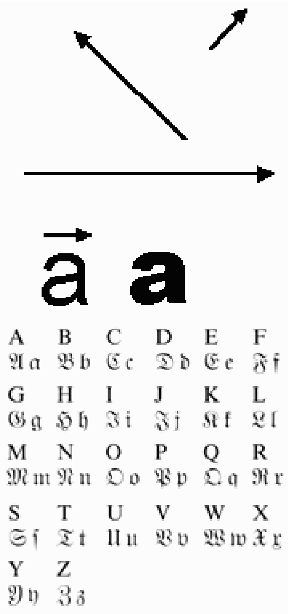
Vektorrechnung



Vektor

Ein Skalar hat einen Betrag aber keine Richtung. Beispiel: Temperatur, Masse.
Ein Vektor ist eine Größe mit einem Betrag und einer Richtung. Beispiele für einen Vektor sind die Geschwindigkeit und Kraft. Vektoren werden durch Pfeile dargestellt. Das Bild links zeigt drei verschiedene Vektoren.
Unter einem Vektor versteht man die "Menge aller Pfeile" mit gleicher Richtung und gleichem Betrag.

Repräsentant des Vektors

Jeder Pfeil aus dieser Menge ist ein sogenannter Stellvertreter oder "Repräsentant des Vektors".

Schreibweisen

Einen Vektor kennzeichnet man oft durch einen Pfeil oder durch Fettdruck. In modernen, computergeschriebenen Texten werden Vektoren auch durch Unterstreichen markiert.

Frakturschrift

In älteren Veröffentlichungen werden Vektoren, aber auch andere mathematische und physikalische Größen, mit Frakturbuchstaben gekennzeichnet.
Abgebildet ist jeweils der Buchstabe in unserer heutigen Schrift und darunter der Groß- und Kleinbuchstabe in Frakturschrift.

Vektorraum

Eine Menge V heißt Vektorraum, wenn für ihre Elemente (Vektoren) eindeutige, stets ausführbare Addition und Multiplikation definiert sind und es gilt:
$\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $r,s \in R$

1. Kommutativgesetz	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Assoziativgesetz	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. Zu je zwei $\vec{a}$, $\vec{b}$ gibt es stets genau ein $\vec{c}$ mit $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$	
4. Einselement	$1\vec{a} = \vec{a}$
5. Distributivgesetz	$(r+s)\,\vec{a} = r\,\vec{a} + s\,\vec{a}$
6. Distributivgesetz	$r\,(\vec{a} + \vec{b}) = r\,\vec{a} + r\,\vec{b}$
7. Assoziativgesetz	$r\,(s\,\vec{a}) = (rs)\,\vec{a}$

Die Elemente von V werden als Vektoren bezeichnet; das neutrale Element der additiven Gruppe heißt Nullvektor. Ein Vektor ist durch seinen Betrag (Länge) sowie Richtung und Orientierung charakterisiert.
In einem Vektorraum V über einem Körper K gilt:

$0\vec{v} = \vec{0}$; für alle $\vec{v} \in V$
$a\vec{0} = \vec{0}$; für alle $a \in K$
$(-1)\vec{v} = -\vec{v}$
$\vec{v} \in V$ und $a \in K$ gilt: Aus $a\vec{v} = \vec{0}$ folgt $a = 0$ oder $\vec{v} = \vec{0}$.

Nullvektor $\vec{o} \Leftrightarrow$ Betrag = 0
Der Nullvektor ist ein Vektor vom Betrag Null, Anfangs- und Endpunkt fallen zusammen. Der Nullvektor hat die Länge Null und eine unbestimmte Richtung.
Einheitsvektor $\Leftrightarrow$ Betrag = 1

Entgegengesetzter Vektor zu $\vec{a}$ $\Leftrightarrow$
Entgegengesetzter Vektor zu $\vec{a}$ ist der Vektor $-\vec{a}$ mit gleichem Betrag, gleicher Richtung und entgegengesetzter Orientierung. Es gilt: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

Basis eines Vektorraumes
... ein in einer festen Reihenfolge angeordnetes linear unabhängiges System B_n von Vektoren aus V_n mit der Eigenschaft, dass sich jeder Vektor aus V_n auf genau eine Weise als Linearkombination der Elemente von B_n darstellen
Rechte-Hand-Regel
... gestreckter Daumen (e_x) und Zeigefinger (e_y) und der um 90° abgewinkelte Mittelfinger (e_z) der rechten Hand bilden ein für eine dreidimensionale Basis ein Rechtssystem

Dimension eines Vektorraumes ... Anzahl der Basisvektoren
orthogonale Basis ... Basisvektoren sind paarweise senkrecht zueinander
Orthonormalbasis ... Basisvektoren stehen senkrecht aufeinander und sind normierte Einheitsvektoren
kartesische Basis (Einheitsvektoren) ... geradliniges Orthonormalbasissystem, das eine besonders einfache geometrische Interpretation der zu beschreibenden Probleme erlaubt

normierte Basis ... Basisvektoren sind Einheitsvektoren

Freier Vektor ... darf beliebig verschoben, aber nicht gespiegelt, nicht gedreht und nicht skaliert werden.
Linienflüchtiger Vektor ... Vektor, der entlang seiner Wirkungslinie beliebig verschiebbar ist. Kräfte am starren Körper sind linienflüchtige Vektoren.

Gleichheit von Vektoren
Zwei Vektoren werden als gleich betrachtet, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen. Gleich lange Vektoren sind nur dann gleich, wenn sie ohne Drehung (Rotation), nur durch eine Parallelverschiebung, zur Überdeckung gebracht werden können.

Parallele Vektoren ... können durch Parallelverschiebung auf dieselbe Gerade gebracht werden.
Gleichgerichtete Vektoren ... haben die gleiche Richtung.
Entgegengesetzte (antiparallele) Vektoren ... haben entgegengesetzte Richtungen.

Vektorfeld
Gesamtheit der den Raumpunkten zugeordneten Vektoren; Funktion von R^n nach R^n
Beispiele: Gravitationsfeldstärke, magnetische Feldstärke, elektrische Feldstärke

Beispiele für Vektorräume

Nullvektorraum
$\{0^{\to}\}$ mit $0^{\to} + 0^{\to} = 0^{\to}$ und $0^{\to} = a0^{\to}$ für alle $a \in K$ ist ein K-Vektorraum, der Nullvektorraum.

Einfache Beispiele
Der euklidische Vektorraum R^n ist eine Vektorraum über den reellen Zahlen. Allgemein kann man für einen beliebigen Körper K den Vektorraum K^n definieren. Dieser enthält die n-Tupel von Elementen aus K als Vektoren, deren Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise definiert ist.
R ist ein Q-Vektorraum, wie aus den Körpereigenschaften von R folgt. Ebenso ist C ein R-Vektorraum und ein Q-Vektorraum.
Allgemein gilt: Jeder Körper L, der K als Teilkörper enthält, ist ein Vektorraum über K.

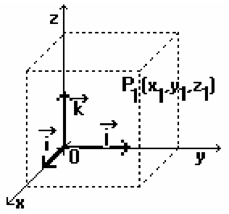
Vektorraum der Abbildungen
Sei X eine nicht leere Menge, und sei $Abb(X, K) = \{f: X \to K\}$ die Menge der Abbildungen von X mit Werten aus K. Für Abbildungen $f, g \in Abb(X, K)$ und $a \in K$ definiert man
(1) Addition $f + g$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $\forall x \in X$
(2) Skalarmultiplikation $a f$: $(af)(x) = a f(x)$; $\forall x \in X$

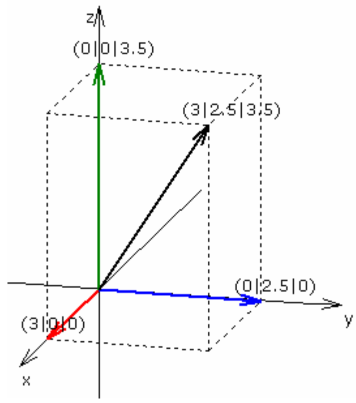
Die Operationen werden punktweise für alle $x \in X$ definiert.
Abb(X, K) wird dadurch zu einem K-Vektorraum. Dass Abb(X, K) ein K-Vektorraum ist, zeigt man durch Rückführung auf die entsprechenden Vektorraumeigenschaften von K.
Das neutrale Element der Addition, der Nullvektor, ist die Nullabbildung, die jedes Element aus X auf $0^{\to} \in K$ abbildet.
Die zu f inverse Abbildung -f ist fann -f(x). Bei Abb(X, K) handelt es sich um einen Funktionenraum mit Werten in K. Für zwei Vektorräume V und W über dem selben Körper kann man Abb(V, W) mit zu (1) und (2) analogen Festlegungen den Vektorraum aller Abbildungen zwischen den beiden Vektorräumen definieren.

Polynomvektorraum
Es sei P_n die Menge aller Abbildungen f von R in R, die durch Formeln der Form
$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$
$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in R)$ beschrieben werden können. P_n ist die Menge aller Polynome, deren Grad höchstens n ist.
Auf der Menge P_n lassen sich eine Addition und eine Multiplikation mit Skalar (aus R) wie folgt erklären:
Für $f(x) := \Sigma_{i=0}^n a_i \cdot x_i$ und $g(x) := \Sigma_{i=0}^n b_i \cdot x_i$
seien $(f+g)(x) := \Sigma_{i=0}^n (a_i+b_i) \cdot x_i$ und $(c\cdot f)(x) := \Sigma_{i=0}^n (c\, a_i) \cdot x_i$
wobei c reelle Zahl ist.
P_n bildet zusammen mit den definierten Operationen einen Vektorraum über R.
Indem man die Koeffizienten der Polynome nur aus Q oder aus C wählt, erhält man analog zu oben auch Vektorräume über Q oder C.
Der Vektorraum P_n lässt sich verallgemeinern.
Bekanntlich ist die Summe zweier stetiger Funktionen über einem gewissen Intervall [a,b] und auch das λ-fache einer stetigen Funktion wieder eine stetige Funktion, $\lambda \in R$. Damit ist die Menge C[a,b] aller stetigen Funktionen, die den Definitionsbereich $[a,b] \subseteq R$ haben, zusammen mit den auf natürliche Weise erklärten Addition und Multiplikation mit Skalar ein Vektorraum über R.

Anstelle des Intervalls [a,b] können auch halboffene oder offene Intervalle [a,b), (a,b] oder (a,b) gewählt werden.

Kartesisches orthonomiertes Koordinatensystem





Punkt 0 und paarweise senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$
$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Ortsvektor des Punktes $P_1(x_1,y_1,z_1)$

$\vec{x} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$

Vektor, dessen Anfangspunkt (O) im Koordinatenursprung liegt und dessen Spitze zum Punkt P führt

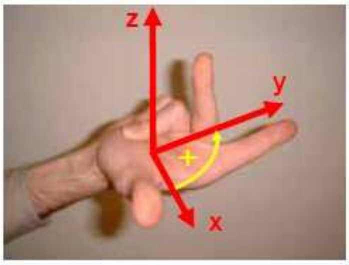
Komponentendarstellung $\vec{x} = (a_x, a_y, a_z)$

Betrag eines Vektors $|\vec{x}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

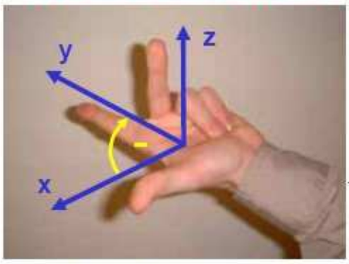
Beispiel: Ortsvektor des Punktes (3; 2.5; 3.5)

Ist ein Punkt P gegeben, so sind P' der Grundriss, P" der Aufriss und P"' der Kreuzriss des Punktes.

Der Koordinatenquader ist der Quader, dessen Kantenlängen die Absolutbeträge der Koordinaten des Punktes $P(x_P, y_P, z_P)$ besitzen.
Ein Koordinatenweg ist ein im Ursprung beginnender und in P endender Streckenzug aus drei Kanten eines Koordinatenquaders, welcher alle drei Koordinaten von P zeigt.



Rechtskoordinatensystem



Linkskoordinatensystem

Linkskoordinatensystem, Rechtskoordinatensystem

Prinzipiell existieren zwei Möglichkeiten zur Orientierung der drei Achsen eines kartesischen Koordinatensystems im R^3.

Im Allgemeinen wird in der Mathematik das Rechtskoordinatensystem bevorzugt. Für dieses gilt die Rechte-Hand-Regel:
"x-Achse, y-Achse und z-Achse eines Rechtskoordinatensystems sind orientiert wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand"
Bei einem; selten genutzten; Linkskoordinatensystem gilt die Orientierung für die linke Hand.

Richtungskosinus des Ortsvektors $\vec{r}$ in der Ebene

$x = |\vec{r}| \cos\alpha$ $\quad y = |\vec{r}| \sin\alpha$ $\quad \alpha = \angle(\vec{i}, \vec{r})$

im Raum

$x = |\vec{r}| \sin\beta \cos\alpha$ $\quad y = |\vec{r}| \sin\beta \sin\alpha$ $\quad z = |\vec{r}| \cos\beta$

$\alpha = \angle(\vec{i}, \vec{i}\, x + \vec{j}\, y)$ $\quad \beta = \angle(\vec{k}, \vec{r})$

bzw. $x = |\vec{r}| \cos\alpha$ $\quad y = |\vec{r}| \cos\beta$ $\quad z = |\vec{r}| \cos\gamma$

mit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$: $\quad \cos\alpha = x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\cos\beta = y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\quad \cos\gamma = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

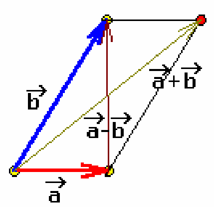
Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$, Gerichteter Einheitsvektor

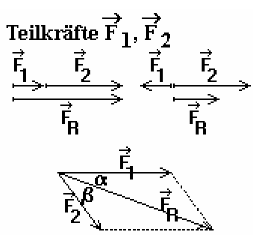
$\vec{r}^{\,0} = \vec{r} / |\vec{r}|$

Addition von 2 Vektoren

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$

Die Addition mehrerer Vektoren erfolgt nach der Polygonregel: Der jeweils nächste zu addierende Vektor wird mit seinem Anfangspunkt am Endpunkt des vorherigen abgetragen. Dies führt zu einem Polygon. Ist das Vektorpolygon geschlossen, so ist der Summenvektor der Nullvektor.
Führt die Vektoraddition von Kräften zum Nullvektor, so heben sich die Kräfte in ihrer Wirkung gegenseitig auf.





Beispiel: Kräfte sind vektorielle Größen

Teilkräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$; Resultierende Kraft $\vec{F}_R$

1. gleiche Wirkungslinie: Summe der Beträge, Wirkungslinie bleibt erhalten
   $F_R = F_1 + F_2$
2. gleicher Angriffspunkt Kräfte werden vektoriell addiert
   $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
   $F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1F_2 * \cos(\alpha + \beta)}$

für rechtwinklig wirkende Kräfte $\quad F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

Richtung der resultierenden Kraft $\quad \sin\alpha = F_2/F_R * \sin(\alpha+\beta)$

$$\sin\beta = F_1/F_R * \sin(\alpha+\beta)$$

Durch mehrfaches Anwenden des Kräfteparallelogramms können mehrere Kräfte zu einer Gesamtkraft F zusammengesetzt werden.

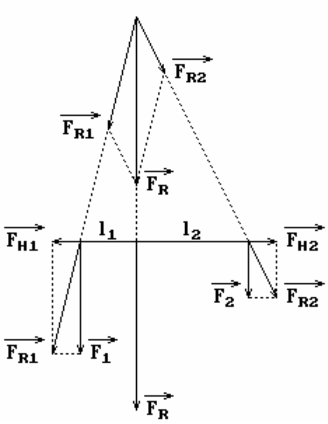
Zerlegung von Kräften

... zu zerlegende Kraft $F^{\rightarrow}$, Teilkräfte $F^{\rightarrow}_1$, $F^{\rightarrow}_2$, Winkel α zwischen $F^{\rightarrow}_1$ und $F^{\rightarrow}$, Winkel β zwischen $F^{\rightarrow}_2$ und $F^{\rightarrow}$

$$F_1 = F * \sin\alpha / \sin(\alpha + \beta) \qquad F_2 = F * \sin\beta / \sin(\alpha + \beta)$$

Sind die Komponenten F_1 und F_2 senkrecht zueinander, gilt $F_1 = F * \sin\alpha = F * \cos\beta$ $F_2 = F * \sin\beta = F * \cos\alpha$

Um eine Kraft eindeutig in zwei Teilkräfte zu zerlegen, müssen entweder die Richtungen oder die Beträge der Teilkräfte bekannt sein.



Parallele Kräfte

... die Wirkungslinien paralleler Kräfte besitzen keinen Schnittpunkt. Für die Summe ihrer Beträge gilt

$$F_R = F_1 + F_2$$

Die Wirkungslinie der Resultierenden teilt den Abstand beider Kräfte im umgekehrten Verhältnis beider Kräfte.
Hinweis: Bei antiparallelen Kräften liegt die Resultierende außerhalb und nicht zwischen den beiden Kräften!
Die Wirkungslinien paralleler Kräfte haben keinen Schnittpunkt. Man addiert daher zu jeder Kraft eine Hilfskraft. Die Hilfskräfte müssen den gleichen Betrag und die entgegengesetzte Richtung haben; sie heben sich dann gegenseitig auf und ändern nichts am Resultat. Dann addiert man die Resultierenden aus Kraft und jeweiliger Hilfskraft wie Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten zur Gesamtresultierenden. Die Abstände der beiden Ausgangskräfte zur Gesamtresultierenden sind umgekehrt proportional zu den Beträgen der Kräfte.
Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten ... diese Kräfte verschiebt man auf ihren Wirkungslinien bis zu ihrem Schnittpunkt und wendet darauf das Kräfteparallelogramm an.

Subtraktion

$a^{\rightarrow} - b^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} + (-b^{\rightarrow})$

Dreiecksungleichung für Vektoren

$$| a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow} | \leq | a^{\rightarrow} | + | b^{\rightarrow} | \qquad | a^{\rightarrow} - b^{\rightarrow} | \geq | a^{\rightarrow} | - | b^{\rightarrow} |$$

Gegensatz zum Rechnen mit reellen Zahlen: Der Betrag der Summe zweier Vektoren kann kleiner sein als der Betrag ihrer Differenz, nämlich dann, wenn der von den Vektoren eingeschlossene Winkel größer als 90° ist.

Multiplikation von Vektoren

Vielfachbildung mit Skalar

r und s sind beliebige reelle Zahlen, Skalare

$r\, a^{\rightarrow} = r\, a_1 x^{\rightarrow} + r\, a_y\, j^{\rightarrow} + r\, a_z\, k^{\rightarrow}$ $r\,(s\, a^{\rightarrow}) = (rs)\, a^{\rightarrow}$ $r\,(a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow})\, r\, a^{\rightarrow} + r\, b^{\rightarrow}$ $(r + s)\, a^{\rightarrow} = r\, a^{\rightarrow} + s\, a^{\rightarrow}$ $0\, a^{\rightarrow} = o^{\rightarrow}$ $1\, a^{\rightarrow} = a^{\rightarrow}$

Operation wird auch skalare Multiplikation (nicht mit Skalarprodukt verwechseln !) oder S-Multiplikation genannt.

Linearkombination von Vektoren

Gegeben sei eine Menge $\{a^{\rightarrow}, b^{\rightarrow}, ...\}$ von Vektoren . k_1, k_2, ... seien reelle Zahlen. Dann nennt man jeden Vektor $x^{\rightarrow}$ der Form

$x^{\rightarrow} = k_1\, a^{\rightarrow} + k_2\, b^{\rightarrow} + ...$ eine Linearkombination der Vektoren $a^{\rightarrow}$, $b^{\rightarrow}$, ...

Nullsummen

Eine Linearkombination $k_1\, a^{\rightarrow} + k_2\, b^{\rightarrow} + ...$ kann gleich dem Nullvektor sein. Die Linearkombination nennt man in diesem Fall eine Nullsumme, die grafisch einer geschlossenen Vektorkette entspricht.

Nichtriviale Nullsummen

Ein Spezialfall ist die triviale Nullsumme, bei der alle Koeffizienten k_1, k_2, ... gleich 0 sind: $0 = 0\, a^{\rightarrow} + 0\, b^{\rightarrow} + ...$

Lineare Abhängigkeit

Gegeben sei eine Menge $\{a^{\rightarrow}, b^{\rightarrow}, ...\}$ aus Vektoren. Findet man unter den Linearkombinationen der Menge außer der "trivalen Nullsumme" auch eine "nichttriviale Nullsumme", so nennt man die Menge $\{a^{\rightarrow}, b^{\rightarrow}, ...\}$ linear abhängig.
Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind. Drei Vektoren nennt man komplanar, wenn sie alle in einer Ebene liegen.

Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind. Vier Vektoren im Raum (oder Ebene) sind immer linear abhängig. Ist eine Menge aus Vektoren linear abhängig, so gibt es mindestens einen Vektor, der sich als Linearkombination der restlichen Vektoren ausdrücken lässt.

Aufgaben zu Linearkombinationen von Vektoren

Aufgabe: Der Vektor $\vec{d}$ ist als Linearkombination der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen. Die Vektoren werden hier als Zeilenvektoren angegeben:

1) $\vec{a} = (1 \mid -1 \mid 1)$; $\vec{b} = (2 \mid 1 \mid -1)$; $\vec{c} = (2 \mid -2 \mid 1)$; $\vec{d} = (-8 \mid -13 \mid 12)$
2) $\vec{a} = (4 \mid -2 \mid 0)$; $\vec{b} = (-2 \mid 3 \mid 7)$; $\vec{c} = (1 \mid 1 \mid -4)$; $\vec{d} = (2 \mid -12 \mid -20)$
3) $\vec{a} = (-1 \mid 3 \mid 2)$; $\vec{b} = (5 \mid 0 \mid 4)$; $\vec{c} = (5 \mid -6 \mid -7)$; $\vec{d} = (-8 \mid 9 \mid 2)$
4) $\vec{a} = (2 \mid 1 \mid 3)$; $\vec{b} = (-3 \mid 1 \mid -7)$; $\vec{c} = (2 \mid 3 \mid -4)$; $\vec{d} = (-5 \mid -8 \mid 18)$
5) $\vec{a} = (2 \mid 1 \mid -3)$; $\vec{b} = (-3 \mid 5 \mid 7)$; $\vec{c} = (0 \mid 5 \mid -4)$; $\vec{d} = (-6 \mid 2 \mid 5)$
6) $\vec{a} = (3 \mid 0 \mid -4)$; $\vec{b} = (0 \mid 3 \mid 5)$; $\vec{c} = (7 \mid 0 \mid 0)$; $\vec{d} = (0 \mid 12 \mid -8)$

Lösung:

1) $\vec{d} = 4\vec{a} - 7\vec{b} + \vec{c}$ 2) $\vec{d} = -\vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ 3) $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$
4) $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$ 5) $\vec{d} = -3\vec{a} + \vec{c}$ 6) $\vec{d} = 7\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$

Parallelität von Vektoren

$\vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \mu \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ linear abhängige Vektoren $\Leftrightarrow$ kollineare Vektoren

Komplanare Vektoren ... liegen in einer Ebene; sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar, gilt $\vec{c} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b}$

bzw. $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$

Skalarprodukt (inneres Produkt)

$$\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Es gilt: $\vec{i} * \vec{i} = \vec{j} * \vec{j} = \vec{k} * \vec{k} = 1$; $\vec{i} * \vec{j} = \vec{j} * \vec{k} = \vec{i} * \vec{k} = 0$

Es gelten: Kommutativ- und Distributivgesetz. Das Assoziativgesetz gilt nicht !

Orthogonalitätsbedingung ... $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$

Formel von Euler, Eulersche Vektorformel

Sind A, B, C und D vier Punkte auf einer Geraden, so gilt

$$\vec{BC} \bullet \vec{AD} + \vec{CA} \bullet \vec{BD} + \vec{AB} \bullet \vec{CD} = 0$$

Formel von Simpson, Simpsonsche Vektorformel

Sind A, B, C und D vier Punkte auf einer Geraden, so gilt

$$\vec{AD}^2\, \vec{BC} + \vec{BD}^2\, \vec{CA} + \vec{CD}^2\, \vec{AB} + \vec{BC} \bullet \vec{CA}\, \vec{AB} = \vec{0}$$

Schwarzsche Ungleichung für Vektoren

$$|\vec{a} * \vec{b}| \le |\vec{a}| * |\vec{b}|$$

... das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}|$, wenn $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\vec{a} * \vec{b} = -|\vec{a}| * |\vec{b}|$, wenn $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Kosinussatz für Vektoren

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2$ $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2$

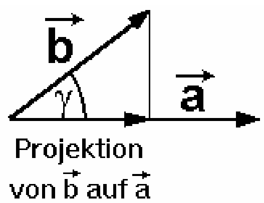
$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2}$ $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2}$

Längskomponente von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$, Längskomponente eines Vektors

$a_b = \vec{a} * \vec{b} / |\vec{b}|$ ... (Betrag)

Orthogonale Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

$\vec{a_b} = \vec{a} * \vec{b} / |\vec{b}|^2 * \vec{b}$



Projektion eines Vektors

Skalarprodukt $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann auch als das Produkt aus dem Betrag von $\vec{a}$ und dem Betrag der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ festgelegt werden:

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |$ Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}|$

$|$ Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}| = |\vec{b}| * \cos(\vec{a}, \vec{b})$

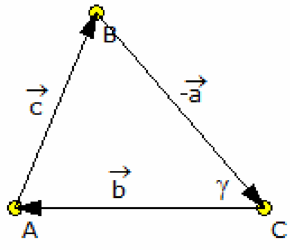
Die Gleichung zur Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ wird auch Schattenformel genannt, da sie u.a. die Länge des Schattens von $\vec{b}$ angibt, wenn die Lichtquelle senkrecht über $\vec{b}$ steht.

Gesetze des Skalarproduktes

das Skalarprodukt ist kommutativ $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$

das Skalarprodukt ist distributiv $k * (\vec{a} * \vec{b}) = k\,\vec{a} + k\,\vec{b}$, mit jedem reellen k
das Skalarprodukt ist im allgemeinen nicht assoziativ $(\vec{a} * \vec{b}) * \vec{c} \neq \vec{a} * (\vec{b} * \vec{c})$
das Skalarprodukt ist gemischt assoziativ $(k * \vec{a}) * \vec{b} = k\,(\vec{a} * \vec{b})$

$\vec{a} * (k\,\vec{b}) = k\,(\vec{a} * \vec{b})$



Das Quadrat eines Vektors ist gleich dem Quadrat seines Betrages: $\vec{a}^2 = |\,\vec{a}\,|^2$

Skalarprodukt und Kosinussatz

Aus dem Kosinussatz am allgemeinen Dreieck kann eine Definition des Skalarprodukts hergeleitet und die Berechnung des Winkels zwischen zwei Richtungsvektoren über das Skalarprodukt begründet werden.
Gegeben ist das Dreieck ABC mit den drei Vektoren $\vec{BC} = -\vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
Für den Betrag $|\vec{c}|$ gilt dann $|\vec{c}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$
und über den Kosinussatz $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$
Gleichsetzen ergibt $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$
und Berechnung der Beträge

$(a_x-b_x)^2 + (a_y-b_y)^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$

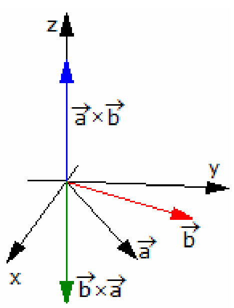
$-2a_xb_x - 2a_yb_y = -\,2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$

$a_xb_x + a_yb_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$

Und somit für den Winkel γ $\cos\gamma = (a_xb_x + a_yb_y) \,/\, |\vec{a}||\vec{b}|$

$\cos\gamma = (\vec{a} \bullet \vec{b}) \,/\, |\vec{a}||\vec{b}|$

Für den dreidimensionalen Fall gilt die Herleitung analog.



Normalenvektor

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ zu zwei anderen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum, ist ein Vektor, der sowohl senkrecht zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ steht.
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (a_x \mid a_y \mid a_z)$ und $\vec{b} = (b_x \mid b_y \mid b_z)$. Gesucht ist ein Normalenvektor $\vec{n} = (x \mid y \mid z)$.
Lösung:
Da $\vec{n}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, wird nach dem Skalarprodukt

$a_x\,x + a_y\,y + a_z\,z = 0$

und $b_x\,x + b_y\,y + b_z\,z = 0$

Multipliziert man die 1.Gleiung mit $-b_z$ und die zweite mit a_z und addiert beide, ergibt sich

$(b_xa_z - a_xb_z)\,x + (b_ya_z - a_yb_z)\,y = 0$

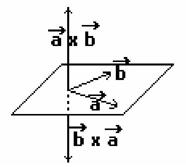
Da eine Variable frei wählbar ist, setzt man z.B. $x = a_yb_z + a_zb_y$
Mit Ersetzen, Auflösen nach y und in einer der Ausgangsgleichungen nach z wird

$y = a_zb_x + a_xb_z$ $z = a_xb_y + a_yb_a$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ wird damit

(*) $\vec{n} = (a_yb_z + a_zb_y \mid a_zb_x + a_xb_z \mid a_xb_y + a_yb_a)$

Alle anderen Normalenvektoren ergeben sich durch Vervielfachung von $\vec{n}$.
Die Darstellung (*) entspricht gerade dem Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$



Vektorprodukt

... Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit folgenden Eigenschaften

$|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a}\,| * |\,\vec{b}\,| * \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Das Vektorprodukt ist dem Betrage nach gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms
Es gilt:

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{i} \times \vec{k} = -\,\vec{j}$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|^2 = (\,\vec{a} \times \vec{b}\,)^2$ $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Komponentendarstellung

$= \vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\vec{k}$

Vektorprodukt (2)

Nachweis der Äquivalenz der Vektorproduktdarstellungen

$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

und $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(a_yb_z - a_zb_y)\,\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\vec{k}|$

Zum Nachweis wird $|\vec{c}|^2$ betrachtet. Die zweite Gleichung ergibt

$|\vec{c}|^2 = (a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 =$

$= a_y^2b_z^2 - 2\, a_ya_zb_yb_z + a_z^2b_y^2 + a_z^2b_x^2 - 2\, a_za_xb_zb_x + a_x^2b_z^2 + a_x^2b_y^2 - 2\, a_xa_yb_xb_y + a_y^2b_x^2$

Für die erste Gleichung erhält man

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 \sin^2 \angle(\vec{a},\vec{b}) =$

$= |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \angle(\vec{a},\vec{b})) = |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 \cos^2 \angle(\vec{a},\vec{b}) =$

und mit dem Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a},\vec{b})$

$= |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 =$

$= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)\,(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 =$

Ausmultiplizieren ergibt

$= a_x^2b_x^2 + a_x^2b_y^2 + a_x^2b_z^2 + a_y^2b_x^2 + a_y^2b_y^2 + a_y^2b_z^2 + a_z^2b_x^2 + a_z^2b_y^2 + a_z^2b_z^2 - a_x^2b_x^2 - a_xb_xa_yb_y - a_xb_xa_zb_z - a_yb_ya_xb_x - a_y^2b_y^2 - a_yb_ya_zb_z - a_zb_za_xb_x - a_zb_za_yb_y - a_z^2b_z^2 =$

und Zusammenfassen

$= a_y^2b_z^2 - 2\, a_ya_zb_yb_z + a_z^2b_y^2 + a_z^2b_x^2 - 2\, a_za_xb_zb_x + a_x^2b_z^2 + a_x^2b_y^2 - 2\, a_xa_yb_xb_y + a_y^2b_x^2$

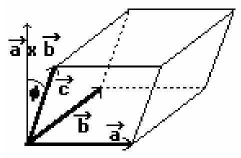
D.h., die beiden Ausdrücke sind äquivalent.

Spatprodukt, Raumprodukt

Das Spatpodukt ist dem Betrage nach gleich dem Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Spat)

Volumen $V = (\vec{a} \times \vec{b}) * |\, \vec{c}\, | \cos \phi$

$V = 0 \Leftrightarrow$ 3 Punkte liegen in einer Ebene $\Leftrightarrow$ das Vektortripel $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ist dann ausgeartet



$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$

Eigenschaften

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig, liegen in einer Ebene

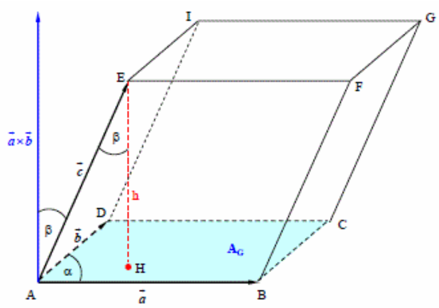
$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Linkssystem

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = - [\vec{b}\vec{a}\vec{c}] = - [\vec{a}\vec{c}\vec{b}] = - [\vec{c}\vec{b}\vec{a}]$

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ ... orientiertes Volumen des von den 3 Vektoren aufgespannten Spats

$|\, [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\, | / 6$ ... Volumen des aufgespannten Tetraeders

Die Geraden $\vec{x} = \vec{a} + t\, \vec{b}$ und $\vec{x} = \vec{c} + t\, \vec{d}$ sind genau dann windschief, wenn $[\vec{a} - \vec{c}\ \vec{b}\ \vec{d}\,] \neq 0$



Spatprodukt, Herleitung

Das Spatpodukt ist dem Betrage nach gleich dem Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Spat)

Herleitung:

Volumen des Prismas $V = A\, h$

Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD:

$A = |\, |\vec{a}|\, |\vec{b}| \sin \alpha\, |$

$V = |\, |\vec{a}|\, |\vec{b}| \sin \alpha\, |\ h$

Betrag des Kreuzproduktes ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms $V = |\vec{a} \times \vec{b}|\ h$

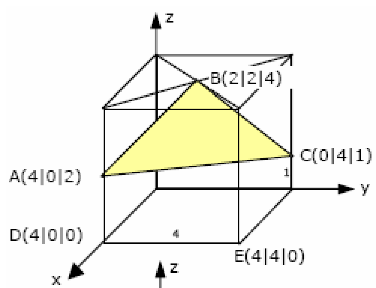
Winkelbeziehung im rechtwinkligen Dreieck Δ AHE: $\cos \beta = h/|\vec{c}|$

$V = |\, |\vec{a} \times \vec{b}|\ |\vec{c}| \cos \beta\,|$

Berechnung von π mit dem Skalarprodukt mit Hilfe der Vektoren $(\vec{a} \times \vec{b})$ und $\vec{c}$:

$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Vektorprodukt-Übungsausgabe



Aufgabe: A ist Kantenmittelpunkt des Würfels, siehe Figur.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (obere Abbildung)

Lösung: Über die Koordinaten der Punkte ergeben sich die Vektoren

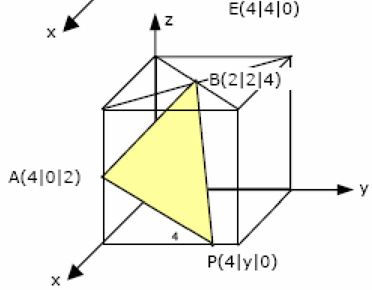
$\vec{AB} = (-2, 2, 2)$ und $\vec{AC} = (-4, 4, -1)$

Über das Vektorprodukt wird

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-10, -10, 0)$

und für den Flächeninhalt A

$A_{ABC} = 1/2 \sqrt{(100+100+0)} = 5 \sqrt{2}$



Aufgabe b) b) Ein Punkt P liegt auf der Kante DE. Welche Koordinaten hat P, wenn die Fläche des Dreiecks APB den Inhalt $A = 2 \sqrt{6}$ hat?

Lösung: $\vec{AP} = (0, y, -2)$ und $\vec{AB} = (-2, 2, 2)$

$\vec{AP} \times \vec{AB} = (2y+4, 4, 2y)$

Für das Quadrat der Flächen (Parallelogramm = doppeltes Dreieck) wird

$(2y + 4)^2 + 16 + y^2 = (2\ 2\sqrt{6})^2$

$y^2 + 2y - 8 = (y+4)\,(y-2) = 0$

$y_1 = -4$ liegt nicht auf der Kante

$y_2 = 2$ mit P(4; 2; 0) ist der gesuchte Punkt

Tripelprodukt (Vektorielles Doppelprodukt)

Graßmannscher Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} * \vec{c}) * \vec{b} - (\vec{a} * \vec{b}) * \vec{c}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} * (\vec{a} * \vec{c}) - \vec{a} * (\vec{b} * \vec{c})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

Der Vektor des Tripelproduktes liegt mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in einer Ebene

Die erste Gleichung wird oft $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b})$ geschrieben und bac-cab-Regel genannt.

Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Polare und axiale Vektoren

Polare Vektoren dienen der Darstellung von Größen mit Maßzahl und Raumrichtung, wie Geschwindigkeit und Beschleunigung, axiale Vektoren dagegen der Darstellung von Größen mit Maßzahl, Raumrichtung und Drehsinn, wie Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung. In der zeichnerischen Wiedergabe werden sie durch einen polaren bzw. axialen Pfeil unterschieden. In der mathematischen Behandlung besteht zwischen ihnen kein Unterschied.

Produkte mit vier Vektoren - Identität von Lagrange

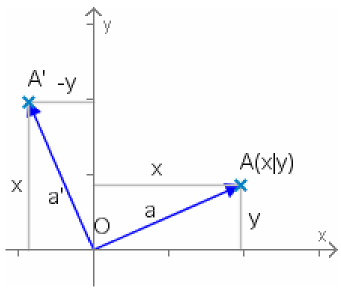
$$(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} * \vec{c}) * (\vec{b} * \vec{d}) - (\vec{b} * \vec{c}) * (\vec{a} * \vec{d})$$
$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} * \vec{b})^2$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}\,[\vec{a}\vec{b}\vec{d}] - \vec{d}\,[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{b}\,[\vec{a}\vec{c}\vec{d}] - \vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$$
$$((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) \times \vec{d} = (\vec{a}*\vec{c})*(\vec{b}\times\vec{d}) - (\vec{b}*\vec{c})*(\vec{a}\times\vec{d})$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Galilei-Transformation

... Transformation der Zeit und der Raumkoordinaten bei einer gleichförmigen
Bewegung mit einer konstanten Geschwindigkeit v (klassische Newtonsche Mechanik)

Orthokomplement



In der euklidischen Ebene existiert das Orthokomplement $\vec{a}^{\perp}$ eines Ortsvektors $\vec{a} = \binom{x}{y}$. Dieses bildet einen Ortsvektor und man definiert

$$\vec{a}^{\perp} = \binom{-y}{x}$$

$\vec{a}^{\perp}$ entsteht damit aus dem Vektor $\vec{a}$ durch Drehung um 90°.

Für Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der euklidischen Ebene und reelle Zahlen t gilt:

$$(\vec{a}^{\perp})^{\perp} = -\vec{a} \qquad (\vec{a} + \vec{b})^{\perp} = \vec{a}^{\perp} + \vec{b}^{\perp}$$
$$(t\,\vec{a})^{\perp} = t\,\vec{a}^{\perp} \qquad \langle \vec{a}^{\perp}, \vec{a} \rangle = 0$$
$$\langle \vec{a}^{\perp}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{b}^{\perp} \rangle \qquad ||\vec{a}^{\perp}|| = ||\vec{a}||$$

Damit ist $^{\perp}$ eine lineare Abbildung.

Für drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ der euklidischen Ebene gilt:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 + \langle \vec{a}, \vec{b}^{\perp} \rangle^2 = ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2$$
$$\langle \vec{a}, \vec{b}^{\perp} \rangle\,\vec{c} + \langle \vec{b}, \vec{c}^{\perp} \rangle\,\vec{a} + \langle \vec{c}, \vec{a}^{\perp} \rangle\,\vec{b} = 0$$

Die zweite Gleichung ergibt, dass drei Vektoren im R^2 linear abhängig sind. Aus der ersten Gleichung folgt unmittelbar die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Genetische Distanz

Als Maß für die genetische Unterschiedlichkeit verschiedener Völker wurde in der Biologie die genetische Distanz eingeführt.

Dazu untersucht man die auftretende Häufigkeit der Hauptblutgruppen des Volkes. Als genetische Distanz definiert man nun den Winkel zwischen den Blutgruppen-Einheitsvektoren, womit die Berechnung zu einer biologischen Anwendung der Vektorrechnung wird. Dabei werden die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen zu den Einheitsvektoren zusammengefasst.

Beabsichtigt man die genetische Distanz zu einem anderen Volk zu berechnen, stellt man dessen Vektor auf und ermittelt über das vierdimensionale Skalarprodukt den Winkel zwischen beiden Vektoren.

Achtung! Der Programmautor weist ausdrücklich daraufhin, dass die Berechnung der genetischen Distanz nichts mit der Bewertung der "Qualität von Völkern und Rassen" zu tun hat. Die genetische Distanz ist ausschließlich eine wissenschaftliche Größe mit deren Hilfe Aussagen, z.B. über die historische Entwicklung bestimmter Volksgruppen, gewonnen werden können. Nationalismus und geisteskranker Rassenwahn haben nichts mit Wissenschaft zu tun!

Kosinus-Ähnlichkeit

Kosinus-Ähnlichkeit ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Vektoren, genauer für die Ähnlichkeit ihrer Richtungen, nicht ihrer Beträge.

Liegen zwei Vektoren vor, so wird der Kosinus des eingeschlossenen Winkels berechnet.
Ist die Winkel = 0°, so ergibt sich für die Kosinus-Ähnlichkeit 1, sind die Vektoren senkrecht zueinander, d.h. vollständig unähnlich, so ergibt sich 0.
Der Kosinus des eingeschlossenen Winkels ist somit ein Maß dafür, ob zwei Vektoren ungefähr in die gleiche Richtung zeigen.

Die Kosinus-Ähnlichkeit wird in der Praxis zum Vergleich von Dokumenten, von Multimedia-Objekten, im Auffinden von Plagiaten, bei Suchmaschinen oder in der Kryptographie bei der Entschlüsselung chiffrierter Texte verwendet.
2011 gelang es, durch die Ermittlung der Kosinus-Ähnlichkeit der Zeichen-Platzierungsvektoren die Entschlüsselung des Codex Copiale, eines Dokuments in Geheimschrift.
Bei Textvergleichen verwendet man als Vektoren Häufigkeitsvektoren des Dokuments, entweder von Wörtern, Phrasen oder auch nur Buchstaben.
Alternativ wird zur Auswertung von Texten auch eine Buchstabenhäufigkeitsanalyse mit der Berechnung eines Koinzidenzindex genutzt.

Orthonormierungsverfahren

Methode, um aus einem gegebenen Satz $\vec{a_i}$, i = 1,...,m von m linear unabhängigen Vektoren im R^n ($n \geq m$) m paarweise orthogonale Vektoren $\vec{q_i}$, i = 1,...,m der Länge Eins zu konstruieren, die den gleichen Unterraum aufspannen wie die Vektoren $\vec{a_i}$.

Schmidtsches Orthonormierungsverfahren

Aus dem gegebenen Satz $\vec{a_i}$, i = 1,...,m von m linear unabhängigen Vektoren im R^n ($n \geq m$) werden m paarweise orthogonale Vektoren $\vec{q_i}$, i = 1,...,m der Länge 1 konstruiert, die den gleichen Unterraum aufspannen.
Man bildet der Reihe nach für i = 1,...,m:
Orthogonalisierung $\quad \vec{v_i} = \vec{a_i} - \Sigma (\vec{a_i} \bullet \vec{a_k})\, \vec{a_k}$; Summe von k = 1 bis i-1
Normierung $\quad \vec{q_i} = \vec{v_i} / |\vec{v_i}|$

QR-Zerlegung

Die Vektoren $\vec{a_i}$ und $\vec{q_i}$ des n-dimensionalen Raumes werden als Spalten einer n x m-Matrix A bzw. Q aufgefasst. Das Orthogonalisierungsverfahren entspricht der Aufgabe, für eine gegebene n x m-Matrix A eine orthogonale Matrix Q zu finden, so dass A = QR für eine geeignete rechte obere m x m-Dreiecksmatrix R ist.
QR-Zerlegungen spielen eine zentrale Rolle bei Eigenwertproblemen. Verfahren zur QR-Zerlegung sind das Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen und das Gram-Schmidt-Verfahren.

Gram-Schmidt-Verfahren

Pascal-Quelltext zur QR-Zerlegung (Orthonormieren von Basisvektoren) mit dem Gram-Schmidt-Verfahren

Eingabe: a[i,k], i=1..n, k=1..m
Ausgabe: a[i,k], i=1..n, k=1..m / r[i,k], i=1..n, k=i..m

```
BEGIN
FOR k:=1 TO m DO BEGIN     sum:=0 ;
  FOR i:=1 TO n DO sum:=sum+SQR(a[i,k]) ;
  r[k,k]:=SQRT(sum) ;    { Wenn r[k,k]=0, so sind Spalten von A nicht linear unabhängig}
  FOR i:=1 TO n DO a[i,k]:=a[i,k]/r[k,k] ;
  FOR j:=k+1 TO m DO BEGIN       sum:=0 ;
    FOR i=1 TO n DO sum:=sum+a[i,k]*a[i,j] ;       r[k,j]:=sum ;
    FOR i:=1 TO n DO a[i,j]:=a[i,j]-a[i,k]*r[k,j] ;
    END END END
```

Euklidischer Vektorraum

Um in abstrakten Vektorräumen Begriffe wie Länge, Winkel, Orthogonalität verwenden zu können, werden Euklidische Vektorräume eingeführt.

Definition

Es sei V ein reeller Vektorraum. Ist ϕ: $V \times V \to R$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften (statt $\phi(v,w)$ wird v * w geschrieben), dann gilt für alle $u,v,m \in V$ und für alle reelle r:

$v * w = w * v$	$(u + v) * w = u * w + v * w$
$r (v * w) = (r v) * w = v * (r w)$	$v * v > 0$ genau dann, wenn $v \neq 0$

ϕ heißt Skalarprodukt auf V. Ist auf V ein Skalarprodukt definiert, so heißt V Euklidischer Vektorraum.
Alternativ definiert man:
Einen Vektorraum V über den reellen Zahlen R versehen mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform σ: $V \times V \to R$ nennt man einen euklidischen Vektorraum. σ ist dann auch hier das Skalarprodukt.

Euklidische Norm
Mit $|| v || = \sqrt{(v * v)}$ wird die Euklidische Norm (Länge) von v bezeichnet. Der Winkel α zwischen v, w aus V wird über die Gleichung $\cos \alpha = v * w / (|| v || * || w ||)$ erklärt. Ist $v * w = 0$, so werden v und w zueinander orthogonal genannt.

Winkel in euklidischen Vektorräumen
Das Skalarprodukt $\sigma(a,b)$ kann zur Messung von Winkeln herangezogen werden. Man definiert für zwei Vektoren a und b:

$$\cos \Phi_{a,b} = \sigma(a,b) / (||a|| \, ||b||)$$

$\Phi_{a,b}$ ist der Winkel zwischen a und b. Der Quotient immer im Intervall [-1, 1], womit der Winkel berechenbar ist.
Da das Skalarprodukt symmetrisch ist, besitzt der Winkel keine Richtung, wodurch die Winkelgrößen im Intervall von 0 bis $\pi = 180°$ liegen.

Es seien a und b Vektoren eines euklidischen Vektorraums. Dann gilt:

$\Phi_{a,b} = \Phi_{b,a}$ $\qquad$ $\Phi_{a,-b} = \pi - \Phi_{a,b}$

$\Phi_{\alpha a,\beta b} = \Phi_{a,b}$, für $\alpha, \beta > 0$ $\qquad$ a, b sind linear abhängig $\Leftrightarrow \Phi_{a,b} \in \{0, \pi\}$

Kosinussatz in euklidischen Vektorräumen
Es seien a, b zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren eines euklidischen Vektorraums V. Dann gilt:

$$||a-b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 - 2 \, ||a|| \, ||b|| \cos \Phi_{a,b}$$

Nachweis:

$$||a-b||^2 = \alpha(a-b, a-b) = \sigma(a, a) + \sigma(b, b) - 2\sigma(a, b) =$$
$$= ||a||^2 + ||b||^2 - 2 \, ||a|| \, ||b|| \, \sigma(a,b)/(||a|| \, ||b||) =$$
$$= ||a||^2 + ||b||^2 - 2 \, ||a|| \, ||b|| \cos \Phi_{a,b}$$

Bilinearform
Es sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen R. Eine Abbildung σ heißt eine Bilinearform, wenn folgende Eigenschaften gelten:

$$\sigma(\alpha a + \beta b, c) = \alpha \, \sigma(a, c) + \beta \, \sigma(b, c)$$
$$\sigma(a, \alpha b + \beta c) = \alpha \, \sigma(a, b) + \beta \, \sigma(a, c)$$

Das bedeutet, dass σ in beiden Argumenten linear ist, daher auch der Name Bilinearform.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, wenn $\sigma(a, b) = \sigma(b, a)$ für alle $a, b \in V$ gilt.
Eine Bilinearform σ heißt positiv definit, wenn $\sigma(a, a) > 0$ für alle $a \neq 0$ gilt.

Eigenschaften positiv definiter symmetrischer Bilinearformen
Es sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen R und σ eine positiv definite symmetrische Bilinearform.
Dann gilt für alle $a \in V$: $\quad \sigma(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
Für jede Bilinearform σ gilt: $\quad \sigma(a, 0) = \sigma(0, a) = 0$

Nachweis: $\quad \sigma(a, 0) = \sigma(a, a-a) = \sigma(a, a) - \sigma(a, a) = 0$; $\sigma(0, a)$ folgt analog.
Ist $\sigma(a, 0) = 0$, so muss wegen der positiven Definitheit $a = 0$ gelten; andernfalls wäre ja $\sigma(a, a) > 0$.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Bilinearformen
Es sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen R und σ eine positiv definite symmetrische Bilinearform.
Dann gilt für alle $a, b \in V$: $\quad [\sigma(a, b)]^2 \leq \sigma(a, a) \cdot \sigma(b, b)$
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn a und b linear abhängig sind.

Für den Zusammenhang zwischen positiv definiten symmetrischen Bilinearformen und normierten Vektorräumen gilt:
Es sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen und σ eine positiv definite symmetrische Bilinearform.
Dann gibt es eine von dieser Bilinearform induzierte Norm $|| \; ||$. Diese ist für einen Vektor $a \in V$ definiert mit $\quad ||a|| = \sqrt{\sigma(a,a)}$
Für alle $a, b \in V$ gilt: $|\sigma(a,b)| \leq ||a|| \, ||b||$
Auf Grund der positiven Definitheit von σ ist die Norm wohldefiniert und $||a|| > 0$ für $a \neq 0$. Für $\lambda \in R$ gilt

$$||\lambda a|| = \sqrt{\sigma(\lambda a,\lambda a)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sigma(a,a)} = |\lambda| \, ||a||$$

Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht.

Parallelogrammgesetz

$$||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

Es sei V ein normierter Vektorraum. Dann gilt in V genau dann das Parallelogrammgesetz, wenn die Norm von einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform erzeugt wird.

Orthogonalität und Norm
Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit einem Skalarprodukt und der daraus induzierten Norm $|| \; ||$.
Dann gilt für alle $a, b \in V$:

$$a \perp b \Leftrightarrow ||a+b|| = ||a-b||$$

Folgerung: Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.

Man kann die Vektoren a und b als Seiten eines Vierecks auffassen, dann sind a + b und a - b aber genau die Diagonalen.

Unterraum
Gegeben sei ein Vektorraum V, der aus dem Körper K, der Menge G und den Verknüpfungen R und S besteht.
Ein Gebilde V' nennt sich Unterraum von V, wenn dem Gebilde V' der gleiche Körper K, die gleichen Verknüpfungen R und S, und eine Teilmenge G' der Menge G zugrundeliegen, und das Gebilde V' selbst ein Vektorraum ist.

Unterraum-Kriterium
Gegeben sei ein Vektorraum V, der aus dem Körper K, der Menge G und den Verknüpfungen R und S besteht.
Ein Gebilde V' nennt sich Unterraum von V, wenn dem Gebilde V' der gleiche Körper K, die gleichen Verknüpfungen R und S, und eine Teilmenge G' der Menge G zugrundeliegen, und das Gebilde V' die Axiome R1, S1 und R4 erfüllt.
Axiom R1 ... Abgeschlossenheit der Addition
Axiom S1 ... Produkt aus Skalar und Vektor ergibt Vektor
Axiom R4 ... Existenz inverser Elemente
Ist V ein Vektorraum und I eine beliebige Indexmenge. Wenn alle U_i Teilräume von V sind, so ist auch der Durchschnitt aller U_i ein Untervektorraum von V. Dies ist im Allgemeinen bei der Vereinigung von Teilräumen nicht der Fall.

Beispiel: Teilmenge der 2×2-Diagonalmatrizen bilden einen Unterraum des Vektorraumes der 2×2-Matrizen

Austauschlemma im Vektorraum
Gegeben sei eine Vektorraum V, eine Basis B= $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor w des Vektorraumes V. Dann gilt:
Fügt man den Vektor w zur Basis B hinzu, und entfernt man im Gegenzug einen geeigneten Vektor aus der Basis B, so erhält man eine neue Basis des Vektorraumes V.
Dabei gilt: Es gibt immer mindestens einen Vektor v aus B der geeignet ist, um gegen w ausgetauscht zu werden.
Ausgetauscht werden können die Vektoren v, welche in der Linearkombination von w:

$$w = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \ldots + k_n \cdot v_n$$

einen Koeffizienten k_i haben, der von Null verschieden ist.

Steinitzscher Austauschsatz
Gegeben seien:1. ein Vektorraum V
2. eine Basis B dieses Vektorraumes: B = $\{b_1, \ldots, b_n\}$
3. eine linear unabhängige Menge A aus Vektoren dieses Vektorraumes: A = $\{a_1, \ldots, a_m\}$
Daraus folgt: 1. $n \geq m$
2. fügt man zur Basis B = $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die linear unabhängige Menge A = $\{a_1, \ldots, a_m\}$ hinzu, und entfernt im Gegenzug m Vektoren aus der Basis b, so erhält man eine neue Basis B' = $\{a_1, \ldots, a_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$
Jede linear unabhängige Menge A = $\{a_1, \ldots, a_m\}$ kann durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus einer Basis B = $\{b_1, \ldots, b_n\}$ zu einer Basis B' ergänzt werden:
B' = $\{a_1, \ldots, a_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$

Nebenklasse
Sei U ein Unterraum des Vektorraumes V. Addiert man zu jedem Element des Unterraumes u einen Vektor v aus V hinzu, so erhält man die Nebenklasse $v+U = \{v+u_1, v+u_2, v+u_3, \ldots\}$
Sind zwei Nebenklassen v+U und w+U gleich, dann liegt die Differenz der Repräsentanten (v-w) in U.
Umgekehrt gilt: Liegt die Differenz zweier Repräsentanten in U, dann sind sie Repräsentanten derselben Nebenklasse.
Jedes Element der Nebenklasse v+U ist auch Repräsentant, und umgekehrt ist jeder Repräsentant von v+U auch Element von v+U.

Faktormengen
Die Faktormenge V/U ist die Menge aller Nebenklassen von U, also die Menge V/U = {v+U, w+U, x+U, y+U...}

Lineare Hülle
$\vec{x}$ sei Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ eines Vektorraumes.
Die lineare Hülle von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ ist die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, d.h. die Menge

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = \{ x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_k\vec{a}_k \mid x_i \in R \}$$

Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Ist $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$ die lineare Hülle der m Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, so lässt sich schrittweise eine orthogonale Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ von L gewinnen.

Ist $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, so setzt man $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$

Ist $\vec{a}_2 \notin L(\vec{a}_1) = L(\vec{b}_1)$, so setzt man $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_2 * \vec{b}_1 / (\vec{b}_1)^2\, \vec{b}_1$

Ist $\vec{a}_3 \notin L(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = L(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$, so setzt man $\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \vec{a}_3 * \vec{b}_1 / (\vec{b}_1)^2\, \vec{b}_1 - \vec{a}_3 * \vec{b}_2 / (\vec{b}_2)^2\, \vec{b}_2$

usw...

Das Verfahren bricht ab, wenn $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m) = L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ ist, d.h. kein Vektor $\vec{a}_{k+1}$ gefunden werden kann, der nicht in $L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ liegt.

Normiert man die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$, so erhält man eine Orthonormalbasis.

Orthogonale Menge, orthonormale Menge

Eine endliche oder unendliche Menge von Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ eines Vektorraums heißt orthogonale Menge, wenn für alle i, j ($i \neq j$) $\vec{x}_i \bullet \vec{x}_j = 0$
gilt, d.h. alle Vektoren paarweise zueinander senkrechte stehen.

Orthonormal heißt die Menge von Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ eines Vektorraums, wenn für alle i $|\vec{x}_i| = 1$
gilt, d.h. jeder Vektor die Länge 1 besitzt. Ein Vektor der Länge 1 heißt normalisiert oder normiert.

Eine Menge von linear abhängigen Vektoren $\vec{x}_i$ kann mit dem Gram-Schmidt-Verfahren in eine orthonormale Menge von Vektoren $\vec{y}_i$ umgewandelt werden, die linear abhängig von den Vektoren $\vec{x}_i$ sind.

Ein Linearoperator T eines Vektorraums V ist eine Regel, die jedem Vektor $\vec{a}$ von V einen eindeutige Vektor $T\vec{a}$ aus V zuordnet, so dass $T(\alpha \vec{a} + \vec{b}) = \alpha T\vec{a} + T\vec{b}$
für jedes Vektorpaar $\vec{a}$, $\vec{b}$ und jede komplexe Zahl α zuordnet.

Der identische Linearoperator I ordnet jedem $\vec{a}$ sich selbst zu. Zwei Operatoren T und U sind gleich, wenn sie die gleiche Zuordnung ausführen.

Unter dem Linearoperatorprodukt TU wird $(TU)\,\vec{a} = T\,(U\,\vec{a})$
verstanden. Im Allgemeinen ist das Linearoperatorprodukt nicht kommutativ. Unter dem Kommutator versteht man

$$[T, U] = TU - UT$$

Zwei Operatoren T und U sind vertauschbar, wenn ihr Kommutator der Nulloperator ist.

Existiert zu einem Operator T ein Operator U mit TU = UT = I, so heißt U inverser Linearoperator und wird mit T^{-1} bezeichnet.

Ein Operator T mit einem inversen Operator heißt nichtsingulär, ohne T^{-1} singulär. Sind S und T nichtsingulär, so gilt $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Vektoreigenvektor, Vektoreigenwert

T sei ein Linearoperator auf dem Vektorraum V. Betrachtet werden alle Nichtnullvektoren von V, die bei der Anwendung von T nur ihre Größe, aber nicht die Richtung ändern. Insbesondere gibt es einen Vektor $\vec{f}$ und eine komplexe Zahl λ mit

$$T\,\vec{f} = \lambda\,\vec{f}$$

Jeder solcher Vektor $\vec{f}$ heißt Eigenvektor oder charakteristischer Vektor. Zur Unterscheidung von Eigenvektoren bei Matrizen wird hier von einem Vektoreigenvektor gesprochen.

Die komplexe Zahl λ heißt dann Eigenwert oder charakteristischer Wert, hier Vektoreigenwert, von T in Bezug zum Vektor $\vec{f}$.

Beispiel: Im Vektorraum V aller ungeraden trigonometrische Polynome der Form

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$$

wird der Operator $T\,f(x) = -\,f''(x)$
betrachtet. Ein Eigenvektor dieses Operators ist dann ein f(x) von V mit $-f''(x) = \lambda\, f(x)$
Dies sind gerade die Funktionen $f_n(x) = A_n \sin nx\ ;\ n = 1,2,3,\ldots$
mit den Eigenwerten $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$

Ein Operator T* heißt adjungierter Operator des Operators T, wenn für alle Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus V

$\vec{x} \bullet T\vec{y} = T^*\vec{x} \bullet \vec{y}$ gilt.

Hermitescher Operator

Ein Vektorraum, in dem jeder Operator einen adjungierten Operator besitzt, ist ein vollständiger Vektorraum oder Hilbert-Raum. Ein Operator heißt hermitesch, wenn er zu sich selbst adjungiert ist, d.h.

$$\vec{x} \bullet T\vec{y} = T\vec{x} \bullet \vec{y}$$

Für adjungierte und Hermitesche Operatoren gilt:

1) Sind T, U Operatoren und T*, U* die adjungierten Operatoren, dann existiert zu TU der adjungierte Operator mit U*T*.
2) Ist T ein Hermitescher Operator und $\vec{x}$ ein beliebiger Vektor von V, dann ist $\vec{x} \bullet T\vec{x}$ eine reelle Zahl.
3) Die Eigenwerte eines Hermiteschen Operators sind reell.

4) Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Eigenvektoren des Hermiteschen Operators T mit den verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2, so sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonal zueinander.

Unitärer Operator

Ein Operator U heißt unitär, wenn er einen inversen Operator U^{-1} und einen adjungierten Operator U* besitzt und beide gleich sind: $U^{-1} = U^*$

Ein Operator U heißt weiterhin isometrisch, wenn er das innere Produkt (Skalarprodukt) nicht beeinflusst, d.h.

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = U\vec{x} \bullet U\vec{y}$$

Ein isometrischer Operator verändert von keinem Vektor die Länge. Existiert der adjungierte Operator U*, so ist U genau dann isometrisch, wenn U unitär ist.

Unitärer Raum

Die unitäre Geometrie basiert auf dem Begriff des positiv definiten Skalarprodukts, welches das klassische Skalarprodukt uv für Vektoren u und v verallgemeinert.

Alle wichtigen Begriffe der unitären Geometrie erlauben, eine direkte physikalische Interpretation im Quarkmodell der Elementarteilchen.

Definition: Unter einem unitären Raum versteht man einen linearen Raum über K, auf dem ein Skalarprodukt gegeben ist.

Das bedeutet, jedem Vektorpaar $u, v \in X$ wird eine Zahl $(u, v) \in K$ zugeordnet, so dass für alle $u, v, w \in X$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

1) $(u, u) \geq 0$; $(u, u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$
2) $(w, \alpha u + \beta v) = \alpha(w, u) + \beta(w, v)$
3) $(u, v)^* = (v, u)$

Aus 2) und (3) folgt

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha^*(u,w) + \beta^*(v,w) \text{ für alle } u,v,w \in X,\ \alpha,\beta \in K.$$

Dabei bezeichnet α^* die konjugierte komplexe Zahl zu α, d.h., im Falle eines reellen Raumes K = R kann man überall die Querstriche weglassen.

Hilbertraum: Jeder endlichdimensionale unitäre Raum ist zugleich ein Hilbertraum im Sinne der allgemeinen Definition.

Affine Koordinaten

Affine Koordinaten sind eine Verallgemeinerung der kartesischen Koordinaten auf ein System aus drei linear unabhängigen, also auch nicht mehr zwingend rechtwinklig aufeinander stehenden nichtkomplanaren Grundvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ mit drei Koeffizienten a^1, a^2, a^3 (die oberen Indizes sind keine Exponenten!).

Für den Vektor $\vec{a}$ ergibt sich dann $\vec{a} = a^1 \vec{e_1} + a^2 \vec{e_2} + a^3 \vec{e_3}$

oder $\vec{a} = \{ a^1, a^2, a^3 \}$

Diese Schreibweise ist vorteilhaft, als die Skalare a^1, a^2, a^3 die kontravarianten Koordinaten eines Vektors sind.

Für die Linearkombination der Vektoren sowie für die Summe und die Differenz zweier Vektoren gelten die Komponentengleichungen

$k^1 = \alpha a^1 + \beta b^1 + \ldots + \delta d^1$ $\qquad$ $k^2 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots + \delta d^2$

$k^3 = \alpha a^3 + \beta b^3 + \ldots + \delta d^3$ $\qquad$ $c^1 = a^1 \pm b^1$ usw.

Man spricht von affinen Koordinaten, wenn die Koordinatenachsen durch Geraden gebildet werden. Affine Koordinaten können sowohl schiefwinklig als auch orthogonal; senkrecht; sein. Sind die Koordinaten sowohl geradlinig als auch senkrecht, so spricht man von kartesischen Koordinaten.

Graßmanns Vektorrechnung

1840 verfasste Hermann Graßmann ein auf hohem Niveau geschriebenes Werk der Vektorrechnung, das auch bereits die Vektoranalysis (Einbeziehung des Vektorbegriffs in die Differential- und Integralrechnung) umfasste. Aus dieser Arbeit schöpfte Graßmann eine Vielzahl seiner mathematischen Ideen für „Die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik" von 1844. Dieses Buch war jedoch seiner Zeit weit voraus und ist selbst heute nicht einfach zu verstehen und fand deshalb in der Öffentlichkeit keine Beachtung. Dennoch muss Graßmann als der Begründer der Vektorrechnung gelten.

Grundgedanken von Graßmanns Vektorrechnung:

1. Beziehungen zwischen räumlichen Größen können mithilfe algebraischer Verknüpfungsgesetze beschrieben werden
2. Auffassung der Strecken AB und BA als entgegengesetzte Größen (Betrachtung des Negativen in der Geometrie), neben der Länge einer Strecke ist nun deren Richtung von Bedeutung
3. im Unterschied zu Hamilton, ist Graßmann daran interessiert seine Gedanken auf n Dimensionen auszudehnen
4. Es gilt AB+BC=AC auch dann, wenn A, B, C nicht in einer geraden Linie liegen
5. wenn man alle Elemente einer Strecke denselben Änderungen (heute: Parallelverschiebungen) unterwirft, so ist die dadurch entstehende Strecke der ursprünglichen gleich

6. es gelten die Rechengesetze: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz
7. das geometrische Produkt zweier Strecken ist der Flächeninhalt des aus ihnen gebildeten Parallelogramms

Es kamen bereits die Begriffe der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit, der Basis, der Dimension, wenn auch unter anderem Namen bei Graßmann alle vor. Graßmann spricht von Strecken und Größen, das Wort „Vektor" kommt bei ihm nie vor.

Tensorrechnung

$$f\left(\vec{PQ}+\vec{PR}\right)=f\left(\vec{PQ}\right)+f\left(\vec{PR}\right)$$
$$f\left(\lambda\cdot\vec{PQ}\right)=\lambda\cdot f\left(\vec{PQ}\right)$$

Geometrischer Tensor
Tensor als geometrisches Objekt: Gilt für die Verzerrung f der vier Punkte P, Q, R, S eines Parallelogramms die Vorschrift so ist f von ein geometrischer Tensor 2. Stufe

Tensor
Ist eine allgemeine Abbildung A aus V^n linear, so spricht man von einem Tensor 2. Stufe.
Ein Tensor nullter Stufe hat nur eine Komponente, d.h., er ist ein Skalar.

Lineare Abbildung
Gegeben seien V^n als ein n-dimensionaler Raum sowie die Abbildung A: $V^n \to V^n$. A heißt dann lineare Abbildung, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind: $\vec{a}, \vec{b} \in V^n$, $\lambda \in R$:

$A(\vec{a} + \vec{b}) = A(\vec{a}) + A(\vec{b})$ $\qquad$ $A(\lambda \vec{a}) = \lambda A(\vec{a})$

Beispiele für Tensoren
Drehtensor, Dielektrischer Tensor, Polarisationstensor, Trägheitstensor, Deformationstensor, Spannungstensor, ...

Tensor 1. Stufe
Ein Tensor erster Stufe hat 3 Komponenten t_1, t_2 und t_3 mit dem Transformationsgesetz
$t_\mu = \Sigma\, a_{\mu i}\, t_i$; i = 1,2,3
Dies ist das Transformationsgesetz für Vektoren, d.h., ein Vektor ist ein Tensor 1. Stufe.

$$D=\begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}=\underline{u}\cdot\underline{v}^T$$

Projektionstensor
Gegeben sei ein Vektor $\vec{b} \in V^n$. Die nachfolgende Projektionsabbildung ist dann ein Tensor: $P(\vec{x}) = \mathrm{Proj}_{\vec{b}}\, \vec{x} = \vec{x}\, \vec{b} \,/\, |\vec{b}|^2\, \vec{b}$
Koordinatendarstellung von P: $P_{ji} = P(\vec{e_i})\, \vec{e_j} = \vec{e_i}\, \vec{b} \,/\, |\vec{b}|^2\, \vec{b}\, \vec{e_j} = b_i\, b_j \,/\, |\vec{b}|^2$

Dyadisches Produkt zweier Vektoren
Die Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ seien fest. Dann ist folgende Abbildung D ein Tensor:
$D(\vec{w}) = D_{\vec{u}\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{u}\, (\vec{v}\, \vec{w})$ ... $\vec{w} \in V^n$

Koordinatendarstellung: $\qquad d_{ij} = D(e_{i\in} V^n)\, e_{j\in} V^n = u_j\, v_i$

$$S_{\underline{u}}=E-2\cdot\underline{u}\cdot\underline{u}^T=\begin{pmatrix} 1-2u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & 1-2u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & 1-2u_n^2 \end{pmatrix}$$

Spiegelungstensor
Es sei der Vektor $\vec{u} \in V^n$ mit $||\vec{u}||=1$. Dann stellt
$S_{\vec{u}} = 1 - 2\, D_{\vec{u}\vec{u}}(x)$
eine Spiegelung an der Ebene E: $\vec{u}\, \vec{x} = 0$ dar. $S_{\vec{u}}$ heißt Spiegelungstensor. $D_{\vec{u}\vec{u}}(x)$ ist das dyadische Produkt.
Die Koordinatendarstellung dieser Spiegelung ist in der Abbildung zu sehen.

Daraus folgt:
1. $S_{\vec{u}}$ ist eine symmetrische Matrix
2. $S_{\vec{u}}$ ist orthogonal
3. $S_{\vec{u}}$ ist zu sich selbst invers: $S^2_{\vec{u}} = E$

$$D_{\underline{a}}(\varphi)=\cos\varphi\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-\cos\varphi)\cdot\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{pmatrix}+\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$$

Drehtensor
Drehtensor: Drehung im Raum R^3 um eine feste Drehachse
Es sei der Vektor $\vec{a} \neq \vec{0} \in V^3$, Voraussetzung: $||a||=1$.
Die Drehung $D_{\vec{a}}(\varphi)$ aller Vektoren um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn um eine Drehachse der Richtung $\vec{a}$ ist ein Tensor.
Es gilt die in der Abbildung gezeigte Gleichung. Die Determinante det(D) eines Drehtensors beträgt immer +1.

Eulersche Drehmatrizen

$$E_3(\varphi) = D_{e_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2(\varphi) = D_{e_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$E_1(\varphi) = D_{e_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die drei Spezialfälle der allgemeinen Drehtensoren ergeben sich durch Einsetzen der drei Basisvektoren $e_1^{\rightarrow}$, $e_2^{\rightarrow}$ und $e_3^{\rightarrow}$ für $a^{\rightarrow}$. Es entstehen dabei Drehtensoren um die drei Achsen des Koordinatensystems.

Drehung um die $e_3^{\rightarrow}$-Achse (z-Achse)

Drehung um die $e_2^{\rightarrow}$-Achse (y-Achse)

Drehung um die $e_1^{\rightarrow}$-Achse (x-Achse)

Verkettung von Drehtensoren

Ist D eine Eulersche Drehmatrix, dann gibt es drei Winkel α, β, γ, so dass Folgendes gilt:

$$D = E_1(\alpha) * E_2(\beta) * E_3(\gamma)$$

Ausmultipliziert ergibt sich als Drehmatrix die dargestellte Form:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\gamma\cdot\cos\alpha - \sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta & -\sin\gamma\cdot\cos\alpha - \cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta & \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos\gamma\cdot\sin\alpha - \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta & -\sin\gamma\cdot\sin\alpha - \cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta & -\cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\gamma\cdot\sin\beta & \cos\gamma\cdot\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung der Translation von Vektoren

Es sei der Vektor $a^{\rightarrow} \in V^3$ ein fester Vektor. Dann ist die Abbildung T: $x^{\rightarrow} \dashrightarrow x^{\rightarrow} - a^{\rightarrow}$, $x^{\rightarrow} \in V^3$ eine Translation, kein Tensor. Ist nun T die Koordinatendarstellung eines Tensors in der Basis $(e^{\rightarrow}_1, e^{\rightarrow}_2, e^{\rightarrow}_3)$ und T' die Koordinatendarstellung desselben Tensors in der Basis $(e^{\rightarrow}_1', e^{\rightarrow}_2', e^{\rightarrow}_3')$, so gilt T = T'. Dies liegt an der Invarianz der Basisvektoren bei Translation.

Orthogonale Transformationen

Es sei P eine orthogonale Transformation des R^3. Aus dem Basisvektor $e^{\rightarrow}_1$ wird damit der Basisvektor $e^{\rightarrow}_1'$:

$$P: (e^{\rightarrow}_1, e^{\rightarrow}_2, e^{\rightarrow}_3) \dashrightarrow (e^{\rightarrow}_1', e^{\rightarrow}_2', e^{\rightarrow}_3')$$

$$e^{\rightarrow}_j' = P * e^{\rightarrow}_j$$

Das entstehende Koordinatensystem ist wieder orthogonal. Es gilt des weiteren:

$$P^T P = E \dashrightarrow P^T e^{\rightarrow}_j' = P^T P e^{\rightarrow}_j = e^{\rightarrow}_j$$

Wenn det(P) = +1, d.h. Drehung, dann ist $(e^{\rightarrow}_1', e^{\rightarrow}_2', e^{\rightarrow}_3')$ wieder ein Rechtssystem.

Transformationsverhalten eines Vektors

Der Vektor $a^{\rightarrow}$ bezüglich der ursprünglichen Basis $(e^{\rightarrow}_1, e^{\rightarrow}_2, e^{\rightarrow}_3)$ wird nach der Transformation P zu $a^{\rightarrow}{}' = P \cdot a^{\rightarrow} \Leftrightarrow a^{\rightarrow}_j{}' = \Sigma\, a_i\, p_{ij}$; i=1,2,3. Hierbei ist p_{ij} eine Komponente der Transformationmatrix P.

Transformationsverhalten von Tensoren

Ist T ein Tensor mit den Matrixkomponenten t_{ji} und P eine orthogonale Transformation des R^3, ergibt sich Folgendes:

Matrixkomponente von T	$t_{ji}' = T(e^{\rightarrow}_j') \cdot e^{\rightarrow}_j' = \Sigma\,\Sigma\, p_{lj}\, p_{ki}\, t_{lk}$ Summenbildung für k=1,2,3 und l=1,2,3
Matrix T'	$T' = P^{-1} \cdot T \cdot P = P^T \cdot T \cdot P$

Erzeugt der Basiswechsel nicht-orthogonale Basisvektoren, so werden die Transformationformeln komplizierter.

Hyperfläche 2.Grades oder Quadrik

Man definiert folgende Funktion $Q(x^{\rightarrow})$: $R^n \rightarrow R$, $a_{ik}, b_k, c \in R$

$$Q(x^{\rightarrow}) = \Sigma\,(i=1..n)\,\Sigma\,(k=1..n)\, a_{ik}\, x_i\, x_k + 2\,\Sigma\,(k=1..n)\, b_k\, x_k + c$$

$$= x^{\rightarrow T} A\, x^{\rightarrow} + 2\, b^{\rightarrow T} x^{\rightarrow} + c$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_{A1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{A2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{An} \end{pmatrix}$$

Die hier auftretende A muss symmetrisch sein. Die Menge der Punkte P mit

$$O^{\rightarrow}P = x^{\rightarrow} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,$$

welche die Gleichung $Q(x^{\rightarrow}) = 0$ erfüllt, heißt Hyperfläche 2.Grades oder eine Quadrik im R^n.

Mittelpunkt einer Quadrik

Betrachtet man die Translation $x^{\rightarrow} = x'^{\rightarrow} + p^{\rightarrow}$ der Quadrik um $p^{\rightarrow}$, so gilt:

$$Q(x'^{\rightarrow}+p^{\rightarrow}) = x'^{\rightarrow T} A\, x'^{\rightarrow} + 2\,(p^{\rightarrow T} A + b^{\rightarrow t})\, x'^{\rightarrow} + Q(p^{\rightarrow})$$

Ist nun die Gleichung $Ap^{\rightarrow} = -b^{\rightarrow}$ lösbar, so besitzt $Q(x^{\rightarrow})$ ein Zentrum, für das gilt:

$Z = \{ p^{\rightarrow} \mid Ap^{\rightarrow} = -b^{\rightarrow} \} = \{m^{\rightarrow}\}$

$m^{\rightarrow}$ heißt Mittelpunkt der Quadrik.

Normalform einer Quadrik

Mit Hilfe geeigneter Koordinatentransformationen lässt sich jede Quadrik auf eine der beiden folgenden Normalformen bringen:

1. Fall: Zentrum der Quadrik ist verschieden der leeren Menge

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + \gamma = 0$$

mit r = Rang(A), die λ_i sind die Eigenwerte von A, die ungleich Null sind

2. Fall: Zentrum der Quadrik ist die leere Menge

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + 2\gamma y_n = 0$$

mit $r = \text{Rang}(A) < n$, $\gamma > 0$, die λ_i sind die Eigenwerte von A, die ungleich Null sind

Klassifikation von Quadriken

Gegeben $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2 \vec{b}^T \vec{x} + c$

Umformungen

$Q(\vec{x} + \vec{m}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2(A \vec{m} + \vec{x})^T \vec{x} + Q(\vec{m})$

$Q(\vec{m}) = \vec{b}^T \vec{m} + c$

Auswertung der abgebildeten Matrix, Ermittlung von P

$Q(P \vec{x}) = \vec{x}^T P^T A P \vec{x} + \vec{b}^T P \vec{x} + c$

$Q(P \vec{x} + \vec{m}) = \vec{x}^T P^T A P \vec{x} + 2(A \vec{m} + \vec{b})^T P \vec{x} + Q(\vec{m})$

$$Q(\underline{x}) = \underline{u}^T \begin{pmatrix} \lambda_{A1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{An} \end{pmatrix} \underline{u} + Q(\underline{m})$$

Klassifikation von Quadriken, Auswertung

1.Fall: $A\vec{m} = -\vec{b}$ ist lösbar; es liegt eine Zentrumsquadrik vor

Schritte: Bestimmen von $\vec{m}$ und $Q(\vec{m})$. Bestimmen der Eigenwerte und Eigenvektoren von A. (u.U. Bestimmung des Typs)

Bestimmen der Drehmatrix P aus den Eigenvektoren von A. Setze die neuen Koordinaten:

$\vec{u} = P^T (\vec{x} - \vec{m})$ ... $\vec{x} = P \vec{u} + \vec{m}$

Daraus ergibt sich die abgebildete Gleichung und die Normalform im R^3: $\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + \gamma = 0$ und entsprechend der Tabelle der Typ der Quadrik

λ_1	λ_2	λ_3	γ	Typ
+	+	+	-	Ellipsoid
+	+	-	+	zweischaliges Hyperboloid
+	+	-	-	einschaliges Hyperboloid
+	+	-	0	Kegel mit Spitze in m
+	+	0	-	elliptischer Zylinder
+	-	0	+/-	hyperbolischer Zylinder
+	+	0	0	1 Gerade
+	-	0	0	2 Ebenen mit Schnitt
+	0	0	-	2 parallele Ebenen
+	0	0	0	Doppelebene

2.Fall: $A\vec{m} = -\vec{b}$ ist nicht lösbar; es liegt keine Zentrumsquadrik vor

Es folgt daraus, dass 0 ein Eigenwert von A ist, denn det(A) = det(A - 0E) = 0

Schritte:

1. Bestimmen der Eigenwerte von A.
2. Bestimmen der Eigenvektoren $\nu_1, \ldots, \nu_r$ zu den $\lambda_i = 0$
3. Bestimmen der Eigenvektoren ν_i zu den $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{n-1} = 0$ mit $\vec{\nu_i} \perp \vec{b}$
4. Bestimmen von ν_n
5. Quadratische Ergänzung
6. Normalform im R^3: $\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + 2\gamma u_3 = 0$

und entsprechend der Tabelle der Typ der Quadrik

λ_1	λ_2	λ_3	γ	Typ
+	+	0	+/-	elliptisches Paraboloid
+	-	0	+/-	hyperbolisches Paraboloid
+	0	0	+/-	parabolischer Zylinder

Superquadriken

Superquadriken wurden als Erweiterung der Quadriken von dem dänischen Designer Peit Hein veröffentlicht. Ihre allgemeine Formel beschreibt symmetrische Objekte:

$$f(x,y,z) = (((x-x_m)/a_1)^{2/e}2 + ((y-y_m)/a_2)^{2/e}2)^{e}2^{/e}1 + ((z-z_m)/a_3)^{2/e}1$$

Dabei ist $M = (x_m, y_m, z_m)$ der Mittelpunkt und die Parameter a_1, a_2 und a_3 geben die Ausdehnung in der x-, y- und z-Richtung an. Die Form wird durch e_1 und e_2 beschrieben. So ergibt sich zum Beispiel für $e_1 = e_2 = 1$ ein Ellipsoid, für $e_1 = 0.1$; $e_2 = 1$ ein Zylinder und für $e_1 = 0.1$; $e_2 = 0.1$ ein Quader.

Superquadriken sind geeignet als verschiedenartig abgerundete Grundformen. Superquadriken bilden eine mächtigere Familie verschiedener Formen als die Quadriken: Superellipsoid, Superhyperboloid und Supertorus.
Die Oberfläche des Superellipsoids wird implizit durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$((x/a_1)^{2/e_2} + (y/a_2)^{2/e_2})^{e_2/e_1} + (z/a_3)^{2/e_1} = 1$$

Die Parameter e_1 und e_2 bestimmen die Form des Superellipsoids entlang der beiden sphärischen Komponenten. Demzufolge ist für $e_1 = e_2 = 1$ und $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ diese Oberfläche eine Kugel.
Abbildung: Superellipsoid

Krummlinige Koordinaten

Gegeben seien drei Eckpunkte eines zu den Koordinatenachsen parallelen Rechtecks im R^2 durch deren Ortvektoren

$$\vec{x}_0,\ \vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \Delta x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \vec{x}_0 + \Delta x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Verzerrung des Rechtecks mit dem Flächeninhalt $F_Q = |\Delta x_1\, \Delta x_2|$ in ein Parallelogramm, dargestellt durch die neuen Eckpunkte

$$\vec{f}(\vec{x}_0),\ \vec{f}(\vec{x}_1),\ \vec{f}(\vec{x}_2)$$

mit der Funktion $\vec{f}$ ergibt für den Grenzwert der Verhältnisse zwischen dem ursprünglichen Flächeninhalt F_Q und dem neuen Flächeninhalt F_P:

$$\lim_{\Delta xi \to 0} F_P/F_Q = |\det(D\,\vec{f}(\vec{x}_0))|$$

Diese Flächenverzerrung im zweidimensionalen Raum lässt sich analog übertragen auf Gebilde im R^3. Dort stellt sie die Volumenverzerrung im dreidimensionalen Raum dar. Wird bei solchen Verzerrungen kein begrenztes Objekt betrachtet, sondern eine offene Menge U in eine offene Menge V verzerrt, so spricht man bei $\vec{f}$ von der Koordinatentransformation von U auf V.
Für die Umkehrung einer solchen Koordinatentransformation gilt unter der Voraussetzung, dass $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ und $\vec{x} \in U$: $\det(D\,\vec{f}^{-1}(\vec{y})) = 1 / \det(D\,\vec{f}(\vec{x}))$

Jacobideterminante oder Funktionaldeterminante

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \det(D\,\vec{f}(\vec{x}))$$

Transformationsformeln krummliniger Koordinaten

Polarkoordinaten

Koordinatentransformation

$$\vec{f}: \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f1(r,\phi) \\ f2(r,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}^{-1}: \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f1(r,\phi)^{-1} \\ f2(r,\phi)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$$

Jacobideterminante von f

$\det(D\,\vec{f}(r,\phi)) = r^2\cos\phi + r^2\sin\phi = r$

Zylinderkoordinaten

Koordinatentransformation siehe obere zwei Gleichungen

Jacobideterminante von f

$\det(D\,\vec{f}(r,\phi,z)) = r^2\cos\phi + r^2\sin\phi = r$

$$\underline{f}: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,\varphi,z) \\ f_2(r,\varphi,z) \\ f_3(r,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\dfrac{y}{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten

Koordinatentransformation siehe untere zwei Gleichungen

Hierbei liegt der Winkel ϕ zwischen der x-Achse und dem in die x-y-Ebene projizierten Ortsvektor des Punktes. Der Winkel θ liegt zwischen der z-Achse und dem Ortsvektor des Punktes

Jacobideterminante von f

$\det(D\,\vec{f}(r,\phi,\theta)) = r^2\sin\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta$

$$\underline{f}: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,\varphi,\theta) \\ f_2(r,\varphi,\theta) \\ f_3(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\dfrac{y}{x} \\ \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

Geometrische Objekte im Vektorraum

Legt man ein Koordinatenkreuz in die Zeichenebene, so ist jeder Punkt der Zeichenebene durch seinen *x*- und *y*-Wert bestimmt. Wir können also die Punkte der Ebene mit Paaren von reellen Zahlen gleichsetzen. Die Menge der Punkte der Ebene ist dann die Menge R^2. Die Menge R^2 bildet einen Vektorraum über R. Geometrische Objekte wie Linien und Flächen sind Mengen von Punkten. Diese Punkte lassen sich durch Vektoroperationen beschreiben.
Definition: Ein Punkt in der Ebene ist ein Paar von reellen Zahlen, also ein Element $p \in R^2$ mit $p = (x, y)$.
Definition: Eine Gerade durch zwei Punkte p und q ist die Punktemenge $pq = \{ r \in R^2 \mid r = p + a(q - p),\ a \in R\}$.
Ein Liniensegment ist die Verbindungsstrecke von zwei Punkten p und q: $\overline{pq} = \{ r \in R^2 \mid r = p + a(q - p),\ a \in R,\ 0 \le a \le 1 \}$. Man lässt den Querstrich über pq auch weg, wenn klar ist, dass das Liniensegment zwischen p und q gemeint ist. Aus Liniensegmenten lassen sich weitere geometrische Gebilde zusammensetzen.

Definition: Ein Kantenzug ist eine Kette von Liniensegmenten $w = p_0p_1, p_1p_2, \ldots, p_{n-1}p_n$.

Die Punkte p_i heißen Ecken des Kantenzugs, die Liniensegmente heißen Kanten. Ein Polygonzug ist ein geschlossener Kantenzug $w = p_0p_1, p_1p_2, \ldots, p_{n-1}p_0$. Ein Polygonzug, bei dem alle Ecken p_i verschieden sind und bei dem je zwei Kanten außer den gemeinsamen Ecken keine Punkte gemeinsam haben, heißt einfacher Polygonzug. Das von einem einfachen Polygonzug umschlossene Gebiet, einschließlich des Polygonzugs selber, heißt Polygon.

Matrizen, Determinanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix vom Typ (m,n)

... rechteckig angeordnetes Schema von m*n Größen (m Zeilen, n Spalten), den Elementen a_{ij}. Zeilen und Spalten werden auch Reihen genannt.

Darstellung

$= A_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}$

Achtung: Bei der Schreibweise $A_{(m,n)}$ werden mit m zuerst die Zeilen und anschließen mit n die Spalten genannt

Spezielle Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

m = n ⇔ n-reihige quadratische Matrix
spur A = $a_{11}+a_{22}...+a_{nn}$ ⇔ Spur der Matrix A
$a_{ij}=0$ für $i\neq j$ ⇔ Diagonalmatrix
$a_{ij}=0$ für $i\neq j$ und $a_{ij}=1$ für $i=j$ ⇔ Einheitsmatrix E
  $a_{ij}=0$ für alle i,j ⇔ Nullmatrix O
Eine Matrix a mit nur einer Reihe heißt ... Vektor a = (a_1 a_2 a_3 ... a_n)
  mit nur einer Zeile ⇒ Zeilenvektor
  mit nur einer Spalte ⇒ Spaltenvektor, Spaltenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

Ein Spezialfall der quadratischen Matrix ist die sogenannte Diagonalmatrix, bei der alle außerhalb der Hautdiagonalen liegenden Elemente gleich Null sind.
Die Multiplikation zweier Diagonalmatrizen gestaltet sich besonders einfach und ergibt wieder eine Diagonalmatrix.

Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix ist ein Spezialfall der Diagonalmatrix, die wiederum ein Spezialfall der quadratischen Matrix ist: Ein Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich 1 sind, nennt man Einheitsmatrix.
Ein Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich einer reellen Zahl c sind, nennt man Skalarmatrix.

Untere Dreiecksmatrix

Bei einer unteren Dreiecksmatrix sind alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen gleich Null

Obere Dreiecksmatrix

Bei der oberen Dreiecksmatrix sind alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null
Die Transponierte einer oberen Dreiecksmatrix ist eine untere Dreiecksmatrix und umgekehrt. Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente. Jede Matrix lässt sich durch Zeilenvertauschungen so umformen, dass sie sich in ein Produkt aus einer linken und einer rechten Dreiecksmatrix zerlegen lässt.

Antidiagonalmatrix

Eine Antidiagonalmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Gegendiagonale Null sind.
Eine nxn-Matrix A = (a_{ij}) heißt antidiagonal, wenn für alle i,j mit i+j <> n+1 der (i,j)-Eintrag Null a_{ij} ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & q_n \\ \vdots & \vdots & q_{n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{q_1} \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{q_2} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{q_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der oben abgebildeten antidiagonalen Matrix ist
  $\det(A) = (-1)^{\binom{n}{2}} q_1 q_2 \ldots q_n$
Sind alle q_i der Gegendiagonale von Null verschieden sind, dann ist A invertierbar und die zu A inverse Matrix ist die unten abgebildete Matrix A^{-1}.
Das Produkt zweier Antidiagonalmatrizen ist eine Diagonalmatrix. Das Produkt einer Antidiagonalmatrix mit einer Diagonalmatrix ist eine Antidiagonalmatrix.

Symmetrische Matrix

Bei der symmetrischen Matrix sind alle Elemente spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen angeordnet
Eine Matrix A die mit ihrer transponierten Matrix übereinstimmt, für die also $A = A^T$ gilt, ist symmetrisch.
Dies ist nur für quadratische Matrizen möglich.
Einfachste Beispiele für symmetrische Matrizen sind die Nullmatrix und die Einheitsmatrix.

Schiefsymmetrische Matrix

Eine schiefsymmetrischen Matrix liegt vor, wenn gilt:

1. Die Elemente, die spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen liegen, sind vom Betrag gleich, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen.
2. Die Hauptdiagonalenelemente sind gleich Null
Jede quadratische Matrix kann in eine Summe aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix zerlegt werden.

Transponierte Matrix

Vertauschen der Zeilen und Spalten führt zur transponierten Matrix A^T

$(A^T)^T = A$ $\quad$ $(A + B)^T = A^T + B^T$

$A = A^T$ $\Leftrightarrow$ symmetrische quadratische Matrix

$A = - A^T$ $\Leftrightarrow$ antisymmetrische Matrix

Matrizengesetze

Gleichheit von MatrizenA = B $\Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik}, \forall$ i,k

Zwei Matrizen A und B sind gleich, wenn 1. die beiden Matrizen vom gleichen Typ sind und 2. die Matrizen in jedem Element übereinstimmen.

Summe zweier Matrizen	$C = A \pm B \Leftrightarrow (a_{ik} \pm b_{ik})$, Matrizen werden komponentenweise addiert	
Kommutativgesetz	$A + B = B + A$	
Assoziativgesetz	$(A + B) + C = A + (B + C)$	
Multiplikation mit einer reellen Zahl (Skalar)		$k A = k(a_{ik}) = (k a_{ik})$
Distributivgesetz	$k (A + B) = k A + k B$	$(k \pm l) A = k A \pm l A$

Skalares Produkt

... von Zeilenvektor a mit dem Spaltenvektor b $\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

Produkt von Matrizen

Das Element c_{ik} des Matrizenproduktes C = A*B ergibt sich als skalares Produkt des i.ten Zeilenvektors von A mit dem k.ten Spaltenvektor von B. Voraussetzung: Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

Beispiel 2 zweireihige Matrizen: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

Multiplikationsgesetze für Matrizen

Kommutativgesetz gilt nicht !	$A * B \neq B * A$
$(A * B)^T = B^T * A^T$	$A * E = E * A$
$A * O = O * A = O$	$A * (B * C) = (A * B) * C$
$A * (B + C) = A * B + A * C$	$spur (A * B) = spur (B * A)$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht nullteilerfrei !

A * B = O bedeutet nicht notwendig ... A = O oder B = O

Nilpotente Matrix

Eine quadratische Matrix A heißt nilpotent, wenn eine ihrer Potenzen die Nullmatrix ergibt.
Ist die Matrix A nilpotent, so hat sie genau einen Eigenwert gleich Null. Sie ist nicht invertierbar, ihre Determinante ist Null, ebenso die Spur.

Dyadisches Produkt

... Produkt einer (n,1)-Matrix mit einer (1,n)-Matrix. Es entsteht eine (n,n)-Matrix.
Das Produkt einer (1,n)-Matrix mit einer (n,1)-Matrix ergibt eine (1,1)-Matrix, eine Matrix mit einem Element.

Hermitesche Matrix A*

Eine Matrix mit komplexen Zahlen als Elementen heißt hermitesch, wenn $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$ gilt, wobei $\overline{a_{ki}}$ die konjugiert komplexe Zahl von a_{ki} ist. Für reelle Koeffizienten fallen symmetrische und hermitesche Matrix zusammen.
Eine antihermitesche oder schiefhermitesche Matrix iat eine quadratische Matrix, die dem Negativen ihrer Adjungierten gleich ist, d.h. es gilt $a_{ik} = - \overline{a_{ki}}$.
Jede quadratische Matrix kann in eine Summe aus einer hermiteschen Matrix A_h und einer antihermiteschen Matrix A_{ah} zerlegt werden $A = A_h + A_{ah}$, mit $A_h = 1/2 (A + A_{Adjungierte})$

$A_{ah} = 1/2 (A - A_{Adjungierte})$

Eine Matrix A ist unitär, wenn die Multiplikation von A mit ihrer adjungierten Matrix die Einheitsmatrix ergibt, bzw. $A^{-1} = A^*$

Tridiagonalmatrix

Quadratische Matrix, bei der alle Matrixelemente gleich Null sind, außer denen, die auf der Hauptdiagonalen a_{ij}, i = j, und der eins darunter oder eins darüber liegenden Diagonalen a_{ij}, $i = j \pm 1$ liegen: $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > 1$

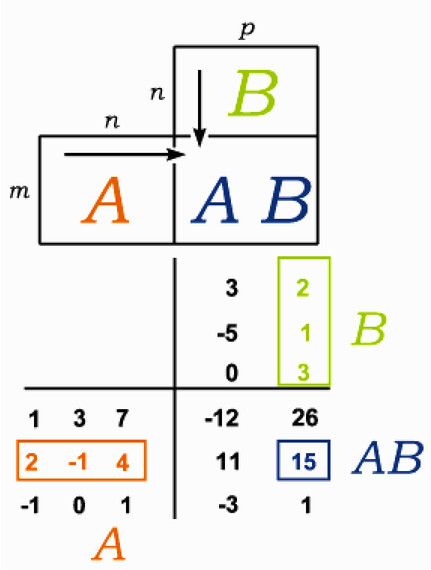
Bandmatrix
Quadratische Matrix, bei der alle Matrixelemente gleich Null sein müssen, außer denen, die auf der Hauptdiagonalen und k darüber und l darunter liegenden Diagonalen a_{ij}, $j \leq i + k$ bzw. $i \leq j + l$ liegen. Die Matrixelemente ungleich Null sind alle auf einem diagonal verlaufenden "Band" angeordnet:

$a_{ij} = 0$ für $i - j > l$, $j - i > k$, $l < n$

Rechte Hessenbergmatrix
Quadratische Matrix, bei der alle Matrixelemente gleich Null sind, die unterhalb der ersten linken Diagonalen a_{ij}, $i = j+1$ liegen:

$a_{ij} = 0$ für $i - j > 1$

Analog definiert man die linke Hessenbergmatrix.



Falksches Schema
Für die praktische Durchführung der Matrixmultiplikation gemäß AB = C verwendet man der größeren Übersichtlichkeit halber das Falksche Schema.
Das Element c_{ij} der Produktmatrix C erscheint genau im Kreuzungspunkt der i.ten Zeile von A mit der j.ten Spalte von B.
In der Abbildung werden als Beispiel zwei dreireihige Matrizen multipliziert.

Inverse Matrix, Kehrmatrix
Zwei quadratische Matrizen A, A^{-1} heißen zueinander invers ⇔
⇔ $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$ und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
$(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ det A^{-1} = (det $A)^{-1}$ = 1/ det A
spur $(A^{-1} * B * A)$ = spur B
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, kontragrediente Matrix zu A
$A^{-1} = A^T$, A heißt orthogonale Matrix
Die transponierte und die inverse Matrix einer orthogonalen Matrix sind auch orthogonal; weiterhin gilt det A = ±1.
Produkte orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.
A A* = A* A, A heißt normale Matrix
Rang einer Matrix r(A) ... Anzahl der linear unabhängigen Zeilen in A

Singuläre Matrix: Matrix A heißt singulär ⇔ A^{-1} existiert nicht ⇔ r(A) < n
Reguläre Matrix: Matrix A heißt regulär bzw. invertierbar ⇔ A^{-1} existiert ⇔ r(A) = n einer quadratischen Matrix
Zeilenregulär ist die (m,n)-Matrix A, wenn r(A) = m,
spaltenregulär, wenn r(A) = n.

Inverse Matrix (2)
Beispiel zur Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.
Gesucht ist die inverse Matrix zu

```
        1 0 -2
A =     -1 1 2
        0 4 -1
```

Im Schema werden links die Matrix A und rechts die dreireihige Einheitsmatrix notiert. Ziel der Operationen ist es, links die Einheitsmatrix zu konstruieren.

```
1 0 -2   1 0 0
-1 1 2   0 1 0    ; Addition mit Zeile 1
0 4 -1   0 0 1

1 0 -2   1 0 0
0 1 0    1 1 0
0 4 -1   0 0 1    ; Subtraktion mit der 4fachen Zeile 2

1 0 -2   1 0 0    ; Subtraktion der 2fachen Zeile 3
0 1 0    1 1 0
0 0 -1   -4 -4 1  ; Multiplikation mit (-1)

1 0 0    9 8 -2
0 1 0    1 1 0
0 0 1    4 4 -1
```

Die zu A inverse Matrix lautet A^{-1}

```
9 8 -2
1 1 0
4 4 -1
```

Beispiel zur Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.
Gesucht ist die inverse Matrix zu

$$A = \begin{matrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Im Schema werden links die Matrix A und rechts die dreireihige Einheitsmatrix notiert. Ziel der Operationen ist es, links die Einheitsmatrix zu konstruieren.

6 8 3   1 0 0
4 7 3   0 1 0   ; Addition mit (-4)*Zeile 1
1 2 1   0 0 1   ; Addition mit (-6)*Zeile 1

1 2 1   0 0 1   ; Addition mit 2*Zeile 2
0 -1 -1 0 1 -4
0 -4 -3 1 0 -6   ; Subtraktion mit der 4fachen Zeile 2

1 0 -1   0 2 -7   ; Addition der Zeile 3
0 1 1   0 -1 -4 ; Subtraktion der Zeile 3
0 0 1   1 -4 10

1 0 0   1 -2 3
0 1 0   -1 3 -6
0 0 1   1 -4 10

Die zu A inverse Matrix lautet A^{-1}

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{matrix}$$

Matrizengleichung: Die Gleichung AX = B (A, B sind Matrizen) hat die Lösung $X = B\, A^{-1}$,d.h. die Gleichung ist lösbar, wenn zu A die inverse Matrix A^{-1} existiert

Rechenregeln für Determinanten von Matrizen

A, B ... Matrizen, E ... Einheitsmatrix, c ... reelle Zahl
det (AB) = det (A) * det (B) ; Produktregel $\det(A^T) = \det(A)$
$\det(E^n) = 1$ $\det(c\,A) = c^n \det(A)$

Rangabfall, Nullität

d = n - r(A)

Zur Berechnung des Ranges einer (m,n)-Matrix werden die größtmöglichen Unterdeterminanten gebildet. Ist eine von ihnen nicht null, so ist der Rang gleich der Ordnung (Anzahl der Spaltenvektoren) dieser Unterdeterminante. Gegebenenfalls muss die Ordnung der Unterdeterminante verringert werden, bis eine von ihnen ungleich null ist.

Matrizennormen

Spektralnorm $||A|| = ||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$, dabei wird mit $\lambda_{max}(A^TA)$ der größte Eigenwert der Matrix A^TA bezeichnet
Zeilensummennorm $||A|| = ||A||_\infty = \max \Sigma |a_{ij}|$, wobei die Summierung für j=1,...,n erfolgt und das Maximum für $1 \le i \le n$ gebildet wird
Spaltensummennorm $||A|| = ||A||_1 = \max \Sigma |a_{ij}|$, wobei die Summierung für i=1,...,n erfolgt und das Maximum für $1 \le j \le n$ gebildet wird

Eigenwerte, Eigenvektoren

Lineare Abbildung $\vec{x} \dashrightarrow f(\vec{x}) = A * \vec{x}$
Unter den Eigenwerten λ und den Eigenvektoren $\vec{v}$ der Matrix A versteht man alle diejenigen Konstanten bzw. Vektoren, für die gilt: $A * \vec{v} = \lambda * \vec{v}$
Aus der Definition folgt: $A * \vec{v} = \lambda * \vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda * E)\,\vec{v} = \vec{o}$ und
für $\vec{v} \neq \vec{o}$ ... $\det(A - \lambda * E) = 0$
In Determinantenschreibweise $\det(A - \lambda * E) = 0 =$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Für eine Matrix, in der außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, bilden die Werte in der Hauptdiagonalen zugleich die Eigenwerte.

Allgemeines Eigenwertproblem

A und B seien zwei quadratische Matrizen vom Typ (n;n). Ihre Elemente können reelle oder komplexe Zahlen sein.
Die Aufgabe, Zahlen λ und zugehörige Vektoren $\vec{x}$ (Nicht-Nullvektoren) mit $A\,\vec{x} = \lambda\, B\,\vec{x}$

zu bestimmen, wird als allgemeines Eigenwertproblem bezeichnet. Die Zahl λ heißt Eigenwert, der Vektor $\vec{x}$ Eigenvektor.
Ein Eigenvektor ist lediglich bis auf einen Faktor bestimmt, da mit $\vec{x}$ auch $c\,\vec{x}$ Eigenvektor zu λ ist.
Der Spezialfall B = E, wobei E eine n-reihige Einheitsmatrix ist, wird als spezielles Eigenwertproblem bezeichnet. Dieses tritt in vielen Anwendungen auf, vorwiegend mit symmetrischer Matrix A.
Bezüglich des allgemeinen Eigenwertproblems muss auf Spezialliteratur verwiesen werden.
A sei (n;n)-Matrix.
1. Anzahl der Eigenwerte: Die Matrix A hat genau n reelle Eigenwerte λ_i; i = 1,...,n, die entsprechend ihrer Vielfachheit zu zählen sind
2. Orthogonalität der Eigenvektoren: Die zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_j$ gehörenden Eigenvektoren $\vec{x_i}$ und $\vec{x_j}$ sind orthogonal.
3. Matrix mit p-fachem Eigenwert: Zu einem p-fachen Eigenwert $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p$ existieren p linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p}$.
Alle nichttrivialen Linearkombinationen sind Eigenvektoren zu λ. Davon können p ausgewählt werden, die orthogonal sind.

Eigenwertberechnung einer Matrix

Bei kleinen Matrizen können die Eigenwerte symbolisch mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet werden. Bei großen Matrizen ist dies oft nicht möglich, so dass hier Verfahren der numerischen Mathematik zum Einsatz kommen.

Symbolische Berechnung

Die Eigenwerte definierende Gleichung $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0$
stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar. Da $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist dieses genau dann lösbar, wenn gilt $\det(A - \lambda E) = 0$
Expandiert man die Determinante auf der linken Seite, so erhält man ein Polynom n-ten Grades in λ. Dieses wird charakteristisches Polynom genannt und dessen Nullstellen sind die Eigenwerte, also die Lösungen der Gleichung

$$\alpha_n \cdot \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0 = 0$$

Da ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzt, gibt es höchstens n Eigenwerte. Zerfällt das Polynom vollständig, z.B. jedes Polynom über C, so gibt es genau n Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Eigenraum zum Eigenwert

Ist λ ein Eigenwert der linearen Abbildung $f: V \to V$, dann nennt man die Menge aller Eigenvektoren zu diesem Eigenwert den Eigenraum zum Eigenwert λ. Der Eigenraum ist definiert durch

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Spektrum und Vielfachheiten

Mehrfache Vorkommen eines bestimmten Eigenwertes fasst man zusammen und erhält so nach Umbenennung die Aufzählung $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$
der verschiedenen Eigenwerte mit ihren Vielfachheiten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.
Die Vielfachheit eines Eigenwertes als Nullstelle des charakteristischen Polynoms bezeichnet man als algebraische Vielfachheit.
Die Menge der Eigenwerte wird Spektrum genannt und $\sigma(A)$ geschrieben. Es gilt

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C \mid \exists \neq 0: Ax = \lambda x\}$$

Als Spektralradius bezeichnet man den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts.
Kennt man die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten, kann man die Jordansche Normalform der Matrix erstellen.

Beispiel: Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion der mit λ multiplizierten Einheitsmatrix von A

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Ausrechnen der Determinante dieser Matrix mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Die Eigenwerte entsprechen den Nullstellen des Polynoms, d.h. die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null setzen und man erhält $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -2$
Der Eigenwert 2 hat die algebraische Vielfachheit 2, da er doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Berechnung der Eigenvektoren

Für einen Eigenwert λ lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung $(A - \lambda E)\, x = 0$

bestimmen. Die Eigenvektoren spannen einen Raum auf, dessen Dimension als geometrische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnet wird.
Für einen Eigenwert λ der geometrischen Vielfachheit μ lassen sich Eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ finden, so dass die Menge aller Eigenvektoren zu λ gleich der Menge der Linearkombinationen von $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ist.
$(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ heißt dann Basis aus Eigenvektoren zum Eigenwert λ.
Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes kann man als die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu diesem Eigenwert definieren. Die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Beispiel: Gegeben ist die quadratische Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Für $\lambda_1 = 2$ ergibt das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

als Lösung den Vektor (1/2 ; 0; -1) und alle seine Vielfachen, nicht jedoch das Nullfache des Vektors, da Nullvektoren niemals Eigenvektoren sind.
Obwohl dieser Eigenwert eine algebraische Vielfachheit von 2 hat, existiert nur ein linear unabhängiger Eigenvektor. Damit hat dieser Eigenwert eine geometrische Vielfachheit von 1.
Für λ_2 erhält man den Eigenvektor (3/2 ; -2 ; -1).

Ähnlichkeitstransformation einer Matrix

Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit

$$A = U\,D\,U^T$$

Dabei sind die Diagonalelemente von D die Eigenwerte von A, und die Spalten von U sind die dazugehörigen normierten Eigenvektoren. Aus der Gleichung folgt unmittelbar $D = U^T A\, U$
Man bezeichnet diese Gleichung als Hauptachsentransformation. Auf diese Weise wird A in die Diagonalform überführt.
Wird die quadratische Matrix A mit Hilfe der regulären quadratischen Matrix G nach der Vorschrift $G^T A\, G = A'$
transformiert, dann spricht man von einer Ähnlichkeitstransformation. Die Matrizen A und A' heißen ähnlich, und es gilt:
1. Die Matrizen A und A' haben dieselben Eigenwerte, d.h., bei einer Ähnlichkeitstransformation ändern sich die Eigenwerte nicht.
2. Ist A symmetrisch, dann ist auch A' symmetrisch, falls G orthogonal ist: $A' = G^T A\, G$ mit $G^T G = E$
Bei dieser Beziehung bleiben Eigenwerte und Symmetrie erhalten. Dies besagt, dass eine symmetrische Matrix A orthogonal ähnlich auf die reelle Diagonalform D transformiert werden kann.

Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von Endomorphismen

Es sei V ein Vektorraum über K beliebiger Dimension und $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Für alle $\lambda \in K$ gilt:

$$E_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} = \{x \in V \mid (f - \lambda\, id)(x) = 0\} = \ker(f - \lambda\, id)$$

ist ein Unterraum von V.
Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert des Endomorphismus, wenn $\dim E_\lambda = \dim \ker(f - \lambda\, id) > 0$ ist, das heißt wenn ein Eigenvektor $x \in V\setminus\{0\}$ existiert mit $f(x) = \lambda x$.
$E_\lambda = \ker(f - \lambda\, id)$ heißt dann Eigenraum von f zum Eigenwert λ, und seine Dimension $d \geq 1$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

Der Nullvektor ist niemals Eigenvektor und kein Eigenraum ist 0-dimensional. Für ein λ gilt: Entweder ist λ Eigenwert von f, oder $f - \lambda\, id$ ist regulär.
Ein Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ von $f: V \to V$ ist invariant, das heißt es gilt $f[E_\lambda] \subseteq E_\lambda$, falls $\lambda \neq 0$.
Die Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_m$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ eines Endomorphismus $f: V \to V$ sind linear unabhängig.
Die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte eines Endomorphismus $f: V \to V$ ist nicht größer als die Dimension von V.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432

Pascal-Matrix

Eine Matrix mit n Spalten und n Zeilen, in die wie in der Abbildung die Koeffizienten des Pascalschen Dreiecks eingetragen, d.h. die Binomialkoeffizienten, ist symmetrisch und besitzt stets, unabhängig von der Zahl der Reihen, die Determinante 1.

Ist $n > 6$ so besitzt die Matrix einen Eigenwert von 1 und den Eigenvektor (1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0).
Ab $n = 8$ tritt zusätzlich ein Eigenwert 2 mit dem Vektor (0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0; 0) auf, ab $n = 10$ der Eigenwert 6, ab $n = 11$ der Eigenwert 20 usw.

Lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem kann in der Form A * x = b dargestellt werden.
A ... Koeffizientenmatrix, b ... Vektor der Absolutglieder, x ... Lösungsvektor
Für das Gleichungssystem

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_n$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_n$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_n$$

ist die Koeffizientenmatrix A gleich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Allgemeines Lösungsverfahren

Zunächst wird die Hauptdeterminante D = | A | berechnet, was bis Rang n = 3 ohne weitere Umformungen möglich ist. Ist der Rang n > 3, ist meistens der Gaußsche Algorithmus am günstigsten.
1. Fall: D = 0: keine eindeutige Lösung, d.h. Gauß'scher Algorithmus (geometrisch ist die Lösungsmenge eine Ebene oder eine Gerade)
2. Fall: D ≠ 0: eindeutige Lösung, d.h. Cramer'sche Regel (Determinantenverfahren)
Überbestimmtes lineares Gleichungssystem: notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung n < m
Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem: notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung n > m

Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen. Gauß

Lösungsverfahren von Gleichungssystemen

Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen x, y und zwei Gleichungen können mit einfachen Verfahren gelöst werden.

1) Das Gleichsetzungsverfahren wird vor allem genutzt, wenn alle Gleichungen nach ein und derselben Unbekannten aufgelöst sind. Die Werte werden gleichgesetzt und die lineare Gleichung gelöst.
Beispiel: $-4x + 2y = 8$ und $9x + 3y = -6$
Auflösen nach y ergibt $y = 2x + 4$; $y = -3x - 2$
Gleisetzen führt zur Gleichung $2x + 4 = -3x - 2$ mit der Lösung $x = -6/5$. Einsetzen in eine Ausgangsgleichung ergibt $y = 8/5$, d.h. $L = \{(-6/5 \,;\, 8/5)\}$

2) Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Unbekannten umgestellt und der Term für die Variable in die andere Gleichung eingesetzt.
Beispiel: Im obigen Beispiel wird die erste Gleichung nach y umgestellt, d.h. $y = 2x + 4$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $9x + 3(2x + 4) = -6$
die zur gleichen Lösung führt.

3) Das Additionsverfahren wird genutzt, wenn die Koeffizienten einer Unbekannten in beiden Gleichungen dem Betrage nach gleich sind.
Beispiel: Multiplizieren der Gleichung $-4x + 2y = 8$ mit 3 und der Gleichung $9x + 3y = -6$ mit 2 führt zu
$-12x + 6y = 24$; $18x + 6y = -12$
Subtrahiert man die 2.Gleichung von der ersten, verschwindet der y-Term und es wird $-30x = 36$
mit der oben genannten Lösung.

Kronecker-Capelli-Theorem

Das Kronecker-Capelli-Theorem gibt eine Aussage über die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen. Diesen Satz gab Kronecker 1903 in "Vorlesungen über die Theorie der Determinanten" an, allerdings wurde die Aussage; in der heutigen(!) Form; schon 1892 von A.Capelli in "Sopra la compatibilitá o incompatibilitá di più equazioni di primo grado fra picì incognite" bewiesen.

Satz: Ein System von Gleichungen

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m$$

ist genau dann lösbar, wenn der Rang r(A) der Koeffizientenmatrix A gleich dem Rang r(A|B) der erweiterten Koeffizientenmatrix A|B; Koeffizientenmatrix um Vektor der Absolutglieder erweitert; ist.
Ist r(A) < r(A|B), so ist das System unlösbar
Ist r(A) = r(A|B) = n, so ist das System eindeutig lösbar
Ist r(A) = r(A|B) < n, so besitzt das System unendliche viele Lösungen

Gaußscher Lösungsalgorithmus, Gauß'scher Algorithmus

Umwandlung der Koeffizientenmatrix in eine Dreiecksmatrix mit folgenden äquivalenten Umformungen:

- Vertauschen von Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einer konstanten, reellen Zahl $\neq 0$
- Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen (Linearkombination)

Das Gauß-Verfahren versagt, falls das Diagonalelement oder Pivotelement (engl. für Dreh- und Angelpunkt) eines Eliminationsschrittes gleich Null ist: Das Verfahrens bricht dann auf Grund von Division durch Null ab.
Pivotsuche: Ist ein Diagonalelement a_{kk}, so vertauscht man die Pivot-Zeile k vor Ausführung des k-ten Eliminationsschrittes mit derjenigen Zeile m > k, die den betragsmäßig größten Koeffizienten x_k besitzt.

Lösung des Systems mittels inverser Matrix

Ist dann lineare Gleichungssystem in der Form $A * x^{\to} = b^{\to}$ gegeben, wobei A die Koeffizientenmatrix darstellt, so kann die Lösung mittels inverser Matrix A^{-1} ermittelt werden. Es wird: $A^{-1} * A * x^{\to} = A^{-1} * b^{\to}$
$E * x^{\to} = A^{-1} * b^{\to}$; E … Einheitsmatrix ; $x^{\to} = A^{-1} * b^{\to}$

Gauß'scher Algorithmus

Lineares Gleichungssystem

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$
$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2$

Durch rückwärtiges Lösen der Gleichungen XVI bis XIII erhält man:

$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = -1$

Die Probe durch Einsetzen bestätigt dieses Ergebnis

	x_1	x_2	x_3	x_4		Operation
I	1	2	3	4	-2	
II	2	3	4	1	2	
III	3	4	1	2	2	
IV	4	1	2	3	-2	
V	1	2	3	4	-2	
VI	0	-1	-2	-7	6	=II-2I
VII	0	-2	-8	-10	8	=II-3I
VIII	0	-7	-10	-13	6	=IV-4I
IX	1	2	3	4	-2	
X	0	-1	-2	-7	6	
XI	0	0	-4	4	-4	=VII-2VI
XII	0	0	4	36	-36	=VIII-7VI
XIII	1	2	3	4	-2	
XIV	0	-1	-2	-7	6	
XV	0	0	-4	4	-4	
XVI	0	0	0	40	-40	=XI+XII

Lineares Gleichungssystem

$-x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -5$
$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$
$5x_2 + 17x_3 = 7$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$
$7x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$

	x_1	x_2	x_3		Operation
I	-1	-3	-12	-5	
II	-1	2	5	2	
III	0	5	17	7	
IV	3	-1	2	1	
V	7	-4	-1	0	
VI	-1	-3	-12	-5	
VII	0	-5	-17	-7	=I-II
VIII	0	5	17	7	=III
IX	0	-10	-34	-14	=3I+IV
X	0	-25	-85	-35	=7I+V
XI	-1	-3	-12	-5	
XII	0	-5	-17	-7	
XIII	0	0	0	0	
XIV	0	0	0	0	
XV	0	0	0	0	

Eine Lösung existiert, sie ist aber nicht eindeutig. Man kann eine Unbekannte als Parameter wählen, z.B. x_3. Die Lösung lautet dann:

$x_1 = 4/5 - 9/5\ t$ $\qquad$ $x_2 = 7/5 - 17/5\ t$
$x_3 = t$

Die geometrische Deutung der Lösungsmenge eines LGS mit drei Unbekannten ist die Bestimmung der Schnittmenge der durch die drei Gleichungen des LGS gegebenen Ebenen. In diesem Beispiel ist die Lösungsmenge eine Gerade

LR-Zerlegung

Jede Matrix A, bei der für die Durchführung des Gauß-Algorithmus keine Pivotisierung erforderlich ist, kann als Produkt einer linken unteren und einer rechten oberen Dreiecksmatrix geschrieben werden

A = L R

Dies wird als LR-Zerlegung (LR links-rechts) bezeichnet: im englischen LU (lower-upper-decomposition)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems A x = c

1.LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A x = L … R x = c
2.Einführung eines unbekannten Hilfsvektors y und Lösung des linearen Gleichungssystems

L y = c
$y = L^{-1}\ c$

3.Schritt: Lösung des Gleichungssystems R x = y … $x = R^{-1}\ y$
Die LR-Zerlegung ist dann zu empfehlen, wenn mehrere lineare Gleichungssysteme mit gleicher Koeffizientenmatrix A, aber jeweils verschiedener Inhomogenität c zu lösen sind; Schritt 1 ist dann nur einmal durchzuführen.

Die Zerlegung der Koeffizientenmatrix A in die linke Dreiecksmatrix L und die rechte Dreiecksmatrix R ist nicht eindeutig. Die wichtigsten Zerlegungen, basierend auf der Gaußelimination, sind die Doolittle-, die Crout- und die Cholesky-Zerlegung.

Cholesky-Zerlegung

Die Cholesky-Zerlegung ist ein numerisches Verfahren zur Zerlegung einer symmetrischen positiv definiten Matrix in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix und ihrer Transponierten.
Jede symmetrische positiv definite, reelle (n x n)-Matrix A kann eindeutig in der Form

$$A = L\,D\,L^T$$

geschrieben werden. Dabei ist L eine untere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind und D eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen. Mit der Matrix-Wurzel von D und dem Matrix-Faktor G, definiert durch

$$D = D^{1/2}\,D^{1/2}$$

und $G = LD^{1/2}$

wird die Cholesky-Zerlegung auch formuliert als $A = G\,G^T$

Liegt eine Berechnung der Cholesky-Zerlegung vor, so lässt sich das Gleichungssystem Ax = b effizient durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen lösen:
- Durch Vorwärtseinsetzen: Lösung des linearen Gleichungssystems Gy = b
- Durch anschließendes Rückwärtseinsetzen: Lösung des linearen Gleichungssystems $G^Tx = y$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Doolittle-Zerlegung

Die Diagonalelemente der linken Dreiecksmatrix L sind gleich Eins, $l_{jj} = 1$, d.h. det L = 1 besitzt die oben abgebildete Form.
Bei der Doolittle-Zerlegung ist R die Matrix der bei der Gaußelimination entstehenden Koeffizienten, siehe untere Abbildung.

Berechnung der Koeffizienten r_{jk}

$$r_{1k} = a_{1k},\ k = 1, \ldots, n$$
$$r_{jk} = a_{jk} - \Sigma_{s=1}^{j-1}\ l_{js}\, r_{sk},\ k = j, \ldots, n,\ j > 1$$

Berechnung der Koeffizienten l_{jk}, die Eliminationskonstanten

$$l_{j1} = a_{j1} / r_{11},\ j = 2, \ldots, n$$
$$l_{jk} = 1/r_{kk}\,(a_{jk} - \Sigma_{s=1}^{k-1}\ l_{js}\, r_{sk},\ j = k+1, \ldots, n,\ k > 1$$

Bei der Crout-Zerlegung sind die Diagonalelemente der rechten Dreiecksmatrix R sind gleich Eins. Die Berechnung erfolgt analog.

Jacobi-Verfahren

Das Jacobi-Verfahren ist eine Erweiterung des Newtonverfahrens zum Approximieren von Nullstellen auf mehrere Dimensionen. Um Lösungen einer Gleichung als Nullstelle zu gewinnen, muss die Gleichung LinkeSeite = RechteSeite in der Form Term = 0 vorliegen.
Das kann bewerkstelligt werden mit LinkeSeite - (RechteSeite) = 0. Lösungen dieser Gleichung sind dann die Nullstellen der Funktion f := LinkeSeite - (RechteSeite)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Bei eindimensionalen Funktionen $R \to R$ gewinnt man ausgehend von einer günstigen Startnäherung für x bessere Näherungen durch die Rekursion

$$x_{i+1} = x_i - f(x)/f'(x) = x_i - f(x)\cdot(f'(x))-1$$

wobei f'(x) die erste Ableitung von f(x) ist.
Im R^n tritt anstelle der Ableitung die Jacobimatrix $J_f(x)$ (siehe Abbildung) bzw. an die Stelle von $(f'(x))^{-1}$ die inverse Jacobimatrix.

Die Nullstellen eines dreidimensionalen Gleichungssystems mit den Variablen x, y und z sowie den Funktionen $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ und $f_3(x,y,z)$ werden durch folgende Rekursionen angenähert:

$$x_{i+1} = x_i - j_{1,1}\cdot f_1(x,y,z) - j_{1,2}\cdot f_2(x,y,z) - j_{1,3}\cdot f_3(x,y,z)$$
$$y_{i+1} = y_i - j_{2,1}\cdot f_1(x,y,z) - j_{2,2}\cdot f_2(x,y,z) - j_{2,3}\cdot f_3(x,y,z)$$
$$z_{i+1} = z_i - j_{3,1}\cdot f_1(x,y,z) - j_{3,2}\cdot f_2(x,y,z) - j_{3,3}\cdot f_3(x,y,z)$$

wobei $j_{2,3}$ das Element in der 2. Zeile und der 3. Spalte der inversen Jacobimatrix ist.

Die partiellen Ableitungen in der Jacobimatrix werden durch Differenzenquotienten mit sehr kleinem d approximiert: $\partial f/\partial x \approx (f(x+d)-f(x))/d$.
Die inverse Jacobimatrix wird gefunden über den Gauß-Algorithmus durch Umformen der Jacobimatrix in die Einheitsmatrix und paralleles Umformen einer Einheitsmatrix mit denselben Transformationen.

Gleichungssysteme

System		Lösung
I: 4x + 3y = 14	II: 2x - y = 12	(5 / -2)
I: -4x - y = 40	II: x + 5y = 9	(-11 / 4)
I: 2x - 6y = 6	II: 5x + 3y = 42	(7,5 / 1,5)

I: $4x + 2y = 4$	II: $-6x + 3y = 33$	(-2,25 / 6,5)
I: $12x + 11y = 18$	II: $16x - 7y = -2$	(0,4 / 1,2)
I: $3x - 10y = 3$	II: $-9x + 24y = -10$	(14/9 / 1/6)
I: $14x - 8y = 10$	II: $-21x + 15y = 60$	(15 / 25)
I: $18x + 24y = -132$	II: $27x - 40y = 676$	(8 / -11,5)
I: $11x - 10y = 13$	II: $-8x + 7y = -7$	(-7 / -9)
I: $12x + 9y = 15$	II: $4x + 3y = 5$	unendlich viele Lösungen
I: $x - 4y = 3$	II: $-5x + 20y = 10$	$L = \varnothing$
I: $4x + 6y = 7$	II: $6x + 9y = 10$	$L = \varnothing$
I: $6x - 2y = -8$	II: $-15x + 5y = 20$	unendlich viele Lösungen
I: $2x + 3y + 5 = 5x + 6y - 1$	II: $x - 4y - 2 = 2x - 2y$	(6 / -4)
I: $3(x + 5) = 2(2y - 1)$	II: $4(3x - 6) = 3(y + 4)$	(5 / 8)
I: $5(2x + y) = 4(3y - 5x) + 13$	II: $6(8x - 2y + 6) = 4(2y - 3x) - 4$	(3 / 11)
I: $2(2x + 3y) = 3(3x - y) + 5$	II: $4(3x - 4y) = 2(x + y) - 10$	unendlich viele Lösungen
I: $(x+5)(y+1) = (x+8)(y-3)$	II: $(x-3)(y-1) = (x-1)(y+3)$	(-2 / 7)
I: $(x+2)(y-3) = (x-3)(y+4)$	II: $(x-6)(y+9) = (x+4)(y-5)$	$L = \varnothing$

Stöchiometrisches Rechnen

Das stöchimetrische Rechnen, insbesondere das Aufstellen einer chemischen Reaktionsgleichung kann mittels linearer Gleichungssysteme gelöst werden.
Auf Grund des Gesetzes von der Erhaltung der Masse, nach Lomonossow, und des Gesetzes der konstanten Proportionen, nach Proust 1797, lassen sich für jede vollständig verlaufende chemische Reaktion, von der chemischen Gleichung ausgehend, aus der Menge eines Reaktionsteilnehmers die Mengen aller anderen Reaktionsteilnehmer berechnen. Solche Berechnungen sind Gegenstand eines Teilgebietes der Chemie der Stöchiometrie.
Beispiel: Reagiert Eisen (II)-sulfat FeSO4 mit Schwefelsäure H2SO4 unter Anwesenheit von Kaliumpermanganat KmnO4, so entstehen nach der Reaktionsgleichung

$$FeSO_4 + H_2SO_4 + KMnO_4 \rightarrow Fe_2(SO_4)_3 + MnSO_4 + K_2SO_4$$

neben Wasser drei Salze, Eisen (III)-sulfat, Mangansulfat und Kaliumsulfat. Soll das Gesetz der Erhaltung der Masse eingehalten werden, kann die Gleichung so aber nicht akzeptiert werden. So treten auf der linken Seite nur 1 Eisenatom, rechts aber 2, links 12 Sauerstoffatome, rechts aber 21 auf. Daher werden alle Substanzen mit einem entsprechenden Faktor versehen, so dass auf beiden Gleichungsseiten gleiche Anzahlen von Atomen für jedes Element vorhanden sind. Aus

$aFeSO_4 + bH_2SO_4 + cKMnO_4 \rightarrow dFe_2(SO_4)_3 + eMnSO_4 + fK_2SO_4 + gH_2O$ entsteht das Gleichungssystem

Fe:	$a = 2e$	S:	$a + b = 3d + e + f$
O:	$4a + 4b + 4c = 12d + 4e + 4f + g$	H:	$2b = 2g$
K:	$c = 2f$	Mn:	$c = e$

Dieses Gleichungssystem ist unterbestimmt. Der Parameter der Lösung muss dann so gewählt werden, dass alle Einzellösungen ganzzahlig werden. Für die genannte Gleichung ergibt sich damit:

$$10FeSO_4 + 8H_2SO_4 + 2KMnO_4 \rightarrow 8H_2O + 5Fe_2(SO_4)_3 + 2MnSO_4 + K_2SO_4$$

Mit der korrekten Reaktionsgleichung kann nun weiter gerechnet werden. Sollen 100 g Eisen (II)-sulfat reagieren, so ergeben sich unter Berücksichtigung der molaren Massen mit einfachen Verhältnisgleichungen, dass 51,6 g Schwefelsäure und 20,8 g Kaliumpermanganat zugeben werden müssen. An Reaktionsprodukten erhalten Sie 9,5 g Wasser, 131,6 h Eisen (III)-sulfat, 19,9 g Mangansulfat und 11,5 g Kaliumsulfat.

Mischen von Legierungen

Anwendung von linearen Gleichungssystemen:
Edelstahl ist eine Legierung aus Eisen, Chrom und Nickel. Beispielsweise besteht V2A-Stahl aus 74% Eisen, 18% Chrom und 8% Nickel. In der Tabelle sind vorhandene Legierungen (I-IV) angegeben, mit denen 1000 kg V2A-Stahl gemischt werden soll.

	I	II	III	IV
Eisen	70%	72%	80%	85%
Chrom	22%	20%	10%	12%
Nickel	8%	8%	10%	3%

Sind x_1, x_2, x_3 und x_4 die Anteile der Legierungen I-IV in Einheiten kg, so gilt für die Summe aller Mischungsanteile in kg $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$
Für die Einzelbestandteile Eisen, Chrom und Nickel gelten die Erhaltungsgleichungen

$$0{,}7\, x_1 + 0{,}72\, x_2 + 0{,}8\, x_3 + 0{,}85\, x_4 = 740$$
$$0{,}22\, x_1 + 0{,}2\, x_2 + 0{,}1\, x_3 + 0{,}12\, x_4 = 180$$
$$0{,}08\, x_1 + 0{,}08\, x_2 + 0{,}1\, x_3 + 0{,}03\, x_4 = 80$$

Diese vier Gleichungen liefern ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, das nach dem Gaußschen Lösungsverfahren die Form

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$$
$$0\, x_1 + 2\, x_2 + 10\, x_3 + 15\, x_4 = 4000$$

$$0\,x_1 + 0\,x_2 - 2\,x_3 + 5\,x_4 = 0$$
$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 = 0$$

hat. Man wählt $x_4 = k$ beliebig. Daraus folgt

$$x_3 = 5/2\,k$$
$$x_2 = 2000 - 20\,k$$

und $x_1 = -1000 + 16{,}5\,k.$

Damit die Lösung realisierbar ist, müssen alle Anteile $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ sein.
Wegen der Bedingung für x_2 folgt $100 \geq k$ und wegen der Bedingung für x_1 folgt $k \geq 60.6$.
D.h. für $100 \geq k \geq 60.6$ ist das Problem physikalisch lösbar.

Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

Aufgabe 1

Verlängert man an einem Dreieck die Grundseite um 3 cm und die zugehörige Höhe um 2 cm, so wächst der Flächeninhalt um 53 cm². Verkürzt man dagegen die Grundseite um 2 cm und die zugehörige Höhe um 3 cm, so verringert sich der Flächeninhalt um 42 cm². Berechne die Grundseite und die Höhe des Dreiecks!

Lösung Grundseite g, Höhe h

$(g+3)\,(h+2)\,/\,2 = gh\,/\,2 + 53$ und $(g-2)\,(h-3)\,/\,2 = gh\,/\,2 - 42$… $g = 14$ cm, $h = 24$ cm

Aufgabe 2

Verlängert man an einem Rechteck die kleinere Seite um 2 cm und die größere um 3 cm, so wächst der Flächeninhalt um 60 cm². Verlängert man dagegen die kleinere Seite um 7 cm und die größere um 5 cm, so wächst der Flächeninhalt um 180 cm². Berechne die Seiten des Rechtecks!

Lösung größere Seite a, kleinere Seite b

$(a+4)\,(b+2) = ab + 60$ und $(a+5)\,(b+7) = ab + 180$ … $a = 15$ cm, $b = 8$ cm

Aufgabe 3

In einem Rechteck beträgt die Länge einer Seite 3/4 der Länge der anderen. Vergrößert man die größere Seite um 4 cm und verkleinert man die kleinere um 2 cm, so ändert sich der Flächeninhalt nicht. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

Lösung größere Seite a, kleinere Seite b

$b = 3/4\,a$ und $(a+4)\,(b-2) = a \cdot b$ … $a = 8$ cm, $b = 6$ cm

Aufgabe 4

Verlängert man an einem Rechteck die längere Seite um 3 cm und die kürzere Seite um 6 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 117 cm² größer ist als der Flächeninhalt des Rechtecks. Berechne die Seiten des Rechtecks!

Lösung größere Seite a, kleinere Seite b

$(a+3)\,(b+6) = ab + 117$ und $a+3 = b+6$ … $a = 12$ cm, $b = 9$ cm

Aufgabe 5

Von zwei Brüdern ist der eine 6 Jahre älter als der andere. Vor 6 Jahren war er gerade dreimal so alt. Wie alt ist jeder jetzt?

Lösung x Alter des älteren, y Alter des jüngeren Bruders

$x = y + 6$ und $x - 6 = 3\,(y - 6)$ … $x = 15$ Jahre, $y = 9$ Jahre

Aufgabe 6

Vater und Sohn wiegen zusammen 115 kg. Würden beide 5 kg abnehmen, dann würde der Vater genau doppelt so schwer sein wie sein Sohn. Wie viel kg wiegen Vater und Sohn?

Lösung x Masse des Vaters, y Masse des Sohnes

$x + y = 115$ und $x - 5 = 2\,(y - 5)$ … $x = 75$ kg, $y = 40$ kg

Aufgabe 7

Eine Kassiererin zahlt 2000 € in 50 € Scheinen und 20 € Scheinen aus. Es sind insgesamt 55 Scheine. Wie viel 50 € Scheine und wie viel 20 € Scheine sind das?

Lösung x Anzahl 50 € Scheine, y Anzahl 20 € Scheine

$x + y = 55$ und $50x + 20y = 2000$ … $x = 30$, $y = 25$

Aufgabe 8

Um 9:00 Uhr startet ein Fußgänger zu einer Wanderung mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 6 km/h. Um 11:30 Uhr folgt ihm ein Radfahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 18 km/h. Wann holt der Radfahrer den Wanderer ein?

Lösung x Anzahl der Stunden, die der Fußgänger unterwegs ist, y entsprechend für den Radfahrer

$9 + x = 11{,}5 + y$ und $x \cdot 6 = y \cdot 18$ … $x = 3{,}75$, $y = 1{,}25$, d.h. um 12:45 Uhr

Aufgabe 9

Eine Bergbahn verlangt für Berg- und Talfahrt zusammen 6 €, für die Bergfahrt allein 4,50 € und für die Talfahrt ohne Bergfahrt 3 €. An einem Sonntag fuhren im ganzen 680 Personen mit der Bahn hinauf und

520 Personen hinab. Es gingen 3930 € ein. Wie viele Personen nutzten Berg- und Talfahrt, nur die Bergfahrt oder nur die Talfahrt?
Lösung x … Anzahl Bergfahrt, y … Anzahl Talfahrt, z … Anzahl Berg- und Talfahrt
Gleichungssystem: $4{,}5\,x + 3\,y + 6\,z = 3930$; $x + z = 680$; $y + z = 520$ ergibt
Bergfahrtbillette $x = 220$, Retourbillette $z = 680 - x = 460$, Talfahrtbillette $y = 520 - z = 60$

Aufgabe 10
Ein Kapital von 330740 Fr. ist in drei Posten abgelegt, zu 4%, 5% und 6%. Werden nach einem Jahr die Zinsen dazu geschlagen. so werden alle Posten gleich groß. Wie groß waren die Posten am Anfang?
Lösung $x + y + z = 330740$; $1{,}06\,z = 1{,}04\,x$; $1{,}05\,y = 1{,}04\,x$ ergibt
1.Posten $x = 111300$ Fr. , 2.Posten $y = 110240$ Fr. , 3.Posten $z = 109200$ Fr.

Aufgabe 11
Ein Radfahrer hat eine Geschwindigkeit von 25 km/h auf ebenem Gelände, von 15 km/h bergaufwärts und von 30 km/h abwärts. Wieviel ebenen, ansteigenden und absteigenden Weg enthält unter diesen Voraussetzungen eine Strasse von 100 km, wenn der Radfahrer 4 Stunden 24 Minuten braucht, um sie in der einen Richtung, und 4 Stunden 36 Minuten, um sie in der anderen Richtung zu durchfahren?
Lösung $x/25 + y/15 + z/30 = 4{,}4$; $x/25 + y/30 + z/15 = 4{,}6$; $x+y+z = 100$
Auf dem Hinweg geht es $z = 28$ km abwärts und $y = 22$ km aufwärts. Der Rest $x = 50$ km ist eben.

Aufgabe 12
Ein Kind ist 21 Jahre jünger als seine Mutter. In 6 Jahren wird die Mutter 5mal so alt wie das Kind sein. Wo ist der Vater? Die Aufgabe ist nicht ganz ernst gemeint!
Lösung: das Kind ist -¾ Jahre alt … :-)

Historische Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

Aufgabe 1
In einem Käfig sind Hasen und Fasane. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wie viele Hasen und Fasane sind im Käfig? (China, ca. 2500 v.u.Z.)
Lösung: 12, 23

Aufgabe 2
Fünf Ochsen und zwei Schafe kosten acht Goldstücke, zwei Ochsen und acht Schafe kosten acht Goldstücke. Wie hoch ist der Preis für jedes einzelne Tier? (China, 3. Jh. v.u.Z.)
Lösung: 4/3, 2/3

Aufgabe 3
Ein Mann sagt zu einem anderen: "Wenn du mir einen von deinen Denaren gibst, so habe ich soviel wie du!" Der andere antwortet: "Wenn du mir einen von deinen gibst, habe ich zehnmal soviel wie du!" Wieviel Denare hatte jeder? (Leonardo von Pisa, Fibonacci, 1202)
Lösung: 13/9, 31/9

Aufgabe 4
Wenn der Preis von 9 Äpfeln vermindert um den Preis einer Birne 13 Denare beträgt und der Preis von 19 Birnen vermindert um den Preis eines Apfels 8 Denare beträgt, so frage ich, wie teuer ein Apfel und wie teuer eine Birne ist? (Johannes Buteo, 1549)
Lösung: 1½, ½

Aufgabe 5
Zwei Personen wollen ein Pferd für 11 Gulden kaufen. A sagt zu B: "Gib mir 1/3 von deinem Geld, so will ich meines dazutun und das Pferd bezahlen." B sagt zu A: "Gib mir von deinem Geld 1/4, so will ich mit meinem zusammen das Pferd bezahlen." Nun frage ich, wieviel Geld jeder gehabt hat. (Adam Ries)
Lösung: A: 8 Gulden, B: 9 Gulden

Aufgabe 6
In den "Erzählungen aus Tausendundeiner Nacht" befindet sich folgendes Rätsel:
Eine fliegende Taubenschar kam zu einem hohen Baume; ein Teil von ihnen setzte sich auf den Baum, ein anderer darunter. Da sprachen die auf dem Baume zu denen die darunter lagerten: "Wenn eine von euch herauffliegt, so seid ihr ein Drittel von uns allen; und wenn eine von uns hinabfliegt, so werden wir euch an Zahl gleich sein." Wie viel Tauben waren auf dem Baum, wie viel darunter ?
Lösung: Tauben oben = o, Tauben unten = u
$o - 1 = u + 1$ und $o = u + 2$
$o + 1 = 3(u - 1) \rightarrow (u + 2) + 1 = 3u - 3 \rightarrow$
$u + 3 = 3u - 3$ und $6 = 2u$
$u = 3$; $o = 3 + 2 = 5$, d.h. 5 Tauben waren auf dem Baum, 3 darunter.

Aufgabe 7
Jemand hat 30 Vögel für 30 Münzen gekauft. Für 3 Spatzen zahlte er eine Münze, für zwei Wildtauben ebenfalls eine Münze und für jede Taube zwei Münzen. Wie viele Vögel jeder Art hat er gekauft ? (Fibonacci)
Lösung:
System $x + y + z = 30$ und $z = 30 - x - y$
Als ganzzahlige Lösungen ergeben sich $x = 9$, $y = 10$, $z = 11$, d.h. er kauft 9 Spatzen, 10 Wildtauben und 11 Haustauben.

Aufgabe 8
Drei Personen wollen ein Grundstück um 100 Gulden kaufen. A fehlt die Hälfte des Geldes von B auf den Kaufpreis. B fehlt 1/3 des Geldes von C, und C fehlt 1/4 von A. Wieviel hat jeder? (Adam Ries)
Lösung: A: 64 Gulden, B: 72 Gulden, C: 84 Gulden

Aufgabe 9
Die Mitgift von Francescos Frau ist um 100 Gulden höher als Francescos eigenes Vermögen, und das Quadrat der Mitgift ist um 400 größer als das Quadrat des Vermögens. Berechne die Mitgift und das Vermögen. (Cardano, 1545)
Lösung: Mitgift: 52 Gulden; Francesco hat 48 Gulden Schulden

Aufgabe 10
Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Körben. Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man 34 Körbe. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger Ernte und 3 Garbe schlechter Ernte erhält man 26 Körbe. Wie viel ist der Ertrag je einer Garbe der guten, der mittelmäßigen und der schlechten Ernte? (China, 3.Jahrhundert u.Z.)
Lösung: 9¼, 4¼, 2¾

Aufgabe 11
Jetzt hat man 2 Rinder und 5 Schafe verkauft und damit 13 Schweine gekauft, wobei ein Rest von 1000 Geldstücken übrig blieb. Man hat 3 Rinder und 3 Schweine verkauft und damit 9 Schafe gekauft; das Geld reichte gerade. Man hat 6 Schafe und 8 Schweine verkauft und damit 5 Rinder gekauft, aber das Geld reichte nicht um 600 Geldstücke. Wie hoch ist der Preis von jedem, vom Rind, vom Schaf und vom Schwein? (China, 3.Jahrhundert u.Z.)
Lösung: 1200, 500, 300

Aufgabe 12
Drei Personen werden nach ihrem Vermögen gefragt. Der erste und der zweite besitzen zusammen um 20 Denare mehr als der dritte; der erste und der dritte haben zusammen um 40 Denare mehr als der zweite; und der zweite und der dritte haben zusammen um 30 Denare mehr als der erste. Wieviel besitzt jeder der drei? (nach Diophant, 3.Jh. u.Z.)
Lösung: 30, 25, 35

Aufgabe 13
Drei Kaufleute sahen auf dem Weg eine Geldbörse mit 15 Goldstücken. Einer von ihnen sagte zu den anderen: "Wenn ich diese Börse behalte, so werde ich zweimal so reich sein wie ihr beide zusammen mit dem Geld, das ihr in der Hand habt!" Da sagte der zweite von ihnen: "Ich werde dreimal so reich sein!" Dann sagte der dritte: "Ich werde fünfmal so reich sein." Wieviel Geld hatte jeder Kaufmann? (Indien, 9. Jh. u.Z.)
Lösung: 1, 3, 5

Aufgabe 14
Vier Männer finden eine Börse mit 11 Drachmen. Wenn der erste sie behält, besitzt er doppelt so viel wie der zweite und der dritte zusammen; behält sie der zweite, hat er dreimal so viel wie der dritte und der vierte zusammen; der dritte hätte viermal so viel wie der vierte und der erste, und der vierte hätte fünfmal so viel wie der erste und der zweite. Wieviel besitzt jeder der vier? (nach Leonardo von Pisa)
Lösung: -1, 4, 1, 4

Aufgabe 15
Für 100 Drachmen sollen 100 Vögel gekauft werden: Enten, Sperlinge und Hühner. Eine Ente kostet 5 Drachmen, 20 Sperlinge kosten 1 Drachme und ein Huhn 1 Drachme. (China, 5.Jh. u.Z.)
Lösung: 19 Enten, 80 Sperlinge, 1 Huhn

Blume des Thymaridas
Thymaridas (um 375 v.u.Z.) löste folgende Aufgabe, die als "Blume des Thymaridas" bekannt wurde: "Schmiede mir einen Kranz! Verwende mir Gold zur der Mischung, Kupfer und Zinn und trefflich gehärtetes Eisen von 60 Minen Gewicht im Ganzen!

Von diesem Gewicht betrage das Gold mit dem Kupfer 2/3, das Gold mit dem Zinn 3/4, schließlich das Gold mit dem Eisen 3/5 des fertigen Stücks."
Gesucht sind die Anteile der Metalle an den 60 Minen.

Die allgemeine Lösung von Thymaridas ist:

Gleichungssystem
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$$
$$x_1 + x_2 = a_1$$
$$x_2 + x_3 = a_2$$
$$\ldots$$
$$x_n + x_1 = a_{n-1}$$

Lösung $x_1 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - s) / (n-2)$
$$x_2 = a_1 - x_1$$
$$\ldots$$
$$x_n = a_{n-1} - x_1$$

Konkret für die Aufgabe wird:
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60$$
$$x_1 + x_2 = 40$$
$$x_2 + x_3 = 45$$
$$x_3 + x_1 = 36$$

mit 30 1/2 Anteilen Gold, 9 1/2 Kupfer, 14 1/2 Zinn und 5 1/2 Eisen.
Es ist besonders erstaunlich, dass schon vor über 2300 Jahren eine derartige Aufgabe gelöst werden konnte.

Siegfried Beyers Honigkuchen

geg.: w … g Weizenmehl ; h … g Honig ; f … g Feinzucker ; m … g Halbfettmargarine ; z … g gewürfeltes Zitronat ; o … g gewürfeltes Orangeat
Die oben genannten Zutaten wiegen insgesamt 1470 g. Die beiden erstgenannten wiegen zusammen 230 g mehr als die vier letztgenannten. Die 8,8fache Masse des Zitronats ergibt die Masse aller restlichen Zutaten.
Das Mehl wiegt so viel wie Margarine, Zitronat und Orangeat zusammen, der Honig so viel wie Margarine und Zitronat zusammen. Ein Drittel des Zitronats und ein Fünftel des Honigs machen zusammen die Masse des Zuckers aus.

2 Eier	100 ml Milch (1,5 % Fett)	1 EL Lebkuchengewürz
25 g Belegkirschen	1 Päckchen Orangeback	50 g Mandelstifte
2 TL gemahlener Zimt	1 Eiweiß	1 Päckchen Backpulver
1 EL Wasser	1 EL Kakao	

Rezept: Honig und Margarine in einem Topf bei mäßiger Hitze mit dem Zucker schmelzen, in eine Rührschüssel geben und abkühlen lassen. Eier, Lebkuchengewürz, Orangeback und Zimt mit den Besen eines Handrührgeräts auf höchster Stufe unter die abgekühlte Honigmasse rühren. Das Mehl mit Backpulver und Kakao mischen, sieben und auf mittlerer Stufe zusammen mit der Milch unter die Honigmasse rühren. Zitronat und Orangeat unter den Teig heben. Den Backofen auf 180° vorheizen. Ein Backblech mit Backpapier auslegen und den Teig darauf verteilen. Nun 5 x 5 cm große Quadrate auf dem Teig markieren und mit Belegkirschen und Mandelstiften garnieren. Das Eiweiß mit Wasser verrühren und den Teig damit bestreichen. Auf der mittleren Schiene etwa 30 Minuten backen.

Lösung des Gleichungssystems
$$1w + 1h + 1f + 1m + 1z + 1o = 1470$$
$$1w + 1h - 1f - 1m - 1z - 1o = 230$$
$$1w + 1h + 1f + 1m - 8{,}8z + 1o = 0$$
$$1w - 1m - 1z - 1o = 0$$
$$1h - 1m - 1z = 0$$
$$3h - 15f + 5z = 0$$

w = 500 g Weizenmehl ; h = 350 g Honig ; f = 120 g Feinzucker ; m = 200 g Halbfettmargarine ; z = 150 g gewürfeltes Zitronat ; o = 150 g gewürfeltes Orangeat

Siegfried Beyers Honigkuchen (2)

Die Aufgabe der vorhergehenden Seite kann auch zu einem unterbestimmten Gleichungssystem verändert werden.
Für den Honigkuchen werden benötigt: w … g Weizenmehl, h … g Honig, f … g Feinzucker, m … g Halbfettmargarine, z … g gewürfeltes Zitronat, o … g gewürfeltes Orangeat und keine Zutat darf fehlen.
Die oben genannten Zutaten wiegen insgesamt 1470 g. Die beiden erstgenannten wiegen zusammen 230 g mehr als die vier letztgenannten.
Das Mehl wiegt so viel wie Margarine, Zitronat und Orangeat zusammen, der Honig so viel wie Margarine und Zitronat zusammen. Ein Drittel des Zitronats und ein Fünftel des Honigs machen zusammen die Masse des Zuckers aus.
Von den Margarinewürfeln zu je 100 g musste nie ein Stück abgeschnitten werden. Außerdem waren alle Massen der Zutaten stets ohne Rest durch 10 teilbar.

Wieviel Weizenmehl, Honig, Feinzucker, Halbfettmargarine, Zitronat und Orangeat gehören in den Kuchen?

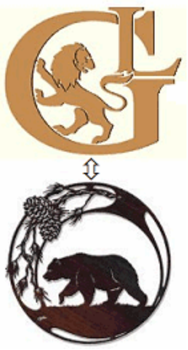
Lösung: Das Rätsel erfordert das Aufstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$$1w + 1h + 1f + 1m + 1z + 1o = 1470$$
$$1w + 1h - 1f - 1m - 1z - 1o = 230$$
$$1w - 1m - 1z - 1o = 0$$
$$1h - 1m - 1z = 0$$
$$3h - 15f + 5z = 0$$

Dieses ist unterbestimmt und liefert die Lösungen

$w = 425 + 0,5 \cdot e$ $\quad h = 425 - 0,5 \cdot e$
$f = 195 - 0,5 \cdot e$ $\quad m = 95 + 0,7 \cdot e$
$z = 330 - 1,2 \cdot e$ $\quad o = 1 \cdot e$

Da m ein Vielfaches von 100 sein soll, kann m nur 100, 200, … werden. Da alle Anteile durch 10 teilbar sein sollen, muss 10(m-95) durch 7 teilbar sein, andernfalls treten Dezimalbrüche auf.
Dies geht nur für m = 200, 900, … Nur für m = 200 ergeben sich für die anderen Zutaten stets positive Werte, d.h. die Lösung ist w = 500 g Weizenmehl ; h = 350 g Honig ; f = 120 g Feinzucker ; m = 200 g Halbfettmargarine ; z = 150 g gewürfeltes Zitronat ; o = 150 g gewürfeltes Orangeat.



Entfernung vom "Bären" zum "Löwen"

Nach einem Becher im "Löwen" macht sich Herr Bieri mit konstanter Geschwindigkeit auf den Weg zum "Bären". Zur gleichen Zeit bricht Herr Weinhold vom "Bären" in Richtung "Löwen" auf. Bis zum Treffpunkt legt Herr Bieri 200 Meter mehr als Herr Weinhold zurück.
Nach einem Gespräch gehen sie weiter, wegen Nachsinnen über das zufällige Treffen aber jeweils nur noch mit halber Geschwindigkeit. Herr Bieri benötigt noch 8 Minuten bis zum "Bären", Herr Weinhold noch 18 Minuten bis zum "Löwen".
Berechnen Sie die Entfernung vom "Löwen" zum "Bären".
Lösung:
Die Strecke vom "Löwen" zum "Bären" sei x Meter. Die Geschwindigkeit von Bieri sei v_B Meter pro Minute, diejenige von Weinhold sei v_W Meter pro Minute.
In derselben Zeit t legt dann Bieri bis zum Treffpunkt T (0,5x + 100) Meter, Weinhold (0,5x - 100) Meter zurück.
(1) $\quad v_B\, t = 0,5x + 100$ $\qquad$ (2) $\quad v_W\, t = 0,5x - 100$
Nach dem Treffpunkt legt Bieri die Strecke der Länge (0,5x - 100) Meter mit Geschwindigkeit $0,5v_B$ in 8 Minuten, Weinhold die Strecke (0,5x + 100) Meter mit Geschwindigkeit 0,5vW in 18 Minuten zurück. Also gilt:
(3) $\quad 0,5vB \cdot 8 = 0,5x - 100$ $\quad$ (4) $\quad 0,5v_W \cdot 18 = 0,5x + 100$
Dividiert man (1) durch (2), so erhält man dasselbe Resultat wie bei der Division von (4) durch (3):
(5) $\quad v_B / v_W = (0,5x + 100) / (0,5x - 100) = 9v_W / 4v_B$
d.h. $\quad 4v_B^2 = 9v_W^2$ und $2v_B = 3v_W$
Einsetzen in (5) gibt

$$3v_W / v_W = (x + 200) / (0,5x - 100)$$

Auflösung der entstandenen Gleichung ergibt eine Entfernung von x = 1000 m.
Quelle: http://www.mathematik.ch/puzzle/puzzle24.php

Wiegeproblem

Aufgabe: Auf einer gewöhnlichen Balkenwaage sind folgende Gegenstände im Gleichgewicht:

Kreis und Dreieck mit Quadrat
Kreis mit Dreieck und Fünfeck
Zwei Quadrate mit drei Fünfecken

Wie viele Dreiecke wiegt ein Kreis?
Lösung: Zur Lösung ist ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten zu lösen

(1)	Q = K+D	Kreis und Dreieck mit Quadrat
(2)	K = D+F	Kreis mit Dreieck und Fünfeck
(3)	2Q = 3F	Zwei Quadrate mit drei Fünfecken
(4)	Q = 2D+F	(1),(2)
(5)	3F = 4D+2F	(4),(3)
	F = 4D	
(6)	K = 4D+D	(5),(2)
	K = 5D Ein Kreis wiegt also fünf Dreiecke.	

Pumpenprobleme

Aufgabe: Ein Behälter soll durch 2 Pumpen P1 und P2 gefüllt werden. Arbeiten beide Pumpen gleichzeitig, so benötigt man 6 Stunden. Da aber P2 nach 3 Stunden abgeschaltet wurde, musste P1 noch weitere 5 Stunden allein arbeiten. In welcher Zeit hätten die Pumpen einzeln den Behälter gefüllt?

Lösung:
Es seien x und y die prozentualen Füllmengen jeder Pumpe je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$6/x + 6/y = 1 \quad \text{und} \quad 8/x + 3/y = 1$$

mit der Lösung $x = 1/10$, $y = 1/15$. Damit benötigt die Pumpe P1 allein 10 Stunden, die Pumpe P2 allein 15 Stunden.

Aufgabe 2:
Ein Wasserbecken wird mit zwei Pumpen befüllt, die dafür gemeinsam 12 Stunden benötigen. Betriebe man sie einzeln, wäre die schnelle Pumpe 10 Stunden eher fertig als die langsame. Wie lange brauchen die beiden Pumpen im Einzelbetrieb zur Füllung des Beckens?
Lösung: Analog erhält man das System $12/x + 12/y = 1$; $1/y = 1/(x+10)$ mit der Lösung $x = 1/20$, $y = 1/30$, d.h. 20 und 30 Stunden.

Aufgabe 3:
Ein Schwimmbassin wird durch zwei Pumpen gefüllt. Die erste Pumpe füllt das Bassin alleine in 16 Stunden, die zweite alleine in 12 Stunden. Um 8.00 Uhr werden beide Pumpen zur Füllung des Bassin eingeschaltet. Doch nach einer Stunde fällt die zweite Pumpe aus. Die Reperatur benötigt ganze 9 Stunden, danach arbeiten für den Rest der Füllung wieder beide Pumpen zusammen. Wann ist das Bassin gefüllt?
Lösung:
Es sei x die Zeit, welche nach der Reperatur noch vergeht, bis das Bassin voll ist. Dann wird

$$100/16\ (10+x) + 100/12\ (1+x) = 100$$

mit der Lösung $x = 2$. Das Bassin ist nach 12 Stunden, d.h. um 20.00 Uhr gefüllt.

Nichtlineares Gleichungssystem – Beispiel

Aufgabe: Ein Schwimmbecken wird aus zwei Hähnen mit Wasser gefüllt. Öffnet man zunächst den ersten Hahn ein Drittel der Zeit, welche man benötigt, das Becken mit dem zweiten Hahn zu füllen, und anschließend den zweiten Hahn ein Drittel der Zeit, welche man benötigt, das Becken mit dem ersten Hahn zu füllen, so hat man das Becken zu 13/18 gefüllt.
Man berechne, wie viel Zeit jeder Hahn für sich benötigt, das Becken zu füllen, wenn bei Öffnung beider Hähne das Becken in 216 Minuten gefüllt ist.
Lösung: Für Hahn i sei x_i die Flüssigkeit pro Minute und t_i die zur Füllung benötigten Minuten (i = 1,2).
Aufgrund dieser Definitionen gilt: $x_1\, t_1 = 1 \qquad x_2\, t_2 = 1 \qquad (1)$

$$x_1\, t_2/3 + x_2\, t_1/3 = 13/18 \qquad (2)$$

$$(x_1 + x_2)\, 216 = 1 \qquad (3)$$

Aus (2) folgt $6x_1t_2 + 6x_2t_1 = 13$, und mit (1) erhält man: $6\, x_1/x_2 + 6\, x_2/x_1 = 13$.
Mit $y = x_1/x_2$ führt dies auf die Gleichung $y^2 - 13/6\, y + 1 = 0$.
mit den zwei Lösungen $y_1 = 3/2$ und $y_2 = 2/3$.
1.Fall: $x_1/x_2 = 3/2$ in (3) eingesetzt, ergibt $x_1 = 1/360$, $x_2 = 1/540$ und somit $t_1 = 360$, $t_2 = 540$.
2.Fall: $x_1/x_2 = 2/3$ in (3) eingesetzt, ergibt $x_1 = 1/540$, $x_2 = 1/360$ und somit $t_1 = 540$, $t_2 = 360$.
Der eine Hahn füllt das Becken in 540 Minuten, der andere in 360 Minuten.

Diophantische Gleichungen

...Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und Variablen (linear)

$a x + b y = c; a,b,c,x,y \in Z$

Die Lösungsmenge wird in der Menge der ganzen Zahlen gesucht. Lösbar mit unendlich vielen Lösung ⇔ ggT(a,b) teilt c

Die Namensgebung erfolgte zu Ehren des irgendwann zwischen 100 v.Chr. und 350 in Alexandria wirkenden Mathematikers Diophant. Wahrscheinlichste Lebensdaten liegen zwischen 200 bis 284 n.Chr. Die einfachste diophantische Gleichung ist $a X - b = 0$. Sie ist lösbar, falls $a = 0$ und $b = 0$, dann ist jede ganze Zahl X eine Lösung. Falls $a \neq 0$, hat die Gleichung nur dann eine Lösung, wenn a ein Teiler von b ist. Die Lösung ist in diesem Fall $X = b / a$.
Auf der rechten Seiten werden die Lösungen der diophantischen Gleichungen A*X+B*Y = ggT[A,B] und AX = 1 mod B ermittelt. Über die Gleichung A*X = 1 mod B kann der geheime Schlüssel beim asymmetrischen Verschlüsselungsverfahren RSA berechnet werden.

Eine lineare Diophantische Gleichung mit natürlichen Koeffizienten

$a x + b y = c; a, b, c \in N, x, y \in Z$

besitzt unendliche viele Lösungen, wenn der ggT(a,b) die Zahl c teilt.

Die ganzzahligen Lösungen x, y können dabei auch negativ sein. Mitunter fragt man aber nach einem Lösungspaar (x, y), bei dem beide Zahlen natürlich sind.
Auch wenn die Gleichung ganzzahlige Lösungen besitzt, muss eine natürliche Lösung nicht existieren. Zum Beispiel erhält man
für $5 x + 7 y = 24$ die Lösung (2, 2)
für $5 x + 7 y = 23$ keine natürliche Lösung.

Das hier genannte Problem tritt relativ häufig auf.
Bei der Aufgabe der Ding-Bong-Zahlen ergibt sich zum Beispiel, dass ab c = 24 alle Zahlen durch zwei Töne dargestellt werden können; ab c = 24 existiert für die Gleichung $5 x + 7 y = c$ stets ein natürliches Lösungspaar.

Diophantische Gleichung mit zwei Variablen

Die lineare diophantische Gleichung $ax + by = c$ (1)
mit vorgegebenen ganzen Zahlen a, b, c hat genau dann ganzzahlige Lösungen in x und y, wenn c durch den größten gemeinsamen Teiler g von a und b teilbar ist. Die linke Seite ist durch g teilbar, also muss auch c durch g teilbar sein.
Wie bei jeder linearen Gleichung ist die Differenz zweier Lösungen eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $ax + by = 0$
Bestimmt man also eine Lösung der ursprünglichen, inhomogenen Gleichung, so erhält man durch Addition von Lösungen der homogenen Gleichung sämtliche anderen Lösungen der inhomogenen Gleichung (1).

Lösungen der homogenen Gleichung

Schreibt man $a = ga'$ und $b = gb'$ mit $g = ggT(a, b)$, so ist die homogene Gleichung äquivalent zu

$a'x = - b'y$,

und da a' und b' teilerfremd sind, ist x durch b' und y durch a' teilbar. Sämtliche Lösungen der homogenen Gleichung sind also durch

$x = tb' ; y = - ta'$

für eine beliebige ganze Zahl t gegeben.

Auffinden einer Partikularlösung

Mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus kann man Zahlen u, v bestimmen, so dass

$au + bv = g$ mit $g = ggT(a, b)$

gilt. Setzt man $s = c/g$, so ist $x0 = su ; y0 = sv$ eine Lösung der Gleichung (1).

Gesamtheit der Lösungen

Die Gesamtheit der Lösungen von (1) ist gegeben durch $x = x0 + tb' ; y = y0 - ta'$
für beliebige ganze Zahlen t.

Reduktion diophantischer Gleichungen

Gegeben ist die lösbare diophantische Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b , n > 2$
mit $(a_1, a_2, ..., a_n) <> (0, 0, ..., 0)$ und $ggT(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. Wäre der $ggT(a_1, a_2, ..., a_n) <> 1$, so müsste man die Gleichung noch durch $ggT(a_1, a_2, ..., a_n)$ dividieren. Nach der Umformung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_{n-1} x_{n-1} = b - a_n x_n$

betrachtet man x_n als ganzzahlige Konstante und erhält eine lineare diophantische Gleichung mit n-1 Unbekannten, die genau dann lösbar ist, wenn $ggT(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ ein Teiler von $b - a_n x_n$ ist. Die Bedingung $ggT(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \mid b - a_n x_n$
ist genau dann erfüllt, wenn es ganze Zahlen c, c_n gibt, für die gilt: $ggT(a_1, a_2, ..., a_{n-1})\, c + a_n c_n = b$
Das ist eine lineare diophantische Gleichung in zwei Unbekannten, die mit Hilfe des allgemeinen Lösungsverfahrens für n = 2 gelöst werden kann. Ist ihre Lösung bekannt, dann hat man nur noch eine lineare diophantische Gleichung in n-1 Unbekannten zu lösen.
Die beschriebene Reduktion ist fortsetzbar, bis man schließlich eine lineare diophantische Gleichung in zwei Unbekannten erhält, die gelöst werden kann. Aus den zwischenzeitlich berechneten Lösungsmengen für diophantische Gleichungen in zwei Unbekannten muss man nun noch die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ablesen.

Esel-Maultier-Problem

... klassisches Problem, erstmals von Euklid aufgestellt und gelöst

Aufgabenstellung:

Ein Esel und ein Maultier tragen jeweils eine Anzahl Säcke. Spricht das Maultier zum Esel: "Gibst Du mir einen Sack, so haben wir beide gleich viele". Antwortet der Esel: "Gibst Du mir einen Sack, so habe ich doppelt so viel wie Du." Wie viele Säcke tragen beide?
Problem führt zum linearen Gleichungssystem

$$x + 1 = y - 1 \qquad 2 (x - 1) = y + 1$$

mit der Lösung (5 ; 7). Das Maultier trägt 5 Säcke, der Esel 7.

Verallgemeinerung

Maultier: "Gibst Du mir a Säcke, dann habe ich b Mal so viele wie Du". Esel: "Gibst Du mir c Säcke, so habe ich d Mal so viel wie Du." Die allgemeinen Lösungen sind $x = c + (b + 1)(a + c) / (bd - 1)$ $y = a + (d + 1)(a + c) / (bd - 1)$
Nur wenn (bd - 1) ein Teiler sowohl von (b + 1)(a + c) als auch von (d + 1)(a + c) ist, existiert eine ganzzahlige Lösung.

Wechselgeldaufgabe

Aufgabe: Als ich letzte Woche ein Buch mit einem Hundertmarkschein bezahlt hatte, stellte ich zu Hause fest, dass mir die Kassiererin doppelt soviel und noch fünf Pfennige mehr an Wechselgeld gegeben hatte, als mir zustand. Offensichtlich hatte sie den Markbetrag mit dem Pfennigbetrag des Wechselgeldes vertauscht.
Wie teuer war das Buch?

Lösung (Arne Heizmann):
Der Mark-Betrag sei m, der Pfennig-Betrag p. Das Wechselgeld ist also 100m + p. Das vertauschte Wechselgeld ist demnach m + 100p. Es ergibt sich die Gleichung:

$$m + 100p = 2 (p + 100m) + 5 = 2p + 5 + 100 (2m) \quad [a]$$
$$= 2p - 95 + 100 (2m+1) \quad [b]$$

Falls 2p+5 < 100, d.h. p < 48 ist, wählt man Gleichung [a]. Nimmt man daraus den Mark- und Pfennig-Betrag heraus, ergeben sich zwei Gleichungen:

$$m = 2p + 5$$
$$p = 2m \rightarrow m = 4m + 5 \rightarrow m = -5/3$$

Das widerspricht der Annahme, m sei eine ganze Zahl. Also ist p > 47. Nach Gleichung [b] wird:

$$m = 2p - 95$$
$$p = 2m + 1 \rightarrow m = 2(2m+1)-95 \rightarrow m = 31 \quad \rightarrow p = 63$$

Archimedisches Rinderproblem

Durch Archimedes wurde folgendes Problem gestellt:
Die Rinderherde des Gottes Helios besteht aus x weißen, y schwarzen, z gescheckten und t braunen Stieren und aus x' weißen, y' schwarzen, z' gescheckten und t' braunen Kühen.
(a) Es gilt $x = (1/2+1/3)y+t$, $y = (1/4+1/5)z+t$, $z = (1/6+1/7)x+t$
und $x' = (1/3+1/4)(y+y')$, $y' = (1/4+1/5)(z+z')$, $z' = (1/5+1/6)(t+t')$, $t' = (1/6+1/7)(x+x')$
(b) Die weißen und die schwarzen Stiere zusammen können sich in Form eines Quadrats aufstellen, d.h. x+y ist eine Quadratzahl.
(c) Die gescheckten und die braunen Stiere zusammen können sich in Form eines Dreiecks aufstellen, d.h. 8(z+t)+1 ist Quadratzahl
Zu ermitteln ist die Anzahl der Rinder in der Herde.

Lösung der ersten 3 Gleichungen $(x,y,z,t) = m(2226,1602,1580,891)$, m ist natürliche Zahl
Die nächsten Gleichungen sind nur dann ganzzahlig lösbar, falls m durch 4657 teilbar ist. Sei also $m = 4657 \cdot k$ mit einer natürlichen Zahl k, dann ist

$$(x',y',z',t') = k\,(7206360, 4893246, 3515820, 5439213).$$

Bedingung (b): x+y und 8(z+t)+1 sind Quadratzahlen
Ist x+y Quadratzahl, so ist $k = a \cdot l^2$ mit $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$.

Ist 8(z+t)+1 = h², so erhalten wir die Gleichung h² = 8(z+t)+1 = 8·4657·2471·a·l² + 1, also ist (h,l) eine Lösung der Pellschen Gleichung für

$$d = 8\cdot 4657\cdot 2471\cdot a = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 22\cdot 46572 = 410\,286\,423\,278\,424$$

Diese Pell'sche Gleichung wurde 1880 von A.Amthor gelöst:
Die Gesamtzahl der Rinder ist eine Zahl mit 206545 Ziffern, die mit
77602714064868182695302328332138866642323224059233 … beginnt.
Die nachfolgende Abbildung zeigt die allgemeine Lösung von Lenstra

All solutions to the cattle problem of Archimedes

$$w = 300\,426607\,914281\,713365 \cdot \sqrt{609} + 84\,129507\,677858\,393258 \cdot \sqrt{7766}$$

$$k_j = (w^{4658\cdot j} - w^{-4658\cdot j})^2 / 368\,238304 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

jth solution	*bulls*	*cows*	*all cattle*
white	$10\,366482 \cdot k_j$	$7\,206360 \cdot k_j$	$17\,572842 \cdot k_j$
black	$7\,460514 \cdot k_j$	$4\,893246 \cdot k_j$	$12\,353760 \cdot k_j$
dappled	$7\,358060 \cdot k_j$	$3\,515820 \cdot k_j$	$10\,873880 \cdot k_j$
brown	$4\,149387 \cdot k_j$	$5\,439213 \cdot k_j$	$9\,588600 \cdot k_j$
all colors	$29\,334443 \cdot k_j$	$21\,054639 \cdot k_j$	$50\,389082 \cdot k_j$

Das Problem wurde 1773 von Gotthold Ephraim Lessing in einem griechischem Manuskript der Herzog August Bibliothek in Wolfenbüttel entdeckt, das einen in 44 Distichen abgefassten Brief des Archimedes an Eratosthenes von Kyrene enthielt.
Quelle: Lessing "Zur Geschichte der Literatur. Aus den Schatzen der herz. Bibliothek zu Wolfenbüttel. Zweiter Beitrag." Braunschweig 1773

Ob der Brief tatsächlich von Archimedes stammt wird angezweifelt, das Problem selbst ist aufgrund seiner Schwierigkeit jedoch möglicherweise auf Archimedes zurückzuführen.
Eine deutsche Übertragung des Gedichts wurde 1842 von G.H.F.Nesselmann angefertigt und veröffentlicht, eine weitere von B.Krumbiegel 1880.

Auszug aus dem Originaltext:
"Προβλημα
Πλθυν Ηελιοιο βοων, ω ξεινε, μετρησον φροντιδ επιστησας, ει μετεχεις σοφιης,
ποσση αρ εν πεδιοις Σικελης πορ εβοσκετο νησου Θρινακυης τετραχη στιφεα δασσαμενη
χροιην αλλασσοντα το μεν λευκοιο γαλακτος, κυανεω ετερον χροωματι λαμπομενον,
αλλο γε μεν ξανθον το δε ποικιλον."

Der von Lessing veröffentlichte Text enthält eine Teillösung, die aber zwei Forderungen aus dem zweiten Teil des Gedichtes nicht erfüllt. Dies blieb wegen der zur Lösung nötigen Berechnung von sehr großen Zahlen bis vor einigen Jahren ungelöst. Ein Lösungsverfahren wurde 1880 von A. Amthor gefunden.

Diophantische Gleichung bei Alcuin von York

Auf den angelsächsischen Gelehrten Alcuin von York (732 – 804) geht folgende Aufgabe zurück:
Ein Familienvater hatte ein Hausgesinde von 100 Personen, unter das er vom Jahresertrag 100 Scheffel austeilen ließ, und zwar in der Weise, dass die Männer je 3, die Frauen je 2 und die Kinder je ½ Scheffel erhielten. Wie viele Männer, Frauen und Kinder waren es?

Lösung: Es seien x Männer, y Frauen und z Kinder gegeben. Dann wird

$x + y + z = 100$ und $3x + 2y + z/2 = 100$ → $6x + 4y + z = 200$

Subtraktion führt zu $5x + 3y = 100$

und somit $y = (100 - 5x)/3 = 33 - x + (1-2x)/3$. Setzt man $(1-2x)/3 = u$, wird $2x + 3u = 1$ → $x = (1-u)/2 - u$.

Mit $(1-u)/2 = v$ wird $u = 1 - 2v$. Rücksubstitution ergibt

$x = 3v - 1$ $y = 35 - 5v$ $z = 100 - x - y$

Für v = 1,2,…,6 ergeben sich insgesamt sechs mögliche Lösungen der Aufgabe:

Männer	Frauen	Kinder	Männer	Frauen	Kinder	Männer	Frauen	Kinder
2	30	68	5	25	70	8	20	72
11	15	74	14	10	76	17	5	78

Münzproblem von Frobenius

In einer Währung seien Münzen mit den Werten 1, 2, 5, 10, 50, 100, 200 und 500 Einheiten vorhanden. Gesucht sind Lösungen, einen Geldbetrag G mit diesen Münzen auszuzahlen. Das Problem führt zu der Gleichung:

$$1x_0 + 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 50x_4 + 100x_5 + 200x_6 + 500x_7 = G$$

Münzproblem von Frobenius

Es seien a_i, $k \in N$ und $x_i \in N$. Man betrachte die diophantische Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = k,$$

mit a_i fest und $ggt(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Gesucht ist $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, also die größte natürliche Zahl k, für die die diophantische Gleichung keine ganzzahlige Lösung mehr hat.

Lösung für i=2 von Sylvester 1884: Seien $a,b \in N$ mit $ggt(a,b)=1$, dann gilt $g(a,b) = ab-a-b$.
Beweis:
Sei $n > ab-a-b$ eine Zahl. Man muss zunächst zeigen, dass für diese Zahl die diophantische Gleichung $ax+by = n$ immer eine ganzzahlige Lösung hat. Es gilt:
Sei für $x_0, y_0 \in Z$ das Paar (x_0, y_0) eine ganzzahlige Lösung dieser Gleichung.
Dann wird: (x, y) ist eine Lösung der diophantischen Gleichung

$$\Leftrightarrow \exists\, t \in Z: x = x_0 + bt \wedge y = y_0 - at.$$

Wählt man t so, dass $0 \leq y_0 - at \leq a-1$ ist, dann gilt $ax + by = n$,

$$ax = n - by$$

$$a(x_0 + bt) = n - b(y_0 - at) > ab-a-b-b(a-1) = -a, \text{ also}$$

$$a(x_0 + bt) > -a \text{ und } x_0 + bt > -1, \text{ also } x_0 + bt \geq 0.$$ Es existiert eine Lösung.

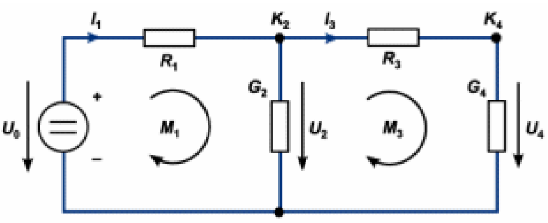
Es bleibt zu zeigen, dass $ax + by = ab-a-b$ keine Lösung hat. Wenn $ax+by = ab-a-b$ eine Lösung hätte, dann gelte

$$ab = ax + a + by + b = a(x+1) + b(y+1).$$

Da a und b teilerfremd per Voraussetzung, muss y+1 teilbar durch a sein und x+1 teilbar b durch sein.
Also muss $y+1 \geq a$ und $x+1 \geq b$. Doch dann gilt

$$ab = a(x+1) + b(y+1) \geq ab+ab = 2ab.$$ Widerspruch, da a und b ungleich 0.

Gleichungssystem - Netzwerk



Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln und linearer Gleichungssysteme können elektrische Netzwerke einfach berechnet werden.

Beispiel

Maschensatz für M_1 $\quad R_1 I_1 + U_2 = U_0$
Knotensatz für K_2 $\quad -I_1 + G_2 U_2 + I_3 = 0$
Maschensatz für M_3 $\quad -U_2 + R_3 I_3 + U_4 = 0$
Knotengleichung für K_4 $-I_3 + G_4 U_4 = 0$

Gemischte Diophantische Gleichung

Eine Diophantische Gleichung der Form $\quad x\cdot y + a\cdot x + b\cdot y + c = 0$
mit den zwei Variablen x und y sowie dem gemischten Glied $x\cdot y$ kann mit der Eulerschen Reduktionsmethode gelöst werden.
Auflösen nach x ergibt $\quad x = -(b\cdot y + c) / (y + a) = -b + (b\cdot d - c) / (y + a)$
Da der zweite Term ganzzahlig sein muss, setzt man

$$r = (b\cdot a - c) / (y + a) \quad \text{d.h.} \quad y = -a + (a\cdot b - c) / r$$

Damit können nur Lösungen gefunden werden, für die r ein ganzzahliger Teiler von $a\cdot b - c$ ist. Im Allgemeinen existieren nur endlich viele Lösungen.

Pellsche Gleichung

Die Pellsche Gleichung $X^2 - D*Y^2 = 1$ erhielt ihren Namen von Euler zu Ehren von John Pell (1611-1685). Für D = 61 und 109 ist die Lösung extrem schwierig und wurde erstmals von Lord William Brouncker und John Wallis gefunden. Z.B. ergibt sich für D = 109 :

$$X = 158070671986249 \text{ und } Y = 15140424455100$$

Kennt man eine Lösung x_0 und y_0, so ergeben sich weitere Lösungen mit

$$x_1 = C*x_1 - 1 \qquad y_1 = C*y_0 \text{ mit } C = 2*x_0$$

$$x_n = C*x_{n-1} - x_{n-2} \qquad y_n = C*y_{n-1} - y_{n-2}$$

D	Lösungen der Pellschen Gleichung
5	9 / 4
6	5 / 2
7	8 / 3
13	649 / 180
61	1766319049 / 226153980
73	2281249 / 267000
109	158070671986249 / 15140424455100
157	46698728731849 / 3726964292220
181	2469645423824185801 / 183567298683461940
241	10085143557001249 / 649641205044600
277	159150073798980475849 / 9562401173878027020
409	25052977273092427986049 / 1238789998647218582160
421	3879474045914926879468217167061449 / 189073995951839020880499780706260

Die Lösung der Pellschen Gleichung $X^2 - D*Y^2 = 1$ ergibt schon für kleine D sehr große Lösungen X und Y.

Die Tabelle enthält die Werte für D, bei denen X ein neues Maximum annimmt. (gesucht bis 1,2 Millionen)

D	**gerundeter Wert für X**	**D**	**gerundeter Wert für X**
5	9	10	19
13	649	29	9801
46	24335	53	66249
61	1766319049	109	158070671986249
181	2469645423824185801	277	159150073798980475849
397	838721786045180184649		
409	25052977273092427986049		
421	3879474045914926879468217167061449		
541	3707453360023867028800645599667005000		
661	16421658242965910275055840472270471049		
1021	198723867690977573219668252231077415636351801801		
1069	742925865816843150858935268959512942700219559049		
1381	918896450039726546221273993412674762030247693946345843163002870494 ...		
1167709	3.35239450597464815152511177808367904503088052112714420 * 10^2779		

Pellsche Gleichung und Hastings - Die Schlacht von Hastings

... aus Amusements in Mathematics, von Henry Ernest Dudeney, 1917
Die Aufgabe bezieht sich auf die Schlacht bei Hastings, jenen berühmten Kampf, in dem 1066 die Normannen unter Wilhelm dem Eroberer die Sachsen unter König Harald besiegten, und fortan die Geschicke Englands bestimmten. Nach Dudeney schildert die alte Chronik:
"Haralds Mannen standen tapfer zusammen und bildeten 61 Quadrate mit gleich vielen Recken in jedem Quadrat. Als Harald sich in die Schlacht warf, bildeten die Sachsen mit ihm zusammen ein einziges, mächtiges Quadrat."
Gesucht ist nun die minimal mögliche Anzahl der Krieger.

Lösung

Wir bezeichen die Kantenlänge der kleinen Quadrate mit y und die vom großen Quadrat mit x, d.h.

$$61\, y^2 + 1 = x^2$$

Es handelt es sich um eine diophantische Gleichung 2.Ordnung, konkret um die Pellsche Gleichung

$$x^2 - d\, y^2 = 1 \text{ mit } d = 61$$

Deren kleinste natürliche Lösung ist y = 226153980, x = 1766319049.
Mit Harald zusammen wäre also etwa 3.11 Trillionen Sachsen dabei gewesen. Und da sollen die verloren haben?

Pellsche Gleichung und Quadratwurzel

Mittels Pellscher Gleichung $X^2 - D*Y^2 = 1$ kann eine Näherungsformel für die Quadratwurzel $\sqrt{D}$ ermittelt werden. Durch Umstellen ergibt sich mit der Lösung (x_0 , y_0) als 1.Näherung $\sqrt{D} \approx x_0 / y_0$
Mit der Lösung (x_n , y_n) ist auch $x_{n+1} = x_n^2 + D\, y_n^2$; $y_{n+1} = 2\, x_n\, y_n$
Lösung der Gleichung, wobei die Quotienten x_n / y_n
mit wachsendem n immer besser die Wurzel $\sqrt{D}$ annähern.
Ein schnellere Konvergenz ergibt sich durch Abschätzen des Fehlers

$$\sqrt{D} = x_0 / y_0 - 1/2\, (1/(x_0\, y_0) + 1/(x_1\, y_1) + 1/(x_2\, y_2) + \ldots)$$

Zum Beispiel wird für D = 2: $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $x_1 = 9+2*4 = 17$, $y_1 = 2*3*2 = 12$, $x_2 = 289+2*144 = 577$, $y_2 = 2*17*12 = 408$ und somit
$\sqrt{2} = 3/2 - 1/2\, (1/(3*2) + 1/(17*12) + 1/(577*408) + \ldots)$
Mit den ersten 3 Summanden erhält man als Näherung 1,41421356237... ($\sqrt{2} \approx 1.41421356237310\ldots$) mit elf exakten Ziffern. Berücksichtigt man $x_3 = 665857$, $y_3 = 470832$ stimmt der Näherungswert auf 21 Stellen.

Pellsche Gleichung und Kettenbruch

Mithilfe von Kettenbrüchen von Quadratwurzeln kann die Pellsche Gleichung $x^2 - d \cdot y^2 = 1$ gelöst werden.

Dazu entwickelt man $\sqrt{d}$ in einen Kettenbruch und wählt a_n, die vorletzte Zahl einer Periode. Ist die Länge der Periode ungerade, so nutzt man die vorletzte Zahl der zweiten Periode.
Ist $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ der Kettenbruch, so ermittelt man den n.ten Näherungsbruch p_n/q_n. Dazu verwendet man

$$p_0 = 1,\ q_0 = 0,\ p_1 = a_1,\ q_1 = 1$$
$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Das Paar $x = p_n$ und $y = q_n$ ist dann eine Lösung der Gleichung.

Beispiel: $x^2 - 7y^2 = 1$
Die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{7}$ ist [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4 …].

Die vorletzte Zahl der ersten Periode ist $a_4 = 1$ und der 4.Näherungsbruch ist 8/3. x = 8 und y = 3 sind also Lösung der Gleichung, denn $8^2 - 7\cdot 3^2 = 1$.
Eine weitere Lösung erhält man aus a_8, der vorletzten Zahl der zweiten Periode, der 8.Näherungsbruch ist 127/48, und $127^2 - 7\cdot 48^2 = 1$.

Diophantische Gleichung 2.Grades

Eine diophantischen Gleichung 2.Grades ist eine Gleichung für ganzzahlige a, c und k mit ganzzahligen Lösungen x und y mit **$ax^2 + cy^2 = k$**

Pythagoreische Gleichung

Spezialform $A^2 + B^2 = C^2$
Lösung alle ganzzahligen pythagoreischen Tripel (A,B,C)
Spezialform $A^2 = B^2 + C^2 + D^2$
Lösung ganzzahlige pythagoreische Quadrupel (A,B,C,D)
Spezialform $(A^2+B^2)(C^2+D^2) = E^2 + F^2$
Lösung über Fibonacci-Identität $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bc)^2 + (bc \pm (-ad))^2 = e^2 + f^2$

Eulersche 4-Quadrate-Identität $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = j^2 + k^2 + m^2 + n^2$
Lebesque-Identität
$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$$

6-6-Lösung einer Diophantischen Gleichung 2.Grades

$87^2 + 233^2 + 264^2 + 396^2 + 496^2 + 540^2 = 90^2 + 206^2 + 309^2 + 366^2 + 522^2 + 523^2$

Ramanujan Quadratgleichung

... die Gleichung $2^n - 7 = x^2$ hat ausschließlich für n = 3, 4, 5, 7 und 15 ganzzahlige Lösungen (nach Schroeppel)

Diophantische Gleichung n.Grades

... Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und Lösungen
$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_m^k = y_1^k + y_2^k + \ldots + y_n^k$$
Die Tabelle enthält die kleinsten n für welche ganzzahlige Lösungen für ein k und $1 \le m \le n$ bekannt sind:

m	k=2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	3	4	7	8	11	15	23
2	2	2	2	4	7	8	9	12	19
3	3	3	7	8	11	24			
4	4	7	10	23					
5	5	5	11	16					
6	6	27							

Diophantische Gleichung 2.Grades $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2$

Die Liste enthält ganzzahlige Lösungen der Diophantischen Gleichung
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 = n$$
Angegeben werden teilerfremde a und b sowie deren Summe, welche eines Quadratzahl von e darstellt. In Klammern stehen Paare (c ; d), für die gerade die Gleichung erfüllt ist. Jedes Quadrupel (a, b, c, d) ist genau einmal in der Tabelle enthalten. Gesucht wurde bis a, b, c, d < 10000. (Februar 2007)

Ausgewählte Lösungen

$a^2 + b^2$	e^2	n	(c; d)
$7^2 + 24^2$	$= 25^2$	= 625	(15 ; 20)
$13^2 + 84^2$	$= 85^2$	= 7225	(36 ; 77) (40 ; 75) (51 ; 68)
$16^2 + 63^2$	$= 65^2$	= 4225	(25 ; 60) (33 ; 56) (39 ; 52)
$17^2 + 144^2$	$= 145^2$	= 21025	(24 ; 143) (87 ; 116) (100 ; 105)
$21^2 + 220^2$	$= 221^2$	= 48841	(85 ; 204) (104 ; 195) (140 ; 171)
$23^2 + 264^2$	$= 265^2$	= 70225	(96 ; 247) (140 ; 225) (159 ; 212)
$27^2 + 364^2$	$= 365^2$	= 133225	(76 ; 357) (219 ; 292) (240 ; 275)
$31^2 + 480^2$	$= 481^2$	= 231361	(156 ; 455) (185 ; 444) (319 ; 360)
$33^2 + 544^2$	$= 545^2$	= 297025	(184 ; 513) (300 ; 455) (327 ; 436)
$36^2 + 323^2$	$= 325^2$	= 105625	(80 ; 315) (91 ; 312) (125 ; 300) (165 ; 280) (195 ; 260) (204 ; 253)
$37^2 + 684^2$	$= 685^2$	= 469225	(156 ; 667) (411 ; 548) (440 ; 525)
$41^2 + 840^2$	$= 841^2$	= 707281	(580 ; 609)
$43^2 + 924^2$	$= 925^2$	= 855625	(259;888) (285;880) (300 ; 875) (520 ; 765) (533 ; 756) (555 ; 740)
$44^2 + 117^2$	$= 125^2$	= 15625	(75 ; 100)
$44^2 + 483^2$	$= 485^2$	= 235225	(93 ; 476) (291 ; 388) (325 ; 360)
$47^2 + 1104^2$	$= 1105^2$	= 1221025	(105 ; 1100) (169 ; 1092) (264 ; 1073)

			(272 ; 1071) (425 ; 1020)
$53^2 + 1404^2$	$= 1405^2$	$= 1974025$	(444 ; 1333) (800 ; 1155) (843 ; 1124)
$55^2 + 1512^2$	$= 1513^2$	$= 2289169$	(663 ; 1360) (712 ; 1335) (888 ; 1225)

Diophantische Gleichung 2.Grades $a^2 + b^2 = n$

Während auf der vorhergehenden Seite nach Lösungen der Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 = n$$

gefragt wurde, muss die Summe zweier Quadrate nicht unbedingt selbst Quadrat sein, d.h. gesucht sind für ein gegebenes natürliches n alle natürlichen Lösungen der Gleichung

$$a^2 + b^2 = n$$

Eine Zahl n ist genau dann Summe von Quadraten, wenn alle ungeraden Primfaktoren der Form 3 mod 4 in gerader Potenz auftreten.
Die Anzahl der Summen, bis auf Vertauschungen, ist gleich der halben Anzahl der Teiler der Form 1 mod 4.
Während es für einige n keine Lösung gibt, treten für andere Mehrfachlösungen auf. Zum Beispiel ist $105625 = 36^2 + 323^2 = 80^2 + 315^2 = 91^2 + 312^2 = 125^2 + 300^2 = 165^2 + 280^2 = 195^2 + 260^2 = 204^2 + 253^2$
oder
$2442050 = 73^2 + 1561^2 = 155^2 + 1555^2 = 221^2 + 1547^2 = 367^2 + 1519^2 = 391^2 + 1513^2 = 455^2 + 1495^2 = 533^2 + 1469^2 = 595^2 + 1445^2 = 799^2 + 1343^2 = 809^2 + 1337^2 = 923^2 + 1261^2 = 995^2 + 1205^2 = 1057^2 + 1151^2 = 1105^2 + 1105^2$

Die Anzahl von genau 1, 2, 3, … Lösungen ergeben sich zuerst für die natürlichen Zahlen
n = 2, 50, 325, 1105, 8125, 5525, 105625, 27625, 71825, 138125, 5281250, 160225, 1221025, 2442050, 1795625, 801125, 446265625, 2082925, ?, 4005625, 44890625, 30525625, 61051250, 5928325, 303460625, …

Gua-Quadrupel, Pythagoras-Quadrupel

Nach dem Satz von de Gua gilt:
Hat ein Tetraeder an einer Ecke drei rechte Kantenwinkel, so gilt für die Seitenflächeninhalte der angrenzenden Tetraederflächen $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$
Der Satz von de Gua stellt damit eine zum Satz des Pythagoras äquivalente Form im dreidimensionalen Raum dar.
Natürliche Zahlen, welche die diophantische Gleichung $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$
können daher Gua-Quadrupel oder Pythagoras-Quadrupel genannt werden. Die kleinsten echten Gua-Quadrupel, d.h. ohne 0 und gleiche oder nichtteilerfremde Zahlen, sind
(2, 3, 6, 7), (1, 4, 8, 9), (2, 6, 9, 11), (3, 4, 12, 13), (2, 5, 14, 15), (2, 10, 11, 15), (8, 9, 12, 17), (1, 6, 18, 19), …
Möglicher Generator für $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$:

$x = a^2 - b^2 - c^2$ $\quad$ $y = 2ac$
$z = 2ab$ $\quad$ $w = a^2 + b^2 + c^2$

für beliebige ganzzahlige Parameter a, b und c.

Diophantische Gleichung 2.Grades $a^2 + b^2 + c^2 = n$

Für die diophantische Gleichung der Form $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$
existieren verschiedene Lösungstripel. Allerdings muss die Summe dreier Quadrate nicht unbedingt selbst Quadrat sein, d.h. gesucht sind für ein gegebenes natürliches n alle natürlichen Lösungen der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = n$$

Während es für einige n keine Lösung gibt, treten für andere auch Mehrfachlösungen auf. Die kleinsten n, für die keine Zerlegung in eine Summe von 3 Quadraten existiert, sind

7, 15, 23, 28, 31, 39, 47, 55, 60, 63, 71, 79, 87, 92, 95, 103, 111, 112, 119, 124, 127, 135, …

Zu diesen natürlichen Zahlen gehören u.a. alle n = 7 + 8k und n = 28 + 32k, k > 0.

Diophantische Gleichung 3.Grades

Die nachfolgende Tabelle enthält Lösungen für Diophantische Gleichungen 3.Grades. Angezeigt werden Gleichungen der Typen a-b = 1-3, ... die Summe von a Potenzen 3.Grades natürlicher Zahlen gleich einer Summe von b Potenzen 3.Grades.

Typ 1-3	$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$	$9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3$
	$20^3 = 7^3 + 14^3 + 17^3$	$29^3 = 11^3 + 15^3 + 27^3$
	$84^3 = 28^3 + 53^3 + 75^3$	$87^3 = 26^3 + 55^3 + 78^3$
	$105^3 = 33^3 + 70^3 + 92^3$	$709^3 = 193^3 + 461^3 + 631^3$
	$929^3 = 69^3 + 447^3 + 893^3$	$505^3 = 59^3 + 163^3 + 499^3$
	$535^3 = 349^3 + 379^3 + 383^3$	
Typ 1-4	$20^3 = 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$	$13^3 = 5^3 + 7^3 + 9^3 + 10^3$
Typ 1-5	$9^3 = 1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3$	$12^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 + 10^3$
Typ 1-6	$13^3 = 1^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3$	

Typ 2-21729 = $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ 4104 = $2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$
13832 = $2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$ 20683 = $10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$
32832 = $4^3 + 32^3 = 18^3 + 30^3$ 39312 = $2^3 + 34^3 = 15^3 + 33^3$
40033 = $9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3$ 46683 = $3^3 + 36^3 = 27^3 + 30^3$
64232 = $17^3 + 39^3 = 26^3 + 36^3$ 65728 = $12^3 + 40^3 = 31^3 + 33^3$
Typ 2-2-2 87539319 = $167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$
119824488 = $11^3 + 493^3 = 90^3 + 492^3 = 346^3 + 428^3$
143604279 = $111^3 + 522^3 = 359^3 + 460^3 = 408^3 + 423^3$
175959000 = $70^3 + 560^3 = 198^3 + 552^3 = 315^3 + 525^3$
327763000 = $300^3 + 670^3 = 339^3 + 661^3 = 510^3 + 580^3$
Typ 2-2-2-2
6963472309248 = $2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3 = 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3$
Typ 4-4$2^3 + 3^3 + 10^3 + 11^3 = 1^3 + 5^3 + 8^3 + 12^3$
Typ 6-6$1^3 + 2^3 + 4^3 + 8^3 + 9^3 + 12^3 = 3^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 10^3 + 1^3$
$87^3 + 233^3 + 264^3 + 396^3 + 496^3 + 540^3 = 90^3 + 206^3 + 309^3 + 366^3 + 522^3 + 523^3$

Ramanujan-Quadrupel

Für die Diophantische Gleichung 3.Grades $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$
gab der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan eine Berechnungsvorschrift an: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, so gilt $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ mit
$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$ $y = 4a^2 - 4ab + 6b^2$
$z = 5a^2 - 5ab - 3b^2$ $t = 6a^2 - 4ab + 4b^2$
Die Berechnungsvorschrift ergibt Lösungen der Gleichung, die im Allgemeinen nicht primitiv sind, d.h. der größte gemeinsame Teiler von x,y,z,t kann größer 1 sein. Außerdem können nicht alle möglichen ganzzahligen Quadrupel (x,y,z,t) ermittelt werden.

Für einige t existieren verschiedene Tripel (x,y,z). Die kleinsten t mit genau n verschiedenen, teilerfremden Darstellungen $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ sind

n	
1	$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$
2	$41^3 = 2^3 + 17^3 + 40^3 = 6^3 + 32^3 + 33^3$
3	$87^3 = 20^3 + 54^3 + 79^3 = 26^3 + 55^3 + 78^3 = 38^3 + 48^3 + 79^3$
4	$219^3 = 50^3 + 67^3 + 216^3 = 51^3 + 152^3 + 190^3 = 67^3 + 167^3 + 177^3 = 108^3 + 163^3 + 170^3$
5	$606^3 = 9^3 + 290^3 + 583^3 = 24^3 + 389^3 + 547^3 = 47^3 + 358^3 + 561^3 = 95^3+ 393^3 + 544^3 = 167^3 + 436^3 + 513^3$
6	$492^3 = 48^3 + 85^3 + 491^3 = 113^3 + 264^3 + 463^3 = 149^3 + 336^3 + 427^3 = 190^3 + 279^3 + 449^3 = 243^3 + 358^3 + 389^3 = 281^3 + 322^3 + 399^3$

Diophantische Gleichung 4.Grades

Als Sonderfall des Großen Satzes von Fermat haben die Gleichungen $A^4 + B^4 = C^4$ keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen. 1772 vermutete Euler, dass auch $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ keine echten Lösungen besitzt. 1987 fand aber N.Elkies eine Lösung
$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4$;
1988 ermittelte Roger Frye $422481^4 = 95800^4 + 217519^4 + 414560^4$ und bewies, dass die kleinste Lösung ist. Bis heute ist noch keine Parameterlösung bekannt. Überraschenderweise existieren dagegen für $A^4 + B^4 + C^4 = 2D^4$ eine Vielzahl von Lösungen.

Für den Gleichungstyp $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ existiert eine Parameterlösung mit
$A = a + b$ $B = c - d$
$C = a - b$ $D = c + d$
$a = n(m^2+n^2)(-m^4+18m^2n^2-n^4)$ $b = 2m(m^6+10m^4n^2+m^2n^4+4n^6)$
$c = 2n(4m^6+m^4n^2+10m^2n^4+n^6)$ $d = m(m^2+n^2)(-m^4+18m^2n^2-n^4)$
Weitere Gleichungen nach Ramanujan
$3^4+(2x^4-1)^4+(4x^5+x)^4 = (4x^4+1)^4+(6x^4-3)^4+(4x^5-5x)^4$
$2(ab+ac+bc)2=a^4+b^4+c^4$ mit $a+b+c=0$
$2(ab+ac+bc)^4=a^4(b-c)^4+b^4(c-a)^4+c^4(a-b)^4$ mit $a+b+c=0$
$2(ab+ac+bc)^6=(a^2b+b^2c+c^2a)^4+(ab^2+bc^2+ca^2)^4+(3abc)^4$ mit $a+b+c=0$
Ferrari-Identität
$(a^2+2ac-2bc-b^2)^4+(b^2-2ab-2ac-c^2)^4+(c^2+2ab+2bc-a^2)^4=2(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)^4$
Bhargavas-Theorem $(a+b+c)^4+(b+c+d)^4+(a-d)^4 = (c+d+a)^4+(d+a+b)^4+(b-c)^4$, mit $a/b = c/d$

Die ersten natürlichen Zahlen n, welche Summe von 4 Biquadraten sind, erhält man für 353, 651, 2487, 2501, 2829, ... Die einzige Zahl der Form $4x^4+y^4$ ist 5.
Die nachfolgende Tabelle enthält Lösungen für Diophantische Gleichungen 4.Grades. Angezeigt werden Gleichungen der Typen a-b = 1-3, 1-4, 1-5, 2-2, 2-3, 2-4 und 3-3, d.h. die Summe von a Potenzen 4.Grades natürlicher Zahlen gleich einer Summe von b Potenzen 4.Grades.

Gleichungen 4.Grades

Typ 1-3 (Status: getestet bis höchste Potenz = 72^4)

$422481^4 = 95800^4 + 217519^4 + 414560^4$

$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4$

$638523249^4 = 630662624^4 + 275156240^4 + 219076465^4$

Typ 1-4 $353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$

$651^4 = 240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4$

$2487^4 = 435^4 + 710^4 + 1384^4 + 2420^4$

Typ 1-5 $5^4 = 2*4^4 + 3^4 + 2*2^4$

$15^4 = 13^4 + 12^4 + 6^4 + 2*2^4$

$15^4 = 14^4 + 9^4 + 8^4 + 6^4 + 4^4$

Typ 1-6 $3^4 = 5*2^4 + 1^4$

$7^4 = 6^4 + 4*4^4 + 3^4$

Typ 2-2, nach Euler 1802

$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4 = 635318657$

$7^4 + 239^4 = 157^4 + 227^4 = 3262811042$

$193^4 + 292^4 = 256^4 + 257^4 = 8657437697$

Typ 2-3 $2*7^4 = 8^4 + 5^4 + 3^4$ $\quad$ $2*13^4 = 15^4 + 8^4 + 7^4$

$2*19^4 = 21^4 + 16^4 + 5^4$

Typ 2-4 $9^4 + 3^4 = 8^4 + 6^4 + 2*5^4$ $\quad$ $9^4 + 8^4 = 10^4 + 5^4 + 2*2^4$

$11^4 + 3^4 = 10^4 + 8^4 + 5^4 + 1^4$

Typ 3-3 (getestet bis 34^4) $\quad$ $7^4 + 4^4 + 2^4 = 2*6^4 + 3^4$

$9^4 + 2^4 + 1^4 = 8^4 + 7^4 + 3^4$ $\quad$ $11^4 + 6^4 + 5^4 = 10^4 + 9^4 + 1^4$

Diophantische Gleichung 5.Grades

Die nachfolgende Tabelle enthält Lösungen für Diophantische Gleichungen 5.Grades. Angezeigt werden Gleichungen der Typen a-b = 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 2-3, 2-4, 2-5, 3-3 und höhere, d.h. die Summe von a Potenzen 5.Grades natürlicher Zahlen gleich einer Summe von b Potenzen 5.Grades.

Typ 1-4 $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$

Typ 1-5 $72^5 = 19^5 + 43^5 + 46^5 + 47^5 + 67^5$ $\quad$ $94^5 = 21^5 + 23^5 + 37^5 + 79^5 + 84^5$

$107^5 = 7^5 + 43^5 + 57^5 + 80^5 + 100^5$

Typ 1-6 $12^5 = 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5$

$30^5 = 5^5 + 10^5 + 11^5 + 16^5 + 19^5 + 29^5$

$32^5 = 15^5 + 16^5 + 17^5 + 22^5 + 24^5 + 28^5$

Typ 1-7 $23^5 = 1^5 + 7^5 + 8^5 + 14^5 + 15^5 + 18^5 + 20^5$

Typ 2-3 $14132^5 + 220^5 = 14068^5 + 6237^5 + 5027^5$

Typ 2-4 $29^5 + 3^5 = 28^5 + 20^5 + 10^5 + 4^5$ $\quad$ $38^5 + 12^5 = 37^5 + 25^5 + 13^5 + 5^5$

$52^5 + 28^5 = 50^5 + 35^5 + 29^5 + 26^5$

Typ 2-5 $22^5 + 1^5 = 4^5 + 5^5 + 7^5 + 16^5 + 21^5$

$29^5 + 23^5 = 9^5 + 11^5 + 14^5 + 18^5 + 30^5$

$38^5 + 16^5 = 10^5 + 14^5 + 26^5 + 31^5 + 33^5$

Typ 3-3 $67^5 + 28^5 + 24^5 = 62^5 + 54^5 + 3^5$ $\quad$ $24^5 + 28^5 + 67^5 = 3^5 + 54^5 + 62^5$

$18^5 + 44^5 + 66^5 = 13^5 + 51^5 + 64^5$

Typ 3-4 $3^5 + 22^5 + 25^5 = 1^5 + 8^5 + 14^5 + 27^5$

Typ 4-4 $5^5 + 2*6^5 + 8^5 = 4^5 + 3*7^5$

Typ 4-4-4 $\quad 3^5 + 48^5 + 52^5 + 61^5 = 13^5 + 36^5 + 51^5 + 64^5 = 18^5 + 36^5 + 44^5 + 66^5$

Typ 5-6 $22^5 + 17^5 + 16^5 + 6^5 + 5^5 = 21^5 + 20^5 + 12^5 + 10^5 + 2^5 + 1^5$

Typ 6-6

$87^5 + 233^5 + 264^5 + 396^5 + 496^5 + 540^5 = 90^5 + 206^5 + 309^5 + 366^5 + 522^5 + 523^5$

Diophantische Gleichung Tabelle

Die nachfolgende Tabelle enthält Beispiellösungen für Diophantische Gleichungen n.Grades, wobei unter einem Typ a-b eine Gleichung zu verstehen ist, bei welcher die Summe von a Potenzen n.Grades natürlicher Zahlen gleich einer Summe von b Potenzen n.Grades sind.

n=6

Typ 1-7, Lander 1967 $\quad 1141^6 = 74^6 + 234^6 + 402^6 + 474^6 + 702^6 + 894^6 + 1077^6$

Typ 1-8 $\quad 251^6 = 8^6 + 12^6 + 30^6 + 78^6 + 102^6 + 138^6 + 165^6 + 246^6$

$431^6 = 48^6 + 111^6 + 156^6 + 186^6 + 188^6 + 228^6 + 240^6 + 426^6$

Typ 1-9, Lander 1967 $\quad 54^6 = 1^6 + 17^6 + 19^6 + 22^6 + 31^6 + 2*37^6 + 41^6 + 49^6$

Typ 1-10, Lander 1967 $\quad 39^6 = 2^6 + 4^6 + 7^6 + 14^6 + 16^6 + 2*26^6 + 30^6 + 32^6$

Typ 1-11, Lander 1967 $\quad 18^6 = 2^6 + 3*5^6 + 2*7^6 + 2*9^6 + 10^6 + 14^6 + 17^6$

Typ 1-16, Martin 1893

$28^6 = 1^6+2^6+4^6+5^6+6^6+7^6+9^6+12^6+13^6+15^6+16^6+18^6+20^6+21^6+ 22^6+ 23^6$

Typ 2-2 $\quad$ noch keine Lösung bis $a^6+b^6 = 7.25 * 10^{26}$ gefunden

Typ 2-5, Brisse, Resta 1999 $\quad 1092^6 + 861^6 + 602^6 + 212^6 + 84^6 = 1117^6 + 770^6$

$1893^6 + 1468^6 + 1407^6 + 1302^6 + 1246^6 = 2041^6 + 691^6$

Typ 2-6, Ekl 1998 $241^6 + 17^6 = 218^6 + 210^6 + 118^6 + 2*63^6 + 42^6$

Typ 2-7, Lander 1967 $18^6 + 22^6 + 36^6 + 58^6 + 69^6 + 2*78^6 = 56^6 + 91^6$

Typ 2-8, Lander 1967 $8^6 + 10^6 + 12^6 + 15^6 + 24^6 + 30^6 + 33^6 + 36^6 = 35^6 + 37^6$

Typ 2-9, Lander 1967 $1^6 + 2*5^6 + 7^6 + 3*13^6 + 17^6 + 19^6 = 6^6 + 21^6$

Typ 2-10, Lander 1967 $3*1^6 + 2*4^6 + 7^6 + 9^6 + 3*11^6 = 2*12^6$

Typ 3-3

$23^6 + 15^6 + 10^6 = 22^6 + 19^6 + 3^6$ $36^6 + 37^6 + 67^6 = 15^6 + 52^6 + 65^6$

Typ 3-4 $73^6 + 58^6 + 41^6 = 70^6 + 65^6 + 32^6 + 15^6$

$85^6 + 62^6 + 61^6 = 83^6 + 69^6 + 56^6 + 52^6$

Typ 4-4, Rao 1934 $2*2^6 + 2*9^6 = 3^6+5^6+6^6+10^6$

$74^6 + 83^6 + 69^6 + 52^6 = 87^6 + 71^6 + 26^6 + 62^6$

Typ 4-4-4, Lander 1967

$1^6 + 34^6 + 49^6 + 111^6 = 7^6 + 43^6 + 69^6 + 110^6 = 18^6 + 25^6 + 77^6 + 109^6$

Typ 7-8, Moessner, Gloden 1944

$32^6 + 31^6 + 23^6 + 22^6 + 13^6 + 6^6 + 5^6 = 33^6+28^6+27^6+20^6+11^6+10^6+2^6+1^6$

n=7

Typ 1-7, Dodrill 1999 $568^7 = 525^7 + 439^7 + 430^7 + 413^7 + 266^7 + 258^7 + 127^7$

Typ 1-8, Lander 1967 $102^7 = 12^7 + 35^7 + 53^7 + 58^7 + 64^7 + 83^7 + 85^7 + 90^7$

Typ 1-9, Lander 1967 $62^7 = 6^7 + 14^7 + 20^7 + 22^7 + 27^7 + 33^7 + 41^7 + 50^7 + 59^7$

Typ 2-6, Meyrignac $125^7 + 24^7 = 121^7 + 94^7 + 83^7 + 61^7 + 57^7 + 27^7$

Typ 2-8, Lander 1967 $10^7 + 33^7 = 5^7 + 6^7 + 7^7 + 2*15^7 + 20^7 + 28^7 + 31^7$

Typ 2-10, Lander 1967 $2^7 + 27^7 = 4^7 + 8^7 + 13^7 + 2*14^7 + 16^7 + 18^7 + 22^7 + 2*23^7 =$

$2*7^7 + 9^7 + 13^7 + 14^7 + 18^7 + 20^7 + 2*22^7 + 23^7$

Typ 3-5 $96^7 + 41^7 + 17^7 =87^7 + 2*77^7 + 68^7 + 56^7$

$153^7 + 43^7 + 14^7 = 140^7 + 137^7 + 59^7 + 2*42^7$

Typ 3-7, Lander 1967 $26^7 + 2*30^7 = 2*7^7 + 12^7 + 16^7 + 27^7 + 28^7 + 31^7$

Typ 4-4, Ekl 1998, Lau 1999 $149^7 + 123^7 + 14^7 + 10^7 = 146^7 + 129^7 + 90^7 + 15^7$

$194^7 + 150^7 + 105^7 + 23^7 = 192^7 + 152^7 +132^7 + 38^7$

Typ 4-5, Gloden 1948 $50^7 + 43^7 + 16^7 + 12^7 = 52^7 + 29^7 + 26^7 + 11^7 + 3^7$

$81^7 + 58^7 + 19^7 + 9^7 = 77^7 + 68^7 + 56^7 + 48^7 + 2^7$

Typ 5-5, Gloden 1949 $2*8^7 + 13^7 + 16^7 + 19^7 = 2^7 + 12^7 + 15^7 + 17^7 + 18^7$

$4^7 + 8^7 + 14^7 + 16^7 + 23^7 = 2*7^7 + 9^7 + 20^7 + 22^7$

Typ 6-6, Sastry, Rai 1948 $2^7 + 3^7 + 2*6^7 + 10^7 + 13^7 = 2*1^7 + 2*7^7 + 2*12^7$

$87^7+233^7+264^7+396^7+496^7 + 540^7 = 90^7 + 206^7 + 309^7 + 366^7 + 522^7 + 523^7$

Typ 9-10, Moessner, Golden 1944

$42^7+37^7+36^7+ 29^7 + 23^7 + 19^7 + 13^7 + 6^7 + 5^7 = 41^7 + 40^7 + 33^7 + 28^7 + 27^7$

$+ 15^7 +14^7 + 9^7 + 2^7 + 1^7$

n=8

Typ 1-10, Kuosa

$235^8 = 226^8 + 184^8 + 171^8 + 152^8 + 142^8 + 66^8 + 58^8 + 34^8 + 16^8 + 6^8$

Typ 1-11, Lander 1967

$125^8 = 14^8 + 18^8 + 2*44^8 + 66^8 + 70^8 + 92^8 + 93^8 + 96^8 + 106^8 + 112^8$

Typ 1-12, Lander 1967 $65^8 = 2*8^8 + 10^8 + 3*24^8 + 26^8 + 30^8 + 34^8 + 44^8 + 52^8 + 63^8$

Typ 2-8 $129^8 + 95^8 = 128^8 + 92^8 + 86^8 + 82^8 + 74^8 + 57^8 + 55^8 + 20^8$

Typ 2-9, Lander 1967 $11^8 + 27^8 = 2^8 + 7^8 + 8^8 + 16^8 + 17^8 + 2*20^8 + 2*24^8$

Typ 3-7 $108^8 + 68^8 + 5^8 = 102^8 + 2*88^8 + 52^8 + 37^8 + 26^8 + 6^8$

Typ 3-8, Lander 1967 $8^8 + 17^8 + 50^8 = 6^8 + 12^8 + 2*16^8 + 2*38^8 + 40^8 + 47^8$

Typ 4-5 $221^8 + 108^8 + 2*94^8 = 195^8 + 194^8 + 188^8 + 126^8 + 38^8$

Typ 4-6, Ekl 1998 $47^8 + 29^8 + 12^8 + 5^8 = 45^8 + 40^8 + 30^8 + 26^8 + 23^8 + 3^8$

Typ 4-7, Lander 1967 $7^8 + 9^8 + 16^8 + 2*22^8 + 28^8 + 34^8 = 6^8 + 11^8 + 20^8 + 35^8$

Typ 5-5, Letac 1942 $43^8 + 20^8 + 11^8 + 10^8 + 1^8 = 41^8 + 35^8 + 32^8 + 28^8 + 5^8$

$42^8 + 41^8 + 35^8 + 9^8 + 6^8 = 45^8 + 36^8 + 27^8 + 13^8 + 8^8$

Typ 5-5, Ekl 1998 $2*36^8 + 33^8 + 25^8 + 21^8 = 38^8 + 34^8 + 32^8 + 2*15^8 + 13^8$

$39^8 + 33^8 + 32^8 + 25^8 + 19^8 = 37^8 + 2*35^8 + 17^8 + 16^8 + 2^8$

Typ 6-6, Moessner, Gloden 1944

$3^8 + 6^8 + 8^8 + 10^8 + 15^8 + 23^8 = 5^8 + 2*9^8 + 12^8 + 20^8 + 22^8$

Typ 7-7, Moessner 1947

$1^8 + 3^8 + 5^8 + 2*6^8 + 8^8 + 13^8 = 4^8 + 7^8 + 2*9^8 + 10^8 + 11^8 + 12^8$

Typ 8-8, Lander 1967 $1^8 + 3^8 + 3*7^8 + 2*10^8 + 12^8 = 4^8 + 2*5^8 + 2*6^8 + 3*11^8$

Typ 9-10, Moessner, Gloden 1944

$54^8 + 53^8 + 46^8 + 37^8 + 29^8 + 23^8 + 22^8 + 6^8 + 5^8 = 55^8 + 50^8 + 49^8 + 33^8 +$

$32^8 + 26^8 +18^8 + 9^8 + 2^8 + 1^8$

n=9

Typ 1-12

$103^9 = 2*91^9 + 89^9 + 71^9 + 68^9 + 65^9 + 43^9 + 42^9 + 19^9 + 16^9 + 13^9 + 5^9$

Typ 1-14, Ekl 1998

$66^9 = 63^9+54^9+51^9+49^9+38^9+35^9+29^9 + 24^9 + 21^9 + 12^9 + 10^9 + 7^9 + 2^9 + 1^9$

Typ 1-15, Lander 1967
$26^9 = 2*2^9 + 4^9 + 2*6^9 + 7^9 + 2*9^9 + 10^9 + 15^9 + 18^9 + 2*21^9 + 2*23^9$
Typ 2-10, Morelli 1999
$137^9 + 69^9 = 121^9 + 2*116^9 + 115^9 + 89^9 + 52^9 + 28^9 + 26^9 + 14^9 + 9^9$
Typ 2-12, Lander 1967 $15^9 + 21^9 = 4*2^9 + 2*3^9 + 4^9 + 7^9 + 16^9 + 17^9 + 2*19^9$
Typ 3-9, Ekl 1998 $2*38^9 + 3^9 = 41^9 + 23^9 + 2*20^9 + 18^9 + 2*13^9 + 12^9 + 9^9$
Typ 3-11, Lander 1967
$13^9 + 16^9 + 30^9 = 2^9 + 3^9 + 6^9 + 7^9 + 2*9^9 + 2*19^9 + 21^9 + 25^9 + 29^9$
Typ 4-6 $90^9 + 64^9 + 2*35^9 = 86^9 + 80^9 + 62^9 + 43^9 + 27^9 + 16^9$
Typ 4-9, Ekl 1998
$38^9 + 31^9 + 12^9 + 2^9 = 36^9 + 2*32^9 + 30^9 + 15^9 + 13^9 + 8^9 + 4^9 + 3^9$
Typ 4-10, Lander 1967
$2^9 + 2*6^9 + 9^9 + 10^9 + 11^9 + 14^9 + 18^9 + 2*19^9 = 5^9 + 12^9 + 16^9 + 21^9$
Typ 5-5 $192^9 + 101^9 + 91^9 + 30^9 + 26^9 = 180^9 + 175^9 + 116^9 + 17^9 + 12^9$
Typ 5-7, Ekl 1998 $35^9 + 26^9 + 2*15^9 + 12^9 = 33^9 + 32^9 + 24^9 + 16^9 + 14^9 + 8^9 + 6^9$
Typ 5-11, Lander 1967
$3^9 + 2*5^9 + 2*9^9 + 12^9 + 2*15^9 + 16^9 + 2*21^9 = 7^9 + 8^9 + 14^9 + 20^9 + 22^9$
Typ 6-6 $23^9 + 18^9 + 14^9 + 2*13^9 + 1^9 = 22^9 + 21^9 + 15^9 + 10^9 + 9^9 + 5^9$
$31^9 + 23^9 + 21^9 + 14^9 + 9^9 + 2^9 = 2*29^9 + 15^9 + 11^9 + 10^9 + 6^9$
Typ 11-12, Moessner, Gloden 194472 $^9 + 67^9 + 66^9 + 53^9 + 43^9 + 37^9 + 35^9 + 29^9 + 19^9 + 6^9 + 5^9 =$
$71^9 + 70^9 + 63^9 + 55^9 + + 40^9 + 39^9 + 33^9 + 32^9 + 17^9 + 9^9 + 2^9 + 1^9$

n=10

Typ 1-15, Meyrignac 1999 $108^{10} = 100^{10} + 94^{10} + 91^{10} + 2*77^{10} + 76^{10} + 63^{10} + 62^{10} + 52^{10}$
$+ 45^{10} + 35^{10} + 33^{10} + 16^{10} + 10^{10} + 1^{10}$
Typ 1-22, Ekl 1998 $33^{10} = 2*30^{10} + 2*26^{10} + 23^{10} + 21^{10} + 19^{10} + 18^{10} + 2*13^{10} +$
$2*12^{10} + 5*10^{10} + 2*9^{10} + 7^{10} + 6^{10} + 3^{10}$
Typ 1-23, Lander 1967 $15^{10} = 5*1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 6^{10} + 6*7^{10} + 4*9^{10} + 10^{10} + 2*12^{10} +$
$13^{10} + 14^{10}$
Typ 2-13 $51^{10} + 32^{10} = 49^{10}+43^{10}+41^{10}+37^{10}+28^{10}+26^{10}+25^{10}+15^{10}+2*10^{10}$
$+9^{10}+5^{10}+3^{10}$
Typ 2-15, Ekl 1998 $35^{10} + 3^{10} = 33^{10} + 32^{10} + 24^{10} + 21^{10} + 2*20^{10} + 3*13^{10} + 12^{10}$
$+11^{10} +9^{10} +7^{10} +2*1^{10}$
Typ 2-19, Lander 1967 $9^{10} + 17^{10} = 5*2^{10} + 5^{10} + 6^{10} + 10^{10} + 6*11^{10} + 2*12^{10} + 3*15^{10}$
Typ 3-13 $46^{10} + 32^{10} + 22^{10} = 2*43^{10} + 27^{10} + 26^{10} + 17^{10} + 16^{10} + 12^{10} +$
$2*9^{10} +6^{10} +4^{10} +2*3^{10}$
Typ 3-14, Ekl 1998 $30^{10} + 28^{10} + 4^{10} = 31^{10}+23^{10}+2*20^{10}+2*17^{10}+16^{10}+10^{10}+ 3*9^{10}$
$+ 5^{10} + 2*2^{10}$
Typ 3-24, Lander 1967 $11^{10} + 2*15^{10} = 1^{10}+2^{10}+3^{10} + 10*4^{10} + 7^{10} + 7*8^{10} + 10^{10} + 12^{10}$
$+ 16^{10}$
Typ 4-12, Bainville 1999 $53^{10} +2*44^{10} +22^{10} = 51^{10} +49^{10} +43^{10} +39^{10} +29^{10} +28^{10}$
$+2*17^{10} +16^{10} +13^{10}+7^{10} +4^{10}$
Typ 4-15, Ekl 1998 $4*23^{10} = 26^{10} + 5*18^{10} + 3*17^{10} + 15^{10} + 12^{10} + 6^{10} + 3*4^{10}$
Typ 4-23, Lander 1967 $3*11^{10} + 16^{10} = 5*1^{10} + 2*2^{10} + 2*3^{10} + 4^{10} + 4*6^{10} + 2*14^{10} +$
15^{10}
Typ 5-16, Lander 1967 $2*3^{10}+8^{10}+14^{10}+16^{10} = 4*1^{10}+2^{10}+2*4^{10} + 6^{10} + 2*12^{10} + 5*13^{10}$
$+ 15^{10}$
$20^{10} + 11^{10} + 8^{10} + 3^{10} + 1^{10} = 2*18^{10} + 17^{10} + 16^{10} + 10^{10} + 2*7^{10} +$
$6*4^{10} + 2*2^{10}$
Typ 6-6 $95^{10}+71^{10}+32^{10} + 28^{10} + 25^{10} + 16^{10} = 92^{10} + 85^{10} + 2*34^{10} +$
$23^{10} + 5^{10}$
Typ 6-16, Ekl 1998 $18^{10} + 12^{10} + 11^{10} + 10^{10} + 3^{10} + 2^{10} = 17^{10} + 16^{10} + 4*13^{10} +$
$4*7^{10} + 4*6^{10} + 5^{10} + 4^{10}$
Typ 6-27, Lander 1967 $2*2^{10} + 8^{10} + 11^{10} + 2*12^{10} = 1^{10} + 4*3^{10} + 2*4^{10} + 2*5^{10} +$
$7*6^{10} + 9*7^{10} + 10^{10} + 13^{10}$
Typ 7-7, Lander 1967 $38^{10} + 33^{10} + 2*26^{10} + 15^{10} + 8^{10} + 1^{10} = 36^{10} + 35^{10} + 32^{10} +$
$29^{10} + 24^{10} + 23^{10} + 22^{10}$
$68^{10}+61^{10}+55^{10}+32^{10}+31^{10}+28^{10}+1^{10} =$
$67^{10}+64^{10}+49^{10}+44^{10}+23^{10} +20^{10} +17^{10}$

Diophantische Gleichungen der Form $x^a + y^a = z^a + u^b$ mit $b > a$

Alle nachfolgenden Gleichungen wurden kontinuierlich gesucht für x, y, z < 100, z < x < y und a < 50:

a = 3:	$27^3+30^3 = 3^3+6^6$	$18^3+30^3 = 4^3+8^5$	$40^3+60^3 = 4^3+6^7$	$8^3+10^3 = 6^3+6^4$
	$15^3+17^3 = 8^3+6^5$	$36^3+60^3 = 8^3+4^9$	$36^3+60^3 = 8^3+8^6$	$19^3+24^3 = 10^3+3^9$
	$29^3+35^3 = 12^3+4^8$	$29^3+35^3 = 12^3+16^4$	$17^3+24^3 = 16^3+11^4$	$39^3+89^3 = 17^3+15^5$
	$27^3+45^3 = 18^3+18^4$	$36^3+60^3 = 24^3+12^5$	$90^3+99^3 = 27^3+6^8$	$90^3+99^3 = 27^3+36^4$
	$57^3+72^3 = 30^3+3^{12}$	$57^3+72^3 = 30^3+9^6$	$57^3+72^3 = 30^3+27^4$	$40^3+68^3 = 36^3+24^4$
	$48^3+60^3 = 36^3+6^7$			

a = 4: $6^4+9^4 = 3^4+6^5$ $18^4+21^4 = 15^4+12^5$ $20^4+31^4 = 17^4+10^6$ $36^4+54^4 = 18^4+6^9$
$40^4+100^4 = 20^4+40^5$

Diophantische Gleichung A = B²-C²

Jede ungerade Zahl a = 2z+1 kann sicher als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen dargestellt werden, da

$$a = 2z+1 = (z+1)^2 - z^2$$

gilt. Für gerade Zahlen muss ein solche Darstellung nicht existieren.
Die kleinste gerade Zahl mit einer Darstellung als Differenz zweier Quadrate ist die $8 = 3^2 - 1^2$.
Für die 15 existieren zwei Möglichkeiten, für die 45 drei, für die 96 vier, …

Diophantische Gleichung (4)

1955 wurde durch L.J.Mordell, Miller und Woollett die Frage nach Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = d$$

für verschiedene natürliche Zahlen d gestellt. x, y, z sind dabei ganze Zahlen.
Für d = 2 berechneten sie die Parameterlösung

$$-6t^2 ; -6t3 +1 ; 6t^3 +1$$

Bekannt ist auch, dass für d = 9m ± 4 keine Lösungen existieren.

Durch Andreas-Stephan Elsenhans und Joerg Jahnel wurden 2007 alle x, y, z bis 10^{14} untersucht und die Lösungen bis maximal d = 1000 ermittelt.
Für folgende 14 Zahlen d unter 1000 wurde noch keine Darstellung gefunden:

d = 33, 42, 74, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, 975

Diophantische Identitäten

$(2^{8k+4} +1)^8 = (2^{8k+4} -1)^8 + (2^{7k+4})^8 + (2^{k+1})^8 + 7 * [(2^{5k+3})^8 + (2^{3k+2})^8]$
$(75 v^5 - u^5)^5 + (u^5 + 25 v^5)^5 + (u^5 - 25 v^5)^5 + (10 u^3v^2)^5 + (50 uv^4)^5 = (u^5 + 75 v^5)^5$
nach Ramanujan
$(8s^2 + 40st - 24t^2)^4 + (6s^2 - 44st - 18t^2)^4 + (14s^2 - 4st - 42t^2)^4 + (9s^2 + 27t^2)^4 + (4s^2 + 12t^2)^4 = (15s^2 + 45t^2)^4$
$(4m^2 - 12n^2)^4 + (3m^2 + 9n^2)^4 + (2m^2 - 12mn - 6n^2)^4 + (4m^2 + 12n^2)^4 + (2m^2 + 12mn - 6n^2)^4 = (5m^2 + 15n^2)^4$
$3^4 + (2x^4 - 1)^4 + (4x^5 + x)^4 = (4x^4 + 1)^4 + (6x^4 - 3)^4 + (4x^5 - 5x)^4$

Vier-Quadrate-Identität

Euler am 15.4.1705 an Goldbach:
$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 +$
$+ (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3)^2 + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2$

Fermats elliptisches Kurventheorem

Die diophantische Gleichung $y^3 = x^2 + 2$ hat ausschließlich die ganzzahligen Lösungen (x , y) = (5, 3) und (-5, 3).

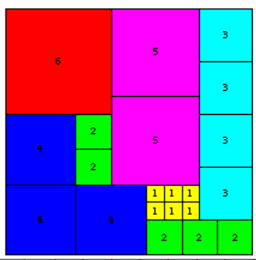
Ramanujan 6-10-8 Identität

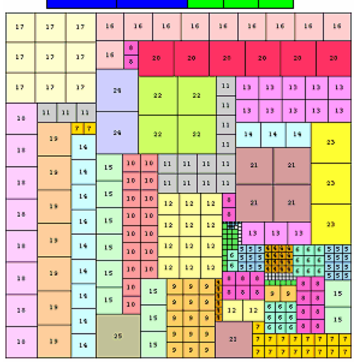
Gilt a d = b c, so wird

$64 [(a + b + c)^6 + (b + c + d)^6 - (c + d + a)^6 - (d + a + b)^6 + (a - d)^6 - (b - c)^6] *$
$* [(a + b + c)^{10} + (b + c + d)^{10} - (c + d + a)^{10} - (d + a + b)^{10} + (a - d)^{10} - (b - c)^{10}]$
$= 45 [(a + b + c)^8 + (b + c + d)^8 - (c + d + a)^8 - (d + a + b)^8 + (a - d)^8 - (b - c)^8$

Hardy, Wright (1979)

$a^3 (a^3 + b^3)^3 = b^3 (a^3 + b^3)^3 + a^3 (a^3 - 2b^3)^3 + b^3 (2a^3 - b^3)^3$
$a^3 (a^3 + 2b^3)^3 = a^3 (a^3 - b^3)^3 + b^3 (a^3 - b^3)^3 + b^3 (2a^3 + b^3)^3$
nach Euler hat $A^3 + B^3 = C^2$ die Lösung
$A = 3n^3 + 6n^2 – n$ $B = -3n^3 + 6n^2 + n$ $C = 6n^2 (3n^2 + 1)$





Die diophantische Gleichung $n\, 1^2 + (n-1)\, 2^2 + (n-2)\, 3^2 + . . . + 1\, n^2 = k^2$
gilt nur für wenige k und n.
Die ersten zwei nichttrivialen Lösungen sind n=6, k=14, und n=25, k=195. Diese können durch Zerlegung eines Quadrates der Seitenlänge k in ein Quadrat der Länge n, zwei Quadrate der Länge n-1, … veranschaulicht werden. Die entsprechenden Lösungen für n = 6 und n = 25 sind links zu sehen.

Diophantische Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Gesucht sind die ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

in Abhängigkeit der Parameter A, B, C, D, E und F.
Mehrere Lösungsfälle existieren, wobei deren Bezeichnung von der durch die Gleichung in der xy-Ebene gebildeten Kurve entnommen sind. Diese Kurven stellen die reellen Lösungen dar.

linearer Fall	$A = B = C = 0$
einfacher hyperbolischer Fall	$A = C = 0; B \neq 0$
elliptischer Fall	$B^2 - 4AC < 0$
parabolischer Fall	$B^2 - 4AC = 0$
hyperbolischer Fall	$B^2 - 4AC > 0$

linearer Fall $A = B = C = 0$

Die Gleichung wird zu $Dx + Ey + F = 0$, d.h. der einfachen diophantischen linearen Gleichung.
Für $D = 0$ und $E = 0$ existieren Lösungen für $F = 0$; alle Paare (x,y) ganze Zahlen.
Für $D = 0$ und $E \neq 0$ wird

$$Ey + F = 0 \rightarrow y = -F/E, \ x \text{ beliebig}$$

Für $D \neq 0$ und $E = 0$ ergibt sich

$$Dx + F = 0 \rightarrow x = -F/D, \ y \text{ beliebig}$$

Für $D \neq 0$ und $E \neq 0$ sei $g = ggT(D, E)$. Wenn D und E Vielfache von g sind, dann auch $Dx + Ey$. Ist F kein Vielfaches von g, so existiert damit keine Lösung.
Ist F Vielfaches wird die Gleichung reduziert

$$dx + ey = -f \quad ; d = D/g, e = E/g \text{ und } f = F/g$$

Über den erweiterten Euklidischen Algorithmus findet man u', v' mit $uu'+vv' = \pm ggT(u, v)$. Setzt man $u = d$, $v = e$ wird

$$du' + ev' = \pm 1 \rightarrow d(\pm fu') + e(\pm fv') = -f \rightarrow d(\pm fu') + det + e(\pm fv') - det = -f \rightarrow$$
$$d(et \pm fu') + e(-dt \pm fv') = f$$

und der allgemeinen Lösung $x = et \pm fu'$; $y = -dt \pm fv'$ für beliebiges ganze t

einfacher hyperbolischer Fall $A = C = 0; B \neq 0$

Die diophantische Gleichung reduziert sich damit auf $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, und

$$(Bx + E)(By + D) = DE - BF$$

1.Möglichkeit: $DE - BF = 0$; zwei zu den Achsen parallele Geraden
Hier gilt $Bx + E = 0$ oder $By + D = 0$. Für $B \neq 0$ ergibt sich die Lösung

$x = - E/B$; y beliebige ganze Zahl
x beliebig, $y = - D/B$

2.Möglichkeit: $DE - BF \neq 0$; Hyperbel mit zu den Achsen parallelen Asymptoten
In diesem Fall müssen alle Teiler von $DE - BF$ gesucht werden. Dazu sei $d_1, d_2, \ldots, d_n$ die Teilermenge von $DE - BF$.
Dann wird $\quad Bx + E = d_i \qquad By + D = (DE - BF) / d_i$

$$Bx = d_i - E \qquad By = (DE - BF) / d_i - D$$
$$x = (d_i - E) / B \text{ und } y = ((DE - BF) / d_i - D) / B$$

Beispiel: Gleichung $2xy + 5x + 56y + 7 = 0$
Die Teilermenge von $DE - BF = 5 \cdot 56 - 2 \cdot 7 = 266$ ist ±1, ±2, ±7, ±14, ±19, ±38, ±133, ±266. Mit $(2x + 56)(2y + 5) = 266$ wird:

$d_1 = 1 \quad x = (1-56)/2 = -55/2$, $y = (266/1-5)/2 = 261/2$; keine Lösung, da nicht ganzzahlig
$d_2 = -1 \quad x = (-1-56)/2 = -57/2$, $y = [266/(-1)-5]/2 = 271/2$; keine Lösung, da nicht ganzzahlig
$d_3 = 2 \quad x = (2-56)/2 = -27$, $y = (266/2-5)/2 = 64$
$d_4 = -2 \quad x = (-2-56)/2 = -29$, $y = [266/(-2)-5]/2 = -69$ usw.
$d_7 = 14 \quad x = (14-56)/2 = -21$, $y = (266/14-5)/2 = 7$
$d_8 = -14 \quad x = (-14-56)/2 = -35$, $y = [266/(-14)-5]/2 = -12$
$d_{11} = 38 \quad x = (38-56)/2 = -9$, $y = (266/38-5)/2 = 1$
$d_{12} = -38 \quad x = (-38-56)/2 = -47$, $y = [266/(-38)-5]/2 = -6$
$d_{15} = 266 \quad x = (266-56)/2 = 105$, $y = (266/266-5)/2 = -2$
$d_{16} = -266 \quad x = (-266-56)/2 = -161$, $y = [266/(-266)-5]/2 = -3$

elliptischer Fall $B^2 - 4AC < 0$

Da eine Ellipse eine geschlossene Kurv ist, kann es nur endlich viele Lösungen geben. Die diophantische Gleichung wird zu

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(*) $\quad y = (-(Bx + E) \pm \sqrt{(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F)}) / (2C)$

Für jeden Wert von x existieren zwei Werte von y, jeweils auf den entgegengesetzten Seiten der Ellipse. Liegt x an einem Scheitel der Ellipse gibt es nur ein y.
Die möglichen x-Werte können nur zwischen den reellen Nullstellen von

$$(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = 0$$

$$(B^2 - 4AC)\, x^2 + 2(BE - 2CD)\, x + (E^2 - 4CF) = 0$$

liegen. Damit sind alle ganzzahligen x-Werte zwischen den Nullstellen in Gleichung (*) zu prüfen.

Beispiel: Gleichung $42x^2 + 8xy + 15y^2 + 23x + 17y - 4915 = 0$.
Da $B^2 - 4AC = 8^2 - 4\cdot 42\cdot 15 = -2456 < 0$ ist, liegt der elliptische Fall vor.
Die möglichen Werte für x liegen zwischen den Nullstellen von

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF) = -2456\, x^2 - 1108\, x + 295189 = 0.$$

Die Nullstellen sind -11,19… und 10,74…, so dass alle x von -11 bis 10 zu prüfen sind.
Wird x in (*) eingesetzt, so ergibt sich nur für x = -11 ein ganzzahliges y = -1, so dass nur diese Lösung existiert.

parabolischer Fall $B^2 - 4AC = 0$

Es sei $g = ggT(A,C)$, $a = A/g \geq 0$, $b = B/g$, $c = C/g \geq 0$.
Wenn $b^2 = 4ac$ positiv ist, so kann g so gewählt werden, dass es das gleiche Vorzechen wie A besitzt.
Dann sind a und c positiv oder ein Wert gleich 0.
Aus $b^2 - 4ac = 0$ wird $b^2/4 = ac$. Da $ggT(a,c) = 1$ sind a und c vollständige Quadrate. Multiplikation mit $\sqrt{a}$ wird

$$\sqrt{a}\, g\, (ax^2 + bxy + cy^2) + \sqrt{a}\, Dx + \sqrt{a}\, Ey + \sqrt{a}\, F = 0$$

$$\sqrt{a}\, g\, (\sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y)^2 + \sqrt{a}\, Dx + \sqrt{a}\, Ey + \sqrt{a}\, F = 0$$

wobei $\sqrt{c}$ das Vorzeichen von B/A hat.

$$\sqrt{a}\, g\, (\sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y)^2 + D\, (\sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y) - \sqrt{c}\, Dy + \sqrt{a}\, Ey + \sqrt{a}\, F = 0$$

Mit $u = \sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y$ wird

$$\sqrt{a}\, g\, u^2 + Du + (\sqrt{a}\, E - \sqrt{c}\, D)\, y + \sqrt{a}\, F = 0$$

$$(\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E)\, y = \sqrt{a}\, gu^2 + Du + \sqrt{a}\, F$$

Es gibt zwei Fälle: $\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E = 0$ (zwei parallele Geraden) oder $\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E \neq 0$ (Parabel).

1.Fall: $\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E = 0$.

$$\sqrt{a}\, gu^2 + Du + \sqrt{a}\, F = 0$$

Wenn x und y zwei ganze Zahlen sind, so muss auch u ganzzahlig sein. Es seien u_1 und u_2 die Lösungen der Gleichung, d.h.

$$\sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y - u_1 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y - u_2 = 0$$

was als lineare Gleichungen lösbar ist.

2.Fall: $\sqrt{a}\, gu^2 + Du + \sqrt{a}\, F$ ist ein Vielfaches von $\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E$.
Sind $u_0, u_1,…$ die Werte von u im Bereich $0 \leq u < |\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E|$, so $u = u_i + (\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E)\, t$, wobei t eine ganze Zahl ist.
Einsetzen und mehrere Umwandlungen ergeben dann

$$x = \sqrt{c}\, g\, (\sqrt{a}\, E - \sqrt{c}\, D)\, t^2 - (E + 2\sqrt{c}\, gu_i)\, t - (\sqrt{c}\, gu_i^2 + Eu_i + \sqrt{c}\, F) / (\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E)$$

$$y = \sqrt{a}\, g\, (\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E)\, t^2 - (D + 2\sqrt{a}\, gu_i)\, t - (\sqrt{a}\, gu_i^2 + Du_i + \sqrt{a}\, F) / (\sqrt{c}\, D - \sqrt{a}\, E)$$

Hilberts 10.Problem: Entscheidung der Lösbarkeit einer Diophantischen Gleichung

Hilbert fragte: Gibt es einen endlichen Algorithmus, der feststellt, ob eine Diophantische Gleichung lösbar ist?

Yuri Matiyasevich bewies 1970, dass es einen solchen Algorithmus nicht geben kann. Grundlage seines Beweises ist die Beziehung Diophantischer Gleichungen zu rekursiv aufzählbaren Teilmengen natürlicher Zahlen.
Dies sind Mengen S, für die ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten die Zugehörigkeit einer natürlichen Zahl zu S feststellt - aber nur, wenn die Zahl auch tatsächlich in S liegt, d.h. die Feststellung der Nicht-Zugehörigheit zu S muss der Algorithmus nicht leisten.

Matiyasevich konnte zeigen, dass zu jeder rekursiv aufzählbaren Menge S eine Diophantische Gleichung $P_S(x, y_1, …, y_n) = 0$ gehört; m gehört genau dann zu S, wenn $P_S(m, y_1, …, y_n) = 0$ lösbar ist.
Nun gibt es aber rekursiv aufzählbare Mengen, deren Komplement nicht rekursiv aufzählbar ist, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der von jeder beliebigen natürlichen Zahl in endlich vielen Schritten feststellt, ob sie in der Menge liegt oder nicht.
Für die abschließende Argumentation nennt man eine dieser Mengen K. Wenn es einen endlichen Algorithmus für die Lösbarkeit Diophantischer Gleichungen gäbe, so müsste dieser auch auf $P_K(m, y_1, …, y_n) = 0$ anwendbar sein - damit ließe sich also für jedes m feststellen, ob es zu K gehört oder nicht. Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition von K. Also gibt es keinen endlichen Algorithmus für die Lösbarkeit Diophantischer Gleichungen.

Ganzzahlige Identitäten

$2^2 = 0! + 1! + 2!$ $\qquad$ $3^2 = 1! + 2! + 3!$

$5^2 = 1! + 4!$
$11^2 = 1! + 5!$
$12^2 = 4! + 5!$
$27^2 = 1! + 2! + 3! + 6!$
$29^2 = 1! + 5! + 6!$
$71^2 = 1! + 7!$
$72^2 = 4! + 5! + 7!$
$213^2 = 1! + 2! + 3! + 7! + 8!$
$215^2 = 1! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8!$
$603^2 = 1! + 2! + 3! + 6! + 9!$
$635^2 = 1! + 4! + 8! + 9!$
$1917^2 = 1! + 2! + 3! + 6! + 7! + 8! + 10!$
$1183893^2 = 1! + 2! + 3! + 7! + 8! + 9! + 10! + 11! + 12! + 13! + 14! + 15!$
$n! = a!\, b!\, c! \ldots$ getestet für $n < 18160$
$9! = 7!\, 3!\, 3!\, 2!$ $10! = 7!\, 6! = 7!\, 5!\, 3!$
$16! = 14!\, 5!\, 2!$
Le Lionnais (1983): $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n^2}$ für $n<200000$ ... Gleichung gilt für n = 5, 13, 563

Brocards Problem

... gesucht sind ganzzahlige Paare (m , n), welche die Gleichung $n! + 1 = m^2$ erfüllen. Die einzigen existierenden Lösungen (Guy 1994) sind : (5,4) , (11,5) und (71,7)
Diese Zahlenpaare werden auch Brown-Zahlen genannt.

Diophantisches Gleichungssystem

Beispiel:
$$a + 2b - c - d + 3f = 3$$
$$-a + 4b + 2c + d - e = -1$$
$$2a + b + c - d + f = 1$$
$$a + 3b + e + f = 2$$
$$b - c - d + e = 7$$
Gesucht sind Lösungen in ganzen Zahlen: X6 = -5+17*k, X5 = -5+25*k, X4 = -3-5*k, X3 = -6+22*k, X2 = 3-8*k, X1 = 3-18*k wobei $k \in \mathbb{Z}$. Für k = 1 wird damit X1 = -15, X2 = -5, X3 = 15, X4 = -8, X5 = 20, X6 = 12.
Sucht man ähnliche Gleichungen der Form $n! + a = m^2$, so findet man für $|a| \le 10$ und $n < 1000$ nur:
$4! -8 = 4^2$; $3! -5 = 1^2$; $3! -2 = 2^2$; $2! -1 = 1^2$; $4! + 1 = 5^2$; $5! + 1 = 11^2$; $7! + 1 = 71^2$; $2! + 2 = 2^2$; $3! + 3 = 3^2$; $2! + 7 = 3^2$; $6! + 9 = 27^2$; $3! + 10 = 4^2$

Fakultäten n! können für n > 3 stets als Summe zweier Quadrate dargestellt werden, d.h. $n! + a^2 = b^2$
Die kleinsten a für die n = 4, 5, … sind

$4! + 1^2 = 5^2$	$5! + 1^2 = 11^2$
$6! + 3^2 = 27^2$	$7! + 1^2 = 71^2$
$8! + 9^2 = 201^2$	$9! + 27^2 = 603^2$
$10! + 15^2 = 1905^2$	$11! + 18^2 = 6318^2$
$12! + 288^2 = 21888^2$	$13! + 288^2 = 78912^2$
$14! + 420^2 = 295260^2$	$15! + 464^2 = 1143536^2$
$16! + 1856^2 = 4574144^2$	$17! + 10080^2 = 18859680^2$
$18! + 46848^2 = 80014848^2$	$19! + 210240^2 = 348776640^2$
$20! + 400320^2 = 1559776320^2$	$21! + 652848^2 = 7147792848^2$
$22! + 3991680^2 = 33526120320^2$	$23! + 27528402^2 = 160785625902^2$
$24! + 32659200^2 = 787685472000^2$	

Diophantische Ungleichungen

... Ungleichungen deren Lösungen im Bereich der ganzen Zahlen gesucht werden
$1 < |a| + |b| < n$ Allgemeine Lösungsanzahl: $2\cdot(n + 1)\cdot(n - 2)$
$0 < |a| + |b| < n$ Allgemeine Lösungsanzahl: $2\cdot(n^2 + n - 6)$

Kronecker-Symbol

Das Kronecker-Symbol oder Kronecker-Delta ist ein mathematisches Zeichen, das durch ein kleines Delta mit zwei Indizes δ_{ij}
dargestellt wird und nach Leopold Kronecker benannt ist.
Dieses Zeichen wird in Summenformeln und bei Matrix- oder Vektoroperationen verwendet bzw. um Fallunterscheidungen in Formeln zu vermeiden.
Das Kronecker-Delta ist definiert als: $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ $= 0$ falls $i \neq j$
Das Kronecker-Delta kann in der Form $\delta = 1_D: I \times I \to \{0,1\}$
geschrieben werden und ist damit die charakteristische Funktion 1_D der Diagonalmenge
$$D = \{(i,j) \in I \times I: i=j\}$$
Häufig wird dabei an Stelle von {0, 1} ein erweiterter Bildraum, z.B. die reellen Zahlen, betrachtet.
In der linearen Algebra kann zum Beispiel die $n\times n$ -Einheitsmatrix als $(\delta_{ij})_{1 \le i,j \le n}$
geschrieben werden.
Mit dem Kronecker-Delta kann auch das Skalarprodukt orthonormierter Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ als
$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$
schreiben.

Determinante

det A
$|A|$

Eine Determinante ist eine Funktion, die einer n-reihigen quadratischen Matrix eindeutig eine reelle Zahl zuordnet.
n … Ordnung der Determinante, a_{ik} … Elemente der Determinanten, i … Zeile, k … Spalte
Determinanten einer Matrix werden mit det A oder | A | bezeichnet.
Hauptdiagonale ⇔ $a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn}$ Nebendiagonale ⇔ $a_{1n}\ a_{2(n-1)} \dots a_{n1}$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$

Berechnung der zweireihigen Determinante

$= a_1 * a_4 - a_2 * a_3$
Die zum Element a_{ik} gehörende Adjunkte A_{ik} ist die Determinante (n-1).Ordnung, die durch Streichen der i.ten Zeile und k.ten Spalte, multipliziert mit $(-1)^{i+k}$ entsteht.

Leibniz-Formel

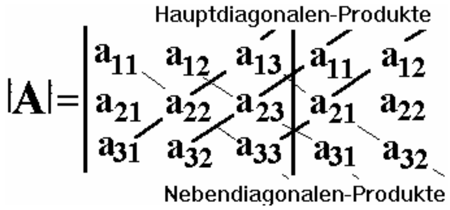
Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist gleich $\det A = \Sigma\ \mathrm{sign}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$

Die Summenbildung erfolgt über alle $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ möglichen Permutationen von (1, 2, …, n). Dabei ist $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$, falls σ eine gerade Permutation ist, andernfalls -1. Eine Permutation heißt gerade, wenn die Anzahl der Inversionen der Elemente gerade ist.

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$

Sarrusche Regel

Entwicklungsregel für dreireihige Determinanten
$= (a_1 * a_5 * a_9) + (a_2 * a_6 * a_7) + (a_3 * a_4 * a_8) - (a_1 * a_6 * a_8) - (a_2 * a_4 * a_9) - (a_3 * a_5 * a_7)$
Regel: Hauptdiagonalenprodukte addieren, Nebendiagonalenprodukte subtrahieren:



Vierreihige Determinante

Werden die Glieder einer 4reihigen Determinante von links oben nach rechts unten mit a0 bis a15 bezeichnet, ist die Determinante gleich
$D = a0 \cdot (a5 \cdot (a10 \cdot a15 - a11 \cdot a14) - a6 \cdot (a9 \cdot a15 - a11 \cdot a13) + a7 \cdot (a9 \cdot a14 - a10 \cdot a13)) - a1 \cdot (a4 \cdot (a10 \cdot a15 - a11 \cdot a14) - a6 \cdot (a8 \cdot a15 - a11 \cdot a12) + a7 \cdot (a8 \cdot a14 - a10 \cdot a12)) + a2 \cdot (a4 \cdot (a9 \cdot a15 - a11 \cdot a13) - a5 \cdot (a8 \cdot a15 - a11 \cdot a12) + a7 \cdot (a8 \cdot a13 - a9 \cdot a12)) - a3 \cdot (a4 \cdot (a9 \cdot a14 - a10 \cdot a13) - a5 \cdot (a8 \cdot a14 - a10 \cdot a12) + a6 \cdot (a8 \cdot a13 - a9 \cdot a12))$

+	−	+	−	…
−	+	−	+	
+	−	+	−	
−	+	−	+	
⋮				

Determinantenentwicklung, Laplacescher Entwicklungssatz

Determinanten höherer Ordnung lassen sich durch Determinanten niedriger Ordnung, sogenannte Unterdeterminanten (Adjunkte), berechnen.
… nach den Elementen der i.ten Zeile
$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$
… nach den Elementen der k.ten Spalte
$D = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$
Die zum Element a_{ik} gehörende Unterdeterminante, Adjunkte A_{ik} ist die Determinante (n-1).Ordnung, die durch Streichen der i.ten Zeile und k.ten Spalte, multipliziert mit $(-1)^{i+k}$ entsteht. Die Adjunkte A_{ik} wird auch algebraisches Komplement von a_{ik} genannt. Der Vorzeichenfaktor im algebraischen Komplement kann mit der Schachbrettregel (siehe Abbildung) bestimmt werden.

Vandermondsche Determinante, Potenzdeterminante

$$\begin{matrix} 1 & a_1 & a_1^2\ a_1^3 \dots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2\ a_2^3 \dots a_2^{n-1} \\ \dots \\ 1 & a_n & a_n^2\ a_n^3 \dots a_n^{n-1} \end{matrix} = \Pi\ (a_r - a_s)$$
Produktbildung für alle r>s von 1 bis n

Determinantengesetze

- Vertauschen der Zeilen mit den gleichstelligen Spalten ändert den Wert nicht.
- Vertauschen von zwei parallelen Reihen ändert das Vorzeichen.
- Ein allen Elementen einer Reihe gemeinsamer Faktor kann ausgehoben werden, auch umgekehrt
- Addition eines Vielfachen der Elemente einer Reihe zu einer parallelen Reihe ändert den Wert nicht.
- Ein Determinante hat den Wert 0, wenn

- die Elemente von zwei parallelen Reihen proportional sind
- die Elemente einer Reihe Linearkombinationen der Elemente paralleler Reihen sind
- alle Elemente einer Reihe Null sind

- Die Summe der Produkte aus den zu einer Reihe gehörenden Unterdeterminanten und den Elementen einer parallelen Reihe ist 0.
- Eine Determinante wird gerändert, indem übereck eine Zeile und eine Spalte angefügt werden. Deren gemeinsames Element ist 1. Die restlichen Elemente einer der beiden Reihen sind 0, der anderen Reihe beliebig. Der Wert der Determinante ändert sich nicht.

• Stürzen der Matrix: Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn die Determinante der an der Hauptdiagonalen gespiegelten (transponierten) Matrix bestimmt wird.

Praxis der Determinantenberechnung

Tips zur Berechnung n-reihiger Determinanten:
• Laplace-Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen.
• Durch elementare Umformungen wird der Wert der Determinante nicht geändert.
• Nullen in Zeilen erzeugen durch Addition oder Subtraktion von Vielfachen von Zeilen.
• Nullen in Spalten erzeugen durch Addition oder Subtraktion von Vielfachen von Spalten.
• Berechnung von n-reihigen Determinanten durch elementare Umformungen:
Die praktische Berechnung von Determinanten höherer Ordnung erfolgt mit numerischen Verfahren. Die Matrix wird dabei durch elementare Umformungen, die den Wert der Determinante nicht verändern, in eine Dreiecksmatrix übergeführt. Die Determinante ist dann einfach zu berechnen. Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen:

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

A und B seien n-reihige quadratische Matrizen, det A und det B deren Determinanten. Dann gilt:

Produktsatz

$$\det (A * B) = \det A * \det B$$

Das Multiplikationstheorem liefert eine Möglichkeit, die Determinante eines Matrixproduktes direkt aus den Determinanten der einzelnen Matrizen zu berechnen. Die Berechnung des Matrixproduktes ist so nicht notwendig.

$$\det A^T = \det A \quad \det A^{-1} = 1 / \det A \qquad \det (\alpha A) = \alpha^n \det A$$

Eine Determinante det A ist genau dann verschieden von Null, wenn eine der Eigenschaften gilt:
1. die Zeilen (Spalten) von A sind linear unabhängig
2. die Zeilen (Spalten) von A sind eine Basis des R^n
3. der Rang von A ist gleich n
4. die Matrix A^{-1} existiert, A ist invertierbar, regulär
5. die Gleichung $A \vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar durch

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Die Anzahl der inkongruenten Netze der Platonischen Körper Ikosaeder und Dodekaeder kann über die Determinante der 11reihigen Matrix berechnet werden, mit dem Ergebnis 5184000.

Ableitung einer Determinante

Hängen die Elemente einer Determinante von einer Variablen t ab, dann erhält man die Ableitung D'(t) der Determinante D(t), indem man der Reihe nach jede Zeile bezüglich t differenziert und alle diese Determinanten addiert.
Beispiel: Für die Ableitung von $D(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}$
ergibt sich $D'(t) = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}$

n=1	[1]	D = 1
n=2	3 1 2 4	D = 10
n=3	1 4 8 7 2 6 5 9 3	D = 412
n=4	1 8 11 13 9 16 4 6 14 3 5 12 10 7 15 2	D = 40800

Maximale Determinante

Unter der maximalen Determinante einer quadratische n x n - Matrix versteht man die Anordnung der Zahlen 1, 2, …, n² in der Determinante, so dass diese den größten Wert erreicht.
Für n = 1, 2, 3, … sind bisher die Werte

D = 1, 10, 412, 40800, 6839492, 1865999570, 762150368499

bekannt. Für die ersten vier Fälle sind links die Determinanten abgebildet.

Die Bestimmung der maximalen Determinante ist auch mit Hochleistungscomputern sehr zeitaufwendig, da die Anzahl der verschiedenen Determinanten bei der n x n-Matrix gleich (n²)! ist, d.h. für n = 1, 2, 3, …

$$1! = 1,\ 2^2! = 24,\ 3^2! = 9! = 362880,\ 4^2! = 16! = 20922789888000, \dots$$

Für die Fälle n > 7 kennt man bisher nur untere Grenzen (nach Hermann Jurksch), d.h. die maximale Determinante ist mindestens so groß:

$$D(8) \geq 440943507851753$$
$$D(9) \geq 3{,}46254605664 \cdot 10^{17}$$
$$D(10) \geq 3{,}56944784623 \cdot 10^{20}$$

maximale Determinante der Ordnung 7

(46, 42, 15, 2, 27, 24, 18),
(9, 48, 36, 30, 7, 14, 31),
(39, 11, 44, 34, 13, 29, 5),
(26, 22, 17, 41, 47, 1, 21),
(20, 8, 40, 6, 33, 23, 45),
(4, 28, 19, 25, 38, 49, 12),
(32, 16, 3, 37, 10, 35, 43)); d7 = 762150368499

maximale Determinante der Ordnung 8

(1, 34, 55, 19, 59, 26, 45, 20),
(23, 2, 18, 61, 35, 57, 39, 25),
(21, 56, 3, 27, 47, 41, 12, 53),
(50, 42, 31, 4, 17, 60, 43, 13),
(24, 33, 64, 40, 5, 38, 8, 48),
(49, 6, 30, 14, 36, 16, 46, 63),
(29, 54, 22, 52, 11, 7, 58, 28),
(62, 32, 37, 44, 51, 15, 9, 10)); d8 = 440943507851753

maximale Determinante der Ordnung 9

(68, 7, 12, 62, 73, 26, 29, 58, 34),
(67, 37, 43, 10, 3, 61, 33, 78, 36),
(30, 20, 79, 53, 49, 71, 40, 25, 2),
(56, 50, 8, 27, 42, 60, 81, 4, 41),
(23, 14, 54, 63, 11, 18, 72, 44, 70),
(1, 38, 32, 21, 65, 66, 22, 48, 76),
(45, 74, 31, 80, 17, 46, 5, 24, 47),
(15, 77, 35, 39, 51, 16, 59, 69, 9),
(64, 52, 75, 13, 57, 6, 28, 19, 55)) d9 = 3.46254605664224e+17

maximale Determinante der Ordnung 10

(1, 2, 61, 84, 81, 82, 39, 54, 41, 60),
(53, 57, 3, 65, 94, 20, 91, 22, 66, 33),
(46, 63, 47, 4, 45, 78, 83, 28, 13, 98),
(79, 42, 49, 71, 5, 95, 51, 10, 77, 26),
(17, 75, 87, 58, 30, 6, 38, 27, 86, 80),
(68, 93, 76, 50, 85, 56, 7, 37, 14, 19),
(100,16, 31, 35, 62, 34, 8, 64, 67, 88),
(21, 72, 29, 9, 48, 73, 43, 97, 89, 25),
(52, 70, 23, 96, 11, 36, 55, 92, 12, 59),
(69, 15, 99, 32, 44, 24, 90, 74, 40, 18)) d10 = -3.56944784623E+020

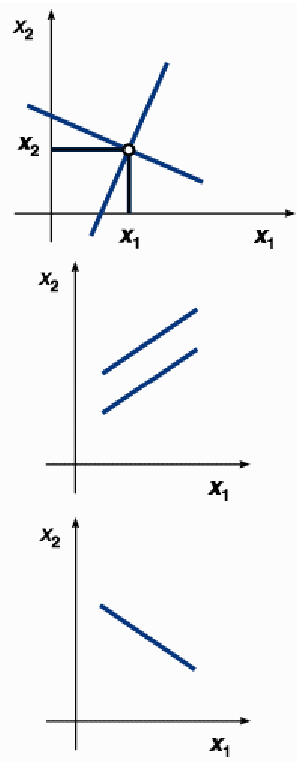
Alle Determinanten gefunden durch Herman Jurksch

Cramersche Regel

Die Cramersche Regel (nach Cramer, 1704-1752) ermöglicht das Auflösen eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe von Determinanten.
Gegeben sei ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen. D ... Koeffizientendeterminante

Zählerdeterminante

D_{xk} ... Zählerdeterminante, entsteht aus D, indem die Koeffizienten a_{ik} von x_k durch die Absolutglieder b_i ersetzt werden



Lösung des Gleichungssystems: $x_k = D_{xk} / D$, $k = 1,2,3,\ldots,n$

Lösbarkeitsregeln
$D \neq 0$ und D_{xk} reell $\Rightarrow$ eindeutige Lösung
$D = 0$ und alle $D_{xk} = 0 \Rightarrow$ unendliche Lösungsmenge
$D = 0$ und ein $D_{xk} \neq 0 \Rightarrow$ leere Lösungsmenge

Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

Gleichungssystem $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y = b_2$

Lösung $x = (a_{22}b_1 - a_{12}b_2) / (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ $y = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) / (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

Lösungsfälle

a) Gleichungen linear unabhängig und widerspruchsfrei $\Rightarrow$ genau eine Lösung $\Rightarrow$ graphisch: zwei sich schneidende Geraden (oberste Abbildung)
b) Gleichungen linear abhängig $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ graphisch: zwei zusammenfallende Geraden (unterste Abbildung)
c) Gleichungen widersprüchlich $\Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow$ graphisch: zwei parallele nicht zusammenfallende Geraden (mittlere Abbildung)

Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Variablen

homogene Form

... alle Absolutglieder b_i sind gleich 0

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$ $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$

Lösung

$x = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) * t$ $y = - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) * t$
$z = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) * t$

inhomogene Form

... wenigstens ein Absolutglied b_i ist verschieden von 0

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$ $\qquad$ $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$

Lösung bei Einzellösung (a,b,c)

$x = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) * t + a$ $\qquad$ $y = - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) * t + b$

$z = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) * t + c$

Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

$0 = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d$ $\qquad$ $0 = e \cdot x + f \cdot y + g \cdot z + h$

$0 = i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z + l$

Lösung:

$x = [b \cdot (g \cdot l - h \cdot k) + c \cdot (h \cdot j - f \cdot l) + d \cdot (f \cdot k - g \cdot j)] / [a \cdot (f \cdot k - g \cdot j) + b \cdot (g \cdot i - e \cdot k) + c \cdot (e \cdot j - f \cdot i)]$

$y = [a \cdot (g \cdot l - h \cdot k) + c \cdot (h \cdot i - e \cdot l) + d \cdot (e \cdot k - g \cdot i)] / [a \cdot (f \cdot k - g \cdot j) + b \cdot (g \cdot i - e \cdot k) + c \cdot (e \cdot j - f \cdot i)]$

$z = [a \cdot (f \cdot l - h \cdot j) + b \cdot (h \cdot i - e \cdot l) + d \cdot (e \cdot j - f \cdot i)] / [a \cdot (f \cdot k - g \cdot j) + b \cdot (g \cdot i - e \cdot k) + c \cdot (e \cdot j - f \cdot i)]$

Ungleichungen

... sind Verknüpfungen zweier algebraischer Ausdrücke durch eins der folgenden Zeichen

$>$	größer	$<$	kleiner
$\neq$	verschieden von, ungleich	$<>$	größer oder kleiner
$\geq$	größer oder gleich	$\leq$	kleiner oder gleich

Addition und Subtraktion von Ungleichungen

Addition und Subtraktion einer Größe ... ist a > b, dann gilt a+c > b+c sowie a-c > b-c. Durch Addition oder Subtraktion ein und derselben Größe auf beiden Seiten ändert sich der Sinn der Ungleichung nicht

Addition von Ungleichungen ... Ist a > b und c > d, dann gilt a+c > b+d. Zwei gleichsinnige Ungleichungen können seitenweise addiert werden

Subtraktion von Ungleichungen ... Ist a > b und c < d, dann gilt a-c > b-d. Von einer Ungleichung kann eine andere ihr ungleichsinnige Ungleichung glied- oder seitenweise subtrahiert werden, wobei das Ungleichheitszeichen der ersten Ungleichung erhalten bleibt.

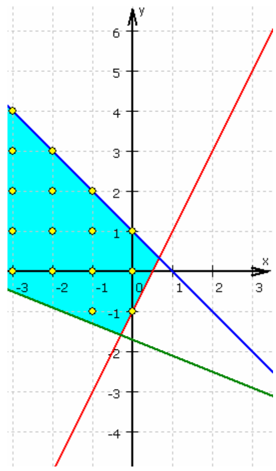
Regel der Mittelzahlen

Diese Regel wurde zuerst von dem französischen Mathematiker Nicolas Chuquet angegeben.

Hat man zwei Brüche mit positiven Zählern und Nennern und bildet man dazu einen dritten Bruch, dessen Zähler gleich der Summe der Zähler und dessen Nenner gleich der Summe der Nenner der beiden gegebenen Brüche ist, so liegt dieser dritte Bruch auf der Zahlengeraden stets zwischen den beiden gegebenen Brüchen.

Aus $a/b < x/y$ folgt $a/b < (a+x)/(b+y) < x/y$ für a, b, x, y > 0.

Systeme linearer Ungleichungen



... können grafisch gelöst werden

Beispiel $y \geq 2x - 1$ $\qquad$ $y \leq -x + 1$ $\qquad$ $y \geq -0.4x - 1.7$

Dazu stellt man die Ungleichung nach y um, d.h. $\qquad$ $y > c/b - a/b\ x$

und stellt die lineare Funktion $\qquad$ $y = c/b - a/b\ x$

dar. Die Koordinaten aller Punkte der Koordinatenebene, die über der Geraden liegen, da $y > c/b - a/b\ x$, stellen dann Lösungen der Ungleichung dar. Für die verschiedenen Relationszeichen gilt dann:

Zeichen „>“ ... alle Punkte über der linearen Funktion

Zeichen „≥“ ... alle Punkte über der linearen Funktion und die Punkte der Funktion

Zeichen „<“ ... alle Punkte unterhalb der linearen Funktion

Zeichen „<=“ ... alle Punkte unterhalb der linearen Funktion und die Punkte der Funktion

erfüllen die Ungleichung. Betrachtet man nun mehrere Ungleichungen gleichzeitig, d.h. ein System von Ungleichungen, so überlappen sich die Lösungsmengen. Interessiert man sich ausschließlich für ganzzahlige Lösungen, so entsprechen diese den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten.

Achtung ! Gleichsinnige Ungleichungen lassen sich nicht gliedweise subtrahieren

Rechenregeln für Ungleichungen

Für beliebige Ungleichungen gilt (T ... sinnvoller Term im Variablenbereich)

$T_1 < T_2 \rightarrow T_1 + T < T_2 + T$ $\qquad$ $T_1 < T_2 \rightarrow T_1 * T < T_2 * T$, wenn $T > 0$

$T_1 < T_2 \rightarrow T_1 * T > T_2 * T$, wenn $T < 0$ $\qquad$ $0 < T_1 < T_2 \rightarrow 1/T_1 > 1/T_2$

$T_1 < T_2$ und $T_3 < T_4 \rightarrow T_1 + T_3 < T_2 + T_4$

$T_1 < T_2$ und $T_3 < T_4 \rightarrow T_1 * T_3 < T_2 * T_4$, wenn $T_2, T_3 > 0$

$T_1 < T_2 \rightarrow -T_1 > -T_2$ $\qquad$ $T_1^n + T_2^n \leq (T_1 + T_2)^n$, wenn $T_1, T_2 > 0$ und n positiv

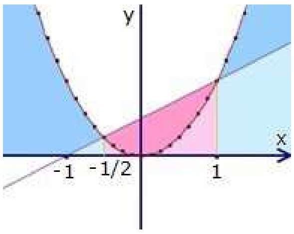
Arten von Ungleichungen

Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen werden durch Addition, Subtraktion und Multiplikation mit Konstanten ähnlich wie lineare Gleichungen gelöst.

Quadratische Ungleichungen

Bei quadratischen Ungleichungen zerfällt der Lösungsbereich in drei Abschnitte, die sich aus der der Ungleichung entsprechenden quadratischen Gleichung ergeben. Diese sind in der Abbildung die gezeigten Abbildung, die Abschnitte blau - rot - blau. Als Lösungen kommen nun entweder alle blau markierten oder alle rot markierten Werte der x-Achse infrage.



Lösung mit quadratischer Ergänzung

Ein Verfahren zur Lösung basiert auf der quadratischen Ergänzung. Als Beispiel soll die Ungleichung $x^2 - 0{,}5 \cdot x - 0{,}5 > 0$ gelöst werden (Abbildung).

$$x^2 - 0{,}5 \cdot x - 0{,}5 > 0 \quad | +0{,}5$$

Das Quadrat der Hälfte des Betrags des linearen Gliedes addieren

$$x^2 - 0{,}5 \cdot x > 0{,}5 \quad | +(0{,}5/2)^2$$

Ausklammern $x^2 - 0{,}5 \cdot x + 0{,}25^2 > 0{,}5625$

Wurzel ziehen $(x - 0{,}25)^2 > 0{,}75^2$

Dabei sind zwei Fälle zu betrachten.

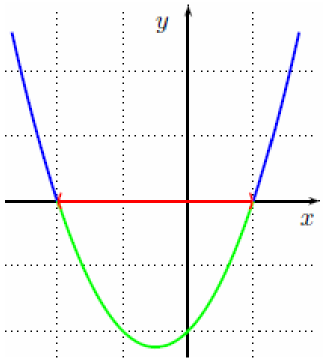
Fall 1: $x \geq 0{,}25$

Dann ist die Ungleichung $x - 0{,}25 > 0{,}75$ zu lösen, also gilt $x > 1$, wobei in diesem Fall die Voraussetzung $x \geq 0{,}25$ ebenfalls erfüllt ist

Fall 2: $x \leq 0{,}25$

Dann ist die Ungleichung $0{,}25 - x > 0{,}75$ zu lösen, also gilt $-0{,}5 > x$, wobei auch in diesem Fall die Voraussetzung $x \leq 0{,}25$ erfüllt ist.

Diese beiden Aussagen haben keinen Überschneidungsbereich. Dann sind alle Zahlen, die entweder kleiner als -0,5 oder größer als +1 sind, Lösungen der Ungleichung. Das ist im Bild der blaue Bereich.



Beispiel zu einer quadratischen Ungleichung

Die Ungleichung

$$-x^2 > x - 2 \text{ , } D = R$$

kann folgendermaßen gelöst werden:

$$-x^2 > x - 2 \quad | -(x-2)$$
$$-x^2 - x + 2 > 0 \quad | \cdot(-1)$$
$$x2 + x - 2 < 0$$
$$(x - 1)(x + 2) < 0$$

Graphisch kann man die Lösungsmenge als die x-Werte bestimmen, für die der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + x - 2$ echt unter x-Achse verläuft. In der Abbildung ist dieser Bereich grün gekennzeichnet, die Lösungsmenge ist das rot eingezeichnete Intervall (-2, 1) der x-Achse; die Grenzen x = -2 und x = 1 sind keine Elemente der Lösungsmenge.

Zur rechnerischen Lösung bestimmt man die Nullstellen der linken Seite. Diese können aus der letzten der obigen Ungleichungen direkt als $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ abgelesen werden.

Durch Einsetzen von x = 0 in die Ungleichung erkennt man, dass x = 0 Element der Lösungsmenge ist. Es gilt also

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

für $-2 \leq x \leq 1$ und damit ist $L = \{x \in R : -2 < x < 1\}$ die Lösungsmenge der Ungleichung.

Arten von Ungleichungen (2)

Ungleichungen höherer Ordnung

Bei Ungleichungen ab der Ordnung 3 ist üblicherweise nur die Umwandlung auf eine Ungleichung für ein Produkt sinnvoll, beispielsweise indem eine Ungleichung der Ordnung 3 auf die Form

$$(x-a)\ (x-b)\ (x-c) > 0$$

für reelle oder

$$(a-x)\ (x^2+bx+c) > 0$$

für ein Paar komplexer Nullstellen gebracht wird. Diese Faktorisierung ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra für Ungleichungen beliebig hoher Ordnung möglich. Die analytische Berechnung der Nullstellen ist aber nicht immer möglich, sodass dafür meist ein numerisches Verfahren wie beispielsweise Bisektion herangezogen werden muss.

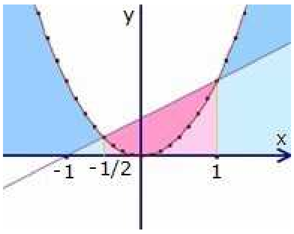
Eine graphische Lösung kann bei der Suche nach geeigneten Startwerten hilfreich sein.

Bruchungleichungen

Für das Lösen von Bruchungleichungen ergeben sich Probleme, wenn die gesuchte Größe x auch in mindestens einem der Nenner erscheint.

Durch beidseitiges Multiplizieren der Gleichung mit den Nennern und anschließendes Ausmultiplizieren wird die Bruchungleichung in eine Ungleichung aus zwei Polynomen überführt.

Beim Multiplizieren mit den Nennern ist vorher zu bestimmen, für welche Werte von x sie einen negativen Wert annehmen, da sich dann ja durch die Multiplikation das Vergleichszeichen umkehrt.
Gibt es einen Bereich von x, in dem beide Nenner negativ sind, so wird das Vergleichszeichen zweimal umkehrt, was sich gegenseitig aufhebt. Diese Vorabklärung wird als Fallunterscheidung bezeichnet.



Grafische Lösung von Ungleichungen

Graphische Verfahren können im Rahmen der Zeichengenauigkeit Anhaltspunkte über Anzahl und Lage der Lösungen geben.
Liegt die Ungleichung in einer der Normalform von Gleichungen entsprechenden Form vor, lässt sich die linke Seite als Funktion auffassen, deren Graph nach einer Wertetafel mit hinreichender Genauigkeit zu zeichnen ist.
Die Bereiche links oder rechts der Nullstellen (d.h. Schnittpunkte mit der x-Achse) stellen dann die Lösungsmengen grafisch dar.
Andernfalls sind die Funktionen, die der rechten und der linken Seite der Ungleichung entsprechen, zusammen in ein Achsenkreuz zu zeichnen. Die x-Werte der Schnittpunkte geben die Grenzen der Lösungsbereiche an.

Betragsungleichung

Betragsungleichungen sind Ungleichungen, die mindestens einen Term enthalten, der in Betragsstriche eingeschlossen ist. Damit treten zwei kritische Operationen auf: das Auflösen der Betragsstriche und die Multiplikation mit einem Term kleiner 0.

Beispiel: $|x-2| + 2/x + |x+2| > 0$
Lösung: An drei Stellen muss die Ungleichung besonders untersucht werden; an der Stelle $x = 0$, da dort die Ungleichung undefiniert ist, und an den Stellen $x = 2$ und $x = -2$, da sich dort die Vorzeichen der Beträge ändern.
Damit ist eine Fallunterscheidung für die Bereiche $(-\infty,-2)$, $[-2,0)$, $(0,2)$ und $[2,\infty]$ durchzuführen.
1) Bereich $(-\infty,-2)$
ergibt $-x + 2 + 2/x - x - 2 > 0$ d.h. $x^2 > 1$ und $|x| > 1$
mit der Lösungsmenge $L_1 = \{x \mid x < -2\}$

2) Bereich $[-2,0)$
ergibt $-x + 2 + 2/x + x + 2 > 0$ d.h. $x < -1/2$
mit der Lösungsmenge $L_2 = \{x \mid -2 \leq x < -1/2\}$

3) Bereiche $(0,2)$ und $[2,\infty]$
In diesem Fall sind alle Terme auf der linken Seite der Ausgangsungleichung positiv, d.h. $x > 0$.
Gesamtlösungsmenge $L = \{x \mid x < -1/2 \text{ und } x > 0\}$

Ungleichungen und Mittelwerte

Arithmetisches und geometrisches Mittel

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n) / n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \text{ ; für } a_i > 0$$

Das arithmetische Mittel von n positiven Zahlen ist größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle n Zahlen gleich sind.

Arithmetisches und quadratisches Mittel

$$| (a_1+a_2+\ldots+a_n) / n | \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) / n}$$

Der Absolutbetrag des arithmetischen Mittels mehrerer Zahlen ist kleiner oder gleich dem quadratischen Mittel.

Lineare Ungleichung-Aufgabe

Fünfte Fürther - Mathematik-Olympiade 1996 - Klassenstufe 7/8

Aufgabe 2:
Anton will zur Vorbereitung auf eine Mathematikprüfung eine bestimmte Anzahl von Aufgaben lösen. Auf die Frage, wie viele Aufgaben er schon gelöst habe, antwortet er:
"Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 31 größer als die Zahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Zahl der gelösten Aufgaben die doppelte Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl die kleiner als 100 ist. Addiert man aber zur Zahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 45 ist."
Ist durch die obigen Angaben die Zahl der Aufgaben, deren Lösung sich Anton vorgenommen hat, eindeutig bestimmt?
Wenn ja, wie groß ist die Zahl? Wenn nein, welche Anzahlen an Aufgaben sind möglich?

Lösung: Es sei x = Anzahl der gelösten Aufgaben, y = Anzahl der ungelösten Aufgaben und n = Zahl der Aufgaben = x+y. Dann erhält man das System aus Gleichungen und einer Ungleichung
(I) $x = y+31$ (II) $x+2y < 100$ (III) $x+y/3 > 45$
Aus diesen Gleichungen ergibt sich

(IV) $y/3 \in N \Rightarrow y = 3k$ mit $k \in N$
mit Einsetzen in (II) $9k < 69 \Rightarrow k \leq 7$
und in (II) $4k > 14 \Rightarrow k > 3$

und somit die möglichen Lösungen

k	4	5	6	7
y	12	15	18	21
x	43	46	49	52
n	55	61	67	73

Bernoullische Ungleichung

$(1 + T)^n \geq 1 + n T$, wenn $T \geq 0$, n natürlich

$2^x > x$, wenn x natürlich

$\sqrt[n]{(1 + T)} < 1 + T/n$, wenn $T > 0$, n positiv

Beispiele für Betragsungleichungen bzw. -Gleichungen über Q

(1)	$\mid x + 3 \mid \geq 2{,}2 \Leftrightarrow \mid x - (- 3) \mid \geq 2{,}2$	$L =] - \infty ; - 5{,}2] \cup [- 0{,}8; \infty [$
(2)	$\mid x - 7 \mid = 5$	$L = \{ 2; 12 \}$
(3)	$\mid x - 10 \mid = - 2$	$L = \varnothing$
(4)	$\mid x + 3 \mid = 502$	$L = \{ -505; 499 \}$
(5)	$\mid x + 1{,}5 \mid = 2/3$	$L = \{ - 1{,}5 - 2/3 ; - 1{,}5 + 2/3 \} = \{ - 13/6; - 5/6 \}$
(6)	$\mid x + 0{,}7 \mid < 3{,}05$	$L =] - 3{,}75 ; + 2{,}35 [$
(7)	$\mid x - 1{,}25 \mid \geq 10{,}1$	$L = =] - \infty ; - 8{,}85] \cup [11{,}35 ; \infty [$
(8)	$\mid x + 14/5 \mid \leq 4/3$	$L = [-62/15 ; -19/12]$

Numerische Verfahren

Numerische Verfahren und Algorithmen werden of aus folgenden Gründen genutzt:

1) es gibt zu dem Problem keine explizite Lösungsdarstellung oder
2) die Lösungsdarstellung existiert, ist jedoch zu kompliziert oder langsam zu ermitteln

Folgende numerische Verfahren werden häufig genutzt:

Lineare Gleichungssysteme

a) Gaußsches Eliminationsverfahren bzw. LR-Zerlegung: klassisches direktes Verfahren - für große Matrizen allerdings aufwändig
b) Cholesky-Zerlegung: für symmetrische positiv definite Matrizen kann ähnlich wie die LR-Zerlegung eine symmetrische Zerlegung erstellt werden bei halbem Aufwand
c) QR-Zerlegung: ein direktes Verfahren mit doppelter Laufzeit im Vergleich zum Gauß-Verfahren aber besseren Stabilitätseigenschaften
d) Splitting-Verfahren: klassische iterative Verfahren
e) Gauß-Seidel-Verfahren: auch als Einzelschrittverfahren bezeichnet
f) Jacobi-Verfahren: auch als Gesamtschrittverfahren bezeichnet
g) Richardson-Verfahren; SOR-Verfahren; SSOR-Verfahren
h) Krylow-Unterraum-Verfahren: moderne iterative Verfahren, die für große, dünnbesetzte Gleichungssysteme gedacht sind
i) Mehrgitterverfahren: modernes Verfahren mit linearer Komplexität speziell für Gleichungssysteme, die von partiellen Differenzialgleichungen herrühren
j) Vorkonditionierung: Technik, die Kondition einer Matrix zu verbessern
k) ILU-Zerlegung: wichtiges Vorkonditionierungsverfahren

Nichtlineare Gleichungssysteme

a) Bisektion: sehr einfaches Verfahren, welches auf Halbierung eines Intervalls beruht. Konvergiert linear, der Fehler halbiert sich etwa in jedem Iterationsschritt
b) Bisektion-Exklusion: spezielles Bisektionsverfahren für Polynome, welches alle Nullstellen innerhalb einer Startregion beliebig genau einschränkt
c) Regula Falsi: einfaches iteratives Verfahren zur Nullstellenbestimmung eindimensionaler Funktionen
d) Fixpunktverfahren: Klasse linear konvergenter Verfahren zum Auffinden von Fixpunkten von Funktionen, auch im mehrdimensionalen
e) Newton-Verfahren: quadratisch konvergentes Verfahren zum Auffinden von Nullstellen differenzierbarer Funktionen. Auch im mehrdimensionalen anwendbar, dann ist in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen
f) Halley-Verfahren, Euler-Tschebyschow-Verfahren: kubisch konvergentes Verfahren zum Auffinden von Nullstellen zweimal differenzierbarer Funktionen. Auch im mehrdimensionalen anwendbar, dann sind in jedem Schritt zwei lineare Gleichungssysteme zu lösen
g) Homotopieverfahren: Methode, bei der ein frei wählbaren Problem mit einfacher Lösung mit einem vorgegebenen Problem stetig verbunden wird. In vielen Fällen kann die Lösung des einfachen Problems zu einer Lösung des eigentlichen Problems verfolgt werden
h) Verfahren des steilsten Abstiegs: langsames Verfahren zur Lösung des Minimierungsproblems
i) Bairstow-Verfahren: spezielles Iterationsverfahren, um komplexe Nullstellen von Polynomen mittels reeller Operationen zu bestimmen

j) Weierstrass-Verfahren, Aberth-Ehrlich-Verfahren, Trennkreisverfahren: spezielle, aus dem Newton-Verfahren abgeleitete Methoden zur simultanen Bestimmung aller komplexen Nullstellen eines Polynoms

Numerische Integration

a) Newton-Cotes-Formeln: einfache Quadraturformeln, die auf Polynominterpolation basieren
b) Gauß-Quadratur: Quadraturformeln mit optimaler Konvergenzordnung
c) Romberg-Extrapolation: Technik zur Verbesserung von Newton-Cotes-Formeln
d) Mittelpunktsregel; Trapezregel; Simpsonregel
e) Lie-Integration: Integrationsverfahren, das auf einem verallgemeinerten Differenzialoperator aufbaut

Approximation und Interpolation

a) Polynominterpolation: Interpolation durch Polynome
b) Spline-Interpolation: Interpolation durch stückweise stetige Polynome
c) Trigonometrische Interpolation: Interpolation durch trigonometrische Polynome
d) Remez-Algorithmus: findet die optimale Approximation bezüglich der Supremumsnorm
e) De Casteljau-Algorithmus: Algorithmus zur Berechnung von Bézier-Kurven

Ausgleichsprobleme

a) QR-Zerlegung: Geeignet für lineare Ausgleichsprobleme, auch Householder-Verfahren)
b) Gauß-Newton-Verfahren: Ein iteratives Verfahren zur Lösung nichtlinearer Ausgleichsprobleme
c) Kurvenfitten: Allgemein Ermitteln von Parameterwerten durch Anpassung an Messkurven

Optimierung

a) Branch-and-Bound: Enumerationsverfahren zur Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme.
b) Schnittebenenverfahren, Branch-and-Cut: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme.
c) Simplex-Verfahren: Ein direktes Verfahren der linearen Programmierung.
d) Downhill-Simplex-Verfahren: Ein ableitungsloses Verfahren der nichtlinearen Optimierung.
e) Innere-Punkte-Verfahren: Ein iteratives Verfahren auch für nichtlineare Optimierungsprobleme.
f) Logarithmisches Barriereverfahren: Ebenfalls ein iteratives Verfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme.
g) Simulierte Abkühlung: Ein heuristisches Verfahren für Optimierungsprobleme hoher Komplexität.

Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen

a) Eulersches Polygonzugverfahren: das einfachste Lösungsverfahren, ein 1-stufiges Einschrittverfahren
b) Einschrittverfahren: Verfahren, die nur Informationen des aktuellen Zeitschrittes benutzen, um daraus die nächste Näherung zu berechnen
c) Mehrschrittverfahren: Verfahren, die Informationen der letzten Zeitschritte nutzen. In Abhängigkeit von der Zahl der Zeitschritte sind die entsprechenden Startwerte z.B. mit einem Einschrittverfahren zu ermitteln
d) Adams-Bashforth-Verfahren: Familie von expliziten Mehrschrittverfahren
e) Adams-Moulton-Verfahren: Familie von impliziten Mehrschrittverfahren
f) Prädiktor-Korrektor-Verfahren: Kombination eines expliziten und eines impliziten Mehrschrittverfahrens gleicher Fehlerordnung. Das explizite Verfahren ergibt eine Näherung (Prädiktor), das implizite Verfahren verbessert den Näherungswert (Korrektor)
g) Runge-Kutta-Verfahren: Familie von Einschrittverfahren inkl. dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

Numerik partieller Differenzialgleichungen

a) Finite-Elemente-Methode: modernes, flexibles Verfahren zur Lösung vor allem elliptischer partieller Differenzialgleichungen
b) Finite-Volumen-Verfahren: modernes Verfahren zur Lösung von Erhaltungsgleichungen
c) Finite-Differenzen-Verfahren: klassisches Verfahren für beliebige partielle Differenzialgleichungen
d) Randelementmethode: Verfahren zur Lösung elliptischer partieller Differenzialgleichungen, wobei lediglich der Gebietsrand und nicht das Gebiet selbst zu diskretisieren ist
e) Spektralmethode: neuartiges Verfahren, das zur Diskretisierung Polynome sehr hoher Ordnung benutzt
f) Level-Set-Methode: moderne Methode zur Verfolgung von bewegten Rändern.
g) Leapfrog-Verfahren: abgewandeltes Eulerverfahren mit Termen nur zweiter Ordnung, bei dem die Zeitschritte für Ort und Geschwindigkeit um die halbe Integrationschrittweite versetzt sind
h) Finite-Punkte-Methode: neueres Berechnungsverfahren nur mit Punkten, aber ohne Elemente
i) Orthogonale Kollokation: Verfahren für beliebige partielle Differenzialgleichung, oft kombiniert mit dem Finite-Differenzen-Verfahren

Berechnung von Eigenwerten

a) QR-Algorithmus: Berechnung aller Eigenwerte
b) LR-Algorithmus: Treppeniteration genannt, ein dem QR-Verfahren vergleichbarer aber weniger stabiler Algorithmus
c) Potenzmethode: erlaubt die Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes
d) Unterraumiteration: mehrdimensionale Erweiterung der Potenzmethode und erlaubt die gleichzeitige Berechnung mehrerer der betragsgrößten Eigenwerte
e) Lanczos-Verfahren: Berechnung einiger Eigenwerte von großen dünnbesetzten Matrizen
f) Arnoldi-Verfahren: Berechnung einiger Eigenwerte von großen dünnbesetzten Matrizen
g) Jacobi-Verfahren: Berechnung aller Eigenwerte und Eigenvektoren von kleinen symmetrischen Matrizen
h) Jacobi-Davidson-Verfahren: Berechnung einiger Eigenwerte von großen dünnbesetzten Matrizen

sonstige Verfahren

a) Schnelle Fourier-Transformation (FFT)
b) Wavelet-Transformation
c) Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren
d) Horner-Schema zur Polynomwertberechnung
e) Bresenham-Algorithmus zur Linien- oder Kreisinterpolation in der Computergrafik
f) Extrapolation
g) Summationsverfahren und Folgentransformationen für divergente Folgen und Reihen
h) Konvergenzbeschleunigung für konvergente Folgen und Reihen von reellen oder komplexen Zahlen, Vektoren und Matrizen

Lineare Optimierung

Die lineare Optimierung (LO) ist ein mathematisches Verfahren zur Bestimmung des Maximums oder Minimums einer linearen Funktion z, der sogenannten Zielfunktion, unter einschränkenden Bedingungen, die in Form linearer Ungleichungen oder Gleichungen gegeben sind.
Diese Systeme von Ungleichungen werden mit Methoden der linearen Algebra und der analytischen Geometrie gelöst.

Beispiele: Maximierung des Reingewinns einer Produktion
Minimierung des Gesamtabfalls einer Produktion
Suche des Extremums einer gewichteten Linearkombination solcher Kriterien

Mathematisches Modell: Das Aufstellen der Zielfunktion, der Nebenbedingungen und der Nichtnegativitätsbedingungen.

Normalfall: Nebenbedingungen von Maximierungsmodellen enthalten nur $\leq$-Beziehungen, diejenigen von Minimierungsmodellen dagegen nur $\geq$-Beziehungen.
Enthalten einzelne Nebenbedingungen das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen, so können diese durch Multiplikation mit -1 in Ungleichungen mit der im Normalfall gewünschten Bedingung umgeformt werden.

Verallgemeinerter, erweiterter Normalfall: Zusätzlich zu den Ungleichungen können auch lineare Gleichungen als Nebenbedingungen auftreten.

Die lineare Optimierung hat sich aus der linearen Algebra herausgebildet. Die Bestimmung eines Extremwertes ist aus der Differenzialrechnung bekannt. Sie wird dort auf nichtlineare Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Variablen angewendet. Für die Extremwertberechnungen linearer Funktionen versagen die Methoden der Differenzialrechnung. Lineare Funktionen sind zwar differenzierbar, da aber ihre erste Ableitung stets konstant ist, kann die für ein Extremwert bestehende notwendige Bedingung nicht erfüllt werden.
Die Frage nach einem Extremwert einer linearen Funktion geht bei den Problemen der linearen Optimierung von wesentlich anderen Gesichtspunkten aus als bei der Differenzialrechnung. Sie wird erst sinnvoll durch die stets mit auftretenden Nebenbedingungen, die die Form von linearen Gleichungen und Ungleichungen haben.

Lineare Optimierung

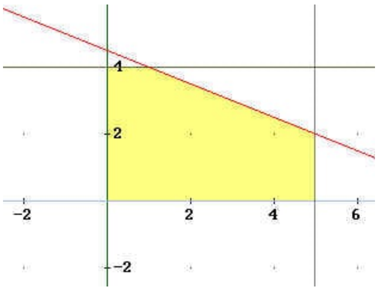
Bei einem linearen Optimierungsproblem (LOP) ist das Maximum oder Minimum einer linearen Zielfunktion Z (ZF) zu bestimmen,
wobei die Struktur- oder Entscheidungsvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Nebenbedingungen (NB) oder Restriktionen und der Nichtnegativitätsbedingung (NNB) genügen müssen.

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \rightarrow \max/\min$$

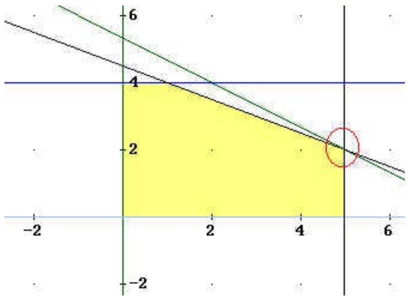
$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \; R \; b_1$ $\quad$ $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \; R \; b_2 \ldots$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \; R \; b_m$ $\quad$ $R \in (\leq, =, \geq)$

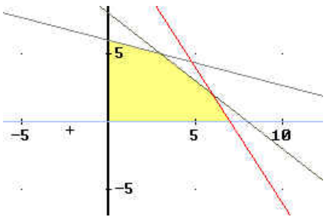
$x_j \geq 0$, j = 1, 2, ..., n . Die Größen a_{ij}, b_i, c_j sind bekannt.
Beispiel
ZF: $Z = x_1 + 4x_2$ → Zielfunktion mit zwei Variablen x_1 und x_2
NB: $x_1 + 8x_2 \leq 200$ System von drei Nebenbedingungen, $5x_1 + 4x_2 \leq 200$ in diesem Fall drei ≤ -Beziehungen
$5x_2 \leq 100$
NNB: $x_1, x_2 \geq 0$ Nichtnegativitätsbedingung für die beiden Variablen x_1 und x_2
Jeder Vektor x, der den Nebenbedingungen genügt, heißt Lösung des linearen Optimierungsproblems.
Jeder Vektor x, der den Nebenbedingungen und der Nichtnegativitätsbedingung genügt, heißt zulässige Lösung des linearen Optimierungsproblems.
Die Gesamtheit aller zulässigen Lösungen eines linearen Optimierungsproblems heißt Menge der zulässigen Lösungen. Jede zulässige Lösung, die die Zielfunktion maximiert bzw. minimiert, heißt optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems.



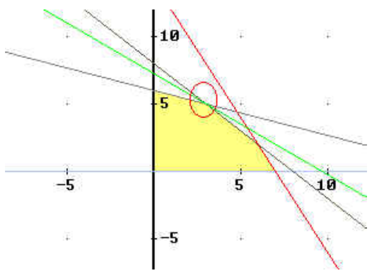
Beispielaufgabe 1: "Zeltekauf"
Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten. Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 DM je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 DM je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 DM für die Zelte ausgeben. Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?
Lösungsansatz: Zuordnung von Variablen x = 10-Personenzelte
y = 15-Personenzelt
Umformen der Bedingungen: $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq 5$ $y \leq 4$
Außerdem ist bekannt, dass der Jugendgruppe nur 1800 DM zur Verfügung stehen und dass die Zelte 200 DM bzw. 400DM kosten. Daraus ergibt sich die Ungleichung: $200*x+400*y \leq 1800$ →
$x+2y \leq 9$
Zuordnung von Gleichungen für die grafische Darstellung x=0 ; y=0 ; x=5 ; y=4 ; x+2y=9
Graphische Lösung: Nur die gelb gefärbten Punkte des Bereiches erfüllen die Bedingungen.
Von diesen zulässigen Lösungen muss nun das Wertepaar (x/y) bestimmt werden, mit dem die Jugendgruppe die meisten Personen unterbringen kann.



Zielfunktion: 10 x + 15 y = Z , wobei Z die Menge der Personen ist
Die Funktion $y= -2/3x + Z/15$
wird zusätzlich in das Koordinatensystem für verschiedene Z eingetragen, bis eine Funktion nur noch einen Punkt mit der Menge der zulässigen Lösungen gemeinsam hat.
Dieser Punkt kennzeichnet das Wertepaar, mit dem die meisten Personen untergebracht werden können.
Das abzulesende Ergebnis (5 Zehnpersonenzelte und 2 Fünfzehn-Personenzelte) lässt sich auch rechnerisch überprüfen, indem man die Probe macht:
5*200 DM+2*400 DM=1800 DM



Beispielaufgabe 2: "Sortimentproblem"
Ein Hersteller produziert zwei Sortimente eines Artikels, der aus Teilen besteht, die geschnitten, zusammengebaut und fertiggestellt werden müssen. Der Unternehmer weiß, dass er so viele Artikel verkaufen kann, wie er produziert. Sortiment 1 benötigt 25 Minuten zum Zerschneiden, 60 Minuten zum Zusammenbau und 68 Minuten, um es verkaufsfertig zu machen. Es erzielt 30 DM Gewinn. Für Sortiment 2 braucht man 75 Minuten zum Schneiden, 60 Minuten für den Zusammenbau und 34 Minuten, zur Fertigstellung. Dieses Sortiment erzielt einen Gewinn von 40 DM. Es stehen nicht mehr als 450 Minuten zum, Zerschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau und 476 Minuten zum Fertigstellen pro Tag zur Verfügung. Nun stellt sich dem Unternehmer die Frage, wie viele Artikel von jedem Sortiment jeden Tag produziert werden müssen, um den Gewinn zu maximieren.
Lösungsansatz: Es seien x die Anzahl der Artikel aus Sortiment 1 und y die Anzahl der Artikel aus Sortiment zwei. Die Werte für x und y können nicht negativ sein, sondern nur Beträge größer oder gleich null annehmen: $x \geq 0$, $y \geq 0$
Ungleichungen: $25x+75y \leq 450$ $60x+60y \leq 480$ $68x+34y \leq 476$
Graphische Lösung:
In der Grafik repräsentieren die drei Ungleichungen die Flächen



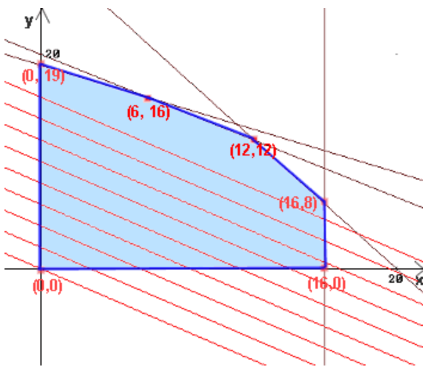
unterhalb den vorgegebenen Linien, während die ersten beiden Ungleichungen genau auf den Achsen liegen, und damit die Fläche abgrenzen.
Zielfunktion: $30*x+40*y = Z$; $y = -3/4x + Z/40$
Jetzt gibt man wieder beliebige Werte für Z ein, bis eine der entstehenden Funktionen den möglichen Bereich nur noch in einem Punkt schneidet. Dieser Punkt kennzeichnet das Wertepaar, mit dem eine optimale Anzahl an Sortimenten hergestellt wird (siehe roter Kreis).
Dieses Ergebnis (3 / 5) lässt sich wieder mit der Probe überprüfen:
3*30DM+5*40DM=290DM. Der Unternehmer sollte also drei Artikel aus Sortiment 1 und fünf Artikel aus Sortiment 2 herstellen, um die Arbeitszeit optimal auszunutzen und den Gewinn dabei zu maximieren.

Einfache Probleme

Beispiel: Die Größe z sei von a und b mit $z = a + 4b$ (Zielfunktion) abhängig, wobei für die Variablen a und b vier Nebenbedingungen gelten sollen: $a >= 0$ $b >= 0$ $2a + 3b <= 4$ $3a + b <= 3$
Lösung: $a = 0$ $b = 1.33$ → Maximum 5.33
Beispiel: Die Größe z sei von a, b und c mit $z = a + 4b + c$ (Zielfunktion) abhängig, wobei für die Variablen Nebenbedingungen gelten sollen:
$a > 1$ $b > 2$ $2a + 3b - c < 12$ $3a + b > 13$ $c < 7$
Lösung: $a = 3.67$ $b = 2$ $c = 1.33$ → Minimum 13
Beispiel: Die Größe z sei von a, b und c mit $z = a + 4b + c$ (Zielfunktion) abhängig, wobei für die Variablen Nebenbedingungen gelten sollen:
$a < 3$ $b > 2$ $2a + 3b - c < 12$ $3a + b > 13$ $c < 7$
Lösung: $a = 3$ $b = 4$ $c = 6$ → Minimum 25

Beispielaufgabe 3: Welchen finanziellen Spielraum hat die Baugesellschaft?

Eine Baugesellschaft hat ein Grundstück von 12 000 m^2 erworben. Darauf sollen zwei- und dreistöckige Häuser gebaut werden, die zweistöckigen mit Garten, die dreistöckigen ohne Garten. Die zweistöckigen Häuser sind für je 5 Familien, die dreistöckigen für je 7 Familien bestimmt.
Die Kosten betragen bei einem zweistöckigen Haus 400 000 DM, bei einem dreistöckigen Haus 600 000 DM. Insgesamt hat die Gesellschaft ein Kapital von12 000 000 DM für den Bau der Häuser zur Verfügung. Für ein zweistöckiges Haus wird eine Grundstücksfläche von 600 m^2 , für ein dreistöckiges Haus von 400 m^2 benötigt.



Die Zahl der Arbeitsstunden zum Bau eines zweistöckigen Hauses beträgt 6 000 Stunden, bei einem dreistöckigen Haus 12 000 Stunden. Insgesamt können höchstens 228 000 Stunden aufgebracht werden.
Nach dem Bebauungsplan dürfen nicht mehr als 16 zweistöckige Häuser gebaut werden. Wie ist das Grundstück zu bebauen, damit möglichst viele Familien auf ihm wohnen können?
Nebenbedingungen: $600\ x + 400\ y \leq 1200$
$400000\ x + 60000\ y \leq 12000000$
$6000\ x + 12000\ y \leq 228000$
Zielfunktion: $5\ x + 7\ y = G$ → Maximum
schwarz: Geraden, die das Planungsvieleck(blau) begrenzen (Kapital, Fläche, Arbeitszeit)
rote Punkte: in Frage kommende Lösungen
rote Parallelenschar: Zielgeraden für bestimmte Werte von G
Wenn diese Zielgerade parallel bis zum Punkt **(12,12)** verschoben wird, ergibt sich ein maximaler Gewinn. Diese Gerade hat im Vergleich zur Geraden durch Q(6,16) mit derselben Steigung -5/7 den größten y-Achsenabschnitt.

Beispielaufgabe 4: Optimale Vorbereitung - Zeit ist wertvoll!

Peter kalkuliert scharf! Er muss in zwei Fächern - nämlich in Mathematik und in Englisch - eine Nachprüfung machen.
Um den versäumten Stoff nachzuarbeiten, benötigt er in Mathematik mindestens 2 Tage und in Englisch mindestens 1,5 Tage. Das Nacharbeiten allein genügt nicht, da er auch den Stoff üben muss.
Bei einem Arbeitsaufwand von einem Tag kann er in Mathematik 4 Punkte und in Englisch 8 Punkte oder eine entsprechende Kombination bei einer anderen Tagesaufteilung erreichen. Insgesamt muss er in beiden Fächern zusammen mindestens 44 Punkte erreichen. Sein Freund hat sich bereit erklärt, mit ihm mindestens 10 Stunden zusammenzuarbeiten und zwar täglich 2 Stunden im Fach Mathematik und eine Stunde im Fach Englisch.
Wie muss Peter seine Zeit einteilen, damit er mit einem möglichst geringen Aufwand sein Ziel erreicht?
Lösung: x : Anzahl der Tage für Mathematik, y: Anzahl der Tage für Englisch

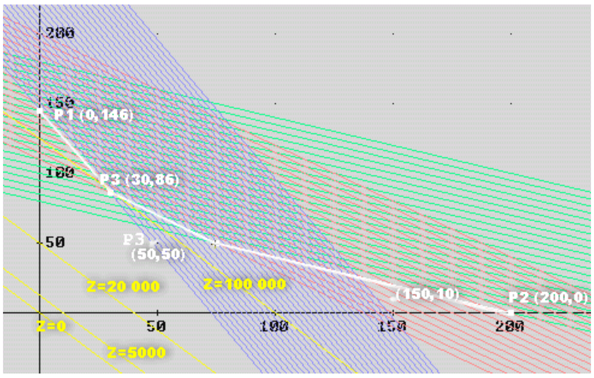
mindestens 2 Tage Mathe erforderlich	$x \geq 2$
mindestens 1,5 Tage Englisch erforderlich	$y \geq 1.5$
Unterstützung durch den Freund	$2\ x + y \geq 10$
zu erreichende Punkte	$4\ x + 8\ y \geq 44$
zu minimieren ist die Zahl der Arbeitstage	$E(x,y) = x + y$

Minimum an Arbeitstagen 3 Tage für Mathematik 4 Tage für Englisch

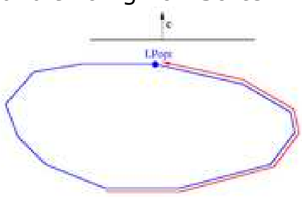
Beispielaufgabe 5: Entscheidungen eines Süßwarenherstellers
Ein Süßwarenhersteller erhält von zwei verschiedenen Schokoladenfabrikanten Mischungen, die er zu einer dritten Sorte zusammenmischen will.
Die Sorten "Praliné d' Or" und "Knusper Gala" enthalten in jeweils unterschiedlicher Zusammensetzung Krokantpralinen, Pralinen aus Vollmilch- bzw. weißer Schokolade und Bitterschokolade.
Die folgende Aufstellung gibt jeweils an, wie viel von jeder Pralinengeschmacksart in den Packungen der beiden Sorten enthalten ist und was die Grundlage für seine Kalkulation ist.

Inhalt	Praliné d' Or (8 kg)	Knusper Gala (11 kg)
Krokantpralinen	2 kg	1 kg
Vollmilch/weiße Schokolade	4 kg	5 kg
Bitterschokolade	2 kg	5 kg
Preis pro Packungseinheit	500 DM	400 DM

Die neue Mischung soll mindestens 146 kg Krokantpralinen, mindestens 550 kg Vollmilch- und mindestens 400 kg Pralinen aus dunkler Schokolade enthalten. Wie viele Packungseinheiten muss er von der Sorte "Praliné d' Or" und von der zweiten Sorte "Knusper Gala" ordern, um die neue Sorte möglich kostengünstig einzukaufen?



Lösung: Die zugehörigen Ungleichungen
I. $2x + y \geq 146 \rightarrow y \geq -2x + 146$ blauer Bereich
II. $4x + y \geq 550 \rightarrow y \geq -0{,}8x + 110$ roter Bereich
III. $2x + 5y \geq 400 \rightarrow y \geq -0{,}4x + 80$ grüner Bereich
Die weiß gezeichnete Linie gibt die Berandung des Zielgebiets an; oberhalb dieses Streckenzugs.
Zielfunktion: $500x + 400y = Z$
$y = -5/4\,x + Z/400$
Mögliche Punkte innerhalb des Zielgebiets sind z.B. P1 (0, 146), P2 (200, 0) oder P3(50, 50) (weiss gezeichnet).
Legt man parallele Geraden (gelb, mit der Steigung -5/4) durch diese Punkte, so stellt man fest, dass die Gerade, die durch den mit P beschrifteten Punkt (30/86) geht, den kleinsten y-Achsenabschnitt hat. Der y-Achsenabschnitt dieser Geraden ist jeweils Z/400. Wenn Z/400 so klein wie möglich ist, dann ist auch Z so klein wie möglich unter den obigen angegebenen 3 Bedingungen.
Die Berechnung des optimalen Punktes P (die Gerade durch P liefert den kleinsten y-Achsenabschnitt) erfolgt durch Lösen des Gleichungssystems:
I) $2x + y = 146$ und II) $4x + 5y = 550$
Es ergibt sich: (30/86), d.h. x=30, y=86.
Einsetzen dieser Werte für x und y in die Gleichung der Zielfunktion ergibt Z = 500*30 + 400*86 = 49 400 und damit 30 Packungseinheiten zu 8 kg (Nuss+Marzipan+Krokant). Von der 2.Sorte müssen 86 Packungseinheiten genommen werden, die je 11 kg schwer sind (1+5+5). Das heißt: 240 kg von Sorte 1 und 946 kg von Sorte 2 wird der Süßwarenhersteller wohl ordern.

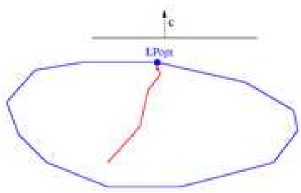


Dieses Problem führte zu 3 Bedingungen mit 2 Variablen. Man kann sich vorstellen, dass ein Süßwarenhersteller ein solches Problem wirklich lösen muss. Meist sind die lineare Optimierungsprobleme aber komplexer.

Simplex-Verfahren

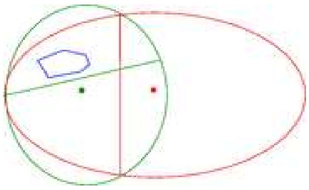
Das Simplex-Verfahren läuft die Ecken des Polyeders ab, bis es an einer Optimallösung angekommen ist.
Das Simplex-Verfahren, im Jahre 1947 von George Dantzig entwickelt, ist der wichtigste Algorithmus zur Lösung linearer Programme in der Praxis. Die Grundidee besteht darin, von einer Ecke des Polyeders zu einer benachbarten Ecke mit besserem Zielfunktionswert zu laufen, bis dies nicht mehr möglich ist. Da es sich bei der linearen Optimierung um ein konvexes Optimierungsproblem handelt, ist die damit erreichte lokal optimale Ecke auch global optimal.
Das Verfahren ist im Bild illustriert: Ziel ist es, einen möglichst weit oben (in Richtung des Vektors *c*) liegenden Punkt zu finden. In roter Farbe ist ein möglicher Pfad des Simplex-Verfahrens entlang der Ecken des Polyeders dargestellt, wobei sich der Zielfunktionswert mit jedem Schritt verbessert.

Innere-Punkte-Verfahren



Innere-Punkte-Verfahren nähern sich einer Optimallösung durch das Innere des Polyeders.
Innere-Punkte-Verfahren, auch Barrier-Verfahren genannt, nähern sich einer optimalen Ecke durch das Innere des Polyeders (siehe Bild). Der erste

solche Algorithmus wurde 1984 von Narendra Karmarkar beschrieben. Seine Bedeutung lag vor allem darin, dass er der erste polynomiale Algorithmus zum Lösen linearer Programme war, der das Potential hatte, auch praktisch einsetzbar zu sein. Die entscheidenden Durchbrüche, die Innere-Punkte-Verfahren konkurrenzfähig zum Simplex-Algorithmus machten, wurden aber erst in den 1990er Jahren erzielt. Ein Vorteil dieser Verfahren ist, dass sie, im Gegensatz zum Simplex-Verfahren, in leichter Abwandlung auch zum Lösen quadratischer oder bestimmter nichtlinearer Programme eingesetzt werden können.



Ellipsoidmethode

Die Ellipsoidmethode zur Lösung linearer Programme wurde 1979 von Leonid Khachiyan veröffentlicht und war das erste polynomiale Verfahren für dieses Problem. Für praktische Zwecke ist sie allerdings nicht geeignet. Die Ellipsoidmethode dient dazu, einen beliebigen Punkt in einem volldimensionalen Polyeder zu finden oder festzustellen, dass das Polyeder leer ist.

Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, ein Ellipsoid zu definieren, das alle Ecken des Polyeders enthält. Anschließend wird festgestellt, ob der Mittelpunkt dieses Ellipsoids im Polyeder enthalten ist. Falls ja, hat man einen Punkt im Polyeder gefunden und kann aufhören. Andernfalls kann man das Halbellipsoid bestimmen, in dem das Polyeder enthalten sein muss, und ein neues, kleineres Ellipsoid um das Polyeder legen.