 7\}$	(C) $\{4, 6, 7\}$
(D) $\{5, 6, 7\}$	(E) $\{5, 7, 8\}$	

30. Gegeven $0 \leq x_0 < 1$, stel

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1} & \text{als } 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1} - 1 & \text{als } 2x_{n-1} \geq 1 \end{cases}$$

voor alle gehele getallen $n > 0$. Voor hoeveel waarden van x_0 is het waar dat $x_0 = x_5$?

(A) 0	(B) 1	(C) 5	(D) 31	(E) oneindig veel

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1993–1994 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.[2]

1. Een volgeladen vrachtwagen weegt x ton. Als deze voor de helft geladen is, weegt hij y ton. Hoeveel ton weegt de lege vrachtwagen?

(A) $\frac{x-y}{2}$	(B) $x-y$	(C) $x-2y$	(D) $2y-x$	(E) $2x-2y$

2. Zij $a, b \in \mathbb{N}$. Welke uitspraak is fout?

(A) a en b oneven $\Longrightarrow a+b$ even
(B) a even, b oneven $\Longrightarrow a+b$ oneven
(C) a en b oneven $\Longrightarrow ab$ oneven
(D) a^2 oneven $\Longrightarrow a$ oneven
(E) a even, b oneven $\Longrightarrow ab$ oneven

3. Zeven steden A, B, C, D, E, F en G zijn verbonden door de éénrichtingswegen w_1, w_2, w_3, w_4 en w_5 en wel op de volgende manier :

   w_1 gaat van A naar C over B,
   w_2 gaat van C naar D en vervolgens over B naar F,
   w_3 gaat van D naar A over E,
   w_4 gaat van F naar B over G,
   w_5 gaat van G naar D.

   Bepaal het kleinste aantal wegsegmenten dat moet afgesloten worden om verkeer van B naar D onmogelijk te maken .

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

4. Gegeven is de functie $f : x \mapsto x^2$. Dan is $f(f(f(8)))$ gelijk aan

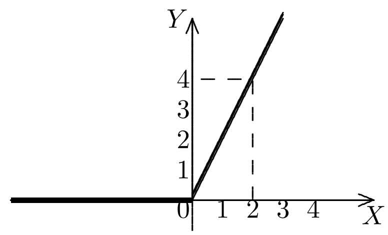
(A) 2^9	(B) 2^{11}	(C) 2^{18}	(D) 2^{24}	(E) 2^{32}

[2]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w., overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

5. Een afbeelding $f : A \to B$ noemen we een *surjectie* als elk element van B het beeld is van een element van A. Het aantal surjecties $f : \{1, 2\} \to \{a, b, c\}$ is

(A) 0	(B) 2	(C) 4	(D) 6	(E) 8

6. De hiernaast staande gebroken lijn heeft als vergelijking



(A) $y = 2x$	(B) $y = \|x\| + x$	(C) $y = \|x\| - x$
(D) $y = x - \|x\|$	(E) $y = 2\|x\| - x$	

7. Voor hoeveel elementen (a, b) uit de verzameling

$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ en } b = a + 1 \text{ en } \ b < 6\}$$

geldt dat $a^b < b^a$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

8. In een klasje met vier leerlingen haalt de leraar toetsen op en deelt ze dan onmiddellijk terug uit zodat de leerlingen de toets zelf kunnen verbeteren. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de toetsen teruggegeven worden zo dat geen enkele leerling zijn eigen toets verbetert?

(A) 6	(B) 9	(C) 14	(D) 23	(E) 24

9. Drie personen A, B en C bevinden zich op een zelfde hoekpunt van een gelijkzijdige veelhoek. Ze vertrekken terzelfdertijd en doorlopen de omtrek van de veelhoek. A doet dit echter in tegengestelde zin van B en C.
A ontmoet B op een zeker hoekpunt. Twee hoekpunten verder ontmoet hij C. Als men weet dat A twee keer zo snel is als B, die zelf twee keer zo snel is als C, welke gelijkzijdige veelhoek betreft het hier dan?

(A) 9-hoek	(B) 12-hoek	(C) 15-hoek	(D) 16-hoek	(E) 20-hoek

10. Een trapezium wordt door zijn middenparallel verdeeld in twee delen. Zij k de verhouding van de oppervlaktes van deze twee delen. Welke van de volgende waarden is onmogelijk voor k?

(A) $\frac{2}{3}$	(B) $\frac{4}{3}$	(C) 2	(D) $\frac{8}{3}$	(E) $\frac{10}{3}$

11. Zij $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$, dan geldt voor alle x in $\mathbb{R}^+$:

(A) $f(x) \leq g(x)$	(B) $h(x) \leq f(x)$	(C) $h(x) \leq g(x)$
(D) $g(x) \leq f(x)$	(E) geen van de vorige	

12. In een orthonormaal assenstelsel snijdt een vertikale rechte de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2$ in het punt a en de rechte met vergelijking $x - y = 2$ in het punt b. De kleinst mogelijke afstand tussen de punten a en b is gelijk aan

(A) 1	(B) 1,625	(C) $\sqrt{2}$	(D) 1,5	(E) 2

13. In een ruit met diagonalen van lengte 6 en 8 wordt een cirkel ingeschreven. De straal van die cirkel is

(A) 2	(B) 2,25	(C) 2,4	(D) 2,5	(E) $\sqrt{12}$

14. Noem α de hoek die een ribbe en een (lichaams)diagonaal van een kubus (uit een zelfde hoekpunt) met elkaar maken, dan is $\cos\alpha$ gelijk aan

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(E) $\sqrt{2}$

15. Hoeveel gelijkbenige driehoeken (twee aan twee niet congruent) kan men vormen door enkel de lengtes 3 cm, 7 cm of 10 cm voor de zijden te gebruiken?

(A) 3	(B) 4	(C) 6	(D) 7	(E) 9

16. Honderd koffers bevatten elk een gelijk aantal munten. Men neemt een zeker aantal munten uit de eerste koffer, het dubbele aantal uit de tweede, driemaal zoveel uit de derde, enz …, tot honderd maal zoveel munten uit de honderdste. Er liggen in totaal 14950 munten in de koffers wanneer er nog één enkele munt in de laatste koffer overblijft. Hoeveel waren er oorspronkelijk in elke koffer?

(A) 151	(B) 201	(C) 251	(D) 301	(E) 351

17. Op welk van onderstaande intervallen is $\dfrac{2-x}{x-3}$ steeds de sinus van een hoek?

(A) $[1,3[$	(B) $[0,3[$	(C) $]2,3[$
(D) $]-\infty,\frac{5}{2}]$	(E) $]\frac{5}{2},+\infty[$	

18. Beschouw, in een vlak, een vierkant met zijde a en een rechte L evenwijdig met een zijde van het vierkant. Door evenwijdige projectie van het vierkant op L verkrijgt men een lijnstuk met lengte $3a$. De projecterende lijnen maken een hoek α met L. De tangens van de hoek α is gelijk aan

(A) $\frac{1}{3}$	(B) $\frac{1}{2}$	(C) 2
(D) 3	(E) geen van de vorige	

19. Driehoek abc heeft oppervlakte S. Driehoek xyz is gedefinieerd door :

$$\overrightarrow{ax} = 2\,\overrightarrow{ab};\quad \overrightarrow{by} = 3\,\overrightarrow{bc};\quad \overrightarrow{cz} = 4\,\overrightarrow{ca}\ .$$

De oppervlakte van driehoek xyz is

(A) $14S$	(B) $15S$	(C) $16S$	(D) $18S$	(E) $20S$

20. Beschouw in een orthonormaal assenstelsel de rechte A met vergelijking $y = \sqrt{3}x$. Beschouw de rechten evenwijdig met A respectievelijk door de punten $(1,0)$ en $(0,1)$. De afstand tussen deze laatste rechten is

(A) 2	(B) $\sqrt{3}$	(C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$	(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$	(E) $\sqrt{2}$

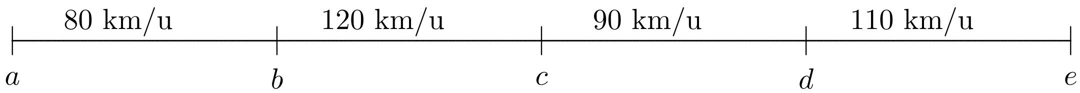
21. Hoeveel verschillende waarden voor c komen voor in de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} a+b & = c^2 d \\ a+b+c & = 42 \end{cases}$$

met $a,b,c,d \in \mathbb{N}$.

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 8	(E) oneindig veel

22. Een voertuig legt het traject van a naar e af. De vier gelijke afstanden ab, bc, cd, en de worden tegen een verschillende, doch constante snelheid afgelegd (zie schema).



Als we door V de gemiddelde snelheid (in km/u) voorstellen over het traject ac en door W de gemiddelde snelheid over het traject ce, dan is

(A) $V < W < 100$	(B) $V = W = 100$	(C) $100 < V \leq W$
(D) $W \leq V < 100$	(E) $100 < W < V$	

23. Twee cirkels met straal 1 raken elkaar in een punt p. Er wordt een cirkel geconstrueerd door de punten a,b,c waarbij a het eindpunt is van de middellijn pa van de eerste cirkel en b en c de eindpunten zijn van de middellijn van de tweede cirkel, loodrecht op de rechte ap. Wat is de straal van de derde cirkel?

(A) $\frac{3}{2}$	(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$	(C) $\frac{5}{3}$	(D) $\sqrt{3}$	(E) 2

24. Voor hoeveel reële waarden van r heeft de vergelijking in x

$$x^4 - (r+1)x^2 + r = 0$$

vier verschillende reële oplossingen die de opeenvolgende termen van een rekenkundige rij vormen?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 4	(E) oneindig veel

25. Een kubus wordt gekleurd door elk zijvlak een andere kleur te geven (we gebruiken zes verschillende kleuren). Op hoeveel verschillende manieren kan dit? Twee kleuringen noemen we gelijk van zodra de ene in de andere omgezet kan worden door de kubus te draaien.

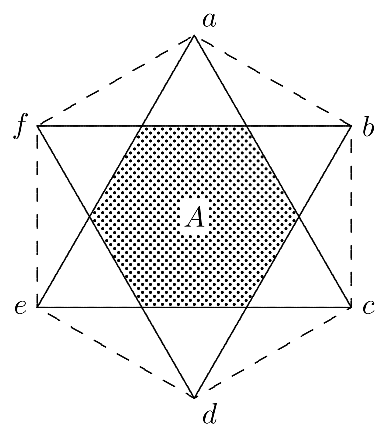
(A) 30	(B) 60	(C) 120	(D) 360	(E) 720

26. Stel $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Bijvoorbeeld: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Noem k het kleinste natuurlijk getal verschillend van 0 zodat $k!$ deelbaar is door 1000. De som van de cijfers van k is gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 5	(D) 6	(E) 7

27. Twee congruente gelijkzijdige driehoeken ace en bdf worden zo geplaatst dat de ene de symmetrische is van de andere t.o.v. hun gemeenschappelijk zwaartepunt. Als A de zeshoek is gemeenschappelijk aan de twee driehoeken en B de zeshoek $abcdef$, dan is

$$\frac{\text{opp}(B)}{\text{opp}(A)} =$$



(A) $\sqrt{3}$	(B) 2	(C) 3	(D) $2\sqrt{3}$	(E) 4

28. Stel $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor 3 \sin x \rfloor$. Hierbij is $\lfloor a \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan a. Bijvoorbeeld: $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
De grafiek van f heeft een aantal "geïsoleerde" punten. Dit aantal is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 7

29. In een school wordt elk jaar een opstelwedstrijd georganiseerd. De vijf finalisten An, Bart, Carla, David en Erna hebben zopas hun uitslag ontvangen. Ieder kent zijn eigen plaats in de eindrangschikking (van 1 tot 5; er zijn geen ex aequo's). Carla weet bovendien dat David twee plaatsen voor An geëindigd is. Aangezien ze ervan overtuigd is dat Erna de wedstrijd onmogelijk kan gewonnen hebben (en ze heeft gelijk), besluit ze dat ze de rangschikking volledig kent. Op welke plaats is Carla geëindigd ?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

30. Een boek telt n bladzijden die genummerd zijn $1, 2, 3, \ldots n$. Het cijfer 1 werd juist 213 keer gebruikt. Hoeveel bladzijden telt het boek?

(A) 517	(B) 518
(C) $519 \leq n \leq 520$	(D) $521 \leq n \leq 530$
(E) $531 \leq n \leq 540$	

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1993-1994 : Tweede Ronde.

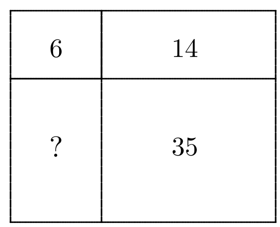
De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële “foreign coordinator” voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.[2]

1. $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9 =$

(A) 13^{13}	(B) 13^{36}	(C) 36^{13}	(D) 36^{36}	(E) 1296^{26}

2. Een grote rechthoek wordt door twee lijnstukken, evenwijdig met zijn zijden, in vier rechthoeken gepartitioneerd. De figuur toont de oppervlaktes van drie van deze rechthoeken. Wat is de oppervlakte van de vierde rechthoek?



(A) 10	(B) 15	(C) 20	(D) 21	(E) 25

3. Hoeveel van de volgende uitdrukkingen zijn gelijk aan $x^x + x^x$, voor alle $x > 0$?

I: $2x^x$ **II:** x^{2x} **III:** $(2x)^x$ **IV:** $(2x)^{2x}$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

4. In het xy–vlak is het lijnstuk met eindpunten $(-5, 0)$ en $(25, 0)$ de diameter van een cirkel. Als het punt $(x, 15)$ op die cirkel ligt, dan is x gelijk aan

(A) 10	(B) 12,5	(C) 15	(D) 17,5	(E) 20

5. Piet wou een getal met 6 vermenigvuldigen, maar deelde het bij vergissing door 6. Daarna wou hij 14 bij het resultaat bijtellen maar hij trok bij vergissing 14 af. Het resultaat dat hij vond, na deze vergissingen, was 16. Indien hij de correcte bewerkingen had uitgevoerd, dan zou het gevonden resultaat

(A) kleiner zijn dan 400 (B) tussen 400 en 600 liggen
(C) tussen 600 en 800 liggen (D) tussen 800 en 1000 liggen
(E) groter zijn dan 1000

[2] ©Committee on the American Mathematics Competition, Mathematical Association of America, 1993

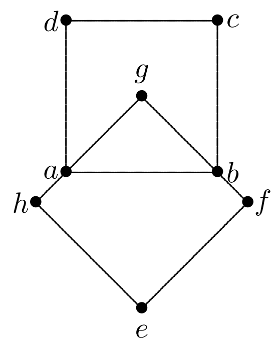
6. In de rij

$$\ldots, a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

is elke term gelijk aan de som van de twee termen links ervan. Bepaal a.

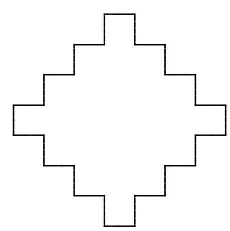
(A) -3	(B) -1	(C) 0	(D) 1	(E) 3

7. De vierkanten $abcd$ en $efgh$ zijn congruent. Ook geldt dat $|ab| = 10$ en dat g het middelpunt is van het vierkant $abcd$. De oppervlakte van het gedeelte van het vlak dat door deze twee vierkanten bedekt is, is gelijk aan



(A) 75	(B) 100	(C) 125	(D) 150	(E) 175

8. In de getoonde veelhoek staat elke zijde loodrecht op haar twee aanpalende zijden. Ook zijn alle 28 zijden van deze veelhoek congruent. De omtrek van de veelhoek is 56. De oppervlakte van deze veelhoek is



(A) 84	(B) 96	(C) 100	(D) 112	(E) 196

9. Als $\angle a$ (hoek a) vier maal $\angle b$ is, en het complement van $\angle b$ vier maal het complement van $\angle a$ is, dan is $\angle b$ gelijk aan

(A) $10°$	(B) $12°$	(C) $15°$	(D) $18°$	(E) $22{,}5°$

10. Als x en y verschillende reële getallen zijn, noteren we $M(x, y)$ voor het grootste van de twee en $m(x, y)$ voor het kleinste van de twee. Als $a < b < c < d < e$, dan is

$$M(M(a, m(b, c)), m(d, m(a, e))) =$$

(A) a	(B) b	(C) c	(D) d	(E) e

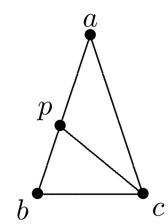
11. Drie massieve kubussen, met volumes resp. 1, 8 en 27, worden langs hun zijvlakken aan elkaar gekleefd en vormen aldus een nieuw lichaam. Bepaal de kleinst mogelijke oppervlakte van dit lichaam.

(A) 36	(B) 56	(C) 70	(D) 72	(E) 74

12. Als $i^2 = -1$, dan is $(i - i^{-1})^{-1}$ gelijk aan

(A) 0	(B) $-2i$	(C) $2i$	(D) $-i/2$	(E) $i/2$

13. In driehoek abc geldt dat $|ab| = |ac|$. Als er een punt p, gelegen strict tussen a en b, bestaat zodat $|ap| = |pc| = |cb|$, dan is $\angle a$ gelijk aan



(A) 30°	(B) 36°	(C) 48°	(D) 60°	(E) 72°

14. Bepaal de som van de rekenkundige rij

$$20 + (20 + \frac{1}{5}) + (20 + \frac{2}{5}) + \cdots + 40.$$

(A) 3000	(B) 3030	(C) 3150	(D) 4100	(E) 6000

15. Voor hoeveel getallen n in $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ is het cijfer van de tientallen van n^2 oneven?

(A) 10	(B) 20	(C) 30	(D) 40	(E) 50

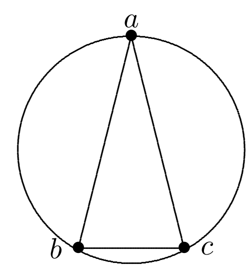
16. In een zak knikkers zijn sommige knikkers rood en de andere blauw. Neemt men één rode knikker uit deze zak weg, dan is één zevende van de overblijvende knikkers rood. Neemt men echter twee blauwe knikkers uit de zak weg (in de plaats van één rode), dan is één vijfde van de overblijvende knikkers rood. Hoeveel knikkers waren er oorspronkelijk in die zak?

(A) 8	(B) 22	(C) 36	(D) 57	(E) 71

17. Een rechthoek met afmetingen $8 \times 2\sqrt{2}$ heeft hetzelfde middelpunt als een cirkel met straal 2. De oppervlakte van het gebied dat gemeenschappelijk is aan de rechthoek en de cirkel is

(A) 2π	(B) $2\pi + 2$	(C) $4\pi - 4$
(D) $2\pi + 4$	(E) $4\pi - 2$	

18. Driehoek abc is ingeschreven in een cirkel en er geldt dat $\angle b = \angle c = 4\angle a$. Als b en c opeenvolgende hoekpunten zijn van een regelmatige n–hoek die eveneens ingeschreven is in deze cirkel, dan is n gelijk aan



(A) 5	(B) 7	(C) 9	(D) 15	(E) 18

19. Merk één schijfje met het nummer "**1**", twee schijfjes met het nummer "**2**", drie schijfjes met het nummer "**3**", ..., vijftig schijfjes met het nummer "**50**". Plaats nu deze $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = 1275$ genummerde schijfjes in een doos. Uit deze doos gaat men nu lukraak schijfjes trekken zonder teruglegging. Wat is het kleinste aantal schijfjes dat men moet trekken om zeker te zijn dat tenminste 10 van die schijfjes het zelfde nummer dragen?

(A) 10	(B) 51	(C) 415	(D) 451	(E) 501

20. Onderstel dat x, y, z een meetkundige rij vormen met reden r en zo dat $x \neq y$. Als nu x, $2y$, $3z$ een rekenkundige rij vormen, dan is r gelijk aan

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) 2	(E) 4

21. Vind het aantal tegenvoorbeelden voor de bewering

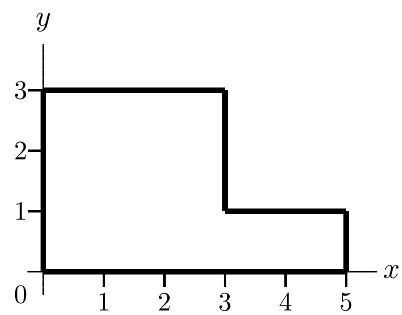
> "Als n een oneven natuurlijk getal is waarvan de som van de cijfers 4 is en waarvan geen enkel cijfer nul is, dan is n priem."

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

22. De negen stoelen van een rij moeten ingenomen worden door zes studenten en de professoren Alpha, Beta en Gamma. De professoren komen aan vóór de studenten en beslissen een stoel te kiezen zodat elke professor tussen twee studenten zal zitten. Op hoeveel mogelijke wijzen kunnen de professoren Alpha, Beta en Gamma hun stoelen kiezen?

(A) 12	(B) 36	(C) 60	(D) 84	(E) 630

23. Beschouw in het xy–vlak een L–vormig gebied begrensd door horizontale en verticale lijnstukken met eindpunten $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,3)$, $(3,1)$, $(5,1)$ en $(5,0)$. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte die door de oorsprong gaat en die de oppervlakte van dit gebied precies in twee verdeelt.



(A) $\frac{2}{7}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) $\frac{3}{4}$	(E) $\frac{7}{9}$

24. Voor een steekproef van 5 observaties is het rekenkundig gemiddelde 10 en is de mediaan 12. De kleinst mogelijke waarde van het verschil tussen de grootste en de kleinste observatie in deze steekproef is gelijk aan

(A) 2	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 10

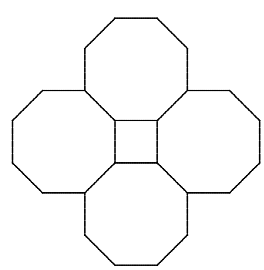
25. Als x en y twee, van nul verschillende, reële getallen zijn, zo dat

$$|x| + y = 3 \qquad \text{en} \qquad |x|y + x^3 = 0,$$

dan is het geheel getal dat het dichtst bij $x - y$ gelegen is gelijk aan

(A) -3	(B) -1	(C) 2	(D) 3	(E) 5

26. Een regelmatige veelhoek met m zijden is precies ingesloten (zonder overlappingen en zonder openingen) door m regelmatige veelhoeken met n zijden elk. (De figuur toont een situatie waarbij $m = 4$ en $n = 8$.) Als $m = 10$, waaraan is n dan gelijk?



(A) 5	(B) 6	(C) 14	(D) 20	(E) 26

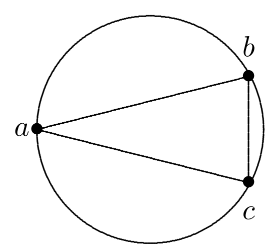
27. Een zak pofmaïs bevat 2/3 witte korrels en 1/3 gele korrels. Slechts 1/2 van de witte graankorrels zullen poffen, terwijl 2/3 van de gele graankorrels zullen poffen. Uit die zak wordt lukraak een graankorrel gekozen; deze korrel poft als hij in de pofmachine geplaatst wordt. Bepaal de kans dat de getrokken graankorrel wit was.

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{5}{9}$	(C) $\frac{4}{7}$	(D) $\frac{3}{5}$	(E) $\frac{2}{3}$

28. Bepaal, in het xy–vlak, het aantal rechten door het punt $(4, 3)$ waarvan het x–segment (dit is de x–coördinaat van het snijpunt van de rechte met de x–as) een positief priemgetal is en het y–segment een natuurlijk getal is.

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

29. De punten a, b en c liggen op een cirkel met straal r zodanig dat $|ab| = |ac|$, $|ab| > r$ en zodanig dat de lengte van de korte cirkelboog bc gelijk is aan r. Als de hoeken gemeten worden in radialen, dan is $\dfrac{|ab|}{|bc|} =$



(A) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{4}$	(B) $2\cos\frac{1}{2}$	(C) $4\sin\frac{1}{2}$	(D) $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}$	(E) $2\sec\frac{1}{2}$

30. Wanneer men n (gewone) dobbelstenen opgooit, is de kans dat de som van de geworpen ogen gelijk is aan 1994, groter dan nul. Deze kans is daarenboven gelijk aan de kans op een som (van de geworpen ogen) gelijk aan S. De kleinst mogelijke waarde van S is gelijk aan

(A) 333	(B) 335	(C) 337
(D) 339	(E) 341	

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1994–1995 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.[2]

1. Welke veelterm is **geen** deler van $(x-1)^2(x^3+x)$?

(A) $x^3 - x^2 + x - 1$	(B) $x^2 - 2x + 1$	(C) $x^2 - x$
(D) $x^3 - x$	(E) $x^4 - 2x^2(x-1) - 2x + 1$	

2. Als $z \in \mathbb{Z}_0$, dan is $z^2 - z$

(A) soms even, soms oneven	(B) steeds strikt positief
(C) nooit een priemgetal	(D) steeds even
(E) steeds oneven	

3. Welke uitspraak is waar?

(A) 8^8 is de tweede macht van 4^4	(B) 8^8 is de derde macht van 4^4
(C) 8^8 is de vierde macht van 4^4	(D) 8^8 is de achtste macht van 4^4
(E) 8^8 is de zestiende macht van 4^4	

4. Hoeveel van de volgende zes getallen (met 10 cijfers) zijn deelbaar door 6?

   1515151515 1994001994 2222222224 2333333334 3888888888 9999999999

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

5. Het middelpunt van het bovenvlak van een kubus met ribbe 2, ligt op gelijke afstand van de vier hoekpunten van het grondvlak van de kubus. Die afstand is gelijk aan

(A) $\sqrt{5}$	(B) $\sqrt{6}$	(C) $\sqrt{7}$	(D) $2\sqrt{2}$	(E) 3

6. Een toets, bestaande uit drie vragen, staat op 10 punten. Elke vraag is minstens 2 punten waard. Op hoeveel manieren kunnen dan de 10 punten verdeeld worden over de drie vragen? (Elke vraag is een geheel aantal punten waard.)

(A) 4	(B) 13	(C) 15	(D) 20	(E) 30

[2]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w., overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

7. In een scherphoekige driehoek abc verdeelt

(A) een hoogtelijn	(B) een binnenbissectrice	(C) een zwaartelijn
(D) een middelloodlijn	(E) een middenparallel	

de driehoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

8. In de verzameling $\mathbb{R}_0$ is $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ enkel en alleen geldig voor

(A) $a = b = c$	(B) $a = b = c = 1$	(C) $c = 1$
(D) $c = 1$ of $c = -1$	(E) alle $a, b, c \in \mathbb{R}_0$	

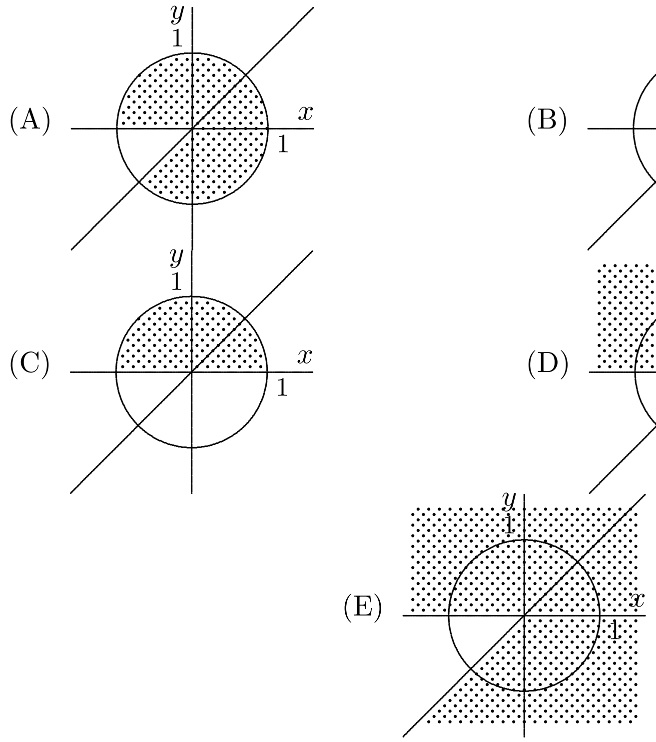
9. Een computer zendt een boodschap bestaande uit drie cijfers (0 of 1 elk) naar een andere computer. Hoeveel van de volgende uitspraken zijn juist?
   a. Als het eerste cijfer 0 is, dan is de som van de cijfers kleiner dan of gelijk aan 3.
   b. Als de som van de cijfers oneven is, dan is het eerste of het derde cijfer 1.
   c. De som van de cijfers is oneven als en slechts als er minstens één 1 is.
   d. Er is minstens één 1 als de som van de cijfers oneven is.

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

10. Gegeven $a < b$ en $c < d$ in $\mathbb{R}_0$. Hoeveel van de volgende 4 uitspraken zijn juist?
$a - c < b - d$; $a - d < b - c$; $ac < bd$; $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

11. In welke van de onderstaande figuren stelt het gearceerde deel met rand de verzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R}2 \parallel (x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } x \geq y) \text{ of } (y \geq 0)\}$ voor?



12. Op de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \parallel x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$ is de kleinste waarde van $x^2 + 7x + 12$ gelijk aan

(A) -4	(B) $-\frac{1}{4}$	(C) 3	(D) 42	(E) $\frac{195}{4}$

13. Welke van de volgende 5 betrekkingen geldt niet in elke driehoek abc?

(A) $\sin a = \sin(b + c)$ (B) $\cos 2a = \cos 2(b + c)$

(C) $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} \frac{b + c}{2}$ (D) $\cos(a - b + c) = \cos(b - a - c)$

(E) $\cos \frac{a}{2} = \sin \frac{b + c}{2}$

14. Hoeveel verschillende uitkomsten kunnen we verkrijgen door twee willekeurige (verschillende) getallen van de verzameling $\{4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 243\}$ te vermenigvuldigen?

(A) 72	(B) 36	(C) 32	(D) 20	(E) 12

15. Een kegel heeft hoogte 4 en een grondvlak met straal 3. De openingshoek (in radialen) van de ontwikkeling van deze kegel is gelijk aan

(A) $\frac{3\pi}{2}$	(B) $\frac{4\pi}{3}$	(C) $\frac{4\pi}{5}$	(D) $\frac{5\pi}{6}$	(E) $\frac{6\pi}{5}$

16. De vergelijking $|4-5x| = -x$ heeft in $\mathbb{R}$

(A)	twee oplossingen, waarvan één positief is en de andere negatief
(B)	één oplossing en deze is negatief
(C)	twee oplossingen en deze zijn negatief
(D)	twee oplossingen en deze zijn positief
(E)	geen oplossingen

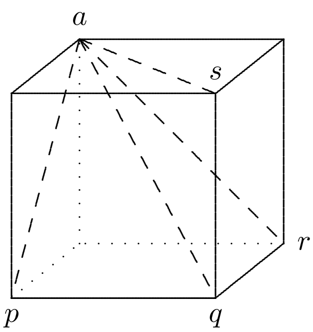
17. Schrijf een getal van zes cijfers gekozen in $\{0,1\}$. Bv. 010111, 000000, 110010, ... Hoe groot is de kans dat daarin een opeenvolging van minstens drie nullen voorkomt?

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{5}{16}$	(C) $\frac{1}{8}$	(D) $\frac{9}{32}$	(E) $\frac{1}{3}$

18. Het aantal oplossingen (x, y) met $x,\, y \in \mathbb{Z}$ van de vergelijking $x^2 + y^2 + x + y = 3$ is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) groter dan 3

19. Als je uit het hoekpunt a van een kubus vier diagonalen trekt zoals op de figuur hiernaast is aangegeven, en je berekent de hoeken $\widehat{paq}$, $\widehat{par}$, $\widehat{pas}$, $\widehat{qar}$, $\widehat{qas}$, $\widehat{ras}$, hoeveel verschillende waarden verkrijg je dan?



(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

20. Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een periodieke functie met periode 3, zodanig dat $f(x) = x^2$ voor $-1 < x \leq 2$, dan is $f(-4)$ gelijk aan

(A) -1	(B) 0	(C) 1	(D) 4	(E) 16

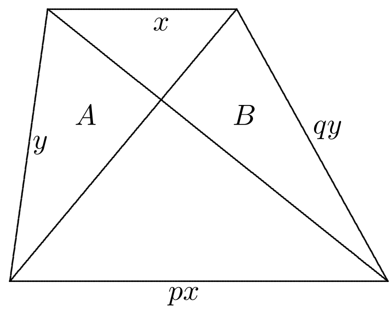
21. Gegeven is een orthonormaal assenstelsel. De enige toegelaten bewegingen zijn verschuivingen over de vectoren $(0, 1)$ en $(1, 0)$. Op hoeveel manieren kun je van $(0, 0)$ in $(3, 3)$ geraken met vermijding van de punten $(2, 0)$, $(3, 0)$ en $(3, 1)$?

(A) 10	(B) 11	(C) 12	(D) 13	(E) 14

22. De negatie (ontkenning) van " $\forall x$ even : $x^2 + x$ is even " is

(A)	$\forall x$ even: $x^2 + x$ is oneven
(B)	$\forall x$ oneven: $x^2 + x$ is even
(C)	$\forall x$ oneven: $x^2 + x$ is oneven
(D)	$\exists x$ even: $x^2 + x$ is oneven
(E)	$\exists x$ oneven: $x^2 + x$ is even

23. De verhouding van de grote basis tot de kleine basis van een trapezium is p. De verhouding van de grootste opstaande zijde tot de kleinste opstaande zijde is q. Als men de twee diagonalen trekt, dan is de verhouding A/B van de oppervlakte van de twee driehoeken die de basissen niet bevatten (zie figuur hiernaast) gelijk aan

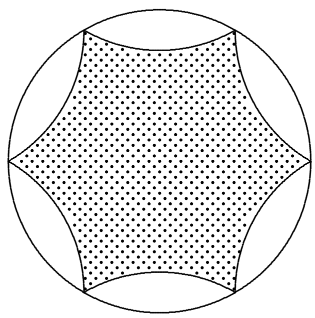


(A) $\frac{p}{q}$	(B) $\frac{p^2}{q^2}$	(C) 1	(D) $\frac{q}{p}$	(E) $\frac{q^2}{p^2}$

24. Hoeveel driehoeken zijn er waarvan de lengten van de zijden opeenvolgende oneven natuurlijke getallen zijn en met een omtrek strikt kleiner dan 1000?

(A) 165	(B) 166	(C) 167	(D) 331	(E) 332

25. Gegeven een cirkel met straal 1 en zes gelijke cirkelbogen eveneens met straal 1 die elkaar snijden op de gegeven cirkel (zie figuur hiernaast). De oppervlakte van de gearceerde figuur is



(A) $2\pi - 3\sqrt{3}$	(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	(C) $3\sqrt{3} - \pi$
(D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$	(E) geen van de vorige	

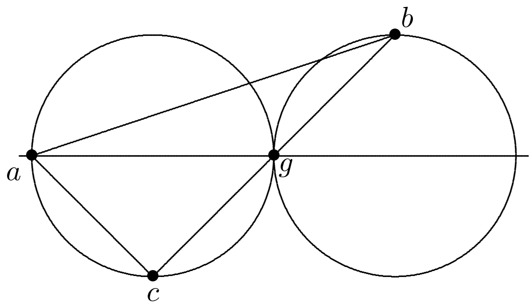
26. Als de reële getallen x en y voldoen aan $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2y}{x+y}$, hoeveel waarden kan $\dfrac{y}{x}$ dan aannemen?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) oneindig veel

27. Zij $\lfloor x \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x. Bv. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
Beschouw de volgende 4 uitspraken:
$\lfloor 7x \rfloor = 7$; $\lfloor 7x \rfloor = 7\lfloor x \rfloor$; $\lfloor x+7 \rfloor = x+7$; $\lfloor x+7 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 7$.
Hoeveel van deze uitspraken zijn waar voor alle $x \in]1, \dfrac{11}{10}[$?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

28. Twee cirkels met straal 1 raken elkaar in g. De gemeenschappelijke middellijn snijdt de ene cirkel nog in a. De punten b en c liggen elk op een verschillende cirkel zodanig dat bc door g gaat en een hoek van 45° vormt met de gemeenschappelijke middellijn. De oppervlakte van de driehoek abc is gelijk aan

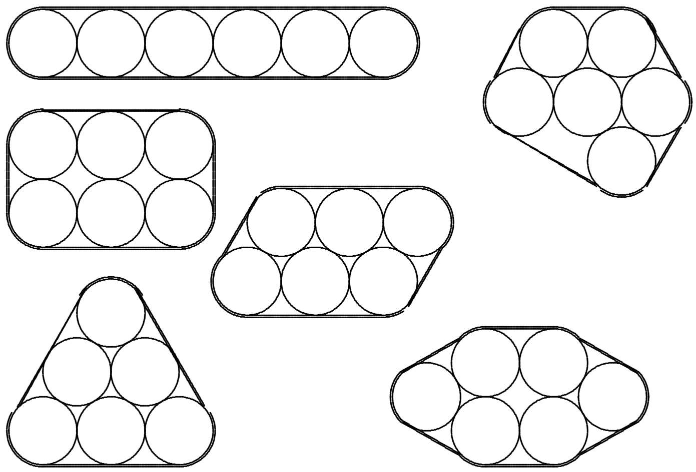


(A) 1,5	(B) $\dfrac{\pi}{2}$	(C) 2	(D) $\sqrt{5}$	(E) 2,5

29. Een doos bevat 900 kaartjes met alle positieve gehele getallen van 100 tot en met 999. Hilde trekt willekeurig kaartjes uit de doos en berekent de som van de cijfers voor elk kaartje. Hoeveel kaartjes moet Hilde trekken om er zeker van te zijn dat drie van de getrokken kaartjes dezelfde som van de cijfers geven?

(A) 53	(B) 54	(C) 55	(D) 56	(E) 57

30. Zes blikjes cola worden tegen elkaar geschoven op de zes manieren zoals op de tekening hiernaast in bovenaanzicht wordt getoond. Vervolgens worden ze met gespannen en onuitrekbare band (vette lijn) bij elkaar gehouden. In sommige gevallen is de lengte van deze band dezelfde. In hoeveel van deze gevallen verkrijg je de kleinst mogelijke lengte?



(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1994-1995 : Tweede Ronde.

De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.[2]

1. De winkelprijs van een bepaald toestel bedraagt 9999 frank. In een reclamespotje op de televisie wordt hetzelfde toestel aangeboden voor 3 (gespreide) betalingen van telkens 2998 frank en een éénmalige verzendingskost van 998 frank. Hoeveel spaar je door dit toestel aan te kopen bij de TV-adverteerder?

(A) 10 fr.	(B) 9 fr.	(C) 8 fr.	(D) 7 fr.	(E) 6 fr.

2. Als $\sqrt{2+\sqrt{x}} = 3$, dan is x gelijk aan

(A) 121	(B) 49	(C) 7	(D) $\sqrt{7}$	(E) 1

3. Kim behaalde voor haar eerste drie wiskundetoetsen scores 87, 83 en 88. Als zij voor haar vierde toets een score van 90 behaalt, dan zal haar gemiddelde score

(A) toenemen met 1	(B) toenemen met 2	(C) toenemen met 3
(D) toenemen met 4	(E) dezelfde blijven	

4. Een rechthoekig veld is 300 meter breed en 400 meter lang. Aan de hand van lukraak genomen steekproeven blijkt dat er, gemiddeld gezien, 4 mieren per dm^2 op dit veld zijn. Welk van de volgende getallen benadert het best het geschatte totaal aantal mieren in het veld?

(A) 500 duizend	(B) 5 miljoen	(C) 50 miljoen
(D) 500 miljoen	(E) 5 miljard	

5. Als M gelijk is aan 30% van Q, Q gelijk is aan 20% van P en N gelijk is aan 50% van P, dan is $\frac{M}{N}$ gelijk aan

(A) $\frac{4}{3}$	(B) $\frac{6}{5}$	(C) 1	(D) $\frac{3}{250}$	(E) $\frac{3}{25}$

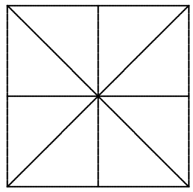
6. De straal van de Aarde bedraagt aan de evenaar ongeveer 6400 kilometer. Onderstel dat een vliegtuig éénmaal rond de Aarde vliegt aan een snelheid van 800 kilometer per uur (t.o.v. de Aarde). Onderstel verder dat de vluchtroute op een verwaarloosbare hoogte

[2] ©Committee on the American Mathematics Competition, Mathematical Association of America, 1995

boven de evenaar loopt. Welk van de volgende alternatieven is de beste benadering voor de duur van deze vlucht (in uren)?

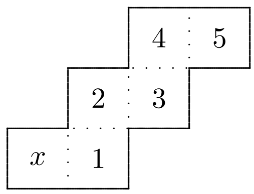
(A) 8	(B) 25	(C) 100	(D) 75	(E) 50

7. Beschouw een figuur (hiernaast) bestaande uit een vierkant, zijn diagonalen en de lijnen door de middens van de overstaande zijden. Het totaal aantal driehoeken (om het even hoe groot) in deze figuur bedraagt



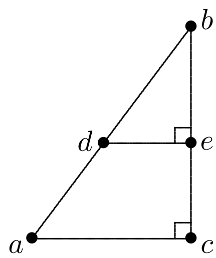
(A) 18	(B) 16	(C) 14	(D) 12	(E) 10

8. De figuur hiernaast kan gevouwen worden tot een kubus. Welk van de genummerde vlakjes zal in de zo gevormde kubus tegenover het zijvlak "x" staan?



(A) 5	(B) 4	(C) 3	(D) 2	(E) 1

9. In driehoek abc is $\angle c = 90°$, $|ac| = 6$ en $|bc| = 8$. De punten d en e liggen op resp. op $[ab]$ en $[bc]$ en $\angle bed = 90°$. Als $|de| = 4$, dan is $|bd|$ gelijk aan



(A) $\frac{20}{3}$	(B) $\frac{16}{3}$	(C) 5	(D) $\frac{15}{2}$	(E) 8

10. De oppervlakte van de driehoek begrensd door de rechten $y = x$, $y = -x$ en $y = 6$ is gelijk aan

(A) $12\sqrt{2}$	(B) 12	(C) 24	(D) 36	(E) $24\sqrt{2}$

11. De optelling hiernaast is fout. Toch kan alles correct gemaakt worden door juist één cijfer d te veranderen – op alle plaatsen waar het voorkomt – in een ander cijfer e. Bepaal de som van d en e.

$$\begin{array}{ccccccc} & 7 & 4 & 2 & 5 & 8 & 6 \\ + & 8 & 2 & 9 & 4 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

(A) 4	(B) 6	(C) 8	(D) 10	(E) meer dan 10

12. Als $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ en $f(-3) = 2$, dan is $f(3)$ gelijk aan

(A) 8	(B) 3	(C) 1	(D) -2	(E) -5

13. Hoeveel getallen N met 4 cijfers (tientallig) – dus van de vorm $N = (abcd)_{10}$ – voldoen aan elk van de volgende drie voorwaarden?

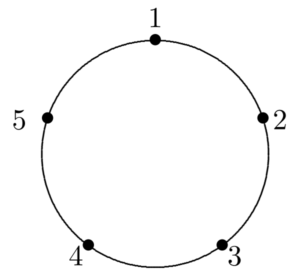
    i) $4000 \leq N < 6000$

    ii) N is een veelvoud van 5

    iii) $3 \leq b < c \leq 6$

(A) 48	(B) 36	(C) 24	(D) 18	(E) 10

14. Vijf punten op een cirkel worden genummerd met 1, 2, 3, 4 en 5 in wijzerzin. Een vlo springt van het ene punt naar het andere in wijzerzin rond de cirkel; als de vlo op een punt met een oneven nummer staat, springt ze één punt vooruit; staat de vlo op een punt met een even nummer, dan springt ze twee punten vooruit. Als de vlo begint op het punt 5, dan zal ze na 1995 sprongen aangekomen zijn op het punt



(A) 5	(B) 4	(C) 3	(D) 2	(E) 1

15. Onderstel f een functie waarvan de grafiek een rechte is en zó dat $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ en $f(5) = 5$. Welk van de volgende beweringen is waar?

(A) $f(0) < 0$	(B) $f(0) = 0$
(C) $f(1) < f(0) < f(-1)$	(D) $f(0) = 5$
(E) $f(0) > 5$	

16. An woont een voetbalmatch bij te Antwerpen en raamt er het aantal toeschouwers op 50000. Bernard woont een voetbalmatch bij te Brussel en raamt het aantal toeschouwers daar op 60000. Een secretaris van de voetbalbond, die het correcte aantal toeschouwers van beide matchen kent, merkt op dat:

    i) het werkelijk aantal toeschouwers te Antwerpen minder dan 10% afwijkt van de raming van An.

    ii) de raming van Bernard minder dan 10% afwijkt van het werkelijk aantal toeschouwers te Brussel.

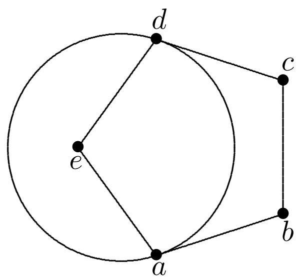
Wat is – afgerond op het dichtstbije duizendtal – het grootst mogelijke verschil tussen de aantallen toeschouwers van beide matchen?

(A) 22000	(B) 21000	(C) 20000	(D) 11000	(E) 10000

17. Twee halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt o vormen een hoek van 30°. Punt a ligt op de ene halve rechte en punt b op de andere, zodat $|ab| = 1$. Wat is de grootst mogelijke lengte $|ob|$?

(A) 1	(B) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	(C) $\sqrt{3}$	(D) 2	(E) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

18. Voor een gegeven regelmatige vijfhoek $abcde$ kan een cirkel getekend worden die raakt aan $[dc]$ in d en aan $[ab]$ in a. De grootte (in graden) van de (kleine) cirkelboog $\overset{\frown}{ad}$ is dan gelijk aan

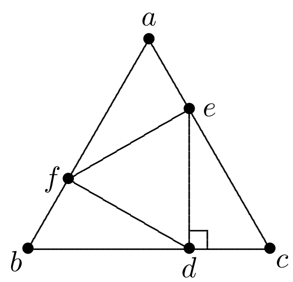


(A) 144	(B) 135	(C) 120	(D) 108	(E) 72

19. Onderstel dat a, b en c drie (niet noodzakelijk verschillende) getallen zijn, lukraak gekozen (met terugplaatsing – dus herhaling mogelijk) uit de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De kans dat $a \cdot b + c$ even is, is gelijk aan

(A) $\dfrac{2}{5}$	(B) $\dfrac{59}{125}$	(C) $\dfrac{1}{2}$	(D) $\dfrac{64}{125}$	(E) $\dfrac{3}{5}$

20. De gelijkzijdige driehoek def is ingeschreven in een gelijkzijdige driehoek abc zó dat $[de] \perp [bc]$. De verhouding van de oppervlakte van driehoek def t.o.v. de oppervlakte van driehoek abc is gelijk aan



(A) $\dfrac{1}{6}$	(B) $\dfrac{1}{4}$	(C) $\dfrac{1}{3}$	(D) $\dfrac{2}{5}$	(E) $\dfrac{1}{2}$

21. We vormen een vijfhoek door een driehoekig stuk uit de hoek van een rechthoekig stuk papier af te knippen. De vijf zijden van deze vijfhoek hebben lengtes 13, 19, 20, 25 en 31 (niet noodzakelijk in de volgorde van deze zijden rond de vijfhoek). De oppervlakte van deze vijfhoek is gelijk aan

(A) 745	(B) 720	(C) 680	(D) 600	(E) 459

22. De zijden van een driehoek hebben lengtes 11, 15 en k, waarbij k een geheel getal is. Voor hoeveel waarden van k is deze driehoek stomphoekig?

(A) 14	(B) 13	(C) 12	(D) 7	(E) 5

23. De punten met coördinaten $(4, 3)$ en $(-4, -3)$ zijn twee niet aanliggende hoekpunten van een rechthoek. De overige twee hoekpunten van deze rechthoek hebben eveneens gehele getallen als coördinaten. Hoeveel zulke rechthoeken bestaan er?

(A) 5	(B) 4	(C) 3	(D) 2	(E) 1

24. Er bestaan strikt positieve natuurlijke getallen a, b en c, met grootste gemene deler gelijk aan 1 en zó dat

$$a \log_{200} 5 + b \log_{200} 2 = c.$$

Waaraan is $a + b + c$ gelijk?

(A) 10	(B) 9	(C) 8	(D) 7	(E) 6

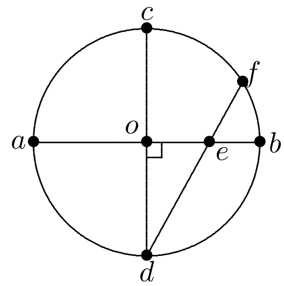
25. Een lijst van 5 strikt positieve gehele getallen heeft gemiddelde 12 terwijl het verschil tussen het grootste en het kleinste van deze getallen gelijk is aan 18. De mediaan van deze lijst is gelijk aan 8. Ook is 8 het getal dat het meest frequent voorkomt in de lijst. Hoeveel verschillende waarden zijn mogelijk voor het tweede grootste getal uit deze lijst?

(A) 12	(B) 10	(C) 8	(D) 6	(E) 4

26. Voor hoeveel verzamelingen (met 3 elementen) $\{a, b, c\} \subset \mathbb{N}_0$ is het waar dat $a \cdot b \cdot c = 2310$?

(A) 45	(B) 43	(C) 40	(D) 36	(E) 32

27. In de figuur (hiernaast) zijn $[ab]$ en $[cd]$ diameters van de cirkel met middelpunt o. Verder geldt dat $[ab] \perp [cd]$ en dat de koorde $[df]$ diameter $[ab]$ snijdt in het punt e. Als $|de| = 6$ en $|ef| = 2$, dan is de oppervlakte van de cirkel gelijk aan



(A) 25π	(B) $\frac{49}{2}\pi$	(C) 24π	(D) $\frac{47}{2}\pi$	(E) 23π

28. Beschouw de driehoekige getallentabel met 0, 1, 2, 3, ... langs de buitenzijden en waar de getallen "binnenin" de tabel verkregen worden door de twee aanliggende getallen in de vorige rij op te tellen. We tonen hieronder de rijen 1 tot en met 6.

0

1 1

2 2 2

3 4 4 3

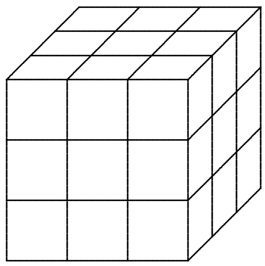
4 7 8 7 4

5 11 15 15 11 5

Noteer $f(n)$ voor de som van de getallen in rij n. Wat is de rest bij deling van $f(100)$ door 100?

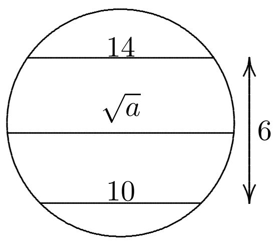
(A) 74	(B) 62	(C) 50	(D) 30	(E) 12

29. Een grote kubus is opgebouwd uit 27 eenheidskubussen. Een vlak staat loodrecht op één van de inwendige diagonalen van de grote kubus en snijdt die diagonaal middendoor. Het aantal eenheidskubussen dat door dit vlak gesneden wordt, is gelijk aan



(A) 20	(B) 19	(C) 18	(D) 17	(E) 16

30. Twee evenwijdige koorden in een cirkel hebben lengtes resp. 10 en 14, en hun onderlinge afstand is 6. De koorde, evenwijdig met de gegeven koorden en precies halfweg tussen hen, heeft lengte $\sqrt{a}$. Dan is a gelijk aan



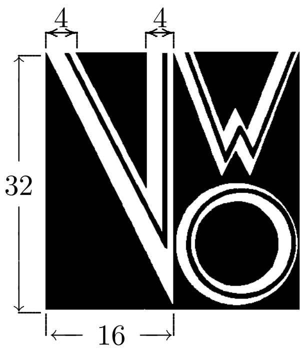
(A) 184	(B) 176	(C) 168	(D) 156	(E) 144

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1995–1996 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 5 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.

1. Bereken de oppervlakte van de letter V in het logo van de VWO.



(A) 128	(B) 192	(C) 208	(D) 214	(E) 256

2. $\pi^3 \cdot 3^\pi =$

(A) $(3\pi)^{3\pi}$	(B) $(3\pi)^{3+\pi}$	(C) $(3+\pi)^{3\pi}$
(D) 1	(E) geen van de vorige	

3. Als $\dfrac{a+p}{b-p} = \dfrac{4a}{3b}$, dan is p gelijk aan

(A) $\dfrac{a}{4a-3b}$	(B) $\dfrac{b}{4a-3b}$	(C) $\dfrac{ab}{4a-3b}$	(D) $\dfrac{ab}{4a+3b}$	(E) $\dfrac{ab}{3a+4b}$

4. Noem n het kleinste element van $\mathbb{N}_0$ waarvoor het product $1260 \cdot n$ de derdemacht is van een natuurlijk getal. Dan is

(A) $n < 100$	(B) $100 < n < 500$	(C) $500 < n < 1000$
(D) $1000 < n < 5000$	(E) $5000 < n$	

5. Zij $A = \{a, b, c\}$ en $C = \{a, b, d, e\}$. Hoeveel verzamelingen B, bestaande uit letters van ons alfabet, zijn er zodat $B \subset C$ en $A \cap B$ twee elementen heeft?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 1996. Overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

6. Als een regelmatige zeshoek ingeschreven is in een cirkel met straal R, dan is de lengte van een diagonaal die niet door het middelpunt gaat gelijk aan

(A) $R\sqrt{2}$	(B) $\dfrac{3R}{2}$	(C) $R\sqrt{3}$	(D) $2R$	(E) $R\sqrt{5}$

7. Op hoeveel manieren kan men 10 appels verdelen onder Wim, Tom en Greet zodanig dat Wim er minstens 3 krijgt, Tom en Greet elk minstens 2 en Greet hoogstens 3?

(A) 10	(B) 7	(C) 6	(D) 4	(E) 3

8. De vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + a = 0$ met $b > 2a > 0$ heeft

(A) twee gelijke wortels;
(B) twee wortels die elkaars tegengestelde zijn;
(C) twee wortels die elkaars omgekeerde zijn;
(D) twee wortels met een tegengesteld teken en verschillende absolute waarde;
(E) geen reële wortels.

9. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie met maximumwaarde gelijk aan 5 en met minimumwaarde gelijk aan -17. We beschouwen de volgende drie uitspraken:

I. De maximumwaarde van $f(|x|)$ is 5.
II. De maximumwaarde van $|f(x)|$ is 17.
III. De maximumwaarde van $|f(x)|$ is 0.

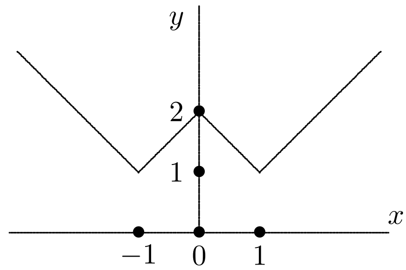
Welke uitspraken zijn in elk geval juist?

(A) enkel I	(B) enkel II	(C) enkel I en II
(D) enkel II en III	(E) I, II en III	

10. Het domein van de functie $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x-2}-2}$ is

(A) $[0, +\infty[$	(B) $[2, +\infty[$	(C) $[4, +\infty[$	(D) $[6, +\infty[$	(E) $[8, +\infty[$

11. Welk voorschrift levert de volgende grafiek op?



(A) $y = \lvert x-1\rvert + 1$	(B) $y = \Big\lvert \lvert x\rvert - 1 \Big\rvert + 1$
(C) $y = \lvert x-1\rvert + \lvert x+1\rvert$	(D) $y = \Big\lvert \lvert x\rvert + 1 \Big\rvert + 1$
(E) $y = \lvert x^2 - 1\rvert + 1$	

12. Voor welke verzameling gehele getallen x is $\dfrac{x^2-4x+4}{4(x-2)}$ een geheel getal?

(A) $2\mathbb{Z}\setminus\{2\}$	(B) $2\mathbb{Z}_0$	(C) $4\mathbb{Z}_0$	(D) $4\mathbb{Z}_0+2$	(E) $4\mathbb{Z}+2$

13. Als $0 < x \leq 1$, dan geldt:

(A) $\sqrt{x} \leq x \leq 1 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	(B) $\sqrt{x} \leq x \leq 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{x}$
(C) $x \leq \sqrt{x} \leq 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{x}$	(D) $x \leq \sqrt{x} \leq 1 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
(E) $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \leq \sqrt{x} \leq x$	

14. In een rechthoekige driehoek met zijden A, B, C (en overstaande hoeken respectievelijk a, b, c) is A de langste zijde. Dan geldt:

(A) $A = B\cos b + C\cos c$	(B) $A = B\cos b + C\sin c$
(C) $A = B\sin c + C\sin b$	(D) $A = B\sin b + C\sin c$
(E) $A = B\sin b + C\cos c$	

15. Hoeveel van de volgende uitspraken over natuurlijke getallen zijn correct?

- Een oneven getal kan steeds geschreven worden als $4n+1$ of $4n+3$ $(n \in \mathbb{N})$.
- Een willekeurig getal kan steeds geschreven worden als $3n$, $3n+1$ of $3n+2$ $(n \in \mathbb{N})$.
- Een kwadraat van een oneven getal is steeds van de vorm $8n+1$ $(n \in \mathbb{N})$.
- Een kwadraat heeft steeds de vorm $3n$ of $3n+1$ $(n \in \mathbb{N})$.

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

16. De Fibonacci-getallen a_n zijn gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = a_2 = 1. \end{cases}$$

Het getal a_{13} is

(A) even	(B) een kwadraat	(C) deelbaar door 13
(D) priem	(E) deelbaar door 3	

17. Een eerste getal bestaat uit twee cijfers gevolgd door een 4; een tweede getal bestaat uit dezelfde twee cijfers in dezelfde volgorde maar voorafgegaan door een 4. Het tweede getal is precies zoveel groter dan 400 als het eerste getal kleiner is dan 400. De som van de twee onbekende cijfers is

(A) 5	(B) 7	(C) 9	(D) 11	(E) 13

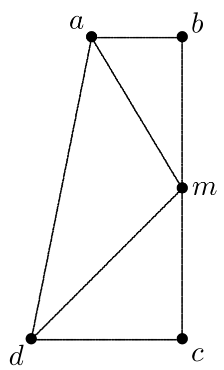
18. De vloer van een rechthoekige kamer is bedekt met vierkante tegels. De kamer is m tegels breed en n tegels lang ($n \geq m$). De helft van de tegels ligt aan de rand. Voor hoeveel afmetingen van de kamer is dit mogelijk?

(A) geen	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

19. Dhr. Janssens liegt nooit behalve op woensdag, dan liegt hij altijd. Op welke dag(en) van de week kan hij zeggen: " als ik gisteren niet gelogen heb, dan lieg ik morgen"?

(A) enkel dinsdag	(B) enkel donderdag
(C) enkel woensdag	(D) enkel dinsdag of donderdag
(E) enkel dinsdag, woensdag of donderdag	

20. De basis $[ab]$ van een rechthoekig trapezium $abcd$ is heeft lengte 12. Het midden van $[bc]$ noemen we m en am staat loodrecht op dm. Voor welke van de onderstaande waarden van $|dc|$ is de hoogte van het trapezium geen geheel getal?

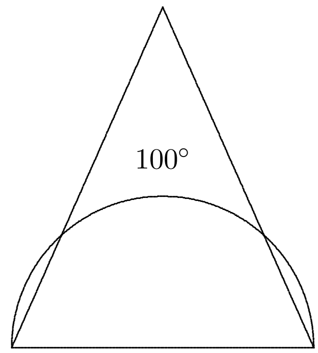


(A) 27	(B) 48	(C) 75	(D) 144	(E) 300

21. Een cirkel in het vlak met middelpunt $(1,1)$ gaat door de oorsprong. Hij snijdt van het eerste kwadrant een gebied af met oppervlakte gelijk aan

(A) 2	(B) 4	(C) π	(D) 2π	(E) $\pi + 2$

22. Een middellijn van een cirkel is tevens de basis van een gelijkbenige driehoek waarvan de opstaande zijden van de cirkel een boog van 100° afsnijden (zie figuur). De tophoek van die gelijkbenige driehoek is gelijk aan



(A) 30°	(B) 40°	(C) 45°	(D) 50°	(E) 60°

23. In een driehoek abc is hoek a gelijk aan 30° en heeft zijde $[ab]$ lengte 10. De lengte van zijde $[bc]$ is een element van de verzameling $\{3,5,7,9,11\}$. Hoeveel dergelijke niet-congruente driehoeken bestaan er?

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7

24. Er zijn vijf verschillende wegen van stad A naar stad B, drie verschillende wegen van stad B naar stad C en drie verschillende wegen die rechtstreeks van A naar C gaan zonder langs B te passeren. Op hoeveel verschillende manieren kan je van A naar C en terug naar A gaan als je minstens één keer door B wil komen?

(A) 22	(B) 90	(C) 270	(D) 315	(E) 324

25. De familie Peeters heeft 4 kinderen. Het oudste kind is een jongen en men weet dat minstens één van de overige kinderen ook een jongen is. Hoe groot is de kans dat het jongste kind een meisje is?

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{3}{7}$	(D) $\frac{1}{2}$	(E) $\frac{4}{7}$

26. Om de bladzijden van een zeker boek te nummeren zijn er N cijfers nodig. B.v.: voor een boekje van 11 bladzijden is N gelijk aan 13. Waaraan kan N niet gelijk zijn?

(A) 109	(B) 999	(C) 1992	(D) 1995	(E) 1996

27. Hoeveel priemgetallen zijn er, kleiner dan 10000, waarvan de som van de cijfers 2 is?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) meer dan 5

28. Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectieve omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

(A) $V \geq R \geq C$	(B) $V \geq C \geq R$	(C) $R \geq V \geq C$
(D) $R \geq C \geq V$	(E) $C \geq R \geq V$	

29. Een rechthoekig blad papier is 20 cm breed en 40 cm hoog. Dit blad wordt zo gevouwen dat het rechter benedenhoekpunt p geplaatst wordt in een punt p' van de linkerrand en bovendien zodanig dat de bekomen vouw de rechterrand en de benedenrand van het blad snijdt. Noem α de scherpe hoek die de vouw met de rechterrand van het blad maakt. Het interval met de mogelijke waarden van α is

(A) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	(B) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$	(C) $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$	(D) $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$	(E) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

30. Twee cilinders met dezelfde straal R hebben assen die elkaar loodrecht snijden. Het volume V van de doorsnede van die cilinders voldoet aan

(A) $V \leq \frac{4}{3}\pi R^3$	(B) $\frac{4}{3}\pi R^3 < V < 2\pi R^3$	(C) $V = 2\pi R^3$
(D) $2\pi R^3 < V < 8R^3$	(E) $8R^3 \leq V$	

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1995-1996 : Tweede Ronde.

De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1.1 De problemen.

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$\boxed{\sqrt{2} \approx 1,4142}$ $\boxed{\sqrt{3} \approx 1,7321}$ $\boxed{\sqrt{5} \approx 2,2361}$ $\boxed{\sqrt{7} \approx 2,6458}$ $\boxed{\pi \approx 3,1416}$

1. Hoeveel verschillende geldige antwoordpatronen zijn er mogelijk bij deze ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade?

(A) $30 \cdot 6!$	(B) 5^{30}	(C) 180	(D) 30^6	(E) 6^{30}

2. Als een diagonaal van een vierkant lengte 2 heeft, dan is de oppervlakte van het vierkant gelijk aan

(A) $\sqrt{2}$	(B) 2	(C) $2\sqrt{2}$	(D) 4	(E) $4\sqrt{2}$

3. Beschouw de functies:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{x}{4}, \quad h(x) = 4x - 8.$$

Dan is $(h \circ g \circ f)(x)$ gelijk aan

(A) $\sqrt{x-2}$	(B) $\sqrt{x-8}$	(C) $2\sqrt{x} - 8$	(D) $\sqrt{x} - 8$	(E) $\sqrt{x} - 2$

4. In een gelijkbenige driehoek met tophoek 120° beschouwen we alle hoogtelijnen, zwaartelijnen en binnenbissectrices uit de drie hoekpunten. Hoeveel verschillende rechten zijn dit?

(A) 9	(B) 7	(C) 6	(D) 5	(E) 3

5. Hoeveel van de volgende veeltermen kunnen ontbonden worden als een produkt van veeltermen met reële coëfficiënten en van strikt lagere graad?

$$x^2 + 4, \quad x^3 + 8, \quad x^4 + 16, \quad x^5 + 32$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

[2]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. . Overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

6. Wat is het laatste cijfer van de volgende som?

$$S = 1! + 2! + 3! + \ldots + 1995! + 1996!$$

(Voor $n \in \mathbb{N}_0 : n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.)

(A) 9	(B) 7	(C) 5	(D) 3	(E) 1

7. Hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 100 hebben minstens 4 verschillende priemdelers?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 5

8. Een blad papier is vierkant geruit. Hoeveel niet-congruente samenhangende figuren kan men tekenen die precies 4 volledige ruitjes bevatten? (Twee ruitjes noemen aanliggend als ze een gemeenschappelijke zijde hebben. Een figuur heet samenhangend wanneer men van elk ruitje naar elk ander ruitje kan gaan via opeenvolgende aanliggende ruitjes.)

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7

9. Beschouw de volgende 3 uitspraken:
   I. Als een vierhoek, ingeschreven in een cirkel, gelijkzijdig is, dan zijn al zijn hoeken gelijk.
   II. Als een vierhoek, ingeschreven in een cirkel, gelijke hoeken heeft, dan zijn al zijn zijden gelijk.
   III. Als een vierhoek, omgeschreven aan een cirkel, gelijkzijdig is, dan zijn al zijn hoeken gelijk.

   Er geldt:

(A) I, II en III zijn juist.	(B) I en II zijn juist, III is fout.
(C) I en III zijn juist, II is fout.	(D) Enkel I is juist.
(E) Geen enkele uitspraak is juist.	

10. Hoeveel natuurlijke getallen n bestaan er $(0 \leq n \leq 1996)$ zodat $\sqrt[3]{96n}$ een natuurlijk getal is?

(A) 4	(B) 5	(C) 6	(D) 110	(E) 111

11. Een kegelvormig reservoir heeft een hoogte van 1 m en een grondvlakdiameter van 2 m. Wanneer het reservoir recht op zijn punt staat, bereikt de vloeistof een maximale hoogte van x m. Op de wand wordt een merkteken aangebracht ter hoogte van het

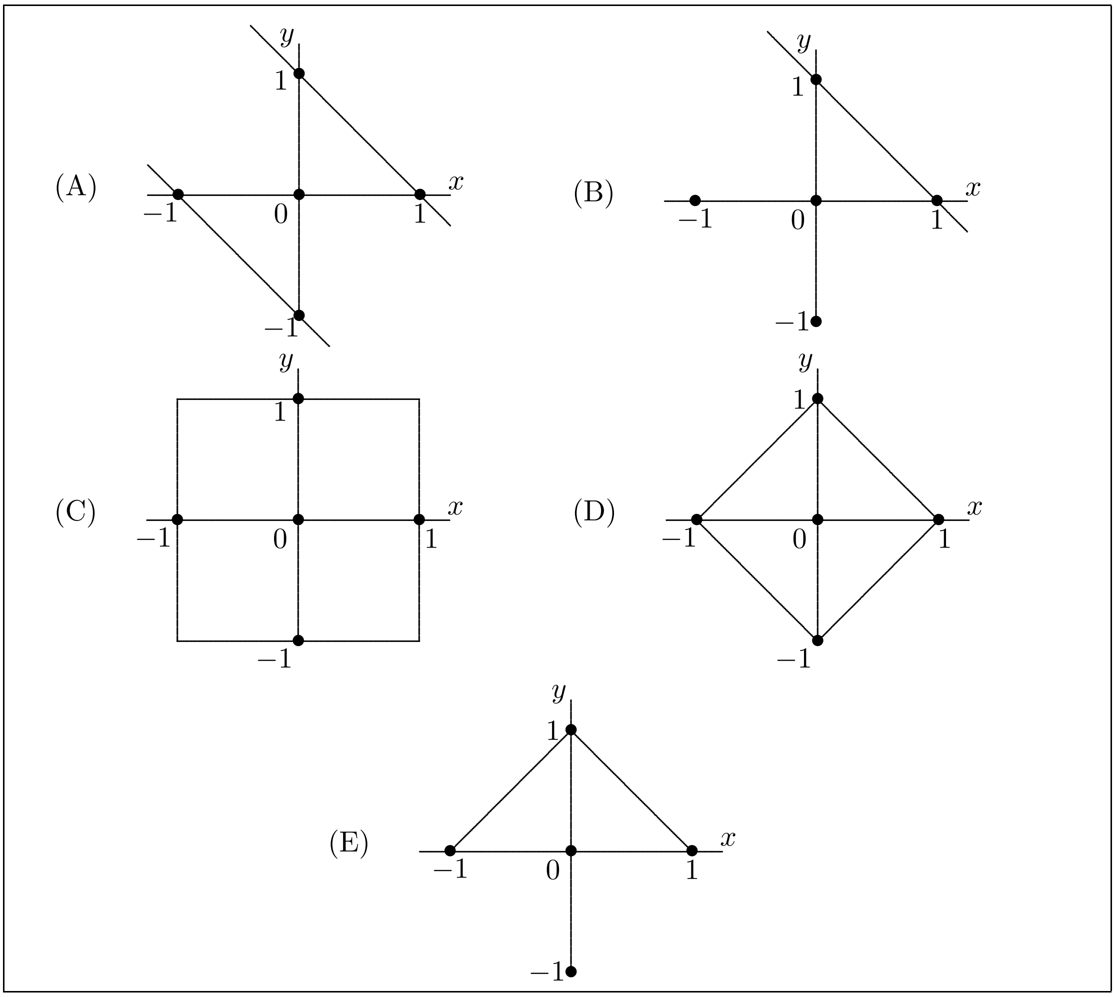
vloeistofoppervlak. Het reservoir wordt nu met de punt omhoog gezet en de vloeistof stabiliseert zich weer op de hoogte van het merkteken. Bereken x.

(A) $x = \dfrac{1}{2}$ (B) $x = \dfrac{2}{3}$ (C) $x = \dfrac{3}{4}$ (D) $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

12. Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$ is

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

13. De verzameling van de punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $|x| + |y| = 1$ wordt voorgesteld door



14. Hoeveel oplossingen in $\mathbb{Z}^2$ bezit het stelsel $\begin{cases} x^2 - y < -1 \\ x^2 + y < 5 \end{cases}$?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) meer dan 5

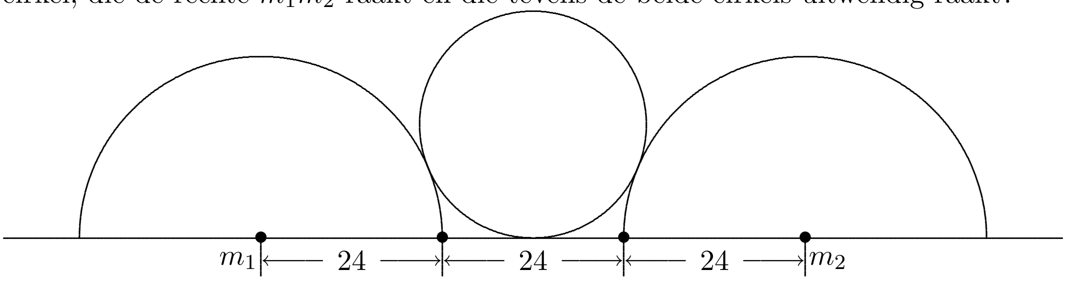
15. Als $(3x^2 - 2x - 1)^4 = a_8x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_1x + a_0$, dan is de waarde van $a_8 + a_6 + a_4 + a_2$ gelijk aan

(A) 256	(B) 255	(C) 254	(D) 128	(E) 127

16. Hoeveel koppels gehele getallen (n, k) bestaan er met de eigenschap dat $1 = 3n + 5k$?

(A) 0	(B) 7	(C) 8	(D) 15	(E) oneindig veel

17. De middelpunten m_1 en m_2 van twee cirkels met straal 24 worden verbonden door een rechte. Die cirkels snijden het lijnstuk $[m_1m_2]$ in nog twee punten zodanig dat het lijnstuk $[m_1m_2]$ in precies drie gelijke delen verdeeld wordt. Hoe groot is de straal van de cirkel, die de rechte m_1m_2 raakt en die tevens de beide cirkels uitwendig raakt?



(A) 12	(B) $10\sqrt{2}$	(C) 15	(D) 16	(E) 18

18. In een orthonormaal assenstelsel beschouwen we twee parabolen die congruent zijn met de parabool met vergelijking $y = x^2$. De ene is een parabool met de holle zijde naar boven en met de top in $(0, 1)$. De andere is een parabool met de holle zijde naar beneden en met de top in $(2, 0)$. Een rechte evenwijdig met de y-as snijdt deze 2 parabolen in a en b. Wat is de kortste afstand tussen a en b?

(A) 1	(B) 2	(C) $\sqrt{5}$	(D) 3	(E) 4

19. Van drie beweringen A, B en C is het volgende geweten:

- Als A juist is, dan zijn B en C juist.
- Als B juist is, dan is er van A en C tenminste één juist.
- Als C juist is, dan is A juist en B fout.

Welke van de beweringen A, B, C zijn dan juist?

(A) enkel A	(B) enkel B	(C) enkel C
(D) geen enkele	(E) allemaal	

20. In de gelijkbenige driehoek abc met tophoek b van 120° trekt men de bissectrice van de hoek in a. Deze verdeelt het lijnstuk $[bc]$ in twee delen, waarvan de verhouding van de grootste lengte tot de kleinste lengte gelijk is aan

(A) 1	(B) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$	(C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) $\sqrt{3}$

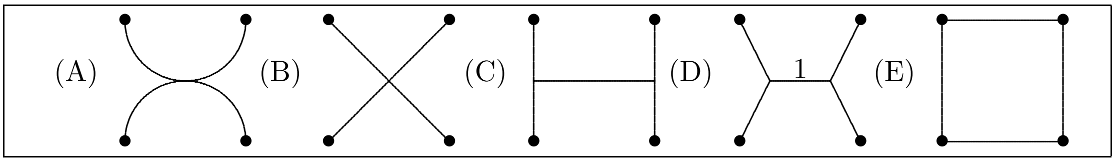
21. Gegeven is een driehoek abc met $|ac| = B$, $|ab| = C$ en $|bc| = A$. Als

$$\frac{1}{A+B} + \frac{1}{B+C} = \frac{3}{A+B+C},$$

dan is $\widehat{b}$ gelijk aan

(A) 30°	(B) 45°	(C) 60°
(D) 90°	(E) geen van de vorige	

22. Vier dorpen die de hoekpunten vormen van een vierkant met zijde 2, worden met elkaar verbonden door wegen. Welke van de 5 volgende wegenconfiguraties levert de kleinste totale wegafstand (= som van de lengten van de lijnen) op? Elke figuur bevat minstens twee symmetrieassen.



23. In een driehoek abc is pq de middenparallel ($\parallel bc$, $p \in [ab]$) en r een punt van $[bc]$, zodanig dat $|br| = 2\,|rc|$. Noem s het snijpunt van pq en ar. Als je de oppervlakte van de driehoek aqs als eenheid neemt, dan is de oppervlakte van het trapezium $psrb$ gelijk aan

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7

24. Een vader bezit een aantal goudstukken en verdeelt ze onder zijn 3 zonen. Hij geeft aan de eerste zoon de helft van het aantal stukken plus één en aan de tweede één derde van de overblijvende stukken. Wat is het minimum aantal stukken dat de vader moet bezitten zodat de derde zoon meer dan 10 goudstukken krijgt?

(A) 32	(B) 33	(C) 38	(D) 62	(E) 100

25. Een Egyptische piramide heeft vier gelijkzijdige driehoeken als opstaande zijvlakken. Bepaal de hoek tussen twee overstaande zijvlakken.

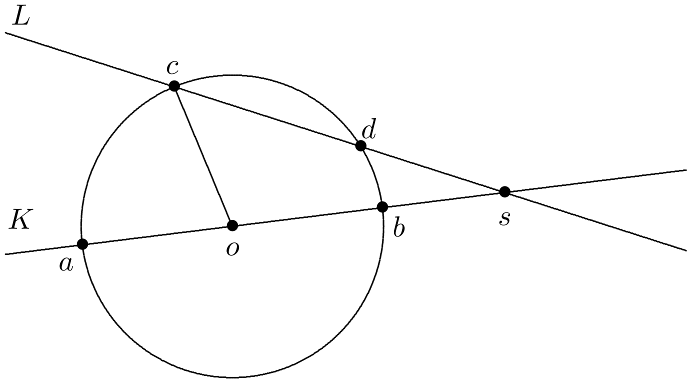
$$(y = \mathrm{Bgcos}x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ en } y \in [0,\pi]) \quad (y = \mathrm{Bgsin}x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ en } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

(A) $\frac{\pi}{4}$	(B) $\frac{\pi}{2}$	(C) $\text{Bgcos}\frac{1}{\sqrt{3}}$	(D) $\frac{\pi}{3}$	(E) $2\text{Bgsin}\frac{1}{\sqrt{3}}$

26. Beschouw de getallen 2,4,6,..., 1994, 1996. Teken één pijl van getal a naar getal b enkel en alleen als $a < b$. Hoeveel pijlen verkrijg je zo?

(A) 997	(B) 998	(C) 1996	(D) 497503	(E) 498501

27. Een cirkel met middelpunt o en straal r wordt gesneden door twee niet-evenwijdige rechten K en L. Het snijpunt s van deze rechten ligt buiten de cirkel. De rechte K gaat door o en snijdt de cirkel in de punten a en b ($b \in [as]$). De rechte L snijdt de cirkel in de punten c en d ($d \in [cs]$). De lengte $|sd|$ is gelijk aan r. Het verband tussen $\alpha = a\widehat{o}c$ en $\beta = b\widehat{s}d$ is:



(A) $\alpha = 2\beta$	(B) $\alpha = \frac{5}{2}\beta$	(C) $\alpha = 3\beta$	(D) $\alpha = \frac{7}{2}\beta$	(E) $\alpha = 4\beta$

28. Drie punten in $\mathbb{R}^3$ liggen niet op een rechte. Hoeveel verschillende rechten bestaan er waarvoor geldt dat de drie punten op dezelfde afstand liggen van die rechte?

(A) 1	(B) 3	(C) 4	(D) 6	(E) oneindig veel

29. Hoeveel oplossingen zijn er voor het volgende probleem?

Bepaal drie verschillende natuurlijke getallen $a < b < c$ met de eigenschap dat de som $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ geheel is.

(A) geen	(B) 1	(C) 3	(D) 6	(E) oneindig veel

30. Welke vergelijking heeft $y = \text{tg}10°$ als oplossing?

(A) $\sqrt{3}y^3 - 3y^2 - 3\sqrt{3}y + 1 = 0$	(B) $\sqrt{3}y^3 + 3y^2 + 3\sqrt{3}y + 1 = 0$
(C) $\sqrt{3}y^3 + 3y^2 - 3\sqrt{3}y - 1 = 0$	(D) $\sqrt{3}y^3 - 3y^2 + 3\sqrt{3}y - 1 = 0$
(E) $y^3 - 1 = \sqrt{3}$	

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1996–1997: Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 5 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.

1. Welk getal is niet rationaal?

(A) -1997	(B) $8^{2/3}$	(C) $\sqrt{0{,}49}$	(D) $100^{0{,}5}$	(E) $1000^{0{,}1}$

2. Twee getallen hebben dezelfde som als de wortels van $x^2 + 6x + 1 = 0$ en hetzelfde product als de wortels van $x^2 + 8x + 7 = 0$. Wat is het grootste van die twee getallen?

(A) $-3 + \sqrt{2}$	(B) -1	(C) $-4 + \sqrt{15}$	(D) $3 + \sqrt{2}$	(E) 7

3. Zij $f(x) = 3x - 2$. De inverse functie f^{-1} heeft als grafiek een rechte die de y-as snijdt in

(A) $(0, -\frac{2}{3})$	(B) $(0, -\frac{1}{2})$	(C) $(0, -2)$	(D) $(0, \frac{1}{2})$	(E) $(0, \frac{2}{3})$

4. Een aantal konijnen en fazanten zit in een kooi. Ze hebben in totaal 35 koppen en 94 poten. Het verschil tussen het aantal fazanten en het aantal konijnen is gelijk aan

(A) 7	(B) 9	(C) 11	(D) 13	(E) 15

5. Verlengt men alle zijvlakken van een kubus, dan wordt de ruimte verdeeld in een aantal gebieden. Hoeveel?

(A) 9	(B) 16	(C) 24	(D) 27	(E) 32

6. Eén van de volgende functies van x heeft een grafiek die niet symmetrisch is t.o.v. de y-as. Welke?

(A) $1 + \sin^2 x$	(B) $\sin(1 + x^2)$	(C) $\sin(x + 1)^2$
(D) $1 - \sin \lvert x \rvert$	(E) $\sin(1 + x) + \sin(1 - x)$	

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 1997.

7. Hoeveel van de volgende vier uitspraken over natuurlijke getallen zijn waar?

   (1) Van drie opeenvolgende oneven getallen zijn er precies twee priem.

   (2) Van drie opeenvolgende oneven getallen zijn er minstens twee priem.

   (3) Van drie opeenvolgende oneven getallen is er minstens één priem.

   (4) Van drie opeenvolgende oneven getallen is er minstens één niet priem.

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

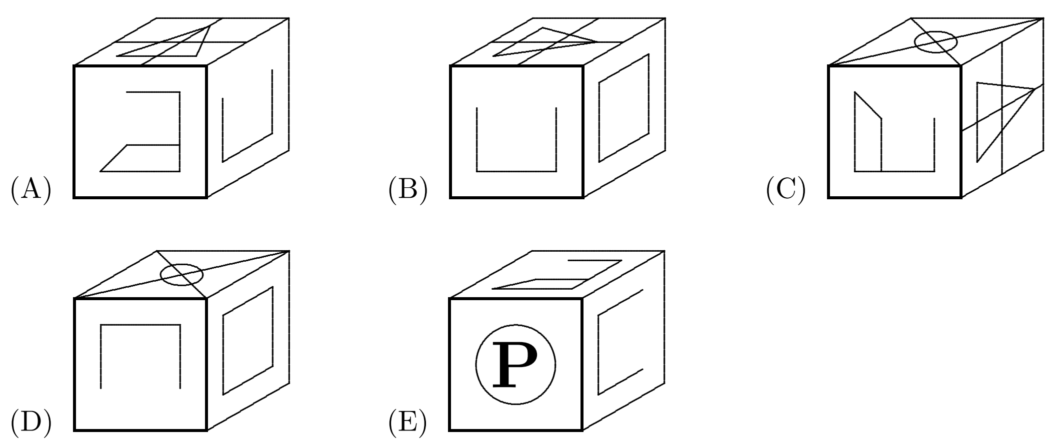
8. P en Q zijn reële veeltermen in x, respectievelijk van graad m en n met $0 < n < m$. De graad van $(P - Q)(P + Q)$ is

(A) $2m$	(B) m^2	(C) n^2	(D) mn	(E) $m^2 - n^2$

9. Noem A de verzameling van alle leerkrachten, B de verzameling van alle mensen met een luxueuze wagen en C de verzameling van alle mensen met een rijke partner. Welke van de volgende beweringen is equivalent met de uitspraak dat onder de leerkrachten enkel die met een rijke partner zich een luxueuze wagen kunnen veroorloven?

(A) $B \subset A \cup C$	(B) $A \cap C \subset B$	(C) $A \cap B \subset C$
(D) $B \subset A \cap C$	(E) $C \subset A \cap B$	

10. Ziehier 4 afbeeldingen van dezelfde dobbelsteen. Eén afbeelding is van een andere dobbelsteen. Welke ?



11. De rij $0, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, 2, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ ontstaat door onderstaande piramide te lezen van boven naar beneden en elke lijn van links naar rechts.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & & \\
 & & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & \\
 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

De 1997-ste term van die rij is gelijk aan

(A) 14	(B) 15	(C) 16	(D) 17	(E) 18

12. Zijn $a, b \in \mathbb{N}_0$ met $a \neq b$ en zij V de kleinste van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ waarvoor:

$$(1)\ a, b \in V \qquad \text{en} \qquad (2)\ \forall x, y : x, y \in V \Rightarrow x + y \in V.$$

Dan is V gelijk aan

(A) $\{a, b, a+b\}$	(B) $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$
(C) $\mathbb{N}_0$	(D) $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
(E) $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (0, 0)\}$	

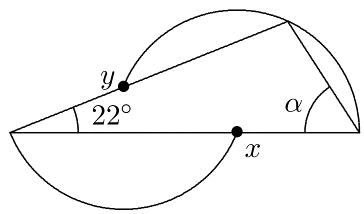
13. Beschouw de punten $p(-2, -1)$ en $q(2, 2)$ in het vlak. Als $r(k, 1)$ een punt is zodanig dat $|pr| + |rq|$ minimaal is, dan is k gelijk aan

(A) $\frac{1}{3}$	(B) $\frac{3}{4}$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) 1	(E) $\frac{4}{3}$

14. Voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, is $(2n)^{2n} - 1$ deelbaar door

(A) 2	(B) 3	(C) n	(D) $n-1$	(E) $2n+1$

15. In de figuur zijn x en y middelpunten van de geschetste cirkelbogen. Bereken de hoek α.



(A) 44°	(B) 46°	(C) 57°	(D) 60°	(E) 68°

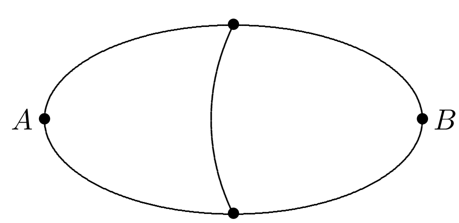
16. Gegeven zijn twee verschillende getallen a en b. De rechte door (a, a^3) en (b, b^3) snijdt de kromme met vergelijking $y = x^3$ in nog een derde punt. Dit punt heeft als y-coördinaat

(A) $a+b$	(B) $a-b$	(C) $-a-b$	(D) $-(a+b)^3$	(E) $(a-b)^3$

17. Het aantal oplossingen van de vergelijking $|x-2| + |x-3|^{-1} = 4$ is gelijk aan

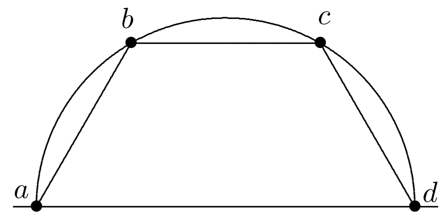
(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 6

18. Een park heeft twee ingangen A en B en het hierbij getekend wegenpatroon. Een jogger wenst een circuit af te leggen, beginnend bij een ingang, waarbij hij elke weg precies éénmaal aflegt in elk van beide richtingen zonder ooit rechtsomkeer te maken. Op hoeveel manieren is dit mogelijk?
één van de twee ingangen als vertrekpunt neemt?



(A) 0	(B) 2	(C) 4	(D) 6	(E) 8

19. Een halve cirkel wordt in drie gelijke delen verdeeld, waardoor een vierhoek *abcd* ontstaat (zie figuur). Hoe groot is de oppervlakte van deze vierhoek als de straal van de cirkel 2 is?



(A) 4	(B) $3\sqrt{2}$	(C) $3\sqrt{3}$	(D) $6\sqrt{3}$	(E) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

20. Op een kantoor werken 18 personen: één enkele spreekt Nederlands, Frans en Engels; 3 spreken Frans en Engels; 13 personen spreken Nederlands en 5 onder hen ook Engels; 9 spreken Frans; niemand spreekt uitsluitend Engels. Hoeveel personen op dat kantoor spreken uitsluitend Frans?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

21. Twee regelmatige achthoeken met zijden z en Z hebben hetzelfde middelpunt en hun zijden zijn twee aan twee evenwijdig; de oppervlakte van de grootste (met zijde Z) is tweemaal deze van de kleinste. Bepaal de kortste afstand tussen hun zijden.

(A) $\frac{z}{3}$	(B) $\frac{z}{2}$	(C) $\frac{Z}{3}$	(D) $\frac{Z}{2}$	(E) z

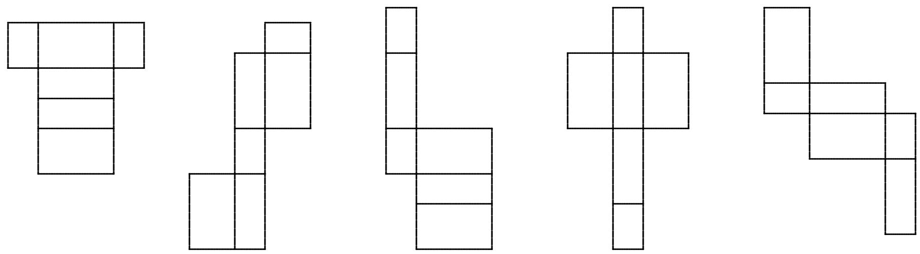
22. Van de drie volgende betrekkingen

$$\begin{aligned}
\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c &= 1\\
\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 2\\
\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 3
\end{aligned}$$

zijn er m geldig in elke rechthoekige driehoek en zijn er n geldig in elke gelijkzijdige driehoek. Hieruit volgt dat $m + n$ gelijk is aan

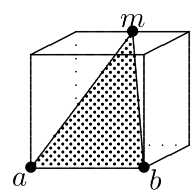
(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

23. Met hoeveel van onderstaande ontwikkelingen kan men een gesloten doos vormen als men vouwt volgens de ribben?



(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

24. Men verbindt het midden m van een ribbe van een kubus met de twee verst verwijderde hoekpunten a en b. De cosinus van $\widehat{amb}$ is gelijk aan



(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(D) $\frac{7}{9}$	(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

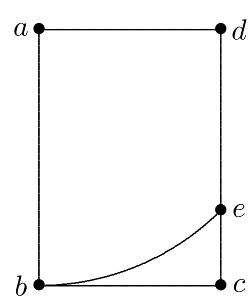
25. De oppervlakte van de unie van alle vierkanten met zijde 1, waarvan het middelpunt in een vast vierkant met zijde 1 ligt is

(A) $3+\frac{\pi}{4}$	(B) $\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}+1$	(C) $\frac{7}{2}$
(D) 4	(E) $2+2\sqrt{2}$	

26. Een getal van acht cijfers is een veelvoud van 73 en tevens een veelvoud van 137. Bovendien weten we dat het tweede cijfer van links een 7 is. Wat is dan het zesde cijfer van links?

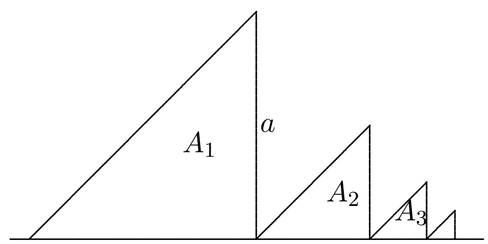
(A) 1	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 9

27. Een rechthoekig blad papier $abcd$ heeft A4-formaat, d.w.z. (zie figuur) dat $\frac{|ab|}{|ad|}=\sqrt{2}$. Met a als middelpunt en $|ab|$ als straal tekenen we een cirkelboog, die cd snijdt in een punt e. Als $|ab|=\lambda$ en $|ad|=\mu$, dan is $|de|$ gelijk aan



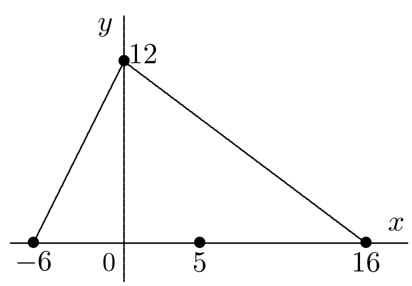
(A) λ	(B) μ	(C) $\lambda - \mu$	(D) $\dfrac{\lambda^2}{\mu}$	(E) $\dfrac{\mu^2}{\lambda}$

28. Beginnend met een gelijkbenige rechthoekige driehoek A_1 (met rechthoekszijde a), verlengen we een rechthoekszijde en brengen daarop een tweede gelijkvormige driehoek A_2 aan, waarvan de afmetingen de helft zijn van de eerste (zie figuur). We doen dit opnieuw uitgaande van A_2 om A_3 te construeren, tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur. Bepaal de totale oppervlakte van deze figuur.



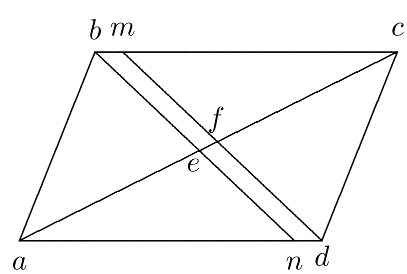
(A) a^2	(B) $\dfrac{3a^2}{4}$	(C) $\dfrac{2a^2}{3}$	(D) $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$	(E) $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$

29. We beschouwen een driehoek met hoekpunten $(-6, 0)$, $(0, 12)$ en $(16, 0)$ (zie figuur).
Hoeveel punten met gehele coördinaten zijn er op de zijden van deze driehoek die samen met $(0, 0)$ en $(5, 0)$ een stomphoekige driehoek bepalen?



(A) 2	(B) 5	(C) 7	(D) 9	(E) 15

30. Op de zijde $[bc]$ van een parallellogram $abcd$ nemen we het punt m zo dat $\overrightarrow{bm} = 0{,}1\overrightarrow{mc}$.
Op de zijde $[ad]$ nemen we n zo dat $\overrightarrow{an} = 10\overrightarrow{nd}$. De rechten bn en md snijden ac in e en f.
De vector $\overrightarrow{ef}$ is gelijk aan



(A) $\dfrac{1}{10}\overrightarrow{ac}$	(B) $\dfrac{1}{11}\overrightarrow{ac}$	(C) $\dfrac{1}{19}\overrightarrow{ac}$	(D) $\dfrac{1}{20}\overrightarrow{ac}$	(E) $\dfrac{1}{21}\overrightarrow{ac}$

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1996–1997: Tweede Ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt (opnieuw) als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 5 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt evenwel slechts 2 uur.

1.1 De problemen.

1. Het omgekeerde van $3 + \sqrt{10}$ is gelijk aan

(A) $3 - \sqrt{10}$	(B) $-3 - \sqrt{10}$	(C) $\sqrt{10} + 3$	(D) $\sqrt{10} - 3$	(E) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

2. Het getal $\sqrt{12^{12}}$ is gelijk aan

(A) 6^6	(B) $(2\sqrt{3})^{12}$	(C) 6^{12}
(D) $12^{2\sqrt{3}}$	(E) geen van de vorige resultaten	

3. De ruimtediagonaal van een kubus heeft lengte 3. Hoe groot is de inhoud van die kubus?

(A) 1	(B) $\sqrt{3}$	(C) 3
(D) $3\sqrt{3}$	(E) geen van de vorige resultaten	

4. In welke regelmatige veelhoek is de kortste diagonaal even lang als de straal van de omgeschreven cirkel?

(A) zeshoek	(B) achthoek	(C) tienhoek
(D) twaalfhoek	(E) vijftienhoek	

5. In driehoek abc is $|bc| = 6$, $|ac| = 9$ en $\hat{a} = 30°$. Welk van de volgende uitspraken is correct?

(A) Hoek $\hat{b}$ is scherp.	(B) Hoek $\hat{b}$ is stomp.
(C) Hoek $\hat{b}$ is recht.	(D) Hoek $\hat{b}$ kan scherp of stomp zijn.
(E) Een dergelijke driehoek kan niet geconstrueerd worden.	

6. Een eerste man heeft 16 saffieren (van gelijke waarde), een tweede heeft 10 robijnen (van gelijke waarde) en een derde heeft 8 diamanten (eveneens van gelijke waarde). Ieder van hen geeft aan elke andere twee edelstenen van het soort dat hij zelf oorspronkelijk bezat; dan bezitten ze elk edelstenen ter waarde van 270 000 BEF. Wat is de waarde van 1 diamant?

(A) 20 000 BEF	(B) 40 000 BEF	(C) 50 000 BEF
(D) 100 000 BEF	(E) 120 000 BEF	

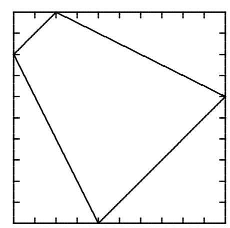
7. Hoeveel is $\left(\frac{1999}{6}\right)^2 - \left(\frac{1997}{6}\right)^2$?

(A) $\frac{1}{9}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) 111	(D) 222	(E) 1332

8. Hoeveel priemgetallen bestaan er die op twee verschillende manieren als de som van twee priemgetallen kunnen worden geschreven? Hierbij speelt de volgorde van de termen geen rol. (Priemgetallen zijn positief!)

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

9. Een gelijkbenig trapezium is ingeschreven in een vierkant met zijde 10 zoals in de figuur hiernaast. De oppervlakte van het trapezium is gelijk aan



(A) 46	(B) 48	(C) 50	(D) 52	(E) 54

10. Onderstel dat de vergelijking $x^2 + ax + b = 0$ twee gehele oplossingen heeft. Beschouw de volgende uitspraken.

I. beide oplossingen zijn oneven $\Longleftrightarrow$ a en b zijn oneven
II. beide oplossingen zijn oneven $\Longleftrightarrow$ a is even en b is oneven
III. beide oplossingen zijn oneven $\Longleftrightarrow$ a is oneven en b is even
IV. één oplossing is even en de andere oneven $\Longleftrightarrow$ a is oneven en b is even
V. één oplossing is even en de andere oneven $\Longleftrightarrow$ a is even en b is oneven
VI. één oplossing is even en de andere oneven $\Longleftrightarrow$ a en b zijn oneven

Welke uitspraken zijn juist?

(A) I en IV	(B) II en IV	(C) I en V
(D) III en V	(E) II en VI	

11. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van de ongelijkheid $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$ is

(A) $\mathbb{R}$	(B) $\mathbb{R}_0^+$	(C) $\mathbb{R}^+$
(D) $]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$	(E) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$	

12. De grafiek van een willekeurige functie $y = f(x)$, in een orthonormaal assenstel, wordt evenwijdig met de eerste bissectrice verschoven over een afstand $\sqrt{2}$ (zodanig dat de x- en de y-waarden van elk punt groter worden). Het voorschrift van de nieuwe functie is

(A) $y = f(x+1)+1$ (B) $y = f(x-1)+1$
(C) $y = f(x)+\sqrt{2}$ (D) $y = f(x+\sqrt{2})+\sqrt{2}$
(E) $y = f(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}$

13. Hoeveel reële getallen bestaan er die precies 1 verschillen met hun omgekeerde?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) oneindig veel

14. Voor $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ neemt de functie $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ het volgende aantal gehele waarden aan.

(A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) een eindig aantal groter dan 2
(E) oneindig veel

15. Zij $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Als bij deling van a door b het quotiënt q is en de rest r en als bij deling van q door c het quotiënt q' is en de rest r', dan is de rest bij deling van a door bc gelijk aan

(A) r (B) r' (C) rr'
(D) $br'+r$ (E) niet te bepalen vanuit de gegevens

16. Op hoeveel manieren kun je $\frac{1}{14}$ schrijven als $\frac{a}{7}+\frac{b}{2}$ met a en b gehele getallen?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

17. Welke van de volgende ongelijkheden is correct? (Merk op: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

(A) $2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{2^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2}$ (B) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$
(C) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$ (D) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$
(E) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$

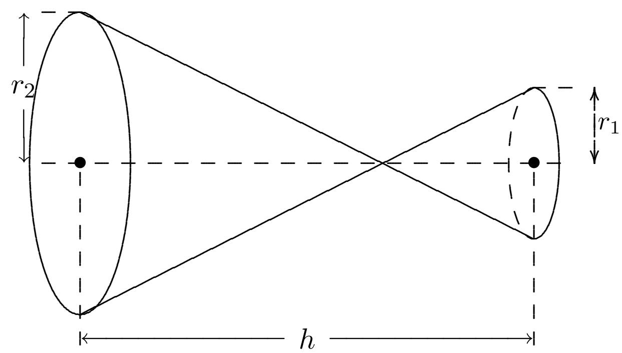
18. Zij $A = \{a, b, c\}$. Het aantal afbeeldingen $f : A \to A$ zodanig dat $f \circ f = f$ is gelijk aan

(A) 1 (B) 4 (C) 7 (D) 10 (E) 13

19. Een strook papier verdeel je in vijf gelijke delen. Twee delen bewaar je, één deel gooi je weg en met de overblijvende twee delen herhaal je dezelfde procedure. Hoeveel bewaar je uiteindelijk van de strook wanneer je dezelfde procedure blijft herhalen?

(A) $\frac{7}{15}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{3}{5}$	(E) $\frac{4}{5}$

20. In bijgaande figuur is een dubbele omwentelingskegel voorgesteld. Zijn inhoud is gelijk aan



(A) $\frac{h}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2)$
(B) $\frac{h}{3}\pi(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)$
(C) $\frac{h}{3}\pi(r_2^2 - r_1 r_2 + r_1^2)$
(D) $\frac{h}{3}\pi(r_2 + r_1)^2$
(E) $\frac{h}{3}\pi(r_2 - r_1)^2$

21. An, Bert en Chris dragen elk een jeans van verschillende kleur (grijs, blauw, zwart). Bovendien is het volgende geweten:

- Als An een blauwe draagt, dan draagt Bert een grijze.
- Als An een zwarte draagt, dan draagt Chris een grijze.
- Als Bert geen zwarte draagt, dan draagt Chris een blauwe.

Hieruit volgt

(A) Chris draagt een blauwe jeans.
(B) Chris draagt een grijze jeans.
(C) Chris draagt een zwarte jeans.
(D) De beweringen zijn strijdig.
(E) De gegevens zijn niet bepalend voor de kleur van Chris' jeans, er zijn meerdere mogelijkheden.

22. Hoeveel niet-congruente driehoeken bestaan er waarvan de zijden natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 5 zijn?

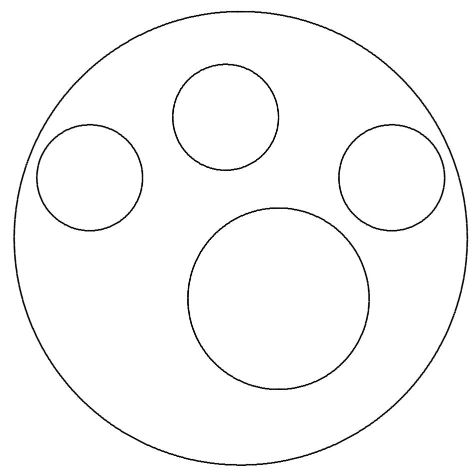
(A) 10	(B) 21	(C) 22	(D) 25	(E) 35

23. De onbekenden a, b en c zijn natuurlijke getallen. Hoeveel oplossingen heeft het stelsel

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(b+c) \end{cases} \quad ?$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) oneindig veel

24. De traditionele woning in Burundi is de rugo. Dit is een domein omheind door een cirkelvormige haag, waarbinnen zich vier hutten bevinden, namelijk deze van de ouders (de gezinshut) en de drie kleinere, deze van de jongens, deze van de meisjes en de washut. Alle hutten zijn cirkelvormig en de drie kleinere hebben een diameter welke de helft is van deze van de gezinshut. Uiteraard speelt het leven zich grotendeels buiten af en tracht men de open ruimte zo groot mogelijk te houden. Als D de diameter van het domein is, hoe groot mag dan maximaal de diameter van de gezinshut zijn, zodat er nog $\frac{2}{3}$ van het terrein vrij blijft?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}D$	(B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}}D$	(C) $\frac{2}{\sqrt{21}}D$	(D) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}D$	(E) $\frac{2}{\sqrt{15}}D$

25. Noem a, b en c de lengten van de zwaartelijnen van een rechthoekige driehoek zodat $a \geq b \geq c$. Dan is $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ gelijk aan

(A) 2	(B) $\frac{5}{2}$	(C) 3	(D) 4	(E) 5

26. René zit in het tweede jaar en krijgt de volgende toetsvraag:

Vul in, $||$ of $\perp$, zodat de volgende uitspraak waar is voor alle rechten A, B en C van het vlak.

(a) $A \ \ldots \ A$

(b) $A \,||\, B$ *en* $B \ \ldots \ C \Longrightarrow A \ \ldots \ C$

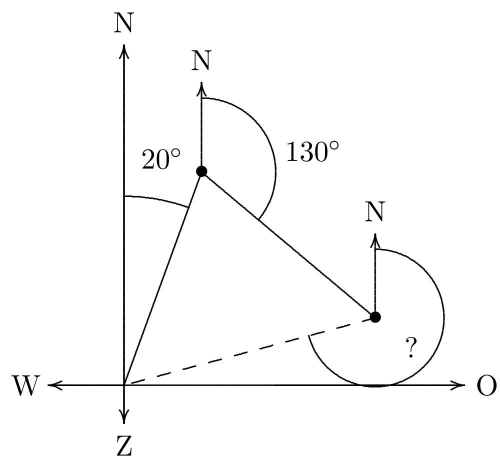
René heeft weeral eens zijn les niet geleerd en gokt er maar op los. Wat is de kans dat hij de vraag helemaal correct oplost?

(A) 0	(B) $\frac{1}{8}$	(C) $\frac{1}{6}$	(D) $\frac{1}{4}$	(E) $\frac{1}{2}$

27. Als $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$, met $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, dan is $\dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x} =$

(A) $(a^3 + b^3)^{1/3}$	(B) $(a^{3/2} + b^{3/2})^{2/3}$	(C) $a + b$
(D) $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$	(E) $(a^{1/3} + b^{1/3})^3$	

28. Een expeditie vertrekt vanuit het basiskamp en gaat 10 km in 20° NO-richting. Daarna gaat ze opnieuw 10 km, maar in 130° ZO-richting. Hoeveel graden moet de expeditie nu gaan om in rechte lijn naar het basiskamp terug te keren?

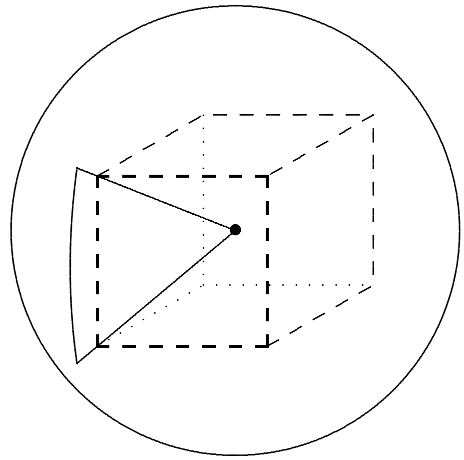


(A) 235°	(B) 240°	(C) 250°	(D) 255°	(E) 260°

29. Beschouw alle getallen bestaande uit n cijfers die gekozen worden in de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$ en waarvoor geldt dat er op geen enkele plaats rechts van een 4 een 3 mag voorkomen. B.v. de getallen met 6 cijfers 123314 en 113424 voldoen, terwijl 114234 niet voldoet. Als a_n het aantal dergelijke getallen van n cijfers is, dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ de volgende betrekking.

(A) $a_{n+1} = 4a_n - 1$	(B) $a_{n+1} = 4a_n - 6^{n-1}$
(C) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$	(D) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - \dfrac{3}{2}a_n$
(E) $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$	

30. Gegeven is een bol met straal R en een kubus met hetzelfde middelpunt. De twaalf ribben van de kubus worden vanuit het middelpunt op het boloppervlak geprojecteerd, zodat de twaalf ontstane cirkelbogen het boloppervlak verdelen in zes congruente gebieden. Stel door α en β de scherpe hoeken voor zodat $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos\beta$. De omtrek van elk van die gebieden is



(A) $4R\alpha$	(B) $4R\beta$	(C) $4R(\alpha+\beta)$
(D) $8R\alpha$	(E) $8R\beta$	

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1997-1998: Eerste ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$\sqrt{2} \approx 1,4142$; $\sqrt{3} \approx 1,7321$; $\sqrt{5} \approx 2,2361$; $\sqrt{7} \approx 2,6458$; $\pi \approx 3,1416$

1. Beschouw de volgende tabel. De som van alle getallen van rij 1 tot en met rij 1998 is

Rij 1					1				
Rij 2				1		-1			
Rij 3			1		-1		1		
Rij 4		1		-1		1		-1	
Rij 5	1		-1		1		-1		1
...					...				

(A) 0	(B) 1	(C) 999	(D) 1998	(E) 1999

2. In een universiteit zijn er S studenten en P proffen. Welke betrekking drukt uit dat er 6 keer zoveel studenten als proffen zijn?

(A) $S + 6 = P$ (B) $S - 6 = P$ (C) $6S = P$
(D) $6S \geq P$ (E) geen van de voorgaande

3. $\sqrt{25^{4a^2}} =$

(A) 25^{2a} (B) $25^{2|a|}$ (C) 25^{2a^2} (D) $5^{2|a|}$ (E) 5^{2a^2}

4. Welk van de volgende bedragen is verschillend van elk van de andere?

(A) 10% van 5000 BEF (B) 20% van 2500 BEF (C) 25% van 2000 BEF
(D) 33% van 1500 BEF (E) 40% van 1250 BEF

5. Diophantus was een gelukkig jongetje gedurende 1/6 van zijn leven. Na nog 1/12 begon hij baard te krijgen. Het duurde nog slechts 1/7 voor hij trouwde. In het vijfde jaar na zijn huwelijk kreeg hij een zoon, die helaas 4 jaar voor zijn vader stierf en maar half zo oud werd als zijn vader. Hoe oud werd Diophantus?

(A) 44 jaar (B) 54 jaar (C) 64 jaar (D) 74 jaar (E) 84 jaar

6. Als volgend rooster wordt aangevuld tot een Latijns vierkant (d.w.z. elk cijfer 1, 2, 3 of 4 komt in elke rij en in elke kolom juist éénmaal voor), welk cijfer komt dan in het vakje met het vraagteken?

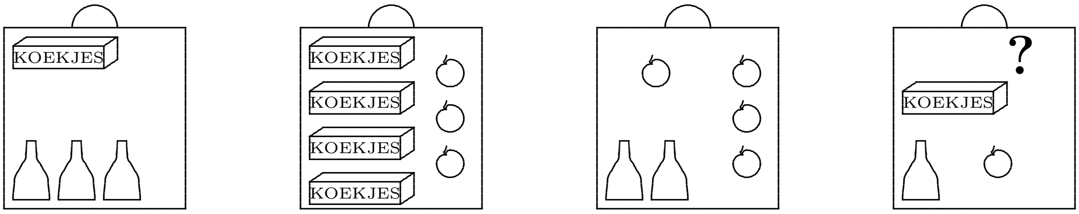
1	2		
?	3		
		4	

(A) 1	(B) 2	(C) 3
(D) 4	(E) meerdere antwoorden mogelijk	

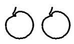
7. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{1998^2} + 1998^2$?

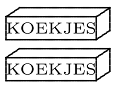
(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 4	(E) 8

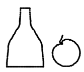
8. Wat moet nog extra in de vierde boodschappentas gevoegd worden opdat de inhoud van alle tassen evenveel kost?

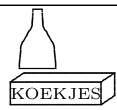


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

9. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van $f : [0, 1000\pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$ en $g : [0, 1000\pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$?

(A) 500	(B) 1000	(C) 1500	(D) 2000	(E) oneindig veel

10. Hoeveel natuurlijke getallen met twee cijfers zijn gelijk aan de som van hun cijfers vermeerderd met het product van hun cijfers?

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

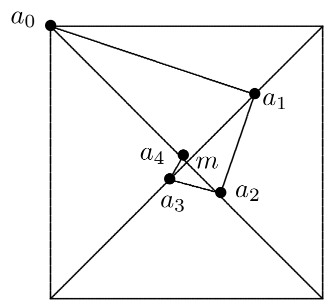
11. In een scherphoekige driehoek is de kleinste hoek 1/5 van de grootste. Bovendien zijn alle hoeken gelijk aan een geheel aantal graden. De som van de grootste twee hoeken is

(A) 157°	(B) 160°	(C) 163°
(D) 166°	(E) er zijn meerdere oplossingen	

12. Paul heeft een collectie munten. Als hij ze stapelt in hoopjes van 6, dan blijven er 3 over; in hoopjes van 8, dan blijven er 7 over en in hoopjes van 5, dan blijven er 4 over. Als gegeven is dat het aantal munten n kleiner is dan 100, dan geldt:

(A) $n \leq 20$	(B) $20 < n \leq 40$	(C) $40 < n \leq 60$
(D) $60 < n \leq 80$	(E) $80 < n$	

13. In een vierkant met middelpunt m waarvan de lengte van een diagonaal gelijk is aan 2, construeren we een "spiraal" $a_0a_1a_2a_3\ldots$ zoals aangegeven op de figuur. De afstand van a_{n+1} tot m is de helft van de afstand van a_n tot m. De lengte van de spiraal is gelijk aan



(A) 2	(B) $\sqrt{5}$	(C) 4	(D) 8	(E) oneindig

14. Bij een streepjescode (gekend onder de naam EAN-13) doet het meest rechtse cijfer c dienst als controlecijfer. Men vindt c door het laatste cijfer van

$$(a_1 + a_3 + \ldots + a_{11}) + 3(a_2 + a_4 + \ldots + a_{12})$$

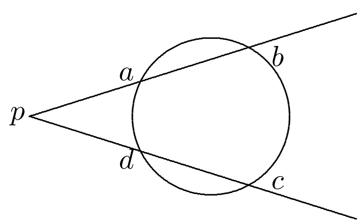
af te trekken van 10. Door waterschade is het meest linkse cijfer van de streepjescode van een pak bloem onleesbaar geworden. Wat is dat cijfer?

? 4 1 0 0 5 6 0 1 1 5 7 5

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} c

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

15. Een cirkel wordt verdeeld in vier bogen waarvan drie aangrenzende bogen $\overset{\frown}{ab}, \overset{\frown}{bc}$ en $\overset{\frown}{cd}$ elk 100° meten (zie figuur). De hoek $\hat{p}$ gevormd door de rechten ab en dc meet



(A) 15°	(B) 20°	(C) 25°	(D) 30°	(E) 40°

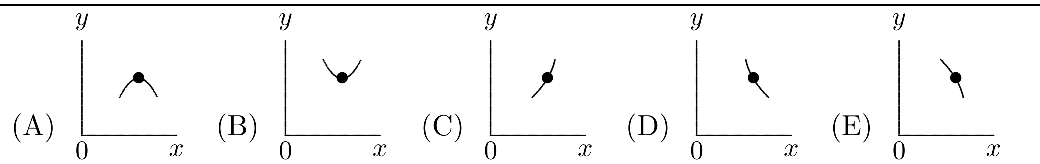
16. Beschouw de reële functie $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$ en de volgende vier uitspraken:

- f is strikt stijgend op $\mathbb{R}^+$,
- f is strikt dalend op $\mathbb{R}^-$,
- f is constant op een interval,
- f is strikt positief op haar domein.

Hoeveel van deze uitspraken zijn correct?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. Op welke figuur is een deel van de grafiek van $y = (10-x)^2 + 10$ te zien? (• staat telkens voor het punt $(10, 10)$)



18. Hoeveel van volgende zes veeltermen zijn deler van de veelterm $x^7 - x$?

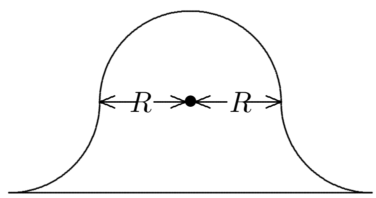
$$x^2 + x + 1, \quad x^3 - 1, \quad x^2 - 1, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + x, \quad x^2 - x$$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

19. De getallen van de bladzijdennummering van een boek met 320 bladzijden worden tot cijfers verknipt. Deze cijfers worden in een zak gestoken. Hoe groot is de kans dat men bij trekking van één cijfer het cijfer 1 verkrijgt?

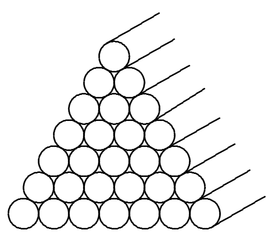
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{11}{100}$ (C) $\frac{43}{213}$ (D) $\frac{43}{240}$ (E) $\frac{40}{213}$

20. De tekening stelt de dwarsdoorsnede voor van een onderaardse gang gevormd door vier identieke kwartcirkels en een horizontale bodem. Waaraan is de oppervlakte van deze dwarsdoorsnede gelijk?



(A) $2R^2$ (B) πR^2 (C) $4R^2$ (D) $6R^2$ (E) $2\pi R^2$

21. Er zijn 28 buizen gestapeld zoals in de figuur hiernaast. De diameter van elke buis is 10 cm. Wat is de beste benadering van de hoogte van de stapel?



(A) 51 cm (B) 52 cm (C) 61 cm (D) 62 cm (E) 70 cm

22. Hoeveel natuurlijke getallen tussen 100 en 1000 zijn noch door 2, noch door 5 deelbaar?

(A) 270	(B) 360	(C) 540	(D) 630	(E) 810

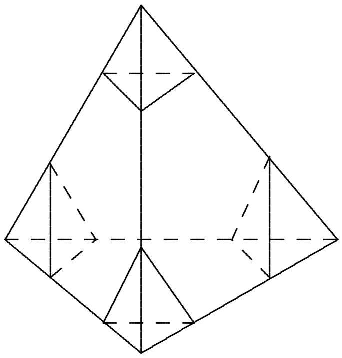
23. Beschouw volgende drie uitspraken over de reële functie $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$.

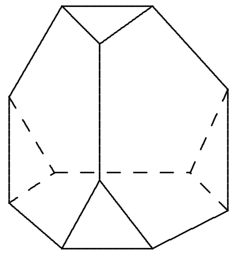
I. f is gedefinieerd voor alle x groter dan 0.
II. f is gedefinieerd voor sommige negatieve waarden van x.
III. f neemt alle positieve waarden aan.

De enige correcte uitspraken zijn:

(A) I	(B) II	(C) III	(D) I en III	(E) II en III

24. Van een regelmatig viervlak V worden de vier hoeken afgesneden zodanig dat een lichaam L overblijft met acht zijvlakken: vier gelijkzijdige driehoeken en vier regelmatige zeshoeken (zie figuur). De verhouding van de oppervlakte van L tot de oppervlakte van V is gelijk aan



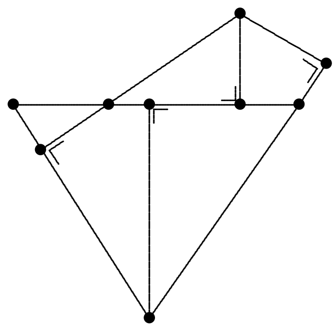


(A) $\frac{1}{3}$	(B) $\frac{1}{2}$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) $\frac{7}{9}$	(E) 1

25. De hoogtelijnen van een scherphoekige driehoek abc snijden de omgeschreven cirkel in de punten a', b' en c'. Deze hoogtelijnen vallen samen met de volgende merkwaardige lijnen van de driehoek $a'b'c'$.

(A) de hoogtelijnen	(B) de zwaartelijnen	(C) de bissectrices
(D) de middelloodlijnen	(E) geen van de vorige	

26. Hoeveel cirkels gaan door minstens vier van de punten die aangeduid werden met • op de figuur hiernaast?



(A) geen	(B) juist 1	(C) juist 2	(D) juist 3	(E) 4 of meer

27. Er liggen vier kaartjes op tafel. Ze hebben elk een letter op één zijde en een cijfer op de andere zijde. De zichtbare symbolen zijn

$$\boxed{A} \qquad \boxed{K} \qquad \boxed{4} \qquad \boxed{7}$$

We willen controleren of volgende uitspraak waar is:

> "Als een kaartje op één zijde een klinker heeft, dan heeft het een even cijfer op de andere zijde."

Duid alle kaartjes aan die we alleszins **moeten** omdraaien om de uitspraak te kunnen verifiëren.

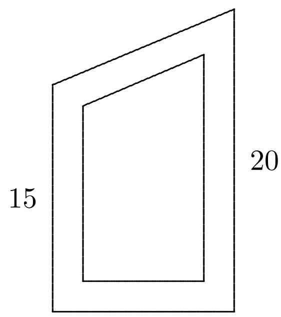
(A) A (B) A en 4 (C) A en 7 (D) A, 4 en 7 (E) alle kaartjes

28. Hoeveel van volgende vijf vergelijkingen hebben minstens één oplossing in $\mathbb{N}_0$?

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{x} \\
\sqrt{x}.\sqrt{x} &= \sqrt{x}+\sqrt{x} \\
\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x} &= \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x} \\
\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x} &= \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x} \\
\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x} &= \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}
\end{aligned}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29. Een stuk grond in de vorm van een rechthoekig trapezium heeft een oppervlakte van $210m^2$ en basissen van $15m$ en $20m$. Op deze grond mag worden gebouwd binnen een trapezium met zijden evenwijdig met en op een afstand van $2m$ van de zijden van het gegeven trapezium (zie figuur).



De bebouwbare oppervlakte in vierkante meter is gelijk aan

(A) $\frac{160}{3}$ (B) $\frac{320}{3}$ (C) $\frac{324}{3}$ (D) $\frac{372}{3}$ (E) $\frac{400}{3}$

30. Volgens mijn horloge (dat 5 minuten voor staat), vertrek ik 15 minuten te laat naar een vergadering die 10 minuten later begint dan voorzien. Dan kom ik ...

(A) net op tijd (B) 10 minuten te vroeg
(C) 10 minuten te laat (D) 20 minuten te laat
(E) 30 minuten te laat

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1997-1998: Tweede ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem is hetzelfde als dat voor de eerste ronde, d.w.z. per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt nu evenwel slechts 2 uur.

1.1 De problemen

1. Een moeder zegt: "Al mijn kinderen hebben ten minste één broer en ten minste één zus". Hoeveel kinderen heeft ze minstens?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

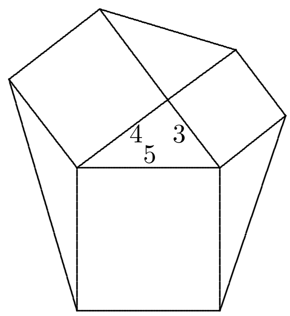
2. Hoeveel verschillende gehele waarden kan $3 - 3\,|\cos x|$ aannemen?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 6	(E) 7

3. Noteer $\lfloor a \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan a. B.v. $\lfloor 1998 \rfloor = 1998$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $\lfloor 2x \rfloor = 3$ is

(A) $[1, \frac{3}{2}[$	(B) $[\frac{3}{2}, 2[$	(C) $[2, 3[$	(D) $[3, 4[$	(E) $[6, 8[$

4. Een zeshoek (zie figuur) wordt door een aantal lijnstukken verdeeld in vier driehoeken en drie vierkanten. De zijden van de binnenste driehoek hebben lengte 3, 4 en 5. Hoeveel van deze zeven figuren hebben oppervlakte 6?



(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) geen enkele

5. Op hoeveel manieren kan de oppervlakte van een rechthoek gehalveerd worden met behulp van een rechte lijn?

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 8	(E) meer dan 8

6. Twaalf positieve getallen worden genummerd. Het vierde getal is 4, het twaalfde is 12. De som van elke drie opeenvolgende getallen is 333. Het zevende getal is

(A) 4 (B) 7 (C) 12
(D) 317 (E) niet te bepalen

7. Welk van de vijf volgende getallen is het kleinst?

(A) $\sqrt[30]{30}$ (B) $\sqrt[6]{2}$ (C) $\sqrt[10]{3}$ (D) $\sqrt[12]{4}$ (E) $\sqrt[15]{5}$

8. Hoe kan het tekenverloop van een veeltermfunctie van de derde graad er *niet* uitzien?

(A) $$\begin{array}{c|ccccccc} x & & x_1 & & x_2 & & x_3 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

(B) $$\begin{array}{c|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

(C) $$\begin{array}{c|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

(D) $$\begin{array}{c|ccc} x & & x_1 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

(E) $$\begin{array}{c|ccc} x & & x_1 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - \end{array}$$

9. Gegeven is de volgende uitspraak over de natuurlijke getallen:

$$\forall\, x \text{ even: } x^2 + x \text{ is even.}$$

De negatie (ontkenning) hiervan is:

(A) $\forall\, x$ even: $x^2 + x$ is oneven.
(B) $\forall\, x$ oneven: $x^2 + x$ is even.
(C) $\forall\, x$ oneven: $x^2 + x$ is oneven.
(D) $\exists\, x$ even: $x^2 + x$ is oneven.
(E) $\exists\, x$ oneven: $x^2 + x$ is oneven.

10. $\dfrac{\cos^3 15^\circ + \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$ is gelijk aan

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

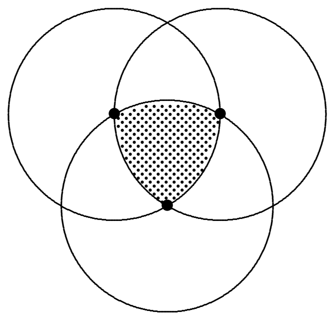
11. Voor hoeveel natuurlijke getallen n is de uitspraak $2^n > n^3$ onjuist?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) meer dan 8

12. Een fietser rijdt een heuvel op met een snelheid van 16 km/h. Hij keert onmiddellijk langs dezelfde weg terug met een snelheid van 48 km/h. De gemiddelde snelheid in km/h, over het gehele traject, is

(A) 12	(B) 24
(C) 30	(D) 32
(E) niet te bepalen omdat de afgelegde weg onbekend is.	

13. Drie cirkels met straal 1 snijden elkaar zo dat elke cirkel door de middelpunten van beide andere cirkels gaat. De gearceerde oppervlakte (zie figuur) is gelijk aan

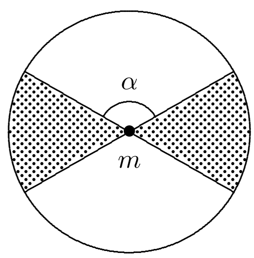


(A) $\frac{3\pi}{4} - \sqrt{3}$	(B) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$	(C) $\frac{\pi - 1}{2}$
(D) $\frac{\pi + 1}{2}$	(E) geen van de vorige	

14. De vergelijking $\sqrt{x-p} = x$ heeft twee verschillende reële wortels als en slechts als p behoort tot

(A) $]-\infty, 0]$	(B) $]-\infty, \frac{1}{4}[$	(C) $]-\infty, \frac{1}{4}]$
(D) $[0, \frac{1}{4}[$	(E) $]\frac{1}{4}, +\infty[$	

15. De gearceerde figuur heeft dezelfde omtrek als de gegeven cirkel met middelpunt m. Hoe groot is de hoek α, uitgedrukt in radialen?



(A) 2	(B) 3	(C) $\frac{\pi}{2}$	(D) $\frac{2\pi}{3}$	(E) $\frac{3\pi}{4}$

16. Het aantal verschillende reële oplossingen van de vergelijking $4 - x^2 = \frac{1}{x^3}$ is

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

17. Als $f(x) = x - 1$ en $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$, dan is $g(3)$ gelijk aan

(A) 3	(B) 4	(C) 8	(D) 9	(E) 15

18. Een man heeft in totaal 2800 kinderen, kleinkinderen, achterkleinkinderen en achter-achterkleinkinderen. Ze zijn allen nog in leven. De achter-achterkleinkinderen hebben zelf nog geen kinderen. Alle anderen hebben elk precies hetzelfde aantal kinderen als de man zelf. Hoeveel kinderen heeft deze man?

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

19. Een broze stok van 70 cm breekt in twee. Aan beide uiteinden (telkens 10 cm) kan de stok niet breken. Alle plaatsen waar de stok kan breken zijn even waarschijnlijk. Wat is de kans dat het verschil tussen het grootste en het kleinste deel van de stok minstens 10 cm is?

(A) 40%	(B) 50%	(C) 60%	(D) 70%	(E) 80%

20. Als x en y voldoen aan

$$\begin{cases} 83249\,x + 16751\,y & = 108249 \\ 16751\,x + 83249\,y & = 41751 \end{cases}$$

dan is $\dfrac{x}{y}$ gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

21.

$$\frac{2}{0,1998\,1998\,1998\,\ldots} + \frac{2}{0,01998\,1998\,1998\,\ldots} + \frac{2}{0,001998\,1998\,1998\,\ldots}$$

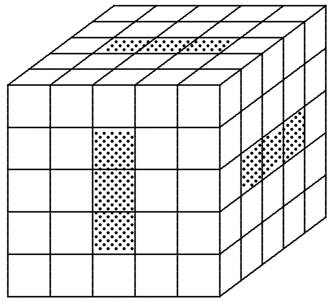
is een natuurlijk getal. Welk van de volgende getallen is een priemfactor van dat getal?

(A) 2	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 11

22. De lengte van de kortste diagonaal van een regelmatige n-hoek, ingeschreven in een cirkel met straal 1, is

(A) $\sin\dfrac{\pi}{n}$	(B) $2\sin\dfrac{\pi}{n}$	(C) $\sin\dfrac{2\pi}{n}$	(D) $2\sin\dfrac{2\pi}{n}$	(E) $2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{n}$

23. Een kubus is opgebouwd uit 125 congruente kubusjes. De kubus wordt doorboord op drie plaatsen, de gaten zijn rechthoekig (zie figuur). Hoeveel kubusjes blijven er zo over?



(A) 80	(B) 86	(C) 88	(D) 89	(E) 116

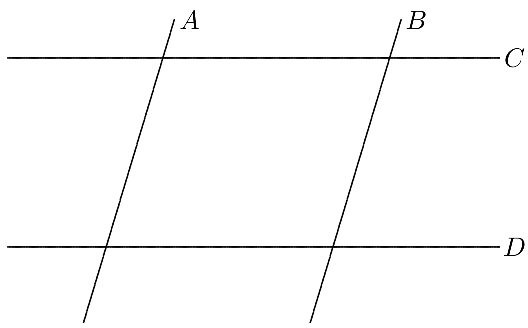
24. In een proces zijn er vier beklaagden. Er staat vast dat

- als A schuldig is, dan is B ook schuldig;
- als B schuldig is, dan volgt dat C ook schuldig is of dat A onschuldig is;
- als D onschuldig is, dan volgt dat A schuldig is en dat C onschuldig is;
- als D schuldig is, dan is A ook schuldig.

Het aantal schuldigen is dus gelijk aan

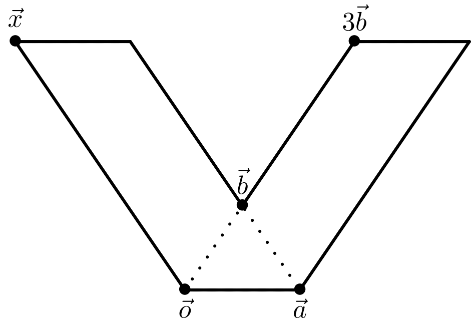
(A) 1	(B) 2	(C) 3
(D) 4	(E) niet te bepalen uit de gegevens.	

25. A, B, C en D vormen een parallellogram zoals op de figuur hiernaast. Stel door S_A de loodrechte spiegeling voor t.o.v. A. Dan is $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$ een



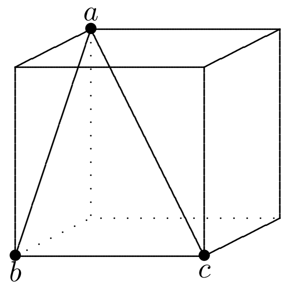
(A) verschuiving	(B) loodrechte spiegeling
(C) puntspiegeling	(D) homothetie
(E) draaiing over een hoek verschillend van 180°.	

26. Twee congruente parallellogrammen die één zijde gemeen hebben, vormen de letter V zoals op de figuur. Rekening houdend met de benaming van de hoekpunten, is de vector $\vec{x}$ gelijk aan



(A) $-3\vec{b}$	(B) $2\vec{a}-3\vec{b}$	(C) $3\vec{b}-2\vec{a}$	(D) $3\vec{b}-3\vec{a}$	(E) $\vec{a}-3\vec{b}$

27. Gegeven een kubus. Welke uitspraak over driehoek abc (zie figuur) is correct?



(A) Hij is gelijkbenig en stomp.
(B) Hij is gelijkbenig en scherp
(C) Hij is gelijkbenig en rechthoekig
(D) Hij is rechthoekig met drie verschillende zijden.
(E) Hij is niet gelijkbenig, noch rechthoekig en heeft drie verschillende zijden.

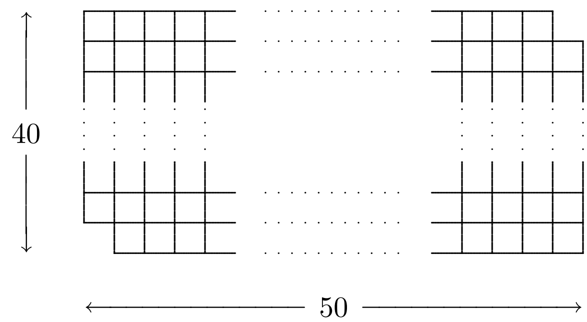
28. In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 3 en 4, trekt men vanuit de rechte hoek de zwaartelijn (voetpunt z) en de hoogtelijn (voetpunt h). De afstand tussen z en h bedraagt

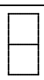
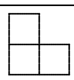
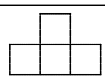
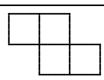
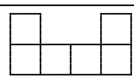
(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{7}{10}$	(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(D) $\frac{3}{4}$	(E) 1

29. Het aantal natuurlijke getallen n waarvoor $(n^2-2n)^{n^2+47} = (n^2-2n)^{16n-16}$ is gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

30. Van een blad met 40 bij 50 ruitjes wordt in twee overstaande hoeken een ruitje weggeknipt. Met welke vorm van papiersnippers kan je de 1998 overblijvende ruitjes zonder overlapping bedekken?



(A) 	(B) 	(C) 	(D) 	(E) 

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1998-1999: Eerste ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen

1. Welke van de vijf volgende uitdrukkingen is niet gelijk aan de overige vier?

(A) $(2^4)^8$	(B) $(4^2)^8$	(C) $2^{16}.16^2$	(D) $2^{16}.2^{16}$	(E) $4^8.4^8$

2. Neem a, b, c en d elementen in $\mathbb{R}_0$. Wat is het maximaal aantal verschillende getallen onder de volgende vijf?

$$(a:b):(c:d) \quad , \quad ((a:b):c):d \quad , \quad (a:(b:c)):d$$
$$a:((b:c):d) \quad , \quad a:(b:(c:d))$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

3. Wentelt men een rechthoek met afmetingen a en b ($a \neq b$) om een zijde met lengte a (resp. b), dan noemt men de inhoud van de ontstane cilinder I_a (resp. I_b). Bepaal de verhouding $\dfrac{\mathrm{I}_a}{\mathrm{I}_b}$.

(A) $\dfrac{a}{b}$	(B) $\dfrac{b}{a}$	(C) 1	(D) $\dfrac{a^2}{b^2}$	(E) $\dfrac{b^2}{a^2}$

4. De middelpunten van vier cirkels (in het vlak) met straal 1 zijn de hoekpunten van een vierkant met zijde 1. Door hoeveel punten gaan er minstens twee van deze cirkels?

(A) 4	(B) 6	(C) 8	(D) 12	(E) 16

5. Een rechthoek wordt verdeeld in vier rechthoekjes met oppervlakten zoals in de figuur. Wat is de oppervlakte van het vierde stuk?

6	10
15	?

(A) 9	(B) 21	(C) 25	(D) 30	(E) 32

[0] ©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 1999.

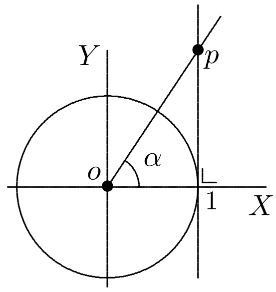
6. Vijf sympathieke leerlingen willen voor hun lerares wiskunde een verjaardagscadeautje kopen.

   - Gunther denkt dat ze 38 wordt op 16 maart.
   - Kris denkt dat ze 40 wordt op 17 april.
   - Luk denkt dat ze 38 wordt op 17 april.
   - Olivier denkt dat ze 38 wordt op 17 maart.
   - Steven denkt dat ze 40 wordt op 16 maart.

   Als we aannemen dat één van hen gelijk heeft en de anderen niet volledig ongelijk (d.w.z. ze hebben minstens de leeftijd of de dag of de maand correct), wie heeft dan gelijk?

(A) Gunther	(B) Kris	(C) Luk	(D) Olivier	(E) Steven

7. In de volgende figuur is $|op|$ gelijk aan



(A) 1	(B) $\cos\alpha$	(C) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$	(D) $1+\operatorname{tg}\alpha$	(E) $\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

8. Als p met coördinaat $(-x, y)$ in het derde kwadrant ligt, wat is dan de coördinaat van het spiegelbeeld van p ten opzichte van de bissectrice van het tweede en het vierde kwadrant?

(A) (x, y)	(B) (y, x)	(C) $(y, -x)$	(D) $(x, -y)$	(E) $(-y, x)$

9. Als $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ deelbaar is door $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, dan is $(p + q)r$ gelijk aan

(A) -18	(B) 12	(C) 15	(D) 27	(E) 45

10. In een orthonormaal assenstelsel begrenzen de parabolen met vergelijking

$$y = x^2 - 4x - 5 \quad \text{en} \quad y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5)$$

een gebied. Wat is de oppervlakte van de kleinste rechthoek, met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, die dat gebied omvat?

(A) 18	(B) 27	(C) 54	(D) 72	(E) 81

11. Hoeveel functies zijn er met domein $\{1, 2, 3, 4\}$ en met waarden in $\{1, 2, 3\}$?

(A) 6	(B) 12	(C) 24	(D) 64	(E) 81

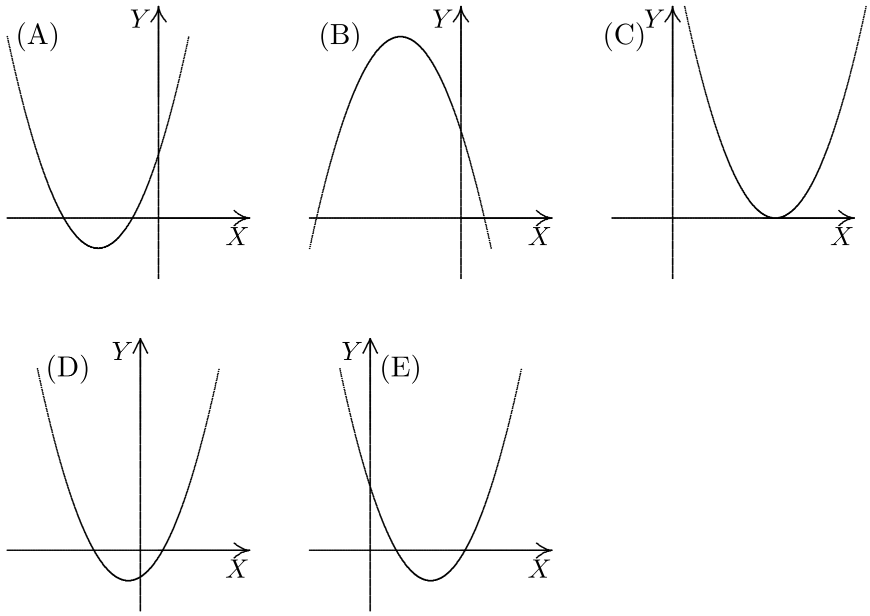
12. Beschouw de volgende drie functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |1 - x| \quad , \quad g(x) = 1 - |x| \quad , \quad h(x) = |1 - |x||.$$

Dan geldt, voor alle x in $\mathbb{R}$:

(A) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (B) $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$
(C) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ (D) $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
(E) $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$

13. Welke van de volgende vijf parabolen is de grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarbij alle drie de getallen a, b en c strikt positief zijn?



14. Als $0 < x < 2\pi$ en $\sin x \,.\, \cos x \,.\, \mathrm{tg}\, x \,.\, \mathrm{cotg}\, x < 0$, dan behoort x tot

(A) $]0, \pi[$ (B) $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ (C) $]\pi, 2\pi[$
(D) $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ (E) $]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

15. We beschouwen alle natuurlijke getallen bestaande uit drie cijfers (elk verschillend van nul) met de eigenschap dat één van de cijfers de som is van de twee andere (b.v. 154, 743, ...). Hoeveel dergelijke getallen zijn er?

(A) 20	(B) 60	(C) 96	(D) 108	(E) 120

16. Als n een natuurlijk getal is, gelegen tussen 1000 en 2000, dan is

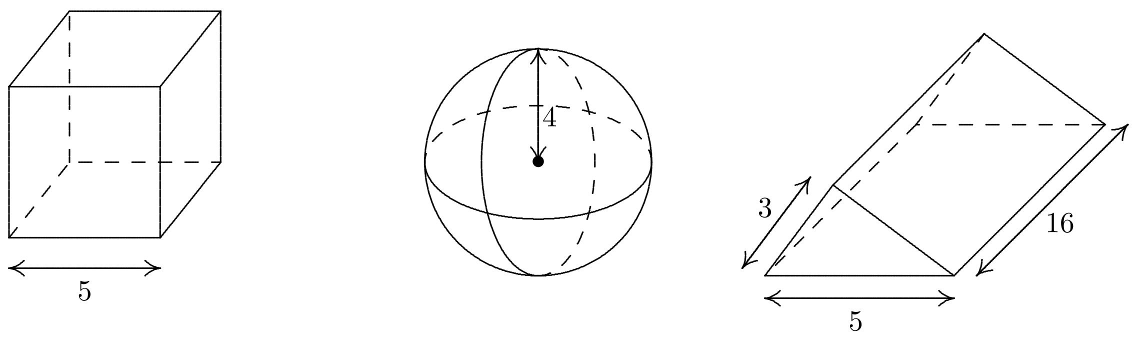
$$\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}$$

(A) $\frac{1}{3}$	(B) $\frac{1}{2}$	(C) 1
(D) 2	(E) afhankelijk van de waarde van n	

17. Zij $m = 777\ldots77$ het getal met 99 cijfers 7 en $n = 999\ldots99$, het getal met 77 cijfers 9. Hoeveel verschillende cijfers heeft dan het product $m.n$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

18. Noem K, B en P de volumes van respectievelijk de kubus, de bol en het recht prisma met afmetingen zoals aangeduid op de tekeningen.



Dan geldt:

(A) $B < K < P$	(B) $K < B < P$	(C) $P < B < K$
(D) $P < K < B$	(E) $K < P < B$	

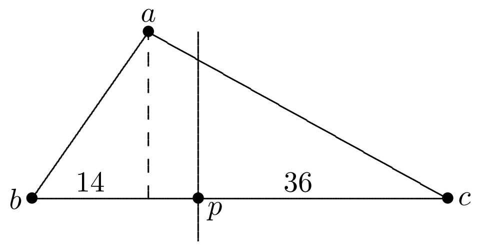
19. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$. Noem A de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}$ die door f afgebeeld worden in $[0, 3]$, dan is A gelijk aan

(A) $[0, 8]$	(B) $[-2, 2]$	(C) $[1, 2]$
(D) $[0, 2]$	(E) $[-2, -1] \cup [1, 2]$	

20. In elke driehoek met zijden a, b en c is $a^2 + b^2 + c^2$ kleiner dan of gelijk aan

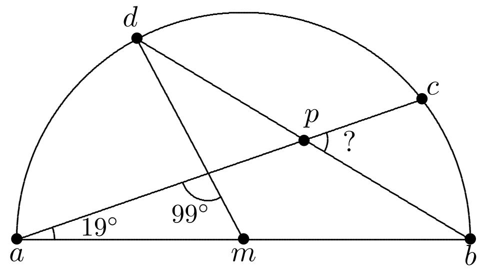
(A) $ab + ac + bc$	(B) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
(C) $a^3 + b^3 + c^3$	(D) $4a + 4b + 4c$
(E) $a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$	

21. De basis van een driehoek abc wordt door de hoogtelijn uit a verdeeld in twee delen, één met lengte 14 en één met lengte 36 (zie tekening). Een rechte loodrecht op bc verdeelt de driehoek abc in twee delen met gelijke oppervlakte en snijdt bc in het punt p. De verhouding $\dfrac{|bp|}{|cp|}$ is gelijk aan



(A) 1	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{11}{18}$	(D) $\frac{5}{9}$	(E) $\frac{1}{2}$

22. Op een halve cirkel met middellijn $[ab]$ en middelpunt m liggen twee punten c en d zoals op de figuur. Hoe groot is de hoek tussen ac en bd?



(A) 50°	(B) 51°	(C) 52°	(D) 53°	(E) 54°

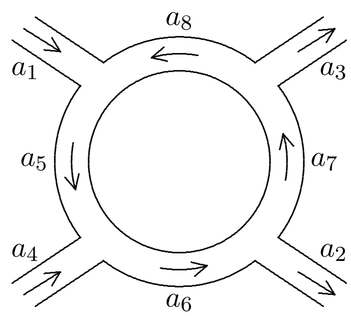
23. Veertig ballen zijn genummerd van 1 tot 40. Ze worden in dozen gelegd. Er wordt op gelet dat als een doos bal n bevat, ze geen enkele bal bevat met een nummer dat een veelvoud is van n. Hoeveel dozen zijn er minstens nodig?

(A) 5	(B) 6	(C) 12	(D) 14	(E) 20

24. Op volgende rotonde ("rondpunt") wordt uitsluitend in de richting van de pijlen gereden. Per uur

- komen er 1000 auto's aan via a_1,
- verlaten 800 auto's de rotonde via a_2,
- rijden er 1500 auto's op het stuk a_5 en
- rijden er 900 over het stuk a_7.

Hoeveel komen er dan per uur via a_4 aan en hoeveel verlaten er per uur de rotonde via a_3?



(A) 0 en 400	(B) 200 en 400	(C) 400 en 400	(D) 400 en 800	(E) 400 en 600

25. Als An op de schouders van Bart staat, kan ze juist over de muur kijken.
Als Bart op de schouders van Kris staat, kan hij niet over de muur kijken.
Als Kris op de schouders van Dirk staat, kan hij ruim over de muur kijken.

De grootste en kleinste zijn

(A) An en Kris	(B) An en Bart	(C) Dirk en Kris
(D) Dirk en Bart	(E) niet te bepalen	

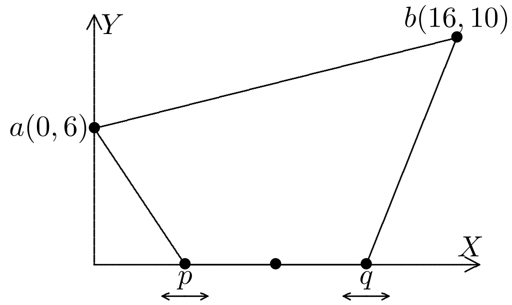
26. Een rechthoek wordt verkregen door in een vierkant twee overstaande zijden 10% te verlengen en de andere zijden 10% te verkorten. In vergelijking met de oppervlakte van het vierkant, is de oppervlakte van de rechthoek

(A) even groot	(B) 10% groter	(C) 1% groter
(D) 10% kleiner	(E) 1% kleiner	

27. Als men de cijfers van 1 tot 6 in een willekeurige volgorde schrijft, verkrijgt men een getal van 6 cijfers. De kans dat dit getal deelbaar is door 6, is gelijk aan

(A) $\frac{1}{6}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{2}{3}$	(E) $\frac{5}{6}$

28. In een orthonormaal assenstelsel beschouwen we de punten $a(0,6)$ en $b(16,10)$. Een lijnstuk $[pq]$ met vaste lengte 8 beweegt langs de X-as. Wat moet de abscis van het midden van $[pq]$ zijn, opdat de vierhoek $abqp$ de kleinst mogelijke omtrek zou hebben?



(A) 4	(B) 7	(C) 8	(D) 10	(E) 12

29. Welke van de volgende vergelijkingen heeft als grafiek precies de rand van een driehoek?

(A) $x.y.(x+y-1)=0$ (B) $\sqrt{x}.\sqrt{y}.\sqrt{x+y-1}=0$
(C) $\sqrt{x}.\sqrt{y}.\sqrt{1-x-y}=0$ (D) $|x|+|y|+|x+y-1|=0$
(E) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y-1}=0$

30. Beschouw de functies $f(x)=1-x$ en $g(x)=\dfrac{1}{x}$ en samenstellingen van deze functies met zichzelf en met elkaar. Als we steeds blijven samenstellen, gebruik makend van alle verkregen functies, dan is het totaal aantal verschillende functies zo verkregen

(A) niet groter dan vijf
(B) groter dan vijf maar niet groter dan tien
(C) groter dan tien maar niet groter dan honderd
(D) eindig maar groter dan honderd
(E) oneindig

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1998-1999: Tweede ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem is hetzelfde als dat voor de eerste ronde, d.w.z. per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt nu evenwel slechts 2 uur.

1.1 De problemen

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$; $\sqrt{5} \approx 2{,}2$; $\sqrt{6} \approx 2{,}4$; $\sqrt{7} \approx 2{,}6$; $\sqrt{8} \approx 2{,}8$; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$

1. Vereenvoudig

$$\frac{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}-(x^{-1}-y^{-1})^{-1}}{(y^{-1}-x^{-1})^{-1}-(y^{-1}+x^{-1})^{-1}} \text{ met } x, y \neq 0,\ x \neq y \text{ en } x \neq -y.$$

(A) $\frac{x}{y}$	(B) $\frac{y}{x}$	(C) $\frac{2y}{x+y}$	(D) $\frac{y-x}{y}$	(E) $\frac{y-x}{y+x}$

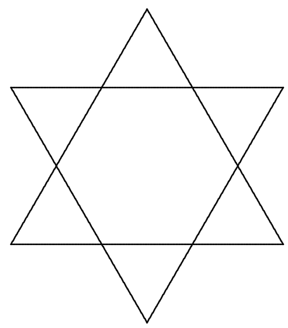
2. Welke ongelijkheid is fout?

(A) $\sin 300^\circ < \sin 350^\circ$ (B) $\cos 300^\circ < \cos 350^\circ$
(C) $\sin 300^\circ < \cos 350^\circ$ (D) $\operatorname{tg} 300^\circ < \operatorname{tg} 350^\circ$
(E) $\operatorname{cotg} 300^\circ < \operatorname{cotg} 350^\circ$

3. In de decimale schrijfwijze van $\frac{1}{7000}$ is het 1999ste cijfer na de komma gelijk aan

(A) 2	(B) 4	(C) 5	(D) 7	(E) 8

4. Een davidster wordt gevormd door het over elkaar plaatsen van twee gelijkzijdige driehoeken met dezelfde afmetingen. Aldus wordt een figuur gevormd die bestaat uit een regelmatige zeshoek omringd door zes kleinere gelijkzijdige driehoeken. Bepaal de verhouding van de oppervlakte van de hele ster tot deze van de inwendige zeshoek.



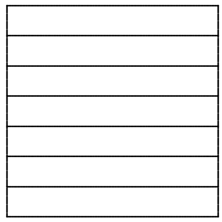
(A) $\frac{3}{2}$	(B) $\sqrt{2}$	(C) $\sqrt{3}$	(D) 2	(E) 3

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 1999.

5. De diagonaal van een rechthoek is tweemaal zo lang als één van de zijden a. Hoe lang is de andere zijde?

(A) a	(B) $a\sqrt{3}$	(C) $a\sqrt{5}$	(D) $\frac{5}{4}a$	(E) $\frac{3}{2}a$

6. Een vierkant wordt verdeeld in 7 congruente rechthoeken met elk een omtrek van 32. Wat is de omtrek van het vierkant?



(A) 56	(B) 98	(C) 112	(D) 196	(E) 224

7. Een auto met 5 banden, waarvan 1 reserveband, rijdt 10000 kilometer zodat elke band evenveel gebruikt wordt. Hoeveel kilometer werd met elke band gereden?

(A) 2000	(B) 2500	(C) 7500	(D) 8000	(E) 10000

8. $M(x)$ betekent: "x is een man"; $A(x)$ betekent: "Rosa houdt van x".
De betekenis van

$$\forall x : M(x) \Rightarrow A(x)$$

is

(A) Alleen mannen houden van Rosa.
(B) Alle mannen houden van Rosa.
(C) Rosa houdt enkel van mannen.
(D) Rosa houdt niet van vrouwen.
(E) Rosa houdt van alle mannen.

9. De vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft wortels x_1 en x_2. Zij $\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$ de vergelijking met wortels $\frac{x_1}{x_2}$ en $\frac{x_2}{x_1}$, dan is β gelijk aan

(A) $2 - \frac{b^2}{ac}$	(B) $\frac{b^2}{ac} - 2$	(C) $2 - \frac{ab^2}{c}$	(D) $2 - \frac{b^2}{c}$	(E) $\frac{b^2}{c} - 2$

10. De verzameling van alle reële getallen kleiner dan of gelijk aan hun omgekeerde, is

(A) $]0, 1]$	(B) $[-1, 1]$	(C) $]-\infty, -1]$
(D) $[-1, 0[\cup]0, 1]$	(E) $]-\infty, -1] \cup]0, 1]$	

11. Hoeveel oplossingen heeft het volgende stelsel in $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{cases} |x| + y = 11 \\ x + |y| = 99 \end{cases}$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

12. Onderstel dat f en g functies zijn met domein $\mathbb{R}$ en met de eigenschap $f(0) = g(0) = 0$. Beschouw de volgende uitspraken:

- $f(a) = 0 \Rightarrow g(f(a)) = 0$
- $g(f(a)) = 0 \Rightarrow f(a) = 0$
- $g(a) = 0 \Rightarrow g(f(a)) = 0$
- $g(f(a)) = 0 \Rightarrow g(a) = 0$

Hoeveel uitspraken zijn correct?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

13. Veronderstel dat het stelsel

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$$

in de onbekenden x_1, x_2, x_3, x_4 een oplossing heeft. Dan geldt zeker:

(A) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$	(B) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$
(C) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$	(D) $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$
(E) De onderstelling is fout; het stelsel heeft geen oplossing.	

14. Noem $\lfloor x \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x. Voorbeelden: $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor \frac{x+2}{2} \rfloor$ is

(A) een open interval	(B) een halfopen interval
(C) een gesloten interval	(D) een singleton
(E) leeg	

15. Gegeven drie punten in het vlak: $m(x_1, y_1)$, $n(x_2, y_2)$ en $p(x_3, y_3)$. De punten a, b en c zijn zodanig dat m het midden is van lijnstuk $[ab]$, n het midden van lijnstuk $[bc]$ en p het midden van lijnstuk $[ca]$. De x-coördinaat van c is gelijk aan

(A) $x_1 + x_2 + x_3$	(B) $x_1 + x_2 - x_3$	(C) $x_2 + x_3 - x_1$
(D) $x_3 + x_1 - x_2$	(E) $x_3 - x_1 - x_2$	

16. Het aantal wortels van de vergelijking $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$ met $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ is gelijk aan

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) 3	(E) geen van de vorige	

17. Het symbool $\bullet$ stelt een cijfer voor. Als $\bullet 3 \times 6528 = 3\bullet \times 8256$, dan staat het symbool $\bullet$ voor

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 7	(E) 9

18. Noem x het kleinste getal van drie cijfers, elk verschillend van nul, zodat het product van de cijfers eindigt op nul. De som van de cijfers van x eindigt dan op

(A) 0	(B) 2	(C) 4	(D) 6	(E) 8

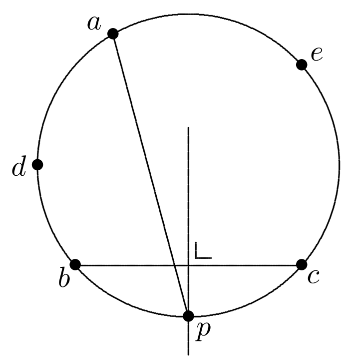
19. In de decimale voorstelling van 2^{1999} staan m cijfers en in deze van 5^{1999} staan n cijfers. De som $m + n$ is

(A) kleiner dan 1998	(B) gelijk aan 1998	(C) gelijk aan 1999
(D) gelijk aan 2000	(E) groter dan 2000	

20. Gegeven twee vierkanten die elk zijden hebben waarvan de lengte een geheel getal is (resp. z_1 en z_2). Het verschil tussen de oppervlaktes van beide vierkanten bedraagt 77 (eenheden). Bereken $z_1 + z_2$.

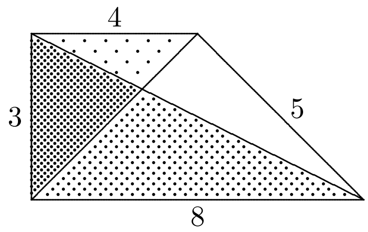
(A) $s \in [1, 10]$	(B) $s \in [11, 20]$	(C) $s \in [21, 40]$
(D) $s \in [41, 80]$	(E) er meer dan één oplossing is	

21. Op een cirkel beschouwt men, zoals op de figuur, de bogen $\overset{\frown}{adb}$ (130°) en $\overset{\frown}{aec}$ (150°). De middelloodlijn van $[bc]$ snijdt de cirkel ondermeer in het punt p (zie figuur). De scherpe hoek die deze middelloodlijn maakt met pa is gelijk aan



(A) 5°	(B) 10°	(C) 15°	(D) 20°	(E) 25°

22. Een rechthoekig trapezium heeft zijden met lengten zoals op de figuur hiernaast aangegeven. De twee diagonalen verdelen het trapezium in vier driehoeken (zie figuur). De oppervlaktes van deze vier driehoeken verhouden zich als de getallen

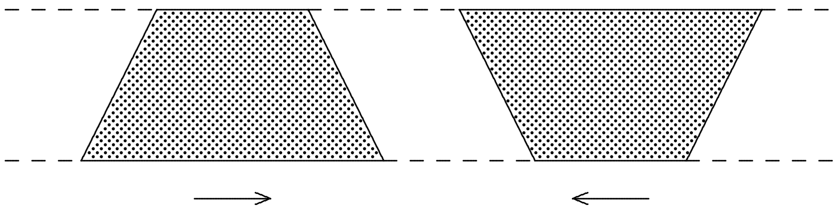


(A) $1, 1, 2, 4$	(B) $1, 1, 3, 4$	(C) $1, 2, 3, 4$	(D) $1, 2, 2, 4$	(E) $2, 2, 3, 4$

23. In het vlak tekent men een gelijkzijdige driehoek abc. Waar moet de oorsprong van het vectorvlak gekozen worden opdat $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$?

(A) In één van de hoekpunten van de driehoek.
(B) Op de omgeschreven cirkel van de driehoek.
(C) In het spiegelbeeld van a t.o.v. bc.
(D) In het spiegelbeeld van b t.o.v. ac.
(E) In het spiegelbeeld van c t.o.v. ab.

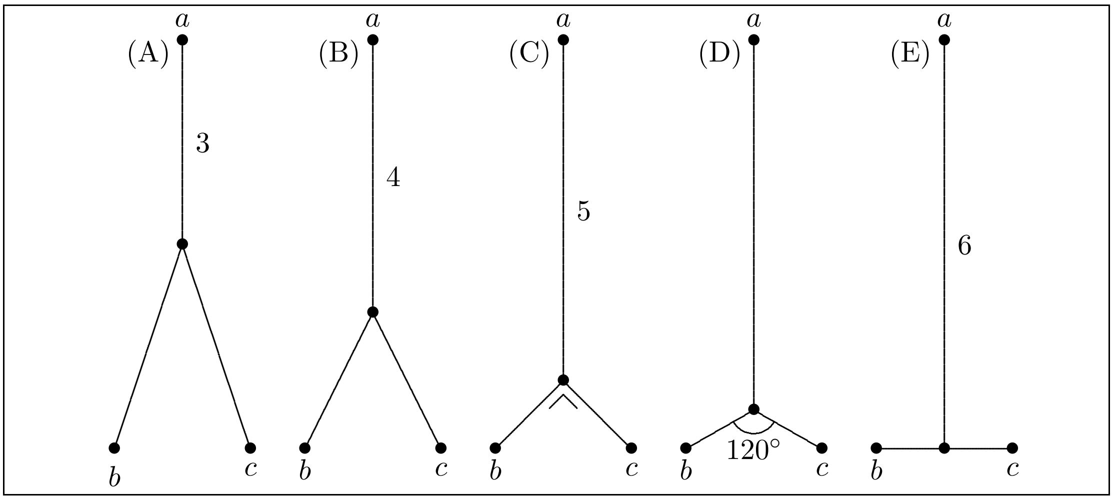
24. Twee congruente gelijkbenige trapezia, waarvan de kleinste basis a even lang is als de opstaande zijden en de grootste basis dubbel zo lang, schuiven tussen twee rechten die in het verlengde van deze basissen liggen (zie figuur). In een bepaalde positie is de oppervlakte van het overlappend gedeelte maximaal. Hoe groot is deze oppervlakte dan?



(A) a^2	(B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$	(C) $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	(D) $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{4}$	(E) $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

25. Drie dorpen a, b en c moeten met rechte wegen verbonden worden. De afstand tussen b en c is 2 km; a is 6 km verwijderd van de rechte bc en ligt op de middelloodlijn van $[bc]$. Men beslist een punt te kiezen op die middelloodlijn en dit met de drie dorpen te

verbinden. Welke van de 5 keuzes (zie figuur) levert de kleinste totale weglengte op?



26. In een orthonormaal assenstelsel is de richtingscoëfficiënt van de bissectrice van de scherpe hoek tussen de rechten $y = x$ en $y = 2x$ gelijk aan

(A) $1+\sqrt{2}$	(B) $\frac{4}{3}$	(C) $\frac{\sqrt{10}+1}{3}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) $\frac{3}{2}$

27. Gegeven: $f_1(x) = 1 - |x|$. Definieer: $\forall n > 1 : f_n(x) = 1 - |f_{n-1}(x)|$.
Bepaal $f_{1999}(1999)$.

(A) 0	(B) 1	(C) -1	(D) 1999	(E) -1998

28. Beschouw reële getallen x en y met som 1. Noem $A = x^2 + y$ en $B = x + y^2$. Onderzoek de volgende uitspraken:
I. $A = B$ voor elke keuze van x en y.
II. $A \neq B$ voor zekere keuzes van x en y.
III. $A \leq 1$ voor elke keuze van x en y.
IV. $A > 1$ voor zekere keuzes van x en y.

De enige correcte uitspraken zijn

(A) I	(B) II	(C) I en III	(D) I en IV	(E) II en III

29. De zwaartepunten van de zijvlakken van een viervlak *abcd* vormen een nieuw viervlak V_z. De middens van de ribben van het viervlak *abcd* vormen de hoekpunten van een convex lichaam L_m. Het quotiënt van de inhouden van L_m en V_z is

(A) 4	(B) 6	(C) 9	(D) 13,5	(E) 18

30. Vijf mensen (A, B, C, D en E) zijn ofwel rechter, ofwel advocaat. Rechters spreken altijd de waarheid, advocaten liegen altijd. Verder is geweten

- A is rechter;
- B beweert dat ook hij rechter is;
- C beweert dat D rechter is;
- D beweert dat B en E niet allebei rechter zijn;
- E beweert dat A en B rechter zijn.

Hoeveel rechters telt het gezelschap?

(A) 2	(B) 3	(C) 4
(D) 5	(E) niet af te leiden	

12 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1999-2000: Eerste ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

12.1 De problemen

1. Als $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a}$, dan is x gelijk aan

(A) $a+b$	(B) $\dfrac{b-a}{ab}$	(C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$	(D) $\dfrac{ab}{a+b}$	(E) $a-b$

2. Een regelmatige n-hoek heeft evenveel zijden als diagonalen. Waaraan is n gelijk?

(A) 4	(B) 5	(C) 6
(D) 8	(E) n kan verschillende waarden aannemen	

3. In een doos liggen 10 rode, 10 blauwe en 10 groene kaartjes, elk genummerd van 1 tot 10. Men neemt de rode weg die een veelvoud van 3 zijn, de blauwe die even zijn en de groene die priem zijn. Hoeveel procent van de kaartjes blijft over in de doos?

(A) 0,6%	(B) 6%	(C) 18%	(D) 30%	(E) 60%

4. Filip is een kluns met zijn rekentoestel. In plaats van een positief getal met 3 te vermenigvuldigen, deelt hij het door 3 en kwadrateert daarna het resultaat in plaats van de vierkantswortel te nemen. Hij bekomt de (foutieve) uitkomst 16. Wat is de juiste uitkomst?

(A) 6	(B) 12	(C) 16	(D) 18	(E) 36

5. Voor $x \in \mathbb{R}$ is de kleinste waarde van $\left|x + \dfrac{1}{x}\right|$ gelijk aan

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	(B) $\sqrt{2}$	(C) 2	(D) $\dfrac{3}{2}$	(E) $2\sqrt{2}$

6. Een magisch vierkant van orde 3 met som 0 is een 3×3 matrix van reële getallen zodanig dat de som in elke rij, in elke kolom en op de twee diagonalen 0 is.
Gegeven:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 2000.

Op hoeveel manieren kan je deze matrix aanvullen tot een dergelijk magisch vierkant?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) oneindig veel

7. Hoeveel strikt positieve, gehele getallen kunnen niet geschreven worden als een som met uitsluitend termen 5, 7 of 11? (Let op: sommen met één term zijn toegelaten.)

(A) 6	(B) 8	(C) 10	(D) 12	(E) minstens 14

8. Op een stafkaart met schaal 1 : 10.000 is de afstand tussen twee dorpen 20 cm. Hoe groot is de afstand tussen dezelfde twee dorpen op een kaart met schaal 1 : 25.000?

(A) 2 cm	(B) 4 cm	(C) 8 cm	(D) 10 cm	(E) 50 cm

9. Een leerling is ofwel gezond, ofwel ziek. Onderstel dat als een leerling vandaag gezond is, er 95% kans is dat hij morgen nog gezond is en, als een leerling vandaag ziek is dat er 55% kans is dat hij morgen nog ziek is. Als vandaag 20% van de leerlingen ziek is, hoeveel procent zieken verwachten we dan morgen?

(A) 11%	(B) 15%	(C) 50%	(D) 55%	(E) 60%

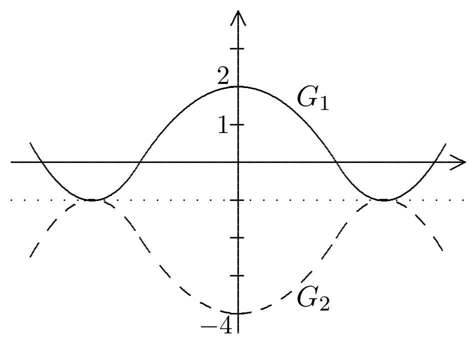
10. Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking

$$\left|1 - x^2\right| = 1 - x$$

is gelijk aan

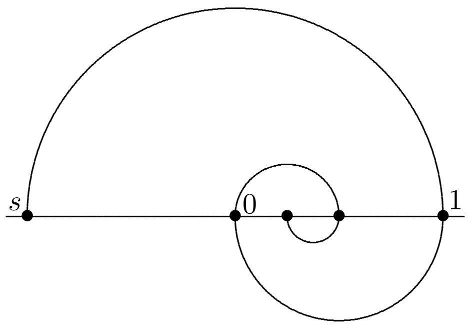
(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

11. Als G_1 de grafiek is van $y = f(x)$, dan is G_2 de grafiek van



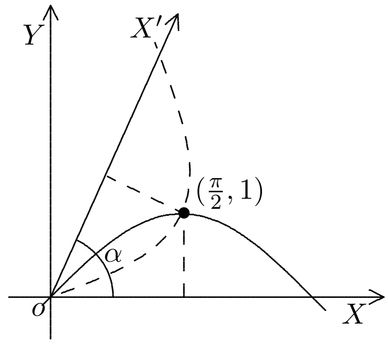
(A) $y = -f(x)$	(B) $y = f(-x)$	(C) $y = f(x) - 6$
(D) $y = -f(x) - 1$	(E) $y = -f(x) - 2$	

12. Vertrek van punt s en construeer een halve cirkel met straal 1. Zet deze kromme voort met een halve cirkel met straal $\frac{1}{2}$ zoals op de figuur. Blijf de kromme verder zetten, zodanig dat de straal van elke halve cirkel de helft is van de straal van voorgaande halve cirkel. Bepaal de afstand tussen s en het "eindpunt".



(A) $\frac{4}{3}$	(B) $\frac{3}{2}$	(C) $\frac{\pi}{3}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) $\frac{\pi}{2}$

13. Spiegel de X-as van een orthonormaal assenstelsel en de grafiek van $y = \sin x$ t.o.v. de rechte die de oorsprong met het punt $(\frac{\pi}{2}, 1)$ verbindt.
De gespiegelde X-as vormt met de oorspronkelijke X-as een hoek α waarvoor geldt:



(A) $\sin\alpha = \frac{2}{\pi}$	(B) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}$	(C) $\sin\alpha = \frac{4\pi}{4+\pi^2}$
(D) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{\pi^2-4}}{\pi^2}$	(E) $\sin\alpha = 1$	

14. Een leraar wil voor elke leerling uit zijn klas de gemiddelde score m van drie toetsen bepalen. Hij berekent voor elk van de leerlingen eerst het gemiddelde van de twee minst goede scores en daarna het gemiddelde van dat resultaat en de beste score. Hij vindt voor elke leerling steeds een getal dat

(A) strikt kleiner is dan m.	(B) strikt groter is dan m.
(C) gelijk is aan m.	(D) niet kleiner is dan m.
(E) niet groter is dan m.	

15. $P = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \ldots (1 + \frac{1}{1998})(1 + \frac{1}{1999})(1 + \frac{1}{2000})$. Er geldt

(A) $P < 1000$	(B) $P = 1000$	(C) $1000 < P < 2000$
(D) $P = 2000$	(E) $P > 2000$	

16. $\sqrt{2000^{2000}}$ is een getal dat op veel nullen eindigt. Het meest rechtse cijfer dat niet nul is, is

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 8	(E) oneven

17. Hoeveel van volgende uitspraken zijn juist in $\mathbb{Z}$?

$$\forall y, \exists x : x^2 = y$$

$$\exists y, \forall x : x^2 = y$$

$$\forall x, \exists y : x^2 = y$$

$$\exists x, \forall y : x^2 = y$$

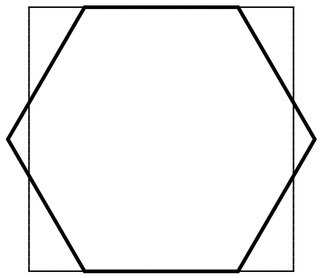
$$\exists x, \exists y : x^2 = y$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

18. In een rechthoekige driehoek meet één van de hoeken 25°. Welke hoek maken de zwaartelijn en de hoogtelijn uit de rechte hoek?

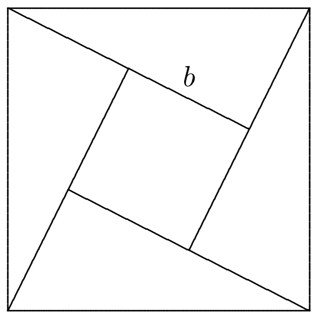
(A) 25°	(B) 30°	(C) 35°	(D) 40°	(E) 45°

19. Vertrekkend van een vierkant met zijde 1 wordt een regelmatige zeshoek geconstrueerd met hetzelfde middelpunt als het vierkant, zoals in de figuur. Bepaal de oppervlakte van de doorsnede van de twee figuren.



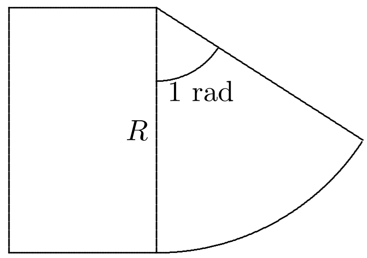
(A) $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$	(B) $1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$	(C) $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

20. In de figuur wordt een groot vierkant met zijde a verdeeld in een klein vierkant en vier rechthoekige driehoeken. Als de oppervlakte van elke rechthoekige driehoek gelijk is aan deze van het kleine vierkant, dan is de zijde b van het kleine vierkant gelijk aan



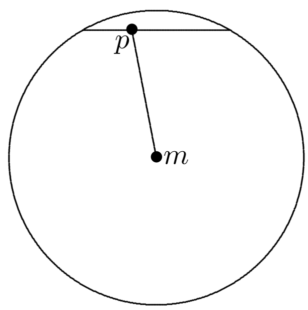
(A) $\frac{a}{\sqrt{5}}$	(B) $\frac{a}{2}$	(C) $\frac{2a}{5}$	(D) $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	(E) $a\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$

21. Een cirkelsector met straal R en een openingshoek van 1 radiaal heeft dezelfde oppervlakte als een rechthoek met lengte R. De breedte van die rechthoek is dan gelijk aan



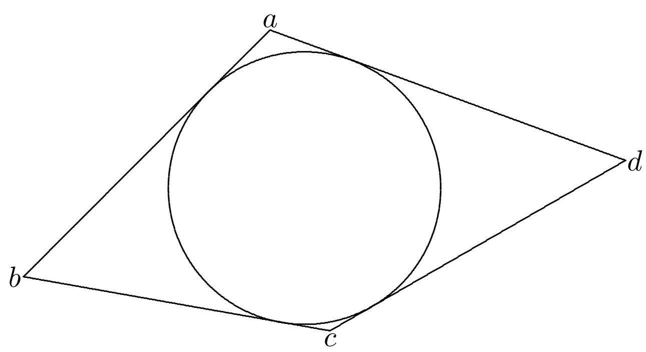
(A) $\dfrac{\pi R}{4}$	(B) $\dfrac{R}{2}$	(C) $\dfrac{R}{3}$	(D) $\dfrac{2R}{\pi}$	(E) R

22. De diameter van een cirkel met middelpunt m is 110 cm. Een punt p gelegen op een koorde verdeelt deze in stukken van 30 en 60 cm. Dan is $|pm|$ in cm gelijk aan



(A) 28	(B) 30	(C) 32	(D) 33	(E) 35

23. In de figuur is $abcd$ een vierhoek omgeschreven aan een cirkel. Als $|ab| = 4$, $|bc| = 5$ en $|cd| = 3$, dan is $|ad|$ gelijk aan

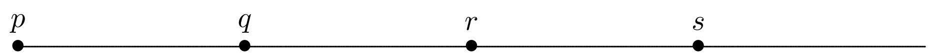


(A) 1	(B) 2	(C) 2,4	(D) 3	(E) 3,75

24. 9 witte en 18 zwarte kubussen met ribbe 1 worden aan elkaar vastgemaakt zodanig dat ze één grote kubus vormen met ribbe 3. Het gedeelte van de oppervlakte van de grote kubus dat wit kan zijn, bedraagt hoogstens

(A) $\dfrac{1}{2}$	(B) $\dfrac{13}{27}$	(C) $\dfrac{25}{54}$	(D) $\dfrac{4}{9}$	(E) $\dfrac{1}{3}$

25. p, q, r en s zijn punten op een rechte op 1 meter van elkaar en in de volgorde zoals hieronder.



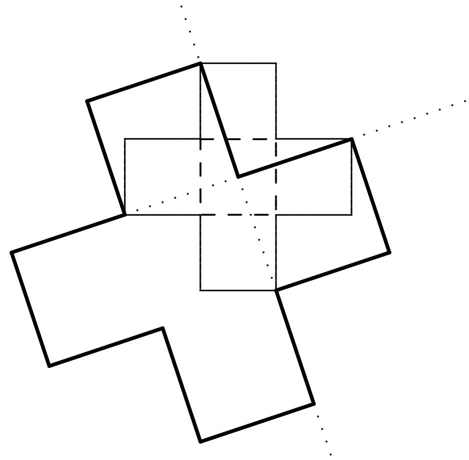
Bepaal de lengte in meter van de kortste weg van p naar s zodanig dat je minstens 1 meter blijft van q en r.

(A) $1+2\sqrt{2}$	(B) 4	(C) $1+\pi$	(D) $\frac{4}{3}\pi$	(E) 5

26. Ik koop 6 potloden, 5 kleurpotloden, 8 schriftjes en 12 vellen gekleurd papier. De prijs van een potlood is 14 BEF, de prijs van een kleurpotlood is 20 BEF. De andere prijzen ben ik vergeten, maar zijn gehele getallen. Welk van de volgende bedragen was het mogelijk eindtotaal?

(A) 150 BEF	(B) 200 BEF	(C) 250 BEF	(D) 300 BEF	(E) 350 BEF

27. Vanuit een klein Grieks kruis, opgebouwd uit 5 congruente vierkanten, wordt een groter geconstrueerd waarvan zijden gelegen zijn op de orthogonale diagonalen (en hun verlengden) van het klein Grieks kruis (zie figuur). Bepaal de verhouding van de oppervlakte van het groot kruis t.o.v. deze van het klein kruis.



(A) 2	(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$	(C) $\frac{5}{2}$	(D) $\frac{8}{3}$	(E) 3

28. Op een nacht kon de koning niet slapen en hij ging naar de koninklijke keuken en vond er een doos koekjes waarvan hij $\frac{1}{8}$ opat. Later had de koningin honger en at $\frac{1}{6}$ op van wat haar echtgenoot had overgelaten. Nog later kwam de prinses naar beneden en at $\frac{1}{7}$ op van wat nog over was. Daarna kwam de prins naar de keuken en at $\frac{1}{5}$ van het overschot. Het hondje van de prins stal ten slotte $\frac{1}{4}$ van de overgebleven koekjes. Wie at het meeste koekjes?

(A) koning	(B) koningin	(C) prinses	(D) prins	(E) hondje

29. Een jogger maakt rondjes van 400 m in een park, waarbij hij zijn eerste ronde aan een constante snelheid v aflegt in precies 2 minuten. Bij elke volgende ronde verhoogt hij zijn snelheid met 5% van v, zonder dat hij daarbij het maximum van zijn prestatievermogen, zijnde 1 minuut 20 seconden voor één ronde, overschrijdt. Hoeveel rondjes zal hij maximaal afleggen?

(A) 7	(B) 8	(C) 9	(D) 10	(E) 11

30. Vul in elk vakje een cijfer van 1 tot 9 in zodat

$$\square\square\% \text{ van } \square\square\square\square$$

gelijk is aan 2000. Dan staat er in het eerste vakje van links een

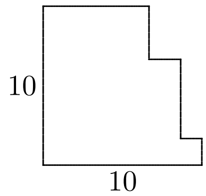
(A) 2	(B) 4	(C) 6
(D) 8	(E) niet te bepalen cijfer.	

13 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1999-2000: Tweede ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem is hetzelfde als dat voor de eerste ronde, d.w.z. per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt nu evenwel slechts 2 uur.

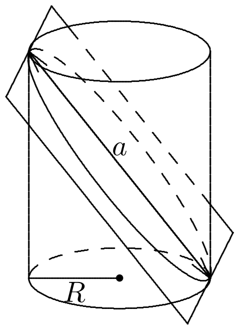
13.1 De problemen

1. De omtrek van de gegeven figuur is



(A) kleiner dan 40	(B) 40	(C) tussen 40 en 80
(D) 85	(E) niet te bepalen	

2. Een cilinder met straal R wordt gesneden door een vlak zoals op de figuur. Het vlak raakt elk van de twee cirkels die grond- en bovenvlak vormen. De afstand tussen de raakpunten is a. Bepaal het volume van het deel van de cilinder onder het vlak.



(A) $\frac{1}{2}\pi R^2\sqrt{a^2-4R^2}$	(B) $\pi R^2\sqrt{a^2-4R^2}$
(C) $\pi R^2\sqrt{a^2-R^2}$	(D) $\frac{1}{2}\pi R^2 a$
(E) $\frac{1}{2}\pi R(a^2-4R^2)$	

3. Welke van volgende verzamelingen is eindig?

(A) $\{\frac{x}{y} \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ \frac{x}{y}\geq 2000,\ x\geq 2000\}$
(B) $\{\frac{x}{y} \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ \frac{x}{y}\leq 2000,\ x\leq 2000\}$
(C) $\{\frac{x}{y} \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ \frac{x}{y}\leq 2000,\ y\leq 2000\}$
(D) $\{\frac{x}{y} \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ \frac{x}{y}\leq 2000,\ x\geq 2000\}$
(E) $\{\frac{x}{y} \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ \frac{x}{y}\leq 2000,\ y\geq 2000\}$

[0]©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 2000.

4. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ is gelijk aan

(A) 2	(B) $2\sqrt{2}$	(C) $\sqrt{5}$	(D) $2\sqrt{5}$	(E) $\sqrt{6}$

5. Als $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ voldoet aan de eigenschap dat $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : f(xy) = f(x) + f(y)$, dan is $f(0{,}5) + f(1) + f(2)$

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) $\frac{7}{2}$	(E) niet te bepalen bij gebrek aan gegevens	

6. Voor een deelverzameling A van een verzameling S definieert men de karakteristieke functie k_A als volgt

$$\begin{aligned} k_A(x) &= 1 \text{ als } x \in A \\ k_A(x) &= 0 \text{ als } x \in S \setminus A \end{aligned}$$

Beschouw de volgende uitspraken over willekeurige deelverzamelingen A en B van S:

I. $k_A \cdot k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cap B$.
II. $k_A + k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cup B$.
III. $k_A - k_{A \cap B}$ is de karakteristieke functie van $A \setminus B$.

De correcte uitspraken zijn

(A) I	(B) I en II	(C) I en III	(D) II en III	(E) I, II en III

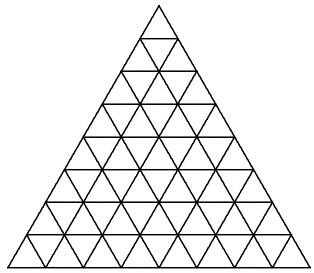
7. Op een cirkel kiest men een vast punt a en een veranderlijk punt b. Hoe groot is de kans dat de lengte van de koorde $[ab]$ kleiner is dan de straal?

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{\pi}$	(D) $\frac{1}{4}$	(E) $\frac{1}{6}$

8. Welke uitspraak is vals?

(A) Alle rechthoeken zijn gelijkvormig.
(B) Alle cirkels zijn gelijkvormig.
(C) Alle vierkanten zijn gelijkvormig.
(D) Alle regelmatige vijfhoeken zijn gelijkvormig.
(E) Alle gelijkbenige driehoeken met tophoek 50° zijn gelijkvormig.

9. Verdeel elke zijde van een gegeven driehoek in 2000 gelijke stukken en verbind de verkregen verdeelpunten op de wijze zoals op de figuur hiernaast (met 8 in plaats van 2000 gelijke stukken). Hoeveel driehoekjes met de kleinste oppervlakte zijn er dan?



(A) 1.999.000	(B) 2.000.000	(C) 2.001.000	(D) 3.998.001	(E) 4.000.000

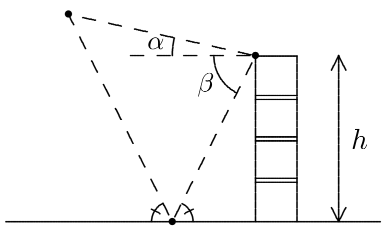
10. Als $x \in \mathbb{R}$, dan is de kleinste waarde van $x^2 + 3x$ gelijk aan

(A) $-\frac{9}{4}$	(B) $-\frac{3}{2}$	(C) 0	(D) $\frac{3}{2}$	(E) $\frac{9}{4}$

11. Het aantal reële wortels van $x^4 - 2x + 3 = 0$ is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

12. Een ornithologe bevindt zich op hoogte h boven de waterspiegel van een meer. Boven haar ziet ze een vogel onder een hoek α en zijn beeld in het water onder een hoek β. Hoe hoog vliegt de vogel boven het meer?



(A) $2h \sin\beta$	(B) $2h \cos\beta$	(C) $h \sin(\alpha + \beta)$
(D) $\dfrac{h}{\cos(\beta - \alpha)}$	(E) $h\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$	

13. Hoeveel van volgende uitspraken zijn waar voor $x = 2000°$?

$$\begin{array}{l} \sin x - \cos x < 0 \\ \sin x - \operatorname{tg} x < 0 \\ \cos x - \operatorname{tg} x < 0 \\ \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x < 0 \end{array}$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

14. Het kleinste natuurlijk getal met juist 15 delers behoort tot het interval

(A) $]0, 50]$	(B) $]50, 100]$	(C) $]100, 150]$	(D) $]150, 200]$	(E) $]200, 250]$

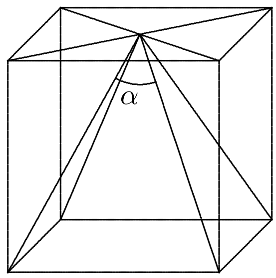
15. We definiëren een "priemdrieling" als een drietal priemgetallen (a, b, c) met $c - b = b - a = 2$. Hoeveel dergelijke "priemdrielingen" zijn er?

(A) 0	(B) 1
(C) 2	(D) een eindig aantal groter dan 2
(E) oneindig veel	

16. $0{,}5^{0{,}5} =$

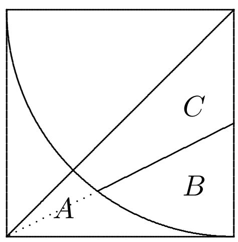
(A) 1	(B) 0,25	(C) $0{,}1^{0{,}1}$	(D) 5^5	(E) $0{,}25^{0{,}25}$

17. In een kubus verbindt men het middelpunt van het bovenvlak met de vier hoekpunten van het grondvlak. Hierdoor ontstaat een regelmatige piramide. Hoe groot is de cosinus van de tophoek α van een opstaand zijvlak?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(D) $\frac{7}{9}$	(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. In de figuur zien we een vierkant, een kwartcirkel, een diagonaal van het vierkant en een lijnstuk dat een hoekpunt met het middelpunt van een zijde verbindt. Wat kan men dan zeggen over de oppervlaktes A, B en C van de aangeduide gebieden?



(A) $A < B < C$	(B) $A < C < B$	(C) $B < A < C$
(D) $B < C < A$	(E) $C < A < B$	

19. Als je alle hoekpunten van een regelmatige 11-hoek twee aan twee verbindt, hoeveel lijnstukken met verschillende lengte krijg je dan?

(A) 4	(B) 5	(C) 10	(D) 12	(E) 55

20. Beschouw een balk met afmetingen $30 \times 40 \times 50$ opgebouwd uit 60 kubussen met afmetingen $10 \times 10 \times 10$. Hoeveel van deze kubussen worden doorsneden door een ruimtediagonaal van de balk?

(A) 8	(B) 9	(C) 10	(D) 11	(E) 12

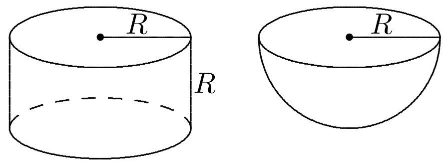
21. Veronderstel dat je reeds 15 van de vorige 20 vragen correct hebt beantwoord. Hoeveel vragen moet je in deze ronde nog correct beantwoorden om 80 % van de vragen juist beantwoord te hebben?

(A) 6	(B) 7	(C) 8	(D) 9	(E) alle 10

22. Neem twee vaste reële getallen a en b ($a \neq b$). De vergelijking $|x-a|+|x-b|=k$ in de onbekende x ($\in \mathbb{R}$) met $k>0$ heeft

(A) juist één oplossing voor precies één waarde van k.
(B) juist één oplossing voor oneindig veel waarden van k.
(C) oneindig veel oplossingen voor precies één waarde van k.
(D) oneindig veel oplossingen voor meerdere waarden van k.
(E) twee oplossingen voor elke waarde van k.

23. Twee potten, één in de vorm van een cilinder met hoogte R en straal van het grondvlak R, één in de vorm van een halve bol met straal R, beide zonder deksel, worden gelijkmatig geschilderd (binnen- en buitenkant). Als men voor de cilinder k keer zoveel verf nodig heeft als voor de halve bol, dan is k gelijk aan

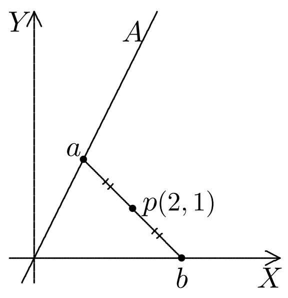


(A) 1	(B) $\sqrt{2}$	(C) 1,5	(D) $\frac{\pi}{2}$	(E) 2

24. Vijf klanten moeten elk een ander bedrag betalen aan een bedrijf. Een niet aandachtige boekhouder schrijft de vijf namen in willekeurige volgorde op de facturen. Een slaperige secretaresse steekt de vijf facturen in willekeurige volgorde in vijf geadresseerde enveloppen. Een luie koerier steekt de vijf enveloppen in willekeurige volgorde in de brievenbussen van de vijf klanten. Wat is de kans dat elke klant het juiste bedrag op de factuur in zijn brievenbus vindt?

(A) $\frac{1}{5}$	(B) $\frac{1}{5^3}$	(C) $\frac{1}{5^{15}}$	(D) $\frac{1}{5!}$	(E) $(\frac{1}{5!})^3$

25. In een orthonormaal assenstelsel beschouwen we de rechte A met vergelijking $y = 2x$ en een vast punt $p(2,1)$. Door p trekken we een rechte die A snijdt in a en de X-as in b zodanig dat p het midden is van $[ab]$. De lengte van het lijnstuk $[ab]$ is dan gelijk aan



(A) $2\sqrt{2}$	(B) 3	(C) $3\sqrt{2}$	(D) 4	(E) $2\sqrt{5}$

26. Beschouw de getallen van twee cijfers die, na vermenigvuldiging met de som van hun cijfers, een product opleveren gelijk aan de som van de derdemachten van die cijfers. Het aantal dergelijke getallen is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

27. Hoeveel van de volgende vergelijkingen hebben reële oplossingen?

$$\begin{aligned}&\sin^2 x + \mathrm{tg}^2\, x = 1\\&\cos^2 x + \mathrm{tg}^2\, x = 1\\&\sin^2 x + \mathrm{cotg}^2\, x = 1\\&\cos^2 x + \mathrm{cotg}^2\, x = 1\\&\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{cotg}^2\, x = 1\end{aligned}$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

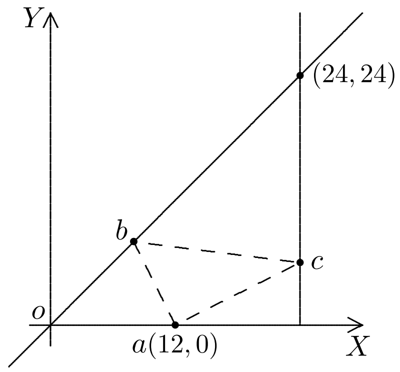
28. Het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x wordt voorgesteld door $\lfloor x \rfloor$. Voorbeelden zijn: $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ en $\lfloor 2000 \rfloor = 2000$.
Zij m, $n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$. Het aantal even getallen i met $m \leq i \leq n$ is

(A) $\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor$	(B) $\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor$	(C) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$
(D) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$	(E) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$	

29. De hoogtelijn vanuit de rechte hoek van rechthoekige driehoek abc waarvan de hoek in a α radialen ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) groot is, verdeelt deze rechthoekige driehoek in twee delen met oppervlaktes A en B. Zij A de oppervlakte van dat deel, dat a als hoekpunt heeft. Het quotiënt $\frac{A}{B}$ is gelijk aan

(A) $\mathrm{cotg}\,\alpha$	(B) $\mathrm{tg}\,\alpha$	(C) $\sin\alpha$	(D) $\mathrm{tg}^2\,\alpha$	(E) $\mathrm{cotg}^2\,\alpha$

30. In een orthonormaal assenstelsel beschouwt men het punt $a(12, 0)$, een veranderlijk punt b op de rechte $y = x$ en een veranderlijk punt c op de rechte $x = 24$. Als de driehoek abc een minimale omtrek heeft, welke zijn dan de coördinaten van het punt b?



(A) $(6, 6)$	(B) $(8, 8)$
(C) $(9, 9)$	(D) $(12, 12)$

(E) Er bestaat geen punt b waarvoor de omtrek minimaal is.