TARASSOW · TARASSOWA

PHYSIK IM ZWIEGESPRÄCH

Tarassow/Tarassowa

PHYSIK IM ZWIEGESPRÄCH

Physik im Zwiegespräch

CHARAKTERISTISCHE FEHLER BEI FRAGEN UND AUFGABEN IN PRÜFUNGEN

Von L. W. Tarassow und A. N. Tarassowa

VERLAG MIR MOSKAU
VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Titel der Originalausgabe:
Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
Анализ характерных ошибок поступающих во ВТУЗы
Москва, „Высшая школа", 1975 г.
Издание 2

Übersetzung: Dipl.-Phys. Hans Glaßl, Erfurt
Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. rer. nat. habil.
Walter Kuhn, Kleinmachnow

Gemeinschaftsausgabe des Verlages MIR Moskau und des
VEB Fachbuchverlag Leipzig

1. Auflage
LSV 1103
Einband: Juri Polowinkin, Moskau
Satz und Druck: UdSSR
Bestellnummer: 546 641 0
DDR 9,80 M

Inhalt

Vorwort zur deutschsprachigen Ausgabe

Wie die Autoren im Vorwort mitteilen, ist dieses Buch als eine Studienhilfe zur Vorbereitung der Aufnahmeprüfung in Physik an technischen Hochschuleinrichtungen in der Sowjetunion gedacht. Es behandelt keinen vollständigen Lehrgang der Physik in schul- oder fachschulgemäßer Form, sondern greift einige für das Verständnis der Physik wichtige Probleme aus Teilgebieten der Mechanik, der Thermodynamik, der Elektrizitätslehre und der geometrischen Optik heraus. Bei der mathematischen Fassung der physikalischen Gesetze wird auf die Verwendung der Differential- und Integralrechnung vollständig verzichtet, und die Vektorrechnung wird kaum eingesetzt. Die aufgeworfenen physikalischen Probleme werden auf diesem Niveau sehr gründlich und korrekt an Beispielen diskutiert. Außergewöhnlich ist die verwendete Form des Lehrer-Schüler-Gesprächs, die dem Anliegen sehr angepaßt ist und einem programmierten Material sehr nahe kommt, sich aber davon wohltuend unterscheidet. Die Autoren haben dadurch die Möglichkeit, die in ihrer langjährigen Praxis gesammelten Erfahrungen über falsche und ungenaue Antworten sorgfältig zu verarbeiten und den Leser schrittweise zur richtigen Antwort hinzuführen. Auf diese Weise wird ein tieferes Verständnis der behandelten physikalischen Probleme erreicht als in der üblichen Lehrbuchform. Die Auswahl der Probleme einschließlich der Ergänzungen durch weitere mit Lösungen versehene Aufgaben und besonders die Originalität der Darstellung zeichnen dieses Buch vor anderen Darstellungen dieses Niveaus aus, die bei uns häufig eine mehr oder weniger textlich erläuterte „Formelsammlung“ der Physik sind.

Bei der Übersetzung des Werkes in die deutsche Sprache wurde darauf geachtet, daß die Bezeichnungen, Begriffe und Formelzeichen unserer Ausbildung angepaßt sind. Die Einheiten physikalischer Größen wurden auf SI-Einheiten umgerechnet. Zu einigen Aussagen — insbesondere im letzten Teil des Buches — vertritt der Bearbeiter nicht die gleiche Meinung wie die Autoren. Es geht dabei jedoch hauptsächlich um Fragen, die den Leser erst bei tieferem Eindringen in die Physik interessieren, so daß der Wert des Buches in keiner Weise geschmälert wird.
Wir empfehlen das Buch Schülern der höheren Klassen zur Vorbereitung auf ein Studium, das Physik im Ausbildungsprogramm enthält (mathematisch-naturwissenschaftliche und technische Einrichtungen), sowie Studenten in den Anfangssemestern. Lehrerstudenten der Fachkombination mit Physik erhalten durch dieses Buch methodische Hinweise für Fragestellungen zur Erarbeitung physikalischer Lehrstoffe in Gesprächsform. Aber auch jeder andere physikalisch Interessierte wird das Buch mit Gewinn lesen.

Bearbeiter und Verlage

Vorwort zur sowjetischen Originalausgabe

Dieses Buch ist als Lernhilfe bei der Vorbereitung der Aufnahmeprüfung in Physik an Hochschulen gedacht. Es ist in Form eines originellen Dialogs zwischen dem Autor und einem wißbegierigen Leser geschrieben. Eine solche Form ist überaus günstig für die Durchführung einer Analyse der von den Prüflingen gemachten charakteristischen Fehler, für die Besprechung unterschiedlicher Lösungsmethoden der einen oder anderen Aufgabe, für die Erörterung der einen oder anderen schwerverständlichen theoretischen Frage. Durch das Gespräch mit dem Leser werden im Lehrbuch Fragen und Aufgaben eines Physikkurses betrachtet. Außerdem werden im Buch Aufgaben (mit Lösungen) für die selbständige Übung angegeben.

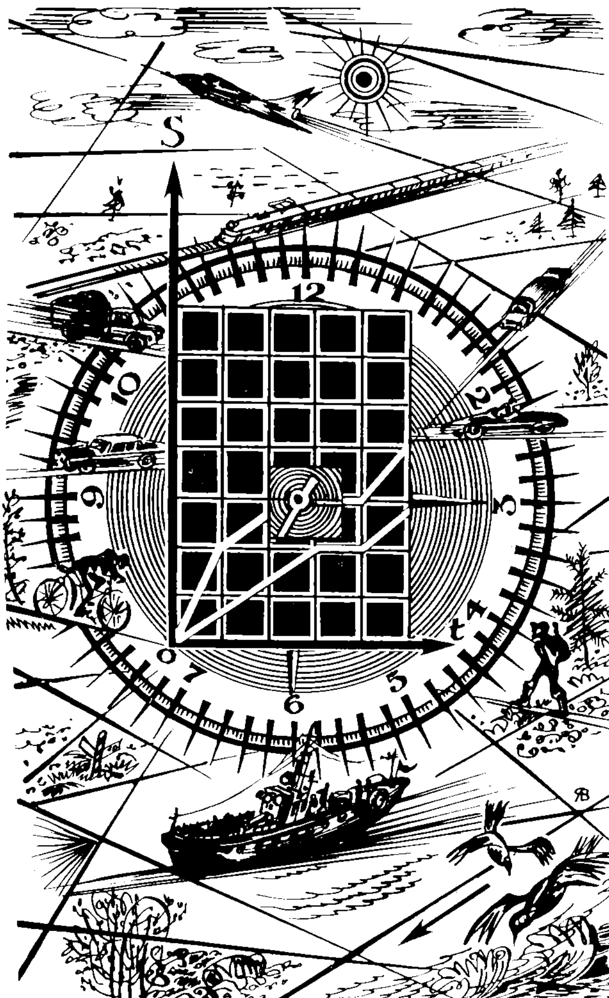
Eine Fehleranalyse ist immer lehrreich. Bei ihr werden die Aufmerksamkeit auf die verschiedensten Seiten des betrachteten Problems gelenkt, Feinheiten aufgezeigt und ein tieferes Verständnis entwickelt. Jedoch ist eine Fehleranalyse stets schwierig. So kann nur eine Antwort richtig sein, aber man kann sich auf unterschiedliche Weise irren. Prinzipiell ist es unmöglich, alle möglichen falschen Antworten auf die eine oder andere Frage vorauszuahnen, wegen der Schweigsamkeit der Prüflinge bleiben viele von ihnen für immer verborgen. Trotzdem kann man auf einige falsche Antworten auf bestimmte Fragen hinweisen, denen man ständig begegnet. Es lassen sich viele Fragen anführen, auf die in der Regel eine falsche Antwort folgt. Gerade solches Material ist diesem Buch zugrunde gelegt.

Wir wollen davor warnen, daß das vorliegende Buch ein Lehrmittel darstellt, das alle Fragen des Programms beinhaltet. Hier erfolgt keine systematische Wiedergabe

des Lehrstoffs in vollem Umfang. Die folgende Darstellung ist vielmehr eine freie Erzählung oder besser gesagt, ein freies Gespräch. Deshalb ist dieses Buch für denjenigen, der ein Physikstudium beginnen oder sein Wissen in Physik systematisieren will, wenig nützlich. Es ist vielmehr für solche Leser bestimmt, die vor den Prüfungen ihre physikalischen Kenntnisse vertiefen wollen.
Unser idealer Leser besuchte schon einen entsprechenden Physikkurs, erinnert sich an grundlegende Beziehungen, kann Formulierungen des einen oder anderen Gesetzes geben und kennt das System der Einheiten. Er befindet sich in einem solchen Zustand, in dem er schon nicht mehr Schüler, aber andererseits noch nicht Student ist. Doch er will Student werden. Wenn er deshalb sein physikalisches Wissen vertiefen will, werden wir ihm mit Freude dieses Buch empfehlen.
Wir hoffen, daß unser Buch dem Leser helfen wird, die Wahrheit zu verstehen: Blindes Auswendiglernen (und wenn auch sogar sehr gutes) ist für den Unterricht nicht nur ermüdend, sondern auch in hohem Maße erfolglos. Der Mensch muß lernen nachzudenken und darf nicht nach einfachem Auswendiglernen streben. Wenn unser Buch dazu wenigstens in irgendeiner Art beiträgt, werden wir unsere Aufgabe als erfüllt ansehen.

Die Autoren

VERNACHLÄSSIGT
NICHT
DIE KINEMATIK!
DIE FRAGE
DARÜBER,
WIE GERADE
DIE
VERSCHIEBUNG
DER GEGENSTÄNDE
IN RAUM UND ZEIT
ERFOLGT,
IST SOWOHL VON
PHYSIKALISCHEN
ALS AUCH
PRAKTISCHEN
GESICHTSPUNKTEN
AUS VON
BEDEUTENDEM
INTERESSE.



1. Können Sie die grafische Kinematik der geradlinigen Bewegung betrachten?

Autor: Sie betrachteten früher die grafischen Darstellungen für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit und des Weges von der Zeit bei der geradlinig gleichförmigen Bewegung. Im Zusammenhang damit stelle ich Ihnen folgende Frage: *Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit sei von der in Bild 1 dargestellten Art. Entwerfen Sie, hiervon ausgehend, die grafische Darstellung für die Abhängigkeit des Weges von der Zeit!*

Leser: Ich mußte noch nie eine solche grafische Darstellung zeichnen.

Autor: Nun, das ist nicht sehr kompliziert. Also wollen wir gemeinsam überlegen. Wir teilen das gesamte betrachtete Zeitintervall in die drei Abschnitte *1*, *2* und *3* (siehe Bild 1). Wie bewegt sich der Körper auf Abschnitt *1*? Welcher Weg-Zeit-Ablauf gilt für diesen Abschnitt?

Leser: Im Abschnitt *1* bewegt sich der Körper gleichmäßig beschleunigt ohne Anfangsgeschwindigkeit. Die Formel des Weges für diesen Abschnitt lautet

$$s(t) = at^2/2, \qquad (1)$$

wobei a die Beschleunigung des Körpers ist.

Autor: Können Sie, wenn Sie die grafische Darstellung der Geschwindigkeit benutzen, die Beschleunigung finden?

Leser: Ja. Die Beschleunigung ist der **Quotient** aus der Änderung der Geschwindigkeit und dem zugehörigen Zeitintervall. Sie ist gleich dem Verhältnis der Strecken $\overline{AC}/\overline{OC}$.

Autor: Gut. Dabei ist es notwendig, daran zu erinnern, daß das Verhältnis der Strecken $\overline{AC}/\overline{OC}$ zu entsprechenden Einheiten führt. Diesen Hinweis muß man auch bei der Betrachtung der folgenden Diagramme beachten. Aber jetzt untersuchen Sie die Abschnitte *2* und *3*.

Leser: Im Abschnitt *2* bewegt sich der Körper gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, die er am Ende

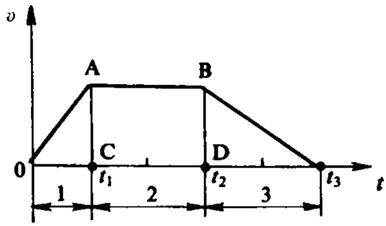


Bild 1

des Abschnitts *1* erlangt hat. Die Weg-Zeit-Formel lautet:

$$s = vt.$$

Autor: Ihre Antwort ist nicht exakt. Sie haben nicht berücksichtigt, daß die gleichförmige Bewegung nicht zum Anfangszeitpunkt begann, sondern zum Zeitpunkt t_1. Bis zu diesem Moment hat der Körper bereits den Weg $at_1^2/2$ zurückgelegt. Die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Zeit hat für den Abschnitt *2* folgende Gestalt:

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t - t_1). \qquad (2)$$

Schreiben Sie unter Berücksichtigung dieser Bemerkung die Formel des Weges für den Abschnitt *3* auf.

Leser: Im Abschnitt *3* ist die Bewegung gleichmäßig verzögert. Wenn ich richtig verstanden habe, muß die Wegformel für diesen Abschnitt die Form

$$s(t) = \frac{1}{2}at_1^2 + v(t_2 - t_1) + v(t - t_2) - \frac{1}{2}a_1(t - t_2)^2$$

haben, wobei a_1 die Beschleunigung im Abschnitt *3* ist. Sie ist halb so groß wie die Beschleunigung im Abschnitt *1*, da der Abschnitt *3* doppelt so lang wie der Abschnitt *1* ist.

Autor: Ihre Formel läßt sich etwas vereinfachen:

$$s(t) = \frac{1}{2} a t_1^2 + v(t - t_1) - \frac{1}{2} a_1 (t - t_2)^2. \qquad (3)$$

Jetzt bleibt nur noch, die Ergebnisse (1) bis (3) zu summieren, damit die grafische Darstellung konstruiert werden kann.

Leser: Ich verstehe. Im Abschnitt *1* hat das Weg-Zeit-Diagramm die Form einer Parabel, im Abschnitt *2* die einer Geraden, im Abschnitt *3* ebenfalls die

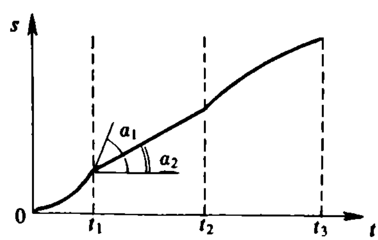


Bild 2

einer Parabel, aber umgekehrt (konvex von oben). Hier ist meine Zeichnung (Bild 2).

Autor: Ihre Zeichnung ist nicht ganz richtig: Das Weg-Zeit-Diagramm darf keine Ecken haben, es muß eine glatte Linie sein, d.h., die Parabeln müssen mit der Geraden fließend verknüpft sein. Außerdem muß der Scheitelpunkt der konvexen Parabel im Zeitpunkt t_3 liegen. Hier ist die richtige Zeichnung (Bild 3).

Leser: Bitte erläutern Sie das.

Autor: Also betrachten wir irgendeinen Abschnitt des Weg-Zeit-Diagramms (Bild 4). Die mittlere Geschwindigkeit des Körpers für das Zeitintervall von t bis $t + \Delta t$ ist zahlenmäßig gleich

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \tan \alpha,$$

wobei α der Winkel ist, der von der Sehne AB mit der Horizontalen gebildet wird. Um die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t, d.h. die momentane Geschwindigkeit $v(t)$, auszurechnen, muß man den Grenzwert einer solchen mittleren Geschwindigkeit für $\Delta t \to 0$ finden:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Im Grenzfall geht die Sehne in die Tangente des Weg-Zeit-Diagramms über, die durch den Punkt

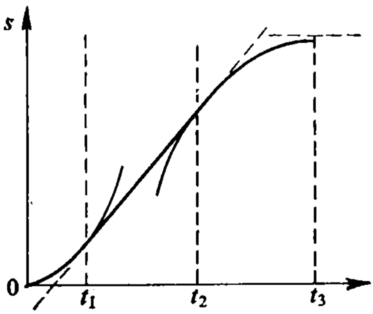


Bild 3

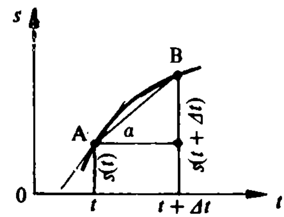


Bild 4

A führt (siehe die gestrichelte Linie in Bild 4). Der Tangens des Winkels, den diese Tangente mit der Zeitachse bildet, wird auch den Wert der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t angeben. **Auf diese Weise kann man aus der Neigung der Tangenten im Weg-Zeit-Diagramm die Geschwindigkeit des Körpers zu diesem oder einem anderen Zeitpunkt finden.**

Jetzt wenden wir uns Ihrer Zeichnung zu (siehe Bild 2). Aus ihr folgt, daß im Moment t_1 (und im Moment t_2) die Geschwindigkeit des Körpers zwei verschiedene Werte annimmt: Wenn man sich t_1 von links nähert, so ist die Geschwindigkeit zahlenmäßig gleich tan α_1, aber wenn man sich t_1 von rechts nähert, dann ist sie gleich tan α_2. Entsprechend Ihrem Weg-Zeit-Diagramm müßte die Geschwindigkeit des Körpers im Moment t_1 (und auch im Moment t_2) einen Sprung haben, der tatsächlich jedoch nicht beobachtet wird (das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm in Bild 1 ist stetig).

Leser: Ich habe verstanden. **Die Stetigkeit des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms führt zu einem glatten Weg-Zeit-Diagramm.**

Autor: Eben habe ich gesagt, daß die Scheitelpunkte der Parabeln bei den Zeiten 0 und t_3 liegen müssen, weil zu diesen Zeitpunkten die Geschwindigkeit des Körpers gleich Null ist, und die Tangenten im Weg-Zeit-Diagramm müssen in diesen Punkten Horizontalen sein. *Aber jetzt finden Sie aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm von Bild 1 den Weg, den der Körper beispielsweise zum Zeitpunkt t_2 zurückgelegt hat.*

Leser: Es ist notwendig, aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm die Beschleunigung a im Abschnitt *1*

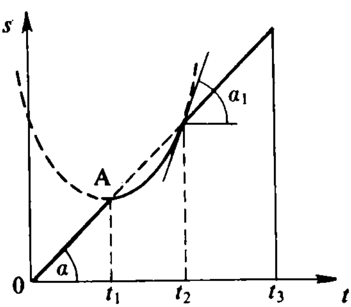


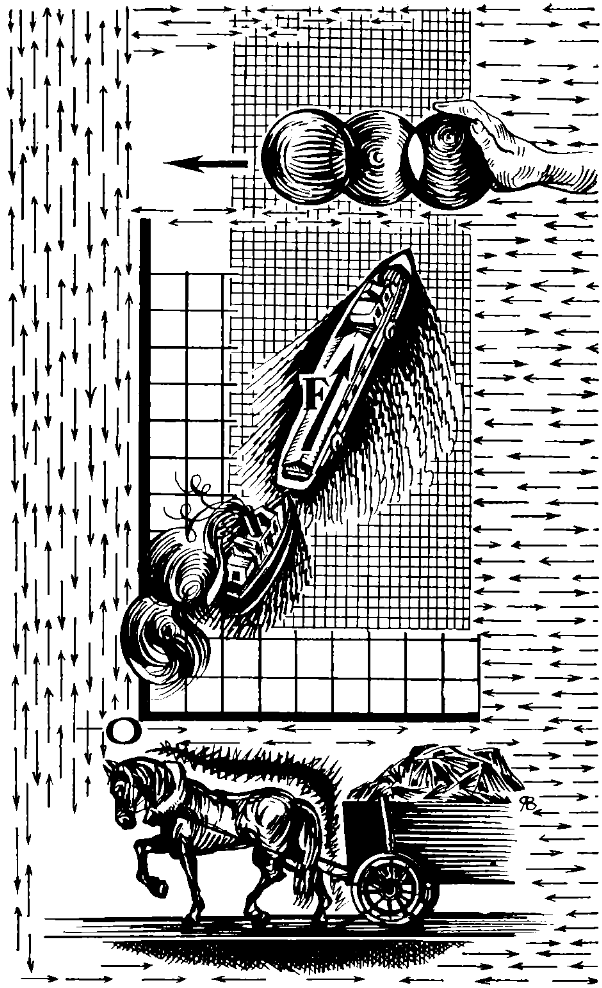
Bild 5

und die Geschwindigkeit v im Abschnitt *2* zu bestimmen und dann die Formel (2) zu benutzen. Der Weg, den der Körper bis zum Zeitpunkt t_2 zurückgelegt hat, ist

$$s(t_2) = \frac{1}{2} a t_1^2 + v(t_2 - t_1).$$

Autor: Das ist richtig. Jedoch kann man einfacher dahingelangen. Der Weg, den der Körper bis zum Zeitpunkt t_2 zurückgelegt hat, ist zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt der Figur *OABD*, die vom Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm im Zeitintervall Ot_2 gebildet wird. Zur Festigung aller dieser Kenntnisse betrachten wir noch eine Aufgabe. *Stellen wir uns vor, daß das Weg-Zeit-Diagramm Ecken hat. Das Diagramm ist* in Bild 5 *dargestellt, wobei die Kurve eine Parabel mit dem Scheitelpunkt im Punkt A ist. Zeichnen Sie das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm.*

DER BEGRIFF DER KRAFT STELLT EINEN FUNDAMENTALEN PHYSIKALISCHEN BEGRIFF DAR. KÖNNEN SIE GENÜGEND GELÄUFIG MIT DIESEM BEGRIFF UMGEHEN? KENNEN SIE SICH GUT IN DEN GESETZEN DER DYNAMIK AUS?



Leser: In dem Maße, wie das Weg-Zeit-Diagramm Ecken hat, muß das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm Sprünge zu den entsprechenden Zeitpunkten (t_1 und t_2) haben. Hier ist meine Zeichnung (Bild 6).

Autor: Gut. Aber welcher Größe ist die Strecke $\overline{BC}$ gleich?

Leser: Sie ist gleich $\tan \alpha_1$ (siehe Bild 5). Jedoch ist uns der Betrag des Winkels α_1 ebenso unbekannt.

Autor: Aber trotzdem ist die Bestimmung der Strecke $\overline{BC}$ ganz einfach. Sie bemerken, daß der Weg, den der Körper zur Zeit t_3 zurückgelegt hat, genau so

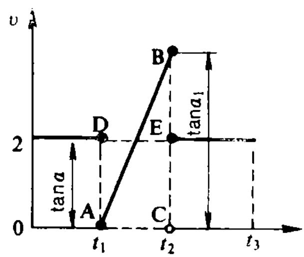


Bild 6

groß ist, als hätte sich der Körper die ganze Zeit über gleichförmig bewegt (die Gerade auf dem Abschnitt von t_2 nach t_3 in Bild 5 stellt die Verlängerung der Geraden auf dem Abschnitt von *0* bis t_1 dar). Da der zurückgelegte Weg dem ausgemessenen Flächeninhalt unter dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm entspricht, folgt, daß der Flächeninhalt des Rechtecks *ACED* in Bild 6 gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* sein muß. Daraus erhalten wir, daß $\overline{BC}$ gleich $2\,\overline{CE}$ ist, d.h., daß die Geschwindigkeit im Moment t_2 bei Annäherung von links gleich der doppelten Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung in den Abschnitten von *0* bis t_1 und von t_2 bis t_3 ist.

Aufgabe

1. Ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm möge wie in Bild 6 aussehen ($t_1 = 2$ s, $t_2 = 4$ s, $t_3 = 6$ s). Zeichnen Sie das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm! Finden Sie die mittlere Geschwindigkeit in den Fällen:

a) für die ersten vier Sekunden;
b) für die gesamte Zeit der Bewegung (sechs Sekunden).
In welchen Zeitpunkten τ stimmt die Augenblicksgeschwindigkeit mit der mittleren Geschwindigkeit, die für die gesamte Zeit der Bewegung berechnet worden ist, überein?

2. Können Sie sagen, welche Kräfte auf einen Körper wirken?

Leser: Die Aufgaben aus der Mechanik erscheinen mir am schwierigsten. Womit muß man ihre Lösung beginnen?

Autor: In vielen Fällen muß man mit der Betrachtung der Kräfte beginnen, die auf den Körper wirken. Nehmen wir als Beispiel folgende Fälle (Bild 7):

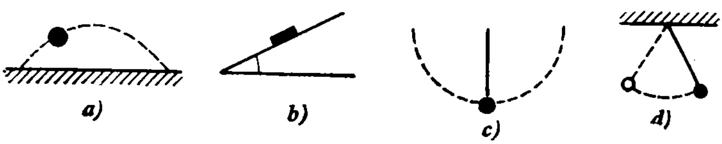


Bild 7

a) ein Gegenstand wird unter einem Winkel zur Horizontalen geworfen,
b) der Körper gleitet auf einer geneigten Ebene abwärts,

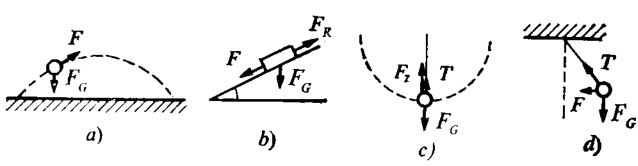


Bild 8

c) der Körper kreist an einem Faden in der vertikalen Ebene,
d) der Körper schwingt in der vertikalen Ebene.
Stellen Sie die Kräfte dar und erklären Sie die Kräfte, die auf den Körper in jedem dieser Fälle wirken.

Leser: Hier ist meine Zeichnung (Bild 8). Im ersten Fall: F_G Gewichtskraft des Körpers, F Wurfkraft. Im zweiten Fall: F_G Gewichtskraft des Körpers, F Hangabtriebskraft, F_R Reibungskraft. Im dritten Fall wirken: F_G Gewichtskraft des Körpers, F_Z Zentripetalkraft, T Kraft der Fadenspannung. Im vierten Fall wirken: F_G Gewichtskraft des Körpers, F rücktreibende Kraft und T Kraft der Fadenspannung.

Autor: In allen vier Fällen haben Sie Fehler gemacht. Hier ist die richtige Zeichnung (Bild 9).

Es ist notwendig, sich fest einzuprägen, daß die Kraft als Resultat der Wechselwirkungen der Körper

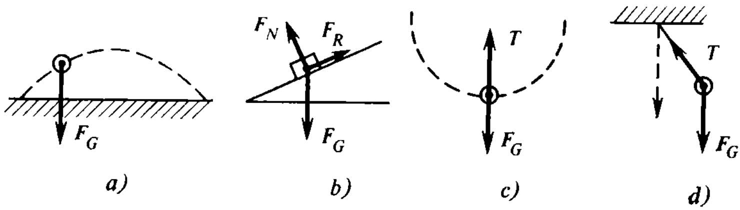


Bild 9

entsteht. Um die Kräfte zu zeigen, die auf den Körper wirken, ist vorher die Frage zu beantworten, welche Körper mit einem gegebenen Körper wechselwirken. So wechselwirkt im ersten Fall mit dem Körper nur die Erde, sie zieht ihn an (Bild 9a). Deshalb wirkt auf den Körper eine einzige Kraft — die Schwerkraft[1] F_G. Wenn man den Luftwiderstand oder zum Beispiel die Wirkung des Windes berücksichtigen würde, so hätte man zusätzliche Kräfte einzuführen. Die „Wurfkraft“, die auf Ihrer Zeichnung genannt ist, gibt es in der Natur nicht, es gibt keine Wechselwirkung, die zur Entstehung solcher Kräfte führen könnte.

Leser: Aber um einen Gegenstand zu werfen, muß auf ihn unbedingt irgendeine Kraft wirken.

Autor: So ist es. Wenn Sie einen Körper werfen, üben Sie auf ihn eine gewisse Kraft aus. Jedoch wird im oben

[1] Schwerkraft und Gewichtskraft brauchen hier nicht unterschieden zu werden (siehe Abschnitt 9).

gezeigten Fall die Bewegung des Körpers erst, nachdem er geworfen wurde, betrachtet, d.h., nachdem die Kraft aufhörte zu wirken. Diese Kraft bleibt nur in ihrem Resultat übrig, der Anfangsgeschwindigkeit des Körpers. Merken Sie sich: **Man kann Kraft nicht „anhäufen"— es bleibt nur die Wechselwirkung der Körper, es bleiben nicht die Kräfte.**

Leser: Wenn aber auf den Körper nur die Schwerkraft wirkt, warum fällt er dann nicht vertikal nach unten, sondern bewegt sich auf einer bestimmten Bahn?

Autor: Sie verwundert die Tatsache, daß im gegebenen Fall die Bewegungsrichtung des Körpers nicht mit der Richtung zusammenfällt, in der die Kraft wirkt. Indessen stimmt dies vollständig mit dem zweiten Gesetz Newtons überein. Ihrer Frage entnehme ich, daß Sie nicht genügend tief die Gesetze der Newtonschen Dynamik durchdacht haben. Ich schlage vor, daß wir uns darauf später konzentrieren (siehe Abschnitt 4); aber jetzt setze ich die Analyse der gegebenen vier Fälle der Bewegung des Körpers fort. Im zweiten Fall (Bild 9b) gleitet der Körper auf einer geneigten Ebene herab. Welche Körper wechselwirken mit ihm?

Leser: Augenscheinlich zwei Dinge: die Erde und die geneigte Ebene.

Autor: Richtig. Hier entdecken wir Kräfte, die auf den Körper wirken. Die Erde bedingt die Gewichtskraft F_G, und die geneigte Ebene bedingt die Gleitreibungskraft F_R und die Kraft F_N, die gewöhnlich Stützkraft genannt wird. Beachten Sie, daß in Ihrer Zeichnung die Kraft F_N völlig fehlt.

Leser: Halt, warten Sie! Sie erhalten, daß die geneigte Ebene auf den Körper nicht eine, sondern zwei Kräfte bewirkt.

Autor: Die Kraft ist natürlich nur eine. Jedoch ist es bequemer, sie in Form von zwei Komponenten zu betrachten, eine, die längs der Ebene gerichtet ist (Gleitreibungskraft), und die andere senkrecht zu ihr (Stützkraft). Die Tatsache, daß die Kräfte einen gemeinsamen Ursprung haben, d.h., daß sie Komponenten ein und derselben Kraft sind, spiegelt sich in der Existenz der allgemeingültigen Beziehung zwischen F_R und F_N wider:

$$F_R = \mu F_N, \tag{5}$$

wobei μ eine Konstante ist, die sogenannte Reibungszahl der Gleitreibung. Später konzentrieren wir uns auf diese Beziehung ausführlich (siehe Abschnitt 3).

Leser: In meiner Zeichnung habe ich die Hangabtriebskraft dargestellt. Offensichtlich gibt es eine solche Kraft nicht. Jedoch erinnere ich mich gut daran, daß früher der Ausdruck „Hangabtriebskraft" oft gebraucht wurde. Was ist dazu zu sagen?

Autor: Ja, ein solcher Ausdruck existiert tatsächlich. Jedoch müssen Sie sich merken, daß die Hangabtriebskraft einfach eine der Komponenten der Gewichtskraft ist; man erhält sie bei der Zerlegung der letztgenannten Kraft in zwei Komponenten, eine in Richtung längs der geneigten Ebene, die andere senkrecht zu ihr. Wenn Sie beim Aufzählen der Kräfte, die auf einen Körper wirken, auf die Gewichtskraft hinweisen, dann ist es überflüssig, die Hangabtriebskraft hinzuzufügen.

Im dritten Fall (Bild 9c) kreist der Körper in der vertikalen Ebene. Welche Körper wirken auf den betrachteten Gegenstand?

Leser: Zwei Körper: die Erde und der Faden.

Autor: Richtig. Deshalb wirken auf den Körper zwei Kräfte: die Schwerkraft und die Gegenkraft zur Fadenspannung.

Leser: Wie steht es aber mit der Zentripetalkraft?

Autor: Geduld! In den Aufgaben, die die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn betreffen, werden so viele Fehler gemacht, daß ich vorschlage, sich auf diese Frage ausführlicher zu konzentrieren (siehe Abschnitt 8). Hier sollte man nur beachten, daß die Zentripetalkraft keine zusätzlich auf den Körper wirkende Kraft ist. Sie ist eine Resultierende, die auf den Körper wirkt. Im gegebenen Fall (wenn sich der Körper am niedrigsten Punkt der Bahn befindet) ist die Zentripetalkraft gleich der Differenz der Gegenkraft zur Fadenspannung und der Schwerkraft.

Leser: Wenn ich das richtig verstanden habe, so ist im vierten Fall (Bild 9d) die rücktreibende Kraft ebenso die Resultierende aus der Schwerkraft und der Gegenkraft zur Fadenspannung?

Autor: Absolut richtig. In diesem Fall, wie auch im dritten, wechselwirken mit dem Körper der Faden und die Erde, und deshalb wirken auf den Körper zwei Kräfte: die Gegenkraft zur Fadenspannung und die Schwerkraft.

Ich möchte noch einmal hervorheben, daß die Kraft im Ergebnis der Wechselwirkung der Körper entsteht, sie kann nicht aus irgendeiner beliebigen „nebensächlichen" Überlegung heraus entstehen. Suchen Sie

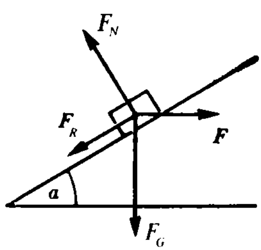


Bild 10

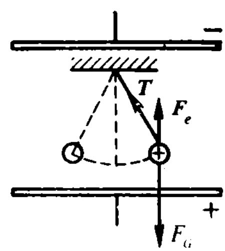


Bild 11

die Gegenstände, die auf ein gegebenes Objekt wirken, und Sie werden die Kräfte, die auf dieses Objekt wirken, erkennen.

Leser: Wahrscheinlich sind auch Fälle möglich, die komplizierter sind als die in Bild 7 dargestellten. Ist es möglich, solche Beispiele zu betrachten?

Autor: Es gibt viele Beispiele für kompliziertere Fälle der Wechselwirkung von Körpern untereinander. Zum Beispiel, auf einen Gegenstand drückt eine horizontal gerichtete konstante Kraft F, im Ergebnis davon gleitet er auf der geneigten Ebene nach oben. Die Kräfte, die auf den Körper in diesem Fall wirken, sind in Bild 10 dargestellt.

Ein anderes Beispiel: die Schwingungen eines geladenen Pendels, das zwischen den Platten eines Kondensators angebracht wurde. In diesem Fall entsteht eine zusätzliche Kraft F_e — die Kraft, mit der das Feld des Kondensators auf die Ladung des Pendels wirkt (Bild 11). Selbstverständlich ist es praktisch unmöglich, alle Fälle, die bei der Lösung von Aufgaben auftreten können, aufzuzählen.

Leser: Aber wie ist es, wenn in der Aufgabe nicht nur ein, sondern mehrere Körper beteiligt sind? Nehmen

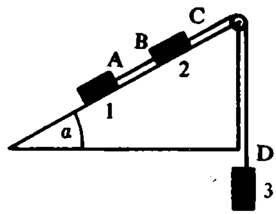


Bild 12

wir zum Beispiel den Fall, der in Bild 12 gezeigt wird.

Autor: Sie müssen sich jedes Mal exakt vorstellen, welchen Körper (oder welche Gesamtheit von Körpern) Sie in seiner Bewegung betrachten wollen.

Betrachten wir zum Beispiel die Bewegung des Körpers *1* in dem von Ihnen vorgeschlagenen Beispiel. Mit diesem Körper wechselwirken die Erde, die geneigte Ebene und der Faden *AB*.

Leser: Aber wechselwirkt denn der Gegenstand *2* nicht mit dem Gegenstand *1*?

Autor: Natürlich wechselwirken die Gegenstände *1* und *2* nach dem allgemeinen Gravitationsgesetz. Jedoch ist diese Kraft ganz klein, man kann sie vernachlässigen; danach bleiben folgende Kräfte, die auf den Gegenstand *1* wirken: die Schwerkraft F'_G, die Gleitreibungskraft F'_R, die Stützkraft F'_N und die Kraft der Gegenwirkung T' des Fadens *AB* (Bild 13a).

Leser: Warum ist die Reibungskraft in Ihrem Bild nach links gerichtet? Mir scheint, daß sie ebenso nach der entgegengesetzten Seite gerichtet werden könnte.

Autor: Um sich über die Richtung der Reibungskraft klarzuwerden, muß man die Bewegungsrichtung des Gegenstandes kennen. Wenn diese nicht in den Bedingungen der Aufgabe genannt wird, so muß die eine oder andere

Richtung angenommen werden. Im gegebenen Fall nehme ich an, daß sich der Gegenstand *1* nach rechts bewegt (zusammen mit dem gesamten System der Körper) — die Rolle dreht sich im Uhrzeigersinn. Natürlich, von vornherein ist mir das nicht bekannt:

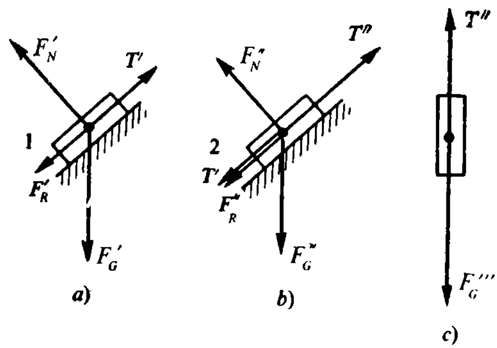


Bild 13

die Bewegungsrichtung wird erst durch Einsetzen von Zahlen festgelegt. Wenn ich mich irre, so erhalte ich bei der Berechnung der Beschleunigung eine negative Zahl. In diesem Fall muß man annehmen, daß sich der Gegenstand nicht nach rechts, sondern nach links bewegt (die Rolle dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn) und die Gleitreibung entsprechend zu berichtigen ist. Dann kann man die Beschleunigung berechnen und das Vorzeichen durch die Vertauschung der Zahlenwerte wieder überprüfen.

Leser: Aber weswegen muß man nochmals das Vorzeichen der Beschleunigung kontrollieren? Wenn diese nach Voraussetzung bei einer Bewegung nach rechts negativ herauskam, so muß sie jetzt offensichtlich positiv werden.

Autor: Nein, sie kann auch im zweiten Fall negativ sein.

Leser: Das ist mir nicht verständlich. Ist es denn nicht offensichtlich, daß, wenn sich der Gegenstand nicht nach rechts bewegt, er sich nach links bewegt?

Autor: Sie vergessen, daß der Gegenstand auch noch ruhen kann. Wir kehren zu dieser Frage später zurück, und dann analysieren wir die Bedingungen, die mit der Berücksichtigung der Reibungskräfte verbunden sind, genauer (siehe Abschnitt 7). Aber jetzt nehmen wir an, daß sich die Rolle im Uhrzeigersinn dreht, und betrachten die Bewegung des Gegenstandes *2* (siehe Bild 12).

Leser: Mit dem Gegenstand *2* wechselwirken die Erde, die geneigte Ebene, die Fäden *AB* und *CD*. Die Kräfte, die auf den Gegenstand *2* wirken, sind auf Bild 13b gezeigt.

Autor: Hervorragend. Betrachten Sie jetzt den Gegenstand *3*.

Leser: Der Gegenstand *3* wechselwirkt nur mit der Erde und dem Faden *CD*. Die auf den Körper *3* wirkenden Kräfte sind in Bild 13c skizziert.

Autor: Nachdem Sie die Kräfte, die auf jeden der Gegenstände wirken, festgestellt haben, können Sie die Bewegungsgleichungen für jeden von ihnen aufschreiben und danach das System der erhaltenen Gleichungen lösen.

Leser: Sie haben daran erinnert, daß man nicht unbedingt einzelne Gegenstände, sondern auch Gesamtheiten von Gegenständen betrachten kann.

Autor: Ja, es ist nicht notwendig, die Gegenstände *1*, *2* und *3* im einzelnen zu betrachten, wie das soeben getan wurde, sondern man kann sie als einheitliches Ganzes sehen. **In diesem Fall braucht man nicht die Aufmerksamkeit auf die Fadenspannungen zu legen, weil sie jetzt als innere Kräfte erscheinen,** die zwischen den verschiedenen Teilen des gesamten Systems wechselwirken. Das System dieser drei Gegenstände als Ganzes wechselwirkt nur mit der Erde und der geneigten Ebene.

Leser: Ich möchte noch einen Punkt klären. Als ich die Kräfte auf den Bildern 13b und 13c dargestellt habe, setzte ich voraus, daß die Fadenspannung *CD* auf beiden Seiten der Rolle gleich ist. Ist das richtig?

Autor: Strenggenommen ist das nicht richtig. Wenn sich die Rolle im Uhrzeigersinn dreht, so muß die Spannung des Fadenabschnitts *CD*, die am Gegenstand *3* angreift, größer sein als die Spannung des Fadenabschnitts *CD*, die am Gegenstand *2* angreift. Die Differenz dieser Kräfte ruft eben die Drehbeschleunigung der Rolle hervor. Jedoch wurde im Beispiel angenommen, daß man die Masse der Rolle vernachlässigen darf, d.h., die Rolle hat keine Masse, welche man beschleunigen müßte — die Rolle wurde einfach als Mittel zur Richtungsänderung des Fadens betrachtet, der die Gegenstände *2* und *3* verbindet. Deshalb kann man so rechnen, als ob die Spannung des Fadens *CD* auf beiden Seiten der Rolle ein und dieselbe ist. In der Regel wird die Masse der Rolle vernachlässigt. Für einen anderen Fall werden die Bedingungen gesondert festgelegt.

Ist Ihnen noch etwas unklar?

Leser: Ja, ich habe noch eine Frage bezüglich des Angriffspunktes der wirkenden Kraft. In allen Zeichnungen lassen Sie alle Kräfte in einem Punkt des Gegenstandes wirken. Ist das richtig? Kann man im besonderen die Reibungskraft im Schwerpunkt des Gegenstandes wirken lassen?

Autor: **Man muß sich merken, daß wir die Kinematik und Dynamik von nicht ausgedehnten Gegenständen studieren, also von materiellen Punkten, d.h., wir stellen uns die Gegenstände als Massenpunkte vor. Dabei ist der Gegenstand auf der Zeichnung nur aus Gründen der Anschaulichkeit nicht als Punkt dargestellt. Deshalb kann man alle Kräfte, die auf einen Gegenstand wirken, in einem Punkt angreifen lassen.**

Leser: Uns wurde gelehrt, daß jede beliebige Vereinfachung damit verbunden ist, daß irgendein Aspekt des betrachteten Problems verlorengeht. Was verlieren wir nun, wenn wir uns den Gegenstand als Massenpunkt vorstellen?

Autor: Bei einer so vereinfachten Behandlung berücksichtigen wir keine Drehmomente, die unter realen Bedingungen zu einer Drehung des Gegenstandes, zu seinem Umkippen führen können. Ein materieller Punkt kann sich nur translatorisch bewegen. Betrachten wir ein Beispiel. Auf einen Körper mögen in zwei verschiedenen Punkten zwei Kräfte angreifen: F_1 im Punkt A und F_2 im Punkt B, wie in Bild 14a dargestellt ist. Lassen wir im Punkt A die Kraft F_2', die gleich der Kraft F_2 und zu ihr parallel ist, und auch die Kraft F_2'', die gleich der Kraft F_2, aber entgegengesetzt gerichtet ist, angreifen (Bild 14b).

Da die Kräfte F_2' und F_2'' miteinander im Gleichgewicht stehen, ändert ihr Hinzufügen physikalisch nichts. Jedoch kann man das Bild 14b auf folgende Weise behandeln: Im Punkt A wirken die Kräfte F_1 und F_2', die die Translationsbewegung des Körpers hervorrufen; auf den Körper wirkt auch ein Kräftepaar (die Kräfte F_2 und F_2''), das eine Drehung des Gegenstandes hervorruft. Mit anderen Worten, die

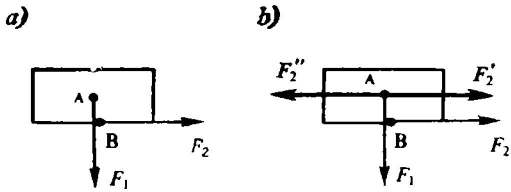


Bild 14

Kraft F_2 kann in den Punkt A des Gegenstandes verschoben werden, wenn dabei gleichzeitig das entsprechende Drehmoment hinzugefügt wird. Bei der Betrachtung des Gegenstandes als Punktmasse hat dieses Drehmoment offensichtlich keine Bedeutung.

Leser: Sie haben gesagt, daß ein materieller Punkt sich nicht drehen, sondern nur eine Translationsbewegung ausführen kann. Früher haben wir aber doch Drehbewegungen — Bewegungen auf einem Kreis— betrachtet.

Autor: Bringen Sie nicht völlig verschiedene Dinge durcheinander. Die Translationsbewegung eines Punktes kann auf verschiedenen Wegen vor sich gehen und im besonderen auf einem Kreis. Wenn ich von der Unmöglichkeit der Drehbewegung für einen Punkt gesprochen habe, meinte ich, daß sich der Punkt nicht um sich selbst drehen kann, d.h. um die Achse, die durch den Punkt führt.

3. Sind Sie in der Lage, die Reibungskraft zu finden?

Autor: Ich möchte ausführlicher auf die Berechnung der Reibungskräfte in verschiedenen Aufgaben eingehen. Es geht um die trockene Gleitreibung. (Trocken heißt die Reibung zwischen den Flächen zweier Körper beim Fehlen irgendeiner Zwischenschicht, beispielsweise eines Schmiermittels.)

Leser: Aber hier, so scheint es, ist alles ganz klar.

Autor: Trotzdem gibt es in Prüfungen eine Vielzahl von Fehlern, die mit der Unfähigkeit zusammenhängen, die Reibungskraft zu berechnen. Betrachten

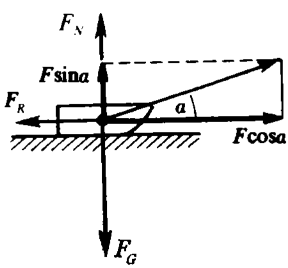


Bild 15

wir das in Bild 15 dargestellte Beispiel. *Ein Schlitten der Masse m wird an einer Schnur mit der Kraft F gezogen, die mit der Horizontalen den Winkel α bildet; die Gleitreibungszahl sei μ. Es soll die Kraft der Gleitreibung gefunden werden. Wie würden Sie vorgehen?*

Leser: Aber was ist da schwer? Die Reibungskraft ist gleich

$$\mu F_G, \quad \text{wobei } F_G = mg \text{ ist.}$$

Autor: Falsch. Die Gleitreibungskraft ist nicht gleich μF_G, sondern μF_N, wobei F_N die Stützkraft ist. Denken Sie an die Gleichung (5) aus Abschnitt 2.

Leser: Aber ist das denn nicht ein und dasselbe?

Autor: Im Spezialfall können Schwer- und Stützkraft von gleichem Betrag sein. Im allgemeinen sind das völlig verschiedene Kräfte. Betrachten wir das von mir vorgeschlagene Beispiel. Die Kräfte, die in diesem Beispiel auf den Gegenstand wirken, sind die Schwerkraft F_G, die Stützkraft F_N, die Kraft der Gleitreibung F_R und die Spannkraft F der Schnur (siehe Bild 15). Wir zerlegen die Kraft F in einen vertikalen ($F \sin \alpha$) und einen horizontalen ($F \cos \alpha$) Bestandteil. Alle Kräfte, die in vertikaler Richtung wirken, befinden sich miteinander im Gleichgewicht. Hieraus ergibt sich die Stützkraft

$$F_N = F_G - F \sin \alpha. \qquad (6)$$

Sie sehen, daß diese Kraft nicht gleich der Schwerkraft ist, sie ist um die Größe $F \sin \alpha$ kleiner. Physikalisch ist das völlig verständlich, weil die nach oben gespannte Schnur den Schlitten etwas „anzuheben" scheint; dadurch verkleinert sich die Kraft, mit der der Schlitten auf die Fläche drückt, also auch die Stützkraft. Auf diese Weise ist im gegebenen Fall

$$F_R = \mu (F_G - F \sin \alpha). \qquad (7)$$

Wenn insbesondere die Schnur horizontal ($\alpha = 0°$) gerichtet wäre, so würde an Stelle von (6) $F_N = F_G$ sein, was $F_R = \mu F_G$ zur Folge hat.

Leser: Ich verstehe. Ich habe einfach noch nie darüber nachgedacht.

Autor: Das ist ein ziemlich verbreiteter Fehler der Prüflinge; sie versuchen, die Gleitreibungskraft als Produkt aus Gleitreibungszahl und Gewichtskraft und nicht mit der Stützkraft zu behandeln.— Versuchen Sie, nicht ähnliche Fehler zu machen.

Leser: Ich werde die Regel befolgen: Um die Reibungskraft zu finden, ist es vorher notwendig, die Stützkraft zu bestimmen.

Autor: Bisher ging das Gespräch um die Kraft der Gleitreibung. Jetzt betrachten wir die Kraft der Haftreibung. Hier gibt es eine Spezifik, auf welche die Lernenden nicht immer ihre Aufmerksamkeit richten. Nehmen wir folgendes Beispiel. Der Gegenstand ruht auf einer horizontalen Ebene; auf ihn wirke die horizontal gerichtete Kraft F, die bestrebt ist, den Gegenstand zu verschieben. Wie groß, meinen Sie, ist in diesem Fall die Reibungskraft?

Leser: Wenn sich der Gegenstand auf einer horizontalen

Ebene befindet und die Kraft horizontal gerichtet ist, so ist in diesem Fall $F_N = F_G$. Richtig?

Autor: Richtig. Und was weiter?

Leser: Hieraus folgt, daß die Reibungskraft gleich μF_G ist.

Autor: Sie haben einen charakteristischen Fehler gemacht: Sie haben die Kraft der Haftreibung mit der Kraft der Gleitreibung verwechselt. Wenn der Gegenstand gleiten würde, dann wäre Ihre Antwort richtig. Im gegebenen Fall jedoch ruht der Gegenstand. Für den Ruhezustand ist es notwendig, daß

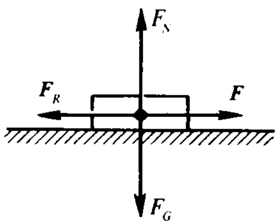


Bild 16

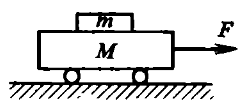


Bild 17

alle auf den Körper einwirkenden Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen. Auf den Gegenstand wirken vier Kräfte: die Schwerkraft F_G, die Stützkraft F_N, die Kraft F und die Kraft der Haftreibung F_R (Bild 16). Die vertikalen Kräfte F_G und F_N sind miteinander im Gleichgewicht. Es müssen sich auch die horizontalen Kräfte F und F_R miteinander im Gleichgewicht befinden. Folglich gilt:

$$F_R = F \tag{8}$$

Leser: Sie erhalten, daß die Kraft der Haftreibung von der äußeren Kraft, die bestrebt ist, den Gegenstand zu verschieben, abhängt.

Autor: Ja, das ist so. In dem Maße, wie sich die Kraft F vergrößert, wächst auch die Kraft der Haftreibung. Diese kann jedoch nicht unbeschränkt wachsen. Es existiert der maximale Wert

$$F_{R,\max} = \mu_0 F_N \tag{9}$$

für die Kraft der Haftreibung. Die Haftreibungszahl μ_0 ist etwas größer als die Reibungszahl μ, die in der Beziehung (5) die Kraft der Gleitreibung charakterisiert hat. Sobald die äußere Kraft F bei ihrer Vergrößerung den Wert $\mu_0 F_N$ erreicht, beginnt der Gegenstand, sich zu bewegen. Dabei wird die Haftreibungszahl μ_0 gleich der Reibungszahl μ, so daß sich die Reibungskraft etwas verkleinert. Bei weiterem Wachsen der Kraft F (bis zu sehr hohen Geschwindigkeiten) wächst die Reibungskraft (jetzt ist es die Kraft der Gleitreibung) nicht mehr, und der Gegenstand bewegt sich mit allmählich wachsender Beschleunigung. Für viele Prüflinge stellt sich die Unfähigkeit, die Reibungskraft zu finden, bei folgender ziemlich einfachen Frage heraus: *Wie groß ist die Reibungskraft, wenn ein Gegenstand der Masse m auf einer geneigten Ebene mit dem Winkel α ruht?* — Man hört verschiedene falsche Antworten. Einer sagt, daß die Reibungskraft gleich μmg ist, andere sagen, sie ist gleich $\mu F_N = \mu mg \cos \alpha$.

Leser: Ich verstehe. Wenn der Gegenstand ruht, geht es um die Kraft der Haftreibung. Sie muß aus der Gleichgewichtsbedingung derjenigen Kräfte ermittelt werden, die längs der geneigten Ebene wirken. Im gegebenen Fall sind es zwei solche Kräfte: die Reibungskraft F_R und die das Gleiten bewirkende Kraft $mg \sin \alpha$. Deshalb ist die richtige Antwort $F_R = mg \sin \alpha$.

Autor: Völlig richtig. Abschließend betrachten wir folgende Aufgabe, die in Bild 17 dargestellt ist. *Ein Körper der Masse m liegt auf einem Gegenstand der Masse M; der maximale Wert der Kraft der Haftreibung zwischen beiden Körpern wird durch die Haftreibungszahl μ_0 charakterisiert. Zwischen dem Gegenstand der Masse M und der Erdoberfläche bestehe keine Reibung. Es wird gefordert, die minimale Kraft F zu finden, bei deren Wirken auf M eine Verschiebung des oberen Körpers der Masse m im Vergleich zum unteren erfolgt.*

Leser: Zuerst werde ich annehmen, daß die Kraft genügend klein ist: Der Gegenstand m bewegt sich nicht in bezug auf den Gegenstand M. In diesem Fall haben beide Gegenstände die Beschleunigung

$$a = \frac{F}{M + m}.$$

Autor: Richtig. Welche Kraft auf dem Gegenstand m hängt mit dieser Beschleunigung zusammen?

Leser: Die Beschleunigung des Gegenstandes m hängt mit der Kraft der Haftreibung durch $F_R = ma$, d. h. durch

$$F_R = \frac{Fm}{M+m}$$

zusammen. Hieraus folgt, daß mit Vergrößerung der Kraft F die Kraft der Haftreibung F_R auch wachsen muß. Jedoch kann sie nicht unbegrenzt wachsen. Ihr Maximalwert ist

$$F_{R,\,\max} = \mu_0 F_N = \mu_0 mg.$$

Folglich ist der Maximalwert der Kraft F, bei der sich beide Gegenstände noch zusammen als einheitliches Ganzes bewegen können, durch die Bedingung

$$\mu_0 mg = Fm/(M + m)$$

bestimmt. Hieraus finden wir

$$F = (M + m)\,\mu_0 g.$$

Dies ist auch die gesuchte minimale Kraft, die eine Verschiebung des Körpers m gegenüber dem Körper M bedingt.

Autor: Ihre Lösung der vorgelegten Aufgabe ist richtig. Ihre Erläuterungen stellen mich vollständig zufrieden.

Aufgaben

2. Auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel α gleite eine Scheibe nach oben. Sie kommt nach einer bestimmten Zeit zur Ruhe und gleitet wieder abwärts. Zu bestimmen ist die Reibungszahl μ zwischen Scheibe und Ebene, wenn die Zeit des Abgleitens n-mal größer als die Zeit des Aufwärtsgleitens ist.
3. Ein Klotz der Masse m befinde sich auf einer geneigten Ebene, deren Neigungswinkel zur Horizontalen von 0° bis 90° verändert werden kann. Stellen Sie die Abhängigkeit der Reibungskraft zwischen Klotz und Ebene in Abhängigkeit vom Winkel α grafisch dar. Die Reibungszahl zwischen Klotz und Ebene sei μ.

4. Wie gut kennen Sie die Newtonschen Gesetze?

Autor: Formulieren Sie bitte das erste Gesetz Newtons!

Leser: Ein Körper befindet sich im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, solange nicht die Einwirkung seitens anderer Körper ihn veranlaßt, seinen Zustand zu ändern.

Autor: Ist dieses Gesetz in allen Bezugssystemen erfüllt?

Leser: Ich verstehe Ihre Frage nicht.

Autor: Wenn Sie sagen, daß sich der Gegenstand im Zustand der Ruhe befindet, so meinen Sie, daß er in bezug auf irgendeinen anderen Körper, der im gegebenen Fall die Rolle des Bezugssystems spielt, unbeweglich ist. **Von Ruhe oder irgendeiner bestimmten Bewegung des Körpers zu sprechen, hat ohne Angabe des Bezugssystems keinen Sinn.** Der Charakter der Bewegung eines Körpers hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. Zum Beispiel ruht ein Körper, der auf dem Boden eines sich bewegenden Wagens liegt, bezüglich desjenigen Bezugssystems, das mit dem Wagen verbunden ist. Er bewegt sich jedoch bezüglich desjenigen Bezugssystems, das mit dem Eisenbahndamm verbunden ist. Nach dieser Erklärung kehren wir zur gestellten Frage zurück: Ist das erste Gesetz Newtons in allen Bezugssystemen erfüllt?

Leser: Nun, wahrscheinlich, in allen ...

Autor: Ich sehe, diese Frage überraschte Sie. Das Experiment zeigt, **daß das erste Gesetz Newtons nicht in allen Bezugssystemen erfüllt ist.** Wir betrachten als Beispiel einen Körper, der auf dem Boden eines Eisenbahnwagens liegt; dabei vernachlässigen wir die Reibung zwischen Körper und Boden. Wir untersuchen die Lage des Körpers in dem Bezugssystem, das mit dem Eisenbahnwagen verbunden ist. Dabei kann man folgendes beobachten: Der Körper ruht auf dem Boden, aber plötzlich beginnt er trotz des Fehlens irgendeiner Einwirkung auf dem Boden zu gleiten. Es liegt eine Verletzung des ersten Newtonschen Gesetzes vor. Uns erklärt sich dieser Effekt so, daß der sich zunächst geradlinig und gleichförmig bewegende Eisenbahnwagen zu bremsen begann und der Körper der fehlenden Reibung wegen bestrebt ist, den Zustand der geradlinigen gleichförmigen Bewegung in bezug auf den Bahndamm beizubehalten. Daraus läßt sich schließen, daß in dem mit dem Bahndamm verbundenen Bezugssystem das Newtonsche Gesetz erfüllt ist; aber in dem System, das mit dem bremsenden Eisenbahnwagen verbunden ist, ist es nicht erfüllt. **Diejenigen Bezugssysteme, in denen das erste Newtonsche Gesetz gilt, heißen Inertialsysteme, diejenigen, in denen es nicht gilt, heißen Nichtinertialsysteme.**

Für die Mehrzahl der von uns betrachteten Erscheinungen können wir jedes Bezugssystem als Inertialsystem ansehen, das mit der Oberfläche der Erde oder mit irgendeinem beliebigen Körper verbunden ist, der im Vergleich zur Erdoberfläche ruht oder sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Zu nichtinertialen Bezugssystemen werden Systeme gerechnet, die sich beschleunigt bewegen; beispielsweise rotierende Systeme, verzögerte und beschleunigte Aufzüge usw. Merken Sie sich, daß in nichtinertialen Bezugssystemen nicht nur das erste, sondern auch das zweite Gesetz Newtons nicht erfüllt ist.

Leser: Aber wenn man in beschleunigt bewegten Bezugssystemen die Gesetze Newtons nicht anwenden kann, wie kann man dann in solchen Systemen die Mechanik behandeln?

Autor: Bisher haben wir nur Kräfte betrachtet, die auf der Wechselwirkung der Körper basieren. Jedoch gibt es in der Mechanik auch noch Kräfte eines anderen Typs: Sie sind nicht durch die Wechselwirkung der Körper bedingt, das 3. Gesetz Newtons ist auf sie nicht anwendbar. Es sind die sogenannten Inertialkräfte. Werden gemeinsam „gewöhnliche“ (durch die Wechselwirkung der Körper bedingte) Kräfte und Inertialkräfte in die Betrachtung eingeschlossen, so kann man die Newtonschen Gesetze auch in beschleunigten Systemen anwenden. Die Inertialkraft ist gleich dem Produkt aus der Masse m des Körpers und der Beschleunigung des Systems, aber der Systembeschleunigung entgegengerichtet: $\vec{F}_1 = -m\vec{a}$.

Es möge ein Aufzug ein Nichtinertialsystem sein; er habe die vertikal nach oben gerichtete Beschleunigung a. Auf dem Boden des Aufzugs befindet sich ein Gegenstand der Masse m. In dem Bezugssystem, das mit dem Aufzug verbunden ist, müssen auf den Gegenstand zwei „gewöhnliche" Kräfte wirken: die Stützkraft F_N und die Schwerkraft F_G. Außerdem wirkt die Inertialkraft $F_i = ma$, die nach unten gerichtet ist. Im gegebenen System ruht der Körper, folglich gilt $F_N - F_G - F_i = 0$. Ein interessanteres Beispiel mit einem Nichtinertialsystem finden wir in Abschnitt 12.

Leser: Das heißt, man kann das erste und zweite Newtonsche Gesetz in beschleunigten Systemen doch verwenden?

Autor: Man kann, wenn auf den Körper zusätzlich eine Inertialkraft wirkt. Man kann es nicht, wenn man sich auf „gewöhnliche", d. h. durch Wechselwirkung der Körper bedingte Kräfte, beschränkt.

Ich möchte empfehlen, in der Regel nur inertiale Bezugssysteme bei der Lösung von Aufgaben zu benutzen. Denn alle Kräfte, mit denen Sie zu tun haben, werden dann „gewöhnliche" Kräfte, d. h. durch Wechselwirkung der Körper bedingte Kräfte, sein.

Leser: Aber wenn man sich auf nichtinertiale Systeme beschränkt, dann ist es nicht möglich, Aufgaben mit Körpern zu betrachten, die sich in einem beschleunigten Aufzug oder auf einer rotierenden Scheibe befinden!

Autor: Warum denn nicht? Die Wahl des Bezugssystems hängt von Ihnen ab. Wenn Sie in der Aufgabe ein System benutzen, das mit dem Aufzug oder mit der Scheibe verbunden ist (Nichtinertialsystem), so ist der Körper als ruhend anzusehen. Verwenden Sie ein mit der Erde verbundenes Bezugssystem (Inertialsystem), so muß der Körper als bewegt, entweder geradlinig beschleunigt oder radial beschleunigt, angesehen werden. Ich empfehle, jedesmal gerade ein Inertialsystem zu wählen.

Aber jetzt gehen wir zum zweiten Gesetz Newtons über. Formulieren Sie es!

Leser: Dieses Gesetz kann als $F = ma$ geschrieben werden, wobei F die Kraft ist, die auf den Körper wirkt, m bedeutet dessen Masse, a dessen Beschleunigung.

Autor: Ihre lakonische Antwort ist ganz charakteristisch. Zu Ihrer Formulierung sind drei kritische Bemerkungen notwendig; zwei davon sind nicht sehr wichtig, eine ist wesentlich. Erstens ist die Kraft nicht die Folge der Beschleunigung, im Gegenteil, die Beschleunigung ist die Folge der Kraft. Deshalb läßt sich die logische Fassung des Gesetzes so aufschreiben:

$$a = BF/m, \tag{10}$$

wobei B ein Proportionalitätsfaktor ist. Er hängt von der Wahl der Einheiten der zu messenden Größen ab, die in Formel (10) auftreten. Ich bemerke, daß in Ihrer Formulierung der Proportionalitätsfaktor B nicht erwähnt ist.

Zweitens. Ein Körper wird durch alle Kräfte, die auf ihn wirken, beschleunigt (obwohl auch nicht ausgeschlossen ist, daß sich einige von ihnen im Gleichgewicht befinden).

Deshalb sollte man in der Formulierung des Gesetzes nicht den Ausdruck „Kraft", sondern den exakteren Ausdruck „resultierende Kraft" verwenden.

Die dritte Bemerkung ist am wichtigsten. Das zweite Newtonsche Gesetz stellt eine Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung her. Kraft und Beschleunigung sind aber vektorielle Größen. Sie werden nicht nur durch einen Zahlenwert, sondern auch durch eine Richtung charakterisiert. In Ihrer Formulierung ist nichts über die Richtung gesagt. Das ist ein wesentlicher Fehler. Damit haben Sie das Gesetz Newtons nicht vollständig formuliert. Die richtige Formulierung des zweiten Newtonschen Gesetzes ist folgende:

Die Beschleunigung eines Körpers ist der Resultierenden aller auf ihn wirkenden Kräfte direkt proportional, der Masse des Körpers umgekehrt proportional und erfolgt in Richtung der Resultierenden der Kräfte.

Analytisch kann dieser Satz in der Formel

$$\vec{a} = B\vec{F}/m \tag{11}$$

ausgedrückt werden (der Pfeil über den Buchstaben dient zur Kennzeichnung der Vektoren).

Leser: Bei der Diskussion der Kräfte im Abschnitt 2, die auf einen nach oben geworfenen Körper wirken, versprachen Sie zu zeigen, daß die Richtung der Bewegung des Körpers nicht unbedingt mit der Richtung der auf ihn wirkenden Kräfte übereinstimmt. Dabei nahmen Sie Bezug auf das zweite Newtonsche Gesetz.

Autor: Ja, jetzt ist es nun angebracht, auf diese Frage einzugehen. Denken Sie daran, was **Beschleunigung** ist: Sie **charakterisiert die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit.** In Bild 18 sind für zwei

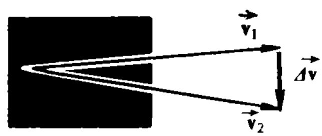


Bild 18

benachbarte Zeitpunkte t und $t + \Delta t$ die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ dargestellt. Die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeit Δt ist der Vektor $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Nach Definition gilt für die Beschleunigung

$$\vec{a}\,(t) \approx \Delta\vec{v}/\Delta t \tag{12}$$

oder genauer

$$\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\vec{v}/\Delta t). \tag{13}$$

Hieraus folgt, daß **der Vektor der Beschleunigung längs des Vektors $\Delta\vec{v}$, der die Änderung der Geschwindigkeit für genügend kleine Zeitintervalle angibt, gerichtet ist.** Aus Bild 18 ist ersichtlich, daß die Vektoren der Geschwindigkeit und derjenige der Änderung der Geschwindigkeit in völlig verschiedene Richtungen orientiert sein können. Das bedeutet, daß **im allgemeinen Fall Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektoren unterschiedlich orientiert sind.** Haben Sie das verstanden?

Leser: Ja, das ist mir verständlich. Beispielsweise ist bei der Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn die Geschwindigkeit des Körpers tangential an den Kreis, die Beschleunigung längs des Radius zum Zentrum gerichtet.

Autor: Ihr Beispiel ist gut geeignet. Jetzt muß man sich der Beziehung (11) zuwenden und sich fest einprägen, daß gerade die Beschleunigung und nicht die Geschwindigkeit in Kraftrichtung orientiert ist, daß mit der Größe der Kraft der Betrag der Beschleunigung und nicht derjenige der Geschwindigkeit verknüpft ist. Andererseits wird der Charakter der Bewegung des Körpers in einem gegebenen Augenblick durch Richtung und Größe der Geschwindigkeit bestimmt. (Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential zur Bahn des Körpers gerichtet.) Da Geschwindigkeit und Beschleunigung verschiedene Vektoren sind, **werden im allgemeinen Fall Kraft- und Bewegungsrichtung des Körpers nicht übereinstimmen.** Folglich wird der Bewegungscharakter des Körpers in einem gegebenen Augenblick auch nicht eindeutig durch die Kräfte bestimmt, die in diesem Augenblick auf den Körper einwirken.

Leser: Das gilt im allgemeinen Fall. Aber sicherlich ist auch die Übereinstimmung von Kraft- und Geschwindigkeitsrichtung möglich?

Autor: Natürlich ist das möglich. Heben Sie einen Körper hoch und lassen Sie ihn dann vorsichtig los, damit ihm keine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird. In diesem Fall wird die Bewegungsrichtung mit der Richtung der Schwerkraft übereinstimmen. Wenn Sie dem Körper beispielsweise eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit erteilen, dann wird die Bewegungsrichtung des Körpers nicht mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfallen: der Körper durchfliegt eine Parabel. In beiden Fällen bewegt sich der Körper unter Einwirkung ein und derselben Kraft, der Schwerkraft, aber der Bewegungscharakter ist unterschiedlich. Ein Physiker würde sagen, daß diese Verschiedenheit durch die Unterschiede in den Anfangsbedingungen verursacht ist: Im Augenblick des Bewegungsbeginns hatte im ersten Fall der Körper keine Geschwindigkeit, aber im zweiten

Fall hatte er eine bestimmte, horizontal gerichtete Geschwindigkeit. In Bild 19 sind die Unterschiede bezüglich der Bahnkurven dargestellt, wenn die Körper mit richtungsmäßig verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten geworfen werden. Aber in allen Fällen wirkt auf den Körper ein und dieselbe Kraft, die Schwerkraft.

Leser: Bedeutet das, daß **der Bewegungscharakter des Körpers in einem gegebenen Augenblick nicht nur**

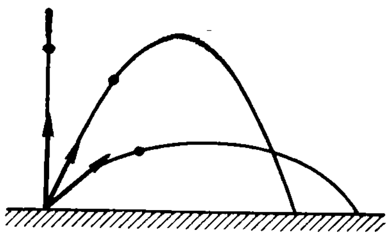


Bild 19

durch die Kräfte, die in diesem Augenblick auf den Körper wirken, bestimmt wird, sondern auch durch die Anfangsbedingungen?

Autor: Völlig richtig. Man muß hervorheben, daß die Anfangsbedingungen die Vorgeschichte des Körpers widerspiegeln. Sie sind das Resultat von Kräften, die in der Vergangenheit wirkten. Diese Kräfte sind nicht mehr vorhanden, aber es zeigt sich das Ergebnis ihres Wirkens. Vom philosophischen Gesichtspunkt betrachtet, widerspiegelt sich hier die Verbindung von Vergangenem und Gegenwärtigem, d.h. das Prinzip der Kausalität. Beachten Sie, daß sich die genannte Beziehung zwischen Vergangenem und Gegenwärtigem nicht geäußert hätte, wenn in die Formel des zweiten Newtonschen Gesetzes die Geschwindigkeit und nicht die Beschleunigung eingehen würde. In diesem Fall wäre die Geschwindigkeit des Körpers in einem gegebenen Augenblick (d.h. dessen Bewegungscharakter in einem gegebenen Augenblick) vollständig durch die Kräfte bestimmt, die in diesem Augenblick auf den Körper wirken; das Vergangene hätte keinen Einfluß auf das Gegenwärtige. Ich möchte noch ein Beispiel anführen, das das Gesagte illustriert. Es ist in Bild 20 dargestellt. An einem Faden ist eine Kugel aufgehängt. Auf diese wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft und die Spannung des Fadens. Wenn die Kugel aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und dann losgelassen wird, wird sie Schwingungen vollführen. Erteilt man der ausgelenkten Kugel eine bestimmte Geschwindigkeit, die auf derjenigen Ebene senkrecht steht, in der die Auslenkung erfolgt ist, so wird sich die Kugel gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegen. Wie Sie sehen, vollführt die Kugel in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen entweder Schwingungen (Bild 20a), oder sie bewegt sich gleichförmig auf einer Kreisbahn (Bild 20b). In beiden Fällen wirken nur zwei Kräfte auf die Kugel: die Schwerkraft und die Fadenspannung.

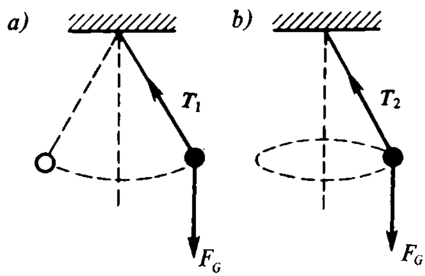


Bild 20

Leser: Ich habe über die Newtonschen Gesetze nie so ausführlich nachgedacht.

Autor: Daher ist es nicht verwunderlich, daß beim Aufsuchen der Kräfte, die auf einen Körper wirken, manchmal nicht davon ausgegangen wird, welche Gegenstände mit dem Körper wechselwirken, sondern davon, welchen Bewegungscharakter der Körper zeigt. Erinnern Sie sich, daß auch Sie so vorgegangen sind. Genau deshalb glaubten Sie auch, als Sie die Bilder 8c und 8d zeichneten, daß die Gesamtheit der Kräfte, die in den genannten Fällen auf den Körper wirkte, jeweils verschieden sein müsse. Tatsächlich wirken aber in beiden Fällen zwei Kräfte auf den Körper: die Schwerkraft und die Fadenspannung.

Leser: Ich habe verstanden. Auf einen Körper wirkende Kräfte können identisch, aber der Bewegungscharakter des Körpers kann verschiedenartig sein. Deshalb dürfen Angaben über den Bewegungscharakter nicht als Ausgangspunkt für die Bestimmung der auf einen Körper einwirkenden Kräfte dienen.

Autor: Sie haben sich ziemlich exakt ausgedrückt. Dabei ist es jedoch nicht nötig, ins Extreme zu verfallen. Obwohl ein und dieselbe Gesamtheit von Kräften verschiedene Bewegungsarten hervorrufen kann (wie in Bild 20), weichen für die verschiedenen Bewegungsarten die numerischen Beziehungen zwischen den wirkenden Kräften voneinander ab. Das bedeutet, daß für unterschiedliche Bewegungsarten verschiedene resultierende Kräfte auftreten. So muß zum Beispiel bei einer gleichförmigen Bewegung des Körpers auf einer Kreisbahn die Resultierende der Kräfte eine Zentripetalkraft sein, während bei Schwingungen die Resultierende eine rücktreibende Kraft sein muß. Obwohl zur Bestimmung der Kräfte Angaben über den Bewegungscharakter nicht als Ausgangspunkt dienen dürfen, folgt, daß diese keineswegs unnötig sind. Diesbezüglich wenden wir uns wieder dem in Bild 20 dargestellten Beispiel zu. Der Winkel α zwischen der Vertikalen und der Fadenrichtung und die Masse m des Körpers werden als bekannt vorausgesetzt. Gesucht ist die Fadenspannkraft T in folgenden zwei Fällen: 1. Der schwingende Körper befinde sich im Umkehrpunkt; 2. der Körper bewege sich gleichförmig auf einer Kreisbahn. Im ersten Fall ist die Resultierende aus der Schwerkraft und der Gegenkraft der Fadenspannkraft eine rücktreibende Kraft, sie ist senkrecht zum Faden gerichtet. Man hat daher die Schwerkraft in zwei Komponenten zu zerlegen, eine in Richtung der Resultierenden und eine senkrecht zu dieser (d.h. in Richtung des Fadens). Die in Fadenrichtung wirkenden Kräfte sind einander gleichzusetzen (Bild 21a). Dann folgt

$$T_1 = mg \cos \alpha.$$

Im zweiten Fall ist die resultierende Kraft eine Zentripetalkraft, sie ist horizontal gerichtet. Deshalb muß die Gegenkraft der Fadenspannkraft T_2 in vertikal und horizontal gerichtete Komponenten zerlegt werden. Die vertikal gerichteten Kräfte — sie stehen senkrecht auf der Resultierenden — müssen gleichgesetzt werden (Bild 21b). Es ergibt sich $T_2 \cos a = mg$ oder $T_2 = mg/\cos a$. Wir haben die Gegenkraft der Fadenspannkraft erhalten; die gesuchte Fadenspannkraft ist ihr betragsmäßig gleich

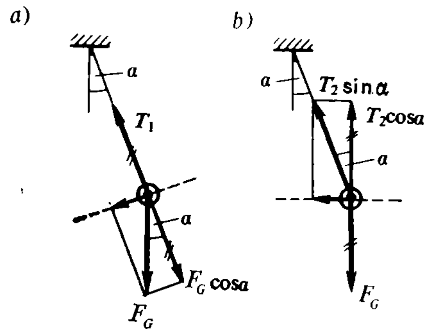


Bild 21

und entgegengesetzt gerichtet. Wie Sie sehen, war uns zur Bestimmung der Fadenspannkraft die Kenntnis des Bewegungscharakters von Nutzen.

Leser: Wenn ich richtig verstanden habe, **gestattet die Kenntnis der Wechselwirkung zwischen Körpern die Bestimmung der auf einen dieser Körper wirkenden Kräfte. Sind diese Kräfte und die Anfangsbedingungen bekannt, so läßt sich der Bewegungsablauf des Körpers (Größe und Richtung der Geschwindigkeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt) voraussagen. Ist andererseits der Bewegungsablauf des Körpers bekannt, so lassen sich zwischen den auf ihn wirkenden Kräften Beziehungen aufstellen.**

Habe ich richtig geschlossen?

Autor: Ja, das haben Sie richtig gesagt. Gehen wir weiter. Ich möchte eine einfache Aufgabe zum zweiten Newtonschen Gesetz vorschlagen: *Zwei Körper mit den Massen M und m ($M > m$) werden auf* *gleiche Höhe über dem Fußboden gehoben und gleichzeitig losgelassen. Werden sie bei gleichem Luftwiderstand für beide Körper den Fußboden gleichzeitig erreichen? Zur Vereinfachung sei angenommen, daß der Luftwiderstand konstant ist.*

Leser: Wenn der Luftwiderstand für beide Körper gleich ist, so braucht er nicht berücksichtigt zu werden. Folglich erreichen beide Körper den Fußboden gleichzeitig.

Autor: Sie haben sich geirrt. Sie haben kein Recht, den Luftwiderstand nicht zu berücksichtigen. Betrachten wir beispielsweise den Körper der Masse M. Zwei Kräfte wirken auf ihn: die Schwerkraft Mg und die Widerstandskraft F. Die Resultierende dieser Kräfte ist $(Mg - F)$. Hieraus finden wir die Beschleunigung

$$a = (Mg - F)/M \text{ oder } a = g - F/M.$$

Damit hat der Körper mit der großen Masse eine größere Beschleunigung, und er erreicht deshalb den Fußboden eher. Ich möchte noch einmal ausdrücklich betonen, daß **bei der Berechnung der Beschleunigung unbedingt alle Kräfte, die auf den Körper wirken, berücksichtigt werden müssen**; d.h., man muß die Resultierende der Kräfte suchen. In diesem Zusammenhang ist die Anwendung des Ausdrucks „bewegende Kraft“ zu kritisieren, er ist ungeeignet. Die Anwendung dieses Ausdrucks auf eine Kraft (oder auf mehrere Kräfte) würde diese Kraft (diese Kräfte) dadurch auszeichnen, daß sie dem Körper die Beschleunigung erteilt. Man könnte denken, die anderen Kräfte seien weniger wesentlich. Das ist völlig falsch. Die Bewegung eines Körpers ist das Ergebnis von ausnahmslos allen auf den Körper einwirkenden Kräften (und natürlich von den Anfangsbedingungen).

Betrachten wir ein Beispiel zum dritten Gesetz Newtons. Ein Pferd beginnt, einen Wagen von der Stelle zu ziehen. Schließlich bewegen sich Pferd und Wagen mit irgendeiner Beschleunigung. Aus dem dritten Newtonschen Gesetz folgt, daß mit derselben Kraft, mit der das Pferd den Wagen zieht, der Wagen, jedoch in entgegengesetzter Richtung, auf das Pferd wirkt. Weshalb bewegen sich trotzdem Pferd und Wagen zusammen beschleunigt? Erklären Sie dies!

Leser: Ich habe niemals über so etwas nachgedacht. Jedoch sehe ich hier keinerlei Widersprüche. Die Beschleunigung wäre schwer zu erklären, wenn die Kraft, mit der das Pferd den Wagen zieht, im Gleichgewicht mit der Kraft wäre, mit der der Wagen auf das Pferd wirkt. Diese Kräfte können sich jedoch nicht kompensieren, da sie auf verschiedene Körper wirken: eine wirkt auf das Pferd und die andere auf den Wagen.

Autor: Ihre Erklärung trifft für den Fall zu, daß das Pferd nicht an den Wagen angeschirrt ist. Das Pferd stößt sich vom Wagen ab, wobei sich der Wagen nach der einen, das Pferd sich nach der anderen Seite bewegt. Ich habe Ihnen jedoch einen anderen Fall vorgelegt: Pferd und Wagen sind miteinander verbunden, sie bewegen sich gemeinsam wie ein einziges System. Die oben erwähnten Wechselwirkungskräfte zwischen Pferd und Wagen wirken auf verschiedene Teile ein und desselben Systems. Bei der Bewegung dieses Systems als Ganzes können diese Kräfte als miteinander im Gleichgewicht stehende Kräfte betrachtet werden. Damit bleibt meine Frage bestehen.

Leser: Dann verstehe ich nicht, was hier los ist. Könnte es sein, daß hier die Wirkung nicht vollständig mit der Gegenwirkung im Gleichgewicht steht? Schließlich ist ein Pferd ein lebender Organismus ...

Autor: Nun beginnen Sie nicht zu phantasieren. Sie brauchen nicht, wenn Sie auf Schwierigkeiten stoßen, bereit zu sein, eines der Grundgesetze der Mechanik zu opfern. Um meine Frage zu beantworten, ist es nicht nötig, das dritte Newtonsche Gesetz „abzuändern“. Im Gegenteil, wir wollen dieses Gesetz als Basis unserer Diskussion anwenden.
Dem dritten Gesetz gemäß kann die Wechselwirkung zwischen Pferd und Wagen nicht zu einer Bewegung dieses Gesamtsystems führen (genauer: sie kann keine Beschleunigung des Gesamtsystems hervorrufen). In einem solchen Fall muß eine weitere Wechselwirkung vorhanden sein. Mit anderen Worten, es muß außer Pferd und Wagen mindestens noch ein Körper eine

Rolle spielen. Dieser Körper ist hier die Erde. Insgesamt haben wir nicht nur eine, sondern eine Gesamtheit von drei Wechselwirkungen: 1. Pferd und Wagen (wir bezeichnen diese Kraft mit f_0); 2. Pferd und Erde (Kraft F), das Pferd stößt sich von der Erdoberfläche ab; 3. Wagen und Erde (Kraft f), die Reibung des Wagens mit der Erdoberfläche. In Bild 22 sind die drei Körper dargestellt: Pferd, Wagen und Erde. Auf jeden wirken zwei Kräfte, die aus der Wechselwirkung des gegebenen Körpers mit den beiden anderen resultieren. (Dabei sind in Bild 22 Schwerkraft und Stützkraft nicht eingezeichnet, da diese

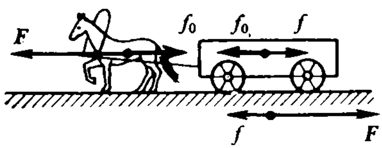


Bild 22

Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen und keinen Einfluß auf die Bewegung des Systems haben.) Die Beschleunigung des Systems Pferd — Wagen wird durch die Resultierende aller auf dieses System wirkenden Kräfte hervorgerufen. Es sind insgesamt vier Kräfte; die Resultierende ist dabei $(F - f)$. Sie bedingt die Beschleunigung des betrachteten Systems. Sie sehen, daß diese Beschleunigung nicht von der Wechselwirkung zwischen Pferd und Wagen abhängt.

Leser: Die Erde stellt also nicht einfach einen Ort dar, auf dem sich dieses oder andere Ereignisse abspielen, sie ist auch „aktiver Teilnehmer" an diesen Ereignissen.

Autor: Ihre anschauliche Bemerkung ist richtig. Nebenbei gesagt, wenn Sie Pferd und Wagen auf eine ideale Eisfläche stellen, wobei zwischen dem System und der Erde alle horizontalen Wechselwirkungen entfallen, so findet keine Bewegung statt. Besonders ist hervorzuheben: **Innere Wechselwirkungen können keine Beschleunigung eines Systems als Ganzes erzeugen; für eine solche sind unbedingt Wechselwirkungen**

von außen notwendig. (Es ist unmöglich, sich selbst an den Haaren hochzuheben.) Das ist eine wichtige praktische Folgerung aus dem dritten Newtonschen Gesetz.

5. Wie lösen Sie kinematische Aufgaben?

Autor: Stellen wir uns vor, daß aus einer bestimmten Höhe zwei Körper herabfallen, wobei der eine keine Anfangsgeschwindigkeit, der andere eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit habe. Hier und auch weiterhin werde der Luftwiderstand vernachlässigt. Vergleichen Sie die Fallzeiten für beide Körper!

Leser: Die Bewegung des horizontal geworfenen Körpers läßt sich als Zusammensetzung von zwei Bewegungen ansehen: einer vertikalen und einer horizontalen Bewegung. Die Flugzeit wird durch die vertikale Bewegungskomponente bestimmt. Da in beiden Fällen die vertikale Verschiebung der Körper durch die gleichen Angaben (gleiche Höhe und keine Vertikalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit) festgelegt ist, folgt, daß für beide Körper die Fallzeit ein und dieselbe ist. Sie ist gleich $\sqrt{2H/g}$, wobei H die Ausgangsgröße ist.

Autor: Völlig richtig. Jetzt betrachten wir einen komplizierteren Fall. *Wir nehmen an, daß beide Körper aus der Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit herabfallen, daß aber der eine auf seinem Weg auf eine feste Ebene auftrifft. Diese Ebene sei gegen die Horizontale unter dem Winkel von 45° geneigt. Beim Auftreffen auf die Ebene wird die Geschwindigkeitsrichtung des Körpers horizontal* (Bild 23). *Der Auftreffpunkt auf der Ebene befinde sich in der Höhe h. Vergleichen Sie die Fallzeiten der genannten Körper!*

Leser: Bis zum Auftreffpunkt auf die Ebene durchfallen beide Körper die gleiche Zeit. Beim Auftreffen auf die Ebene erhält ein Körper eine horizontale Geschwindigkeitskomponente. Diese kann jedoch nicht die vertikale Bewegungskomponente des Körpers beeinflussen. Hieraus folgt, daß auch hier die Fallzeiten beider Körper gleich sein müssen.

Autor: Sie haben eine falsche Antwort gegeben. Recht haben Sie nur insofern, als die horizontale Komponente der Geschwindigkeit nicht auf die vertikale Verschiebung des Körpers einwirkt und folglich auch nicht auf die Fallzeit. Der Aufschlag auf die Ebene führt jedoch nicht nur zum Entstehen einer horizontalen Geschwindigkeitskomponente, sondern auch zum Verschwinden der vertikalen Geschwindigkeitskomponente des Körpers. Das kann sich natürlich auf die Fallzeit auswirken. Beim Auftreffen auf

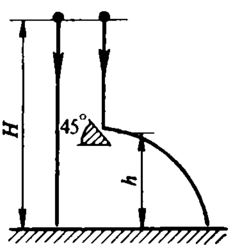


Bild 23

die Ebene verliert der Körper seine vertikale Geschwindigkeitskomponente und fällt dann aus der Höhe h ohne vertikale Anfangsgeschwindigkeit. Die Ebene verzögert die vertikale Verschiebung des Körpers, infolgedessen vergrößert sich die Fallzeit. Die Fallzeit desjenigen Körpers, der die Ebene nicht trifft, ist gleich $\sqrt{2H/g}$. Die Fallzeit des Körpers, der die Ebene trifft, ist gleich $\sqrt{2(H-h)/g} + \sqrt{2h/g}$. Im Zusammenhang damit möchte ich folgende Frage stellen: *Für welches Verhältnis der Höhen h/H wird die Fallzeit des Körpers maximal?* Anders gesagt, in welcher Höhe müßte man die Ebene anbringen, damit sie die Fallzeit am meisten verzögert?

Leser: Ich bin in Verlegenheit, eine Antwort zu geben. Mir scheint, daß das Verhältnis h/H weder nahe an 1 noch nahe an 0 liegen darf, weil das Verhältnis von 1 oder von 0 dem Fehlen der Ebene äquivalent wäre. Die Ebene muß irgendwo in der Mitte zwischen Erdoberfläche und oberem Ausgangspunkt angebracht sein.

Autor: Ihre qualitative Bemerkung ist richtig. Es ist nun nicht schwer, eine genaue Antwort zu erhalten. Schreiben wir die Fallzeit des Körpers auf:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right),$$

wobei $x = h/H$ ist. Man muß den Wert x suchen, bei welchem die Funktion $f(x)$ ihren Extremwert annimmt. Wir quadrieren die Fallzeit:

$$t^2 = \left(\frac{2H}{g}\right)\left(1+2\sqrt{(1-x)\,x}\right).$$

Wenn die Zeit maximal wird, so ist auch das Quadrat der Zeit maximal. Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß t^2 dann einen Extremwert annimmt, wenn die Funktion $y = (1 - x)x$ einen Extremwert annimmt. Damit führt die Aufgabe zum Aufsuchen des Maximums der quadratischen Funktion

$$y = -x^2 + x = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Dieser Ausdruck hat einen Extremwert bei $x = 1/2$. Somit muß die Höhe h halb so groß wie die Höhe H sein.

Die weitere Erörterung des typischen Vorgehens bei der Lösung kinematischer Probleme erfahren wir am Beispiel eines Körpers, der unter einem Winkel zur Horizontalen abgeworfen wird.

Leser: In solchen Aufgaben kenne ich mich nicht sehr gut aus.

Autor: Beginnen wir mit einer üblichen Aufgabe. *Ein Körper wird unter einem Winkel α gegen die Horizontale mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen. Es sind die Flugzeit T, die maximale Steighöhe H und die Wurfweite L zu bestimmen.* Wie üblich beginnt die Aufgabe mit dem Aufsuchen der Kräfte, die auf den Körper wirken. **Auf den Körper wirkt nur die Schwerkraft; deshalb bewegt er sich mit einer konstanten horizontalen Geschwindigkeitskomponente und einer Vertikalkomponente, die einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung g entspricht.**

Wir werden die vertikale und die horizontale Bewegungskomponente des Körpers einzeln untersuchen. Zu diesem Zweck zerlegen wir den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit in eine vertikale ($v_0 \sin \alpha$) und eine horizontale ($v_0 \cos \alpha$) Komponente. Die horizontale Geschwindigkeitskomponente des Körpers bleibt während des Fluges unverändert. Die vertikale Komponente verändert sich so, wie es Bild 24 zeigt. Wir beginnen mit der Betrachtung der vertikalen Bewegungskomponente. Die Flugzeit beträgt

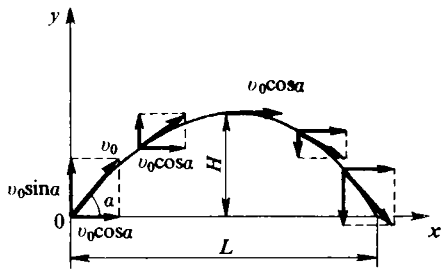


Bild 24

$T = T_1 + T_2$, wobei T_1 die Zeitdauer des Aufstiegs (der Körper bewegt sich in vertikaler Richtung gleichmäßig verzögert), T_2 die Zeitdauer des Abstiegs (der Körper bewegt sich in vertikaler Richtung gleichmäßig beschleunigt) ist. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente des Körpers ist im höchsten Punkt der Bahn (zum Zeitpunkt $t = T_1$) offensichtlich Null. Andererseits kann diese Geschwindigkeit durch die Geschwindigkeits-Zeit-Formel für die gleichmäßig verzögerte Bewegung ausgedrückt werden. Man erhält

$$0 = v_0 \sin a - gT_1$$

oder

$$T_1 = \frac{v_0 \sin a}{g}. \qquad (14)$$

Bei bekannter Zeit T_1 erhalten wir $H = (v_0 \sin \alpha)T_1 - gT_1^2/2$ oder

$$H = \frac{v_0^2 \sin a}{2g}. \qquad (15)$$

Die Abstiegszeit T_2 läßt sich berechnen, wenn man vom freien Fall des Körpers aus bekannter Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgeht:

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Beim Vergleich dieses Resultats mit (14) sehen wir, daß die Abstiegszeit gleich der Steigzeit ist. Die gesamte Flugzeit beträgt

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \tag{16}$$

Für die Ermittlung der Wurfweite L ist es notwendig, die horizontale Komponente der Bewegung des Körpers zu betrachten. Wie schon bemerkt, verschiebt sich der Körper in horizontaler Richtung gleichförmig. Hieraus finden wir

$$L = (v_0 \cos \alpha) \cdot T = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g. \tag{17}$$

Aus (17) ist ersichtlich, daß zwei Körper, die mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit abgeworfen werden, die gleiche Wurfweite erreichen, wenn die Abwurfwinkel beider Körper gegen die Horizontale sich zu 90° ergänzen.

Leser: Ich möchte die Frage über die Bahn des Körpers in der gestellten Aufgabe präzisieren. Uns wurde gesagt, daß die Bahnkurve eine Parabel ist. Kann man das zeigen?

Autor: Ja, natürlich. Betrachten wir die Bewegung im Koordinatensystem, das in Bild 24 skizziert ist. Den Charakter der Bewegungskomponenten in horizontaler und vertikaler Richtung haben wir schon aufgeklärt. Deshalb kann man folgende Ausdrücke für die Abhängigkeit der Koordinaten x und y des Körpers von der Zeit aufschreiben:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$
$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2. \tag{18}$$

Durch Eliminieren der Zeit aus diesen Gleichungen finden wir

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x. \tag{18a}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel.

Leser: Die von Ihnen aufgeschriebene Gleichung (18) für y hat die Form, die einer gleichmäßig verzögerten Bewegung entspricht. Jedoch bewegt sich der Körper während der Zeit des Abstiegs in vertikaler Richtung gleichmäßig beschleunigt. Kann man dann auch Ihre Gleichung benutzen?

Autor: Das kann man. Bezeichnen wir mit y_0 die Ordinate des Körpers im höchsten Punkt der Bahn und mit τ die Zeit, die vom Augenblick des Durchgangs durch diesen Punkt an gezählt wird, so ist leicht zu sehen, daß für die Abstiegszeit des Körpers

$$y_0 - y = g\tau^2/2$$

gilt. Da

$$\tau = t - T_1 = t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{und} \quad y_0 = H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

ist, so folgt

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - y = \frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2,$$

oder endgültig

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2.$$

Haben Sie in dieser Aufgabe alles verstanden?

Leser: Ja, ich habe alles verstanden.

Autor: Dann komplizieren wir die Aufgabe: *Wir stellen uns vor, daß auf den Körper der Masse m ein horizontaler Rückenwind mit konstanter Kraft F wirkt. Es wird wie im vorhergehenden Fall gefordert, die Flugzeit T, die Flughöhe H und die Flugweite L zu finden.*

Leser: Im Unterschied zur vorangegangenen Aufgabe ist die horizontale Verschiebung des Körpers jetzt nicht gleichförmig; der Körper bewegt sich in horizontaler Richtung mit der Beschleunigung $a = F/m$.

Autor: Hat sich irgend etwas für die vertikale Bewegungskomponente des Körpers geändert?

Leser: Da die Windkraft horizontal wirkt, so kann sie die vertikale Bewegungskomponente des Körpers nicht beeinflussen.

Autor: Gut. Aber denken Sie jetzt darüber nach, welche der gesuchten Größen die gleichen Werte wie in der vorigen Aufgabe haben müssen.

Leser: Offensichtlich sind das die Flugzeit T und die Höhe H. Diese Größen bestimmten wir bereits bei der Untersuchung der vertikalen Verschiebungskomponente des Körpers. Deshalb werden sie auch die gleichen Werte wie in der vorausgegangenen Aufgabe haben.

Autor: Hervorragend. Es bleibt, die Flugweite zu ermitteln.

Leser: Aus der Kenntnis der horizontalen Beschleunigung und der Flugzeit finden wir als Flugweite

$$L = v_0 T \cos \alpha + \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha + 2 \frac{F}{mg^2} v_0^2 \sin^2 \alpha .$$

Autor: Richtig. Nur läßt sich die Antwort in einer geeigneteren Form schreiben:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left(1 + \frac{F}{mg} \tan \alpha \right). \tag{19}$$

Wir betrachten eine weitere Aufgabe: *Ein Körper der Masse m wird unter dem Winkel α zu einer geneigten*

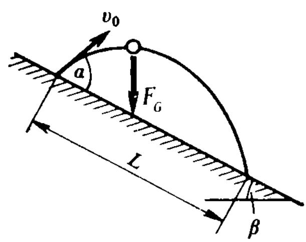


Bild 25

Ebene, die mit der Horizontalen den Winkel β bildet, abgeworfen (Bild 25). *Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0. Gesucht ist der Abstand L vom Abwurfpunkt bis zum Auftreffpunkt des Körpers auf die Ebene.*

Leser: Ich habe schon versucht, eine ähnliche Aufgabe zu lösen, habe aber nichts herausbekommen.

Autor: Haben Sie keine Ähnlichkeit zwischen dieser und der vorigen Aufgabe mit dem Wind bemerkt?

Leser: Nein, das habe ich nicht.

Autor: Also wählen wir die x-Achse längs der geneigten Ebene, die y-Achse senkrecht zu ihr (Bild 26a). Wir zerlegen den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit v_0

in diese Achsenrichtungen: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Die Schwerkraft F_G muß auch nach diesen beiden Richtungen zerlegt werden: $F_{Gx} = F_G \sin \beta$, $F_{Gy} = F_G \cos \beta$. Es ist leicht zu sehen, daß die vorhergehende Aufgabe vorliegt, in der hier die Kraft $F_G \sin \beta$ die Rolle der Windkraft,

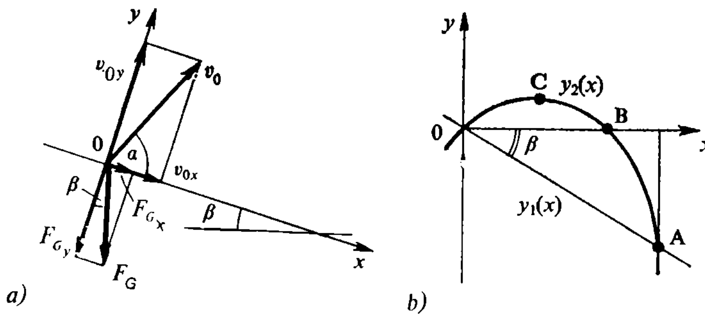


Bild 26

die Kraft $F_G \cos \beta$ die Rolle der Schwerkraft übernimmt. Deshalb kann man zur Bestimmung des gesuchten Abstandes L das Ergebnis (19) unter der Bedingung ausnutzen, daß in ihm das Einsetzen gemäß

$$F \to mg \sin \beta, \quad g \to g \cos \beta$$

vorgenommen wird. Auf diese Weise erhalten wir

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g \cos \beta} (1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha). \tag{20}$$

Für $\beta = 0$ stimmt dieses Ergebnis mit dem Ausdruck (17) überein. Nicht uninteressant ist noch eine andere Lösungsmethode dieser Aufgabe. Wir führen die Koordinatenachsen x und y mit dem Ursprung im Abwurfpunkt des Körpers (Bild 26b) ein. Die geneigte Ebene wird in diesem Koordinatensystem durch eine lineare Fuktion, $y_1 = -x \tan \beta$, und die Bahnkurve durch eine Parabel, $y_2 = ax^2 + bx$, beschrieben. Hierbei sind a und b Koeffizienten, die durch v_0, α und β ausgedrückt werden können. Die Abszisse x_A des Schnittpunktes A der Funktionen y_1 und y_2 finden wir durch Gleichsetzen dieser Funktionen:

$-x \tan \beta = ax^2 + bx.$

Hieraus erhalten wir $x_A = (\tan \beta + b)/(-a)$. Aus der Kenntnis von x_A ergibt sich die gesuchte Entfernung $\overline{OA} = L$:

$$L = \frac{x_A}{\cos \beta} = \frac{\tan \beta + b}{-a \cos \beta}.$$

Es bleibt, die Koeffizienten a und b durch v_0, α und β auszudrücken. Dazu betrachtet man zwei Punkte der Parabel, etwa die Punkte B und C (siehe Bild 26b). Wir schreiben für jeden dieser Punkte die Parabelgleichung auf:

$$\left.\begin{aligned} y_{2C} &= ax_C^2 + bx_C, \\ y_{2B} &= ax_B^2 + bx_B. \end{aligned}\right\}$$

Die Koordinaten der Punkte B und C sind uns bekannt. Deshalb gestattet das aufgeschriebene Gleichungssystem, die Koeffizienten a und b zu bestimmen. Ich empfehle Ihnen, in Mußestunden selbständig diese Lösung zu Ende zu bringen und sie in die Form (20) zu überführen.

Leser: Mir gefällt die erste Lösungsmethode besser.

Autor: Das ist Geschmackssache. Die beiden genannten Lösungsmethoden unterscheiden sich ihrem Charakter nach wesentlich voneinander. Die erste kann man als „physikalische Lösungsmethode" bezeichnen. **Sie benutzt den für die Physik charakteristischen Zugang durch Modelle (wir haben den Aufgabengesichtspunkt ein wenig verändert und führten das Problem auf die frühere Aufgabe mit dem Wind zurück).** Die zweite Methode kann „mathematische Methode" genannt werden. Es wurden zwei Funktionen benutzt und die Koordinaten des Schnittpunktes gesucht. Meiner Meinung nach ist die erste Methode eleganter als die zweite. Dafür ist sie jedoch weniger allgemein. Der Anwendungsbereich der zweiten Methode ist bedeutend breiter. Sie wird beispielsweise in dem Fall prinzipiell gewählt, wenn das Profil des Berges, von dem der Körper geworfen wird, keine Gerade ist. Dabei wird an Stelle der linearen Funktion y_1 eine andere Funktion, die dem Profil des Berges entspricht, benutzt. In derartigen Fällen ist die erste Methode grundsätzlich nicht anwendbar. Im Zusammenhang damit sei daran erinnert, daß der breitere Anwendungsbereich der mathematischen Methoden an deren größerer Abstraktheit liegt.

Aufgaben

4. Ein Körper A wird vertikal mit der Geschwindigkeit 20 m/s nach oben geworfen. In welcher Höhe befand sich der Körper B, der mit Körper A gleichzeitig mit der Geschwindigkeit 4 m/s horizontal abgeworfen wird und dann mit Körper A kollidiert? Der horizontale Abstand zwischen den Ausgangslagen beträgt 4 m. Es ist ferner die Flugzeit jedes Körpers bis zum Zusammenstoß und die Geschwindigkeit jedes Körpers im Moment des Zusammenstoßes gesucht.

5. Von den Punkten A und B, die sich in den Höhen von 2 m und 6 m befinden, werden zwei Körper einander gleichzeitig entgegengeworfen; der eine horizontal mit der Geschwindigkeit 8 m/s, der andere nach unten unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen mit einer solchen Anfangsgeschwindigkeit, daß beide Körper während des Fluges zusammenstoßen. Der horizontale Abstand zwischen den Punkten A und B beträgt 8 m. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers, der unter einem Winkel von 45° geworfen worden ist, und die Koordinaten x und y des Kollisionsortes, ferner die Flugzeit t der Körper bis zum Zusammenstoß und die Geschwindigkeiten beider Körper v_A und v_B zur Zeit des Zusammenstoßes. Die Bahnkurven der Körper liegen in einer Ebene.

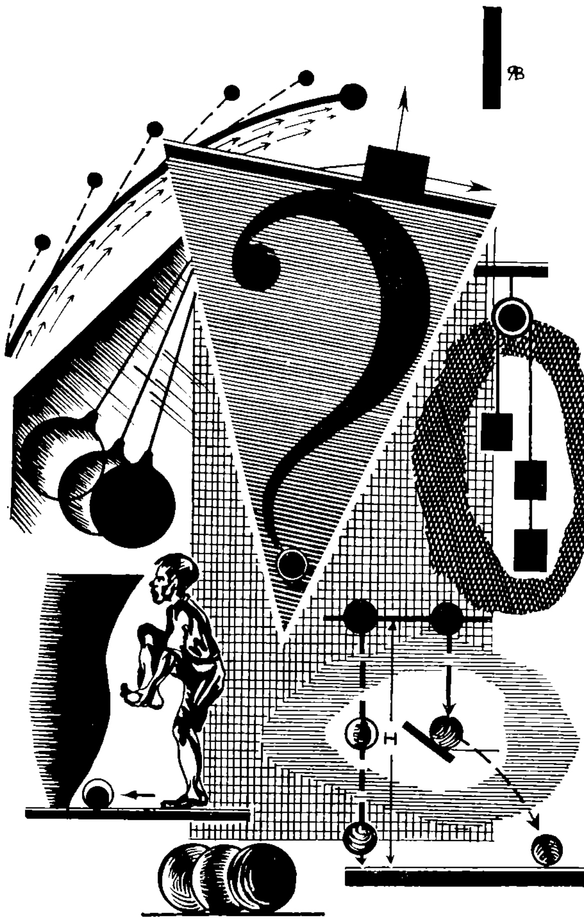
6. Von einem Punkt aus werden zwei Körper unter den Winkeln α_1 und α_2 zur Horizontalen mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 abgeworfen. Welchen Abstand voneinander haben die Körper nach der Zeit t? Betrachten Sie zwei Fälle:
   1. Die Bahnkurven beider Körper liegen in einer Ebene, wobei die Körper nach verschiedenen Seiten geworfen werden.
   2. Die Bahnkurven liegen in zueinander senkrechten Ebenen.

7. Ein Körper fällt von der Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit. Auf der Höhe h stößt er elastisch gegen eine feste Plattform, die unter einem Winkel $\alpha = 30°$ gegen die Horizontale geneigt ist. Suchen Sie die Fallzeit T und die Flugweite L des Körpers.

8. Unter welchem Winkel α zur Horizontalen muß ein Körper der Masse m geworfen werden, damit die Steighöhe gleich der Flugweite wird? Dabei wirkt auf den Körper ein horizontaler Rückenwind mit der konstanten Kraft F.

9. Senkrecht zu einer Ebene, die unter dem Winkel β zur Horizontalen geneigt ist, wird ein Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen. In welcher Entfernung von der Abwurfstelle trifft der Stein auf?

WENN SIE
DIE MECHANIK
GUT KENNEN,
SO KÖNNEN SIE
LEICHT AUFGABEN
LÖSEN.
NICHT WENIGER
OFFENSICHTLICH
IST AUCH
DER UMGEKEHRTE
SCHLUSS:
WENN SIE
AUFGABEN
LEICHT LÖSEN
KÖNNEN,
DANN KENNEN
SIE DIE MECHANIK
GUT.
LÖSEN SIE
DESHALB SOVIELE
AUFGABEN
WIE MÖGLICH!



10. Ein Junge von der Größe $h = 1{,}5$ m wirft, in einem Abstand $L = 15$ m hinter einem Zaun der Höhe $H = 5$ m stehend, einen Stein unter einem Winkel $\alpha = 45°$ zur Horizontalen. Mit welcher minimalen Geschwindigkeit v_0 muß er den Stein werfen, damit dieser über den Zaun fliegt?

11. Eine Kugel wird unter einem Winkel $\alpha = 30°$ zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 14$ m/s geworfen. In einem Abstand $l = 11$ m von der Abwurfstelle entfernt, stößt die Kugel elastisch gegen eine vertikale Wand. In welchem Abstand L von der Wand fällt die Kugel auf den Boden?

12. Ein Körper wird aus der Höhe $H = 19{,}6$ m horizontal mit der Geschwindigkeit $v_0 = 10$ m/s abgeworfen. Er stößt elastisch gegen den Erdboden und anschließend gegen eine elastisch reflektierende Wand, die horizontal $l = 40$ m von der Abwurfstelle entfernt ist. Es ist die maximale Höhe h zu finden, die der Körper nach dem Zusammenstoß mit der Wand erreicht. In welchem Abstand s von der Wand fällt er zu Boden?

13. Unter einem Neigungswinkel von $\beta = 30°$ zur Horizontalen fahren mit gleicher Geschwindigkeit $v = 14$ m/s ein Lastwagen und dahinter ein Personenwagen. In welchem minimalen Abstand vom Lastwagen darf der Personenkraftwagen fahren, damit ein zwischen den beiden Antriebsrädern des Lastwagens hängengebliebener und dann ziellos umherfliegender Stein den Personenwagen nicht trifft?

6. Wie lösen Sie dynamische Aufgaben?

Autor: Bei der Lösung dynamischer Aufgaben ist es besonders wichtig, auf einen Körper wirkende Kräfte richtig zu bestimmen (siehe Abschnitt 2).

Leser: Im Zusammenhang damit möchte ich eine Frage stellen. Angenommen, ich habe alle Kräfte, die auf einen Körper wirken, richtig bestimmt. Was muß ich im nächsten Schritt tun?

Autor: **Wenn die Kräfte nicht längs einer Geraden gerichtet sind, hat man die Kräfte nach zwei zueinander senkrecht stehenden Richtungen zu zerlegen und die Komponenten der Kräfte einzeln für jede dieser Richtungen,** die sog. „Richtungen der Zerlegung“, **zu betrachten.** Dabei möchte ich gleich einige praktische Hinweise geben. Erstens, damit Sie bei der Kräftezerlegung nicht die Übersicht verlieren, sollten Sie die Kräfte in der Skizze hinreichend groß, also nicht zu klein, zeichnen. Gewöhnlich stellen die Studierenden die Kräfte als mikroskopische Pfeile dar. Vergleichen Sie hierzu Ihre Zeichnung (Bild 8) mit meiner Zeichnung (Bild 9). Zweitens: Zerlegen Sie die Kräfte nicht vorzeitig. Zuerst muß man ohne Ausnahme alle Kräfte finden, die an dem Körper angreifen, und sie in einer Zeichnung veranschaulichen. Erst dann kann man zur Zerlegung dieser Kräfte oder einiger von ihnen übergehen. Drittens: Denken Sie daran, daß Sie, nachdem Sie eine Kraft zerlegt haben, die Existenz dieser Kraft „vergessen" und nur deren Komponenten verwenden. Sie müssen also entweder die Kraft selbst oder nur deren Komponenten benutzen.

Leser: Aber nach welchem Gesichtspunkt wählt man die Zerlegungsrichtungen aus?

Autor: Bei der Auswahl der Zerlegungsrichtungen muß man seine Aufmerksamkeit auf den Bewegungscharakter des Körpers lenken. Es sind zwei Varianten

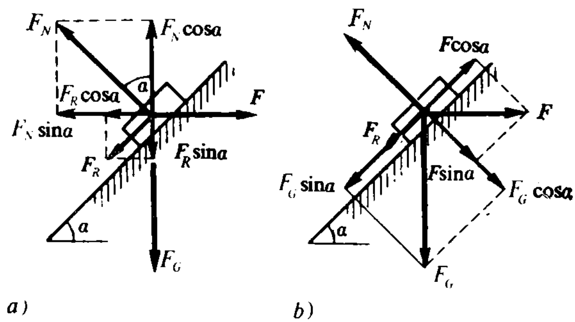


Bild 27

möglich: 1. der Körper ruht, oder er bewegt sich geradlinig und gleichförmig; 2. der Körper bewegt sich beschleunigt, wobei die Beschleunigungsrichtung (wenigstens bis auf das Vorzeichen) bekannt ist.

Im ersten Fall können Sie die Richtungen der Zerlegung willkürlich wählen. Man richtet sich (oder auch nicht) nach Gründen der Zweckmäßigkeit. Beispielsweise möge der in Bild 10 dargestellte Fall vorliegen. Der Körper verschiebe sich gleichförmig auf der geneigten Ebene nach oben. Hier kann man gleichberechtigt als Zerlegungsrichtungen sowohl die vertikale als auch die horizontale Richtung wählen (Bild 27a), ferner aber auch die Richtungen längs der geneigten Ebene und senkrecht zu dieser (Bild 27b).

Nachdem die Zerlegung ausgeführt ist, muß man die algebraischen Summen der Kraftkomponenten für jede Zerlegungsrichtung Null setzen. (Denken Sie daran, daß vorerst Fälle der Bewegung von Körpern ohne Beschleunigung untersucht werden.) Für den Fall des Bildes 27a erhalten wir das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} F_N \cos\alpha - F_R \sin\alpha - F_G &= 0, \\ F - F_R \cos\alpha - F_N \sin\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Im Fall des Bildes 27b ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} F_N - F_G \cos\alpha - F \sin\alpha &= 0, \\ F_R + F_G \sin\alpha - F \cos\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Leser: Diese Gleichungssysteme sind unterschiedlich.

Autor: Sie führen aber, wie nicht schwer einzusehen ist, zum gleichen Resultat. Nehmen wir an, daß in der Aufgabe gefordert ist, diejenige Kraft F zu finden, die die gleichförmige Bewegung des Körpers auf der geneigten Ebene nach oben gewährleistet. Substituiert man in (21) die Beziehung (5), so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} F_N (\cos\alpha - \mu \sin\alpha) - F_G &= 0, \\ F - F_N (\mu \cos\alpha + \sin\alpha) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Aus der ersten Gleichung dieses Systems finden wir $F_N = F_G (\cos\alpha - \mu \sin\alpha)^{-1}$. Setzt man dieses Ergebnis in der zweiten Gleichung ein, so ergibt sich

$$F = F_G \frac{\mu \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}.$$

Genau das gleiche Ergebnis erhält man aus dem Ausdruck (22), wovon man sich leicht selbständig überzeugen kann.

Leser: Aber wie wäre es, wenn sich der Körper beschleunigt bewegen würde?

Autor: In diesem Fall hängt die Wahl der Zerlegungsrichtungen der Kräfte von der Richtung der Beschleunigung des Körpers ab (Richtung der Resultierenden der Kräfte). **Man muß die Kräfte in Richtung der**

Beschleunigung und senkrecht zu dieser zerlegen Dabei wird die algebraische Summe der Kraftkomponenten, die senkrecht zur Beschleunigung stehen, gleich Null gesetzt. Die algebraische Summe der Kraftkomponenten in Richtung der Beschleunigung ist nach dem zweiten Newtonschen Gesetz dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Körpers gleich.

Wenden wir uns wieder dem letzten Beispiel, Körper auf geneigter Ebene, zu. Wir nehmen jetzt an, daß sich der Körper auf der Ebene beschleunigt nach oben bewegt. Entsprechend den gemachten Bemerkungen hat man die Zerlegung der Kräfte auf dieselbe Weise durchzuführen wie im Fall des Bildes 27b. Dabei gilt an Stelle des Systems (22) das folgende Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &F_N - F_G \cos\alpha - F \sin\alpha = 0, \\ &F \cos\alpha - F_R - F_G \sin\alpha = ma = F_G \frac{a}{g}. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Unter Verwendung des Ausdrucks (5) bestimmen wir die Beschleunigung des Körpers:

$$a = g \frac{F\cos\alpha - (F_G \cos\alpha + F \sin\alpha)\,\mu - F_G \sin\alpha}{F_G}.$$

Leser: Kann man bei einer beschleunigten Bewegung auch eine Kräftezerlegung vornehmen, die nicht in Beschleunigungsrichtung und senkrecht zu dieser fällt? Wie ich Ihre Erklärung verstanden habe, ist das verboten.

Autor: Was Ihre Frage betrifft, muß ich meine Erklärung präzisieren. Natürlich dürfen Sie beim Vorhandensein einer Beschleunigung die Kräfte in zwei beliebige, aufeinander senkrecht stehende Richtungen zerlegen. Aber dann müssen Sie nicht nur die Kräfte, sondern auch den Beschleunigungsvektor nach diesen Richtungen zerlegen. Bei einer solchen Lösungsmethode stoßen Sie auf zusätzliche Schwierigkeiten. Um diese zu umgehen, sollten Sie so vorgehen, wie ich es Ihnen geraten habe. Das ist am einfachsten. In der Aufgabe kennen Sie immer die Richtung der Beschleunigung (wenigstens bis auf das Vorzeichen) des Körpers. Von dieser Richtung gehen Sie aus. Die Unfähigkeit der Examinanden, die Richtungen der

Kräftezerlegung zweckmäßig zu wählen, ist eine der Ursachen für die Hilflosigkeit bei der Lösung mehr oder weniger komplizierter Aufgaben der Dynamik.

Leser: Bisher sprachen wir nur über die Zerlegung nach zwei Richtungen. Aber wahrscheinlich muß man im allgemeinen Fall von der Zerlegung nach drei zueinander orthogonalen Richtungen sprechen. Der Raum ist doch dreidimensional.

Autor: Sie haben völlig recht. Die zwei Richtungen bei unseren Erörterungen erklären sich daraus, daß wir zweidimensionale Probleme betrachtet haben. Im allgemeinen Fall hat man die Kräfte nach drei Richtungen zu zerlegen. Dabei bleiben alle oben gemachten Bemerkungen gültig. Selbstverständlich muß ich bemerken, daß in der Regel in Prüfungen zweidimensionale Aufgaben gegeben werden, wobei natürlich auch einfache Schlußfolgerungen auf dreidimensionale Fälle gezogen werden können.

Aufgaben

14. Auf einer horizontalen Ebene bewegt sich ein Körper der Masse $m = 5$ kg unter Einwirkung der Kraft $F = 29{,}4$ N, die an dem Körper unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zur Horizontalen angreift. Die Gleitreibungszahl ist $\mu = 0{,}2$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Körpers 10 s nach Beginn des Einwirkens der Kraft und die Arbeit W gegen die Reibungskraft während der genannten Zeit!

15. Ein Mann zieht zwei miteinander verbundene Schlitten. Die über die Schnur übertragene Kraft von $F = 118$ N wirkt unter

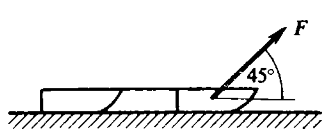


Bild 28

einem Winkel von $\alpha = 45°$ zur Horizontalen (Bild 28). Die Massen der Schlitten betragen je 15 kg. Die Reibungszahl der Schlittenkufen mit dem Schnee ist $\mu = 0{,}02$. Ermitteln Sie die Beschleunigung a der Schlitten, die Spannkraft T des Seils zwischen den Schlitten und auch die Kraft F_1, mit welcher der Mann an der Schnur ziehen muß, damit sich die Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

16. An einer festen Rolle hängen an einem Seil drei gleiche Lasten von jeweils $m = 2$ kg (Bild 29). Es ist die Beschleunigung a

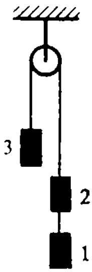


Bild 29

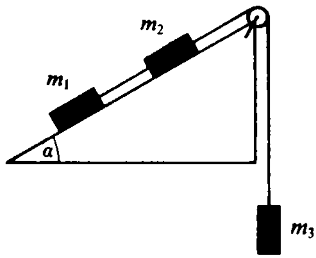


Bild 30

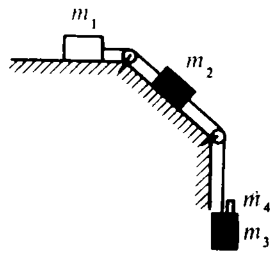


Bild 31

des Systems gesucht und die Spannkraft desjenigen Seils, das die beiden Lasten *1* und *2* verbindet.

17. Berechnen Sie die Beschleunigung a der Lasten und die Seilkräfte für den in Bild 30 dargestellten Fall. Gegeben ist $\alpha = 30°$, $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 8$ kg. Die Reibung mit der Ebene werde vernachlässigt.

18. Gegeben ist das System von Lasten, das in Bild 31 dargestellt ist. Hier ist $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 5$ kg, $m_4 = 0{,}5$ kg

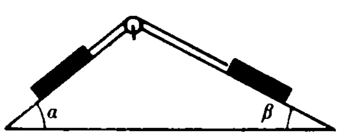


Bild 32

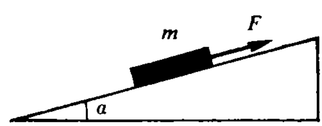


Bild 33

und $\alpha = 30°$. Die Reibungszahl der Lasten mit der Ebene beträgt $\mu = 0{,}2$. Bestimmen Sie die Beschleunigung a des Lastensystems, die Spannkräfte der Seile und die Kraft f, mit der die Last m_4 auf die Last m_3 wirkt.

19. Zwei Lasten mit gleichen Massen sind untereinander durch ein Seil verbunden, das über eine feste Rolle geführt wird. Die Ebenen, auf denen sich die Lasten befinden, bilden mit der Horizontalen die Winkel α und β (Bild 32). Ermitteln Sie die Beschleunigung a der Lasten und die Seilspannung. Die Reibungszahl der Lasten mit den Ebenen sei einheitlich gleich μ. Bei welcher Reibungszahl μ_1 werden sich die Lasten in Ruhe befinden?

20. Auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ befindet sich ein Klotz der Masse $m = 3$ kg. Auf ihn wirkt die Kraft $F = 9{,}8$ N, deren Richtung aus Bild 33 ersichtlich ist. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Klotzes und die Reibungskraft, wenn die Reibungszahl zwischen Klotz und Ebene $\mu = 0{,}3$ beträgt!

21. Rodelschlitten müssen auf einer Eisfläche mit einer Neigung von 0,3 bei einer Kraft, die nicht kleiner als $F = 60$ N ist, festgehalten werden; jedoch sich selbst überlassen, gleiten die Schlitten mit einer Beschleunigung $a = 2\ \text{m/s}^2$ abwärts. Welche Kraft F_1 muß man auf die Schlitten übertragen, um sie mit konstanter Geschwindigkeit aufwärts zu ziehen?

22. Ein kleiner Klotz liegt auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel α. Die Reibungszahl zwischen Klotz und

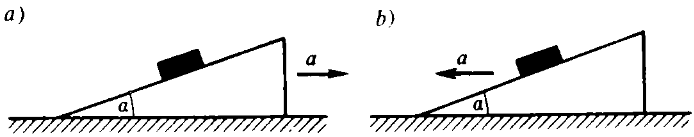


Bild 34

Ebene ist μ. Die geneigte Ebene bewege sich mit der Beschleunigung a in der in Bild 34 angegebenen Richtung. Bei welchem minimalen Wert dieser Beschleunigung beginnt der Klotz auf der Ebene zu gleiten?

23. Ein Klotz der Masse m_1 befindet sich auf einem Brett der Masse m_2, das auf einer horizontalen Ebene liegt. Die Reibungszahl zwischen Klotz und Brett ist μ_1 und zwischen Brett und Ebene μ_2. Gesucht ist die minimale horizontale Kraft F, bei deren Wirken auf das Brett eine Verschiebung des Klotzes gegenüber dem Brett erfolgt.

7. Inwieweit erschweren Reibungskräfte das Lösen dynamischer Aufgaben?

Autor: Die Einbeziehung von Reibungskräften kann eine Aufgabe erheblich kompilizeren.

Leser: Aber wir haben schon eine Frage über die Reibungskraft in Abschn. 3 diskutiert. **Wenn sich der Körper bewegt, so bestimmt sich die Reibungskraft aus der Stützkraft ($F_R = \mu F_N$); wenn jedoch der Körper ruht, so ist die Reibungskraft gleich derjenigen Kraft, die den Körper aus dem Ruhezustand herauszuführen**

sucht. Das alles ist nicht schwer zu verstehen und einprägsam.

Autor: Das ist so. Sie lassen aber einen wichtigen Umstand außer acht. Sie setzen voraus, daß Ihnen von vornherein die Antworten auf folgende Fragen bekannt sind: 1. Ruht der Körper, oder bewegt er sich? 2. In welche Richtung bewegt sich der Körper? Wenn das bereits bekannt ist, dann ist wirklich alles verhältnismäßig einfach. Fehlt diese Kenntnis, so wird die Aufgabe schwierig und erfordert spezielle Untersuchungen.

Leser: Ja, ich erinnere mich. Wir haben schon im Abschnitt 2 im Zusammenhang mit der Erörterung der Richtungsauswahl der Reibungskräfte darüber gesprochen.

Autor: Jetzt möchte ich auf diese Frage genauer eingehen. Ich bin der Meinung, daß die Komplizierungen, durch das Einbeziehen der Reibungskräfte in dynamische Aufgaben sowohl von den Lernenden als auch einigen Verfassern von Aufgaben unterschätzt werden.

Betrachten wir das in Bild 10 *dargestellte Beispiel. Der Neigungswinkel α der Ebene, die Kräfte F_G und F und die Reibungszahl μ der Gleitreibung sind uns gegeben. Zur Vereinfachung werden wir annehmen, daß $\mu_0 = \mu$ ist* (μ_0 bedeutet die Reibungszahl, die die maximal mögliche Reibungskraft der Ruhe bestimmt). *Es wird gefordert, den Bewegungscharakter des Körpers zu klären und dessen Beschleunigung zu bestimmen.*

Angenommen, der Körper bewegt sich auf der geneigten Ebene nach oben. Wie in Bild 27b zerlegen wir alle Kräfte und verwenden das Ergebnis, das für die Beschleunigung im Abschnitt 6 erhalten wurde:

$$a = g\,[F \cos \alpha - F_G \sin \alpha - \mu\,(F_G \cos \alpha + F \sin \alpha)]/F_G. \tag{24}$$

Aus Gl. (24) folgt, daß für die Bewegung des Körpers auf der geneigten Ebene nach oben die Bedingung

$$F \cos \alpha - F_G \sin \alpha - \mu\,(F_G \cos \alpha + F \sin \alpha) \geqq 0$$

notwendig erfüllt sein muß. Wir können sie in der

Form

$$F \geqq F_G \frac{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

bzw. als

$$F \geqq F_G \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha} \tag{25}$$

schreiben. Wir werden annehmen, daß der Neigungswinkel nicht allzu groß ist, so daß $(1 - \mu \tan \alpha) > 0$ oder

$$\tan \alpha < 1/\mu \tag{26}$$

gilt.
Jetzt nehmen wir an, daß sich der Körper auf der geneigten Ebene nach unten bewegt. Gemäß Bild 27b zerlegen wir alle Kräfte, kehren aber den Richtungssinn der Reibungskraft um. Als Ergebnis erhalten wir für die Beschleunigung des Körpers den Ausdruck

$$a = g\,[F_G \sin \alpha - F \cos \alpha - \mu\,(F_G \cos \alpha + F \sin \alpha)]/F_G. \tag{27}$$

Hieraus folgt, daß für die Bewegung des Körpers nach unten notwendig die Bedingung

$$F_G \sin \alpha - F \cos \alpha - \mu\,(F_G \cos \alpha + F \sin \alpha) \geqq 0$$

erfüllt sein muß.
Wir schreiben diese Bedingung in folgende Form

$$F \leqq F_G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

bzw. in

$$F \leqq F_G \frac{\tan \alpha - \mu}{1 + \mu \tan \alpha} \tag{28}$$

um. Weiter nehmen wir an, daß der Neigungswinkel der Ebene nicht zu klein ist, so daß $(\tan \alpha - \mu) > 0$ oder

$$\tan \alpha > \mu \tag{29}$$

gilt. Aus den Bedingungen (25), (26), (28) und (29) lassen sich folgende Schlußfolgerungen ziehen:

1. Für die geneigte Ebene sei die Bedingung

$\mu < \tan\alpha < 1/\mu$

erfüllt. Dann gilt:
a) wenn $F > F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$ ist, bewegt sich der Körper nach oben mit einer Beschleunigung, die durch Gleichung (24) bestimmt wird;
b) wenn $F = F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$ gilt, bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit nach oben, oder er ruht;
c) wenn $F < F_G (\tan\alpha - \mu)/(1 + \mu \tan\alpha)$ ist, bewegt sich der Körper mit einer durch Gleichung (27) bestimmten Beschleunigung nach unten;
d) wenn $F = F_G (\tan\alpha - \mu)/(1 + \mu \tan\alpha)$ ist, bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit nach unten, oder er ruht;
e) wenn $F_G (\tan\alpha - \mu)/(1 + \mu \tan\alpha) < F < F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$ gilt, ruht der Körper.
Man beachte, daß sich mit der Vergrößerung der Kraft F vom Wert $F_G (\tan\alpha - \mu)/(1 + \mu \tan\alpha)$ bis zum Wert $F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$ die Reibungskraft der Ruhe stetig vom Wert $\mu (F_G \cos\alpha + F \sin\alpha)$ bis Null verkleinert und danach durch Richtungsumkehr von Null bis $\mu (F_G \cos\alpha + F \sin\alpha)$ anwächst. Während der gesamten Dauer dieses Prozesses ruht der Körper.
2. Für die geneigte Ebene sei die Bedingung

$0 < \tan\alpha \leqq \mu$

erfüllt. Dann gilt:
a) wenn $F > F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$ ist, so bewegt sich der Körper mit einer Beschleunigung, die aus Gleichung (24) folgt, nach oben;
b) ist $F = F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$, so bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit nach oben, oder er ruht;
c) wenn $F < F_G (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu \tan\alpha)$ gilt, so ruht der Körper. Eine Bewegung auf der geneigten Ebene nach unten ist nicht möglich (selbst dann nicht, wenn die Kraft F verschwindet).
3. Für die geneigte Ebene sei die Bedingung

$\tan\alpha \geqq 1/\mu$

erfüllt. Dann gilt:

a) wenn $F < F_G$ (tan $\alpha - \mu)/(1 + \mu$ tan α) ist, dann bewegt sich der Körper mit einer Beschleunigung nach unten, die sich aus Gleichung (27) ergibt;

b) wenn $F = F_G$ (tan $\alpha - \mu)/(1 + \mu$ tan α) gilt, dann bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit nach unten, oder er ruht;

c) wenn $F > F_G$ (tan $\alpha - \mu)/(1 + \mu$ tan α) gilt, dann ruht der Körper. Es ist überhaupt keine Bewegung auf der geneigten Ebene möglich. Auf den ersten Blick erscheint das unbegreiflich, da man die Kraft F beliebig anwachsen lassen kann. Die Neigung der Ebene ist jedoch so groß, daß mit wachsender Kraft F der Körper auf die Ebene noch stärker angepreßt wird.

Leser: Uns wurde niemals etwas Derartiges bewiesen.

Autor: Gerade deshalb wollte ich Ihre Aufmerksamkeit auf diese Frage lenken. Natürlich werden Sie voraussichtlich in der Prüfung einfachere Fälle behandeln. Die Reibung wird im allgemeinen vernachlässigt. Kommen doch Reibungskräfte vor, so wird der Bewegungscharakter des Körpers bekannt sein (beispielsweise, ob der Körper ruht oder ob er sich bewegt). Selbst dann, wenn man nicht an tiefen Stellen zu schwimmen braucht, ist es trotzdem nützlich zu wissen, wo sich diese befinden.

Leser: Aber was geschieht, wenn in Ihren Untersuchungen $\mu = 0$ wird?

Autor: Bei fehlender Reibung vereinfacht sich alles sehr schnell. In diesem Fall haben wir für beliebige Neigungswinkel der Ebene folgende Ergebnisse:

Bei $F > F_G$ tan α bewegt sich der Körper mit der Beschleunigung

$$a = g\,(F \cos \alpha - F_G \sin \alpha)/F_G \tag{30}$$

nach oben;

bei $F = F_G$ tan α bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit (nach oben oder unten), oder er ruht;

bei $F < F_G$ tan α bewegt sich der Körper nach unten mit der Beschleunigung

$$a = g\,(F_G \sin \alpha - F \cos \alpha)/F_G. \tag{31}$$

Beachten Sie, daß die Ergebnisse (30) und (31) bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. Deshalb kann man bei der Lösung einer Aufgabe eine beliebige Bewegungsrichtung des Körpers annehmen, die Beschleunigung a ermitteln und ihr Vorzeichen berücksichtigen. Ist $a > 0$, erfolgt die Bewegung des Körpers in der ausgewählten Bewegungsrichtung. Bei $a < 0$ erfolgt die Bewegung in der entgegengesetzten Richtung (hierbei wird die Beschleunigung gleich $|a|$).

Wir betrachten noch eine Aufgabe. *Gegeben seien zwei Körper F_{G_1} und F_{G_2}, die durch ein über eine Rolle*

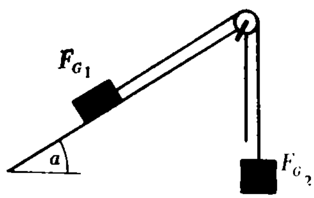


Bild 35

geführtes Seil verbunden sind. Körper F_{G_1} liegt auf einer geneigten Ebene des Neigungswinkels α. Die Reibungszahl mit der Ebene ist μ. Körper F_{G_2} hängt am Seil (Bild 35). *Gesucht ist die Beschleunigung des Systems.* Wir nehmen an, daß sich das System von links nach rechts bewegt. Für die Beschleunigung des gesamten Systems finden wir folgenden Ausdruck:

$$a = g\,\frac{F_{G_1} - F_{G_1}\sin\alpha - \mu F_{G_1}\cos\alpha}{F_{G_1} + F_{G_2}}. \qquad (32)$$

Unter der Annahme, daß sich das System von rechts nach links bewegt, ergibt sich

$$a = g\,\frac{F_{G_1}\sin\alpha - F_{G_2} - \mu F_{G_1}\cos\alpha}{F_{G_1} + F_{G_2}}. \qquad (33)$$

Für die gegebenen Werte von α und μ führen wir eine Untersuchung durch, indem wir das Verhältnis $p = F_{G_2}/F_{G_1}$ variieren. Aus Gleichung (32) folgt, daß für die Bewegung des Systems von links nach rechts die Bedingung

$$p \geqq \sin \alpha + \mu \cos \alpha$$

erfüllt sein muß. Aus Gl. (33) folgt, daß die Bewegung des Systems von rechts nach links die Gültigkeit von

$$p \leqq \sin \alpha - \mu \cos \alpha$$

verlangt. Hierbei ist eine Zusatzbedingung notwendig. Der Neigungswinkel der Ebene darf nicht zu klein sein: $\tan \alpha > \mu$. Falls $\tan \alpha \leqq \mu$ ist, wird sich das System nicht von rechts nach links bewegen, wie groß auch immer das Verhältnis p sein möge. Bei $\tan \alpha > \mu$ ruht der Körper, wenn die Ungleichung

$$(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < p < (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

erfüllt ist. Gilt jedoch $\tan \alpha \leqq \mu$, ruht der Körper für

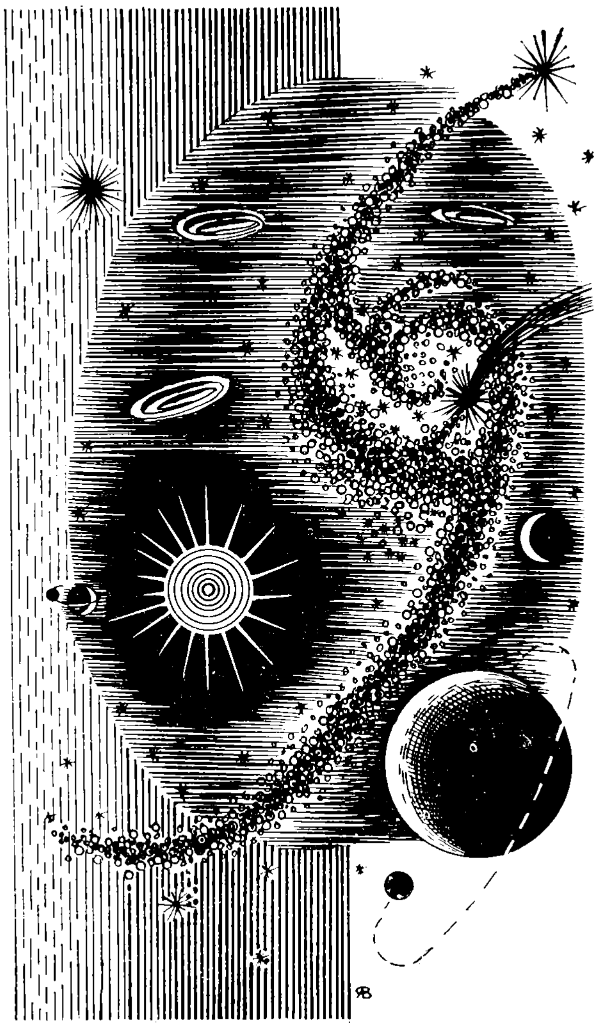
$$p > (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

8. Gibt es eine Zentrifugalkraft?

Autor: Die Erfahrung zeigt, daß Fragen und Aufgaben, die die Bewegung der Körper auf einer Kreisbahn betreffen, vielen Prüflingen große Schwierigkeiten bereiten. Die Antworten auf diesbezügliche Fragen enthalten viele charakteristische Fehler. Um dies zu demonstrieren, fordern wir noch einen Leser zur Teilnahme an unserem Gespräch auf, dem alles das, was wir bisher besprochen haben, nicht bekannt ist. Wir nennen ihn „Leser B“ (der frühere Gesprächspartner heiße jetzt „Leser A“).
Ich schlage vor, daß Leser B die Kräfte nennt, die auf einen sich um die Erde bewegenden Sputnik wirken. Wir vereinbaren, den Widerstand der Atmosphäre, die Anziehung des Mondes, der Sonne und anderer Himmelskörper zu vernachlässigen.

Leser B: Auf den Sputnik wirken zwei Kräfte: die Anziehungskraft der Erde (Schwerkraft) und die Zentrifugalkraft.

DIE BEWEGUNG
AUF EINER
KREISBAHN IST
DER EINFACHSTE
TYP EINER
KRUMMLINIGEN
BEWEGUNG.
ES IST BESONDERS
WICHTIG, DIE
WICHTIGSTEN
MERKMALE
EINER SOLCHEN
BEWEGUNG
ZU VERSTEHEN.
IN DER GESAMTEN
WELT LAUFEN
KRUMMLINIGE
BEWEGUNGEN AB.
WIR WERDEN DIE
GLEICHFÖRMIGE
UND DIE NICHT-
GLEICHFÖRMIGE
BEWEGUNG EINES
MATERIELLEN
PUNKTES AUF
EINER KREISBAHN,
DIE BEWEGUNG
VON SPUTNIKS
BETRACHTEN UND
IM
ZUSAMMENHANG
DAMIT
DIE PRINZIPIEN
DER SCHWERE-
LOSIGKEIT
BESPRECHEN.



Autor: Gegen die Anziehung der Erde habe ich keine Einwände. Aber das Auftauchen der Zentrifugalkraft verstehe ich nicht. Erklären Sie es!

Leser B: Wenn es diese Kraft nicht gäbe, könnte sich der Sputnik nicht in der Umlaufbahn halten.

Autor: Und was würde mit ihm geschehen?

Leser B: Er würde auf die Erde fallen.

Autor (sich an Leser A wendend): Erinnern Sie sich, was ich früher gesagt habe! Sie haben hier ein Beispiel für den Versuch, das Auftreten dieser oder jener Kraft nicht aus der Wechselwirkung der Körper untereinander, sondern aus deren Bewegungsart zu folgern. Wie Ihnen bekannt ist, muß sich der Sputnik in der Umlaufbahn halten; das bedeutet, es ist eine „festhaltende" Kraft einzuführen. Nebenbei gesagt, wenn diese Zentrifugalkraft tatsächlich existieren würde, so könnte sich gerade dann der Sputnik nicht in der Umlaufbahn halten. In diesem Fall würden sich ja die Kräfte, die auf den Sputnik wirken, gegenseitig kompensieren, und der Sputnik müßte gleichförmig auf einer geraden Linie fliegen.

Leser A: Die Zentrifugalkraft wirkt niemals auf einen sich drehenden Körper. Sie wirkt auf die Verankerung. Aber auf sich drehende Körper wirkt die Zentripetalkraft.

Leser B: Sie bekommen heraus, daß auf den Sputnik nur das Gewicht wirkt?

Autor: Also nur die Anziehungskraft, aber nicht das Gewicht.

Leser B: Und er fällt dabei nicht auf die Erde?

Autor: **Die Bewegung eines Körpers unter der Wirkung der Schwerkraft heißt Fall. Das bedeutet, der Sputnik fällt. Jedoch hat sein „Fall" die Form der Bewegung auf einer Kreisbahn um die Erde, und dieser dauert deshalb unbegrenzt lange an.**

Wir haben schon die Tatsache erörtert, daß die Bewegungsrichtung eines Körpers und die Richtung der auf ihn wirkenden Kraft nicht unbedingt übereinstimmen müssen (siehe Abschnitt 4).

Leser B: Als ich von der Erdanziehung und der Zentrifugalkraft sprach, ging ich von der Formel

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{34}$$

aus, wobei links die Anziehungskraft (m Masse des Sputniks, M Masse der Erde, r Radius der Umlaufbahn, gerechnet vom Erdmittelpunkt aus, γ Gravitationskonstante), rechts die Zentrifugalkraft (v Geschwindigkeit des Sputniks) steht. Folgt damit, daß diese Formel nicht richtig ist?

Autor: Nein, diese Formel ist richtig. Nicht richtig ist Ihre Deutung der Formel. Sie betrachten die Beziehung (34) als eine Gleichung des Kräftegleichgewichts. Jedoch ist sie in Wirklichkeit ein Ausdruck des zweiten Newtonschen Gesetzes

$$F = ma, \tag{34a}$$

wobei $F = \gamma mM/r^2$ und $a = v^2/r$ die Zentripetalbeschleunigung ist.

Leser B: Ich sehe ein, daß Ihre Deutung erlaubt, ohne Zentrifugalkraft auszukommen. Aber wenn es keine Zentrifugalkraft ist, so müßte es wenigstens die Zentripetalkraft sein. Sie haben jedoch diese nicht erwähnt.

Autor: Im betrachteten Fall ist die Zentripetalkraft die Kraft, mit der die Erde den Sputnik anzieht. Ich betone, daß hier keine Rede von irgendwelchen zwei Kräften ist. Nein, es ist ein und dieselbe Kraft!

Leser B: Aber weshalb führt man dann im allgemeinen den Begriff „Zentripetalkraft" ein?

Autor: In diesem Punkt stimme ich Ihnen zu. Ich meine, daß der Terminus „Zentripetalkraft" nichts als unnötige Verwirrung stiftet.

Das, was man unter Zentripetalkraft versteht, ist keineswegs eine selbständige Kraft, die zusammen mit anderen Kräften am Körper angreift. Sie ist die Resultierende aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, der sich auf einer Kreisbahn gleichförmig bewegt. Die Größe mv^2/r bedeutet keine Kraft, sie ist das Produkt aus der Masse m des Körpers mit der zentripetalen Beschleunigung v^2/r. Diese Beschleunigung ist zum Zentrum der Kreisbahn gerichtet. Das bedeutet, daß auch die Resultierende aller auf den Körper wirkenden Kräfte zum Zentrum gerichtet ist. Folglich **gibt es die Zentripetalbeschleunigung, und es gibt Kräfte, die dem Körper die Zentripetalbeschleunigung aufprägen.**

Leser B: Ich muß eingestehen, daß mir diese Betrachtungsweise der Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn gefällt. Die genannte Bewegung ist tatsächlich kein statisches Problem, für das das Gleichgewicht der Kräfte charakteristisch ist; sie ist ein dynamisches Problem.

Leser A: Wenn man den Begriff „Zentripetalkraft" ablehnt, so muß man dann sicherlich auf den Terminus „Zentrifugalkraft", selbst in Aufgaben mit Bindungen, verzichten.

Autor: Die Einführung des Ausdrucks „Zentrifugalkraft" ist in noch größerem Maße ungerechtfertigt. Die Zentripetalkraft existiert tatsächlich als Resultierende der Kräfte. Die Zentrifugalkraft jedoch existiert nicht immer.

Leser A: Die letzte Bemerkung habe ich nicht verstanden. Die Zentrifugalkraft wird als Reaktionskraft zur Zentripetalkraft eingeführt. Wenn jene nicht immer existiert, dann ist doch auch das dritte Newtonsche Gesetz nicht immer erfüllt?

Autor: Das dritte Gesetz Newtons gilt nur für reale Kräfte, die durch die Wechselwirkung der Körper

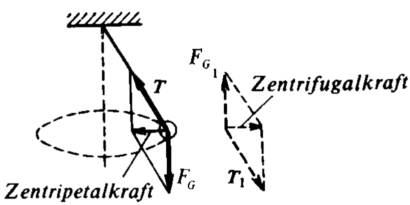


Bild 36

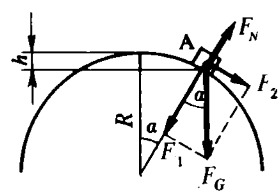


Bild 37

untereinander bestimmt sind, es gilt keineswegs für die Resultierende dieser Kräfte. Ich erläutere diese Behauptung am Beispiel des konischen Pendels (Bild 36).

Auf die Kugel wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft F_G und die Gegenkraft T zur Fadenspannung. Die vektorielle Summe dieser Kräfte, sie heißt Zentripetalkraft, liefert die Zentripetalbeschleunigung der Kugel. Die Kraft F_G ist durch die Wechselwirkung der Kugel mit der Erde bedingt. Die Gegenkraft dazu ist die Kraft F_{G_1}, die auf die Erde wirkt. Die Kraft T resultiert aus der Wechselwirkung der Kugel mit dem Faden. Als Gegenkraft zu dieser tritt die Kraft T_1 auf, sie greift am Faden an. Setzt man formal die Kräfte F_{G_1} und T_1 zusammen, so erhält man eine Kraft, die üblicherweise als Zentrifugalkraft bezeichnet wird (siehe punktierte Linie des Bildes 36). Aber woran greift diese Kraft an? Kann man von ihr als Kraft sprechen, wenn eine ihrer Komponenten doch auf die Erde wirkt, die andere auf einen ganz anderen Körper, nämlich den Faden? Es ist offensichtlich, daß im gegebenen Fall der Begriff „Zentrifugalkraft" keine physikalische Bedeutung hat.

Leser A: Aber in welchen Fällen existiert die Zentrifugalkraft?

Autor: Im Fall des Sputniks, wenn beispielsweise nur zwei Körper miteinander wechselwirken: die Erde und der Sputnik. Die Zentripetalkraft ist die Kraft, mit der die Erde den Sputnik, die Zentrifugalkraft die Kraft, mit der der Sputnik die Erde anzieht.

Leser A: Bisher sprachen Sie von der gleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn. Wie ist es aber, wenn sich der Körper nicht gleichförmig auf der Kreisbahn bewegt? Beispielsweise gleite ein Körper vom obersten Punkt eines vertikal gestellten Reifens herab. Solange er auf dem Reifen gleitet, bewegt er sich auf einer Kreisbahn. Diese Bewegung ist aber keine gleichförmige, weil die Geschwindigkeit des Körpers anwächst. Wie ist das dann?

Autor: Wenn sich der Körper gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt, wird die Resultierende aller auf den Körper wirkenden Kräfte unbedingt zum Zentrum gerichtet sein, sie erteilt dem Körper die Zentripetalbeschleunigung. **Im allgemeineren Fall einer nichtgleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn ist die resultierende Kraft schon nicht mehr zum Zentrum gerichtet. Sie hat eine radial zum Kreismittelpunkt gerichtete und eine tangential an die Bahnkurve (Kreisbahn) gerichtete Komponente.** Die erste Komponente bestimmt die Zentripetalbeschleunigung des Körpers, sie bewirkt eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit. Die zweite Komponente bestimmt die Tangentialbeschleunigung (Tangente an die Kreisbahn) des Körpers, sie ändert den Betrag der Geschwindigkeit. Dabei ist zu beachten, daß eine Änderung des Betrages der Geschwindigkeit gemäß v^2/r auch eine Änderung des Betrages der Zentripetalbeschleunigung hervorruft.

Leser A: Bedeutet das, **für jeden Zeitpunkt wird die Zentripetalbeschleunigung durch die Formel v^2/r bestimmt, wobei v die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist?**

Autor: Richtig. **Während bei der gleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn die Zentripetalbeschleunigung konstant ist, ändert sie sich bei einer nichtgleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn während des Bewegungsablaufs dauernd.**

Leser A: Wonach muß man sich richten, um zu erkennen, wie sich gerade die Geschwindigkeit v bei einer ungleichförmigen Drehung des Körpers ändert?

Autor: Im allgemeinen wird für diesen Zweck der Energieerhaltungssatz angewendet. Betrachten wir ein konkretes Beispiel:

Ein Körper der Masse m möge reibungsfrei vom obersten Punkt eines vertikal gestellten Reifens mit dem Radius R herabgleiten. Mit welcher Kraft muß er auf den Reifen beim Durchgang durch denjenigen Punkt drücken, dessen Höhe um die Größe h kleiner als die Höhe des obersten Reifenpunktes ist? Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers im obersten Reifenpunkt sei Null.

Zuerst muß man die auf den Körper wirkenden Kräfte finden.

Leser A: Am Körper greifen zwei Kräfte an: die Schwerkraft $F_G = mg$ und die Stützkraft F_N. Sie sind in Bild 37 dargestellt.

Autor: Richtig. Was würden Sie weiter machen?

Leser A: Ich würde so vorgehen, wie wir es besprochen haben. Ich suche die Resultierende dieser Kräfte und zerlege sie anschließend in zwei Komponenten: in eine radiale und eine tangentiale Komponente bezüglich der Kreisbahn.

Autor: Alles richtig. Jedoch ist es sicher einfacher, nicht erst die Resultierende zu suchen, sondern gleich die am Körper angreifenden Kräfte in die genannten beiden Richtungen zu zerlegen, zumal man nur eine Kraft, die Schwerkraft, zu zerlegen braucht.

Leser A: Ich führe diese Zerlegung in Bild 37 durch.

Autor: Die Kraft F_2 bedingt die tangentiale Beschleunigung des Körpers, sie interessiert uns nicht. Die Resultierende der Kräfte F_1 und F_N ruft die Zentripetalbeschleunigung des Körpers hervor, d.h., es ist

$$F_1 - F_N = mv^2/R. \tag{35}$$

Die Geschwindigkeit des Körpers in dem uns interessierenden Punkt (Punkt A in Bild 37) finden wir aus dem Energieerhaltungssatz

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 \tag{36}$$

(wir setzen die potentielle Energie im Punkt A gleich Null, siehe Abschnitt 10). Unter Berücksichtigung von $F_1 = mg \cos \alpha = mg\,(R - h)/R$ erhalten wir aus den Gleichungen (35) und (36)

$$mg\,\frac{R-h}{R} - F_N = \frac{2mgh}{R}.$$

Die gesuchte Druckkraft des Körpers auf den Reifen ist in Übereinstimmung mit dem dritten Newtonschen Gesetz gleich der Stützkraft

$$F_N = mg\,(R - 3h)/R. \tag{37}$$

Leser B: Sie nehmen an, daß sich im Punkt A der Körper noch auf der Reifenfläche befindet. Es könnte doch sein, daß sich der Körper vom Reifen noch vor Erreichen des Punktes A löst.

Autor: Es läßt sich ein Punkt finden, in dem sich der Körper vom Reifen löst. Dieser Punkt entspricht dem Grenzfall, in dem sich die Druckkraft des Körpers auf den Reifen auf Null verkleinert hat. Dafür muß in Gl. (37) $F_N = 0$ gesetzt werden. Wir finden dann den vertikalen Abstand zwischen oberstem Reifenpunkt und Ablösepunkt:

$$h_0 = R/3. \tag{38}$$

Erfüllt in der vorliegenden Aufgabe die Größe h die Bedingung $h < h_0$, so gilt Gleichung (37); ist aber $h \geqq h_0$, so gilt $F_N = 0$.

Leser A: Soweit ich verstanden habe, wurden in der Aufgabe zwei physikalische Gesetze, nämlich (35) und (36), benutzt.

Autor: Es ist gut, daß Sie darauf geachtet haben. In der Aufgabe wurden tatsächlich zwei Gesetze benutzt: das zweite Gesetz Newtons [siehe (35)] und der Energieerhaltungssatz [siehe (36)]. Leider wissen die

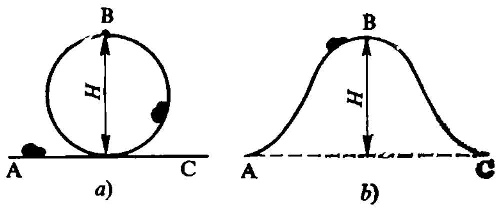


Bild 38

Examinanden nicht immer genau, welche physikalischen Gesetze bei der Lösung dieser oder jener Aufgabe gerade angewendet werden. Das zu verstehen ist aber besonders wichtig. Ich führe folgendes Beispiel an.

Ein Körper erhalte die Anfangsgeschwindigkeit v_0, *damit er vom Punkt A zum Punkt C gelangen kann. Es werden zwei Varianten des Weges von A nach G vorgeschlagen* (Bild 38a, b). *In beiden Fällen muß der Körper dieselbe Höhe H erreichen. Gesucht ist für beide Wege die minimale Anfangsgeschwindigkeit* v_0. *Die Reibung wird vernachlässigt.*

Leser B: Ich denke, daß die minimale Anfangsgeschwindigkeit für beide Fälle dieselbe sein müßte. Reibung gibt es nicht, und der Körper muß die gleiche Höhe überwinden. Diese Geschwindigkeit kann man aus dem Energieerhaltungssatz ausrechnen:

$$mgH = mv_0^2/2, \quad \text{woraus } v_0 = \sqrt{2gH}$$

folgt.

Autor: Ihre Antwort ist nicht richtig. Sie berücksichtigen nämlich nicht, daß im ersten Fall der Körper den oberen Punkt der Bahnkurve durchläuft, während er sich im Zustand einer Drehbewegung befindet. Das bedeutet aber, daß er im Scheitelpunkt (siehe

Bild 38a) eine Geschwindigkeit v_1 haben wird. Sie ergibt sich aus einer dynamischen Gleichung, die analog zur Beziehung (35) folgt. Da wir in der Aufgabe ein Minimum suchen, betrachten wir den Extremfall, daß im Punkt B der Druck des Körpers auf die Unterlage Null wird. Dann wirkt auf den Körper nur die Schwerkraft, die ihm eine Zentripetalbeschleunigung erteilt, d.h., es gilt

$$mg = mv_1^2/R = 2mv_1^2/H. \tag{39}$$

Nimmt man zur dynamischen Gleichung (39) noch die Energiegleichung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH \tag{40}$$

mit hinzu, so erhalten wir als minimale Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{5gH/2}$.

Im zweiten Fall kann der Körper den Scheitelpunkt der Bahn mit einer Geschwindigkeit durchlaufen, die nur infinitesimal wenig von Null abweicht, so daß man sich auf die Energiegleichung beschränken kann. Dann ist das von Ihnen angegebene Resultat richtig.

Leser B: Ich habe Sie verstanden. Wenn im ersten Fall der Körper im Punkt B keine Geschwindigkeit hätte, so würde er einfach herunterfallen.

Autor: Hätte im ersten Fall der Körper die Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{2gH}$, wie von Ihnen vermutet wurde, so könnte er den Punkt B nicht erreichen. Er würde sich schon früher von der Bahn loslösen. Ich schlage vor, die Höhe h des Ablösepunktes unter der Bedingung zu suchen, daß $v_0 = \sqrt{2gH}$ ist.

Leser A: Gestatten Sie mir, die Lösung dieser Aufgabe zu versuchen.

Autor: Bitte.

Leser A: Im Ablösepunkt ist die Stützkraft offensichtlich Null. Deshalb wirkt in diesem Punkt auf den Körper nur die Schwerkraft mg. Wir zerlegen diese in Komponenten längs des Radius ($mg \cos \alpha$) und senkrecht dazu ($mg \sin \alpha$), wie das in Bild 39 dargestellt ist (Punkt A ist der Ablösepunkt).

Die Radialkomponente erteilt dem Körper die Zentripetalbeschleunigung, die durch

$$mg \cos \alpha = mv_2^2/R \tag{41}$$

bestimmt ist,
wobei v_2 die Geschwindigkeit des Körpers im Punkt A ist. Um sie zu finden, verwenden wir die Energiegleichung (h = Höhe über AB)

$$\frac{m}{2} v_2^2 + mgh = \frac{m}{2} v_0^2 . \tag{42}$$

Durch Vereinigung der dynamischen Gleichung (41) mit der energetischen (42) und mit Rücksicht darauf,

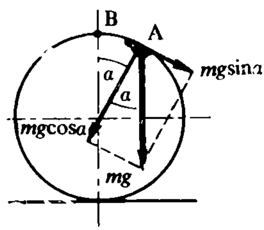


Bild 39

daß $\cos \alpha = (h - R)/R$ ist, erhalten wir

$$h = (2v_0^2 + gH)/6g. \tag{43}$$

Substituiert man $v_0^2 = 2gH$, so ergibt sich das gesuchte Resultat:

$$h = 5H/6.$$

Autor: Ganz richtig. Beachten Sie, daß man aus Gleichung (43) eine solche Anfangsgeschwindigkeit v_0 ermitteln kann, die dem Körper gestatten würde, Loopings zu durchlaufen. Dazu hat man in (43) $h = H$ zu setzen. Dann wird

$$H = (2v_0^2 + gH)/6g,$$

woraus sofort unser bereits bekanntes Resultat

$$v_0 = \sqrt{5gH/2}$$

folgt.

Leser A: Die Bedingung (43) ergab sich für den Fall, daß sich der Körper von der Führung löst. Wie aber kann man sie verwenden, wenn der Körper sich nicht löst und einen Looping beschreibt?

Autor: Lösen von der Führung gerade im Scheitelpunkt der Schleife bedeutet in Wirklichkeit, daß der Körper nicht herunterfällt, sondern diesen Punkt passiert und seine Bewegung auf einem Kreis fortsetzt.

Leser B: Kann man sagen, daß sich der Körper nur für einen Augenblick ablöst?

Autor: Ja, so ist es. Abschließend schlage ich noch folgende Aufgabe vor:
Am Rand einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel α liegt ein Körper. Die Ebene dreht sich gleichförmig um eine vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Abstand des Körpers von der

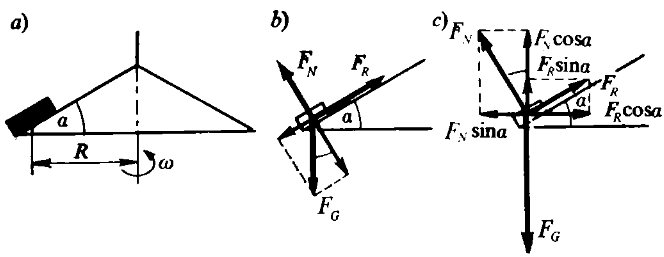


Bild 40

Drehachse der Ebene ist R. Gesucht ist die minimale Reibungszahl μ_0 (μ_0 charakterisiert den maximal möglichen Wert der Reibungskraft der Ruhe), *für die der Körper auf der rotierenden Ebene verbleibt, ohne wegzugleiten* (Bild 40a). Wir beginnen wie stets mit der Frage, welche Kräfte auf den Körper wirken.

Leser A: Auf den Körper wirken drei Kräfte: die Schwerkraft F_G, die Stützkraft F_N und die Reibungskraft F_R.

Autor: Richtig. Gut ist, daß Sie nicht die Zentripetalkraft hinzugefügt haben. Wie würden Sie weiter vorgehen?

Leser A: Jetzt zerlege ich die Kräfte nach den Richtungen längs der Ebene und senkrecht zu ihr, wie das Bild 40b zeigt.

Autor: Ich unterbreche Sie hier. Ihre Zerlegung gefällt mir nicht. Sagen Sie mir, wie die Beschleunigung des Körpers gerichtet ist!

Leser A: Die Beschleunigung ist horizontal gerichtet. Sie ist die Zentripetalbeschleunigung.

Autor: In Ordnung. Deshalb sollten Sie die Kräfte nach der horizontalen (d.h. in Beschleunigungsrichtung) und der vertikalen (d.h. senkrecht zur Beschleunigung) Richtung zerlegen. Denken Sie daran, was wir in Abschnitt 6 besprochen haben.

Leser A: Ich habe verstanden. Die Kräftezerlegung in die horizontale und die vertikale Richtung ist in Bild 40c dargestellt. Die vertikalen Komponenten der Kräfte kompensieren einander, die horizontalen Komponenten prägen dem Körper die Zentripetalbeschleunigung auf:

$$\left.\begin{aligned} F_N \cos\alpha + F_R \sin\alpha &= F_G, \\ F_R \cos\alpha - F_N \sin\alpha &= mv^2/R. \end{aligned}\right\}$$

Mit Rücksicht auf $F_R = \mu_0 F_N$, $v^2/R = R\omega^2$, $m = F_G/g$ schreiben wir diese Beziehungen in folgende Formen um:

$$\left.\begin{aligned} F_N (\cos\alpha + \mu_0 \sin\alpha) &= F_G, \\ F_N (\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha) &= F_G R\omega^2/g. \end{aligned}\right\}$$

Leser B: Hier sind nur zwei Gleichungen, aber drei Unbekannte: μ_0, F_G und F_N.

Autor: So schlimm ist das nicht. Wir müssen doch nicht alle Unbekannten finden, sondern nur eine, die Reibungszahl μ_0. Die Unbekannten F_G und F_N lassen sich leicht durch Division beider Gleichungen eliminieren.

Leser A: Nach der Division beider Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\cos\alpha + \mu_0 \sin\alpha}{\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{g}{R\omega^2},$$

woraus sich das gesuchte Ergebnis

$$\mu_0 = \frac{R\omega^2 \cos\alpha + g \sin\alpha}{g \cos\alpha - R\omega^2 \sin\alpha} \tag{44}$$

ergibt.

Autor: Dieser Formel entnimmt man, daß die Bedingung

$$(g \cos \alpha - R\omega^2 \sin \alpha) > 0$$

erfüllt sein muß. Man kann sie auch in der Form

$$\tan \alpha < \frac{g}{R\omega^2} \tag{45}$$

schreiben. Ist die Bedingung (45) nicht erfüllt, kann keine Reibungskraft den Körper auf der rotierenden geneigten Ebene festhalten. Zum Schluß möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf zwei Teilresultate lenken, die sich aus (44) ergeben. Das erste folgt für $\alpha = 0$: Der Körper liegt auf einer horizontalen, rotierenden Ebene. Wir erhalten aus (44) $\mu_0 = R\omega^2/g$. Der zweite Fall liegt vor, wenn $\omega = 0$ ist: Der Körper befindet sich auf einer unbeweglichen geneigten Ebene und gleitet sofort nach unten. Wir erhalten aus (44) $\mu_0 = \tan \alpha$.

Leser A: Dieses Ergebnis ist mir schon bekannt. Es ist die Reibungszahl für den Fall, daß der Körper auf der geneigten Ebene mit konstanter Geschwindigkeit abwärts gleitet.

Aufgaben

24. Ein kleiner, an einem Faden aufgehängter Körper bewegt sich in einer horizontalen Ebene auf einer Kreisbahn (Bild 41). Bestimmen Sie das Verhältnis der Fadenspannungen und das

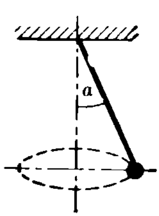


Bild 41

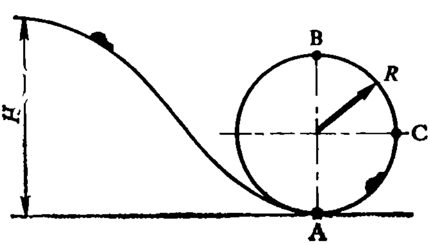


Bild 42

Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten für die beiden Winkel $\alpha_1 = 30°$ und $\alpha_2 = 45°$!

25. Ein Körper der Masse m, der an einem Faden der Länge l hängt, wird um 90° aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und losgelassen. Geben Sie die Abhängigkeit der Fadenspan-

nung und der Beschleunigung des Körpers vom Winkel zwischen Faden und vertikaler Richtung an!

26. Wie verhalten sich die Kräfte zueinander, mit denen ein Panzer die Mitte einer konvexen und einer konkaven Brücke belastet? Der Krümmungsradius ist in beiden Fällen $R = 40$ m, die Geschwindigkeit des Panzers beträgt 45 km/h.

27. Ein Körper gleitet reibungsfrei aus der Höhe $H = 60$ cm herab und beschreibt einen Looping mit dem Radius $R = 20$ cm (Bild 42). Finden Sie die Verhältnisse derjenigen Kräfte, mit denen der Körper die Führung in den Punkten A, B, C belastet.

28. Von welcher minimalen Höhe H (Bild 42) muß ein Körper reibungsfrei herabgleiten, damit er die Schleife mit dem Radius $R = 30$ cm durchläuft?

29. Ein Körper der Masse m bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Profil, das in Bild 43 dargestellt ist (der

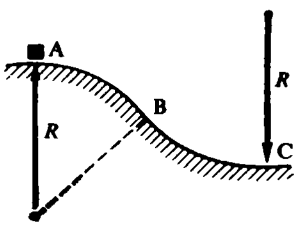


Bild 43

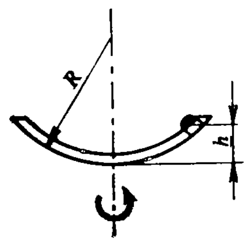


Bild 44

Krümmungsradius beträgt R). Gesucht sind die Kräfte, mit denen der Körper das Profil in den Punkten A, B und C belastet.

30. Ein an einem Faden der Länge l hängender Körper bewegt sich in einer vertikalen Ebene auf einer Kreisbahn. Welche horizontale Geschwindigkeit muß man dem Körper in der höchsten Lage erteilen, damit die Fadenspannung in der niedrigsten Lage $n = 10$mal größer als die Schwerkraft ist?

31. In einer Rinne, die in Form einer Kreisbahn mit dem Radius R gekrümmt ist, kann ein Körper der Masse m reibungsfrei gleiten. In welcher Höhe h wird sich der Körper befinden, wenn sich die Rinne mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse dreht (Bild 44)? Mit welcher Kraft drückt der Körper auf die Rinne?

32. Eine Kugel ist an einem Faden der Länge l aufgehängt. Im vertikalen Abstand $l/2$ vom Aufhängepunkt entfernt befindet sich ein Nagel. Die Kugel wird so ausgelenkt, daß der Faden eine horizontale Lage einnimmt. Dann wird sie losgelassen. Bestimmen Sie die Höhe, die die Kugel erreicht!

33. Eine Gummischnur mit verknüpften Enden liegt frei auf einer Scheibe, die sich in der horizontalen Ebene um eine vertikale Achse mit einer Umdrehungsfrequenz $n = 20$ Umdrehungen

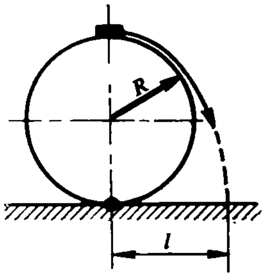


Bild 45

je Sekunde dreht. Unter der Annahme, daß die Schnur Kreisform hat, ist die Spannkraft T der Schnur zu bestimmen. Die Masse der Schnur beträgt $m = 15$ g, ihre Länge 60 cm.

34. Ein Reifen mit dem Radius R ist vertikal auf dem Fußboden aufgestellt. Vom Scheitelpunkt des Reifens gleitet reibungsfrei ein Körper herab (Bild 45). In welchem Abstand l vom Fußpunkt des Reifens fällt der Körper auf den Boden?

9. Wie erklären Sie die Schwerelosigkeit der Körper?

Autor: Wie würden Sie folgende Aussage verstehen: „Am Äquator eines Planeten wiegt ein Körper weniger als am Pol“?

Leser B: Ich verstehe das so: Am Äquator ist die Anziehungskraft der Erde auf den Körper kleiner als am Pol. Das ist aus zwei Gründen erklärlich. Erstens ist die Erde an den Polen etwas abgeplattet; deshalb ist der Abstand vom Erdmittelpunkt zum Pol etwas kleiner als derjenige zum Äquator. Zweitens dreht sich die Erde um ihre eigene Achse; infolgedessen ist wegen des Zentrifugaleffektes die Anziehungskraft am Äquator herabgesetzt.

Leser A: Erläutern Sie bitte Ihre letzte Bemerkung.

Leser B: Von der Anziehungskraft ist die Zentrifugalkraft abzuziehen.

Leser A: Ich stimme Ihnen nicht zu. Erstens greift die Zentrifugalkraft nicht an Körpern an, die sich auf einer Kreisbahn bewegen. Darüber sprachen wir schon in einem früheren Abschnitt. Zweitens, selbst dann, wenn diese Kraft existierte, wäre die Anziehungskraft die gleiche, wenn es keine Rotation der Erde gäbe. Die Anziehungskraft ist $\gamma mM/r^2$, und sie ändert sich nicht, egal, ob auf den Körper noch eine andere Kraft einwirkt oder nicht.

Autor: Wie Sie sehen, erweist sich die Frage nach der „Schwere der Körper" als gar nicht so einfach. Nicht ohne Grund gehört sie zu denjenigen Fragen, die die zu Prüfenden ziemlich oft falsch beantworten. In der Tat, wenn man vereinbart, unter dem Begriff „Gewicht des Körpers" die Kraft zu verstehen, mit der die Erde den Körper anzieht, also die Kraft $\gamma mM/r^2$, so muß die „Verringerung" des Gewichtes auf dem Äquator nur mit der Abplattung der Erdkugel an den Polen zusammenhängen.

Leser B: Aber die Drehung der Erde darf nicht übersehen werden.

Autor: Ich stimme Ihnen zu. Nur möchte ich zunächst betonen, daß in der Praxis gewöhnlich unter „Gewicht des Körpers" nicht die Anziehungskraft durch die Erde verstanden wird, sondern eine solche Kraft, und das ist folgerichtig, die mittels einer Federwaage gemessen wird; das ist diejenige Kraft, mit der der Körper auf die Erde drückt.

Anders gesagt, es wird die Reaktionskraft einer horizontalen Unterlage gemessen (die Kraft, mit der der Körper auf die Unterlage drückt, und die Reaktionskraft der Unterlage sind nach dem dritten Newtonschen Gesetz gleich). Hieraus folgt, daß die Aussage „der Körper wiegt am Äquator weniger als an den Polen" bedeutet, daß am Äquator der Körper mit geringerer Kraft auf die horizontale Unterlage drückt als an den Polen. Wir bezeichnen Anziehungskraft und Reaktionskraft am Pol mit F_{G_1} und F_{N_1}, am Äquator mit F_{G_2} und F_{N_2}. An den Polen ruht der Körper, am Äquator bewegt er sich auf einer Kreisbahn. Wir erhalten daher die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F_{G_1} - F_{N_1} &= 0, \\ F_{G_2} - F_{N_2} &= ma_{zp}, \end{aligned}\right\}$$

wobei a_{zp} die Zentripetalbeschleunigung bedeutet. Wir schreiben diese Beziehungen in die Form

$$\left.\begin{aligned} F_{N_1} &= F_{G_1}, \\ F_{N_2} &= F_{G_2} - ma_{zp} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

um. Man erkennt sofort, daß die Kraft F_{N_2} kleiner als die Kraft F_{N_1} ist, weil erstens F_{G_2} kleiner als F_{G_1} ist (Effekt der Erdabplattung) und zweitens, weil von F_{G_2} noch ma_{zp} subtrahiert wird (Effekt der Erddrehung).

Leser B: Somit bedeutet der Satz „der Körper hat die Hälfte seines Gewichtes verloren" nicht, daß sich die Kraft, mit der er von der Erde (oder einem anderen Planeten) angezogen wird, um die Hälfte verringert hat?

Autor: Nein, das bedeutet er nicht. Die Anziehungskraft kann sich überhaupt nicht ändern. Der Satz bedeutet, daß sich die Kraft, mit der der Körper die Unterlage belastet (in anderen Worten, die Stützkraft), um die Hälfte reduziert hat.

Leser B: Aber dann folgt doch hieraus, daß ich über die „Schwere" eines Körpers ziemlich frei verfügen kann. Was hindert mich daran, unter dem Körper eine tiefe Grube zu graben und ihn mit seiner Unterlage hineinfallen zu lassen? In diesem Fall wirkt keinerlei Kraft auf die Unterlage. Bedeutet das, der Körper hat vollkommen „sein Gewicht verloren"? Bedeutet das, er befindet sich im Zustand der Schwerelosigkeit?

Autor: Sie haben selbst die richtige Schlußfolgerung gezogen: **Der Zustand der Schwerelosigkeit ist tatsächlich derjenige des Fallens.** In diesem Zusammenhang möchte ich einige Bemerkungen machen. Einige Deutungen der Schwerelosigkeit sind über einen Zustand erfolgt, in dem die Anziehungskraft der Erde mit einer anderen Kraft im Gleichgewicht steht. Als Ausgleichskraft hat man im Fall des Sputniks die Zentrifugalkraft vorgeschlagen. Man hat gesagt: Die

Anziehungskraft der Erde auf den Sputnik und die Zentrifugalkraft stehen miteinander im Gleichgewicht. Damit ist die Resultierende der auf den Sputnik wirkenden Kräfte Null, was ja der Schwerelosigkeit entspricht.

Sie haben natürlich verstanden, daß eine solche Deutung schon deshalb falsch ist, weil auf den Sputnik keine Zentrifugalkraft wirkt. Nebenbei gesagt, wenn man unter Schwerelosigkeit den Zustand versteht, in dem sich die Anziehungskraft gegen eine andere Kraft aufhebt, dann wäre es folgerichtiger, einen Körper als gewichtslos anzusehen, wenn er einfach auf einer horizontalen Ebene ruht. Hier ist die Anziehungskraft gerade im Gleichgewicht mit der Stützkraft. Tatsächlich wird jedoch für die Schwerelosigkeit keinerlei Ausgleichskraft zur Anziehungskraft gefordert. Im Gegenteil, **damit ein Körper schwerelos wird, müssen solche Bedingungen geschaffen werden, bei denen keine anderen Kräfte außer der Anziehungskraft an dem Körper angreifen. Mit anderen Worten: es ist notwendig, daß die Stützkraft Null ist. Die Bewegung eines Körpers unter Wirkung der Anziehungskraft ist der Fall des Körpers. Folglich ist die Schwerelosigkeit ein Zustand des Fallens**, wie beispielsweise der Fall eines Förderkorbes in die Kohlengrube oder die gleichförmige Bewegung des Sputniks um die Erde.

Leser A: Im vorangegangenen Abschnitt ist bereits erwähnt worden, daß die Bewegung des Sputniks um die Erde nichts anderes als dessen Fall auf die Erde ist, der jedoch unbegrenzt lange dauert.

Autor: Davon, daß die Bewegung des Sputniks um die Erde ein Fallen ist, kann man sich sehr anschaulich auf folgende Weise überzeugen. Stellen Sie sich vor, Sie stehen auf dem Gipfel eines Berges und werfen horizontal einen Stein. Der Luftwiderstand werde dabei vernachlässigt. Je größer die Anfangsgeschwindigkeit des Steins ist, desto weiter vom Fußpunkt des Berges entfernt fällt er auf den Boden auf. In Bild 46a wird gezeigt, wie sich mit dem Anwachsen der Anfangsgeschwindigkeit schrittweise die Bahnkurven verändern. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit v_1 geht die Bahnkurve des fallenden Steins in eine Kreisbahn über, und der Stein wird zum Sputnik der Erde. Die Geschwindigkeit v_1 heißt erste kosmische Geschwindigkeit. Sie ergibt sich aus der Beziehung (34):

$$v = \sqrt{\gamma M / r}. \tag{47}$$

Nimmt man für den Radius r der Umlaufbahn des Sputniks den Erdradius, so ist in diesem Fall $v_1 \approx \approx 8$ km/s.

Leser A: Was geschieht aber, wenn man beim Werfen des Steins die Anfangsgeschwindigkeit weiter steigert?

Autor: Dann bewegt sich der Stein auf einer sich immer mehr verlängernden Ellipse um die Erde (Bild 46b).

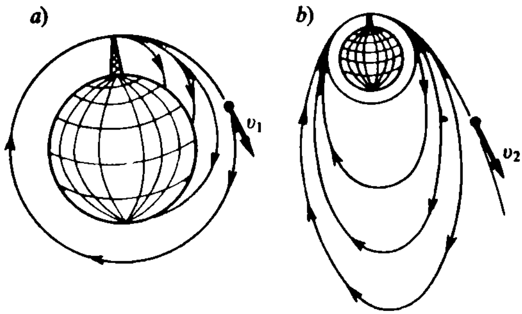


Bild 46

Bei einer bestimmten Geschwindigkeit v_2 geht die Bahnkurve des Steins in eine Parabel über; der Stein ist kein Sputnik der Erde mehr. Die Geschwindigkeit v_2 heißt zweite kosmische Geschwindigkeit. Wie die Rechnungen zeigen, ist diese Geschwindigkeit etwa gleich 11 km/s. Die Geschwindigkeit v_2 ist etwa $\sqrt{2}$mal größer als die Geschwindigkeit v_1.

Leser A: Sie definierten den Zustand der Schwerelosigkeit als Zustand des Fallens. Wenn jedoch die Anfangsgeschwindigkeit des Steins den Wert der zweiten kosmischen Geschwindigkeit erreicht, dann verläßt er die Erde. In diesem Fall kann man nicht davon sprechen, daß der Stein auf die Erde fällt. Wie hat man dann die Schwerelosigkeit des Steins zu interpretieren?

Autor: Sehr einfach. Die Schwerelosigkeit ist jetzt das Fallen auf die Sonne.

Leser A: Das bedeutet, die Schwerelosigkeit eines Raumschiffes, das sich irgendwo im interstellaren Raum befindet, muß mit dem Zustand des Fallens im Gravitationsfeld irgendeines Himmelskörpers verknüpft sein.

Autor: Völlig richtig.

Leser B: Mir scheint, daß die Definition der Schwerelosigkeit als Zustand des Fallens noch irgendeiner Präzisierung bedarf. Ein Fallschirmspringer fällt ja auch, er hat aber nicht das Gefühl der Schwerelosigkeit.

Autor: Da haben Sie recht. Schwerelosigkeit ist nicht ein beliebiges Fallen. Schwerelosigkeit ist der sogenannte freie Fall, d.h. die Bewegung des Körpers unter alleiniger (!) Einwirkung der Gravitationskraft. Ich sagte schon, damit ein Körper schwerelos wird, müssen Bedingungen geschaffen werden, unter denen keine anderen Kräfte als die Gravitationskraft am Körper angreifen. Beim Fallen des Fallschirmspringers wirkt jedoch eine zusätzliche Kraft, nämlich die Kraft des Luftwiderstandes.

Leser A: Jetzt habe ich verstanden, was Schwerelosigkeit ist.

Autor: Zur Überprüfung stelle ich Ihnen eine Frage. Die Passagiere eines Raumschiffes bitten den Kapitän, den Zustand der Schwerelosigkeit herzustellen. Was muß der Kapitän tun?

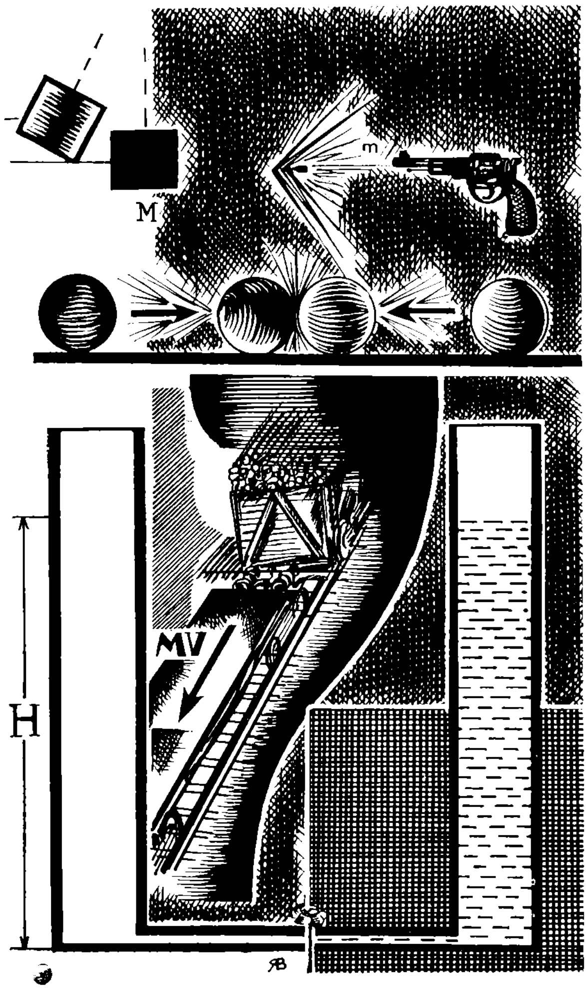
Leser A: Ich denke, er muß den Antrieb ausschalten.

Autor: Richtig.

Leser B: Aber erlauben Sie. Kürzlich habe ich von Jules Verne den Roman „Reise um den Mond“ gelesen. Da gab es im großen und ganzen keinerlei Antrieb. Währenddessen flogen die Reisenden mehr als die Hälfte des Abstandes Erde—Mond, ohne die Schwerelosigkeit zu verspüren. Sie bezweifelten sogar, daß sie überhaupt fliegen.

Autor: Sie sind auf einen Fehler des Schriftstellers gestoßen. Nebenbei gesagt, findet man in diesem Roman manche ähnliche Fehler. Jules Verne konnte sich

DIE BEDEUTUNG
PHYSIKALISCHER
ERHALTUNGSSÄTZE
IST KAUM ZU
ÜBERSCHÄTZEN.
SIE STELLEN
DIE
ALLGEMEINSTEN
REGELN DAR,
DIE
DIE MENSCHHEIT
DURCH LANGE
ERFAHRUNGEN
ERHIELT.
DIE GESCHICKTE
ANWENDUNG
DER
ERHALTUNGSSÄTZE
GESTATTET,
VIELE
PROBLEME
VERHÄLTNIS-
MÄSSIG EINFACH
ZU LÖSEN.
WIR BETRACHTEN
BEISPIELE
ZUR ENERGIE-
UND
IMPULS-
ERHALTUNG.



nicht richtig vorstellen, was Schwerelosigkeit ist. Er vermutete beispielsweise, Schwerelosigkeit sei ein Zustand, in dem die Anziehungskraft der Erde im Gleichgewicht mit der Anziehungskraft des Mondes stünde. Das ist falsch. Er glaubte deshalb, daß die Reisenden die Schwerelosigkeit nur an einem bestimmten Punkt zwischen Erde und Mond empfinden. Abgesehen davon, beschrieb er aber das Bild der Schwerelosigkeit selbst nicht schlecht.

Leser B: Die Reisenden von Jules Verne müßten sich also während des gesamten Fluges im Zustand der Schwerelosigkeit befinden?

Autor: Selbstverständlich.

Aufgaben

35. Ein künstlicher Satellit umläuft auf einer Kreisbahn einen Planeten. Sein Abstand von der Oberfläche ist halb so groß wie der Radius des Planeten. Die Umlaufdauer des Satelliten sei T. Gesucht ist die Massendichte des als kugelförmig angenommenen Planeten.

36. Welche Dauer T müßten Tag und Nacht auf der Erde haben, wenn die Körper am Äquator keine Gewichtskraft hätten? Der Radius der Erde beträgt $R = 6400$ km.

37. Berechnen Sie die Massendichte ϱ eines kugelförmigen Planeten, dessen Rotationsdauer 10 Stunden beträgt. Bekannt ist, daß die Körper auf dem Äquator schwerelos sind.

38. Zwei Sputniks bewegen sich in den Höhen h_1 und h_2 über der Oberfläche auf Kreisbahnen um die Erde. Gesucht sind das Verhältnis v_1/v_2 der Bahngeschwindigkeiten und das Verhältnis T_1/T_2 der Umlaufzeiten. Der Erdradius ist R.

39. Bestimmen Sie die erste kosmische Geschwindigkeit für einen Planeten, dessen Masse und Radius dreimal so groß sind wie die der Erde!

10. Können Sie die Erhaltungssätze für Energie und Impuls anwenden?

Autor: Ich möchte einige einfache Aufgaben vorschlagen.

Erste Aufgabe: *Auf zwei geneigten Ebenen der gleichen Höhen H, aber mit unterschiedlichen Neigungswinkeln α_1 und α_2, gleiten reibungsfrei*

Körper abwärts. Die Anfangsgeschwindigkeit der Körper ist Null. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Körper am Ende des Weges!

Zweite Aufgabe: *Es ist bekannt, daß bei fehlender Anfangsgeschwindigkeit der Zusammenhang zwischen Endgeschwindigkeit, Weg und Beschleunigung durch $v = \sqrt{2as}$ gegeben ist. Wie muß die Formel heißen, wenn ein Körper die Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat?*

Dritte Aufgabe: *Aus der Höhe H wird ein Körper mit der horizontal gerichteten Geschwindigkeit v_0 abgeworfen. Gesucht ist die Geschwindigkeit, mit der der Körper auf den Boden auftrifft.*

Vierte Aufgabe: *Ein Körper wird unter dem Winkel α zur Horizontalen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen. Gesucht ist die maximale Steighöhe des Körpers.*

Leser A: Die erste Aufgabe würde ich folgendermaßen lösen. Wir betrachten eine geneigte Ebene, etwa diejenige mit dem Neigungswinkel α_1. Auf den Körper wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft F_G und die Stützkraft F_{N_1}. Die Kraft F_G zerlegen wir in die Richtungen längs der Ebene ($F_G \sin \alpha_1$) und senkrecht zu dieser ($F_G \cos \alpha_1$). Wir stellen je eine Gleichung für die Kräfte auf, die senkrecht bzw. parallel zur geneigten Ebene wirken:

$$F_G \cos \alpha_1 - F_{N_1} = 0,$$

$$F_G \sin \alpha_1 = F_G a_1 / g.$$

Hier ist a_1 die Beschleunigung des Körpers. Aus der zweiten Gleichung finden wir $a_1 = g \sin \alpha_1$. Der vom Körper zurückgelegte Weg ist $H/\sin \alpha_1$. Unter Anwendung einer weiteren Formel, über die wir in der zweiten Aufgabe sprechen, erhalten wir die Geschwindigkeit des Körpers am Ende des Weges:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2gH \sin \alpha_1 / \sin \alpha_1} = \sqrt{2gH}.$$

Damit hängt dieses Endergebnis nicht vom Neigungswinkel ab. Es ist also auch auf den Körper, der sich auf der anderen geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel α_2 bewegt, anwendbar.

Für die Lösung der zweiten Aufgabe nutze ich die bekannten kinematischen Beziehungen

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_0 t + at^2/2.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert $t = (v - v_0)/a$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$s = \frac{v_0 (v - v_0)}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

oder

$$2sa = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2,$$

also $2as = v^2 - v_0^2$. Damit erhalten wir das Endresultat

$$v = \sqrt{2as + v_0^2}. \qquad (48)$$

Zur Lösung der dritten Aufgabe suche ich erst die horizontale Komponente v_1 und die vertikale Komponente v_2 der Endgeschwindigkeit. Da sich der Körper in horizontaler Richtung gleichförmig bewegt, ist $v_1 = v_0$. In vertikaler Richtung bewegt sich der Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit mit der Beschleunigung g. Daher läßt sich die Beziehung $v_2 = \sqrt{2gH}$ anwenden. Unter Benutzung des Satzes von Pythagoras erhalten wir das gesuchte Ergebnis

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2gH + v_0^2}. \qquad (49)$$

Die vierte Aufgabe wurde schon in Abschnitt 5 diskutiert. Man muß die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers in eine horizontale ($v_0 \cos \alpha$) und eine vertikale ($v_0 \sin \alpha$) Komponente zerlegen. Weiter hat man die vertikale Bewegung des Körpers zu untersuchen und vor allem die Steigzeit t_1 aus der Formel für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit bei der gleichmäßig verzögerten Bewegung ($v = v_0 \sin \alpha - gt$) zu finden. Dabei ist zu beachten, daß für $t = t_1$ die vertikale Geschwindigkeitskomponente des Körpers Null ist. Daher wird $v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0$, woraus $t_1 = (v_0/g) \sin \alpha$ folgt. Die Kenntnis von t_1 liefert die gesuchte Höhe H aus der Formel für die Abhängigkeit des Weges von der Zeit bei einer gleichmäßig verzögerten Bewegung:

$H = v_0 t_1 \sin \alpha - g t_1^2/2 = v_0^2 \sin^2 \alpha/2g.$

Autor: In allen vier Fällen erhielten Sie richtige Ergebnisse. Jedoch gefällt mir die Lösungsmethode dieser Aufgaben nicht besonders. **Alle Aufgaben hätten einfacher gelöst werden können, wenn Sie den Energieerhaltungssatz angewendet hätten.** Bitte überzeugen Sie sich selbst davon.

Erste Aufgabe: Der Energieerhaltungssatz hat die Form $mgH = mv^2/2$ (die potentielle Energie des Körpers im oberen Punkt der geneigten Ebene ist gleich der kinetischen Energie im unteren Punkt). Wir finden hieraus sofort die Endgeschwindigkeit des Körpers:

$v = \sqrt{2gH}.$

Zweite Aufgabe: Hier hat der Energieerhaltungssatz die Form $mv_0^2/2 + mas = mv^2/2$, wobei mas die von der Kraft verrichtete Arbeit ist, um dem Körper die Beschleunigung a zu erteilen. Damit erhalten wir schnell $v_0^2 + 2as = v^2$ oder schließlich

$v = \sqrt{2as + v_0^2}.$

Dritte Aufgabe: Der Energieerhaltungssatz lautet $mgH + mv_0^2/2 = mv^2/2$. Hieraus ergibt sich

$v = \sqrt{2gH + v_0^2}.$

Vierte Aufgabe: Im Abwurfpunkt ist die Energie des Körpers $mv_0^2/2$. Im Scheitelpunkt der Bahn ist seine Energie $mgH + mv_1^2/2$. Da die Geschwindigkeit v_1 im Scheitelpunkt $v_0 \cos \alpha$ beträgt, finden wir durch Anwenden des Energieerhaltungssatzes

$mv_0^2/2 = mgH + mv_0^2 \cos^2 \alpha/2,$

$H = (v_0^2/2g)(1 - \cos^2 \alpha)$ und schließlich

$H = v_0^2 \sin^2 \alpha/2g.$

Leser A: Ich bin überzeugt, daß man diese Aufgaben bedeutend einfacher lösen könnte. Ich habe einfach nicht an den Energieerhaltungssatz gedacht.

Autor: Leider vergessen die Prüflinge diesen ziemlich oft. Infolgedessen beginnen sie, gestellte Aufgaben mit schwerfälligen Methoden zu lösen. Dadurch wächst die Fehlerwahrscheinlichkeit. Mein Rat ist: Wenden Sie mutiger und öfter den Energieerhaltungssatz an. In diesem Zusammenhang möchte ich erklären, wie Sie diesen Satz anwenden können.

Leser A: Mir scheint, hier werden keine besonderen Fähigkeiten verlangt. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie ist an und für sich sehr einfach.

Autor: Die Fähigkeit, ein Gesetz anzuwenden, wird nicht durch dessen Kompliziertheit oder Einfachheit bestimmt. Betrachten wir ein konkretes Beispiel. Wir nehmen an, der Körper bewege sich gleichförmig in einer horizontalen Ebene auf einer Kreisbahn. Reibungskräfte seien ausgeschlossen. Auf den Körper wirke die Zentripetalkraft. Wie groß ist die von dieser Kraft bei einem Umlauf des Körpers verrichtete Arbeit?

Leser A: Die Arbeit ist gleich dem Produkt aus Kraft und Weg. Das heißt, im gegebenen Fall ist sie gleich $(mv^2/R) \cdot 2\pi R = 2\pi mv^2$; dabei ist R der Radius der Kreisbahn, m und v bedeuten Masse und Geschwindigkeit des Körpers.

Autor: Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie kann Arbeit nicht spurlos verschwinden. Was ist aus der von Ihnen berechneten Arbeit geworden?

Leser A: Sie wird zur Drehung des Körpers benötigt.

Autor: Das verstehe ich nicht. Drücken Sie sich genauer aus.

Leser A: Die Arbeit wird benötigt, um den Körper auf der Kreisbahn zu halten.

Autor: Ihre Begründung ist falsch. Um den Körper an die Kreisbahn zu binden, ist keine Arbeit erforderlich.

Leser A: Dann weiß ich nicht, wie man Ihre Frage beantworten soll.

Autor: Die einem Körper zugeführte Energie kann sich, wie die Physiker sagen, auf folgende „Kanäle" verteilen: 1. Zunahme der kinetischen Energie des Körpers, 2. Zunahme der potentiellen Energie des Körpers, 3. Verrichtung von Arbeit des gegebenen Körpers an anderen Körpern, 4. Erzeugung von Wärme infolge

der Reibung. Das ist die allgemeine Situation, die nicht alle Prüflinge gründlich genug verstehen.
Wir betrachten jetzt den konkreten Fall der Arbeit einer Zentripetalkraft. Der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit; folglich ändert sich seine kinetische Energie nicht, der erste Kanal ist geschlossen. Der Körper bewegt sich in einer horizontalen Ebene; folglich ändert sich auch seine potentielle Energie nicht, der zweite Kanal ist geschlossen. Der gegebene Körper verrichtet an anderen Körpern keine Arbeit, der dritte Kanal ist geschlossen. Zum Schluß: Jegliche Reibungskraft ist ausgeschlossen, auch der vierte Kanal erweist sich als geschlossen.

Leser A: Aber dann erhält man, daß die Arbeit der Zentripetalkraft nirgends hingeraten ist.

Autor: Sie erhalten „nirgends". Jetzt müssen Sie Ihre Position bestimmen. Entweder erkennen Sie an, daß das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht gilt, dann entfallen alle Sorgen; oder Sie gehen von der Richtigkeit des Gesetzes der Energieerhaltung aus, dann ... Übrigens, versuchen Sie, in diesem Fall selbständig einen Ausweg aus dieser Lage zu finden.

Leser A: Ich denke, in diesem Fall bleibt nur übrig zu schließen, **die Zentripetalkraft verrichtet keine Arbeit.**

Autor: Ein ganz logischer Schluß. Ich möchte besonders hervorheben, **diese Schlußfolgerung ist ein direktes Ergebnis aus dem Energieerhaltungssatz.**

Leser B: Aber was geschieht denn mit der Formel für die Arbeit?

Autor: Außer der Kraft und dem Weg muß in diese Formel noch der Kosinus des Winkels zwischen den Richtungen der Kraft und der Geschwindigkeit eingehen:

$$W = Fs \cos \alpha.$$

Im vorliegenden Fall ist $\cos \alpha = 0$.

Leser A: Ach ja, den Kosinus habe ich ganz vergessen.

Autor: Ich möchte Ihnen noch ein Beispiel vorlegen. Wir betrachten kommunizierende Gefäße, die mittels eines engen Rohres mit einem Hahn verbunden sind.

Zu Beginn befinde sich die gesamte Flüssigkeit im linken Gefäß, die Flüssigkeitshöhe sei H (Bild 47a). Wenn wir den Hahn öffnen, fließt die Flüssigkeit aus dem linken Gefäß in das rechte. In der Gleichgewichtslage ist in beiden Gefäßen die Flüssigkeitshöhe $H/2$ (Bild 47b). Wir berechnen die potentielle Energie der Flüssigkeit im Anfangs- und im Endzustand. Dazu multiplizieren wir die Gewichtskraft der Flüssigkeit in jedem Gefäß mit der halben Flüssigkeitshöhe. Wenn im Ausgangszustand die potentielle Energie gleich $F_G H/2$ ist, so erweist sie sich

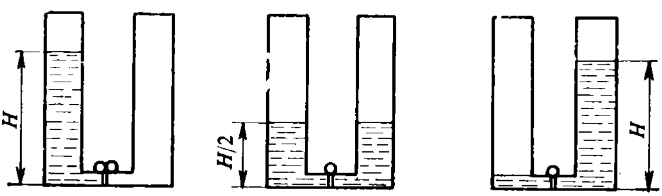


Bild 47

im Endzustand als $(F_G/2)\,(H/4) + (F_G/2)\,(H/4) = F_G H/4$. Die potentielle Energie im Endzustand ist also um die Hälfte kleiner als im Ausgangszustand. Wohin aber, fragt man sich, verschwindet die Hälfte der Energie?

Leser A: Ich versuche, es so zu erklären, wie Sie vorschlugen. Die potentielle Energie $F_G H/4$ könnte in Arbeit der Flüssigkeit an anderen Körpern, in Wärme, die durch Reibung entsteht, und in kinetische Energie der Flüssigkeit selbst übergehen. Erkläre ich das richtig?

Autor: Völlig richtig, fahren Sie fort!

Leser A: Im gegebenen Fall verrichtet die Flüssigkeit keinerlei Arbeit an anderen Körpern, während sie aus dem einen in das andere Gefäß fließt. Im Endzustand hat die Flüssigkeit keine kinetische Energie, da sie sich im Zustand der Ruhe befindet. Damit bleibt nur der Schluß, daß die Hälfte der potentiellen Energie in Wärme umgewandelt wurde, die durch

Reibung freigesetzt worden ist. Dabei habe ich aber keine klare Vorstellung davon, was für eine Art Reibung das ist.

Autor: Sie erklärten richtig und kamen zur richtigen Schlußfolgerung. Jetzt einige Worte über die Art der Reibung. Man kann sich vorstellen, daß die Flüssigkeit in Schichten aufgeteilt ist. Jede Schicht wird durch eine bestimmte Geschwindigkeit charakterisiert. Je näher die Schicht der Röhrenwand liegt, um so geringer ist ihre Geschwindigkeit. Zwischen den Schichten vollzieht sich ein Austausch von Molekülen. Moleküle mit einer großen Geschwindigkeitskomponente in Bewegungsrichtung der Schichten gelangen in Schichten, deren Moleküle eine kleinere Geschwindigkeitskomponente in dieser Richtung haben, und umgekehrt. Das führt dazu, daß eine „schnellere" Schicht auf eine „langsamere" Schicht beschleunigend wirkt, und umgekehrt wirkt eine „langsamere" Schicht auf eine „schnellere" Schicht verzögernd. Dieses Bild erlaubt, in einer Flüssigkeit von der Existenz einer eigentümlichen inneren Reibung zu sprechen, der Reibung zwischen den Schichten. Diese erweist sich als um so größer, je größer der Geschwindigkeitsunterschied zwischen den Schichten im Mittelteil des Gefäßes und denen am Gefäßrand ist. Merken Sie sich, daß die Geschwindigkeit der Schichten in der Nähe der Gefäßwand durch die Art der Wechselwirkung zwischen den Flüssigkeitsmolekülen und den Molekülen der Wand beeinflußt wird. Wenn die Flüssigkeit das Gefäß benetzt, so bewegt sich die unmittelbar an die Wand angrenzende Schicht praktisch nicht.

Leser A: Das bedeutet, im Endzustand müßte die Temperatur der Flüssigkeit etwas höher als im Ausgangszustand sein?

Autor: Ja, so ist es. Aber nun ändern wir ein wenig die Bedingungen der Aufgabe. Wir setzen voraus, daß zwischen Flüssigkeit und Gefäßwand keinerlei Wechselwirkung besteht. Damit haben alle Schichten eine einheitliche Geschwindigkeit, die innere Reibung tritt nicht auf. Wie wird in diesem Fall der Strömungsprozeß der Flüssigkeit von einem Gefäß in das andere vor sich gehen?

Leser A: Jetzt muß eine Verringerung der potentiellen Energie infolge der Entstehung von kinetischer Energie der Flüssigkeit erfolgen. Mit anderen Worten, der in Bild 47b dargestellte Zustand bedeutet jetzt nicht den Endzustand. Die Flüssigkeit fließt aus dem linken Gefäß weiter in das rechte Gefäß, bis sie den in Bild 47c gezeigten Zustand erreicht. Dann ist die potentielle Energie die gleiche wie im Ausgangszustand, den Bild 47a wiedergibt.

Autor: Was wird weiter mit der Flüssigkeit geschehen?

Leser A: Die Flüssigkeit fließt in umgekehrter Richtung zurück, aus dem rechten in das linke Gefäß. Dementsprechend wird man Schwingungen der Flüssigkeitsspiegel beobachten.

Autor: Diese Schwingungen lassen sich beobachten, wenn man beispielsweise Quecksilber in kommunizierende

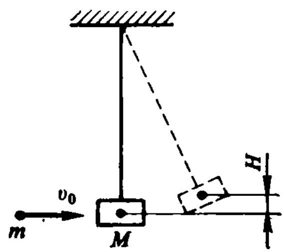


Bild 48

Glasgefäße füllt. Quecksilber benetzt bekanntlich Glas nicht. Selbstverständlich werden diese Schwingungen im Laufe der Zeit abklingen, weil es nicht möglich ist, die Wechselwirkung der Flüssigkeitsmoleküle mit den Molekülen der Gefäßwand vollständig auszuschließen.

Leser A: Ich sehe, der Energieerhaltungssatz kann tatsächlich aktiv angewendet werden.

Autor: Ich schlage vor, noch eine Aufgabe zu behandeln. *Eine Kiste der Masse M hängt an einem dünnen Seil. Auf sie trifft ein Geschoß der Masse m, das horizontal fliegt und in der Kiste steckenbleibt. Auf welche Höhe H wird, nachdem das Geschoß getroffen hat, die Kiste infolge der Auslenkung des Seils aus der Gleichgewichtslage gehoben* (Bild 48)?

Leser A: Bezeichnen wir unmittelbar nach dem Auftreffen der Kugel die Geschwindigkeit der Kiste mit dem Geschoß durch v_1, so besagt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m+M}{2} v_1^2, \tag{50}$$

woraus

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{m+M}} \tag{51}$$

folgt. Hieraus finden wir durch abermalige Anwendung des Energieerhaltungssatzes die gesuchte Aufstiegshöhe H der Kiste:

$$(m + M)\, gH = (m + M)\, v_1^2/2. \tag{52}$$

Die Zusammenfassung der Beziehungen (50) bis (52) bringt

$$(m + M)\, gH = mv_0^2/2$$

oder

$$H = \frac{m}{M+m} \cdot \frac{v_0^2}{2g}. \tag{53}$$

Autor (zum Leser B): Was meinen Sie zu dieser Lösung?

Leser B: Ich bin mit der vorgeschlagenen Lösung der Aufgabe nicht einverstanden. Früher wurde uns gesagt, **in derartigen Fällen muß man den Satz von der Erhaltung des Impulses anwenden.** Daher würde ich statt der Formel (50) die Beziehung

$$mv_0 = (m + M)\, v_1 \tag{54}$$

benutzen (der Impuls des Geschosses vor dem Auftreffen auf die Kiste ist gleich dem Gesamtimpuls von Kiste und Geschoß nach dem Auftreffen). Damit folgt

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m+M}. \tag{55}$$

Beachtet man jetzt den Energieerhaltungssatz (52) und setzt dort das Ergebnis (55) ein, so ergibt sich

$$H = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}. \tag{56}$$

Autor: Es sind zwei verschiedene Meinungen und zwei unterschiedliche Resultate vorhanden. Das Wesen der Widersprüche liegt darin begründet, daß in einem Fall die Erhaltung der kinetischen Energie, im anderen Fall die Erhaltung des Impulses beim Auftreffen des Geschosses auf die Kiste angewendet wurde. Aber wer hat recht? (*Zum Leser A*) Was können Sie zur Begründung Ihres Standpunktes sagen?

Leser A: Mir ist nicht eingefallen, den Impulserhaltungssatz anzuwenden ...

Autor (zum Leser B): Und was sagen Sie?

Leser B: Ich weiß nicht, wie ich meine Position begründen soll. Ich erinnere mich, daß bei der Untersuchung von Stößen der Impulserhaltungssatz immer gilt, während der Energieerhaltungssatz nicht immer erfüllt ist. Insofern führen im gegebenen Fall beide Erhaltungssätze zu verschiedenen Ergebnissen, aber wahrscheinlich ist mein Ergebnis das richtige.

Autor: In der Tat, Ihr Ergebnis ist richtig. Es ist jedoch notwendig, sich in diesen Sachverhalten besser auszukennen. **Ein Zusammenstoß zweier Körper, bei dem sich nach dem Stoß beide Körper aneinanderhaftend (oder einer im Inneren des anderen) weiterbewegen, heißt „vollständig unelastischer Stoß". Für ihn ist das Auftreten einer bleibenden Restdeformierung der zusammengestoßenen Körper charakteristisch. Dabei wird eine bestimmte Wärmemenge entwickelt, so daß die Beziehung** (50), **die nur die kinetische Energie beinhaltet, nicht richtig ist. Daher ist zur Berechnung der gemeinsamen Geschwindigkeit von Kiste und Geschoß nach dem Stoß der Impulserhaltungssatz** (54) **anzuwenden.**

Leser A: Bedeutet das, beim vollständig unelastischen Stoß ist das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht erfüllt? Dieses Gesetz ist doch allgemeingültig!

Autor: Das Gesetz von der Erhaltung der Energie ist zweifellos auch beim vollständig unelastischen Stoß erfüllt. Bei diesem Stoß ist die kinetische Energie, aber eben nur die kinetische Energie, keine Erhaltungsgröße. (Die Änderung der potentiellen Energie ist Null.) Bezeichnet man mit Q die beim Stoß freigesetzte

Wärme, so läßt sich für den oben betrachteten vollständig unelastischen Stoß folgendes System von Erhaltungsrelationen aufschreiben:

$$\left.\begin{aligned} mv_0 &= (m+M)\,v_1, \\ \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{(m+M)\,v_1^2}{2} + Q. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Hier stellt die erste Gleichung den Impulserhaltungssatz, die zweite Gleichung den Energieerhaltungssatz (dieser beinhaltet nicht nur die mechanische Energie, sondern auch die Wärme) dar. Das System (57) enthält zwei Unbekannte: v_1 und Q.

Hat man aus der ersten Gleichung die Größe v_1 ermittelt, so läßt sich aus der zweiten Gleichung die freigesetzte Wärme Q finden:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(m+M)\,m^2v_0^2}{2\,(m+M)^2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right). \tag{58}$$

Man erkennt, je größer die Masse M ist, desto größer ist die in Wärme umgewandelte Energie. Im Grenzfall einer unendlich großen Masse M erhalten wir $Q = mv_0^2/2$, d.h., die gesamte kinetische Energie des Geschosses wird in Wärme umgewandelt. Das ist völlig einleuchtend. Stellen Sie sich vor, daß das Geschoß in einer Wand steckenbleibt.

Leser A: Sind auch **Stöße ohne Freisetzung von Wärme** möglich?

Autor: Ja, solche Stöße sind möglich. **Sie heißen „vollständig elastisch". Beispielsweise kann der Zusammenstoß zweier Stahlkugeln in guter Näherung als vollständig elastischer Stoß angesehen werden. Dabei erfolgt eine rein elastische Deformation der Kugeln, es wird keine Wärme freigesetzt.** Nach dem Stoß nehmen die Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder an.

Leser A: Bedeutet das, **beim vollständig elastischen Stoß ist das Gesetz von der Erhaltung der Energie mit dem Erhaltungssatz der kinetischen Energie identisch?**

Autor: Ja, natürlich.

Leser A: Aber dann verstehe ich nicht, wie man Impuls- und Energieerhaltungssatz miteinander in Einklang bringt. Wir erhalten doch für die Geschwindigkeit nach dem Stoß zwei verschiedene Gleichungen. Könnte es sein, daß beim vollständig elastischen Stoß der Impulserhaltungssatz nicht gilt?

Autor: Beim vollständig elastischen Stoß sind beide Erhaltungssätze erfüllt, sowohl der des Impulses als auch der der Energie. Lassen Sie sich dabei grundsätzlich nicht vom „Einklang" dieser Gesetze stören, weil nach dem elastischen Stoß die Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten weiterfliegen. Während nach dem vollständig unelastischen Stoß die Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit weiter bewegen (sie haften aneinander), bewegt sich nach dem elastischen Stoß jeder Körper mit einer eigenen, bestimmten Geschwindigkeit weiter. Zwei Unbekannten erfordern aber zwei Gleichungen. Wir betrachten ein Beispiel. Ein Körper der Masse m möge mit der Geschwindigkeit v_0 elastisch auf einen ruhenden Körper der Masse M treffen. Dem elastischen Stoß entsprechend setzen wir voraus, daß der stoßende Körper wieder zurückgeworfen wird. Die Geschwindigkeit des Körpers der Masse m nach dem Stoß bezeichnen wir mit v_1, diejenige des Körpers der Masse M mit v_2. Impuls- und Energieerhaltungssatz lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} mv_0 &= Mv_2 - mv_1, \\ \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Beachten Sie das Minuszeichen in der ersten Gleichung. Es ist eine Folge unserer Voraussetzung, daß der stoßende Körper reflektiert wird.

Leser B: Aber Sie können doch nicht immer vorher wissen, in welche Richtung sich der Körper bewegt. Könnte es nicht sein, daß der stoßende Körper seine Bewegungsrichtung nach dem Stoß beibehält, er sich aber mit kleinerer Geschwindigkeit weiterbewegt?

Autor: Das ist möglich. In diesem Fall erhalten wir bei der Lösung des Gleichungssystems (59) eine negative Geschwindigkeit v_1.

Leser B: Ich glaube, daß die Bewegungsrichtung des Körpers der Masse m nach dem Stoß durch das Verhältnis der Massen m und M bestimmt wird.

Autor: Ganz recht. Wenn $m < M$ ist, prallt der Körper der Masse m zurück; bei $m = M$ kommt er nach dem Stoß zur Ruhe, und bei $m > M$ behält er seine ursprüngliche Bewegungsrichtung bei; er bewegt sich jedoch mit geringerer Geschwindigkeit. Im allgemeinen brauchen Sie sich aber keine Sorgen bezüglich der Bewegungsrichtung zu machen. Gewöhnlich wird irgendeine Richtung gewählt, und man beginnt mit der Rechnung. Das Vorzeichen der Lösung zeigt dann den eventuell gemachten Fehler an.

Leser B: Es ist bekannt, daß nach dem Zusammenstoß die Bewegungsrichtungen von Kugeln einen Winkel bilden können. Hier aber sind wir davon ausgegangen, daß die Bewegung längs ein und derselben Geraden erfolgt. Offensichtlich haben wir einen Spezialfall untersucht?

Autor: Sie haben recht. Wir haben den Spezialfall des sogenannten zentralen Stoßes untersucht. Dabei bewegen sich die Kugeln vor und nach dem Stoß auf einer Geraden, die durch die Kugelmittelpunkte verläuft. Der allgemeinere Fall des „nichtzentralen" Stoßes wird noch besprochen. Zunächst aber möchte ich wissen, ob Sie alles das, was ich erklärt habe, verstanden haben.

Leser A: Ich glaube, alles verstanden zu haben. **Bei einem beliebigen Stoß (ob elastisch oder unelastisch) sind zwei Erhaltungssätze erfüllt: das Gesetz der Erhaltung des Impulses und das Gesetz der Erhaltung der Energie. Lediglich die verschiedenen Arten der Stöße führen auf unterschiedliche Gleichungen für die Erhaltungssätze. Bei der Behandlung unelastischer Stöße hat man neben der mechanischen Energie die beim Stoß entstehende Wärme zu beachten.**

Autor: Ihre Bemerkung stimmt.

Leser B: Soweit ich es verstanden habe, stellen der vollständig elastische und der vollständig unelastische Stoß zwei extreme Fälle dar. Eignen sie sich immer zur Beschreibung realer Stöße?

Autor: Sie haben recht. Die von uns betrachteten Fälle der Stöße sind Idealfälle. Bei realen Stößen wird immer ein gewisser Betrag an Wärme erzeugt — ideale elastische Deformationen gibt es nicht —, und die Körper können nach dem Stoß verschiedene

Geschwindigkeiten haben. In vielen Fällen lassen sich jedoch reale Stöße mittels der einfachen Modelle „vollständig elastischer Stoß“ und „vollständig unelastischer Stoß“ recht gut beschreiben. Wir betrachten ein Beispiel für einen nichtzentralen elastischen Stoß. *Ein Körper in Form einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel von 45° liegt auf einer horizontalen Ebene. Auf diesen Körper der Masse M stößt elastisch eine mit der horizontalen Geschwindigkeit* v_0 *fliegende Kugel der Masse m. Als Resultat des Stoßes*

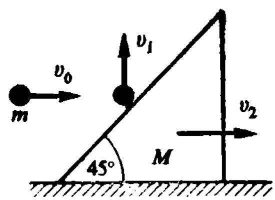


Bild 49

springt die Kugel vertikal nach oben, die geneigte Ebene beginnt reibungsfrei auf der horizontalen Ebene zu gleiten. Geben Sie die Geschwindigkeit an, mit der die Kugel nach dem Stoß ihre vertikale Bewegung beginnt (Bild 49). Wer von Ihnen möchte die Lösung der Aufgabe versuchen?

Leser B: Erlauben Sie es mir. Wir bezeichnen die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel mit v_1, diejenige des Körpers der Masse M mit v_2. Da der Stoß elastisch ist, bin ich berechtigt anzunehmen, daß die kinetische Energie erhalten bleibt. Dann gilt

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + Mv_2^2/2. \tag{60}$$

Ich benötige noch eine Gleichung, für deren Aufstellung offenbar der Impulserhaltungssatz anzuwenden ist. Ich schreibe sie in der Form

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2. \tag{61}$$

Ich bin nicht sicher, ob diese Gleichung richtig ist, da die Geschwindigkeit v_1 zur Geschwindigkeit v_2 orthogonal ist.

Autor: Gleichung (60) stimmt. Aber Gleichung (61) ist, wie Sie selbst bemerkten, nicht richtig. Man muß daran denken, daß **der Impulserhaltungssatz eine Vektorgleichung ist, da der Impuls eine vektorielle Größe ist und die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit hat.** Nur wenn alle Geschwindigkeiten längs einer Geraden gerichtet sind, kann die Vektorgleichung auf eine skalare Gleichung reduziert werden. Gerade so war es beim zentralen Stoß. Im allgemeinen Fall aber ist es notwendig, alle Geschwindigkeiten nach aufeinander senkrecht stehenden Richtungen zu zerlegen und den Impulserhaltungssatz für jede dieser Richtungen getrennt aufzuschreiben (wird die Aufgabe in einer Ebene betrachtet, so läßt sich die Vektorgleichung auf zwei skalare Gleichungen zurückführen, nämlich für die Projektionen des Impulses auf zwei zueinander senkrecht stehende Richtungen).

Im vorliegenden Fall wählen wir die horizontale und die vertikale Richtung. Für die horizontale Richtung lautet der Impulserhaltungssatz

$$mv_0 = Mv_2. \tag{62}$$

Die Gleichungen (60) und (62) liefern die gesuchte Geschwindigkeit:

$$v_1 = v_0 \sqrt{(M - m)/M}.$$

Leser B: Aber wie wird es mit der vertikalen Richtung?

Autor: Auf den ersten Blick scheint es, als ob für die vertikale Richtung der Impulserhaltungssatz nicht gelte. Vor dem Stoß gab es keine vertikale Geschwindigkeit, nach dem Stoß ist der Impuls mv_1 vertikal nach oben gerichtet. Es ist nicht schwer einzusehen, daß im vorliegenden Fall noch ein anderer Körper beteiligt ist, die Erde.

Gäbe es die Erde nicht, so würde sich der Körper der Masse M nach dem Stoß nicht horizontal bewegen. Wir bezeichnen die Masse der Erde mit M_E und mit v_E diejenige Geschwindigkeit, die die Erde als Folge des Stoßes erhält. Die fehlende Reibung erlaubt, die Rechnung ohne Wechselwirkung zwischen Körper M und Erde in horizontaler Richtung durchzuführen. Eine Wechselwirkung besteht nur in der vertikalen Richtung. Anders gesagt, die Geschwindigkeit v_E der Erde ist vertikal nach unten gerichtet. Die Einbeziehung der Erde verändert daher in unserer Aufgabe nicht die Form der Gleichung (62), sie führt aber zu einer Gleichung, die den Impulserhaltungssatz bezüglich der vertikalen Richtung ausdrückt:

$$mv_1 - M_E v_E = 0. \tag{63}$$

Leser B: Wenn die Erde in die Aufgabe einbezogen ist, dann muß sicherlich die Energiebeziehung (60) korrigiert werden.

Autor: Was würden Sie mit Gleichung (60) machen?

Leser B: Ich würde einen Summanden addieren, der die Bewegung der Erde nach dem Stoß beinhaltet:

$$(mv_0^2/2) = (mv_1^2/2) + (M_2 v_2^2/2) + (M_E v_E^2/2). \tag{64}$$

Autor: Ihr Vorhaben ist logisch. Jedoch ist eine Abänderung der Beziehung (60) nicht notwendig. Tatsächlich folgt aus Gleichung (63)

$$v_3 = v_1 \cdot \frac{m}{M_E}$$

für die Geschwindigkeit der Erde. Da praktisch die Masse M_E unbegrenzt groß ist, ist die Geschwindigkeit v_E infinitesimal klein, praktisch also gleich Null. Wir schreiben jetzt den Summanden $M_E v_E^2/2$ in Gl. (64) in die Form $(M_E v_E) \cdot v_E/2$ um. Die Größe $M_E v_E$ in diesem Produkt hat gemäß Gl. (63) einen endlichen Wert. Wenn dieser mit Null (im gegebenen Fall mit v_E) multipliziert wird, so erhält man das Ergebnis Null. Hieraus ist zu schließen, daß in der Aufgabe die Erde ganz eigentümlich auftritt: Sie erhält einen Impuls, nimmt aber gleichzeitig praktisch keine Energie auf. Mit anderen Worten: Bezüglich der Impulserhaltung ist die Erde zu berücksichtigen, hinsichtlich der Energieerhaltung braucht sie nicht berücksichtigt zu werden. Dieser Umstand unterstreicht besonders deutlich die Tatsache, daß Energieerhaltungssatz und Impulserhaltungssatz wesentlich voneinander verschieden sind, sie sind voneinander unabhängige Gesetze. Jetzt möchte ich folgende Aufgabe stellen.

Auf einer horizontalen Ebene liegt eine Kugel. Mit ihr stößt eine andere Kugel der gleichen Masse zusam-

men. Der Stoß sei vollständig elastisch und nichtzentral. Zu zeigen ist, daß die Kugeln nach dem Stoß sich in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen weiterbewegen.

Leser A: Als x-Achse wähle ich die Bewegungsrichtung der zweiten Kugel. Ihre Geschwindigkeit werde mit v_0 bezeichnet. Durch den Zusammenstoß möge die stoßende Kugel unter dem Winkel α zur x-Achse reflektiert werden, ihre Geschwindigkeit sei dann v_1. Die vorher ruhende Kugel bilde nach dem Stoß mit der x-Achse den Winkel β und habe dann die Geschwindigkeit v_2. Zu beweisen ist $\alpha + \beta = 90°$.

Autor: Sie haben die Bedingungen der Aufgabe ziemlich gut neu formuliert.

Leser A: Wir schreiben die Erhaltungssätze auf (links gebe ich die Größen vor dem Stoß, rechts diejenigen nach dem Stoß an).

a) Energieerhaltungssatz:

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/2;$$

b) Impulserhaltungssatz für die Komponente in x-Richtung:
$mv_0 = mv_1 \cos \alpha + mv_2 \cos \beta$;

c) Impulserhaltungssatz für die Komponente in y-Richtung:
$0 = mv_1 \sin \alpha - mv_2 \sin \beta$.

Nach Division durch die Masse erhalte ich folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} v_0^2 &= v_1^2 + v_2^2, \\ v_0 &= v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta, \\ 0 &= v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta. \end{aligned}\right\}$$

Was aber macht man weiter?

Leser B: Ich glaube, ich weiß, wie es weitergeht. Man muß die zweite und die dritte Gleichung quadrieren und anschließend die erhaltenen Gleichungen addieren. Dann bekommen wir

$$v_0^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + v_2^2.$$

Der Vergleich dieses Resultats mit der ersten Gleichung liefert

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$$

oder

$\cos(\alpha + \beta) = 0.$

Hieraus folgt $\alpha + \beta = 90°$, was zu beweisen war.

Autor: Sehr gut. Aber es geht einfacher. Wir zerlegen die Impulsvektoren nicht nach den Achsenrichtungen x und y, nutzen aber eine Vektorgleichung aus:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2.$$

Diese Gleichung ist in Bild 50 in Form eines Parallelogramms dargestellt. Es wird von den Vektoren

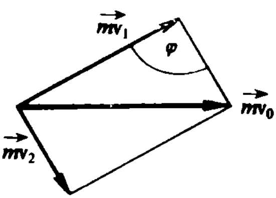


Bild 50

des Impulses aufgespannt. Es ist evident, daß dieses Parallelogramm den Impulserhaltungssatz darstellt. Durch Kürzen der Masse und Anwendung des Kosinussatzes

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi$$

erhalten wir mittels des Energieerhaltungssatzes $(v_0^2 = v_1^2 + v_2^2)$ sofort $\varphi = 90°$.

Leser B: Ja, das ist wirklich einfacher.

Autor: Merken Sie sich, daß dieser Zugang den vektoriellen Charakter des Impulserhaltungssatzes gut unterstreicht.

Aufgaben

40. Ein Körper der Masse $m = 3$ kg fällt mit einer vertikal nach unten gerichteten Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ m/s aus einer bestimmten Höhe herab. Berechnen Sie die in $t = 10$ s zu verrichtende Arbeit zur Überwindung des Luftwiderstandes. Bekannt sei, daß am Ende des Zeitintervalls der Körper die

Geschwindigkeit $v = 50$ m/s hat. Der Luftwiderstand ist als konstant vorausgesetzt.

41. Ein Körper gleitet zuerst auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$ nach unten. Dann gleitet er auf einer horizontalen Ebene weiter und legt die gleiche Entfernung wie auf der geneigten Ebene zurück. Zu bestimmen ist die Reibungszahl, die sowohl auf der geneigten als auch auf der horizontalen Ebene die gleiche und konstant sei.

42. Vom Punkt A aus gleiten auf zwei unterschiedlich geneigten Ebenen (Bild 51) zwei Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit abwärts. Beide Körper haben gleiche Massen. Gesucht ist das Verhältnis v_1/v_2 der Geschwindigkeiten am Ende der geneigten Ebenen für zwei Fälle:
a) ohne Reibung, b) mit Reibung.
Die Reibungszahl sei für beide Ebenen gleich und konstant.

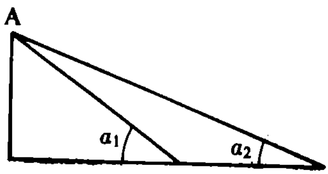


Bild 51

43. Ein Junge, der sich an eine Wand lehnt, wirft einen Stein. Dieser hat die horizontal gerichtete Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 14$ m/s. Welche Geschwindigkeit v relativ zur Erde erhält der Stein, wenn der Junge jetzt mit der gleichen Kraft wie vorher wirft, aber mit Schlittschuhen auf einer ebenen Eisfläche steht? Welche Strecke legt der Junge bis zum Anhalten zurück, wenn die Reibungszahl mit dem Eis $\mu = 0{,}02$ beträgt? Die Masse des Steins ist $m = 1$ kg, die Masse des Jungen ist $M = 36$ kg.

44. Eine Kugel mit der Masse m und dem Volumen V fällt aus der Höhe H ins Wasser, versinkt in die Tiefe h und springt wieder aus dem Wasser heraus (die Dichte der Kugel ist kleiner als die Dichte des Wassers). Finden Sie die als konstant angenommene Widerstandskraft des Wassers und die Höhe h_1, die die Kugel nach dem Herausspringen aus dem Wasser erreicht. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

45. Ein Waggon der Masse $M_1 = 50$ t bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 12$ km/h und stößt auf einen im Weg stehenden Güterwagen der Masse $M_2 = 30$ t. Gesucht ist die gemeinsame Geschwindigkeit v von Waggon und Güterwagen unmittelbar nach der automatischen Zusammenkopplung beider Wagen. Berechnen Sie den Weg l, den die gekoppelten Wagen zurücklegen, wenn die Reibungskraft $n = 5$ % der Gewichtskraft beträgt!

46. Aus einer Kanone der Masse M, die am Fuß einer geneigten Ebene steht, fliegt in horizontaler Richtung ein Geschoß der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 heraus. Bis in welche Höhe H gleitet infolge des Rückstoßes die Kanone die geneigte Ebene hinauf, wenn deren Neigungswinkel α und die Reibungszahl zwischen Kanone und Ebene μ ist?

47. Ein Pfahl der Masse $M_1 = 100$ kg wird mittels einer Ramme in den Boden getrieben. Die Masse der Ramme beträgt $M_2 = 300$ kg. Die Ramme fällt aus einer Höhe $H = 4$ m frei herab und treibt bei jedem Stoß den Pfahl um $h = 10$ cm in den Boden. Gesucht ist die Widerstandskraft des Bodens für zwei Fälle: a) der Stoß der Ramme ist vollständig elastisch, b) der Stoß ist vollständig unelastisch. Die Widerstandskraft F wird als konstant angenommen.

48. Auf einer horizontalen Stange gleitet reibungsfrei eine Kugel der Masse $m_1 = M$ mit der Geschwindigkeit v_0. Sie stößt vollständig unelastisch auf eine andere in Ruhe befindliche Kugel der Masse m_2. Zu bestimmen sind die Geschwindigkeit v der Kugeln nach dem Stoß und die durch den Stoß freigesetzte Wärme Q für folgende Fälle: a) $m_2 = M/2$, b) $m_2 = M$, c) $m_2 = 2M$.

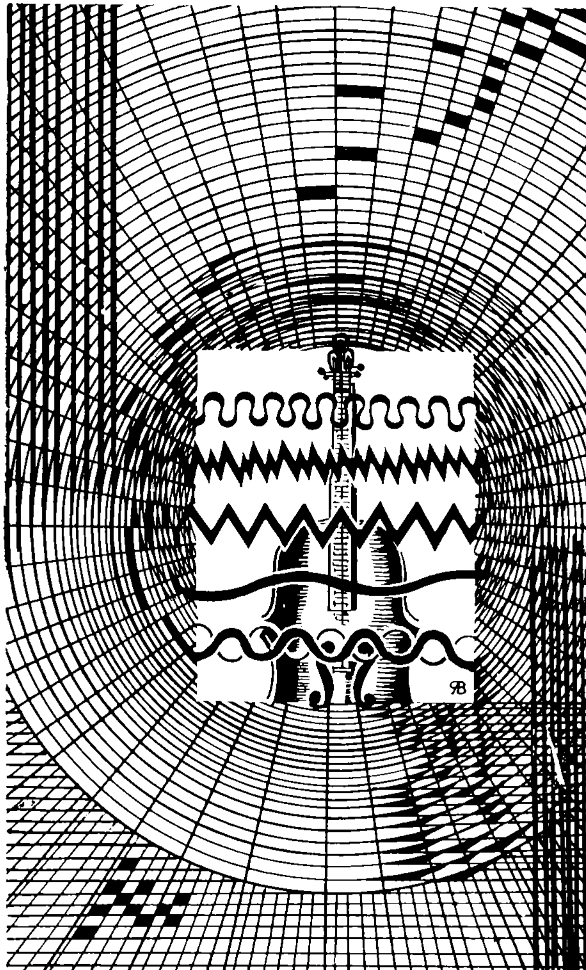
49. Auf einer horizontalen Ebene ruht eine Kugel der Masse M. Mit ihr prallt eine Kugel der Masse m, die vor dem Stoß die Geschwindigkeit v_0 hat, zusammen. Der Stoß ist vollständig elastisch und nichtzentral. Nach dem Stoß hat die Kugel m eine Geschwindigkeit, die zu ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung senkrecht gerichtet ist. Gesucht ist die Geschwindigkeit der Kugeln nach dem Stoß, die Richtung der Geschwindigkeit der Kugel M, die Änderung der Energie und des Impulses der Kugel m infolge des Stoßprozesses.

50. Auf einer horizontalen Ebene ruht im Abstand $l = 3$ m vor einer vertikalen Wand eine Kugel der Masse M. Eine andere Kugel der Masse m rollt, von der Wand kommend, mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf die Kugel M zu. Nach einem vollständig elastischen Stoß der Kugeln erreicht Kugel m die Wand, wird dort elastisch reflektiert und holt Kugel M ein. Zu bestimmen ist, in welchem Abstand von der Wand der zweite Zusammenstoß erfolgt, wenn das Massenverhältnis $M/m = n = 5$ beträgt.

51. Zwei Kugeln M und $2M$ sind an einem Punkt an Fäden aufgehängt. Die Kugel der Masse M wird um den Winkel α ausgelenkt und losgelassen. Sie erhält dabei eine tangentiale Geschwindigkeitskomponente v_0. Diese ist auf die Gleichgewichtslage zu gerichtet. Auf welche Höhen werden die Kugeln nach dem Stoß gehoben, wenn: 1. der Stoß vollständig elastisch, 2. der Stoß vollständig unelastisch (die Kugeln haften nach dem Stoß aneinander) ist?

52. An einem Faden der Länge l hängt eine Kugel der Masse M. Ein horizontal fliegendes Geschoß der Masse m trifft die Kugel und bleibt in ihr stecken. Mit welcher minimalen Geschwin-

DIE WELT UM UNS
IST VOLL VON
SCHWINGUNGEN
UND WELLEN.
DENKEN SIE
HIERAN,
WENN SIE
DASJENIGE
GEBIET
DER PHYSIK
STUDIEREN,
DAS SICH MIT
DIESEN
ERSCHEINUNGEN
BEFASST.
WIR DISKUTIEREN
HARMONISCHE
SCHWINGUNGEN
UND
UNTERSUCHEN
SPEZIELL
DIE
SCHWINGUNGEN
DES
MATHEMATISCHEN
PENDELS.
WIR ANALYSIEREN
SEIN VERHALTEN
IN NICHTINERTIAL-
SYSTEMEN.



8—01271

digkeit v muß das Geschoß fliegen, damit die Kugel am Faden in der vertikalen Ebene eine vollständige Umdrehung ausführen kann?

53. Auf einer horizontalen Ebene liegen zwei Keile mit den Neigungswinkeln 45°. Die Masse jedes Keils ist M. Aus der Höhe H fällt eine Kugel der Masse m ($m \ll M$) frei herab, stößt

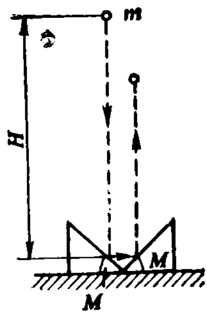


Bild 52

zuerst auf einen, dann auf den anderen Keil und steigt wieder vertikal nach oben. Gesucht ist die Steighöhe h der Kugel. Beide Stöße sollen elastisch erfolgen. Zwischen den Keilen und der Ebene fehlt die Reibung (Bild 52).

54. Auf einer horizontalen Ebene liegt reibungsfrei ein Keil mit dem Neigungswinkel 30°. Seine Masse sei M. Auf ihn fällt aus der Höhe H eine Kugel der Masse m frei herunter, wird elastisch reflektiert und steigt unter einem Winkel von 30° zur Horizontalen wieder aufwärts. Wie hoch steigt die Kugel?

11. Was wissen Sie über harmonische Schwingungen?

Autor: Einige Prüflinge können nicht exakt genug ausdrücken, was harmonische Schwingungen sind. Wir befassen uns zuerst mit der Definition harmonischer Schwingungen.

Leser A: Schwingungen heißen harmonisch, wenn sie nach einem Sinusgesetz erfolgen: Die Auslenkung x eines Körpers aus der Gleichgewichtslage ändert sich mit der Zeit auf folgende Weise:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha). \tag{65}$$

Hier ist A die Amplitude der Schwingungen (maximale Auslenkung des Körpers aus der Gleichgewichtslage), ω die Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi/T$, wobei T die Schwingungsperiode ist), α bedeutet die Anfangsphase (sie charakterisiert die Auslenkung des Körpers aus der Gleichgewichtslage zur Zeit $t = 0$). Eine anschauliche Vorstellung von harmonischen Schwingungen gewinnt man wie folgt: Ein Punkt

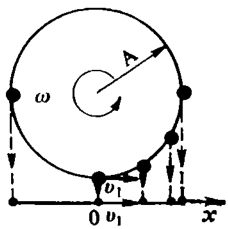


Bild 53

durchläuft gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω eine Kreisbahn vom Radius A. Die durch den Ausdruck (65) beschriebene Bewegung, die harmonische Schwingung, wird von der Projektion dieses Punktes auf eine bestimmte Richtung x erzeugt (Bild 53).

Leser B: Ich kenne eine andere Definition der harmonischen Schwingungen unter der Einwirkung rücktreibender Kräfte, d.h. solcher Kräfte, die zur Gleichgewichtslage hin gerichtet sind und sich in dem Maße vergrößern, wie der Körper sich aus der Gleichgewichtslage entfernt. Dabei **heißen solche Schwingungen harmonisch, für die die rücktreibende Kraft F der Auslenkung x des Körpers aus der Gleichgewichtslage direkt proportional ist:**

$$F = k \cdot x. \tag{66}$$

Eine derartige Kraft heißt „elastisch“.

Autor: Ich bin mit beiden Definitionsvorschlägen völlig zufrieden. **Im ersten Fall werden harmonische Schwingungen nach dem Kennzeichen ihres Ablaufs definiert; im zweiten Fall sind sie durch die sie bedingende Ursache definiert. Mit anderen Worten, während die**

erste Definition die räumlich-zeitliche (kinematische) Beschreibung der Schwingungen verwendet, benutzt die zweite Definition die ursächliche (dynamische) Beschreibung.

Leser B: Aber welche der beiden Definitionen ist vorzuziehen? Oder könnte es sein, daß beide äquivalent sind?

Autor: Nein, sie sind nicht äquivalent. Die erste Definition, die kinematische, wird mehr bevorzugt, da sie umfassender ist.

Leser B: Aber, wie auch immer die rücktreibende Kraft gestaltet ist, sie bestimmt doch offensichtlich die Art der Schwingungen. Ich verstehe nicht, weshalb sich meine Definition als weniger allgemein erweist.

Autor: Sie haben nicht ganz recht. Der Charakter der rücktreibenden Kräfte bestimmt nicht restlos den Charakter der Schwingungen.

Leser A: Offenbar hat man hier daran zu denken, daß der Bewegungscharakter eines Körpers zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht allein durch die Kräfte, die in diesem Augenblick auf den Körper wirken, bestimmt wird. Er wird auch durch die Anfangsbedingungen, d.h. durch Ort und Geschwindigkeit des Körpers zur Anfangszeit, bestimmt. Wir haben das schon früher, im Abschnitt 4, besprochen.

Autor: Richtig. Bezugnehmend auf den vorliegenden Fall bedeutet diese Behauptung, daß **der Charakter der Schwingungen nicht allein durch die rücktreibende Kraft, sondern auch durch die Bedingungen, bei denen die Schwingungen einsetzten, festgelegt ist.** Es ist klar, daß Schwingungen auf verschiedene Weise erzeugt werden können. Beispielsweise kann man einen Körper aus der Gleichgewichtslage auslenken und ihn dann in einem bestimmten Abstand von ihr vorsichtig loslassen. Er beginnt zu schwingen. Läßt man die Schwingungen zur Zeit $t = 0$ anfangen, so erhalten wir aus (65), daß $\alpha = \pi/2$ ist. Die Entfernung, um die der Körper ausgelenkt wurde, ist dann gleich der Amplitude der Schwingung. Erteilt man dem Körper verschiedene Abstände von der Gleichgewichtslage, so werden ihm dabei verschiedene Amplituden aufgeprägt. Eine andere Erzeugungsmethode von Schwingungen besteht darin, einem in der Gleichgewichtslage befindlichen Körper eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen (ihn anzustoßen); der Körper beginnt zu schwingen. Nehmen wir als Anfangszeit den Zeitpunkt $t = 0$, ergibt sich aus (65), daß $\alpha = 0$ ist. Hier hängt die Amplitude der Schwingungen von der dem Körper erteilten Anfangsgeschwindigkeit ab. Man kann offensichtlich unzählige viele Methoden der Schwingungserzeugung angeben, die alle zwischen den beiden hier angeführten Grenzfällen liegen: Ein Körper wird aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, und ihm wird zugleich ein Stoß erteilt. Jede der Methoden bedingt bestimmte Werte für die Amplitude A und die Anfangsphase α der Schwingung.

Leser B: Sie bekommen heraus, daß die Größen A und α nicht von der Art der rücktreibenden Kraft abhängen.

Autor: So ist es. Über diese Größen verfügen Sie selbst dadurch, daß Sie mit Hilfe der einen oder der anderen Methode Schwingungen erzeugen. Lediglich die Kreisfrequenz ω wird von der rücktreibenden Kraft bestimmt. Mit anderen Worten: Die rücktreibende Kraft legt die Schwingungsperiode des Körpers fest. Man kann sagen, **die Schwingungsperiode ist eine nur dem schwingenden Körper zukommende charakteristische Größe, während Amplitude A und Anfangsphase α von den äußeren, die Schwingung erzeugenden Bedingungen abhängen.**

Kehren wir zu den Definitionen der harmonischen Schwingung zurück. Wir erkennen, **die dynamische Definition enthält keinerlei Aussagen über Amplitude und Anfangsphase der Schwingung; die kinematische Definition trifft über diese Größen Aussagen.**

Leser B: Wenn wir aber nach eigenem Ermessen über die Amplitude verfügen können, ist denkbar, daß sie als Charakteristik eines schwingenden Körpers nicht so wichtig ist.

Autor: Sie irren sich. Die Amplitude ist eine sehr wichtige charakteristische Größe des schwingenden Körpers. Um das zu zeigen, betrachten wir ein Beispiel. Eine Kugel der Masse m ist zwischen zwei elastischen Federn befestigt. Sie vollführt in horizontaler Richtung harmonische Schwingungen der Amplitude A

(Bild 54). Die rücktreibende Kraft wird durch die elastische Konstante k, die die elastischen Eigenschaften der Feder charakterisiert, bestimmt. Wir suchen die Energie der schwingenden Kugel.

Leser A: Zur Bestimmung der Energie der schwingenden Kugel betrachten wir die maximale Auslenkung ($x = A$). Hier ist die Geschwindigkeit der Kugel Null, deshalb ist die Gesamtenergie gleich der potentiellen Energie, die man analog zur Arbeit gegen eine rücktreibende Kraft F finden kann:

$$W = F \cdot A. \tag{67}$$

Hier ist A die maximale Auslenkung der Kugel aus der Gleichgewichtslage. Unter Berücksichtigung von $F = k \cdot A$ entsprechend Gl. (66) wird $W = k \cdot A^2$.

Autor: Sie haben es richtig erklärt, aber dabei einen Fehler gemacht. Formel (67) ist nur unter der Bedingung anwendbar, daß die Kraft konstant ist. Hier

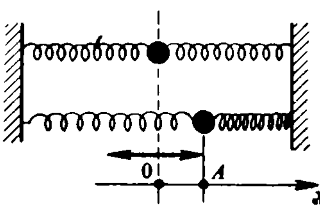


Bild 54

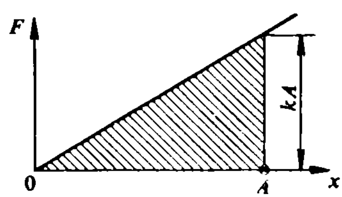


Bild 55

jedoch ändert sich die Kraft mit der Auslenkung. Dies ist in Bild 55 grafisch dargestellt. Die von der Kraft verrichtete Arbeit im Abstand $x = A$ ist gleich dem Flächeninhalt, der unter der linearen Kraftfunktion schraffiert ist. Diese Fläche ist $kA^2/2$. Damit wird

$$W = kA^2/2. \tag{68}$$

Achten Sie darauf, daß die Gesamtenergie des Körpers proportional dem Quadrat der Amplitude der Schwingung ist. Hieraus ist zu erkennen, daß die Amplitude tatsächlich eine wichtige charakteristische Größe des schwingenden Körpers ist. Wenn $0 < x < A$ gilt, dann setzt sich die Gesamtenergie W aus zwei Anteilen zusammen, der kinetischen und der potentiellen Energie:

$$W = kA^2/2 = (mv^2/2) + (kx^2/2). \tag{69}$$

Diese Beziehung erlaubt, die Geschwindigkeit v der Kugel in einem beliebigen Abstand x von der Gleichgewichtslage zu berechnen. Weiter stellen wir die Frage, wie groß die Schwingungsperiode der in Bild 54 skizzierten Kugel ist.

Leser B: Zur Aufstellung der Formel für die Schwingungsperiode ist die Differentialrechnung anzuwenden.

Autor: Strenggenommen haben Sie recht. Wenn man aber gleichzeitig die kinematische und die dynamische Definition der harmonischen Schwingung benutzt, so kann man ohne Differentialrechnung auskommen. Tatsächlich läßt sich, ausgehend von Bild 53, das die kinematische Definition grafisch darstellt, schlußfolgern, daß die Geschwindigkeit des Körpers im Augenblick des Durchgangs durch seine Gleichgewichtslage aus

$$v_1 = \omega A = 2\pi A/T \tag{70}$$

folgt. Durch Anwendung des Ergebnisses (68), das sich aus der dynamischen Definition ergibt, errechnet man über die Energiebeziehung

$$mv_1^2/2 = kA^2/2 \tag{71}$$

(im Augenblick des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage ist die Gesamtenergie der Kugel gleich ihrer kinetischen Energie) die Geschwindigkeit v_1. Die Vereinigung der Gleichungen (70) und (71) liefert $4\pi^2 A^2 m/T^2 = kA^2$, woraus

$$\boldsymbol{T = 2\pi \sqrt{m/k}} \tag{72}$$

folgt. Wie bereits erwähnt, gilt: **Die Schwingungsperiode wird durch die Schwingungseigenschaften des Systems selbst vollständig bestimmt. Sie hängt nicht von der Methode der Schwingungserzeugung ab.**

Leser A: Gewöhnlich betrachten wir nicht die Schwingungen einer an einer Feder hängenden Kugel, sondern die eines Pendels. Lassen sich die erhaltenen Ergebnisse für den Fall des Pendels verallgemeinern?

Autor: Um zu dieser Verallgemeinerung zu kommen, muß man erst überlegen, was im Fall des Pendels die Rolle des Elastizitätskoeffizienten k spielt. Das Pendel schwingt ja nicht unter dem Einfluß einer elastischen Kraft, sondern unter der Wirkung der Schwerkraft. Wir betrachten eine Kugel, die an einem Faden der Länge l hängt. Sie wird um den Winkel α aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt (Bild 56). Auf die Kugel wirken zwei Kräfte: die

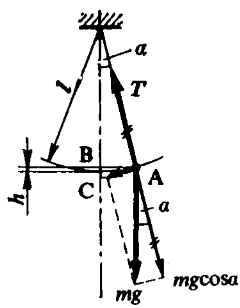


Bild 56

Schwerkraft mg und die Gegenkraft T zur Fadenspannung. Ihre Resultierende ist eine rücktreibende Kraft. Wie aus dem Bild zu ersehen ist, ist sie gleich $mg \sin \alpha$.

Leser A: Aber was ist beim Pendel als Auslenkung aus der Gleichgewichtslage anzunehmen, die Strecke $\overline{AB}$ oder die Strecke $\overline{AC}$ (siehe Bild 56)?

Autor: Wir betrachten eine harmonische Schwingung des Pendels. Dafür ist notwendig, daß der maximale Auslenkwinkel des Fadens sehr klein ist:

$$\alpha \ll 1 \tag{73}$$

(man beachte, daß hier der Winkel α im Bogenmaß angegeben ist; wird das Gradmaß benutzt, so darf der Winkel α in keinem Fall $10°$ überschreiten). Wegen der Bedingung (73) darf der Längenunterschied der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ vernachlässigt werden. Dann ist:

$$\overline{AB} = l \sin \alpha \approx \overline{AC} \approx l \tan \alpha.$$

Damit wird Ihre Frage bedeutungslos. Wir setzen für unsere Rechnung $x = \overline{AB} = l \sin \alpha$. Die Gleichung (66) nimmt dann für das Pendel die Form

$$mg \sin \alpha = kl \sin \alpha \tag{66a}$$

an, aus der sich

$$k = mg/l \tag{74}$$

ergibt. Setzt man diese Relation in Gl. (72) ein, dann erhält man die Formel für die Periodendauer der harmonischen Pendelschwingungen:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}. \tag{75}$$

Ferner untersuchen wir die Energie des Pendels. Seine Gesamtenergie ist offensichtlich mgh, wobei h diejenige Höhe ist, die das Pendel in der Grenzlage erreicht (siehe Bild 56). Damit wird:

$$W = mgh = mgl\,(1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \tag{76}$$

Diese Relation gilt offenbar für beliebige Winkel α. Um sie auf die Form (68) zu bringen, hat man die Harmonizitätsbedingung der Schwingung, also die Ungleichung (73), zu erfüllen. In diesem Fall kann $\sin \alpha$ durch den im Bogenmaß angegebenen Winkel ersetzt werden. Man erhält dann aus (76)

$$W \approx 2\,mgl\,(\alpha/2)^2 = mgl\,\alpha^2/2.$$

Unter Berücksichtigung des Ausdrucks (74) findet man

$$W \approx k\,(l\alpha)^2/2 \approx k\,(\overline{AB})^2/2.$$

Das entspricht dem Ergebnis (68).

Leser B: Soweit ich mich erinnere, untersuchten wir früher die Pendelschwingungen, ohne das Kleinsein des Auslenkwinkels generell zu fordern.

Autor: Diese Forderung ist nicht nötig, wenn man die Energie oder die Gegenkraft zur Fadenspannung betrachtet. Faktisch untersucht man dann kein Pendel, sondern die Bewegung einer Kugel auf einer Kreisbahn in einer vertikalen Ebene. Tritt jedoch in der Aufgabe die Formel für die Schwingungsperiode

(75) auf, so müssen die Schwingungen auf jeden Fall harmonisch, die Ablenkwinkel des Fadens also klein sein. So ist zum Beispiel in Aufgabe 56 die Kleinheit des Pendelauslenkwinkels unwesentlich, während in Aufgabe 57 diese Bedingung äußerst wichtig ist.

Leser B: In einem Buch traf ich im Abschnitt über Schwingungen auf den Begriff „Lissajous-Figur". Was ist das?

Autor: Lissajous-Figur, das ist eine Bahnkurve des Körpers, die entsteht, wenn dieser gleichzeitig zwei aufeinander senkrecht stehende Schwingungen ausführt. Nehmen wir an, daß die Schwingungen längs der x- und y-Achsen erfolgen. Dabei seien einfachheitshalber die Frequenzen und die Amplituden als gleich vorausgesetzt. Ferner sei zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage bezüglich der x-Achse gleich der Schwingungsamplitude, die Auslenkung bezüglich der y-Achse sei Null. Dann ist

$$x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos \omega t,$$

$$y = A \sin \omega t.$$

Quadrieren jeder Gleichung und anschließende Addition liefert $x^2 + y^2 = A^2$.

Das ist eine Kreisbahn mit dem Radius A. Der Körper beschreibt folglich im gegebenen Fall in der xy-Ebene eine Lissajous-Figur in Form eines Kreises mit dem Radius A.

Jetzt aber versuchen Sie selbst, die Lissajous-Figur für den Fall zu finden, daß zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung bezüglich beider Achsen gleich Null ist.

Leser B: Ich verstehe. Hier können wir

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \sin \omega t$$

schreiben. Es wird ersichtlich, daß $y = x$ gilt. Das bedeutet, die Lissajous-Figur ist eine Gerade.

Autor: Richtig. Wenn die Differenz der Anfangsphasen der Schwingungen in x- und y-Richtung Werte im Intervall zwischen 0 und $\pi/2$ annimmt, dann erhalten wir eine Lissajous-Figur in Form einer Ellipse. Sind die Frequenzen der x- und y-Schwingung voneinander verschieden, dann wird die Lissajous-Figur komplizierter; sie besteht dann aus einigen Schlingen. Jeder Leser möge versuchen, für eine Lissajous-Figur, etwa für

$$x = A \sin \omega t, \qquad y = A \cos \omega t,$$

selbständig eine Gleichung zu finden und diese Figur zu zeichnen.

Leser B: Ich muß noch eine Frage stellen. Sie sagten, daß die Schwingungsfrequenz eines Pendels eine ihm eigene charakteristische Größe ist und wir nicht über sie verfügen können. Eine Schaukel kann ich doch aber mit einer mir beliebigen Frequenz zum Schwingen bringen?

Autor: Das können Sie. Bisher ließen wir jedesmal, wenn wir das Pendel anstießen, dieses selbständig schwingen. Das sind Eigenschwingungen. Ihre Frequenz ω_0 können wir wirklich nicht beeinflussen, sie wird durch die Pendellänge bestimmt. Wenn Sie aber das Pendel mit der Frequenz ω aufschaukeln (d.h., während der gesamten Zeit wirkt auf das Pendel eine periodische Kraft, die die Frequenz ω bestimmt), so liegt der Fall einer erzwungenen Schwingung mit der Frequenz ω vor. Diese Frequenz „dirigieren" wirklich Sie.
Bemerkenswert ist, wenn die durch eine Kraft erzwungene Frequenz ω mit der Eigenfrequenz der Schwingung übereinstimmt ($\omega = \omega_0$), dann ist eine besonders große Schwingungsamplitude zu beobachten. Diese Erscheinung heißt Resonanzfall.

Aufgaben

55. Eine Kugel führt, wie in Bild 54 angegeben ist, harmonische Schwingungen aus. Geben Sie das Verhältnis v_1/v_2 der Geschwindigkeiten der Kugel für diejenigen Punkte an, die von der Gleichgewichtslage einen Abstand haben, der der Hälfte bzw. dem dritten Teil der Größe der Amplitude entspricht.

56. Eine an einem Faden aufgehängte Kugel wird aus der Gleichgewichtslage um den Winkel $\alpha = 60°$ ausgelenkt und dann losgelassen. Es ist für die Gleichgewichtslage bzw. für die maximale Auslenkung der Kugel das Verhältnis T_1/T_2 der Fadenspannkräfte zu bestimmen.

57. Ein Pendel als Kugel an einem dünnen Faden wird um den Winkel $\alpha = 5°$ ausgelenkt. Gesucht ist die Geschwindigkeit v der Kugel im Augenblick des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage, wenn die Kreisfrequenz der Pendelschwingungen $\omega = 2\ s^{-1}$ beträgt.

58. Auf einem glatten horizontalen Tisch liegt eine Kugel der Masse M. Sie ist an einer Feder mit dem Elastizitätskoeffizienten k befestigt (Bild 57). In die Kugel gelangt ein Ge-

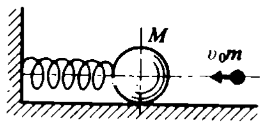


Bild 57

schoß der Masse m, das im Augenblick des Stoßes die Geschwindigkeit v_0 hat. Diese Geschwindigkeit hat die Richtung der Federachse. Gesucht sind Amplitude A und Periodendauer T der Schwingungen der Kugel. Der Stoß wird als vollständig unelastisch angesehen. Die Masse der Feder ist zu vernachlässigen.

12. Was geschieht mit einem Pendel im Zustand der Schwerelosigkeit?

Autor: In die Wand eines Aufzugs wird ein Nagel eingeschlagen. An ihm hängen wir an einem Faden der Länge l eine Kugel auf und veranlassen sie, harmonische Schwingungen auszuführen. Der Aufzug bewege sich mit der Beschleunigung a nach oben. Wie groß ist die Schwingungsperiode des Pendels?

Leser A: Bewegen wir uns in dem beschleunigten Aufzug nach oben, so empfinden wir eine bestimmte Vergrößerung unseres Gewichtes. Offenbar muß auch das Pendel die Gewichtszunahme „empfinden". Ich denke, daß sich in diesem Fall die Schwingungsperiode durch die Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}} \qquad (77)$$

ausdrücken läßt. Ich kann jedoch diese Formel nicht streng begründen.

Autor: Ihre Formel ist richtig. Zu ihrer Begründung gehen wir wahrhaftig von einem uns ungewohnten Gesichtspunkt aus. Bisher untersuchten wir die Bewegung von Körpern nur in einem Inertialsystem und verzichteten auf nichtinertiale Bezugssysteme. Ich warnte Sie sogar vor der Benutzung derartiger Systeme (siehe Abschnitt 4). In diesem Abschnitt jedoch ist es zweckmäßig, gerade Nichtinertialsysteme zu verwenden, die im vorgelegten Fall mit dem beschleunigten Aufzug verbunden sind. **Man muß daran erinnern, daß bei der Untersuchung der Bewegung eines Körpers der Masse m im nichtinertialen Bezugssystem, das die Beschleunigung a hat, auf den Körper eine zusätzliche Kraft wirken muß, die sogenannte Trägheitskraft (Inertialkraft). Sie ist gleich ma und der Beschleunigung entgegengerichtet, also $(-ma)$. Wenn die Wirkung der Trägheitskraft auf den Körper mit einbezogen wird, darf man die Beschleunigung des Systems vergessen, und man kann die Bewegung wie in einem Inertialsystem behandeln.** Im gegebenen Fall des Fahrstuhls muß auf die Kugel die zusätzliche Kraft $(-ma)$ wirken, die, wie auch die Schwerkraft mg, nach Größe und Richtung konstant ist. Beide Richtungen stimmen überein, da die beschleunigte Bewegung nach oben erfolgt. Hieraus folgt, daß man im Ausdruck (75) die Beschleunigung g durch die arithmetische Summe $(g + a)$ der Beschleunigung zu ersetzen hat. Als Ergebnis erhalten wir die Formel (77).

Leser A: Bedeutet dies, für den Fall, daß sich der Aufzug beschleunigt nach unten bewegen würde, daß dann die Schwingungsperiode des Pendels durch die Differenz $(g - a)$ der Beschleunigung gegeben ist? Denn jetzt sind Inertialkraft ma und Schwerkraft mg entgegengerichtet.

Autor: Selbstverständlich. In diesem Fall ist die Schwingungsperiode des Pendels gleich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}. \tag{78}$$

Diese Formel ist nur unter der Bedingung $a < g$ sinnvoll. Je näher der Wert der Beschleunigung a am Wert g liegt, um so größer ist die Periodendauer des Pendels. Bei $a = g$ tritt der Zustand der Schwerelosigkeit auf. Was wird dann mit dem Pendel?

Leser A: In diesem Fall wird in Übereinstimmung mit Formel (78) die Schwingungsperiode unbegrenzt groß, das Pendel erweist sich als unbeweglich.

Autor: Ich möchte Ihre Antwort präzisieren. Also, das Pendel schwingt im Aufzug. Plötzlich reißt der Aufzug ab und fällt frei nach unten (der Luftwiderstand wird vernachlässigt). Was geschieht mit dem Pendel?

Leser A: Wie schon gesagt, das Pendel bleibt stehen.

Autor: Ihre Antwort ist nicht ganz richtig. Das Pendel wird unbeweglich (relativ zum Aufzug gesehen), wenn es sich gerade dann, wenn der Aufzug abreißt, in einer Grenzlage befindet. Ist es im Augenblick des Abreißens nicht in einer solchen Lage, so wird sich die Kugel im Zustand der Schwerelosigkeit an dem Faden gleichförmig in der vertikalen Ebene mit der Geschwindigkeit weiterdrehen, die sie im Augenblick des plötzlich beginnenden Falls hatte.

Leser A: Ich habe verstanden.

Autor: Für diesen Fall entwerfen Sie mir eine Skizze über das Verhalten eines Pendels (an einem Faden hängende Kugel) innerhalb eines Raumschiffes, das sich im Zustand der Schwerelosigkeit befindet.

Leser A: Im Raumschiff wird die Kugel entweder an dem Faden ruhen (bezüglich des Raumschiffes), oder sie wird sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegen, deren Radius durch die Fadenlänge bestimmt ist (falls die Wände oder die Decke des Raumschiffes nicht stören).

Autor: Ihr Bild ist nicht ganz vollständig. Stellen wir uns vor, wir befinden uns im Inneren des im schwerelosen Zustand befindlichen Raumschiffes. Wir nehmen eine Kugel mit Faden und befestigen dessen freies Ende so, daß weder die Wände noch die Decke die Bewegung der Kugel beeinträchtigen können, nachdem die Kugel vorsichtig losgelassen wurde. Sie bleibt unbeweglich. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Faden ist nicht gespannt.
2. Der Faden ist gespannt.

Betrachten wir den ersten Fall (Lage 1, Bild 58a).

Wir erteilen der Kugel eine bestimmte Geschwindigkeit v_0. Die Kugel wird sich so lange geradlinig und gleichförmig bewegen, bis der mit ihr verbundene Faden gespannt ist (Lage 2, Bild 58a). In diesem Augenblick wirkt auf die Kugel die Gegenspannung des Fadens. Man kann diese als Analogon zur Gegenkraft einer Wand betrachten, die an ihr bei der Reflexion eines kleinen Balls wirkt. Dementsprechend ändert die Kugel unmittelbar ihre Bewegungsrichtung und fliegt erneut gleichförmig und geradlinig (Lage 3, Bild 58a). Bei dieser eigenartigen „Reflexion" muß das Gesetz der Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel erfüllt sein. Wir betrachten

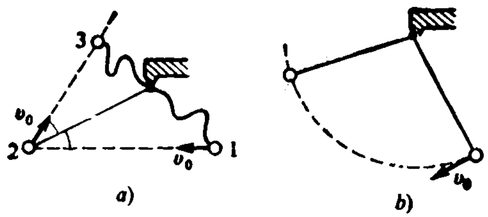


Bild 58

jetzt den zweiten Fall: Zuerst spannen wir den Faden, lassen dann aber die Kugel vorsichtig los. Wie im ersten Fall wird die Kugel unbeweglich in der fixierten Lage bleiben (Lage 1, Bild 58b). Nun erteilt man der Kugel eine gewisse, senkrecht zum Faden gerichtete Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die Kugel beginnt, sich gleichförmig am Faden zu drehen. Die Ebene, in der die Drehung erfolgt, ist durch die Fadenrichtung und den der Kugel erteilten Vektor der Anfangsgeschwindigkeit festgelegt.

Wir betrachten eine weitere Aufgabe. *Ein Faden der Länge l mit einer Kugel am Ende ist auf einem kleinen Wagen befestigt, der reibungsfrei eine geneigte Ebene mit dem Neigungswinkel α hinabgleitet. Gesucht ist die Schwingungsperiode des Pendels, das sich in dem beschleunigten System befindet* (Bild 59a). Im Unterschied zur vorangegangenen Aufgabe mit dem Aufzug ist jetzt die Systembeschleunigung unter einem bestimmten Winkel zur Schwerebeschleunigung gerichtet. Deshalb entsteht hier die zusätzliche Frage: *Wie liegt die Gleichgewichtsrichtung des Pendelfadens?*

Leser A: Ich habe mich schon mit dieser Aufgabe beschäftigt, bin aber nicht weitergekommen.

Autor: Die Schwingungsperiode eines Pendels ist durch Formel (75) gegeben. Im vorliegenden Fall hat man an Stelle von g, ebenso wie beim Aufzug, eine bestimmte effektive Beschleunigung (wir bezeichnen sie durch g_{eff}) einzusetzen, die die vektorielle Summe

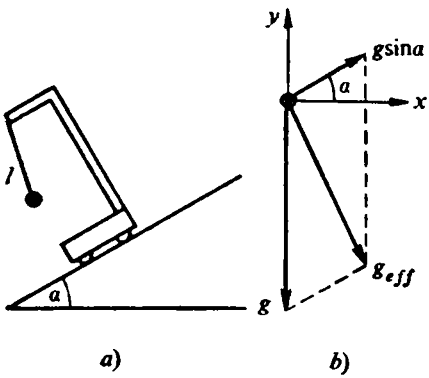


Bild 59

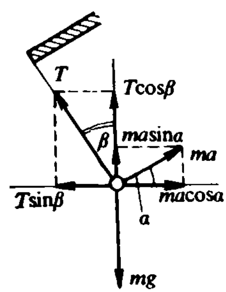


Bild 60

aus Gravitations- und Systembeschleunigung ist. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß in die genannte Summe die Beschleunigung des Wagens mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeht, da die Inertialkraft nach der entgegengesetzten Seite wie die Systembeschleunigung gerichtet ist. In Bild 59b sind die Beschleunigungsvektoren angegeben, wobei $g \sin \alpha$ die Beschleunigung des Wagens ist. Wir bestimmen g_{eff}:

$$\begin{aligned} g_{eff} &= \sqrt{g^2_{eff,\,x} + g^2_{eff,\,y}} \\ &= \sqrt{(g \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (g - g \sin^2 \alpha)^2} \\ &= g \cos \alpha. \end{aligned} \tag{79}$$

Hieraus finden wir

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}. \tag{80}$$

Leser A: Und wie bestimmt man die Gleichgewichtsrichtung des Fadens?

Autor: Diese Richtung ist die Richtung der effektiven Beschleunigung g_{eff}. Ausgehend vom Resultat (79) ist es nicht schwer zu schließen, daß diese Richtung mit der Vertikalen den Winkel α bildet. Anders gesagt, in der Gleichgewichtslage ist auf dem Wagen, der die geneigte Ebene hinabgleitet, der Pendelfaden senkrecht zur Ebene gerichtet.

Leser B: Ist es nicht möglich, das letzte Ergebnis auch anders zu erhalten?

Autor: Dieses Resultat erhält man unmittelbar durch die Betrachtung des Gleichgewichts der Kugel bezüglich des Wagens. Auf die Kugel wirkt die Schwerkraft mg, die Gegenkraft T zur Fadenspannung und die Inertialkraft ma (Bild 60).

Wir bezeichnen den Winkel, den Faden und Vertikale miteinander bilden, mit β.

Zerlegen wir alle genannten Kräfte in vertikale und horizontale Komponenten und schreiben die Gleichgewichtsbedingungen für diese Richtungen auf, so ergibt sich:

$$T \cos \beta + ma \sin \alpha = mg,$$

$$T \sin \beta = ma \cos \alpha. \tag{81}$$

Unter Berücksichtigung, daß $a = g \sin \alpha$ ist, läßt sich das System (81) wie folgt umformen:

$$T \cos \beta = mg\,(1 - \sin^2 \alpha),$$

$$T \sin \beta = mg \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dividiert man beide Gleichungen durcheinander, so erhält man $\cot \beta = \cot \alpha$.

Die Winkel β und α erweisen sich also als gleich. Folglich stehen Gleichgewichtsrichtung des Fadens und geneigte Ebene aufeinander senkrecht.

Leser B: Ich bin aufmerksam Ihren Erörterungen gefolgt und komme zu dem Schluß, daß es gar nicht so falsch gewesen ist, als ich Ihre Frage über die auf einen Sputnik wirkenden Kräfte mit Gravitationskraft und Zentrifugalkraft beantwortet habe (siehe Abschnitt 8). Meine Antwort muß einfach in dasjenige Bezugssystem übertragen werden, das mit dem Sputnik selbst verbunden ist, und unter der Zentrifugalkraft hat man die Inertialkraft zu verstehen. Im nichtinertialen Bezugssystem, das mit dem Sputnik verbunden ist, haben wir keine dynamische, sondern eine statische Aufgabe vor uns, eine Aufgabe zum Gleichgewicht der Kräfte, von denen eine die Zentrifugalkraft der Trägheit ist.

Autor: Ein solches Herangehen an die Sputnikaufgabe ist zulässig. Jedoch sahen Sie die in Abschnitt 8 genannte Zentrifugalkraft nicht als Trägheitskraft an. Sie befürchteten einfach, daß der Sputnik auf die Erde fallen könnte. Außerdem bestand im damaligen Fall keine Notwendigkeit, zu einem im Sputnik verankerten Bezugssystem überzugehen. Der physikalische Wesenszug der Aufgabe wurde ohne die Einführung der zentrifugalen Trägheitskraft klarer herausgearbeitet. Mein früherer Rat bleibt bestehen: Wenn keine besondere Notwendigkeit besteht, dann benutzen Sie kein nichtinertiales Bezugssystem.

Aufgaben

59. Wie ändert sich die Schwingungsperiode eines Pendels bei dessen Verlagerung von der Erde auf den Mond? Die Mondmasse ist 81mal kleiner als die Erdmasse, und der Mondradius ist 3,7mal kleiner als der Radius der Erde.

60. Ein Sekundenpendel vollführt in einem sich vertikal bewegenden Aufzug in der Zeit $t = 1$ min $N = 100$ Schwingungen. Mit welcher Beschleunigung a bewegt sich der Aufzug, und welche Richtung hat diese Beschleunigung?

61. Ein Pendel der Länge $l = 1$ m, das in einer Flugzeugkabine aufgehängt ist, vollführt harmonische Schwingungen. Es ist die Schwingungsperiode T des Pendels zu bestimmen, wenn sich das Flugzeug in horizontaler Richtung mit konstanter Beschleunigung $a = 5$ m/s^2 bewegt.

13. Was ist Ihnen über Wellen bekannt?

Autor: Es gibt bekanntlich verschiedene Arten von Wellen: Wellen auf der Oberfläche des Wassers, elastische Wellen (speziell Schallwellen), elektromagnetische Wellen (speziell Lichtwellen). Leider haben die Prüflinge über Wellen oft nur gewisse allgemeine Vorstellungen. Mir scheint es nützlich zu sein, einige mit Wellen verknüpfte Begriffe zu erläutern. Wir erklären sie am Beispiel der elastischen Wellen.

Wenn man innerhalb eines Stoffes (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) eine bestimmte Schwingungsquelle anbringt, so entstehen im Stoff elastische Wellen, die sich von der Quelle aus in verschiedenen Richtungen ausbreiten. **Die Wellen können Quer- oder Längswellen sein.** Worin unterscheiden sich Querwellen (Transversalwellen) von Längswellen (Longitudinalwellen)?

Leser A: Das ist mir bekannt. **Bei Transversalwellen werden die Stoffteilchen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellen ausgelenkt; bei Longitudinalwellen erfolgt die Auslenkung der Teilchen in Ausbreitungsrichtung der Welle. Longitudinalwellen stellen den Ausbreitungsprozeß von Stoffverdichtungen und Stoffverdünnungen dar.**

Autor: Welche Wellen breiten sich in Gasen aus?

Leser A: Longitudinalwellen.

Autor: Richtig, und innerhalb eines Festkörpers?

Leser A: Transversalwellen.

Autor: Und auch Longitudinalwellen. Und innerhalb von Flüssigkeiten?

Leser A: Da bin ich nicht sicher. Könnte es wie im Festkörper sein, Longitudinal- und Transversalwellen? Oder vielmehr nur Longitudinalwellen.

Leser B: Transversalwellen sind in Flüssigkeiten leicht zu beobachten; es reicht aus, einen Stein ins Wasser zu werfen.

Autor: Also bringen wir Klarheit hinein. Vor allem in Gasen breiten sich nur elastische Längswellen aus, während sich in kondensierten Stoffen (d.h. innerhalb von Festkörpern und Flüssigkeiten) sowohl elastische Längs- als auch elastische Querwellen ausbreiten können. Ferner darf man die Wellen innerhalb von Wasser nicht mit den Wellen auf der Wasseroberfläche verwechseln, die durch den geworfenen Stein entstehen. Das Wesen von Oberflächenwellen ist vom Wesen elastischer Wellen verschieden.

Welche Parameter charakterisieren eine Welle?

Leser A: Die Wellenlänge λ, die Schwingungsperiode T, ihre Frequenz ν und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v. Sie sind miteinander durch die Beziehungen

$$\lambda = vT; \; T = \frac{1}{\nu} \tag{82}$$

verknüpft.

Autor: Gut. Aber häufiger wird die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ verwendet. Dann ist $T = 2\pi/\omega$. Eine Welle möge durch eine harmonisch schwingende Quelle der Periodendauer T erzeugt werden. Sie breite sich längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit v aus. Schreiben Sie die Gleichung dieser Welle auf.

Leser A: Das kann ich nicht, es wurde uns nie gezeigt.

Autor (zum Leser B): Und was können Sie zur Gleichung der Welle sagen?

Leser B: Ich weiß nur, **die Gleichung der Welle gibt die Abhängigkeit der Größe der Auslenkung der Stoffteilchen von den Koordinaten Ort und Zeit an.** Aufschreiben kann ich die Gleichung nicht.

Autor: Also besprechen wir das gemeinsam. Im Punkt $x = 0$ bringen wir die Quelle der harmonischen Schwingungen an. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ sei am Ort $x = 0$ die Auslenkung

$$y_1 = A \sin \omega t_1$$

(die Auslenkung erfolgt in Richtung der y-Achse, aber die Welle breitet sich längs der x-Achse aus). Zu welcher Zeit wird man am Ort $x \neq 0$ die Auslenkung y_1 beobachten?

Leser B: Offenbar zur Zeit $t_1 + x/v$, denn, um zum Punkt x zu gelangen, wird von der Welle die Zeit x/v gebraucht.

Autor: Das stimmt. Wir bezeichnen jetzt die Auslenkung am Ort x zur Zeit t mit $y\,(x,\,t)$ und versuchen herauszubekommen, zu welcher Zeit die gleiche Auslenkung wie im Punkt $x = 0$ beobachtet wird.

Leser B: Zur Zeit $t - x/v$.

Autor: Richtig. Wir können das so aufschreiben:

$$y\,(x,\,t) = y'\,(t - x/v),$$

wobei ich mit y' die Auslenkung am Ort $x = 0$ bezeichnet habe. Die Auslenkung erfolgt nach einem uns bekannten harmonischen Gesetz.

Leser B: Ich habe verstanden. Die Gleichung der Welle wird die Form

$$y\ (x,\ t) = A \sin\ [\omega\ (t - x/v)] \tag{83}$$

haben.

Autor: Sie haben recht. Unter Anwendung der Beziehungen (82) schreiben wir Gl. (83) in die Form

$$y\,(x,\ t) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\, x\right) \tag{84}$$

um. Zu bemerken ist, daß die Größe $k = 2\pi/\lambda$ Wellenzahl heißt. Damit ist endgültig

$$y\ (x,\ t) = A \sin\ (\omega t - kx), \quad k = 2\pi/\lambda. \tag{85}$$

Jetzt beantworten Sie folgende Frage: Was muß man in Gl. (85) verändern, wenn sich die Welle nicht in positiver, sondern in negativer Richtung der x-Achse ausbreitet?

Leser B: Man muß das Zeichen vor der Geschwindigkeit ändern. Wir erhalten an Stelle von Formel (83)

$$y\ (x,\ t) = A \sin\ [\omega\ (t + x/v)] \tag{86}$$

und schließlich

$$y\ (x,\ t) = A \sin\ (\omega t + kx). \tag{87}$$

Autor: Völlig richtig. Wir nehmen weiter an, daß sich längs der x-Achse zwei gleiche, einander entgegenkommende Wellen ausbreiten. Welches Ergebnis erhalten wir durch die Überlagerung dieser Wellen?

Leser B: Ich addiere die Wellen:

$$\begin{aligned} y\ (x,\ t) &= A \sin\ (\omega t - kx) + A \sin\ (\omega t + kx) \\ &= 2A \sin \omega t \cdot \cos kx. \end{aligned} \tag{88}$$

Autor: Was können Sie über die Eigenschaften der durch Gl. (88) beschriebenen Welle sagen?

Leser A: Sie hat eine doppelt so große Amplitude, aber die übrigen Merkmale bleiben die gleichen.

Autor: Das ist nicht das wichtigste. Wir betrachten die Stellen

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k},\quad \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{k},\quad \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{1}{k},$$

bzw. $x = \frac{1}{4}\lambda,\ \frac{3}{4}\lambda,\ \frac{5}{4}\lambda,\ \ldots$

An diesen Stellen ist $\cos (kx) = 0$. Folglich ist dort auch zu allen Zeiten die Auslenkung gleich Null.

Leser B: Bedeutet das, bei der Welle (88) gibt es unbewegliche Punkte?

Autor: So ist es. **Die Welle (88) heißt deshalb stehende Welle. Die genannten Punkte heißen Knoten der stehenden Welle. Die Wellen (83) bis (87) nennt man fortschreitende Wellen.**

In Bild 61 sind die Unterschiede im Zeitverhalten von fortschreitenden und stehenden Wellen gut dargestellt.

Aber jetzt sprechen wir über Schallwellen. Wodurch ist der Schall charakterisiert?

Leser A: Durch Lautstärke, Höhe und Klangfarbe.

Autor: Wie hängen diese Eigenschaften mit den charakteristischen Größen der Welle zusammen?

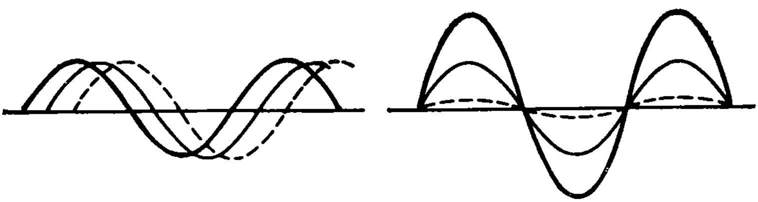


Bild 61

Leser A: Ich weiß, daß die Lautstärke des Schalls dem Quadrat der Amplitude der Schallwelle proportional ist; die Höhe hängt mit der Frequenz zusammen: je größer die Frequenz ist, um so höher ist der Ton.

Autor: Und was können Sie zur Klangfarbe sagen?

Leser A: Das weiß ich nicht.

Autor: Die Klangfarbe hängt mit dem „Profil" der Schallwelle zusammen. Bisher behandelten wir nur sinusförmige Wellen. Sinusförmige Schallwellen heißen reine Töne. In musikalischer Hinsicht sind sie ausdruckslos. Bild 62 erläutert den Begriff des „Profils" von Schallwellen, die gleiche Lautstärke und Tonhöhe haben, aber eine unterschiedliche Klangfarbe aufweisen (aus Zweckmäßigkeitsgründen werden in Bildern die Wellen häufig als Transversalwellen wiedergegeben): a) einfacher (reiner) Ton (man kann ihn beispielsweise durch eine Glocke erzeugen), b) Klangfarbe eines Klaviers, c) Klangfarbe einer Violine. Die Eigenart und Ausdruckskraft der verschiedenen Musikinstrumente ist durch die Spezifik der von ihnen hervorgerufenen Klangfarben der Schallwellen bedingt.

Leser B: Ich habe gehört, daß es in der Akustik den Doppler-Effekt gibt. Was ist das?

Autor: Der Doppler-Effekt wird nicht nur in der Akustik, sondern bei Wellen beliebiger Art beobachtet. Nehmen wir an, daß Sie sich von der Schallquelle mit der Geschwindigkeit v_0 entfernen. Zur Zeit t_1 erreicht

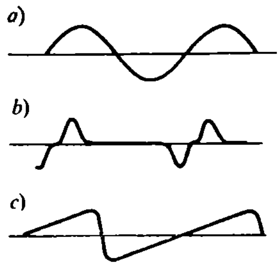


Bild 62

Sie am Ort x_1 eine maximale „Auslenkung“ der Schallwelle. Die nächste maximale „Auslenkung“ erreicht Sie zur Zeit $t_1 + \tau$. Dabei befinden Sie sich am Ort $x_1 + \tau v_0$. Man erkennt leicht, daß sich die Zeit τ aus der Schwingungsperiode T und der Zeit, die die Welle benötigt, um die Strecke $v_0\tau$ zurückzulegen, ergibt:

$$\tau = T + \tau \cdot \frac{v_0}{v}. \tag{89}$$

Hier bedeutet v die Schallgeschwindigkeit. Es ist selbstverständlich, daß τ die Schwingungsperiode desjenigen Schalls ist, den Sie als bewegter Beobachter wahrnehmen. Wir bezeichnen mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die wahre Frequenz des Schalls, mit $\omega' = \frac{2\pi}{\tau}$ die von Ihnen als Beobachter wahrgenommene Frequenz.

Aus Gl. (89) erhalten wir dann

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} \cdot \frac{v_0}{v}$$

oder

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v_0}{v}\right). \tag{90}$$

Folglich gilt: **Wenn Sie sich von der Schallquelle entfernen, so hören Sie einen niedrigeren Ton, dessen Frequenz durch den Ausdruck (90) bestimmt wird; umgekehrt, nähern Sie sich der Schallquelle, so hören Sie einen durch die Frequenz**

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \tag{91}$$

bestimmten höheren Ton. Hierin besteht der Doppler-Effekt.

Zu bemerken ist, daß man den gleichen Schluß ziehen kann, wenn sich die Schallquelle bewegt, der Beobachter aber nicht. Offensichtlich ist die Relativbewegung von Quelle und Beobachter wichtig.

Leser B: Beobachtet man in der Optik den Doppler-Effekt auch?

Autor: Ich sagte schon, daß man diesen Effekt bei Wellen beliebiger Art beobachten kann.

Leser B: Das heißt, wenn sich eine Lichtquelle von uns entfernt, so muß sich die Frequenz der Lichtwellen verringern. Aber dann müßte doch beispielsweise gelbes Licht als rotes Licht erscheinen?

Autor: Im Prinzip haben Sie recht. Jedoch muß man bedenken, daß sich die Lichtwellen mit der sehr großen Geschwindigkeit $3 \cdot 10^8$ m/s ausbreiten. Deshalb ist es bei den üblichen Geschwindigkeiten von Lichtquellen (oder Beobachtern) nicht möglich, eine Frequenzänderung des Lichtes wahrzunehmen. Beim Studium der Strahlung von Sternen, also von Objekten, die sich mit kosmischen Geschwindigkeiten bewegen, beobachten die Astronomen eine Veränderung der Frequenz des Lichtes. So wird beispielsweise aus der Verschiebung der von Sternen aufgenommenen Spektrallinien nach der Seite des Spektrums hin, die rotem Licht entspricht, geschlossen, daß sich der betreffende Stern von uns entfernt.

Aber nun sprechen wir von Überschallerscheinungen. Wie kann man, Ihrer Meinung nach, ein Überschallflugzeug von einem gewöhnlichen Flugzeug unterscheiden?

Leser A: Fliegt ein gewöhnliches Flugzeug, so hören wir zuerst seinen Schall, danach fliegt das Flugzeug über uns hinweg. Beim Überschallflugzeug muß alles umgekehrt verlaufen.

Leser B: Ich habe gehört, daß sich beim Flug eines Überschallflugzeugs elastische Schallwellen bilden. Man hört kein dumpfes Dröhnen, sondern einen Knall. Es können sogar die Fensterscheiben in Häusern herausfliegen.

Autor: So ist es. Es entsteht eine Kopfwelle. Untersuchen wir, wie es dazu kommt. Angenommen, ein Überschallflugzeug fliegt mit der dreifachen Schallgeschwindigkeit. Wir betrachten der Reihe nach seine

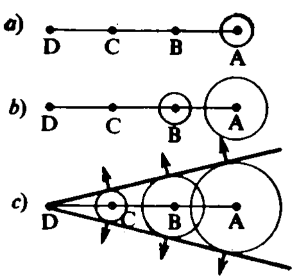


Bild 63

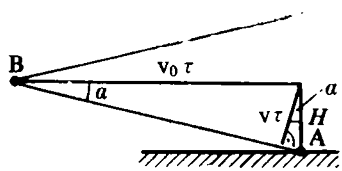


Bild 64

jeweiligen Standorte (Bild 63). Zur Zeit t_1 befindet sich das Flugzeug im Punkt A. Zur Zeit t_2 ist das Flugzeug im Punkt B angekommen. Die im Punkt A erzeugte Schallwellenfront hat jetzt die Form einer Kugel (Bild 63a). Zur Zeit t_3 befindet sich das Flugzeug im Punkt C. Die von den Punkten A und B ausgesandten Schallwellen zeigt Bild 63b. Zur Zeit t_4 erreicht das Flugzeug den Punkt D. Bild 63c gibt die Fronten der Schallwellen aus den Punkten A, B und C an. Überlagert man alle Schallwellen, etwa zur Zeit t_4, so ergibt sich eine Schallwellenfront in Form eines Kegels (halbfette Linie in Bild 63). Entsprechend der Bewegung des Flugzeuges breitet sich diese Front in diejenigen Richtungen mit Schallgeschwindigkeit aus, die in der Abbildung mit Pfeilen angegeben sind. Auch das ist die Kopfwelle. Sobald sie den Beobachter erreicht, hört er einen scharfen Knall. Je größer die Geschwindigkeit des Flugzeugs ist, um so schmaler wird der Schallkegel.

Leser B: Jetzt sehe ich ein, weshalb Überschallflugzeuge nicht über Städte fliegen.

Autor: Nach meinen Erklärungen können Sie ohne besondere Schwierigkeiten folgende Aufgabe lösen:
Ein Flugzeug fliegt horizontal mit der Überschallgeschwindigkeit v_0. Ein Beobachter hört vom Flugzeug den Schall nach der Zeit τ, als er das Flugzeug über sich sah. In welcher Höhe flog das Flugzeug?

Leser B: Ich zeichne Bild 64. Im Punkt A befindet sich der Beobachter. Er hört den Schall, wenn sich das Flugzeug im Punkt B befinden wird. Aus dem Bild ist zu entnehmen, daß

$$H = v\tau/\cos a, \qquad v/v_0 = \sin a$$

und folglich

$$H = v\tau/\sqrt{1-(v/v_0)^2}$$

gilt.

Autor: Sie haben die Aufgabe gut gemeistert.

Leser B: Ich vermute hier, daß das Licht augenblicklich vom Flugzeug zum Beobachter gelangte. In Wirklichkeit breitet es sich doch mit einer endlichen Geschwindigkeit aus.

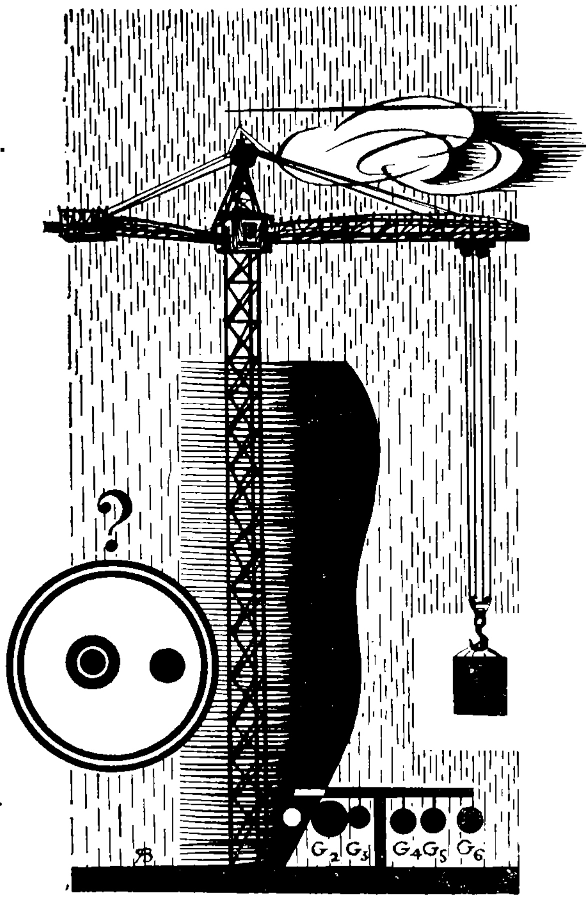
Autor: Ja, so ist es. Aber ich sagte schon, daß die Lichtgeschwindigkeit $3 \cdot 10^8$ m/s beträgt. Was wollen Sie fragen?

Leser B: Aber wurden in der Optik nicht auch Überlichtgeschwindigkeiten beobachtet?

Leser A: Das ist unmöglich; es gibt in der Natur keine größere Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit.

Autor: Das ist eine interessante Frage. Es ist so, daß die Geschwindigkeit, mit der sich Lichtwellen in Stoffen ausbreiten, immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Daher ist auch eine Situation möglich, in der sich ein Teilchen (etwa

DIE GESETZE
DER STATIK
SIND GESETZE
ÜBER DAS
GLEICHGEWICHT.
SIE MÜSSEN
AUFMERKSAM
STUDIERT WERDEN.
VERGESSEN SIE
NICHT IHRE
PRAKTISCHE
BEDEUTUNG.
ES IST
UNMÖGLICH,
SICH EINEN
ARCHITEKTEN
VORZUSTELLEN,
DER DIE
GRUNDLEGENDEN
GESETZE
DER STATIK
NICHT KENNT.
BETRACHTEN WIR
BEISPIELE,
DIE DAS PRINZIP
DER ZERLEGUNG
VON KRÄFTEN
ERLÄUTERN.
DISKUTIEREN WIR
DIE
GLEICHGEWICHTS-
BEDINGUNGEN
VON KÖRPERN,
DIE SPEZIELL
ZUR BESTIMMUNG
DES
SCHWERPUNKTES
ANGEWENDET
WERDEN,



ein Elektron) innerhalb eines Stoffes mit einer Geschwindigkeit bewegt, die die Lichtgeschwindigkeit im Stoff übersteigt. Wir erhalten dann eine typische Erscheinung mit Überlichtgeschwindigkeit: das fliegende Elektron erzeugt einen Lichtkegel, eine „elastische" Lichtwelle. Diese Erscheinung ist in der Physik als Wawilow-Tscherenkow-Effekt bekannt.

14. Können Sie die Zerlegung von Kräften richtig anwenden?

Autor: Bei der Lösung mechanischer Aufgaben ist es oft notwendig, Kräfte zu zerlegen. Es scheint mir daher nützlich zu sein, sich mit diesem Problem genauer zu befassen. Vor allem erinnere ich an folgende grundlegende Regel: **Ist eine Kraft nach zwei beliebigen**

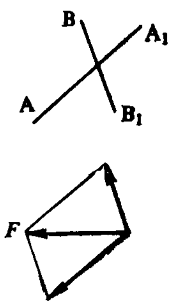


Bild 65

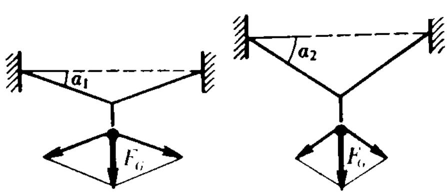


Bild 66

Richtungen zu zerlegen, so muß man durch Anfangs- und Endpunkt des Kraftvektors je zwei Geraden zeichnen, von denen jede zu einer Zerlegungsrichtung parallel ist. Man erhält dadurch ein Parallelogramm, dessen Seiten die gesuchten Komponenten der gegebenen Kraft sind. Diese Regel ist in Bild 65 erläutert, in der die Kraft F nach zwei Richtungen zerlegt ist: AA_1 und BB_1. Wir betrachten einige Beispiele, die für die Anwendung der Kräftezerlegung charakteristisch sind. Das e r s t e Beispiel ist in Bild 66 angegeben: *Zwei identische Lasten hängen in der Mitte je eines Seils. Wegen des Gewichts der Lasten hängen die Seile durch und bilden mit der Horizontalen die Winkel α_1 bzw. α_2. In welchem der Seile tritt die größere Spannung auf?*

Leser A: Auf dieser Zeichnung zerlege ich die Schwerkraft jeder Last nach den Richtungen der Seilabschnitte. Aus der Zerlegung folgt, daß die Fadenspannkraft $T = F_G/(2 \sin \alpha)$ ist. Daher ist die Spannung desjenigen Fadens größer, der weniger durchhängt.

Autor: Völlig richtig. Aber läßt sich das Seil so stark spannen, daß es nicht mehr unter dem Gewicht der Last durchhängt?

Leser A: Warum denn nicht?

Autor: Antworten Sie nicht voreilig. Wenden Sie das eben von Ihnen errechnete Resultat an.

Leser A: Ich verstehe. Man kann die Seilspannung nicht so groß machen, daß kein Durchhang entsteht. Doch mit Verkleinerung des Winkels α wächst die Seilspannung. Wie groß auch immer die Festigkeit des Seils ist, so reißt es doch, wenn der Winkel α hinreichend klein wird.

Autor: Merken Sie sich: Das Seil hängt unter Wirkung einer angehängten Last infolge seiner elastischen Eigenschaften durch. Diese elastischen Eigenschaften bedingen die Ausdehnung des Seils. Würde sich das Seil nicht deformieren (ausdehnen), so könnte an ihm niemals eine Last aufgehängt werden. Hieraus ist zu sehen, daß in der Bautechnik die Festigkeitsberechnung der verschiedenen Konstruktionen aufs engste mit deren elastischer Deformierbarkeit verknüpft ist (man sagt, die Konstruktion „muß atmen“). Übermäßig starre Gefüge sind unbrauchbar, weil die in ihnen auftretenden Spannungen bei kleinen Deformationen äußerst groß werden können. Es ist möglich, daß derartige Konstruktionen bereits wegen ihres Eigengewichtes einstürzen. Vernachlässigt man im oben betrachteten Beispiel die Masse des Seils, so ist es nicht schwierig, eine Beziehung zwischen dem Winkel α, dem Durchhang des Seils und der Schwerkraft aufzustellen. Man muß das Hookesche Gesetz anwenden (siehe Aufgabe 65).
Wir betrachten ein z w e i t e s Beispiel; bekannt

ist das Sprichwort: „Ein Keil treibt den anderen hinaus“. Man kann sich davon durch Kräftezerlegung überzeugen.

Keil 1 wird aus einem Spalt getrieben, indem man einen Keil 2 mit der Kraft F in denselben Spalt hineinschlägt. Die Winkel α und β sind bekannt. Gesucht ist die Kraft, die Keil 1 aus dem Spalt zu treiben vermag (siehe Bild 67a).

Leser A: Mir fällt es schwer, diese Aufgabe zu lösen.

Autor: Wir zerlegen die Kraft F in eine horizontale und eine zur Seite AB des Keils *2* senkrechte Komponente.

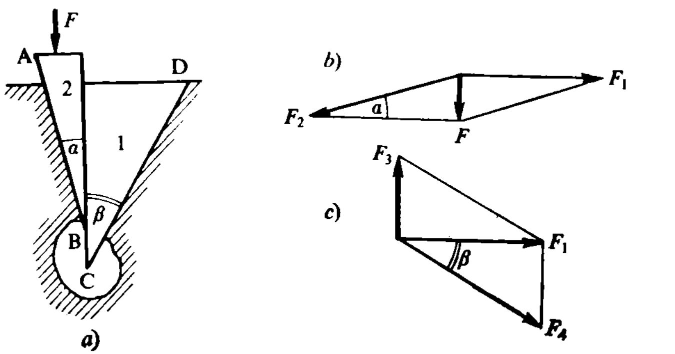


Bild 67

Diese Komponenten bezeichnen wir mit F_1 und F_2 (Bild 67b). Die Komponente F_2 befindet sich mit der Reaktionskraft der linken Wand des Spalts im Gleichgewicht; die Komponente $F_1 = F/\tan \alpha$ wirkt auf Keil *1*. Jetzt zerlegen wir diese Kraft F_1 in eine vertikale Komponente und eine auf der Seite CD senkrecht stehende Komponente; es sind in Bild 67c die Komponenten F_3 und F_4. Die Kraft F_4 steht mit der Reaktionskraft der rechten Wand des Spalts im Gleichgewicht. Die Kraft F_3 ist diejenige Kraft, die den Keil *1* aus dem Spalt treibt. Sie war gesucht. Es ist leicht einzusehen, daß für sie

$$F_3 = F_1 \tan \beta = F \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$$

gilt.

Wir betrachten noch ein drittes Beispiel. Es ist in Bild 68a skizziert. *An einem Seil, dessen mitt-*

lerer Teil horizontal verläuft, hängen zwei Lasten F_{G_1} *und* F_{G_2}. *Bei bekanntem Winkel* α *sind gesucht: der Winkel* β *und die Spannkräfte* T_{AB}, T_{BC}, T_{CD} *in jedem Seilstück.*

Leser A: Ich zerlege F_{G_1} nach den Richtungen AB und BC (Bild 68b). Aus dem entsprechenden Dreieck erhalten wir $T_{AB} = F_{G_1}/\sin\alpha$ und $T_{BC} = F_{G_1}/\tan\alpha$. Damit sind schon zwei Spannkräfte gefunden. Weiter zerlege ich F_{G_2} nach den Richtungen BC und CD

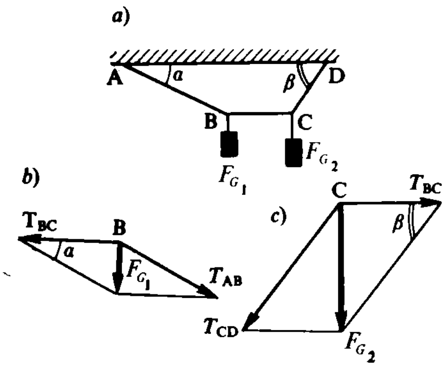


Bild 68

(Bild 68c) und erhalte analog: $T_{BC} = F_{G_2}/\tan\beta$, $T_{CD} = F_{G_2}/\sin\beta$. Gleichsetzen der aus beiden Zerlegungen erhaltenen Formeln für T_{BC} ergibt $F_{G_1}/\tan\alpha = F_{G_2}/\tan\beta$, woraus

$$\beta = \arctan(F_{G_2}\tan\alpha/F_{G_1})$$

folgt. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für T_{CD} ein, dann haben wir die noch fehlende Spannkraft im Seilstück CD.

Autor: Ist es denn wirklich so schwer, die Aufgabe zu vollenden und einen analytischen Ausdruck für die Kraft T_{CD} anzugeben?

Leser A: In diesen Ausdruck wird der Sinus von arctan β eingehen, es ist

$$T_{CD} = \frac{F_{G_2}}{\sin\left(\arctan\dfrac{F_{G_2}\tan\alpha}{F_{G_1}}\right)}.$$

Autor: Ihr Ergebnis ist richtig, es läßt sich aber einfacher schreiben, wenn man $\sin\beta$ durch $\tan\beta$ ausdrückt. Es gilt

$$\sin\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}.$$

Wegen $\tan\beta = \frac{F_{G_2}}{F_{G_1}} \tan\alpha$ finden wir

$$T_{CD} = \frac{F_{G_1}}{\tan\alpha} \sqrt{1+\left(\frac{F_{G_2}}{F_{G_1}}\right)^2 \tan^2\alpha}.$$

Leser B: Ich sehe ein, daß es notwendig ist, gründlich die Mathematik zu wiederholen, bevor man zu einer Physikprüfung geht.

Autor: Ihre Bemerkung ist sehr wahr.

Aufgaben

62. In einen Spalt sind zwei Keile eingeschlagen (siehe Bild 67). Bei der Einwirkung einer Kraft auf Keil *2* beginnt Keil *1*, sich nach oben zu bewegen. Bei welchen Reibungszahlen zwischen Spaltflächen und Keilen ist das möglich? Die Masse der Keile und die Reibung zwischen ihnen werde vernachlässigt.

63. Ein homogener Stab der Masse $m = 6$ kg ist, wie in Bild 69 dargestellt, an Seilen aufgehängt. Die Masse der Last beträgt

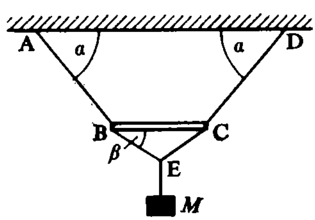


Bild 69

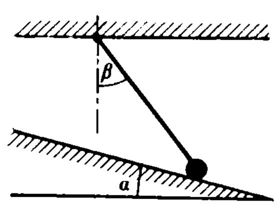


Bild 70

$M = 10$ kg. Es sind für $\alpha = 2\beta = 60°$ die Seilspannkräfte T und die Reaktionskraft F im Stab zu bestimmen.

64. Es sind die Fadenspannkraft T und die Druckkraft F_N einer Kugel der Masse m auf einer geneigten Ebene zu bestimmen (Bild 70). Der Neigungswinkel der Ebene sei α, der Winkel zwischen vertikaler Richtung und dem Faden sei β. Die Reibung zwischen Kugel und Ebene werde vernachlässigt.

65. Ein elastischer Faden, der in einem Aufzug von Wand zu Wand gespannt ist, hängt unter der Wirkung einer in seiner Mitte befestigten Last durch (Bild 71). Der Winkel α ist für einen ruhenden Aufzug $\alpha_1 = 30°$, für einen beschleunigt bewegten Aufzug $\alpha_2 = 45°$. Geben Sie Größe und Richtung der

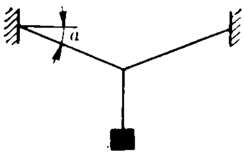


Bild 71

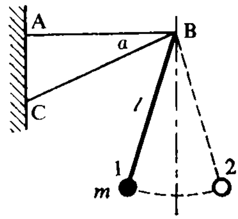


Bild 72

Beschleunigung a des Aufzugs an. Die Masse des Fadens wird vernachlässigt.

66. Eine Kugel der Masse $m = 100$ g hängt an einem Faden der Länge $l = 1$ m. Dieser ist an einer Konsole befestigt (Bild 72). Der Winkel α beträgt 30°. Bei der Gleichgewichtslage wird der Kugel die horizontale Geschwindigkeit $v = 2$ m/s erteilt, so daß sie zu schwingen beginnt. Zu berechnen sind die Kräfte, die in den Stäben AB und BC wirken, wenn die Kugel die maximale Auslenkung aus der Gleichgewichtslage einnimmt.

15. Was wissen Sie über das Gleichgewicht der Körper?

Autor: In Bild 73 sind zwei Gleichgewichtslagen eines Ziegelsteins angegeben. Beide stellen stabile Gleichgewichtslagen dar, sind jedoch im Grad ihrer Stabilität unterschiedlich. Welche von beiden stellt die stabilere Gleichgewichtslage dar?

Leser A: Offensichtlich ist das die Lage des Steins in Bild 73a.

Autor: Warum?

Leser A: Weil hier der Schwerpunkt[1] näher an der Erdoberfläche liegt.

Autor: Das ist nicht der einzige Grund.

[1] In der Schulbuchliteratur wird dafür der Begriff „Massenmittelpunkt“ verwendet.

Leser B: Die Auflagefläche ist größer als in Bild 73b.
Autor: Auch das genügt noch nicht. Um das Wesen dieser Frage zu verstehen, betrachten wir die Gleichgewichtslagen zweier Körper: einen Quader mit quadratischer Grundfläche und einen Zylinder (Bild 74). Quader und Zylinder sollen gleiche Höhe H und gleichen Flächeninhalt S der Grundfläche haben. Dann liegen die Massenmittelpunkte beider Körper in

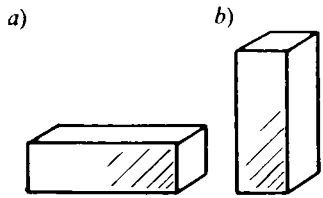


Bild 73

der gleichen Höhe, und ferner haben beide Körper die gleiche Auflagefläche. Trotzdem ist der Stabilitätsgrad beider Körper unterschiedlich. **Das Maß**

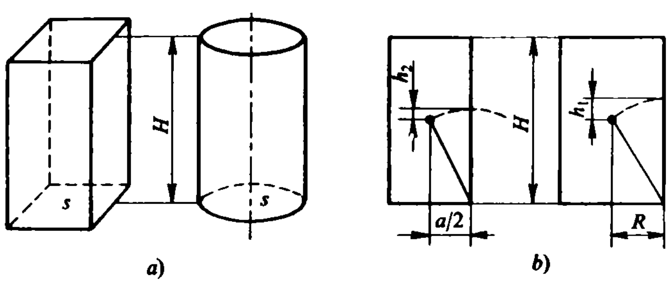


Bild 74

für die Stabilität eines speziellen Gleichgewichtszustandes ist die aufzuwendende Energie, damit der Körper bleibend den Gleichgewichtszustand verläßt.
Leser B: Was bedeutet das Wort „bleibend"?
Autor: Es bedeutet, daß der sich selbst überlassene Körper nicht mehr in seinen Ausgangszustand zurückkehren kann. Die genannte Energie ist gleich dem

Produkt aus Schwerkraft und derjenigen Höhe, um die man den Massenmittelpunkt des Körpers anheben muß, damit er nicht in seinen Ausgangszustand zurückkehrt. Im vorliegenden Beispiel mit dem Zylinder und dem Quader ist der Radius des Zylinders $R = \sqrt{S/\pi}$, eine Seite des Quaders beträgt $a = \sqrt{S}$. Um den Zylinder aus der Gleichgewichtslage herauszubringen, muß man seinen Schwerpunkt um die Höhe

$$h_1 = \sqrt{(H/2)^2 + R^2} - (H/2)$$

anheben. Um den Quader aus der Gleichgewichtslage herauszubringen, muß man seinen Schwerpunkt um

$$h_2 = \sqrt{(H/2)^2 + (a/2)^2} - (H/2)$$

anheben (Bild 74b). Da

$$\frac{a/2}{R} = \frac{\sqrt{\pi S}}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$$

gilt, so folgt, daß $h_2 < h_1$ ist. Damit wird deutlich, daß sich von den beiden betrachteten Körpern der Zylinder in einer stabileren Gleichgewichtslage befindet.

Nach diesen Bemerkungen empfehle ich, zu dem Beispiel mit den zwei Lagen des Ziegelsteins zurückzukehren.

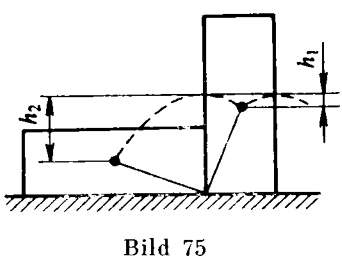


Bild 75

Leser A: Wirft man den Ziegelstein um, geht er aus einer Gleichgewichtslage in eine andere Gleichgewichtslage über. In Bild 75 gibt die gestrichelte Linie die Bahnkurve an, die der Schwerpunkt dabei durchläuft.

Um den Ziegelstein aus der stehenden Lage herauszubringen, hat man seinen Schwerpunkt um die Höhe h_1 anzuheben, also die Energie mgh_1 aufzuwenden. Um den Stein aber aus der liegenden Lage herauszuführen, muß man den Schwerpunkt um die Höhe h_2 heben, also die Energie mgh_2 aufwenden. Der höhere Stabilitätsgrad der „liegenden" Lage erklärt sich daraus, daß

$$mgh_1 < mgh_2 \tag{92}$$

ist.

Autor: Jetzt war Ihre Begründung für die höhere Stabilität der liegenden Gleichgewichtslage des Körpers vollständig richtig.

Leser B: Aber die Höhen h_1 und h_2 hängen von der Höhe des Schwerpunktes über dem Boden und von der Größe der Auflagefläche ab. Heißt das, daß es bei der Diskussion des Stabilitätsgrades von Körperlagen berechtigt ist, die Höhen der Schwerpunkte und die Auflageflächen zu vergleichen?

Autor: Ja, aber nur in dem Maße, in welchem diese Größen auf die Unterschiede zwischen den Höhen h_1 und h_2 einwirken. So gestattet in dem Beispiel mit dem Zylinder und dem Quader die Gleichheit der Schwerpunkthöhen und der Körperauflageflächen nicht, die Frage zu beantworten, welcher von den beiden Körpern der stabilere ist. Außerdem möchte ich die Aufmerksamkeit auf noch einen anderen Umstand lenken. Bisher haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die zu vergleichenden Körper aus ein und demselben Stoff bestehen. In diesem Fall war für die Erfüllung der Ungleichung (92) die Einhaltung der geometrischen Bedingung $h_1 < h_2$ ausreichend. Im allgemeinen Fall können jedoch die zu vergleichenden Körper aus verschiedenen Stoffen bestehen; dabei kann die Ungleichung (92) sogar für die Bedingung $h_1 > h_2$ wegen der Dichteunterschiede der Körper erfüllt sein. So wird beispielsweise ein liegender Korkquader weniger stabil sein als ein stehender Bleiquader, wenn für beide die gleiche Größe vorausgesetzt wird.

Wir betrachten jetzt die Gleichgewichtsbedingungen eines Körpers. Welche kennen Sie?

Leser A: Die Summe aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, muß Null sein. Außerdem muß der Vektor der Schwerkraft innerhalb der Auflagefläche des Körpers liegen.

Autor: Gut. Man kann aber die Gleichgewichtsbedingungen anders besser ausdrücken. Sie erhalten dann für die praktische Anwendung eine allgemeinere und bequemere Form. Man hat zwei Gleichgewichtsbedingungen zu unterscheiden.

Erste Bedingung: **Die Projektionen aller an einem Körper angreifenden Kräfte müssen sich in jeder beliebigen Richtung gegenseitig kompensieren. Mit anderen Worten, die algebraische Summe der Projektionen aller Kräfte auf eine beliebige Richtung muß Null sein.**

Diese Bedingung erlaubt, so viele Gleichungen aufzustellen, wie es unabhängige Richtungen in der Aufgabe gibt: für ein eindimensionales Problem eine Gleichung, zwei Gleichungen für ein zweidimensionales Problem, drei Gleichungen im allgemeinen Fall (paarweise aufeinander senkrecht stehende Richtungen auswählen).

Zweite Bedingung (Bedingung der Momente): **Die algebraische Summe der Kraftmomente (Drehmomente) um einen beliebigen Punkt muß Null sein. Dabei werden alle Momente, die den Körper um den ausgewählten Punkt in der einen Richtung (etwa im Uhrzeigersinn) zu drehen versuchen, mit dem Pluszeichen versehen. Alle Momente, die bestrebt sind, den Körper in entgegengesetzter Richtung (im Gegenzeigersinn) zu drehen, erhalten das Minuszeichen.**

Bei der Formulierung der Momentenbedingung geht man wie folgt schrittweise vor: a) Feststellen aller auf den Körper wirkenden Kräfte, b) Wahl eines Punktes, bezüglich dessen man die Kraftmomente untersuchen will, c) Feststellen aller Kraftmomente bezüglich des ausgewählten Punktes, d) Aufschreiben der Gleichung für die algebraische Summe der Kraftmomente, die Null zu setzen ist. Bei der Anwendung der Momentenbedingung ist es notwendig, folgende zwei Sachverhalte zu beachten: 1. die eben angegebene Formulierung bezieht sich auf den Fall,

daß in der Aufgabe alle Kräfte und Abstände in ein und derselben Ebene liegen (die Aufgabe ist nicht dreidimensional); 2. die algebraische Summe der Kraftmomente muß für jeden beliebigen Punkt Null sein, er kann sowohl innerhalb als auch außerhalb des Körpers liegen. Es ist zu betonen, daß die Größe der einzelnen Kraftmomente von der Auswahl des Punktes (bezüglich dessen die Kraftmomente gebildet werden) abhängt; die algebraische Summe der Momente bleibt jedoch immer Null. Zum besseren Verständnis der Gleichgewichtsbedingungen betrachten wir eine konkrete Aufgabe:
Ein Balken des Gewichtes F_{G_1} *ist in den Punkten B und C befestigt* (Bild 76a). *Im Punkt D hängt an dem Balken die Last* F_{G_2}. *Gegebene Entfernungen*: $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = 2a$, $\overline{CD} = a$. *Gesucht sind die Stützkräfte* F_{N_B} *und* F_{N_C}. *Es ist anzunehmen, daß die Stützkräfte in vertikaler Richtung wirken.* Nennen Sie, wie üblich, zuerst die am Körper angreifenden Kräfte.

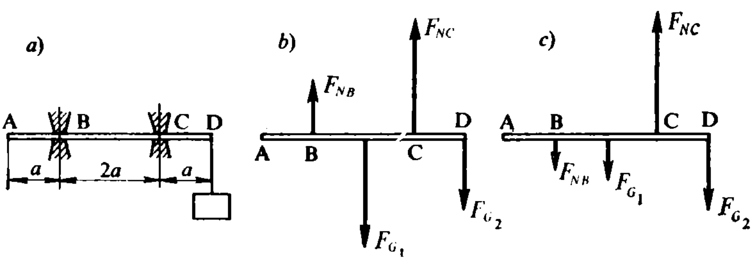


Bild 76

Leser A: In der vorliegenden Aufgabe ist der Körper ein Balken. Auf ihn wirken vier Kräfte: F_{G_1}, F_{G_2} und die Stützkräfte F_{N_B} und F_{N_C}.

Autor: Stellen Sie diese Kräfte in einer Skizze dar!

Leser A: Aber ich weiß nicht, ob die Stützkräfte nach oben oder nach unten gerichtet sind.

Autor: Nehmen Sie an, beide Stützkräfte seien nach oben gerichtet.

Leser A: Hier ist dann meine Zeichnung (Bild 76b). Ich formuliere die erste Gleichgewichtsbedingung als

Gleichung

$$F_{N_B} + F_{N_C} = F_{G_1} + F_{G_2}.$$

Autor: Ich habe nichts gegen diese Gleichung einzuwenden. Es ist jedoch bei der gegebenen Aufgabe einfacher, die zweite Gleichgewichtsbedingung (Momentenbedingung) anzuwenden. Sie wird einmal bezüglich des Punktes B und einmal bezüglich des Punktes C aufgeschrieben.

Leser A: Gut, so mache ich es. Als Ergebnis erhalte ich folgende Gleichungen:
bezüglich des Punktes B

$$F_{G_1} \cdot a - F_{N_C} \cdot 2a + F_{G_2} \cdot 3a = 0,$$

bezüglich des Punktes C

$$F_{N_B} \cdot 2a - F_{G_1} \cdot a + F_{G_2} \cdot a = 0. \tag{93}$$

Autor: Hier sehen Sie: Jede Gleichung enthält nur eine Unbekannte, sie kann schnell berechnet werden.

Leser A: Aus den Gleichungen (93) finden wir

$$F_{N_B} = (F_{G_1} - F_{G_2})/2, \tag{94}$$

$$F_{N_C} = (F_{G_1} + 3F_{G_2})/2. \tag{95}$$

Autor: Der Ausdruck (95) ist immer positiv. Das bedeutet, die Stützkraft F_{N_C} ist nach oben gerichtet (wie wir auch angenommen haben). Der Ausdruck (94) ist für $F_{G_1} > F_{G_2}$ positiv, für $F_{G_1} < F_{G_2}$ negativ und Null für $F_{G_1} = F_{G_2}$. Das heißt, daß bei $F_{G_1} > F_{G_2}$ die Kraft F_{N_B} so gerichtet ist, wie wir annahmen, also nach oben (siehe Bild 76b); für $F_{G_1} < F_{G_2}$ ist F_{N_B} nach unten gerichtet, für $F_{G_1} = F_{G_2}$ gibt es keine Stützkraft im Punkt B.

Aufgaben

67. Der Balken AB ist so befestigt, wie es Bild 77 zeigt. Im Punkt B ist eine Last der Masse $M = 15$ kg angehängt. In den Punkten A und C sind die Reaktionskräfte zu bestimmen. Außerdem ist die Spannkraft des Seils BD gesucht. Balkenmasse $m = 5$ kg, $\overline{AC} = a = 0{,}25$ m, $\overline{AB} = b = 1$ m, $\alpha = 60°$.

68. Ein homogenes Quadrat der Masse m stützt sich im Punkt A auf einen Wandvorsprung und hängt im Punkt B an einem Faden (Bild 78). Der Winkel zwischen Faden und Wand ist α.

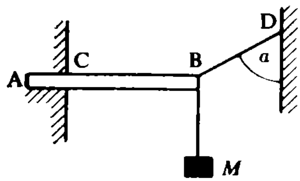


Bild 77

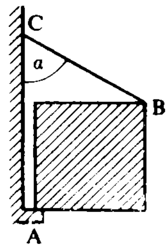


Bild 78

Zu bestimmen sind die Fadenspannung, die Stützkraft im Punkt A und deren Richtung.

69. Auf einer horizontalen Tischplatte liegt eine Kette der Länge l. Welche maximale Länge l_1 hat der vom Tisch herunterhängende Teil der Kette, wenn die Reibungszahl zwischen Kette und Tisch gleich μ ist?

70. Welche Arbeit W ist zu verrichten, um einen Würfel der Masse m um eine Kante auf die andere Seite zu kippen? Die Dichte des Würfels ist ϱ.

16. Wie ermitteln Sie den Ort des Schwerpunktes?

Autor: In einigen Fällen haben die Prüflinge Schwierigkeiten, den Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern zu finden. Gibt es bei Ihnen diesbezüglich irgendwelche Unklarheiten?

Leser A: Bei mir schon. Mir ist nicht ganz klar, wie man in den zwei Fällen, die die Bilder 79a und 80a zeigen, die Lage des Schwerpunktes findet.

Autor: Also betrachten wir diese Fälle. Im ersten Fall ist es zweckmäßig, die Figur in zwei Rechtecke zu zerlegen. Der Schwerpunkt des Rechtecks *1* liegt im Punkt A. Die Gewichtskraft F_{G_1} dieses Rechtecks ist seinem Flächeninhalt proportional und zahlenmäßig gleich 6 Einheiten, wie man aus dem Bild leicht erkennt. Der Schwerpunkt des Rechtecks *2* liegt im Punkt B. Die Gewichtskraft F_{G_2} dieses Rechtecks beträgt zahlenmäßig 10 Einheiten. Wir projizieren die Punkte A und B auf die Koordinatenachsen x und y. Die Projektionen auf der x-Achse

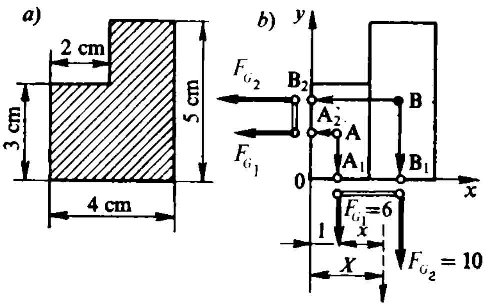


Bild 79

bezeichnen wir mit A_1 und B_1 bzw. mit A_2 und B_2 auf der y-Achse. Weiter betrachten wir die „Stangen" A_1B_1 und A_2B_2 unter der Annahme, daß die Massen

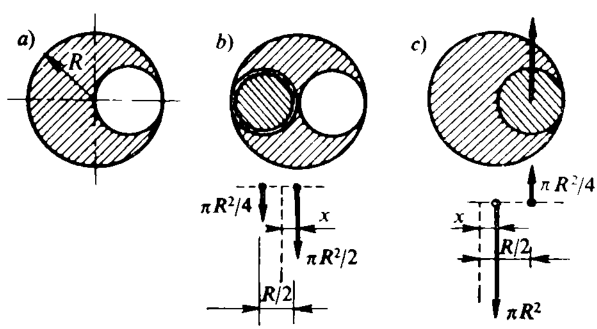


Bild 80

in den Endpunkten der „Stangen" konzentriert sind. Dabei sind diese Massen gleich denen der entsprechenden Rechtecke (siehe Bild 79b). Damit ist die Aufgabe der Schwerpunktbestimmung unserer Figur auf die Aufgabe zurückgeführt, die Schwerpunkte der Stangen A_1B_1 und A_2B_2 zu finden. Deren Schwerpunkte sind die Koordinaten des Schwerpunktes der gegebenen Figur. Bringen wir die Aufgabe zu Ende. Wir bestimmen zuerst die Lage des Schwerpunktes der Stange A_1B_1. Anwendung der gut bekannten Regel über das Kraftmoment (siehe Bild 79b) liefert $6x = 10\,(2 - x)$. Hieraus finden wir $x = 5/4$ cm. Auf diese Weise ist die Koordinate X des gesuchten Schwerpunktes der Figur in dem gewählten Koordinatensystem gefunden: $X = (1 + x)$ cm $= 9/4$ cm. Auf analoge Weise bestimmen wir die Lage des Schwerpunktes der Stange A_2B_2: $6y = 10\,(1 - y)$, woraus $y = 5/8$ cm folgt. Die zweite Koordinate des Schwerpunktes der Figur ist damit $Y =$ $= (1{,}5 + y)$ cm $= 17/8$ cm.

Leser A: Ich habe verstanden. Die Koordinate X des Schwerpunktes der Figur hätte ich auch so gesucht. Ich habe aber bezweifelt, daß man auf die gleiche Art die Koordinate Y finden kann.

Autor: Wir betrachten den zweiten, auf Bild 80a dargestellten Fall. Es sind zwei Zugänge möglich. Man kann beispielsweise an Stelle des gegebenen Kreises mit einem Loch ein System von zwei Figuren betrachten: einen Kreis mit zwei symmetrisch liegenden Löchern und einen Kreis, der in eines der Löcher eingefügt wird (Bild 80b). Die Schwerpunkte dieser Figuren liegen in ihren geometrischen Zentren. Berücksichtigt man, daß die Gewichtskraft F_G des Kreises mit den beiden Löchern dessen Flächeninhalt $(\pi R^2 - 2\pi R^2/4) = \pi R^2/2$ proportional, die Gewichtskraft f_G des kleinen Kreises proportional zu $\pi R^2/4$ ist, kommen wir zu der einfacheren Aufgabe, den Angriffspunkt der Resultierenden zweier Kräfte zu suchen (siehe Bild 80b, unten). Wir bezeichnen mit x den Abstand zwischen gesuchtem Schwerpunkt und Mittelpunkt des großen Kreises. Dann läßt sich entsprechend Bild 80b $(\pi R^2/4)\left(\frac{R}{2} - x\right) =$ $= (\pi R^2/2)\,x$ aufschreiben, woraus sich $x = R/6$ ergibt.

Möglich ist auch ein anderer Lösungsweg der Aufgabe. Man kann den gegebenen Kreis mit einem Loch durch einen kompakten Kreis (ohne irgendwelche Löcher) und einen Kreis, der sich dort befindet, wo das Loch war, ersetzen. Dem zweiten, kleineren Kreis wird eine „negative“ Gewichtskraft gegeben (die Kraft ist nach oben gerichtet). Dieses wird durch den entsprechenden Teil des kompakten Kreises kompensiert (Bild 80c), so daß das Ganze letzten Endes dem Kreis mit dem Loch entspricht. Damit ist die Aufgabe wiederum auf das Aufsuchen des Angriffspunktes der

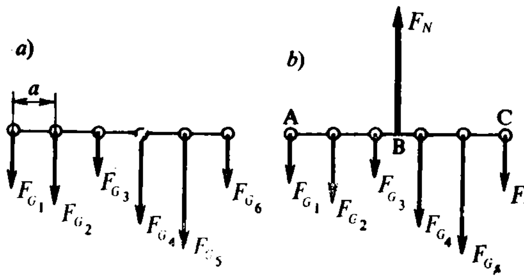


Bild 81

Resultierenden der beiden in Bild 80c unten gezeichneten Kräfte zurückgeführt. Nach diesem Bild ist $\pi R^2 x = \pi R^2 \cdot \left(\frac{R}{2} + x\right)/4$, woraus wir, wie auch bei der vorigen Methode, $x = R/6$ erhalten.

Leser A: Mir gefällt der erste Zugang besser; bei ihm braucht man keine negative Gewichtskraft einzuführen.

Autor: Ich möchte noch eine *Aufgabe zur Schwerpunktbestimmung eines Lastensystems, wie es* Bild 81a *zeigt,* vorschlagen. *Gegeben sind sechs verschiedene Lasten* (F_{G_1}, F_{G_2}, . . ., F_{G_6}), *die längs eines Stabes im gleichen Abstand voneinander verteilt sind. Die Gewichtskraft des Stabes selbst wird vernachlässigt.* Wie würden Sie an diese Aufgabe herangehen?

Leser A: Zuerst würde ich zwei Gewichtskräfte, etwa F_{G_1} und F_{G_2}, betrachten, den Angriffspunkt ihrer Resultierenden suchen, die Resultierende (sie ist $F_{G_1} + F_{G_2}$) in die Zeichnung eintragen und bei der weiteren Betrachtung die Kräfte F_{G_1} und F_{G_2} weglassen. Jetzt hat man an Stelle der sechs nur noch fünf Kräfte. Nun suche ich den Angriffspunkt der Resultierenden zweier weiterer Kräfte usw. Auf diese Weise komme ich durch aufeinanderfolgende Operationen letzten Endes zur gesuchten Resultierenden, zu deren Angriffspunkt und damit zum Schwerpunkt des gegebenen Systems.

Autor: Eine solche Lösungsmethode ist richtig. Jedoch ist sie zu umfangreich. Es gibt eine elegantere Methode. Bei ihr stellen wir uns vor, der Stab sei im Schwerpunkt unterstützt (Punkt B des Bildes 81b).

Leser B (unterbrechend): Aber bis jetzt ist Ihnen die Lage des Schwerpunktes doch nicht bekannt. Woher wissen Sie, daß er zwischen den Angriffspunkten der Kräfte F_{G_3} und F_{G_4} liegt?

Autor: Es ist unwichtig, wohin man auf einer Skizze den Schwerpunkt legt. Ich mache keinen Gebrauch davon, daß in Bild 81b der Schwerpunkt zwischen den Angriffspunkten der Kräfte F_{G_3} und F_{G_4} liegt. Also, wir denken uns den Stab in seinem Schwerpunkt unterstützt. Der Stab befindet sich damit im Gleichgewichtszustand. Außer den sechs Kräften wirkt dabei auf den Stab noch eine Kraft, die Stützkraft F_N. Falls sich der Stab im Gleichgewicht befindet, lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ausnutzen (siehe Abschnitt 15). Wir wenden zunächst die erste Gleichgewichtsbedingung für die Projektion der Kräfte auf die vertikale Richtung an:

$$F_N = F_{G_1} + F_{G_2} + F_{G_3} + F_{G_4} + F_{G_5} + F_{G_6}, \tag{96}$$

danach die zweite Gleichgewichtsbedingung (Momentenbedingung) durch Betrachtung der Kraftmomente bezüglich des Punktes A in Bild 81b (d.h. bezüglich des linken Stabendes). Dann sind alle gegebenen Kräfte bestrebt, den Stab im Uhrzeigersinn zu drehen, die Stützkraft versucht eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn. Wir schreiben

$$F_N \cdot (\overline{AB}) = F_{G_2}a + F_{G_3}2a + F_{G_4}3a + F_{G_5}4a + F_{G_6}5a. \tag{97}$$

Durch Verknüpfen der Bedingungen (96) und (97) finden wir die Strecke $\overline{AB}$, d.h. die Lage des gesuchten Schwerpunktes, gerechnet vom linken Stabende aus:

$$\overline{AB} = \frac{F_{G_2}a + F_{G_3}2a + F_{G_4}3a + F_{G_5}4a + F_{G_6}5a}{F_{G_1} + F_{G_2} + F_{G_3} + F_{G_4} + F_{G_5} + F_{G_6}}. \tag{98}$$

Leser A: Ja, Ihre Methode ist bedeutend einfacher.

Autor: Achten Sie darauf, daß Ihre Lösungsmethode der Aufgabe von der Anzahl der Lasten am Stab (jede zusätzliche Last erschwert die Lösung) abhängt, meine Methode aber wird durch Vergrößerung der Anzahl der Lasten nicht komplizierter. Bei einer zusätzlichen neuen Last wird im Zähler und im Nenner des Ausdrucks (98) jeweils ein Summand addiert.

Leser B: Kann man die Lage des Schwerpunktes des Stabes ermitteln, wenn man nur die Momentenbedingung benutzt?

Autor: Ja, das kann man. Man muß dazu für die Kräfte die Momentengleichgewichtsbedingung bezüglich zweier verschiedener Punkte aufschreiben. Also, machen wir das so. Wir werden die Momentenbedingung der Kräfte bezüglich der Punkte A und C untersuchen (Bild 81b). Bezüglich des Punktes A bedeutet Gleichung (97) die Momentenbedingung. Bezüglich des Punktes C lautet sie

$$F_{\mathrm{N}} \cdot (5a - \overline{AB}) = aF_{\mathrm{G}_5} + 2aF_{\mathrm{G}_4} + 3aF_{\mathrm{G}_3} + 4aF_{\mathrm{G}_2} + 5aF_{\mathrm{G}_1}. \tag{99}$$

Wir dividieren Gl. (97) durch Gl. (99) und erhalten

$$\frac{\overline{AB}}{5a - \overline{AB}} = \frac{F_{\mathrm{G}_2}a + F_{\mathrm{G}_3}2a + F_{\mathrm{G}_4}3a + F_{\mathrm{G}_5}4a + F_{\mathrm{G}_6}5a}{F_{\mathrm{G}_5}a + F_{\mathrm{G}_4}2a + F_{\mathrm{G}_3}3a + F_{\mathrm{G}_2}4a + F_{\mathrm{G}_1}5a}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(\overline{AB})\,(&F_{\mathrm{G}_5}a + F_{\mathrm{G}_4}2a + F_{\mathrm{G}_3}3a + F_{\mathrm{G}_2}4a + F_{\mathrm{G}_1}5a + F_{\mathrm{G}_2}a \\ &+ F_{\mathrm{G}_3}2a + F_{\mathrm{G}_4}3a + F_{\mathrm{G}_5}4a + F_{\mathrm{G}_6}5a) \\ &= 5a\,(F_{\mathrm{G}_2}a + F_{\mathrm{G}_3}2a + F_{\mathrm{G}_4}3a + F_{\mathrm{G}_5}4a + F_{\mathrm{G}_6}5a)\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&\overline{AB} \cdot 5a\,(F_{\mathrm{G}_1} + F_{\mathrm{G}_2} + F_{\mathrm{G}_3} + F_{\mathrm{G}_4} + F_{\mathrm{G}_5} + F_{\mathrm{G}_6}) \\ &= (F_{\mathrm{G}_2}a + F_{\mathrm{G}_3}2a + F_{\mathrm{G}_4}3a + F_{\mathrm{G}_5}4a + F_{\mathrm{G}_6}5a) \cdot 5a.\end{aligned}$$

So kommen wir zum gleichen Ergebnis (98).

Aufgaben

71. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes einer Scheibe, in die zwei kreisförmige Löcher geschnitten sind (Bild 82).

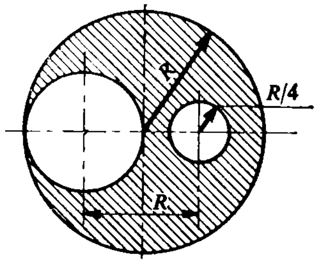


Bild 82

Die Radien der Ausschnitte sind gleich der Hälfte bzw. einem Viertel des Scheibenradius.

72. Ein gleichzeitiges Dreieck der Seitenlänge a ist gegeben. Die Seiten bestehen aus homogenem Material. An den drei Eckpunkten befinden sich die Massen m, $2m$, m. Es sind zwei Fälle bei der Bestimmung des Schwerpunktes zu untersuchen:
1. Die Masse der Dreiecksseiten ist zu vernachlässigen.
2. Die Masse jeder Dreiecksseite beträgt $M = 4\ m$.

17. Kennen Sie das Gesetz von Archimedes?

Autor: Kennen Sie das Gesetz von Archimedes?

Leser B: Natürlich. **Auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper wirkt eine Auftriebskraft, die gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge ist. Hier ist alles sehr einfach.**

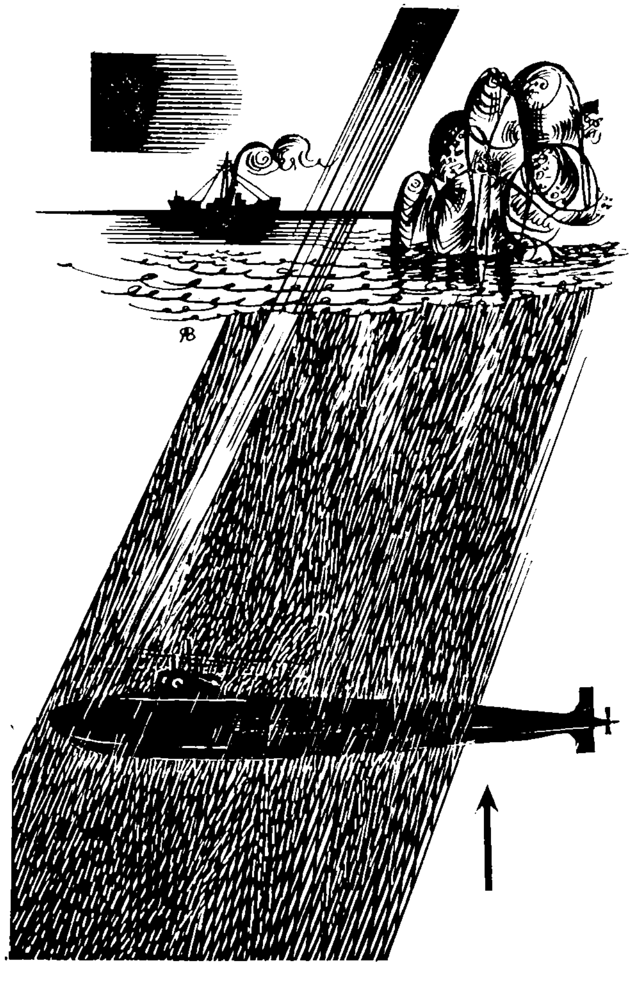
Autor: Übereilen Sie sich nicht mit der Schlußfolgerung bezüglich der Einfachheit.

Leser A: Ich nehme an, daß man bei der Formulierung des Gesetzes von Archimedes nicht vom „Gewicht der Flüssigkeit“, sondern von der „Schwerkraft der Flüssigkeit“ sprechen muß.

Autor: Warum nehmen Sie das an?

Leser A: In Analogie zur Mechanik. Dort haben wir doch überall den früheren Terminus „Gewicht“ durch den Ausdruck „Schwerkraft“ ersetzt. Unter „Gewicht“, so

DAS GESETZ
VON ARCHIMEDES
ERREGT
GEWÖHNLICH
KEINE BESONDERE
AUFMERKSAMKEIT.
DAS IST VÖLLIG
UNGERECHT-
FERTIGT.
AUF DER
GRUNDLAGE
DIESES GESETZES
LASSEN SICH
SEHR
INTERESSANTE
FRAGEN
UND AUFGABEN
AUFSTELLEN.
WIR DISKUTIEREN
FRAGEN ZUR
ANWENDBARKEIT
DIESES GESETZES
AUF KÖRPER IM
SCHWERELOSEN
ZUSTAND.



wurde vereinbart, verstehen wir die Stützkraft einer horizontalen Stütze.

Autor: Hinsichtlich des Gesetzes von Archimedes haben Sie nicht recht. Hier muß man gerade den Terminus „Gewicht" verwenden. Sie können sich davon überzeugen, wenn Sie sich mit dem nächsten Abschnitt vertraut machen. Bevor ich beginne, muß ich bemerken, daß im beschleunigt bewegten Aufzug die Auftriebskraft von der Beschleunigung abhängt. Aber die Schwerkraft kann nicht von der Beschleunigung des Aufzugs abhängen. Nun kehren wir zum Archimedischen Gesetz zurück.

Leser B: Offensichtlich müßte man bezüglich eines Gases ergänzen: Auf einen in Gas „eingetauchten" Körper wirkt auch eine Auftriebskraft.

Autor: Sie haben recht. Aber können Sie mir jetzt die Richtigkeit des Gesetzes von Archimedes beweisen?

Leser A: Die Richtigkeit des Gesetzes beweisen?

Autor: Ja.

Leser A: Aber das Gesetz von Archimedes erhält man doch unmittelbar aus dem Experiment.

Autor: Das ist wahr. Jedoch kann man es aus einfachen energetischen Überlegungen schlußfolgern. Stellen wir uns vor, wir heben irgendeinen Körper mit dem Volumen V und der Dichte ϱ auf die Höhe H empor. Das wird im Vakuum und in einer Flüssigkeit der Dichte ϱ_0 durchgeführt. Im ersten Fall hat man die Energie ϱgVH aufzuwenden (wobei $m = \varrho V$ gilt). Im zweiten Fall erweist sich die aufzuwendende Energie als kleiner. Das erklärt sich wie folgt: Wenn in der Flüssigkeit der Körper vom Volumen V in die Höhe H gebracht wird, sinkt eine Flüssigkeitsmenge des Volumens V um dieselbe Höhe H nach unten. Man hat deshalb im zweiten Fall für das Heben des Körpers nur die Energie $(\varrho gHV - \varrho_0 gHV)$ aufzuwenden. Sieht man den Subtrahenden als Arbeit einer Kraft an, so kann man den Schluß ziehen, daß auf den Körper, im Vergleich mit dem Vakuum, in der Flüssigkeit eine zusätzliche Kraft $F = \varrho_0 gV$ wirkt, die das Anheben des Körpers erleichtert. Diese heißt Auftriebskraft. Es ist unschwer einzusehen, daß sie für einen völlig in die Flüssigkeit eingetauchten Körper gleich dem Gewicht der Flüssigkeit im Volumen

V ist. (Merken Sie sich, daß bei den durchgeführten Überlegungen energetische Verluste, die bei realen Verschiebungen in einer Flüssigkeit mit Reibung zusammenhängen, nicht beachtet wurden.)
Zum Archimedischen Gesetz kann man auch auf einem etwas anderen Weg kommen. Angenommen, der in eine Flüssigkeit vollständig eingetauchte Körper hat die Form eines Zylinders der Höhe h und der Grundfläche S (Bild 83). Der Flüssigkeitsdruck an der Deckfläche des Zylinders sei p. Dann wird der Druck an der Grundfläche gleich $p + \varrho_0 gh$ sein. Auf diese Weise gibt es zwischen Grund- und

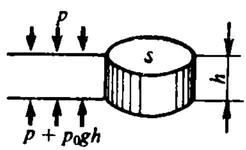


Bild 83

Deckfläche des Zylinders eine Druckdifferenz der Größe $\varrho_0 gh$. Multipliziert man diese Druckdifferenz mit dem Inhalt der Grundfläche, so ergibt sich eine Kraft $F = \varrho_0 ghS$, die den Zylinder nach oben zu treiben versucht. Wegen des Zylindervolumens $V = hS$ erkennt man leicht, daß diese Kraft dieselbe Auftriebskraft wie im Gesetz von Archimedes ist.

Leser A: Ja, ich sehe, man kann zum Archimedischen Gesetz durch rein logisches Schließen gelangen.

Autor: Bevor man Aufgaben löst, sollte man sich an die Bedingungen für das Schwimmen von Körpern erinnern.

Leser A: Ich erinnere mich daran. Das Gewicht eines Körpers ...

Autor (unterbrechend): Gerade das Gewicht, und nicht die Schwerkraft. Fahren Sie fort.

Leser A: **Nach dem Gesetz von Archimedes muß das Gewicht eines Körpers mit der Auftriebskraft, die an dem Körper angreift, im Gleichgewicht stehen.**

Autor: Richtig. Betrachten wir ein solches Beispiel. In einem mit Wasser gefüllten Gefäß schwimmt ein

Stück Eis. Was geschieht mit dem Wasserniveau im Gefäß, wenn das Eis schmilzt?

Leser A: Die Lage des Flüssigkeitsniveaus ändert sich nicht, weil das Gewicht des Eises im Gleichgewicht mit der Auftriebskraft steht und folglich gleich dem Gewicht der vom Eis verdrängten Flüssigkeit (im gegebenen Fall Wasser) ist. Wenn das Eis schmilzt, wandelt es sich in Wasser um, dessen Volumen es vorher verdrängt hatte.

Autor: Vollständig richtig. Aber jetzt nehmen wir an, daß sich beispielsweise innerhalb des Stückes Eis ein Stück Blei befindet. Was ist in diesem Fall mit dem Wasserniveau, nachdem das Eis geschmolzen ist?

Leser A: Wenn ich mich nicht täusche, muß der Wasserspiegel im Gefäß etwas absinken. Jedoch bin ich nicht in der Lage, diese Behauptung zu beweisen.

Autor: Wir bezeichnen mit V das gemeinsame Volumen von Eis und Blei. Das Volumen des Bleistückes sei v. Das vom eingetauchten Teil des Eises verdrängte Wasservolumen nennen wir V_1, die Dichte des Wassers ϱ_0, die Dichte des Eises ϱ_1 und die Dichte von Blei ϱ_2. Das Eisstück mit Blei hat das Gewicht

$$\varrho_1 g (V - v) + \varrho_2 g v.$$

Es steht mit der Kraft $\varrho_0 g V_1$ im Gleichgewicht. Daher ist

$$\varrho_1 g (V - v) + \varrho_2 g v = \varrho_0 g V_1. \qquad (100)$$

Nachdem das Eis geschmolzen ist, hat es sich in Wasser umgewandelt, dessen Volumen V_2 aus der Gleichung

$$\varrho_1 g (V - v) = \varrho_0 g V_2$$

bestimmt wird. Einsetzen dieser Gleichung in Gl. (100) liefert

$$\varrho_0 g V_2 + \varrho_2 g v = \varrho_0 g V_1.$$

Hieraus ergibt sich, daß das Wasservolumen, das man durch das Schmelzen des Eises erhält, gleich

$$V_2 = V_1 - v (\varrho_2/\varrho_0) \qquad (101)$$

ist. Folglich wurde vor dem Schmelzen des Eises das Wasservolumen V_1 verdrängt. Nach dem Schmelzen des Eises nehmen Blei und Schmelzwasser das Volumen $(V_2 + v)$ ein. Um die Frage nach der jeweiligen Lage der Wasseroberflächen im Gefäß zu beantworten, muß man diese Volumina vergleichen. Aus Formel (101) erhalten wir

$$V_2 + v = V_1 - v\frac{\varrho_2 - \varrho_0}{\varrho_0}. \qquad (102)$$

Ist $\varrho_2 > \varrho_0$ (Blei ist schwerer als Wasser), so ersieht man aus (102), daß $(V_2 + v) < V_1$ ist. Das Schmelzen des Eises erniedrigt also das Wasserniveau im Gefäß. Division der Volumendifferenz $V_1 - (V_2 + v)$ durch die Fläche des Gefäßquerschnittes S (wir nehmen vereinfachend an, daß das Gefäß Zylinderform hat) liefert die Höhe h, um die der Wasserspiegel bis zur Beendigung des Schmelzvorgangs absinkt:

$$h = \frac{v}{S} \cdot \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_0} - 1\right). \qquad (103)$$

Haben Sie die Lösung dieser Aufgabe verstanden?

Leser A: Ja, ich habe sie verstanden.

Autor: Dann bringen wir an Stelle des Stückes Blei ein Stück Kork mit dem Volumen v in das Eis. Was geschieht mit dem Wasserniveau beim Schmelzen des Eises? (Die Dichte des Korks sei ϱ_3.)

Leser A: Ich vermute, daß der Wasserspiegel im Gefäß ansteigt.

Autor: Warum?

Leser A: Im Beispiel mit dem Blei sank der Wasserspiegel. Blei ist schwerer als Wasser, Kork aber leichter. Deshalb muß jetzt der entgegengesetzte Effekt auftreten. Der Wasserspiegel muß ansteigen.

Autor: Sie täuschen sich. Ihre Antwort wäre richtig, wenn der Kork nach dem Schmelzen des Eises im Wasser bliebe. Offensichtlich ist das nicht so. Da Kork leichter als Wasser ist, muß er notwendigerweise an die Oberfläche steigen. Der Fall mit dem Kork (wie auch mit einem beliebigen anderen Körper, der leichter als Wasser ist) erfordert eine spezielle Untersuchung. Durch Benutzen des Ergebnisses (101) finden wir die Volumendifferenz der vom Eis mit Kork verdrängten Wassermenge und der Schmelzwassermenge:

$$V_1 - V_2 = v \cdot (\varrho_3/\varrho_0). \tag{104}$$

Wir wenden weiter die Schwimmbedingung für das Korkstück an. Sie lautet:

$$\varrho_3 v = \varrho_0 v_1. \tag{105}$$

Hier ist v_1 das Volumen des ins Wasser eintauchenden Teils des Korks. Einsetzen in Gl. (104) liefert

$$V_1 = V_2 + v_1.$$

Damit erweist sich das Volumen des von dem Stück Eis verdrängten Wassers als genausogroß wie die Summe aus dem Volumen des Schmelzwassers und dem Wasservolumen, das der schwimmende Kork verdrängt. Das bedeutet, im jetzt betrachteten Fall bleibt im Gefäß das Wasserniveau unverändert.

Leser A: Aber wenn an Stelle des Korks einfach eine Luftblase im Eis wäre?

Autor: Nach dem Schmelzen des Eises wird diese Blase nach außen gelangen. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß der Wasserspiegel im Gefäß in genau der gleichen Lage bleibt, wie es vor dem Schmelzen war. Kurz gesagt, das Beispiel mit der Luftblase im Eis ist analog dem Fall des im Eis eingeschlossenen Stück Korks.

Leser A: Ich sehe, daß man an Hand des Archimedischen Gesetzes tatsächlich interessante Fragen und Aufgaben durchdenken kann.

Autor: Leider behandeln einige Prüflinge dieses Gesetz sehr nachlässig. Sie machen sich bei Prüfungsvorbereitungen nicht die Mühe, darüber nachzudenken.

Wir besprechen noch ein Beispiel. Auf einer Waagschale steht ein Gefäß mit Wasser und auf der anderen ein Stativ, an dem eine Last hängt. Die Waagschalen befinden sich im Gleichgewicht (Bild 84a). Nun wird das Stativ so umgedreht, daß sich die an ihm aufgehängte Last vollständig im Wasser befindet. Offensichtlich wird das Gleichgewicht der Waagschalen gestört, weil die Schale mit dem Stativ leichter wird (Bild 84b). Welches Zusatzgewicht ist auf die Schale mit dem Stativ zu legen, damit wieder Gleichgewicht hergestellt wird?

Leser A: Auf die Last wirkt die Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft des Wassers vom Volumen V ist (wir bezeichnen diese Gewichtskraft mit G). Folglich muß man zur Wiederherstellung des Gleichgewichts auf die Schale mit dem Stativ ein Gewicht G legen.

Autor: Sie irren sich. Es wäre gut, an das dritte Gesetz Newtons zu denken. Nach diesem Gesetz gilt: Mit derselben Kraft, mit der das Wasser im Gefäß auf die Last wirkt, wird die Last auf das Wasser wirken, aber in entgegengesetzter Richtung. Folglich wird gleichzeitig mit der Verringerung des Gewichtes der Schale mit Stativ eine Gewichtserhöhung derjenigen

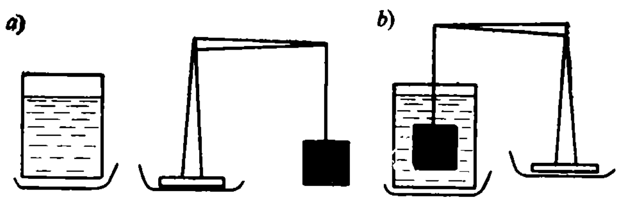


Bild 84

Schale, auf der das Gefäß steht, erfolgen. Daher wird für die Wiederherstellung des Gleichgewichts die doppelte Gewichtskraft benötigt.

Leser A: Irgendwie geht mir Ihre Erklärung nicht ganz ein. Die Wechselwirkung von Last und Wasser im Gefäß ist keiner Wechselwirkung zweier Körper in der Mechanik ähnlich.

Autor: **Der Wirkungsbereich des dritten Newtonschen Gesetzes ist nicht auf die Mechanik beschränkt. Der Satz „die Wirkung ist gleich der Gegenwirkung“ bezieht sich auf die verschiedensten Arten der Wechselwirkung.** Es ist jedoch im vorliegenden Fall nicht schwer, eine andere Erklärung, gegen die Sie sicher nichts einzuwenden haben, zu geben. Wir betrachten das Stativ mit der Last und das Gefäß mit dem Wasser als ein einziges System. Dessen Gesamtgewicht ist offensichtlich gleich der Summe der Gewichte der Waagschalen. Das Gesamtgewicht des Systems kann sich nicht dadurch ändern, daß seine Teile miteinander wechselwirken. Wenn folglich als Ergebnis der Wechselwirkung das Gewicht der rechten Schale um G kleiner wird, so muß das Gewicht der linken Schale um den gleichen Betrag G zunehmen. Nach dem Eintauchen der Last in das Gefäß mit Wasser ist deshalb die Differenz zwischen dem Gewicht der linken und dem der rechten Waagschale gleich $2G$.

Aufgaben

73. Die Gewichtskraft eines Körpers, der in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_1 eintaucht, ist gleich G_1. Taucht er in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_2 ein, so ist seine Gewichtskraft G_2. Gesucht ist die Dichte ϱ des Körpers.

74. Ein Körper mit der Gewichtskraft G, der in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_1 eintaucht, wiegt G_1. In eine Flüssigkeit mit unbekannter Dichte eingetaucht, wiegt er G_2. Es ist die Dichte ϱ_2 der zweiten Flüssigkeit zu bestimmen.

75. In ein zylindrisches Gefäß des Querschnitts S wird Wasser gefüllt. Auf dem Wasser schwimmt ein Stück Eis mit einer eingeschlossenen Bleikugel. Das Volumen des Eisstückes mit Kugel beträgt V. Ein Zwanzigstel dieses Volumens ragt aus dem Wasser heraus. Um welche Höhe h sinkt im Gefäß der Wasserspiegel, wenn das Eis geschmolzen ist? Die Dichten sind: Wasser: $\varrho_W = 1$ g/cm³; Eis: $\varrho_E = 0{,}9$ g/cm³; $\varrho_{Pb} = 11{,}3$ g/cm³.

76. Ein Aräometer, bestehend aus einer mit Schrot gefüllten Kugel und einer zylindrischen Röhre vom Querschnitt S, schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ϱ. Das Aräometer wird etwas weiter in die Flüssigkeit getaucht und losgelassen. Es beginnt, um die Gleichgewichtslage frei zu schwingen. Die Masse des Aräometers sei M. Zu bestimmen ist die Periode der Schwingungen.

18. Gilt das Gesetz von Archimedes in einem Raumschiff?

Autor: Wirkt das Gesetz von Archimedes in einem Raumschiff, das sich im Zustand der Schwerelosigkeit befindet?

Leser A: Meiner Meinung nach wirkt es nicht. Das Wesentliche des Gesetzes von Archimedes hängt doch damit zusammen, daß infolge der unterschiedlichen Dichten von Körper und Flüssigkeit (selbstverständlich seien gleiche Volumina angenommen) unterschiedliche Arbeitsbeträge aufgewendet werden müssen, um sie in ein und dieselbe Höhe zu heben. Im Zustand der Schwerelosigkeit aber fehlt offensichtlich der Unterschied dieser Arbeiten, weil sowohl die Arbeit zum Heben des Körpers als auch die Arbeit zum Heben eines gleichen Flüssigkeitsvolumens Null ist. Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die Druckkraft einer Flüssigkeit auf einen in sie eingetauchten Körper betrachtet. Die Auftriebskraft ist ja eine Folge der Differenz der Druckkräfte, die auf Grund- und Deckfläche des Körpers wirken. Im Zustand der Schwerelosigkeit verschwindet diese Differenz und damit auch die Auftriebskraft. Man muß bemerken, daß es im Zustand der Schwerelosigkeit keinen Unterschied zwischen „oben“ und „unten“ gibt. Man kann daher auch niemals sagen, welche Fläche des Körpers die obere und welche Fläche die untere ist.

Daher wirkt im Zustand der Schwerelosigkeit auf einen Körper innerhalb einer Flüssigkeit keine Auftriebskraft. Das heißt, das Archimedische Gesetz gilt hier nicht.

Leser B: Ich bin mit der letzten Schlußfolgerung des Lesers A nicht einverstanden. Ich bin sicher, daß das Gesetz von Archimedes auch im Zustand der Schwerelosigkeit gilt. Wir wollen sorgfältiger überlegen. Zur Schwerelosigkeit werden wir nicht plötzlich übergeben, sondern zunächst das Fallen eines Aufzugs, der sich mit einer bestimmten Beschleunigung a bewegt, betrachten. Die Beschleunigung a sei so gerichtet wie die Beschleunigung g der Gravitationskraft. Es gelte $a < g$. Es ist nicht schwer zu verstehen, daß hier auf den in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper die Auftriebskraft

$$F = \varrho_0 (g - a) V \qquad (106)$$

wirken wird. Das Gewicht des verdrängten Flüssigkeitsvolumens ist auch gleich $\varrho_0 (g - a) V$. Damit ist die Auftriebskraft auch gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge, das Archimedische Gesetz gilt. Wir vergrößern weiter schrittweise die Beschleunigung a, so daß sich ihr

Wert dem Wert g annähert. Dabei wird nach Gl. (106) die Auftriebskraft schrittweise kleiner, aber gleichzeitig verringert sich genauso das Gewicht eines Flüssigkeitsvolumens, das dem Volumen des Körpers gleich ist. Anders gesagt, während sich die Beschleunigung a der Beschleunigung g annähert, bleibt das Archimedische Gesetz weiter gültig. Im Grenzfall $a = g$ tritt der Zustand der Schwerelosigkeit ein. Dabei wird die Auftriebskraft Null, aber auch das Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge wird Null. Folglich hindert uns nichts zu behaupten: Das Gesetz von Archimedes gilt auch im Zustand der Schwerelosigkeit. Ich möchte meine Erklärung an folgendem Beispiel veranschaulichen. Nehmen wir an, ein Stück Kork schwimmt in einem Gefäß mit Wasser. Gemäß Gl. (105) ist das Verhältnis des in das Wasser eintauchenden Korkteiles zum Volumen des ganzen Korkstückes gleich dem Dichteverhältnis von Kork und Wasser:

$$v_1/v = \varrho_3/\varrho_0. \tag{107}$$

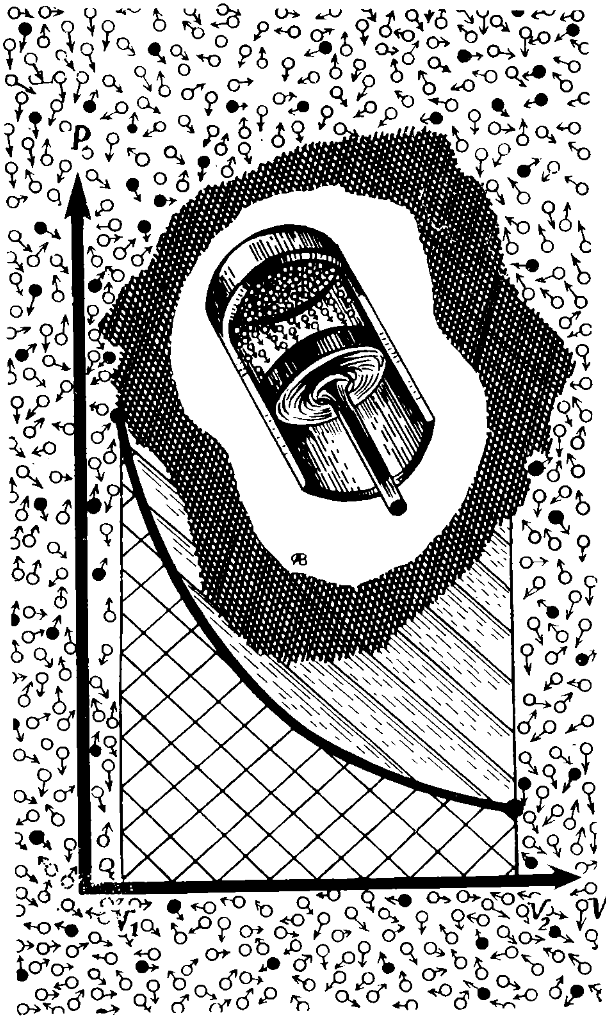
Wir nehmen an, daß sich das Gefäß in einem Aufzug befindet und dieser mit einer bestimmten Beschleunigung zu fallen beginnt. Weil sich hierbei die Dichten von Kork und Wasser nicht ändern, bleibt die Relation (107) erhalten. Bei beschleunigter Bewegung des Aufzugs bleibt die Lage des Korks bezüglich der Wasseroberfläche im Gefäß genau die gleiche wie bei fehlender Beschleunigung. Offenbar ändert sich diese Lage auch im Grenzfall $a = g$ nicht, was ja dem Zustand der Schwerelosigkeit entspricht. So erweist sich die durch das Archimedische Gesetz bestimmte Lage des Korks bezüglich der Wasseroberfläche als nicht von der Beschleunigung des Aufzugs abhängig Man erkennt in diesem Fall keinen Unterschied zwischen fehlender bzw. auftretender Schwerelosigkeit.

Autor: Beide Argumente wurden hinreichend begründet. Jedoch meine Meinung stimmt mit der vom Leser A überein:

Im Zustand der Schwerelosigkeit wirkt das Gesetz von Archimedes nicht.

Leser B: Aber dann müssen Sie meine Beweisführung widerlegen.

DIE MODERNE
PHYSIK
IST IM GRUNDE
EINE
MOLEKULAR-
PHYSIK.
ES IST DESHALB
BESONDERS
WICHTIG,
GERADE
AM EINFACHSTEN
BEISPIEL DES
IDEALEN GASES
DIE GRUNDLAGEN
DER MOLEKULAR-
KINETISCHEN
THEORIE EINES
STOFFES
ZU ERLERNEN.
IM EINZELNEN
KLÄREN WIR
DIE FRAGE NACH
DEN
BESONDERHEITEN
DER THERMISCHEN
AUSDEHNUNG
DES WASSERS.
WIR ANALYSIEREN
DIE GASGESETZE
GENAU
UND WENDEN SIE
AUF DIE LÖSUNG
KONKRETER
TECHNISCHER
AUFGABEN AN.



Autor: Ich werde das jetzt auch versuchen. Ihre Erläuterungen sind auf zwei grundlegenden Überlegungen aufgebaut. Erstens: Bei einer Beschleunigung $a < g$ erfährt der Körper in einer Flüssigkeit einen Auftrieb, wie es das Gesetz von Archimedes fordert; zweitens: Diese Behauptung bleibt auch im Grenzfall $a = g$ in Kraft, also bei Schwerelosigkeit. Gegen die erste Überlegung habe ich nichts einzuwenden, mit der zweiten bin ich jedoch nicht einverstanden.

Leser B: Aber der Kork im Gefäß bleibt doch auch im Zustand der Schwerelosigkeit in derselben Lage! Und seine Lage ist doch durch das Gesetz von Archimedes bedingt.

Autor: Ja, der Kork bleibt auch im Zustand der Schwerelosigkeit in derselben Lage. Jedoch ist in diesem Zustand seine Lage in bezug auf die Flüssigkeitsoberfläche nicht mehr durch das Archimedische Gesetz bedingt. Tauchen Sie in diesem Fall den Kork in die Tiefe des Wassers, so wird er unbeweglich in derjenigen Tiefe schweben, in die Sie ihn gebracht haben. Er wird jedoch beim Auftreten sogar der kleinsten Differenz $(g - a)$ auftauchen und eine Lage einnehmen, die durch das Gesetz von Archimedes bestimmt wird. Auf diese Weise besteht zwischen dem Fall der Schwerelosigkeit und dem Auftreten einer, wenn auch noch so unbedeutenden „Schwere“ ein prinzipieller Unterschied. Anders gesagt, beim Übergang zum Zustand der Schwerelosigkeit tritt „im allerletzten Moment“ ein Sprung auf, der die gesamte Situation qualitativ ändert.

Leser B: Aber womit kann ein solcher Sprung zusammenhängen? Woher kommt er? Wir näherten doch die Beschleunigung a der Beschleunigung g stetig an.

Autor: Diese Frage hängt damit zusammen, daß bei $a = g$ eine bestimmte Symmetrie auftritt: Der Unterschied zwischen „oben“ und „unten“ verschwindet, was Leser A sehr richtig bemerkte. **Wenn die Differenz $(g - a)$ infinitesimal klein, aber noch nicht Null ist, dann gibt es in der Aufgabe eine bestimmte physikalisch ausgezeichnete Richtung von „unten nach oben“. Gerade in dieser Richtung wirkt auch die Auftriebskraft. Jedoch bei $a = g$ verschwindet diese Richtung, und alle Richtungen werden physikalisch gleichwer-**

tig. Hier haben Sie auch Ihren Sprung. Das Aufheben oder Entstehen einer Symmetrie führt immer zu einem Sprung.

19. Was wissen Sie über die molekular-kinetische Theorie der Stoffe?

Autor: Auf Prüfungsbögen findet man folgende Frage: „Welche grundlegenden Prinzipien der molekular-kinetischen Theorie sind Ihnen bekannt?" Was würden Sie auf diese Frage antworten?

Leser A: Ich würde zwei Grundprinzipien nennen. Erstens: Alle Körper bestehen aus Molekülen; zweitens: Die Moleküle befinden sich im Zustand einer chaotischen Wärmebewegung.

Autor: Ihre Antwort ist ganz charakteristisch: lakonisch und unvollständig. Ich habe bemerkt, daß die Studenten daran gewöhnt sind, auf diese Frage formal zu antworten. In der Regel wissen sie nicht, was man zu den grundlegenden Prinzipien der molekular-kinetischen Theorie sagen muß. Sie beseitigen diese Prinzipien, indem sie die Frage nach ihnen mit einigen allgemeinen Phrasen beantworten. Ich halte es daher für notwendig, mich mit Ihnen über die molekular-kinetische Theorie der Stoffe eingehender zu unterhalten. Ich nenne zunächst die Prinzipien der molekular-kinetischen Theorie, die man als grundlegend ansehen kann.

1. **Die Stoffe haben eine „körnige" Struktur; sie bestehen aus Molekülen (Atomen). In einem Mol eines Stoffes befinden sich unabhängig vom Aggregatzustand $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ Moleküle** (N_A heißt Avogadro-Konstante).
2. **Die Moleküle im Stoff unterliegen einer unablässigen Wärmebewegung.**
3. **Der Charakter der Wärmebewegung der Moleküle hängt von der Art der Wechselwirkung der Moleküle untereinander ab. Er verändert sich beim Übergang des Stoffes aus einem in einen anderen Aggregatzustand.**

4. Die Intensität der Wärmebewegung der Moleküle hängt vom Erwärmungsgrad des Körpers ab. Dieser wird durch die absolute Temperatur T charakterisiert. In der Theorie wird bewiesen, daß die mittlere Energie $\bar{\varepsilon}$ eines einzelnen Moleküls proportional zur Temperatur T ist. Zum Beispiel gilt für ein einatomiges Molekül

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT, \tag{108}$$

wobei $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K eine physikalische Konstante, die Boltzmann-Konstante, ist.

5. Vom Gesichtspunkt der molekular-kinetischen Theorie aus betrachtet, stellt die Gesamtenergie E eines Körpers eine Summe folgender Terme dar:

$$E = E_k + E_p + U, \tag{109}$$

wobei E_k die kinetische Energie des Körpers (im Sinne eines Massenpunktes), E_p dessen potentielle Energie in einem äußeren Feld und U diejenige Energie ist, die mit der Wärmebewegung der Moleküle des Körpers zusammenhängt. Die Energie U heißt innere Energie des Körpers. Die Berücksichtigung der inneren Energie des Körpers bei der Betrachtung von Energiebilanzen ist ein charakteristisches Merkmal der molekular-kinetischen Theorie.

Leser B: Wir sind daran gewöhnt, daß sich Fragen über Mole und über die Avogadro-Konstante auf die Chemie beziehen.

Autor: Offenbar wissen deshalb die Teilnehmer an Physikprüfungen nicht, was ein Mol ist. In der Regel glauben sie, daß sich die Avogadro-Konstante nur auf Gase bezieht. Merken Sie sich: 1 Mol eines Stoffes bestimmter Zusammensetzung (z.B. eine Flüssigkeit) ist die Stoffmenge, die aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Nuklids ^{12}C enthalten sind. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Teilchenzahl N und Stoffmenge n ist die Avogadro-Konstante $N_A = N/n = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. Die Zahl $6{,}022 \cdot 10^{23}$ heißt Avogadrosche Zahl.

Ich möchte bemerken, **die Avogadro-Konstante spielt die Rolle einer Art „Brücke“ zwischen Makro- und Mikroeigenschaften eines Stoffes.** So läßt sich bei-

spielsweise mittels der Avogadro-Konstante die mittlere Entfernung der Moleküle (oder Atome) in einem Stoff durch die Dichte und die molare Masse ausdrükken. Nehmen wir als Beispiel festes Eisen.
Seine Dichte ist $\varrho = 7{,}8$ g/cm³, die atomare Masse beträgt $A = 56$. Gesucht ist der mittlere Abstand zwischen den Atomen in Eisen. Wir gehen wie folgt vor: A g Eisen enthalten N_A Atome, d.h., in 1 g Eisen sind N_A/A Atome enthalten. 1 cm³ Eisen enthält demnach $\varrho N_A/A$ Atome. Daher steht jedem Eisenatom das Volumen $A/(\varrho N_A)$ cm³ zur Verfügung.

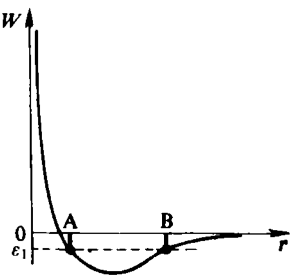


Bild 85

Der gesuchte mittlere Abstand zwischen den Atomen ist näherungsweise gleich der dritten Wurzel aus diesem Volumen:

$$x \approx \sqrt[3]{A/(\varrho N_A)} = \sqrt[3]{56/(7{,}8 \cdot 6 \cdot 10^{23})} \text{ cm} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Leser B: Früher sagten Sie, daß der Charakter der Wärmebewegung der Moleküle von der zwischenmolekularen Wechselwirkung abhängt und sich beim Übergang aus einem Aggregatzustand in einen anderen ändert. Sagen Sie darüber etwas mehr.

Autor: Die Wechselwirkung zweier Moleküle kann qualitativ mittels der Kurve, wie sie Bild 85 zeigt, erklärt werden. Die Kurve gibt die Abhängigkeit der potentiellen Energie W der Wechselwirkung der Moleküle vom Abstand r zwischen den Molekülzentren an. Bei hinreichend großem Abstand zwischen den Molekülen nähert sich die Kurve $W(r)$ asymptotisch der

Null; d.h., praktisch hören die Moleküle auf, miteinander zu wechselwirken. Nähern sich die Moleküle einander, entsteht zwischen ihnen eine Anziehung, die Kurve $W(r)$ fällt. Bei hinreichend großer Annäherung fangen die Moleküle an, einander abzustoßen, die Kurve $W(r)$ beginnt anzusteigen (das Abstoßen bedeutet, daß die Moleküle einander nicht frei durchdringen können). Es ist leicht einzusehen, daß die Kurve $W(r)$ ein charakteristisches Minimum aufweist.

Leser B: Was bedeutet die Negativität der Energie?

Autor: Wie bekannt ist, kann die Energie von einem beliebigen Wert an gemessen werden. Zum Beispiel kann man die potentielle Energie eines Steins vom Boden des gegebenen Ortes aus oder vom Meeresspiegel aus messen; das ist gleichgültig. Im vorliegenden Fall entspricht das Nullniveau der Energie der Wechselwirkung beider Moleküle, die einen unbegrenzt großen Abstand voneinander haben. Deshalb **bedeutet die Negativität der Energie eines Moleküls, daß es sich in einem gebundenen Zustand (mit einem anderen Molekül) befindet. Um dieses Molekül zu „befreien", ist die Zufuhr einer bestimmten Energie notwendig, damit die Energie des Moleküls auf das Nullniveau angehoben wird.**

Wir nehmen an, ein Molekül hat eine negative Energie ε_1 (siehe Bild 85). Aus dem Bild erkennt man, daß sich in diesem Fall Molekül von seinem Nachbarn nicht weiter als bis zum Punkt B entfernen kann. Es kann sich ihm aber auch nicht mehr als bis zum Punkt A nähern. Anders gesagt, das Molekül führt im Feld des Nachbarmoleküls zwischen den Punkten A und B Schwingungen aus (genauer: Im Bereich AB treten Relativschwingungen der beiden Moleküle, die ein gebundenes System bilden, auf).

In einem Gas sind die Molekülabstände im Mittel so groß, daß man praktisch von einer Wechselwirkung der Moleküle untereinander absehen kann. Jedes Molekül bewegt sich frei, und es kommt verhältnismäßig selten zu Zusammenstößen. Dabei **nimmt jedes Molekül an drei Bewegungsarten teil: Translation, Rotation (das Molekül dreht sich um seine eigene Achse) und Schwingung (die Atome im Molekül schwingen**

relativ zueinander). Wenn das Molekül einatomig ist, so gibt es nur die Translationsbewegung.
In einem Kristall sind die Moleküle so eng benachbart, daß sie alle zusammen ein einziges gebundenes System bilden. Jedes Molekül führt hier im Kraftfeld Schwingungen aus, das durch die Wechselwirkungsenergie des gesamten Kollektivs der Moleküle bedingt ist. Für einen Kristall als einheitliches gebundenes Molekülsystem ist die Existenz einer geordneten räumlichen Struktur — das Kristallgitter — charakteristisch. Die Gitterpunkte bedeuten die Gleichgewichtslagen der einzelnen Moleküle. Um diese Gleichgewichtslagen vollführen die Moleküle komplizierte Schwingungsbewegungen.
Es ist zu bemerken, daß in einigen Fällen bei der Kristallbildung die Moleküle in gewisser Hinsicht ihre Individualität beibehalten. Man muß dann die Schwingungen der Moleküle im Kristallfeld von den Schwingungen der Atome innerhalb der einzelnen Moleküle unterscheiden. Eine derartige Erscheinung tritt auf, wenn die Bindungsenergie der Atome innerhalb der Moleküle bedeutend größer als die Bindungsenergie der Moleküle im Kristallgitter ist. Jedoch behalten in den meisten der Fälle die Moleküle bei der Kristallbildung ihre Individualität nicht bei, so daß sich der Kristall als aus einzelnen Atomen — und nicht aus Molekülen — aufgebaut erweist. In diesem Fall fehlen offensichtlich die innermolekularen Schwingungen, es gibt nur Schwingungen der Atome im Kristallfeld. Das ist das Minimum an Wissen über den Charakter der atomaren und molekularen Wärmebewegung in Stoffen, das ein Prüfungskandidat parat haben sollte. Gewöhnlich beschränken sich die Prüflinge bezüglich des Charakters der Wärmebewegung in einem Stoff auf die Worte „chaotische Bewegung“, um das Fehlen detaillierter Kenntnisse über die Wärmebewegung zu verdecken.

Leser B: Aber Sie haben nichts über die Wärmebewegung der Moleküle in einer Flüssigkeit gesagt.

Autor: Der Charakter der Wärmebewegung in einer Flüssigkeit ist am kompliziertesten. Eine Flüssigkeit, die zwischen Gas und Kristall eine Zwischenstellung ein-

nimmt, verfügt in bedeutendem Maße neben einer großen Wechselwirkung der Teilchen untereinander über strukturelle Unordnung. Die durch die große Wechselwirkung der Teilchen bedingten Schwierigkeiten, die bei der Untersuchung von Kristallen auftreten, werden in hohem Maße durch die geordnete Struktur, das Kristallgitter, kompensiert. Die bei der Untersuchung von Gasen auftretenden Schwierigkeiten, bedingt durch die ungeordneten Lagen der Teilchen, werden praktisch durch die fehlende Wechselwirkung der Teilchen untereinander kompensiert. Im Fall der Flüssigkeit treten beide genannte Schwierigkeiten bei gleichzeitigem Fehlen der entsprechenden kompensierenden Sachverhalte auf. Man kann sagen, daß in der Regel die Moleküle einer Flüssigkeit ihre Individualität beibehalten. Für eine Flüssigkeit ist das Auftreten der verschiedensten Bewegungstypen charakteristisch: Verschiebung der Moleküle, Drehung der Moleküle, Schwingungen der Atome innerhalb der Moleküle, Schwingungen der Moleküle im Feld der Nachbarmoleküle. Die größte Schwierigkeit besteht darin, daß, genau gesagt, diese Bewegungstypen niemals voneinander isoliert („in der reinen Form", wie man sagt) untersucht werden können. Es besteht eine starke gegenseitige Beeinflussung der verschiedenen Bewegungen untereinander.

Leser B: Ich verstehe nicht, wie man die Translationsbewegung eines Moleküls mit seiner Schwingungsbewegung im Feld der Nachbarmoleküle kombinieren kann.

Autor: Es gibt verschiedene Modelle, bei denen versucht wird, die erwähnten Bewegungen zu kombinieren. Zum Beispiel wird in einem Modell angenommen, daß sich ein Molekül wie folgt verhält: Es schwingt eine gewisse Zeit im Feld des Nachbarn, dann macht es einen Sprung, geht dabei in eine neue Umgebung über, schwingt in dieser neuen Umgebung, macht erneut einen Sprung usw. Dieses Modell heißt „Sprung-Diffusions-Modell".

Leser B: Ich glaube, daß die Diffusion der Atome in Kristallen ebenso vor sich geht.

Autor: Sie haben recht. Nur muß man berücksichtigen, daß bei Kristallen dieser Prozeß viel langsamer abläuft. Die Sprünge in eine neue Umgebung erfolgen bedeutend seltener.

Es gibt noch ein anderes Modell. Nach ihm verhält sich ein Molekül in einer Flüssigkeit folgendermaßen: Es führt in der Umgebung seiner Nachbarn Schwingungen aus, aber diese Umgebung wechselt selbst fließend den Ort im Raum (sie „schwimmt") und deformiert sich dabei allmählich. Dieses Modell heißt „Modell der kontinuierlichen Diffusion".

Leser B: Sie haben gesagt, daß eine Flüssigkeit einen zwischen Kristallen und Gasen liegenden Charakter hat. Wem steht sie näher?

Autor: Und wie denken Sie selbst?

Leser B: Mir scheint, daß eine Flüssigkeit doch näher beim Gas liegt.

Autor: In Wirklichkeit jedoch gehört die Flüssigkeit näher zum Kristall. Darauf weist schon der geringe Unterschied bei den Dichten, spezifischen Wärmen und Volumenausdehnungskoeffizienten bei Flüssigkeiten und Kristallen hin. Bekannt ist auch, daß die Schmelzwärme wesentlich kleiner als die Verdampfungswärme ist. Alle diese Zeugnisse sprechen **für eine beträchtliche Ähnlichkeit der Teilchenbindung in Kristallen und Flüssigkeiten.** Die genannte Ähnlichkeit zeigt sich auch bei Streuexperimenten mit Röntgenstrahlen. In Flüssigkeiten gibt es Bereiche mit geordneter Atomanordnung. Man spricht hier von „Nahordnung".

Leser B: Was ist das?

Autor: Nahordnung heißt eine geordnete Anordnung einer bestimmten Zahl von nächsten Nachbarn um ein beliebig ausgewähltes Atom (Molekül). Im Gegensatz zum Kristall bleibt diese geordnete Anordnung relativ zum ausgewählten Atom mit wachsender Entfernung von ihm nicht erhalten, sie führt nicht zur Bildung eines Kristallgitters. Für geringe Entfernungen stimmt sie jedoch völlig mit der Atomanordnung in der festen Phase überein. In Bild 86a ist die Fernordnung für eine Atomkette dargestellt. Sie wird mit der in Bild 86b skizzierten Nahordnung verglichen. **Die annähernde Gleichartigkeit zwischen Flüssigkeiten und Kristallen hat zum Begriff „Quasikristallität" der Flüssigkeit geführt.**

Leser B: Aber in einem solchen Fall kann man doch offensichtlich eine Flüssigkeit in Analogie zu den Kristallen behandeln.

Autor: Man muß vor dem Mißbrauch des Begriffs Quasikristallität der Flüssigkeit warnen. Man darf ihm keine allzu große Bedeutung beimessen. Als erstes muß man beachten, daß der flüssige Zustand einem breiten Temperaturbereich angehört. Man darf daher

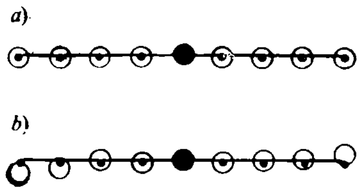


Bild 86

nicht erwarten, daß struktur-dynamische Eigenschaften von Flüssigkeiten in diesem Bereich gleich (oder auch nur annähernd gleich) bleiben. **In der Nähe des kritischen Zustandes muß die Flüssigkeit offenbar ihre Ähnlichkeit zum Festkörper verlieren und allmählich in die Gasphase übergehen.** Wenn das Konzept der Quasikristallität von Flüssigkeiten überhaupt irgendwo gerechtfertigt ist, dann nur in einer nicht zu großen Entfernung vom Schmelzpunkt. Zum zweiten ist der Charakter der zwischenmolekularen Wechselwirkungen in verschiedenen Flüssigkeiten unterschiedlich. Folglich ist das Konzept der Quasikristallität nicht auf alle Flüssigkeiten in gleicher Weise übertragbar. So ist beispielsweise Wasser eine in höherem Maße quasikristalline Flüssigkeit als geschmolzene Metalle, wodurch die Besonderheiten seiner Eigenschaften (siehe Abschnitt 20) bedingt sind.

Leser B: Ich sehe, daß ein einfaches Bild für die Wärmebewegung der Moleküle in einer Flüssigkeit nicht existiert.

Autor: Sie haben recht. Relativ einfach sind nur Extremfälle. Zwischen ihnen liegende Fälle sind immer kompliziert.

Leser A: Im Prüfungsprogramm für Anfänger steht die Frage nach der Grundlage der molekular-kinetischen

Theorie der Stoffe. Sicher soll man hier etwas über die Brownsche Bewegung sagen?

Autor: Ja, die Brownsche Bewegung ist die wesentlichste Grundlage der molekular-kinetischen Theorie. Wissen Sie aber, was die Brownsche Bewegung ist?

Leser A: Das ist die Wärmebewegung der Moleküle.

Autor: Sie irren sich, denn die Brownsche Bewegung läßt sich mit den üblichen Mikroskopen beobachten. **Die Brownsche Bewegung ist die Bewegung einzelner Stoffteilchen unter der Einwirkung von Stößen der Moleküle der Umgebung, die der Wärmebewegung unterliegen. Die Stoffteilchen stellen nach molekularer Betrachtungsweise makroskopische Körper dar, obwohl sie im Vergleich mit unseren gewohnten Maßstäben sehr klein sind. Als Folge der zufälligen unkompensierten Molekülstöße erleiden die Brownschen Teilchen chaotische Ortsschwankungen innerhalb des Stoffes, der im allgemeinen eine Flüssigkeit ist.**

Leser B: Aber warum müssen die Brownschen Teilchen verhältnismäßig klein sein? Warum kann man die Brownsche Bewegung nicht für bemerkbare Stoffkörnchen, etwa Teeblättchen in einem Glas, beobachten?

Autor: Dafür gibt es zwei Gründe. Erstens ist die Anzahl der Stöße der Moleküle auf die Oberfläche eines Teilchens der Größe dieser Oberfläche proportional, und die Masse des Teilchens ist seinem Volumen proportional. Daher wächst mit der Vergrößerung des Teilchenradius R die Anzahl der Molekülstöße auf die Teilchenoberfläche gemäß R^2 an, während sich die Teilchenmasse, die unter der Stoßeinwirkung ihren Ort verändern muß, mit R^3 vergrößert. Es wird daher für die Moleküle immer schwieriger, das Teilchen, wenn dessen Größe zunimmt, wegzustoßen. Betrachten Sie zum besseren Verständnis die Kurven $y = R^2$ und $y = R^3$ des Bildes 87. Es ist leicht einzusehen, daß bei kleinem R die quadratische Abhängigkeit, bei großem R die kubische Abhängigkeit dominiert. Bei kleinen R-Werten überwiegen also Oberflächeneffekte, bei großen R-Werten überwiegen die Volumeneffekte. Zweitens müssen die Brownschen Teilchen klein sein, damit die Molekülstöße sich nicht gegenseitig kompensieren; d.h., die Anzahl der Stöße auf ein Teilchen in der Zeiteinheit muß auf der linken Seite verschieden sein von derjenigen auf der rechten Seite. Das Verhältnis dieses Unterschiedes der Anzahl der Stöße zur Gesamtstoßzahl wird um so größer, je kleiner die Teilchenoberfläche ist.

Wir betrachten auf der Basis der molekular-kinetischen Vorstellungen das Verdampfen und Sieden einer Flüssigkeit. Wie erklären Sie die Erscheinung des Verdampfens?

Leser A: Das Verdampfen besteht darin, daß die schnellsten Flüssigkeitsmoleküle die Anziehung seitens der

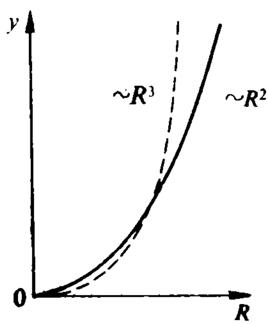


Bild 87

anderen Moleküle überwinden und aus der Flüssigkeit herausfliegen.

Autor: Wodurch wird eine Steigerung des Verdampfens erreicht?

Leser A: Erstens durch eine Oberflächenvergrößerung der Flüssigkeit und zweitens durch Erwärmung der Flüssigkeit.

Autor: Es ist wichtig zu merken, **der Verdampfungsprozeß ist kein einseitiger, sondern ein zweiseitiger Prozeß: Während ein Teil der Moleküle die Flüssigkeit verläßt, kehren auch teilweise Moleküle in die Flüssigkeit zurück.** Das Verdampfen wird um so intensiver vor sich gehen, je stärker der Prozeß des Austritts von Molekülen aus der Flüssigkeit den umgekehrten Prozeß überwiegt. Erwärmung der Flüssigkeit und Vergrößerung ihrer Oberfläche verstärken den Prozeß, daß Moleküle die Flüssigkeit verlassen. Gleichzeitig kann man zur Erhöhung der Verdampfungsgeschwindigkeit Maßnahmen ergreifen, die den Prozeß der Rückkehr von Molekülen in die Flüssigkeit erschweren. Zum Beispiel werden bei Wind die aus der Flüssigkeit austretenden Moleküle weggeführt, wodurch sich die Wahrscheinlichkeit, in die Flüssigkeit zurückzukehren, verringert. Deshalb trocknet bei Wind nasse Wäsche schneller. **Wenn sich die Prozesse Austritt von Molekülen aus der Flüssigkeit und Rückkehr in die Flüssigkeit gegenseitig kompensieren, so liegt ein Zustand des dynamischen Gleichgewichts vor, der Dampf über der Flüssigkeitsoberfläche ist gesättigt.** In einigen Fällen ist es nützlich, den Verdampfungsprozeß zu hemmen. Beispielsweise ist es nicht wünschenswert, daß die Feuchtigkeit aus Brot schnell verdunstet. Zur Vermeidung einer vorzeitigen Austrocknung des Brotes bewahrt man es in einem geschlossenen Gefäß auf. Für die verdampften Moleküle ist dadurch eine Barriere errichtet, sie können nicht weggeführt werden. Über der Brotoberfläche bildet sich eine Schicht gesättigten Dampfes, die das weitere Verdampfen des Wassers aus dem Brot hemmt.

Aber jetzt erklären Sie den Prozeß des Siedens!

Leser A: Der Siedeprozeß ist der gleiche Prozeß wie das Verdampfen, er läuft jedoch wesentlich intensiver ab.

Autor: Ihre Definition des Siedeprozesses gefällt mir gar nicht. Ich muß sagen, daß viele Prüflinge das Wesentliche dieses Prozesses nicht verstehen. Durch Erwärmen der Flüssigkeit sinkt die Löslichkeit der in ihr enthaltenen Gase. Die Folge davon ist das Auftreten von Gasbläschen im Inneren der Flüssigkeit (auf dem Boden und an den Wänden des Gefäßes). In diesen Bläschen geht das Verdampfen vor sich, die Bläschen sind mit gesättigtem Dampf gefüllt, dessen Druck mit zunehmender Temperatur wächst. Bei einer bestimmten Temperatur wird in den Bläschen der Druck des gesättigten Dampfes gleich dem Außendruck auf die Bläschen. (Der Außendruck setzt sich aus dem Atmosphärendruck und dem Druck der Wasserschicht über einem Bläschen zusammen.) Von da an steigen die Bläschen nach oben, die Flüssigkeit siedet. Man sieht, **das Sieden einer Flüssigkeit unter-**

scheidet sich völlig vom Verdampfen. Man muß sich merken, daß das Verdampfen bei jeder beliebigen Temperatur vor sich geht, das Sieden jedoch nur bei einer bestimmten Temperatur, dem sogenannten Siedepunkt. Es sei daran erinnert, daß beim Beginn des Siedens, ungeachtet einer dauernden Wärmezufuhr, die Temperatur nicht mehr steigt. Sie bleibt beim Siedepunkt, bis die gesamte Flüssigkeit verdampft ist.

Aus den durchgeführten Erörterungen entnimmt man, daß mit einer Verringerung des Außendruckes die Siedetemperatur der Flüssigkeit sinken muß. Wir wollen hierzu folgendes Problem untersuchen. *In einem Kolben befindet sich eine bestimmte Menge Wasser bei Zimmertemperatur. Wir beginnen, die Luft, die sich im Kolben oberhalb des Wassers befindet, abzupumpen. Was wird mit dem Wasser vor sich gehen?*

Leser A: Durch das Abpumpen der Luft verringert sich der Druck im Kolben. Ist der Siedepunkt bis auf Zimmertemperatur gesunken, so siedet das Wasser im Kolben.

Autor: Aber muß das Wasser sieden, könnte es — im Gegenteil — nicht gefrieren?

Leser A: Das weiß ich nicht. Ich glaube nicht, daß das möglich ist.

Autor: Das hängt davon ab, auf welche Weise der Abpumpprozeß der Luft aus dem Kolben vor sich geht. Verläuft er hinreichend langsam, so muß das Wasser früher oder später sieden. Erfolgt dagegen das Auspumpen sehr schnell, so gefriert das Wasser. Durch das Abpumpen der Luft und gleichzeitig des Wasserdampfes intensiviert sich der Verdampfungsprozeß. Da beim Verdampfen Moleküle mit höherer Energie das Wasser verlassen, kühlt sich dieses ab. Bei langsamem Abpumpen wird die Abkühlung des Wassers durch Wärmezufuhr von außen kompensiert, die Wassertemperatur bleibt konstant. Erfolgt jedoch das Abpumpen sehr rasch, so kann die Abkühlung des Wassers durch Zuführen von Wärme nicht kompensiert werden, die Wassertemperatur sinkt. Damit wird auch die Möglichkeit, daß das Wasser siedet, geringer. Weiteres schnelles Auspumpen des Kolbens führt zum Sinken der Wassertemperatur bis zum Erstarrungspunkt und schließlich zu einer Umwandlung des noch nicht verdampften Wassers in Eis.

20. Wodurch erklärt sich die Besonderheit der thermischen Ausdehnung des Wassers?

Autor: Worin besteht die Besonderheit der Wärmeausdehnung des Wassers?

Leser A: Bei einer Erwärmung von 0 °C auf 4 °C nimmt die Dichte des Wassers zu. Nur bei weiterer Temperaturerhöhung (ab 4 °C) dehnt sich das Wasser aus.

Autor: Wodurch erklärt sich diese Besonderheit?

Leser A: Das weiß ich nicht.

Autor: Zur Erklärung dieser Besonderheit muß man die atomare Struktur des Wassers betrachten. **Die Wassermoleküle wechselwirken nur in bestimmten**

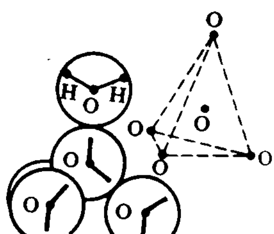


Bild 88

Richtungen miteinander: Jedes Wassermolekül kann nur vier benachbarte Moleküle anlagern, deren Zentren dann einen Tetraeder (Bild 88) **bilden.** Dadurch ergibt sich eine ziemlich lockere, durchsichtige Struktur, die für die Quasikristallität des Wassers spricht. Selbstverständlich kann man von einer Struktur des Wassers (wie auch bei anderen Flüssigkeiten) nur im Rahmen einer Nahordnung (siehe Abschnitt 19) sprechen. Mit dem Vergrößern des Abstandes von einem einzelnen Molekül beobachtet man eine allmähliche Verzerrung dieser Ordnung. Sie ist auf Knicke und Risse in den zwischenmolekularen Bindungen zurückzuführen. Die Bindungen zwischen den Molekülen brechen mit dem Erhöhen der Temperatur auf, die Anzahl der Moleküle mit freien Bindungen wächst. Diese füllen die Lücken der Tetraederstruktur auf. Der Grad der Quasikristallität des Wassers verringert sich. Die oben genannte Struktur des Wassers als quasikristalline Substanz erklärt die Anomalie der physikalischen Eigenschaften des Wassers und speziell die Besonderheit der Wärmeausdehnung gut. Einerseits führt Temperaturerhöhung zu einem Vergrößern der mittleren Abstände zwischen den Atomen eines Moleküls infolge der Verstärkung innermolekularer Schwingungen; d. h., die Moleküle scheinen sich leicht „aufzublähen". Andererseits führt Temperaturerhöhung zu einer Strukturänderung, es kommt dabei zu einer dichteren Packung der Moleküle selbst. Der erste Effekt (Schwingungseffekt) sollte zu einer Abnahme der Dichte des Wassers führen. Das ist der Effekt, der die Wärmeausdehnung von Festkörpern bedingt. Der zweite Effekt (Strukturänderungseffekt) sollte im Gegensatz dazu bei zunehmender Temperatur die Dichte erhöhen. Bei Erwärmen bis zu 4 °C überwiegt der Struktureffekt, deshalb wächst die Dichte des Wassers. Bei weiterem Erwärmen beginnt der Schwingungseffekt zu dominieren, deshalb verringert sich die Dichte des Wassers.

21. Wissen Sie, was ein ideales Gas ist?

Autor: Wissen Sie, was ein ideales Gas ist?

Leser A: Das ist ein Gas, für das alle uns bekannten Gasgesetze gelten: das Gay-Lussacsche Gesetz, das Boyle-Mariottesche Gesetz, das allgemeine Gasgesetz (Gleichung des idealen Gases).

Leser B: Es ist ein solches Gas, dessen Moleküle nicht miteinander wechselwirken. Das ideale Gas ist ein vereinfachtes Modell für ein reales Gas.

Autor: Es ist wahr, daß alle Ihnen bekannten Gasgesetze gerade auf ideale Gase angewendet werden. Ebenso richtig ist, daß ein ideales Gas ein vereinfachtes Modell eines realen Gases ist. Nicht ganz richtig gewesen ist jedoch die Bemerkung über das Fehlen von Wechselwirkungen der Moleküle in einem idealen Gas. **Bei einem idealen Gas werden nicht die Wechselwirkungen der Moleküle vernachlässigt, sondern die Energie der Wechselwirkungen. Infolgedessen ist die innere Energie U des idealen Gases die Summe der kinetischen Energien der Moleküle.** Hat man etwa N Moleküle eines idealen Gases, von denen jedes durch eine mittlere kinetische Energie $\bar{\varepsilon}$ charakterisiert ist, so kann die innere Energie U dieses Gases in der Form

$$U = N\bar{\varepsilon} + U' \tag{110}$$

für den allgemeinen Fall geschrieben werden. U' bedeutet hier die potentielle Energie der Wechselwirkung der Moleküle. Im Fall des idealen Gases erhalten wir aus (110)

$$U = N\bar{\varepsilon} \tag{111}$$

oder unter Benutzen der Gleichung (108)

$$U = \frac{3}{2} NkT. \tag{112}$$

Leser B: Kann man immer die Wechselwirkungsenergie U' vernachlässigen?

Autor: Selbstverständlich nicht immer. Es muß die Bedingung

$$N\bar{\varepsilon} \gg U' \tag{113}$$

erfüllt sein. Man muß also eine sehr große kinetische Energie $N\bar{\varepsilon}$ und eine sehr kleine Energie U' haben. Die erste Bedingung ist bei hinreichend hohen Temperaturen, die zweite bei hinreichend starker Verdünnung des Gases erfüllt. Mit anderen Worten, **ein Gas kann als ideal betrachtet werden, wenn es hinreichend erwärmt und verdünnt ist.** Bei Abkühlung und Verdichtung des Gases kommen wir früher oder später zu der Situation, daß man die Wechselwirkungsenergie der Moleküle berücksichtigen muß. Gase wie Stickstoff oder Sauerstoff können unter gewöhnlichen Bedingungen als ideale Gase betrachtet werden.

Leser A: Was verstehen Sie unter „gewöhnlichen Bedingungen"?

Autor: Bedingungen, die nahe den Normalbedingungen liegen. Ich erinnere Sie, daß die Normaltemperatur 273 K (0 °C) ist, der Normaldruck beträgt $1{,}02 \cdot 10^5$ Pa (1 Pa = 1 N/m²). Nun stellen Sie sich vor, Sie haben eine bestimmte Menge eines idealen Gases. Welche Parameter bestimmen dessen Zustand?

Leser A: Der Druck p, das Volumen V und die Temperatur t.

Leser B: Aller Wahrscheinlichkeit nach ist es zweckmäßiger, die Temperatur in der absoluten Skale (T) zu verwenden. Außerdem gibt es noch einen Parameter, nämlich die Masse m des Gases.

Autor: Sie haben recht. Es ist nur zu ergänzen, daß man an Stelle der Masse m die Zahl N der Gasmoleküle verwenden kann. Weiter denken Sie über folgende Frage nach: Kann man irgendeinen der vier genannten Parameter (p, V, T, N) ändern, ohne dabei die anderen Parameter zu verändern?

Leser A: Meiner Meinung nach, nicht ...

Leser B: Man kann zwei Parameter ändern, ohne dabei die anderen Parameter zu ändern.

Autor: Ja, richtig. Man kann sogar drei Parameter ändern, wenn der vierte unverändert bleibt. Man kann auch alle vier Parameter ändern. Man kann aber niemals einen Parameter ändern, ohne dabei die anderen Parameter zu verändern. Das bedeutet, **zwischen den vier Parametern p, V, T, N besteht eine bestimmte Beziehung. Der Ausdruck, der diese Beziehung analytisch beschreibt, heißt Zustandsgleichung des idealen Gases.** In Anbetracht der Bedeutung dieser Gleichung bringen wir für sie einen vereinfachten Beweis. Vereinfachend nehmen wir an, daß alle Gasmoleküle die einheitliche Geschwindigkeit v haben und sich nur in den sechs Richtungen längs der Achsen x, y, z und zurück bewegen.

Den Druck p erhält man aus der Normalkomponente der Kraft, die beispielsweise auf die Flächeneinheit der Gefäßwand wirkt. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Kraft gleich der zeitlichen Änderung des Impulses. Das bedeutet: Der Druck auf die Wand ist gleich der Summe der Impulsänderungen der Moleküle, die in der Zeiteinheit auf eine Flächeneinheit der Wand auftreffen. Nehmen wir an, daß ein Molekül der Masse m mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Wand fliegt. Bei einem elastischen Stoß auf die Wand ändert das Molekül seine Bewegung in die entgegengesetzte Richtung und fliegt von der Wand mit derselben Geschwindigkeit zurück. Die Impulsänderung des Moleküls ist gleich $2mv$. Treffen auf die Wandfläche mit dem

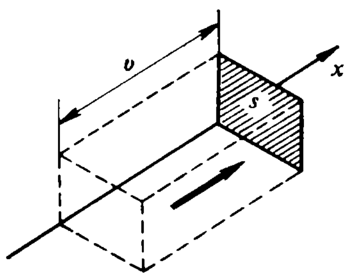


Bild 89

Flächeninhalt S in der Zeiteinheit n Moleküle auf, wobei sich alle Moleküle senkrecht zur Wand mit der gleichen Geschwindigkeit v bewegen sollen, so wird

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2mvn}{S}. \qquad (114)$$

Wir betrachten nun die Fläche S, die senkrecht zur x-Achse steht (Bild 89). Vereinfachend setzen wir voraus, daß $\frac{1}{6}$ aller Moleküle sich längs der x-Achse auf diese Fläche zubewegt. In der Zeiteinheit treffen alle diejenigen Moleküle auf die Fläche S auf, die sich im Volumen $v \cdot S$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds, das im Bild dargestellt ist, befinden.

Die Anzahl dieser Moleküle ist gleich $\frac{1}{6} \cdot \frac{N}{F} \cdot vS$. Das ist auch die Größe n, die im Ausdruck (114) auftritt. Damit erhalten wir

$$p = \frac{2mvn}{S} = \frac{1}{3} mv^2 \cdot \frac{N}{V}.$$

Da $mv^2/2 = \bar{\varepsilon} = 3\,kT/2$ ist, ergibt sich

$$\boldsymbol{pV = NkT}. \tag{115}$$

Das ist die gesuchte Zustandsgleichung des idealen Gases. Man hat sich unbedingt zu merken, daß, obwohl wir Gleichung (115) unter vereinfachten Voraussetzungen gewonnen haben, das Endergebnis exakt ist. (Das gleiche Resultat hätte sich ergeben, wenn wir nicht die erwähnten großen Vereinfachungen vorgenommen hätten.)

Leser A: Ich bin noch nie auf eine solche Gleichung gestoßen.

Autor: Im Gegenteil, sie müßte Ihnen bekannt sein. Es gilt

$$N = N_A \frac{m}{\mu}; \tag{116}$$

hier ist N_A die Avogadro-Konstante, m die Masse des Gases, μ die Masse eines Mols, so daß m/μ die Anzahl der Mole des Gases ist. Setzen wir Gl. (116) in Gl. (115) ein, so erhalten wir

$$pV = N_A \frac{m}{\mu} kT.$$

Durch Einführen der weiteren Beziehung

$$N_A k = R, \tag{117}$$

wobei R die universelle Gaskonstante ist, finden wir

$$\boldsymbol{pV = \frac{m}{\mu} RT}. \tag{118}$$

Leser B: Diese Gleichung ist uns bekannt. Sie heißt Gleichung von Mendelejew-Clapeyron.

Autor: So ist es. Das ist eine Form der Zustandsgleichung des idealen Gases.

Leser A: Sie beschreibt das allgemeine Gasgesetz.

Autor: Aber nun gestatten Sie mir, eine ganz wesentliche Bemerkung zu machen. Das allgemeine Gasgesetz hat damit nichts zu tun. Wir nehmen an, daß alle Gasgesetze irgendeine beliebige Änderung des Gaszustandes beschreiben und eine Beziehung zwischen den Parametern des Ausgangszustandes und den Parametern des Endzustandes herstellen. Die Ausdrücke (115) und (118) beschreiben aber eine Beziehung zwischen den Parametern ein und desselben Zustandes.

Leser A: Aber wie läßt sich die Gleichung für das allgemeine Gasgesetz formulieren?

Autor: Zu den Gasgesetzen gehen wir gleich über. Ich möchte aber erst noch eine Bemerkung zum Zustand eines Gases machen. Wir nehmen an, daß das Gas eine bestimmte Masse hat. Zur Bestimmung des Gaszustandes muß man dann stets zwei Parameter angeben. Diese können sein: p, V oder V, T oder p, T. Damit entspricht einem gegebenen Zustand des Gases ein bestimmter Punkt in der pV-Ebene, in der VT-Ebene oder in der pT-Ebene.

22. Welche Gasgesetze kennen Sie?

Autor: Ich betone nochmals: **Jedes Gasgesetz beschreibt irgendeine Zustandsänderung des Gases. Mit anderen Worten, ein Gasgesetz verbindet immer die Parameter des Anfangs- und des Endzustandes des Gases miteinander.**

Durch Anwenden der Zustandsgleichung (118) des idealen Gases läßt sich auch der Ausdruck für das allgemeine Gasgesetz gewinnen. Wir betrachten zwei verschiedene Zustände eines beliebigen Gases: den Anfangszustand mit den Parametern p_1, V_1, T_1, m_1 und den Endzustand mit den Parametern p_2, V_2, T_2, m_2. Dann hat die Gleichung für den Anfangszustand die Form

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} R T_1 \quad \text{oder} \quad \frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{R}{\mu}, \tag{118a}$$

für den Endzustand lautet sie

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT_2 \text{ oder } \frac{p_2V_2}{m_2T_2} = \frac{R}{\mu}. \tag{118b}$$

Wenn die rechten Seiten der Gleichungen (118a) und (118b) gleich sind, dann müssen auch die linken Seiten einander gleich sein:

$$\frac{p_1V_1}{m_1T_1} = \frac{p_2V_2}{m_2T_2}. \tag{119}$$

Auf diese Weise **hat man in allgemeinster Form die Beziehung zwischen Parametern von Anfangs- und Endzustand erhalten. Gl. (119) ist der Ausdruck für das allgemeine Gasgesetz.** Es kann offensichtlich auch in der Form

$$\frac{pV}{mT} = \text{const} \tag{119a}$$

geschrieben werden.

Leser B: Uns wurde noch ein einfacherer Ausdruck für das allgemeine Gasgesetz angegeben:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \text{ oder } \frac{pV}{T} = \text{const}. \tag{120}$$

Autor: Den Ausdruck (120) erhält man aus (119), wenn man berücksichtigt, daß sich während des Übergangsprozesses aus dem Anfangs- in den Endzustand die Masse des Gases nicht ändert ($m_1 = m_2$). Nachstehend werden wir voraussetzen, daß diese Bedingung erfüllt ist, und dann die Gleichung (120) benutzen. Vom Ausdruck (120) aus kann man zu mehreren Spezialfällen, den sogenannten Isoprozessen, gelangen:

a) die Temperatur ändert sich nicht — isothermer Prozeß — (Gesetz von Boyle-Mariotte):

$$p_1V_1 = p_2V_2 \text{ oder } pV = \text{const}; \tag{121}$$

b) Der Druck ändert sich nicht — isobarer Prozeß — (Gesetz von Gay-Lussac):

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \text{ oder } \frac{V}{T} = \text{const}; \tag{122}$$

c) das Volumen ändert sich nicht — isochorer Prozeß — (Gesetz von Charles):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \text{ oder } \frac{p}{T} = \text{const.} \tag{123}$$

Alle diese Isoprozesse lassen sich in bestimmten Diagrammen in der Ebene veranschaulichen (z. B. in einem pV-Koordinatensystem). In Bild 90 sind die verschiedenen Isoprozesse in verschiedenen Koordinatensystemen (p, V; V, T; T, p) dargestellt. Es zeigt sich, daß die Prüfungskandidaten gelernt haben,

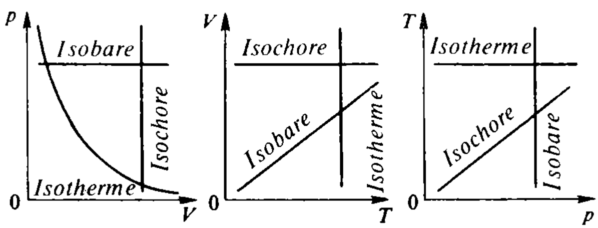


Bild 90

die Isoprozesse in einem pV-Diagramm zu skizzieren, daß es ihnen aber Schwierigkeiten bereitet, dieselben Prozesse für ein anderes Achsensystem aufzuzeichnen.

Leser A: Aber jetzt befinde ich mich auch in Verlegenheit. Mir ist nicht ganz klar, warum zum Beispiel die Isobare im VT-Diagramm eine vom Koordinatenursprung ausgehende Gerade ist.

Autor: Sehen Sie sich für den isobaren Prozeß Gleichung (122) an. Sie kann wie folgt umgeschrieben werden: $V = \text{const} \cdot T$. Das ist eine lineare, proportionale Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur.

Leser A: Jetzt habe ich es verstanden.

Autor: In Bild 91 sind für zwei verschiedene Temperaturen T_1 und T_2 zwei Isothermen für ein und dieselbe Gasmasse gezeichnet. Welche gehört zur höheren Temperatur?

Leser B: Ich glaube, die Frage beantworten zu können. Man muß in dem Bild eine beliebige Isobare zeichnen (gestrichelte Linie in Bild 91). Bei konstantem Druck wird das Gasvolumen um so größer, je höher die Temperatur ist. Das bedeutet, daß die obere Isotherme (T_2) zur höheren Temperatur gehört.

Autor: Richtig. Merken Sie sich: je näher im pV-Diagramm die Isotherme am Koordinatenursprung liegt, um so niedriger ist die Temperatur. In diesem Sinn ist eine Annäherung an den Koordinatenursprung stets mit einem Sinken der Temperatur des Gases verbunden; eine Entfernung vom Koordinatenursprung führt zur Erhöhung der Gastemperatur.

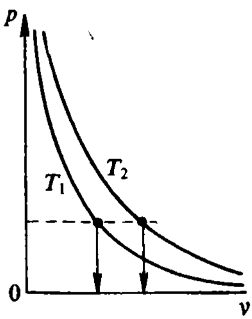


Bild 91

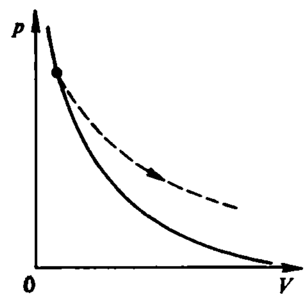


Bild 92

Wir wenden uns dem Bild 92 zu. Die ausgezogene Linie stellt eine bestimmte Isotherme dar. Erhöht oder senkt sich die Temperatur des Ausdehnungsprozesses, der in Bild 92 durch die gestrichelte Linie dargestellt ist?

Leser A: Bei einer Bewegung auf der gestrichelten Linie entfernen wir uns vom Koordinatenursprung. Das heißt, die Temperatur steigt.

Autor: Richtig. Aber jetzt wählen wir im pV-Koordinatensystem völlig willkürlich zwei Punkte *1* und *2* aus; zu Punkt *1* gehören die Parameter p_1, V_1 und T_1 und zu Punkt *2* die Parameter p_2, V_2 und T_2. Wir gehen von Punkt *1* zu Punkt *2* über. Dabei bedienen wir uns jeweils zweier beliebiger Isoprozesse. Ich frage Sie, wie viele solche verschiedenen Übergänge von *1* nach *2* sind möglich?

Leser A: Wahrscheinlich drei. Erstens: isotherm-isobar; zweitens: isotherm-isochor; drittens: isobar-isochor.

Autor: Und isobar-isotherm?

Leser A: Aber ist denn das nicht dasselbe wie isotherm-isobar? Übrigens habe ich niemals darüber nachgedacht.

Autor: Das sind verschiedene Übergänge. Insgesamt sind sechs Übergänge möglich. Sie sind in Bild 93 dargestellt: a) isotherm-isobar, b) isotherm-isochor, c) isobar-isochor, d) isobar-isotherm, e) isochor-isotherm, f) isochor-isobar. Man sieht leicht, daß das völlig

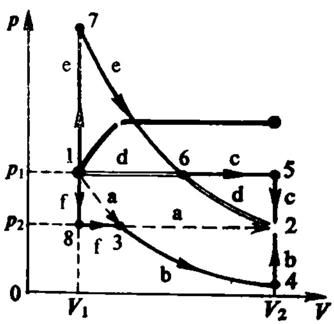


Bild 93

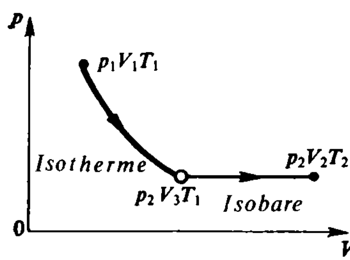


Bild 94

verschiedene Übergänge sind; zu ihnen gehören unterschiedliche Zwischenzustände. Im Zusammenhang mit Bild 93 ist es nützlich, zwei Dinge hervorzuheben: Erstens **aus einem beliebigen Anfangszustand kann man unter Anwendung zweier beliebiger Isoprozesse (zwei beliebige Punkte einer Ebene lassen sich immer durch Verwendung beispielsweise einer Isothermen und einer Isobaren verbinden) in einen beliebigen Endzustand übergehen; zweitens werden drei Isoprozesse zugelassen, sind zwischen zwei willkürlichen Zuständen sechs verschiedene Übergänge möglich.**

Wir wenden uns jetzt erneut dem allgemeinen Gasgesetz (120) zu. Denken Sie an die Herleitung dieses Gesetzes.

Leser A: Uns wurde die Herleitung aus den Gesetzen von Boyle-Mariotte und von Gay-Lussac gelehrt.

Aber ich irre mich ständig bei dieser Herleitung. Außerdem zeigten Sie uns eine ganz andere Ableitung des allgemeinen Gasgesetzes, nämlich als Folgerung aus der Zustandsgleichung der Gase.

Autor: Hier möchte ich vollständige Klarheit hineinbringen. Merken Sie sich: Dem allgemeinen Gasgesetz liegt die Zustandsgleichung der Gase (118) zugrunde. Diese erhielten wir aus einer Betrachtung der Bewegung der Gasmoleküle. Auf der Grundlage der Zustandsgleichung (118) leiteten wir den Ausdruck (119) ab, das Gasgesetz in seiner allgemeinsten Form (alle vier Parameter p, V, T, m sind veränderlich). Weiter gelangt man, von Gl. (119) ausgehend, zu mehreren Spezialfällen, der Gleichung (120) und den Relationen (121) bis (123), die die Isoprozesse beschreiben. Hier gingen wir vom allgemeinsten Ausdruck zu mehreren speziellen Formulierungen über; das heißt, wir haben die sogenannte deduktive Methode angewendet. Aber auch der umgekehrte Weg ist möglich; aus mehreren speziellen Ausdrücken gewinnt man den allgemeinen Ausdruck (der sogenannte induktive Weg). Dann wird aber vorausgesetzt, daß die speziellen Ausdrücke von vornherein gegeben sind, etwa aus Experimenten gefunden wurden. Von den speziellen Ausdrücken ausgehend, wird versucht, mit Hilfe von Verallgemeinerungen zur allgemeinen Formel zu gelangen. Der deduktive Weg ist konsequenter und logischer, der induktive Weg erweist sich manchmal als einfacher.

Wir gehen vom Boyle-Mariotteschen und vom Gay-Lussacschen Gesetz aus, dem induktiven Weg folgend. Dem allgemeinen Gasgesetz liegt folgende Behauptung zugrunde: Man kann aus einem beliebigen Anfangszustand (p_1, V_1, T_1) auf Isothermen und Isobaren einen beliebigen Endzustand (p_2, V_2, T_2) erreichen. Wir stellen diesen Übergang in einem pV-Diagramm dar (Bild 94). p_2, V_3, T_1 seien die Parameter eines geeigneten Zwischenzustandes. Durch Anwenden des Boyle-Mariotteschen Gesetzes verbinden wir die Punkte, die dem Anfangs- und dem Zwischenzustand entsprechen:

$$p_1V_1 = p_2V_3. \qquad (124)$$

Die Größen für Zwischen- und Endzustand verknüpfen wir, indem wir das Gay-Lussacsche Gesetz anwenden:

$$\frac{V_3}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \tag{125}$$

Beachten Sie, daß die Ausdrücke (124) und (125) einen gemeinsamen Parameter, das Zwischenvolumen V_3, enthalten. Wenn wir dieses eliminieren, kommen wir zum gesuchten Ergebnis

$$p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2.$$

Leser B: Aber wenn man zuerst die Isobare und dann die Isotherme ausnutzt?

Autor: Dann haben wir den in Bild 95 dargestellten Prozeß. Der Anfangszustand ist durch p_1, V_1, T_1, der Endzustand durch p_2, V_2, T_2 gegeben. Der Zwischenzustand (hier muß man immer aufpassen) ist

$$p_1,\ V_4,\ T_2.$$

Leser A: Wir haben hier einen anderen Zwischenzustand als vorhin.

Autor: Ja, Anfangs- und Zwischenzustand sind über das Gay-Lussacsche Gesetz verknüpft: $V_1/T_1 = V_4/T_2$. Zwischen- und Endzustand hängen miteinander durch das Boyle-Mariottesche Gesetz zusammen: $p_1V_4 = p_2V_2$. Eliminieren wir den gemeinsamen Parameter (Volumen V_4), so gelangen wir, wie leicht einzusehen ist, zum gesuchten Resultat, der Gleichung (120).

Leser B: Offenbar könnte man auch eine Isotherme und eine Isochore oder eine Isobare und eine Isochore nehmen?

Autor: Natürlich. Jedesmal wird das entsprechende Diagramm im pV-Koordinatensystem einen geeigneten Zwischenzustand enthalten, aber das Endresultat ist immer das gleiche.

Leser A: Das heißt, wenn man von den Isoprozessen ausgeht, dann hat man zum allgemeinen Gasgesetz sechs Zugänge?

Autor: Völlig richtig. Diese Schlußfolgerung steht in voller Übereinstimmung mit Bild 93.

Leser A: Jetzt habe ich durch die Diagramme im pV-Koordinatensystem verstanden, wie das allgemeine Gasgesetz hergeleitet wird.

Autor: Wir betrachten weiter einen bestimmten zyklischen (das heißt geschlossenen) Prozeß, der durch drei verschiedene Isoprozesse entsteht. Dieser Prozeß habe die im pV-Diagramm des Bildes 96 angegebene

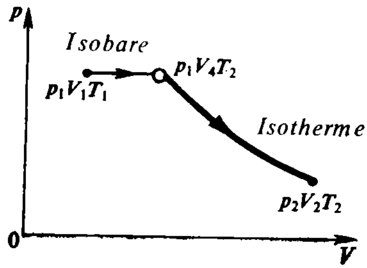


Bild 95

Gestalt. Dabei ist *1* → *2* eine isotherme Expansion (Ausdehnung), *2* → *3* eine isochore Erwärmung und *3* → *1* eine isobare Kompression (Verdichtung) ...

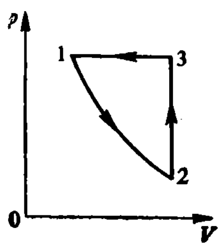


Bild 96

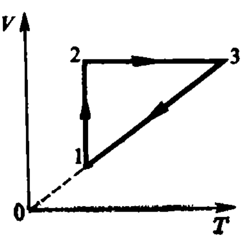


Bild 97

Leser B (unterbrechend): Im Fall *3* → *1* kann man auch „isobare Abkühlung" sagen, nicht wahr?

Autor: Sie haben recht. Denn beim Übergang vom Punkt *3* zum Punkt *1* fällt die Temperatur des Gases. Somit meine Frage: Wie wird der genannte zyklische Prozeß im VT-Diagramm aussehen?

Leser B: Er wird so aussehen, wir er in Bild 97 gezeichnet ist.

Autor: Vollkommen richtig. Sie haben sich wirklich nicht schlecht mit der grafischen Darstellung der Isoprozesse vertraut gemacht. Wir gehen deshalb weiter und betrachten einen bestimmten Prozeß, in dem sich nicht mehr nur zwei Parameter ändern, wie das bisher bei den Isoprozessen war, sondern drei. Das Gas möge sich in einer solchen Weise ausdehnen, daß Druck und Volumen der Bedingung $pV^2 = \text{const.}$ genügen.

Wie ändert sich die Temperatur des Gases? Womit müssen wir bei der Untersuchung eines beliebigen Prozesses mit einem Gas im allgemeinen beginnen?

Leser B: Man muß die Parameter des Anfangs- und des Endzustandes bezeichnen. Das seien die Parameter

$$p_1, \; V_1, \; T_1 \text{ bzw. } p_2, \; V_2, \; T_2.$$

Autor: Welche Beziehung besteht im allgemeinen Fall zwischen diesen Parametern?

Leser B: Ich habe verstanden. Das ist die uns bekannte Relation

$$p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2.$$

Autor: Welche Zusatzbedingungen hätten wir bei einem isothermen Prozeß?

Leser B: Die Bedingung $T_1 = T_2$.

Autor: Folglich hätten wir das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2,}$$
$$\boldsymbol{T_1 = T_2.}$$

Hieraus erhalten Sie sofort das Boyle-Mariottesche Gesetz

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

In unserem Fall ist jedoch der Prozeß nicht isotherm. Wir haben eine andere Zusatzbedingung; wie lautet sie?

Leser B: Das ist die Bedingung, die in der Aufgabenstellung formuliert ist:

$$p_1V_1^2 = p_2V_2^2.$$

Jetzt haben wir das Gleichungssystem

$$p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2,$$
$$p_1V_1^2 = p_2V_2^2.$$

Wir dividieren diese Gleichungen durcheinander und erhalten

$$V_1 T_1 = V_2 T_2.$$

Folglich nimmt die Temperatur auf den n-ten Teil ab, wenn sich das Volumen auf das n-fache vergrößert.

Autor: Abschließend besprechen wir, wie man die universelle Gaskonstante R, die in Gl. (118) enthalten ist, errechnet. Es ist wohl kaum sinnvoll, ihren Zahlenwert im Gedächtnis zu behalten.

Leser A: Man muß Formel (117) benutzen. Die Avogadro-Konstante ist $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, die Boltzmann-Konstante hat den Wert $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Damit folgt $R = N_A k = 8{,}3$ J/(mol·K).

Leser B: Zur Berechnung von R kann man auch den Ausdruck für das allgemeine Gasgesetz benutzen:

$$pV/T = p_0 V_0 / T_0, \tag{126}$$

wobei die Parameter p_0, V_0, T_0 sich auf eine Gasmasse beziehen, die unter Normalbedingungen betrachtet wird:

$$p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 = 273 \text{ K}, \quad V_0 = \frac{m}{\mu} \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

(Es ist bekannt, daß ein Mol eines beliebigen Gases unter Normalbedingungen ein bestimmtes Volumen, nämlich 22,4 l, einnimmt; das Verhältnis m/μ ist offensichtlich die Anzahl der Mole, die die gegebene Gasmasse enthält.) Setzt man diese Zahlen in Gl. (126) ein und vergleicht sie mit Gl. (118), so ergibt sich

$$R = 8{,}3 \text{ J/K}.$$

Autor: Beide Antworten sind zahlenmäßig richtig, nur muß in der letzten Berechnung nicht $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3, sondern $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3/mol stehen.

23. Wie lösen Sie Aufgaben zu den Gasgesetzen?

Leser A: Ich möchte die Anwendung der Gasgesetze zur Lösung verschiedener Aufgaben untersuchen.

Autor: Meiner Meinung nach sind fast alle den Prüflingen vorgeschlagenen Aufgaben ziemlich einfach. Die meisten von ihnen lassen sich einer der folgenden zwei Gruppen zuordnen.

Erste Gruppe: **Die Aufgaben basieren auf der Zustandsänderung einer bestimmten Gasmasse, wobei der Wert dieser Masse nicht benötigt wird. Als Folge einer Expansion, Erwärmung und anderer Prozesse geht das Gas aus einem bestimmten Zustand p_1, V_1, T_1 in einen Zustand p_2, V_2, T_2 über.** Die Parameter von Ausgangs- und Endzustand sind durch das allgemeine Gasgesetz $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$ miteinander verknüpft. In der Aufgabe wird gefordert, einen der sechs Parameter zu finden.

Zweite Gruppe: **Der Zustand des Gases ändert sich nicht, dafür tritt aber der Wert m der Masse des Gases in der Aufgabe auf. Gefordert wird, entweder die Masse des Gases bei bekannten Zustandsparametern oder einen Zustandsparameter bei bekannter Masse zu bestimmen, wenn die restlichen Zustandsparameter bekannt sind.** Bei solchen Aufgaben muß die molare Masse des betrachteten Gases gegeben sein.

Leser B: Bei der Lösung von Aufgaben der zweiten Gruppe ist es am günstigsten, Gleichung (118) anzuwenden.

Autor: Man kann selbstverständlich diese Gleichung verwenden. Dazu müssen Sie aber den Zahlenwert der universellen Gaskonstante R kennen. In der Regel weiß ihn kaum jemand. Deshalb ist es für die Praxis zweckmäßiger, folgendes Verfahren zu benutzen: Wir denken uns das Gas auf Normalbedingungen gebracht, deren Parameter mit p_0, V_0 und T_0 bezeichnet seien. Dann benutzt man Gl. (126)

$$pV/T = p_0V_0/T_0,$$

wobei $V_0 = (m/\mu)\cdot 22{,}4\ \mathrm{l}$ ist.

Leser B: Ich glaube nicht, daß dieses Verfahren einfacher als die Anwendung der Gl. (118) ist. Denn hier hat man sich an drei Größen zu erinnern: $p_0 = 1{,}01 \times \times 10^5$ Pa, $T_0 = 273$ K, $V_0/(m/\mu) = 22{,}4$ l. Meiner Meinung nach ist es einfacher, sich den Wert nur einer Größe, der universellen Gaskonstante, zu merken.

Autor: Und dennoch ist mein Verfahren einfacher, weil sich jeder an die von Ihnen genannten drei Größen (Druck, Temperatur und Volumen eines Mols des Gases unter Normalbedingungen) gut erinnert. Angenommen, es soll das Volumen von 58 g Luft bei einem Druck von 8 at und einer Temperatur von 91 °C berechnet werden. Die Lösung dieser Aufgabe führen wir nach der von mir vorgeschlagenen Methode durch. Weil die Masse von 1 mol Luft 29 g beträgt, so haben wir 2 mol Luft. Unter Normalbedingungen nehmen diese ein Volumen von 44,8 l ein. Ausgehend von Gl. (120), erhalten wir

$$V = V_0 \frac{p_0 \cdot T}{p \cdot T_0} = 44{,}8 \cdot \frac{1 \cdot 364}{8 \cdot 273} \text{ l} = 7{,}5 \text{ l}.$$

Leser B: Ich sehe, daß Sie hier $p_0 = 1$ atm gesetzt haben. In der Aufgabe sind doch aber sicher technische Atmosphären gemeint. Man müßte dann 1 atm = = 1,033 at berücksichtigen.

Autor: Sie haben recht. Zwischen physikalischer Atmosphäre (die dem Normaldruck entspricht) und technischer Atmosphäre gibt es einen Unterschied. Hier habe ich diesen Unterschied vernachlässigt.

Leser A: Könnten Sie nicht die charakteristischen Schwierigkeiten nennen, auf die man bei der Lösung von Aufgaben der ersten oder zweiten Gruppe trifft?

Autor: Ich sagte schon, daß diese Aufgaben meiner Meinung nach wirklich recht einfach sind.

Leser A: Aber wobei machen dann die Prüflinge gewöhnlich Fehler?

Autor: Wenn man die übliche Unaufmerksamkeit berücksichtigt, so **liegt die Hauptursache für Fehler in der Unfähigkeit, den Druck eines Gases in dem einen oder anderen Zustand zu berechnen.** Wir betrachten ein Beispiel mit einem Rohr, das an einem Ende verschlossen ist. Im Rohr *schließt eine Quecksilbersäule ein bestimmtes Luftvolumen von der Umgebung ab. Das Rohr läßt sich in einer vertikalen Ebene drehen. In der ersten Lage* (Bild 98a) *hat die Luftsäule innerhalb des Rohres die Länge l_1, in der zweiten Lage*

(Bild 98b) *aber die Länge* l_2. *Gesucht ist die Länge* l_3 *der Luftsäule, wenn das Rohr mit der vertikalen Richtung den Winkel* α *einschließt* (Bild 98c). — Wir messen den Luftdruck p_a in Längeneinheiten der Quecksilbersäule (Torr). Δl sei die Länge der Quecksilbersäule im Rohr. In der ersten Lage ist der Luftdruck innerhalb des Rohres offensichtlich gleich dem Atmosphärendruck p_a. In der zweiten Lage ist der Luftdruck im Rohr gleich

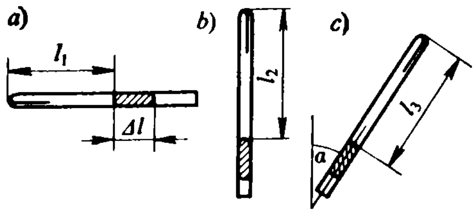


Bild 98

der Differenz $(p_a - \Delta l)$, weil in diesem Fall die Summe der Drücke von Quecksilbersäule und Luft im Rohr durch den Atmosphärendruck kompensiert wird. Mit Hilfe des Boyle-Mariotteschen Gesetzes kann man

$$l_1 p_a = l_2 (p_a - \Delta l)$$

schreiben, woraus sich der Atmosphärendruck

$$p_a = \frac{l_2 \cdot \Delta l}{l_2 - l_1} \tag{127}$$

ergibt. In der dritten Lage wird ein Teil des Gewichtes der Quecksilbersäule durch die Reaktionskraft der Röhrenwand ausgeglichen. Dadurch erweist sich der Luftdruck innerhalb des Rohres als $(p_a - \Delta l \cos \alpha)$. Unter Benutzung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes für den ersten und dritten Fall wird $l_1 p_a = l_3 (p_a - \Delta l \cos \alpha)$.
Hieraus finden wir, daß der Atmosphärendruck gleich

$$p_a = \frac{\Delta l \cdot l_3 \cos \alpha}{l_3 - l_1} \tag{128}$$

ist. Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (127) und

(128),

$$\frac{l_2}{l_2-l_1}=\frac{l_3\cos\alpha}{l_3-l_1},$$

erhält man für die gesuchte Länge

$$l_3=\frac{l_1\cdot l_2}{l_2-(l_2-l_1)\cos\alpha}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß für $\cos\alpha = 1$ $l_3 = l_2$ wird. Man hat also die zweite Lage der Röhre. Ist $\cos\alpha = 0$, dann folgt $l_3 = l_1$, was der ersten Lage des Rohres entspricht.

Leser A: An und für sich sind mir die Aufgaben der von Ihnen genannten ersten und zweiten Gruppe klar. Aber in der Prüfung werden wahrscheinlich Aufgaben vorgelegt, die eine Kombination beider Aufgabengruppen darstellen.

Autor: Das ist nicht ausgeschlossen. Betrachten wir folgende Aufgabe: 16 g *Sauerstoff nehmen bei einem Druck von* 2 at *ein Volumen von* 5 l *ein. Wie ändert sich die Temperatur des Gases, wenn bei einer Druckzunahme auf* 5 at *das Volumen auf* 1 l *abnimmt*?

Leser A: Aus der Kenntnis der Masse des Sauerstoffs, seines Druckes und Volumens finde ich schnell die Temperatur. 16 g Sauerstoff, das sind 0,5 mol, nehmen unter Normalbedingungen ein Volumen von 11,2 l ein. Hieraus errechne ich

$$T_1=T_0\,\frac{p_1V_1}{p_0V_0}=273\cdot\frac{2\cdot 5}{1\cdot 11{,}2}\,\mathrm{K}=244\ \mathrm{K}. \qquad (129)$$

Autor: Richtig. Die Rechnung bis hierher war eine Lösung für eine typische Aufgabe aus der zweiten Gruppe.

Leser A: Aus der bekannten Temperatur T_1 des Ausgangszustandes ermittle ich die Temperatur des Endzustandes:

$$T_2=T_1\,\frac{p_2V_2}{p_1V_1}=244\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 5}\,\mathrm{K}=488\ \mathrm{K}.$$

Hieraus und mit Hilfe des Ergebnisses (129) finden wir, daß sich die Temperatur um 244 K erhöht hat.

Autor: Alles ist vollkommen richtig. Wie Sie sehen, wurde jetzt eine für die erste Gruppe typische Aufgabe behandelt.

Leser B: Ganz am Anfang, als wir über die möglichen Aufgabengruppen gesprochen haben, sagten Sie, daß die Mehrzahl der Aufgaben zu diesen Gruppen gehört. Gibt es auch Aufgaben, die von Aufgaben der ersten und zweiten Gruppe prinzipiell verschieden sind?

Autor: Ja, solche Aufgaben gibt es. In den Aufgaben der oben genannten Gruppen wird die Gasmasse als unveränderlich vorausgesetzt. **Es gibt jedoch Aufgaben, in denen sich die Masse des Gases ändert (Gas wird ab- oder zugepumpt).** Wir wollen solche Aufgaben einer dritten Gruppe zuordnen. Für sie gibt es keine fertigen Lösungsrezepte. Sie erfordern ein besonderes, individuelles Herangehen an die Lösung. Man kann aber in jedem konkreten Fall eine Aufgabe der dritten Gruppe auf Aufgaben aus den ersten beiden Gruppen zurückführen. Die Schwierigkeit besteht darin, diese Reduktion, eventuell auch auf eine Kombination der ersten beiden Gruppen, zu bewerkstelligen. Das soll an zwei Beispielen besprochen werden.

Hier ist die erste Aufgabe: *Das Gas in einem Gefäß steht bei einer Temperatur von* 27 °C *unter einem Druck von* 20 at. *Gesucht ist der Gasdruck im Gefäß, nachdem die Hälfte der Masse des Gases aus dem Gefäß ausgeströmt und die Temperatur um* 50 K *erhöht worden ist.*

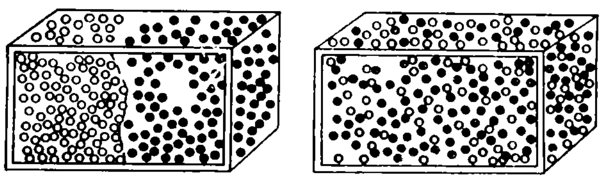
Diese Aufgabe gleicht einer Aufgabe der ersten Gruppe, da eine Zustandsänderung des Gases abläuft. Jedoch ändert sich unterdessen auch die Masse des Gases. Um das allgemeine Gasgesetz anwenden zu können, muß man die Zustandsänderung einer konstanten Gasmasse betrachten. Als diese Masse wählen wir diejenige Gasmasse, die sich nach der Prozeßführung noch im Gefäß befindet. Die Endparameter bezeichnen wir mit p_2, V_2, T_2. Dabei ist $T_2 = (273 + 27 + +50)$ K $= 350$ K, $V_2 = V$ mit V als dem Volumen des Gefäßes, p_2 ist der gesuchte Druck. Wie lassen sich die Anfangsparameter der genannten Gasmasse ausdrücken?

Leser A: Diese Masse wird durch die gleiche Temperatur charakterisiert, die auch das gesamte Gas hat: $T_1 = (273 + 27)$ K $= 300$ K.

Das Volumen V_1 ist gleich dem halben Gefäßvolumen: $V_1 = V/2$. Der Druck ist der gleiche wie der des gesamten Gases: $p_1 = 20$ at.

Leser B: Ich würde die Anfangsparameter der genannten Gasmasse etwas anders betrachten: $T_1 = 300$ K; das Volumen ist das gleiche wie das des gesamten Gases ($V_1 = V$); dann aber ist der Druck gleich dem halben Druck des gesamten Gases: $p_1 = 10$ at.

Autor: Ihre Vorschläge führen insofern, als Druck und Volumen als Produkt eingehen, trotz ihrer Verschiedenheit zu ein und demselben Ergebnis. Wir würden daher auch nicht auf diese Unterschiede eingehen, wenn sie nicht physikalische Konsequenzen



a) b)

Bild 99

hätten. Wir werden die Moleküle derjenigen Gasmasse, die sich am Ende im Gefäß befindet, willkürlich als „weiße" Moleküle, die aus dem Gefäß abgepumpten Moleküle als „schwarze" Moleküle bezeichnen. Im Gefäß verbleiben somit die weißen Moleküle, und die schwarzen verschwinden aus ihm. Man kann sich den Ausgangszustand auf zwei Arten denken: 1. Weiße und schwarze Moleküle sind so getrennt, daß man im Gefäß makroskopische Volumina hat, in denen sich entweder nur weiße oder nur schwarze Moleküle befinden (Bild 99a). 2. Weiße und schwarze Moleküle sind miteinander vermischt, so daß man innerhalb des Gefäßes in einem beliebigen makroskopischen Teilvolumen praktisch eine gleiche Zahl von Molekülen der einen und auch der anderen Sorte hat (Bild 99b). Im ersten Fall bildet jede Molekülsorte ihren eigenen gasförmigen „Körper" vom Volumen $V/2$, der auf die Wände und die scheinbare Grenze zu dem anderen „Körper" einen

Druck von 20 at ausübt. Im zweiten Fall sind die Moleküle beider Sorten über das gesamte Gefäßvolumen V verteilt, die Moleküle jeder Sorte liefern zum Druck auf die Wand nur den halben Beitrag. (Auf jede Stelle der Wand kommt eine Hälfte der Stöße von den weißen, die andere Hälfte von den schwarzen Molekülen.) In diesem Fall ist $V_1 = V$, $p_1 = 10$ at. Den letzten Bemerkungen entsprechend, erinnern wir uns an die sogenannten Partialdrücke: Der Druck eines Gasgemisches ist gleich der Summe aus den Drücken der einzelnen Komponenten des Gemisches. Ich möchte betonen, daß es sich hier um ein Gasgemisch handelt: Die Moleküle aller Sorten sind durchmischt.

Leser B: Das zweite Herangehen ist richtiger, denn die Moleküle beider Sorten sind wirklich vermischt.

Autor: In der gegebenen Aufgabe sind beide Standpunkte vollständig gerechtfertigt. Vergessen Sie nicht, daß unsere Einteilung der Moleküle a priori in zwei Sorten willkürlich gewesen ist. Zur Lösung der Aufgabe zurückkehrend, schreiben wir die Gleichung des allgemeinen Gasgesetzes für die Gasmasse auf, die im Gefäß verbleibt:

$$10 \text{ at} \cdot V/300 = p_2 V/350.$$

Hieraus finden wir $p_2 = 11{,}7 \text{ at} \approx 11{,}5 \cdot 10^5$ Pa.

Wir gehen zu folgender Aufgabe über: *Ein Gas befindet sich unter dem Druck p_0 in einem Gefäß vom Volumen V. Das Gas wird mittels einer Kolbenpumpe, die das Arbeitsvolumen v* (Bild 100) *hat, aus dem Gefäß herausgepumpt. Zu bestimmen ist die Anzahl n der Kolbenhübe, die notwendig sind, um den Gasdruck auf p_n zu reduzieren.*

Leser A: Meiner Meinung nach ist diese Aufgabe nicht sehr kompliziert: n Bewegungen des Kolbens führen zu einer n-maligen Vergrößerung des Volumens um den Wert v. Wir schreiben daher die Boyle-Mariottesche Gleichung in der Form

$$p_0 V = p_n (V + nv)$$

auf. Hieraus ergibt sich die Anzahl n der Hübe.

Autor: Zu welcher Gasmasse gehört die von Ihnen aufgeschriebene Gleichung?

Leser A: Zur Masse, die anfangs im Gefäß war.

Autor: Aber schon während des ersten Hubes verläßt doch ein Teil dieser Masse das System: Wenn der Kolben die Bewegung von rechts nach links beginnt, schließt sich das Ventil A, und das Ventil B öffnet sich, das Gas verläßt das System (Bild 100). Anders gesagt, die von Ihnen genannte n-malige Volumenvergrößerung um den Betrag v bezieht sich nicht auf

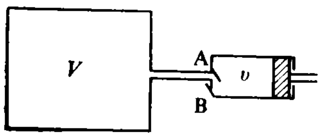


Bild 100

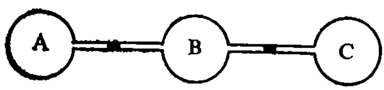


Bild 101

die gleiche Gasmasse. Die von Ihnen aufgeschriebene Gleichung ist deshalb nicht richtig.
Wir werden jede Kolbenbewegung getrennt betrachten. Wir beginnen mit dem ersten Hub. Für die Gasmasse, die sich ursprünglich im Gefäß befunden hat, läßt sich

$$p_0 V = p_1 (V + v)$$

schreiben, wobei p_1 derjenige Gasdruck ist, der sich einstellt, nachdem der Kolben am Ende der Arbeitsbewegung die äußerste rechte Lage eingenommen hat. Dann kehrt der Kolben in die Ausgangslage zurück. Dabei schließt sich, wie schon gesagt, das Ventil A, und im Gefäß verbleibt eine im Vergleich zur Ausgangsmasse kleinere Masse. Ihr Druck ist p_1. Für diese Gasmasse gilt die Gleichung

$$p_1 V = p_2 (V + v),$$

wobei p_2 der Gasdruck nach dem zweiten Arbeitshub ist. Durch konsequentes Untersuchen der dritten, vierten und folgenden Kolbenbewegungen ergibt sich ein System von n Gleichungen des Boyle-Mariotteschen Gesetzes:

$$\left.\begin{aligned} p_0V &= p_1(V+v), \\ p_1V &= p_2(V+v), \\ p_2V &= p_3(V+v), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1}V &= p_n(V+v). \end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

Jede dieser Gleichungen gehört zu einer bestimmten Gasmasse. Durch Lösung des Systems (130) erhalten wir

$$p_n = p_0\left(\frac{V}{V+v}\right)^n .$$

Das Logarithmieren dieses Ergebnisses liefert

$$n = \frac{\lg(p_n/p_0)}{\lg\dfrac{V}{V+v}} .$$

Abschließend betrachten wir noch eine Aufgabe: *Drei gleiche Kugeln A, B, C sind mit Röhren gleicher Länge und gleichen Querschnitts verbunden. Im Inneren der Röhren befinden sich Quecksilbertröpfchen, die im Ausgangszustand (bei einer Temperatur T_1) in der Mitte der Röhren liegen* (Bild 101). *Das Volumen der Luft in jeder Kugel und dem Teil der Röhre bis zum Quecksilbertröpfchen ist gleich V_1. Wie verschieben sich die Tröpfchen, wenn die Kugel B um ΔT und die Kugel C um $2\Delta T$ erwärmt wird? Der Querschnitt der Röhre ist S.* Bemerkung: *Man rechne unter der Bedingung, daß $\Delta T \ll T_1$ ist.* Wegen der sehr kleinen Temperaturänderungen und folglich auch sehr kleinen Volumenänderungen des Gases kann man die Produkte $\Delta T \cdot \Delta V$ als Größen, die von zweiter Ordnung klein sind, vernachlässigen.

Leser A: Ich habe Schwierigkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Ich sehe sie als sehr kompliziert und kombiniert an.

Autor: Hier ändert sich die Gasmasse nicht, aber dennoch sind gleichzeitig mehrere Massen beteiligt, und man muß darauf achten, zu welcher Masse jedes Mal gerade die eine oder die andere Beziehung gehört. Außerdem ist es notwendig, den Anfangs- und Endzustand jeder der drei Gasmassen (wir bezeichnen sie

mit m_A, m_B, m_C) klar zu fixieren. Wir nehmen an, daß sich das Volumen der Masse m_A um ΔV_1 verkleinert, wenn Kugel B erwärmt wird, das Volumen der Masse m_C sich aber auf Grund der Erwärmung der Kugel C um ΔV_2 vergrößert. Damit wächst das Volumen der Masse m_B als Ergebnis der Erwärmung von Kugel C um den Wert $\Delta V_1 - \Delta V_2$. Unter Berücksichtigung der Bedingungen der Aufgabe und der gemachten Bemerkungen schließt man: Die Parameter der Gasmasse m_A sind
im Anfangszustand p_1, V_1, T_1;
im Endzustand p_2, $V_1 - \Delta V_1$, T_1.
Damit ist

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 (V_1 - \Delta V_1)}{T_1}. \tag{131}$$

Die Parameter der Gasmasse m_B sind
im Anfangszustand p_1, V_1, T_1;
im Endzustand p_2, $V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2$, $T_1 + \Delta T$;
hieraus folgt

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 (V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2)}{T_1 + \Delta T}. \tag{132}$$

Die Parameter der Gasmasse m_C sind
im Anfangszustand p_1, V_1, T_1;
im Endzustand p_2, $V_1 + \Delta V_2$, $T_1 + 2\Delta T$;
hieraus ergibt sich

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 (V_1 + \Delta V_2)}{T_1 + 2\Delta T}. \tag{133}$$

Verwendung der Beziehungen (131) und (132) liefert

$$(V_1 - \Delta V_1)(T_1 + \Delta T) = (V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2) T_1.$$

Mittels des Verhältnisses der Gleichungen (132) und (133) kann man

$$(V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2)(T_1 + 2\Delta T) =$$
$$= (V_1 + \Delta V_2)(T_1 + \Delta T)$$

ermitteln. Lösen wir die Klammern auf und vernachlässigen die zusammengesetzten Terme $\Delta V \Delta T$, so finden wir die beiden Gleichungen

$$2\Delta V_1 T_1 = V_1 \Delta T + T_1 \Delta V_2,$$
$$2\Delta V_2 T_1 = V_1 \Delta T + T_1 \Delta V_1.$$

Aus ihnen folgt

$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_1 \Delta T / T_1$; $\Delta l = V_1 \Delta T / S T_1$.

Jedes Quecksilbertröpfchen verschiebt sich also um die gleiche Länge Δl nach links. Das Volumen des Gases der Masse m_B ändert sich nicht.

Leser A: Hier ist wirklich alles deutlich durchgeführt.

Autor: Merken Sie sich: Bei der Betrachtung einer bestimmten Gasmasse ist es immer notwendig, deren Anfangs- und Endparameter genau zu fixieren. Alles andere ist überaus einfach.

Aufgaben

77. Eine Röhre mit geschlossenem oberem Ende taucht vollständig in ein Gefäß mit Quecksilber ein (Bild 102). Dabei hat die Luftsäule innerhalb der Röhre eine Länge von $h_1 = 10$ cm. Auf welche Höhe h_2 über dem Quecksilberniveau im Gefäß muß das obere Röhrenende emporgehoben werden, damit das

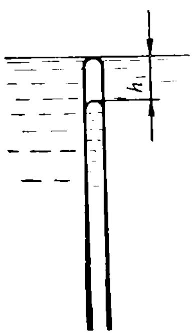


Bild 102

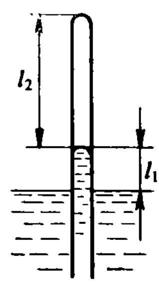


Bild 103

Quecksilberniveau innerhalb der Röhre mit dem Quecksilberniveau im Gefäß übereinstimmt? Der Atmosphärendruck ist normal ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa). Zu berechnen ist die Masse m der Luft innerhalb der Röhre, wenn ihr Querschnitt $S = 1$ cm² ist. Die Temperatur beträgt $t = 27$ °C.

78. Eine oben verschlossene Röhre wird mit dem offenen Ende in ein Gefäß mit Quecksilber getaucht (Bild 103). Wie ändert sich das Quecksilberniveau in der Röhre, wenn sich die Temperatur von $t_1 = 20$ °C auf $t_2 = 77$ °C erhöht? Gegeben ist: $l_1 = 10$ cm, $l_2 = 30$ cm. Der Atmosphärendruck ist normal. Die Wärmeausdehnung der Röhre ist zu vernachlässigen. Bestimmen Sie die Masse der Luft innerhalb der Röhre, wenn ihre Querschnittsfläche $S = 0{,}5$ cm² beträgt.

79. In einem Gefäß mit dem Volumen $V = 5$ l befindet sich bei einer Temperatur von $t = 27$ °C Luft unter dem Druck $p_1 = 20$ at. Welche Masse Δm an Luft muß aus dem Gefäß herausgelassen werden, damit in ihm der Druck auf den Wert $p_2 = 10$ at fällt?

80. Berechnen Sie die Arbeit W, die ein Gas bei einer isobaren Erwärmung von $t_1 = 20$ °C auf $t_2 = 100$ °C verrichtet. Das Gas befindet sich in einem Gefäß, das durch einen beweglichen Kolben mit dem Querschnitt $S = 20$ cm² und der Masse

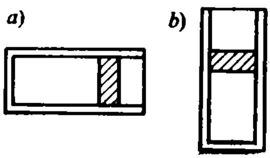


Bild 104

Bild 105

$M = 5$ kg abgeschlossen ist. Es sind zwei Fälle für die Gefäßlage zu untersuchen: a) horizontale Lage (Bild 104a); b) vertikale Lage (Bild 104b). Das Anfangsvolumen des Gases beträgt $V_1 = 5$ l; der Atmosphärendruck sei normal.

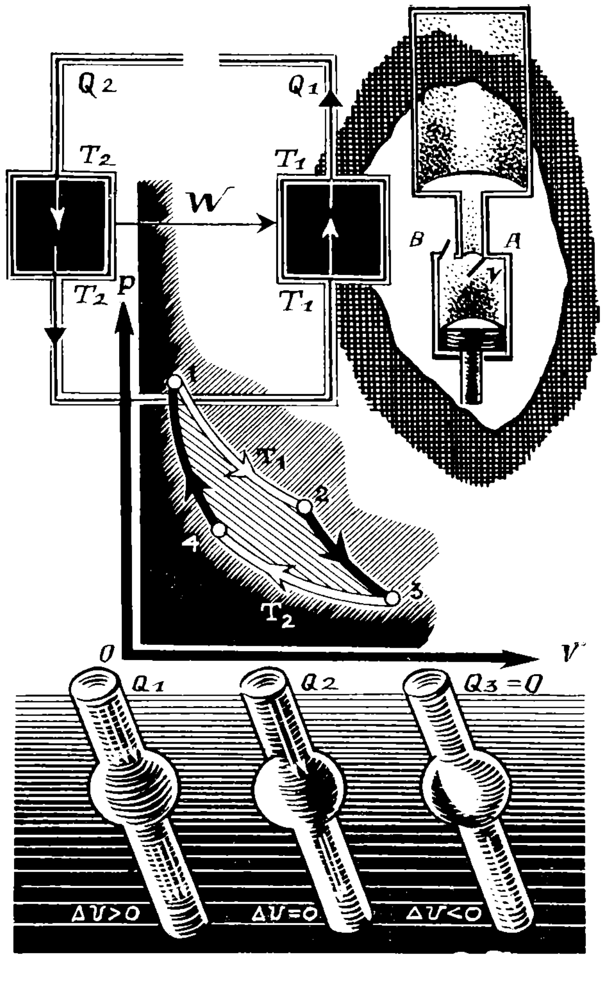
81. In einer Röhre mit dem Querschnitt $S = 0{,}5$ cm², die mit dem geschlossenen Ende nach oben vertikal orientiert ist, befindet sich eine Luftsäule der Länge $l_1 = 40$ cm. Nach unten ist diese Luftsäule durch eine $h = 8$ cm lange Quecksilbersäule abgeschlossen. Die Temperatur beträgt $t_1 = 27$ °C. Welche Längenänderung Δl der Luftsäule erhält man, wenn die Röhre um einen Winkel $\alpha = 60°$ zur Vertikalen geneigt und gleichzeitig die Temperatur um $\Delta T = 30$ K erhöht wird? Der Atmosphärendruck ist normal. Die Masse der Luft, die in der Röhre eingeschlossen ist, ist zu bestimmen.

82. Zwei gleiche Kugeln A und B (Bild 105) sind durch ein dünnes Rohr verbunden. Bei der Temperatur T_1 befindet sich ein Quecksilbertröpfchen in der Mitte des Rohres. Das Luftvolumen in jeder Kugel und dem Rohrteil bis zum Quecksilber ist V_1. Um welche Länge Δl verschiebt sich das Tröpfchen, wenn Kugel A um ΔT_1 erwärmt und Kugel B um ΔT_2 abgekühlt wird ($\Delta T_1 \ll T_1$, $\Delta T_2 \ll T_1$)? Die Querschnittsfläche der Röhre ist S. Es sind drei Fälle zu betrachten:
a) $\Delta T_1 > \Delta T_2$, b) $\Delta T_1 < \Delta T_2$, c) $\Delta T_1 = \Delta T_2$.

83. Die Bedingungen dieser Aufgabe stimmen mit den Bedingungen der im Text gerechneten Aufgabe mit den drei Kugeln überein. Es ist der Fall zu untersuchen, daß die Kugel B um ΔT erwärmt wird, die Kugeln A und C aber um ΔT abgekühlt werden.

84. Die Bedingungen dieser Aufgabe entsprechen den Bedingungen der im Text gerechneten Aufgabe mit den drei Kugeln. Zu

IN DER NATUR VOLLZIEHT SICH STÄNDIG UND VIELGESTALTIG DER ENERGIEAUSTAUSCH ZWISCHEN EINZELNEN KÖRPERN UND IHRER GESAMTHEIT. ALLGEMEINE PROBLEME DIESES AUSTAUSCHS ERFORSCHT DIE THERMODYNAMIK.



betrachten ist der Fall, daß die Kugel A um ΔT erwärmt, die Kugel C um ΔT abgekühlt wird.

85. Welche Wasserdampfmasse befindet sich in einem Zimmer vom Volumen $V = 105\ m^3$, wenn bei einer Temperatur $t_1 = 15\ °C$ die relative Luftfeuchte $\varphi = 55\ \%$ beträgt? Kondensiert ein Teil des Wasserdampfes, wenn die Lufttemperatur auf $t_2 = 10\ °C$ absinkt? Welchen Bruchteil k von der gesamten Luftmasse im Zimmer bildet die Masse des Wasserdampfes, wenn der Luftdruck $p = 10^5$ Pa beträgt?

24. Was ist Thermodynamik?

Leser B: Ich traf auf den Begriff „Thermodynamik". Was ist das?

Autor: Thermodynamik ist dasjenige Teilgebiet der Physik, in dem von allgemeinster Position aus (keine Behandlung mit molekularen Vorstellungen) Prozesse des Energieaustausches zwischen dem untersuchten Objekt und dessen Umgebung betrachtet werden.

Leser A: In welchem Maße müßte man beim Studium der Gasgesetze mit der Thermodynamik vertraut sein?

Autor: Das wird aus unseren weiteren Gesprächen verständlich. In großen Zügen werden wir die Elemente der Thermodynamik des idealen Gases kennenlernen. Gleichzeitig muß man aber bemerken, daß eine mehr oder weniger tiefe Aneignung der Gasgesetze deren Behandlung mit der Thermodynamik erfordert. So zeigt die Thermodynamik beispielsweise, wie sich vom energetischen Gesichtspunkt aus die isotherme und isobare Expansion voneinander unterscheiden.

Wir beginnen damit, daß wir uns an folgenden, schon bekannten Umstand erinnern: Die innere Energie eines idealen Gases ist dessen Masse und der Temperatur proportional:

$$U = \frac{3}{2}(m/\mu)\,RT. \qquad (134)$$

[Dieses Ergebnis folgt aus den Gleichungen (112) und (117).]

Bei einer unveränderlichen Gasmasse kann sich die innere Energie durch zwei Prozesse ändern (man sagt, es

gibt zwei Möglichkeiten des Energieaustausches des Gases mit der Umgebung, zwei „Kanäle" des Energieaustausches):
a) durch Verrichtung einer Arbeit W; in diesem Fall muß sich das Volumen des Gases ändern (bei Ausdehnung verrichtet das Gas Arbeit an der Umgebung, zum Beispiel durch Verschieben eines Kolbens; bei Verdichtung verrichtet die Umgebung Arbeit am Gas);
b) durch Wärmeaustausch (das Gas gibt an die Umgebung die Wärme Q ab oder umgekehrt, es nimmt von der Umgebung die Wärme Q auf).
Man kann daher den Zuwachs ΔU der inneren Energie in der Form

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \pm W \pm Q \tag{135}$$

schreiben. Hier gehört das Zeichen „+" zu den Fällen, in denen das Gas Energie gewinnt (durch den entsprechenden „Kanal" gelangt Energie aus der Umgebung in das Gas); das Zeichen „—" gehört zu Fällen, in denen das Gas Energie an die Umgebung abgibt.

Leser B: Stellt der Ausdruck (135) nicht den sogenannten ersten Hauptsatz der Thermodynamik dar?

Autor: Ja, das **ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik.** Man muß bemerken, daß er für abgeschlossene Systeme **faktisch nichts anderes als der Energieerhaltungssatz ist; die Änderung der Energie eines Gases ist durch Verrichtung von Arbeit und Übertragung von Wärme bedingt.**

Leser B: Damit gilt, wenn sich das Gas weder ausdehnt noch verdichtet (d.h., ein isochorer Prozeß wird betrachtet), ist ein Energieaustausch mit der Umgebung nur durch Wärmeübertragung möglich.

Autor: Richtig.

Leser A: Aber bei Kenntnis von Anfangs- und Endzustand eines Gases kann man die Arbeit berechnen und die Wärmeübertragung untersuchen.

Autor: Das kann man. Betrachten wir zunächst eine isobare Expansion. In diesem Fall läßt sich die vom Gas an der Umgebung verrichtete Arbeit besonders einfach bestimmen. Das Gas befinde sich in einem Gefäß mit beweglichem Kolben unter dem Druck p. Es möge sich bei p = const. vom Volumen V_1 auf das Volumen V_2 ausdehnen. Dabei verschiebt es den

Kolben mit der Querschnittsfläche S um den Abstand Δl (Bild 106). Die Arbeit, die das Gas bei der Kolbenverschiebung verrichtet, ist gleich

$$W = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V = p\,(V_2 - V_1). \quad (136)$$

Bei einer nichtisobaren Expansion berechnet sich die Arbeit des Gases deshalb komplizierter, weil im Verlauf des Ausdehnungsprozesses der Gasdruck nicht konstant bleibt. Damit ändert sich im Laufe der Zeit die auf den bewegten Kolben wirkende Kraft.

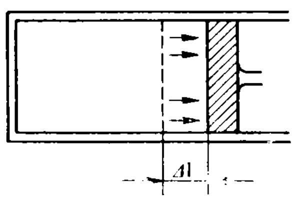


Bild 106

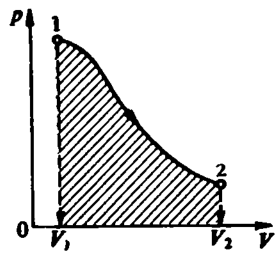


Bild 107

Es gibt folgende **Regel zur Berechnung der Arbeit für einen beliebigen Expansionsprozeß: Man muß den betrachteten Prozeß im pV-Diagramm darstellen. Die gesuchte Arbeit ist der Fläche unter der Kurve im Intervall von V_1 bis V_2 gleich (Bild 107).**

Leser B: Die Berechnung der Arbeit ist klar. Aber wie findet man die übertragene Wärmemenge?

Autor: Durch Benutzen der Formel (134) kann man für den betrachteten Prozeß die Änderung der inneren Energie finden. Dann muß man die Arbeit berechnen und zum Schluß den Ausdruck (135) verwenden.

Leser A: Beim isochoren Prozeß fehlt die Energieübertragung durch Arbeit. Sind auch solche Situationen möglich, bei denen keine Wärmeübertragung stattfindet?

Autor: Natürlich. In diesen Fällen sagt man, das Gas ist wärmeisoliert. Übrigens, was würden Sie denken, ist in einem wärmeisolierten Gas eine isotherme Ausdehnung möglich?

Leser A: Warum denn nicht?

Autor: Übereilen Sie Ihre Antwort nicht. Denken Sie daran: Im gegebenen Prozeß gibt es keine Wärmeübertragung. Das Gas dehnt sich aus (folglich verrichtet es Arbeit), aber die Temperatur des Gases ändert sich nicht.

Leser B: Ein solcher Prozeß ist nicht möglich. Wenn die Temperatur konstant bleibt, so muß auch die innere Energie konstant bleiben. Das bedeutet, zur Verrichtung von Arbeit muß das Gas unbedingt Wärme aus der Umgebung erhalten.

Autor: Richtig. Damit haben wir folgende zwei Tatsachen: **1. Eine isotherme Ausdehnung ist in einem wärmeisolierten Gas nicht möglich; 2. Bei einer isothermen Ausdehnung ist die von außen zugeführte Wärmemenge genau gleich der vom Gas verrichteten Arbeit.**

Leser B: Aller Wahrscheinlichkeit nach sind in einem wärmeisolierten Gas nicht nur isotherme, sondern auch isobare und isochore Prozesse unmöglich.

Autor: Ihre Vermutung stimmt. Die Prozesse, die in einem wärmeisolierten Gas ablaufen, sind besondere Prozesse. Sie haben auch einen besonderen Namen. Sie heißen adiabatische Prozesse. **Bei der adiabatischen Expansion wird auf Kosten eines Teils der inneren Energie des Gases Arbeit verrichtet. Im Ergebnis sinkt die Temperatur des Gases. Bei einer adiabatischen Kompression erhöht sich auf Kosten der Arbeit äußerer Kräfte die innere Energie des Gases, dessen Temperatur steigt.** Wird die Kompression eines Gases genügend schnell durchgeführt, so findet kein Wärmeaustausch statt, sogar ohne daß ein wärmeisoliertes System vorausgesetzt wird; es geht eine adiabatische Kompression vor sich. Bei hinreichend langsamer Kompression, die einen Wärmeaustausch des Gases mit der Umgebung gewährleistet, vollzieht sich eine isotherme Kompression (bei der Temperatur der Umgebung).

Weiter bitte ich Sie, in einem pV-Diagramm die grafischen Darstellungen für eine Isobare, eine Isotherme und eine Adiabate eines sich ausdehnenden Gases aufzuzeichnen. Anfangszustand und Endvolumen seien für alle drei Prozesse gleich. Für die drei genannten Prozesse untersuchen wir den Energieaustausch des Gases mit der Umgebung. In welchem von diesen Fällen ist die Arbeit maximal, die das Gas bei seiner Expansion verrichtet? In welchem Fall ist die Wärmeübertragung am größten?

Leser B: Aber Sie haben uns noch nicht gezeigt, wie sich die Adiabate darstellt ...

Autor: Dafür wissen Sie, daß bei einer adiabatischen Expansion die Temperatur des Gases fällt.

Leser B: Ich habe verstanden. Hier ist die Zeichnung (Bild 108). Die erste Kurve ist die Isobare, die zweite die Isotherme und die dritte die Adiabate.

Autor: Die Zeichnung ist gut. Was sagen Sie zu den Unterschieden bezüglich des Energieaustausches des Gases

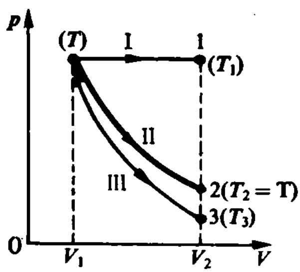


Bild 108

mit der Umgebung für die betrachteten Prozesse?

Leser B: Im Punkt *1* auf der Zeichnung ist $T_1 > T$. Folglich ist $\Delta U > 0$; bei der isobaren Ausdehnung erhöht sich die innere Energie des Gases. Im Punkt *2* ist $T_2 = T$. Folglich ist $\Delta U = 0$. Im Punkt *3* ist $T_3 < T$. Folglich ist $\Delta U < 0$.

Autor: Bitte ausführlicher!

Leser B: Ich habe Schwierigkeiten. Mir gelingt es nicht, ähnliche Erörterungen durchzuführen.

Autor: Es seien W_1, W_2, W_3 die Arbeiten, die das Gas bei isobarer, isothermer und adiabatischer Ausdehnung verrichtet. Aus der Gegenüberstellung der Flächeninhalte unter den Kurven sieht man die Richtigkeit von $W_1 > W_2 > W_3$. Wir betrachten jetzt den Energieaustausch in jedem der genannten Prozesse.

Bei der isobaren Ausdehnung ist $\Delta U = Q_1 - W_1$; das Gas erhält von außen die Wärmemenge Q_1. Ein Teil der erhaltenen Energie wird zur Verrichtung der Arbeit W_1 vom Gas benötigt, der andere Teil erhöht die innere Energie des Gases. Bei der isothermen Ausdehnung ist $\Delta U = 0$, $Q_2 = W_2$. Das Gas erhält von außen die Wärme Q_2. Dieselbe Energie gibt es in Form der Arbeit W_2 an die Umgebung zurück. Die innere Energie des Gases ändert sich nicht.
Bei der adiabatischen Ausdehnung ist $\Delta U = -W_3$, $Q_3 = 0$. Das Gas erhält keine Wärme, die Arbeit W_3 wird auf Kosten der inneren Energie des Gases

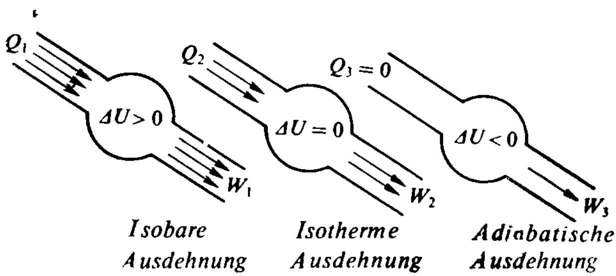


Bild 109

verrichtet. In Bild 109 ist schematisch der Charakter des Energieaustausches für jeden der betrachteten Prozesse dargestellt (durch den linken „Kanal“ gelangt in das Gas Energie durch Wärmeübertragung, durch den rechten „Kanal“ gelangt die Energie aus dem Gas durch Verrichtung von Arbeit; die Anzahl der Pfeile zeigt anschaulich die Intensität des entsprechenden Energieaustausches). Ich möchte hervorheben: **Der Vorrat an innerer Energie eines Gases darf nicht einmal gedanklich in einen „Vorrat an Wärme“ und in einen „Vorrat an Arbeit“ eingeteilt werden. Wärmeaustausch und Verrichtung von Arbeit sind einfach zwei verschiedene „Kanäle“, durch die Energie zufließen (oder abfließen) kann** (ähnlich dazu, wie Wasser durch zwei verschiedene Rohre in ein Bassin fließen kann).

Wir kehren jetzt zu Bild 96 zurück. Wir betrachten den Energieaustausch des Gases mit der Umgebung für den in der Abbildung dargestellten zyklischen Prozeß.

Leser B: Jetzt kann ich das durchführen. Auf der Isotherme *1—2* erhält das Gas von außen eine gewisse Wärmemenge, sie wird vollständig für die Verrichtung von Arbeit verbraucht. Auf der Isochore *2—3* wird keine Arbeit verrichtet, die innere Energie des Gases wächst auf Kosten der von außen zugeführten Wärme. Auf der Isobare *3—1* wird am Gas Arbeit verrichtet, dabei sinkt aber dessen Temperatur. Das bedeutet, daß das Gas überaus intensiv an die Umgebung Wärme abgibt (die abgegebene Wärmemenge ist gleich der Summe aus Arbeit und Abnahme der inneren Energie).

Autor: Sie haben recht. Zum Abschluß noch eine letzte Frage: In Bild 93 waren sechs verschiedene Übergangsprozesse von einem Zustand in einen anderen dargestellt. Worin unterscheiden sich diese Prozesse, wenn wir sie vom Standpunkt der Thermodynamik aus betrachten?

Leser A: Sie unterscheiden sich in der Art des Energieaustausches des Gases mit der Umgebung.

Autor: Richtig. Zur Festigung des Lehrstoffes sind folgende Aufgaben selbständig zu bearbeiten.

Aufgaben

86. Betrachten Sie die in Bild 93 dargestellten Prozesse. Die gegebenen Parameter sind p_1, V_1, T_1, p_2, V_2. Es ist das Verhältnis der Wärmemengen zu finden, die an den Übergängen $1 \to 7$, $1 \to 8$, $5 \to 2$, $4 \to 2$ beteiligt sind.

87. Die Bedingungen sind dieselben wie in Aufgabe 86. Es ist das Verhältnis der Wärmemengen zu finden, die an den Übergängen $1 \to 6$, $3 \to 2$ und $1 \to 5$, $8 \to 2$ teilnehmen.

Leser B: Zur Lösung dieser Aufgaben hat man die Parameter der Zwischenzustände und die Endtemperatur durch die gegebenen Parameter auszudrücken. Man findet dann die Änderung der inneren Energie des Gases für jeden der genannten Übergänge ...

Autor (unterbrechend): Genug, genug! Ihre Erklärung ist vollkommen ausreichend. Zum Abschluß merken wir uns einen der allgemeinen Leitsätze in der Wärmelehre, **das sogenannte Prinzip von Le Chatelier. Es lautet: Die äußere Wechselwirkung, die ein System aus dem Gleichgewichtszustand herausführt, ruft in diesem System solche Prozesse hervor, die so gerichtet sind, daß sie die durch die Wechselwirkung bedingten Änderungen zu verhindern suchen.** So stimuliert die Erwärmung eines Körpers in ihm Prozesse, die mit einem Wärmeverbrauch verbunden sind; umgekehrt begünstigt eine Abkühlung solche Prozesse, bei denen Wärme abgegeben wird. Das Prinzip von Le Chatelier bietet die Möglichkeit vorauszusagen, in welche Richtung sich der Gleichgewichtszustand verschiebt, wenn sich einer der äußeren Parameter (etwa der Druck), die den Systemzustand bestimmen, ändert. **Dieses Prinzip ist ein thermodynamisches Analogon zum Induktionsgesetz von Lenz** (siehe Abschnitt **38**).

25. Was ist der Carnot-Prozeß?

Autor: Sprechen wir über den Wirkungsgrad von Wärmekraftmaschinen. Kennen Sie eine Formel zur Berechnung des Wirkungsgrades?

Leser A: Ja, eine ist bekannt:

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1 \tag{137}$$

(hier ist η der Wirkungsgrad).

Autor: Aber was bedeuten T_1 und T_2?

Leser A: Ich erinnere mich, daß T_2 die Temperatur des „kälteren Wärmebades“ und T_1 die Temperatur des „wärmeren Wärmebades“ ist. Nur kann ich mir nicht richtig vorstellen, was „kälteres“ und „wärmeres Wärmebad“ eigentlich heißt.

Autor: Für welchen Fall ist die Formel (137) gültig?

Leser B: Ich habe irgendwo gelesen, daß diese Formel aus dem Carnot-Prozeß gewonnen worden ist. Aber ich weiß nichts über einen solchen Kreisprozeß.

Autor: Deshalb werde ich jetzt mit einigen Ausführungen darüber beginnen. Stellen Sie sich eine Wärmekraftmaschine vor, deren Wirkung auf der Zustandsände-

rung irgendeiner Gasmasse (des sogenannten Arbeitskörpers) beruht. Es ist offensichtlich, daß diese Änderungen einen Kreisprozeß bilden; nach Beendigung eines Umlaufs muß das Gas jedesmal wieder in den Ausgangszustand zurückgekehrt sein. Bei verschiedenen Maschinen wird der genannte Kreisprozeß unterschiedlich sein. Folglich wird auch der Charakter des Energieaustauschs zwischen Arbeitskörper (Gas) und Umgebung unterschiedlich sein. Das alles ist bei der Betrachtung des Wirkungsgrades von Wärmekraftmaschinen zu berücksichtigen.
Der größte Wirkungsgrad wird von einer idealisierten Wärmekraftmaschine erreicht, in der das Gas seinen

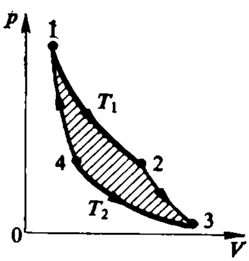


Bild 110

Zustand nach dem Carnot-Prozeß ändert. Gerade in diesem Fall ist der Wirkungsgrad durch Formel (137) gegeben. Nehmen wir an, es gäbe zwei große Körper, von denen der eine die Temperatur T_2, der andere die Temperatur T_1 aufweist. Die Körper sollen deshalb groß sein, damit ein Energieaustausch zwischen ihnen und dem Arbeitskörper zu keiner Änderung der Temperaturen T_2 und T_1 führt. Wenn $T_2 < T_1$ ist, so heißt der erste große Körper „kälteres Wärmebad", der zweite aber „wärmeres Wärmebad". Der Arbeitskörper (das Gas) tritt abwechselnd mit dem wärmeren oder kälteren Körper in Wärmekontakt und tauscht mit ihm durch Wärmeübertragung Energie aus.
Der Carnot-Prozeß setzt sich aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten, wie das Bild 110 zeigt, zusammen. Im Abschnitt *1—2* (Isotherme bei T_1) erhält

das Gas aus dem wärmeren Bad die Wärme Q_1, sie wird zur Verrichtung der Arbeit W_1 bei der Ausdehnung verbraucht. Im Abschnitt *2—3* (Adiabate) verrichtet das Gas die Arbeit W_3; dabei sinkt seine Temperatur auf den Wert T_2. Im Abschnitt *3—4* (Isotherme bei T_2) überträgt das Gas auf das kältere Bad die Wärme Q_2, die gleich der Arbeit W_2 zur Kompression des Gases ist. Im Abschnitt *4—1* (Adiabate) geht die zur Kompression des Gases aufgewandte Arbeit in innere Energie über, wodurch sich die Temperatur des Gases auf den Wert T_1 erhöht. Im Endergebnis sind wir wieder beim Ausgangszustand *1* angelangt (und folglich auch beim Ausgangswert der inneren Energie des Arbeitskörpers).
Wir stellen uns vor, daß eine bestimmte Maschine nach dem Carnot-Prozeß arbeitet. Das Gas erhält vom wärmeren Bad die Wärme Q_1 und gibt an das kältere Bad die Wärme Q_2 ab. Da $Q_1 = W_1$ und $Q_2 = W_2$ ist, erkennt man leicht, daß $Q_2 < Q_1$ gilt. Das bedeutet, das Gas gibt weniger Wärme ab, als es aufnimmt. Dabei ist nach einem Durchlauf des Kreisprozesses die innere Energie des Gases die gleiche wie zu Beginn des Prozesses. Folglich stellt die Differenz $Q_1 - Q_2$ die von der Umgebung insgesamt an das Gas abgegebene Wärmemenge dar. Sie ist gleich der Nutzarbeit der Wärmekraftmaschine. Damit ergibt sich der Ausdruck für den Wirkungsgrad der Maschine in der Form

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1. \qquad (138)$$

In der Thermodynamik zeigt sich, daß der Ausdruck (138) in die einfachere Form (137) übergeführt werden kann (das führen wir nicht durch). Aus den Formeln (137) und (138) ist zu erkennen, daß der Wirkungsgrad nicht von den Eigenschaften des Arbeitskörpers abhängt. Ferner ist selbst bei einer idealen Wärmekraftmaschine der Wirkungsgrad kleiner als eins. Der Bruchteil T_1/T_2 der Energie, die vom wärmeren Bad abgegeben wird, geht unverbraucht in Form von Wärme an das kältere Bad über.
Der Wirkungsgrad einer realen Wärmekraftmaschine ist immer kleiner als der durch Formel (137) gegebene

Wirkungsgrad, da hier auch nichtumkehrbare Prozesse stattfinden.

Leser A: Gibt es reale Maschinen, die nach dem Carnot-Prozeß arbeiten?

Autor: Ja, als eine solche Maschine kann man einen Verbrennungsmotor ansehen.

26. Wieviel Wärmekapazitäten hat ein Gas?

Autor: Was ist das, die Wärmekapazität?

Leser A: Das ist diejenige Wärmemenge, die man aufwenden muß, um die Temperatur eines Körpers um 1 K zu erhöhen.

Autor: Richtig. Aber wieviel Wärmekapazitäten hat ein Gas?

Leser A: Ich verstehe Ihre Frage nicht.

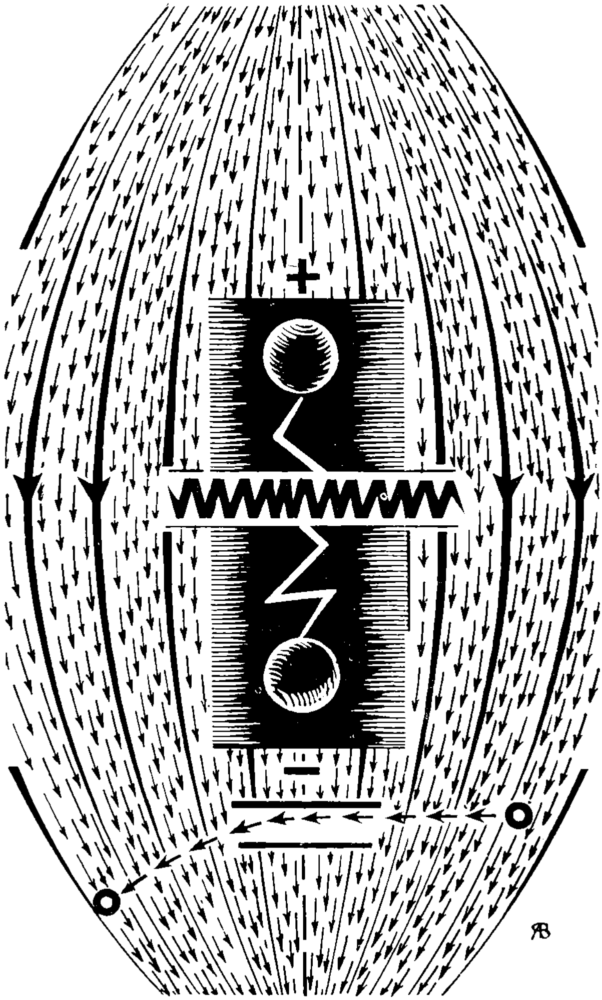
Autor: In einem solchen Fall muß ich die Frage in einer verständlicheren Form stellen. Nehmen wir an, ein Gas wird erwärmt, und seine Temperatur erhöht sich um ΔT. Das wird zweimal gemacht: einmal bei konstantem Volumen des Gases (isochore Erwärmung), das andere Mal bei konstantem Druck (isobare Erwärmung). Muß man in den genannten Fällen zur Erwärmung des Gases die gleichen Wärmemengen aufwenden?

Leser A: Nach meiner Meinung sind die Wärmemengen gleich.

Leser B: Meiner Meinung nach sind sie verschieden. **Bei konstantem Volumen wird keine Arbeit verrichtet, und die gesamte Wärme wird zum Erhöhen der inneren Energie des Gases verwendet. Wir bezeichnen diese Wärme mit Q_v. Bei konstantem Druck ist das Erwärmen des Gases unvermeidlich von dessen Ausdehnung begleitet; dabei wird die Arbeit $W = p\Delta V$ verrichtet.** Die in diesem Fall zugeführte Wärme Q_p wird teilweise für den Zuwachs an innerer Energie des Gases und teilweise für die Verrichtung der genannten Arbeit durch das Gas benötigt. Folglich muß $Q_p > Q_v$ sein.

Autor: Völlig richtig. Wir rufen uns jetzt noch einmal ins Gedächtnis, was die Wärmekapazität ist.

WAS IST
EIN FELD?
WIE BESCHREIBT
MAN EIN FELD?
WIE GEHT
IN EINEM FELD
DIE BEWEGUNG
VOR SICH?
DIESE
FUNDAMENTALEN
FRAGEN
DER PHYSIK
WERDEN GENAUER
AM BEISPIEL DES
ELEKTRO-
STATISCHEN
FELDES
UNTERSUCHT.
WIR ERÖRTERN
DIE BEWEGUNG
EINES GELADENEN
KÖRPERS
IM HOMOGENEN
ELEKTRO-
STATISCHEN
FELD.
WIR LÖSEN
EINE REIHE
VON AUFGABEN,
DIE DAS
COULOMBSCHE
GESETZ
ERLÄUTERN.



Leser A: Ich glaube, ich habe es verstanden. **Bei einem Gas gibt es zwei Wärmekapazitäten, eine bei konstantem Volumen (wir bezeichnen sie mit C_v) und eine andere bei konstantem Druck (C_p).** Wir können schreiben: $C_v = Q_v/\Delta T$, $C_p = Q_p/\Delta T$. Dabei ist $C_p > C_v$.

Autor: Richtig. Aber können Sie nicht C_p durch C_v ausdrücken?

Leser B: Gestatten Sie mir das bitte. Für den Zuwachs an innerer Energie des Gases verbraucht man die Wärme $Q_v = C_v \Delta T$. Das bedeutet

$$Q_p = C_v \Delta T + p \Delta V,$$

woraus

$$C_p = \frac{Q_p}{\Delta T} = C_v + p\,\frac{\Delta V}{\Delta T} \tag{139}$$

folgt.

Autor: Weiter muß man die Zustandsgleichung der Gase anwenden, aus der sich

$$p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T$$

ergibt. Damit finden wir endgültig

$$C_p = C_v + \frac{m}{\mu} R. \tag{140}$$

Der Gleichung (140) entnimmt man, daß die universelle Gaskonstante R gleich der Differenz der Wärmekapazitäten eines Mols eines beliebigen idealen Gases ist.

27. Wir sprechen über das Feld

Autor: Wir unterhalten uns über das Feld, einen grundlegenden physikalischen Begriff. Zur Definition werden wir uns mit dem elektrostatischen Feld befassen. Wie stellen Sie sich ein Feld vor? Was ist das?

Leser A: Offen und ehrlich gesagt, es fällt mir sehr schwer, mir ein Feld vorzustellen. Ein Feld, das ist etwas Unmerkliches, nicht Sichtbares, in der Art eines Phantoms. Gleichzeitig ist es, wie immer behauptet wird, überall anwesend. Ich habe nichts eingewendet, wenn mir gesagt wurde, ein Feld sei materiell. Aber das ist für mich etwas Nichtssagendes. Spricht man über einen Stoff, so weiß ich, worüber gesprochen wird. Nur, wenn über ein Feld gesprochen wird, so verstehe ich noch nicht, worum es eigentlich geht.

Leser B: Ich stelle mir ein Feld als völlig wahrnehmbar vor. In einem Stoff hat man Materie in konzentrierter Form. Demgegenüber ist im Feld die Materie im Raum „verschmiert". Die Tatsache, daß wir ein Feld nicht sehen können, ist nicht entscheidend. Ein Feld kann mit Hilfe einfacher Geräte „gesehen" werden. **Ein Feld überträgt die Wechselwirkungen von Körpern.** Beispielsweise überträgt ein elektrisches Feld die Wechselwirkung zwischen unbeweglichen elektrischen Ladungen. Man kann sagen, daß jede Ladung um sich selbst ein Feld erzeugt. Das Feld, das durch die eine Ladung aufgebaut wurde, beeinflußt auch das andere Feld, und umgekehrt beeinflußt das von der zweiten Ladung aufgebaute Feld dasjenige der ersten Ladung. So kommt die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Ladungen zustande.

Leser A: Aber ist es denn nicht möglich, ohne „Überträger" auszukommen? Was hindert uns daran, anzunehmen, daß eine Ladung unmittelbar auf eine andere Ladung einwirkt?

Leser B: Hiergegen kann man ernsthafte Erwiderungen vorbringen. Stellen wir uns vor, daß eine der Ladungen zu irgendeinem Zeitpunkt durch irgendeine Ursache ihren Ort verändert, daß sie „zappelt". Geht man von der Vorstellung einer „unmittelbaren Wechselwirkung" aus, so ist notwendigerweise zu schließen, daß im selben Moment auch die zweite Ladung „zappeln" muß. Das würde bedeuten, daß ein Signal von der ersten Ladung augenblicklich zur zweiten Ladung gelangen müßte. Das widerspricht, wie mir bekannt ist, den Grundvorstellungen der Relativitätstheorie. Gibt es aber einen Übermittler der Wechselwirkungen, also ein Feld, dann breitet sich ein Signal von der einen zur anderen

Ladung mittels des Feldes aus. Jedenfalls ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit immer endlich, und es gibt deshalb ein bestimmtes Zeitintervall, für das die erste Ladung schon zu „zappeln“ aufgehört, die zweite aber noch nicht zu „zappeln“ angefangen hat. In diesem Intervall enthält nur das Feld das Signal des „Zappelns“.

Leser A: Trotzdem möchte ich gern eine genaue Definition dessen, was ein Feld ist, hören.

Autor: Ich habe mir mit Interesse Ihren Dialog angehört. Ich merke, daß Leser B lebhaft an Problemen der modernen Physik interessiert ist und in verschiedenen populären Physikbüchern nachschlägt. Letztlich hat er das herausgearbeitet, was man als schöpferisch konstruktives Denken bezeichnen kann. Der Begriff des Feldes ist für ihn ein vollkommen realer „Arbeits“-Begriff. Seine Bemerkungen über das Feld als Übermittler der Wechselwirkungen sind völlig richtig. Leser A begnügte sich offensichtlich mit dem formalen Durchlesen eines Lehrbuches. Infolgedessen ist seine Denkweise reichlich unbeholfen. Natürlich sage ich das nicht mit der Absicht, einen Gesprächspartner zu kränken, sondern deswegen, um am Beispiel zu zeigen, wie hilflos sich viele Prüflinge in ähnlichen Situationen fühlen. So sonderbar es auch scheinen mag, aber einer relativ großen Anzahl von Schülern wurde die Liebe zum Lesen populärwissenschaftlicher Literatur nicht anerzogen. Kehren wir aber zur betrachteten Frage zurück. (*Zum Leser A*) Sie hatten gewünscht, daß man Ihnen eine genaue Definition des Feldes gibt. Ohne eine solche Definition können Sie sich kein Feld vorstellen. Sie sagten jedoch, daß Sie sich vorstellen könnten, was ein Stoff ist. Aber kennen Sie denn die genaue Definition des Begriffs „Stoff“?

Leser A: Der Begriff „Stoff“ bedarf keiner solchen Definition. Einen Stoff kann man mit der Hand „fühlen“.

Autor: Dann bedarf auch der Begriff des Feldes keiner Definition, denn man kann ein Feld ebenfalls fühlen, wenn auch nicht mit der Hand. Jedoch ist hier die Situation um vieles ernster. Eine exakte, logisch einwandfreie Definition zu geben, bedeutet, diesen Begriff auf einen „primäreren“ Begriff zurückzuführen. Aber was macht man, wenn der Begriff schon zu den primären Begriffen gehört? Versuchen Sie, in der Geometrie die Definition einer geraden Linie zu geben. Eine annähernd gleiche Sachlage haben wir bei den Begriffen „Stoff“ und „Feld“. Das sind derartig primäre und fundamentale Begriffe, daß man kaum hoffen kann, eine genaue Definition, die deren Wesen ausschöpft, zu finden.

Leser A: Man kann doch aber sicher versuchen, irgendeine, wenn auch nicht sehr genaue Definition zu geben?

Autor: Ja, natürlich. Nur muß man sich darüber im klaren sein, daß eine solche beliebige Definition keineswegs erschöpfend sein kann. Materie kann in unterschiedlichen Formen existieren. Sie kann mit mehr oder weniger scharfen Grenzen innerhalb eines beschränkten Raumgebietes konzentriert (man sagt: lokalisiert) sein. Sie kann aber auch „delokalisiert“ auftreten. Der erste Zustand der Materie läßt sich mit dem Begriff „Stoff“, der zweite mit dem Begriff „Feld“ vergleichen. Beide Zustände haben neben unterschiedlichen auch gemeinsame physikalische Wesensmerkmale. Beispielsweise gibt es in einem Einheitsvolumen die Energie eines Stoffes und die Energie eines Feldes. Ebenso kann man vom Impuls je Volumen bezüglich eines Stoffes oder bezüglich eines Feldes sprechen.

Jedes Feld spielt die Rolle als Übermittler eines bestimmten Typs von Wechselwirkungen. Gerade wegen der Wechselwirkung können wir die Wesensmerkmale eines Feldes in dem einen oder anderen seiner Punkte bestimmen. Ein elektrisch geladener Körper erzeugt zum Beispiel im Raum um sich selbst ein elektrostatisches Feld. Um dieses Feld in einem beliebigen Punkt des Raumes zu erkennen und auszumessen, muß man an diesen Punkt einen anderen geladenen Körper bringen und die auf diesen Körper wirkende Kraft messen. Dabei setzt man voraus, daß der zweite Körper hinreichend klein ist. Man kann dann die Störung des auszumessenden Feldes durch den zweiten, in das Feld hineingebrachten Körper vernachlässigen.

Die Eigenschaften der Materie sind unerschöpflich, der Erkenntnisprozeß ist endlos. Wir kommen auf dem Weg der Erkenntnis und der Anwendung der Eigenschaften der uns umgebenden Materie in der Praxis nur schrittweise weiter vorwärts. Bei unserem Vorwärtsschreiten müssen wir von Zeit zu Zeit „Etiketten ankleben“, die die Meilensteine auf dem Weg der Erkenntnis darstellen können. Wir geben einem Etwas den Namen „Feld“. Wir sehen ein, daß dieses Etwas an und für sich unbegrenzt ist. Wir wissen viel über dieses Unbegrenzte, das wir Feld nennen, und deshalb verwenden wir den Begriff „Feld“ mehr oder weniger befriedigend. Vieles ist uns bekannt, aber noch lange nicht alles. Von diesem Etwas eine genaue Definition zu geben, das wäre genau so schwierig, als ob wir versuchen wollten, die Tiefe eines bodenlosen Abgrundes zu messen.

Leser B: Ich glaube, daß das Feldbegriff, wie übrigens auch jeder andere Begriff, der im Prozeß des Studiums der materiellen Welt auftaucht, unerschöpflich ist. Gerade deshalb ist eine erschöpfende, exakte Definition des Feldes nicht möglich.

Autor: Ich stimme völlig mit Ihnen überein.

Leser A: Ihre Bemerkungen über Stoff und Feld als zwei Erscheinungsformen der Materie, lokalisiert und delokalisiert, hätten mir vollkommen genügt. Aber weshalb begannen Sie über die Unerschöpflichkeit physikalischer Begriffe, über die Endlosigkeit des Erkenntnisprozesses zu sprechen? Als ich davon hörte, war die Klarheit erneut ausgelöscht, und alles wurde irgendwie verschwommen.

Autor: Ich verstehe Ihre Gemütsverfassung. Sie suchen, wenn auch keine genaue, so doch aber eine gute Definition des Feldes. Sie wollen diese Definition gewissenhaft lernen und sie bei Nachfrage aufsagen. Sie wollen nicht einsehen, daß die Situation keineswegs statisch, sondern dynamisch ist. Man sollte nicht denken, alles sei verschwommen. Ich würde sagen, alles ist dynamisch. Jede exakte Definition stellt eigentlich etwas Starres und Abgeschlossenes dar. **Die physikalischen Begriffe jedoch muß man gerade in der Entwicklung betrachten.** So unterscheidet sich das, was wir gestern unter dem Feldbegriff verstanden, bemerkenswert davon, was wir heute darunter verstehen. **Beispielsweise zieht im Unterschied zur klassischen Physik die moderne Physik keine strenge**

Grenze zwischen Feld und Stoff. In der modernen Physik wandeln sich Feld und Stoff gegenseitig ineinander um: Der Stoff geht in ein Feld, ein Feld in einen Stoff über. Eine ausführliche Diskussion hierüber wäre jetzt wohl kaum zweckmäßig, sie würde zu weit führen.

Leser B: Unsere Diskussion über Physik hat unverkennbar den Charakter eines philosophischen Gesprächs angenommen.

Autor: Das ist vollkommen natürlich, weil **die Erörterung physikalischer Begriffe notwendig das Vorhandensein einer ausreichend entwickelten dialektischen Denkweise voraussetzt.** Hat sich eine solche Denkweise noch nicht herausgebildet, so muß man gezwungenermaßen seine Zuflucht zu Abschweifungen philosophischer Art nehmen. Gerade deshalb empfehle ich Ihnen dringend, öfter in verschiedene Bücher hineinzusehen. Dadurch werden Sie Ihre Denkweise schulen, sie weiter vertiefen und dynamischer — und ich würde sagen, weniger bürokratisch — gestalten. Hierbei erweist sich das Buch „Materialismus und Empiriokritizismus" von Wladimir Iljitsch Lenin für jeden jungen Menschen als unschätzbare Hilfe.

Leser A: Das ist aber ein sehr anspruchsvolles Buch. Es wird an Hochschulen studiert.

Autor: Ich bestehe nicht darauf, daß Sie dieses Buch studieren. Es ist tatsächlich keine leicht verständliche Lektüre. Versuchen Sie, es mit Aufmerksamkeit zu lesen. Je nach Ihrer Ausbildung wird es von stärkerem oder schwächerem Einfluß auf Ihre Denkweise sein. Es ist aber in jedem Fall nützlich, das Buch zu lesen. Abschließend möchte ich folgendes sagen: Den Leser A erschreckt unverkennbar die „Verschwommenheit", er möchte Exaktheit. Er denkt, je genauer, um so besser. Er vergißt, daß alles (auch die Genauigkeit) nur bis zu einem bestimmten Grad gut ist. Versuchen Sie, sich eine vollkommen exakte Welt vorzustellen, über die Sie erschöpfende Information besitzen. Stellen Sie sich das vor und sagen Sie: Wären Sie nicht erstaunt über diese Welt in ihrer Primitivität und ihrem Unvermögen, sich weiterzuentwickeln? Denken Sie über alles das nach und übereilen Sie sich nicht mit Ihren Schlußfolgerungen. Aber jetzt versuchen wir, uns dem Problem von einer anderen Seite zu nähern. Wir stellen uns die Frage: Wie wird ein Feld beschrieben? Mir ist bekannt, daß nach erhaltener Antwort auf diese Frage viele Menschen sagen werden: „Jetzt wissen wir, was ein Feld ist.“

28. Wie beschreibt man ein elektrostatisches Feld?

Autor: Wir fahren nun in unserer Diskussion, die wir im vorangegangenen Abschnitt begannen, fort. Wir stellen uns die Frage: Wie beschreibt man ein elektrostatisches Feld?

Leser B: Zur Beschreibung eines elektrostatischen Feldes benutzt man eine verktorielle Größe, die sogenannte elektrische Feldstärke. In jedem Punkt des Feldes hat die Feldstärke E eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Betrag. Geht man von einem zu einem anderen Punkt des Feldes auf eine solche Weise über, daß stets die Richtungen der Feldstärkevektoren tangential zur Bewegungsrichtung orientiert sind, so nennt man die bei der Bewegung erhaltenen Bahnen „Feldlinien der elektrischen Feldstärke“. Die Feldlinien sind für die grafische Darstellung eines Feldes sehr zweckmäßig.

Autor: Gut. Das behandeln wir jetzt konkreter. Die Coulombsche Wechselwirkungskraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2, deren Abstand gleich r ist, schreiben wir in der Form

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}. \tag{141}$$

Diese Formel läßt sich wie folgt umschreiben:

$$F_e = q_2 \, E\,(r), \tag{142}$$

wobei

$$E\,(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{143}$$

ist.

Formel (143) sagt aus, daß die Ladung q_1 um sich herum ein Feld aufbaut, dessen Feldstärke im Abstand r von der Ladung q_1 den Wert $q_1/4\pi\varepsilon r^2$ hat. Formel (142) besagt, daß dieses Feld auf die Ladung q_2, die in einem Punkt im Abstand r von der Ladung q_1 angebracht ist, mit der Kraft $q_2E\ (r)$ wirkt. Die neue Schreibweise der Formel (141) wurde auf Grund der Einführung eines „Vermittlers", der Größe E, möglich, die eine Charakteristik des Feldes ist. Versuchen Sie, den Anwendungsbereich der Beziehungen (141) bis (143) zu analysieren.

Leser B: Formel (141) ist auf zwei Punktladungen anwendbar. Das heißt, der Anwendungsbereich der Formeln (142) und (143) ist der gleiche, da diese Formeln aus (141) erhalten wurden.

Autor: Sie haben nicht ganz recht. Im Unterschied zu (141) und (143) hat die Formel (142) einen bedeutend breiteren Anwendungsbereich. Es ist ohne Belang, wodurch das Feld E aufgebaut wird (durch eine Punktladung, durch ein System von Punktladungen, durch geladene Körper beliebiger Form); in allen Fällen ist die Kraft, mit der ein Feld auf eine Ladung q_0 wirkt, gleich dem Produkt aus dieser Ladung und der Feldstärke in dem Punkt, in dem sich die Ladung q_0 befindet. Eine allgemeinere Schreibweise der Formel (142) hat folgende vektorielle Form:

$$\vec{F}_e = q_0\vec{E}\ (\vec{r}) \tag{144}$$

(hier dienen die Pfeile, wie üblich, zur Kennzeichnung von Vektoren). Aus (144) ist ersichtlich, daß die Richtung der Kraft, die in einem Punkt des Feldes auf die Ladung q_0 wirkt, mit der Richtung der Feldstärke übereinstimmt, falls die Ladung q_0 positiv ist. Bei negativer Ladung q_0 sind Kraft und Feldstärke entgegengesetzt gerichtet.

Hier läßt sich die „Selbständigkeit" des Feldbegriffs fühlen. Verschiedene geladene Körper bauen um sich herum unterschiedliche elektrische Felder auf; jedes von ihnen wirkt auf eine in ihm angebrachte Ladung nach demselben Gesetz (144). Um die Kraft, die auf eine Ladung wirkt, zu finden, muß man vorher die Feldstärke in dem Punkt, in dem sich die Ladung befindet, ausrechnen. Deshalb ist es wichtig, die Feldstärke eines Ladungssystems bestimmen zu können. Wir nehmen an, daß wir zwei Ladungen q_1 und q_2 haben. Die Feldstärke jeder einzelnen Ladung läßt sich leicht finden (sowohl betrags- als auch richtungsmäßig), und zwar für jeden beliebigen, uns interessierenden Punkt des Raumes. Für einen gewissen, durch den Ortsvektor $\vec{r}$ bestimmten Punkt seien die Feldstärken durch die Vektoren $\vec{E}_1(\vec{r})$ und $\vec{E}_2(\vec{r})$ gegeben. Die resultierende Feldstärke im Punkt

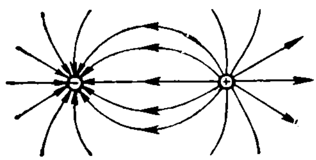


Bild 111

$\vec{r}$ ergibt sich durch verktorielle Addition der Feldstärken der einzelnen Ladungen:

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \vec{E}_1\,(\vec{r}) + \vec{E}_2\,(\vec{r}). \tag{145}$$

Man muß besonders betonen, daß die Feldstärken vektoriell zu addieren sind. (*Zum Leser A*). Ist Ihnen das klar?

Leser A: Ja, ich weiß, Feldstärken müssen vektoriell addiert werden.

Autor: Gut, dann überprüfen wir, wie Sie das in der Praxis anwenden. Zeichnen Sie das Feldlinienbild für zwei Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen ($+q_1$ und $-q_2$) unter der Bedingung, daß eine der Ladungen (zum Beispiel q_1) um ein Mehrfaches größer als die andere ist.

Leser A: Hierbei habe ich Schwierigkeiten. Wir haben früher keine derartigen Felder betrachtet.

Autor: Welche Felder haben Sie denn betrachtet?

Leser A: Ich weiß, wie das Feld für zwei betragsmäßig gleiche Ladungen aussieht. Bild 111 zeigt meine Zeichnung.

Autor: Ihre Zeichnung ist etwas ungenau, obwohl das Feldlinienbild für betragsmäßig gleiche und im Vorzeichen unterschiedliche Ladungen qualitativ richtig wiedergegeben ist. Können Sie sich denn nicht vorstellen, wie sich dieses Bild ändern wird, wenn eine der Ladungen wächst?

Leser A: So etwas ist uns niemals gezeigt worden.

Autor: In einem solchen Fall wendet man die Regel der vektoriellen Addition der Feldstärken an. Wir beginnen mit dem Ihnen bekannten Fall zweier gleicher

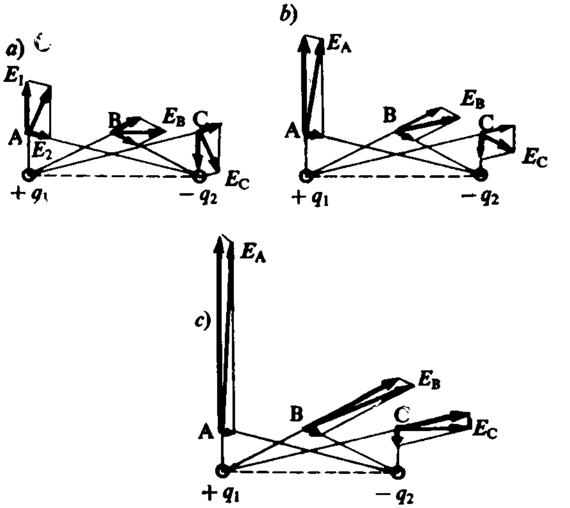


Bild 112

Ladungen (Bild 112a). Wir wählen drei Punkte A, B, C aus und zeichnen in jedem von ihnen zwei Feldstärkevektoren: $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ ($\vec{E}_1$ ist das Feld der Ladung $+q_1$, $\vec{E}_2$ das Feld der Ladung $-q_2$). Dann addieren wir in jedem der genannten Punkte die Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$. Wir erhalten die Summenvektoren $\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$ und $\vec{E}_C$. Sie müssen den Feldlinien durch die entsprechenden Punkte parallel sein.

Diese drei Vektoren geben den Feldlinienverlauf, wie er in Bild 113a dargestellt ist, an. Vergleichen Sie diese Zeichnung mit der von Ihnen im Bild 111 angefertigten Zeichnung. Achten Sie dabei auf die Ungenauigkeiten in Ihrem Bild bezüglich des Feldlinienverlaufs links von der Ladung $(-q)$ und rechts von der Ladung $(+q)$. Wir stellen uns vor, daß die Ladung $+q$ auf das Doppelte vergrößert, die Ladung $-q$ auf die Hälfte verkleinert wird (Bild 112b). Wir wählen die gleichen Punkte A, B, C wie im

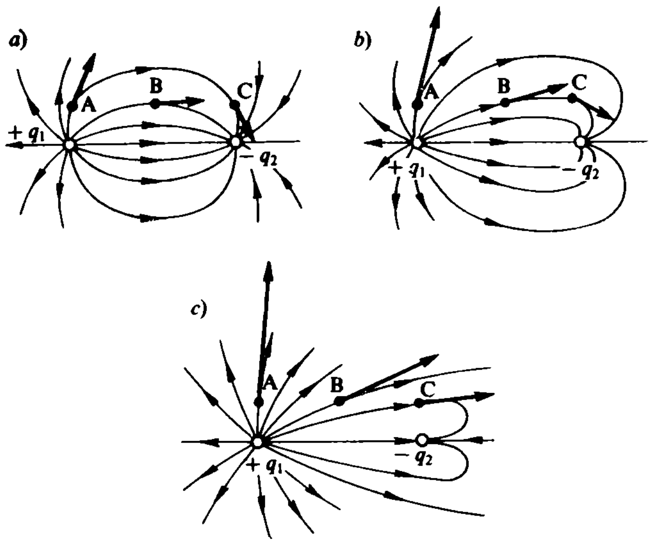


Bild 113

vorhergehenden Fall. Wir zeichnen in diesen Punkten erst die Feldstärkevektoren der Ladungen und bilden dann ihre Summen: $\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$, $\vec{E}_C$. Das diesen Vektoren entsprechende Feldlinienbild zeigt Bild 113b.

Zum Schluß nehmen wir an, daß q_1 nochmals verdoppelt und q_2 nochmals halbiert wird (Bild 112c). Für jeden der Punkte A, B, C konstruieren wir die Vektoren $\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$, $\vec{E}_C$. Das zugehörige Bild der Feldlinien zeigt Bild 113c.

Sie sehen, daß mit der Zunahme der relativen Größe der Ladung q_1 deren Einfluß wächst, das Feld der Ladung $+q_1$ scheint das Feld der Ladung $-q_2$ zu unterdrücken.

Leser A: Jetzt ist mir klar, wie man das Feldlinienbild eines Ladungssystems konstruieren kann.

Autor: Wir fahren mit der Behandlung des elektrostatischen Feldes fort. Für dieses Feld gibt es eine wichtige, zum Gravitationsfeld analoge Eigenschaft, nämlich: **Die Arbeit der Feldkräfte längs eines beliebigen geschlossenen Weges ist gleich Null.** Mit anderen Worten, wenn eine Ladung im Feld so verschoben wird, daß sie an ihren Ausgangsort zurückgelangt, dann ist für diese Verschiebung die Arbeit der Feldkräfte gleich Null. Auf einigen Abschnitten des Weges wird diese Arbeit positiv, auf einigen negativ sein; insgesamt ergibt sich eine Arbeit, die gleich Null ist. Aus dieser Eigenschaft des elektrostatischen Feldes ergeben sich interessante Schlußfolgerungen. Könnten Sie nicht diese Schlußfolgerungen nennen?

Leser B: Nein, ich habe noch nicht darüber nachgedacht.

Autor: Ich helfe Ihnen, Sie haben sich wahrscheinlich schon damit beschäftigt, daß die Feldlinien in einem elektrostatischen Feld nicht geschlossen sind. Sie beginnen und enden in Ladungen (sie beginnen in den positiven Ladungen und enden in den negativen Ladungen), oder sie verlaufen ins Unendliche (kommen aus dem Unendlichen). Können Sie diesen Umstand nicht mit der oben genannten Eigenschaft des elektrostatischen Feldes in Zusammenhang bringen?

Leser B: Ich glaube, verstanden zu haben. Wäre eine Feldlinie des elektrostatischen Feldes geschlossen, so könnten wir auf ihr durch Verschiebung einer Ladung an den Ausgangsort zurückkehren. Bei dieser Verschiebung längs der Feldlinie ändert die Arbeit offensichtlich nicht ihr Vorzeichen, sie kann folglich auch nicht verschwinden. Andererseits muß die Arbeit aber auf jedem beliebigen geschlossenen Weg Null sein. Das bedeutet, **die Feldlinien eines elektrostatischen Feldes können nicht geschlossen sein.**

Autor: Aus der oben genannten Eigenschaft eines elektrostatischen Feldes ergibt sich noch eine andere Schlußfolgerung: **Wird eine Ladung von einem Punkt zu einem anderen Punkt des Feldes verschoben, so hängt die Verschiebungsarbeit nicht vom Weg ab, auf dem die Verschiebung vor sich geht.** Wir verschieben die Ladung auf zwei verschiedenen Wegen *1* und *2*

(Bild 114) vom Punkt A zum Punkt B. Wir bezeichnen die von den Feldkräften verrichtete Verschiebungsarbeit längs des Weges 1 mit W_1, diejenige längs des Weges 2 mit W_2. Nun führen wir einen geschlossenen Umlauf aus: Vom Punkt A aus erreichen wir den Punkt B längs des Weges 1, von B aus kehren wir auf dem Weg 2 zum Punkt A zurück. Da dieser Weg entgegen seiner Orientierung durchlaufen wird, ist die dabei verrichtete Arbeit gleich $-W_2$. Die Gesamtarbeit des Feldes bei diesem Kreislauf ist also $W_1 + (-W_2) = W_1 - W_2$. Da die Arbeit auf jedem geschlossenen Weg gleich Null sein muß,

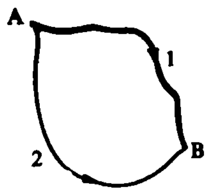


Bild 114

erhalten wir $W_1 = W_2$. Die Tatsache, daß für eine Ladung die Verschiebungsarbeit nicht davon abhängt, welchen Weg man wählt, sondern allein durch Anfangs- und Endpunkt bestimmt ist, gestattet, diese Größe als Feldcharakteristik zu verwenden (denn diese Größe hängt nur von der Auswahl der Punkte im Feld ab!). Es gibt also auch noch eine andere charakteristische Größe des elektrostatischen Feldes, das Potential. Im Gegensatz zur Feldstärke ist diese Größe ein Skalar, weil sie durch die Arbeit ausgedrückt wird.

Leser B: Uns wurde gesagt, daß der Potentialbegriff für ein Feld keine physikalische Bedeutung hat. Physikalische Bedeutung hat nur die Differenz der Potentiale an zwei beliebigen Punkten des Feldes.

Autor: So ist es. Genau gesagt, die vorausgegangenen Erläuterungen erlauben gerade die Einführung einer Potentialdifferenz: Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B des Feldes (wir bezeichnen sie mit $\varphi_A - \varphi_B$) ist als Quotient aus der bei der Verschiebung der Ladung q_0 vom Ort A zum Ort B verrichteten Arbeit der Feldkräfte und der Ladung q_0 definiert, also durch

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{W_{A \to B}}{q_0}. \tag{146}$$

Nimmt man an, daß das Feld im Unendlichen verschwindet (d.h. $\varphi_\infty = 0$), so nimmt der Ausdruck (146) die Form

$$\varphi_A = \frac{W_{A \to \infty}}{q_0} \tag{147}$$

an. **Dadurch kann in einem gegebenen Punkt das Potential des Feldes durch die Arbeit bestimmt werden, die die Feldkräfte bei der Verschiebung einer positiven Einheitsladung von diesem Punkt ins Unendliche verrichten.** Wenn man die Arbeit betrachtet, die nicht die Feldkräfte verrichten, sondern die gegen die Feldkräfte verrichtet wird, so ist das Potential des Feldes in einem gegebenen Punkt gleich der zu verrichtenden Arbeit, wenn eine positive Einheitsladung aus dem Unendlichen in den gegebenen Punkt transportiert wird. Es ist offensichtlich, daß diese Potentialdefinition keine experimentelle Messung des Potentials für einen gegebenen Punkt des Feldes zuläßt, da wir uns nicht ins Unendliche entfernen können. Deshalb sagt man, **die Differenz der Potentiale in zwei Punkten des Feldes hat eine physikalische Bedeutung, nicht aber das Potential in ein und demselben Punkt.** Man kann sagen, daß das Potential in einem gegebenen Punkt bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmbar ist. Für diese Konstante wählt man zweckmäßigerweise den Wert, den das Potential im Unendlichen hat, von diesem Wert an wird das Potential gezählt. Man setzt diesen Wert gleich Null. Im Rahmen der genannten Voraussetzungen ist das Potential des Feldes einer Punktladung q_1 in dem Punkt, der von der Ladung den Abstand r hat, gleich

$$\varphi(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r}. \tag{148}$$

Es ist nicht schwer, das Potential für einen Ort $\vec{r}$

zu bestimmen, wenn das Feld von einem Punktladungssystem erzeugt wird.

Leser B: Wir bezeichnen mit $\varphi_1(\vec{r})$, $\varphi_2(\vec{r})$, usw. die von den einzelnen Punktladungen erzeugten Potentiale am Ort $\vec{r}$. Das Gesamtpotential $\varphi(\vec{r})$ ist offenbar gleich der algebraischen Summe der Potentiale der einzelnen Ladungen:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) + \dots \tag{149}$$

Das Potential einer positiven Ladung wird in dieser Summe mit positivem, das einer negativen Ladung mit negativem Vorzeichen geschrieben.

Autor: Richtig. Jetzt betrachten wir den Begriff der Äquipotentialflächen. **Die geometrische Fläche derjenigen Punkte des Feldes, die ein und dasselbe Potential haben, heißt Äquipotentialfläche (oder Fläche gleichen**

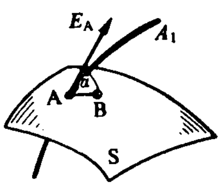


Bild 115

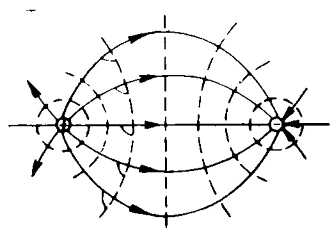


Bild 116

Potentials). Durch jeden Punkt eines Feldes verlaufen eine Feldlinie und eine Äquipotentialfläche. Wie sind beide zueinander orientiert?

Leser B: Ich weiß, daß **in jedem Punkt des Feldes die Feldlinie und die entsprechende Äquipotentialfläche aufeinander senkrecht stehen.**

Autor: Könnten Sie das beweisen?

Leser B: Nein. Das kann ich wahrscheinlich nicht.

Autor: Das ist wirklich nicht schwer. Durch einen bestimmten Punkt A verlaufe die Feldlinie AA_1 und die Äquipotentialfläche S (Bild 115). Die Feldstärke im Punkt A sei $\vec{E}_A$. Verschiebt man die Ladung q_0 aus dem Punkt A in den beliebigen Punkt B auf der Äquipotentialfläche, der in einem kleinen Abstand

Δl vom Punkt A liegt, so ist die bei dieser Verschiebung verrichtete Arbeit durch

$$W = F_e \Delta l \cos \alpha = q_0 E_A \Delta l \cos \alpha \qquad (150)$$

gegeben. α ist hierbei der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{E}_A$ und der Verschiebungsrichtung. Die gleiche Arbeit läßt sich mittels der Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B ausdrücken. Wir erhalten

$$W = q_0 (\varphi_A - \varphi_B). \qquad (151)$$

Da die Punkte A und B auf der gleichen Potentialfläche liegen, ist $\varphi_A = \varphi_B$. Das bedeutet im Zusammenhang mit Gl. (151), daß die Arbeit W gleich Null sein muß. Setzt man dieses Ergebnis in Gl. (150) ein, erhält man

$$E_A q_0 \Delta l \cos \alpha = 0.$$

Von allen Faktoren auf der linken Seite dieser Gleichung kann nur cos α Null sein. Das heißt, es ist $\alpha = 90°$. Selbstverständlich erhalten wir dieses Ergebnis für alle Verschiebungsrichtungen AB, wenn nur diese Verschiebungen in der Äquipotentialfläche S erfolgen. Die Krümmung der Fläche stört die Überlegungen nicht, weil die Verschiebung sehr klein sein darf.
Bei der grafischen Darstellung eines elektrostatischen Feldes werden sowohl die Feldlinien als auch die Querschnitte der Äquipotentialflächen gezeichnet. Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Linien und Flächen kann man durch einen bekannten Satz von Feldlinien einen Satz von Schnitten der Äquipotentialflächen zeichnen und umgekehrt.
(*Zum Leser A*) Versuchen Sie, für den in Bild 113a gezeichneten Fall die Schnitte der Äquipotentialflächen zu skizzieren. Damit sie nicht mit den Feldlinien verwechselt werden können, zeichnen Sie die Schnitte der Flächen als gestrichelte Linien.

Leser A: Ich werde die gestrichelten Linien so zeichnen, daß sie die Feldlinien stets unter einem rechten Winkel schneiden. Hier ist meine Zeichnung (Bild 116).

Autor: Ihre Zeichnung ist richtig.

Leser A: Auf welche Arten von elektrostatischen Feldern trifft man in den Aufgaben, die in der Prüfung gestellt werden? Könnte man nicht die wesentlichen Formeln zusammenstellen?

Autor: Das zu tun, ist nicht schwer. Man trifft auf drei Arten von Feldern:

a) homogene Felder (die Feldstärke ist in allen Punkten gleich):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{const}}, \quad \varphi_A - \varphi_B = Er_{AB} \tag{152}$$

(hier ist r_{AB} die Projektion des Abstandes zwischen den Punkten A und B auf die Richtung der elektrischen Feldstärke).

b) Felder einer Punktladung q:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \vec{r}^{\,0}, \quad \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{153}$$

(hierin ist $\vec{r}$ der Radiusvektor von der Ladung zum Beobachtungspunkt, $\vec{r}^{\,0}$ der Einheitsvektor $\vec{r}^{\,0} = \vec{r}/r$).

c) Felder von Systemen aus einigen Punktladungen. Im letzten Fall ist, wie schon gezeigt wurde, **die Feldstärke die vektorielle Summe der Feldstärken der Einzelladungen, aber das Potential die algebraische Summe der Potentiale der Einzelladungen.**

Weiter möchte ich noch etwas zum homogenen Feld sagen. Was meinen Sie, reicht es aus, ein homogenes Feld als Feld zu definieren, bei dem in jedem Punkt die Richtung der Feldstärke die gleiche ist?

Leser B: Und dabei wird nichts über den Betrag der Feldstärke ausgesagt?

Autor: Nein.

Leser B: Ich glaube, das ist nicht ausreichend. Ein homogenes Feld ist ein Feld, bei dem in jedem Punkt die Feldstärke gleich ist, sowohl bezüglich der Richtung als auch bezüglich des Betrages.

Autor: Das ist so. Aber könnte es nicht sein, daß aus der Gleichheit der Richtungen der Feldstärke die Gleichheit des Betrages der Feldstärke folgt?

Leser B: Wieso denn? Das verstehe ich nicht.

Autor: Dann betrachten wir ein Feld, dessen Feldlinien in Bild 117 dargestellt sind. Man muß sich merken, je dichter die Feldlinien verlaufen, um so größer ist der Betrag der Feldstärke. Nach dem Bild zu urteilen, ist $E_1 > E_2$. Es wird verlangt, für eine bestimmte Ladung q die Verschiebungsarbeit längs des geschlossenen Rechteckweges $ABCD$ zu berechnen.

Leser B: Aber weshalb macht man das? Es ist doch von vornherein klar, daß die Arbeit Null sein muß.

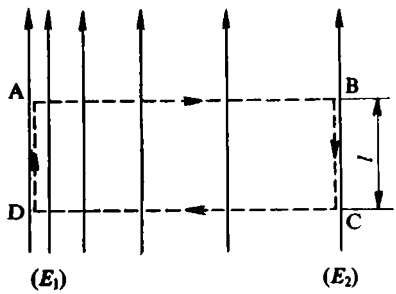


Bild 117

Autor: Geben Sie trotzdem die Arbeit längs der Streckenabschnitte an!

Leser B: Arbeit längs der Abschnitte AB und CD ist Null, weil hier die Feldlinien auf der Verschiebungsrichtung senkrecht stehen. Die Arbeit auf der Strecke BC ist gleich $-qE_2l$, und im Abschnitt DA ist sie gleich qE_1l.

Autor: Welches Gesamtresultat ergibt sich?

Leser B: Seltsam! Man erhält $q\,(E_1 - E_2)\,l$, was nicht gleich Null ist. Das ist absurd!

Autor: Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie?

Leser B: Ich kann nur schlußfolgern, daß das in Bild 117 dargestellte Feld (als elektrostatisches Feld) nicht vorhanden ist.

Autor: Völlig richtig. Es bedeutet, wenn die Feldlinien parallel sind, muß auch ihre Dichte konstant sein (wenn die Feldstärke in allen Raumpunkten die gleiche Richtung hat, so muß auch ihr Betrag überall gleich sein).

Leser B: Wirklich ein interessantes Ergebnis.

Aufgaben

88. In Bild 118 sind vier betragsmäßig gleiche Punktladungen dargestellt. Jede trägt eine Ladung von 2 C (Coulomb). Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 2 m. Berechnen und finden

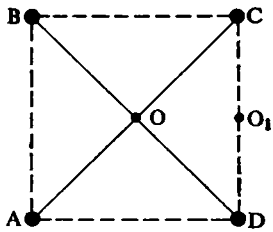


Bild 118

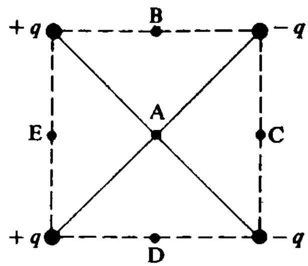


Bild 119

Sie Betrag und Richtung der Feldstärke des Ladungssystems in den Punkten O und O_1 in den Fällen:
a) alle Ladungen sind positiv,
b) C und D sind negativ, A und B sind positiv,
c) B und C sind positiv, A und D negativ,
d) B und D sind positiv, A und C negativ.

89. In Bild 119 sind vier dem Betrag nach gleiche Ladungen mit je 2 C dargestellt. Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 2 m. Auszurechnen ist für das Ladungssystem das Potential des Feldes in den Punkten A, B, C, D, E.

29. Wie verhalten sich die Feldlinien in der Nähe der Oberfläche eines Leiters?

Autor: Wir bringen einen leitenden Körper in ein elektrostatisches Feld. Sie wissen genau, daß in einem Feld ein Leiter durch eine bestimmte physikalische Größe, die sogenannte elektrische Kapazität (oder einfach Kapazität), charakterisiert wird. Aber haben Sie irgendwann einmal darüber nachgedacht, weshalb wir gerade von der Kapazität eines Leiters und nicht von der Kapazität eines Dielektrikums sprechen?

Leser A: Darüber habe ich noch nie nachgedacht.

Autor: Wie definieren Sie die Kapazität eines isolierten Leiters?

Leser A: Als diejenige Elektrizitätsmenge, die man diesem Leiter zuführen muß, um sein Potential um eine Einheit zu vergrößern.

Autor: Beachten Sie, daß Sie über das Potential wie über eine charakteristische Eigenschaft eines Körpers gesprochen haben. Bisher sahen wir aber das Potential als charakteristische Feldgröße an, und als solche veränderte es sich von Ort zu Ort. Das Potential eines Feldes ist eine Funktion des Ortes. Kann man vom Potential als einer charakteristischen Größe eines Körpers sprechen? Und falls das möglich ist, warum?

Leser B: Das ist möglich, wenn der Körper ein Leiter ist. Es ist eine Tatsache, daß **alle Punkte eines Leiters, der sich in einem elektrostatischen Feld befindet, das gleiche Potential haben. Der Leiter ist ein Körper gleichen Potentials.**

Autor: Wie können Sie Ihre Behauptung begründen?

Leser B: In einem Leiter gibt es freie Ladungen. Wenn zwischen irgendwelchen Leiterpunkten eine Potentialdifferenz bestehen würde, so müßte zwischen diesen Punkten ein elektrischer Strom fließen. Das ist offensichtlich nicht der Fall.

Autor: Richtig. Man kann sagen, daß sich in einem Leiter, der in ein elektrostatisches Feld gebracht ist, die freien Ladungen auf eine solche Weise verteilen, daß die Feldstärke im Innern eines Leiters Null wird. Das heißt auch, alle Punkte des Leiters (sowohl die in seinem Inneren als auch die auf seiner Oberfläche) haben ein und dasselbe Potential. Die Gleichheit des Potentials in allen Leiterpunkten erlaubt es, vom Potential des Leiters als einer Eigenschaft des Körpers zu sprechen. Ich möchte betonen, daß es in einem Dielektrikum keine freien Ladungen gibt; deshalb geht hier auch keine Neuverteilung der Ladungen wie beim Leiter vor sich. Übrigens, wie verteilen sich denn die freien Ladungen in einem Leiter?

Leser B: Sie konzentrieren sich auf seiner Oberfläche. Dabei liegen sie um so dichter, je größer die Krümmung einer konvexen Oberfläche ist. Die größte Ladungsdichte wird an einer Spitze entstehen.

Autor: Völlig richtig. Deshalb kann in der Nähe einer Spitze oder eines dünnen Drahtes eine elektrische Entladung erfolgen. Eine solche Entladung, die von einem stark inhomogenen elektrischen Feld in einem Gas bei Drücken von 100 kPa ausgelöst wird, heißt Korona. Wir treffen sie immer an, wenn man unter Hochspannungsleitungen das charakteristische Summen hört. In vergangenen Zeiten erschreckte die Korona-Entladung die Seeleute, wenn sie das Leuchten der Schiffsmasten sahen (das sogenannte Elmsfeuer). Wir kehren nun zu einem Leiter im elektrostatischen Feld zurück. Wir haben erkannt, daß der Leiter ein Körper konstanten Potentials ist. Hieraus folgt, daß die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche sein muß. In Anwendung dieser Schlußfolgerung antworten Sie auf folgende Frage: Wie verlaufen die Feld-

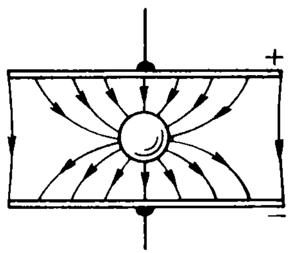


Bild 120

linien eines elektrostatischen Feldes in der Umgebung einer Leiteroberfläche?

Leser B: Da die Feldlinien immer senkrecht auf der Potentialfläche stehen, müssen sie senkrecht in die Leiteroberfläche einmünden.

Autor: Leider wissen die Prüflinge wirklich oft nichts darüber. Ich glaube, daß bei Ihnen die Bitte, das Feldlinienbild innerhalb eines Plattenkondensators mit darin befindlicher metallischer Kugel zu zeichnen, keine Schwierigkeiten hervorruft. Gewöhnlich ruft diese Frage bei den Prüflingen erhebliche Bedenken hervor.

Leser B: Die Feldlinien müssen sich den Kondensatorplatten und der Kugeloberfläche unter rechten Winkeln nähern. Deshalb wird das Feldlinienbild so aussehen, wie es Bild 120 zeigt.

Autor: Das ist richtig. Mir ist unverständlich, warum einige Prüflinge meinen, die Feldlinien müßten um die Kugel herum verlaufen.— Wir werden jetzt folgende Aufgabe betrachten. Im Abstand r von der Erdoberfläche befindet sich eine Ladung $+q$. Sie induziert in der Erde eine Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Folge davon ist, daß zwischen Ladung und Erde eine Anziehungskraft auftritt. Ermitteln Sie diese Kraft. Ich empfehle beiden Lesern, über diese Aufgabe nachzudenken.

Leser A: Die in der Erde induzierte Ladung muß der Ladung $+q$ gleich sein. Das heißt, die gesuchte Kraft ist gleich $q^2/r^2 \cdot 4\pi\varepsilon$.

Leser B: Ich bin mit dieser Schlußfolgerung nicht einverstanden. Leser A hat vorausgesetzt, daß die in

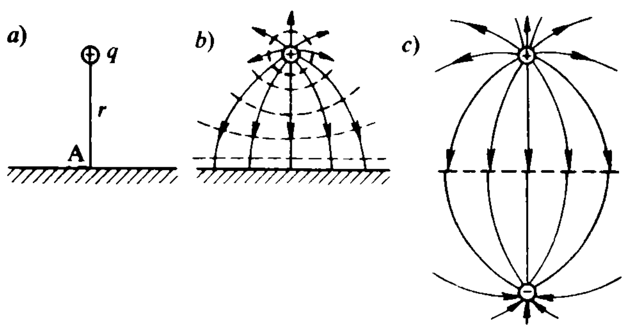


Bild 121

der Erde erzeugte Ladung in einem Punkt konzentriert ist (Punkt A des Bildes 121a). Jedoch ist die influenzierte Ladung keine Punktladung, sie ist über die Erdoberfläche verteilt. Damit ist von vornherein klar, daß die gesuchte Kraft kleiner als $q^2/4\pi\varepsilon r^2$ sein muß.

Autor: Ich bin mit Ihrer Meinung einverstanden. Wie findet man aber trotzdem die Anziehungskraft zwischen Ladung und Erde?

Leser B: Mir scheint, daß man das Feld zwischen Ladung und Erdoberfläche untersuchen muß. Die Erdoberfläche ist offenbar eine Äquipotentialfläche. Folglich müßten in Erdnähe die Äquipotentialflächen des Feldes nahezu Ebenen sein. Entsprechend müssen die Äquipotentialflächen in der Nähe der Ladung kugelförmig sein. Das erlaubt, ein qualitatives Bild der Äquipotentialflächen (genauer des Schnittes der Flächen) zu zeichnen. Wenn ich dieses Bild habe, kann ich nach der bekannten Regel auch die Feldlinien skizzieren. Das ist in Bild 121b geschehen, in dem die Feldlinien als ausgezogene, die Schnittflächen als gestrichelte Linien gezeichnet sind.

Autor: Erklären Sie weiter. Erinnert Sie das von Ihnen gezeichnete Feldlinienbild des Bildes 121b nicht an irgend etwas?

Leser B: Ach ja, richtig, es ist dem Feldlinienbild zweier entgegengesetzt geladener gleicher Punktmassen ähnlich. Ich zeichne es daneben (Bild 121c). Jetzt ist alles verständlich. In beiden Fällen (Bild 121b und c) sind die Felder in der Nähe der Punktladung $+q$ gleich. Das bedeutet entsprechend Gl. (144), daß in beiden Fällen auch die gleichen Kräfte auf die Ladungen $+q$ wirken müssen. Daher wird die gesuchte Kraft gleich $q^2/16\pi\varepsilon r^2$.

Autor: Ihre Erörterungen sind richtig. Am Beispiel dieser Aufgabe erkennt man gut, wie nützlich sich der Feldbegriff erweisen kann.

30. Wie betrachten Sie in einem homogenen elektrischen Feld die Bewegung?

Autor: Wir stellen uns vor, ein geladener Körper bewegt sich in einem homogenen elektrostatischen Feld. d.h. in einem Feld, in dem die Feldstärke $\vec{E}$ sowohl betrags- als auch richtungsmäßig überall konstant ist. Als Beispiel dafür kann das Feld in einem Plattenkondensator dienen. Erkennen Sie die Ähnlichkeit dieser Aufgabe, Bewegung eines Körpers im homogenen elektrostatischen Feld, mit irgendwelchen Aufgaben, die bereits früher behandelt wurden?

Leser B: Ich glaube, daß große Ähnlichkeit zur Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld besteht, da für verhältnismäßig kleine Abstände das Gravitationsfeld der Erde als homogen betrachet werden kann.

Autor: Völlig richtig. Aber worin besteht der Unterschied zwischen den genannten Fällen, den Bewegungen im elektrostatischen Feld und im Gravitationsfeld?

Leser B: Unterschiedlich sind die auf den Körper wirkenden Kräfte. Im elektrostatischen Feld wirkt auf den Körper die Kraft $F_e = qE$ (sie erteilt dem Körper die Beschleunigung $a_e = qE/m$). Im Gravitationsfeld wirkt auf ihn die Kraft $F_G = mg$ (sie erteilt dem Körper die Beschleunigung g). Hier ist m die Masse des Körpers, q seine elektrische Ladung.

Autor: Ich wünschte, daß alle Prüflinge die einfache Wahrheit verstünden: **Die Bewegung eines Körpers in einem beliebigen homogenen Feld ist kinematisch immer die gleiche. Der einzige Unterschied liegt nur**

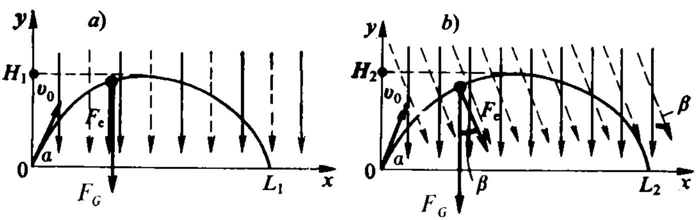


Bild 122

in der Größe der Kraft, die in dem einen oder anderen Feld an dem Körper angreift. Die Bewegung eines geladenen Körpers im homogenen elektrostatischen Feld hat den gleichen Charakter wie die Bewegung eines Steins im Gravitationsfeld der Erde.

Wir untersuchen eine Aufgabe, in der die Bewegung eines Körpers gleichzeitig in zwei Feldern, dem Gravitations- und einem elektrostatischen Feld, erfolgt: *Ein Körper mit der Masse m und der Ladung $+q$ wird unter dem Winkel α zur Horizontalen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben geworfen. Die Bewegung des Körpers verläuft gleichzeitig im Gravitationsfeld und in einem homogenen elektrostatischen Feld der Feldstärke E. Die Feldlinien beider Felder sind vertikal nach unten gerichtet* (Bild 122a). *Es sind die Flugdauer t_1, die Flugweite L_1 und die Flughöhe H_1 des Körpers zu bestimmen.*

Leser B: Auf den Körper wirken zwei Kräfte: Die Schwerkraft $F_G = mg$ und die elektrostatische Kraft $F_e = qE$. Im gegebenen Fall sind beide Kräfte parallel. Wie auch in Abschnitt 5 zerlege ich den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach zwei Richtungen ...

Autor (unterbrechend): Sie wollen den Lösungsablauf wiederholen, der in der analogen Aufgabe in Abschnitt 5 demonstriert wurde?

Leser B: Ja, das wollte ich in aller Kürze.

Autor: Dafür besteht keine Notwendigkeit. Sie können sofort die Resultate (15) bis (17) ausnutzen. Stellen Sie sich dabei vor, daß sich jetzt der Körper in einem gewissen „verstärkten" Gravitationsfeld bewegt, das durch die Summe der Beschleunigungen $g + (qE/m)$ charakterisiert ist. Führen Sie in den Beziehungen (15) bis (17) die Ersetzung

$$g \to g + \frac{qE}{m} \tag{154}$$

durch, und Sie gelangen sogleich zu den gesuchten Resultaten:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g + (qE/m)}, \tag{155}$$

$$L_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g + (qE/m)}, \tag{156}$$

$$H_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g + (qE/m)}. \tag{157}$$

Leser A: Mir ist eine Stelle nicht klar. Im Vergleich zu den entsprechenden Aufgaben aus Abschnitt 5 wirkt in der vorliegenden Aufgabe auf den Körper die zusätzliche Kraft F_e. Diese Kraft ist vertikal gerichtet, sie kann deshalb keinen Einfluß auf die horizontale Bewegungskomponente des Körpers haben. Warum beeinflußt sie aber dann im gegebenen Fall die Flugweite des Körpers?

Autor: Die Flugweite hängt von der Flugzeit ab, und diese Zeit ergibt sich aus der Vertikalkomponente der Bewegung.— Jetzt wollen wir eine etwas abgeänderte Aufgabe besprechen: *Die Feldlinien eines elektrostatischen Feldes seien unter dem Winkel β zur Vertikalen geneigt* (Bild 122b). *Wie oben wird gefor-*

dert, die Zeit t_2, die Flugweite L_2 und die maximale Steighöhe H_2 zu berechnen.

Leser A: Zuerst zerlege ich die Kraft F_e in zwei Komponenten, in eine vertikale ($F_e \cos \beta$) und eine horizontale ($F_e \sin \beta$). Die vorliegende Aufgabe erinnert mich an die Aufgabe mit dem Rückenwind aus Abschnitt 5: Als „Windkraft" tritt hier die Komponente $F_e \sin \beta$ auf.

Autor: Das ist richtig. Nur beachten Sie, daß im Unterschied zur erwähnten Aufgabe mit dem Rückenwind hier eine andere vertikale Kraft wirkt, nämlich $mg + F_e \cos \beta$.

Leser A: Ich nutze die Beziehungen (15), (16) und (19) aus, in denen ich folgende Ersetzungen vornehme:

$$g \rightarrow (g + qE \cos \beta/m),$$

$$\frac{F}{mg} \rightarrow \frac{qE \sin \beta}{mg + qE \cos \beta}. \tag{158}$$

Dann erhalte ich sofort die gewünschten Ergebnisse:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g + qE \cos \beta/m}, \tag{159}$$

$$L_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g + qE \cos \beta/m} \left[1 + \frac{\tan \alpha \, (qE \sin \beta)}{mg + qE \cos \beta} \right], \tag{160}$$

$$H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\,(g + qE \cos \beta/m)}. \tag{161}$$

Autor: Es ist alles vollkommen richtig. Leider sind die Prüflinge oft nicht in der Lage, eine Analogie zwischen der Bewegung im Gravitationsfeld und der Bewegung in einem homogenen elektrostatischen Feld zu finden. Deshalb sind für sie ähnliche Aufgaben übermäßig schwer.

Leser A: Früher haben wir uns mit solchen Aufgaben nicht befaßt. Auf dieses Thema kamen wir erst bei Aufgaben mit der Bewegung eines Elektrons zwischen den Platten eines Plattenkondensators, wobei aber der Einfluß des Gravitationsfeldes auf das Elektron vernachlässigt wurde. Ich erinnere mich, daß mir diese Aufgaben als sehr schwierig erschienen.

Autor: Alle diese Aufgaben sind Spezialfälle der in Bild 122a dargestellten Aufgabe insofern, als man bei der Bewegung eines Elektrons innerhalb eines Kondensators den Einfluß des Gravitationsfeldes vernachlässigen kann. Betrachten wir eine dieser Aufgaben: *Ein Elektron, das die Anfangsgeschwindigkeit v_1 hat, fliegt unter dem Winkel α_1 zu den Platten eines Plattenkondensators in diesen hinein und verläßt ihn unter dem Winkel α_2* (Bild 123). *Die Plattenlänge des Kondensators ist L. Gesucht sind die elektrische Feldstärke E im Kondensator und die kinetische Energie*

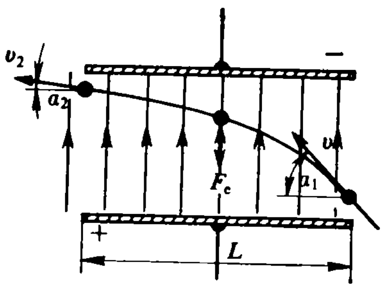


Bild 123

des Elektrons beim Verlassen des Kondensators. Masse m und Ladung q des Elektrons werden als bekannt vorausgesetzt.

Zum Lösen der Aufgabe bezeichne ich die Geschwindigkeit des Elektrons beim Verlassen des Kondensators mit v_2. Parallel zu den Platten fliegt das Elektron mit konstanter Geschwindigkeitskomponente. Hieraus ermitteln wir die Zeit T seiner Bewegung innerhalb des Kondensators

$$T = L/v_1 \cos \alpha_1.$$

Die Anfangs- und Endgeschwindigkeitskomponenten des Elektrons, die zu den Platten senkrecht stehen, sind mit den bekannten kinematischen Beziehungen für die gleichmäßig verzögerte Bewegung verbunden:

$$v_2 \sin \alpha_2 = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{F_e}{m} T = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{qEL}{mv_1 \cos \alpha_1}.$$

Hieraus erhalten wir unter Berücksichtigung, daß sich die Geschwindigkeitskomponente parallel zu den Platten nicht ändert ($v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$):

$$v_1 \cos \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{qEL}{mv_1 \cos \alpha_1}.$$

Daraus ergibt sich die Feldstärke zwischen den Kondensatorplatten:

$$E = \frac{(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)\, mv_1^2 \cos^2 \alpha_1}{qL}. \tag{162}$$

Die kinetische Energie des Elektrons beim Verlassen des Feldes des Kondensators ist

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2}. \tag{163}$$

Haben Sie in dieser Aufgabe alles verstanden?

Leser A: Ja, jetzt weiß ich, wie man solche Aufgaben löst.

Autor: Interessant sind Aufgaben über Schwingungen eines geladenen Pendels, das im Inneren eines Plattenkondensators angebracht ist. Wir betrachten folgende Aufgabe:
Eine Kugel mit der Masse m und der Ladung q ist an einem dünnen Faden der Länge l innerhalb eines Plattenkondensators mit horizontal orientierten Platten aufgehängt. Die Feldstärke im Kondensator ist E, die Feldlinien sind nach unten gerichtet (Bild 124a). *Gesucht ist die Schwingungsperiode dieses Pendels.*

Leser B: Da die Feldlinien des elektrostatischen und des Gravitationsfeldes die gleiche Richtung haben, kann ich das Ergebnis (75) für die Schwingungsperiode eines gewöhnlichen Pendels benutzen, indem in ihm die Beschleunigung g durch die Summe der Beschleunigungen $(g + qE/m)$ ersetzt wird. Auf diese Weise erhält man für die gesuchte Schwingungsperiode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + qE/m}}. \tag{164}$$

Autor: Völlig richtig. Wie Sie sehen, ist die gegebene Aufgabe eigentlich ganz einfach, wenn man in der Lage ist, die Analogie zwischen der Bewegung im elektrostatischen Feld und der Bewegung im Gravitationsfeld auszunutzen.

Leser A: Die Formel (164) ist ihrer Struktur nach der Formel (77) ähnlich.

Autor: Das haben Sie richtig bemerkt. Nur war in der Formel (77) der zusätzliche Summand zur Beschleunigung g mit der Systembeschleunigung verbunden, während in Formel (164) dieser zusätzliche Summand auf der Existenz einer zusätzlichen Wechselwirkung basiert.

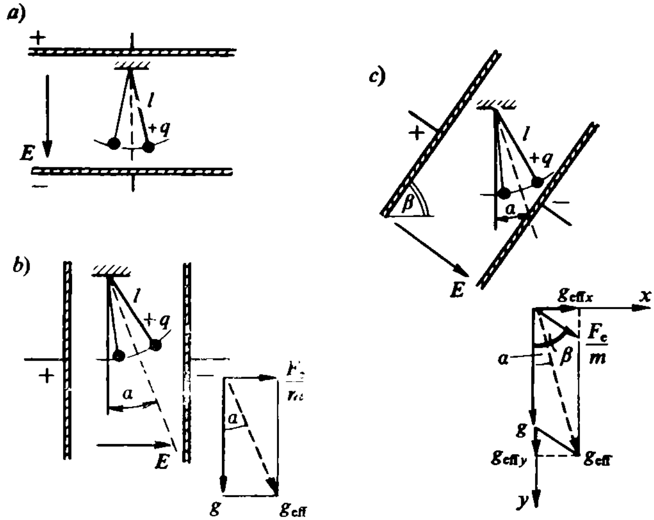


Bild 124

Wie verändert sich Formel (164), wenn die Vorzeichen der Plattenladungen geändert werden?

Leser A: In diesem Fall wird die Schwingungsperiode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - qE/m}} \tag{165}$$

sein.

Autor: Richtig. Aber was geschieht mit dem Pendel, wenn die Feldstärke des Feldes im Kondensator allmählich erhöht wird?

Leser A: Für den letzten Fall [Gl. (165)] wird die Schwingungsperiode wachsen, sie strebt für $E \rightarrow mg/q$ gegen unendlich. Vergrößert man E weiter, so ist es in diesem Fall notwendig, den Faden nicht an der oberen, sondern an der unteren Kondensatorplatte zu befestigen.

Autor: Und welche Form wird in diesem Fall die Formel für die Schwingungsperiode haben?

Leser A: Diese Formel wird dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{qE/m - g}} \tag{166}$$

heißen.

Autor: Gut. Jetzt erschweren wir die Aufgabe: *Wir betrachten die Schwingungen einer geladenen Kugel im Inneren eines Kondensators, dessen Platten nicht horizontal, sondern vertikal angeordnet sind* (Bild 124b). *In diesem Fall stehen die Beschleunigungen* g *und* F_e/m *aufeinander senkrecht. Wie auch vorhin ist gefordert, die Schwingungsperiode des Pendels und außerdem den Winkel* α, *den die vertikale Richtung mit der Gleichgewichtslage des Pendels bildet, zu bestimmen.*

Leser B: Ich nutze die Erklärungen des vorliegenden Abschnittes und die des Abschnittes 12 aus. Damit kann ich sofort den Schluß ziehen:

1. die Schwingungsperiode wird durch eine effektive Beschleunigung g_{eff}, die die vektorielle Summe der Beschleunigungen im Gravitationsfeld der Erde und im elektrostatischen Feld des Kondensators ist, ausgedrückt;
2. die Gleichgewichtsrichtung des Fadens stimmt mit der Richtung der Effektivbeschleunigung überein (das ist die Richtung, die in Bild 124b gestrichelt gezeichnet ist). Damit wird:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + (qE/m)^2}}}, \tag{167}$$

$$\tan \alpha = \frac{qE}{mg}. \tag{168}$$

Autor: Völlig richtig. Ich glaube, daß jetzt beim Betrachten des allgemeinen Falles keine Schwierigkeiten auftreten: *Die Platten eines Kondensators bilden mit der horizontalen Richtung den Winkel* β (Bild 124c). *Die Frage ist die gleiche: Bestimmen Sie die Schwingungsperiode und den Winkel* α *zwischen vertikaler Richtung und der Gleichgewichtslage des Fadens!*

Leser B: Wie auch im vorangegangenen Fall ist die effektive Beschleunigung eine Vektorsumme aus den Beschleunigungen im Gravitationsfeld der Erde und im elektrostatischen Feld des Kondensators. Ihre Richtung bestimmt die Gleichgewichtslage des Pendelfadens. Die Größe g_{eff} ergibt sich mittels des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie:

$$g_{eff}^2 = g^2 + (qE/m)^2 + 2g\,(qE/m)\cos\beta.$$

Damit wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + (qE/m)^2 + 2g\,(qE/m)\cos\beta}}}. \tag{169}$$

Für den Wert von $\tan\alpha$ ergibt sich

$$\tan\alpha = \frac{g_{eff,x}}{g_{eff,y}} = \frac{(qE/m)\sin\beta}{g + (qE/m)\cos\beta}. \tag{170}$$

Autor: Sie haben das richtige Ergebnis erhalten. Es ist klar, daß es für $\beta = 0°$ auf den Fall horizontaler Platten, für $\beta = 90°$ auf den Fall der vertikalen Platten führen muß. Überzeugen Sie sich davon!

Leser B: Wenn $\beta = 0°$ ist, so ist $\cos\beta = 1$ und $\sin\beta = 0$. In diesem Fall geht die Formel (169) in die Formel (164) über, und es wird $\tan\alpha = 0$ (die Gleichgewichtslage des Fadens ist die Vertikale). Ist $\beta = 90°$, so ist $\cos\beta = 0$ und $\sin\beta = 1$. Dann geht der Ausdruck (169) in den Ausdruck (167) über, und Formel (170) reduziert sich auf Formel (168).

Autor: Damit haben wir das Schwingungsproblem für ein geladenes Pendel innerhalb eines Plattenkondensators vollständig geklärt. Schließlich möchte ich noch eine Aufgabe vorlegen: *Es ist die Schwingungsperiode einer geladenen Kugel unter der Bedingung auszurechnen, daß sich im Befestigungspunkt des Fadens noch eine genau gleiche Ladung befindet* (Bild 125). *Irgendwelche Kondensatoren gibt es hier nicht.*

Leser A: Nach dem Coulombschen Gesetz wird die Kugel vom Aufhängepunkt mit der Kraft $q^2/4\pi\varepsilon l^2$ abgestoßen. Diese Kraft muß der Kugel die Beschleunigung $q^2/4\pi\varepsilon l^2 m$ erteilen. In der Formel für die Schwingungsperiode muß man diese Beschleunigung in Betracht ziehen. Als Ergebnis erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + q^2/4\pi\varepsilon l^2 m}}. \tag{171}$$

Autor (zum Leser B): Sind Sie mit diesem Resultat einverstanden?

Leser B: Nein, ich bin nicht einverstanden. Wenn Gleichung (171) richtig wäre, müßte die Beschleunigung $q^2/4\pi\varepsilon l^2 m$ während der gesamten Zeit vertikal nach unten gerichtet sein. In Wirklichkeit ist sie nur beim

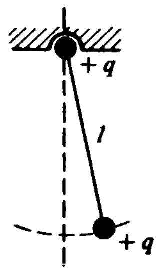


Bild 125

Durchgang des Pendels durch die Gleichgewichtslage so gerichtet. Es ist daher verständlich, daß Formel (171) auf alle Fälle falsch ist. Jedoch habe ich Schwierigkeiten, die richtige Lösung zu finden.

Autor: Es ist schon gut, daß Sie die Fehlerhaftigkeit der Formel (171) erkannt haben. Im gegebenen Fall ist die elektrische Kraft dauernd längs des Fadens gerichtet. Sie wird durch die Reaktionskraft des Fadens ausgeglichen und kann daher nicht zum Zustandekommen einer rücktreibenden Kraft führen. Folglich kann sie auch nicht die Schwingungsperiode des Pendels beeinflussen.

Leser B: Das bedeutet, daß hier die Schwingungsperiode ebenfalls durch Formel (75) für ein ungeladenes Pendel gegeben ist?

Autor: So ist es. Im betrachteten Fall ist das Feld der elektrischen Kräfte nicht homogen, und es kann keine Analogie zum Gravitationsfeld hergeleitet werden.

Aufgaben

90. Ein Elektron fliegt parallel zu den Platten in einen Plattenkondensator hinein. Sein Abstand von der positiv geladenen Platte beträgt $d = 4$ cm, die Plattenlänge ist $l = 15$ cm. Nach welcher Zeit fällt das Elektron auf diese Platte, wenn die Feldstärke im Kondensator 500 V/m beträgt? Mit welcher minimalen Geschwindigkeit v_0 muß das Elektron fliegen, damit es nicht auf die Platte fällt? Die Masse des Elektrons ist $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, seine Ladung beträgt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

91. Ein Elektron fliegt in einen Plattenkondensator mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 3 \cdot 10^6$ m/s parallel zu den Platten

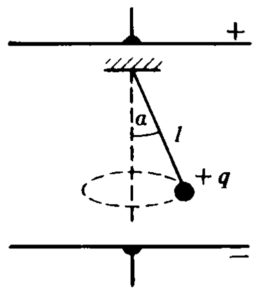


Bild 126

hinein. Gesucht ist die Feldstärke E im Kondensator, wenn das Elektron unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zu den Platten herausfliegt. Die Länge der Platten beträgt $l = 20$ cm. Masse m und Ladung e des Elektrons sind bekannt (siehe Aufg. 90).

92. Innerhalb eines Plattenkondensators mit der Feldstärke E kreist eine Kugel mit der Masse m und der Ladung q, die an einem Faden der Länge l aufgehängt ist, gleichförmig. Der Winkel zwischen Faden und vertikaler Richtung ist α. Gesucht sind die Fadenspannkraft T und die kinetische Energie W_k der Kugel (Bild 126).

93. Zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 und den entsprechenden Ladungen $+q_1$ und $+q_2$ sind mit einem Faden verbunden, der über eine feste Rolle läuft. Es sind die Beschleunigung a der Kugeln und die Fadenspannkraft T zu berechnen, wenn das gesamte System in einem homogenen elektrostatischen Feld der Feldstärke E untergebracht ist. Die Feldlinien sind vertikal nach unten gerichtet. Wechselwirkungen zwischen den geladenen Kugeln werden vernachlässigt.

94. In einem homogenen elektrischen Feld der Stärke E — die Feldlinien sind vertikal nach oben gerichtet — kann in der vertikalen Ebene eine Kugel mit der Masse m und der Ladung q

an einem Faden der Länge l kreisen. Welche horizontale Geschwindigkeit v muß man der Kugel in ihrer oberen Lage erteilen, damit die Fadenspannkraft in der unteren Lage zehnmal so groß wie die Gewichtskraft der Kugel ist?

31. Sind Sie in der Lage, das Coulombsche Gesetz anzuwenden?

Autor: Wir befassen uns nun etwas ausführlicher mit dem Coulombschen Gesetz und mit Aufgaben, die mit der Anwendung dieses Gesetzes verknüpft sind. Vor allem bitte ich Sie darum, das Coulombsche Gesetz zu formulieren.

Leser A: Die Wechselwirkungskraft zweier Ladungen ist dem Produkt dieser Ladungen direkt proportional und dem Quadrat des Abstandes dieser Ladungen umgekehrt proportional.

Autor: Ihre Antwort reicht nicht aus, sie ist unvollständig.

Leser B: Vermutlich muß man noch hinzufügen, daß die Wechselwirkungskraft umgekehrt proportional zur Dielektrizitätskonstante ε des Stoffes ist?

Autor: Das ist natürlich sinnvoll, jedoch besteht hierin nicht die Hauptsache. Sie haben wieder vergessen zu sagen, daß die Kraft eine vektorielle Größe ist. Vergessen Sie deshalb nicht, gleichzeitig mit dem Betrag der Kraft auch deren Richtung anzugeben (denken Sie in diesem Zusammenhang an die Erörterungen zum zweiten Newtonschen Gesetz in Abschnitt 4).

Leser A: Ich habe verstanden. Man muß eine Bemerkung darüber hinzufügen, daß die Kraft, mit der die Ladungen wechselwirken, in Richtung der Verbindungsgeraden beider Ladungen wirkt.

Autor: Das ist zu wenig. Längs dieser Geraden gibt es zwei Richtungen.

Leser A: Man muß sagen, daß die Ladungen einander abstoßen, wenn sie gleiches Vorzeichen haben, und daß sie bei unterschiedlichen Vorzeichen einander anziehen.

Autor: Richtig. Jetzt, da Sie alle Ergänzungen gesammelt haben, erhalten Sie die vollständige Formulierung des

Coulombschen Gesetzes. **Es kann nicht schaden, noch einmal ausdrücklich zu betonen, daß sich das Coulombsche Gesetz auf die Wechselwirkung von Punktladungen bezieht.**

Leser B: Aber kann man denn für das Coulombsche Gesetz eine Formel so aufschreiben, daß sie die gesamten Informationen enthält? Denn in der üblichen Schreibweise

$$F = B \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \tag{172}$$

ist die Auskunft über die Richtung der Kraft ja nicht vorhanden.

Autor: Eine solche Schreibweise des Coulombschen Gesetzes gibt es. Dafür ist es aber notwendig, zuerst genau festzulegen, um welche Kraft es sich gerade handelt. Nehmen wir an, es handle sich um eine Kraft, mit der die Ladung q_1 auf die Ladung q_2 wirkt (und nicht umgekehrt!). Wir führen ein Koordinatensystem mit dem Ursprung dort ein, wo sich die Ladung q_1 befindet. Vom Koordinatenursprung aus verläuft der Vektor $\vec{r}$ zu dem Ort, an dem sich die Ladung q_2 befindet. Dieser Vektor heißt Ortsvektor der Ladung q_2. In diesem Fall lautet die vollständige Schreibweise des Coulombschen Gesetzes

$$\vec{F} = B \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3} \vec{r}, \tag{173}$$

wobei der Faktor B von der Wahl des Einheitensystems abhängt.

Leser A: Aber in dieser Formel ist die Kraft nicht umgekehrt proportional zum Quadrat, sondern zur dritten Potenz der Entfernung beider Ladungen!

Autor: Nichts dergleichen. Denn der Vektor $\vec{r}/r$ hat den Betrag eins (dimensionslose Einheit). Er heißt Einheitsvektor und dient nur zur Festlegung der Richtung.

Leser A: Das bedeutet, ich kann einfach Formel (173) aufschreiben, wenn man mich nach dem Coulombschen Gesetz fragt? Mehr ist nicht notwendig?

Autor: Man muß nur die Bedeutung der Bezeichnungen in der Formel erläutern.

Leser A: Wenn ich nun aber nicht die Formel (173), sondern die Formel (172) aufschreibe?

Autor: Dann müssen Sie mit Worten hinzufügen, in welche Richtung die Coulomb-Kraft zeigt.

Leser A: Aber wie berücksichtigt Formel (173) die Tatsache, daß die Ladungen einander anziehen oder abstoßen?

Autor: Liegen Ladungen gleichen Vorzeichens vor, so ist das Produkt $q_1 q_2$ positiv. In diesem Fall ist der Vektor $\vec{F}$ dem Ortsvektor $\vec{r}$ parallel. $\vec{F}$ ist die Kraft, die auf Ladung q_2 ausgeübt wird. Die Ladung q_2 wird von der Ladung q_1 abgestoßen. Haben die Ladungen unterschiedliche Vorzeichen, ist das Produkt $q_1 q_2$ negativ. Der Vektor $\vec{F}$ ist dann zum Vektor $\vec{r}$ antiparallel, d.h., die Ladung q_2 wird von der Ladung q_1 angezogen.

Leser A: Erläutern Sie bitte, was man über den Faktor B wissen muß.

Autor: Dieser Faktor hängt von der Wahl des Einheitensystems ab. Verwenden Sie das CGS-System, so ist $B = 1$. Wenn Sie aber das SI benutzen, dann ist $B = 1/4\pi\varepsilon_0$, wobei die sogenannte Dielektrizitätskonstante des Vakuums gleich $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$ ist.
Wir betrachten einige Aufgaben zum Coulombschen Gesetz.

A u f g a b e 1: *Vier gleiche Ladungen q befinden sich in den Ecken eines Quadrates. Welche Ladung Q des entgegengesetzten Vorzeichens muß in der Mitte des Quadrates angebracht werden, damit sich das gesamte Ladungssystem im Gleichgewicht befindet?*

Leser A: Das System besteht aus fünf Ladungen. Vier Ladungen sind bekannt, eine Ladung ist unbekannt. Wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, so ist die Summe der Kräfte, die auf die fünf Ladungen wirken, gleich Null. Anders gesagt, man muß sich mit dem Gleichgewicht jeder einzelnen Ladung befassen.

Autor: Das ist eine überflüssige Arbeit. Es ist nicht schwierig sich zu überlegen, daß sich die Ladung Q unabhängig von ihrem Betrag infolge ihrer geometrischen Lage im Gleichgewicht befinden wird. Deshalb bringt die Gleichgewichtsbedingung für diese Ladung nichts. Infolge der Symmetrie des Quadrates sind die verbleibenden vier Ladungen einander völlig äquivalent. Es ist daher ausreichend, an Stelle aller vier Ladungen nur das Gleichgewicht einer Ladung zu betrachten. Es spielt dabei keine Rolle, welche Ladung untersucht wird. Wählen wir beispielsweise die Ladung im Punkt A aus (Bild 127). Welche Kräfte wirken auf diese Ladung?

Leser A: Die Kraft F_1 bezüglich der Ladung im Punkt B, die Kraft F_2 bezüglich der Ladung im Punkt D und

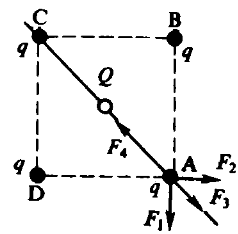


Bild 127

schließlich die Kraft bezüglich der gesuchten Ladung, die sich im Mittelpunkt des Quadrates befindet.

Autor: Entschuldigen Sie, aber weshalb haben Sie die Ladung im Punkt C nicht berücksichtigt?

Leser A: Aber sie wird doch durch die Ladung im Zentrum des Quadrates „abgeschirmt".

Autor: Ihr Fehler ist wirklich naiv. Denken Sie daran, daß in einem Ladungssystem auf jede einzelne Ladung Kräfte von ausnahmslos allen anderen Ladungen des Systems ausgeübt werden. Es ist also noch eine Kraft F_3 hinzuzufügen, die von Ladung C auf Ladung A wirkt. Das endgültige Diagramm der Kräfte zeigt Bild 127.

Leser A: Weiter ist es ganz einfach. Ich wähle Richtung AC aus und projiziere alle auf die Ladung im Punkt A wirkenden Kräfte auf diese Richtung. Die algebraische Summe der Projektionen der Kräfte muß Null sein, das heißt, es muß

$$F_4 = 2F_1 \cos 45° + F_3$$

gelten. Bezeichnet a die Seitenlänge des Quadrates, so läßt sich diese Gleichheit in die Form

$$\frac{Qq}{a^2/2} = \sqrt{2}\,\frac{q^2}{a^2} + \frac{q^2}{2a^2}$$

umschreiben. Wir erhalten hieraus

$$Q = \frac{q}{4}\,(2\sqrt{2}+1).$$

Autor: Richtig. Aber was meinen Sie, wird das Gleichgewicht des Systems stabil sein?

Leser A: Nein, es wird nicht stabil sein. Es ist ein labiles Gleichgewicht. Es genügt, eine der Ladungen leicht zu verschieben, dann geraten alle Ladungen in Bewegung, und das System bricht zusammen.

Autor: Sie haben recht. **Es zeigt sich, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, für unbewegliche Ladungen eine stabile Gleichgewichtskonfiguration zu erreichen.**

Aufgabe 2: *Zwei Kugeln mit gleichen Radien, gleichen Massen und gleichen Ladungen, die von einem Punkt aus an Fäden gleicher Länge hängen, werden in ein flüssiges Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl ε eingetaucht. Die Dichte des Dielektrikums sei ϱ_0. Welche Massendichte müßten die Kugeln haben, damit die von den Fäden gebildeten Winkel sowohl in Luft als auch im Dielektrikum dieselben sind?*

Leser B: Die Ablenkung der Fäden ist durch die Coulomb-Abstoßung bedingt. Es seien F_{e1} und F_{e2} die Coulombschen Abstoßungskräfte in Luft bzw. im flüssigen Dielektrikum.

Autor: Wodurch unterscheiden sich diese Kräfte?

Leser B: Da nach den Bedingungen der Aufgabe die Ablenkwinkel der Fäden in beiden Fällen gleich sind, so ist auch der Abstand der beiden Kugeln in beiden Fällen gleich. Der Unterschied in den Kräften F_{e1} und F_{e2} kann also nur durch die Dielektrizitätszahl bedingt sein:

$$F_{e1} = \varepsilon F_{e2}. \tag{174}$$

Betrachten wir den konkreten Fall, daß sich die Kugeln in Luft befinden. Aus dem Gleichgewicht der Kugeln ist zu schließen, daß die Summe der Kräfte

F_{e1} und der Schwerkraft F_G (vektorielle Summe!) längs des Fadens gerichtet sein müßte. Im entgegengesetzten Fall würde sie sich nicht mit der Reaktionskraft der Fadenspannkraft kompensieren (Bild 128a). Hieraus folgt

$$F_{e1}/F_G = \tan \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen der Fadenrichtung und der Vertikalen ist. Werden die Kugeln in das Dielektrikum eingetaucht, ist die Kraft F_{e1} durch die Kraft F_{e2} zu ersetzen, die Schwerkraft F_G muß aber

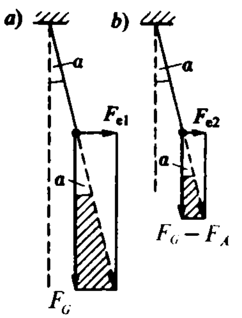


Bild 128

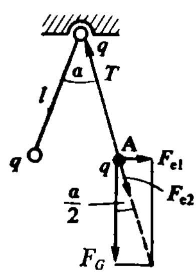


Bild 129

durch $F_G - F_A$ ersetzt werden, wobei F_A die Auftriebskraft ist. Das Verhältnis der neuen Kräfte muß aber wie oben gleich $\tan \alpha$ sein (Bild 128b):

$$F_{e2}/(F_G - F_A) = \tan \alpha.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{F_{e1}}{F_G} = \frac{F_{e2}}{F_G - F_A}.$$

Setzt man hier Gleichung (174) ein und berücksichtigt, daß $F_G = Vg\varrho$ und $F_A = Vg\varrho_0$ ist, so ergibt sich

$$\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{1}{\varrho - \varrho_0},$$

woraus als gesuchte Dichte

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \varrho_0$$

folgt.

Autor: Ihre Antwort ist richtig.

A u f g a b e 3: *Zwei einheitlich geladene Kugeln sind in einem Punkt an Fäden gleicher Länge l aufgehängt. Jede Kugel hat die Masse m. Im Aufhängepunkt befindet sich eine dritte Kugel, die ebenso wie die ersten beiden Kugeln geladen ist* (Bild 129). *Zu berechnen ist die Ladung der Kugeln, wenn in der Gleichgewichtslage die Fäden den Winkel α miteinander bilden.*

Leser B: Wir betrachten Kugel A. Auf sie wirken vier Kräfte (Bild 129). Da sich die Kugel im Gleichgewicht befindet, zerlege ich diese Kräfte nach zwei Richtungen ...

Autor (unterbrechend): Im gegebenen Fall kann man einfacher vorgehen. Es ist so, daß die vom Aufhängepunkt ausgehende Kraft keinen Einfluß auf die Gleichgewichtslage des Fadens hat. Die Kraft F_{e2} wirkt in Fadenrichtung und gleicht in jeder Lage die Gegenkraft zur Fadenspannung aus. Die gegebene Aufgabe läßt sich daher so betrachten, als ob die Ladung im Aufhängepunkt gar nicht vorhanden wäre. In der Regel verstehen das die Prüflinge nicht.

Leser B: Dann werden wir die Kraft F_{e2} nicht berücksichtigen. Da die vektorielle Summe der Kräfte F_{e1} und F_G in Fadenrichtung angreifen müßte, erhalten wir

$$F_{e1}/F_G = \tan(\alpha/2). \tag{175}$$

Autor: Lenken Sie Ihre Aufmerksamkeit darauf, daß das Ergebnis (175) nicht vom Vorhandensein oder Fehlen einer Ladung im Aufhängepunkt abhängt.

Leser B: Da

$$F_{e1} = Bq^2/\varepsilon \cdot 4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ist, ergibt sich aus (175)

$$Bq^2/\varepsilon \cdot 4l^2 \sin^2(\alpha/2)\, mg = \tan(\alpha/2).$$

Hieraus folgt das gesuchte Ergebnis

$$q = 2l \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{B} mg \tan \frac{\alpha}{2}}.$$

Autor: Dieses Resultat ist richtig.

Leser A: Aber in welchem Fall ist das Auftreten der Ladung im Aufhängepunkt von Bedeutung?

Autor: Zum Beispiel dann, wenn verlangt wird, die Fadenspannkraft zu berechnen.

Aufgaben

95. In den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks sind gleiche Ladungen $+q$ angebracht. Welche Ladung ist im Zentrum des Sechsecks anzubringen, damit sich das gesamte Ladungssystem im Gleichgewicht befindet?

96. Eine Kugel mit der Masse m und der Ladung q — sie hängt an einem Faden der Länge l — rotiert um eine gleiche, aber un-

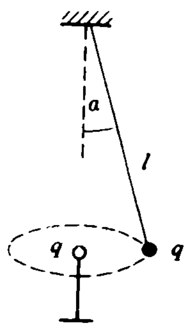
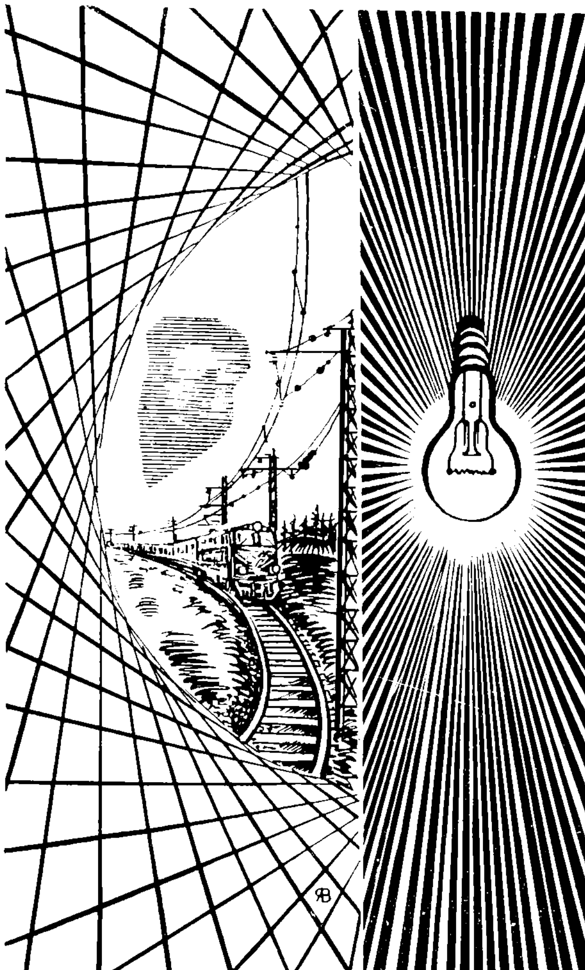


Bild 130

bewegliche Ladung (Bild 130). Der Winkel zwischen Vertikaler und Fadenrichtung ist α. Gesucht sind die Winkelgeschwindigkeit ω der gleichförmigen Rotation der Kugel und die Fadenspannkraft T.

97. Eine an einem Faden der Länge l hängende Kugel mit der Masse m und der Ladung q kann in einer vertikalen Ebene rotieren. Im Rotationszentrum befindet sich eine zweite Kugel gleicher Ladung (hinsichtlich Vorzeichen und Betrag). Welche minimale horizontale Geschwindigkeit v hat man der Kugel in der niedrigsten Lage zu erteilen, damit sie eine volle Umdrehung ausführen kann?

DER ELEKTRISCHE
STROM
IST SO TIEF
IN UNSER
TÄGLICHES
LEBEN
EINGEDRUNGEN,
DASS KEINE
NOTWENDIGKEIT
BESTEHT,
AUF
DIE BEDEUTUNG
DER GESETZE
VON OHM
UND JOULE-LENZ
HINZUWEISEN.
JEDOCH,
WIE GUT
KENNEN SIE
DIESE GESETZE?



32. Kennen Sie das Ohmsche Gesetz?

Autor: Kennen Sie das Ohmsche Gesetz?

Leser A: Ja, natürlich. Meiner Meinung nach kennt jeder das Ohmsche Gesetz. Ich glaube, das ist die einfachste Frage des gesamten Physikkurses.

Autor: Überprüfen wir das. In Bild 131a ist ein Teil eines elektrischen Stromkreises dargestellt[1]. Hier ist U_0 die Urspannung. Sie ist nach rechts gerichtet, R_1 und R_2 sind Widerstände, R_i ist der Innenwiderstand der Spannungsquelle. φ_A und φ_B sind die

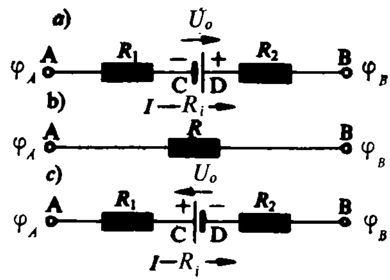


Bild 131

Potentiale an den Enden des Stromkreisteiles. In ihm fließt der Strom von links nach rechts. Gesucht ist die Stromstärke I.

Leser A: Aber das ist doch ein offener Stromkreis.

Autor: Ich hatte vorgeschlagen, nur einen Teil des gesamten Stromkreises zu betrachten. Alle anderen Teile kennen Sie nicht. Sie müssen diese auch nicht kennen, weil Ihnen die Potentiale an den Enden des gegebenen Teils bekannt sind.

Leser A: Bisher haben wir nur geschlossene elektrische Stromkreise behandelt. Für sie lautet das Ohmsche Gesetz

$$I = \frac{U_0}{R + R_i} \qquad (176)$$

Autor: Sie irren sich. Früher haben Sie auch solche Teile von Stromkreisen untersucht. Nach dem Ohmschen

[1] Schwarze Kästchen bedeuten hier elektrische Widerstände.

Gesetz ist für einen Teil eines Stromkreises die Stromstärke gleich dem Quotienten aus der zwischen den Enden anliegenden Spannung und dem Widerstand.

Leser A: Aber ist das ein Teil eines Stromkreises?

Autor: Natürlich. Einen Teil eines Stromkreises zeigt Bild 131b. Für ihn können Sie das Ohmsche Gesetz in der Form

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} \tag{177}$$

schreiben. An Stelle der Potentialdifferenz zwischen den Enden des Stromkreiselementes haben Sie früher den einfacheren Ausdruck „Spannung“ verwendet und diesen mit U bezeichnet.

Leser A: Wir haben aber Stromkreiselemente in einer solchen Form wie in Bild 131a nie betrachtet.

Autor: Damit sehen wir, daß Sie das OhmscheGesetz nur für den einfachsten Fall eines geschlossenen Stromkreises und das einfachste Element eines seiner Teile

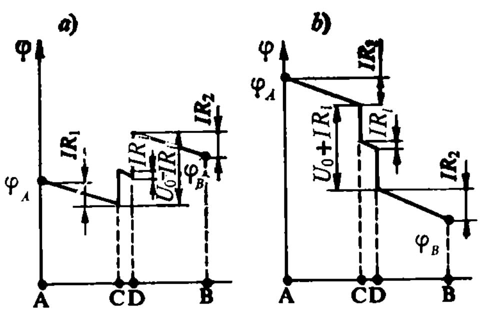


Bild 132

ohne Spannungsquelle behandelt haben. Für den allgemeinen Fall ist Ihnen das Ohmsche Gesetz nicht bekannt. Untersuchen wir es daher gemeinsam. In Bild 132a ist die Potentialänderung längs des vorgelegten Stromkreiselementes dargestellt. Der Strom fließt von links nach rechts. Deshalb verkleinert sich das Potential vom Punkt A zum Punkt B. Der Abfall des Potentials am Widerstand R_1 ist gleich IR_1. Wir nehmen weiter an, daß sich in den Punkten C und D die Platten eines galvanischen Elementes befinden. In diesen Punkten tritt ein Sprung des Potentials nach oben auf. Die Summe der Sprünge liefert den Wert der Urspannung, also U_0. Zwischen C und D fällt über dem Innenwiderstand des galvanischen Elementes das Potential ab; dieser Potentialabfall U ist gleich IR_i. Zum Schluß fällt von D nach B das Potential über dem Widerstand R_2 ab, der Abfall beträgt IR_2. **Die Summe der Potentialabfälle über allen Widerständen des Stromkreises, vermindert um den Potentialsprung U_0 nach oben, ist gleich der Differenz der Potentiale an den Enden des betrachteten Teils des Stromkreises:**

$$I\,(R_1 + R_2 + R_i) - U_0 = \varphi_A - \varphi_B.$$

Hieraus erhalten wir den Ausdruck für die gesuchte Stromstärke, d. h. das Ohmsche Gesetz für den betrachteten Teil des Stromkreises

$$I = \frac{U_0 + (\varphi_A - \varphi_B)}{R_1 + R_2 + R_i}. \tag{178}$$

Beachten Sie, daß sich aus diesem Ergebnis sofort die Ihnen bekannten Spezialfälle herleiten lassen. Für das einfachste Element ohne Spannungsquelle — man hat dann in Gl. (178) $U_0 = 0$ und $R_i = 0$ zu setzen — ergibt sich

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_1 + R_2},$$

was mit Formel (177) übereinstimmt. Für einen geschlossenen Kreis müssen die Enden A und B unseres Teiles verbunden werden. Dann wird $\varphi_A = \varphi_B$. Wir erhalten

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_i},$$

was der Formel (176) entspricht.

Leser A: Ja, ich habe mich davon überzeugt, daß ich das Ohmsche Gesetz nicht gekannt habe.

Autor: Genauer gesagt, Sie kannten es für Spezialfälle. Nehmen wir an, daß zu dem in Bild 131a dargestellten Teil eines Stromkreises noch ein Voltmeter hinzukommt. Wir wollen voraussetzen, daß sein Widerstand genügend groß ist, daß also Störungen im Stromkreis durch das Anschließen des Voltmeters vernachlässigt werden dürfen. Was zeigt das Voltmeter an?

Leser A: Ich weiß, daß das zugeschaltete Voltmeter den Spannungsabfall des äußeren Stromkreises anzeigen sollte. Aber im vorliegenden Fall ist uns dieser äußere Kreis nicht bekannt.

Autor: Man kann völlig ohne Kenntnis des äußeren Stromkreises auskommen. Ist das Voltmeter an die Punkte C und D angeschlossen, wird es die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten anzeigen. Ich nehme an, das ist Ihnen verständlich.

Leser A: Ja, natürlich.

Autor: Jetzt sehen Sie sich Bild 132a an. Aus ihm ist zu erkennen, daß die Potentialdifferenz zwischen den Punkten C und D gleich $U_0 - IR_1$ ist. Bezeichnet man die Anzeige des Voltmeters mit U, so erhält man die Formel:

$$U = U_0 - IR_1. \tag{179}$$

Ich empfehle Ihnen, gerade diese Formel zu verwenden, da sie keine Kenntnis über den Widerstand des äußeren Stromkreises verlangt. Das ist bei mehr oder weniger komplizierten Stromkreisen besonders zweckmäßig. Wir erkennen, daß aus (179) ein bekanntes spezielles Ergebnis folgt: ist der Stromkreis unterbrochen, dann fließt kein Strom ($I = 0$), und es gilt $U = U_0$. In diesem Fall stimmt die Anzeige des Voltmeters mit der Urspannung überein. Verstehen Sie das alles?

Leser A: Ja, jetzt ist mir das klar.

Autor: Zur Kontrolle schlage ich Ihnen eine Aufgabe vor, bei der die Prüflinge wirklich oft Schwierigkeiten haben, eine Antwort zu geben: *Ein geschlossener elektrischer Stromkreis besteht aus einer Serienschaltung von n gleichen Elementen. Jedes Element hat den Innenwiderstand R_1 und die Urspannung U_0. Der Widerstand der Verbindungsleitungen wird als Null vorausgesetzt. Was zeigt ein Voltmeter an, das an eines der Elemente angeschlossen ist? Dabei sei wie üblich angenommen, daß kein Strom durch das Voltmeter fließt.*

Leser A: Ich werde das analog zu der vorhergehenden Erläuterung diskutieren. Das Voltmeter zeigt $U =$

$= U_0 - IR_1$ an. Nach dem Ohmschen Gesetz erhalten wir für den geschlossenen Stromkreis die Stromstärke $I = nU_0/nR_1 = U_0/R_1$. Mit diesem Ergebnis erhält man $U = U_0 - (U_0/R_1)\,R_1 = 0$. Daher zeigt das Voltmeter im betrachteten Fall nichts an.

Autor: Völlig richtig. Denken Sie aber daran, daß dieser Fall idealisiert war: Einerseits haben wir den Widerstand der Verbindungsleitungen vernachlässigt, andererseits haben wir angenommen, daß der Innenwiderstand des Voltmeters unendlich groß ist. Sie sollten daher nicht versuchen, dieses Ergebnis am Experiment zu überprüfen.

Betrachten wir jetzt den Fall, daß in einem Teil des Stromkreises der Strom in eine Richtung fließt, die Urspannung aber in die andere Richtung wirkt. Dieser Fall ist in Bild 131c dargestellt. Zeichnen Sie die Potentialänderung für diesen Teil eines Stromkreises auf!

Leser A: Aber kann denn der Strom gegen die Urspannung fließen?

Autor: Sie haben vergessen, daß Sie nur einen Teil eines Stromkreises vor sich haben. Es können andere Urspannungen vorhanden sein, die nicht in dem untersuchten Teil liegen und unter deren Wirkung der Strom im gegebenen Teil des Stromkreises auch gegen die gegebene Urspannung fließen kann.

Leser A: Ich verstehe. Da der Strom von links nach rechts fließt, tritt von A nach C ein Potentialabfall um IR_1 auf. Weil die Urspannung nach der anderen Seite gerichtet ist, müssen die Potentialsprünge in den Punkten C und D jetzt das Potential nicht erhöhen, sondern verkleinern. Vom Punkt C zum Punkt D fällt das Potential um den Wert IR_1, vom Punkt D zum Punkt B fällt es um den Wert IR_2. Als Ergebnis erhalten wir die Darstellung in Bild 132b.

Autor: Wie schreibt man das Ohmsche Gesetz jetzt auf?

Leser A: Jetzt wird das Ohmsche Gesetz die Form

$$I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) - U_0}{R_1 + R_2 + R_1} \tag{180}$$

haben.

Autor: Richtig. Und was zeigt das Voltmeter an?

Leser A: Aus Bild 132b erkennt man, daß

$$U = U_0 + IR_1 \tag{181}$$

ist.

Autor: Völlig richtig. Wir betrachten folgende Aufgabe: *In* Bild 133 *ist ein elektrischer Stromkreis dargestellt. Gegeben ist* $R_1 = 1\ \Omega$, $R = 10\ \Omega$, *der Widerstand des Voltmeters beträgt* $R_V = 200\ \Omega$. *Zu berechnen ist der relative Fehler der Anzeige des Voltmeters, den man unter der Voraussetzung erhält, daß das Voltmeter*

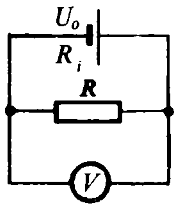


Bild 133

einen unendlich großen Innenwiderstand hat und folglich keine Störung im Stromkreis veranlaßt.

Wir bezeichnen die Anzeige des realen Voltmeters mit U, aber die Anzeige des Voltmeters mit dem unendlich großen Innenwiderstand mit U_∞. Der gesuchte relative Fehler ist

$$= \frac{U_\infty - U}{U_\infty} = \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right). \tag{182}$$

Weiter ist zu beachten, daß

$$U_\infty = \frac{U_0}{R + R_1} R \tag{183}$$

und

$$U = \frac{U_0}{R_1 + \frac{R R_V}{R + R_V}} \frac{R R_V}{R + R_V} \tag{184}$$

gilt.

Setzt man die Formeln (183) und (184) in (182) ein, so ergibt sich:

$$f = 1 - \frac{R_V(R+R_1)}{(R+R_V)R_1+RR_V} = 1 - \frac{R_V(R+R_1)}{(R_1+R)R_V+R_1R}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+\frac{R_1R}{(R_1+R)R_V}}$$

Weil $R_V \gg R$ und $R > R_1$ ist, wird der Bruch im Nenner der letzten Gleichung viel kleiner als eins. Man kann deshalb eine Näherungsformel anwenden, die man sich zweckmäßigerweise in der Form

$$(1+\lambda)^a \approx 1 + a\lambda \tag{185}$$

merken sollte. Sie gilt für beliebiges a (ganz, gebrochen, positiv, negativ), aber $\lambda \ll 1$. Unter Anwendung dieser Formel mit $a = -1$ und $\lambda = R_1R\,(R_1 + R)^{-1}R_V^{-1}$ erhalten wir

$$f \approx \frac{R_1R}{(R_1+R)R_V} \tag{186}$$

Das Einsetzen der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte in Formel (186) zeigt, daß der gesuchte relative Fehler $f \approx 1/220 = 0{,}0045$ ist.

Leser A: Heißt das, je größer der Widerstand des Voltmeters im Vergleich zum äußeren Widerstand ist, desto kleiner ist der genannte Fehler? Das würde bedeuten, daß man mit um so größerer Berechtigung die Störung im Stromkreis durch das Anschließen des Voltmeters vernachlässigen darf.

Autor: Ja, das ist so. Nur muß man beachten, daß die Bedingung $R \ll R_V$ eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Kleinheit des Fehlers f ist. Aus (186) ist zu ersehen, daß der Fehler f auch in dem Fall, wenn $R_1 \ll R_V$, wenn also der Widerstand des Voltmeters sehr viel größer als der Innenwiderstand der Spannungsquelle ist, klein wird. Der äußere Widerstand kann dann beliebig groß sein. Aufgabe: Bild 134a *zeigt einen elektrischen Stromkreis. Gegeben ist:* $U_0 = 6$ V, $R_1 = \frac{2}{3}\,\Omega$, $R = 2\,\Omega$. *Berechnen Sie die Anzeige des Voltmeters!*

Leser A: Darf man den Widerstand des Voltmeters als unendlich groß ansehen?

Autor: Ja, und das um so mehr, als dieser Widerstand nicht vorgegeben ist. Außerdem ist der Widerstand der Leitungen zu vernachlässigen.

Leser A: Aber dann fließt wahrscheinlich der Strom nicht über die Widerstände in der Mitte des Schemas, sondern direkt durch die Leitungen A_1A_2 und B_1B_2?

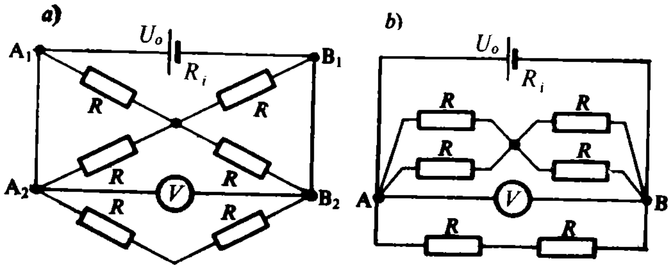


Bild 134

Autor: Sie irren sich. Bevor man den Strom betrachtet, würde ich raten, das Schema etwas zu vereinfachen. Da die Leitungen A_1A_2 und B_1B_2 keine Widerstände haben, folgt $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ und $\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$. Ferner kann man folgende Regel ausnutzen: **Wenn in einem Stromkreis zwei Punkte das gleiche Potential haben, so kann man sie miteinander verbinden, ohne daß sich dabei die Ströme durch die Widerstände ändern.** Wir wenden diese Regel auf unseren Fall an: Punkt A_1 wird mit Punkt A_2 und Punkt B_1 mit Punkt B_2 vereinigt. Das Ergebnis ist der in Bild 134b dargestellte Stromkreis. Dieser ist nicht mehr schwierig zu behandeln. Ich gebe Ihnen deshalb gleich die Antwort: Das Voltmeter zeigt 4 V an. Ich stelle Ihnen frei, in Mußestunden die Berechnung selbständig durchzuführen.

Aufgaben

98. In einem Stromkreis liegt entsprechend dem Bild 135 ein Amperemeter und zeigt 0,5 A an. Gesucht ist die Stromstärke durch den Widerstand R_4, wenn $R_1 = R_4 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = R_5 = 1\Omega$ ist.

99. Gegeben ist der in Bild 136 dargestellte Stromkreis. Gegeben ist $U_0 = 4$ V, $R_i = 1\Omega$, $R = 2\Omega$. Zu bestimmen ist die Anzeige des Amperemeters.

100. Was zeigen Volt- und Amperemeter in den in Bild 137 dargestellten Fällen an? Als bekannt werden U_0 und R_i vorausgesetzt. Der Widerstand der Verbindungsleitungen ist zu vernachlässigen. Für die genannten Fälle sind Diagramme für die Potentialänderung in den Stromkreisen zu zeichnen.

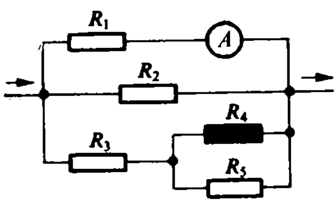


Bild 135

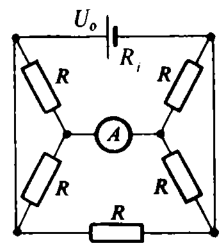


Bild 136

101. Der Widerstand eines Galvanometers beträgt $R_G = 0{,}2\Omega$. Parallel zu ihm ist ein Shunt $R_{Sh} = 0{,}05\Omega$ angeschlossen.

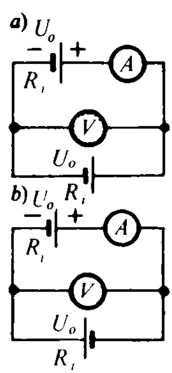


Bild 137

Welcher zusätzliche Widerstand R_x muß zu dieser Kombination in Reihe geschaltet werden, um einen Gesamtwiderstand zu erhalten, der gleich dem Galvanometerwiderstand R_G ist?

102. An die Anschlußklemmen eines Elementes mit $U_0 = 10$ V und $R_i = 1\Omega$ ist ein Voltmeter mit dem Widerstand $R_V = 100\Omega$ angeschlossen. Zu bestimmen sind die Anzeige U

des Voltmeters und der relative Fehler der Anzeige, den man unter der Voraussetzung erhält, daß das Voltmeter einen unendlichen Widerstand hat.

103. In einem Stromkreis mit dem Widerstand $R = 49\Omega$ und einer Spannungsquelle mit $U_0 = 10$ V und $R_i = 1\Omega$ liegt ein Amperemeter mit dem Widerstand $R_I = 1\Omega$. Zu bestimmen sind die Anzeige I des Amperemeters und der relative Fehler dieser Anzeige, den man unter der Voraussetzung erhält, daß das Amperemeter keinen Widerstand hat.

33. Kann ein Kondensator in einen Gleichstromkreis geschaltet sein?

Autor: Wir betrachten folgende Aufgabe: *Vorgelegt ist der in* Bild 138 *dargestellte Stromkreis. C ist die Kapazität des Kondensators. Gesucht ist die Ladung Q*

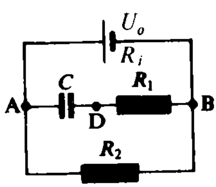


Bild 138

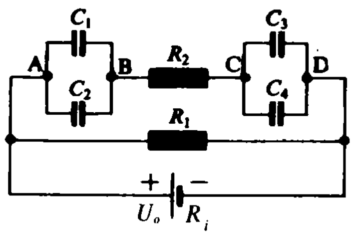


Bild 139

auf den Kondensatorplatten, wenn die Urspannung der Spannungsquelle U_0 und ihr Innenwiderstand R_i ist.

Leser A: Aber kann man denn in einen Gleichstromkreis einen Kondensator anschließen? Der Strom fließt doch so gut wie gar nicht durch ihn.

Autor: Aber er soll ja nicht durchfließen. Dafür fließt er in den parallel geschalteten Zweigen.

Leser A: Ich glaube, ich habe verstanden. Wenn in der Schaltung des Bildes 138 kein Strom durch den Kondensator fließt, so durchfließt den Widerstand R_1 auch kein Strom. Im äußeren Teil des Kreises fließt der Strom nur durch den Widerstand R_2. Die Stromstärke finden wir aus der Beziehung $I = U_0/(R_2 +$

$+ R_1$); damit ist die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B gleich dem Spannungsabfall am Widerstand R_2, d. h., es ist

$$\varphi_B - \varphi_A = IR_2 = \frac{U_0 R_2}{R_2 + R_1}. \tag{187}$$

Was noch zu tun ist, weiß ich nicht. Um die Ladung der Kondensatorplatten zu bestimmen, muß ich die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und D kennen.

Autor: Sie haben richtig geschlußfolgert, daß durch den Widerstand R_1 kein Strom fließt. In einem solchen Fall müssen alle Punkte dieses Widerstandes das gleiche Potential haben (denken Sie an die Diskussion aus Abschnitt 29). Das bedeutet $\varphi_D = \varphi_B$. Hieraus erhält man unter Benutzung von Gl. (187) das gesuchte Ergebnis:

$$Q = \frac{CU_0R_2}{R_2 + R_1}.$$

Weiter betrachten wir folgende Aufgabe: *Gegeben ist der in Bild 139 dargestellte Stromkreis. Dabei ist* $U_0 = 4$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $C_1 = 2\ \mu$F, $C_2 = 8\ \mu$F, $C_3 = 4\ \mu$F, $C_4 = 6\ \mu$F. *Bestimmen Sie die Ladungen aller Kondensatoren!* Wiederholen Sie dabei die Regeln zur Ermittlung der Gesamtkapazität bei Serien- und Parallelschaltung von Kondensatoren.

Leser A: Ich erinnere mich. **Bei der Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kapazitäten:**

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots; \tag{188}$$

bei einer Serienschaltung von Kondensatoren addieren sich die reziproken Werte der einzelnen Kapazitäten:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots. \tag{189}$$

Autor: Anwendung der Regel (188) liefert die Kapazitäten zwischen den Punkten A und B und zwischen den Punkten C und D:

$$C_{AB} = 2\ \mu\text{F} + 8\ \mu\text{F} = 10\ \mu\text{F},$$

$$C_{CD} = 4\ \mu\text{F} + 6\ \mu\text{F} = 10\ \mu\text{F}.$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und D ergibt sich als Spannungsabfall am Widerstand R_1 zu

$$\varphi_D - \varphi_A = IR_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_1} = 3\text{V}.$$

Es ist klar, daß der Widerstand R_2 hier keine Rolle spielt, er muß nicht beachtet werden. Da $C_{AB} = C_{CD}$ ist, wird $\varphi_B - \varphi_A = \varphi_D - \varphi_C = (3\text{ V})/2 = 1{,}5\text{ V}$. Weiter erhalten wir schließlich die gesuchten Ladungen:

$$Q_1 = C_1 (\varphi_B - \varphi_A) = 3\ \mu\text{C},$$
$$Q_2 = C_2 (\varphi_B - \varphi_A) = 12\ \mu\text{C},$$
$$Q_3 = C_3 (\varphi_D - \varphi_C) = 6\ \mu\text{C},$$
$$Q_4 = C_4 (\varphi_D - \varphi_C) = 9\ \mu\text{C}.$$

Aufgaben

104. Es ist die Gesamtkapazität C des Systems von Kondensatoren, das Bild 140 zeigt, zu berechnen. $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 4\mu\text{F}$.

105. Gegeben ist der Stromkreis des Bildes 141 mit $U_0 = 5$ V,

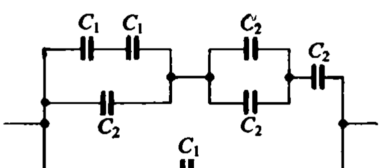


Bild 140

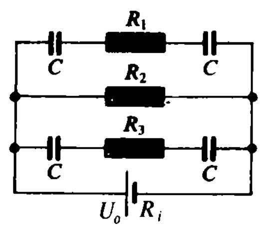


Bild 141

$R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_1 = 3\Omega$, $C = 3\mu\text{F}$. Gesucht ist die Ladung Q jedes Kondensators.

106. Gegeben ist der in Bild 142 dargestellte Stromkreis. Alle in der Abbildung bezeichneten Größen sollen bekannt sein. Berechnen Sie die Ladung jedes Kondensators!

107. Ein Plattenkondensator mit der Plattenlänge l liegt im Stromkreis des Bildes 143. Die Urspannung U_0 der Spannungsquelle, ihr innerer Widerstand R_1 und der Plattenabstand d seien gegeben. In den Kondensator fliegt parallel zu den Platten ein Elektron mit der Geschwindigkeit v_0 hinein.

Welcher Widerstand R muß dem Kondensator parallel geschaltet werden, damit das Elektron aus diesem unter dem

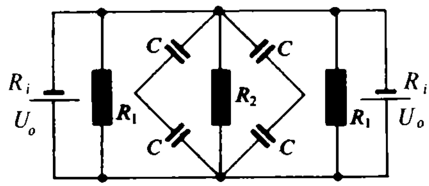


Bild 142

Winkel α zu den Platten hinausfliegt? Masse m und Ladung e des Elektrons werden als bekannt angesehen.

108. Zwei gleiche Plattenkondensatoren sind wie in Bild 144 an einen Stromkreis angeschlossen. Es ist $R_1 = 4\Omega$. In einen

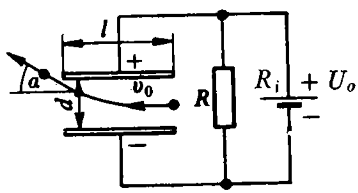


Bild 143

der Kondensatoren fliegt ein Elektron parallel zu den Platten hinein (Pfeil im Bild). Bei welchem Widerstand R_2 fliegt

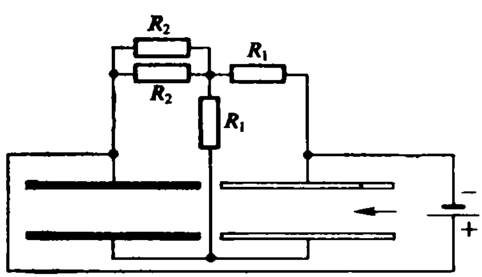


Bild 144

das Elektron aus dem zweiten Kondensator parallel zu den Platten hinaus?

109. Ein Plattenkondensator mit der Plattenlänge l und dem Plattenabstand d ist entsprechend Bild 145 an einen Stromkreis angeschlossen (Urspannung U_0 und die Widerstände R und R_1 sind bekannt). In den Kondensator fliegt parallel zu den

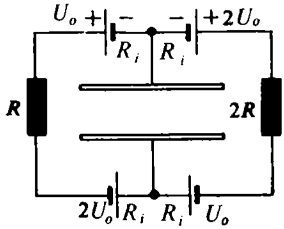


Bild 145

Platten ein Elektron mit der Geschwindigkeit v_0 hinein. Unter welchem Winkel fliegt das Elektron aus dem Kondensator heraus? Masse m und Ladung e des Elektrons sind bekannt.

34. Können Sie den Widerstand im verzweigten Stromkreis berechnen?

Autor: *Berechnen Sie den Widerstand des in* Bild 146a *dargestellten Teils eines Stromkreises! Den Widerstand der Leitungen kann man vernachlässigen.*

Leser A: Wenn man den Widerstand der Leitungen vernachlässigen darf, so kann man die Leitungen vollkommen außer acht lassen. Dann ist der gesuchte Widerstand 3 R.

Autor: Sie haben geantwortet, ohne nachzudenken. Den Widerstand der Leitungen zu vernachlässigen und die Leitungen selbst zu vernachlässigen, das sind vollkommen verschiedene Dinge (obwohl einige Prüflinge glauben, es sei ein und dasselbe). **Aus einer Schaltung irgendeine Leitung zu streichen, bedeutet, diese Leitung durch einen unendlich großen Widerstand zu ersetzen.** Hier ist aber im Gegenteil der Leitungswiderstand gleich Null.

Leser A: Ja, ich habe wirklich nicht nachgedacht. Ich werde das Problem auf folgende Weise diskutieren. Im Punkt A teilt sich der Strom in zwei Teilströme auf, deren Richtungen durch die Pfeile in Bild 146b angegeben sind. Der mittlere Widerstand braucht hier nicht beachtet zu werden, so daß sich für den Gesamtwiderstand $R/2$ ergibt.

Autor: Auch dieses Mal ist Ihre Antwort falsch. Ich rate Ihnen, folgende Regel zu beachten: **Suchen Sie in der Schaltung Punkte gleichen Potentials und verbinden Sie diese miteinander. Dabei bleibt der Strom in den ver-**

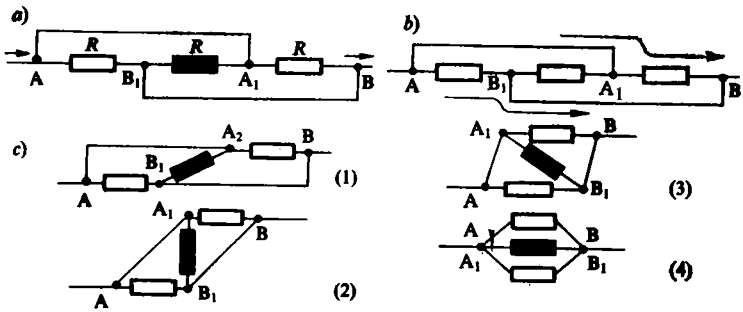


Bild 146

schiedenen Zweigen des Stromkreises so wie vorher, aber das Schaltbild kann sich beträchtlich vereinfachen. Auf diesen Umstand wies ich Sie schon in Abschnitt 32 hin. Weil in der gegebenen Aufgabe die Leitungswiderstände Null sind, haben die Punkte A und A_1 ein und dasselbe Potential. Das gleiche trifft für die Punkte B und B_1 zu. Nach der oben genannten Regel werden wir das Schaltbild so abändern, daß Punkte gleichen Potentials miteinander verbunden sind. Dazu reduzieren wir schrittweise die Länge der Verbindungskabel. Die aufeinanderfolgenden Stadien dieses Vorgehens zeigt Bild 146c [(*1*) → (*2*) → → (*3*) → (*4*)]. Wir erkennen, daß die vorgelegte Schaltung einer Parallelschaltung von drei Widerständen entspricht, wodurch sich als Gesamtwiderstand $R/3$ ergibt.

Leser A: Ja, tatsächlich. Aus Bild 146c ist erkennbar, daß eine Parallelschaltung vorliegt.

Autor: Gehen wir zum nächsten Beispiel über. *Die Kanten eines Würfels sind Drähte mit dem Widerstand R.*

Dieser Würfel ist an einen Stromkreis angeschlossen (Bild 147a). *Zu berechnen ist der Gesamtwiderstand des Würfels.* Dabei ist die früher genannte Regel anzuwenden. Zeigen Sie die Punkte, die gleiches Potential aufweisen.

Leser A: Ich glaube, daß die Punkte A, A_1, A_2 (Bild 147a) gleiches Potential haben, da alle drei Würfelkanten (DA, DA_1, DA_2) in jeder Hinsicht äquivalent sind.

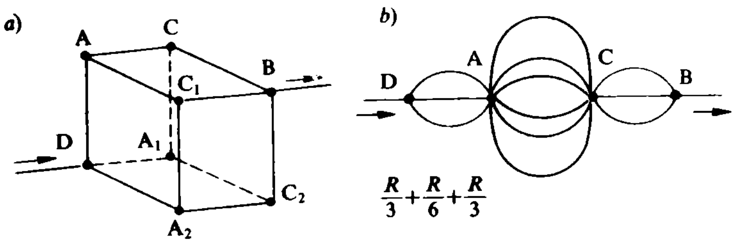


Bild 147

Autor: Sie haben recht. Genauso sind auch die Kanten BC, BC_1 und BC_2 äquivalent. Deshalb haben auch die Punkte C, C_1 und C_2 gleiches Potential. Nun zertrennen wir unseren Leitungswürfel an den genannten Punkten, biegen die Drahtkanten und verbinden sie so, daß Punkte gleichen Potentials zusammenfallen. Was für ein Bild ergibt sich dabei?

Leser A: Man erhält das Bild 147b.

Autor: Völlig richtig. Dieses Schaltbild ist der Ausgangsschaltung (Würfel) äquivalent, es ist aber auffallend einfacher. Nun ist es nicht schwer, den Gesamtwiderstand zu berechnen.

Leser A: Er ist $\frac{R}{3}+\frac{R}{6}+\frac{R}{3}=\frac{5}{6}R$.

Leser B: Wie findet man aber den Gesamtwiderstand einer Schaltung in Form eines Quadrates mit Diagonalleitungen, so, wie es Bild 148a zeigt?

Autor: Man muß wieder Punkte gleichen Potentials suchen. Im gegebenen Fall ist unschwer zu erkennen, daß die Schaltung eine Symmetrieachse aufweist. Ich zeichne sie in Bild 148a gestrichelt ein. Es ist klar, daß alle auf der Symmetrieachse liegenden Punkte gleiches Potential haben müssen. Es ist gleich der halben Summe aus den Potentialen in den Punkten A und D. Damit werden die Potentiale in den Punkten O, O_1 und O_2 gleich. Gemäß der bekannten Regel werden diese Punkte vereinigt. Als Ergebnis erhält man an Stelle der betrachteten Widerstandskombination zwei neue, in Serie geschaltete Widerstandskombinationen, von denen eine

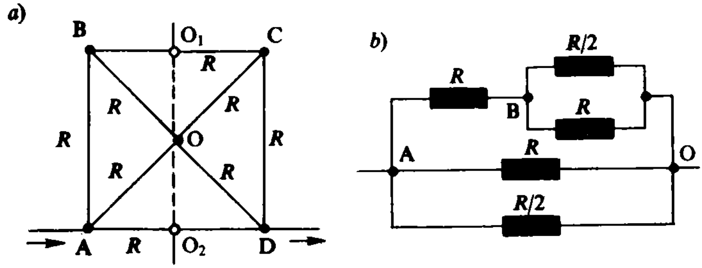


Bild 148

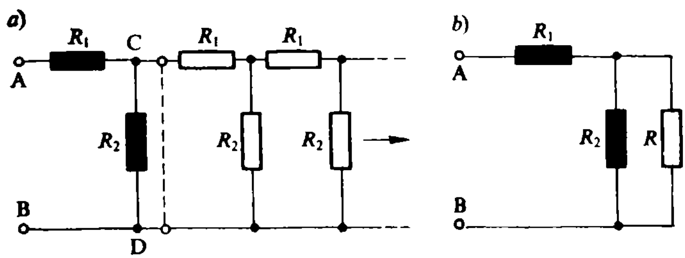


Bild 149

in Bild 148b gezeichnet ist. Die Bestimmung des Widerstandes jeder dieser Kombinationen ist nicht schwer. Da jede Leitung im Quadrat den Widerstand R hat, so ergibt sich für die Widerstandskombination des Bildes 148b der Widerstand $4/15\ R$. Der Widerstand der Schaltung in Bild 148a wird damit $\frac{8}{15}R$.

Leser A: Das bedeutet, die grundlegende Regel besteht darin, in einer Schaltung die Punkte gleichen Potentials aufzusuchen und das Schaltbild dadurch zu vereinfachen, daß man diese Punkte verbindet?

Autor: Genau so ist es. Ich möchte schließlich noch ein Beispiel vorschlagen: *Gegeben ist ein Stromkreis, der aus einer unendlichen Anzahl von sich wiederholenden Abschnitten mit den Widerständen R_1 und R_2 besteht* (Bild 149a). *Zu bestimmen ist der Widerstand zwischen den Punkten A und B.*

Leser A: Könnte es sein, daß man hier die mathematische Methode der vollständigen Induktion anwenden muß? Man betrachtet zuerst einen Abschnitt, dann zwei, nachher drei Abschnitte usw. Anschließend versucht man, das Ergebnis für n Abschnitte auf den Fall $n \to \infty$ zu verallgemeinern.

Autor: Nein, hier braucht man die Methode der vollständigen Induktion nicht. Man nutzt folgendes aus: Wenn man von unendlich vielen Elementen ein Element wegnimmt, bleiben noch unendlich viele Elemente. Wir trennen von der gegebenen Schaltung den ersten Abschnitt ab (den Schnitt führen wir längs der gestrichelten Linie aus). Offensichtlich bleibt wie vorher eine unendliche Anzahl gleicher Bauelemente übrig, so daß der Widerstand zwischen den Punkten C und D gleich dem gesuchten Widerstand R sein muß. Die Ausgangsschaltung kann daher durch das Ersatzschaltbild des Bildes 149b ersetzt werden. Es hat den Widerstand $R_1 + RR_2/(R + R_2)$. Da das Ersatzschaltbild der Ausgangsschaltung äquivalent ist, muß dieser Widerstand dem gesuchten Widerstand R gleich sein. Man bekommt auf diese Weise

$$R = R_1 + RR_2/(R + R_2).$$

Man hat also eine quadratische Gleichung für R:

$$R^2 - RR_1 - R_1R_2 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$R = \frac{R_1}{2}\,[1 + \sqrt{1 + 4\,(R_2/R_1)}].$$

Leser A: Eine solche Lösungsmethode ist wirklich sehr elegant.

Autor: Zum Abschluß betrachten wir noch eine interessante Aufgabe: Zwischen den Punkten A und B liegt ein Widerstand R. Außerdem hat man noch $(N - 2)$

Punkte, wobei zwischen jedem Punktepaar, hier sind die Punkte A und B eingeschlossen, auch ein Widerstand R liegt. Gesucht ist der resultierende Widerstand zwischen den Punkten A und B.

Leser B: Und ich darf diese ($N - 2$) Punkte wirklich auf einer Geraden anbringen, bezüglich der die Punkte A und B symmetrisch liegen?

Autor: Natürlich. Wichtig ist nur, nicht bei dem Widerstand zu trennen, der die Punkte A und B verbindet.

Leser B: Aber dann wird das Widerstandssystem rechts und links dieser Linie gleich sein. Das bedeutet aber, daß alle $N - 2$ Punkte das gleiche Potential haben und deshalb untereinander verbunden werden können. Damit wird der gesuchte Widerstand $R_1 = 2R/(N - 2)$.

Autor: Gut. Sie haben nur zwischen den Punkten A und B den Widerstand R vergessen. Er liegt zu dem von Ihnen gefundenen Widerstand parallel. Daher ist der gesuchte Widerstand gleich

$$\frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{2R}{N}.$$

Aufgaben

110. Gegeben ist der in Bild 150 dargestellte Stromkreis mit $U_0 = 4$ V, $R_i = 1\Omega$, $R = 45\Omega$. Gesucht sind die Anzeigen U und I von Volt- und Amperemeter.

111. Es ist der Widerstand eines Quadrates aus Leitungen (Bild 148a) unter der Bedingung zu berechnen, daß es in

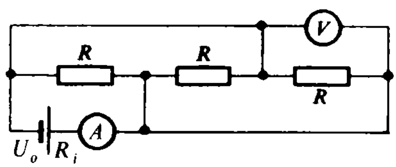


Bild 150

den Punkten A und C an einen Stromkreis angeschlossen ist.

112. Aus Leitungen ist ein regelmäßiges Sechseck mit seinen Diagonalen hergestellt worden. Der Widerstand jeder Leitung beträgt R. Das Sechseck ist entsprechend Bild 151a an einen Stromkreis angeschlossen. Gesucht ist sein Gesamtwiderstand.

113. Zu bestimmen ist der Gesamtwiderstand des in Aufgabe 112 gegebenen Sechsecks, wenn es so an einen Stromkreis angeschlossen ist, wie es Bild 151b zeigt.

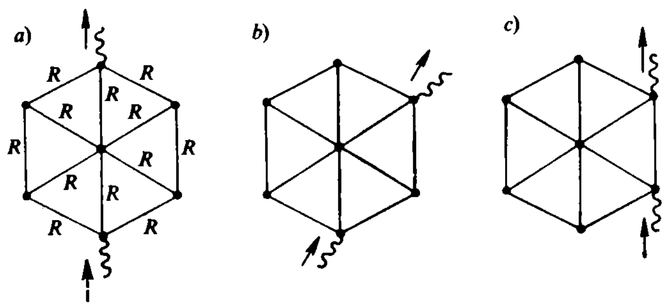


Bild 151

114. Das Sechseck der Aufgabe 112 ist entsprechend Bild 151c an einen Stromkreis angeschlossen. Bestimmen Sie für diesen Fall den Gesamtwiderstand des Sechsecks.

35. Weshalb brennt eine Glühlampe durch?

Leser A: Weshalb brennt eine Lampe durch, wegen zu hoher Spannung oder zu hoher Stromstärke?

Autor: Und wie würden Sie auf eine solche Frage antworten?

Leser A: Ich glaube, wegen einer zu hohen Stromstärke.

Autor: Ihre Antwort ist nicht gut. Vor allem muß ich noch bemerken, daß die von Ihnen gestellte Frage zur Kategorie der provokatorischen Fragen gehört. Die Lampe brennt infolge der Abgabe einer übermäßig hohen Wärmeleistung durch, das heißt wegen einer starken Vergrößerung der elektrischen Leistung. Die Erhöhung der elektrischen Leistung kann eine Folge der Änderung verschiedener Faktoren sein: an die Lampe angelegte Spannung, Strom, der die Lampe durchfließt, Widerstand der Lampe. Im Zusammenhang damit wiederholen wir alle Ihnen bekannten Formeln für die Leistung, die entwickelt bzw. verbraucht wird, wenn ein Strom einen bestimmten Widerstand R durchfließt.

Leser B: Ich kenne folgende Formel:

$$P = (\varphi_1 - \varphi_2)\, I; \tag{190}$$

$$P = I^2 R; \tag{191}$$

$$P = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 / R, \tag{192}$$

wobei P die vom Widerstand R aufgenommene Leistung, $\varphi_1 - \varphi_2$ die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Widerstandes und I die Stromstärke im Widerstand ist.

Leser A: Wir verwendeten gewöhnlich nur Formel (191), in der die Leistung durch das Quadrat der Stromstärke und den Widerstand bestimmt ist.

Autor: Es ist leicht einzusehen, daß alle drei Formeln äquivalent sind, weil unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes eine Formel in die andere übergeht. Die Äquivalenz dieser Formeln weist gerade darauf hin, daß bei der Beantwortung der Frage bezüglich des Durchbrennens der Lampe Strom und Spannung nicht getrennt gesehen werden dürfen. Man muß alle drei Größen in ihrer Gesamtheit sehen: sowohl die Stromstärke als auch die Spannung und den Widerstand. (*Zum Leser A*) Warum geben Sie übrigens der Formel (191) den Vorzug?

Leser A: Gewöhnlich ist doch die an der Lampe anliegende Spannung konstant. Deshalb stellt die Abhängigkeit der Leistung von der Spannung nichts Besonderes dar. Formel (191) ist die „am meisten verwendete".

Autor: Wenn Sie der Formel (191) eine bevorzugte Stellung einräumen, haben Sie nicht recht. Wir betrachten eine Aufgabe: *Ein Elektroherd besteht aus drei Heizvorrichtungen mit je gleichen Widerständen R. Sind alle drei Heizvorrichtungen parallel geschaltet, so siedet das Wasser in einem Teekessel nach $t_0 = 6$ min. Nach welcher Zeit siedet im Kessel die gleiche Wassermasse bei den in* Bild 152 *angegebenen Schaltungen der Heizvorrichtungen des Herdes?*

Leser A: Zuerst suchen wir den Gesamtwiderstand des Elektroherdes für jede einzelne Schaltstufe. Im Ausgangsfall (Parallelschaltung) ist der Gesamtwiderstand $R_0 = R/3$. Für die Fälle a, b, c (siehe

Bild 152) erhält man

$$R_a = 3\,R,$$
$$R_b = R + (R/2) = 3\,R/2, \qquad (193)$$
$$R_c = 2\,R^2/(3R) = 2\,R/3.$$

Ist U die Spannung, an die der Elektroherd angeschlossen ist, so findet man unter Benutzung des

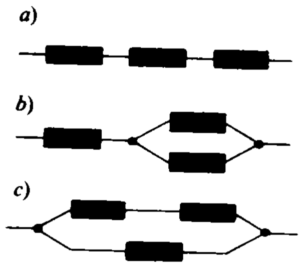


Bild 152

Ohmschen Gesetzes für jeden dieser Fälle die Stärke des durch den Herd fließenden Stromes ...

Autor (unterbrechend): Es ist nicht notwendig, die Stromstärke auszurechnen. Wir bezeichnen mit t_0, t_a, t_b, t_c die Zeiten, die zum Erhitzen des Wassers im Kessel für jeden der betrachteten Fälle erforderlich sind. Die abgegebene Wärme ist gleich dem Produkt aus der elektrischen Leistung und der Erhitzungszeit. Für jeden der genannten Fälle ist diese Wärme ein und dieselbe. Verwenden wir für die elektrische Leistung die Formel (192), so erhalten wir

$$\frac{U^2 t_0}{R_0} = \frac{U^2 t_a}{R_a} = \frac{U^2 t_b}{R_b} = \frac{U^2 t_c}{R_c}. \qquad (194)$$

Setzen wir hier die Beziehungen (193) ein und kürzen durch die gemeinsamen Faktoren (U^2 und $1/R$), so finden wir

$$3\,t_0 = t_a/3 = 2\,t_b/3 = 3\,t_c/2.$$

Hieraus erhalten wir sofort die Werte der gesuchten Größen: $t_a = 9\,t_0 = 54$ min, $t_b = 9\,t_0/2 = 27$ min, $t_c = 2\,t_0 = 12$ min. Beachten Sie, daß es in der gegebenen Aufgabe zweckmäßiger war, für die Leistung gerade Formel (192) anzuwenden, weil die Spannung, an die der Elektroherd angeschlossen war, konstant blieb. Wir kommen zur nächsten Frage:

Gegeben ist eine Spannungsquelle mit der Urspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_1. Sie ist an einen bestimmten äußeren Widerstand R angeschlossen. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Spannungsquelle?

Leser B: Der Wirkungsgrad der Spannungsquelle ist gleich dem Quotienten aus Nutzleistung (d.h. derjenigen Leistung, die an den äußeren Widerstand abgegeben wird) und der Gesamtleistung (d.h. der Summe der Leistungen, die an den äußeren und den inneren Widerstand abgegeben werden):

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 (R + R_1)} = \frac{R}{R + R_1}. \tag{195}$$

Autor: Richtig. *Wir setzen voraus, daß sich der Innenwiderstand der Quelle nicht ändert, ändern soll sich aber der äußere Widerstand. Welchen Einfluß hat das auf den Wirkungsgrad der Spannungsquelle?*

Leser B: Bei $R = 0$ (Kurzschlußfall) ist $\eta = 0$. Bei $R = R_1$ ist $\eta = 0{,}5$. Wenn R unbegrenzt anwächst, strebt der Wirkungsgrad gegen eins.

Autor: Völlig richtig. *Aber wie verändert sich dabei die Nutzleistung (die Leistung, die an den äußeren Widerstand abgegeben wird)?*

Leser B: Da sich beim Wachsen von R auch der Wirkungsgrad vergrößert, wird sich auch die Nutzleistung erhöhen. Kurz gesagt, je größer R ist, desto höher ist die Nutzleistung.

Autor: Das ist falsch. Die Vergrößerung des Wirkungsgrades der Spannungsquelle bedeutet, daß sich der Quotient aus Nutzleistung und Gesamtleistung der Quelle vergrößert. Die Nutzleistung kann sich dabei auch verringern. In der Tat, die Nutzleistung ist

$$P_N = \frac{U_0^2}{(R + R_1)^2} R = \frac{U_0^2}{R_1} \frac{x}{(x+1)^2}, \tag{196}$$

wobei $x = R/R_1$ ist. Wenn $x \ll 1$ ist, so ist $P_N \sim \sim x$. Ist $x \gg 1$, so ist $P_N \sim \frac{1}{x}$. Einen maximalen

Wert nimmt P_N bei $x = 1$ ($R = R_i$) an; dann ist $P_N = U_0^2/4R_i$. In Bild 153 ist die Funktion $y = x/(x+1)^2$ gezeichnet. Sie illustriert die Änderung der Nutzleistung bei wachsendem äußerem Widerstand. Wir betrachten folgende Aufgabe:
Jede von 200 gleichen Glühlampen mit einem Widerstand von 300 Ω *ist zu einer Spannungsquelle mit der*

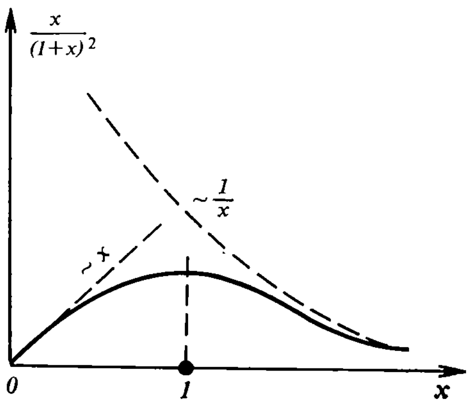


Bild 153

Urspannung von $U_0 = 100$ V *und dem Innenwiderstand* $R_i = 0{,}5$ Ω *parallel geschaltet. Zu berechnen sind die Leistung, die jede Lampe aufnimmt, und die relative Änderung der Leistung für jede Lampe, nachdem eine von den 200 Lampen durchgebrannt ist. Der Widerstand der Verbindungsleitungen ist zu vernachlässigen* (Bild 154).

Leser B: Die Gesamtstromstärke I_{ges} im äußeren Stromkreis ist $I_{ges} = U_0/\left(R_i + \frac{R}{n}\right) = 50$ A. Die Stromstärke durch eine Lampe beträgt $I = I_{ges}/n = 0{,}25$ A. Hieraus finden wir die Leistung, die an eine Lampe abgegeben wird: $P = I^2R = 18{,}75$ W. Zur Bestimmung der relativen Änderung der Leistung je Lampe muß ich erst die Leistung P_1 je Lampe für $n = 199$ ermitteln und dann den Quotienten

$$f = \frac{P_1 - P}{P} \tag{197}$$

berechnen.

Autor: Einem solchen Weg zur Berechnung der gesuchten Größe f kann ich nicht zustimmen. Sie muß in allgemeiner Form durch die Widerstände R

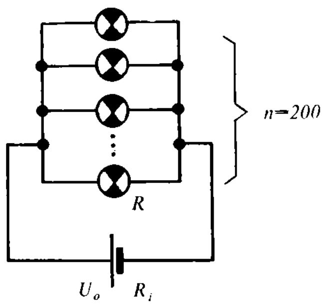


Bild 154

und R_1 und durch die Anzahl n der Lampen ausgedrückt werden. Wir schreiben zuerst die Leistung auf:

$$P = \frac{R}{n^2} \cdot \frac{U_0^2}{\left(R_1 + \frac{R}{n}\right)^2},$$

$$P_1 = \frac{R}{(n-1)^2} \cdot \frac{U_0^2}{\left(R_1 + \frac{R}{n-1}\right)^2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (197) ein, so ergibt sich

$$f = \left(\frac{P_1}{P} - 1\right) = \left(\frac{nR_1 + R}{nR - R_1 + R}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{R_1}{nR_1 + R}}\right)^2 - 1.$$

Der Bruch im Nenner der letzten Gleichung ist viel kleiner als eins (man hat viele Lampen, und der Widerstand jeder Lampe ist viel größer als der

Innenwiderstand der Spannungsquelle). Wir dürfen daher die Näherungsformel (185) anwenden und erhalten

$$f = \left(1 - \frac{R_i}{nR_i + R}\right)^2 - 1 \approx \frac{2R_i}{nR_i + R}. \tag{198}$$

Setzt man in diese Gleichung die Zahlenwerte aus den Angaben in der Aufgabenstellung ein, so erhält man $f \approx 0{,}0025$.

Leser B: Aber warum haben Sie Einwände dagegen, daß man zuerst P_1 ausrechnet und danach durch Einsetzen der Zahlenwerte in Gl. (197) f berechnet?

Autor: Sie sehen, daß $f \approx 0{,}0025$ ist. Das bedeutet, um dieses Resultat nach Ihrer Methode zu erhalten, muß man den Wert P_1 mit einer Genauigkeit bis auf vier Stellen ausrechnen. Von vornherein wissen Sie aber gar nicht, mit welcher Genauigkeit P_1 ausgerechnet werden muß. Würde im gegebenen Fall P_1 auf zwei Dezimalen ausgerechnet, so kämen Sie zu dem Schluß, daß die Leistung P_1 mit der Leistung P übereinstimmt.

Aufgaben

115. Bild 155 zeigt einen elektrischen Stromkreis. Gegeben ist $U_0 = 100$ V, $R_i = 36\ \Omega$. Der Wirkungsgrad der Spannungsquelle beträgt 50 %. Es sind der Widerstand R und die Nutzleistung P zu berechnen.

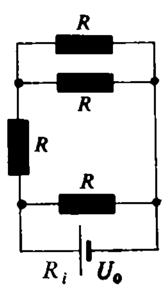


Bild 155

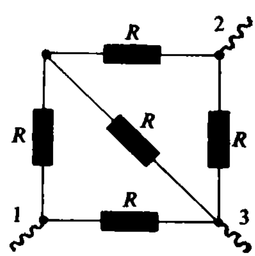


Bild 156

116. Eine Spannungsquelle ist an einen Widerstand angeschlossen, der den Innenwiderstand der Quelle um das k-fache übersteigt. Wie ändert sich der Wirkungsgrad der Quelle, wenn parallel zu dem äußeren Widerstand ein Zusatzwiderstand geschaltet wird, der n-mal so groß wie der Innenwiderstand der Quelle ist? Setzen Sie $k = 4$, $n = 2$.

117. Einige gleiche Widerstände sind so kombiniert, wie es Bild 156 zeigt. In einem Fall wird diese Kombination an eine Spannungsquelle in den Punkten *1* und *2* angeschlossen, im anderen Fall in den Punkten *1* und *3*. Gesucht ist der Innenwiderstand der Spannungsquelle, wenn das Verhältnis der Wirkungsgrade der Quelle für den ersten und zweiten Fall gleich $\frac{16}{15}$ ist. Berechnen Sie die Wirkungsgrade!

118. In einem Elektroherd sind die Widerstände so geschaltet, wie es Bild 156 zeigt. An den Punkten *1* und *2* sind sie an das Netz angeschlossen. Es dauert eine bestimmte Zeit, bis man 500 g Wasser zum Sieden bringt. Wieviel Wasser kann man in der gleichen Zeit zum Sieden bringen, wenn die Widerstandskombination des Elektroherdes in den Punkten *1* und *3* an das Netz angeschlossen ist? Die Anfangstemperatur des Wassers ist in beiden Fällen die gleiche, Wärmeverluste sind zu vernachlässigen.

119. 1,5 l Wasser mit einer Temperatur von 20 °C werden für $t_1 = 15$ min auf einen Elektroherd gestellt. Dieser besitzt eine Platte mit zwei gleichen Widerständen. Sind die Widerstände parallel geschaltet, so siedet in der genannten Zeit das Wasser. Dabei wandeln sich 100 g Wasser in Dampf um. Was geschieht mit dem Wasser, wenn die Widerstände in Reihe geschaltet sind und das Erhitzen im Verlauf von $t_2 = 60$ min erfolgt? Die spezifische Verdampfungswärme beträgt $22{,}6 \cdot 10^5$ J/kg. Wieviel Zeit t_3 ist erforderlich, um das Wasser zum Sieden zu bringen, wenn nur ein Widerstand vom Strom durchflossen wird?

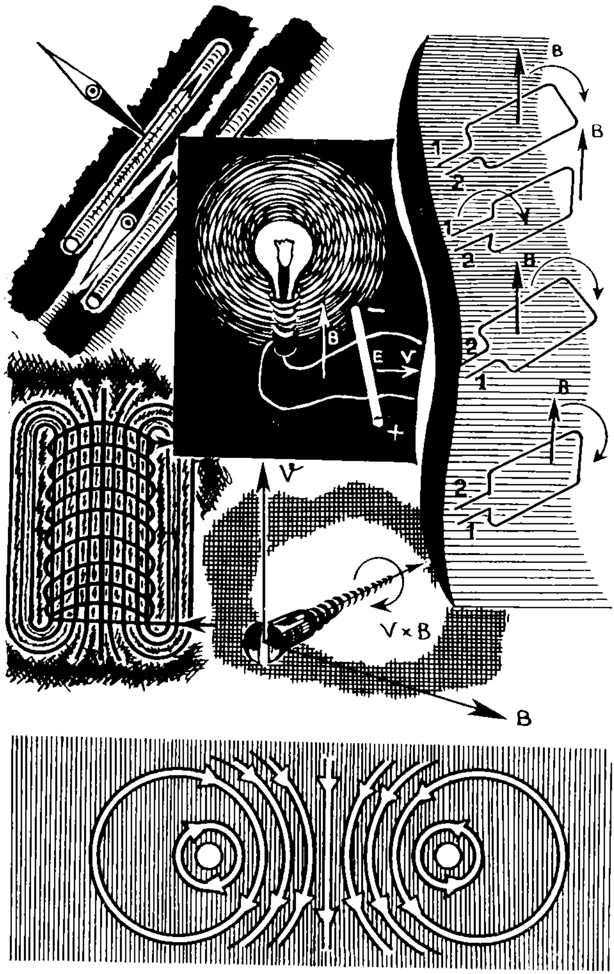
36. Wie beschreibt man das Magnetfeld eines Stromes?

Autor: Wann entsteht ein zeitlich konstantes Magnetfeld?

Leser A: Es tritt in der Umgebung eines Permanentmagneten oder in der Nähe eines von einem konstanten Strom durchflossenen Leiters auf.

Autor: Zur Bestimmung der Feldstärke eines elektrostatischen Feldes in einem Punkt des Raumes hat man dort eine Probeladung anzubringen und die auf diese ausgeübte Kraft zu messen. Aber wie ist das bei einem Magnetfeld? Was verwendet man zur Bestimmung der ein Magnetfeld charakterisierenden Größe?

VON MAGNETISCHEN ERZSTÜCKEN ZUM MAGNETISMUS, VON SICH SPREIZENDEN BLÄTTCHEN EINES ELEKTROSKOPS ZUR ELEKTROSTATIK UND ELEKTRODYNAMIK UND SCHLIESSLICH VOM MAGNETISMUS UND DER ELEKTRIZITÄT ZUM ELEKTRO-MAGNETISMUS — DAS IST DER WEG, DER DEN PROZESS DES SCHRITTWEISEN VORDRINGENS MENSCHLICHEN GEISTES IN DIE GEHEIMNISSE DER NATUR GUT ILLUSTRIERT.



Leser A: Man kann Eisenfeilspäne auf Zeichenpapier streuen. Diese magnetisieren sich im Magnetfeld und orientieren sich entsprechend den Feldlinien.

Leser B: Man kann eine Kompaßnadel benutzen. Ebenso läßt sich eine stromdurchflossene Leiterschleife verwenden.

Autor: Berichten Sie genauer über die stromdurchflossene Leiterschleife!

Leser B: Auf diesem Gebiet kenne ich mich nicht besonders gut aus. Sicherlich ist es besser, wenn Sie uns etwas dazu sagen.

Autor: **Zur Untersuchung eines Magnetfeldes werden sowohl Eisenfeilspäne als auch eine Kompaßnadel verwendet. Es ist jedoch stets besser, eine stromdurchflossene Leiterschleife zu benutzen. Bringt man an den einen oder anderen Ort eines Feldes eine stromdurchflossene Leiterschleife, so lassen sich Betrag und Richtung des Vektors der sogenannten magnetischen Induktion (bezeichnet mit $\vec{B}$) bestimmen. Dieser Vektor stellt ein Analogon zur Feldstärke des elektrostatischen Feldes dar. Die magnetischen Feldlinien sind diejenigen Linien, deren Tangentenrichtung in einem ihrer Punkte die Richtung des Vektors der magnetischen Induktion $\vec{B}$ liefert.**

Wir betrachten eine Leiterschleife, die die Fläche S umschließt und durch die ein konstanter Strom I fließt. Wir definieren die positive Normalenrichtung $\vec{n}$ der Fläche entsprechend einer Rechtsschraubenregel (Korkenzieherregel): Die Verschiebungsachse des Korkenziehers stehe auf der von der Leiterschleife berandeten ebenen Fläche senkrecht. Dreht man den Griff des Korkenziehers in der gleichen Richtung, wie auch der Strom fließt (technische Stromrichtung), gibt die Bewegung der Korkenzieherachse die Richtung $\vec{n}$ der positiven Flächennormale an (Bild 157). Das Magnetfeld übt auf die stromdurchflossene Leiterschleife eine Wirkung aus, es dreht die Schleife bis in eine ganz bestimmte Endlage. **Die Richtung der positiven Normale in dieser (Gleichgewichts-) Lage ist die Richtung des Vektors $\vec{B}$ im gegebenen Punkt des Feldes.**

Dreht man die Schleife zurück, so wirkt ein Kraftmoment M des Feldes, das bestrebt ist, die Schleife in die Gleichgewichtslage zurückzudrehen. Dieses

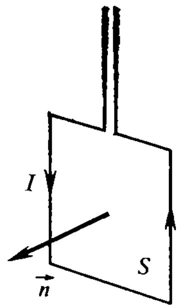


Bild 157

Moment M hängt vom Winkel, den Vektor $\vec{B}$ und Normale $\vec{n}$ miteinander bilden, ab (wir bezeichnen ihn mit α). Für $\alpha = 90°$ ist das Moment am größten;

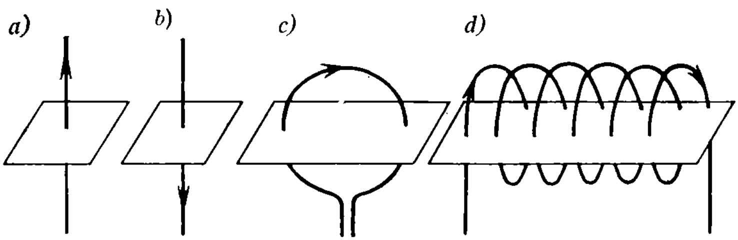


Bild 158

wir nennen dieses maximale Moment M_0. Der Quotient M_0/IS ist im gegebenen Punkt des Feldes der Betrag des Vektors $\vec{B}$:

$$B = \frac{M_0}{IS}\,. \qquad (199)$$

Aber jetzt zeichnen Sie magnetische Feldlinien für die Fälle, die die Bilder 158a bis 158d angeben. Die Feldlinien verlaufen in den skizzierten Ebenen.

Leser B: Hier ist meine Zeichnung (Bild 159a—d).

Autor: Merken Sie sich: **Die Richtung der Feldlinien ergibt sich aus der Korkenzieherregel (der Korkenzieher bewegt sich in Stromrichtung).** Wodurch unterscheidet sich das Bild der Feldlinien des Magnetfeldes vom Bild der Feldlinien des elektrostatischen Feldes?

Leser B: Die elektrischen Feldlinien beginnen in den positiven und enden in den negativen Ladungen. Eine

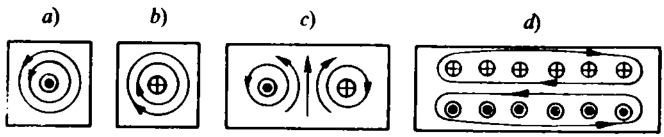


Bild 159

Analogie zur Ladung gibt es beim magnetischen Feld nicht. **Die Feldlinien eines Magnetfeldes sind geschlossene Linien.**

Autor: Gut. Ich gebe Ihnen noch einige nützliche Formeln zur Berechnung der magnetischen Induktion B an.

a) Das Feld eines vom Strom I durchflossenen unendlich langen, geradlinigen dünnen Drahtes ist im Abstand R vom Leiter

$$B = kI/2\pi R; \tag{200}$$

b) **das Feld eines Stromes I, der auf einem Kreis vom Radius R fließt, ist im Mittelpunkt des Kreises durch**

$$B = kI/2R \tag{201}$$

bestimmt;

c) **das Feld eines Stromes I, der eine lange Zylinderspule durchfließt** (der Radius einer Windung ist R, auf der Länge l sind n Windungen vorhanden), **ist innerhalb der Spule gegeben durch**

$$\boldsymbol{B = knI/l}; \tag{202}$$

merken Sie sich, daß das Feld innerhalb einer Zylinderspule homogen ist. In diesen Formeln bedeutet

k den Proportionalitätskoeffizienten, der von der Wahl des Einheitensystems abhängt. Im SI hat er den Wert

$$k = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \tag{203}$$

Die Größe μ_0 heißt Induktionskonstante. Man muß sich merken, daß, wenn man das Feld in einem Stoff betrachten würde, man in allen Formeln $\mu\mu_0$ an Stelle von μ_0 schreiben müßte. μ heißt magnetische Permeabilität des Stoffes. Als Einheit der magnetischen Induktion im SI wählt man die magnetische Induktion eines solchen Feldes, das auf eine Leiterschleife, durch die ein Strom der Stärke $I = 1$ A fließt und die eine Fläche von $S = 1$ m^2 umschließt, ein Maximalmoment von $M_0 = 1$ Nm ausübt. Diese Einheit heißt Tesla (T): 1 T = 1 N/Am.

Leser B: Ich habe gelesen, daß in einem beliebigen Fall das magnetische Feld durch das Gesetz von Biot-Savart-Laplace beschrieben wird. Wie geschieht das?

Autor: Zuvor wenden wir uns noch einigen Vektoroperationen zu. Was können Sie mit Vektoren anfangen?

Leser A: Man kann sie zusammensetzen, zerlegen, mit einer Zahl multiplizieren.

Autor: Ich mache Sie mit noch einer Operation bekannt, der Vektormultiplikation. Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ stellt einen Vektor $\vec{C}$ dar, der auf der von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht und so gerichtet ist, wie sich die Verschiebungsachse eines Korkenziehers bewegt, wenn dessen Griff vom Vektor $\vec{A}$ zum Vektor $\vec{B}$ um den kleinsten Winkel φ gedreht wird (Bild 160). Der Betrag des Vektorproduktes ist

$$C = AB \sin \varphi. \tag{204}$$

Bezeichnet wird die gesamte Operation durch

$$\vec{C} = (\vec{A} \times \vec{B}). \tag{205}$$

Wenn die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aufeinander senkrecht stehen, so ist $C = AB$. Sind die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ parallel oder antiparallel, so ist das Vektorprodukt

Null. Man muß sich merken, daß

$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B}) \qquad (206)$$

gilt.

Leser B: Das ist für mich etwas Neues. Man erhält also, daß ein Produkt von Vektoren Null sein kann, selbst dann, wenn keiner der Vektoren der Nullvektor ist.

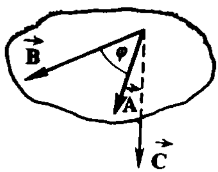


Bild 160

Außerdem ändert sich das Produkt beim Vertauschen der Faktoren (genauer gesagt, es ändert das Vorzeichen).

Autor: Völlig richtig. Jetzt gehen wir zum Gesetz von Biot-Savart-Laplace über. Durch einen Leiter fließe ein Strom der Stärke I. Man betrachtet ein kleines Längenelement $\overrightarrow{\Delta l}$ des Leiters (die Richtung dieses Vektors stimmt mit der Stromrichtung überein, der Betrag ist gleich der Länge des Leiterelementes). Wir werden das Produkt $\overrightarrow{I \cdot \Delta l}$ als Stromelement bezeichnen.

Weiter wählen wir irgendeinen Beobachtungspunkt A aus und zeichnen vom Stromelement $\overrightarrow{I \cdot \Delta l}$ zum Punkt A den Vektor $\vec{R}$ (Bild 161). **Das Gesetz von Biot-Savart-Laplace besagt: Die magnetische Induktion $\overrightarrow{\Delta B}$, die das Stromelement $\overrightarrow{I \cdot \Delta l}$ im Punkt A hervorruft, ist durch den Ausdruck**

$$\overrightarrow{\Delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^3} (\overrightarrow{\Delta l} \times \vec{R}) \qquad (207)$$

bestimmt. Um dann den vollständigen Vektor der Induktion im Punkt A zu erhalten, muß man eine Addition (Integration) der Vektoren $\overrightarrow{\Delta B}$ aller Strom-

elemente ausführen, in die man den stromdurchflossenen Leiter zerlegen kann. Die Ausdrücke (200) bis (202) stellen das Ergebnis einer derartigen Rechnung dar.
Wir betrachten als einfachstes Beispiel das Feld eines Kreisstromes in dessen Zentrum. Bild 162

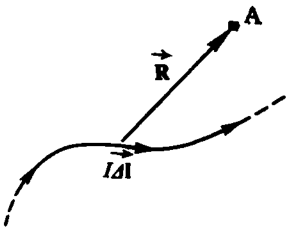


Bild 161

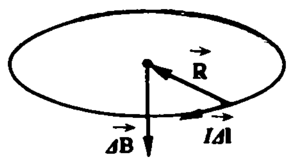


Bild 162

deutet hierfür das vom Stromelement erzeugte Feld an. Man erkennt leicht die Richtigkeit von

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \Delta l. \tag{208}$$

Für ein beliebiges anderes Stromelement des Kreisstromes bleiben die Richtung von $\overrightarrow{\Delta B}$ und auch der Ausdruck (208) bestehen. Daher ist

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \Sigma \Delta l = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \mu_0 \frac{I}{2R}\,.$$

Damit haben wir den Ausdruck (201) erhalten.

Aufgaben

120. Zu bestimmen ist die Induktion des Feldes in der Mitte zwischen zwei parallelen geradlinigen Leitern, wenn in jedem Leiter ein Strom der Stärke I fließt. Der Abstand der beiden Leiter sei d. Es werden zwei Fälle betrachtet: a) die Ströme sind parallel, b) die Ströme sind antiparallel.

121. Zu bestimmen ist die Induktion B im Zentrum zweier konzentrischer Kreisströme (Stromstärke I, Radien R und $2R$). Folgende Fälle sind zu behandeln: a) die Kreisströme liegen in einer Ebene, sie fließen in gleicher Richtung, b) die Kreisströme liegen in einer Ebene, sie fließen in entgegengesetzten Richtungen, c) die Kreisströme fließen in Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen.

37. Wie wechselwirken Ströme untereinander?

Autor: Wie wirkt ein Magnetfeld auf einen Strom?

Leser A: Nach der Linken-Hand-Regel: Das Feld fällt auf die Innenfläche der linken Hand, der Strom fließt in Richtung der ausgestreckten vier Finger. Die Richtung der auf den Strom ausgeübten Kraft zeigt der aufgestellte Daumen.

Autor: Das ist richtig. Sie haben aber nichts über den Betrag der Kraft ausgesagt. **Die Wirkung des Magnetfeldes auf einen Strom wird durch das Ampèresche**

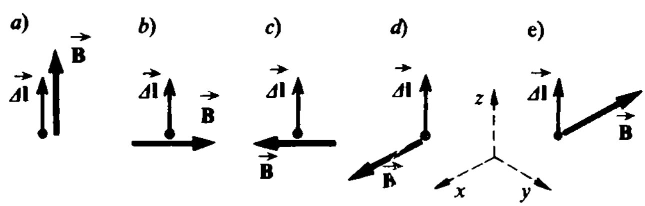


Bild 163

Gesetz beschrieben: Auf ein Stromelement $\overrightarrow{I \cdot \Delta l}$ wirkt in einem Feld der Induktion $\vec{B}$ am Ort des Stromelementes die Kraft

$$\vec{\Delta F} = I\,(\vec{\Delta l} \times \vec{B}). \tag{209}$$

Hier tritt das Ihnen schon bekannte Vektorprodukt auf. Sie können nachprüfen, daß die Richtungen der in (209) stehenden Vektoren die Linke-Hand-Regel erfüllen. Aber jetzt bestimmen Sie die Richtung der Kraft, die auf einen Strom im Magnetfeld wirkt, für die in Bild 163 angegebenen Fälle.

Leser A: Ich benutze dazu die Linke-Hand-Regel.

Autor: Ich widerspreche Ihnen nicht. Dennoch rate ich Ihnen, sich an den Ausdruck (209) zu gewöhnen. Sie lernen dabei, ein Vektorprodukt anzuwenden.

Leser A: Gut. Im Fall a) sind die Vektoren $\vec{\Delta l}$ und $\vec{B}$ parallel; das bedeutet, ihr Vektorprodukt ist Null, das Feld wirkt nicht auf den Strom. Im Fall b) drehen wir den Griff des Korkenziehers vom Vektor

$\overrightarrow{\Delta l}$ zum Vektor $\vec{B}$, die Drehung erfolgt im Uhrzeigersinn, die axiale Verschiebung des Korkenziehers erfolgt senkrecht auf der Zeichenebene, und zwar von uns weg. So ist dann die Kraft gerichtet.

Autor: Gut. Jetzt führen Sie die Überlegungen mit dem Korkenzieher in Gedanken aus und teilen uns nur die Endergebnisse mit.

Leser A: Im Fall c) steht die Kraft auf der Zeichenebene senkrecht und ist auf uns zu gerichtet. Im Fall d) liegt die Kraft in der Zeichenebene und zeigt von links nach rechts. Im Fall e) liegt bezüglich der Kraft der entgegengesetzte Fall wie bei d) vor.

Autor: Das ist alles richtig. Wir gehen zur Untersuchung der Wechselwirkung von Strömen über. Es mögen zwei Stromelemente $\overrightarrow{I_1 \Delta l_1}$ und $\overrightarrow{I_2 \Delta l_2}$ vorliegen. $\overrightarrow{\Delta F}$ sei die Kraft, mit der das erste auf das zweite Stromelement wirkt. Wir erklären das wie folgt: Das Stromelement $\overrightarrow{I_1 \Delta l_1}$ erzeugt am Ort des zweiten Stromelementes ein Magnetfeld $\overrightarrow{\Delta B}$ gemäß dem Gesetz von Biot-Savart-Laplace

$$\overrightarrow{\Delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1}{R^3} (\overrightarrow{\Delta l_1} \times \vec{R}) \tag{210}$$

(Bild 164a).

Dieses Feld wirkt nach dem Ampèreschen Gesetz auf das Stromelement $\overrightarrow{I_2 \Delta l_2}$ mit der Kraft $\overrightarrow{\Delta F}$ (Bild 164b):

$$\overrightarrow{\Delta F} = I_2 (\overrightarrow{\Delta l_2} \times \overrightarrow{\Delta B}). \tag{211}$$

Durch Substitution von (210) in (211) finden wir folgenden Ausdruck für die Kraft, mit der das Stromelement $\overrightarrow{I_1 \Delta l_1}$ auf das Stromelement $\overrightarrow{I_2 \Delta l_2}$ wirkt:

$$\overrightarrow{\Delta F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R^3} [\overrightarrow{\Delta l_2} \times (\overrightarrow{\Delta l_1} \times \vec{R})]. \tag{212}$$

Nebenbei, aus Bild 164 ist das Ergebnis, das Sie eigentlich gut kennen, zu entnehmen, nämlich, daß parallele Ströme einander anziehen.

Leser B: Mit den Stromelementen ist mir alles klar. Wie verhält es sich aber mit realen Strömen und realen Leitern?

Autor: Man muß jeden Leiter (in Gedanken natürlich) in Stromelemente zerlegen, die Wechselwirkung von

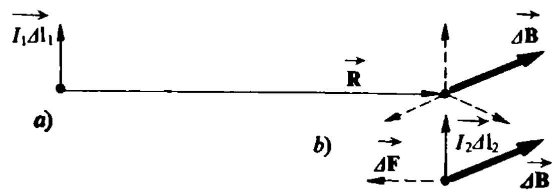


Bild 164

jedem Paar von Stromelementen (selbstverständlich von verschiedenen Leitern) bestimmen und dann die Ergebnisse summieren.

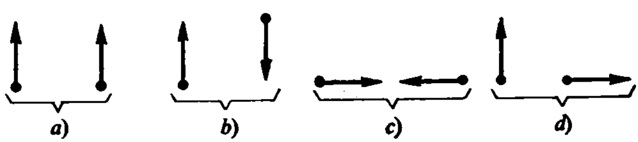


Bild 165

Leser B: Im Prinzip ist das klar. Aber wie führt man denn eine solche umfangreiche Operation praktisch aus?

Autor: Praktisch werden Sie das ausführen, nachdem Sie mit der höheren Mathematik bekannt gemacht worden sind und zu integrieren gelernt haben. Bis dahin beschränken wir uns auf die Wechselwirkung von Stromelementen. In Bild 165 sind vier Paare von Stromelementen dargestellt. Benutzen Sie Ausdruck (212), und zeichnen Sie die Richtung der Kräfte, die auf jeden der angegebenen Ströme wirken.

Leser B: Entschuldigen Sie. Einen Augenblick ... Im Fall a) ziehen sich die Ströme gegenseitig an, im Fall b) stoßen sie einander ab, im Fall c) wechselwirken sie nicht, aber hier, im Fall d) ... Man erhält irgendeinen Unsinn: im Fall d) wirkt auf den rechten

Strom eine Kraft, auf den linken wirkt aber keine. Hier ist meine Zeichnung (Bild 166).

Autor: Ihre Zeichnung ist richtig.

Leser B: Aber im Fall d) ist das dritte Newtonsche Gesetz nicht erfüllt! Hier ist die Wirkung nicht gleich der Gegenwirkung.

Leser A: Könnte es sein, daß das dritte Newtonsche Gesetz nur in der Mechanik gilt? Hier werden ja elektrische Ströme behandelt.

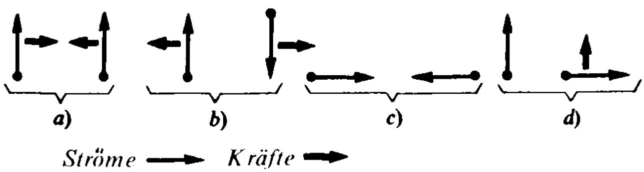


Bild 166

Leser B: Damit bin ich nicht einverstanden. Außerdem sind viele Kräfte, die in der Mechanik behandelt wurden, elektrischer Natur.

Autor: Das ist so. Ich möchte sogar hervorheben: das dritte Newtonsche Gesetz ist ein fundamentales Gesetz, aus ihm folgt einer der Erhaltungssätze, der Impulserhaltungssatz. Folglich müßte ein Versagen des dritten Newtonschen Gesetzes zu einem Versagen des Impulserhaltungssatzes führen.

Leser B: Damit ist im Fall d) in Bild 166 physikalischer Unsinn gezeichnet.

Autor: Und dennoch ist Ihre Zeichnung richtig. Suchen Sie einen Ausweg aus dieser Situation.

Leser B (nach Überlegen): Mir scheint, ich weiß jetzt, worin der scheinbare Widerspruch besteht. Die Ströme sind nicht geschlossen. Reale Ströme sind aber immer geschlossen. Man kann versuchen, die Wechselwirkung zweier geschlossener Stromkreise zu vergleichen; jeder von ihnen besteht, so nehmen wir an, aus vier Stromelementen (Bild 167). Aus Zweckmäßigkeitsgründen numerieren wir die Stromelemente. Nehmen wir beispielsweise Strom *1*. Wir suchen die Kräfte, die die Ströme *5*, *6*, *7*, *8* auf Strom *1* ausüben. Diese Kräfte setzen wir zu einer Resultierenden zusammen. Das gleiche machen wir der Reihe nach mit den Strömen *2*, *3* und *4*. Im Endergebnis kann man die resultierende Kraft finden, die auf jeden der geschlossenen Stromkreise wirkt. Ich denke, daß die resultierenden Kräfte betragsmäßig gleich und einander entgegengesetzt gerichtet sind, so, wie es das dritte Newtonsche Gesetz verlangt.

Autor: Ihre Schlußfolgerung hinsichtlich der resultierenden Kräfte, die auf die geschlossenen Stromkreise wirken, ist richtig.

Leser B: Im Ergebnis tritt hier kein Paradoxon auf.

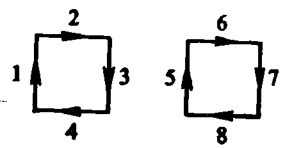


Bild 167

Autor: Aber wie verhält es sich mit Wechselstrom? Wechselstromkreise können doch offen sein. Ihr Fall d) in Bild 166 spiegelt also eine reale Situation wider.

Leser B: Damit tritt das Paradoxon abermals auf.

Autor: Ich will Ihre Auffassungsgabe nicht weiter überprüfen. Man kann tatsächlich mit Wechselstromelementen auf eine Situation treffen, bei der die Wirkung nicht gleich der Gegenwirkung ist. Es scheint, daß in dieser Situation der Impulserhaltungssatz verletzt ist. Jedoch darf man nicht voreilig derartige Schlußfolgerungen ziehen. **In der Natur kann niemals Impuls verschwinden oder entstehen. Man muß folgern, daß wir es in der von uns betrachteten Situation mit noch einem Objekt zu tun haben, das aus dem System herausführt und einen bestimmten Impuls mitnimmt. Dieses Objekt ist eine elektromagnetische Welle.** Auf diese Weise kommen wir zu dem Schluß, daß **das Wechselstromsystem vom Typ des Bildes 166d ein offener Schwingkreis ist und elektromagnetische Wellen abstrahlen muß.**

Leser B: Beeindruckend!

Autor: Merken Sie sich, daß diese Schlußfolgerung aus allgemeinsten Grundsätzen folgt. Es ist hier ganz angebracht zu betonen, wie wichtig die Aneignung der materialistischen Weltanschauung ist. Ein materialistisch denkender Mensch wird tatsächlich davon ausgehen, daß der Impulserhaltungssatz erfüllt ist. Seine scheinbare Verletzung kann nur mit der Nichtgeschlossenheit des betrachteten Systems, mit dem Auftreten eines zusätzlichen „Objektes", verknüpft sein. Dieses Objekt muß Impuls abführen (oder zuführen). Ein Mensch aber, der nicht gewohnt ist, materialistisch zu denken, würde aller Wahrscheinlichkeit nach zu dem Trugschluß kommen, daß in der betrachteten Situation der Impulssatz tatsächlich verletzt ist. Wir sind überzeugt, daß **die richtige philosophische Position eine wesentliche Rolle bei der Betrachtung verschiedener physikalischer Erscheinungen spielt.**

Im Zusammenhang damit sei ein Beispiel aus dem Gebiet der Kernphysik angeführt. Bei der Untersuchung des β-Zerfalls der Atomkerne zeigt sich, daß die beim β-Zerfall emittierten Elektronen keine einheitliche Energie aufweisen; sie werden von Fall zu Fall mit unterschiedlichen Energien emittiert. Es scheint so, daß beim β-Zerfall der Kerne der Energieerhaltungssatz verletzt ist. Eine materialistische philosophische Position, die von der Unerschütterlichkeit des Gesetzes von der Erhaltung der Energie ausgeht, führte im gegebenen Fall zur Vorhersage der Existenz eines schwer zu registrierenden neuen Teilchens, das gemeinsam mit den Elektronen beim β-Zerfall der Kerne auftritt. Dieses Teilchen heißt Antineutrino. Später wurde, nach der Vervollkommnung der Experimentiertechnik, das Antineutrino unmittelbar experimentell gefunden. Bis zu diesem Zeitpunkt sagte man, das Antineutrino sei am „Schreibtisch" gefunden worden.

38. Wie gut haben Sie das Faradaysche Gesetz und die Lenzsche Regel verstanden?

Autor: Geben Sie die Definition des Flusses der magnetischen Induktion durch eine berandete Fläche (Leiterschleife) an!

Leser B: **Der magnetische Induktionsfluß (mit Φ bezeichnet) durch eine berandete Fläche (Flächeninhalt S) ist die Größe, die gleich dem Produkt aus magnetischer Induktion B, dem Flächeninhalt S und dem Kosinus des Winkels α zwischen Flächennormale und Richtung der magnetischen Induktion ist:**

$$\Phi = BC \cos \alpha. \tag{213}$$

Leser A: **Der Fluß der magnetischen Induktion durch die berandete Fläche ist gleich der Anzahl der magnetischen Feldlinien, die die Fläche durchsetzen.**

Autor: Mit beiden Erklärungen bin ich einverstanden. Welche Bedingungen der Anwendbarkeit der Formel (213) sind Ihnen bekannt?

Leser B: Ich verstehe Ihre Frage nicht.

Autor: Das liegt daran, weil Sie nicht gewöhnt sind, solche Fragen zu stellen. Formel (213) ist nur unter der Voraussetzung anwendbar, daß sich der Vektor der Induktion auf der berandeten Fläche weder betrags- noch richtungsmäßig ändert. Mit anderen Worten, innerhalb der berandeten Fläche muß das Magnetfeld homogen sein. Welche Einheit hat der Induktionsfluß im SI?

Leser B: Ich erinnere mich nicht mehr daran.

Autor: Diese Einheit heißt Weber (Wb). Sie ist gleich dem Fluß eines Magnetfeldes mit der magnetischen Induktion 1 T, der die Fläche von einem Quadratmeter senkrecht durchsetzt. Die nächste Frage: Ändert sich der Induktionsfluß durch die Leiterschleife, wenn sie in einem homogenen Magnetfeld verschoben wird?

Leser B: Auf welcher Bahnkurve erfolgt die Verschiebung, auf einer Geraden oder nicht?

Autor: Aber ist denn das von Bedeutung?

Leser B: Ich habe verstanden. Er ändert sich nicht.

Autor: Richtig. Aber in welchem Fall verändert sich der Fluß?

Leser B: Wenn die Leiterschleife in einem inhomogenen Feld verschoben wird oder wenn sich die Schleife in einem homogenen Feld dreht.

Autor: Richtig. Wir gehen jetzt zur elektromagnetischen Induktion über. Worin besteht sie?

Leser B: **Bei der zeitlichen Änderung des Flusses Φ durch eine Leiterschleife entsteht in dieser ein elektrischer Strom, der sogenannte Induktionsstrom. Dieser Strom entsteht unter der Wirkung einer gewissen Spannung, der Induktionsspannung.**

Autor: Ausgezeichnet. Aber jetzt sagen Sie, welches Gesetz (oder welche Gesetze) die elektromagnetischen Induktionserscheinungen beschreibt.

Leser B: **Das Faradaysche Induktionsgesetz: Die Induktionsspannung U_i ist der Änderungsgeschwindigkeit des Induktionsflusses $\Delta\Phi/\Delta t$ proportional** (im SI ist nach meiner Meinung der Proportionalitätsfaktor gleich eins):

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{214}$$

Autor: Sie haben das Faradaysche Induktionsgesetz richtig formuliert. Jedoch ist notwendig, daran zu erinnern, **daß die elektromagnetische Induktion nicht nur durch das Faradaysche Gesetz beschrieben wird, sondern auch durch die Lenzsche Regel, die das Vorzeichen „—“ erklärt.**

Leser A: **Die Lenzsche Regel besagt, daß der Induktionsstrom immer so gerichtet ist, daß er dem die Induktion hervorrufenden Vorgang entgegenwirkt.**

Ich erinnere mich an diese Formulierung, verstehe sie aber nicht ganz.

Autor: **Das Faradaysche Gesetz bestimmt den Betrag der Induktionsspannung. Die Lenzsche Regel liefert deren Richtung.**

Jetzt geht es um die Lenzsche Regel selbst. Wir betrachten sie vom Gesichtspunkt des Energieerhaltungssatzes aus. In einem Fall ziehen wir einen leitenden Ring über einen Bleistift, im anderen Fall über einen permanenten Stabmagneten. Im zweiten Fall entsteht im Ring ein Induktionsstrom. Das bedeutet, daß wir eine bestimmte zusätzliche Arbeit beim Überziehen des Ringes verrichten müssen. Aber eine zusätzliche Arbeit kann nur beim Auftreten einer zusätzlichen Widerstandskraft (gegen diese Kraft) verrichtet werden. Folglich muß der Induktionsstrom im Ring so gerichtet sein, daß das Entstehen der genannten Widerstandskraft gewährleistet ist.

Leser A: Jetzt sind mir alle diese Fragen klarer geworden.

Leser B: Könnte es sein, daß die Lenzsche Regel auch nur am „Schreibtisch" gefunden worden ist? Wir haben nur den Energieerhaltungssatz benutzt.

Autor: Sie haben recht. Man muß sich nur merken, daß hier gemeinsam mit dem Energieerhaltungssatz das

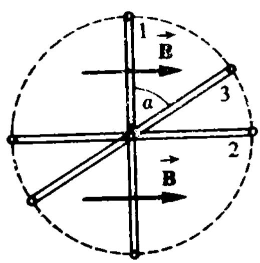


Bild 168

experimentelle Ergebnis vom Auftreten eines Induktionsstroms ausgenutzt worden ist. Anders gesagt, zur „Entdeckung" der Lenzschen Regel muß ein theoretischer Physiker den Energieerhaltungssatz und das Faradaysche Gesetz kennen.

Zur Festigung des Lehrstoffes betrachten wir eine weitere Aufgabe: *Eine Leiterschleife mit der Fläche S dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld der Induktion B. Wie ändert sich die Induktionsspannung mit der Zeit? Für welche Lagen der Leiterschleife wird die Induktionsspannung Null bzw. maximal?*

Die Aufgabe ist in Bild 168 skizziert. Einige Lagen der Querschnittsfläche sind angegeben. In welchen Lagen ist der Fluß durch die Leiterschleife am größten?

Leser A: In der Lage *1*.

Autor: Bei welcher Lage der Schleife ist die Geschwindigkeit der Flußänderung durch die Schleife maximal?

Leser A (unsicher): Auch in der Lage *1* ...

Leser B: Meiner Meinung nach in der Lage *2*, weil in dieser Lage die Schleife beim Drehen die Feldlinien unter einem rechten Winkel schneidet. In Lage *2* ist die Induktionsspannung maximal.

Autor: Richtig. Aber in welcher Lage ist die Induktionsspannung Null?

Leser B: In Lage *1*. Hier gleitet die Schleife beim Drehen längs der Feldlinien.

Autor: Sie haben recht. Beachten Sie folgendes: Der Induktionsfluß durch die Schleife und die Änderungsgeschwindigkeit dieses Flusses sind verschiedene

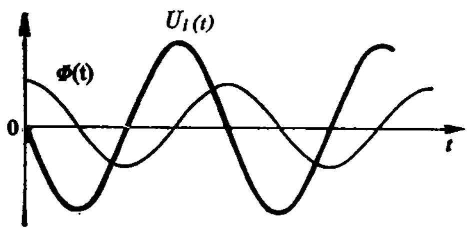


Bild 169

„Dinge". In der Lage *1* ist der Fluß maximal, die Änderungsgeschwindigkeit aber ist Null. In der Stellung *2* ist im Gegensatz dazu die Änderungsgeschwindigkeit des Flusses maximal, während der Fluß selbst Null ist. Wir nehmen weiter an, daß $\alpha = \omega t$ ist, und wir betrachten den allgemeinen Fall, den die Zwischenlage *3* zeigt. Wir haben somit

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

Es ist gefordert, für hinreichend kleine Werte Δt das Verhältnis $\Delta\Phi/\Delta t$ zu berechnen. Man kann schreiben

$$\Delta\Phi = BS\,[\cos(\omega t + \omega\Delta t) - \cos \omega t]$$

$$= BS\,[\cos \omega t \cos \omega\Delta t - \sin \omega t \sin \omega\Delta t - \cos \omega t].$$

Da $\omega \Delta t \ll 1$ ist, darf

$\cos \omega \Delta t \approx 1$ und $\sin \omega \Delta t \approx \omega \Delta t$

gesetzt werden. (Hier ist der Winkel nicht im Grad-, sondern im Bogenmaß ausgedrückt.) Damit finden wir

$$U_{\mathrm{i}} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = BS\omega \sin \omega t. \tag{215}$$

Bild 169 zeigt für den Induktionsfluß und die Induktionsspannung die Zeitabhängigkeit. Es hat sich ergeben, daß in der Leiterschleife, die in einem homogenen Magnetfeld gleichförmig rotiert, eine Urspannung induziert wird, die sich mit der Zeit nach einem harmonischen Gesetz ändert.

39. Sind Ihnen die Begriffe Selbstinduktion und Induktivität bekannt?

Autor: Wir betätigen einen elektrischen Schalter, und plötzlich brennt eine Lampe durch. Was denken Sie, wann das vor sich geht, beim Einschalten oder beim Ausschalten des Lichtes?

Leser B: Ich habe bemerkt, daß das beim Ausschalten passiert.

Autor: Das ist so. Beim Ausschalten wird ein zusätzlicher Strom induziert, der sogenannte Ausschaltstrom. Das ist eine der Äußerungen des Auftretens der Selbstinduktion.

Leser A: Sprechen Sie bitte ausführlicher über die Selbstinduktion!

Autor: Bei einer Änderung des Stromes in der Leiterschleife wird sich offensichtlich auch der Fluß des Magnetfeldes ändern, das durch diesen Strom gebildet wird. Als Ergebnis davon wird in der Leiterschleife eine bestimmte Spannung induziert. Diese Erscheinung heißt Selbstinduktion. Die Spannung ist die Selbstinduktionsspannung.

Wir nehmen an, in der Leiterschleife fließt ein konstanter Strom. Beim Ausschalten ändert sich die Stromstärke sehr schnell. Folglich verringert sich auch der Fluß des Magnetfeldes schnell. Gemäß dem Faradayschen Gesetz entsteht eine Induktionsspannung (im gegebenen Fall die Selbstinduktionsspannung). Nach der Lenzschen Regel muß sie so gerichtet sein, daß sie die äußere Ursache hemmt, die zur Verringerung des Magnetfeldes führt. Hieraus folgt, **der induzierte Ausschaltstrom ist genauso wie der vorherige Strom gerichtet; der resultierende Strom kann daher bedeutend anwachsen.** Es ist offensichtlich, **beim Einschalten entsteht ein Induktionsstrom, der dem Hauptstrom entgegengerichtet ist (dabei verkleinert sich der resultierende Strom).**

Bei der einen Leiteranordnung tritt die Erscheinung der Selbstinduktion stärker, bei der anderen Leiteranordnung schwächer zutage. Zum Beispiel kommt in einem geradlinigen Leiter die Selbstinduktion wesentlich schwächer zum Vorschein als in demselben Leiter, der in Form einer Spule aufgewickelt ist (Solenoid). In diesem Zusammenhang wurde eine spezielle Größe eingeführt, die die Selbstinduktionseigenschaften eines Leiters charakterisiert, die Induktivität. Nach dem Gesetz von Biot-Savart-Laplace ist die Induktion eines Feldes der Stromstärke proportional. Andererseits ist der magnetische Fluß der Induktion des Feldes proportional. Hieraus folgt die Proportionalität zwischen magnetischem Fluß und Stromstärke. Diesen Zusammenhang schreiben wir als Gleichung in der Form

$$\Phi = LI \tag{216}$$

auf. Der Proportionalitätsfaktor L heißt Induktivität des gegebenen Leiters. Als Einheit der Induktivität ist im SI die Induktivität eines solchen Leiters gewählt, der einen Fluß von 1 Wb hervorruft, wenn in ihm ein Strom der Stärke 1 A fließt. Diese Einheit heißt Henry (H).

Leser A: Mit dem Begriff der Induktivität bin ich vertraut. Wir sind auf ihn bei der Behandlung elektromagnetischer Schwingungen in einem geschlossenen Wechselstromkreis getroffen. Ich habe mir die Formel für die Schwingungsperiode gemerkt:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \tag{217}$$

Autor: Sie haben recht. Merken Sie sich, daß zur Vergrößerung der Induktivität eines Schwingkreises die Leiter zu Spulen aufgewickelt sind. Manchmal wird in der Literatur der Begriff „Induktivität" in dieser Hinsicht selbst als Synonym für Spule verwendet. (Man sagt: „Ein schwingendes System besteht aus Kapazität und Induktivität.")
Versuchen Sie abschließend, die Induktivität einer Spule zu ermitteln, wenn die Stromstärke I, die Anzahl n der Windungen, ihre Länge l und der Spulenquerschnitt S gegeben sind.

Leser B: Ich benutze die Formeln (202) und (203). Die Induktion des Magnetfeldes innerhalb der Spule ist durch den Ausdruck

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} \tag{218}$$

gegeben. Der magnetische Fluß ist $\Phi = BS$.

Autor: Hier haben Sie einen Fehler gemacht. Man muß den gesamten Fluß durch alle n Spulenwindungen in Betracht ziehen. Folglich ist

$$\Phi = nBS. \tag{219}$$

Leser B: Durch Einsetzen von (218) und (219) in (216) finden wir:

$$nBS = L \cdot \frac{Bl}{\mu_0 n}$$

oder

$$L = n^2 \mu_0 \frac{S}{l}. \tag{220}$$

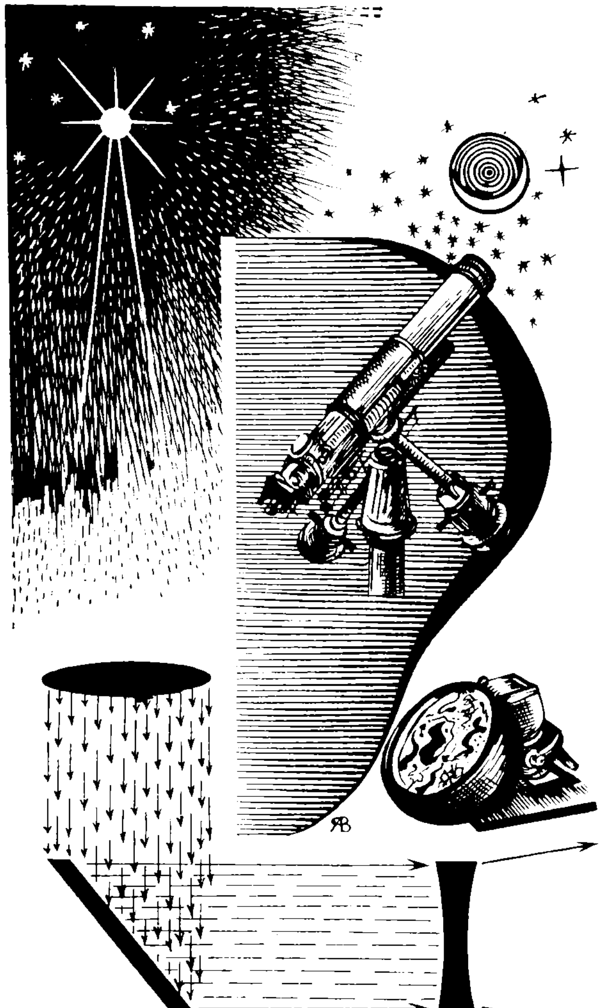
Autor: Das ist alles richtig.

40. Wissen Sie, wie Lichtstrahlen reflektiert und gebrochen werden?

Autor: Formulieren Sie für Licht das Reflexions- und das Brechungsgesetz!

Leser A: Das Reflexionsgesetz besagt: Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel. Das Brechungsgesetz besagt: Der Quotient aus dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels ist gleich der Brechzahl des Stoffes.

DIE GESETZE DER GEOMETRISCHEN OPTIK SIND DER MENSCHHEIT SCHON LANGE BEKANNT. JEDOCH SETZEN SIE UNS BIS AUF DEN HEUTIGEN TAG IHRER VOLLKOMMENHEIT WEGEN IN ERSTAUNEN. UM SICH DAVON ZU ÜBERZEUGEN, VERSUCHEN SIE, DIE VON VERSCHIEDENEN OPTISCHEN SYSTEMEN ERZEUGTEN BILDER ZU KONSTRUIEREN. WIR BESPRECHEN DIE GESETZE DER REFLEXION UND BRECHUNG DES LICHTES.



Autor: Ihre Formulierungen sind nicht ganz exakt. Erstens haben Sie nicht gesagt, daß **einfallende und reflektierte (oder gebrochene) Strahlen mit der im Einfallspunkt auf der Reflexionsgrenze (oder Brechungsgrenze) errichteten Senkrechten in einer Ebene liegen.** Wird das nicht gesagt, so kann man sich vorstellen, daß die Reflexion entsprechend dem Bild 170 erfolgt. Das wird aber nicht beobachtet. Zweitens gehört Ihre Formulierung des Brechungsgesetzes zu dem

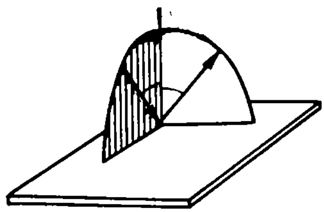


Bild 170

speziellen Einfall eines Strahls aus der Luft auf die Grenzfläche eines Stoffes. Im allgemeinen Fall treffen die Strahlen aus einem Stoff mit der Brechzahl n_1 auf die Grenzfläche eines Stoffes mit der Brechzahl n_2 auf. Wir bezeichnen den Einfallswinkel mit α_1 und den Brechungswinkel mit α_2. Dann läßt sich das Brechungsgesetz in der Form

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{221}$$

schreiben. Ihre Formulierung folgt hieraus unter der Bedingung, daß für Luft $n_1 = 1$ ist.
Betrachten wir folgende Aufgabe: *Ein Geldstück liegt in einer Tiefe H im Wasser. Wir betrachten es von oben längs einer Vertikalen. In welcher Tiefe werden wir die Münze sehen?*

Leser A: Ich weiß, daß das Geldstück angehoben erscheint. Konkreter zu antworten, bereitet mir Schwierigkeiten.

Autor: Lassen Sie vom Punkt O des Geldstückes zwei Strahlen OA und AB_1B ausgehen (Bild 171). Der Strahl OA wird nicht gebrochen (er steht aus der

Wasseroberfläche senkrecht). Der Strahl OB_1B ist gebrochen. Nehmen wir an, daß diese beiden divergierenden Strahlen in das Auge fallen. Das Auge wird das Bild der Münze im Schnittpunkt der divergierenden Strahlen AO und BB_1, also im Punkt O_1,

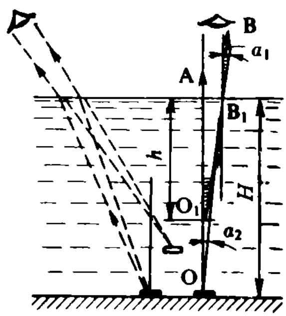


Bild 171

sehen. Aus dem Bild erkennt man, daß der gesuchte Abstand h mit der Tiefe H durch die Beziehung

$$h \tan \alpha_1 = H_1 \tan \alpha_2$$

verbunden ist, woraus

$$h = H \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} \tag{222}$$

folgt. Da die Winkel α_1 und α_2 sehr klein sind, darf man die Näherungsformel

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha \tag{223}$$

anwenden (hier ist der Winkel im Bogenmaß angegeben).

Damit läßt sich Formel (222) in die Form

$$h \approx H \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{H}{n} \tag{224}$$

umschreiben. Weil für Wasser $n = 4/3$ ist, wird

$$h = \frac{3}{4} H.$$

Leser B: Aber was wird, wenn man nicht vertikal auf die Münze blickt, sondern von der Seite her?

Autor: Dann wird die Münze nicht nur angehoben, sondern auch verschoben erscheinen (Bild 171, gestrichelte Linie). Selbstverständlich wird für diesen Fall die Rechnung erheblich komplizierter.— Wir betrachten die nächste Aufgabe: *Ein Taucher der Größe h steht in der Tiefe H auf dem Grund eines Sees. Zu berechnen ist der minimale Abstand vom Standort*

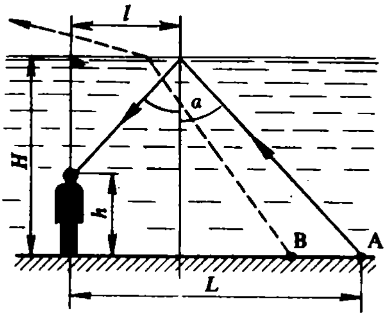


Bild 172

des Tauchers bis zu den Punkten des Grundes, die er infolge einer Totalreflexion an der Wasseroberfläche sehen kann.

Leser A: Derartige Aufgaben kann ich lösen. Wir bezeichnen den gesuchten Abstand mit L. Der Strahlenverlauf vom Punkt A in das Auge des Tauchers ist in Bild 172 dargestellt; Punkt A soll der dem Taucher nächstgelegene Punkt, den er infolge der Totalreflexion an der Wasseroberfläche sehen kann, sein. So wird beispielsweise der Strahl vom näher gelegenen Punkt B an der Wasseroberfläche gebrochen. Der Winkel α stellt den Grenzwinkel für Totalreflexion dar. Er berechnet sich aus der Formel

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}. \tag{225}$$

An dem Bild erkennt man schnell, daß

$$L = h \tan \alpha + 2(H - h) \tan \alpha =$$
$$= (2H - h) \tan \alpha$$

ist. Wegen $\tan\alpha = \sin\alpha / \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ erhalten wir unter Benutzung der Formel (225)

$$L = \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}}. \tag{226}$$

Setzen wir hier $n = 4/3$ ein, so finden wir $L = (3/\sqrt{7})\,(2H-h)$.

Autor: Vollkommen richtig. Aber was für ein Bild wird der Taucher über seinem Kopf sehen?

Leser A: Er wird über sich eine helle Kreisfläche mit dem Radius $l = (H-h)/\sqrt{n^2-1} = (3/\sqrt{7})\,(H-h)$ sehen (vgl. Bild 172). Außerhalb der Grenzen des Kreises sieht er das Bild der Gegenstände auf dem Grund des Sees.

Leser B: Was ist aber dann, wenn der Grund, auf dem der Taucher steht, nicht horizontal, sondern geneigt ist?

Autor: In diesem Fall wird der Abstand L offensichtlich davon abhängen, in welche Richtung der Taucher blickt. Es ist nicht schwer einzusehen, daß dieser Abstand kleiner wird, wenn der Taucher bergaufwärts blickt. Schaut er in die entgegengesetzte Richtung, dann wird der Abstand größer. Das Ergebnis der vorangegangenen Aufgabe ist jetzt nur anwendbar, wenn der Taucher in die Richtung blickt, in der sich die Tiefe des Sees nicht ändert. Die Aufgabe mit dem geneigten Grund schlage ich Ihnen zur selbständigen Lösung vor (siehe Aufgabe 123).

Leser A: Kann man die Richtung der Strahlen ändern, wenn man in ihren Weg einen Satz durchsichtiger planparalleler Platten stellt?

Autor: Wie denken Sie selbst darüber?

Leser A: Nach meiner Meinung ist das im Prinzip möglich, denn innerhalb der Platten verläuft der Strahl wegen der Brechung in einer anderen Richtung.

Leser B: Damit bin ich nicht einverstanden. Hinter den Platten hat der Strahl eine zur ursprünglichen parallele Richtung.

Autor: Weisen Sie das an einem aus wenigen Platten mit unterschiedlicher Brechzahl bestehenden System nach.

Leser B: Ich nehme drei Platten mit den Brechzahlen n_1, n_2 und n_3. Den Strahlenverlauf zeigt Bild 173. Die Brechung eines Strahls an jeder der vorhandenen Grenzflächen läßt sich durch

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = n_1, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4} = \frac{1}{n_3}$$

beschreiben. Multiplizieren wir die linken und die rechten Seiten dieser Gleichungen miteinander, so

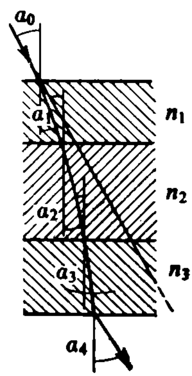


Bild 173

ergibt sich $(\sin \alpha_0/\sin \alpha_4) = 1$. Damit ist $\alpha_0 = \alpha_4$, was ich beweisen sollte.

Autor: Völlig richtig. Wir wollen jetzt für die geometrische Optik die Grenzen der Anwendbarkeit ihrer Gesetze diskutieren.

Leser B: Für Abstände in der Größenordnung der Lichtwellenlänge und für noch kleinere Abstände sind diese Gesetze nicht anwendbar. Hier beginnen die Welleneigenschaften des Lichtes hervorzutreten.

Autor: Sie haben recht. Diesen Sachverhalt können die Prüflinge sich im allgemeinen ausreichend gut vorstellen. Gibt es aber irgendwelche Beschränkungen für die Anwendbarkeit der Gesetze der geometrischen Optik von der anderen Seite her, nämlich für große Abstände?

Leser B: Wenn der Abstand größer als die Wellenlänge des Lichtes ist, dann läßt sich die Ausbreitung des Lichtes auf der Grundlage der geometrischen Optik behandeln. So wurde uns das früher gelehrt. Ich glaube, daß es in bezug auf große Abstände keine Anwendbarkeitsgrenzen der geometrischen Optik gibt.

Autor: Sie irren sich. Stellen Sie sich folgendes vor: Sie senden in den kosmischen Raum einen Lichtstrahl, der nicht divergieren möge. Die den Lichtstrahl emittierende Apparatur soll sich in einer Sekunde um einen Winkel von 60° drehen. Es ist gefragt, mit welcher Geschwindigkeit sich die Punkte des Lichtstrahls bewegen, die von der Lichtquelle weiter als 300 000 km entfernt sind.

Leser B: Ich verstehe Ihre Frage. Solche Punkte müssen sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Jedoch ist nach der Relativitätstheorie eine größere Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit nur dann unmöglich, wenn es sich um Geschwindigkeiten materieller Objekte handelt. Hier ist die Rede von Strahlen.

Autor: Ist denn ein Lichtstrahl nicht materiell? Wie Sie sehen, ist die geometrische Optik bei überaus großen Entfernungen nicht anwendbar. Man muß berücksichtigen, daß der Lichtstrahl aus Energiequanten, den Photonen, besteht. Die bis zu dem Zeitpunkt, zu dem wir die Lichtquelle drehen, emittierten Photonen „wissen nichts" von der nachfolgenden Drehung. Sie setzen ihren Weg in der Richtung fort, in der sie ausgesandt worden sind. Wir beobachten daher keine Drehung des gesamten Lichtstrahls, denn in die neue Richtung fliegen neue Photonen.

Leser B: Aber wie bestimmt man quantitativ die Anwendbarkeitsgrenze der geometrischen Optik in bezug auf große Entfernungen?

Autor: Die Entfernungen müßten so sein, daß die Zeit, die Licht benötigt, um sie zu durchlaufen, wesentlich kleiner ist als die in der Aufgabe angegebene charakteristische Zeit (beispielsweise viel kleiner als die Zeit, die die Lichtquelle zu ihrer Drehung benötigt). Der Lichtstrahl insgesamt zerfällt in diesem Fall nicht, und wir dürfen beruhigt die Gesetze der geometrischen Optik anwenden.

Aufgaben

122. Wir schauen von oben auf einen mit einer Glasplatte bedeckten Gegenstand. Gegenstand und Glasplatte befinden sich unter Wasser. Die Dicke der Glasplatte beträgt $d_1 = 5$ cm, diejenige der Wasserschicht $d_2 = 10$ cm. Die Brechzahlen von Glas und Wasser sind $n_1 = 1{,}6$ und $n_2 = 1{,}33$. In welchem Abstand h von der Wasseroberfläche sehen wir das Bild des Gegenstandes?

123. Ein Taucher der Größe $h = 1{,}8$ m steht in der Tiefe $H = 5$ m unter Wasser auf dem Boden, der eine geneigte Ebene mit dem Neigungswinkel $\beta = 15°$ bildet. Gesucht ist auf dem Boden der minimale Abstand L vom Standort des Beobachters bis zu denjenigen Punkten des Bodens, die der Taucher infolge der Totalreflexion an der Wasseroberfläche sehen kann.

124. Gegeben ist eine Glasplatte der Dicke $d = 5$ cm und der Brechzahl $m = 1{,}5$. Bei welchem Einfallswinkel α (aus Luft) stehen an der Glasplatte reflektierter Strahl und gebrochener Strahl aufeinander senkrecht? Bestimmen Sie für diesen Einfallswinkel die Parallelverschiebung x des Strahls infolge des Lichtdurchgangs durch die Platte.

125. Gegeben ist eine Glasplatte der Dicke d mit der Brechzahl n. Der Einfall des Lichtstrahls aus der Luft auf die Platte erfolgt unter demjenigen Winkel, der gleich dem Winkel der Totalreflexion im Glas der Platte ist. Berechnen Sie die Parallelverschiebung zwischen in die Platte ein- und aus der Platte austretendem Lichtstrahl infolge der Brechung!

41. Wie konstruieren Sie die durch Spiegel und Linsen erzeugten Bilder?

Autor: Ziemlich häufig treffen wir bei Prüflingen auf die Unfähigkeit, die Bilder zu konstruieren, die verschiedene optische Systeme, wie beispielsweise ebene und gekrümmte Spiegel und Linsen, erzeugen. Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Konstruieren Sie das von einem ebenen Spiegel erzeugte Bild eines Menschen für den in Bild 174a angegebenen Fall.

Leser A: Ich glaube, daß in diesem Fall kein Bild entsteht. Der Spiegel hängt viel zu hoch.

Autor: Sie irren sich, es gibt ein Bild. Die Konstruktion ist in Bild 174b angegeben. Es ist nicht schwer einzusehen, daß **zur Konstruktion des Bildes die Spiegelebene ausreichend verlängert werden muß, um das zur Spiegelebene symmetrische Bild des Menschen zu konstruieren.**

Leser A: Aber sieht denn der Mensch sein Bild?

Autor: Das ist eine andere Frage. Der Mensch sieht sein Bild wirklich nicht. Dafür hängt der Spiegel viel zu hoch und ist außerdem ungünstig geneigt. Im Spiegel

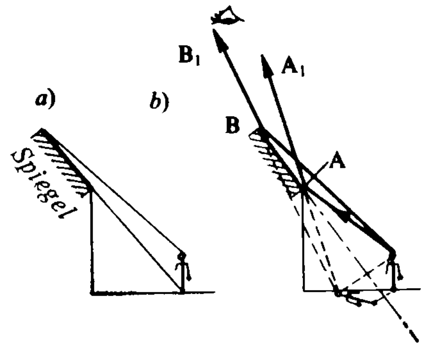


Bild 174

sehen nur diejenigen Beobachter das Bild des Menschen, die sich innerhalb des Winkels befinden, den die Strahlen AA_1 und BB_1 bilden. Es ist angebracht, daran zu erinnern, daß vom betrachteten Objekt ein Bündel divergierender Strahlen in das Auge des Beobachters gelangen muß. Das Auge sieht das Bild des Gegenstandes im Schnittpunkt dieser Strahlen oder dieser Verlängerungen (siehe Bilder 171 und 174b).

Wir betrachten als Beispiel die Bildkonstruktion an einem System von zwei aufeinander senkrecht stehenden Spiegeln (Bild 175a).

Leser A: Man muß einfach den Gegenstand an zwei Ebenen spiegeln. Als Ergebnis erhält man die zwei Bilder, die Bild 175b zeigt.

Autor: Sie haben ein drittes Bild vergessen. Bedenken Sie, daß die Strahlen, die vom Gegenstand in den rechten Winkel $\measuredangle AOB$ (Bild 175b) fallen, nicht nur einmal, sondern zweimal reflektiert werden: erst an dem einen, dann an dem anderen Spiegel. In Bild

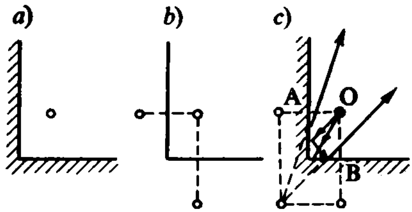


Bild 175

175c sind zwei solche Strahlen gezeichnet. Der Schnittpunkt ihrer Verlängerungen liefert das dritte Bild des Gegenstandes. Wir betrachten jetzt eine

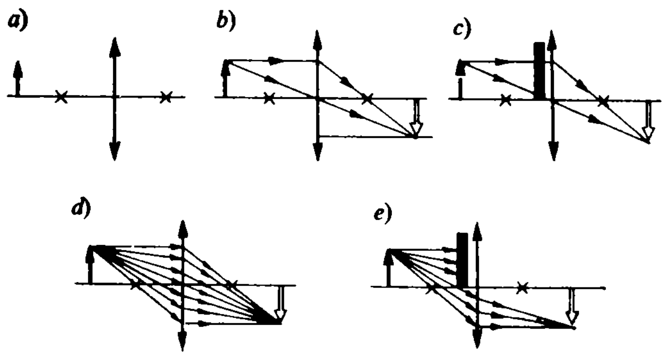


Bild 176

Reihe von Beispielen zu Sammellinsen. Konstruieren Sie das Bild des Gegenstandes für den in Bild 176a dargestellten Fall.

Leser A: Das ist sehr einfach, Bild 176b zeigt meine Konstruktion.

Autor: Gut, jetzt stellen Sie sich vor — so wie es Bild 176c zeigt —, daß eine Hälfte der Linse mit einem undurchsichtigen Schirm verdeckt ist. Was geschieht nun mit dem Bild?

Leser A: In diesem Fall verschwindet das Bild.

Autor: Das ist falsch. Sie haben vergessen, daß das Bild eines beliebigen Punktes des Pfeils (beispielsweise seiner Spitze) nicht aus nur zwei Strahlen, sondern aus unendlich vielen Strahlen entsteht (Bild 176d). Wir beschränken uns meistens deshalb auf zwei Strahlen, weil sie zur Lagebestimmung des Bildes ausreichen. Die Abdeckung der Linse schirmt einen Teil der auffallenden Strahlen ab. Die restlichen Strahlen durchsetzen die Linse und liefern das Bild des Gegenstandes (Bild 176e). Da jetzt weniger Strahlen an der Entstehung des Bildes beteiligt sind, ist dieses auch nicht so hell.

Leser B: Aus Ihren Erklärungen folgt, daß sich beim Abdecken eines Teils der Linse mit einem lichtundurchlässigen Schirm nur die Bildhelligkeit ändert und nichts weiter. Jedoch wissen alle, die sich mit Fotografie beschäftigen, daß bei einer Abblendung des Objektivs des Fotoapparates, d.h. bei einer Verkleinerung der effektiven Linsenfläche, gemeinsam mit der Verringerung der Bildhelligkeit ein anderer Effekt auftritt: die Abbildung wird schärfer. Wie ist das zu erklären?

Autor: Sie haben eine sehr sinnvolle Frage gestellt. Sie gibt mir die Möglichkeit, folgenden Umstand hervorzuheben: Alle unsere Konstruktionen beruhen auf der Annahme, daß Fehler der optischen Systeme (hier der Linsen) vernachlässigt werden dürfen. In Wirklichkeit ist der Ausdruck „Fehler“ hier nicht ganz passend, da es sich nicht um irgendwelche zufälligen Defekte handelt, sondern vielmehr um prinzipielle Eigenschaften. Bekanntlich vereinigen sich von der Achse unterschiedlich weit entfernte achsenparallele Strahlen nach dem Durchgang durch die Linse in verschiedenen Punkten der optischen Achse (Bild 177a), d.h., der Brennpunkt der Linse (der Schnittpunkt aller achsenparallelen Strahlen) erweist sich als „verschmiert“. Dadurch wird das Bild des Gegenstandes unscharf. Diese Unschärfe wird um so stärker, je weiter die verschiedenen Strahlen von der optischen Achse entfernt sind.

Durch Abblenden der Linse verläuft durch sie ein schmaleres Strahlenbündel. Dadurch verringert sich die Unschärfe der Abbildung (Bild 177b).

Leser B: Opfert man durch Abblenden die Bildhelligkeit zugunsten eines größeren Schärfegrades?

Autor: So ist es. Man muß sich merken, daß die Prüflinge bei einer Bildkonstruktion für Linsen mit Recht annehmen, daß **sich Parallelstrahlen immer in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt liegt auf der optischen Achse,**

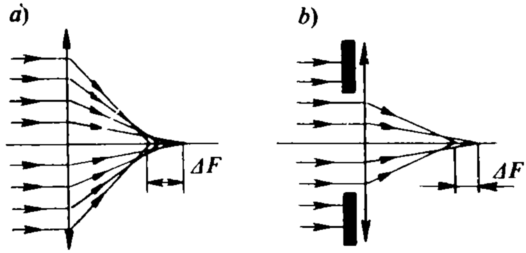


Bild 177

wenn die Parallelstrahlen zur optischen Achse parallel verlaufen. Er liegt in der Brennebene, wenn das Parallelstrahlenbündel unter einem bestimmten Winkel zur optischen Achse geneigt ist. Ein Prüfling muß wissen, daß diese Betrachtung eine Näherung bedeutet und daß eine exaktere Behandlung wegen der Fehler optischer Systeme Korrekturen erfordert.

Leser A: Aber was ist die Brennebene einer Linse?

Autor: Das ist die Ebene, die auf der optischen Achse senkrecht steht und durch den Brennpunkt verläuft. Wir betrachten die Frage: Wodurch unterscheiden sich die Bilder, die ein ebener Spiegel erzeugt, von den Bildern, die man mit einer Sammellinse im Beispiel des Bildes 176 erhält?

Leser A: Im ersten Fall (Spiegel) ist das Bild virtuell, im zweiten Fall reell.

Autor: Richtig. Erläutern Sie genauer, worin der Unterschied zwischen einem virtuellen und einem reellen Bild besteht.

Leser B: Ein Bild heißt virtuell, wenn sich nicht die Lichtstrahlen selbst, sondern nur ihre rückwärtigen Verlängerungen schneiden; ein reelles Bild ergibt sich

durch Schnittpunkte der Lichtstrahlen selbst. Es ist nicht verwunderlich, daß sich ein virtuelles Bild hinter einer Wand befinden kann, dort, wo überhaupt kein Licht hingelangt.

Autor: Richtig. Merken Sie sich auch, daß **man virtuelle Bilder nur von bestimmten Orten aus beobachten kann.** Bei reellen Bildern können Sie an der Stelle der Bildentstehung einen Schirm anbringen und das Bild von jeder beliebigen Position aus sehen. Betrachten wir das in Bild 178a dargestellte Beispiel. *Gegeben*

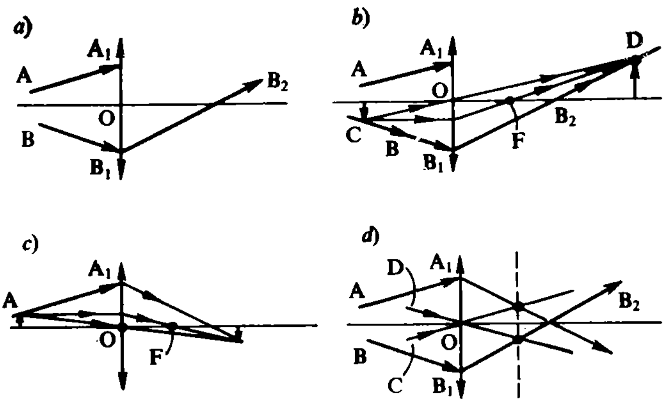


Bild 178

ist der Verlauf des Strahles BB_1B_2 durch eine Sammellinse. Suchen Sie die Richtung, in der Strahl AA_1 nach dem Durchgang durch die Linse weiterverläuft.

Leser A: Aber die Brennweite der Linse ist doch unbekannt!

Autor: Deshalb ist der Verlauf eines Strahls bis zur Linse und hinter der Linse gegeben.

Leser A: Eine solche Konstruktion haben wir niemals ausgeführt.

Leser B: Ich glaube, man muß zuerst die Brennweite der Linse suchen. Dazu kann man irgendwo links der Linse einen vertikalen Pfeil so zeichnen, daß seine Spitze auf dem Strahl BB_1 liegt (Punkt C) (Bild 178b). Weiter konstruieren wir vom Punkt C aus den Strahl, der durch den Linsenmittelpunkt verläuft. Er geht durch die Linse hindurch, ohne gebrochen zu werden, und schneidet im Punkt D den Strahl B_1B_2. Punkt D ist offensichtlich das Bild der Pfeilspitze. Jetzt müssen wir noch von der Pfeilspitze C aus einen dritten Strahl zeichnen, der zur Hauptachse der Linse parallel verläuft. Nach der Brechung muß dieser Strahl durch den Punkt D, d.h. durch das Bild der Pfeilspitze, verlaufen. Der Schnittpunkt dieses Strahls mit der Hauptachse ist der gesuchte Brennpunkt der Linse. Alle diese Konstruktionen zeigt Bild 178b.

Anschließend konstruieren wir aus der Kenntnis der Linsenbrennweite den vollständigen Verlauf des Strahls AA_1. Wir zeichnen einen zweiten Pfeil, dessen Spitze auf dem Strahl AA_1 liegt (Bild 178c). Aus der gefundenen Brennweite konstruieren wir das Bild dieses Pfeils. Der gesuchte Strahl muß durch das Bild der Pfeilspitze verlaufen. Die Konstruktion zeigt Bild 178c.

Autor: Ihre Erklärungen sind richtig. Sie beruhen darauf, daß sie das Bild eines Hilfsgegenstandes (des Pfeils) gesucht haben. Prägen Sie sich ein, daß diese Methode in dem Fall zweckmäßig ist, wenn Sie das Bild eines leuchtenden Punktes, der auf der Hauptachse der Linse liegt, bestimmen sollen. Man errichtet dann in dem leuchtenden Punkt einen Pfeil und konstruiert dessen Bild. Der Fußpunkt dieses Bildes ist dann offensichtlich das gesuchte Bild des leuchtenden Punktes. Im oben angeführten Fall ist diese Methode jedoch viel zu aufwendig. Ich werde Ihnen eine viel einfachere Methode vorführen. Zur Ermittlung der Linsenbrennweite zeichne ich durch den Linsenmittelpunkt den Strahl DO, der dem Strahl BB_1 parallel ist (Bild 178d). Da beide Strahlen parallel sind, schneiden sie sich hinter der Linse in der Brennebene (die Spur der Brennebene ist in Bild 178d gestrichelt gezeichnet). Dann zeichne ich durch den Linsenmittelpunkt den Strahl BO, der zum Strahl AA_1 parallel ist. Ausgehend davon, daß auch diese beiden Strahlen sich hinter der Linse in der Brennebene schneiden müssen, bestimme ich die Richtung des Strahls AA_1 nach dessen Durchgang durch die Linse. Wie Sie sehen, erhält man alles bedeutend einfacher.

Leser B: Ja, dieses Konstruktionsverfahren ist bemerkenswert einfach.

Autor: Versuchen Sie, nach dieser Methode eine analoge Aufgabe zu behandeln, wobei aber statt der Sammellinse eine Zerstreuungslinse verwendet wird (Bild 179a).

Leser B: Ich zeichne einen Strahl, der zum Strahl BB_1 parallel ist und durch den Linsenmittelpunkt hindurchführt (Bild 179b). Im Unterschied zur vorangegangenen Aufgabe werden sich jetzt nicht die

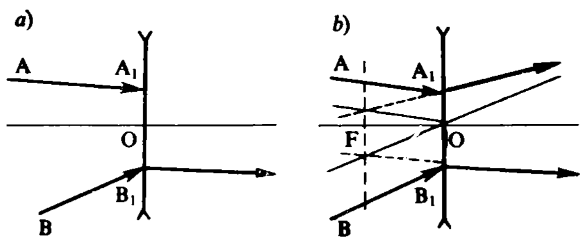


Bild 179

Strahlen selbst, sondern ihre rückwärtigen Verlängerungen schneiden. (Für den Strahl, der durch den Linsenmittelpunkt verläuft, sind Strahl und Verlängerung identisch.) Infolgedessen wird die Brennebene, in der der Schnittpunkt liegt, nicht rechts, sondern links von der Linse liegen (siehe gestrichelte Linie in Bild 179b).

Autor (eine Bemerkung einflechtend): Man muß betonen, daß **bei Zerstreuungslinsen die Bilder immer virtuell sind.**

Leser B (fortfahrend): Dann zeichne ich durch den Linsenmittelpunkt eine Parallele zum Strahl AA_1. Ausgehend davon, daß sich die rückwärtigen Strahlverlängerungen in der Brennebene schneiden müssen, konstruiere ich den gesuchten Strahl.

Autor: Gut. Antworten Sie qualitativ auf die Frage: Wo wird sich das Bild eines Gegenstandes befinden (dieser hat eine endliche Ausdehnung), der teilweise vor dem Brennpunkt einer Sammellinse, teilweise dahinter liegt?

Leser B: Ich konstruiere die Bilder einiger Punkte des Gegenstandes, die unterschiedlich weit von der Linse entfernt sind. Dabei liefern die Punkte, die hinter dem Brennpunkt liegen, reelle Bilder (sie liegen rechts der Linse). Die vor dem Brennpunkt liegenden Punkte ergeben virtuelle Bilder (sie befinden sich links der Linse). In dem Maße, wie sich die ausgewählten Punkte an den Brennpunkt annähern, wird sich die Abbildung ins Unendliche verschieben (nach links oder nach rechts).

Autor: Hervorragend. Das Bild des betrachteten Gegenstandes besteht also aus zwei Teilen (links und rechts der Linse), von denen jeder in einem bestimmten endlichen Abstand von der Linse beginnt und sich bis ins Unendliche erstreckt. Wie Sie sehen, kann ein Gegenstand gleichzeitig sowohl ein virtuelles als auch ein reelles Bild haben.

Ich sehe, die Konstruktionsmethode von Bildern bei Abbildungen durch Linsen haben Sie wirklich gut verstanden. Wir gehen deshalb zu einer schwierigeren Aufgabe, der Bildkonstruktion bei einem System aus zwei Linsen, über. Wir betrachten folgende Aufgabe:

Gegeben seien zwei Sammellinsen auf einer gemeinsamen optischen Achse mit unterschiedlichen Brennweiten. Zu konstruieren ist für dieses optische System das Bild eines vertikalen Pfeils (Bild 180a). *In der Zeichnung sind die Brennpunkte der einen Linse durch Kreuze, die Brennpunkte der anderen durch Kreise gekennzeichnet.*

Leser B: Um das Bild des Pfeils in dem aus zwei Linsen bestehenden System zu konstruieren, muß man zunächst das von der ersten Linse erzeugte Bild konstruieren. Dabei braucht man die zweite Linse nicht zu beachten. Dann wird dieses Bild als Gegenstand angesehen und unter Nichtbeachtung der ersten Linse durch die zweite Linse abgebildet.

Autor: Hier haben Sie einen ganz charakteristischen Fehler gemacht. Wir stoßen oft auf eine ähnliche Antwort. Sie ist falsch. Wir betrachten zwei Strahlen, die von der Pfeilspitze ausgehen, und verfolgen für sie den Gang durch das gegebene Linsensystem (Bild 180b). Der Strahlenverlauf nach der ersten Linse läßt sich eihfach bestimmen. Für den Strahlenverlauf nach der zweiten Linse benötigen wir Hilfsstrahlen, die zu den von der ersten Linse kommenden Strahlen parallel sind und die durch den Linsenmittelpunkt der zweiten Linse verlaufen. Wir wenden dabei die Methode vom vorangegangenen Beispiel an: parallele Strahlen müssen sich nach dem Durchgang durch die Linse in der Brennebene schneiden.

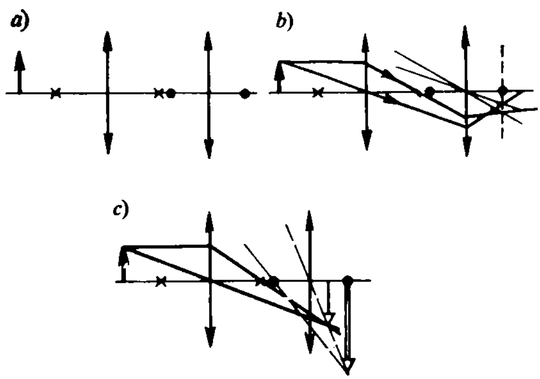


Bild 180

Im Schnittpunkt der Strahlen hinter der zweiten Linse befindet sich dann das gesuchte Bild der Pfeilspitze. Alle Konstruktionen sind in Bild 180b angegeben. Nun schauen Sie sich an, welches Resultat wir erhalten hätten, wenn wir Ihrem Vorschlag gefolgt wären. Die Konstruktion ist in Bild 180c durchgeführt. Hier ist mit ausgezogenen Linien die Konstruktion des Bildes bezüglich der ersten Linse dargestellt, mit gestrichelten Linien wurde dieses Bild durch die zweite Linse abgebildet. Sie erkennen, daß wir jetzt ein völlig anderes Ergebnis erhalten, und zwar ein falsches.

Leser B: Aber ich erinnere mich gut, daß wir einmal ein Bild, gerade mit dieser Methode, von der ich gesprochen habe, konstruiert haben.

Autor: Es ist möglich, daß Sie so etwas konstruiert haben. Das liegt daran, daß sich Ihr Konstruktionsverfahren in einzelnen Fällen als richtig erweist, weil es zu den gleichen Ergebnissen führen kann, die mit den Ergebnissen meiner Methode übereinstimmen. Man kann das an dem genannten Beispiel demonstrieren, wenn man den Pfeil näher an die erste Linse, hinter ihren Brennpunkt, bringt. In Bild 181a ist die Konstruktion nach meiner Methode durchgeführt,

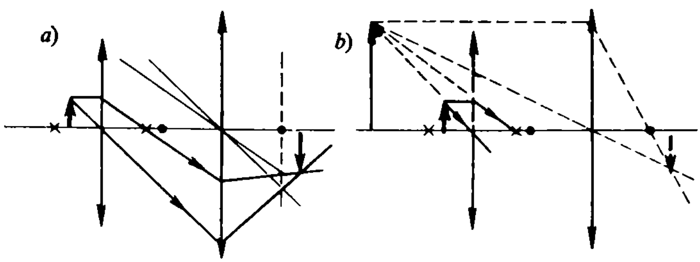


Bild 181

in Bild 181b aber nach Ihrem Verfahren. Wie Sie sehen, stimmen hier die Ergebnisse überein.

Leser B: Aber woher wissen Sie, für welche Fälle man gerade meine Konstruktionsmethode für ein Bild anwenden darf?

Autor: Es ist nicht schwer, die Bedingungen der Anwendbarkeit Ihrer Methode für zwei Linsen zu formulieren. Bei einer großen Anzahl von Linsen werden diese Bedingungen komplizierter. Deshalb ist es nicht notwendig, sie zu behandeln. Wenden Sie immer meine Methode an, und alles ist in Ordnung. Abschließend möchte ich noch eine Frage stellen: Kann eine bikonkave Linse eine Sammellinse sein?

Leser B: Ich kenne diese Frage. Eine Bikonkavlinse ist unter gewöhnlichen Bedingungen eine Zerstreuungslinse. Sie wird aber zu einer Sammellinse, wenn sie in einem Stoff mit größerer Brechzahl als der des Linsenmaterials eingelagert wird. Unter den gleichen Bedingungen wird eine Bikonvexlinse zur Zerstreuungslinse.

42. Wie gut lösen Sie Aufgaben mit Spiegeln und Linsen?

Autor: Ich möchte einige verallgemeinernde Bemerkungen machen. Sie erweisen sich bei der Lösung verschiedener Aufgaben als recht nützlich. Das betrifft insbesondere Aufgaben zu Linsen und sphärischen (konkaven und konvexen) Spiegeln. Die Formeln, die zur Lösung dieser Aufgaben angewendet werden, unterteilen sich in zwei Gruppen. Zur ersten Gruppe gehören diejenigen Formeln, die die Linsenbrennweite (oder Spiegelbrennweite) f, die Gegenstandsweite (Abstand: Gegenstand — Linse oder Spiegel) s und die Bildweite (Abstand: Bild — Linse oder Spiegel) s' miteinander verbinden:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}\,. \tag{227}$$

s, s' und f sind als algebraische Größen zu betrachten, deren Vorzeichen in den verschiedenen Fällen unterschiedlich sein können. Es sind insgesamt drei Fälle möglich; sie sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt:

Sammellinsen und konkave Spiegel	
$s>f$	$s<f$
1. $s>0$, $f>0$, $s'>0$, reelles Bild	2. $s>0$, $f>0$, $s'<0$, virtuelles Bild
Zerstreuungslinsen und konvexe Spiegel	
3. $s>0$, $f<0$, $s'<0$, virtuelles Bild	

Daher ist s immer positiv; die Brennweite ist für Sammellinsen und Konkavspiegel positiv, für Zerstreuungslinsen und Konvexspiegel negativ. Die Bildweite s' ist für reelle Bilder positiv und für virtuelle Bilder negativ.

Leser A: Wenn ich Sie richtig verstanden habe, so kann man mit Hilfe dieser Tabelle aus der allgemeinen

Formel (227) drei Formeln gewinnen, die die arithmetischen Werte obiger Größen enthalten:
1. Fall:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f},$$

2. Fall:

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}, \tag{228}$$

3. Fall:

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=-\frac{1}{f}.$$

Autor: Ja, Sie haben das richtig verstanden.

Leser A: Meine Aufmerksamkeit habe ich niemals auf die Analogie zwischen Linsen und sphärischen Spiegeln gerichtet.

Autor: Zur zweiten Gruppe gehören die Formeln, die die Linsenbrennweite (Spiegelbrennweite) mit den übrigen charakteristischen Größen verbinden. Bei einem Spiegel haben wir die einfache Beziehung

$$f=\pm\frac{R}{2}, \tag{229}$$

wobei R der Krümmungsradius des Spiegels ist; das Vorzeichen „+" gehört zu Konkavspiegeln (wir nennen diesen Brennpunkt positiv), das Vorzeichen „—" gehört zu Konvexspiegeln (deren Brennpunkt nennen wir negativ). **Für Linsen** haben wir

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{230}$$

wobei n die Brechzahl des Linsenmaterials ist, R_1 und R_2 sind die Krümmungsradien der Linse. Gehört der Linsenradius R zur konvexen Seite der Linse, so erhält er das positive Vorzeichen, gehört R zur konkaven Seite, erhält er das negative Vorzeichen. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß bikonvexe, plankonvexe und einige konvexkonkave Linsen Sammellinsen sind, da sie nach Formel (230) eine positive Brennweite haben.

Leser A: Aber wie sieht Formel (230) aus, wenn die Linse in einen Stoff mit der Brechzahl n_0 gebracht wird?

Autor: In diesem Fall gilt an Stelle der Formel (230)

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_0} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{231}$$

Wenn man vom Fall eines optisch weniger dichten Stoffes ($n_0 < n$) zum Fall eines optisch dichteren Stoffes ($n_0 > n$) übergeht, so ändert sich nach Gl. (231) das Vorzeichen der Brennweite; daher wird

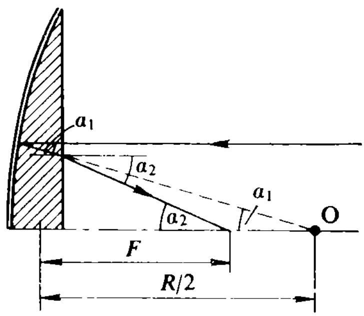


Bild 182

aus einer Sammellinse eine Zerstreuungslinse und umgekehrt aus einer Zerstreuungslinse eine Sammellinse.

Wir gehen zu einer konkreten Aufgabe über. *Die konvexe Seite einer Plankonvexlinse mit dem Krümmungsradius R und der Brechzahl n wird versilbert. Dadurch erhält man einen eigentümlichen Konkavspiegel. Gesucht ist die Brennweite dieses Spiegels.*

Leser A: Gestatten Sie mir die Lösung. Wir lenken einen Strahl parallel zur optischen Achse auf die Linse. Nach seiner Reflexion an der versilberten Linsenfläche tritt er aus der Linse aus, wobei eine Brechung erfolgt (Bild 182). Würde der Strahl nicht gebrochen, so würde er die Hauptachse im Abstand $R/2$ vom Spiegel nach Gl. (229) schneiden. Wegen der Brechung liegt dieser Schnittpunkt aber näher am Spiegel. Wir bezeichnen die gesuchte Brennweite mit f. Dem Bild entnimmt man

$(R/2) \tan \alpha_1 = f \tan \alpha_2$.

Wegen der Kleinheit der Winkel darf man Formel (223) anwenden, und man erhält

$$\frac{R}{2f} = \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} \approx \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = n.$$

Hieraus finden wir

$$f = \frac{R}{2n}. \tag{232}$$

Leser B: Ich schlage vor, diese Aufgabe anders zu lösen. Es ist bekannt, wenn zwei Systeme mit den Brennweiten f_1 und f_2 vereinigt werden, daß dann die Brennweite f des Gesamtsystems durch Addition der reziproken Brennweiten aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{233}$$

folgt. Im vorliegenden Fall hat man eine Linse mit der Brennweite $f_1 = R/(n - 1)$ entsprechend der Relation (230), da einer der Radien unendlich gesetzt werden muß; andererseits hat man einen Spiegel (Konkavspiegel), für den $f_2 = R/2$ ist. Wir setzen diese Werte in Gl. (233) ein und erhalten

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R} + \frac{2}{R} \tag{234}$$

und schließlich

$$f = \frac{R}{n+1}. \tag{235}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß Leser A die Aufgabe nicht richtig gelöst hat [siehe sein Ergebnis (232)].

Autor (zum Leser B): Nein, gerade Sie haben einen Fehler gemacht. Das Ergebnis (232) ist richtig.

Leser B: Aber ist denn für den gegebenen Fall die Regel (233) falsch?

Autor: Die Regel ist richtig und im gegebenen Fall auch anwendbar.

Leser B: Aber wenn (233) richtig ist, so ist auch (234) richtig.

Autor: Gerade hier haben Sie nicht recht. Bedenken Sie, daß in der Aufgabe der Strahl die Linse zweimal durchsetzt (hin und zurück). Sie müssen deshalb die reziproken Brennweiten des Spiegels und der beiden (!) Linsen addieren. An Stelle des Ausdrucks (234) muß man

$$\frac{1}{f} = 2\,\frac{n-1}{R} + \frac{2}{R}$$

aufschreiben, woraus wir $(1/f) = (2n - 2 + 2)/R$, also $f = \frac{R}{2n}$ finden. Das ist genau das Ergebnis (232).

Untersuchen wir noch eine andere Aufgabe. *Eine Sammellinse bildet einen Gegenstand vierfach vergrößert ab. Wird der Gegenstand um 5 cm verschoben, so verringert sich die Vergrößerung auf die Hälfte. Es ist die Brennweite der Linse zu ermitteln.*

Leser A: Bei solchen Aufgaben gerate ich immer in Widersprüche. Man muß den Strahlenverlauf für die erste und dann für die zweite Lage aufzeichnen und Vergleiche durchführen.

Autor: Ich bin der Meinung, daß man im gegebenen Fall den Strahlenverlauf nicht aufzuzeichnen braucht. Gemäß Formel (227) gilt für die erste Lage $(1/f) = (1/s_1) + (1/s_1')$. Unter Berücksichtigung, daß $(s_1'/s_1) = k_1$ die Vergrößerung in der ersten Lage ist, erhalten wir

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{k_1 s_1} = \frac{k_1+1}{k_1 s_1}$$

oder

$$s_1 = f\,\frac{k_1+1}{k_1}.$$

Analog erhalten wir für die zweite Lage

$$s_2 = f\,\frac{k_2+1}{k_2}.$$

Damit finden wir

$$s_2 - s_1 = f\,\frac{k_1-k_2}{k_1 k_2}. \tag{236}$$

Entsprechend den Bedingungen der Aufgabe ist $s_2 - s_1 = 5$ cm, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$. Einsetzen dieser Zahlenwerte in Gl. (236) ergibt, daß $f = 20$ cm ist.

Aufgaben

126. Eine Linse mit der Brennweite $|f| = 30$ cm ergibt eine k_1-mal ($k_1 = 1{,}5$) verkleinerte virtuelle Abbildung eines Gegenstandes. Handelt es sich um eine Sammel- oder um eine Zerstreuungslinse? Wo befindet sich der Gegenstand? Wo und in welcher Größe (k_2) entsteht das Bild des Gegenstandes, wenn die Linse um $l = 20$ cm vom Gegenstand weiter entfernt wird?

127. Ein leuchtender Punkt befindet sich auf der Achse eines Konkavspiegels, dessen Krümmungsradius $R = 50$ cm beträgt, in einem Abstand von $d = 15$ cm vom Spiegel. Wo

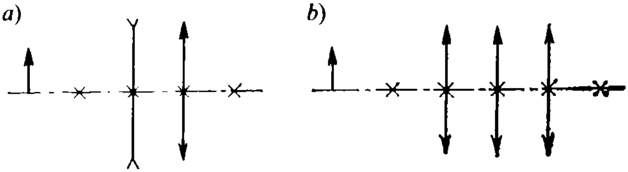


Bild 183

liegt das Bild des Punktes? Was geschieht mit dem Bild, wenn der Spiegel um weitere 15 cm von dem leuchtenden Punkt entfernt wird?

128. Ein optisches System besteht aus einer Zerstreuungs- und einer Sammellinse (Bild 183a; die Kreuze kennzeichnen die Brennweiten der Linsen). Die Brennweite jeder Linse beträgt $|f| = 40$ cm. In der doppelten Brennweite befindet sich vor der Zerstreuungslinse ein Gegenstand. Das durch das Linsensystem gelieferte Bild ist zu konstruieren und seine Lage zu berechnen.

129. Ein optisches System besteht aus drei gleichen Sammellinsen mit den Brennweiten $f = 30$ cm, die so verteilt sind, wie es Bild 183b zeigt. Der Gegenstand befindet sich in einem Abstand von $s = 60$ cm von einer äußeren Linse entfernt. Wo entsteht das Bild des Gegenstandes?

130. Die konvexe Seite einer plankonvexen Linse mit dem Krümmungsradius $R = 60$ cm ist versilbert. Dadurch erhält man einen eigentümlichen Konkavspiegel. Vor ihm befindet sich in einem Abstand von $s = 25$ cm ein Gegenstand. Es ist die Bildweite s' bis zum Spiegel und die Vergrößerung k zu berechnen, wenn die Brechzahl des Linsenmaterials $n = 1{,}5$ ist.

131. Die konkave Seite einer plankonkaven Linse mit dem Krümmungsradius $R = 50$ cm ist versilbert. Dadurch erhält man

einen eigentümlichen Konvexspiegel. Vor diesem Spiegel befindet sich in einem Abstand von $s = 10$ cm ein Gegenstand. Gesucht ist die Bildweite s' und die Vergrößerung k bei einer Brechzahl des Linsenmaterials von $n = 1{,}5$.

43. Am Beispiel der Erhaltungssätze versuchen wir, weiter zu denken

Autor: Bisher haben wir die Physik so behandelt, wie sie sich aus ihrer Untergliederung in Teilgebiete ergibt. Von der Mechanik gingen wir zur Hydrostatik, dann zu den Wärme- und Gasgesetzen über. Dann folgten Elektirizität, Magnetismus und schließlich Optik. In jedem Gebiet untersuchten wir dessen spezifische physikalische Größen und Gesetze. Jetzt aber versuchen wir, uns auf einen allgemeineren Standpunkt zu stellen und über die Wände, die die einzelnen Gebiete voneinander trennen, zu steigen. Anders ausgedrückt, wir werden versuchen, weiter zu denken. Als Thema für unsere Diskussion wählen wir die Erhaltungssätze aus. Welche Erhaltungssätze kennen Sie?

Leser A: Den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz.

Leser B: Es gibt noch einen Erhaltungssatz für die Ladung. Außerdem gibt es noch das Gesetz von der Erhaltung der Masse; aber dieses Gesetz könnte im Energieerhaltungssatz einbezogen sein, da wegen $E = mc^2$ Masse und Energie einander äquivalent sind.

Autor: Es begegnet mir bei weitem nicht zum ersten Mal, daß die Prüflinge nichts von der Existenz eines weiteren wichtigen Erhaltungssatzes, des Drehimpulserhaltungssatzes, wissen.

Leser A: Ich kenne das Kraft- bzw. Drehmoment. Aber vom Drehimpuls wurde uns niemals etwas gesagt.

Autor: Am einfachsten ist es, den Begriff des Drehimpulses an folgendem einfachem Beispiel zu erklären: ein Massenpunkt m bewege sich gleichförmig auf einer Kreisbahn vom Radius r mit einer bestimmten Geschwindigkeit v. Wir führen den Vektor $\vec{r}$ ein, der, beginnend im Kreismittelpunkt, zum Massenpunkt m zeigt und dort endet. Dann gilt für den Drehimpuls $\vec{L}$ des Massenpunktes

$$\vec{L} = \vec{m}\ (\vec{r} \times \vec{v}). \qquad (237)$$

Hier wird das Vektorprodukt, mit dem wir uns bei der Behandlung des Magnetismus bekannt gemacht haben, benutzt. Aus der Definition (237) ist ersichtlich, daß der Vektor $\vec{L}$ auf der Ebene der Kreisbahn senkrecht steht und für seinen Betrag die einfache Beziehung $L = mvr$ gilt. Wenn an Stelle des Massenpunktes irgendein realer Körper auf der Kreisbahn umläuft, so ist es erforderlich, den Ausdruck (237) durch einen komplizierteren zu ersetzen. Der neue Ausdruck muß die Tatsache widerspiegeln, daß verschiedene Massen„elemente" des Gegenstandes sich mit unterschiedlichen Bahngeschwindigkeiten in verschiedenen Abständen von der Drehachse bewegen. Trotzdem erlaubt schon der einfache Ausdruck (237), einige interessante Schlußfolgerungen zu ziehen, die sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz ergeben. Als erstes erkennt man aus (237), daß die Richtung des Vektors $\vec{L}$ mit der Richtung der Drehachse übereinstimmen muß. Folglich **bedeutet der Drehimpulserhaltungssatz insbesondere die Erhaltung der räumlichen Orientierung der Drehimpulsachse des rotierenden Körpers.** Dieser Sachverhalt wird bei den verschiedenen Arten von Brummkreiseln und Gyroskopen ausgenutzt. Als zweites **fordert der Drehimpulserhaltungssatz bei einer Änderung der Verteilung der einzelnen „Elemente" des Körpers bezüglich der Drehachse eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit** ω. Zurückgreifend auf Gl. (237), errechnen wir, daß $L = mvr = m\omega^2 r$ ist. Hieraus wird deutlich, daß die Winkelgeschwindigkeit anwachsen muß, wenn durch irgendeine Ursache — die selbstverständlich keine äußere Einwirkung sein darf, da dann die „Abgeschlossenheit" des Systems verletzt wäre — die Masse m näher an das Zentrum der Kreisbahn gebracht wird. Damit hängt auch die aus dem Bereich des Eiskunstlaufens gut bekannte Tatsache zusammen, daß die Winkelgeschwindigkeit einer sich drehenden Eiskunstläuferin sofort anwächst, wenn sie die Arme dicht an den Körper drückt. Demgegenüber verringert sich die Winkelgeschwindigkeit, wenn die Eiskunstläuferin ihre Arme seitlich ausstreckt.

Leser B: Das zeigt, daß wir mit dem Drehimpulserhaltungssatz schon lange vertraut sind. Von Kindheit an kennen wir den Brummkreisel und das Eiskunstlaufen.

Autor: Man kann sich hier an den Moliereschen Bürger Jourdain erinnern, der ausrief: „Da sieh mal einer! Seit mehr als vierzig Jahren rede ich nun schon Prosa, ohne daß ich's ahnte!"

Weiter schlage ich vor, über folgende Frage nachzudenken: Warum heißen die Erhaltungssätze oft Fundamentalgesetze?

Leser A: Weil sie immer erfüllt sind.

Leser B: Weil ihr Anwendbarkeitsbereich breit ist.

Autor: Die erste Antwort erklärt nichts. Die zweite Antwort ist besser. Sie sollten, nebenbei gesagt, darüber nachdenken, wo und warum in unseren bisherigen Diskussionen Energie- und Impulserhaltungssatz angewendet worden ist.

Leser B: Besonders diskutierten wir diese Sätze in der Mechanik. Später, wie man sich erinnert, sprachen wir über einen möglichen Zugang zum Archimedischen Gesetz auf der Basis „energetischer Überlegungen", das heißt auf der Grundlage des Energieerhaltungssatzes. Ich erinnere mich auch, wie wir bei der Betrachtung von Stromelementen das Gesetz der Impulserhaltung zur Schlußfolgerung über die Ausstrahlung von elektromagnetischen Wellen benutzten. Außerdem wurde der Energieerhaltungssatz zur Begründung der Lenzschen Regel herangezogen.

Autor: Ich glaube, daß die angeführten Beispiele die Möglichkeit bieten, die Fundamentalität der Erhaltungssätze zu verstehen. Dieser Fundamentalität der Mehrzahl der Erhaltungssätze liegt eine Ihnen offenbar nicht bekannte klare und strenge Eigenschaft zugrunde. Ich nenne Ihnen drei Erhaltungssätze: **Energie-, Impuls-, Drehimpulserhaltungssatz.**

Ihre Bedeutung liegt darin, daß diese Erhaltungssätze Folgerungen aus bestimmten Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit sind.

Wir unterhalten uns zunächst über die Zeit. Sie können sich sicherlich gut vorstellen, daß alle Zeitpunkte physikalisch gleichberechtigt sind: Jeder Zeitpunkt kann gleichberechtigt als Anfangszeitpunkt gewählt werden, also als Beginn der Zeitzählung (wenn man gewisse, rein praktische Erwägungen nicht berücksichtigt). Diesen oder einen anderen bei der Untersuchung eines physikalischen Sachverhaltes ausgewählten Beginn der Zeitzählung können wir auf der Zeitachse frei verschieben. Dabei wird sich nichts verändern (das wird sich nicht auf den Ablauf der betrachteten physikalischen Erscheinungen auswirken). Die Zeit ist bezüglich einer Verschiebung symmetrisch. Mit anderen Worten sagen wir, die Zeit ist homogen.

Sie sollen sich folgendes einprägen: Eine direkte Schlußfolgerung aus der Homogenität der Zeit ist der Energieerhaltungssatz. Gerade hierin liegt seine tiefe Begründung. Es ist klar, daß jeder, der die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes anzweifelt, sich an der fundamentalen Tatsache, der Homogenität der Zeit, „vergreift".

Leser B: Aber wie ist das zu zeigen?

Autor: Im Rahmen der Elementarphysik ist das nicht zu zeigen. Wir beschränken uns deshalb hier auf die Feststellung, daß zwischen der Homogenität der Zeit und der Energieerhaltung eine enge Beziehung besteht. Versuchen Sie, unter Ausnutzung dieser Tatsache zu sagen, was Energie ist.

Leser B: Ich versuche es: **Die Energie ist eine physikalische Größe, deren Erhaltung aus der Homogenität der Zeit geschlußfolgert wird.**

Autor: Richtig. Wir kommen jetzt zum Raum. Alle Punkte des Raumes sind physikalisch gleichberechtigt. Jeder Raumpunkt kann als Koordinatenursprung ausgewählt werden (wenn wiederum rein praktischen Erwägungen keine Aufmerksamkeit geschenkt wird). Die Verschiebung des Ursprungspunktes ist für den physikalischen Vorgang ohne Bedeutung. Der Raum ist bezüglich Translationen symmetrisch. Anders ausgedrückt, der Raum ist homogen. Als direkte Schlußfolgerung ergibt sich aus der Homogenität des Raumes der Impulserhaltungssatz. Merken Sie sich dabei, daß die Zeit eindimensional und der Raum dreidimensional ist. Die Dreidimensionalität des Raumes (drei linear unabhängige Verschiebungen) bedingt den Vektorcharakter des Impulserhaltungssatzes.

Leser B: Folglich **ist der Impuls eine physikalische Größe, deren Erhaltung aus der Homogenität des Raumes folgert.**

Leser A: Meiner Meinung nach ist der Impuls einfacher als Produkt aus Masse und Geschwindigkeit zu definieren, wie wir es früher hatten.

Autor: Eine derartige Definition ist sehr speziell. Wir klären das im folgenden. Zuvor besprechen wir aber noch eine aus der Symmetrie des Raumes resultierende Eigenschaft: Der Raum ist nicht nur homogen, er ist auch isotrop. Das heißt, der Raum ist symmetrisch bezüglich einer Drehung. Damit sind alle Richtungen im Raum physikalisch gleichberechtigt. Die direkte Schlußfolgerung aus der Isotropie des Raumes ist die Erhaltung des Drehimpulses; es ist leicht einzusehen, daß der Drehimpulserhaltungssatz ebenfalls vektoriellen Charakter haben muß.

Somit sind einerseits die Homogenität der Zeit, die Homogenität des Raumes und die Isotropie des Raumes fundamentale Eigenschaften der Symmetrie von Raum und Zeit. Andererseits sind die Gesetze der Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls fundamentale physikalische Gesetze.

Leser B: Offen und ehrlich gesagt, habe ich niemals etwas von solchen schönen Zusammenhängen gehört. Die Fundamentalität der Erhaltungssätze wird so wirklich verständlich.

Autor: Gehen wir weiter. Wir können das Auftreten von mindestens drei fundamentalen physikalischen Größen schlußfolgern: Energie, Impuls und Drehimpuls. Anders gesagt, wir können damit rechnen, daß die genannten Größen bei der Untersuchung der verschiedensten physikalischen Erscheinungen aus den unterschiedlichsten Bereichen gelten. Diese physikalischen Größen haben immer und überall einen

Sinn. Sie lassen sich dabei in verschiedenen Situationen auf unterschiedliche Art und Weise durch Größen ausdrücken. Dabei haben viele von ihnen nur in der einen oder anderen konkreten Situation einen Sinn. Als Beispiel gebe ich Ihnen verschiedene Formeln für den Impuls $\vec{p}$ an:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \tag{238}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \tag{239}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{H}), \tag{240}$$

$$\vec{p} = \vec{n}\hbar\omega/c. \tag{241}$$

Hier sind die Ausdrücke für den Impuls eines Körpers in der Newtonschen Mechanik (238), eines Körpers in der relativistischen Mechanik (239), der Volumeneinheit einer elektromagnetischen Welle (240) und des Quants der elektromagnetischen Strahlung, eines Photons (241), angeführt. In (239) bedeutet m die Ruhmasse des Körpers. c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit, $\vec{E}$ und $\vec{H}$ in (240) sind elekrische und magnetische Feldstärke der Welle, $\vec{n}$ bedeutet in (241) einen Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung und ω die Kreisfrequenz der Strahlung. Speziell ist zu bemerken, daß $\hbar$ eine der universellen physikalischen Konstanten ist ($\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws^2}$), die bei der Untersuchung der Erscheinungen in der Mikrowelt (in der Quantenphysik) auftritt; sie heißt Plancksche Konstante.

So, nun ergötzen Sie sich daran, in welchen „Verkleidungen" der Impuls $\vec{p}$ vor Ihnen auftritt.

Leser A: Ich habe begriffen, daß das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eine spezielle Definition des Impulses ist.

Autor: Richtig. Dennoch kann man diese spezielle Definition auf den Fall, den Formel (239) beschreibt, ausdehnen. Sehen Sie her:

$$\vec{p} = m(v)\,\vec{v} \text{ mit } m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{242}$$

Wie Sie sehen, muß man dazu einfach verstehen, daß **die Masse eines Körpers von dessen Geschwindigkeit abhängt.**

Leser B: So, glaube ich, wird auch in der Relativitätstheorie verfahren.

Autor: So macht man es tatsächlich. Aber nun versuchen Sie, Gl. (238) auf die übrigen Fälle zu erweitern, wenn die Begriffe Masse und Geschwindigkeit nicht „funktionieren".

Leser B: Aber die Geschwindigkeit des Photons ist gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Autor: Erstens muß man sich merken, daß die Geschwindigkeit eine bestimmte kinematische Größe ist, die sich ändern kann. Zweitens hat das Photon keine Ruhmasse. Damit nützt Ihnen weder Formel (238) noch Formel (239) irgend etwas zur Beschreibung des Impulses des Photons. Andere Mikroteilchen, zum Beispiel das Elektron, haben eine Ruhmasse. Jedoch ist für diese der Begriff der Geschwindigkeit strenggenommen nicht anwendbar.

Leser A: Aber erlauben Sie, in verschiedenen Büchern (und sogar bei unseren Gesprächen) trifft man auf den Begriff „Geschwindigkeit des Elektrons".

Autor: Und trotz alledem hat **die physikalische Größe „Geschwindigkeit eines Mikroteilchens" in der Quantenmechanik strenggenommen keinen Sinn.** Ihre Anwendung ist nicht gerechtfertigt. (Man müßte überall „Geschwindigkeit des Elektrons" durch „Impuls des Elektrons, dividiert durch dessen Masse", ersetzen.) Im Fall der freien Bewegung des Elektrons kann man aber dieses oft gewissermaßen als klassisches Teilchen ansehen und im Rahmen dieser Näherung den Begriff Geschwindigkeit verwenden. Befindet sich das Elektron jedoch in einem gebundenen Zustand — wie das Elektron im Atom —, so geht die Analogie zum klassischen Teilchen verloren, und der Begriff der Geschwindigkeit des Elektrons wird unzulässig.

Leser B: Und wie würde das mit dem Begriff „Elektronengeschwindigkeit auf der Umlaufbahn im Atom" werden? Ich meine hier das Atommodell von Bohr.

Autor: Dieses Modell stellte für die Atomphysik und ihre Entwicklung eine gewisse Anfangsetappe dar.

Später wurde deutlich, daß es im Atom keine Umlaufbahnen gibt, und man darf folglich auch nicht von der Geschwindigkeit des Elektrons auf der einen oder anderen Bahn sprechen. Eine Umlaufbahn ist eine bestimmte Bahnkurve, aber die Bewegung auf einer Bahnkurve ist eine für die klassische Physik spezifische Bewegung. In der Quantenmechanik (mit Ausnahme der Fälle, in denen sich das Mikroteilchen frei bewegt) existiert keine Bahnkurve.
Im übrigen werden wir uns nicht in das Gebiet der Quantenmechanik vertiefen. Das ist ein besonderes Thema.

Leser A: Bedeutet das, der Begriff „Geschwindigkeit des Elektrons“ ist sinnlos, während der „Impuls des Elektrons“ eine reale physikalische Größe ist?

Autor: Genau so ist es. **Der Charakter der Bewegung in der Mikrowelt unterscheidet sich bedeutend von der uns gewohnten Bewegung auf einer Bahnkurve in der Newtonschen Mechanik. Es ist daher nicht verwunderlich, daß in der Mikrowelt die uns vertrauten kinematischen Begriffe, wie zum Beispiel Geschwindigkeit und Beschleunigung, nicht anwendbar sind. Aber der Impuls hängt, wie wir festgestellt haben, eng mit der Homogenität des Raumes zusammen, d. h. mit einem fundamentalen Sachverhalt. Er tritt daher sowohl in der Makro- als auch in der Mikrophysik auf.**

Leser B: Ich habe Sie verstanden. Ich gebe zu, daß für mich früher die Begriffe Impuls und Geschwindigkeit fast analoge Begriffe gewesen sind.

Autor: Das ist ein verbreiteter psychologischer Effekt, der aus der Einfachheit des Ausdrucks (238) resultiert. Wie Sie sich vergewissern können, **sind die Begriffe Impuls und Geschwindigkeit völlig verschieden.** Ich empfehle, die einfachsten — der Newtonschen Mechanik entsprechenden — Ausdrücke für alle drei Erhaltungsgrößen zu betrachten:

$$E = \frac{m}{2} v^2; \quad \vec{p} = m\vec{v}; \quad \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \tag{243}$$

Hieraus kann man

$$E = \frac{p^2}{2m}; \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{244}$$

erhalten. Was bedeutet das Ihrer Meinung nach?

Leser B: Das bedeutet, daß man die Energie und den Drehimpuls durch den Impuls ausdrücken kann.

Autor: Und was folgt weiter?

Leser B: Weiter folgt, daß, wenn der Impuls eine Erhaltungsgröße ist, auch Energie und Drehimpuls Erhaltungsgrößen sein müssen. Aber dann erhält man, daß diese Größen nicht voneinander unabhängig sind. Man erhält irgend etwas völlig Unsinniges: Die Homogenität der Zeit ergibt sich aus der Homogenität des Raumes.

Autor: Nun sehen Sie selbst, daß Sie in eine Sackgasse geraten sind. Hier gelingt es, den Irrtum vieler Prüflinge aufzudecken, die nicht einsehen wollen, daß die Erhaltungssätze von Energie und Impuls als voneinander unabhängige, selbständige Gesetze zu betrachten sind. Ich muß bemerken, daß bei den Prüflingen der Energieerhaltungssatz eine hohe Achtung genießt, der Impulserhaltungssatz ist aber unbewußt auf einen nebensächlichen, untergeordneten Platz zurückgedrängt worden. (Über den Drehimpulserhaltungssatz habe ich noch nichts gesagt.)

Leser A: Ließe sich das daraus erklären, daß der Impulserhaltungssatz aus den Newtonschen Gesetzen folgt?

Autor: Das ist schon möglich. Man beachtet dabei aber nicht, daß die Newtonschen Gesetze Gesetze der klassischen Mechanik sind. Sie gelten nicht in der Mikrophysik.

Leser B: Aber wie verhält es sich denn nun mit dem Ergebnis (244)?

Autor: Vor allem ergibt sich aus (244) keineswegs Ihre Schlußfolgerung, daß die Energieerhaltung eine Folge der Impulserhaltung ist. Wir betrachten das einfachste Beispiel, den elastischen Stoß zweier Körper gleicher Masse. Die Impulserhaltung bedeutet die Erhaltung des Vektors $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, wobei die Indizes die entsprechenden Körper kennzeichnen. Die Energieerhaltung verlangt die Konstanz der Größe $E_1 + E_2$ oder anders ausgedrückt, die Erhaltung der Größe $p_1^2 + p_2^2$. Es ist leicht einzusehen, daß aus der Erhaltung von $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ durchaus nicht die Erhaltung von $p_1^2 + p_2^2$ folgt. Außerdem muß man sich merken, daß das Ergebnis (244) nur ein begrenztes Anwendungsgebiet hat. Man kann es auf den Fall des sich frei bewegenden Mikroteilchens übertragen. Im Fall eines gebundenen Mikroteilchens ist jedoch das genannte Ergebnis prinzipiell unbrauchbar. Die Energie eines Elektrons im Atom läßt sich keineswegs durch den Impuls des Elektrons ausdrücken. Es ist wichtig, sich folgendes fest einzuprägen: **Die Gesetze der Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses sind vollkommen selbständige Gesetze.** Ich erinnere daran, daß ich diesen Sachverhalt schon am Beispiel einer Aufgabe für den nichtzentralen Stoß im Abschnitt 10 betont habe, wo eine Kugel nach dem Zusammenstoß mit einer geneigten Ebene vertikal nach oben reflektiert worden ist.

Leser B: Ich erinnere mich an diese Aufgabe. Wir haben eine interessante Schlußfolgerung gezogen: Beim Impulserhaltungssatz muß man die Erde in die Betrachtung einbeziehen; das ist aber nicht notwendig bei der Betrachtung der Energieerhaltung.

Autor: Sie haben recht. Es ist außerdem nützlich, auch an die Aufgaben zum elastischen Stoß von Kugeln, an die sogenannten „Billard-Aufgaben", zu denken. Was geschieht bei elastisch vorausgesetztem Stoß, wenn auf eine ruhende Kugel eine andere Kugel gleicher Masse auffliegt?

Leser B: Wenn es ein zentraler Stoß ist, beginnt die erste Kugel sich zu bewegen, die zweite bleibt in Ruhe. Ist der Stoß nichtzentral, dann fliegen die Kugeln so auseinander, daß ihre Bewegungsrichtungen einen rechten Winkel einschließen.

Autor: Das ist vollkommen richtig. Das Verhalten der Kugeln ist eine Folge der gemeinsamen Berücksichtigung von Energie- und Impulserhaltungssatz. Genaugenommen erledigen diese beiden Erhaltungssätze eigentlich die theoretische Vorbereitung eines Billard-Spielers. Der Rest besteht noch im Training zur Einübung zentraler und nichtzentraler Stöße.

Jetzt schlage ich vor, die „Billard-Aufgabe" auf eine völlig andere Situation, den sog. Compton-Effekt, zu übertragen.

Leser A: Von diesem Effekt habe ich noch nichts gehört.

Autor: Wir nehmen an, daß ein Bündel von Röntgenstrahlen einer festen Frequenz an den Atomen (punktförmig, Elektronen) eines Stoffes gestreut wird. Nach der klassischen Theorie muß die Streustrahlung die gleiche Frequenz wie die einfallende Strahlung haben. Jedoch zeigt das Experiment — und darin besteht das Wesen des Compton-Effektes —, daß die Frequenz der Streustrahlung kleiner

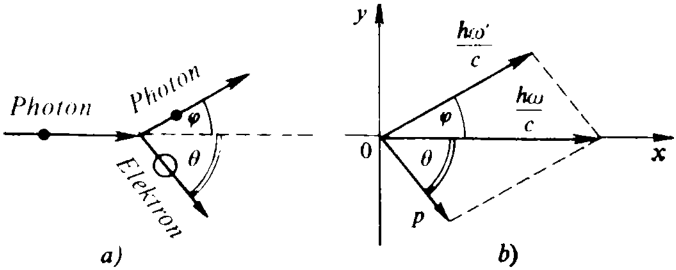


Bild 184

als die Frequenz der einfallenden Strahlung ist, wobei die Differenz der beiden Frequenzen vom Streuwinkel der Röntgenstrahlen abhängt.

Wir nehmen hier an, daß wir eine eigenartige „Billard-Aufgabe" vor uns haben. Wir stellen uns die Röntgenstrahlen als „Kugel"-Photonen und den Stoff als „Kugel"-Elektronen vor. Das „Kugel"-Photon stößt mit einer bestimmten Energie ($\hbar\omega$) und einem bestimmten Impuls ($\hbar\omega/c$) elastisch auf ein anfänglich ruhendes „Kugel"-Elektron. Beim Zusammenstoß „prallt" das Photon unter dem Winkel φ ab, wobei es jetzt die Energie $\hbar\omega'$ und den Impuls $\hbar\omega'/c$ hat. Das Elektron „prallt" unter dem Winkel ϑ ab und hat jetzt die Energie $p^2/2m$ und den Impuls p. Die zugehörige Skizze ist in Bild 184 gezeigt. Sie erinnert an das Bild, das in der klassischen Mechanik bei der Behandlung des Stoßes zweier elastischer Kugeln betrachtet worden ist.

Wir behandeln die Aufgabe quantitativ durch Anwenden des Energie- und des Impulserhaltungssatzes. $\Delta\omega = \omega - \omega'$ sei die Frequenzänderung. Der Energieerhaltungssatz lautet

$$\hbar\Delta\omega = p^2/2m. \tag{245}$$

Der Impulserhaltungssatz, auf die x-Achse projiziert (Bild 184b), hat die Form

$$\frac{\hbar\omega}{c} - \frac{\hbar(\omega - \Delta\omega)}{c} \cos\varphi = p \cos\vartheta. \tag{246}$$

Auf die y-Achse projiziert, lautet er

$$\frac{\hbar}{c}(\omega - \Delta\omega) \sin\varphi = p \sin\vartheta. \tag{247}$$

Wir quadrieren die Gleichungen (246) und (247) und addieren. Dann erhalten wir

$$(\omega - \Delta\omega)^2 + \omega^2 - 2\omega(\omega - \Delta\omega)\cos\varphi =$$
$$= p^2c^2\hbar^2.$$

Nun substituieren wir Gl. (245) und dividieren durch ω^2:

$$1 - \cos\varphi + \frac{\Delta\omega}{\omega}(\cos\varphi - 1) + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 = \frac{mc^2}{\hbar\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega}.$$

Da der Quotient $(\Delta\omega/\omega)^2$ sehr klein ist, darf man ihn vernachlässigen, so daß sich

$$\Delta\omega = 2\frac{\hbar\omega^2}{mc^2}\left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

oder

$$\frac{c\Delta\omega}{\omega(\omega - \Delta\omega)} = 2\frac{\hbar}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

ergibt. Unter Verwendung der gut bekannten Relation zwischen Frequenz ω und Wellenlänge λ ($\omega = 2\pi c/\lambda$) erhalten wir hieraus die Differenz der Wellenlängen zwischen einfallender Welle und Streuwelle:

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{248}$$

Für den Streuwinkel $\varphi = 90°$ ergibt sich $\Delta\lambda = 2\pi\hbar/mc = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m. Bemerkenswert ist, daß dieses Ergebnis quantitativ hervorragend mit dem Experiment übereinstimmt.

Leser A: Ich habe nie erwartet, daß die in der klassischen Mechanik eingeführten Erhaltungssätze so erfolgreich bei Problemen aus dem Gebiet der Atomphysik angewendet werden können. Falls ich alles richtig verstanden habe, sind hier nur Erhaltungssätze verwendet worden?

Autor: Praktisch ist das so, wenn man davon absieht, wie Energie und Impuls der „Kugel"-Photonen und „Kugel"-Elektronen ausgedrückt werden.

Leser A: Es zeigt sich, daß die Erhaltungssätze eine Art allmächtiger Gesetze sind.

Leser B: Mich bewegt eine Überlegung. Elektronen und Photonen sind doch keinesfalls Billardkugeln. Daher sind für sie die Gesetze der klassischen Mechanik nicht anwendbar. Meiner Meinung nach ist hier irgendeine Spekulation vorgenommen worden.

Autor: Also untersuchen wir das. Vor allen Dingen wollen wir Ihre Bemerkung bezüglich der Gesetze der klassischen Mechanik entkräften. Wir haben sie nicht verwendet. Wir haben die Erhaltungssätze benutzt, und diese gelten über die klassische Mechanik hinaus.

Leser B: Das ist natürlich so. Es widerstrebt mir aber, das Modell der Billardkugeln auf Photonen und Elektronen (insbesondere auf Photonen, die ja nicht einmal eine Ruhmasse haben) anzuwenden. Ich halte das für ungerechtfertigt.

Autor: Jetzt geht es um das Modell. Es ist in der Tat bei der Anwendung auf Mikroteilchen ein ganz grobes Modell. Es funktioniert hier aber ganz „genau". Sie fragten mich, warum? Das liegt daran, daß wir in dieser Aufgabe gar nicht viel klären wollten. Wir wollten wissen, wie sich die Wellenlänge der Strahlung bei der Streuung unter einem bestimmten Winkel ändert. Zur Beantwortung dieser Frage ist es nicht notwendig, den „Mechanismus" der Wechselwirkung von stoßenden Teilchen zu kennen. Würden wir aber beispielsweise wissen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Photon unter dem einen oder dem anderen Winkel φ gestreut wird, so wäre eine Berücksichtigung des Charakters der Wechselwirkung zwischen Photon und Elektron unumgänglich, dann müßte man die wirklichen physikalischen Eigenschaften der Mikroteilchen berücksichtigen. In diesem Fall würde die alleinige Benutzung der Erhaltungssätze nicht mehr ausreichen. (*Zum Leser A*): Jetzt haben Sie sicher eingesehen, daß Sie mit der „Allmächtigkeit" der Erhaltungssätze übertrieben haben. Die Erhaltungssätze sind natürlich nicht allmächtig, aber sie können vieles erklären. Bemerkenswert ist, daß sich der Wert dieser Gesetze nicht darauf beschränkt, vieles zu erklären. Denken Sie an alle unsere Erörterungen und versuchen Sie zu sagen, welche Bedeutung die Erhaltungssätze noch haben könnten.

Leser A: Sie erklären einige Aufgaben vollständig.

Autor: Das meine ich nicht. Denken Sie daran, wie sie von Ihnen gelöst wurden, und erinnern Sie sich an die Anwendung des Billardkugelmodells auf ein Elektron und ein Photon.

Leser B: Wahrscheinlich habe ich Sie verstanden. Bei der Anwendung der Erhaltungssätze ist die Spezifik eines physikalischen Systems in hohem Maße unwesentlich. Man kann beliebige Modelle zugrunde legen.

Autor: Genau so ist es. Ich möchte deshalb unser Gespräch mit einigen philosophischen Bemerkungen abschließen. Jede beliebige Erscheinung hat einen allgemeinen und einen konkreten Charakter. Das Allgemeine der Erscheinung bestimmt sich aus den Eigenschaften der Symmetrie des Raumes, der Zeit und der Erscheinung selbst. Das Konkrete bestimmt sich durch die Individualität der Erscheinung; man kann sagen, durch ihre „Asymmetrie". Zur Untersuchung des Allgemeinen in der Erscheinung muß man die Erhaltungssätze kennen; zur Betrachtung der Individualität braucht man eine konkrete Information über die vorliegende Erscheinung. Man muß „weiter" als bis zu den Erhaltungssätzen gehen. Es ist offensichtlich, daß es bei jeder beliebigen Erscheinung unumgänglich ist, zuerst alles, was die Erhaltungssätze geben können, an den Tag zu bringen und erst dann weiter zu gehen. Das ist der Grund, weshalb die Erhaltungssätze fundamentale Gesetze sind.

Antworten

1. Siehe Bild 185; a) $v_{\text{mit}} = 2$ m/s; b) $v_{\text{mit}} = 2$ m/s; $0 \leqq \tau \leqq$ $\leqq 2$ s, $\tau = 3$ s, 4 s $\leqq \tau \leqq 6$ s

2. $\mu = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \tan \alpha$

3. Siehe Bild 186

4. 20 m, 1 s, 10,2 m/s, 10,6 m/s

5. 11,3 m/s, $x = 4$ m, $y = 0{,}8$ m, $t = 0{,}5$ s, $v_A = 9{,}4$ m/s, $v_B =$ $= 15{,}2$ m/s

6. 1. $t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$;
   2. $t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}$

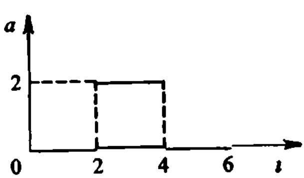


Bild 185

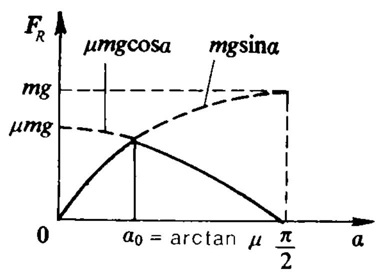


Bild 186

7. $T = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\dfrac{H+3h}{2g}}$; $\quad L = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(H - h +$ $+ \sqrt{H^2 + 2hH - 3h^2})$

8. $\alpha = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{F}{mg}\right)$

9. $\dfrac{2v_0^2}{g} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$

10. $v_0=\frac{L}{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\alpha-H+h)}}\approx 13{,}8$ m/s

11. $L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha-l\approx 6$ m

12. $h=H=19{,}6$ m; $s=3v_0\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}-l=20$ m

13. $\frac{v^2\sin 2\alpha}{g\cos\beta}(1+\tan\beta\cdot\tan\alpha)\approx 40$ m (Hier ist $\alpha=45°+\beta/2$ der Abflugwinkel des Steins.)

14. $v=\frac{F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)}{m}\cdot t\approx 37{,}2$ m/s;

$$W=\mu(mg-F\sin\alpha)\,\frac{F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)}{m}\cdot\frac{t^2}{2}\approx 1280\text{ J}$$

15. $a=\frac{F\cos\alpha-2\mu mg+\mu F\sin\alpha}{2m}\approx 2{,}6$ m/s², $T=\frac{F}{2}(\cos\alpha+$ $+\mu\sin\alpha)\approx 42$ N; $F_1=\frac{2\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 8{,}2$ N

16. $a=g/3\approx 3{,}3$ m/s², $T=(2/3)\,mg\approx 13$ N

17. $a=g\cdot\frac{m_3-(m_2+m_1)\sin\alpha}{m_1+m_2+m_3}\approx 3{,}5$ m/s²;

$$T_{32}=g\cdot\frac{m_3(m_1+m_2)(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2+m_3}\approx 50{,}4\text{ N};$$

$$T_{21}=g\cdot\frac{m_1m_3(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2+m_3}\approx 33{,}6\text{ N}$$

18. $a=g\cdot\frac{m_3+m_4+m_2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-\mu m_1}{m_1+m_2+m_3+m_4}\approx 6{,}9$ m/s²

(hier ist α der Winkel zwischen der geneigten Ebene und der Horizontalen);

$$T_{12}=g\cdot\frac{m_1(m_3+m_4)(1+\mu)+m_2m_1(\sin\alpha+\mu-\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2+m_3+m_4}\approx$$
$\approx 8{,}8$ N;

$$T_{23}=g\cdot\frac{(m_3+m_4)[m_1(\mu+1)+m_2(1-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]}{m_1+m_2+m_3+m_4}\approx$$
$\approx 16{,}2$ N;

$$f=gm_4\cdot\frac{m_2(1-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+m_1(1+\mu)}{m_1+m_2+m_3+m_4}=1{,}5\text{ N}$$

19. $a=\frac{g}{2}[(\sin\alpha-\sin\beta)-\mu(\cos\alpha+\cos\beta)]$; $T=\frac{1}{2}mg(\sin\alpha+$ $+\sin\beta+\mu\cos\beta-\mu\cos\alpha)$; $\mu_1=\tan[(\alpha-\beta)/2]$

20. Der Klotz ruht; $F_R = mg\sin\alpha - F = 4{,}9$ N und längs der geneigten Ebene nach oben gerichtet.

21. $F_1 = F\left(\frac{2g\sin\alpha}{a} - 1\right) \approx 120$ N

22. a) $g \cdot \frac{\mu - \tan\alpha}{1 + \mu\tan\alpha}$; b) $g \cdot \frac{\mu + \tan\alpha}{1 - \mu\tan\alpha}$

23. $F = g\,(m_1 + m_2)\,(\mu_2 + \mu_1)$

24. $T_1/T_2 = \cos\alpha_2/\cos\alpha_1 = \sqrt{2/3}$; $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{\cos\alpha_2/\cos\alpha_1} = \sqrt[4]{2/3}$

25. $T = 3mg\cos\alpha$; $a_{zp} = 2g\cos\alpha$; $a_t = g\sin\alpha$; $a = g\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}$

26. $\frac{gR - v^2}{gR + v^2} = 0{,}43$

27. $(R + 2H) : 2\,(H - R) : (2H - 5R) = 7 : 4 : 1$

28. $H = (5/2)\,R = 75$ cm

29. $F_A = mg\left(1 - \frac{v^2}{gR}\right)$, $F_C = mg\left(1 + \frac{v^2}{gR}\right)$; die Auflagekraft F_B ändert sich im Punkt B sprunghaft; bei Annäherung an den Punkt B von links ist sie gleich $mg\,(\cos\alpha - v^2/gR)$; bei Annäherung von rechts ist sie $mg\,(\cos\alpha + v^2/gR)$.

30. $v_0 = \sqrt{gl\,(n-5)} = \sqrt{5gl}$

31. $h = R\,(1 - g/\omega^2 R)$; $F = m\omega^2 R$

32. $h = (25/27)\,l$ von der Gleichgewichtslage

33. $T = mln^2 = 3{,}6$ N

34. $l \approx 1{,}5\,R$ (Zur Lösung benutzt man die Hinweise des Abschnitts 5.)

35. $\varrho = 81\pi/8\gamma T^2$

36. $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 1$ h 25 min

37. $\varrho = 3\pi/T^2\gamma \approx 110$ kg/m³

38. $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{R + h_2}{R + h_1}}$; $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R + h_1}{R + h_2}\right)^{3/2}$

39. $v_1 = \sqrt{\gamma\frac{M_E}{R_E}} \approx 8$ km/s

40. $W = -m\,\frac{v_0 + v}{2} \cdot (v - v_0 - gt) = 3900$ J

41. $\mu = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \approx 0{,}27$

42. a) $v_1/v_2 = 1$; b) $v_1/v_2 = \sqrt{(1 - \mu\cot\alpha_1)/(1 - \mu\cot\alpha_2)}$

43. $v=v_0\cdot\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}\approx 13{,}8$ m/s; $l=\dfrac{v_0^2m^2}{2M\,(M+m)\,\mu g}\approx 0{,}37$ m

44. $F=mg\,(H/h+1)-V\varrho_{\mathrm{W}}g$; $h_1=2h\left(\dfrac{V\varrho_{\mathrm{W}}}{m}-1\right)-H$

(ϱ_{W} ist die Dichte des Wassers.)

45. $v=v_0\,\dfrac{M_1}{M_1+M_2}=7{,}5$ km/h; $l=\dfrac{v_0^2}{2g\,(n/100)}\left(\dfrac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2=$
$=4{,}65$ m

46. $H=\dfrac{v_0^2}{2g}\left(\dfrac{m}{M}\right)^2\dfrac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$

47. a) $F=M_1g\left(1+\dfrac{4HM_2^2}{h\,(M_1+M_2)^2}\right)\approx 89$ kN;

b) $F=(M_1+M_2)\,g\left(1+\dfrac{HM_2^2}{h\,(M_1+M_2)^2}\right)\approx 92$ kN

48. $v=v_0\,\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$; a) $\dfrac{2}{3}v_0$, b) $\dfrac{1}{2}v_0$, c) $\dfrac{1}{3}v_0$;

$Q=\dfrac{m_1v_0^2}{2}\left(1-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)$; a) $\dfrac{1}{6}Mv_0^2$, b) $\dfrac{1}{4}Mv_0^2$,

c) $\dfrac{1}{3}Mv_0^2$

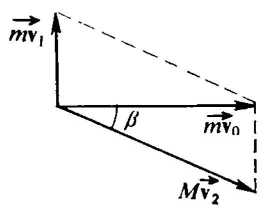


Bild 187

49. Siehe Bild 187;

$v_1=v_0\sqrt{(n-1)/(n+1)}$; $v_2=v_0\sqrt{2/(n^2+n)}$;

$\beta=\dfrac{1}{2}\arccos\,(1/n)$; $\Delta E=-mv_0^2\,\dfrac{1}{n+1}$; $\Delta\,(mv)=$

$=mv_0\sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$, hier ist $n=M/m$.

50. $s=l\,(1+n)/(n-3)=9$ m

51. 1. $h_1=(2/9)\,H$; $h_2=(1/18)\,H$; 2. $h=(1/18)\,H$, wobei
$H=4\,l\sin^2(\alpha/2)+v_0^2/g$

52. $v=\dfrac{m+M}{m}\sqrt{5gl}$

53. $h = H\,(M - m)/(M + m)$

54. $h = HM/(4M + 3m)$

55. $v_1/v_2 = 3\sqrt{6}/8$

56. $T_1/T_2 = (3 - 2\cos\alpha)/\cos\alpha = 4$

57. $v = g\alpha/\omega = 0{,}43$ m/s (α im Bogenmaß)

58. $A = v_0 \dfrac{m}{M+m}\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$

59. $\dfrac{T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{E}}} = \dfrac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{E}}}\sqrt{\dfrac{M_{\mathrm{E}}}{M_{\mathrm{M}}}} \approx 2{,}4$

60. $a = g\,[(T_0N/t)^2 - 1] \approx 17$ m/s², $T_0 = 1$ s; die Beschleunigung ist vertikal nach oben gerichtet.

61. $T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2 + a^2}} \approx 2$ s

62. $\mu \leqq \tan\beta$

63. $T_{\mathrm{BE}} = T_{\mathrm{CE}} = \dfrac{Mg}{2\sin\beta} \approx 98$ N; $T_{\mathrm{AB}} = T_{\mathrm{CD}} = \dfrac{(m+M)\,g}{2\sin\alpha} \approx 92$ N;

$F = (g/2)\,[M\cot\beta - (M+m)\cot\alpha] \approx 39$ N

64. $T = mg\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$, $F_{\mathrm{N}} = mg\sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$

65. $a = g\left(\dfrac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha_2}{1-\cos\alpha_1} - 1\right) \approx 27{,}4$ m/s²; die Beschleunigung ist vertikal nach oben gerichtet.

66. In Lage *1*:

$F_{BC} = mg\dfrac{\cos^2\beta}{\sin\alpha} = 1{,}25$ N, $F_{AB} = mg\dfrac{\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} =$
$= 0{,}6$ N;

in Lage *2*:

$F_{BC} = 1{,}25$ N, $F_{AB} = mg\left[\dfrac{\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} + \sin 2\beta\right] =$
$= 1{,}54$ N (hierin ist $\cos\beta = 1 - v^2/2gl = 0{,}8$)

67. $R_A = R_C = mgb/2a = 98$ N; $T = g\,(m+M)/\cos\alpha = 396$ N

68. $T_{BC} = mg\dfrac{1}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}$; $R_A = \dfrac{mg}{2}\times$
$\times\dfrac{\sqrt{1 + 4\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, die Kraft R_A bildet mit der Vertikalen den Winkel $\beta = \operatorname{arccot}(2 + \cot\alpha)$.

69. $l_1 = l\mu/(1 + \mu)$

70. $mg\sqrt[3]{m/\varrho}\,[(\sqrt{2} - 1)/2]$

71. Im Abstand (3/22) R rechts vom Mittelpunkt der Scheibe

72. 1. In der Mitte der Höhe, die durch den Eckpunkt mit der Masse $2m$ verläuft;
2. der Schwerpunkt liegt auf der Höhe, die durch den Eckpunkt mit der Masse $2\,m$ verläuft; er ist von diesem $7a \cdot \sqrt{3}/24$ entfernt.

73. $\varrho = (G_2\varrho_1 - G_1\varrho_2)/(G_2 - G_1)$

74. $\varrho_2 = \varrho_1\,(G - G_2)/(G - G_1)$

75. $$h = \frac{V}{S} \cdot \frac{(\varrho_{\mathrm{Pb}} - \varrho_{\mathrm{W}})\left(\frac{19}{20}\,\varrho_{\mathrm{W}} - \varrho_{\mathrm{E}}\right)}{\varrho_{\mathrm{W}}\,(\varrho_{\mathrm{Pb}} - \varrho_{\mathrm{E}})} \approx 0{,}048\,\frac{V}{S}$$

76. $T = 2\pi\sqrt{M/\varrho g S}$

77. $$h_2 = \frac{(p_0 + \varrho g h_1)\,h_1}{p_0} = 0{,}11\ \mathrm{m};\quad m = \frac{(p_0 + \varrho g h_1)\,h_1 S \mu}{RT} =$$
$= 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ kg; hierbei ist $T = (t + 273)$ K, ϱ ist die Dichte des Quecksilbers.

78. Der Quecksilberspiegel sinkt um 3 cm;
$$m = \frac{(p_0 - \varrho g l_1)\,l_2 S \mu}{R T_1} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg}$$

79. $$\Delta m = \frac{V\mu\,(p_1 - p_2)}{RT} \approx 0{,}059\ \mathrm{kg}$$

80. a) $$W = \frac{p_0 V_1\,(T_2 - T_1)}{T_1} = 138\ \mathrm{J};$$
b) $$W = \frac{(p_0 + Mg/S)\,V_1\,(T_2 - T_1)}{T_1} = 171\ \mathrm{J}$$

81. Die Längenänderung Δl beträgt
$$\Delta l = \frac{l_1\,[T_1 \varrho g h\,(1 - \cos a) - \Delta T\,(p_0 - \varrho g h)]}{T_1\,(p_0 - \varrho g h \cos a)} \approx 0{,}01\ \mathrm{m};$$
$$m = \frac{(p_0 - \varrho g h)\,l_1 S \mu}{R T_1} = 2{,}1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg}$$

82. Es verschiebt sich zur Kugel B um die Größe Δl, die gleich
a) $$\frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2T_1 + (\Delta T_1 - \Delta T_2)},$$
b) $$\frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2T_1 - (\Delta T_2 - \Delta T_1)},\quad \text{c)}\ \frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T_1}{T_1}\ \text{ist.}$$

83. Jedes Tröpfchen verschiebt sich von der Kugel B um $\Delta l = \frac{2}{3} \cdot \frac{V_1\,\Delta T}{S T_1}$ weg.

84. Jedes Tröpfchen verschiebt sich um $\Delta l = V_1\,\Delta T/S T_1$ nach rechts.

85. $m=\frac{V\varphi D_1}{100}=735$ g; es kondensiert kein Wasserdampf, da $\frac{\varphi D_1}{100}<D_2$ ist; $k=\frac{RT\varphi D_1}{\mu p}=0{,}58$. Hier ist $D_1=12{,}9$ g/m^3 die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bei 15 °C, $D_2=9{,}4$ g/m^3 die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bei 10 °C.

86. $Q_{1\to7}:Q_{1\to8}:Q_{5\to2}:Q_{4\to2}=(p_1V_1-p_2V_2):(p_2V_1-p_1V_1):(p_2V_2-p_1V_2):(p_1V_1-p_2V_2)$

87. $Q_{1\to6}:Q_{3\to2}=1:1$; $Q_{1\to5}:Q_{8\to2}=p_1:p_2$

88. Im Punkt O: a) Null, b) $2{,}55\cdot10^{10}$ V/m (die Richtung ist horizontal von links nach rechts), c) $2{,}55\cdot10^{10}$ V/m (die Richtung verläuft vertikal nach unten), d) Null; im Punkt O_1: a) und b) $6{,}45\cdot10^{9}$ V/m (die Richtung ist horizontal von links nach rechts), c) $3{,}93\cdot10^{10}$ V/m (vertikal nach unten), d) $3{,}27\cdot10^{10}$ V/m (vertikal nach oben)

89. In den Punkten A, B, D: Null; im Punkt C: $-2\cdot10^{10}$ V; im Punkt E: $2\cdot10^{10}$ V

90. $t=\sqrt{2dm/eE}=3\cdot10^{-8}$ s; $v_0=l\sqrt{eE/2dm}=5\cdot10^{6}$ m/s

91. $E=mv_0^2\tan\alpha/el=147$ V/m

92. $T=\frac{mg+Eq}{\cos\alpha}$; $W_k=\frac{(mg+Eq)\,l\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$

93. $a=\frac{(m_1-m_2)\,g+E\,(q_1-q_2)}{m_1+m_2}$; $T=\frac{2m_1m_2g+E\,(m_2q_1+m_1q_2)}{m_1+m_2}$

94. $v=\sqrt{\frac{5\,(mg+Eq)\,l}{m}}$

95. 1,83 q

96. $\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}-\frac{q^2}{ml^3\sin^3\alpha}}$; $T=\frac{mg}{\cos\alpha}$

97. $v=\sqrt{5gl-q^2/ml}$

98. 0,2 A

99. 1 A

100. a) $I=0$, $U=U_0$; b) $I=U_0/R_1$, $U=U_0-IR_1=0$

101. $R_x=R_G-\frac{R_GR_{Sh}}{R_G+R_{Sh}}\approx0{,}16\ \Omega$

102. $U=U_0\left(1-\frac{R_1}{R_1+R_V}\right)\approx9{,}9$ V; $f=\frac{R_1}{R_1+R_V}\cdot100\ \%\approx1\ \%$

103. $I=\frac{U_0}{R_1+R+R_I}\approx0{,}196$ A; $f=\frac{R_I}{R_1+R+R_I}\cdot100\ \%\approx1{,}96\ \%$

104. $C=\dfrac{12C_1C_2+4C_2^2+3C_1^2}{1\cdot C_2+3C_1}=3\dfrac{17}{23}$ µF

105. $Q=\dfrac{U_0R_2C}{2\,(R_1+R_2)}=6$ µC

106. $Q=\dfrac{U_0CR_1R_2}{R_1R_1+2R_2R_1+2R_1R_2}$

107. $R=\dfrac{R_1\,dmv_0^2\tan\alpha}{U_0el-dmv_0^2\tan\alpha}$

108. $R_2=8\ \Omega$

109. $\arctan\dfrac{3U_0el}{v_0^2md}$

110. $U=\dfrac{U_0R}{3R_1+R}\approx 3{,}75$ V; $I=\dfrac{3U_0}{3R_1+R}\approx 0{,}25$ A

111. $(2/3)\,R$

112. $(4/5)\,R$

113. $(3/4)\,R$

114. $(11/20)\,R$

115. $R=\dfrac{5R_1\eta}{3\,(1-\eta)}=60\ \Omega$; $P=\dfrac{U_0^2\eta\,(1-\eta)}{R_1}=70$ W (hier ist $\eta=0{,}5$)

116. Er verkleinert sich um den Faktor $\dfrac{n+k+n\cdot k}{n\,(k+1)}=1{,}4$.

117. $R_1=R/8$, $\eta_1\approx 89\ \%$, $\eta_2\approx 83\ \%$

118. 800 g

119. In Dampf wandeln sich 100 g Wasser um; $t_3\approx 21$ min

120. a) $B=0$, b) $B=\mu_0\dfrac{2I}{\pi d}$

121. a) $B=\mu_0\dfrac{3I}{4R}$; b) $B=\mu_0\dfrac{I}{4R}$; c) $B=\mu_0\dfrac{I\sqrt{5}}{4R}$

122. $h=\dfrac{d_1+d_2n_1}{n_1\cdot n_2}\approx 10{,}8$ cm

123. $L=\dfrac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$ (hier ist $\sin\alpha=1/n$)

124. $\alpha=\arctan n=56°$; $x=d\,\dfrac{n^2-1}{n}\cdot\cos\alpha=2{,}3$ cm

125. $\dfrac{d}{n}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

126. Es handelt sich um eine Zerstreuungslinse; $s' = (1 - k_1) f =$
$= 15$ cm; das Bild wandert um $\Delta s' = \frac{f^2 l}{(s' + f)(s' + l + f)} =$
$= 6$ cm von der Linse weg; $k_2 = \frac{\Delta s'}{l + (1 - k_1) f} = 0{,}4$

127. $s' = \frac{Rd}{2d - R} = -37{,}5$ cm (das Bild ist virtuell);

$f' = \frac{R(d + l)}{2(d + l) - R} = 150$ cm (das Bild ist reell)

128. $s' = 5f/2 = 100$ cm

129. Am Ort der mittleren Linse

130. $s' = \frac{sR}{2ns - R} = 100$ cm; $k = \frac{R}{2ns - R} = 4$

131. $s' = -\frac{sR}{2ns + R} = -6{,}25$ cm; $k = \frac{R}{2ns + R} = 0{,}625$