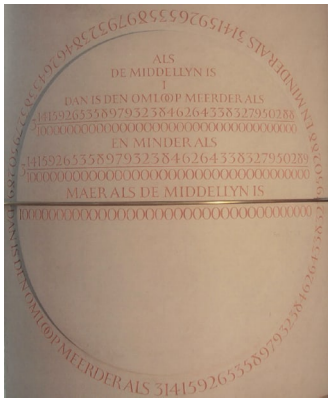
Kreiszahl π

Geschichte der Kreiszahl π

Als eine der ersten mathematischen Naturkonstanten war die Kreiszahl π (das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser) schon den Ägyptern und Babyloniern bekannt. Im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23 der Bibel findet sich z.B. die Verwendung von $\pi = 3$.
Im Laufe der Jahrhunderte wurden immer wieder Anstregungenen unternommen, um diese unendliche, nicht periodische Zahl möglichst genau zu berechnen.
Neben dem rein mathematischem Interesse an neuen und schnellen Algorithmen zur π-Berechnung,dienen diese auch zum Test von Supercomputer. Die gefundenen Dezimalziffern bilden ein wertvolles absolut (?) zufällig verteiltes Zahlenmaterial. Die Liste enthält historische Meilensteine der Beschäftigung mit $\pi = 3{,}14159$ ...

Zeitabschnitt	Historisches Ereignis
1650 v.Z.	im Papyrus Rhind $\pi = (16 / 9)^2$
Babylonien	Näherungswert 256/81 = 3,16049
Ägypten	25/8 = 3.125 ...
220 v.Z.	Archimedes nutzt 22/7 = 3,142857 / = 3 (Altes Testament; 1. Koen. 7,23)
125 v.Z.	Hipparch nutzt 377/120 = 3.141(666...)
150	Ptolemäus nutzt 377/120
150	Rabbi Nehemiah verwendet 22/7 = 3,142857
250	Wang Fau nutzt 142/45 = 3,155
263	Liu Hui gibt 3.14158... als Näherung an
380	Siddhanta kennt 3+177/1250 = 3,1416
499	Aryabhata (Indien) 62832/2000 = 3.141(6)
5.Jahrhundert	Zu Ch'ong-Zhi verwendet in China 355/113
7.Jahrhundert	Brahmagupta: π = Wurzel(10)
1220	Fibonacci von Pisa: $\pi = 3.141818$
1427	Al Kashi nähert mit $6^0 16^I 59^{II} 28^{III} 1^{IV} 34^V 51^{VI} 46^{VII} 14^{VIII} 50^{IX}$ die Zahl auf 14 Dezimalstellen die Darstellung erfolgte im Sechzigersystem
1464	Cusanus pi = 3/4 (Wurzel(3) + Wurzel(6)) = 3.1(161...)
1580	Tycho Brahe pi = 88/Wurzel(785) = 3.14(085...)
1596	Ludolf van Ceulen kennt 35 Kommastellen

Abbildung: Rekonstruktion des Grabsteins von van Ceulen mit den 35 Dezimalstellen von π.



1625 Adrian Metius 355/113
1682 Leibniz veröffentlicht seine PI-Formel
1690 Abraham Sharp kennt 72 Kommastellen
1706 John Machin berechnet 100 Kommastellen, William Jones benutzt den griechischen Buchstabe π
1719 De Lagny ermittelt 112 korrekte Kommastellen
1736 Bezeichnung π nach 'perì métros' durch Euler
1739 Euler entwickelt π in einen Kettenbruch
1766 Arima (Japan) 428224593349304/136308121570117, d.h. 29 korrekte Stellen
1767 Nachweis der Irrationalität von π (Lambert)
1777 Buffon beschreibt ein Zufallsexperiment zur von π
1794 Legendre beweist die Irrationalität von π^2
1800 Vega: 140 Kommastellen
1836 Specht pi = 13/50 Wurzel(146) = 3.14159(195...)
1844 Zacharias Dase: 200 Kommastellen
1853 William Rutherford: 400 Dezimalen
1868 Grosvenos pi = 10 Wurzel(2) - 11 = 3.14(213...)
1873 William Shanks: 707 Dezimalen ; (527 korrekt)
1882 Beweis der Transzendenz durch Lindemann
1897 US-Staat Indiana setzt per Gesetz(!) $\pi = 3{,}2$
1947 Ferguson: 808 Stellen, Berechnung mit Computerhilfe
1949 G.W.Reitweiser (ENIAC): 2037 Stellen
1954 S.C.Nicholson (NORC): 3092 Stellen
1957 G.E.Felton (Pegasus): 7480 Stellen
1958 F.Genuys (IBM 704): 10000 Stellen, G.E.Felton (Pegasus): 10020 Stellen
1959 J.Guilloud (IBM 704): 16167 Stellen
1961 Gerard (IBM 7090): 20000 Stellen, W.Shanks (IBM 7090): 100265 Stellen
1966 J.Guilloud,J.Filliatre (IBM 7030): 250000 Stellen
1967 J.Guilloud,M.Dichampt (CDC 6600): 500000 Stellen
1973 J.Guilloud,M.Bouyer (CD 7600): 1001250 Stellen
1977 Gosper ermittelt 17 Millionen Terme der Kettenbruchentwicklung
1981 K.Miyoshi,Y.Kanada (FACOM M-200): 2000036 Stellen

1981 J.Guilloud: 2000050 Stellen
1982 Y.Tamura (MELCOM 900II): 2097144 Stellen
1982 Y.Tamura,Y.Kanada (HITAC M-280H): 4194288 Stellen
1982 Y.Tamura,Y.Kanada (HITAC M-280H): 8388576 Stellen
1983 Y.Kanada,S.Yoshino (HITAC M-290H): 16777206 Stellen
1985 William Gosper (Symbolics 3670): 17526200 Stellen
1986 bei der Berechnung von π wird ein CPU-Fehler des Cray 2-Prototypen entdeckt
1986 Jan David Bailey (Cray 2): 29360111 Stellen
1986 Sep Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-810): 33554414 Stellen
1986 Okt Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-810): 67108839 Stellen
1987 Jan Y.Kanada,Y.Tamura (NEC SX-2): 134214700 Stellen
1988 Jan Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 204326551 Stellen
1989 Mai Chudnowsky (Cray 2): 480000000 Stellen
1989 Jun Chudnowsky (IBM 3090): 535339270 Stellen
1989 Jul Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 536870898 Stellen
1989 Aug Chudnowsky (IBN 3090): 1011196691 Stellen
1989 Nov Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 1073740799 Stellen
1991 Aug Chudnowsky: 2.26 Milliarden Stellen
1994 Mai Chudnowsky: 4.044 Milliarden Stellen
1995 Jun D.Takahashi,Y.Kanada: 3.2 Md. Stellen
1995 Aug D.Takahashi,Y.Kanada: 4.294 Md. Stellen
1995 Kaneda: 6442459000 Stellen
1996 Bellard ermittelt die 100 Milliardste Stelle mit einem völlig neuen "Tröpfchenalgorithmus" (hexadezimal = 9C381872D27596F81D0E48B95A6C46)
1997 Bellard berechnet die 1 Billionste binäre Stelle
1998 Aug im Pihex-Project wird die 5 Billionste binäre Stelle gefunden
1999 Feb die 40 Billionste binäre Stelle beginnt hexadezimal mit A0F9FF371D17593E0
1999 Apr Kanada und Takahashi: 68.719 Milliarden Stellen
1999 Juni Havermann berechnet 20 Millionen Terme der Kettenbruchentwicklung
1999 Sep Kanada und Takahashi: 206.15843 Milliarden Stellen, Zeit: 37 Stunden HITACHI SR 8000
2002 Dez Kanada ermittelt über 1,2 Billionen Ziffern
2009 Daisuke Takahashi 2,57698037 Billionen Ziffern
2010 Fabrice Bellard 2,69999999 Billionen Ziffern
2010 Shigeru Kondo, Alexander Yee 5 Billionen Ziffern
2011 Shigeru Kondo, Alexander Yee 10 Billionen Ziffern
2013 Shigeru Kondo, Alexander Yee 12,1 Billionen Ziffern
Chudnovsky-Formel, Rechenzeit 82 Tage

Historische PI-Werte

"Kein anderes mathematisches Symbol hat wohl soviel Rätselraten, romantische Spekulation, Missverständnis und menschliches Interesse hervorgerufen wie die Zahl π." (William L.Schaaf, Nature and History of π)

1.Buch der Könige 7 / 23 : "Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum".
$\pi \approx 3$ Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23

Der älteste offiziell überlieferte Wert für π stammt von den Ägyptern. Etwa um 1850 v.u.Z. entstand der Moskauer Papyrus. In diesem findet man $\pi \approx 19/6 = 3{,}16666\ldots$
Im Papyrus Rhind , das auf 1800-1650 v.u.Z. datiert wird, des Schreibers Ahmes, verwendet man
$\pi \approx (4/3)^4 = 3{,}16049\ldots$ Ägyptischer Wert aus dem Papyrus Rhind

Etwa zur selben Zeit wie in Ägypten (1900-1600 v.u.Z.) nutzte man in Babylon die Näherung 3 für π.
In einem Keilschrifttexte aus Susa findet man
$\pi \approx 3\ 1/8 = 3{,}125$ Babylonischer Näherungswert aus dem 2.Jahrtausend v.u.Z.
$\pi \approx 256/81$ Babylonischer Näherungswert

Euklid von Alexandria (325-265 v.u.Z.) gelang der Nachweis, dass $3 < \pi < 4$ gilt. Erst Archimedes verfeinerte diese Ungleichung durch Betrachtung eines 96-Ecks zu $223/71 < \pi < 22/7$
$\pi \approx 22 / 7$ Archimedes-Wert

Nach Angaben von Heron von Alexandria soll Archimedes sogar eine noch bessere Abschätzung für π gefunden haben
$195882/62351 = 3{,}14160 < \pi < 3{,}14173 = 211882/67441$
Apollonius von Perge verwendete $\pi \approx 211875 / 67441 = 3{,}1416$.

Der griechische Astronom Claudius Ptolemäus (85-165 u.Z.) verwendete die Vorarbeit des Archimedes und setzte dessen Methode bis zum 720-Eck fort.
$\pi \approx 3°8'30" / 1°$ Ptolemäus-Wert im 60iger System ($\approx$ 3,141666…)
$\pi \approx 377 / 120$ Ptolemäus-Wert (um 150)
$\pi \approx (26 / 15)^2$ Indischer Wert aus den Sulbasutras (500 v.u.Z.)
$\pi \approx \sqrt{10}$ Brahmagupta-Wert, auch Zhang Heng um 100 u.Z.
$\pi \approx 142 / 45$ Wang Fan um 250 u.Z.
$\pi \approx 355 / 113$ chinesischer Wert; Tsu Ch'ung Chi (um 500 u.Z.) / 1573 Valentinus Otho, 1625 Adrian Metius

Interessant ist es, wie Tsu Ch'ung Chi seinen Näherungswert fand. Es wird angenommen, dass er erkannte, dass die Differenz der Zähler und Nenner der Näherungswerte von Archimedes und Ptolemäus π besser annähern: $\pi \approx [377 - 22] / [120 - 7] = 355/113$
$\pi \approx 3{,}1416$ Indischer Wert aus dem 5.Jahrhundert
$\pi \approx 3\ 1/5$ Näherung der französischen Artillerie
$\pi^2 \approx g$ praktischer Näherungswert in der Physik (g … Fallbeschleunigung)
$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$ Platon-Wert
$\pi \approx 4 / \sqrt{\tau} = 2 \sqrt{(2 \sqrt{3})}$ Cheops-Wert, ermittelt aus Maßzahlen der Pyramide
$\pi \approx 20/9 \sqrt{2}$ Warusfel-Wert (1961)
$\pi \approx \sqrt{(40/3 - 2 \sqrt{3})}$ Kochansky-Wert (1685)
$\pi \approx 1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$ Vieta-Wert
$\pi \approx 13/50 \sqrt{146}$ Ehrenwirth (1997)
$\pi \approx 3{,}141818$ Leonardo Fibonacci (um 1200)
$\pi \approx 3{,}141592653589873$ al-Kashi-Wert (1427)

William Jones benutzte als Erster den griechischen Buchstabe π zur Kennzeichnung der Kreiszahl. Es wird vermutet, dass er diese Abkürzung in Bezug auf das griechische Word für Kreisumfang = περιφερια (peripheria) wählte.
Um 1700 gab Jacob Marcelis an, dass ihm die Kreisquadratur gelungen sein und nannte als "exakten" Wert
$\pi = 3\ 1008449087377541679894282184894/699718363754081944003523927170 2$

"Harry knew pi out to 3.141592 because accuracy to one part in a million was enough for most practical purposes. Hermine knew one hundred digits of pi because that was how many digits had been printed in the back of her math textbook."
Quelle: http://www.fanfiction.net/s/5782108/9/Harry-Potter-and-the-Methods-of-Rationality

"Das wunderbar geheimnisvolle Pi ist zu einem Gurgelmittel verkommen, das Rechenmaschinen zum Rachenputzen dient."
Philip J.Davis (The lore of large numbers)

π ist eine unendliche, nicht-periodische, irrationale Dezimalzahl, deren Transzendenz durch Lindemann nachgewiesen wurde.

Kreiszahl π

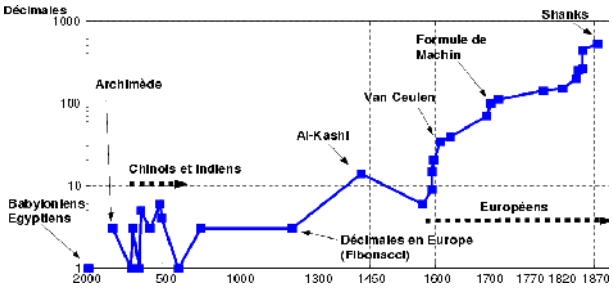
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506040092770167113900984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596023648066549911988183479775356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438382796797668145410095388378636095068006422512523

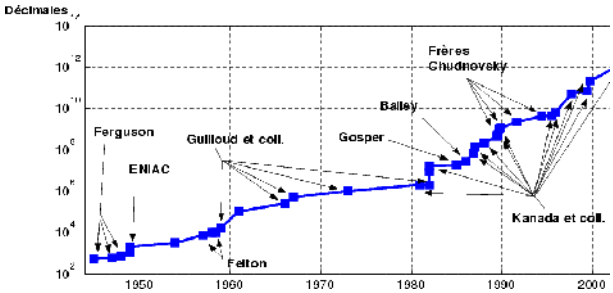
051173929848960841284886269456042419652850222106611863067442786220391949450471237137
869609563643719172874677646575739624138908658326459958133904780275900994657640789512
694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363944374553050682
034962524517493996514314298091906592509372216964615157098583874105978859597729754989
301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499725246808459872736446958
486538367362226260991246080512438843904512441365497627807977156914359977001296160894
416948685558484063534220722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225
499546667278239864565961163548862305774564980355936345681743241125150760694794510965
960940252288797108931456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385890
097149096759852613655497818931297848216829989487226588048575640142704775551323796414
515237462343645428584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524
849371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084784896833214457138687
519435064302184531910484810053706146806749192781911979399520614196634287544406437451
237181921799983910159195618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252
316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221825625996615014215030680
384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881907104863317346496514539
057962685610055081066587969981635747363840525714591028970641401109712062804390397595
156771577004203378699360072305587631763594218731251471205329281918261861258673215791
984148488291644706095752706957220917567116722910981690915280173506712748583222871835
209353965725121083579151369882091444210067510334671103141267111369908658516398315019
701651511685171437657618351556508849099898599823873455283316355076479185358932261854
896321329330898570642046752590709154814165498594616371802709819943099244889575712828
905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428138830320382490375
898524374417029132765618093773444030707469211201913020330380197621101100449293215160
842444859637669838952286847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226
978028073189154411010446823252716201052652272111660396665573092547110557853763466820
653109896526918620564769312570586356620185581007293606598764861179104533488503461136
576867532494416680396265797877185560845529654126654085306143444318586769751456614068
007002378776591344017127494704205622305389945613140711270004078547332699390814546646
458807972708266830634328587856983052358089330657574067954571637752542021149557615814
002501262285941302164715509792592309907965473761255176567513575178296664547791745011
299614890304639947132962107340437518957359614589019389713111790429782856475032031986
915140287080859904801094121472213179476477726224142548545403321571853061422881375850
430633217518297986622371721591607716692547487389866549494501146540628433663937900397
692656721463853067360965712091807638327166416274888800786925602902284721040317211860
820419000422966171196377921337575114959501566049631862947265473642523081770367515906
735023507283540567040386743513622224771589150495309844489333096340878076932599397805
419341447377441842631298608099888687413260472156951623965864573021631598193195167353
812974167729478672422924654366800980676928238280689964004824354037014163149658979409
243237896907069779422362508221688957383798623001593776471651228935786015881617557829
735233446042815126272037343146531977774160319906655418763979293344195215413418994854
447345673831624993419131814809277771038638773431772075456545322077709212019051660962
804909263601975988281613323166636528619326686336062735676303544776280350450777235547
105859548702790814356240145171806246436267945612753181340783303362542327839449753824
372058353114771199260638133467768796959703098339130771098704085913374641442822772634
659470474587847787201927715280731767907707157213444730605700733492436931138350493163
128404251219256517980694113528013147013047816437885185290928545201165839341965621349
143415956258658655705526904965209858033850722426482939728584783163057777560688876446
248246857926039535277348030480290058760758251047470916439613626760449256274204208320
856611906254543372131535958450687724602901618766795240616342522577195429162991930645
537799140373404328752628889639958794757291746426357455254079091451357111369410911939
325191076020825202618798531887705842972591677813149699009019211697173727847684726860
849003377024242916513005005168323364350389517029893922334517220138128069650117844087
451960121228599371623130171144484640903890644954440061986907548516026327505298349187
407866808818338510228334508504860825039302133219715518430635455007668282949304137765
527939751754613953984683393638304746119966538581538420568533862186725233402830871123
282789212507712629463229563989898935821167456270102183564622013496715188190973038119
800497340723961036854066431939509790190699639552453005450580685501956730229219139339
185680344903982059551002263535361920419947455385938102343955449597783779023742161727
111723643435439478221818528624085140066604433258885698670543154706965747458550332323
342107301545940516553790686627333799585115625784322988273723198987571415957811196358
330059408730681216028764962867446047746491599505497374256269010490377819868359381465
741268049256487985561453723478673303904688383436346553794986419270563872931748723320
837601123029911367938627089438799362016295154133714248928307220126901475466847653576
164773794675200490757155527819653621323926406160136358155907422020203187277605277219
005561484255518792530343513984425322341576233610642506390497500865627109535919465897
514131034822769306247435363256916078154781811528436679570611086153315044521274739245

4494542368288606134084148637767009612071512491404302725386076482363414334623518975766
4521641376796903149501910857598442391986291642193994907236234646844117394032659184044
4378051333894525742399508296591228508555821572503107125701266830240292952522011872676
7562204154205161841634847565169998116141010029960783869092916030288400269104140792886
2150784245167090870006992821206604183718065355672525325675328612910424877618258297651
5795984703562226293486003415872298053498965022629174878820273420922224533985626476691
4905562842503912757710284027998066365825488926488025456610172967026640765590429099456
8150652653053718294127033693137851786090407086671149655834343476933857817113864558736
7812301458768712660348913909562009939361031029161615288138437909904231747336394804579
3149314052976347574811935670911013775172100803155902485309066920376719220332290943346
7685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512816228824462575
9163330391072253837421821408835086573917715096828874782656995995744906617583441375223
9709683408005355984917541738188399944697486762655165827658483588453142775687900290951
7028352971634456212964043523117600665101241200659755851276178583829204197484423608007
1930457618932349229279650198751872127267507981255470958904556357921221033346697499235
6302549478024901141952123828153091140790738602515227429958180724716259166854513331239
4804947079119153267343028244186041426363954800044800267049624820179289647669758318327
1314251702969234889627668440323260927524960357996469256504936818360900323809293459588
9706953653494060340216654437558900456328822505452556405644824651518754711962184439658
2533754388569094113031509526179378002974120766514793942590298969594695556576121865619
6733786236256125216320862869222103274889218654364802296780705765615144632046927906821
2073883778142335628236089632080682224680122482611771858963814091839036736722208883215
1375560037279839400415297002878307667094447456013455641725437090697939612257142989467
1543578468788614445812314593571984922528471605049221242470141214780573455105008019086
9960330276347870810817545011930714122339086639383395294257869050764310063835198343893
4159613185434754649556978103829309716465143840700707360411237359843452251610507027056
2352660127648483084076118301305279320542746286540360367453286510570658748822569815793
6789766974220575059683440869735020141020672358502007245225632613410559240190274216248
4391403599895353945909440704691209140938700126456001622374288021092764579310657922955
2498872758461012648369998922569596881592056001016552563756785667227966198857827948488
5583439751874454551296563443480396642055798293680435220277098429423253302257634180703
9476994159715945300697521482933665556615678736400536665641654732170439035213295435291
6941459904160875320186837937023488868947915107163785290234529244077365949563051007421
0871426134974595615138498713757047101787957310422969066670214498637464595280824369445
7897723300487647652413390759204340196340391147322015091522201068256342747164602433544
0051521266932493419673977041595683753555166730273900749729736354964533288869844061196
4961627734495182736955882207573551766515895515190986665393549481068873206859907540792
3424023009259007017319603622547564789406475483466477604114632339056513433068449539790
7090302346046147096169688688501408347040546074295869138296682468185710318879065287036
6508324319744047718556789348230894310682870272280973624809399627060747264553992539944
2808113736943388729406307926159599546262462970706259484556903471197299640908941805953
4393251236235508134949004364278527138315912568989295196427287573946914272534366941532
3610045373048819855170659412173524625895487301676002988659257866285612496655235338294
2878542534048308330701653722856355915252347844598183134112900199920598135220511733658
5640782648494276441137639386692480311836445369858917544264739988228462184490087776977
6312795722672655562596282542765318300134070922334365779160128093179401718598599338492
3549564005709955856113498025249906698423301735035804408116855265311709957089942732870
9258487894436460050410892266917835258707859512983441729535195378855345737426085902908
1765155780390594640873506123226112009373108048548526357228257682034160504846627750450
0312620080079980492548534694146977516493270950493463938243222718851597405470214828971
1177792376122578873477188196825462981268685817050740272550263329044976277894423621674
1191862694396506715157795867564823993917604260176338704549901761436412046921823707648
8783419689686118155815873606293860381017121585527266830082383404656475880405138080163
3638874216371406435495561868964112282140753302655100424104896783528588290243670904887
1181909094945331442182876618103100735477054981596807720094746961343609286148494178501
7180779306810854690009445899527942439813921350558642219648349151263901280383200109773
8680662877923971801461343244572640097374257007359210031541508936793008169980536520276
0072774967458400283624053460372634165542590276018348403068113818551059797056640075094
2608788573579603732451416786703688098806097164258497595138069309449401515422221943291
3021739125383559150310033303251117491569691745027149433151558854039221640972291011290
3552181576282328318234254832611191280092825256190205263016391147724733148573910777587
4425387611746578671169414776421441111263583553871361011023267987756410246824032264834
6417663698066378576813492045302240819727856471983963087815432211669122464159117767322
5326433568614618654522268126887268445968442416107854016768142080885028005414361314623
0821025941737562389942075713627516745731891894562835257044133543758575342698699472547
0316566139919996826282472706413362221789239031760854289437339356188916512504244040089
5271983787 3

864805847268954624388234375178852014395600571048119498842390606136957342315590796703
461491434478863604103182350736502778590897578272731305048893989009923913503373250855
982655867089242612429473670193907727130706869170926462548423240748550366080136046689
511840093668609546325002145852930950000907151058236267293264537382104938724996699339
424685516483261134146110680267446637334375340764294026682973865220935701626384648528
514903629320199199688285171839536691345222444708045923966028171565515656661113598231
122506289058549145097157553900243931535190902107119457300243880176615035270862602537
881797519478061013715004489917210022201335013106016391541589578037117792775225978742
891917915522417189585361680594741234193398420218745649256443462392531953135103311476
394911995072858430658361935369329699289837914941939406085724863968836903265564364216
644257607914710869984315733749648835292769328220762947282381537409961545598798259891
093717126218283025848112389011968221429457667580718653806506487026133892822994972574
530332838963818439447707794022843598834100358385423897354243956475556840952248445541
392394100016207693636846776413017819659379971557468541946334893748439129742391433659
360410035234377706588867781139498616478747140793263858738624732889645643598774667638
479466504074111825658378878454858148962961273998413442726086061872455452360643153710
112746809778704464094758280348769758948328241239292960582948619196670918958089833201
210318430340128495116203534280144127617285830243559830032042024512072872535581195840
149180969253395075778400067465526031446167050827682772223534191102634163157147406123
850425845988419907611287258059113935689601431668283176323567325417073420817332230462
987992804908514094790368878678789493054695570307261900950207643349335910602454508645 3
628935456862958531315337183868265617862273637169757741830239860065914816164049449650
117321313895747062088474802365371031150898427992754426853277974311395143574172219759
799359685252285745263796289612691572357986620573408375766873884266405990993505000813
375432454635967504844235284874701443545419576258473564216198134073468541117668831186
544893776979566517279662326714810338643913751865946730024434500544995399742372328712
494834706044063471606325830649829795510109541836235030309453097335834462839476304775
645015008507578949548931393944899216125525597701436858943585877526379625597081677643
800125436502371412783467926101995585224717220177723700417808419423948725406801556035
998390548985723546745642390585850216719031395262944554391316631345308939062046784387
785054239390524731362012947691874975191011472315289326772533918146607300089027768963
114810902209724520759167297007850580717186381054967973100167870850694207092232908070
383263453452038027860990556900134137182368370991949516489600755049341267876436746384
902063964019766685592335654639138363185745698147196210841080961884605456039038455343
729141446513474940784884423772175154334260306698831768331001133108690421939031080143
784334151370924353013677631084913516156422698475074303297167469640666531527035325467
112667522460551199581831963763707617991919203579582007595605302346267757943936307463
056901080114942714100939136913810725813781357894005599500183542511841721360557275221
035268037357265279224173736057511278872181908449006178013889710770822931002797665935
838758909395688148560263224393726562472776037890814458837855019702843779362407825052
704875816470324581290878395232453237896029841669225489649715606981192186584926770403
956481278102179913217416305810554598801300484562997651121241536374515005635070127815
926714241342103301566165356024733807843028655257222753049998837015348793008062601809
623815161366903341111386538510919367393835229345888322550887064507539473952043968079
067086806445096986548801682874343786126453815834280753061845485903798217994599681154
419742536344399602902510015888272164745006820704193761584547123183460072629339550548
239557137256840232268213012476794522644820910235647752723082081063518899152692889108
455571126603965034397896278250016110153235160519655904211844949907789992007329476905
868577878720982901352956613978884860509786085957017731298155314951681467176959760994
210036183559138777817698458758104466283998806006162298486169353373865787735983361613
384133853684211978938900185295691967804554482858483701170967212535338758621582310133
103877668272115726949518179589754693992642197915523385766231676275475703546994148929
041301863861194391962838870543677743224276809132365449485366768000001065262485473055
861598999140170769838548318875014293890899506854530765116803337322265175662207526951
791442252808165171667766727930354851542040238174608923283917032754257508676551178593
950027933895920576682789677644531840404185540104351348389531201326378369283580827193
783126549617459970567450718332065034556644034490453627560011250184335607361222765949
278393706478426456763388188075656121689605041611390390639601620221536849410926053876
887148379895599991120991646464411918568277004574243434021672276445589330127781586869
525069499364610175685060167145354315814801054588605645501332037586454858403240298717
093480910556211671...

Historische Entwicklung der bekannten Dezimalziffern der Kreiszahl





Im Dezember 2002 berechnete der Japaner Kanada π auf 1,2411 Billionen Dezimalstellen. Dazu nutzte er parallel auf zwei Rechnern HITACHI SR8000/MP, 1 TerraByte Speicher) die Formeln:

$$\pi = 48 \arctan(1/49) + 128 \arctan(1/57) - 20 \arctan(1/239) + 48 \arctan(1/110443)$$
$$\pi = 176 \arctan(1/57) + 28 \arctan(1/239) - 48 \arctan(1/682) + 96 \arctan(1/12943)$$

Konstante Größen bezüglich π

$\pi/2$ = 1.57079632679489661923132169163975144209858469968755...
$\pi/3$ = 1.04719755119659774615421446109316762806572313312503...
$\pi/4$ = 0.78539816339744830961566084581987572104929234984377...
$\pi/5$ = 0.62831853071795864769252867665590057683943387987502...
$\pi/6$ = 0.52359877559829887307710723054658381403286156656251...
2π = 6.28318530717958647692528676655900576839433879875021...
3π = 9.42477796076937971538793014983850865259150819812531...
4π = 12.56637061435917295385057353311801153678867759750042...
π^2 = 9.86960440108935861883449099987615113531369940724079...
π^3 = 31.00627668029982017547631506710139520222528856588510...
$1/\pi$ = 0.31830988618379067153776752674502872406891929148091...
$2/\pi$ = 0.63661977236758134307553505349005744813783858296182...
$\sqrt{\pi}$ = 1.77245385090551602729816748334114518279754945612238...
$1/\sqrt{\pi}$ = 0.56418958354775628694807945156077258584405062932899...
$\sqrt{2\pi}$ = 2.50662827463100050241576528481104525300698674060993...
$1/\sqrt{2\pi}$ = 0.39894228040143267793994605993438186847585863116493...
$\sqrt[3]{\pi}$ = 1.46459188756152326302014252726379039173859685562793...

Kreiszahl π-Statistik

Die Ziffernfolge von π soll statistisch absolut zufällig verteilt sein. Die Auswertung der ersten 500000 Dezimalstellen von π ergibt:

Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %
0	50158	10.0316	1	49943	9.9886	2	49746	9.9492
3	50049	10.0098	4	49717	9.9434	5	50332	10.0664
6	49999	9.9998	7	49937	9.9874	8	50272	10.0544
9	49847	9.9694						

Diese Werte ergeben bei einem χ^2-Verteilungstest, dass die Abweichung vom arithmetischen Mittel zufällig ist. Die Ziffern sind mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % gleichverteilt. Testet man nicht nur Einzelziffern sondern Paare von Ziffern, ergibt sich für deren Anzahl unter den ersten 500000 Dezimalziffern:

2.Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.Ziffer										
0	4964	4978	5004	5041	5009	4998	5022	5117	4981	5045
1	5079	4988	4811	4982	4949	5055	4939	5021	5159	4960
2	5062	4963	4895	5045	4899	4927	4983	5013	4959	5000
3	5164	4905	4967	4975	4873	5105	5038	4993	5006	5023
4	4921	4950	4914	4986	4930	5034	5043	5071	4946	4922
5	4966	5029	5095	5017	5103	5088	4980	5033	5072	4948
6	5093	4967	5010	5031	5013	5010	4905	4962	5031	4977
7	4981	5079	4957	5016	5038	4970	5052	4825	5037	4982
8	5023	5053	5044	4967	4973	5121	4991	5091	5018	4991
9	4905	5031	5049	4989	4930	5024	5046	4811	5063	4999

Vom 6.Juni 1997 bis 6.Juli 1997 berechneten Daisuke Takahashi und Yasumasa Kanada von der Universität von Tokyo über den 4.Borwein-Algorithmus und mittels Gauß-Legendre-Algorithmus insgesamt **51.539.600.000 Dezimalziffern**

der Kreiszahl PI. Insgesamt ermittelte der HITAC SR-2201 Supercomputer in 66 Stunden reiner Rechenzeit 51.539.607.552 Ziffern, von denen 51539600000 Ziffern als gültig angesehen werden. Dabei wurden als 50 Milliardste Ziffer (erste angezeigte Ziffer) von π und $1/\pi$ ermittelt:

π	85133 98712 75109 30042
$1/\pi$	1191 08624 25640 78042

Die Auswertung der ersten 50 Milliarden Dezimalstellen von π ergab für die absolute und relative Häufigkeit der 10 Dezimalziffern:

Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %
0	5000012647	10.0000253	1	4999986263	9.9999725
2	5000020237	10.0000405	3	4999914405	9.9998288
4	5000023598	10.0000472	5	4999991499	9.9999830
6	4999928368	9.9998567	7	5000014860	10.0000297
8	5000117637	10.0002353	9	4999990486	9.9999810

Testgröße beim χ^2-Test = 5.60

Kreiszahl π-Interessantes

Ist die Ziffernfolge von π zufällig verteilt, so muss praktisch jede endliche Ziffernfolge irgendwann einmal in der Dezimalstellenfolge von PI auftreten. Bekannt sind heute (Juli 1997) folgende "interessante" Ergebnisse:
Die Ziffernfolge (a) tritt in π ab der Stelle n auf:

Folge (a)	n
0123456789	17387594880, 26852899245, 30243957439, 34549153953, 41952536161, 43289964000
9876543210	21981157633, 29832636867, 39232573648, 42140457481, 43065796214
09876543210	42321758803
27182818284	45111908393

Die Ziffernfolge (a) tritt in $1/\pi$ ab der Stelle n auf:

Folge (a)	n
0123456789	6214876462
01234567890	50494465695
9876543210	15603388145, 51507034812
999999999999	12479021132

Praktisch tritt jede Ziffernkombination in der Ziffernfolge von π auf. Durch Jeremy Gilbert wird im Internet die Möglichkeit geboten, nach Ziffernfolgen zu suchen. Zum Beispiel findet man unter den ersten 10 Millionen Dezimalziffern von π die willkürlich ausgewählte Folge 140359 genau 14 mal ab der n.ten Dezimalstelle mit n =

9861	957585	1781275	3024730	3326072	3470972
3894928	4015722	5510912	6481227	7223374	7658692
8671056	9066228				

Die Ziffernfolge 314159 findet sich unter den ersten 10 Millionen Ziffern sechs mal. An der 1.142.905.318.634. Nachkommastelle von π findet man laut Yasumasa Kanada wieder die Folge 314159265358.
In der Dezimalzifferfolge von π finden sich aus statistischen Gründen auch Stellen, an welchen die gleiche Ziffer wiederholt auftritt.

Ziffer	Stelle an welcher 1, 2, 3, 4, ... gleiche Ziffern aufeinander folgen
0	32, 307, 601, 13390, 17534, 1699927, 3794572, ...
1	1, 94, 153, 12700, 32788, 255945, 4657555, ...
2	6, 135, 1735, 4902, 65260, 963024, 82599811, ...
3	9, 24, 1698, 28467, 28467, 710100, 710100, 36488176, ...
4	2, 59, 2707, 54525, 808650, 828499, 17893953, 22931745, ...
5	4, 130, 177, 24466, 24466, 244453, 3517236, ...
6	7, 117, 2440, 21880, 48439, 252499, 8209165, 45681781, 45681781, ...
7	13, 559, 1589, 1589, 162248, 399579, 3346228, 24658601, 24658601, ...
8	11, 34, 4751, 4751, 213245, 222299, 4722613, 46663520, 46663520, ...
9	5, 44, 762, 762, 762, 762, 1722776, 36356642, ...

Die Beast-Number 666 tritt erstmals an der 2441.Dezimalstelle auf. In den 15 auf die 710150.Stelle folgenden Ziffern ... 353733333338638...
tritt die Ziffer 3 zehnmal auf, und dabei gleich sieben Mal hintereinander.

Feynman-Punkt

In der Ziffernfolge von π treten eine Vielzahl von Wiederholungen einzelner Ziffern auf.
Das erste Auftreten von 6 aufeinanderfolgenden glechen Ziffern wird Feynman-Punkt genannt und tritt an der 762.Dezimalstelle mit sechs Mal einer 9 auf.

Benannt wurde diese Stelle nach dem Physiker Richard Feynman, da er einmal äußerte, die Ziffern von π auswendig zu lernen bis er sagen könnte:

"nine nine nine nine nine nine and so on",

als wäre π eine rationale Zahl.

5820974944 5923078164
4811174502 8410270193
4564856692 3460348610
7892590360 0113305305
0744623799 6274956735
6094370277 0539217176
1468440901 2249534301
5187072113 4999999837
7101000313 7838752886
1857780532 1712268066

Zahlen in PI

Sucht man nach dem Auftreten der Ziffernfolge der natürlicher Zahlen in der Dezimaldarstellung von π so findet man als letzte einstellige Zahl die 7 ab Position 13. Die letzte auftretende zweistellige Zahl ist die 68 ab Stelle 605, die letzte dreistellige Zahl ist die 483 ab Position 8553; die letzte vierstellige Zahl ab der 99846.Position ist die 6716. Erstaunlich ist, dass man alle vierstelligen Zahlen unter den ersten 100000 Ziffern findet, die Zahl 10000 aber erst an 387791.Stelle auftritt. Von den fünfstelligen Zahlen tritt als Letzte die 22801 ab der 1146939.Dezimalstelle auf. Die erste 1000000 findet man ab Platz 10359803, die erste 10000000 ab 13310436 (Polster, Juni 2006). Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 200 Millionen Ziffern nicht zu finden ist, ist die 10000005. Die Tabelle enthält die wachsenden Zahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	1	4	2	5	4	6	7
7	13	10	49	11	94	12	148
18	424	68	605	100	854	103	3486
154	3644	180	3664	276	3796	304	4460
373	5229	483	8553	1001	15761	1030	20818
1037	24065	1046	25357	1056	25547	1061	43971
1203	60872	3825	61286	4057	65905	6716	99846
10000	387791	10040	637284	11492	784625	14523	1076561
17125	1113327	22801	1146939	100000	2393355	100002	2543077
100020	5225742	100216	6318406	100839	8036701	103250	8094374
106945	10763008	124374	12803162	480296	13594332	569540	14118307
1000003	15753840	1000005	19631531	1000011	34502682	1000049	47708171
1000054	61910790	1000225	66285420	1000876	68566413	1075656	166100501
10000001		169658538					

PI-Pascalprogramm

Durch Hans-Jürgen Caspar wurde 2003 auf Matroid ein einfaches Pascalprogramm zur Berechnung von einigen Tausend Dezimalziffern der Kreiszahl π veröffentlicht.

Grundlage ist die Berechnungsvorschrift

$\pi = 3 + 1\cdot1/(8\cdot1\cdot3)\ (3 + 3\cdot3/(8\cdot2\cdot5)\ (3 + 5\cdot5/(8\cdot3\cdot7) + (3 + \ldots)))$

```
Program pi1k;
uses crt,dos; const n=1000; {Stellenzahl}
Var i,j,k : integer; c,d,q,u,x : word; a : array[1..n+1] of word;
procedure divi(y:word);
begin c:=0; for j:=1 to n+1 do begin x:=a[j]+c;q:=x div y;a[j]:=q; d:=x-y*q;c:=10*d; end; end;
procedure mult(y:word);
begin for j:=1 to n+1 do a[j]:=y*a[j]; for j:=n+1 downto 2 do begin u:=a[j] div 10;a[j-1]:=a[j-1]+u;
a[j]:=a[j] mod 10; end; end;
Begin
  clrscr; write(' ');
  k:=trunc(n*ln(10)/ln(4));
  for i:=k downto 1 do begin
     divi(8);divi(i);mult(2*i-1);divi(2*i+1);
     mult(2*i-1);a[1]:=a[1]+3;
  end;
  for i:=1 to n+1 do begin
     write(a[i]);
     if i=1 then write('.');
     if (i mod 6=0) then write(' ');
     if wherex=80 then write('   ');
  end;
  repeat until keypressed;
End.
```

Ziffern von π^2

π^2 = 9,869604401089358618834490999876151135313699407240790626413349376220044822419205243001773403718552231824025913774023144077772348122030046727610617677985197660990399856206575630571506041232840328780869352769342164939666571519044538735261779413820258260581693412515592048309818873270033076266671104358950871504100325788536595276357752837922683318745086404546354125026973729566958334227858150006365227095472490859756072669264752779005285336452206669808264158968771057327889291746901545510069254432457036449656172537928607606008145972589229232414240044295981361814413706777778194739658303170856632789570753407991714523158926372114463828264432852803792850348095233899503968574609485346009017742932205799 03…

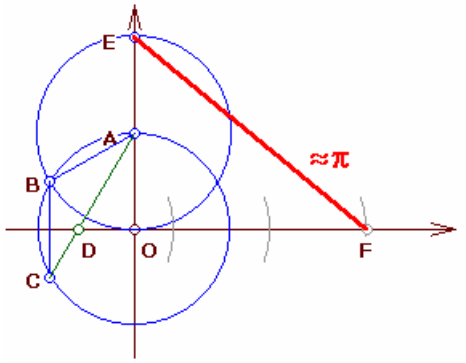
π^3 = 31,006276680299820175476315067101395202225288565885107694144538103806394917465706037566701032602886193030121961572336622375201617652339672733561394154425388254033667727557662639675028532033246863042678698663839618375292562924730094296918620267053985960770069824572953187326935581852186310769334223813656161847300841751718172199304257459366024683696918103146637450336080943110222975685340118290228676472782943776835949262234767424747593811032378117123376614379168440003743443500411717594370468838576063090008953125576685039180072879698043329856903186102586329883188593652390724818865317571721162253423367778852715933185662389473223657972722390743940974337639703891576417905598881602783196211112441654 5…

$1/\pi$ = 0,318309886183790671537767526745028724068919291480912897495334688117793595268453070180227605532506171912145685453515916073785823692229157305755934821463399678458479933874818155146155492793850615377434785792434795323386724780483447258023664760228445399511431880923780173805347912240978821873875688171057446199892868004973446954789192217966461935661498123339729256093988973043757631495731339284820779917482786972199677361983999248857511703423577168622350375343210930950739760194789207295186675361186049889932706106543135510064406495556327943320458934962391963316812120336060719962678239749976655733088705595101400324813551 2…

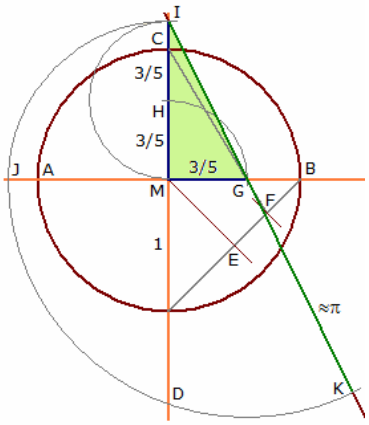
Konstruktion von Kochansky

Durch den polnischen Jesuitenpater Adam Kochansky (1631-1700) wurde 1685 ein Näherungswert für π angegeben.
Ausgangspunkt ist die Gleichung 4.Grades $9x^4 - 240x^2 + 1492 = 0$.
Deren Lösungen sind $1/3\ \sqrt{(120 + 18\sqrt{3})}$, $-1/3\ \sqrt{(120 + 18\sqrt{3})}$, $1/3\ \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$ und $-1/3\ \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$, von denen $1/3\ \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$ die Kreiszahl π sehr gut annähert:

$1/3\ \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})} = 3.14153333870509…$



Die Abweichung von korrekten Wert beträgt nur 0.000059316.
Die Strecke $1/3\ \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$ ist mit folgender Abfolge konstruierbar.
1. Um O wird eine Einheitskreis gezeichnet und um den Schnittpunkt A ein weiterer Einheitskreis. Dieser schneidet die y-Achse in E.
2. Beide Kreise schneiden sich im Punkt B.
3. Ein Einheitskreis um B schneidet den Kreis um O in einem weiteren Punkt C. Dieser ergibt sich auch durch eine Gerade parallel zur y-Achse.
4. Die Strecke CA schneidet die Abszissenachse in D.
5. Von D aus wird dreimal eine Länge = 1 längs der x-Achse angetragen. Der gefundene Punkt sei F.
6. Die Strecke EF hat dann den gesuchten Wert $1/3\ \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$



π-Konstruktion von Vieta, π-Rektifikation

Die Näherung von π durch Vieta

$\pi \sim 1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}14164…$

gestattet eine Näherungskonstruktion für π. Dazu wird genutzt, dass

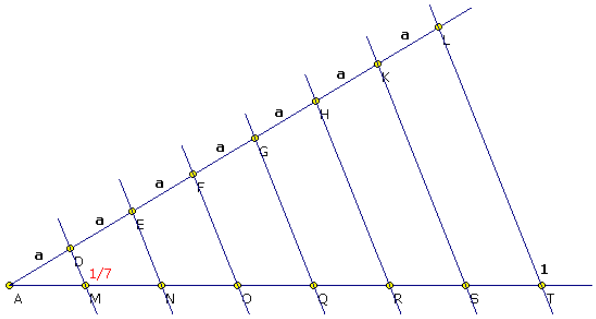
$3/5 + 6/5 = 1{,}8$ und $(3/5)^2 + (6/5)^2 = 1{,}8$

gelten.

Näherungskonstruktion

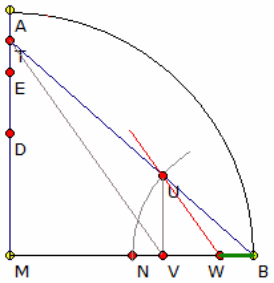
1) uu einem Kreis mit Radius 1 konstruiert man durch den Mittelpunkt M je eine waagrechte Gerade mit den Schnittpunkten A und B und eine dazu senkrechte mit Schnittpunkten C und D
2) zuerst wird die Strecke DB im Punkt E halbiert, danach die neue Strecke EB im Punkt F

3) die Strecke CF schneidet die Strecke MB im Punkt G so, dass die Strecke MG genau 3/5 misst, AC:FB = AG:GB = 4:1
4) die Strecke MG wird nun mit dem Zirkel auf die Senkrechte CM in den Punkt H übertragen und bis zum Punkt I verdoppelt, sodass die Strecke IG nun genau √1,8 misst
5) die Strecke IM wird nun mit dem Zirkel auf die Waagrechte AM in den Punkt J übertragen wonach die Strecke JG mit der Länge 1,8 über das Zentrum G auf die Gerade IG in den Punkt K übertragen wird
6) die Strecke IK stellt nun Vietas π-Rektifikation dar



Einfache Näherungskonstruktion

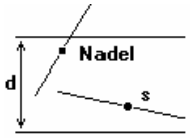
Eine einfache Näherungskonstruktion für π ergibt sich unmittelbar aus dem Strahlensatz.
Trägt man auf einem Strahl sieben Mal eine beliebige Strecke a an und verbindet den letzten Teilpunkt mit einem Punkt T auf einem zweiten Strahl, der gerade vom Scheitel dem Abstand 1 hat, so kann durch Parallelverschiebung eine Strecke der Länge 1/7 konstruiert. Setzt man an diese eine Strecke der Länge 3 an, so erhält man 3 1/7 = 22/7 und damit die bekannte Näherung für π. Diese Näherung ist nur um 0.04 % größer als der korrekte Wert.



Kreiszahl - Näherungskonstruktion (2)

Eine gute Näherung für π ist der Bruch 355/113 = 3,141592920…
Durch H.Pieper wurde 1984 eine Konstruktion dieses Bruches beschrieben und damit eine Näherungskonstruktion für die Kreiszahl.
Es ist 355/113 = 3 + 16/113
Damit genügt es den Bruch 16/113 zu konstruieren.

Konstruktionsbeschreibung:
1) Gegeben sei ein Viertelkreis MBA mit einem Radius von 1. MA und MB sind senkrecht aufeinanderstehende Radien
2) Durch fortgesetztes Halbieren teile man den Radius AM in 8 gleiche Abschnitte und wähle auf AM den Punkt T so, dass TM = 7/8
3) Man verbinde T mit B. Der Punkt N halbiere den Radius MB
4) Zeichnet man um B einen Kreis mit dem Radius BN = 1/2, so erhält man auf TB den Schnittpunkt U
5) Man fälle das Lot von U auf MB und erhalte den Lotfußpunkt V. V und T sind miteinander zu verbinden
6) Die Parallele von TV durch U schneide den Radius MB in W
7) Dann ist WB = 16/113



Buffonsches Nadelexperiment

1777 beschrieb Graf George de Buffon erstmals ein Zufallsexperiment, mit welchem die **Kreiszahl π** experimentell bestimmt werden kann.
Dazu sind auf einer Ebene parallele Geraden im Abstand d gegeben. Auf diese Ebene lässt man zufällig Nadeln mit einer Länge s < d fallen. Die Anzahl der Schnitte der Nadeln mit irgendeiner der Geraden wird gezählt.

Wahrscheinlichkeit des Schnittes
für $s \le d$ $p = 2s/(d\,\pi)$
für $s \ge d$ $p = 1/(\pi d) * [d\,(\pi - 2\arcsin(d/s)) + 2s\,(1 - \sqrt{(1 - d^2/s^2)})\,]$
für 2s = d und k Treffern bei n Würfen wird … $\pi = n / k$

Wurfzahl	Näherung	%-Abweichung	Wurfzahl	Näherung	prozentuale Abweichung
1000000	3.137664000000	-0.125053 %	2000000	3.138536000000	-0.097296 %
3000000	3.139685333333	-0.060712 %	4000000	3.140991000000	-0.019151 %
5000000	3.141120000000	-0.015045 %	6000000	3.141237333333	-0.01131 %
7000000	3.141510857143	-0.002604 %	8000000	3.141760500000	0.005343 %
9000000	3.141561777778	-0.000983 %	10000000	3.141680000000	0.00278 %

Hinweis: Bei einer Umsetzung des Verfahrens auf einem herkömmlichen Computer lässt sich erkennen, dass sich das errechnete π ab einer gewissen Anzahl von Zufallspunkten nicht mehr eindeutig an π annähern lässt. Die Ursache liegt darin, dass PCs keine echten Zufallszahlen generieren können.
Um echte Zufallszahlen zu generieren, braucht man hardwarebasierende Zusatzmodule (wie z.B. durch Messung von Spannungsschwankungen an einem Präzisionswiderstand, des Johnson-Rauschens oder

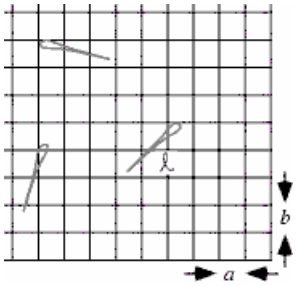
einer Zener-Diode). Ein Computer ist eine deterministische Maschine und dazu geschaffen, auf eine konkrete Eingabe hin eine genau definierte Ausgabe zu liefern.

Beweis zum Buffonschen Nadelexperiment

Kreiszahl π

1777 beschrieb Graf George de Buffon erstmals ein Zufallsexperiment, mit welchem die experimentell bestimmt werden kann.
Dazu sind auf einer Ebene parallele Geraden im Abstand d gegeben. Auf diese Ebene lässt man zufällig Nadeln mit einer Länge s < d fallen. Die Anzahl der Schnitte der Nadeln mit irgendeiner der Geraden wird gezählt.
Für die Wahrscheinlichkeit eines Schnittpunktes für Nadeln mit s < d ergibt sich:
Es sei α, mit $\alpha \in [0 ; \pi/2]$, der Winkel der Nadel zur Horizontalen. Die Einschränkung des Winkels ergibt sich aus der Symmetrie. Für die Höhe der Nadel wird damit s sin α.
Als Wahrscheinlichkeit für einen Kreuzungspunkt in Abhängigkeit von α erhält man somit s sin α / d.
Die Wahrscheinlichkeit eines Kreuzungspunktes erhält man durch Bildung des Mittelwertes:

$$P = 2/\pi \int_0^{\pi/2} s/d \sin \alpha \, d\alpha = 2/\pi \, s/d \, [- \cos \alpha]_0^{\pi/2} =$$
$$P = 2/\pi \, s/d$$



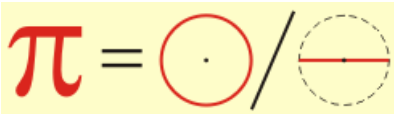
Laplace-Nadelexperiment

... in Analogie zum Buffonschen Nadelexperiment, ist die Wahrscheinlichkeit p zu bestimmen, mit welcher eine Nadel der Länge s eine Linie eines rechteckigen Gitters trifft. Dabei haben die Gitterlinien vertikal den Abstand a und horizontal b. Ist die Nadellänge s sowohl größer als a als auch b, so gilt: $p = [2s (a+b) - s^2] / (\pi ab)$

Merkregeln für π

Wortlängen geben Dezimalziffern von π an:
" Wie, o dies π macht ernstlich so vielen viele Müh' ! "
B: 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3
"Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie! Wie viele Tausende bewundern Geister Himmlisch wie du und göttlich!
Noch reiner in Aeonen Wird das uns strahlen Wie im lichten Morgenrot!"
„Nie, o Gott, o guter, verliehst Du meinem Hirne die Kraft, mächtige Zahlreih'n dauernd verkettet bis in die späteste Zeit getreu zu merken; drum hab' ich Ludolfen mir zu Lettern umgeprägt." (Franz Brentano)

" How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics ! All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard... "
" Now I, even I, would celebrate In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore, Who in his wondrous lore,
Passed on before Left men his guidance How to circles mensurate. "
Beutel 1913: „Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime (artiste) ingénieur Qui de ton jugement peut sonder (priser) la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.„
Spanisch: Con 1 palo y 5 ladrillos se pueden hacer mil cosas
Portugiesisch: Nós e todo o mundo guardamos pi usando letra por número
Griechisch: Αει ο θεος ο Μεγας γεωμετρει, το κυκλου μηκος ινα οριση διαμετρω, παρηγαγεν αριθμον απεραντος, και ον, φευ, ουδεποτε ολον θνητοι θα ευρωσι
Esperanto: Kun π, c^iam l'afero konverg^as, al nombro utila kaj magia. Infinite decimaloj anseras, g^iseterne tra la pag^' fantazia. Kiel nebulo el tabulo mara, Tra nia universo kaj c^e lekcioj, Cifervica poemo
Slowenisch: Kdo o tebi z glavo razmišlja da spomni števk teh?



Merkwürdiges für π

Hans-Henrik Stolum, Geologe an der Universität von Cambridge, ermittelte das Verhältnis zwischen der Gesamtlänge von Flüssen und der direkten Entfernung von Quelle und Mündung. Im Durchschnitt ergab sich rund 3,14, d.h. π ?!

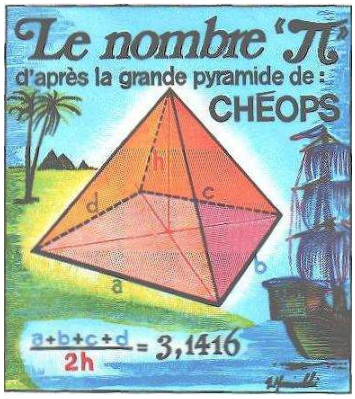
Geht man von einem magischen Quadrat Q_5 von fünf Reihen aus und ersetzt jede darin befindliche k durch jede Zahl, die in der Dezimadarstellung von auftritt, so ergibt sich eine merkwürdige Symmetrie. Warum dies so ist, ob Zufall oder Gesetzmäßigkeit, ist nicht bekannt.

Q5					Q'5					Summe
17	24	1	8	15	2	4	3	6	9	24
23	5	7	14	16	6	5	2	7	3	23
4	6	13	20	22	1	9	9	4	2	25
10	12	19	21	3	3	8	8	6	4	29
11	18	25	2	9	5	3	3	1	5	17
					Summe 17	9	25	24	23	

C-Programm

Das nachfolgende, mehr als kryptische C-Programm von Dik Winter und Achim Flammenkamp berechnet 52514 Dezimalstellen von π.

```
a[52514],b,c=52514,d,e,f=1e4,g,h;
main(){for(;b=c-=14;h=printf("%04d", e+d/f))
  for(e=d%=f;g=--b*2;d/=g)d=d*b+f*(h?a[b]:f/5),a[b]=d%--g;}
```



π-Gedicht

M.Keith schrieb in Anregung von Edgar Allen Poe's "The Raven" ein Gedicht, das in seiner Originalfassung die ersten 740 Ziffern von π beschreibt. Dabei gilt, dass jede Länge eines Wortes eine Ziffer beschreibt. Hat das Wort die Länge 10, so ist die Ziffer 0 gemeint. Ist das Wort 11 oder mehr Buchstaben lang, so sind jeweils 2 Ziffern beschrieben.
In der Kurzfassung werden die ersten 50 Ziffern angegeben; in der Liste das vollständige Gedicht.

Poe, E. "Near a Raven"
Midnights so dreary, tired and weary. Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap! An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".
Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.
Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance - Lenore - Is delighting, exciting...nevermore.
Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted), And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided, As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
A man is visiting, of age threescore."
Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly) "Tell what source originates clamorous noise afore?
Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly? Why, devil incarnate!--" Here completely unveiled I my antedoor--
Just darkness, I ascertained - nothing more.
While surrounded by darkness then, I persevered to clearly comprehend.
I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my intellect said,
(Desiring, imagining still) that perchance the apparition was uttering a whispered "Lenore". This only, as evermore.
Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,
While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.
"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice." Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
Perceiving: a "nevermore".
Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead. Repose, relief, cessation, or but more dreary 'nevermores'?"
The bird intruded thence - O, irritation ever since! - Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat not, therefore),
And stated "nevermores".
Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed, "I seek intelligence;
Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores'!"
"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a raven named? Actually maintain a surname, upon Pluvious seashore?
I heard an oppressive "nevermore".
My sentiments extremely pained, to perceive an utterance so plain, Most interested, mystified, a meaning I hoped for.
"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser. Therefore, liberation I'll obtain, retreating heretofore -
Eliminating all the 'nevermores' ".
Still, the detestable raven just remained, unmoving, on sculptured bust. Always saying "never" (by a red chamber's door).
A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!
O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore. Still sitting, he recited "nevermores".
The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome. I meditated: "Might its utterances summarize of a calamity before?"

O, a sadness was manifest - a sorrowful cry of unrest; "O," I thought sincerely, "it's a melancholy great - furthermore,
Removing doubt, this explains 'nevermores' ".
Seizing just that moment to sit - closely, carefully, advancing beside it, Sinking down, intrigued, where velvet cushion lay afore.
A creature, midnight-black, watched there - it studied my soul, unawares. Wherefore, explanations my insight entreated for.
Silently, I pondered the "nevermores".
"Disentangle, nefarious bird! Disengage - I am disturbed!" Intently its eye burned, raising the cry within my core.
"That delectable Lenore - whose velvet pillow this was, heretofore, Departed thence, unsettling my consciousness therefore.
She's returning - that maiden - aye, nevermore."

Since, to me, that thought was madness, I renounced continuing sadness. Continuing on, I soundly, adamantly forswore:
"Wretch," (addressing blackbird only) "fly swiftly - emancipate me!" "Respite, respite, detestable raven - and discharge me, I implore!" A ghostly answer of: "nevermore".
" 'Tis a prophet? Wraith? Strange devil? Or the ultimate evil?" "Answer, tempter-sent creature!", I inquired, like before.
"Forlorn, though firmly undaunted, with 'nevermores' quite indoctrinated, Is everything depressing, generating great sorrow evermore? I am subdued!", I then swore.
In answer, the raven turned - relentless distress it spurned. "Comfort, surcease, quiet, silence!" - pleaded I for.
"Will my (abusive raven!) sorrows persist unabated? Nevermore Lenore respondeth?", adamantly I encored.
The appeal was ignored.
"O, satanic inferno's denizen -- go!", I said boldly, standing then. "Take henceforth loathsome "nevermores" - O, to an ugly Plutonian shore!
Let nary one expression, O bird, remain still here, replacing mirth. Promptly leave and retreat!", I resolutely swore.
Blackbird's riposte: "nevermore".
So he sitteth, observing always, perching ominously on these doorways. Squatting on the stony bust so untroubled, O therefore.
Suffering stark raven's conversings, so I am condemned, subserving, To a nightmare cursed, containing miseries galore.
Thus henceforth, I'll rise (from a darkness, a grave) -- nevermore!
-- Original: E. Poe -- Redone by measuring circles.

PI-Gedichte

Der Türöffner

3.14 Pi öffnet Dir die Tür. 15926
Den Kreis betritt die Hex'. 5 und 3 Zehn Ziffern sind dabei.

Maß der Ewigkeit

Was wir gestern froh gesungen, Ist doch heute schon verklungen.
Und beim letzten Klange schreit Alle Welt nach Neuigkeit.
Wie im Turm der Uhr Gewichte Ziehet fort die Weltgeschichte, Und der Zeiger schweigend kreist;
Keiner rät, wohin er weist.
Doch die ZAHL hat nichts vergessen, Was geschehen, wird sie messen
Nach dem Maß der Ewigkeit - Seht, wie klein ist doch die Zeit! [nach J. v. Eichendorff]

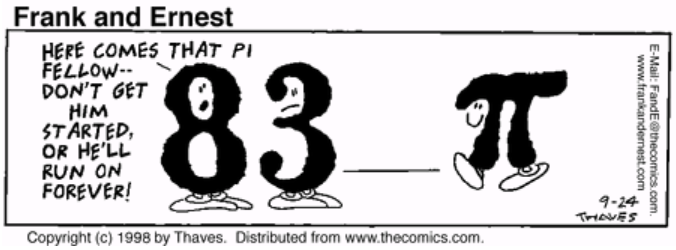
Copyright (c) 1993 by Thaves. Distributed from www.thecomics.com.

Trost

O Trost der Welt, Du stille Nacht!
Das Pi hat mich so müd' gemacht,
das weite Meer schon dunkelt.
Laß ausruhn mich von Müh und Not,
bis daß das goldene Morgenrot den stillen Kreis durchfunkelt.
[nach J. v. Eichendorff]

Kate Bush: Pi

Sweet and gentle sensitive man / With an obsessive nature and deep fascination
For numbers / And a complete infatuation with the calculation Of PI
Oh he love, he love, he love / He does love his numbers
And they run, they run, they run him / In a great big circle
In a circle of infinity 3.1415926535 897932 3846 264 338 3279
Oh he love, he love, he love / He does love his numbers
And they run, they run, they run him / In a great big circle
In a circle of infinity / But he must, he must, he must



Put a number to it 50288419 716939937510 582319749 44 59230781 6406286208 821 4808651 32
Oh he love, he love, he love / He does love his numbers
And they run, they run, they run him / In a great big circle
In a circle of infinity
82306647 0938446095 505 8223…

Näherungsformeln für π, Machin-Formeln

Ausgehend von der Tatsache, dass arctan(1)=π/4
ist und mit Hilfe von Additionstheoremen für die schrittweise Berechnung des Arkustangens können Näherungsformeln der Form
π/4 = A·arctan(1/B) + C·arctan(1/D) + E·arctan(1/F)
zur Berechnung von π bestimmt werden. Formeln dieser Art werden nach John Machin (1680-1751) benannt, da er 1706 eine der ersten dieser Näherungsformeln angab.
Die Liste enthält die Parameter A, B, ... F der jeweiligen Näherungsformel und ihren Entdecker.

Parameter der Näherungsformeln für π

A	B	C	D	E	F	Entdecker
1	2	1	3			Euler, Hutton 1776
2	3	1	7			Hutton 1776
4	5	1	-239			Machin 1706
1	2	1	4	1	13	
1	2	1	5	1	8	Dase
1	2	2	6	1	-117	
3	4	1	20	1	1985	Loney 1893
4	5	1	-70	1	99	Euler 1764
6	8	2	57	1	239	Störmer
12	18	8	57	5	-239	Gauß

Näherungsformeln für π

Die Liste enthält weitere Näherungsformeln zur Berechnung von π mittels Summenbildung von Arctan-Werten. Jede angegebene Summe entspricht genau π/4. Durch iteratives Berechnen der Arkustangens-Werte kann so π immer besser angenähert werden.

π/4 = ...

2·arctan 1/3 + arctan 1/7
arctan 1/2 + arctan 1/5 + arctan 1/8
2·arctan 1/3 + arctan 1/5 - arctan 1/18
2·arctan 1/3 + arctan 1/9 + arctan 1/32
2·arctan 1/3 + 2·arctan 1/17 + arctan 1/41
3·arctan 1/4 + arctan 1/13 - arctan 1/38
2·arctan 1/5 + 3·arctan 1/8 + arctan 1/57
2·arctan 1/6 + 3·arctan 1/7 + 2·arctan 1/68
arctan 1/2 + arctan 1/4 + arctan 1/13
arctan 1/3 + 2·arctan 1/4 - arctan 1/38
2·arctan 1/3 + arctan 1/8 + arctan 1/57
2·arctan 1/3 + arctan 1/12 + arctan 1/17
2·arctan 1/4 + arctan 1/7 + 2·arctan 1/13
2·arctan 1/5 + arctan 1/7 + 2·arctan 1/8
3·arctan 1/5 + 2·arctan 1/8 - arctan 1/18
5·arctan 1/8 + 2·arctan 1/18 + 3·arctan 1/57
arctan 1/2 + arctan 1/4 + arctan 1/11 - arctan 1/72
arctan 1/2 + arctan 1/4 + arctan 1/15 + arctan 1/98
arctan 1/2 + arctan 1/4 + arctan 1/18 + arctan 1/47
arctan 1/2 + arctan 1/4 + arctan 1/23 + arctan 1/30
arctan 1/3 + arctan 1/4 + arctan 1/5 + arctan 1/47
arctan 1/3 + arctan 1/4 + arctan 1/7 + arctan 1/13
arctan 1/3 + arctan 1/4 + 2·arctan 1/9 - arctan 1/378
arctan 1/3 + arctan 1/5 + arctan 1/7 + arctan 1/8
arctan 1/4 + 2·arctan 1/5 + arctan 1/7 + arctan 1/268
arctan 1/4 + 2·arctan 1/5 + arctan 1/8 + arctan 1/47

Näherungsformeln

Wetherfield-Notation, Schreibweise: {t} = arctan(1/t)
nach Michael Wetherfield "Mathematical Gazette, Volume 80, No 488 of July 1996, pages 333-344"

Hutton-Formel $\pi/4 = \{2\} + \{3\}$
$\pi/4 = 2\{3\} + \{7\}$
Machin-Formel $\pi/4 = 4\{5\} - \{239\}$
Euler-Formel $\pi/4 = 5\{5\} + 2\arctan(3/79)$
Störmer-Formel $\pi/4 = 11\{57\} + 7\{239\} - 12\{682\} + 24\{12943\}$
Sebah-Formel $\pi/4 = 8\{21\} + 3\{239\} + 4\arctan(3/1024)$
$\pi/4 = 5\arctan(29/278) + 28\arctan(3/79)$
Lyster-Formel $\pi/4 = 22\{28\} +$
$+ \arctan(1744507482180328366854565127 / 986463957342100622761531902412 39)$

Schnell konvergente Reihen mit 4 Summanden

$\pi/4 = 6\cdot \text{atn } 1/9 + 3\cdot \text{atn } 1/32 + 2\cdot \text{atn } 1/73 + \text{atn } 1/2943$
$\pi/4 = 4\cdot \text{atn } 1/12 + 4\cdot \text{atn } 1/17 + 4\cdot \text{atn } 1/18 + \text{atn } 1/239$
$\pi/4 = 6\cdot \text{atn } 1/13 + 6\cdot \text{atn } 1/21 + 2\cdot \text{atn } 1/57 + \text{atn } 1/239$
$\pi/4 = 8\cdot \text{atn } 1/13 + 4\cdot \text{atn } 1/38 + 4\cdot \text{atn } 1/57 - \text{atn } 1/239$
$\pi/4 = \text{atn } 1/46 + 4\cdot\text{atn } 1/76 + 2\cdot\text{atn } 1/379 + \text{atn } 1/623477877$

A.Sharp (1653-1742)
$\pi/2 = \sqrt{3} \cdot [1 - 1/(3\cdot 3) + 1/(5\cdot 3^2) - 1/(7\cdot 3^3) +- \ldots (-1)^n/(3^n\cdot(2n+1)) \ldots]$
F.Vieta (1582 in Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII)
$2 / \pi = \sqrt{(2)}/2 \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})}/2 \cdot \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}/2 \cdot \ldots$
J.Wallis (1655 in Arithmetica infinitorum; π wird als Produkt rationaler(!) Zahlen dargestellt)
$\pi / 2 = 4/(1\cdot 3) \cdot 16/(3\cdot 5) \cdot 36/(5\cdot 7) \cdot 64/(7\cdot 9) \ldots$
J.Gregory (1638-1675) und I.Newton
$\pi / 6 = 1/\sqrt{3}\ (1 - 1/(3\cdot 3) + 1/(5\cdot 3\cdot 3) - 1/(7\cdot 3\cdot 3\cdot 3) + \ldots$
Leonhard Euler
$\pi = 3\sqrt{3}/1 - 3\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}/4 - 3\sqrt{3}/5 + 3\sqrt{3}/7 - 3\sqrt{3}/8 +- \ldots$
$\pi^2/9 = 1 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + \ldots$ (Nenner: Quadrate aller nicht durch 3 teilbaren ungeraden Zahlen)

Machin-Formel

Die Machin-Formel zur näherungsweisen Berechnung von π erweist sich im Vergleich zur Leibniz-Formel als relativ schnell konvergent: $\pi/4 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$
Machin selbst berechnete damit 100 Dezimalstellen. Mit einer 15stelligen Arithmetik ergibt sich:

arctan(1/5)

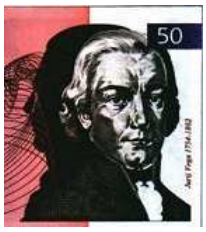
1/5 = 0,200000000000000
1/375 = -0,002666666666666
1/15625 = 0,000064000000000
1/546875 = -0,000001828571428
1/17578125 = 0,000000056888889
1/537109375 = -0,000000001861818
1/15869140625 = 0,000000000063015
1/457763671875 = -0,000000000002184
1/12969970703125 = 0,000000000000077
1/362396240234375 = -0,000000000000002
Summe arctan(1/5) = 0,1973955598498807

arctan(1/239)

1/239 = 0,004184100418410
1/40955757 = -0,000000024416591
1/3899056325995 = 0,000000000000256

arctan(1/239) = 0,004184076002074

Mit der Machinschen Formel wird dann
$\pi/4 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$
$\pi = 16 \cdot 0{,}1973955598498807 - 4 \cdot 0{,}004184076002074 = 3{,}1415926535897922$



Vega-Reihen

Durch den slowenischen Mathematiker Jurij Vega (1754-1802, Abbildung) wurden eine Vielzahl von Reihen zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl π angegeben:

entwickelt aus arc 45° = arctan 1/7 + 2 arctan 1/3:
$\pi = 8\ (26 / (3\cdot 3^3) + 58 / (5\cdot 7\cdot 3^7) + 90 / (9\cdot 11\cdot 3^{11}) + 122 / (13\cdot 15\cdot 3^{15}) + 154 / (17\cdot 19\cdot 3^{19}) + \ldots + 73 / (3\cdot 7^3) + 169 / (5\cdot 7\cdot 7^7) + 265 / (9\cdot 11\cdot 7^{11}) + 361 / (13\cdot 15\cdot 7^{15}) + 457 / (17\cdot 19\cdot 3^{19}) + \ldots)$
$\pi = 4\ (2\ (1/3 - 1/(3\cdot 3^3) + 1/(5\cdot 3^5) - 1/(7\cdot 3^7) + 1/(9\cdot 3^9) - \ldots) + 1/7 - 1/(3\cdot 7^3) + 1/(5\cdot 7^5) - 1/(7\cdot 7^7) + 1/(9\cdot 7^9) - \ldots)$
entwickelt aus arc 45° = 5 arctan 1/7 + 2 arctan 3/79:
$\pi = 4\ (5\ (1/7 - 1/(3\cdot 7^3) + 1/(5\cdot 7^5) - 1/(7\cdot 7^7) + 1/(11\cdot 7^{11}) + \ldots) + 2\ (3/79 - 3^3/(3\cdot 79^3) + 3^5/(5\cdot 79^5) - 3^7/(7\cdot 79^7) - 3^9/(9\cdot 79^9) - \ldots))$

weitere Reihen:

$\pi = 12\,(1/(1\cdot 4) - 1/(3\cdot 4^3) + 1/(5\cdot 4^5) - 1/(7\cdot 4^7) \ldots) + 4\,(5/(1\cdot 99) - 5^3/(3\cdot 99^3) + 5^5/(5\cdot 99^5) - 5^7/(7\cdot 99^7) + \ldots)$

$\pi = 8\,(4/(1\cdot 10) - 4^3/(3\cdot 10^3) + 4^5/(5\cdot 10^5) - 4^7/(7\cdot 10^7) + \ldots) + 4\,(1/(1\cdot 41) - 1/(3\cdot 41^3) + 1/(5\cdot 41^5) - 1/(7\cdot 41^7) + \ldots)$

$\pi = 2\,(1 + 1\cdot 1/(2\cdot 3) + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3/(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5/(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7) + \ldots)$

$\pi = \sqrt{2}\,(1 + 1\cdot 1/(2\cdot 3)\ 1/2 + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3/(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)\ 1/2^2 + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5/(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7)\ 1/2^3 + \ldots)$

$\pi = 3\sqrt{3}\,(1 - 1/3 \cdot 3 + 1/5 \cdot 3^2 - 1/7 \cdot 3^3 + \ldots)$

$\pi = 4 \cdot 8/9 \cdot 24/25 \cdot 48/49 \cdot 80/81 \cdot 120/121 \cdot \ldots$

$\pi = 2 \cdot 4/3 \cdot 16/15 \cdot 36/35 \cdot 64/63 \cdot 100/99 \cdot \ldots$

Archimedischer Algorithmus

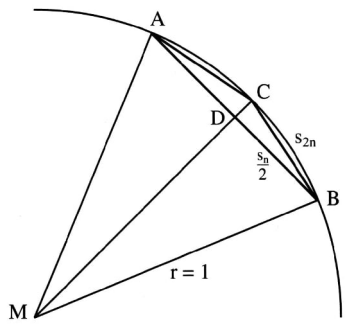
... Näherungsformel zur Berechnung von π

geg.: in Einheitskreis ein- und umbeschriebene regelmäßige N-Ecke mit $n = 6 * 2^k$

Seitenlänge des umschriebenen N-Ecks $a(n) = 2\,n\,\tan(\pi/n)$

Seitenlänge des eingeschriebenen N-Ecks $b(n) = 2\,n\,\sin(\pi/n)$

Dann gilt $b(n) < 2\,\pi < a(n)$



k	n	a_k	b_k	Abschätzung für π
0	6	$4\sqrt{3}$	6	$3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3.46410$
1	12	$24(2-\sqrt{3})$	$6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$3.10583 < \pi < 3.21539$
2	24	$48(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)$		$3.13263 < \pi < 3.15966$
3	48			$3.13935 < \pi < 3.14609$
4	96			$3.14103 < \pi < 3.14271$
Näherung für 96-Eck				$223/71 = 3.14084\ldots < \pi < 22/7 = 3.14285\ldots$

Um eine Näherung für π zu bestimmen, betrachtete Archimedes einen Einheitskreis, also einen Kreis mit r = 1, und darin eine Folge einbeschriebener regelmäßiger n-Ecke. Er begann mit einem Sechseck. Aus diesem Sechseck wird dann ein 12-Eck, ein 24-Eck, ein 48-Eck usw. konstruiert. Mit größer werdender Eckenzahl n erhält er aus den Umfängen dieser n-Ecke immer bessere Näherungen für den Kreisumfang.

Näherung nach Archimedes ; Archimedische Formel

Annäherung eines Kreises (r=1/2) durch regelmäßige N-Ecke

Seitenlänge s_{2n} des 2N-Ecks aus s_n

$$s_{2n} = \sqrt{[\ 1/2 - 1/2 * \sqrt{((1 - (s_n)^2\ )}\ ] = s_n / \sqrt{[\ 2 + 2 * \sqrt{((1 - (s_n)^2\ )}\ ]}$$

Vielecke	Näherungswert	%-Fehler
4	1.834271240336	-41.61333303 %
8	2.597757685219	-17.31080469 %
16	2.911256719659	-7.33182049 %
32	3.041597524701	-3.18294381 %
64	3.097041612321	-1.41810369 %
128	3.121257179256	-0.64729825 %
256	3.132113364384	-0.30173515 %
512	3.137096859946	-0.14310556 %
1024	3.139431050200	-0.06880597 %
2048	3.140542375206	-0.0334314 %
4096	3.141078308488	-0.01637211 %
8192	3.141339297763	-0.00806457 %
16384	3.141467325169	-0.00398933 %
32768	3.141530466511	-0.00197948 %
65536	3.141561728744	-0.00098437 %
131072	3.141577250810	-0.00049029 %
262144	3.141584973287	-0.00024447 %
524288	3.141588820894	-0.000122 %
1048576	3.141590739878	-0.00006092 %
2097152	3.141591697666	-0.00003043 %
4194304	3.141592175957	-0.0000152 %
8388608	3.141592414890	-0.0000076 %

"Kreismessung" von Archimedes

Das im Original verlorengegangene Werk "Kreismessung" von Archimedes enthält die ersten mathematischen Sätze und Näherungen zu Kreisfläche und -umfang.

Satz 1

Die Oberfläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Rechtecks mit Katheten gleich dem Kreisradius bzw. dem Kreisumfang.

In Formeln: $A = ½ \cdot R \cdot 2\pi R = \pi R^2$

Satz 2

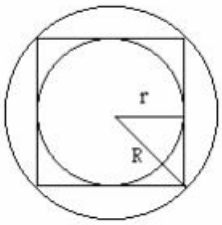
Die Oberfläche eines Kreises verhält sich zum Quadrat des Durchmessers wie 11 zu 14. Für R = 1 wird: $3\,{}^1/_7 : 4 = 22 : 28 = 11 : 14$

Satz 3

Das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises in kleiner als $3\,{}^1/_7$ und größer als $3\,{}^{10}/_{71}$.

Cusanus-Algorithmus zur Berechnung der Zahl π

Nicolaus Cusanus (franz. Nicolas de Cues, eigentlich Nikolaus Krebs), um 1450:



Während Archimedes einem fest vorgegebenem Kreis zwei Polygone näherte, versuchte Cusanus einem Polygon zwei Kreise zu nähern. Damit verwendete er eine Reihe von regelmäßigen Polygonen mit festem Umfang. Diesen schrieb er dann einen Kreis ein und um.

Den Umfang des Polygons mit 2^n (n=2,3,4,5...) Seiten setzte er mit 2 fest. Da er dadurch den Umfang des Vielecks kannte, konnte er durch Erhöhung der Seitenanzahl die beiden Kreise an das Polygon annähern, und sich so dem Grenzwert π nähern.

Cusanus berechnete dann einfach den Umfang der ein- und umbeschriebenen Kreise (r = Radius eingeschrieben , R = Radius umschrieben , n = Iterationsschritt):

$2 \cdot \pi \cdot r_n < 2 < 2 \cdot \pi \cdot R_n$ und somit $1/r_n > \pi > 1/R_n$

Für n=2 wird $R_2 = 1/4\,\sqrt{2}$ und $r_2 = 1/4$. Cusanus fand die Iteration:

$r_{n+1} = (R_n + r_n) / 2$ $\quad R_{n+1} = \sqrt{(R_n * r_n)}$

Damit ist das Cusanus-Verfahren dem archimedischen rechentechnisch überlegen.

Cusanus-Algorithmus, Tabelle

... Seitenzahl des Polygons = 2^n, Interationsschritt = n, Intervallschachtelung und Abweichung

n	Intervall		π	
2	2.82842712474619009760	...	4.00000000000000000000	3.31370849898476039041
4	3.12144515225805228557	...	3.18259787807452811059	3.15172490742925609847
6	3.14033115695475291232	...	3.14411838524590426274	3.14222362994245684539
8	3.14151380114430107633	...	3.14175036916896645911	3.14163208070318180572
10	3.14158772527715970063	...	3.14160251025680894676	3.14159511774958905035
12	3.14159234557011774234	...	3.14159326962930731079	3.14159280759964457653
14	3.14159263433856298910	...	3.14159269209225437423	3.14159266321540841623
16	3.14159265238659134580	...	3.14159265599619702627	3.14159265419139418500
18	3.14159265351459312016	...	3.14159265374019347507	3.14159265362739329761
20	3.14159265358509323107	...	3.14159265359919325325	3.14159265359214324216
22	3.14159265358949948800	...	3.14159265359038073939	3.14159265358994011369
24	3.14159265358977487906	...	3.14159265358982995727	3.14159265358980241816
26	3.14159265358979209100	...	3.14159265358979553339	3.14159265358979381219
28	3.14159265358979316675	...	3.14159265358979338190	3.14159265358979327432
30	3.14159265358979323398	...	3.14159265358979324743	3.14159265358979324070
32	3.14159265358979323818	...	3.14159265358979323902	3.14159265358979323860
34	3.14159265358979323845	...	3.14159265358979323850	3.14159265358979323847
36	3.14159265358979323846	...	3.14159265358979323846	3.14159265358979323846
38	3.14159265358979323846	...	3.14159265358979323846	3.14159265358979323846

Nach 50 Iterationsschritten erreicht man eine Genauigkeit von 28 Dezimalstellen. Von Aitken wurde das Verfahren durch Einführung eines $(\Delta^2)^2$-Schrittes optimiert. Dann erhält man nach 50 Iterationen schon 87 exakte Nachkommastellen von π.

Al-Kashi-Verfahren

Durch den arabischen Mathematiker Al-Kashi (gest.1429) wurde 1424 in seiem Werk *„Risala a-muhitiyya"* (Lehre vom Kreis) der bis dahin beste Näherungswert für die Kreiszahl ermittelt.

Ausgehend von einem Sechseck und der ihm schon bekannten Beziehung $(2 \sin(x/2))^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4 \sin^2 x)}$ gelangte er zu folgendem Näherungsverfahren:

$C_0 = 1$ $\quad C_{n+1} = \sqrt{(2 - \sqrt{4 - C_n^2})}$ $\quad 3*2^n*C_n \rightarrow \pi$ für wachsende n

Es gelang ihm einen auf 16 Dezimalen genauen Wert zu berechnen. Da er im Sechzigersystem rechnete, gab er in diesem System 10 Dezimale an: $6^{0}16^{I}59^{II}28^{III}1^{IV}34^{V}51^{VI}46^{VII}14^{VIII}50^{IX}$. Der für diese Genauigkeit zugrundeliegende Kreis wäre 600000 mal größer als der Erdäquator! Die Tabelle enthält einige der durch dieses Verfahren erzeugten Näherungswerte. Die gültigen Ziffern sind durch ein Leerzeichen von den ungültigen getrennt. Eine höhere Genauigkeit war bei dieser Berechnung mit der 192Bit-Arithmetik nicht zu erzielen:

n	C_n
1	3.1 058285412302491481867860514885799 40
2	3.1 326286132812381971617494694917362 44
3	3.1 393502030468672071351468212084211 89
4	3.141 031950890509638111352926459660107
5	3.141 452472285462075450609308961225645
10	3.141592 516692157447592874084768831905
20	3.141592653589 662682701706171090774719
25	3.141592653589793 110966783093031636870
30	3.141592653589793238 338135707214807701
35	3.14159265358979323846 2 521793752095955
40	3.1415926535897932384626 43 264539730518
45	3.141592653589793238462643383 163801597
47	3.14159265358979323846264338327 3407718

Madhava-Reihe, Leibniz-Reihe für die Berechnung von π

Gottfried W.Leibnitz, 1682:

$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + - \ldots + - 1/(2n-1) - + f(2n)$

Fehlerabschätzungen (Madhava um 1400, Indien)

$f_1(n) = 0{,}5 / n$

$f_2(n) = 0{,}5n / (n^2+1)$

$f_3(n) = (0{,}5n^2+2) / (n^3+5n)$

Hinweis: Die Reihe wurde 1671 schon von J.Gregory (1638-1675) gefunden; deshalb auch Gregory-Reihe genannt. Darüber hinaus existieren Aufzeichnungen des indischen Mathematikers Madhava, der schon Jahrhunderte vor Gregory und Leibniz diese unendliche Reihe kannte.
Sie eignet sich nicht für die praktische Berechnung von einer großen Zahl von Dezimalstellen, da sie sehr langsam konvergiert. Über 500 Millionen Summanden müssen betrachtet werden, um wenigstens 6 Dezimalziffern von π exakt zu erhalten.
Herleitung: Polynomdivision liefert die geometrische Reihe für f'(x):

$f'(x) = 1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots$

Die zugehörige Stammfunktion ist unter Berücksichtigung von arctan 0 = 0

$f(x) = \arctan x = x - 1/3\, x^3 + 1/5\, x^5 - 1/7\, x^7 + 1/9\, x^9 - \ldots$ Satz von Gregory

Da tan 45° = tan $\pi/4$ = 1, ist arctan 1 = $\pi/4$ und somit

$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + - \ldots + - 1/(2n-1) - + \ldots$

Als Leibniz diese Formel entdeckte, schwärmte er "numero deus impari gaudet" ("Gott freut sich der ungeraden Zahlen").

Kettenbruch nach Euler (1739)

$\pi/2 = 1 + 1/ (1 + 1\cdot 2/ (1 + 2\cdot 3/ (1 + 3\cdot 4/ (\ldots))))$

$\pi = 2 + 2\cdot 1/3 + 2\cdot(1\cdot 2)/(3\cdot 5) + 2\cdot(1\cdot 2\cdot 3)/(3\cdot 5\cdot 7) + \ldots$

Gauß-Legendre-Verfahren

Iteratives Verfahren zur Bestimmung von π

Ansatz: $a = x = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$, $c = 1/4$

Wiederhole

$y = a$; $a=(a+b)/2$; $b=\sqrt{(b\cdot y)}$; $c=c-x\cdot(a-y)^2$

$x = 2\cdot x$

bis gewünschte Genauigkeit erreicht

Ergebnis $\pi = (a+b)^2/(4c)$

Das Verfahren konvergiert sehr schnell gegen π. Mit einer 192bit-Genauigkeit wurden folgende Näherungswerte berechnet:

1	3,140579250522168248311331268975823311773440237512948 34
2	3,141592646213542282149344431982695774314437223345602 79
3	3,141592653589793238279512774801863974381225504835446 94
4	3,141592653589793238462643383279502884197114678283648 92
5	3,141592653589793238462643383279502884197169399375105 82

Der 6.Wert unterscheidet sich vom fünften nicht mehr.

Vieta-Verfahren

Das von Vieta entwickelte unendliche Produkt $2 / \pi = \sqrt{(2)}/2 * \sqrt{(2+\sqrt{2})}/2 * \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}/2 * \ldots$ kann in einen Näherungsalgorithmus umgewandelt werden: Mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $y_0 = \sqrt{2}$ wird mit

$$x_{k+1} = x_k\, y_k \qquad y_{k+1} = \sqrt{(2y_k / (y_{k+1}))} \rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \pi/2$$

Die ersten Näherungswerte für π sind

Iteration	Näherungswert
1	2.828427124746190097603377448419396157139343750753896 15
2	3.061467458920718173827679872243190934090756499885016 33
3	3.1 214451522580522855725578956323558548430658840312 7692
4	3.1 365484905459392638142580444365390675563735413600 1815
5	3.14 033115695475291231711852433169013214370323364818689 ...
10	3.14159 142151119997399797176374083395574756265008618080
20	3.14159265358861823 661420859077240788498096290246722886
50	3.14159265358979323846264338327 848373255177129666664031
100	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582

Der 100.Näherungswert gibt 52 korrekte Dezimalstellen.

Auf der Basis von Dreiecken, Sechsecken, Zwölfecken, … erhält man als Näherungsformel

$$\pi = 3/2\, \sqrt{3} \cdot 2/\sqrt{3} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{3})} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})} \cdot \ldots$$

Für Fünfecke, Zehnecke, Zwanzigecke, … wird

$$\pi = 5/2\, \sqrt{(3-\tau)} \cdot 2/\sqrt{(2+\tau)} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+\tau)})} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+(2+\tau))})} \cdot \ldots$$

mit $\tau = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}618\ldots$ (goldenes Verhältnis)

Wurzelnäherungen für PI

Durch etwas Suchen erhält man eine einfache Näherung für π mittels ineinandergeschachtelter Wurzeln:

$$\sqrt{(7 + \sqrt{(6 + \sqrt{5})})} \approx 3{,}14163$$

nähert die Kreiszahl bis auf 3 Dezimalstellen.

$$\pi \approx 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ldots$$

Allgemein sucht man nach Näherungstermen für π in der Form

$$\sqrt{(a_1 + \sqrt{(a_2 + \sqrt{(a_3 + \ldots + \sqrt{a_n})\ldots})})}$$

Unter anderem findet man (Wert in Klammern gibt die erhaltene Stellenzahl von π an):

$\pi(1) = \sqrt{10}$

$\pi(2) = \sqrt{(1 + \sqrt{79})}$	$\pi(2) = \sqrt{(2 + \sqrt{62})}$
$\pi(5) = \sqrt{(1 + \sqrt{(3 + \sqrt{5726})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(1 + \sqrt{(41 + \sqrt{1419})})}$
$\pi(6) = \sqrt{(1 + \sqrt{(44 + \sqrt{1202})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(1 + \sqrt{(47 + \sqrt{1003})})}$
$\pi(5) = \sqrt{(2 + \sqrt{(4 + \sqrt{3356})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(2 + \sqrt{(26 + \sqrt{1291})})}$
$\pi(5) = \sqrt{(2 + \sqrt{(33 + \sqrt{837})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(3 + \sqrt{(8 + \sqrt{1536})})}$
$\pi(5) = \sqrt{(3 + \sqrt{(21 + \sqrt{686})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(4 + \sqrt{(11 + \sqrt{550})})}$
$\pi(10) = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(5993 + \sqrt{1569})})})}$	$\pi(9) = \sqrt{(1 + \sqrt{(5 + \sqrt{(5286 + \sqrt{19952})})})}$
$\pi(10) = \sqrt{(1 + \sqrt{(37 + \sqrt{(1570 + \sqrt{27682})})})}$	$\pi(12) = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(5663 + \sqrt{136612})})})}$
$\pi(12) = \sqrt{(1 + \sqrt{(2 + \sqrt{(122 + \sqrt{33134654})})})}$	$\pi(12) = \sqrt{(1 + \sqrt{(9 + \sqrt{(2989 + \sqrt{3477824})})})}$

Die Tabelle enthält alle Parameter $a \neq 0$, b, c und d, für die $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{d})})})}$ die Kreiszahl auf mindestens 12 Dezimalziffern nähert:

Die zweite Tabelle enthält alle Parameter $a \neq 0$, b, c, d und e, für die $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$ von der Kreiszahl um maximal $2{,}3713 \cdot 10^{-25}$ abweicht (vollständig untersucht November 2011):

Der genauesten Terme mit 5 Wurzelausdrücken

$\sqrt{(1 + \sqrt{(13+ \sqrt{(167 + \sqrt{(12984060 + \sqrt{17651656409746})})})})}$; Abweichung $1{,}87959 \cdot 10^{-29}$

$\sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(2041 + \sqrt{(8986514 + \sqrt{48253045750399})})})})}$; Abweichung $2{,}38068 \cdot 10^{-28}$

$\sqrt{(1 + \sqrt{(0 + \sqrt{(138 + \sqrt{(29638370 + \sqrt{48659419263516})})})})}$; Abweichung $8{,}64432 \cdot 10^{-28}$

$\sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(50 + \sqrt{(7959452 + \sqrt{774630113403085})})})})}$; Abweichung $1{,}16508 \cdot 10^{-27}$

nähern π auf 28, 27 und 26 Dezimalstellen an (gefunden 6.September 2011).

Wurzelnäherungen für PI (2)

Bei der Suche nach Näherungstermen für

$$\pi \approx 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ldots$$

in der Form $\sqrt{(a_1 + \sqrt{(a_2 + \sqrt{(a_3 + \ldots + \sqrt{a_n})\ldots})})}$

können auch einige der Parameter a_1, a_2, a_3, … gleich Null werden.

Insbesondere wenn $a_1 = 0$ ist, verändert sich der Term auf einen Ausdruck mit einer Wurzel höheren Grades.

Besonders genaue Terme mit höheren Wurzeln sind

$\sqrt[4]{(2 + \sqrt{(71 + \sqrt{(61195248 + \sqrt{415339223644665})})})}$; Abweichung $7{,}02016 \cdot 10^{-29}$ (28 Stellen!)

$\sqrt[4]{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(21383431 + \sqrt{4223656848083439})})})}$; Abweichung $7{,}55277 \cdot 10^{-29}$ (28 Stellen!)

$\sqrt[4]{(2 + \sqrt{(14 + \sqrt{(40266612 + \sqrt{1792793645352152})})})}$; Abweichung $4{,}02839 \cdot 10^{-27}$

$\sqrt[4]{(1 + \sqrt{(42 + \sqrt{(29010563 + \sqrt{3203801323004517})})})}$; Abweichung $5{,}27719 \cdot 10^{-27}$

$\sqrt[4]{(1 + \sqrt[4]{(31677959 + \sqrt{2993591995171814})})}$; Abweichung $4{,}79382 \cdot 10^{-26}$

$\sqrt[8]{(481 + \sqrt{(1455617 + \sqrt{1574502241714372})})}$; Abweichung $7{,}56223 \cdot 10^{-29}$

$\sqrt[8]{(34 + \sqrt{(18643415 + \sqrt{5004818482987791})}}$; Abweichung $2{,}34820 \cdot 10^{-28}$
$\sqrt[8]{(32 + \sqrt{(21128169 + \sqrt{4664590831386513})})}$; Abweichung $2{,}45382 \cdot 10^{-27}$
$\sqrt[8]{(26 + \sqrt{(5524872 + \sqrt{7058456580436768})}}$; Abweichung $2{,}50794 \cdot 10^{-27}$
$\sqrt[16]{(50754728 + \sqrt{1542721444026675})}$; Abweichung $4{,}92548 \cdot 10^{-26}$
nähern π auf 28, 27 bis 24 Dezimalstellen an (gefunden 7.August 2011).

Wurzelnäherungen für PI (3)

Bei der Suche von Näherungstermen für π in der Form $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$ ergeben sich gute Näherungen nicht gleichmäßig verteilt. Mit a > 2 findet man keine Terme, die höchstens um 10^{-24} von π abweichen. Für alle möglichen Belegungen a = 1 oder 2 und verschiedene Werte b ergeben sich für die Parameter a, b, c, d und e als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung Δ von π (vollständig getestet für alle $a \geq 1$, $b \geq 0$; November 2011):

Δ in 10^{-29}	a	b	c	d	e
2	1	13	167	12984060	17651656409746
24	1	1	2041	8986514	48253045750399
83	1	3	129	19065064	150321662069340
86	1	0	138	29638370	48659419263516
213	1	19	334	4668778	32964718770147
232	1	14	7	627412	282402316850568
269	1	11	115	8077677	140458534927905
317	1	6	297	8456298	268405266595304
355	1	12	698	11250436	7776416858201
366	1	2	426	28040246	2846007222270
411	1	5	620	3023962	403435563272978
467	1	17	374	817334	119725238868160
615	1	8	407	8665610	153192350882330
654	1	7	357	12583468	105284851583229
660	1	9	158	11857915	103907264464854
733	1	21	945	443689	27296367542473
790	1	10	87	18489343	8609279265866
829	1	4	1066	8808523	132892266432882

Bei der Suche von Näherungstermen für π in der Form $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$ ergeben sich gute Näherungen nicht gleichmäßig verteilt. Mit a = 0 findet man eine Vielzahl Terme, die höchstens um 10^{-24} von π abweichen. Für die bisher untersuchten Belegungen a = 0 und verschiedene Werte b ergeben sich für die Parameter b, c, d und e als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung Δ von π (vollständig getestet für alle $b \geq 30$; März 2012):

Δ in 10^{-29}	a	b	c	d	e	gesucht für
5	0	0	2717	928651	2018253944949629	$0 \leq c \leq 2870$
7	0	2	71	61195248	415339223644665	$0 \leq c \leq 550$
8	0	1	1	21383431	4223656848083439	$0 \leq c \leq 1875$
11	0	6	14	35059140	1191873178912786	$0 \leq c \leq 440$
18	0	8	187	10190142	2576464053837084	$0 \leq c \leq 440$
28	0	12	233	22397686	754606509994517	$0 \leq c \leq 446$
28	0	19	45	8855535	806043072566567	$0 \leq c \leq 495$
31	0	4	407	16402545	2786876582779523	$0 \leq c \leq 467$
43	0	9	416	20183074	1195735126664158	$0 \leq c \leq 422$
59	0	34	100	154742	231564608147971	alle c
62	0	5	218	5913242	4011084523812656	$0 \leq c \leq 516$
67	0	7	142	5387861	3495412107055981	$0 \leq c \leq 466$
89	0	16	249	24607084	258483245664939	$0 \leq c \leq 551$
134	0	28	0	9321392	192879014583053	$0 \leq c \leq 178$
136	0	13	384	23116026	498344664943531	$0 \leq c \leq 536$
137	0	15	515	7144138	1039887071310966	$0 \leq c \leq 673$
141	0	18	175	3682208	1149518272302944	$0 \leq c \leq 494$
147	0	11	238	2029641	2522251253764026	$0 \leq c \leq 533$

Im Allgemeinen wird die Suche von Näherungstermen für π in der Form $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$ nur für natürliche Zahlen a, b, c, d und e durchgeführt.
Es ist aber durchaus möglich, dass auch negative Werte betrachtet werden. Dabei stellt man fest, dass die möglichen Belegungen der nicht negativen Parameter einen größeren Umfang besitzen und insgesamt sehr viele gute Näherungsterme für π mit einer Abweichung von weniger als 10^{-24} gefunden werden können.
Für die wenigen bisher (Dezember 2011) untersuchten Belegungen mit negativen a bzw. b ergeben sich für die Parameter a, b, c, d und e als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung Δ von π:

Δ in 10^{-29} a	b	c	d	e	gesucht für
8	-1	-3	0	68279995	21647739612745620	$0 \le c \le 2$
22	-2	-1	0	30225293	140681069960439353	$0 \le c \le 2$
33	-2	0	0	182402673	44771023848637997	$0 \le c \le 2$
329	-1	0	2	94609919	10037737402291649	$0 \le c \le 2$
667	-1	-1	2	20425221	32780342393499126	$0 \le c \le 3$
861	1	-3	2	674165	1917358681078630	$0 \le c \le 3$
884	-1	-2	2	40681514	28105750564023229	$0 \le c \le 3$
1449	0	-2	4	29796852	4594309888351483	$0 \le c \le 4$
1527	0	-3	1	17774727	7031081247849027	$0 \le c \le 3$
3558	0	-1	0	62645760	969753123640385	$0 \le c \le 3$
5939	1	-1	4	18114804	489406144880931	$0 \le c \le 11$
6578	2	-3	1	163495	309853833678242	$0 \le c \le 14$
10945	1	-2	11	4915665	1390584004198243	$0 \le c \le 24$
14270	2	-2	5	7128752	90917017233472	$0 \le c \le 8$

Näherungsformeln für PI

Kochansky: … die Wurzel des Polynoms

$9x^4 - 240x^2 + 1492$ wird zu $\pi \approx \sqrt{(40/3 - \sqrt{12})} = 3{,}141533\ldots$

Näherung über das Goldene Verhältnis ϕ

$\pi \approx 6/5\ \phi^2 = 6/5\ (1/2 \cdot (\sqrt{5} + 1))^2 = 3/5\ (3 + \sqrt{5}) = 3{,}14164\ldots$

Ramanujan:

$\pi \approx 19\ \sqrt{7} / 16$ $\qquad$ $\pi \approx 7/3\ (1 + 1/5\ \sqrt{3})$

$\pi \approx 9/5 + \sqrt{(9/5)}$ $\qquad$ $\pi \approx \sqrt[4]{(\ 102 - 2222/22^2)}$

Weitere Näherungen mit

$\pi \approx 24/\sqrt{142}\ \ln(1/2\ (\sqrt{(10+11\sqrt{2})} + \sqrt{(10+7\sqrt{2})})\ )$ … 15 Ziffern

$\pi \approx 12/\sqrt{190}\ \ln(\ (3+\sqrt{10})\ (\sqrt{8}+\sqrt{10})\ )$ … 18 Ziffern

$\pi \approx 24/\sqrt{310}\ \ln(1/4\ (3+\sqrt{5})\ (2+\sqrt{2})\ (5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{(61+20\sqrt{10})}\ )$ … 23 Ziffern

$\pi \approx 4/\sqrt{522}\ \ln(\ ((5+\sqrt{29})/\sqrt{2})^3\ (5\sqrt{20}+11\sqrt{6})\ (1/2\ \sqrt{(9+3\sqrt{6})} + 1/2\ \sqrt{(5+3\sqrt{6})})^6\ )$ … 31 Ziffern

Genauigkeit

Irrationalität von PI

Satz: π^2 ist eine irrationale Zahl.

Beweis: Es sei $\pi^2 = p/q$, wobei p und q positive ganzen Zahlen sind. Es wird folgende Funktion betrachtet

$$J(x) = q^n(\pi^{2n}P_n(x)-\pi^{2n}-2P_n''(x)+ \pi^{2n-4}P_n^{(4)}(x)-\ldots(-1)^nP_n^{(2n)}(x))$$

mit P_n, J(0) und J(1) als natürliche Zahlen. Es ist aber

$$(J'(x)\sin\pi x - J(x)\ \pi\cos\pi x)' = (J''(x)+ \pi^2J(x))\sin\pi x = q^n\pi^{2n}+2P_n(x)\sin\pi x = p^2\pi^nP_n(x)\sin\pi x$$

und damit $\quad 1/\pi\ [\ J'(x)\sin\pi x-J(x)\ \pi\cos\pi x]_0^1 = J(0)+J(1) = \pi p^n\ {}_0\int^1 P_n(x)\sin\pi x\ dx$

d.h. das Integral ist eine von Null verschiedene ganze Zahl. Als Grenzen für das Integral ergibt sich aber

$$0 < \pi p^n\ {}_0\int^1 P_n(x)\sin\pi x\ dx < \pi p^n/n! < 1$$

für großes n. Der Widerspruch ergibt, dass π^2 irrational ist. Als Folgerung ergibt sich: π ist eine irrationalen Zahl.

Kettenbrüche nach Brounker

Auf Lord Brounker (1620-1684) gehen weitere Kettenbrüche zur Berechnung von π zurück:

$$\pi = 4\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}} \qquad \pi = 2+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}+\cfrac{1}{\frac{1}{3}+\cfrac{1}{\frac{1}{4}+\ldots}}}} \qquad \pi = 2+\cfrac{4}{3+\cfrac{1\times 3}{4+\cfrac{3\times 5}{4+\cfrac{5\times 7}{4+\ldots}}}} \qquad \pi = 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ldots}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ldots}}}} \qquad \frac{\pi}{2} = 1-\cfrac{1}{3-\cfrac{2\times 3}{1-\cfrac{1\times 2}{3-\cfrac{4\times 5}{1-\cfrac{3\times 4}{3-\cfrac{6\times 7}{1-\ldots}}}}}} \qquad \frac{6}{\pi^2-6} = 1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1\times 2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2\times 3}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3\times 4}{1+\ldots}}}}}} \qquad \frac{12}{\pi^2} = 1+\cfrac{1^4}{3+\cfrac{2^4}{5+\cfrac{3^4}{7+\cfrac{4^4}{9+\ldots}}}}$$

Newton-Formeln

$$\pi = 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2\,(2n+1)}$$

$$\pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+2}(n!)^2\,(2n-1)(2n+3)}\right)$$

Katahiro-Formel (1664 – 1739)

$$\forall r > 1 \quad U_0 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right) \qquad U_n = \frac{U_0 U_{n-1}(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{U_0^{n+1}\,2(n!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n}$$

Stirling-Formel

$$\frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Leibniz-Formel

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right) = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Gauß-Formeln

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(12\left(\frac{1}{18}\right)^{2n+1} + 8\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1} - 5\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(12\left(\frac{1}{38}\right)^{2n+1} + 20\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1} + 7\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} + 24\left(\frac{1}{268}\right)^{2n+1}\right)$$

Gosper-Formel

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{2.3}{7.8.3}\left(13 + \frac{3.5}{10.11.3}\left(18 + \frac{4.7}{13.14.3}(\ldots)\right)\right)\right)$$

Gauß-Legendre-Verfahren

Iteratives Verfahren zur Bestimmung von π

Ansatz: a=x=1, b=1/√2, c=1/4

y=a ; a=(a+b)/2 ; b=√(b*y) ; c=c-x*(a-y)² x=2*x und Wiederholung

Ergebnis π = (a+b)²/(4c)

Näherungsformeln für π

Kochansky: ... die Wurzel des Polynoms $9x^4 - 240x^2 + 1492$ wird zu $\pi \approx \sqrt{(40/3 - \sqrt{12})} = 3.141533...$

Näherung über das Goldene Verhältnis ϕ $\pi \approx 6/5\ \phi^2 = 6/5\ (1/2 * (\sqrt{5} + 1))^2 = 3/5\ (3 + \sqrt{5}) =$ 3.14164...

Ramanujan Näherungsformeln	Zahlenwert	Ziffern
$6/5\ \phi^2 = 3/5\ (3 + \sqrt{5}) = 6/5\ (1+\phi)$	3,14164	3
$19\ \sqrt{7} / 16$	3,14182	3
$7/3\ (1 + 1/5\ \sqrt{3})$	3,141623	3
$\sqrt[4]{(102 - 2222/22^2)}$	3,14159265258	8
$\sqrt[4]{(97 + ½ - 1/11)}$	3,14159265258	8
$63/25\ ((17 + 15\sqrt{5})/(7 + 15\sqrt{5})$	3,14159265380	9
$355/113\ (1 - 0{,}0003/3533)$	3,14159265358979432	14
$12/\sqrt{130}\ \ln(3+\sqrt{13})(\sqrt{8}+\sqrt{10})/2)$	3,14159265358979265	14
$24/\sqrt{142}\ \ln((\sqrt{(10+11\sqrt{2})} + \sqrt{(10+7\sqrt{2})})/2)$	3,14159265358979312	15
$12/\sqrt{190}\ \ln((3+\sqrt{10})\ (\sqrt{8} + \sqrt{10})$	3,1415926535897932384190	19
$12/\sqrt{310}\ \ln((3+\sqrt{5})\ (2+\sqrt{2})/4\ (5+2\sqrt{10}+ \sqrt{(61+20\sqrt{10})}))$	3,14159265358979323846264208 8	23
$4/\sqrt{522}\ \ln[((5+\sqrt{29})/ \sqrt{2})^3\ (5\sqrt{29} + 11\sqrt{6})\ (\sqrt{(9+3\sqrt{6})/4}) + \sqrt{(5+3\sqrt{6})/4})^6]$	3,14159265358979323846264338327 9	30

Castellanos Näherungsformeln		Zahlenwert Ziffern
$(2e^3+e^8)^{1/7}$	3,14171	3
$(533/312)^2$	3,141529	4
$(3/14)^4\ (193/5)^2$	3,141575	4
$(296/167)^2$	3,14159704	5
$((66^3+86^2)/55^3)^2$	3,141592452	6
$(47^3+20^3)/30^3 - 1$	3,14159259259	6 (7.21)
$2 + \sqrt{(1+(413/750)^2)}$	3,141592649	7
$\sqrt[5]{(77729/254)}$	3,141592654111	8
$\sqrt[3]{(31+(62^2+14)/28^4)}$	3,14159265363	9
$(1700^3+82^3-10^3-9^3-6^3-3^3)/69^5$	3,14159265358817	11
$\sqrt[4]{(95+(93^4+34^4+17^4+88)/75^4)}$	3,14159265359037	10
$\sqrt[4]{(100-(2125^3+214^3+30^3+37^2)/82^5)}$	3,141592653589780419	13

Plouffe Näherungsformeln		
$43^{7/23}$	3,1415398	4
$\ln(2198) / \sqrt{6}$	3,1415943	5
(13/4)^(1181/1216)	3,14159267809	7
689/(396 ln(689/396))	3,14159259508	6
$\sqrt[4]{(2143/22)}$	3,14159265258	8
$\sqrt{(9/67)}\ \ln 5280$	3,14159265297	8
$\sqrt[3]{(63023/30510)} + ¼ + ½\ (\sqrt{5} + 1)$	3,141592653492	9

48/23 ln(60318/13387)	3,1415926535949	10
$\sqrt[41]{(228 + 16/1329)} + 2$	3,141592653586778	11
125/123 ln(28102/1277)	3,1415926535912	10
$\sqrt[158]{(276694819753963/226588)} + 2$	3,14159265358979323846264920 1	23
ln(262537412640768744 / √163	3,1415926535897932384626433832797	30

Näherungsformeln für PI

$\pi^2 / 16 = \Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1) (1+1/3+\ldots+1/(2k+1))$ … Knopp
$\pi / 4 = 3/4 + 1/(2\cdot3\cdot4) - 1/(4\cdot5\cdot6) + 1/(6\cdot7\cdot8) - + \ldots$ Nilakantha
$\pi / 2 = 1 + 1/3 + (1\cdot2)/(3\cdot5) + (1\cdot2\cdot3)/(3\cdot5\cdot7) + \ldots$ Euler
$\pi / 2 = (1\cdot2)/(1\cdot3) + (1\cdot2\cdot3)/(1\cdot3\cdot5) + (1\cdot2\cdot3\cdot4)/(1\cdot3\cdot5\cdot7) + \ldots$
$\pi = \Sigma_{k=1}^{\infty} (3^k-1)/4^k\, \zeta(k+1)$ … Flajolet-Vardi
$\pi / 4 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \arctan(1/(k^2+k+1))$ … Knopp
$1 / \pi = \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/2^{k+1} \tan(\pi/2^{k+1})$ … Euler
$\pi \sqrt{2} / 4 = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 --++ \ldots$
$\pi \sqrt{3} / 6 = 1 - 1/5 + 1/7 - 1/11 + 1/13 - 1/17 + \ldots$
$\pi \sqrt{3} / 9 = 1 - 1/2 + 1/4 - 1/5 + 1/7 - 1/8 + \ldots$
$\pi \sqrt{3} / 6 = \Sigma_{k=0}^{\infty} -1/^k / (3^k (2k+1))$ … Sharp

1984 Morris Newman, Daniel Shanks

$a = 1071/2 + 92 \sqrt{(34)} + 3/2 \sqrt{(255349 + 43792 \sqrt{(34)})}$
$b = 1553/2 + 133 \sqrt{(34)} + 1/2 \sqrt{(4817509 + 826196 \sqrt{(34)})}$
$c = 429 + 304 \sqrt{2} + 2 \sqrt{(92218 + 65208 \sqrt{2})}$
$d = 627/2 + 221 \sqrt{2} + 1/2 \sqrt{(783853 + 554268 \sqrt{2})}$
$| \pi - 6/\sqrt{(3502)} \ln(2abcd) | < 7{,}4 \cdot 10^{-82}$

Borchardt-Pfaff-Algorithmus

Ausgehend von in einen Kreis eingeschriebenen bzw. umschriebenen regelmäßigen N-Ecken konvergieren die Werte

$b_{n+1} = 2a_nb_n / (a_n + b_n)$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{(a_n\, b_{n+1})}$

gegen die Kreiszahl π. Als Startwerte werden

$a_0 = 3$ halber Umfang des eingeschriebenen 6-Ecks $\quad b_0 = 2 \sqrt{3}$ halber Umfang des umschriebenen 6-Ecks

Dieser Algorithmus stellt eine Vereinfachung des Verfahrens von Archimedes dar. Pfaff war der Lehrer von Gauß. Für die ersten Näherungen ergibt sich:

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
1	3.105828542	3.215390310	2	3.132628614	3.159659942
3	3.139350204	3.146086216	4	3.141031952	3.142714600

Eine schnellere Konvergenz erreicht man mit

$a_{n+1} = 3a_nb_n / (2b_n+a_n)b_{n+1} = 3\sqrt{(a_n2b_n)}$

n	a_n	b_n
1	3.140237344	3.147345190
2	3.141509994	3.141927919

Die Ecke

Pi mal Daumen

TOKIO, 4. August (ap). Zwei japanische Mathematiker haben am Freitag einen neuen Weltrekord für die Berechnung der Zahl Pi bekanntgegeben. Wie Yasumasa Kaneda und Daisuke Takahashi von der Universität Tokio erklärten, berechneten sie die Zahl, die das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser angibt, auf 3,22 Milliarden Dezimalstellen genau.
Wissenschaftler der US-amerikanischen Columbia-Universität hielten den alten Rekord mit 2,26 Milliarden Stellen.
Professor Kaneda sagte, seine Gruppe habe einen Großcomputer benutzt, um zwei verschiedene Formeln durchrechnen zu lassen. Für die erste habe der Rechner 36 Stunden und 52 Minuten gebraucht, für die andere 53 Stunden und 43 Minuten. Mathematiker sind der Meinung, daß Pi unzählig viele Dezimalstellten hat.
Die präzise Berechnung der Kreiszahl hat keinerlei praktischen Wert.

Frankfurter Rundschau vom 5.8.1995

Brent-Salamin-Verfahren / Gauß -Salamin-Verfahren

Sind a,b positive reelle Zahlen und wird sukzessive

$a_{n+1} = (a_n + b_n) / 2$ $\quad b_{n+1} = \sqrt{(a_n * b_n)}$

gebildet, so streben beide Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert, das

arithmetisch-geometrische Mittel AGM(a,b)

Es gilt: $AGM(a,b) = \pi/2\, I(a,b)$, I … elliptisches Integral

$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{[a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta]} * d\Theta$

Mit a=1, b=1/√2 und M=AGM(1, 1/√2) wird

$\pi = 4M^2/[1 -2^0(a_0 - b_0)^2 -2^1(a_1 - b_1)^2 -2^2(a_2 - b_2)^2 -2^3(a_3 - b_3)^2 -\ldots]$

d.h. die Folge der Zahlen

$$4 M^2 / [1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k (a_k - b_k)^2]$$

konvergiert quadratisch gegen π. Der Algorithmus wurde 1976 zuerst von Eugene Salamin angegeben und im gleichen Jahr, unabhängig von Salamin, durch Richard Brent entdeckt. Die ersten Iterationen sind

$p_1 = 3.1(876\ldots)$ $\quad p_2 = 3.141(680\ldots)$
$p_3 = 3.141592653(895\ldots)$
$p_4 = 3.14159265358979323846(636\ldots)$

p_{30} gibt die Kreiszahl π schon auf über 1 Milliarde Ziffern genau an.

Borwein-Algorithmus

Durch die Brüder Jonathan und Peter Borwein wurde 1984 ein weiterentwickelter Algorithmus veröffentlicht. Mit den Startwerten $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 0$, $a_0 = 2+\sqrt{2}$ wird berechnet

$x_{k+1} = ½ (\sqrt{x_k} + 1/\sqrt{x_k})$
$y_{k+1} = \sqrt{x_k} (y_k + 1) / (y_k + x_k)$
$a_{k+1} = a_k y_{k+1} (x_{k+1} + 1) / (y_{k+1} + 1)$

Für diese Berechnung wird dann $| a_k - \pi | < 10^{-2^k}$. Damit liegt eine quadratische Konvergenz vor. Die ersten Iterationen sind

$a_1 = 3,14(260…)$ $a_2 = 3,1415926(609…)$
$a_3 = 3,14159265358979323 8(645…)$

2.Algorithmus

$y_{k+1} = (1 - \sqrt{(1 - y_k^2)}) / (1 + \sqrt{(1 - y_k^2)})$
$a_{k+1} = (1 + y_{k+1})^2 a_{k-2}^{k+1} y_{k+1}$

mit $y_0 = 1/\sqrt{2}$; $a_0 = 1/2$

ergibt mit quadratischer Konvergenz

$1/a_1 = 2,91421356237309504880168 87…$ $1/a_2 = 3,14(057…)$
$1/a_3 = 3,1415926(462…)$ $1/a_4 = 3,14159265358979323 8(279…)$

$1/a_5$ hat 40 korrekte Ziffern, $1/a_6$ 84 korrekte Ziffern …

Borwein-Verfahren höherer Ordnung

Durch J.M. Borwein and P.B. Borwein wurden in "Ramanujan and Pi", Scientific American 1988, und "Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi", The American Mathematical Monthly 1989, Algorithmen zur Berechnung von π mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit und noch höherer Ordnung angegeben:

Kubischer Algorithmus

$x_{k+1} = 3 / 1+2(1-y_k^3)^{1/3}$ $y_{k+1} = (x_{k+1}-1)/2$
$a_{k+1} = x_{k+1}^2 a_{k-3}^k (x_{k+1}^2-1)$

mit $y_0 = (\sqrt{3}-1)/2$; $a_0 = 1/3$ ergibt $\lim_{k\to\infty} 1/a_k = \pi$

Werte $1/a_1 = 3,14159(058…)$ $1/a_2 = 3,1415926535897932384 62(359…)$
$1/a_3$ hat 70 korrekte Stellen …

Algorithmus 4.Ordnung

$y_{k+1} = (1-(1-y_k^4)^{1/4}) / (1+(1-y_k^4)^{1/4})$
$a_{k+1} = (1+y_{k+1})^4 a_{k-2}^{2k+3} y_{k+1}(1+y_{k+1}+y_{k+1}^2)$

mit $y_0 = \sqrt{2} -1$; $a_0 = 6 - 4 \sqrt{2}$

Werte $1/a_1 = 3,1415926(462…)$
$1/a_2 = 3,14159265358979323846264338327950288419 71(146…)$

Algorithmus 5.Ordnung

$y_{k+1} = 25/ (y_k (c+a/c+1)^2)$ $a = 5/y_k -1$
$b = (a-1)^2 + 7$ $c = (1/2 a (b+ \sqrt{(b^2-4a^3)}))^{1/5}$
$\alpha_{k+1} = y_k^2 \alpha_{k-5}^k (1/2 (y_k^2-5) + \sqrt{(y_k (y_k^2 -2y_k+5))})$

mit $y_0 = 5(\sqrt{5} - 2)$; $\alpha_0 = 1/2$

Werte $1/\alpha_1 = 3,1415(369…)$
$1/\alpha_2 = 3,14159265358979323846264338327 9(351…)$

Algorithmus 9.Ordnung

$\alpha_0 = 1/3$; $s^*_1 = (\sqrt{3} - 1)/2$; $s_1 = \sqrt[3]{(1 - (s^*_1)^3)}$
$s_{n+1} = (1 - s^*_n)^3 / ((t + 2u)(t^2 + tu + u^2))$

mit $t = 1 + 2s^*_n$; $u = \sqrt[3]{(9 s^*_n (1 + s^*_n + (s^*_n)^2)}$; $s_{n+1} = \sqrt[3]{(1 - (s^*_n)^3)}$
$m = 27 (1 + s_n + s_n^2) / (t^2 + tu + u^2)$
$\alpha_n = m \alpha_{n-1} + 3,9^{n-2} (1 - m)$ strebt für $n \to \infty$ gegen $1/\pi$

hexadezimaler Algorithmus; 16.Ordnung

$\alpha_0 = 1/3$; $s_1 = \sqrt{2} - 1$; $s^*_1 = \sqrt[4]{(1 - (s_1)^4)}$
$s_{n+1} = (1 - s^*_n)^4 / ((t + u)^2(t^2 + u^2))$

mit $m_1 = ((1 + a_n)/t)^4$; $m_2 = 1/t^4$; $t = 1 + s^*_n$
$u = \sqrt[4]{(8 s^*_n (1 + (s^*_n)^2))}$; $s^*_n = \sqrt{(1 - (s_n)^4)}$
$\alpha_n = 16m_1 \alpha_{n-1} + 4^{2n-1}/3 (1 - 12m_2 - 4m_1)$ strebt für $n \to \infty$ gegen $1/\pi$

Algorithmus

$\pi = 1/\sqrt{(-C^3)} (\Sigma_{n=0}^{\infty} ((6n)! (A+nB))/((3n)! (n!)^3 C^{3n}))^{-1}$

mit $A = 63365028312971999585426220 + 283377021408008420468256 00 \cdot \sqrt{5} + 384 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{(10891728551171178200467436212395209160385656017 + 4870929086578810225077338534541688721351255040 \cdot \sqrt{5})}$

B = 78499104534966271028974900 0 + 351058667826093202896560640 0 · √5 + 2515968 · √(3110) · √(626020832378900163699332265444020882161 + 279965027306044429657720689071882519023 5 · √5)

C = -214772995063512240 - 96049403338648032 · √5 - 1296 · √5 · √(109852345794635503237133184 73 + 491274625369236275460739591 2 · √5)

Anmerkung: Dieser Algorithmus wird von den Borweins als "nicht ganz ernst gemein" eingestuft. Aber, er ist korrekt!

Beeler-Verfahren

Durch Beeler wurde 1972 ein Verfahren zur Berechnung von π mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit angegeben. Dabei wird mit einem schon bekannten Näherungswert a_0 für π begonnen. $a_{k+1} = a_k + \sin a_k$

Zum Beispiel ergibt der Archimedische Näherungswert

$a_0 = 22/7$ $\quad$ $a_1 = 3{,}141592653(926\ldots)$

$a_2 = 3{,}14159265358979323846264338 32(858\ldots)$

a_3 hat 83 korrekte Ziffern.

Analog können auch Verfahren mit Konvergenzordnungen höher als 3 aufgebaut werden:

5.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k$

7.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k + 3/40 \sin^5 a^k$

9.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k + 3/40 \sin^5 a^k + 5/112 \sin^7 a_k$

Für eine effektive numerische Berechnung ist die Tangensfunktion besser geeignet als die Sinusfunktion:

3.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k - \tan a_k$

5.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k$

7.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k - 1/5 \tan^5 a_k$

9.Ordnung $\quad a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k - 1/5 \tan^5 a_k + 1/7 \tan^7 a_k$

Nutzt man die letzte Formel mit dem Anfangswert $a_0 = 355/113$, so ergibt eine Iteration 60 korrekte Stellen von π.

In der Praxis erweist sich die Berechnung der Sinus- bzw. Tangenswerte als schwierig, so dass die Formeln vor allem theoretische Bedeutung besitzen.

Ramanujan-Verfahren

Aus der Entwicklung von Modulargleichungen gewinnt man:

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390\,n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

Anmerkung: ein vollständiger Beweis, dass diese Reihe tatsächlich gegen $1/\pi$ konvergiert existiert noch nicht !!

Verfahren 2

Ansatz: $r=2$; $a_0 = \sqrt{2} - 1$; $y_0 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$

Iterationsvorschrift: $\quad y_{n+1} = (1 - \sqrt[4]{(1 - y_n^4)}) / (1 + \sqrt[4]{(1 - y_n^4)})$

$a_{n+1} = (1+y_{n+1})^4 * a_n - 4^{n+1} * \sqrt{r} * y_{n+1} * (1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2) \rightarrow \pi = 1 / a_n$

Pascal-Text

```
var s,f,h:extended; i,k:integer;
function fak(x:integer):extended; // Hilfsprozedur zur Berechnung von x!
var y:integer; z:extended;
begin  if x=0 then fak:=1        else begin z:=1; for y:=1 to x do z:=z*y; fak:=z; end; end;
begin   s:=0;  {maximal 5 Durchläufe, da dann maximale Genauigkeit erreicht}
for i:=0 to 5 do begin
        f:=1; for k:=1 to 4*i do f:=k*f;
        for k:=1 to i do f:=f/i/i/i;                f:=f*(1103+26390*i);
        if i<>0 then begin
        for k:=1 to 4*i do begin f:=f/2;  f:=f/2; f:=f/3;  f:=f/3;  f:=f/11;
        end; end; s:=s+f;
        writeln('Pi ~ ',9801/sqrt(8)/s:24:25,' % Fehler ',100*(9801/sqrt(8)/s-pi)/pi);
end; end.
```

Chudnovsky-Verfahren

Weiterentwicklung des Ramanujan-Verfahrens ergibt

$$426880 \sqrt{10005} / \pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (6n)! (545140134 n + 13591409)/[(n!)^3 (3n)! (640320)^{3n}]$$

Pascal-Text

```
var y:integer; z:extended; s,f,h:extended; i,k:integer;
begin   s:=0;   for i:=0 to 5 do begin   f:=1;
        for k:=3*i+1 to 6*i do f:=k*f; for k:=1 to i do f:=f/i/i/i;
        f:=f*(13591409+545140134*i);        if i<>0 then begin        for k:=1 to 3*i do begin
        f:=f/2;  f:=f/2; f:=f/2; f:=f/2;  f:=f/2; f:=f/2;
        f:=f/3;  f:=f/5; f:=f/667; end; end;    if odd(i) then s:=s-f else s:=s+f;
```

```
        writeln('Pi ~ ',426880*sqrt(10005)/s:24:25,' % Fehler ',100*(426880*sqrt(10005)/s-pi)/pi);
end; end.
```

Bellard-Borwein-Algorithmus

1997: am schnellsten konvergierende Näherungsformel für π

$$740025 * \pi = \left(\sum_{n=1}^{\infty} 3\, P(n) / \left(\binom{7n}{2n} 2^{n-1} \right) - 20379280 \right)$$

mit $P(n) = -885673181\, n^5\, 3125347237\, n^4 - 2942969225\, n^3 + 1031962795\, n^2 - 196882274\, n + 10996648$

Mit dieser Formel ermittelte am 22.Oktober 1997 Fabrice Bellard (Abbildung, geb. 1973) auf mehr als 20 Hi-Tech Workstations die Kreiszahl π auf 1 Billion Binärstellen genau. Der ganze Rechenprozess dauerte etwas weniger als einen Monat und wurde danach noch einmal mit einem etwas variierten und optimierten Code durchgeführt, um die Berechnungen zu überprüfen. Damit fand man, dass die 1 Billionste binäre Stelle von π eine 1 ist.

Die Bellardsche Formel wurde ausgehend von einer hypergeometrischen Reihe komplexer Zahlen entwickelt. Eine einfachere Variante ist $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)$. Schon für wenige summierte k = 0,...,n strebt der Wert sehr schnell gegen π.

n	Näherungswert
1	109 / 35 ≈ 3.1142857142857142857
2	87217 / 27720 ≈ 3.1463564213564213564
10	69263381437243280369341 / 22047218913402696499200 ≈ 3.1415926747630499203 (Fehler kleiner 10^{-7})
100	≈ 3.1415926535897932384 (Fehler kleiner 10^{-29})

Für die ersten 1000 Summanden liegt die Abweichung des Näherungswertes von π schon unter 10^{-600}.

Eng verbunden mit dem Verfahren sind die von Reynolds gefundenen Summen:

$$\forall k \in N^* \quad S_k = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)} \right)^k$$

Für diese erhält man $S_1 = \pi/4$ $S_2 = \pi^2/8$ $S_3 = \pi^3/32 = \pi^3/(2^4\, 2!)$
$S_4 = 2\pi^4/(2^5\, 3!)$ $S_5 = 5\pi^5/(2^6\, 4!)$ $S_6 = 16\pi^6/(2^7\, 5!)$ $S_7 = 61\pi^7/(2^8\, 6!)$
$S_8 = 272\pi^8/(2^9\, 6!)$ $S_9 = 1385\pi^9/(2^{10}\, 7!)$ $S_{10} = 7936\pi^{10}/(2^{11}\, 8!)$

Tröpfchenalgorithmus zur Berechnung von Ziffern von π

Bailey-Plouffe-Algorithmus

1996 entdeckten David H. Bailey, Peter Borwein und Simon Plouffe eine neue Formel zur Berechnung von π:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Für Summierung bis 0,1,2,... ergeben sich die Näherungswerte 47 / 15, 102913 / 32760, 615863723 / 196035840, 357201535487 / 113700787200, 16071212445820879 / 5115625817702400, 40413742330349316707 / 12864093722915635200, 4318127540987083098959311 / 1374502686106089789849600 = 3.1415926535728808...

Diese Formel erlaubt es auf einfache Weise, die n-te Stelle einer binären oder hexadezimalen Darstellung von π zu berechnen, ohne dass man zuvor die n-1 vorherigen Ziffernstellen berechnen muss.

Dieses neue Verfahren ist damit eine Sensation, da damit offenbar jede noch so "weit entfernte" Dezimalstelle "tröpfchenweise" von π ermittelt werden kann. Im Jahr 2000 wurde dieser Algorithmus von "Computing in Science and Engineering" zu einem der 10 besten Algorithmen des 20.Jahrhunderts gewählt.

Als g-adische Zahl zur Basis 16 beginnt π mit **3 , 243F6A8885A308 ...**

David H. Bailey 2000-03-28 : Quelltext des Tröpfchenalgorithmus für ic<2^{24}

```
main() {
 double pid, s1, s2, s3, s4; double series (int m, int n);
 void ihex (double x, int m, char c[]);
 int ic = 1000000;
 #define NHX 16 char chx[NHX];
 s1 = series (1, ic - 1); s2 = series (4, ic - 1); s3 = series (5, ic - 1); s4 = series (6, ic - 1);
 pid = 4. * s1 - 2. * s2 - s3 - s4; pid = pid - (int) pid + 1.;
 ihex (pid, NHX, chx); printf (" start position = %i\n hex digits = %10.10s\n", ic, chx); }
void ihex (double x, int nhx, char chx[])
{ int i; double y; char hx[] = "0123456789ABCDEF";
  y = fabs (x); for (i = 0; i < nhx; i++){ y = 16. * (y - floor (y)); chx[i] = hx[(int) y]; } }
double series (int m, int ic)
{ int k; double ak, eps, p, s, t; double expm (double x, double y);
  #define eps 1e-17 s = 0.;
```

```
  for (k = 0; k < ic; k++){ ak = 8 * k + m; p = ic - k; t = expm (p, ak); s = s + t / ak; s = s - (int) s; }
  for (k = ic; k <= ic + 100; k++){ ak = 8 * k + m; t = pow (16., (double) (ic - k)) / ak;
  if (t < eps) break; s = s + t; s = s - (int) s; } return s; }
double expm (double p, double ak)
  { int i, j; double p1, pt, r; #define ntp 25 static double tp[ntp]; static int tp1 = 0;
  if (tp1 == 0) { tp1 = 1; tp[0] = 1.; for (i = 1; i < ntp; i++) tp[i] = 2. * tp[i-1]; }
  if (ak == 1.) return 0.;
  for (i = 0; i < ntp; i++) if (tp[i] p) break; pt = tp[i-1]; p1 = p; r = 1.;
  for (j = 1; j <= i; j++){ if (p1 = pt){ r = 16. * r; r = r - (int) (r / ak) * ak; p1 = p1 - pt; }
  pt = 0.5 * pt; if (pt = 1.){ r = r * r; r = r - (int) (r / ak) * ak; } }
  return r; }
```

Weitere Plouffe-Formeln

$$\forall r \in C \quad \pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4+8r}{8i+1} - \frac{8r}{8i+2} - \frac{4r}{8i+3} - \frac{2+8r}{8i+4} - \frac{1+2r}{8i+5} - \frac{1+2r}{8i+6} + \frac{r}{8i+7}\right)$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i}\left(\frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2} - \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} - \frac{2}{(8i+7)^2}\right)$$

$$\frac{\pi^3}{360} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \sinh(n\pi)}$$

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i+1} + \frac{1}{6i+2} + \frac{1}{6i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{64^i}\left(\frac{16}{(6i+1)^2} - \frac{24}{(6i+2)^2} - \frac{8}{(6i+3)^2} - \frac{6}{(6i+4)^2} - \frac{1}{(6i+5)^2}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{2}{27}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{729^n}\left(\frac{243}{(12n+1)^2} - \frac{405}{(12n+2)^2} - \frac{81}{(12n+4)^2} - \frac{27}{(12n+5)^2} - \frac{72}{(12n+6)^2} - \frac{9}{(12n+7)^2} - \frac{9}{(12n+8)^2} - \frac{5}{(12n+10)^2} + \frac{1}{(12n+11)^2}\right)$$

Ramanujan-Formeln

Ramanujan ist einer der faszinierendsten Mathematiker aller Zeiten. Die nachfolgenden Formeln für π wurden von ihm „gesehen". Der exakte Nachweis ist teilweise bis heute noch nicht gelungen.

Hinweis zur Schreibweise: Der Ausdruck $(x)_n$ bedeutet das Produkt $\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4}(n!)^6} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1}(n!)^4 (441)^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}}\right)^{-1}$$

$$\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3}\right)^{-1} \qquad \pi = 32\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42\sqrt{5}n + 5\sqrt{5} + 30n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{27}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{15\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (260n+23)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 18^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 2\sqrt{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{n}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(40n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 49^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(280n+19)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 99^{2n+1}}\right)^{-1}$$

π und Fibonacci-Zahlen

Ausgehend von Eulers Formel für π $\pi/4$ = arctan(1) = arctan(1/2) + arctan (1/3)
kann man versuchen, die Argumente 1/2 und 1/3 durch weitere Summanden zuersetzen. Es zeigt sich, dass

arctan(1) = arctan(1/2) + arctan(1/3) arctan(1/3) = arctan(1/5) + arctan(1/8)
arctan(1/8) = arctan(1/13) + arctan(1/21) arctan(1/21) = arctan(1/34) + arctan(1/55) usw.

gilt. Ersetzt man die entsprechenden Terme, wird

$\pi/4$ = arctan(1) = arctan(1/2) + arctan(1/3) = arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/8) =
= arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/13) + arctan(1/21) =
= arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/13) + arctan(1/34) + arctan(55) = ...

Die Nenner der Brüche sind gerade die Fibonacci-Zahlen. Allgemein ist

$\pi/4$ = arctan(1/F1) = arctan(1/F3) + arctan(1/(F4) = arctan(1/F3) + arctan(1/F5) + arctan(1/F6)
= arctan(1/F3) + arctan(1/F5) + arctan(1/F7) + arctan(1/F8)
= arctan(1/F3) + arctan(1/F5) + arctan(1/F7) + arctan(1/F9) + arctan(1/F10) = ...

und arctan($1/F_{2n}$) = arctan($1/F_{2n+1}$) + arctan($1/F_{2n+2}$) mit geradem n.
Für die Kreiszahl π gilt damit die unendliche Summe $\pi/4 = \Sigma_{k=1}^{\infty}$ arctan($1/F_{2k+1}$)
sowie für die Fibonacci-Zahlen arctan($1/F_{2k}$) = $\Sigma_{n=k}^{\infty}$ arctan($1/F_{2n+1}$)

Kettenbruch π

Die Kreiszahl π ist mit Hilfe relativ aufwendiger Operationen in einen Näherungskettenbruch entwickelbar. Nachfolgender Kettenbruch nähert π auf 500 Dezimalstellen genau.

π =

[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, 5, 4, 1, 2, 2, 8, 1, 5, 2, 2, 26, 1, 4, 1, 1, 8, 2, 42, 2, 1, 7, 3, 3, 1, 1, 7, 2, 4, 9, 7, 2, 3, 1, 57, 1, 18, 1, 9, 19, 1, 2, 18, 1, 3, 7, 30, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 8, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 2, 13, 1, 2, 1, 4, 1, 12, 1, 1, 3, 3, 28, 1, 10, 3, 2, 20, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 120, 2, 1, 1, 3, 1, 23, 1, 15, 1, 3, 7, 1, 16, 1, 2, 1, 21, 2, 1, 1, 2, 9, 1, 6, 4, 127, 14, 5, 1, 3, 13, 7, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 29, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 10, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 12, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 1, 11, 3, 1, 7, 1, 4, 1, 48, 16, 1, 4, 5, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2, 5, 20, 1, 1, 5, 4, 1, 436, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 6, 11, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 9, 1, 5, 1, 5, 15, 1, 11, ...]

Unter den Kettenbruchgliedern treten mit steigender Gliednummer auch größere Zahlen auf: 3.Glied = 15 ; 5.Glied = 292 ; 308.Glied = 436 ; 432.Glied = 20776 ; 28422.Glied = 78629 ; 156382.Glied = 179136 ; 267314.Glied = 528210
Im März 2002 ermittelte H.Havermann 180 Millionen Glieder dieser Kettenbruchentwicklung.

Lambertsche Näherungsbrüche für π

Tranformiert man die Kettenbruchentwicklung von π Schritt für Schritt in einen gemeinen Bruch, so erhält man immer bessere Näherungsbrüche für die Kreiszahl.
Lambert entwickelte so eine Folge π immer genauer darstellender gemeiner Brüche. Zusätzlich gab er noch zwei nicht auf der Kettenbruchentwicklung beruhende Brüche an.
Die Liste enthält für die Näherungsbrüche Zähler, Nenner sowie den absoluten Fehler bzgl. π. Die Lambertsche Liste wurde um neun auf dem Kettenbruch beruhende Brüche erweitert. Der letzte Bruch gibt π auf mindestens 38 Dezimalziffern genau an.

Zähler	Nenner	Genauigkeit
3	1	-0.1416
22	7	1.26422*10^-3
333	106	-8.3486*10^-5
355	113	2.6676*10^-7
103993	33102	-5.7789*10^-10
104348	33215	3.3163*10^-10
208341	66317	-1.2236*10^-10
312689	99532	2.9143*10^-11

833719	265381	-8.7155*10^-12
1146408	364913	1.6107*10^-12
4272943	1360120	-4.0407*10^-13
5419351	1725033	2.2145*10^-14
80143857	25510582	-5.7909*10^-16
165707065	52746197	1.6408*10^-16
245850922	78256779	-7.8179*10^-17
411557987	131002976	1.9364*10^-17
1068966896	340262731	-3.0701*10^-18
2549491779	811528438	5.5137*10^-19
6167950454	1963319607	-7.6266*10^-20
14885392687	4738167652	3.1232*10^-20
21053343141	6701487259	-2.6164*10^-22
1783366216531	567663097408	1.2277*10^-24
3587785776203	1142027682075	-3.1478*10^-25
5371151992734	1709690779483	1.9738*10^-25
8958937768937	2851718461558	-7.7216*10^-27
336851849443403	107223273857129	-4.4517*10^-27, kein Kettenbruch
1019514486099146	324521540032945	-4.4799*10^-27, kein Kettenbruch
428224593349304	136308121570117	-3.8054*10^-30
5706674932067741	1816491048114374	2.3328*10^-31
6134899525417045	1952799169684491	-4.8627*10^-32
30246273033735921	9627687726852338	4.5617*10^-33
66627445592888887	21208174623389167	-3.3582*10^-34
430010946591069243	136876735467187340	8.6578*10^-36
2646693125139304345	842468587426513207	-1.4107*10^-38
26245263033538219939 8	8354126689069199483 3	1.0118*10^-40

Der Näherungsbruch 428224593349304/136308121570117 = 3.14159265358979323846264338327(569...) liefert 29 korrekte Dezimalstellen und war schon 1766 dem japanischen Mathematiker Arima bekannt.

Näherungsbrüche für π

Für die Kreiszahl π können im besser annähernde Näherungsbrüche p/q auch durch schrittweises Erhöhen von p und q ermittelt werden. Die Tabelle enthält für wachsende Zähler p diejenigen Nenner, welche π genauer annähern.

Bruch	Näherung	Fehler
3/1	3,0000000000000000000000000000000000000000000000000000	0,141592653589793238
13/4	3,2500000000000000000000000000000000000000000000000000	-0,108407346410206762
16/5	3,2000000000000000000000000000000000000000000000000000	-0,058407346410206762
19/6	3,1666666666666666666666666666666666666666666666666667	-0,025074013076873428
22/7	3,1428571428571428571428571428571428571428571428571428	-0,001264489267349619
179/57	3,1403508771929824561403508771929824561403508771929824 6	0,001241776396810782
201/64	3,1406250000000000000000000000000000000000000000000000	0,000967653589793238
223/71	3,1408450704225352112676056338028169014084507042253521 1	0,000747583167258027
245/78	3,1410256410256410256410256410256410256410256410256410 3	0,000567012564152213
267/85	3,1411764705882352941176470588235294117647058823529411 8	0,000416183001557944
289/92	3,1413043478260869565217391304347826086956521739130434 8	0,000288305763706282
311/99	3,1414141414141414141414141414141414141414141414141414 1	0,000178512175651824
333/106	3,1415094339622641509433962264150943396226415094339622 6	0,000083219627529088
355/113	3,1415929203539823008849557522123893805309734513274336 3	-0,000000266764189062
52163/16604	3,1415923873765357745121657431944109853047458443748494 3	0,000000266213257

Auffällig ist der große Sprung von 355/113 bis 52163/16604.

π-Folge-Primzahl

Betrachtet man die Ziffernfolge von π, so kann man diese in eine Folge von Primzahlen zerlegen, die PI-Folge-Primzahlen. Die ersten sind

3
14159
2
653
5
89
7
9323
846264338327...303906979207 (3057 Ziffern)

73
467

Dabei ist zu beachten, dass die aus 3057 Ziffern bestehende Zahl nur "wahrscheinlich" eine Primzahl ist, da deren vollständiger Nachweis als prim noch nicht gelungen ist. Schon Euler vermutete, dass diese Zahl prim ist.
Weitere Primzahlen sind in der Folge von π versteckt, z.B.: 141592653589 oder 314159 oder 31415926535897932384626433832795028841.

π-Primzahl

Unter einer π-Primzahl versteht man die von den Ziffern der Kreiszahl π gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind. Dabei wird stets mit der ersten Ziffer "3" begonnen.
Bekannt sind bis heute (Juli 2006):
3, 31, 314159, 31415926535897932384626433832795028841, ...
Die Anzahl der bekannten π-Primzahlziffern sind 1, 2, 6, 38, 16208, 47577, 78073. Die größte dieser Primzahlen wurde am 1.April 2006 und 13.Juli 2006 (Kontrolle) durch E.W. Weisstein gefunden. Bis n < 79718 gibt es keine weitere.
Weitere Primzahlen bezüglich π findet man, wenn man den Term $[\pi^n]$ untersucht, wobei darunter die größte ganze Zahl kleiner gleich π^n verstanden wird.
Für n = 1, 3, 4, 12, 73, 317, 2728, 6826, 7683, 7950, 14417, ... ergeben sich die Primzahlen 3, 31, 97, 924269, ...
Untersucht man die größte ganze Zahl größer gleich π^n, so erhält man für n = 5, 29, 88, 948, 1071, 1100, 1578, ... die primen Zahlen 307, 261424513284461, 561291928588275208161934368828886842322337671, ...

Primzahlen in PI

Durch Patrick De Geest wurde das Problem aufgestellt, welche k-stellige Primzahl zuerst in der Ziffernfolge von π auftritt und welche zuletzt. Zum Beispiel tritt die zweistellige Primzahl 41 schon an Position 2 auf, dagegen die 73, als letzte, erst an Position 299.
Durch Felice Russo und vor allem J.C.Colin wurden die "Gewinnerprimzahlen" und "Verliererprimzahlen" mit intensivem Computereinsatz ermittelt.

Länge	Gewinnerprimzahl (Position)	Verliererprimzahl (Position)
1	5 (4)	7 (13)
2	41 (2)	73 (299)
3	653 (7)	373 (5229)
4	4159 (2)	9337 (75961)
5	14159 (1)	35569 (715492)
6	358979 (9)	805289 (11137824)
7	1592653 (3)	9271903 (135224164)
8	28841971 (33)	

π im Dualsystem

Die Dezimalzifferfolge von π kann als p-adischer Bruch in jedem anderen Positionssystem dargestellt werden. Nachfolgend sind die ersten dualen Nachkommastellen der Kreiszahl dargestellt.

00100 10000 11111 10110 10101 00010 00100 00101 10100 01100 00100 01101 00110 00100
11000 11001 10001 01000 10111 00000 00110 11100 00011 10011 01000 10010 10010 00000
10010 01110 00001 00010 00101 00110 01111 10011 00011 10100 00000 01000 00101 11011
11101 01001 10001 11011 00010 01110 01101 10010 00100 10100 01010 01010 00001 00001
11100 11000 11100 01101 00000 00100 11011 10111 10111 11001 01010 00110 01101 10011
11001 10100 11101 00100 00110 00110 11001 10000 00101 01100 00101 00110 11011 11100
10010 11111 00010 10000 11011 10100 11111 11000 01001 10101 01101 10101 10110 10101
00011 10000 10010 00101 11100 10010 00010 11011 01010 11101 10011 00010 01011 11001
11111 01100 01101 11101 00010 01100 01000 01011 10100 11010 01100 01101 11111 01101

Die linke Abbildung zeigt die ersten dualen Dezimalstellen von π.
In der Dualdarstellung von π findet man natürlich die verschiedensten Dualzahlen, zum Beispiel ab Position 3 die Ziffern 1001, d.h. die Zahl 9. Die letzte auftretende einstellige Zahl ist die 5 ab Position 17, die letzte zweistellige Zahl die 87 ab Stelle 533, die letzte dreistellige Zahl ist die 886 ab Position 8024; die letzte vierstellige Zahl ab der 115500.Position ist die 8778. Von den ersten 72660 Zahlen findet man als Letzte die 72583 ab der 1523116.Dezimalstelle. Bis 2^{18} sind alle Dualzahlen in den ersten 3,2 Millionen Kommastellen vertreten. Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 8,3 Millionen Dualziffern nicht zu finden ist, ist die 527640. (Polster, Juni 2006)
Zählt man das Auftreten der "0" und "1" in der Dualziffernfolge, so stellt man fest, dass ab Position 27 die Nullen deutlich über 50 % liegen. Die Vermutung, dass dies immer so ist, erweist sich schnell als falsch. Ab der 6374.Stelle schwanken die Anteile bis 9102 ständig um 50 %. Danach

überwiegt wieder eine Ziffer bis zur 15162. Stelle und so weiter.
Die Tabelle enthält die wachsenden Dualzahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	3	2	3	3	11	5	16
10	19	12	47	19	60	23	91
28	93	32	95	37	126	39	144
43	393	75	421	87	532	143	814
206	867	259	2453	366	3044	477	3269
565	5779	690	6006	886	8023	1081	17047
1130	17213	2087	23391	2130	26292	2261	27397
2348	35838	4155	42155	4326	53097	4347	54481
4610	57276	6064	71895	8297	86538	8350	100612
8735	109074	8778	115499	10540	160104	16945	184334
17178	195794	17329	235365	18884	237524	19137	258465
21347	301568	24802	315359	27392	345065	32772	466395
33220	570298	37298	692908	46117	755173	65659	756820
65793	830958	67214	873806	68368	1021819	70526	1064855
72583	1523115	131846	1761465	132977	2270153	134155	2346154
136132	2388109	140839	2812645	190368	2977872	201620	3116951
262169	3148986	263400	3685301	264414	3795930	264707	4352711
273819	5756924	295518	5878485	313221	7600330	524822	7815025

In den Dualkommastellen der Kreiszahl π im Dualsystem treten nur die Ziffern 0 und 1 auf. Damit wird es auch Folgen der gleichen Ziffer geben.
Die Ziffer 0 tritt bis zu 50 Millionen Dualstellen erstmals n = 1, 2, 3, … mal ununterbrochen ab der Kommastelle auf: 1, 1, 7, 7, 96, 96, 96, 189, 902, 902, 4267, 8375, 8375, 8375, 11791, 11791, 112954, 436893, 726844, 726844, 2005750, 2005750, 2005750, 42248747
d.h. 24 aufeinanderfolgende 0 ab Stelle 42248747.
Die Ziffer 1 tritt n = 1, 2, 3, … mal ununterbrochen ab der Kommastelle auf:
3, 11, 11, 11, 11, 11, 451, 645, 645, 645, 5212, 18123, 18123, 58276, 58276, 80697, 80697, 80697, 1146746, 1962901, 3296306, 9772065, 9772065, 9772065, 47536571
d.h. 25 aufeinanderfolgende 1 ab Stelle 47536571.

PI im Vierersystem

Die Dezimalzifferfolge von PI kann als p-adischer Bruch in jedem anderen Positionssystem dargestellt werden.
Nachfolgend sind die ersten Nachkommastellen der Kreiszahl im Vierersystem angegeben.

3.021003331222202020112203002031030103012120220232000313001303101022100021032002020 2
212133030131000020023233222120323010321230202110110220020132120320310001031313233211
101212303303103221003012303000223002212313302113301100313103332010311123112311101300
210113210201123111312120211321332301233101030100232212212031332311223002333331130231
233100012231332313232032012233323112220212133221122322133021001011330102301333212102
102201212110132303210112303313002000013302320220112032333001121203122102003120130111
131032122122101120333222033310210303311332003121111310203313022032231211201301202330
311120200201111022323213231110221001313002112211212311212300300311103210222330212000 1
033011310123000203022012002011330030221001132101202320312303203233203213213130230012
000322012000321230213200322023230001322022033231130111131330012331030110230213132022
330233312211111200113012003212111102113303222211112223211011131020212012021203322001
101000111130220321122202222223010023122310303011300310010110013220303222011110201222
331330130232212103230332320110010110203123323300222022322213011113113100120030133123 0
321130033201122123201321030132223331122322030312300210303311301322030211032001022021
112012131303232033102021201223102323212233301023333220012312120220020121031201312000
213030332302012221210110201330223012001131323020000302323320101131113132212011131123
013130021202030002323121101232020020320210332200131032112223030110033123112333303 20
033310100203210232002310102002221020100200001012213020330010222132013321231132020130
121220100233123221123021221213003021301201222331032020330012221101220031023120111002
331220211200332213022022231101030322031232323300231230010313220323321023220323330011
001332332302222120220133011211013103212233000113121212302211210332200210030032202020
303232201201211011123321332310133120102211300303232023113223323200123313113120201130
010200130310000122101021331112300112222212103231032222120203120333131300120123333231
331302100221230002033103133100311302103100002201021020312300333222310310213301300021
230013110313023021200021210123132302113110132131203312322031323313320333321100012223
121321103003232113123032002331001030000012232230012221103323121000213312003010113211
302132300201211222021012031220332312332233033212301103231101030321230232230323110232

3012331231333011010133212303002111023030302001101110102233113223310021233232033100001031320303102233311212003302200013012102321023230330003023222011131011302013100033310200231133032123213103332331231111132130002331012212000302002231122201000030121 00 …

π im Hexadezimalsystem

Nachfolgend sind die ersten hexadezimalen Nachkommastellen der Kreiszahl dargestellt.

243F6A8885A308D313198A2E03707344A4093822299F31D0082EFA98EC4E6C89452821E638D01377BE5
466CF34E90C6CC0AC29B7C97C50DD3F84D5B5B54709179216D5D98979FB1BD1310BA698DFB5AC2FFD
72DBD01ADFB7B8E1AFED6A267E96BA7C9045F12C7F9924A19947B3916CF70801F2E2858EFC16636920
D871574E69A458FEA3F4933D7E0D95748F728EB658718BCD5882154AEE7B54A41DC25A59B59C30D539
2AF26013C5D1B023286085F0CA417918B8DB38EF8E79DCB0603A180E6C9E0E8BB01E8A3ED71577C1BD
314B2778AF2FDA55605C60E65525F3AA55AB945748986263E8144055CA396A2AAB10B6B4CC5C341141
E8CEA15486AF7C72E993B3EE1411636FBC2A2BA9C55D741831F6CE5C3E169B87931EAFD6BA336C24CF
5C7A325381289586773B8F48986B4BB9AFC4BFE81B6628219361D809CCFB21A991487CAC605DEC8032
EF845D5DE98575B1DC262302EB651B8823893E81D396ACC50F6D6FF383F442392E0B4482A484200469
C8F04A9E1F9B5E21C66842F6E96C9A670C9C61ABD388F06A51A0D2D8542F68960FA728AB5133A36EEF
0B6C137A3BE4BA3BF0507EFB2A98A1F1651D39AF017666CA593E82430E888CEE8619456F9FB47D84A5C
33B8B5EBEE06F75D88...

Auch in der Hexadezimaldarstellung von π findet man die verschiedensten Hexadezimalzahlen. Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 1 Millionen Hexadezimalziffern nicht zu finden ist, ist die 65536 = $[F0000]_{16}$. (Polster, Juni 2006)
Die Tabelle enthält die wachsenden Hexadezimalzahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	17	7	27	11	81	16	148
17	489	28	754	53	1446	257	3272
258	10067	268	16595	302	18944	313	27175
717	27520	771	29268	3686	31814	4096	40780
4097	44881	4098	54370	4099	78911	4100	80931
4102	102954	4106	134883	4110	207731	4141	287213
4251	293824	4553	331234	4692	336110	4735	337543
4883	373557	5035	395890	5168	421107	5371	558461
9058	672793	10032	874018				

Normalität von PI

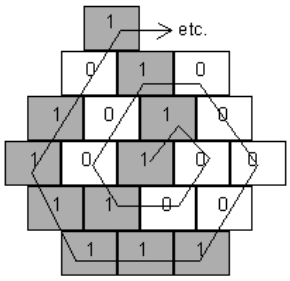
Eine sehr wichtige mathematische Frage bezüglich π ist, ob sie eine normale Zahl ist, d.h. ob sie zum Beispiel in einer binären oder jeder anderen n-ären Zahlendarstellung jede mögliche Binär- bzw. sonstige Zifferngruppe gleichermaßen enthält; so wie dies die Statistik erwarten ließe, wenn man eine Zahl vollkommen nach dem Zufall erzeugen würde.
Dies würde bedeuten, dass die Kreiszahl alle bisher und zukünftig geschriebenen Bücher irgendwo in codierter Binär-Form enthalten muss.

Bailey und Crandal zeigten im Jahr 2000, dass die Existenz der Bailey-Borwein-Plouffe-Formel und ähnlicher Gleichungen belegt, dass die Normalität von π zur Basis 2 auf eine bestehende Vermutung der Chaostheorie reduziert werden kann.

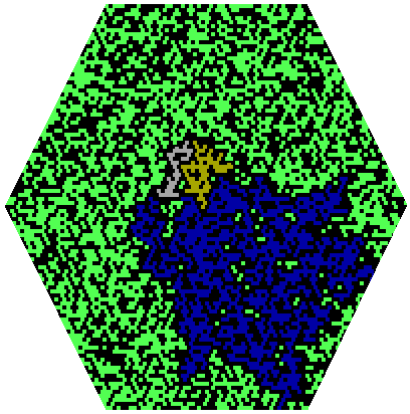
Physiker der Purdue Universität haben im Jahre 2005 die ersten 100 Millionen Dezimalstellen von π auf ihre Zufälligkeit hin untersucht und mit kommerziellen Zufallszahlengeneratoren verglichen. Der Forscher Ephraim Fischbach und sein Mitarbeiter Shu-Ju Tu konnten dabei keinerlei verborgene Muster in der Zahl π entdecken. Demnach sei nach Ansicht Fischbachs die Zahl π tatsächlich eine gute Quelle für Zufälligkeit. Mittlerweile wurde die Suche auf mehrere Milliarden Dezimalstellen erweitert.
Abbildung: Der PI-Saal im "Palais der Entdeckungen" in Paris

Lady Pi

1998 ordneten Richard Lawrence und Schuyler Falls die Ziffernfolge von im Dualsystem spiralförmig an, in dem sie für jede 1 einen Punkt setzten, für jede 0 ein leeres Feld.



Nach 50 vollen Spiralwindungen wurden nun bestimmte Bereiche farbig markiert. Mit etwas Fantasie erkennt man nun in der Figur eine Person. Diese wurde „Lady Pi" getauft. Die Fragen sind nun: Wie kommt man auf so eine Idee? Wieviel Vorstellungskraft braucht man, um in dem Muster wirklich etwas zu „sehen"?



Notwendigkeit der Genauigkeit von π

Durch verschiedene Mathematiker und Computerfachleute wird π auf immer mehr Dezimalstellen berechnet. Neben der Notwendigkeit des Testens neuer Computersysteme, der Entwicklung leistungsfähigerer Algorithmen, des Studiums der Eigenschaften von π („Normalität") reizt natürlich auch ein neuer Weltrekord in den berechneten Stellen. Für die Elementarmathematik ist dies ohne Bedeutung. Die Tabelle enthält für einige Genauigkeiten von π den Fehler, der bei der Berechnung eines Kreisumfangs auftreten würde:

Genauigkeit	Objekt	Radius	Umfang	Berechnungsfehler
5 Dezimalstellen	Stadion	100 m	$6 \cdot 10^5$ mm	6 mm
10 Dezimalstellen	Erde	6378 km	$3.7 \cdot 10^{10}$ mm	3.7 mm
20 Dezimalstellen	Milchstraße	10^{16} m	$3.1 \cdot 10^{19}$ mm	31 mm
30 Dezimalstellen	sichtbares Universum	15 Milliarden Lichtjahre	$0.44 \cdot 10^{30}$ mm	0.44 mm

Mit 39 Dezimalstellen Rechengenauigkeit würde sich der Berechnungsfehler durch die „Ungenauigkeit" von π für den (theoretischen) Umfang des sichtbaren Weltalls auf den Radius eines Wasserstoffatoms reduzieren.

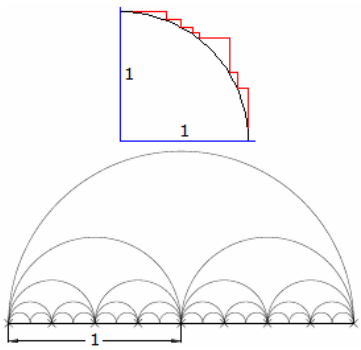
π in Intel-Prozessoren

In den Intel-Prozessoren ist π als Konstante vordefiniert mit

$\pi = 0.f \cdot 2^2$ mit f = C90FDAA2 2168C234 C

d.h. als Näherungswert = 3,14159265358979323845 85…

Der genauere Wert von π weicht in der 20.Stelle ab = 3,14159265358979323846 26…



π-„Paradoxon"

Betrachtet wird ein Viertelkreis mit dem Radius 1. Dessen Umfanh wird mit einer „Außentreppe" angenähert. Da sowohl horizontal als auch vertikal genau die Länge 1 zurückgelegt wird, hat diese Außentreppe die Länge 2. Verfeinert man nun die einzelnen Teilstrecken, so bleibt die Gesamtlänge gleich 2. Mit zunehmender Verfeinerung nähert sich die Außentreppe immer mehr dem Viertelkreis an.

Das bedeutet, dass im „Grenzwert" die Außentreppe die gleiche Länge wie der Viertelkreis hat. Daraus ergibt sich aber $2\pi r / 4 = \pi/2 = 2$ und somit $\pi = 4$!

Dieses scheinbare Paradoxon ergibt sich daraus, dass im Grenzfall unendlich viele Teilstrecken der Länge „0" zu multiplizieren sind, d.h. „$\infty \cdot 0$". Dieser Ausdruck ist unbestimmt und somit keine Näherung des Viertelkreises.

In der unteren Darstellung wird auf ähnliche Weise "nachgewiesen", dass $\pi = 2$ ist. Für die immer kleiner werdenden Halbkreise gilt:

$U_1 = \pi$ $\quad 2\,U_2 = \pi$ $\quad 4\,U_4 = \pi$ $\quad 8\,U_8 = \pi$

usw. Bei immer feinerer Unterteilung wird durch die Summe der Halbkreise der Durchmesser approximiert. Also "gilt" $\pi = 2$

d.h., Umfang des Halbkreises und der Durchmesser des Kreises sind gleich groß!

π in zahlentheoretischen Sätzen

Außer der Tatsache, dass π im Zusammenhang mit der Kreisberechnung immer wieder auftaucht, findet man π auch in einer Vielzahl interessanter mathematischer Sätze und Zusammenhänge. Eine kleine Auswahl:

Gaußsche Funktion r(n). Beschreibt r(n) die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in zwei Quadrate, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} (r(1)+r(2)+\ldots+r(n)/n = \pi$$

Ist $\sigma(n)$ die Anzahl der Teiler einer ganzen Zahl n, so gilt

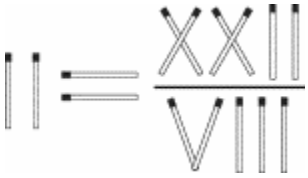
$\lim_{n\to\infty} (\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)/n^2 = \pi^2/12$

Möbiussche μ-Funktion μ(n): für die Summenbildungen von n = 1 bis ∞ wird dann $\Sigma\ \mu(n)/n^s = 1/\zeta(s)$

→ $\Sigma\ \mu(n)/n^2 = 6/\pi^2$ und $\Sigma\ \mu(n)/n^4 = 90/\pi^4$

Eulersche ϕ-Funktion: $\lim_{n\to\infty} (\phi(1)+\phi(2)+\ldots+\phi(n)/n^2 = 3/\pi^2$

PI-Rätsel



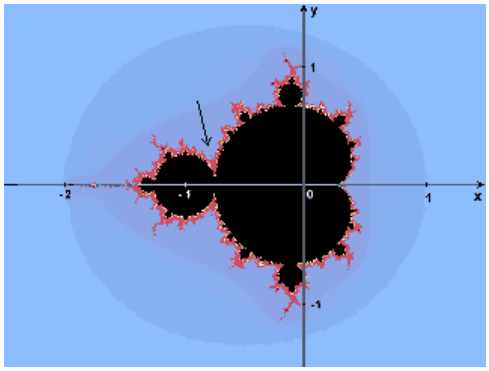
Eine immer wieder erwähnte Aufgabe ist es, durch das Umlegen eines einzelnen Hölzchens aus der nebenstehenden Aufgabe eine näherungsweise richtige Aussage zu machen. (siehe Abbildung)

Die Lösung besteht darin, von der römischen VIII im Nenner ein Streichholz wegzunehmen und dies über die II links zu legen, so dass ein π entsteht. Damit gilt dann π ≈ 22/7.

π und die Mandelbrotmenge

1991 wurde durch David Bolle nachgewiesen, dass man selbst an der Mandelbrotmenge π findet. Dies ist äußerst überraschend!

Für die Mandelbrotmenge wird für jeden Punkt C der komplexen Zahlenebene die Iteration $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, $Z_0 = 0$ berechnet. Überschreitet der Betrag $|Z_n|$ den Wert 2, so divergiert die Iteration. Alle Punkte C, für die keine Divergenz vorliegt, bilden die eigentliche Mandelbrotmenge.



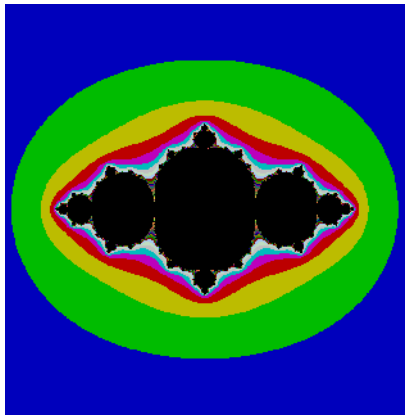
Bolle betrachtet nun Punkte der Form C = (-0.75, X) und konnte zeigen, dass diese stets zur Divergenz führen. Das verblüffende ist nun, dass die Anzahl n der Iterationsschritte bis $|Z_n| \geq 2$ von X abhängt und für X → 0: X * n → π gilt.

Konkret ergibt sich:

X	Anzahl Iterationen	X	Anzahl Iterationen
1.0	3	0.1	33
0.01	315	0.001	3143
0.0001	31417	0.00001	314160
0.000001	3141593	0.0000001	31415928

Ein ähnliches Ergebnis erhielt Gerald Edgar 1992. Für die komplexen Punkte C = (0,25 + X, 0) konvergiert mit X → 0 in diesem Fall n √X → π. Für X = 0.0000000001 sind hier zum Beispiel 314157 Schritte bis zum Überschreiten der 2 nötig.

Übrigens gehört zu dem Punkt C = (-0.75, X) die abgebildete Julia-Menge, die auch San Marco-Menge genannt wird.



Die Begründung für diese merkwürdige Eigenschaft an der Mandelbrot-Menge ist nicht trivial.

Betrachtet man das Ergebnis von Edgar, wird $Z_{n+1} = Z_n^2 + ¼ + X$. Mit der Substitution $Z_n = Y_n + ½$ wird $Y_{n+1} + ½ = (Y_n + ½)^2 + ¼ + X$. Damit kann die Interation auf $Y_{n+1} = Y_n^2 + Y_n + X$, $Y_0 = -1/2$ ungeschrieben werden. Die Iteration divergiert nun wenn Y_n die Null überschreitet. Ersetzt man nun $Y_{n+1} - Y_n$ durch die erste Ableitung Y_n' wird $Y_n' = Y_n^2 + X$. Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$Y_n = a \tan(a\, n + b) \text{ mit } a = \sqrt{X}$$

Y_n überschreitet nun genau dann zum ersten Mal die Null; die Iteration divergiert; wenn der Tangens vom Negativen zum Positiven wechselt. Entweder ist b = 0 oder a n nähert sich π: √X * n ≈ π.

Für Punkte C = (-0.75, X) ergibt sich mit erheblich mehr Aufwand die Differentialgleichung $dY_n/dX = Y_n^4 - 2\, Y_n^3 + 2i\, X\, Y_n^2 - 2i\, X\, Y_n - X^2$. Das nur mit großer Anstrengung zu lösende Integral liefert dann die Konvergenz von n X gegen die Kreiszahl.

π-Gedächtnisrekorde

Etwas merkwürdig ist ein weltweiter Wettkampf, bei dem aus dem Gedächtnis heraus, ohne jegliche Hilfsmittel, die Dezimalzifferfolge von π aufgesagt werden soll.

Am 2.Juli 2005 stellte der Japaner Akira Haraguchi den aktuellen Rekord auf. Aus dem Gedächtnis gab er 83431 (!) Dezimalstellen von π in der richtigen Reihenfolge exakt an.

Aktuelle Rangliste

Platz	Name	Land	Stellen von π	Datum
1	Haraguchi, Akira	Japan	83431	2.Juli 2005
2	Goto, Hiroyuki	Japan	42195	18.Februar 1995
3	Tomoyori, Hideaki	Japan	40000	10.März 1987
4	Mahadevan, Rajan	Indien	31811	5.Juli 1981
5	Thomas, David	Großbritannien	22500	1.Mai 1998
6	Carvello, Creigthon	Großbritannien	20013	27.Juni 1980
7	Fiore, David	USA	10625	1.April 1979

8	Bergsten, Mats	Schweden	8050	27.September 1991
9	McLincha, Riley	USA	7500	10.Oktober 1978
10	Duch, Mike	Deutschland	5555	28.September 2004
11	Poultney, Michael John	Großbritannien	5050	22.März 1977
12	Plouffe, Simon	Kanada	4096	4.Dezember 1975
13	Gould, Dean	Großbritannien	3000	1.Februar 1999
14	Koningsveld, Jan van	Deutschland	2770	6.März 1999
15	Berberich, Edward C.	USA	1505	Juni 1974
16	Pearson, Timothy	Großbritannien	1210	21.Dezember 1973

Der aktuelle Rekord im π-Vorlesen liegt bei 108000 Nachkommastellen in 30 Stunden. Der Weltrekordversuch begann am 3. Juni 2005 um 18:00 Uhr und wurde am 05. Juni 2005 pünktlich um 0:00 Uhr erfolgreich beendet. Über 360 freiwillige Leser lasen jeweils 300 Nachkommastellen. Aufgestellt und organisiert wurde der Weltrekord von Lisa Grieb und Svenja Häuser vom Mathematikum in Gießen. Jan van Koningsveld hält den gegenwärtigen (2006) Weltrekord des Multiplizierens zweier achtstelliger Zahlen im Kopf in nur 38,1 Sekunden. Andere Rekorde hat er an Gert Mittring verloren: Merken von 22 Dezimalziffern in 4 Sekunden sowie von 30 Binärziffern in 3 Sekunden, Ziehen der Quadratwurzel aus einer sechstellingen Zahl in 44,7 Sekunden, Ziehen der 13. Wurzel aus einer 100-steligen Zahl in 39,0 Sekunden.

π-Code

Die Kreiszahl π übt seit Jahrhunderten einen besonderen Reiz auf Mathematiker und Hobbyforscher aus. Auch Schriftsteller griffen die Zahl auf und suchten nach Besonderheiten. Zwei Science-Fiction-Autoren vermuteten in der Dezimalziffernfolge von π sogar eine Botschaft eines höheren Wesens. Diese Werke sind von Martin Gardner ("Doctor Matrix") und dem berühmten Wissenschaftler Carl Sagan ("Contact"). Letzterer entfernte diesen Abschnitt aber selbst aus dem Drehbuch des Films „Contact". Wahrscheinlich war es ihm doch zu „fiktiv". In „Doctor Matrix" beinhaltet die Dezimalfolge von π die ganze(!) Geschichte der Menschheit.

Idee des PI-Codes

Dazu werden die Dezimalziffern von PI aus dem Dezimalsystem in das 26ziger-System transformiert. Die 26 Ziffern werden nach dem Schema 0 = A, 1 = B, 2 = C ... kodiert. Im Ergebnis entsteht eine Folge von Buchstaben von A bis Z, die Ziffernfolge der Kreiszahl π im 26ziger-System.
In dieser Zeichenfolge kann nun nach sinnvollen deutschen Wörtern gesucht werden. So tritt zum Beispiel an der Stelle 84871 das Wort KUGEL auf. Das erste deutsche sechsbuchstabige Wort ist an der 97453.Stelle ZIRKEL. Für Zahlenmystiker dürfte dies nicht verblüffend sein, denn irgendwie hat ein Zirkel doch etwas mit einem Kreis und somit mit PI zu tun.
Wörter mit mehr als 5 Buchstaben treten sehr selten auf. Dies ist auch nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass 26 verschiedene Zeichen in der Ziffernfolge auftreten und somit für sechsbuchstabige Wörter 26^6 = 308 Millionen 915 Tausend 776 Möglichkeiten existieren. Um ein bestimmtes Wort mit sechs Buchstaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % zu finden, würden Sie 300 Millionen Ziffern benötigen.
Berücksichtigt man die Anzahl der vorhandenen 3-, 4-, 5-, ... buchstabigen, sinnvollen, Wörter; zum Beispiel etwa 5500 vierbuchstabige; so ist ein n-buchstabiges Wort aller z Ziffern zu erwarten:

n	z	n	z	n	z
2	4	3	13	4	81
5	1000	6	14800	7	272000
8	5.7 Millionen	9	140 Millionen	10	3.900 Milliarden

Nach dieser Rechnung wären unter den ersten 3 Millionen 26er-Ziffern etwa 4 siebenbuchstabige Wörter zu finden. Bisher konnten aber keine deutschen ermittelt werden.
Durch Mike Keith und Hans Haverman wurde intensiv nach englischen Wörtern gesucht. Ein 8buchstabiges englisches Wort ARMAGNAC wurde ab Stelle 3095146 nachgewiesen. Bis heute konnte noch kein Wort mit mehr als 8 Buchstaben gefunden werden.

π im 26er System

DRSQLOLYRTRODNLHNQTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMELMUEXROIQIYALVUZVEBMIJPQQXLKPL
RNCFWJPBYMGGOHJMMQISMSSCIEKHVDUTCXTJPSBWHUFOMQJAOSYGPOWUPYMLIFSFIIZRODPLYXPEDO
SXMFQTQHMFXFPVZEZRKFCWKXHTHUHCPLEMLNUDTMSPWBBJFGSJHNCOXZNDGHKVOZRNKWBDMFUAYJ
FOZXYDKAYMNQUWLYKAPLYBIZUYBROUJZNDDJMOJYOZSCKSWPKPADYLPCTLJDILKUUWKQKWJKTZMELG
COHRBRJENRQVHJTHDLEEJVIFAFQICQSMTJFPPZXZOHYQLWEDFDQJRNUHRLMCNKWQJPAMVNOTGVYJQN
ZMUCUMYVNDBPGMZVAMLUFBRZAPMUKTSKBUPFAVLSWTWMAETMVEDCIUJTXMKNVXKDTFGFHQBANKOR
NPFBGNCDUKWZPKLTOBEMOCOJGGXYBVOAETMHCTTMAJDXAUWWPYVMUFSUDJVOCMAHMIIHNCLYWNPI
OJEGQWZMWRUYQEWJYVBUHOOWAMCTUXRIIIRVSLLTAVUTWBGXMEGGFJWQMSVNXIPEAZLBDLNHSXZE
DQQDOLAPEZHKWMOAERLSUJXVVHKRFKFEZPCHLMPDWRVEROCKWHPQFDOWOYVJWPXUOGYHTIDUARQ
ZHEQQVONLMVZSNOPAXNLEKFNEWFCEUJLEXVEDMNMHUYOXFANUJCFMVSYNWTUHPWLQQGNVRBOCJHX
EIVLOYXXYWVASZHPSEPNLWEZGSOWPEWWVSVYTTTXLSWCWCEHEHCWDFMXNMMHQSUVYIYWJLGHIJCL
HYZTSBKPLHKQNCDVRWRSIBKSAOITVTAXNDYKNHMMRPVIJYJLXNHQTUZQQCTCKDLDWBRBQZMVGVHUB

ZEFKHSLDIMFLRPADNTJBCCDUILOIKJMQFBVFDEQOEOSNXRFDMLOPCSREJFTGRQEBPPYLUIYSLBBOFNYZ
QYNRMZZTEHDYUQYRNZXISKCDDTBTLWGXYHMSAFBLBTXNIROQMKUKUTVEPNQXNVZZWTYMZFCPVSRYG
CYGSVQUFSBDARUUWJIQWOIYIJDGWUAQLWJSQWHIIZOAHUSDLCMFUULIKUQPHWRUULEMPCVODPCWY
ZRDJIZIMZUZDFJZAALJSJRVDOWHMCJDRMKVSNHGGMSDBFCLNCQHHTDANRGGQLCGTIHKFQHXZDGMDS
LPOXSIWMDGSPFCYYLRELELLGNZQKQISJHHUZIEVWUZVLYMXHDOPCILFRLEBVJYRORHHHKGWZASSWDB
DRMLRXPDFQQCKKOIQTSZOSNYXRSINQJHUXNARTIDKCFARCKCPAAQACFSPJXOPAGKURRSZBKQJODMAT
YJNACETVWYLZCWGMJWMEUGSTLBDKPXMWNXILHEHTFFNNVYMFOFJTQR...

π-Code-Tabelle

Stellt man die Dezimalzifferfolge von PI im 26er-System dar, so kann man nach dem Auftreten bestimmter Buchstabenfolgen suchen, die ein deutsches Wort darstellen.
Zählt man z.B. das an Stelle 11582 auftretende sechsbuchstabige (nicht echt deutsche) OXYGEN nicht, so ist das erste deutsche Wort mit 6 Buchstaben ZIRKEL. Was werden dazu wohl Zahlenmystiker sagen?
Ein siebenbuchstabiges Wort konnte noch nicht gefunden werden. Aber ab der 458064.Stelle folgt NROHPLA; und umgekehrt heißt dies ALPHORN. Nachfolgend sind solche drei- bis sechsbuchstabigen Worte mit ihrem erstmaligen Auftreten aufgelistet.

6-buchstabige Wörter
OXYGEN (11582), ZIRKEL (97453), KANTOR (181844), DAMALS (301352), ZEIGEN (590032), GLASUR (867593), FALLIT (883268),
SOFERN (964188), REDNER (1013435), HITZIG (1050263), PROLOG (1109780), PROBEN (1154268), PHASEN (1193261), MONICA (1420716), SEUCHE (1494216), TRAENE (1887287), ...

5-buchstabige Wörter
SCHAH (18370), ERICH (25285), ALIAS (32362), BENNO (33141), IMMER (44910), OSTEN (50050), HAFEN (62465), KUGEL (84871), EMPOR (205819), SERIE (220708), GRAMM (223505), WARZE (249934), STUTE (257233), RUDER (271474), LACHE (280668), HAGEL (283042), RUSSE (283738), MASKE (287072), TITAN (293164), PUNKT (295319), GEIGE (296017), MINZE (317557), ARITE (327091), ZIEGE (328208), SEIFE (330645), DEGEN (342871), KAMEL (345632), SITTE (348668), APFEL (392806), SORGE (405210), UNTEN (431880), ALTER (443293), WOLKE (444702), ENKEL (477099), REELL (499015), FLUCH (509788), WUCHS (519390), TAUEN (558020), EKZEM (563456), ROVER (572287), KOREA (582932), PETER (584046), EIGEN (590033), STEIL (590579), ORGAN (623209), BRETT (625278), IRREN (625752), STEIN (630776), DEMUT (648857), AKTIV (662574), WUNDE (666845), SONNE (669134), BRAUN (671292), MOTTE (674885), ORGIE (677548), ZENIT (705942), JENES (710074), RINDE (711098), HEBEL (752764), BLIND (761015), HAGER (768145), WOLLE (773062), IDEAL (812399), MESSE (840137), BUCHE (857041), HANKE (858003), WESEN (885925), FRONT (900138), LAMPE (931550), STATT (975134), ...

4-buchstabige Wörter
BANK (459), KORN (462), ROCK (661), RUHR (1852), FROH (2057), VISA (2079), ZOFE (3042), ORTE (3157), WITZ (3200), SOHN (3417), HAXE (3658), SAUS (3787), EHER (4015), HOLD (4106), JOCH (4289), ESSE (4537), ELLY (4751), HELL (5458), WOZU (6047), OESE (6132), GECK (6433), ECKE (6434), TEAM (7263), MINI (7399), HUFE (7540), ADEL (7563), MUND (8478), FEIG (9251), ANTI (9584), HERD (9885), ZOLL (10622), CLUB (11445), PULS (11639), RANG (13158), MAUS (13459), NEUN (16229), HARM (16428), KORK (18348), FORT (20020), PUFF (20995), KAMM (21813), FRAU (22658), REIM (22842), BAHN (23104), BAND (24280), KAUM (24475), KOPF (25905), WACH (26437), VERB (27049), TAJO (27347), FACH (27442), GALA (28660), ZAUN (29679), LENA (29973), WOGE (31229), FORM (34303), LIGA (36042), WAHL (36138), KULM (43199), HALS (43475), ZEIT (44864), ADAM (45797), WABE (49389), TUBE (49757), ENTE (49915), PLAN (49935), PFUI (50106), EURO (50853), GERN (51084), BACH (53428), AVIS (53885), MEHR (54847), LAIE (55050), TANZ (55894), POET (57494), SAME (57974), EPOS (59888), KODE (60812), ESTE (61359), EMIR (61591), AUGE (62047), GRAD (62166), LIEB (63159), VIEL (63370), ANNE (63876), SINN (65381), FIRM (66095), NAHE (66522), HEER (67367), WURM (70456), EBER (70536), STAB (71034), LENZ (71222), VASE (71792), KIEL (71842), THOR (72304), HERZ (72723), ZAHN (72877), HIRN (73159), PEST (74676), REIF (77159), JAHR (77851), QUER (80074), EGGE (80322), DUMM (80404), GIRO (80976), ZINN (81464), ROHR (82493), RAND (83077), WORT (83440), ZAHL (84311), KINO (85217), MATT (86721), DREI (87299), ZELT (87638), KALB (88202), PEIN (89038), ...

3-buchstabige Wörter
HUF (121), KAY (241), OHR (314), LEE (330), UHR (367), NOT (382), CDU (473), SUD (521), IHN (533), GGF (593), VON (699), PAX (709), LEX (725), FAN (739), EHE (816), HUB (920), DAR (1090), ULI (1132), ZDF (1166), AAL (1171), ASS (1305), ART (1346), JOD (1383), BMW (1465), LID (1468), NEU (1528), UDO (1530), GIB (1578), NIE (1702), TAU (1777), AUE (1778), RUH (1854), RED (1857), SOD (1861), CPU (1984), ROH (2060), ISA (2082), MAN (2123), WEH (2167), WEG (2172), BND (2178), LEO (2319), DAS (2350), ULK (2383), DPA (2433), ARG (2435), KGV (2460), RHO (2475), IVO (2507), YEN (2583), AAR (2637), BUG (2706), ZUM (2719), PDS (2765), ABS (2831), KUH (2838), HAT (2887), PUR (2895), SEE (2932), PHI (2987), VOM (3020), TOM (3051), RAD (3058), ORT (3156), GON (3169), GAS

(3350), OEL (3438), WER (3466), AGA (3489), KIM (3497), ZUR (3618), NUR (3624), DGB (3735), DUO (3765), SAU (3786), AUS (3787), AOL (3876), KAM (3897), BAI (3995), FEE (4012), HER (4015), SEX (4080), HOL (4108), POL (4167), UND (4256), HUT (4294), BOE (4302), WIE (4505), ZUG (4738), TOD (4759), BIS (4785), UNO (4948), BOX (4982), HEX (5075), DES (5255), MOL (5313), ALF (5331), GUT (5388), SAH (5415), RAR (5558), EIN (5676), LOS (5766), LUX (5779), TUN (5855), WAR (5969), UDE (6049), FAX (6242), INA (6277), ECK (6436), MAI (6457), RIA (6553), TEE (6573), ELF (6575), WAS (6663), MAG (7009), NIX (7400), NRW (7497), ADE (7562), GIN (7880), OHM (7960), NAH (8001), DIE (8043), TAZ (8064), ETA (8170), VOR (8345), JOB (8389), AKT (8547), OED (8905), POP (8945), ABO (8961), BOA (8962), REH (9006), MAL (9118), OHA (9195), AFP (9275), LUG (9369), MOB (9405), URS (9415), ROT (9483), BAU (9577), WUT (9650), ULF (9653), LKW (9773), IOC (9812), ARD (9979), BON (10031), MIT (10067), ...

Die ersten natürlichen Zahlen können auch als Wort in der Dezimalfolge gefunden werden:
NULL (Position 557009), EINS (271247), ZWEI (352991), DREI (87299), VIER (1312280), ACHT (172000), NEUN (16229), ZEHN (467076), ELF (6573). Die FUENF, SECHS, SIEBEN und ZWOELF ist unter den ersten 3 Millionen Ziffern nicht zu finden.

Anmerkung: Wenn die Kreiszahl eine normale, irrationale Zahl ist, so müssen alle möglichen Buchstabenkombinationen irgendwann einmal in der Ziffernfolge auftauchen. Auch wenn es kaum vorstellbar ist, so muss man ab einer noch so fernen Stelle auch den hier abgedruckten Text finden, ebenso jedes irgendwann einmal von einem Menschen geschriebene Buch und alle die in Zukunft noch geschrieben werden! D.h., π enthält das ganze schon erworbene und jemals erwebbare Wissen! Unvorstellbar!

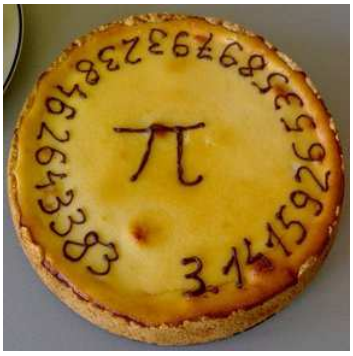
Außer der Suche nach Wörtern ist auch die Suche nach dem Auftreten der natürlichen Zahlen in der 26ziger Darstellung von π interessant. Allerdings wird dazu die Zahl in einen richtigen p-adischen Bruch transformiert, d.h. mit den Ziffern 0 bis 9 und A .... So findet man als letzte einstellige Zahl die 5 ab Position 83. Die letzte auftretende zweistellige Zahl ist die 52 ab Stelle 5485, die letzte dreistellige Zahl ist die 944 ab Position 135904. Unter den ersten 3 Million Ziffern im 26ziger System findet man als letzte Zahl die 19271 ab der 2924401.Dezimalstelle; die 19592 ist nicht vertreten. (Polster, Juni 2006)

π-Code-27

Durch Lee Sallows wurde 1993 daraufhin gewiesen, dass die Umwandlung von π in das 26ziger System eigentlich nicht ganz korrekt ist, da je in normalen Texten einzelne Wörter durch Leerzeichen getrennt sind. Aus diesem Grund wird auch ein PI-Code im 27ziger System betrachtet, bei dem die Ziffer 0 in ein Leerzeichen, die Ziffern 1, 2, ... in die Buchstaben A bis Z transformiert werden.
Auf Grund des zusätzlichen Zeichens nimmt die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Wort zu finden, ab. Unter den ersten 1 Million Ziffern im 27ziger System findet man zum Beispiel folgende deutsche Wörter. Erstaunlich ist, dass hier ein siebenbuchstabiges Wort gefunden wurde.

3buchstabige Wörter:
EMU (28), ZUG (193), RTL (232), MIT (439), TOT (554), ULI (621), AHN (646), MAN (783), DDR (954), LEE (967), WIR (1101), FIT (1162), AAR (1286), DAS (1290), UNO (1301), SAG (1400), WEM (1403), AAS (1433), WEN (1460), URS (1479), PIA (1537), ...
4buchstabige Wörter:
LUKE (1386), FRED (3532), NULL (4894), JANA (4954), CITY (5218), BOTE (5783), SONG (6371), FOEN (6821), NASE (7709), WENN (7727), ROSE (8666), ESEL (9614), ARIE (10672), EMIR (11088), LOES (11336), SAAL (11864), KULM (12120), ...
5buchstabige Wörter:
EHERN (19641), VIDEO (22103), ARENA (23767), MUCKE (45804), IDEEN (66866), ABBAU (76292), BANGE (83449), ANGER (83450), SANFT (84672), BERUF (88837), REBEN (98077), BIRKE (103137), ROTTE (116823), WOHER (118178), ...
6buchstabige Wörter:
BANDIT (175017), HOTELS (321326), INTERN (382987), STEHEN (470053), KELVIN (868727), ISLAND (870081), DETLEF (935063), GALANT (936851), BIETEN (941767), BITTER (961541)
7buchstabiges Wort: BIETEND (941768)

PI-Day, PI-Tag



Im englischsprachigen Raum werden Datumsangaben in der Reihenfolge Monat/Tag/Jahr gegeben. Daraus resultierend wird der 14.März als
3/14 geschrieben.
Aus diesem Grund wurde der 14.März zum sogenannten PI-Day erklärt. Besonders interessant ist am PI-Day die Uhrzeit 1:59:26, denn dann stimmen auch die nachfolgenden Ziffern mit π überein.
Als Begründer dieser Tradition gilt Larry Shaw, auf dessen Initiative hin der erste Pi-Tag 1988 am Exploratorium in San Francisco begangen wurde. Der Pi-Tag wird traditionell mit dem gemeinsamen Verzehren von

runden Kuchen begangen. Im Englischen wird der griechische Buchstabe π lautgleich wie das englische Wort pie = Kuchen als "Pai" ausgesprochen.
Zum anderen wird ein π-Annäherungstag am 22. Juli gefeiert, mit dem die Annäherung von Archimedes an 22/7 geehrt werden soll.

Persönliche Anmerkung: Dass Albert Einstein, aber auch der Autor dieses Programms an einem 14.März geboren wurden (Einstein genau 80 Jahre früher), kann natürlich nur positiv gewertet werden. :-)

π-Geldscheine

Durch Mike Keith wurde im März 1999 über das Internet die Suche nach dem besten PI-Geldschein gestartet.

Darunter versteht er Geldscheine, deren Nummer am besten der Ziffernfolge von π entsprechen.
Als Preisgeld gibt er
U.S. 400 Dollar für 3141592x
600 Dollar für 31415926
aus. Dieser Preis gilt für Dollarscheine, allerdings ist er auch auf der Suche nach internationalen Scheinen.

π-Anekdote

Im Jahre 1897 wollte man "neue mathematische Wahrheiten" per Gesetz festlegen. Der Arzt Edwin J. Goodwin reichte beim Repräsentantenhaus des US-Bundesstaats Indiana eine Gesetzesvorlage ein, in der diese "Wahrheiten" formuliert und dem Staat "kostenlos" zur Verfügung gestellt wurde. Zuvor hatte Goodwin sich die "Patente" für seine "Entdeckungen" gesichert.
Unter anderem wurde der Wert von π zu 3,2 "festgelegt"!
Als Näherungswert ist das schlechter als der Wert $4 \cdot (8/9)^2 = 3{,}16\ldots$, den die Babylonier bereits vor 4000 Jahren kannten.
Der Vorschlag passierte unwidersprochen mehrere Instanzen, bis Prof. C.A. Waldo von der Purdue Universität zufällig davon hörte und einen Aufschub der Entscheidung über das Inkrafttreten des Gesetzes auf unbestimmte Zeit erwirkte. Waldo forderte nämlich, wenn π = 3,2 ist, auch per Gesetz festzulegen, dass die Erde eine flache Scheibe sei, zumindest in Indiana.
Anmerkung: Das Guinness-Buch der Rekorde kennt die obige Geschichte etwas anders: "Der ungenaueste Wert von π. Im Jahre 1897 verabschiedete die Generalversammlung von Indiana ein Gesetz (Bill Nr. 246), nach dem der Wert von π de jure vier ist".

Nach Aussagen der schwedischen Internetseite
http://sv.wikipedia.org/wiki/Pi_%28tal%29
wollte Goodwin vier "tolle Erkenntnisse" per Gesetz festlegen lassen:
1. Die Transzendenz von π ist falsch.
2. Das Verhältnis von Kreisdurchmesser zu Umfang ist 5/4 zu 4 (entspricht π = 3,2)
3. Das Verhältnis eines 90°-Kreisbogens zur Entfernung der Bogeneckpunkte ist 8 zu 7 (π = 3,23…)
4. Die Fläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Quadrates, dessen Seitenlänge eines 1/4 des Kreisumfangs ist (π = 4)

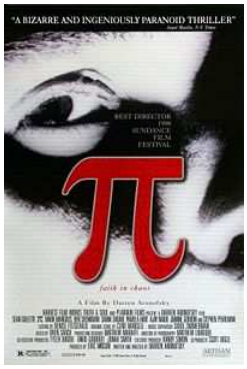
PI-Anekdote 2

Im genialen Buch "Contact" von Carl Sagan (Pulitzer-Preis) wird über eine im Zahlensystem zur Basis 2 in π verschlüsselte Botschaft des "Schöpfers" diskutiert.
Dieses findet man in dem später gedrehten, hervorragenden Film "Contact" von Robert Zemeckis mit Jodie Foster und Matthew McConaughey glücklicherweise nicht mehr.
Im Buch enthält die Binärdarstellung von π bei einer unvorstellbar hohen Stellenzahl dieses Muster:

```
00000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000010000000000000000000000
00000000000000010000000100000000000000000
00000000000010000000000000010000000000000
00000000010000000000000000000001000000000
00000001000000000000000000000000010000000
00000100000000000000000000000000000100000
00001000000000000000_00000000000000010000
00010000000000000000000000000000000001000
00100000000000000000000000000000000000100
01000000000000000000000000000000000000010
10000000000000000000000000000000000000001
10000000000000000000000000000000000000001
01000000000000000000000000000000000000010
00100000000000000000000000000000000000100
00010000000000000000000000000000000001000
```

```
0000010000000000000000000000000000100000
0000000100000000000000000000000010000000
0000000001000000000000000000001000000000
0000000000001000000000000000100000000000
0000000000000000100000000100000000000000
0000000000000000000100000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000
```

und symbolisiert damit einen "Gottesbeweis". Carl Sagan war Atheist!



PI-the movie USA 1997
Regisseur: Darren Aronofsky
Max Cohen, hochintelligentes, ständig unruhiges Mathematikgenie, ist auf der Suche nach einer alles erklärenden Weltformel, die sich hinter einem numerischen System verbergen soll.
Kurz vor der Lösung versinkt die Welt um ihn herum im Chaos. Plötzlich wird er von aggressiven Börsenmaklern und Anhängern einer jüdischen Sekte verfolgt. Im Kampf gegen den Wahnsinn, der sich vor ihm ausbreitet, entdeckt er ein Geheimnis, für das viele bereit sind, ihn umzubringen …
Aronofskys Regiedebüt ist ein skuriler Science-fiction Thriller über die verrückte Gedankenwelt eines Genies.

PI-Anekdote 4
In diesem 1997 gedrehten US-amerikanischen Film "Pi" kann jemand die "möglichen" 216 Dezimalstellen von π aufsagen. Offensichtlich ist 1997 noch nicht jedem klar, dass π eine unendliche, irrationale Zahl ist. 1967 wusste man es schon besser. In der Star-Trek-Folge "Wolf in the Fold" ("Der Wolf im Schafspelz") beauftragt Spock den Computer, die Zahl π bis zur letzten Stelle zu berechnen ("compute to the last digit the value of pi"); mit dem beabsichtigten Ergebnis, dass der Computer auf Grund der Unlösbarkeit der Aufgabe von der fremden Macht verlassen wird. Für Professor Frink in "The Simpsons" ist π "exakt 3!"

PI-Anekdote 5
Johann Dase soll 1844 im Alter von 20 Jahren π auf 205 Dezimalziffern exakt berechnet haben. Das Besondere ist, so geht die Legende, dass er die Berechnung innerhalb von zwei Monaten ausschließlich im Kopf vorgenommen haben soll und erst nach Beedingung die Dezimalziffern aufschrieb.

Anekdote 6
Als Indiz für eine langsame Verbesserung (2003) der Einschätzung der Bedeutung der Mathematik kann das neue Logo der Wissenschaftsseite der Berliner Morgenpost angesehen werden. Das "π" in dem Logo soll wohl die Rolle der Mathematik als Grundlage der Naturwissenschaft symbolisieren.
(zitiert nach "Mathematik in der Presse")

Anektode 7
Für die Kreiszahl π wurden erst 3000 Jahre nach der ersten Erwähnung im Papyrus Rhind eine Name und ein Symbol eingeführt. Bis dahin nutzten Mathematiker merkwürdige Umschreibungen, wie:

"quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferentia"

d.h. "die Größe, die, wenn man den Durchmesser mit ihr multipliziert, den Umfang ergibt".

Anektode 8
Kurios! Ab der 9128219.Dezimalstelle von π findet man die Ziffernfolge 9136319. Beide Zahlen sind Palindrome. Das Besondere: Beide Zahlen sind auch Primzahlen und zwar zwei aufeinanderfolgende Primzahl-Palindrome.

Anekdote 9
1998 wurde im Internet verbreitet, dass im US-amerikanischen Staat Alabama π auf den biblischen Wert von 3 festgesetzt wurde.
Die Meldung erwies sich als Aprilscherz und bissige Parodie auf die ständige Zunahme der "Kreationisten", die tatsächlich versuchen, in New Mexico die Evolutionstheorie aus den Lehrplänen zu streichen und dafür ihr "kreatives Design" (fanatische, faschistoide, strenggläubige Auslegung der biblischen Schöpfungsmythologie) einzuführen.
Die Internet-Meldung stammte von dem Physiker Mark Boslough.

PI-Anekdote 10
Der jüdische Rabbi Nehemiah versuchte im Jahre 150 die Differenz zwischen dem biblischen π-Wert von 3 und seinem Wert von 3 1/7 damit zu erklären, dass er davon ausging, dass in der Bibel der "Rand" des Kreises nicht mitgezählt wird.

Erschreckend ist, dass im 21.Jahrhundert(!) US-amerikanische Fanatiker tatsächlich fordern, den biblischen Wert von 3 verbindlich für π festzulegen.

PI als Kunstobjekt

Die Kreiszahl hat es auch direkt in die Kunst geschafft. Sie ist immer wieder Gegenstand der Darstellung. Eine kleine Auswahl:

Yves Chiricota de Montréal

Robert Crumb

Dara

Renée Othot

MJ Juggler

Olivier Noël

J.P. Cassou

P.Borwein

PI-Kurios

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Schreibt man das Alphabet nach folgender Regel auf: Alle (zur Senkrechten) spiegelsymmetrischen Buchstaben werden nach oben gestellt. Die Lösung sieht dann wie oben zu sehen aus.
Zählt man nach, wie stark die unteren Buchstabengruppen sind, so kommt man auf: 6, 3, 1, 4, 1. Nun könnten diese Ziffern einem beliebigen Zahlensystem ab 7 entnommen sein. Doch es fällt auf, dass eine solche Gruppe gerade mit dem zehnten Buchstaben J beginnt. Nimmt man also einmal an, dass dies ein Wink sei, die Ziffern ab dort zyklisch im Zehnersystem aufzureihen, so erhält man: 3-1-4-1-6. Man erkennt hierin unschwer eine brauchbare Näherung für $\pi\approx$, mit einem kleinen Fehler von etwa $7{,}35 \times 10^{-6}$.
Der hier aufgezeigte Sachverhalt wurde auch von James Davis entdeckt.

Abbildung links: Pi-Café in Avignon (Frankreich), Place Pie
In Frankreich hat man offensichtlich eine andere Position zur Mathematik als in Deutschland. Dies zeigt sich auch darin, dass die Kreiszahl es sogar zum Titelblatt der Dezemberausgabe von „La Recherche" gebracht hat.

Poulnabrone Dolmen

Ein besonderes Bauwerk für π-Anhänger ist der Poulnabrone Dolmen.
Der Poulnabrone Dolmen ("hole of the sorrows) ist ein Steingrab im Burren (Irland), das wahrscheinlich in der Jungsteinzeit ungefähr zwischen 3800 v.u.Z. und 3200 v.u.Z. erbaut wurde.
Der Ort befindet sich 8 km südlich vom Ballyvaughan und 10 km nordwestlich von Kilnaboy.
Der Dolmen ist aus zwei Orthostaten aufgebaut, die einen ungefähr 3,65 Meter langen Deckstein stützen. Ursprünglich wurde er durch einen Steinhügel bedeckt.
Damit bildet das Bauwerk ein überdimensional großes π, wenn gleich natürlich klar ist, dass das Grab nichts mit der Kreiszahl zu tun hat.

Restaurierungsarbeiten wurden im Jahr 1986 durchgeführt, nachdem 1985 im östlichen der beiden Portalsteine ein Riss entdeckt worden war.

Es wurde jedoch nicht nur der beschädigte Tragstein erneuert, es wurde auch ein zusätzlicher Orthostat an der Westseite gesetzt, um den Deckstein zu stabilisieren. Damit wird der Deckstein nun durch 3 Steine gestützt, was das steinzeitliche PI leider etwas verändert.

Brownsche Zahlen

Gegeben ist eine beliebige natürliche Zahl n. Eine zweite Zahl a_0 wird zu Beginn gleich n gesetzt. Nun wird nach der Zahl a_1 gesucht, die ein Vielfaches von n-1 ist und mindestens so groß wie a_0 ist. Die Zahl a_2 ist dann die Zahl, welche ein Vielfaches von n-2 ist und mindestens so groß wie a_1. Dieser Vorgang wird bis a_k mit k = n-1 fortgesetzt. Die entstehende Zahl heißt Brownsche Zahl f(n). Benannt wurden diese Zahlen nach Kevin Brown, der zuerst diese beschrieb.
Zum Beispiel ergibt sich für n = 10: $a_0 = 10$, $a_1 = 2*(10-1) = 18$, $a_2 = 3*(10-2) = 24 > 18$, ..., $a_k = f(10) = 34$.
Für n = 1,2,3,4,... erhält man die Folge der Brownschen Zahlen

f(n) = 1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 30, 34, ...

Weiterhin ist zum Beispiel f(100) = 3234, f(1000) = 318570 und f(10000) = 31833630.
Mit folgender kleinen Programmsequenz kann die Brownsche Zahl ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass schon ab n = 1000 die Rechenzeit sehr stark ansteigt.

```
brown := proc(n)
    local x,f,i,y;
      x := n; f := n; for i from x by -1 to 2 do y := i-1; while y < f do  y := y+i-1 od;
f := y
od end
```

Das Interessante an diesen Zahl ist nun, dass, wieder völlig unerwartet, $n^2/f(n)$ mit wachsendem n gegen π konvergiert und zwar alternierend von oben und unten. Zum Beispiel erhält man einen „schönen" Wert für n = 200. Es ergibt sich:

n	$n^2/f(n)$	n	$n^2/f(n)$	n	$n^2/f(n)$
10	2,94117	50	3,1172	100	3,0921459
200	3,14169	500	3,13999	1000	3,1390275
10000	3,14133198				

PI-Limerick

The number pi's a ratio pal.
Whose fame is international.
C to diameter,
endless parameter,
to me it's all irrational! (Paul Doherty)

'Tis a favorite project of mine
A new value of pi to assign.
I would fix it at 3
For it's simpler, you see,
Than 3 point 1 4 1 5 9

If inside a circle a line
Hits the center and goes spine to spine
And the line's length is "d"
the circumference will be
d times 3.14159

Three point one four one five nine two
It's been around forever - it's not new
It appears everywhere
In here and in there
It's irrational I know but it's true!

Now there is an ancient Greek letter,
And I think no other is better.
It isn't too tall,
It might look very small,
But its digits, they go on forever.
(http://www.kathimitchell.com/piceleb.html)

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Folge

Zahlenfolge, die nach Leonardo von Pisa (Fibonacci … Filius Bonacii) benannt wurde, da er diese in seinem Werk Liber abaci beschrieb: $F_0=0;\ F_1=1;\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

Formel von Binet-Moivre $F_n = 1/\sqrt{5} * [\ [(1 + \sqrt{5})/2]^n - [(1 - \sqrt{5})/2]^n\ ]$

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803...$, Goldener Schnitt

$\lim_{n\to\infty} (F_{n+1} / F_n) = 1/2*(1+ \sqrt{5})$

Cassini-Gleichung $F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

Satz von Lucas $ggT(F_{m+1}, F_{n+1}) = F_{ggT(m,n)}$

Verdoppelungsformel $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$

$F_{2n+2} = 2 F_n F_{n+1} + F_n^2$

$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

Erste Fibonacci-Zahlen

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393
196418	317811	514229	832040									

Fibonacci-Zahlen-Geschichte

Die früheste Erwähnung der Fibonacci-Zahlen findet sich unter dem Namen maatraameru ("Berg der Kadenz") in der Chhandah-shastra (auch Chandah-sutra, "Kunst der Prosodie") des Sanskrit-Grammatikers Pingala (um 450 v.u.Z.).
In ausführlicherer Form behandelten später auch Virahanka (6.Jahrhundert) und besonders Acharya Hemachandra (1089-1172) diese Zahlenfolge, um die rechnerische Möglichkeit der Bildung von Metren durch regelmäßige Verteilung kurzer und langer Silben zu beschreiben.

In der westlichen Welt war die Fibonacci-Reihe ebenfalls schon in der Antike Nikomachos von Gerasa (um 100 u.Z.) bekannt.
Sie ist aber mit dem Namen des italienischen Mathematikers Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci, verbunden, der in seinem "Liber abaci" ("Buch der Rechenkunst") von 1202 diese Zahlenfolge mit dem Beispiel eines Kaninchenzüchters beschrieb, der herausfinden will, wie viele Kaninchenpaare innerhalb eines Jahres aus einem einzigen Paar entstehen, wenn jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat ein weiteres Paar pro Monat zur Welt bringt.
Nachdem spätere Mathematiker wie Gabriel Lamé (1795-1870) die Entdeckung dieser Zahlenfolge für sich beansprucht hatten, brachten Édouard Lucas (1842-1891) und andere wieder in Erinnerung, dass der zu dieser Zeit älteste bekannte Beleg von Leonardo da Pisa stammte.
Abbildung: Kaninchenaufgabe im Liber abaci

Kaninchen-Problem des Fibonacci

Das Problem taucht bei Fibonacci in seinem berühmten Werk Liber Abaci auf:
Betrachtet wird die Nachkommenschaft eines (idealisierten) Kaninchenpaares, die bekanntlich sehr groß ist. Für die Simulation werden folgende Annahmen gemacht.
1. Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von zwei Monaten fortpflanzungsfähig.
2. Jedes Kaninchenpaar bringt von da an jeden Monat ein neues Paar zur Welt.
3. Alle Kaninchen leben ewig.

Wenn a_n die Anzahl der Kaninchenpaare bezeichnet, die im n-ten Monat leben, so ergibt sich hierfür gerade die Fibonacci-Folge:
Mit den Startwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ wird die Folge der Fibonacci-Zahlen definiert durch

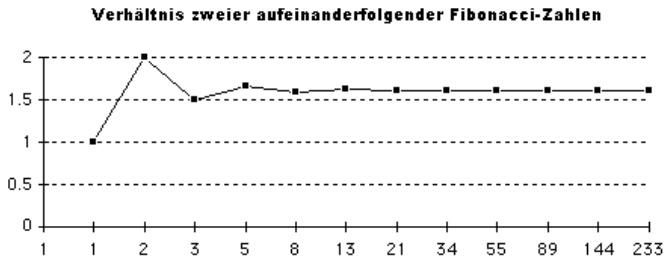
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Diese Fibonacci-Zahlen stehen in einem engen Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt und tauchen bei der Beschreibung von ganz allgemeinen Wachstumsvorgängen in der Natur immer wieder auf.
Anmerkung: Selbst wenn man realistisch annimmt, dass kein Kaninchen älter als 12 Jahre wird, ändert sich das Ergebnis nur unwesentlich. Es zeigt sich, dass immer 99% der Fibonacci-Kaninchen jünger als 12 Jahre sind.
Der französische Mathematiker Edouard Lucas benannte diese Zahlen erstmals nach Fibonacci. Dessen Verdienst ist es, diese Zahlen und die zugehörige Folge in Europa bekannt gemacht zu haben. Allerdings ist bekannt, dass vor 1135 der indische Mathematiker Gospala und um 1150 Hemanchandra die Folge bei der Untersuchung von Tonfolgen verwendeten und explizit beschrieben.

Nummer	Fibonnaci-Zahl	Quotient	Nummer	Fibonnaci-Zahl	Quotient
1	1		2	1	1:1 = 1
3	2	2:1 = 2	4	3	3:2 =1,5
5	5	5:3=1,66667	6	8	8:6=1,6
7	13	13:8=1,625	8	21	21:13=1,61538
9	34	34:21=1,61905	10	55	55:34=1,61765

11	89	89:55=1,61818	12	144	144:89=1,61798
13	233	233:144=1,61806	14	377	377:233=1,61803
15	610	610:377=1,61804	16	987	987:610=1,6180327
17	1597	usw. 1,618034448	18	2584	1,618033813
19	4181	1,618034056	20	6765	1,618033963
21	10946	1,618033999	22	17711	1,618033985
23	28657	1,618033990	24	46368	1,618033988
25	75025	1,618033989			

Im Grenzwert konvergiert $a_{n+1} : a_n$ damit gegen das goldene Verhältnis.
Durch Abänderung der Startwerte und der Rekursionsvorschrift sind hiervon unzählige Varianten bekannt geworden, z.B. die Lucas-Zahlen, die in den verschiedensten Gebieten der Mathematik eine Rolle spielen. Es gibt sogar eine mathematische Fachzeitschrift Fibonacci Quarterly, die ausschließlich dem Studium derartiger Folgen gewidmet ist.



Anmerkung: Selbst wenn man realistisch annimmt, dass kein Kaninchen älter als 12 Jahre wird, ändert sich das Ergebnis nur unwesentlich. Es zeigt sich, dass immer 99% der Fibonacci-Kaninchen jünger als 12 Jahre sind.
Der französische Mathematiker Edouard Lucas benannte diese Zahlen erstmals nach Fibonacci. Dessen Verdienst ist es, diese Zahlen und die zugehörige Folge in Europa bekannt gemacht zu haben. Allerdings ist bekannt, dass vor 1135 der indische Mathematiker Gospala und um 1150 Hemanchandra die Folge bei der Untersuchung von Tonfolgen verwendeten und explizit beschrieben.

Fibonacci-Folge (explizit)

Aufstellen einer expliziten Form

Ansatz: $a_n = a\, q^{n-1}$

dann wird aus $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ ... $a\, q^{n-1} + a\, q^n = a\, q^{n+1}$ und $1 + q = q^2$,
$q_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ bzw. $q_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.
für den Wert von a muss $a\, q^0 = 0$ und $a\, q = 1$ gelten, d.h. $a\, q_1^{n-1} + a\, q_1^n = a\, q_1^{n+1}$ und $a\, q_2^{n-1} + a\, q_2^n = a\, q_2^{n+1}$ muss für alle n gelten.
Aus n = 0 und n = 1 ergibt sich dann $a = 1/\sqrt{5}$ und $a = -1/\sqrt{5}$. Damit erhält man die ...

Formel von Binet-Moivre $F_n = 1/\sqrt{5} * [\, [(1 + \sqrt{5})/2]^n - [(1 - \sqrt{5})/2]^n \,]$,
$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, Goldener Schnitt
nach Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856, franz.Mathematiker)

Weiterer Nachweis:

Die Zahlen $p = (1 + \sqrt{5})/2$ und $p' = (1 - \sqrt{5})/2$ sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Für die Formel von Binet wird damit

$$u_n = F(n) = 1/\sqrt{5}\,(p^n - p'^n)$$

Aus $p^2 - p - 1 = 0$ wird $p^2 = p + 1$ und

$$p^3 = p^2 + p = p + 1 + p = 2p + 1$$
$$p^4 = 2p^2 + p = 2(p + 1) + p = 3p + 2$$
$$p^5 = 3p^2 + 2p = 3(p + 1) + 2p = 5p + 3$$
$$p^6 = 5p^2 + 3p = 5(p + 1) + 3p = 8p + 5 \quad \ldots$$

Die Koeffizienten auf den rechten Seiten der Gleichungen sind die Fibonacci-Zahlen (folgt aus vollständiger Induktion). Damit $p^n = F(n) \cdot p + F(n-1)$ $\quad p'^n = F(n) \cdot p' + F(n-1)$

$$p^n - p'^n = F(n) \cdot p - F(n) \cdot p' = F(n) \cdot (p - p') \;\rightarrow\; F(n) = (p^n - p'^n) / (p - p')$$

Mit $p - p' = \sqrt{5}$ folgt $u_n = F(n) = 1/\sqrt{5}\,(p^n - p'^n)$ qed

Weitere Eigenschaften

1. Die Summe der ersten n Glieder ergibt die um 1 verminderte (n+2).Fibonacci-Zahl.
2. sind die Indizes der Fibonacci-Zahlen durch einander teilbar, so sind es auch die Fibonacci-Zahlen selbst
3. die Summe aus den Quadraten zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen ergibt wieder eine Fibonacci-Zahl

Behauptung: Für aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen F(n) und große n gilt $F(n+1)/F(n) \approx \phi$.
Beweis: Mit den Zahlen $p = (1 + \sqrt{5})/2$ und $p' = (1 - \sqrt{5})/2$ wird die Formel von Binet zu $F(n) = 1/\sqrt{5}\,(p^n - p'^n)$ und $p/p' = -p^2$.
Mit F(1) = 1 und F(2) wird
$F(n+1)/F(n) = (p^{n+1} - p'^{n+1}) / (p^n - p'^n) = (p\, p^n - p'\, p'^n) / (p^n - p'^n) = (p\, p^n - p\, p'^n + p\, p'^n - p'\, p'^n) / (p^n - p'^n) = (p\,(p^n - p'^n) + p'^n\,(p - p')) / (p^n - p'^n) = p + (p'^n\,(p - p')) / (p^n - p'^n) = p + (p - p') / ((p/p')^n - 1) = p + \sqrt{5} / ((p/p')^n - 1)$

Der Ausdruck $(p/p')^n = p^{2n}$ wächst für große n unbegrenzt. Damit strebt der Nenner gegen Null und $F(n+1)/F(n) = p = \phi$.

```
{Rekursive Prozedur zur Zahlberechnung}
PROGRAM FIBONACCI;
VAR  i:longint;
FUNCTION fibo(n:LONGINT):LONGINT;
BEGIN   IF n<3 THEN fibo:=1 ELSE fibo:=fibo(n-1) + fibo(n-2); END;
BEGIN
  write('Index eingeben '); readln(i);    writeln(i,'. Fibonacci-Zahl = ',fibo(i));
END.
```

Für die Glieder der Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... existieren verschiedene mathematische Beziehungen.
1) Zwei benachbarte Glieder haben keine gemeinsamen echten Teiler, d.h. sie sind zueinander relativ prim.
2) Ab der Fibonacci-Zahl 13 gilt: Weder der Vorgänger noch der Nachfolger einer Fibonacci-Zahl ist eine Primzahl.
Dieser Satz wurde 1996 von Toby Gee, Student der John of Gaunt's School Trowbridge, bewiesen.
3) Für Fibonacci-Zahlen mit geradem Index, d.h. F_{2n}, gilt:

$F_{2n} + (-1)^n = (F_{n+2} + F_n)\, F_{n-1}$ $\qquad$ $F_{2n} - (-1)^n = (F_n + F_{n-2})\, F_{n+1}$

Für Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index, d.h. F_{2n+1}, gilt:

$F_{2n+1} + (-1)^n = (F_{n+1} + F_{n-1})\, F_{n+1}$ $\qquad$ $F_{2n+1} - (-1)^n = (F_{n+2} + F_n)\, F_n$

4) $F_n^2 \pm 1 = F_{n-2}\, F_{n+2}$, wenn n ungerade ist $\qquad$ $F_n^2 \pm 1 = F_{n-1}\, F_{n+1}$, wenn n gerade ist
D.h.: Auch Vorgänger und Nachfolger des Quadrates einer Fibonacci-Zahl sind nicht prim.

5) Vernon Hoggatt und Marjorie Bicknell-Johnson bewiesen 1977: Der Vorgänger einer beliebigen Potenz einer Fibonacci-Zahl; mit Ausnahme von $F_3 = 4$; ist eine zusammengesetzte Zahl.
Der Nachfolger einer Fibonacci-Zahl-Potenz ist zusammengesetzt, außer in einem Spezialfall. Ist der Exponent der Potenz selbst eine Zweierpotenz (4, 8, 16, ...) und ist der Index der Fibonacci-Zahl ein Vielfaches von 3, so kann die Fibonacci-Zahl-Potenz auch Primzahl sein.
Beispiele: $F_9^4 + 1 = 1336337$ $\quad$ $F_{198}^4 + 1$ (165 Ziffern) $\quad$ $F_{15}^8 + 1$ (23 Ziffern)
$F_{48}^8 + 1$ (78 Ziffern) $\quad$ $F_{51}^8 + 1$ (83 Ziffern) $\quad$ $F_{21}^{32} + 1$ (130 Ziffern)

Satz von Lucas

Der Satz von Lucas trifft eine Aussage über den größten gemeinsamen Teiler von Fibonacci-Zahlen.
Satz: Für $m,n \in N$ gilt: $\qquad ggT(F_n, F_m) = F_{ggT}(m,n)$.

Beweis: Zuerst soll $F_n | F_{kn}$ für $k>0$ mittels vollständiger Induktion gezeigt werden, d.h. F_n teilt F_{kn}. Der Fall $k = 1$ ist offensichtlich.
Nach der Additionsformel wird $F_{(k+1)n} = F_{kn-1}\, F_n + F_{kn}\, F_{n+1}$
Nach Induktionsvorraussetzung ist dann F_n ein Teiler von F_{kn}.
OBdA sei $m \geq n$. Der euklidische Algorithmus ergibt dann

$m = q_0 n + r_1$ mit $r_1 < n$

$n = q_1 r_1 + r_2$ mit $r_2 < r_1$ … $\qquad r_{k-1} = q_k r_k$

r_k ist dann der ggT von m und n, d.h. $ggT(m,n) = ggT(n,r_1) = ggT(r_1,r_2) = ggT(r_2,r_3) = \ldots$
Wendet man den euklidischen Algorithmus auf F_n und F_{n-1} an, so ist stets $q_i = 1$ und die r_i durchlaufen die Fibonacci-Zahlen nach unten: F_n und F_{n-1} sind teilerfremd. Insbesondere sind dann auch F_n und F_{kn-1} teilerfremd. Sind nun r_i und q_i wie oben, so ist: $\qquad ggT(F_m,F_n) = ggT(F_{q0n+r1},F_n) = ggT(F_{q0n-1}F_{r1} + F_{q0n}F_{r1+1},F_n)$

$= ggT(F_{q0n-1}F_{r1}, F_n) = ggT(F_{r1},F_n)$

Weitere Fortsetzung ergibt $\qquad ggT(F_m,F_n) = ggT(F_n,F_{r1}) = ggT(F_{r1},F_{r2}) = \ldots = F_{rk} = F_{ggT(m,n)}$. qed
Weiterhin gilt: $n|m \Rightarrow F_n|F_m$. F_n und F_{n-1} sind teilerfremd.
F_n ist gerade $\Rightarrow 3|n$; $3|F_n \Rightarrow 4|n$; $4|F_n \Rightarrow 6|n$; $5|F_n \Rightarrow 5|n$; $7|F_n \Rightarrow 8|n$
Ist F_n eine Primzahl, so ist $n = 4$, oder n ist selber eine Primzahl.

Fibonacci-Formeln

Mit der Definition der Fibonacci-Folge und der Lucas-Folge

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; $L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$

gelten eine Vielzahl von Gleichungen:

$F_{n+2} + F_n + F_{n-2} = 4\, F_n$	$F_{n+2} + F_n = L_{n+1}$
$F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$	$F_{n+3} + F_n = 2\, F_{n+2}$
$F_{n+3} - F_n = 2\, F_{n+1}$	$F_{n+4} + F_n = 3\, F_{n+2}$
$F_{n+4} - F_n = L_{n+2}$	$F_{n+5} + F_n = F_{n+2} + L_{n+3}$
$F_{n+5} - F_n = L_{n+2} + F_{n+3}$	$F_{n+6} + F_n = 2\, L_{n+3}$
$F_{n+6} - F_n = 4\, F_{n+3}$	$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$
$F_n + 2\, F_{n-1} = L_n$	$F_{n+2} + F_{n-2} = 3\, F_n$

$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$ $\quad$ $F_{n+3} - 2 F_n = L_n$
$F_{n+2} - F_n + F_{n-1} = L_n$ $\quad$ $F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = L_{n+3}$

$L_{n-1} + L_{n+1} = 5 F_n$ $\quad$ $L_n + L_{n+3} = 2 L_{n+2}$
$L_n + L_{n+4} = 3 L_{n+2}$ $\quad$ $2 L_n + L_{n+1} = 5 F_{n+1}$
$L_{n+2} - L_{n-2} = 5 F_n$ $\quad$ $L_{n+3} - 2 L_n = 5 F_n$
$F_n + L_n = 2 F_{n+1}$ $\quad$ $L_n + 5 F_n = 2 L_{n+1}$
$3 F_n + L_n = 2 F_{n+2}$ $\quad$ $3 L_n + 5 F_n = 2 L_{n+2}$

$F_n^2 + 2 F_{n-1} F_n = F_{2n}$ $\quad$ $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$
$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ $\quad$ $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2} F_{n-1}$
$F_{n+3}^2 + F_n^2 = 2 (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$ $\quad$ $F_{n+k+1}^2 + F_{n-k}^2 = F_{2k+1} F_{2n+1}$

$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ Cassini-Formel (1680)
$F_n^2 - F_{n+r} F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2$ Catalan-Identitität (1879)
$F_n F_{m+1} - F_m F_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$ d'Ocagne-Identität
$F_{n+1} F_{m+1} - F_{n-1} F_{m-1} = F_{n+m}$
$F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m}$ $\quad$ $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

$F_n F_{n+1} = F_{n-1} F_{n+2} + (-1)^{n-1}$ $\quad$ F_{n+i} $\quad$ $F_{n+k} - F_n F_{n+i+k} = (-1)^n F_i F_k$
$F_a F_b - F_c F_d = (-1)^r (F_{a-r} F_{b-r} - F_{c-r} F_{d-r})$; a+b = c+d für beliebige ganze a, b, c, d, r
$(F_{n-1} F_{n+2})^2 + (2 F_n F_{n+1})^2 = (F_{n+1} F_{n+2} - F_{n-1} F_n)^2 = F_{2n+1}^2$

F_{nk} ist ein Vielfaches von F_n $\quad$ $ggT(F_m, F_n) = F_{ggT(m,n)}$; Lucas 1876
$F_m \bmod F_n = F_k$

$L_{2n} = L_n^2 - 2 (-1)^n$ $\quad$ $L_{n+2} L_{n-1} = L_{n+1}^2 - L_n^2$
$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = -5 (-1)^n$ $\quad$ $L_{2n} + 2 (-1)^n = L_n^2$
$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_m L_n$ $\quad$ $L_m L_n + L_{m-1} L_{n-1} = 5 F_{m+n-1}$

$F_{2n} = F_n L_n$ $\quad$ $5 F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$
$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5 F_{2n+1}$ $\quad$ $L_{n+1}^2 - L_n^2 = 5 F_{2n}$
$L_{n+1}^2 - 5 F_n = L_{2n+1}^2$ $\quad$ $L_{2n} - 2 (-1)^n = 5 F_n^2$
$L_n^2 - 4 (-1)^n = 5 F_n^2$ $\quad$ $F_{n+1} L_n = F_{2n+1} + (-1)^n$
$L_{n+1} F_n = F_{2n+1} - (-1)^n$ $\quad$ $F_{2n+1} = F_{n+1} L_{n+1} - F_n L_n$
$L_{2n+1} = F_{n+1} L_{n+1} + F_n L_n$ $\quad$ $L_n^2 - 2 L_{2n} = -5 F_n^2$
$5 F_n^2 - L_n^2 = 4 (-1)^{n+1}$ $\quad$ $F_n^2 + L_n^2 = = 4 F_{n+1}^2 - 2 F_{2n}$
$5 (F_n^2 + F_{n+1}^2) = L_n^2 + L_{n+1}^2$ $\quad$ $F_n L_m = F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m}$
$L_n F_m = F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m}$ $\quad$ $5 F_m F_n = L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m}$
$2 F_{n+m} = L_m F_n + L_n F_m$ $\quad$ $2 L_{n+m} = L_m L_n + 5 F_n F_m$
$F_m L_n + F_{m-1} L_{n-1} = L_{m+n-1}$ $\quad$ $(-1)^m 2 F_{n-m} = L_m F_n - L_n F_m$
$L_{n+i} F_{n+k} - L_n F_{n+i+k} = (-1)^{n+1} F_i L_k$ $\quad$ $F_{n+i} L_{n+k} - F_n L_{n+i+k} = (-1)^n F_i L_k$

$L_{n+i} L_{n+k} - L_n L_{n+i+k} = (-1)^{n+1} 5 F_i F_k$
$5 F_a F_b - L_c L_d = (-1)^r (5 F_{a-r} F_{b-r} - L_{c-r} L_{d-r})$; a+b = c+d für beliebige ganze a, b, c, d, r
$F_a L_b - F_c L_d = (-1)^r (F_{a-r} L_{b-r} - F_{c-r} L_{d-r})$; mit a+b = c+d
$F_{kt} / F_t = \Sigma_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^{it} L_{(k-2i-1)t} + (-1)^{(k-1)t/2}$ für ungerade k > 1
$F_{kt} / F_t = \Sigma_{i=0}^{k/2-1} (-1)^{it} L_{(k-2i-1)t}$ für gerade k > 1
$L_{kt} / L_t = \Sigma_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^{i(t+1)} L_{(k-2i-1)t} + (-1)^{(k-1)(t+1)/2}$ für ungerade k > 1
L_t ist kein Faktor von L_{kt} für gerade k
$F_{kt} / L_t = \Sigma_{i=0}^{k/2-1} (-1)^{i(t+1)} F_{(k-2i-1)t}$ für gerade k > 1
L_t ist kein Faktor von F_{kt} für ungerade k
$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$
$F_n^2 F_{m+1} F_{m-1} - F_m^2 F_{n+1}$ $\quad$ $F_{n-1} = (-1)^{n-1} F_{m+n} F_{m-n}$
$F_{n+1} F_{n+2} F_{n+6} - F_{n+3}^3 = (-1)^n F_n$
$F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+2} + 1 = F_n^4$ Gelin-Cesàro Identität
$L_{n-2} L_{n-1} L_{n+1} L_{n+2} + 25 = L_n^4$
$F_n F_{n+2} F_{n+3} F_{n+5} + 1 = [F_{n+4}^2 - 2F_{n+3}^2]^2$
$F_{i+j+k} = F_{i+1} F_{j+1} F_{k+1} + F_i F_j F_k - F_{i-1} F_{j-1} F_{k-1}$ für ganzzahlige i, j, k

$((L_n + \sqrt{5} F_n)/2)^k = 1/2 (L_{kn} + \sqrt{5} F_{kn})$; de Moivre Beziehungen
$((L_n - \sqrt{5} F_n)/2)^k = 1/2 (L_{kn} - \sqrt{5} F_{kn})$
$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 = 2 (F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4)$; Candido-Identität 1951
$L_{5n} = L_n (L_{2n} + 5F_n + 3)(L_{2n} - 5F_n + 3)$ für ungerades n ; Aurifeuille-Identität 1879
$F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+4} F_{n+5} F_{n+6} + L_{n+3}^2 = [F_{n+3} (2F_{n+2} F_{n+4} - F_{n+3}^2)]^2$

Summenformeln

$\Sigma_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$; Lucas 1876 $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} (-1)^i F_i = (-1)^n F_{n-1} - 1$

$\Sigma_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$ $\qquad \Sigma_{i=a}^{n} F_i = F_{n+2} - F_{a+1}$

$\Sigma_{i=a}^{n} L_i = L_{n+2} - L_{a+1}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$, $n \geq 0$

$\Sigma_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$, $n \geq 1$ $\qquad \Sigma_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$

$\Sigma_{i=1}^{n} 2^{n-i} F_{i-1} = 2^n - F_{n+2}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} 2^i L_i = 2^{n+1} F^{n+1}$

$\Sigma_{i=0}^{n} F_{3i-1} = (F_{3n+1} + 1)/2$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} F_{3i} = (F_{3n+2} - 1)/2$

$\Sigma_{i=0}^{n} F_{3i+1} = F_{3n+3} /2$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} F_{4i} = F_{2n+1}^2 - 1$

$\Sigma_{i=0}^{n} F_{4i+1} = F_{2n+1} F_{2n+2}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} F_{4i+2} = F_{2n+1} F_{2n+3} - 1$

$\Sigma_{i=0}^{n} F_{4i+3} = F_{2n+3} F_{2n+2}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} (-1)^i L_{n-2i} = 2 F_{n+1}$

$\Sigma_{i=0}^{n} (-1)^i L_{2n-2i+1} = F_{2n+2}$

$\Sigma_{i=0}^{\infty} F_i / 2^i = 2$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{\infty} L_i / 2^i = 6$

$\Sigma_{i=0}^{\infty} F_i / r^i = r / (r^2-r-1)$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{\infty} L_i / r^i = 2 + (r+2) / (r^2-r-1)$

$\Sigma_{i=1}^{\infty} i F_i / 2^i = 10$ $\qquad \Sigma_{i=1}^{\infty} i L_i /2^i = 22$

$\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/F_{(2i)} = 4 - \Phi = 3 - \phi$

$\Phi - 1 = \Sigma_{k\geq 2} (-1)^k / (F_k F_{k-1})$ $\qquad \Phi - 1 = \Sigma_{k\geq 1} (-1)^k / (F_{2k+1} F_{2k-1})$

$\Sigma_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$ $\qquad \Sigma_{i=1}^{2n} L_i L_{i-1} = L_{2n}^2 - 4$

$\Sigma_{i=1}^{2n+1} F_i F_{i-1} = F_{2n+1}^2 - 1$ $\qquad \Sigma_{i=1}^{2n+1} L_i L_{i-1} = L_{2n+1}^2 - 5$

$\Sigma_{i=0}^{n-1} F_{2i+1}^2 = (F_{4n} + 2n)/5$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n-1} L_{2i+1}^2 = F_{4n} - 2n$

$\Sigma_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ $\qquad \Sigma_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$

$\Sigma_{i=1}^{2n-1} L_i^2 = 5 F_{2n} F_{2n-1}$ $\qquad 5 \Sigma_{i=0}^{n} F_i F_{n-i} = (n+1) L_n - 2 F_{n+1} = n L_n - F_n$

$\Sigma_{i=1}^{n} F_i L_{n-i} = (n+1) F_n$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} L_i L_{n-i} = (n+1) L_n 2 F_{n+1} = (n+2) L_n + F_n$

$\Sigma_{i=1}^{n} L_{2i}^2 = F_{4n+2} + 2n - 1$ $\qquad F_{mq} = F_m \Sigma_{j=1}^{q} F_{m-1}^{j-1} F_{m(q-j)+1}$

$\Sigma_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i-1} = F_n$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{\infty} \binom{n-i-1}{i} = F_n$

$\Sigma_{i=0}^{n} \binom{n+i}{2i} = F_{2n+1}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n-1} \binom{n+i}{2i+1} = F_{2n}$

$\Sigma_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{p-i} = F_{p+n}$

$\Sigma_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^i F_i = F_{3n}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} F_i = F_{2n+1} - 1$

$\Sigma_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} F_{2i} = 5^n F_{2n}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L_{2i} = 5^n L_{2n}$

$\Sigma_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} F_{2i} = 5^n L_{2n+1}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} L_{2i} = 5^{n+1} F_{2n+1}$

$\Sigma_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} F_i^2 = 5^{n-1} L_{2n}$ $\qquad \Sigma_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L_i^2 = 5^n L_{2n}$

Potenzen von Fibonacci-Zahlen

Für die Fibonacci-Zahlen gilt die rekursive Beziehung $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$
mit $F(0)=0$, $F(1)=1$. Für die Quadrate der Fibonacci-Zahlen wird

n	1	2	3	4	5	6	7 ...
$F(n)^2$	1	1	4	9	25	64	169 ...

mit der Rekursion $\qquad F(n)^2 = 2 F(n-1)^2 + 2 F(n-2)^2 - F(n-3)^2$

Weitere Rekursionen ergeben sich für höhere Potenz der Fibonacci-Zahlen.

Kuben der Fibonacci-Zahlen $\qquad F(n)^3 = 3 F(n-1)^3 + 6 F(n-2)^3 - 3 F(n-3)^3 - F(n-4)^3$

4.Potenzen $\qquad F(n)^4 - 5 F(n-1)^4 - 15 F(n-2)^4 + 15 F(n-3)^4 + 5 F(n-4)^4 - F(n-5)^4 = 0$

5.Potenzen $\qquad F(n)^5 - 8 F(n-1)^5 - 40 F(n-2)^5 + 60 F(n-3)^5 + 40 F(n-4)^5 - 8 F(n-5)^5 - F(n-6)^5 = 0$

Fibonacci-Fakultät

Ausgehend davon, dass man unter n! (n Fakultät) das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n versteht, kann man für Fibonacci-Zahlen die Fibonacci-Fakultät (eg. Fibonacci Factorial) einführen. Darunter versteht man

$F!(n) = F(1) F(2) F(3) \ldots F(n)$

d.h. das Produkt der Finonacci-Zahlen F(1) bis F(n).

An Stelle der Schreibweise F!(n) wird auch FF(n); nach Simon Plouffe, verwendet. Zum Beispiel ist

$F!(1) = 1$
$F!(2) = F(2) F(1) = 1 \times 1 = 1$
$F!(3) = F(3) F(2) F(1) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
$F!(4) = F(4) F(3) F(2) F(1) = 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$
$F!(5) = F(5) F(4) F(3) F(2) F(1) = 5 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 30$

Für die ersten Fibonacci-Fakultäten ergibt sich die Faktorisierung mit

n	F!(n)
4	$6 = 2\ 3$
5	$30 = 2\ 3\ 5$
6	$240 = 2^4\ 3\ 5$
7	$3120 = 2^4\ 3\ 5\ 13$
8	$65520 = 2^4\ 3^2\ 5\ 7\ 13$
9	$2227680 = 2^5\ 3^2\ 5\ 7\ 13\ 17$
10	$122522400 = 2^5\ 3^2\ 5^2\ 7\ 11\ 13\ 17$
11	$10904493600 = 2^5\ 3^2\ 5^2\ 7\ 11\ 13\ 17\ 89$
12	$1570247078400 = 2^9\ 3^4\ 5^2\ 7\ 11\ 13\ 17\ 89$

13 365867569267200 = $2^9\ 3^4\ 5^2\ 7\ 11\ 13\ 17\ 89\ 233$
14 137932073613734400 = $2^9\ 3^4\ 5^2\ 7\ 11\ 13^2\ 17\ 29\ 89\ 233$
15 84138564904377984000 = $2^{10}\ 3^4\ 5^3\ 7\ 11\ 13^2\ 17\ 29\ 61\ 89\ 233$
16 8304476356062107020800 0 = $2^{10}\ 3^5\ 5^3\ 7^2\ 11\ 13^2\ 17\ 29\ 47\ 61\ 89\ 233$
17 1326224874063118491221760 00 = $2^{10}\ 3^5\ 5^3\ 7^2\ 11\ 13^2\ 17\ 29\ 47\ 61\ 89\ 233\ 1597$
18 3426965074579098181317027840 00 = $2^{13}\ 3^5\ 5^3\ 7^2\ 11\ 13^2\ 17^2\ 19\ 29\ 47\ 61\ 89\ 233\ 1597$
19 1432814097681520949608649339904000 = $2^{13}\ 3^5\ 5^3\ 7^2\ 11\ 13^2\ 17^2\ 19\ 29\ 37\ 47\ 61\ 89\ 113\ 233\ 1597$
20 9692987370815489224102512784450560000 = $2^{13}\ 3^6\ 5^4\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17^2\ 19\ 29\ 37\ 41\ 47\ 61\ 89\ 113\ 233\ 1597$

Fibonomialkoeffizient, Fibonomial

In Analogie zum Binomialkoeffizienten werden mit Hilfe der Fibonacci-Fakultäten Fibonomialkoeffizienten, kurz Fibonomials, konstruiert. Es gilt $\binom{n}{k}_F = F!(n) / (F!(k)\ F!(n-k)) = F(n)F(n-1)...F(n-k+1) / (F(k)F(k-1)...F(2)F(1))$
Anstelle $\binom{n}{k}_F$ benutzt D.Knuth die etwas andere Schreibweise $(\binom{n}{k})$.
Die ersten Fibonomials(n,k) sind

n \ k =	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	2	2	1				
4	3	6	3	1			
5	5	15	15	5	1		
6	8	40	60	40	8	1	
7	13	104	260	260	104	13	1

Unter http://oeis.org/A010048 findet man weitere Einträge des entstehenden Fibonomial-Dreiecks.
Weiterhin versteht man unter signierten Fibonomials(n,k) die Fibonomials, bei denen für alle k mod 4 = 1 oder 2 ein negatives Vorzeichen gesetzt wird, d.h.

n \ k =	1	2	3	4	5	6	7
1	-1						
2	-1	-1					
3	-2	-2	-1				
4	-3	-6	3	1			
5	-5	-15	15	5	-1		
6	-8	-40	60	40	-8	-1	
7	-13	-104	260	260	-104	-13	1

Die ersten Einträge des zugehörigen Zahlendreiecks findet man unter http://oeis.org/A055870.

Fibonacci-Matrix

Zur Beschreibung der Zahlen der Fibonacci-Folge können auch Matrizen genutzt werden. Dazu werde die Matrix

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; Fibonacci-Matrix

betrachtet. Wird die Matrix mit sich selbst multipliziert, so wird $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M + I$
wobei I die quadratische Einheitsmatrix ist. Multipliziert man M nun dreimal, viermal, … mit sich selbst, ergibt sich die Matrizenfolge $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; …
und allgemein $M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = F_n M + F_{n-1} I$
wobei F_n die n.te Fibonacci-Zahl ist.
Wendet man diese Gleichung auf zwei M^n, M^s an und stellt das Ergebnis; etwas mühevoll; um, so ergibt sich

$M^n \cdot M^s = (F_{n+1} F_s + F_n F_{s-1}) M + (F_n F_s + F_{n-1} F_{s-1}) I$
$F_{n+s} = F_{n+1} F_s + F_n F_{s-1} = F_n F_{s+1} + F_{n-1} F_s$
$F_{n+s-1} = F_n F_s + F_{n-1} F_{s-1}$
$F_{2n+1} = F^2_{n+1} + F^2_n$
$F_{2n} = F^2_n + 2 F_n F_{n-1} = F_n (F_n + 2 F_{n-1})$
$F_{3n} = 3 F_n F^2_{n-1} + 3 F^2_n F_{n-1} + 2 F^3_n$
$F_{4n} = 4 F_n F^3_{n-1} + 6 F^2_n F^2_{n-1} + 8 F^3_n F_{n-1} + 3 F^4_n$ usw.

Auf der rechten Seite wird für k = 1, …, 45 die Summendarstellung der Fibonacci-Zahl F_{kn} berechnet.
Dabei bedeute Fxx die xx.te Potenz der n.ten Fibonacci-Zahl, fyy die yy.te Potenz der (n-1).ten Fibonacci-Zahl.

Muster in der Fibonacci-Folge

Ausgehend von der Fibonacci-Folge, beginnend mit n = 0,
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …
werden nur die letzten Ziffern der Folgeglieder betrachtet. Dabei ergibt sich die Folge
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, …
Untersucht man die Folge, zeigt sich, dass diese periodisch(!) ist. Nach 60 Gliedern beginnt die Folge von vorn.

Wählt man die letzten zwei Ziffern, so wiederholen sich die Glieder nach 300 Einträgen. Für n = 3,4,5,… letzte Ziffern erhält man Periodenlängen von 1500, 15000 und 150000.

Fibonacci-Teiler

Jede Fibonacci-Zahl ist ein Teiler von unendlich vielen anderen Fibonacci-Zahlen:

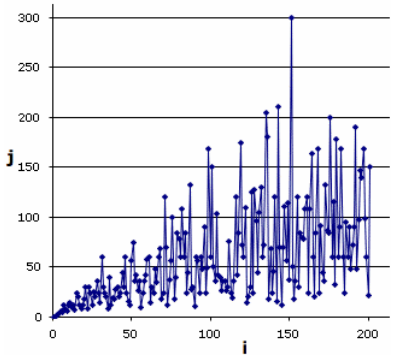
Fibonacci-Zahlen als Faktoren anderer Fibonacci-Zahlen

i	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
F_i	2	3	5	8	13	21	34	55	89 ...
$2=F_3$	+	-	-	+	-	-	+	-	-
$3=F_4$	-	+	-	-	-	+	-	-	-
$5=F_5$	-	-	+	-	-	-	-	+	-

Ergebnis: jede 3.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 2, d.h. von F_3
jede 4.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 3, d.h. von F_4
jede 5.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 5, d.h. von F_5
jede 6.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 8, d.h. von F_6 ...

und allgemein Jede k.te Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von F_k
F_{nk} ist ein Vielfaches von F_k für alle n,k = 1,...
Eine Fibonacci-Zahl kann nur dann Primzahl sein, wenn ihr Index Primzahl ist

Einen Beweis findet man in M.Bicknell und V.E.Hoggatt: "The Fibonacci Quarterly Vol 9 (1971) pages 529 - 536"



Teiler der Fibonacci-Zahlen

Jede Fibonacci-Zahl ist Teiler von unendlich vielen anderen Fibonacci-Zahlen (siehe Fibonacci-Teiler). Das Problem ist nun:

Welche natürliche Zahl >1 ist ein Teiler einer Fibonacci-Zahl?

Verblüffende Antwort: Jede!

1951 bewies der sowjetische Mathematiker Worobjew, dass jede natürliche Zahl > 1 Teiler irgendeiner Fibonacci-Zahl ist. Ebenso zeigt er, dass der Faktor i unter den ersten i² Fibonacci-Zahlen zu finden ist. Für die ersten natürlichen Zahlen ergibt sich

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ist Faktor von									
F_i	2	3	8	5	144	21	8	144	610
i	3	4	6	5	12	8	6	12	15

In der Abbildung ist der Index j der kleinsten Fibonacci-Zahl F_j mit einem Teiler i (i = 1...200) abgebildet. Die Folge der Indizees beginnt mit 1, 3, 4, 6, 5, 12, 8, 6, 12, 15, 10, 12, 7, 24, 20, 12, 9, 12, 18, 30, 8, 30, ...

Tabelle der Teiler der Fibonacci-Zahlen

Die Tabelle enthält die für die natürlichen Zahlen n = 2 bis 30 die Indizees i der kleinsten Fibonacci-Zahlen F_i, die ein Vielfaches von n sind. Ist F_i kleiner als 10^{50}, so wird auch die Fibonacci-Zahl angegeben.

n	i	Fibonacci-Z.	n	i	Fibonacci-Z.	n	i	Fibonacci-Zahl
2	3	2	3	4	3	4	6	8
5	5	5	6	12	144	7	8	21
8	6	8	9	12	144	10	15	610
11	10	55	12	12	144	13	7	13
14	24	46368	15	20	6765	16	12	144
17	9	34	18	12	144	19	18	2584
20	30	832040	21	8	21	22	30	832040
23	24	46368	24	12	144	25	25	75025
26	21	10946	27	36	14930352	28	24	46368
29	14	377	30	60	154.80087.55920			

Wie man in der vorhergehenden Tabelle der Teiler der Fibonacci-Zahlen sieht, wachsen die Indizees i der kleinsten Fibonacci-Zahlen F_i, die eine natürliche Zahl n als Teiler enthalten, sehr schnell an. Die zweite Tabelle enthält die jeweiligen n, für welche ein neuer Maximalwert des Index i erreicht wird. (Polster, September 2006):

n	i	n	i	n	i	n	i
2	3	3	4	4	6	6	12
10	15	14	24	20	30	27	36
30	60	50	75	70	120	86	132
98	168	118	174	134	204	142	210
150	300	206	312	242	330	250	375
254	384	262	390	326	492	350	600

430	660	446	672	478	714	490	840
566	852	590	870	622	930	670	1020
686	1176	750	1500	1030	1560	1046	1572
1094	1644	1198	1794	1214	1824	1250	1875
1270	1920	1286	1932	1318	1974	1438	2154
1454	2184	1574	2364	1630	2460	1646	2472
1678	2514	1750	3000	2038	3054	2126	3192

Primteiler der Fibonacci-Zahlen

Gegeben sei eine Primzahl p. Dann ist sicher, dass p ein Teiler einer ersten p+1 Fibonacci-Zahlen F_{p+1} ist. Für die ersten Primzahlen p = 2, 3, 5, ... erhält man als kleinsten Index i der Fibonacci-Zahl F_i, welche ein Vielfaches von p ist, i = 3, 4, 5, 8, 10, 7, 9, 18, 24, 14, 30, 19, 20, 44, 16, 27, 58, 15, 68, 70, ...
Durch Lucas wurde definiert: Es sei F_u (u > 0) die kleinste Fibonacci-Zahl, welche die Primzahl p enthält. Dann heißt u der Rang der Erscheinung von p (rank of apparition of p).
Bis heute weiß man nur, dass u gleich oder ein Teiler von p–1 oder p+1 ist. Die Tabelle enthält diese u (Polster, September 2006):

p	**i**	**p**	**i**	**p**	**i**	**p**	**i**
2	3	3	4	5	5	7	8
11	10	13	7	17	9	19	18
23	24	29	14	31	30	37	19
41	20	43	44	47	16	53	27
59	58	61	15	67	68	71	70
73	37	79	78	83	84	89	11
97	49	101	50	103	104	107	36
109	27	113	19	127	128	131	130
137	69	139	46	149	37	151	50
157	79	163	164	167	168	173	87
179	178	181	90	191	190	193	97
197	99	199	22	211	42	223	224
227	228	229	114	233	13	239	238
241	120	251	250	257	129	263	88
269	67	271	270	277	139	281	28
283	284	293	147	307	44	311	310
313	157	317	159	331	110	337	169

Aufgabe: Welche der Glieder der Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...
sind durch ihren Index restlos teilbar?
Bis zum Index i = 5000 sind dies genau die F_i mit
i = 5, 12, 24, 25, 36, 48, 60, 72, 96, 108, 120, 125, 144, 168, 180, 192, 216, 240, 288, 300, 324, 336, 360, 384, 432, 480, 504, 540, 552, 576, 600, 612, 625, 648, 660, 672, 684, 720, 768, 840, 864, 900, 960, 972, 1008, 1080, 1104, 1152, 1176, 1200, 1224, 1296, 1320, 1344, 1368, 1440, 1500, 1512, 1536, 1620, 1656, 1680, 1728, 1800, 1836, 1860, 1920, 1944, 1980, 2016, 2052, 2160, 2184, 2208, 2256, 2304, 2352, 2400, 2448, 2460, 2520, 2592, 2640, 2688, 2700, 2736, 2760, 2880, 2916, 3000, 3024, 3060, 3072, 3125, 3240, 3300, 3312, 3360, 3420, 3456, 3528, 3600, 3660, 3672, 3720, 3840, 3852, 3864, 3888, 3960, 4032, 4104, 4200, 4320, 4368, 4416, 4500, 4512, 4536, 4608, 4704, 4800, 4860, 4872, 4896, 4920, 4968

Welche Fibonacci-Zahlen F_i lassen bei Division durch ihren Index i den Rest 1?
Für i < 1000 sind dies
i = 2, 11, 19, 22, 29, 31, 38, 41, 58, 59, 61, 62, 71, 79, 82, 89, 101, 109, 118, 122, 131, 139, 142, 149, 151, 158, 178, 179, 181, 191, 199, 202, 211, 218, 229, 239, 241, 251, 262, 269, 271, 278, 281, 298, 302, 311, 323, 331, 349, 358, 359, 362, 379, 382, 389, 398, 401, 409, 419, 421, 422, 431, 439, 449, 458, 461, 478, 479, 482, 491, 499, 502, 509, 521, 538, 541, 542, 562, 569, 571, 572, 599, 601, 619, 622, 631, 641, 659, 661, 662, 691, 698, 701, 709, 718, 719, 739, 751, 758, 761, 769, 778, 802, 809, 811, 818, 821, 829, 838, 839, 842, 859, 862, 878, 881, 898, 911, 919, 922, 929, 941, 958, 971, 982, 991, 998

Welche Fibonacci-Zahlen F_i lassen bei Division durch ihren Index i den Rest i-1?
Für i < 1000 sind dies
i = 2, 3, 4, 7, 13, 14, 17, 23, 26, 34, 37, 43, 46, 47, 53, 67, 73, 74, 83, 86, 94, 97, 103, 106, 107, 113, 127, 134, 137, 146, 157, 163, 166, 167, 173, 193, 194, 197, 206, 214, 223, 226, 227, 233, 254, 257, 263, 274, 277, 283, 293, 307, 313, 314, 317, 326, 334, 337, 346, 347, 353, 367, 373, 383, 386, 394, 397, 433, 443, 446, 454, 457, 463, 466, 467, 487, 503, 514, 523, 526, 547, 554, 557, 563, 566, 577, 586, 587, 593, 607, 613, 614, 617, 626, 634, 643, 646, 647, 653, 673, 674, 677, 683, 694, 706, 727, 733, 734, 743, 746, 754, 757, 766, 773, 787, 794, 797, 823, 827, 853, 857, 863, 866, 877, 883, 886, 887, 907, 914, 926, 934, 937, 947, 953, 967, 974, 977, 983, 997

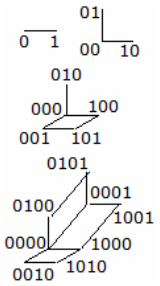
Komplexe Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge $F_0 = 0;\ F_1 = 1;\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
kann auch auf andere Zahlenbereiche als die natürlichen Zahle erweitert werden.
Ist $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ das Verhältnis des goldenen Schnitts, so können die Fibonacci-Zahlen für natürliche n erzeugt werden mit $F(n) = (\phi^n - (1 - \phi)^n) / \sqrt{5}$
Für den goldenen Schnitt ϕ gilt aber auch $1 + 1/\phi = \phi$
d.h. $(-1)\ 1/\phi = 1 - \phi \ldots (1 - \phi)^n = (-1)^n\ (1/\phi)^n = (-1)^n\ \phi^{-n}$
Ist n eine ganze Zahl, so ist weiterhin $(-1)^n = \cos(n\pi)$
Einsetzen ergibt als stetige und analytische Funktion $Fib(x) = (\phi^x - \cos(x\pi)\ \phi^{-x}) / \sqrt{5}$
Diese Funktion ist eine Fortsetzung der Fibonacci-Folge auf dem Bereich der komplexen Zahlen.

Fibonacci-Ziffernsumme

Durch Michael Semprevivo wurde folgendes Problem gestellt:
Es sind die Fibonacci-Zahlen F_n zu bestimmen, deren Index n gleich der Summe ihrer Ziffern ist.
Offensichtlich ist $F_{10} = 55$ eine derartige Fibonacci-Zahl. Bis n = 10000 erfüllen folgende F_n diese Beziehung: 1, 5, 10, 31, 35, 62, 72, 175, 180, 216, 251, 252, 360, 494, 504, 540, 946, 1188, 2222
Die Frage, ob es unendlich viele derartige Zahlen gibt, ist noch offen. Durch Robert Dawson von der Saint Mary's University, Nova Scotia, Canada, wurde eine plausible Erklärung gegeben, dass F_{2222} die größte derartige Fibonacci-Zahl ist. Dennoch fehlt noch der exakte Beweis.
Betrachtet man die Fibonacci-Zahlen in Positionssystemen zu anderen Basen b, so zeigt sich, dass F_1 immer auftritt, ab b = 6 F_5 vorhanden ist und für die Basis 11 wahrscheinlich eine unendliche Folge entsteht. Ansonsten nehmen für hohe b die Anzahl der zu findenden Zahlen schnell ab. Die Tabelle enthält für b = 2, ..., 20 und die ersten Indizees > 5 der Fibonacci-Zahlen, welche die beschriebene Eigenschaft haben (Polster, Oktober 2006):

Basis	Indizees n
6:	9, 15, 35
7:	7, 11, 12, 53
8:	22, 41
9:	29, 77, 149, 312
10:	10, 31, 35, 62, 72, 175, 180, 216, 251, 252, 360, 494, 504, 540, 946, 1188, 2222
11:	13, 41, 53, 55, 60, 61, 90, 97, 169, 185, 193, 215, 265, 269, 353, 355, 385, 397, 437, 481
12:	13, 14, 89, 96, 123, 221, 387, 419, 550, 648, 749, 866, 892, 1105, 2037
13:	12, 24, 25, 36, 48, 53, 72, 73, 132, 156, 173, 197, 437, 444, 485, 696, 769, 773
14:	8, 11, 27, 34, 181, 192, 194
16:	10, 60, 101
18:	60
19:	31, 36
20:	21, 22

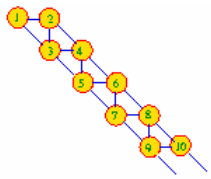


Fibonacci-Würfel

Der Graph eines n-dimensionalen Hyperwürfels kann durch n-buchstabige Wörter das Alphabets {0, 1} beschrieben werden. Dabei unterscheiden sich zwei miteinander verbundene Ecken des Hyperwürfels in genau einer Ziffer.
Ein Fibonacci-Würfel bildet einen Untergraphen des Hyperwürfels, wobei gefordert wird, dass in binären Abfolge der Ecken keine zwei "1" aufeinanderfolgen.
Dabei zeigt sich, dass ein 2-dimensionaler Fibonacci-Würfel 3 Ecken hat, ein dreidimensionaler 5 Ecken, ein vierdimensionaler 8 Ecken, usw. Allgemein hat ein n-dimensionaler Fibonacci-Würfel genau F_{n+1} Ecken.

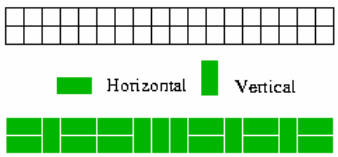
Wegezahl

Die natürlichen Zahlen werden wie in der oberen Abbildung angeordnet und durch Strecken miteinander verbunden.
Die Anzahl der möglichen Wege um von der Zahl 1 zur Zahl n zu gelangen ist dann gleich der Fibonacci-Zahl F(n). Zum Beispiel gibt es für n = 5 genau 5 verschiedene Wege von der 1 zur 5: (1,2,4,5), (1,2,3,4,5), (1,2,3,5), (1,3,4,5), (1,3,5)
Damit ist F(5) = 5. Um zur 6 zu gelangen, gibt es genau 8 Wege usw.

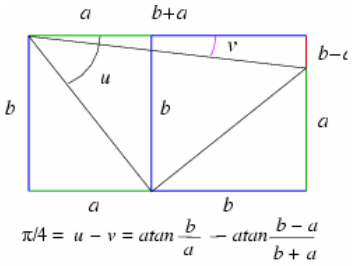


Überdeckung mit Dominosteinen

Gegeben ist eine n x 2 Anordnung von Quadraten (siehe Abbildung).
Dieses Muster soll mit Dominosteinen lückenlos überdeckt werden.
Dabei sollen der horizontale und der vertikale Dominostein unterschieden werden.
Problem: Wie groß ist die Anzahl K(n) der verschiedenen möglichen Überdeckungen des n x 2 Musters?



Offensichtlich ist K(1) = 1 (1 vertikaler Domino), K(2) = 2 (2 Dominos horizontal oder vertikal).
Insgesamt ergibt sich K(n+1)=K(n)+K(n-1),
d.h. die Anzahlen K(n) entsprechen ebenso den Fibonacci-Zahlen.



Fibonacci-Zahlen und π

Gegeben seien vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen b-a, a, b, b+a. Bildet man aus diesen Zahlen ein Rechteck (siehe Abbildung), so ist die Differenz der zwei Winkel u-v gleich 45°. Dann ergibt sich also

$\pi/4$ = arctan(b/a) - arctan((b-a)/(b+a)) und allgemein

$\pi/4 = \arctan(F_{n+1}/F_n) - \arctan(F_{n-1}/F_{n+2})$

Zum Beispiel wird für 3, 5, 8, 13: $\pi/4$ = arctan(8/5) - arctan(3/13).
Diese Beziehung gilt auch für Lucas-Zahlen und außerdem für jede beliebige Zahlenfolge, welche die Rekursionsgleichung $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ erfüllt, zum Beispiel für 1, 7, 8, 15 ... wird $\pi/4$ = arctan(8/7) - arctan(1/15).

Zeckendorf-Zerlegung

Nach einer Entdeckung von Edouard Zeckendorf kann jede natürliche Zahl als Summe von zwei oder mehr, nicht notwendig aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen dargestellt werden. Fordert man noch, dass möglichst große Summanden und keiner doppelt auftreten, so ist diese Zerlegung eindeutig und nach Zeckendorf benannt.
Die Zeckendorf-Zahl symbolisiert diese Zerlegung; mit einer Ziffer 1, wenn die Fibonacci-Zahl mit diesem Index in der Zerlegung auftritt, mit einer 0, wenn sie nicht auftritt. Eine solche Zerlegung kann damit eindeutig durch eine Dualzahl beschrieben werden.

Satz von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl N läßt sich eindeutig schreiben als

$N = F_{n1} + F_{n2} + \ldots + F_{nk}$ mit $2\ n_1 \le n_2-2$, $n_2 \le n_3-2$, … , $n_{k-1} \le n_k-2$

In der Summe dürfen also weder F_0, noch F_1, noch zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen vorkommen.

Beweis: Für n = 1, 2, 3, 4 ergibt sich dies durch einfache Rechnung.
Nun sei die Behauptung bereits bewiesen für $N < F_n$, und es sei $F_n \le N < F_{n+1}$. Es ist dann

$N - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$.

Also läst sich $N-F_n$ nach Induktionsvorraussetzung als solche Summe schreiben, und außerdem kommt in dieser Summe F_{n-1} als Summand nicht vor. Addiert man F_n, so erhält man die Existenz einer Summendarstellung wie behauptet.
Umgekehrt muss in jeder solchen Darstellung von N auch der Summand F_n vorkommen, denn die größte Summe, die sich mit F_2, …, F_{n-1} bilden lässt, ist $F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \ldots$
Diese ist kleiner gleich F_{n-1}. Aus der Eindeutigkeit der Darstellung von $N-F_n$ folgt dann die Eindeutigkeit derjenigen von N.

Explizite Darstellung

Für n, k $\in$ N ist F_{kn}/F_n eine natürliche Zahl. Für $n \ge 2$ ist

$F_{kn}/F_n = \Sigma_{i=1}^{k/2} (F_{n(2i-1)-1} + F_{n(2i+1)+1})$ für gerades n

$F_{kn}/F_n = F_2 + \Sigma_{i=1}^{(k-1)/2} (F_{2ni-1-1} + F_{2ni+1})$ für ungerades n

Für n = 2, F_2 = 1, reduziert sich die erste Formel auf F_{2k}.

Zeckendorf-Sequenz, Fibonacci-Sequenz

Für den Satz von Zeckendorf gibt es auch eine andere Herangehensweise:
Definition: Eine Zeckendorf-Sequenz ist eine endliche Folge $x_1, x_2, \ldots, x_k$
mit $x_i \in \{0,1\}$ und $x_i \cdot x_{i+1} = 0$ und $x_k = 1$, d.h. eine Folge aus Nullen und Einsen, in der nie zwei Einsen hintereinander vorkommen, und die mit 1 endet.
k heißt die Länge der Zeckendorf-Sequenz.

Satz von Zeckendorf

Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Zeckendorf-Sequenzen und den natürlichen Zahlen mit

$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \rightarrow \Sigma_{i=1}^{k} x_i F_{i+1}$

Die Anzahl der Zeckendorf-Sequenzen der Länge $\le$ n ist genau F_{n+2}.
Beweis: Aus dem Beweis zum Satz von Zeckendorf (vorhergehende Seite) folgt, dass man genau alle Zahlen $< F_{n+2}$ mit Hilfe von F_2, … , F_{n+1} darstellen kann. Dies entspricht genau der Behauptung.

Fibonacci-Zahlen von Graphen

Eine Teilmenge I von Knoten eines Graphen G heißt unabhängig, falls keine zwei Knoten aus I durch eine Kante verbunden sind.
Der Graph, der aus n Knoten $x_1, \ldots, x_n$ besteht, wobei jede x_i und x_{i+1} (i = 1, …, n-1) durch eine Kante verbunden sind, hat damit genau F_{n+2} verschiedene unabhängige Mengen von Knoten, denn jede solche

Menge entspricht genau einer Zeckendorf-Sequenz. Ist G nun ein beliebiger Graph, so sei die Fibonacci-Zahl von G F(G) die Anzahl der unabhängigen Knotenmengen von G.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
.	.	1	2	1	.	.	.	.	.
.	.	.	1	3	3	1	.	.	.
.	.	.	.	1	4	6	4	1	.
.	.	.	.	.	1	5	10	10	5
.	.	.	.	.	.	1	6	15	20
.	.	.	.	.	.	.	1	7	21
.	.	.	.	.	.	.	.	1	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Fibonacci-Zahlen und Pascalsches Dreieck

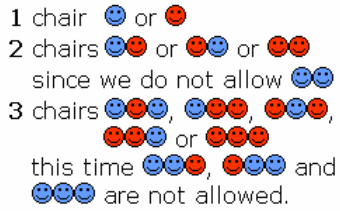
Werden im Pascalschen Dreieck die Zahlen entsprechend dem dargestellten Muster addiert, ergeben sich (natürlich) die Fibonacci-Zahlen.
Daraus folgt $F_n = \Sigma_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$ $F_n = \Sigma_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$

Fibonacci-Zahlen und Entfernungen

Der Quotient F_{n+1}/F_n nähert sich im Grenzwert der goldenen Zahl, d.h. 1,618033988749894848…
Der Umrechnungsfaktor zwischen Kilometern und englische Meilen (Miles) ist 1,609344, d.h. etwa die goldene Zahl. Daraus ergibt sich die merkwürdige Beziehung, dass näherungsweise

3 Meilen = 5 km, 5 Meilen = 8 km, 8 Meilen = 13 km, …

und allgemein F_n Meilen = F_{n+1} km gilt.



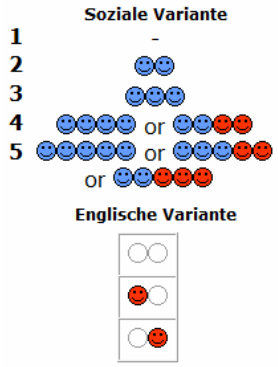
Fibonacci-Zahlen und Lehrer

Unter der Adresse (Autor Dr.Ron Knott)
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html
findet man folgende "Anwendung" der Fibonacci-Zahlen. Da der Text zu schön ist, hier im Original:

Chairs in a row: No Neighbouring Teachers

This time we have n chairs in a row and a roomful of people.
If you've ever been to a gathering where there are teachers present, you will know they always talk about their school/college (boring!).
So we will insist that no two teachers should sit next to each other along a row of seats and count how many ways we can seat n people, if some are teachers (who cannot be next to each other) and some are not. The number of seating arrangements is always a Fibonacci number: (Abbildung)

You can write the sequences using T for Teacher and N for Normal people - oops - I mean Not-a-teacher !!
There will always be a Fibonacci number of sequences for a given number of chairs, if no two teachers are allowed to sit next to each other!
Von der Möglichkeit, Personen in einer Reihe anzuordnen, gibt es weitere Varianten, eine soziale und eine "englische".



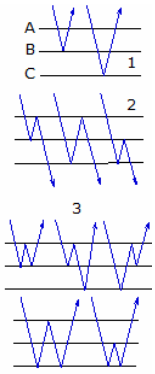
Soziale Variante

In diesem Fall fodert man, dass neben einem Lehrer (blau) stets mindestens ein weiterer Lehrer sitzt und ebenso für Nicht-Lehrer (rot). Damit ist gewährleistet, dass ein "armer" Nicht-Lehrer sich nicht die ganze Party mit einem Lehrer unterhalten muss. Der Autor dieser Variante R.Lewis nennt diese Variante "sozial".
Beginnt man mit einem Lehrer, so entwickeln sich auch hier wieder die Anzahl der Sitzmöglichkeiten mit steigenden Stuhlzahlen in Form der Fibonacci-Folge.

Englische oder antisoziale Variante

Wie bekannt, sind Engländer oft sehr reserviert und vor allem versuchen sie, wenn möglich, sich niemals neben eine andere Person zu setzen. Sie lassen immer einen Platz frei. Diese Variante ist natürlich "antisozial".

Sind zwei Plätze vorhanden, gibt es damit drei Möglichkeiten sie zu belegen:
frei frei | Engländer frei | frei Engländer
Bei drei Plätzen ergeben sich 5 Möglichkeiten
frei frei frei | Engländer frei Engländer | frei Engländer frei | Engländer frei frei | frei frei Engländer
usw., d.h. also wieder die Fibonacci-Zahlen.
Quelle: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html
Literatur: "Antisocial Dinner Parties", R.Lewis in Fibonacci Quarterly 1995, vol 33, pages 368-370



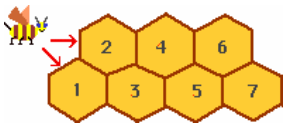
Reflexion und Fibonacci-Zahlen

Gegeben sind drei reflektierende Schichten A, B und C. Ein Lichtstrahl fällt auf diese Schichten und soll n mal reflektiert werden.
Das Problem ist, auf wie viele verschiedene Arten der Lichtstrahl an verschiedenen Schichten n mal reflektiert werden kann.

Die Aufgabe besteht damit in der Ermittlung aller n buchstabigen Wörter über dem Alphabet {A, B, C}. Dabei wird gefordert, dass aufeinander folgende Buchstaben in unmittelbarer alphabetischer Reihenfolge steigen oder fallen und kein Wort mit A beginnt.
Die Anzahl der möglichen Wörter bei n Reflexionen ist die Fibonacci-Zahl F_{n+1}.
Literatur: "Reflections across Two and Three Glass Plates", V.E.Hoggatt Jr. und Marjorie Bicknell-Johnson in The Fibonacci Quarterly, volume 17 (1979), pages 118 - 142

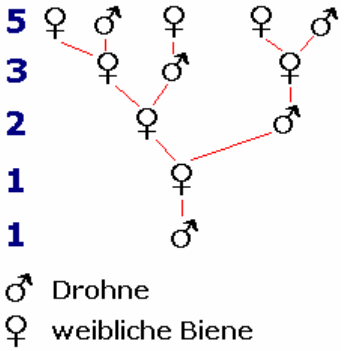
Bienenwege und Fibonacci-Zahlen

Eine Biene hat die Absicht zu einer Zelle mit der Nummer n zu laufen. Dabei kann sie sich ausschließlich nach rechts unten oder rechts oben bewegen, niemals zurück.
Wie viele verschiedene Wege gibt es?

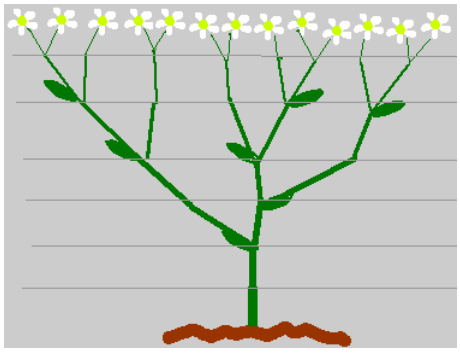


Zur Zelle 1 gibt es nur einen Weg: 1
Zur Zelle 2 gibt es zwei Wege: 1-2 und direkt 2
Zur Zelle 3 gibt es drei Wege: 1-2-3, 1-3 und 2-3
Zur Zelle 4 gibt es fünf Wege: 1-2-3-4, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4 und 2-4
Allgemein zeigt sich wieder, dass es zur n-ten Zelle genau F_{n+1} verschiedene Wege gibt.

Fibonacci-Zahlen im Tierreich



Eine verblüffende Anwendung der Fibonacci-Zahlen findet sich auch im Tierreich.
In Bienenstaaten werden weibliche Arbeiterinnen von der Bienenkönigin aus befruchteten, die männlichen Drohnen aus unbefruchteten Eiern geboren.
Betrachtet man eine Drohne, so hat diese, da sie aus einer unbefruchteten Eizelle stammt, praktisch nur "eine Mutter", aber keinen Vater. Diese "Mutter" besitzt, da aus befruchteter Zelle, eine "Mutter" und einen "Vater".
Setzt man dies fort, so hat die Drohne in den vorhergehenden Generationen 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Vorfahren.
Diese Anzahl entspricht gerade wieder der Fibonacci-Folge. Man kann nur vermuten, dass Fibonacci, bei Kenntnis der Fortpflanzung in Bienenvölkern, vielleicht dieses realistischere Beispiel anstelle seines Kaninchenproblems gewählt hätte.



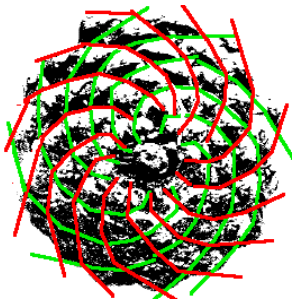
Auch bei dem Wachstum einer Pflanze treten die Fibonacci-Zahlen auf. Geht man davon, dass an jedem neuen Ast nach 2 Monaten wieder ein neuer Ast entsteht, erhält man nachfolgende Abbildung:

Fibonacci-Zahlen in der Natur

Blätter sind am Stengel stets in regelmäßigen Mustern angeordnet, die am besten bei Betrachtung des Sprosses von oben zu erkennen sind. In den meisten Fällen wird deutlich, dass sie in Form einer Schraube angeordnet sind und dass zwischen aufeinanderfolgenden Blättern stets gleiche Winkel (Divergenzwinkel) messbar sind.
Im einfachsten Fall beträgt dieser Winkel 180°, die Blätter sind dann zweizeilig (d.h. in zwei sog. Längszeilen) gegenständig angeordnet. Es kommen aber auch andere Winkel vor:
120 Grad (= 1 / 3 Vollkreis) oder 144 Grad (2 = 2 / 5, d.h. 5 Blätter verteilen sich auf zwei Vollkreise = 720 Grad) oder 135 Grad (=3 / 8, 8 Blätter auf drei Vollkreise) usw.

Die Regelmäßigkeit der Blattstellung wurde bereits im vorigen Jahrhundert von C.F.Schimper und A.Braun entdeckt und heißt nach ihnen Schimper-Braunsche Hauptreihe. Die dabei auftretenden Winkel entsprechen einer Fibonacci-Reihe, d.h., Zähler und Nenner aufeinanderfolgender Brüche sind gleich der Summe von Zähler und Nenner der beiden vorangegangenen. Die Reihe würde demnach wie folgt lauten: 1 / 2 , 1 / 3, 2 / 5, 3 / 8, 5 / 13, 8 / 21, 13 / 34, 21 / 55, 34 / 89 usw, Der Vorteil regelmäßiger Anordnung der Blätter liegt darin, eine möglichst hohe Lichtausbeute zu erreichen. Darüber hinaus erreichen Pflanzen so eine möglichst große Ausbeute an Regen. Blüten bilden damit auch einen besonders großen Anziehungsbereich für Insekten aus, die sie zur Bestäubung benötigen.
Der goldene Schnitt und damit die Fibonacci-Zahlen kann auch beim Wachstum der Pflanzen gemessen werden. Die Strecken der einzelnen Knotenpunkte stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts, auch wenn die Pflanzen in die Höhe wachsen.

Sehr oft kann man bei Blättern feststellen, dass die Breite des Blattes im Verhältnis 5:8 oder 3:8 zur Länge steht. Ein Beispiel für 5:8 ist das Eichenblatt.



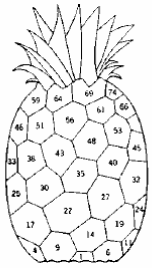
Auch an anderer Stellen tauchen die Fibonacci-Zahlen in der Natur auf: Die Blätter oder Früchte von Pflanzen bilden oft Spiralmuster. Die Anzahl der Spiralen sind meist Fibonacci-Zahlen – ein Föhrenzapfen hat z.B. in der einen Richtung 8, in der anderen 13 Spiralen.

Sieht man sich den Fruchtstand einer Sonnenblume genauer an, erkennt man, dass die Kerne in spiralförmigen Linien angeordnet sind.
Es gibt links- und rechtsdrehende Spiralen. Zählt man die linksdrehenden, so stößt man auf die Fibonacci-Zahlen, also 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... .
Erstaunlicherweise ergibt die Anzahl der rechtsdrehenden Spiralen nicht die gleiche, sondern eine benachbarte Fibonacci-Zahl. Bei der abgebildeten Sonnenblume beträgt die Anzahl 21 bzw. 34.
Außer bei den genannten Pflanzen findet man eine Vielzahl derer, die gerade die Fibonacci-Zahlen umsetzen. Als Auswahl seien zwei Kakteen aus Neuseeland gezeigt:

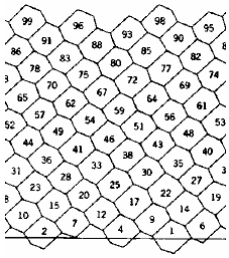
Ein Standardbeispiel für das Auftreten von Spiralzahlen in der Natur entsprechend der Fibonacci-Zahlen ist der Pyramidenblumenkohl oder Romanesco (Brassica oleracea L. convar).

In der Natur treten Fibonacci-Zahlen auch oft bei der Anzahl von Blütenblättern auf. Man findet

3 Blütenblätter bei Lilien (untere Abbildung, obwohl es scheint, dass 6 Blütenblätter auftreten, sind nur 3 richtige Blütenblätter)
5 Blütenblätter bei Butterblumen, wilden Rosen, Alpenakelei, Büschelnelken (obere Abbildung)
8 Blütenblätter bei Studentenblumen, Bitterenzian, Pfingstrose
13 Blütenblätter bei Maisringelblume, Heide, einige Gänseblümchen
21 Blütenblätter Aster, Zichorie
34 Blütenblätter Banane
55 und 89 Blütenblätter verschiedene Gänseblümchen und Astern



Einige Arten halten die Anzahl der Blütenblätter sehr exakt ein, z.B. Butterblumen, andere schwanken um einen Durchschnittswert, der eine Fibonacci-Zahl ist.
Bei der Passionsblume findet man (von hinten) 3 äußere Schutzblätter, 5 äußere grünen Blütenblätter und 5 innere Blütenblätter. Von vorn erkennt man 5 grünliche Staubgefäße und 3 dunkelbraune; alles Fibonacci-Zahlen.
Hat ein Pflanze eine Blütenblattzahl, die keine Fibonacci-Zahl ist, so ist die oft eine Lucas-Zahl.

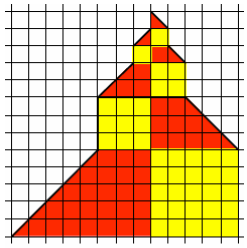


Auch bei der Anordnung der Schuppen bei Tannenzapfen und bei der Anordnung der Außenzellen der Ananas treten Fibonacci-Zahlen auf.
Die Zellen der Ananas wurden im Bild ihrer Höhe nach durchnumeriert. Dadurch ergeben sich dann entsprechende Zahlenfolgen, hier etwa 1, 6, 11, 16, 21, …

Um ein mathematisches Modell der Schuppenanordnung auf einer Ananas zu erhalten, stellt man sich ihre Oberfläche als Zylinder vor, den man entlang einer vertikalen Linie aufschneiden und auf einer Ebene abrollen. Es ergibt sich dann:

Sei h die Höhe des Mittelpunktes der untersten Zelle. Dann bilden die Mittelpunkte der Sechsecke ein "Gitter". Um von einer Zelle zur nächst höheren zu kommen, müssen wir den Ananasumfang im goldenen Schnitt teilen, uns um diesen Wert um die Ananas herumbewegen, und dann um h nach oben, gehen.

Fibonacci-Matterhorn



Wählt man aus der Fibonacci-Folge, außer den Startgliedern, nur jeweils die zweite Zahl aus, d.h. also

1, 1, 3, 8, 21, 55, 144, …

und bildet aus längs der Diagonalen halbierten Quadraten entsprechend der Fibonacci-Zahlen Trapeze, so kann man diese mit weiteren Rhomben zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen.
Durch Hans Walser, einem Schweizer Mathematiker, wird vorgeschlagen, diese Trapeze mit Quadraten zu der links gezeigten Abbildung zusammenzufügen. Irgendwie sieht das wie das Matterhorn aus. :-)

Fibonacci-Zahlen in der Architektur

Ein prominentes Beispiel für die Verwendung der Fibonacci-Zahlen in der Architektur ist die Kuppel des Doms zu Florenz. Ihre Masse wurden 1367 verbindlich festgelegt: 144 bracci sollte ihre Höhe messen, wovon 55 auf die Kuppel selbst und 89 auf die Distanz vom Boden bis zum Tambour entfielen.
Welche Bedeutung man offenbar diesen Masszahlen beigemessen haben musste, zeigt in frappanter Weise die eigens für die Domweihe am 25. März 1436 von Guillaume Dufay (1400 - 1474) komponierte Festmotette "Nuper rosarum flores": Dufay, der bedeutendste Musiker seiner Zeit, nimmt im Aufbau dieser Motette vielfach Bezug auf die Architektur und spielt in der Anzahl der den einzelnen Stimmen zugeteilten Tönen unverkennbar auf die Fibonacci-Zahlen der Kuppelmasse an.

1994 schuf der Künstler Mario Merz (Italien) in Turku (Finnland) eines seiner Werke. Der Schornstein des Kraftwerkes erhielt 2 Meter große Neon-Ziffern, die die ersten Fibonacci-Zahlen zeigen. Aussage des Künstlers: Das Werk ist eine Metapher auf die menschliche Suche nach Ordnung und Harmonie im Chaos.

Die Bedeutung der Fibonacci-Zahlenfolge zeigt sich auch in deren Bezeichnung in anderen Sprachen. Im Holländischen heißt diese Folge zum Beispiel „De Konijnenreeks", d.h. die Königsreihe.

Gedicht Alfabet

Die dänische Schriftstellerin Inger Christensen (1935-2009) zählte zu den bedeutendsten europäischen Lyrikerinnen ihrer Generation und galt jahrzehntelang als Kandidatin für den Nobelpreis.

Der Gedichtband "Alfabet" von 1981 bezieht sich auf die Fibonacci-Reihe. Christensen setzte die Fibonacci-Zahlen in Korrespondenz mit Struktur und Wachstum verschiedener Pflanzenarten. Dieses Gedicht findet sich als Mauergedicht an einem Gebäude in Kopenhagen:

1. abrikostræerne findes, abrikostræerne findes
2. bregnerne findes; og brombær, brombær
Og brom; og brinten
3. cikaderne findes; cikorie, chrom
og citrontræer findes; cikaderne findes;
cikaderne., ceder, cypres, cerebellum
4. duerne findes; drømmene, dukkerne
dræberne findes; duerne, duerne;
dis, dioxin og dagene; dagene
findes; dagene, døden; og digtene

findes; digtene, dagene, døden

5. efteråret findes; eftersmagen og eftertanken
findes; og enrummet findes; englene,
enkerne og elsdyret findes; enkelthederne
findes, erindringen, erindringens lys;
og efterlyset findes, egetræet og elmetræet
findes, og enebærbusken, ensheden, ensomheden
findes, og edderfuglen og edderkoppen findes,
og eddiken findes, og eftertiden, eftertiden

Fibonacci-Zahlen im Film

In der US-amerikanischen Fernsehserie "Fringe" von J.J.Abrams ("Lost" und "Alias") wird immer wieder auf die Fibonacci-Reihe Bezug genommen. Allerdings ist unklar, was die Fibonacci-Zahlen mit dem ansonsten dubiosen Inhalt der Serie zu tun haben.
Zwischen den einzelnen Szenen werden immer wieder Symbole eingeblendet. Diese beziehen sich direkt oder versteckt auf die Zahlen der Fibonacci-Reihe.

1) Das Fringe-Horn (Abbildung) hat die Form einer Fibonacci-Spirale. Auf dem Horn ist zusätzlich die goldene Zahl Φ aufgetragen. Seit dem Auftauchen des Hornes gibt es auch eine zugehörige Internetseite.
2) Das Fringe-Seepferdchen hat ebenfalls die Form einer Fibonacci-Spirale. Auch sein Schwanz ist in dieser From.
3) Der Fringe-Frosch hat den griechischen Buchstaben Φ, das goldene Verhältnis, auf seinem Rücken.
4) Die Fringe-Blume hat 13 Blütenblätter, die wie die Flügel einer Libelle aussehen. Die Blütenmitte entspricht einer parabolischen Spirale.

Fibonacci-Wörter

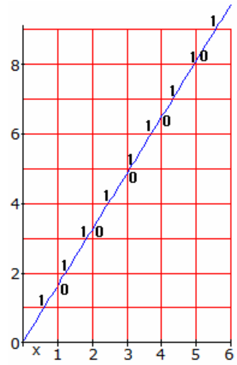
Ausgehend vom Kaninchen-Problem des Fibonacci ergibt sich die berühmte Fibonacci-Folge
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
der vorhandenen Kaninchenpaare. Setzt man für ein geschlechtsreifes Kaninchenpaar 1 und ein noch nicht geschlechtsreifes 0, so kann die Aufgabenstellung auf einen Automaten mit dem Alphabet {0, 1} und den Produktionsregeln $0 \rightarrow 1$; $1 \rightarrow 10$
reduziert werden.
Damit ergibt sich eine Folge von Wörtern über dem Alphabet {0, 1} die Fibonacci-Wörter:
0, 1, 10, 101, 10110, 10110101 …
Die Länge des n.Wortes entspricht gerade der n.ten Fibobacci-Zahl F_n. Die Anzahl '1' ist gleich F_{n-1}. Wie zu erwarten, ergibt sich das n+1.te Wort W_{n+1} durch einfache Aneinanderfügen der Wörter W_n und W_{n-1}:
$W_{n+1} = W_n\ W_{n-1}$
Schneidet man von einem Fibonacci-Wort die letzten zwei Zeichen ab, so entsteht stets ein Palindrom. Lässt man die Nummer n des n.ten Fibonacci-Wortes gegen Unendlich streben, so entsteht eine unendliche Folge von '0' und '1'. Diese Folge wird goldene Buchstabenfolge oder goldene Reihe genannt.

Ziffern der goldenen Reihe

Die ersten 2000 Ziffern der goldenen Reihe sind
1011010110 1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011
0101101101 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101
1010110110 1011011010 1101011011 0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010
1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011010110 1101011011 0101101011 0110101101
1010110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110
1101011011 0101101011 0110101101 0110110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101
0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1011010110
1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011
0110101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110101
1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011
0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101
1010110110 1011010110 1101011011 0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1011011010
1101101011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110 1101011011 0101101011 0110101101
0110110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110
1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1011010110 1011011010 1101011011 0101101101
0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1010110110
1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011
0101101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011 0101101011 0110101101 1010110101
1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011010110 1101011011
0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101 0110110101
1010110110 1011010110 1101011011 0101101011 0110101101 0110110101 1011010110 1011011010
1101101011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011 0110101101
0110110101 1011010110 1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110

1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110

Phi-Linien-Diagramm



In den ersten Quadranten eines Koordinatensystems werde die Gerade
$y = \phi\, x = (1 + \sqrt{5})/2\ x$
eingetragen. Zusätzlich werden Gitterlinien bei allen ganzzahligen x- und y-Werten eingezeichnet.

Schneidet die Gerade eine Linie mit x = 1, 2, 3, …, so wird eine '0' an den Schnittpunkt geschrieben; werden y = 1, 2, 3, … geschnitten eine '1'.
Beginnend ab dem Koordinatenursprung werden längs der Geraden die Ziffern aneinandergefügt.
Ergebnis: 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 …
Wie zu erwarten, muss auch hier wieder irgendein Zusammenhang zum goldenen Schnitt oder den Fibonacci-Zahlen auftreten.
Tatsächlich ist die entstehende Ziffernfolge die goldene Reihe.

Fibonacci-Zahlenberechnung

Modula 2 - Programme zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen nach Otto Forster "Algorithmische Zahlentheorie":

```
Anfangswerte:  fib(0) = 0; fib(1) = 1;
// Rekursive Version, sehr langsam!
function fib_rec(n: integer): integer;
begin   if n <= 1 then return n;
        else return fib_rec(n-1) + fib_rec(n-2);
end; end;

// Iterative Version
function fib_it(n: integer): integer;
var  x, y, temp, i: integer;
begin   if n <= 1 then return n end;
        x := 1; y := 0;
        for i := 2 to n do temp := x; x := x + y; y := temp; end;
        return x; end;

// Schnelle Berechnung der Fibonacci-Zahlen mittels der Formeln
// fib(2*n-1) = fib(n)**2 + fib(n-1)**2 und fib(2*n)   = fib(n)**2 + 2*fib(n)*fib(n-1)
function fib(n: integer): integer;
var k, x, y, xx, temp: integer;
begin   if n <= 1 then return n end;
        x := 1; y := 0;
        for k := bit_length(n)-2 to 0 by -1 do xx := x*x; x := xx + 2*x*y; y := xx + y*y;
        if bit_test(n,k) then temp := x; x := x + y; y := temp;
        end; end;
        return x;
end.
```

Fibonacci-Primzahlen

In der Fibonacci-Folge $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_0=0$, $F_1=1$; treten für
n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 81839, ... Primzahlen auf.
Die ersten sind:

n	Fibonacci-Primzahl F_n	n	Fibonacci-Primzahl F_n
3	2	4	3
5	5	7	13
11	89	13	233
17	1597	23	28657
29	514229	43	4334 94437
47	29712 15073	83	99 19485 30947 55497
131	106 63404 17491 71059 58145 72169	137	1913 47024 00093 27808 14494 23917

Nichtprime Fibonacci-Folgen

In der Fibonacci-Folge $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_0=0$, $F_1=1$; treten u.a. für
n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 81839, … Primzahlen auf.

1964 vermutete R.L.Graham, dass man zwei teilerfremde(!) Startglieder F_0, F_1 so konstruieren kann, dass eine Fibonacci-ähnliche Zahlenfolge entsteht, die ausschließlich zusammengesetzte Zahlen enthält. Durch D.E.Knuth (1990) wurde ein derartiges Beispiel mit

F_0 = 331635635998274737472200656430763
F_1 = 151002891108840197118959030549878 5

gefunden; später ein weiteres mit kleineren Startwerten

F_0 = 49463435743205655
F_1 = 62638280004239857

Bis heute kennt man kein allgemeines Lösungsverfahren. Kleinere bekannte Startwert sind

F_0 = 20615674205555510 ; Herbert Wilf 1990
F_1 = 3794765361567513

und F_0 = 407389224418 ; John Bicol 1990
F_1 = 76343678551.

Fibonacci-Vierling

... Folge von vier Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 für welche eine natürliche Zahl a existiert, so dass

$p_1 + a = p_2$; $p_1 + p_2 = b$; $p_2 + b = p_3$ und $p_2 + p_3 = p_4$

gilt. Für a = 236 gibt es z.B. den Fibonacci-Vierling : 2003, 2239, 6481, 10723 , mit b = 4242.

Primzahlen vom Fibonacci-Typ

Bei Erweiterung der Bildungsvorschrift der Fibonacci-Zahlen auf

$X_0 = a$; $X_1 = b$; $X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$

ergeben sich in den entstehenden Folgen Primzahlen für (Suche bis n = 600):

a	b	Primzahlen für n = ...
1	1	2, 3, 4, 6, 10, 12, 16, 22, 28, 42, 46, 82, 130, 136, 358, 430, 432, 448, 508, 568, 570 ...
1	3	3, 4, 6, 7, 10, 12, 15, 16, 18, 30, 36, 40, 46, 52, 60, 70, 78, 112, 312, 352, 502, ...
1	4	2, 5, 6, 8, 9, 14, 18, 21, 24, 26, 33, 38, 54, 56, 78, 81, 90, 96, 98, 305, 414, 573, ...
1	5	3, 4, 7, 9, 12, 25, 27, 28, 48, 105, 108, 127, 424, 465, ...
1	6	2, 3, 6, 8, 12, 20, 23, 56, 62, 92, 116, 167, 182, 212, 503, 552, ...
2	1	2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, ...
2	5	2, 4, 5, 8, 13, 14, 20, 28, 29, 32, 53, 64, 80, 85, 92, 124, 128, 325, ...
2	7	5, 7, 8, 11, 20, 23, 28, 35, 37, 47, 80, 131, 152, 503, 512, 527, ...

Fibonacci-erzeugende Funktion

Mit den Fibonacci-Zahlen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ und der Beziehung $F_{n+2}-F_{n+1}-F_n = 0$ wird

$$x^2 = F_0\, x + (F_1-F_0)\, x^2 + (F_2-F_1-F_0)\, x^3 + (F_3-F_2-F_1)\, x^4 + \ldots$$

für eine bebliebige reelle Zahl x mit $0 < x < (\sqrt{5} - 1)/2$.

Durch Ausmutiplizieren und Umordnen wird

$$x^2 = (1-x-x^2)\, F_0\, x + (1-x-x^2)\, F_1\, x^2 + (1-x-x^2)\, F_2\, x^3 + (1-x-x^2)\, F_3\, x^4 + \ldots$$

$$x^2 = (1-x-x^2)\, (F_0\, x + F_1\, x^2 + F_2\, x^3 + F_3\, x^4 + F_4\, x^5 + \ldots)$$

$$x^2/(1-x-x^2) = F_0\, x + F_1\, x^2 + F_2\, x^3 + F_3\, x^4 + F_4\, x^5 + \ldots$$

Beachtet man noch $F_0 = 0$, so ergibt sich eine Fibonacci-Zahlen erzeugende Funktion

$$x/(1-x-x^2) = F_1\, x + F_2\, x^2 + F_3\, x^3 + F_4\, x^4 + \ldots$$

Setzt man für x zum Beispiel 1/10, 1/100, 1/1000 usw. ein, ergibt sich

x = 1/10
$x/(1-x-x^2)$ = 10/89 = 0, 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5 6 1 7 9 7 7 5 ...
x = 1/100
$x/(1-x-x^2)$ = 100/9899 = 0, 01 01 02 03 05 08 13 21 34 55 90 46 36 83 20 03 ...
x = 1/1000
$x/(1-x-x^2)$ = 1000/998999 = 0, 001 001 002 003 005 008 013 021 034 055 089 144 233 377 610 988 599 ...
usw.

Setzt man x = 19/89, 199/9899, 1999/998999, ... ein, so ergeben sich die Ziffern der Lucas-Folge $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Mit x = 1/889, 1/989899, 1/998998999, ... erhält man die Tribonacci-Folge $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$ und mit x = 1/8889, 1/98989899, 1/998998998999, ... die Tetranacci-Folge $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}$ usw.

Anmerkung: Beachtet man die oben gemachte Einschränkung für x nicht und setzt zum Beispiel x = 1 ein, wird

$$x/(1-x-x^2) = 1/(1-1-1) = -1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots$$

mit dem "Ergebnis", dass die Summe aller Fibonacci-Zahlen gleich -1 ist. Dieser Trugschluss ergibt sich daraus, das die oben angesetzte unendliche Summe nur für $0 < x < (\sqrt{5} - 1)/2$ konvergiert, anderfalls divergiert.

Fibonacci-Polynom

Eine Art, die Fibonacci-Zahlen zu verallgemeinern, ist es, überall noch ein x dazuzuschreiben. Auf diese Weise erhält man Polynome.

Definition: Fibonacci-Polynome sind die wie folgt definierten Polynome:

$F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ und $F_{n+1}(x) = x\, F_n(x) + F_{n-1}(x)$.

$F_n(x)$ ist ein Polynom n-1.Grades. Die ersten Fibonacci-Polynome sind

$F_2(x) = x$ $\quad$ $F_3(x) = x^2 + 1$

$F_4(x) = x^3 + 2x$ $\quad$ $F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$

Analog zur Kettenbruchdarstellung von F_n/F_{n+1} ist hier der n.Näherungsbruch zum Kettenbruch

$1 / (x + 1/(x + 1/(x + \ldots)))$

genau $F_n(x) / F_{n+1}(x)$.

Fibonacciartiges Polynom

Die Fibonacciartigen Polynome sind die Polynome:

$f_0(x) = 0$, $f_1(x) = 1$ und $f_{n+1}(x) = x\,(f_n(x) + f_{n-1}(x))$.

$f_n(x)$ ist ein Polynom n-1. Grades. Die ersten Fibonacciartigen Polynome sind

$f_2(x) = x$ $\quad$ $f_3(x) = x^2 + x$

$f_4(x) = x^3 + 2x^2$ $\quad$ $f_5(x) = x^4 + 3x^3 + x^2$

$f_6(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3$

Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen, dass für n > 0 gilt: $\quad F_n(x) = f_n(x^2) / x^{n-1}$

Quelle: http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/node4.html

Verallgemeinerte Fibonacci-Folge

Mit der Fibonacci-Folge verwandte, zahlentheoretisch wichtige Folgen.

Berechnungsvorschrift $G_{n+2} = G_n + G_{n+1}$

Die Startglieder G_0 und G_1 sind dabei frei wählbar.

Für $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ ergibt sich die Fibonacci-Folge F_n, für $G_0 = 2$, $G_1 = 1$ die Lucas-Folge L_n. Es gilt:

$G_n = 1/\sqrt{5}\,((G_0\,\phi + G_1)\,\Phi^n + (G_0\,\Phi - G_1)\,-\phi^n)$ mit $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2$, $\phi = (\sqrt{5}-1)/2$

$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$

$G_n = G_0\,F_{n-1} + G_1\,F_n$

$F_n = (G_0\,G_{n+1} - G_1\,G_n) / (G_0\,G_2 - G_1^2)$

$2\,G_k = (2\,G_1 - G_0)\,F_k + G_0\,L_k$ $\quad$ $G_{-n} = (-1)^n\,(G_0\,F_{n+1} - G_1\,F_n)$

$G_{n+m} = F_{m-1}\,G_n + F_m\,G_{n+1}$ $\quad$ $G_{n-m} = (-1)^m\,(F_{m+1}\,G_n - F_m\,G_{n+1})$

$G_{n+m} + (-1)^m\,G_{n-m} = L_m\,G_n$ $\quad$ $G_{n+m} - (-1)^m\,G_{n-m} = F_m\,(G_{n-1} + G_{n+1})$

$F_m\,(G_{n-1} + G_{n+1}) = G_{n+m} - (-1)^m\,G_{n-m}$

$G_m\,F_n - G_n\,F_m = (-1)^{n+1}\,G_0\,F_{m-n}$

$G_m\,F_n - G_n\,F_m = (-1)^m\,G_0\,F_{n-m}$

$G_{m+k}\,F_{n+k} + (-1)^{k+1}\,G_m\,F_n = F_k\,G_{m+n+k}$

G_n und H_n seien zwei verschiedene verallgemeinerte Fibonacci-Folgen:

$G_{n+i}\,H_{n+k} - G_n\,H_{n+i+k} = (-1)^n\,(G_i\,H_k - G_0\,H_{i+k})$

$G_p\,H_q - G_r\,H_s = (-1)^n\,[G_{p-n}\,H_{q-n} - G_{r-n}\,H_{s-n}]$, wenn p+q = r+s und p,q,r,s,n ganzzahlig

$G_{n+1}\,G_{n-1} - G_n^2 = (-1)^n\,(G_1^2 - G_0\,G_2)$

$4\,G_{n-1}\,G_n + G_{n-2}^2 = G_{n+1}^2$

$G_{n+3}^2 + G_n^2 = 2\,(G_{n+1}^2 + G_{n+2}^2)$

$G_{i+j+k} = F_{i+1}\,F_{j+1}\,G_{k+1} + F_i\,F_j\,G_k - F_{i-1}\,F_{j-1}\,G_{k-1}$, für ganzzahlige i, j, k

$4\,G_i^2\,G_{i+1}^2 + G_{i-1}^2\,G_{i+2}^2 = (G_i^2 + G_{i+1}^2)^2$

$G_{n+2}\,G_{n+1}\,G_{n-1}\,G_{n-2} + (G_2\,G_0 - G_1^2)^2 = G_n^4$

Allgemeine Fibonacci-Folge

Unter einer allgemeinen Fibonacci-Folge versteht man eine komplexe Zahlenfolge

$a_{n+2} = 2\,p\,a_{n+1} + q\,a_n$

wobei p und q komplexe Zahlen sind. Weiterhin definiert man

$g_1 = p + \sqrt{(p^2 + q)}$ $\quad$ $g_2 = p - \sqrt{(p^2 + q)}$

Für die Folge $\{a_n\}$ mit den Startwerten a_0 und a_1 gilt explizit die Formel von Binet:

$a_n = 1/(g_1-g_2)\,((a_1 - a_0 g_2)\,g_1^n + (a_0 g_1 - a_1)\,g_2^n)$

Die Folge $\{a_n\}$ ist die Summe zweier geometrischer Folgen mit den Basen g_1 und g_2. Für das Konvergenzverhalten sind die Beträge $|g_1|$ und $|g_2|$ entscheidend.

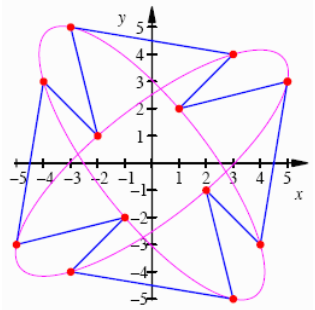
Für $g_1 <> g_2$ wird	$\lvert g_2\rvert < 1$	$\lvert g_2\rvert = 1$	$\lvert g_2\rvert > 1$
$\lvert g_1\rvert < 1$	Nullfolge	Kreis	Logarithmische Spirale
$\lvert g_1\rvert = 1$	Grenzkurve Kreis	Kreisring	divergent
$\lvert g_1\rvert > 1$	Logarithmische Spirale	divergent	divergent

Für $|g_1| = 1$ und $|g_2| < 1$ ergibt sich ein Kreis als Grenzkurve. Dieser Kreis hat den Ursprung als Zentrum und den Radius $r_1 = |(a_1 - a_0 g_2)/(g_1 - g_2)|$

Falls zusätzlich $g_1 = e^{2\pi i s}1$, $s_1 = m_1/n_1$ und $ggT(m_1,n_1) = 1$, streben die Folgenglieder gegen die Ecken eines regelmäßigen n_1-Eckes.

Für $|g_1| < 1$ und $|g_2| = 1$ ergibt sich ebenfalls ein Kreis als Grenzkurve mit dem Radius $r_2 = |(a_0 g_1 - a_1) / (g_1 - g_2)|$. Analog können die Folgenglieder gegen die Ecken eines regelmäßigen n_2-Ecks streben.

Für $|g_1| = 1$ und $|g_2| = 1$ sind die Folgenglieder durch einen Kreisring beschränkt. Dieser hat den Außenradius $r_1 + r_2$ und den Innenradius $r_1 - r_2$.



Zyklische Fibonacci-Folgen

Die Definition der Fibonacci-Folgen kann auch auf den Bereich der komplexen Zahlen erweitert werden. 1996 untersuchte Christopher Weihmann Folgen der Form

$$z_{n+2} = i\, z_{n+1} + z_n$$

und wies nach, dass für beliebige Startwerte $z_0 = p + qi$ und $z_1 = r + si$ eine zyklische Folge entsteht.
2007 gelang Walser der Nachweis, dass jede Folge

$$z_{n+2} = 2i \sin(\pi/n)\, z_{n+1} + z_n$$

für beliebige komplexe Anfangswerte eine Periodenlänge 2n besitzt.
Trägt man die Folgeglieder in die Gaußsche Zahlenebene ein, so liegen die Punkte der Glieder abwechslungsweise auf zwei Ellipsen. Beide Ellipsen sind zueinander kongruent und um $\pi/2$ verdreht.
Mit $\phi = 2\pi/n$ und dem 1.Glied p+qi und dem 3.Glied r+si ist die Gleichung einer der Ellipsen

$$x(t) = p \cos t + (r - p \cos \phi) / \sin \phi \sin t$$
$$y(t) = q \cos t + (s - q \cos \phi) / \sin \phi \sin t$$

In der Abbildung ist die zyklische, komplexe Fibonacci-Folge für n = 6 und die Anfangszahlen 5 + 3i und 1 + 2i zu sehen.

Fibonacci-Teilfolgen

Die Fibonacci-Folge wird durch die Rekursion beschrieben:

$$F_0 = 0\ ,\ F_1 = 1 \quad \text{und } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Es gilt die explizite Formel von Binet:

$$F_n = 1/\sqrt{5}\,(\tau^n - (-\rho)^n) \text{ mit } \tau = (1+\sqrt{5})/2\ ,\ \rho = (-1+\sqrt{5})/2$$

Auf Lucas geht die Idee zurück, aus der Folge Teilfolgen auszuwählen und zu untersuchen.

Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede zweite Zahl aus, erhält man die beiden Folgen
1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 10946, 28657, …
1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584, 6765, 17711, 46368, …
Beide Folgen haben dieselbe Rekursion $b_{m+2} = 3\, b_{m+1} - b_m$
Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede dritte Zahl aus, ergeben sich die Folgen
1, 3, 13, 55, 233, 987, 4181, 17711, 75025, 317811, 1346269, …
1, 5, 21, 89, 377, 1597, 6765, 28657, 121393, 514229, 2178309, …
2, 8, 34, 144, 610, 2584, 10946, 46368, 196418, 832040, 3524578, …
mit der Rekursion $b_{m+2} = 4\, b_{m+1} + b_m$
Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede vierte Zahl aus, ergeben sich die Folgen
1, 5, 34, 233, 1597, 10946, 75025, 514229, 3524578, 24157817, …
1, 8, 55, 377, 2584, 17711, 121393, 832040, 5702887, 39088169, …
2, 13, 89, 610, 4181, 28657, 196418, 1346269, 9227465, 63245986, …
3, 21, 144, 987, 6765, 46368, 317811, 2178309, 14930352, 102334155, …
mit der Rekursion $b_{m+2} = 7\, b_{m+1} - b_m$
Für die ersten Fibonacci-Teilfolgen ergeben sich die Rekursionsformeln

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad b_{m+2} = 3\, b_{m+1} - b_m$$
$$b_{m+2} = 4\, b_{m+1} + b_m \qquad b_{m+2} = 7\, b_{m+1} - b_m$$
$$b_{m+2} = 11\, b_{m+1} + b_m$$

Die ersten Koeffizienten dieser Gleichungen gehören zu der Folge
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, …
Außerdem alterniert das Vorzeichen des zweiten Summanden. Diese Zahlen sind die Lucas-Zahlen (nach Édouard Lucas 1842–1891). Die Lucas-Zahlen haben dieselbe Rekursion wie die Fibonacci-Zahlen.
Damit wird für die Teilfolge der n-ten Fibonoacci-Zahlen

$$b_{m+2} = (\tau^n + (-\rho)^n)\, b_{m+1} - (-1)^{n+1}\, b_m \quad \text{mit } \tau = (1+\sqrt{5})/2\ ,\ \rho = (-1+\sqrt{5})/2$$

Die modifizierte Fibonacci-Folge
-1, 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 17601, 47321, 114243, 275807, 665857, …
wird durch die Rekursion beschrieben: $a_1 = 0\ ,\ a_2 = 3$ und $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$
Die Folge, die nur aus ungeraden Zahlen besteht und deren Quotienten benachbarter Glieder gegen $1+\sqrt{2}$ streben, hat die explizite Formel: $a_n = 1/2\,((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$
Auch aus dieser Folge kann man wieder Teilfolgen auszuwählen und zu untersuchen.

Wählt man aus der Folge nur jede zweite Zahl aus, erhält man die beiden Folgen
-1, 1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, 275807, 1607521, …
1, 3, 17, 99, 577, 3363, 17601, 114243, 665857, 3880899, …
Beide Folgen haben dieselbe Rekursion $b_{m+2} = 6\, b_{m+1} - b_m$
Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede dritte Zahl aus, ergeben sich die Folgen

3, 1, 17, 239, 3363, 47321, 665857, …
-1, 3, 41, 577, 8119, 114243, 1607521, …
1, 7, 99, 1393, 19601, 275807, 3880899, …
mit der Rekursion $b_{m+2} = 14\, b_{m+1} + b_m$
Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede vierte Zahl aus, ergeben sich die Folgen
-7, 1, 41, 1393, 47321, 1607521, …
3, 3, 99, 3363, 114243, 3880899, …
-1, 7, 239, 8119, 275807, 9369319, …
1, 17, 577, 19601, 665857, …
mit der Rekursion $b_{m+2} = 34\, b_{m+1} - b_m$
allgemeine Rekursion $b_{m+2} = ((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)\, b_{m+1} - b_m$

Lucas - Zahlen

Lucas-Zahlen (nach Edouard Lucas 1842-1891) sind mit den Fibonacci-Zahlen verwandte, zahlentheoretisch wichtige Zahlen.
Berechnungsvorschrift **$L_0 = 2$; $L_1 = 1$** **$L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$**
Ersten Zahlen dieser Folge: 2; 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; 47; 76; 123; 199; usw...
Außer den am Anfang auftretenden Zahlen 1 und 3 gibt es in der Fibonacci-Folge und der Lucas-Folge keine gleichzeitig auftretenden Zahlen.
Zwischen des Lucas- und Fibonacci-Zahlen gibt es viele interessante Beziehungen, z.B. für alle nichtnegativen Zahlen n:
$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$ $L_{4n} + 2 = (L_{2n})^2$ $L_{4n} - 2 = 5(F_{2n})^2$
$L_{n-1}\, L_{n+1} + F_{n-1}\, F_{n+1} = 6(F_n)^2$ $F_{n+m} + F_{n-m} = F_n\, L_m$, für gerades m

Lucas-Primzahlen

In der Lucas-Folge $L_0 = 2$; $L_1 = 1$; $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$
treten für n = 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, 613, 617, 863, 1097, 1361, … Primzahlen auf. (gesucht bis n = 2500)
Durch Lifschitz wurde im März 2009 die 1051849.Lucas-Zahl als wahrscheinlich prim entdeckt. Die größte nachgewiesenen Lucas-Primzahl hat den Index 56003.
Die ersten Primzahlen sind:

n	**Lucas-Primzahl L_n**	**n**	**Lucas-Primzahl L_n**
2	3	4	7
5	11	7	29
8	47	11	199
13	521	16	2207
17	3571	19	9349
31	3010349	37	54018521
41	370248451	47	66438 38879
53	11 92188 51371	61	560 07482 93801
71	68884 65025 88399	79	32 36112 26722 59149
113	4126 70427 84492 10374 70771		

Primfaktorzerlegung von Lucas-Zahlen

Innerhalb der Folge der Lucas-Zahlen treten für einige Indizees n auch Primzahlen auf, zum Beispiel L(11) = 199.
Die Mehrheit der Lucas-Zahlen sind aber zusammengesetzt. Die Tabelle enthält für die ersten Zahlen der Folge ihre Primfaktorzerlegung.

Faktorzerlegung der L(n)

n	Primfaktoren	n	Primfaktoren
3	3	4	2^2
5	7	6	11
7	2, 3^2	8	29
9	47	10	2^2, 19
11	3, 41	12	199
13	2, 7, 23	14	521
15	3, 281	16	2^2, 11, 31
17	2207	18	3571
19	2, 3^3, 107	20	9349

Lucas - Zahlen (4)

Für die Lucas-Zahlen L_n, definiert durch **$L_0 = 2$; $L_1 = 1$; $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$**
und die Fibonacci-Zahlen F_n existieren eine Vielzahl von Beziehungen. In Analogie zur Binet-Formel gilt
$F_n = (\Phi^n - (-\phi)^n) / (\Phi - (-\phi))$; Binet-Formel
$L_n = (\Phi^n + (-\phi)^n) / (\Phi + (-\phi))$

$L_n = (1/2\ \sqrt{5} + 1/2)^n + (-1)^n\ (1/2\ \sqrt{5} - 1/2)^n$

Weiterhin gilt $\sqrt[n]{(1/2\ (L_n + F_n\ \sqrt{5}))} \pm \sqrt[n]{(1/2\ (L_n - F_n\ \sqrt{5}))} = 1$

dabei ist das Operationszeichen + für ungerade n und - für gerade n

$5\ F_n = L_{n+1} + L_{n+1}$

Die Lucas-Zahl L_n ist stets ein Teiler der Fibonacci-Zahl F_{2n}: $F_{2n} = F_n\ L_n$

Eine Fibonacci-Zahl mit einer Zweierpotenz als Index ist das Produkt von Lucas-Zahlen

$F_2n = L_2 \cdot L_4 \cdot L_8 \cdot \ldots \cdot L_2n\text{-}1$

Weitere Beziehungen

$2\ L_n = F_{n-3} + F_{n+3}$

$F_k\ L_n = F_{n-k} + F_{n+k}$; für ungerade k

$L_n\ L_k = L_{n-k} + L_{n+k}$; für gerade k

$F_n\ L_k = F_{n-k} + F_{n+k}$; für gerade k

$11\ F_n = L_{n-4} + L_{n+4}$

$5\ F_n\ F_k = L_{n-k} + L_{n+k}$; für ungerade k

Allgemeine Lucas Zahlen

... sind Zahlen der Lucas Folgen.

Es seien P und Q nichtverschwindende, ganze Zahlen. Das Polynom $x^3 - P\ x + Q$ hat dann die Diskriminante

$D = P^3 - 4Q$

und die Nullstellen $a = (P + \sqrt{D})/2$ und $b = (P - \sqrt{D})/2$

und es gilt $a + b = P$; $ab = Q$ und $a - b = \sqrt{D}$

Ist D ungleich 0, dann sie die Lucas-Folgen definiert als: $U_n\ (P,Q) = (a^n - b^n) / (a - b)$ $V_n\ (P,Q) = a^n + b^n$

für $n \geq 0$. Beispielsweise ergeben sich für P = 3 und Q = 2 mit $U_n(3, 2) = 2^n - 1$ die Mersenne Zahlen und mit $V_n(3, 2) = 2^n + 1$ die Fermat Zahlen.

Lucas-Pseudoprimzahlen

... sind die Zahlen n der Lucas Zahlen U_n, für die gilt

n ist eine zusammengesetzte, ungerade Zahl. ggT(n, D)=1

$U_{n-(D/n)}$ ist kongruent zu 0 (mod n)

Hinweis: (D/n) bezeichnet das Jacobi Symbol

Lucas-Folge (2)

Für die Lucas-Folgen der ganzen Zahlen P und Q

$U_n(P,Q) = (a^n - b^n) / (a - b)$ $V_n(P,Q) = a^n + b^n$

gilt mit der Schreibweise $U_n = U_n(P,Q)$ und $V_n = V_n(P,Q)$

$U_n = P\ U_{n-1} - Q\ U_{n-2}$; $U_0 = 0$, $U_1 = 1$

$V_n = P\ V_{n-1} - Q\ V_{n-2}$; $V_0 = 2$; $V_1 = P$

$U_{2n} = U_n\ V_n$ $V_{2n} = V_n^2 - 2\ Q^n$

$U_{m+n} = U_m\ V_n - Q^n\ U_{m-n}$ $V_{m+n} = V_n\ V_n - Q^n\ V_{m-n}$

$U_{m+n} = U_m\ U_{n+1} - Q\ U_{m-1}\ U_n$ $2\ V_{m+n} = V_m\ V_n + D\ U_m\ U_n$

$D\ U_n = 2\ V_{n+1} - P\ V_n$ $V_n = 2\ U_{n+1} - P\ U_n$

$U_n^2 = U_{n-1}\ U_{n+1} + Q^{n-1}$ $V_n^2 = D\ U_n^2 + 4\ Q^n$

$U_m\ V_n - U_n\ V_m = 2\ Q^n\ U_{m-n}$ für $m > n-1$

$U_m\ V_n + U_n\ V_m = 2\ U_{m+n}$

$2^{n-1}\ U_n = \binom{n}{1} P^{n-1} + \binom{n}{3} P^{n-3}\ D + \binom{n}{5} P^{n-5}\ D^2 + \ldots$

$2^{n-1}\ V_n = P^n + \binom{n}{2} P^{n-2}\ D + \binom{n}{4} P^{n-4}\ D^2 + \ldots$

Wenn m ungerade ist und k > 0, dann gilt

$D^{(m-1)/2}\ U_k^m = U_{km} + \binom{m}{1} Q^k\ U_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k}\ U_{k(m-4)} - \ldots \pm \binom{m}{(m-1)/2} Q^{(m-1)/2\ k}\ U_k$

$V_k^m = V_{km} + \binom{m}{1} Q^k\ V_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k}\ U_{k(m-4)} - \ldots \pm \binom{m}{(m-1)/2} Q^{(m-1)/2\ k}\ V_k$

Wenn m gerade ist und k > 0, dann gilt

$D^{m/2}\ U_k^m = [V_{km} - \binom{m}{1} Q^k\ V_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k}\ V_{k(m-4)} - \ldots + (-1)^{m/2} \binom{m}{m/2} Q^{m/2\ k}\ V_0] - (-1)^{m/2} \binom{m}{m/2} Q^{m/2\ k}$

$V_k^m = [V_{km} - \binom{m}{1} Q^k\ V_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k}\ V_{k(m-4)} - \ldots + \binom{m}{m/2} Q^{m/2\ k}\ V_0] - \binom{m}{m/2} Q^{m/2\ k}$

Pell-Zahlen

Pell-Zahlen, benannt nach dem englischen Mathematiker John Pell, sind spezielle Lucas-Zahlen. Für sie gilt die Rekursion $P_{n+2} = P_n + 2\ P_{n+1}$; $P_1 = 1$; $P_2 = 2$

bzw. $Q_{n+2} = Q_n + Q\ P_{n+1}$; $Q_1 = 1$; $Q_2 = 3$

Die ersten Zahlen der zwei Folgen sind

P_i = 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, …

Q_i = 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 113243, 275807, 665857 …

Für beide Zahlenarten findet man Binet-Formeln.

$P_n = 1/(2\ \sqrt{2})\ ((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$

$Q_n = 1/2\ ((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$

Für wachsende n konvertieren damit die Quotienten

Q_n / P_n = 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, …

gegen $\sqrt{2}$.

Pell-Primzahlen

In der Folge der Pell-Zahlen $P_{n+2} = P_n + 2\ P_{n+1}$; $P_1 = 1$; $P_2 = 2$

treten auch Primzahlen auf. Die ersten dieser Primzahlen sind

n	Pell-Primzahl
3	2
4	5
6	29
12	5741
14	33461
30	4 45604 82149
42	1 74686 00200 68409
53	68480 40646 21612 87469
60	135 58774 61004 67117 80701
90	4125 63688 85625 48868 22155 97974 61449
98	47 60981 39432 32034 45293 05261 22238 93281
102	1617 33217 20018 85710 81311 98663 40823 31709
168	2964 79355 52727 99671 94665 39401 60950 32379 21693 32712 78093 77646 87561
182	6774 13820 25708 50843 26543 91551 46773 42490 43573 35429 87756 42958 53985 37901
192	455 62852 54333 44877 15050 63529 04804 65956 45004 01415 24571 91808 67194 53302 35841
524	54971 60765 89486 46301 38678 31449 64782 69877 26135 13307 49318 00788 96702 91882 58516 48683 23532 58581 18170 15087 32149 78343 60146 31181 06546 65322 04358 05362 39596 29912 95556 48803 66069 54237 30984 77621 49971 20779 32637 38989
930	1 40302 91214 03767 48279 21599 32040 05610 33992 94889 82163 51802 67012 25304 01263 88057 52552 35196 72709 51096 69287 79907 45704 17579 53962 93512 31775 86142 90988 49146 88074 65242 69269 23532 88053 33087 54693 36900 12894 63067 04277 94266 44057 90647 51300 50883 48227 95162 87414 79839 74059 15939 22602 20762 97356 35613 82652 22336 06671 98516 09319 93671 34903 69578 31431 16067 74302 31345 09886 35703 23272 71649

Keith-Zahlen

Unter einer Keith-Zahl versteht man eine natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft:
Werden die Ziffern der Zahl als Startglieder einer fibonacciähnlichen Zahlenfolge betrachtet, so muss die Zahl selbst in der entstehenden Zahlenfolge auftreten.
Zum Beispiel ergibt 197 mit der Bildungsvorschrift $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ die Folge: 1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197, ...
womit die 197 Keith-Zahl ist. Die nachfolgende Tabelle enthält alle Keith-Zahlen kleiner als 10^{17}. Die Folge der primen Keith-Zahlen beginnt damit 19, 47, 61, 197, 1084051, 74596893730427, ...

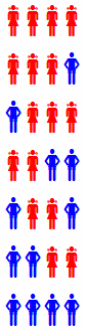
Ziffernzahl	Keith-Zahlen
2	14, 19, 28, 47, 61, 75
3	197, 742
4	1104, 1537, 2208, 2580, 3684, 4788, 7385, 7647, 7909
5	31331, 34285, 34348, 55604, 62662, 86935, 93993
6	120284, 129106, 147640, 156146, 174680, 183186, 298320, 355419, 694280, 925993
7	1084051, 7913837
8	11436171, 33445755, 44121607
9	129572008, 251133297
10	existiert keine
11	24769286411, 96189170155
12	171570159070, 202366307758, 239143607789, 296658839738
13	1934197506555, 8756963649152
14	43520999798747, 74596893730427, 97295849958669
15	120984833091531, 270585509032586, 754788753590897
16	3621344088074041, 3756915124022254, 4362827422508274
17	11812665388886672, 14508137312404344, 16402582054271374, 69953250322018194, 73583709853303061

Keith-ähnliche Zahlen

Zahlen, die bei der oben beschriebenen Bildungsvorschrift nicht selbst in der fibonacci-ähnlichen Zahlenfolge auftreten, sondern nur deren Vorgänger oder Nachfolger, werden keith-ähnlich genannt. Die ersten sind:

Nachfolger tritt auf: 12, 43, 60, 265, 610, 778, 1521, 2625, 3729, 16725, 18852, 56207, 63265, 87538, 94596, 839383, 1114534, 1745662, 2198585, 2424613, 7371962
Vorgänger tritt auf: 18, 32, 35, 142, 187, 241, 2163, 3267, 9242, 15905,333718, 780890, 959394, 2815415, 5501438, 9717796

Versucht man die Idee der Keith-Zahlen auf die Multiplikation zu übertragen, d.h. die Ziffern der Zahl werden als Startglieder einer fibonacciähnlichen, multiplikativen Zahlenfolge betrachtet, z.B. $a_{n+3} = a_{n+2} * a_{n+1} * a_n$, so gibt es keine Zahl, die in ihrer selbst erzeugten Folge auftritt. Man findet nur Zahlen, deren Nachfolger bzw. Vorgänger wieder in der Abfolge der Zahlen auftreten:
Nachfolger tritt auf: 143, 431, 11663
Vorgänger tritt auf: 5242881



Mädchen-Zahlen

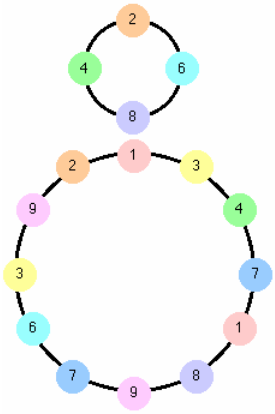
In ähnlicher Form wie die Fibonacci-Zahlen oder Tribonacci-Zahlen lassen sich die Mädchen-Zahlen definieren.
Folgendes Problem ist Grundlage: In einer Folge von Mädchen und Jungen soll immer neben einem Mädchen mindestens ein weiteres Mädchen stehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn insgesamt n Mädchen und Jungen gegeben sind?
In der Abbildung sind alle sieben Möglichkeiten für vier Personen dargestellt. Für n = 1, 2, … Mädchen und Jungen wird die Anzahl Möglichkeiten, d.h. die Mädchen-Zahl

M(n) = 1, 2, 4, 7, 12, 21, 37, 65, 114, 200, 351, 616, 1081, 1897, 3329, 5842, …

und allgemein $M(n) = 2\,M(n-1) - M(n-2) + M(n-3)$
Das Verhältnis M(n+1)/M(n) konvergiert gegen 1,754877666427…, einer Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = 2x^2 - x + 1$.
Fordert man, dass mindestens drei Mädchen nebeneinander stehen, so ergibt sich für die Möglichkeiten die Folge 1, 1, 2, 4, 7, 11, 17, 27, 44, 72, …

Pisano-Zahlen

Werden die Fibonacci-Zahlen oder fibonacci-ähnliche Zahlen modulo einer natürlichen Zahl m berechnet, so ergeben sich periodische Zyklen.
Die Länge, Periode der Zyklen wird Pisano-Periode (nach Fibonacci = Leonardo von Pisa) genannt, die entstehenden Zahlen der Folgen Pisano-Zahlen.
Für die Fibonacci-Zahlen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
ergeben sich für die Module m = 1, 2, … die Periodenlängen
1, 3, 8, 6, 20, 24, 16, 12, 24, 60, 10, 24, 28, 48, 40, 24, 36, 24, 18, 60, 16, 30, 48, 24, 100, 84, 72, 48, 14, 120, 30, 48, 40, 36, 80, 24, 76, 18, 56, 60, 40, 48, 88, 30, 120, 48, 32, 24, 112, 300, 72, 84, 108, 72, 20, 48, 72, 42, 58, 120, 60, 30, 48, 96, 140, 120, 136, …
Für m = 10 ergeben sich Addington-Ketten.



Addington-Ketten

Durch Susan Addington wurde folgendes Problem vorgestellt:
Gegeben sind die zehn Zahlen 0 bis 9. Zwei der Zahlen werden als Startzahlen gewählt und addiert. Die Summe wird modulo 10 (Anzahl der Ausgangszahlen) gebildet und mit dem Ergebnis und der vorhergehenden Zahl der Vorgang wiederholt, bis eine Zahl erreicht ist, so dass anschließend sich die schon gebildete Folge wiederholt.
Start man zum Beispiel mit (0, 4), so ergibt sich die endliche Folge

0 4 4 8 2 0 2 2 4 6 0 6 6 2 8 0 8 8 6 4

Die beiden nächsten Zahlen wären wieder 0 und 4. Eine solche endliche, in sich geschlossene Folge, nennt man Addington-Kette (engl. Bracelet). Die Länge der Beispielkette wäre 20.

Die kürzeste Kette hat die Länge 1 und beginnt mit 0, 0. Startet man mit 0 und 5, so ergibt sich die Länge 3: 0 5 5; bei 2 und 6 die abgebildete Kette der Länge 4.
Der zweite abgebildete Zyklus beginnt mit 1, 3. Allerdings würden auch 3, 4 oder 4, 7 … die gleiche Kette geben.

Die Aufgabe besteht nun darin, für unterschiedliche Ausgangsmengen von Zahlen alle möglichen verschiedenen(!) Ketten und deren Länge zu bestimmen. Nachgewiesen ist, dass für jedes Paar von Startzahlen die Kette sich in endlich vielen Schritten schließt.
Eine vollständige Lösung des Problems existiert noch nicht. Aus diesem Grund werden vor allem Computer zur Berechnung verschiedener Ketten herangezogen (siehe Teilprogramm).

Pythagoreische Zahlentripel

Ein pythagoreisches Tripel ist ein Tripel a,b,c von natürlichen Zahlen (verschieden von Null), welches die Gleichung erfüllt

$$a^2+b^2=c^2$$

Sind u und v teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist a,b,c ein derartiges Tripel mit

$$a = u*v,\ \ b = (u^2-v^2)/2,\ \ c = (u^2+v^2)/2$$

Diese Lösungsmethode wurde schon von den Chinesen der Han-Periode (ungefähr 200 v.Chr. - 200 n.Chr.) benutzt. Aber auch schon Diophant von Alexandria war eine Lösungsmethode bekannt. Für ein gerades x = 2pq setzte er

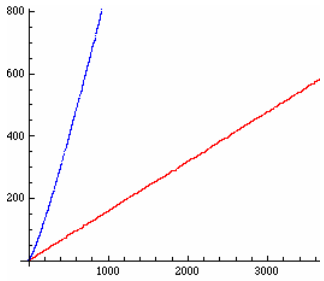
$$z + y = 2p^2 \qquad z - y = 2q^2 \qquad z = p^2 + q^2 \qquad y = p^2 - q^2.$$

Vor Diophant besassen auch die Babylonier der Hammurabi-Dynastie eine eigene Lösungsmethode zur einfachen Berechung pytagoräischer Zahlentripel. Schliesslich fand man ähnliche Berechnungen auch in Hindu Texten über die Konstruktion von Altären aus der Zeit von 500 - 200 v.Chr. Nach van der Waerden ist es sehr wahrscheinlich, dass die ganze Theorie einen gemeinsamen Ursprung hat. Er vermutet, dass der berühmte Lehrsatz vor der Hammurabi-Periode von einem mathematisch gebildeten Priester entdeckt wurde.

Kleinste Zahlentripel

3,4,5	5,12,13	8,15,17	7,24,25	20,21,29	12,35,37
9,40,41	28,45,53	16,63,65	11,60,61	33,56,65	48,55,73
36,77,85	20,99,101	13,84,85	39,80,89	65,72,97	60,91,109
44,117,125	24,143,145	15,112,113	88,105,137	52,165,173	
28,195,197	17,144,145	51,140,149	85,132,157	119,120,169	
104,153,185	84,187,205				

Neben dem 3-4-5-Dreieck gibt es noch mindestens ein anderes, dessen Fläche sich mit Hilfe einer einzigen Ziffer ausdrücken lässt: 693-1924-2045, dessen Fläche 666 666 ist. Weitere derartige Tripel wurden unter 10^{40} noch nicht gefunden.
Ein Sechstel der Flächeninhalte aller pythagoräischen Dreiecke endet mit der 6, ein weiteres Sechstel endet auf 4, die restlichen 2/3 besitzen einen Inhalt, der auf 0 endet.



In der Grafik ist das Wachstum der Anzahl primitiver Tripel bis zu einer maximalen Größe der Hypotenuse rot eingezeichnet. Die blaue Kurve gibt die Häufigkeit aller pythagoreischer Tripel an.

Es gibt unendlich viele rechtwinklige Dreiecke mit der Eigenschaft, dass sich die Längen von Hypotenuse und einer Kathede um genau eins unterscheiden. ($3^2+4^2=5^2$ / $5^2+12^2=13^2$ ...) Es gibt auch unendlich viele, deren Katheten um eins differieren. Allerdings existiert nur genau ein Tripel dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, natürlich 3-4-5.

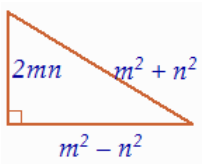
Anzahl pythagoreischer Tripel

In der Grafik ist das Wachstum der Anzahl primitiver Tripel bis zu einer maximalen Größe der Hypotenuse rot eingezeichnet. Die blaue Kurve gibt die Häufigkeit aller pythagoreischer Tripel an.
Das Wachstum primitiver Tripel ist linear. Für die Anzahl bis zu einer Grenze max gilt:

$$\text{Anzahl} = \ln (1+\sqrt{2})^2/\pi^2 \text{ max} + O(\sqrt{(\text{max})})$$

Konkret ergeben sich für a, b < n

n	Anzahl	n	Anzahl
10	2	50	16
100	36	500	180
1000	358	5000	1780
10000	3576	50000	17856
100000	35722	500000	178600
1000000	357200	5000000	1786016
10000000	3572022	100000000	35720710
1 Milliarde	357207278	2 Milliarden	714414498
3 Milliarden	1071622030	4 Milliarden	1428828886
5 Milliarden	1786036162	6 Milliarden	2143243604
7 Milliarden	2500450678	8 Milliarden	2857658176
9 Milliarden	3214865160	10 Milliarden	3572072820
20 Milliarden	7144145232	30 Milliarden	10716217712
40 Milliarden	14288290578		



Pythagoreische Zahlentripel

Ausgehend von der Beziehung

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

können ebenso pythagoreische Tripel erzeugt werden. Sind m und n verschiedene natürliche Zahlen mit m > n, so erhält man mit

$$a = m^2 - n^2 \; ; \; b = 2mn \; ; \; c = m^2 + n^2$$

ein solches Tripel. In der englischsprachigen Literatur wird das Verfahren als m-n-Formel bezeichnet. Dieses Verfahren erzeugt nicht nur primitive pythagoreische Tripel. Diese werden alle(!) erzeugt, für nichtprimitive Tripel gilt dies nicht.
Für m = 2, n = 1 erhält man das Tripel (3, 4, 5). Das Tripel (9, 12, 15) ist dagegen durch keine Wahl von m und n konstruierbar.

Zwei-Brüche-Verfahren

Außer dem pythagoreischen und babylonischen Verfahren gibt es weitere Methoden, pythagoreische Zahlentripel zu erzeugen. Bei dem Zwei-Brüche-Verfahren wird von zwei rationalen Zahlen a/b und c/d ausgegangen, deren Produkt 2 sein muss. Dabei dürfen b und d gleich 1 sein, d.h. natürliche Zahlen liegen vor.

1) jeder der Brüche wird um 2 vergrößert
2) die Brüche werden über Kreuz miteinander mutlipliziert, d.h. Nenner und Zähler des jeweils anderen Bruchs. Im Ergebnis entstehen zwei natürliche Zahlen des Tripels.
3) um die 3.Zahl zu finden, werden beide Zahlen quadriert, addiert und die Wurzel gezogen

Zum Beispiel wird für a/b = 4/2 und c/d = 2/2
1) 8/2 und 6/2 ; 2) 16 und 12 ; 3) $16^2+12^2 = 400$, d.h. 3.Zahl = 20

Pythagoreische Zahlentripel

Ist (a_0, b_0, c_0) ein pythagoreisches Zahlentripel, so erhält man durch

$$(a_1, b_1, c_1) = (a_0, b_0, c_0)\, U$$
$$(a_2, b_2, c_2) = (a_0, b_0, c_0)\, A$$
$$(a_3, b_3, c_3) = (a_0, b_0, c_0)\, D$$

weitere pythagoreische Tripel.
Sind a_0 und b_0 zueinander teilerfremd, so nennt man das Tripel (a_0, b_0, c_0) reduziert bzw. primitiv.
1977 bewies Roberts, dass ein pythagoreisches Tripel genau dann primitiv ist, wenn es in der Form (3, 4, 5) * M geschrieben werden kann, wobei die Matrix M ein endliches Produkt der drei abgebildeten Matrizen A, D bzw. U ist.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Für alle pythagoreische Tripel gilt weiterhin
- das Produkt der Kathetenlängen (d.h. der zwei kleineren Zahlen) ist durch 12 teilbar
- das Produkt aller drei Tripelzahlen ist durch 60 teilbar

Bis heute ist nicht bekannt, ob zwei verschiedene Tripel das gleiche Produkt haben.
Ist F_n eine Fibonacci-Zahl, dann ist das Tripel $(F_n F_{n+3}, 2 F_{n+1} F_{n+2}, F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$ pythagoreisch.

Die ersten Tripel, bei denen zwei Zahlen sich nur um 1 unterscheiden, sind nach aufsteigendem c geordnet: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 112, 113), ...
Die ersten 16 primitiven Tripel (geordnet nach c) sind: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (12, 35, 37), (9, 40, 41), (28, 45, 53), (11, 60, 61), (33, 56, 65), (16, 63, 65), (48, 55, 73), (36, 77, 85), (13, 84, 85), (39, 80, 89), (65, 72, 97), ... Zu diesen gehören die Inkreisradien 1, 2, 3, 3, 6, 5, 4, 10, 5, ...

Ist F_n eine Fibonacci-Zahl, dann ist das Tripel $(F_n F_{n+3}, 2 F_{n+1} F_{n+2}, F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$ pythagoreisch.
Ist $F_n = a$ und $F_{n+1} = b$, so ergibt sich als Tripel $(a(a+2b), 2b(a+b), b^2 + (a+b)^2)$ für das gilt:

$$(a(a+2b))^2 + (2b(a+b))^2 = (b^2 + (a+b)^2)^2$$

durch etwas Umformen nachgewiesen werden kann.
Dieses Verfahren kann auf beliebige Startzahlen a und b und fibonacci-ähnliche Folgen a+b und a+2b erweitert werden.

Pythagoreische Brüche

Ist (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel, so werden die Brüche a/b und b/a pythagoreische Brüche genannt. Diophant bewies, dass pythagoreische Brüche von der Form

$$(p^2 - q^2) / (2\,p\,q) \quad \text{sind.}$$

Fibonacci-pythagoreische Dreiecke

Pythagoreische Dreiecke bei denen alle Seitenlängen Fibonacci-Zahlen sind, existieren nicht. 2011 kennt man nur zwei pythagoreische Tripel mit wenigstens zwei Fibonacci-Zahlen 3, 4, 5 und 5, 12, 13

Es ist ein offenes Problem, ob noch mehr existieren.

Als Fibonacci-pythagoreisches Dreieck wird ein pythagoreisches Dreieck bezeichnet, dessen Hypotenuse die Wurzel einer Fibonacci-Zahl ist. Zur Bestimmung dieser Dreiecks werden vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen

$F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}$

betrachtet. Die Seiten des pythagoreischen Dreiecks sind dann

$2\, F_n \cdot F_{n+1}$ und $F_{n-1} \cdot F_{n+2}$

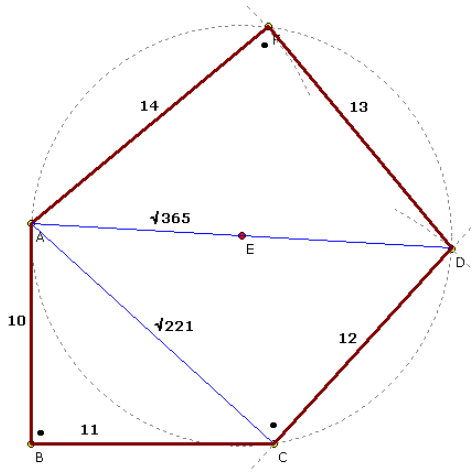
Nach einer von Lucas 1876 gezeigten Identität gilt

$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

Damit ist Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks gleich der Fibonacci-Zahl F_{2n+1}.
Für die ersten n = 2, 3, … ergeben sich als Fibonacci-pythagoreische Tripel (3, 4, 5), (5, 12, 13), (16, 30, 34), (39, 80, 89), …
Quelle: "Pythagorean Triples", A.F.Horadam in "Fibonacci Quarterly" vol 20 (1982)

Pythagoreische Zahlentripel

Das einzige Tripel aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen a, b, c für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, ist 3-4-5. Für die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ existieren keine aufeinaderfolgenden natürlichen Zahlen. Dagegen findet man für $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$:
Mit b = n wird: $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+3)^2 \rightarrow n^2 - 10n - 11 = 0$ mit den Lösungen 11 und −1, wobei die negative entfällt. Damit existiert eine solches 5-Tupel (10, 11, 12, 13, 14) und es ist $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$.



Diese Lösung kann als Fünfeck grafisch veranschaulicht werden. Man konstruiert das rechtwinklige Dreieck Δ ABC mit den Katheten 10 und 11. Die Zwischenhypotenuse AC = √221 ist die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks Δ ACD, die zweite Kathete ist 12. Über der zweiten Zwischenhypotenuse AD = √365 errichtet man mittels Thaleskreis das Dreieck Δ ADF mit den Seitenlängen 13 und 14.

Insgesamt können 12 verschiedene derartige Fünfecke gezeichnet werden. Das Viereck ABCD mit den Seiten 10, 11, 12 und √221 kann auf sechs Arten konstruiert werden und zwar in der Reihenfolge der Seiten 10, 11, 12, √221 ; 11, 10, 12, √221 ; 11, 12, 10, √221 ; 12, 11, 10, √221 ; 10, 12, 11, √221 und 12, 10, 11, √221. Für jede dieser Möglichkeiten können die zwei verbleibenden Katheten 13 und 14 nich getauscht werden. Für alle diese Fünfecke gilt, dass die zwei Zwischenhypotenusen die Diagonalen sind, über denen rechte Winkel liegen.

Pythagoreische Zahlentripel

Die erzeugenden Formeln für neue pythagoreische Tripel können auch auf klassische Weise geschrieben werden. Dabei gilt:
Jedes pythagoreische Zahlentripel kann ausgehend von dem Basistripel 3-4-5 über bestimmte Zahlenfolgen gefunden werden.

Folge A a2=2*(c1-b1)+a1 ; b2=2*(c1+a1)-b1 ; c2=2*(a1-b1)+3*c1
Folge S a2=2*(c1+a1)+b1 ; b2=2*(c1+b1)+a1 ; c2=2*(a1+b1)+3*c1
Folge D a2=2*(c1-a1)+b1 ; b2=2*(c1+b1)-a1 ; c2=2*(b1-a1)+3*c1

Die ersten so gefundenen neuen Tripel sind

A: $5^2+12^2=13^2$ ... A: $7^2+24^2=25^2$; S: $48^2+55^2=73^2$; D: $28^2+45^2=53^2$
S: $20^2+21^2=29^2$ ... A: $36^2+77^2=85^2$; S: $119^2+120^2=169^2$; D: $39^2+80^2=89^2$
D: $8^2+15^2=17^2$ ... A: $12^2+35^2=37^2$; S: $65^2+72^2=97^2$; D: $33^2+56^2=65^2$

Die Anwendung von A liefert Tripel, in denen auch gilt $a^2=b+c$ und c-b=1. Dabei geht a/c langsam gegen 0, d.h. der kleinere Winkel des pythagoreischen Dreieckes geht gegen 0.

3-4-5 5-12-13 7-24-25 9-40-41 11-60-61 13-84-85 .....

S beschert den Sonderfall b-a=1 und 2*c/(a+b) konvergiert gegen √2, d.h. der Winkel strebt gegen 45°.

3-4-5 20-21-29 119-120-169 696-697-985 4059-4060-5741 23660-23661-33461 .....

Folge D ergibt c=(2*a±1) und b/a konvergiert gegen √3, womir der Winkel gegen 30° konvergiert.

3-4-5 8-15-17 33-56-65 120-209-241 451-780-901 1680-2911-3361 .....

Brahmagupta-Verfahren

Das Hauptwerk "Brahmasphutasiddhanta" des indischen Mathematikers Brahmagupta von 628 behandelt in Aufgabe 35 des 12.Kapitels (Gantitadhyäya - Arithmetik) ein Verfahren zur Erzeugung pythagoreischer Tripel aus der gegebenen Kathete a.

Die Seite a des Dreieckes sei beliebig angenommen. Man teilt a^2 durch eine beliebige Zahl d. Dann sind

$(a^2/d - d)/2 = b$ und $b + d = c$
die beiden anderen Seiten des Dreiecks.
Dabei muss d natürlich Teiler von a^2 sein. Setzt man $d = c - b$ in $(a^2/d - d)/2 = b$ ein, wird
$(a^2/(c - b) - (c - b))/2 = b$
und durch einfache Umformungen $a^2 + b^2 = c^2$.

Beispiel: $a = 24$, $a^2 = 576$

Teiler d	$a^2/d - d$		gerade	b	c	$a^2 + b^2 = c^2$
1	575					
2	286	×	143	145		$24^2 + 143^2 = 145^2$
3	189					
4	140	×	70	74		$24^2 + 70^2 = 74^2$
6	90	×	45	51		$24^2 + 45^2 = 51^2$
8	64	×	32	40		$24^2 + 32^2 = 40^2$
9	55					
12	36	×	18	30		$24^2 + 18^2 = 30^2$
16	20	×	10	26		$24^2 + 10^2 = 26^2$
18	14	×	7	25		$24^2 + 7^2 = 25^2$
24	0	×	0	24		

Pythagoreische Zahlentripel

Die kleinsten natürlichen Zahlen c eines pythagoreischen Tripels a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$ sind:
5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 29, 30, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 60, 61, 65, 68, 70, 73, 74, 75, 78, 80, 82, 85, 87, 89, 90, 91, 95, 97, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 109, 110, 111, 113, 115, 116, 117, 119, 120, 122, 123, 125, 130, 135, 136, 137, 140, …
Für einige dieser Werte existieren mehrere verschiedene a und b, zum Beispiel
$65^2 = 63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = 56^2 + 33^2 = 52^2 + 39^2$
Die ersten dieser Werte c sind
25, 50, 65, 75, 85, 100, 125, 130, 145, 150, 169, 170, 175, 185, 195, 200, 205, 221, 225, 250, 255, 260, 265, 275, 289, 290, 300, 305, 325, 338, 340, 350, 365, 370, 375, 377, 390, 400, 410, 425, 435, 442, 445, 450, 455, 475, 481, 485, 493, 500, 505, 507, 510, 520, 525, …

Dabei gilt: Existieren mehrere a und b für diese Werte c, so muss c von der Struktur $b_i \cdot b_j \cdot k$ sein, wobei b_i und b_j Primzahlen mit einem Rest 1 modulo 4 und k eine natürliche Zahl sind.
Für $b_i = b_j = 5$ ergibt sich $25^2 = 24^2 + 7^2 = 20^2 + 15^2$; für $b_i = 5$ und $b_j = 13$ die Zerlegung der 65.
Die kleinsten Zahlen c, für die es m verschiedene Darstellungen als pythagoreische Tripel existieren, sind

m = 1, c = 5	m = 2, c = 25	m = 3,4, c = 65
m = 5,6,7, c = 325	m = 8-13, c = 1105	m = 14-22, c = 5525
m = 23-31, c= 27625	m = 32-40, c = 32045	

Für das kleinste Tripel pythagoreischer Zahlen 3, 4, 5 gilt, dass die längere Kathete und die Hypotenuse zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind. Dies gilt auch für das Tripel 5, 12, 13.
Das Problem ist, gibt es eine Gesetzmäßigkeit für derartige Tripel?
Durch Chris Evans wurde 1991 folgendes Muster gefunden:
$1\ 1/3 = 4/3 \rightarrow 3, 4, (5)$
$2\ 2/5 = 12/5 \rightarrow 5, 12, (13)$
$3\ 3/7 = 24/7 \rightarrow 7, 24, (25)$
$4\ 4/9 = 40/9 \rightarrow 9, 40, (41)$
Von diesen Brüchen geben Zähler und Nenner die Kathetenlängen an.
Verallgemeinert man dies, so gilt: Ist i eine beliebige natürliche Zahl, so sind
$a = 2i + 1$ und $b = 2i\,(i+1)$
die Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $c = 2i\,(i+1) + 1$ um 1 größer ist als die längere Kathete. Folglich existieren unendliche viele derartige rechtwinklige Dreiecke.
Die m-n-Formel liefert solche Tripel immer für $m = n+1$.
Es gilt heute als sicher, dass schon die Pythagoreer diese Beziehung kannten.

Für das kleinste Tripel pythagoreischer Zahlen 3, 4, 5 gilt, dass die zwei Katheten aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind. Dies gilt auch für das Tripel 20, 21, 29.
Alle derartigen Tripel müssen primitiv sein, da die zwei Katheten keinen gemeinsamen Teiler größer 1 besitzen. Solche Tripel sind außerdem nicht sehr häufig. Durch Kayne Johnston wurde folgender Algorithmus gefunden:

1) Starttripel sind 3, 4, 5 und 20, 21, 29
2) die kleinste Seite des nächsten Tripels ist gleich 6 mal die vorhergehende Seite minus die noch vorhergehende Seite plus 2. $s_n = 6\,s_{n-1} + s_{n-2} + 2$
Damit ergibt sich zum Beispiel: $6 \cdot 20 - 3 + 2 = 119$ als kürzeste Seite des nächsten derartigen Tripels.
Durch Dan Sikorski wurde ermittelt, dass die Verhältnisse aufeinanderfolgender Hypotenusen dieser

Tripel gegen $3 + 2\sqrt{2}$ streben. Dies ist gleich dem unendlichen Kettenbruch 5, [1, 4] = 5,82842712474619…

Pythagoreische Zahlentripel mit Primzahlhypotenuse

Die drei Zahlen eines pythagoreischen Zahlentripels (a, b, c) können nicht gleichzeitig Primzahlen sein, da mindestens eine Kathete geradzahlig sein muss. $c^2 = a^2 + b^2$
Wären a und b ungerade, so müsste c^2 gerade sein und damit auch c selbst.
Gesucht werden daher primitive Zahlentripel, bei denen wenigstens die Hypotenuse c Primzahl ist. Solche Zahlen werden auch Trimzahlen genannt.
Die kleinsten Trimzahlen sind
5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197, 229, 233, 241, 257, 269, 277, 281, 293, …

Pythagoreische Quadratsummen

Das Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Tripel a, b, c, bei denen die Hypotenuse genau um 1 größer ist als die längere Kathete ergibt für die längere Kathete die möglichen Werte
4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, 180, 220, 264, 312, 364, 420, 480, 544, 612, 684, 760, 840, 924, 1012, 1104, 1200, 1300, 1404, 1512, 1624, 1740, 1860, 1984, 2112, 2244, 2380, 2520, 2664, 2812, 2964, 3120, 3280, 3444, 3612, 3784, 3960, 4140, 4324, …, $2\,i(i+1)$
und für die Hypotenuse
5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381, 2521, 2665, 2813, 2965, 3121, 3281, 3445, 3613, 3785, 3961, 4141, 4325, …, $2\,i(i+1) + 1$

Mit diesen Werten gelingt es interessante Gleichungen mit Summen von Quadraten zu konstruieren. Es gilt:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \ldots$$

Die hervorgehobenen Werte entsprechen gerade den möglichen Katheten- und Hypotenusenlängen.
Auf diese Beziehung wurde 2000 erstmals von Michael Boardman in "Mathematics Magazine 73" hingewiesen.
Allgemein wird $\Sigma_{k=0}^{i} (2i\,(i+1) - k)^2 = \Sigma_{k=0}^{i-1} (2i\,(i+1) + 1 + k)^2 = i/6\,(24\,i^4 + 60\,i^3 + 50\,i^2 + 15\,i + 1)$

Fermat-pythagoreische Tripel

In einem Brief an Marin Mersenne stellte Fermat am 31.Mai 1643 das Problem, spezielle pythagoreische Tripel (a, b, c) zu suchen.
Außer der Tatsache, dass die natürlichen Zahlen a, b, c die pythagoreische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen müssen, forderte Fermat, dass auch a+b eine Quadratzahl ist.
Er selbst gab dann die kleinste mögliche Lösung mit

a = 4565486027761, b = 1061652293520, c = 4687298610289 an.

Derartige spezielle Tripel sind sehr selten. Die nächsten reduzierten zwei Tripel sind

a = 2140389814750811886349470418922456709885882 01
b = 1099456282649240232370170100685070035946937 20
c = 2406256984726673131604152950053683847234838 49

und weiter
(1010904459123156111897976331030622692818310726588504638143451555195360678597883184 50595485833321,
9060041515250036482525607490395670080369538218738625798135550122189548152602635333071 1612866200,
1357487144710999676450983038154131451835106044687792312854628713415580870086199381 17875754653321)

Babylonische Zahlentripel

Auf einer Babylonischen Tontafel, die heute nach ihrem Entdecker Plimpton 322 genannt wird, finden sich die folgenden Zahlenreihen (aus dem babylonischen Hexagesimalsystem ins Dezimalsystem übertragen):

n	u^2-v^2	u^2+v^2	n	u^2-v^2	u^2+v^2	n	u^2-v^2	u^2+v^2
1	119	69	2	3367	4825	3	4601	6649
4	12709	18541	5	65	97	6	319	481
7	2291	3541	8	799	1249	9	481	769
10	4961	8161	11	45	75	12	1679	2929
13	161	289	14	1771	3229	15	56	106

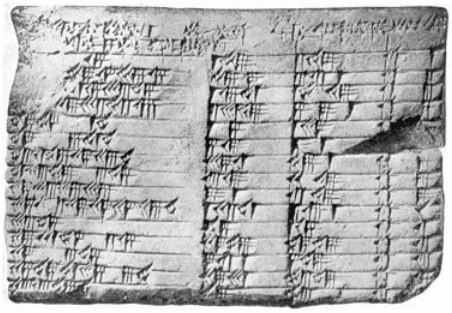
Eine nähere Betrachtung der Zahlen in der zweiten und dritten Spalte zeigt, dass sie von der Form u^2-v^2 und u^2+v^2 sind. Wegen

$$2u^2 = (u^2-v^2) + (u^2+v^2) \quad \text{und} \quad 2v^2 = (u^2+v^2) - (u^2-v^2)$$

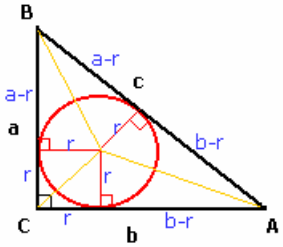
lassen sich u und v hieraus mühelos bestimmen.

n	u	v	2uv	u^2-v^2	u^2+v^2	x

1	12	5	120	119	169	1,9834
2	64	27	3456	3367	4825	1,9492
3	75	32	4800	4601	6649	1,9188
4	125	54	13500	12709	18541	1,8862
5	9	4	72	65	97	1,8150
6	20	9	360	319	481	1,7852
7	54	25	2700	2291	3541	1,7200
8	32	15	960	799	1249	1,6927
9	25	12	600	481	769	1,6427
10	81	40	6480	4961	8161	1,5861 usw. …



Nun bilden die drei Zahlen 2uv, u^2-v^2 und u^2+v^2 wegen $(2uv)^2 + (u^2-v^2)^2 = (u^2+v^2)^2$ für jede Wahl von u und v ein pythagoreisches Zahlentripel.
Man nennt ein pythagoreisches Zahlentripel ein babylonisches Zahlentripel, wenn u und v nur die Primteiler 2, 3 und 5 besitzen. Dies sind die Primteiler von 60, der Basis des Hexagesimalsystems. Die in Plimpton 322 verwendeten Tripel sind babylonische Zahlentripel mit $v < 60$ und $x = ((u^2+v^2)/(2uv))^2 < 2$. Sie sind so angeordnet, dass x monoton fällt.
Abbildung: Plimpton 322



Pythagoreische Tripel und Inkreis

Sind a, b, c Pythagoreische Tripel, so bilden diese mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c definitionsgemäß ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses besitzt einen Inkreis mit dem Radius r.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks wird dann

$$A = a\,r/2 + b\,r/2 + c\,r/2 = (a+b+c)\,r/2 = u\,r/2$$

und mit $A = ab/2$

$$r = 2\,A / u = a\,b / (a + b + c)$$

Setzt man für a, b und c die Terme der m-n-Formel Pythagoreischer Tripel ein

$$a = m^2 - n^2 \;;\; b = 2mn \;;\; c = m^2 + n^2$$

wird $r = (m - n)\,m$
d.h. auch der Inkreis eines Pythagoreischen Dreiecks ist stets ganzzahlig.
Ersetzt man die Hypotenuse c durch (a-r) und (b-r) wird

$$c = (a-r) + (b-r)\text{, d.h. } r = (a + b - c) / 2$$

Diese Formel war schon dem antiken chinesischen Mathematiker Liu Hui bekannt. In seinem Kommentar von 263 zu dem klasssischen Buch "Neun Kapitel …" findet man die entsprechende Herleitung.
Für die ersten Pythagoreischen Tripel ergeben sich die Inkreisradien:

Tripel	Inkreisradius	Tripel	Inkreisradius
3,4,5	1	5,12,13	2
7,24,25	3	8,15,17	3
9,40,41	4	11,60,61	5
12,35,37	5	13,84,85	6
20,21,29	6	6,8,10	2
9,12,15	3	12,16,20	4
10,24,26	4	15,20,25	5
18,24,30	6	15,36,39	6
14,48,50	6	16,30,34	6

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b, der Hypotenuse c und dem Inkreisradius r gilt

$$r = (a + b - c) / 2$$

Ist der Inkreisradius gegeben, so fragt man nach allen primitiven pythagoreischen Tripeln, die möglich sind.
In "On the Number of Primitive Pythagorean Triangles with a Given Inradius" (Fibonacci Quarterly 2006, 44) bewies Neville Robbins, dass es für eine primes $r > 2$ stets genau zwei primitive Tripel existieren. Für nicht prime, ungerade r können auch mehr Tripel auftreten.

r	Tripel
3	7 24 25, 8 15 17
5	11 60 61, 12 35 37
7	15 112 113, 16 63 65
9	19 180 181, 20 99 101
11	23 264 265, 24 143 145
13	27 364 365, 28 195 197
15	31 480 481, 32 255 257, 39 80 89, 48 55 73
17	35 612 613, 36 323 325

Ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke

Sind alle Längen der Seiten a, b, c eines rechtwinkligen Dreiecks ganzzahlig, so spricht man von pythagoreischen Zahlen, einem pythagoreischen Zahlentripel (a, b, c). Der Inkreisradius r ist in einem pythagoreischen Dreieck ebenfalls ganzzahlig.
Die Frage ist, ob es solche Dreiecke (o.B.d.A. a < b) gibt, für die zusätzlich auch die Höhe h, die Hypotenusenabschnitte p und q und der Umkreisradius R ganzzahlige Längen haben?

Beispiel: Seite a = 30 , Seite b = 40 , Seite c = 50, Höhe h = 24, Abschnitt p = 18, Abschnitt q = 32, Inkreis r = 10, Umkreis R = 25

Großer Satz von Fermat

Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für n>2 keine nichttrivialen natürlichen Lösungen a,b,c.

Die Gültigkeit des Satzes wurde vor 1994 bis n = 125080 explizit nachgewiesen.
1994 gelang der Beweis durch Wiles , der jedoch noch nicht von allen Mathematikern als vollständig anerkannt, wahrscheinlich aber eher nicht verstanden wurde. Im Jahr 2000 wurde der Beweis allgemein anerkannt!

Eigentlich müsste diese berühmte Aussage Satz von Wiles-Fermat heissen, da Fermat selbst den Beweis schuldig blieb. Fermat starb im Jahre 1665. 5 Jahre später begann sein Sohn Samuel, die Aufzeichnungen seines Vaters für eine Veröffentlichung zu ordnen.
Abbildung: Tschechische Briefmarke zum Beweis des Satzes
Dabei stieß er auf ein Werk von Diophants Arithmetica, in das Fermat die folgende Bemerkung geschrieben hatte:

"Cubum autem in duos eubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potesratem in duas ejusdem nominis fas est diuidere; ujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hane marginis exiguitas non caperet."

deutsch: "Es ist unmöglich, einen Kubus als Summe zweier Kuben zu schreiben, eine vierte Potenz als Summe zweier vierter Potenzen, oder allgemeiner gesagt, irgendeine Potenz über der zweiten als Summe zweier Potenzen des gleichen Grades: Ich habe eine wahrhaft wunderbare Beweisführung dieses allgemeinen Satzes entdeckt, die auf diesem Buchrand nicht Platz findet."
siehe auch: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html

Übermittelte Aufzeichnungen deuten darauf hin, dass Fermat den Beweis für den Fall n = 4 geführt hat und der Meinung war, dass sich dieser Beweis für alle n > 2 verallgemeinern lässt. Ob Fermat später seinen Irrtum bemerkte, ist unklar.
Da er seine Aufzeichnungen nicht veröffentlichen wollte, gab es auch keinen Grund die Randbemerkung in seinem Buch zustreichen. Trotzdem lebt bis heute unter Laien der Glaube fort, dass Fermat den allgemeinen Beweis wirklich gefunden hatte.

Zu einem Trugschluss führt die im angelsächsischen Sprachraum benutzte Bezeichnung: Fermat's Last Theorem.
Aus Fermats Korrespondenz geht hervor, dass er Diophants Buch in jüngeren Jahren durchgearbeitet hat, also in den 1730er Jahren.
Die Bezeichnung Last Theorem beruht wahrscheinlich nur darauf, dass diese Aussage von Fermat die letzte war, die nach seinem Tode weder bewiesen noch widerlegt werden konnte.
Berühmt wurde die Vermutung als 1907 der Industrielle Paul Wolfskehl einen Preis von 100000 Goldmark für den Beweis aussetzte. Daraufhin wurden die Universitäten, besonders die Georg-August-Universität Göttingen, mit teilweise absurden Lösungen überschüttet.
Die Frist für die Verleihung des Wolfskehlpreises endete am 13.9.2007. Umgerechnet auf heute hätte das Preisgeld eine Höhe von 1 Millionen €. Durch die Inflation sank das Preisgeld allerdings und war bei seiner Übergabe an Andrew Wiles etwa 70000 DM wert.
Im ersten Jahr gingen 621 "Lösungen" bei der Göttinger Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften ein. Der Sekretär der Akademie teilte die Manuskripte in völligen Unsinn, der sofort zurückgeschickt wurde und Material, das wie Mathematik aussieht.

Man wird niemals nachweisen können, ob Fermat einen Beweis gefunden hatte. Der große britische Mathematiker Hardy, der für seinen Humor bekannt war, hatte darauf jedenfalls eine überzeugende Antwort:
Als Hardy bei orkanartigen Stürmen eine Seereise antreten musste, schickte er unmittelbar vor dem Einschiffen einem Kollegen eine Postkarte mit der Mitteilung: Habe die Riemannsche Vermutung bewiesen!

Hardy hätte also im Falle seines Ertrinkens der Nachwelt ein größeres Rätsel als Fermat hinterlassen, weil die Riemannsche Vermutung - die bis heute nicht bewiesen wurde - noch wesentlich mehr Bedeutung als Fermats großer Satz hat.

Geschichte des Großen Satzes von Fermat

1630 Fermat notiert den Satz auf den Rand des Buches Arithmetica von Diophant
1670 Fermats Sohn veröffentlicht die Randnotizen seines Vaters
1753 Euler beweist die Fälle n = 3 und n = 4
1805 Sophie Germain gelingt ein wichtiger Schritt zur Lösung des Problems
1825 Legendre und Dirichlet beweisen den Fall n = 5
1830 Dirichlet beweist den Fall n = 14
1839 Lamé erweitert das Verfahren von Germain und zeigt n = 7
1.3.1847 Cauchy und Lamé kündigen gleichzeitig und unabhängig voneinander vor der Akademie ihre Beweise an
1847 Kummer reduziert das Problem auf "irreguläre" Primzahlen
1875 der 1853 ausgeschriebene Preis der französischen Akademie geht an Kummer
27.6.1908 der Wolfskehl-Preis wird gestiftet. Unzählige Laien versuchen sich nun am Beweis
1945 erstmals werden Computer zum Nachweis eingesetzt
1955 die Taniyama-Shimura-Vermutung wird veröffentlicht
1977 Wagstaff zeigt mit Computereinsatz, dass die Fermatsche Vermutung für alle Primzahlen 2 < p < 125000 richtig ist
1980 für alle n < 25000 ist der Nachweis gelungen
1983 Gerd Faltings zeigt, dass die Gleichung für jede natürliche Zahl n > 2 höchstens endlich viele Lösungen besitzt
1984 Gerhard Frey skizziert eine Beweisidee, nach der der Satz von Fermat wahr ist, wenn die Taniyama-Shimura-Vermutung gilt
1986 Kenneth Ribet erbringt einen Beweis für Freys Vermutung
1993, Juni Andrew Wiles trägt in Cambridge seinen Beweis vor
1993, August Nicholas Katz findet einen Fehler im Beweis
1994, September Wiles gelingt die Beseitigung des Fehlers. Der Beweis ist jetzt 130 Seiten lang
1997, Juni Wiles erhält den Wolfskehl-Preis
1998 Wiles erhält auf dem International Congress of Mathematicians in Berlin einen "Fields-Medaille" ähnlichen Preis. Die Fields-Medaille kann er nicht erhalten, da er zu alt ist.

Episoden zum großen Satz von Fermat

Episode 1

In der Folge "Hotel Royale" der Science-Fiction-Serie "Raumschiff Enterprise - das nächste Jahrhundert" erklärt Captain Picard, dass er auch am Beweis der Fermatschen Vermutung arbeitet und nach 800 Jahren intensiver Suche nicht einmal Computer eine Lösung gefunden hätten.
Die Folge wurde 1988 gedreht. Die Drehbuchautoren waren wohl der Meinung, dass der große Satz von Fermat noch weitere 400 Jahre allen Beweisversuchen widersteht.

Episode 2

In der Folge "Homer³" der TV-Serie "The Simpsons" ist im Hintergrund die Gleichung

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

zu sehen. Rechnet man die Werte korrekt aus, wird

$1782^{12} + 1841^{12}$ = 10253 97835 62263 36348 07550 46294 82261 74976 + 15158 12422 99195 55414 81119 49519 42023 51681 = 25412 10258 61458 91762 88669 95814 24285 26657

1922^{12} = 25412 10259 31480 14108 19278 64964 36515 67616

Natürlich sind beide Werte unterschiedlich, stimmen aber wenigstens in den ersten 9 Ziffern überein.

In "The Wizard of Evergreen Terrace mentions" sieht man $3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$
Die Summe wird 6397 66563 49698 61261 62362 30953 15448 78969 87106
während die Potenz 4472^{12} gleich 6397 66563 48486 72580 68623 58322 16857 57841 24416
ist. Hier sind sogar die ersten 10 Ziffern gleich und vor allem die letzte!

Euler-Beweis zum Satz von Fermat

Im Jahre 1769 veröffentlichte Leonhard Euler seinen Beweis für den Spezialfall n = 3 des großen Satzes von Fermat. In der Liste befindet sich der (Original)Text aus Eulers berühmten Lehrbuch "Vollständige Anleitung zur Algebra".

Lehrsatz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3 - y^3 = x^3$, nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz von zwey Cubis: Es ist also genug die Unmöglichkeit bloß von der

Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen:
Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Denn wenn sie einen gemeinsamen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum desselben theilen lassen. Wäre z.E. $x = 2a$, und $y = 2b$ so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.
Da nun x und y keinen gemeinsamen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Fall müßte z gerade seyn; im andern Fall aber müßte z ungerade seyn.
Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerade und eine gerade. Wir wollen daher zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.
Es seyn demnach x und y zwey ungerade Zahlen, so wird sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn. Man setze daher $(x + y)/2 = p$ und $(x - y)/2 = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß; daher aber wird $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp + 3qq)$:
Es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp + 3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz her bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2(qq + 3pp)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, daher es genug ist, die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp + 3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

Wäre nun $2p(pp + 3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nämlich $\frac{1}{4}p(pp + 3qq)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird $pp + 3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget, daß sich p durch 4 theilen lassen müsse und also $p/4$ eine ganze Zahl sey.
Wenn nun dieses Product $p/4\cdot(pp + 3qq)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nämlich $p/4$ und $pp + 3qq$, ein Cubus seyn, wenn nämlich dieselben aber einen gemeinsamen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp + 3qq$ nicht einen gemeinsamen Theiler haben könnten?
welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinsamen Theiler, so würden auch diese pp und $pp + 3qq$
eben denselben gemeinsamen Theiler haben, und also auch diese ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinsamen Theiler haben, da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinsamen Theiler haben als 3, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt.
Wir haben daher zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wenn die Factoren p und $pp + 3qq$ keinen gemeinsamen Theiler haben, welches immer geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall ist, wenn dieselben einen gemeinsamen Theiler haben, welches geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt, da denn beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

Erster Fall:
Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $p/4$ und $pp + 3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns daher $pp + 3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wenn man, wie oben gezeigt worden , setzt
$p + q\text{Wurzel}(-3) = (t + u\,\text{Wurzel}(-3))^3$ und $p - q\,\text{Wurzel}(-3) = (t - u\text{Wurzel}(-3))^3$.
Damit dadurch werden $pp + 3qq = (tt + 3uu)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird, $p = t^3 - 9tuu = t(tt - 9uu)$, und $q = 3ttu - 3u^3 = 3u(tt-uu)$: weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerade, t aber gerade seyn, weil sonst $tt - uu$ eine gerade Zahl würde.
Da nun $pp + 3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden $p = t(tt - 9uu) = t(t + 3u)(t - 3u)$, so müßte jetzt noch $p/4$ und also auch 2p, ein Cubus seyn; daher diese Formel $2t(t + 3u)(t - 3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist: also sind diese drey Factoren 2t, $t + 3u$ und $t - 3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$ so wird $2t = f^3 + g^3$.
Nun aber ist 2t auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 nd g^3 deren Summe wieder ein Cubos wäre, welche offenbar ungleich vie kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Denn nachdem wir gesetzt haben $x = p + q$ und $y = p - q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.
Wenn es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summe auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man auf immer kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bestätiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir sogleich sehen werden.

Zweyter Fall.
Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze p = 3r so wird unsere Formel 3r/4·(9rr + 3qq), oder 9/4r(3rr + qq), welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich 3rr + qq weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben sowohl gerade seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.
Machen wir nun den zweyten 3rr + qq oder qq + 3rr zu einem Cubo, so finden wir wie oben q = r(tt - 9uu) und r = 3u(tt - uu): wo zu merken, daß weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl seyn müsse. Weil nun 9r/4 auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo 8/27 multiplicirt, so muß 2r/3 das ist
2u(tt - uu) = 2u(t + u)(t - u) ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte: wenn man aber setzt t + u = f^3 und t - u = g^3, so folgt daraus 2u = f^3 - g^3, welches auch ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubos wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solchen Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

Beweis zum Satz von Fermat n = 4

Satz: Die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$, insbesondere auch die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ ist in natürlichen Zahlen größer 0 unlösbar.
Beweis: Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann gibt es paarweise teilerfremde ganze Zahlen x, y, z mit $x^4 + y^4 = z^2$. z sei minimal mit der angegebenen Eigenschaft.
Aus der Eigenschaft pythagoreischer Tripel ergibt sich dann:

$x^2 = A^2-B^2$ $\quad$ $y^2 = 2AB$ $\quad$ $z = A^2+B^2$

B ist gerade. Da x und y teilerfremd sind, sind auch A und B teilerfremd und somit

$A = a^2$, $B = 2b^2$

Damit gilt $x^2 + (2b^2)^2 = a^4$ und $2b^2 = 2CD$ $\quad$ $a^2 = C^2+D^2$
Die Zahlen C und D sind teilerfremd. Man erhält

$C = c^2$, $D = d^2$, also $a^2 = c^4 + d^4$.

Nun ist $z = a^4 + (2b^2)^2 > a^4 >= a$,
da mit y>0 auch b>0 ist. Das widerspricht der Minimalität von z.

Fast-Fermat-Tripel

Nach dem großen Satz von Fermat existieren für n > 2 keine natürlichen Lösungen a, b, c > 0 der Gleichung

$a^n + b^n = c^n$

Fast-Fermat-Tripel sind Tripel (a,b,c), für die a, b natürliche Zahlen und c eine reelle Zahl sind, wobei c "fast ganzzahlig" ist.

Fast-Fermat-Tripel für n = 3

a	b	c
9	10	12,0023143684276843965855964227102462534121757978322894
71	138	143,9999839248953248347533562100404583612401925388931 16
294	2057	2058,9999998427480470563302483251751751786933201242 6968
368	1537	1544,0000001398247827555549460426239693255529769821 8467
384	3071	3072,9999999294034268336958165861369804459265048468 3496
486	4373	4374,9999999651700680269335988311711619950997861921 7391
600	5999	6000,9999999814876527780635335600580081546991958510 2117
726	7985	7986,9999999895493964679655434229920593284596196362 4339
1851	8675	8702,9999999955991073176450149244050106996248303576 3615
3987	9735	9953,0000000033648889591511192801354893893875020528 1691

Fast-Fermat-Tripel für n = 4

a	b	c
99	288	289,0000962813959693623517158143470587807631730168292 14
117	360	360,9999239040473712492873533547595679327453323371363 04
139	313	316,0000417214630610449947116048053345750854561419462 16
164	565	566,0000395774875324341578014512018337981648435850111 28
167	192	215,0000048297632543138028562217512986722131483120923 79
216	647	648,9999952589895138356229192059949747626735907502585 40
242	471	478,9999974886771672546370353880807736376553184673011 87
355	1583	1583,9999981009447907281900549964328480108683837296096 8
717	967	1033,0000008892745957858262794791717693881481283411283 1
1167	1611	1712,0000005094886526708718293194520261705422395122188 1

Fast-Fermat-Tripel für n = 5

a	b	c
13	16	17,000028735190988470245335964870282129608392237284012 7
42	71	72,000021961851695110382097638126281586667393721545556 2
133	228	230,999993826640566370761631893491892059954359575053872
262	328	347,000001333850414362625250494776896340502600086235321
494	954	960,999999429809226233395324965891875907641129700983853

Fast-Fermat-Tripel für n = 6

a	b	c
22	28	29,003630116569937682552253519394377172264140002100731 3
36	51	52,001078519784019508636170681197422471771383630899523 9
49	49	55,000640367159276090243119434279796295388144420085350 9
68	110	111,000137783768553805367646144828136361604838909059818
107	130	136,000073306469380005712695116646842152258046601006305
163	315	315,999940428721071828676211502663792385061236827667123
183	362	363,000028537938925795066725141190541030430274223207787
321	711	712,000008505876427414951281443139026064413224859787623
428	643	652,000001480734429615455907747032802874303825568362245
1191	1364	1449,999998911012607458607099941558994696209105808899 71

Fast-Fermat-Tripel für n = 7

a	b	c
10	10	11,040895136738123376495053876233447213253266007801241 7
40	43	45,997601465591627842038417310843225677266144021185702 9
58	82	83,000209837760639831983054881256872550721723679022187 5
61	87	88,000203850244576244746810594474806067517281033959391 5
114	181	181,999908643936309850767172435881102055702844956175538
173	216	222,000017912523191893288625096664480357635089398465332
381	440	460,000015540721263532467839929125672597114157802790648
467	546	568,999991954340961235670112243030939607987705484168110
598	836	847,000002097996401531170328294289264759463538958484941
819	1121	1137,999999131974379393537462540480667991901247738669 46

Fast-Fermat-Tripel für n = 8

a	b	c
11	11	11,995585059317834251277117213367787768919729903940738 3
49	50	53,999390273296982522828290505244695176667835477551749 5
127	188	189,000314039088908523197023152064412577787836592689430
211	304	306,000036483044580137734188156360898927165581255374568
238	349	350,999975383402220669265635013459307886479170370132738
453	453	494,000002897361719620775827059600714483694331498650406
457	814	815,000001942939119545853274271965952974747305743550100
526	956	957,000000722620743954974610732915005177318472888453123
673	845	860,999999412673828150669819378478793699882457149018530
868	1144	1159,000000211763521093793663973938233362310274518865 33

Erweiterung des Satzes von Fermat

Der Satz von Fermat kann auf Gleichungen der Form $x^n + y^n = c \cdot z^n$, wobei c natürliche Zahl ist, erweitert werden.
Lösbare Fälle für

n	c
2	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, ...
3	2, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 42, 43, 48, 49, 50, ...
4	2, 17, 32, 82, 97, 162, 257, 272, 337, 512, 626, 641, 706, 881, 1250, 1297, 1312, 1377, 1552
5	2, 31, 33, 64, 211, 242, 244, 275, 486, 781, 992, 1023, 1025, 1056, 1267, 2048, 2101, 2882

Satz von Fermat mit negativen Exponenten

Nach dem großen Satz von Fermat existieren für natürliche n > 2 keine natürlichen Lösungen a, b, c > 0 der Gleichung $a^n + b^n = c^n$
Normalerweise interessiert man sich nur für den lösbaren Fall n = 2, den Pythagoreischen Tripeln. Es ist aber auch möglich, ganzzahlige Exponenten n < 2 zu betrachten.

Für z = 1 ist der Fall trivial. Das einfachste Beispiel ist 1 + 1 = 2. Für z = 0 gibt es wegen $a^0 + b^0 = 2 \neq 1 = c^0$ keine Lösung. Für z = -1 findet man Lösungen, zum Beispiel 1/2 + 1/2 = 1 und 1/6 + 1/3 = 1/2. Ebenso existieren Lösungen für den Fall z = - 2, u.a. $1/20^2 + 1/15^2 = 1/12^2$ und $1/156^2 + 1/65^2 = 1/60^2$.

Nach dem Beweis von Wiles, dass für $n > 2$ keine Lösungen auftreten, ergibt sich automatisch, dass auch für alle ganzzahligen $z < -2$ keine natürlichen Lösungstripel existieren.
Durch Hans Walser wurde gezeigt, dass aus einer Lösung für n sich eine Lösung für -n konstruieren lässt. Falls $a^n + b^n = c^n$ gilt, so erhält man durch die Zuordnung

$$f : (a,b,c) \to (a^*,b^*,c^*) = 1/\ kgV(ggT(a, b), ggT(a, c), ggT(b, c)) \cdot (bc,ac,ab)$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $(1/a^*)^n + (1/b^*)^n = (1/c^*)^n$

Satz von Fermat für Exponenten n = -2

Erfüllen drei natürliche Zahlen a, b, c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$,
.d.h. sie bilden ein Pythagoreisches Tripel, so erhält man durch die Zuordnung

$$f : (a,b,c) \to (a^*,b^*,c^*) = 1/\ kgV(ggT(a, b), ggT(a, c), ggT(b, c)) \cdot (bc,ac,ab)$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $(1/a^*)^2 + (1/b^*)^2 = (1/c^*)^2$
Sind u und v teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist a,b,c ein derartiges Tripel mit

$$a = u \cdot v,\ \ b = (u^2-v^2)/2,\ \ c = (u^2+v^2)/2$$

d.h. aus den Zahlen u, v kann auch ein Tripel gebildet werden, dass die Gleichung zum Großen Satz von Fermat für den Exponenten -2 erfüllt.
Pythagoreische Tripel (a,b,c) können als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks interpretiert werden. Dann gibt das Tripel (a*, b*, c*) das Verhältnis der 3 Höhen h_a, h_b, h_c dieses rechtwinkligen Dreiecks an.

120°-Tripel

In Analogie zur Konstruktion von pythagoreischen Tripeln, bei denen entsprechende Dreiecke einen 90°-Winkel besitzen, kann man auch fragen, ob es ganzzahlige Seitenzahlen eines Dreiecks gibt, so dass ein Winkel einen ganzzahligen Wert besitzt.
Ausgehend vom Kosinussatz folgt aus der Tatsache, dass außer cos 90° nur noch cos 60° und cos 120° rational sind, dass solche Tripel nur für 120°- und 60°-Winkel existieren.
Tripel von Zahlen, so dass ein zugeordnetes Dreieck einen 120° Winkel besitzt, werden 120°-Tripel genannt.

Man erhält alle primitiven 120°-Tripel in der Gestalt $(2mn+n^2, m^2-n^2, m^2+n^2+mn) = (x, y, z)$ wenn die natürlichen Zahlen m, n teilerfremd sind und m-n nicht durch 3 teilbar ist. Die kleinsten Tripel sind (5, 3, 7), (7, 8, 13) und (16, 5, 19).
Die Seitenlänge z ist immer ungerade und nie durch 3 und 5 teilbar. x und z sind weiterhin niemals Kubikzahlen. Für y entstehen solche, wenn m und n aufeinander folgende Dreieckszahlen sind.
Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist nie ganzzahlig, da $\sin 120° = 1/2\ \sqrt{3}$ irrational ist. Für die Radien von Inkreis und Umkreis ergibt sich

$$r = ab\ \sqrt{3} / (2a + 2b + 2c) \qquad R = c/3\ \sqrt{3}$$

60°-Tripel

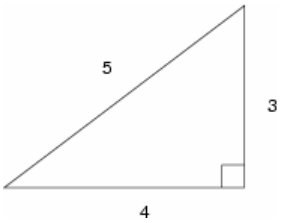
In Analogie zur Konstruktion von pythagoreischen Tripeln, bei denen entsprechende Dreiecke einen 90°-Winkel besitzen, kann man auch fragen, ob es ganzzahlige Seitenzahlen eines Dreiecks gibt, so dass ein Winkel einen ganzzahligen Wert besitzt.
Ausgehend vom Kosinussatz folgt aus der Tatsache, dass außer cos 90° nur noch cos 60° und cos 120° rational sind, dass solche Tripel nur für 120°- und 60°-Winkel existieren.
Tripel von Zahlen, so dass ein zugeordnetes Dreieck einen 60° Winkel besitzt, werden 60°-Tripel genannt.
Man erhält alle primitiven 60°-Tripel in der Gestalt

$$(1, 1, 1)\ ; \qquad (2mn-n^2, m^2-n^2, m^2+n^2-mn)\ ; (m^2-2mn, m^2-n^2, m^2+n^2-mn)$$

wenn die natürlichen Zahlen m, n teilerfremd sind, $m > n/2$ gilt und m+n nicht durch 3 teilbar ist. Die kleinsten Tripel sind (1, 1, 1), (5, 8, 7), (3, 8, 7) und (7, 15, 13).

Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist nie ganzzahlig, da $\sin 60° = 1/2\ \sqrt{3}$ irrational ist. Für die Radien von Inkreis und Umkreis ergibt sich

$$r = ab\ \sqrt{3} / (2a + 2b + 2c) \qquad R = c/3\ \sqrt{3}$$



Kongruente Zahl

Kongruente Zahlen sind Zahlen, die sich als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seitenlängen darstellen lassen. Die ersten derartigen Zahlen sind:
5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34, 37, 38, 39, 41, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 61, 62, 63, 65, 69, 70, 71, 77, 78, 79, 80, 84, 85, 86, 87, 88, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 102, 103, 109, 110, 111, 112, 116, 117, 118, 119, 120, 124, 125, 126, …

Zur Bestimmung kongruenter Zahlen wird der Satz von Tunnell benutzt. Dieser gibt streng genommen nur eine notwendige Bedingung an. Sollte die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer für elliptische Kurven $y^2 = x^3 - n^2x$ gelten, ist der Satz auch hinreichend.
Ist n eine quadratfreie ganze Zahl, so werden folgende Werte bestimmt

$A = \#\{x, y, z \in Z \mid n = 2x^2 + y^2 + 32z^2\}$
$B = \#\{x, y, z \in Z \mid n = 2x^2 + y^2 + 8z^2\}$
$C = \#\{x, y, z \in Z \mid n = 8x^2 + 2y^2 + 64z^2\}$
$D = \#\{x, y, z \in Z \mid n = 8x^2 + y^2 + 16z^2\}$

Ist n eine ungerade Kongruenzzahl, so gilt 2A = B, ist n gerade Kongruenzzahl dann 2C = D.

Für die ersten Kongruenzzahlen wird für die Katheten a, b und die Hypotenuse c des rechtwinkligen Dreiecks

5 : a = 3/2 , b = 20/3 , c = 41/6
6 : a = 3 , b = 4 , c = 5 … Abbildung
7 : a = 35/12 , b = 24/5 , c = 337/60
13 : a = 780/323 , b = 323/30 , c = 106921/9690
14 : a = 8/3 , b = 63/6 , c = 65/6
15 : a = 4 , b = 15/2 , c = 17/2
20 : a = 3 , b = 40/3 , c = 41/3

Geschichte der Kongruenten Zahlen

Kongruente Zahlen sind Zahlen, die sich als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seitenlängen darstellen lassen.

"Das Rätsel der kongruenten Zahlen ist eng verknüpft mit einer mathematischen Hypothese aus den sechziger Jahren - der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer. Wenn diese zutrifft, dann müssen alle Zahlen der Form 8n+5, 8n+6 und 8n+7 für natürliche n_0 kongruent sein. …
'Das ist das wichtigste ungelöste Problem der Zahlentheorie', sagt John Coates von der Cambridge University. Im Jahr 2000 hat das amerikanische Clay Mathematics Institute sogar eine Million Dollar für die Lösung dieses Rätsels ausgelobt. Es gehört damit zu den sieben Millennium-Problemen, den schwierigsten Kopfnüssen für Mathematiker im dritten Jahrtausend. …
1976 hatte der Australier Coates gemeinsam mit seinem Schüler Andrew Wiles immerhin schon einen Spezialfall der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer bewiesen, ohne freilich das Problem der kongruenten Zahlen selbst zu lösen. Wiles wurde zwei Jahrzehnte später zum Superstar der Mathematik, als er den Großen Fermatschen Satz bewies.

Der Mathematiker Ye Tian von der Chinesischen Akademie der Wissenschaften hat den Schleier um die kongruenten Zahlen nun zumindest ein Stück gelüftet. Er hat Zahlen untersucht, in deren Primzerlegung keine Zahl doppelt oder mehrfach auftritt.
Das trifft zum Beispiel für 6 = 2·3 zu, nicht aber für 12 = 2·2·3. Tian konnte zeigen, dass es unendlich viele kongruente Zahlen der Form 8n+5, 8n+6 und 8n+7 gibt, die k paarweise verschiedene Primfaktoren haben. …

Coates lobt Tians Arbeit als 'Meilenstein in der Geschichte eines alten Problems', obwohl der Chinese nur einen Spezialfall gemeistert hat. 'Wir sind auf dem Weg zur Lösung der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer', sagt Hélène Esnault von der Freien Universität Berlin. Die Französin ist aber nicht ganz so optimistisch wie Coates: 'Der Weg ist noch sehr weit.'
Quelle: Spiegel online http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/kongruente-zahlen-mathematik-raetsel-aus-1001-nacht-a-880152.html

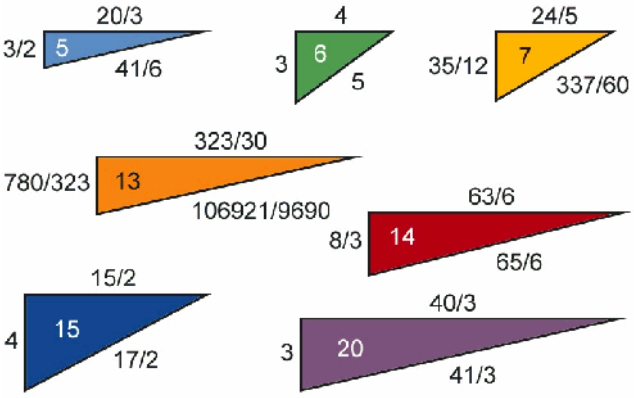


Abbildung: erste kongruente Zahlen

Darstellbare Zahl

Eine natürliche Zahl n wird darstellbar genannt, wenn es zwei natürliche Zahlen a, b gibt, so dass gilt

$$n = a^2 + b^2$$

Erste Untersuchungen wurden schon von dem indischen Mathematiker Brahmagupta (598-668) und in Europa von Fibonacci durchgeführt.

Es gilt:
1) Sind a und b darstellbar, so ist auch ab darstellbar.
2) Keine Primzahl der Form 4n+3 ist darstellbar.
3) Jede Primzahl der Form 4n+1 ist darstellbar.
siehe Primzahlen mit 4n+1

Ergebnis 3) formulierte Pierre de Fermat am 25.Dezember 1640 in einem Brief an Martin Mersenne. Daher ist der Satz im englischen Sprachraum auch als "Fermat's Christmas Theorem" bekannt. Albert Girard (1595-1632) kannte den Satz einige Jahre früher. Der erste Beweis stammt von Euler aus dem Jahre 1747.

Zwei-Quadrate-Satz

Darstellbare Zahlen sind jedoch nicht notwendig Primzahlen. Auf Euler geht der Zwei-Quadrate-Satz zurück:
Eine natürliche Zahl n ist genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in der Primfaktorzerlegung von n alle Primzahlen der Form 4k+3 mit geradem Exponenten auftreten.

Darstellbare Zahl (2)

Nach dem Zwei-Quadrate-Satz ist eine natürliche Zahl n genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in der Primfaktorzerlegung von n alle Primzahlen der Form 4k+3 mit geradem Exponenten auftreten.
Weiterhin zeigte Gauß in seinen "Disquisitiones Arithmeticae", dass alle darstellbaren Primzahlen der Form 4n+1 genau eine Zerlegung in eine Summe zweier Quadraten $a^2 + b^2$ besitzen.

Für darstellbare Zahlen z, die nicht 4n+1-Primzahl sind, kann es mehrere Darstellungen geben.
1829 konnte Jacobi (1829) in "Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" einen Satz über die Anzahl der Zerlegungen beweisen. Dort führt Jacobi die Thetafunktionen ein, um elliptische Funktionen zu definieren. Mittels dieser beweist er eine Vielzahl anspruchsvoller zahlentheoretischer Sätze.

Es sei $n = 2^f n_1 n_2$ eine natürliche Zahl. n_1 sei das Produkt aller Primteiler der Form 4k+1 der Zahl n, n_2 das Produkt der Primteiler der Form 4k+3. $d_a(n)$ sei die Anzahl der Teiler(!) von n, die bei Division mit 4 den Rest a lassen.
Ist n darstellbar, so existieren dann $r(n) = 1/2\ d_1(n_1) = 1/2\ (d_1(n) - d_3(n))$
verschiedene Zerlegungen von n in zwei Quadrate.

Zum Beispiel ist $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$. Teiler der Form 4k+1 sind 1, 5, 9, 13, 45, 65, 117 und 585, Teiler der Form 4k+3 weiterhin 3, 15, 39 und 195. Damit wird

$$r(2340) = 1/2\ d_1(5 \cdot 13) = 1/2\ (d_1(2340) - d_3(2340)) = 1/2\ (8-4) = 2$$

Tatsächlich gibt es zwei Zerlegungen $2340 = 6^2 + 48^2 = 24^2 + 42^2$
Nach dem Zwei-Quadrate-Satz ist eine natürliche Zahl n genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in der Primfaktorzerlegung von n alle Primzahlen der Form 4k+3 mit geradem Exponenten auftreten.

Die kleinsten natürlichen Zahlen n, für die r = 1, 2, 3, 4, … verschiedene Zerlegungen existieren, sind:
n = 4, 25, 325, 1105, 4225, 5525, 27625, 27625, 71825, 138125, 160225, 160225, 801125, 801125, 801125, 801125, 2082925, 2082925, …

$4 = 0^2 + 2^2$
$25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$
$325 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$
$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$
$4225 = 0^2 + 65^2 = 16^2 + 63^2 = 25^2 + 60^2 = 33^2 + 56^2 = 39^2 + 52^2$
$5525 = 7^2 + 74^2 = 14^2 + 73^2 = 22^2 + 71^2 = 25^2 + 70^2 = 41^2 + 62^2 = 50^2 + 55^2$
$27625 = 20^2 + 165^2 = 27^2 + 164^2 = 45^2 + 160^2 = 60^2 + 155^2 = 83^2 + 144^2 = 88^2 + 141^2 = 101^2 + 132^2 = 115^2 + 120^2$ (8)
$71825 = 1^2 + 268^2 = 40^2 + 265^2 = 65^2 + 260^2 = 76^2 + 257^2 = 104^2 + 247^2 = 127^2 + 236^2 = 160^2 + 215^2 = 169^2 + 208^2 = 188^2 + 191^2$
$138125 = 22^2 + 371^2 = 35^2 + 370^2 = 70^2 + 365^2 = 110^2 + 355^2 = 125^2 + 350^2 = 163^2 + 334^2 = 194^2 + 317^2 = 205^2 + 310^2 = 218^2 + 301^2 = 250^2 + 275^2$
$160225 = 15^2 + 400^2 = 32^2 + 399^2 = 76^2 + 393^2 = 81^2 + 392^2 = 113^2 + 384^2 = 140^2 + 375^2 = 175^2 + 360^2 = 183^2 + 356^2 = 216^2 + 337^2 = 228^2 + 329^2 = 252^2 + 311^2 = 265^2 + 300^2$ (12)
$801125 = 10^2 + 895^2 = 95^2 + 890^2 = 127^2 + 886^2 = 158^2 + 881^2 = 193^2 + 874^2 = 230^2 + 865^2 = 241^2 + 862^2 = 335^2 + 830^2 = 370^2 + 815^2 = 430^2 + 785^2 = 458^2 + 769^2 = 463^2 + 766^2 = 529^2 + 722^2 = 545^2 + 710^2 = 554^2 + 703^2 = 610^2 + 655^2$ (16)
$2082925 = 26^2 + 1443^2 = 134^2 + 1437^2 = 163^2 + 1434^2 = 195^2 + 1430^2 = 330^2 + 1405^2 = 370^2 + 1395^2 = 429^2 + 1378^2 = 531^2 + 1342^2 = 541^2 + 1338^2 = 558^2 + 1331^2 = 579^2 + 1322^2 = 702^2 + 1261^2 = 730^2 + 1245^2 = 755^2 + 1230^2 = 845^2 + 1170^2 = 894^2 + 1133^2 = 926^2 + 1107^2 = 1014^2 + 1027^2$ (18)

Landau-Ramanujan-Konstante

Eine wichtige Konstante der Zahlentheorie ist die Landau-Ramanujan-Konstante, benannt nach Edmund Landau und Srinivasa Ramanujan.
Sie beschreibt den Anteil natürlicher Zahlen an, die als Summe von zwei Quadraten dargestellt werden können.

Ist N(x) die Anzahl natürlicher Zahlen kleiner als x, die als derartige Summe gebildet werden können, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} N(x)\ \sqrt{(\ln x)} / x \approx 0{,}764223653589220662990698731250092\ldots$$

Zum Beispiel sind N(1) = 1, N(2) = 2, N(4) = 3, N(5) = 4, N(8) = 5 da

$1 = 0^2 + 1^2 \quad 2 = 1^2 + 1^2 \quad 4 = 0^2 + 2^2 \quad 5 = 1^2 + 2^2 \quad 8 = 2^2 + 2^2 \ldots$

N(x) konvergiert aber nur langsam gegen die Landau-Ramanujan-Konstante. Für $N(10^5) = 24028$ ergibt sich der Näherungswert 0,815287, für $N(10^6) = 216341$ der Wert 0,804123.

abc-Vermutung

Die abc-Vermutung ist eine 1985 von Joseph Oesterlé und David Masser aufgestellte mathematische Vermutung. Sie behandelt eine Eigenschaft von Tripeln von natürlichen Zahlen, bei denen die dritte die Summe der beiden anderen ist. Die Vermutung ist bisher weder bewiesen noch widerlegt. Es sind bereits eine Anzahl weitreichender zahlentheoretischer Aussagen bekannt, die aus der Gültigkeit der abc-Vermutung folgen.

Vermutung: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante K_ε, so dass für alle Tripel teilerfremder positiver ganzer Zahlen a, b, c mit a + b = c die folgende Ungleichung gilt: $c < K_\varepsilon(\ \mathrm{rad}(abc)\ )^{1+\varepsilon}$
Die Vermutung betrifft den Fall $\varepsilon > 0$, da sie für $\varepsilon = 0$ falsch ist.
Mit rad(n) wird das Radikal einer positiven ganzen Zahl n bezeichnet. Dies ist das Produkt der unterschiedlichen Primfaktoren von n. Kommt ein Primfaktor in der Primfaktorzerlegung von n mehrfach vor, so wird er zur Berechnung von rad(n) nur einmal verwendet.

Die Folgerungen aus der Gültigkeit der abc-Vermutung sind vielfältig. Insbesondere der sehr komplizierte Beweis des Großen Fermatschen Satzes würde sich auf eine Seite reduzieren. Weiterhin folgen aus der Vermutung: Faltings Theorem, die Existenz von endlich vielen Wieferich-Primzahlen, die schwache Form der Marshall-Hall-Vermutung, die Mengen von aufeinanderfolgenden Zahlentripeln der starken Zahlen sind endlich, …

Bisher wurden Berechnungen angestellt, um die Vermutung bis zu einem gewissen Zahlenraum nachzuprüfen. Beispielsweise sind

$$\mathrm{rad}(2^2 \cdot 3^4) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ und } \mathrm{rad}(2 \cdot 3 \cdot 5^2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Drei positive ganze Zahlen a,b,c heißen abc-Tripel wenn a,b teilerfremd zueinander sind und a + b = c gilt. Wird rad(abc) berechnet, so wird geprüft, ob rad(abc) < c gilt. Unter den $15 \cdot 10^6$ abc-Tripeln mit c < 10000 befinden sich 120 Tripel, die die Ungleichung erfüllen.
Unter allen $380 \cdot 10^6$ abc-Tripeln mit c < 50000 befinden sich 276 günstige Tripel.
siehe auch die Top-Internetseite von Abderrahmane Nitaj:
http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html

ABC-Tripel

abc-Tripel sind positive ganze Zahlen a, b, c so dass

a + b = c und a < b < c
a,b,c keinen gemeinsamen Teiler haben
c > rad(a·b·c) (Radikal)

gilt. Die umformulierte abc-Vermutung sagt dann, dass es für jedes h > 1 nur endlich viele a, b, c gibt, so dass

$$\log(c) / \log(\mathrm{rad}(a \cdot b \cdot c)) > h$$

ist. Ab h = 1,4 und größere h werden die Tripel gute abc-Tripel genannt. Das Tripel mit dem höchsten h-Wert wurde von Eric Reyssat gefunden: $a = 2$; $b = 3^{10} \cdot 109$; $c = 23^5$; $h = 1{,}62991$

ABC@home ist ein Projekt des mathematischen Instituts der Universität Leiden und Kennslink, einem holländischen Institut für Wissenschaft. Das BOINC-Projekt versucht alle abc-Tripel der abc-Vermutung bis 10^{18} zu finden.
Homepage: http://abcathome.com
Die abc-Vermutung ist zur Zeit eines der größten offenen Probleme der Mathematik. Sollte sie wahr sein, können viele weitere ungelöste Probleme der Mathematik direkt beantwortet werden.
Sie wird allerdings nicht durch dieses Projekt bewiesen oder widerlegt werden können. Hier werden zwar aufsteigend alle Tripel gefunden, die die Ungleichung erfüllen, aber ob es nun nur endlich viele solcher Tripel gibt, kann man durch diesen Ansatz nicht zeigen.

ABC-Tripel, Aribas-Programm

Mit dem folgenden einfachen Aribas-Programm können abc-Tripel berechnet werden:

```
function factorlist(x: integer): array;
var st: stack; q: integer;
begin q := 2;
   while q := factor16(x,q) do stack_push(st,q); x := x div q; end;
   stack_push(st,x);
   return stack2array(st);
end;

function abctripel(anfang,grenze:integer):integer;
var i,a,b,c,n,ggt,r,l,p,palt:integer; z:array of integer;
begin
```

```
    a:=anfang;
  while a<grenze div 2 do b:=a+1;
   while a+b<grenze do
     if gcd(a,b)=1 then
       c:=a+b;          n:=a*b*c;
       z:=factorlist(n);
       l:=length(z);    r:=1;    palt:=1;
       for i:=0 to l-1 do
            if z[i]<>palt then palt:=z[i]; r:=r*z[i] end;
          end;
       if r<c then writeln(a,chr(9),b,chr(9),c,chr(9),r) end;
          end;
     end;
    inc(b); end;
    inc(a); end;
end;
```

Beweis der abc-Vermutung

Japaner präsentiert Lösung für Primzahlen-Rätsel

26. September 2012: … Nun hat der japanische Mathematiker Shinichi Mochizuki einen Beweis für die sogenannte abc-Vermutung vorgelegt.
Auch darin geht es um Primzahlen, und zwar um die Beziehungen zwischen ihnen. Die Arbeit Mochizukis hat Mathematiker weltweit aufhorchen lassen. Denn sollte der Beweis tatsächlich stimmen, würde er manches Problem aus der Zahlentheorie gleich mitlösen - oder zumindest neue Ansätze dafür liefern.
Unter anderem folgt aus der abc-Vermutung direkt der Große Fermatsche Satz - ein Problem, das Mathematiker seit mehr als 300 Jahre zu lösen versuchen. Der Satz besagt, dass die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für n>2 keine Lösung für natürliche Zahlen a, b, c besitzt.
Formuliert hatte ihn bereits im 17.Jahrhundert der Mathematiker Pierre de Fermat, der Beweis gelang erst 1994. Die abc-Vermutung ist etwas komplizierter als der Große Fermat, aber trotzdem noch gut zu verstehen.
Auch darin geht es um drei natürliche Zahlen a, b und c, wobei c die Summe aus a und b ist und alle drei Zahlen keine gemeinsamen Teiler besitzen. Für Zahlentheoretiker ist die abc-Vermutung von großem Interesse.
"Hier kommen die beiden Welten Addition und Multiplikation zusammen", sagt Jürg Kramer, Mathematiker an der Humboldt-Universität Berlin. In a, b und c steckten unterschiedliche Primfaktoren - und es gelte gleichzeitig die Beziehung a + b = c.
"Addition und Multiplikation werden gewissermaßen verquickt, und das macht es auch so schwierig", erklärt Kramer. Wie vertrackt das Addieren von Primzahlen sein kann, zeigt das einfache Beispiel 17 + 19. Beide Summanden sind Primzahlen - ihre Summe 36 ist hingegen eine aus Sicht von Zahlentheoretikern eher langweilige Zahl - nämlich das Produkt 2*2*3*3.
Die Summe zweier ungewöhnlicher Zahlen kann also eine ganz gewöhnliche Zahl sein. Es lässt sich kaum vorhersagen, welche Primfaktoren in dieser Summe stecken. "Das ist eine ganz chaotische Situation", sagt Kramer.
Quelle: spiegel.de

Bealsche Gleichung

Mitte der neunziger Jahre wurde durch den texanischen Bankier Andrew Beal folgendes Problem gestellt. Gesucht sind natürliche Zahlen A, B, C und X, Y, Z > 2, welche die, Fermat-ähnliche, Gleichung

$$A^X + B^Y = C^Z$$

erfüllen. Beal stellte fest, dass die Lösungen dieser allgemeinen Gleichung sonderbarerweise einen gemeinsamen Teiler für die Zahlen A, B und C aufweisen, zum Beispiel $3^6 + 18^3 = 3^8$ ergibt den Teiler 3. Für die Erklärung dieser Erscheinung setzte Beal 5000 Dollar Preisgeld aus, das jedes Jahr um weitere 5000 Dollar steigt. 2013 ist das Problem noch nicht gelöst und das Preisgeld auf 1 Million Dollar erhöht.
Einige Lösungen der Gleichung:

$3^3+6^3 = 3^5$	$3^6+18^3 = 3^8$	$3^6+18^3 = 9^4$	$3^9+54^3 = 3^{11}$
$4^{12}+8^8 = 32^5$	$4^{10}+16^5 = 8^7$	$4^{16}+16^8 = 8^{11}$	$4^{22}+16^{11} = 8^{15}$
$4^{12}+16^6 = 32^5$	$4^{22}+16^{11} = 32^9$	$4^{10}+32^4 = 8^7$	$4^{25}+32^{10} = 8^{17}$
$4^{12}+64^4 = 32^5$	$7^7+49^3 = 98^3$	$8^8+16^6 = 32^5$	$8^5+32^3 = 4^8$
$8^{15}+32^9 = 4^{23}$	$8^5+32^3 = 16^4$	$8^{25}+32^{15} = 16^{19}$	$8^8+64^4 = 32^5$
$8^{18}+64^9 = 32^{11}$	$9^3+18^3 = 3^8$	$9^3+18^3 = 9^4$	$16^5+32^4 = 8^7$
$16^6+64^4 = 32^5$	$16^{21}+64^{14} = 32^{17}$	$17^4+34^4 = 17^5$	$19^4+38^3 = 57^3$
$27^3+54^3 = 3^{11}$	$28^3+84^3 = 28^4$	$33^5+66^5 = 33^6$	$34^5+51^4 = 85^4$
$4^{27}+8^{18} = 32^{11}$	$4^{28}+16^{14} = 8^{19}$	$4^{27}+64^9 = 32^{11}$	$8^{28}+16^{21} = 32^{17}$
$8^{25}+32^{15} = 4^{38}$	$8^{28}+64^{14} = 32^{17}$	$16^{20}+32^{16} = 8^{27}$	

Folgende Lösungen der diophantischen Gleichung $a^p + b^q = c^r$ mit ggT(a,b,c) = 1 wurden bisher gefunden.

$a^3 + b^2 = c^7$ $1414^3 + 2\,213\,459^3 = 65^7$ $9\,262^3 + 15\,312\,283^2 = 113^7$
$a^3 + b^2 = c^9$ $7^3 + 13^2 = 2^9$
$a^3 + b^3 = c^2$
allgemeine Lösung 1: $a = s^4 + 6s^2t^2 - 3t^4$; $b = -s^4 + 6s^2t^2 + 3t^4$; $c = 6st\,(s^4 + 3t^4)$
allgemeine Lösung 2: $a = s^4 + 8st^3$; $b = -4s^3t + 4t^4$; $c = s^6 - 20s^3t^3 - 8t^6$

$a^4 + b^2 = c^3$
allgemeine Lösung 1:
$a = (s^2 + 3t^2)\,(s^4 - 18s^2t^2 + 9t^4)$; $b = 4st(s^2 - 3t^2)\,(s^4 + 6s^2t^2 + 81t^4)\,(3s^4 + 2s^2t^2 + 3t^4)$
$c = (s^4 - 2s^2t^2 + 9t^4)\,(s^4 + 30s^2t^2 + 9t^4)$
allgemeine Lösung 2:
$a = 6st\,(s^4 - 12t^4)$; $b = (s^4 + 12t^4)\,(s^8 - 408s^4t^4 + 144t^8)$; $c = s^8 + 168s^4t^4 + 144t^8$
allgemeine Lösung 3:
$a = 6st\,(3s^4 - 4t^4)$; $b = (3s_4 + 4t^4)\,(9s^8 - 408s^4t^4 + 16t^8)$; $c = 9s^8 + 168s^4t^4 + 16t^8$
allgemeine Lösung 4:
$a = 3/2\,st(s^4 - 3t^4)$; $b = 1/8\,(s^4 + 3t^4)\,(s^8 - 102s^4t^4 + 9t^8)$; $c = 1/4\,(s^8 + 42s^4t^4 + 9t^8)$
Für a und b kleiner 1 Billion existieren 55 Lösungen. Die kleinsten sind
$3^4 + 46^2 = 13^3$ $6^4 + 2\,681^2 = 193^3$ $66^4 + 3\,419^2 = 313^3$
$329^4 + 57\,112^2 = 2\,465^3$ $437^4 + 72\,321\,392^2 = 173\,585^3$

Lösungen von $a^4 + b^2 = c^3$ für a,b < 1 Billion

$3^4 + 46^2 = 13^3$	$6^4 + 2\,681^2 = 193^3$
$66^4 + 3\,419^2 = 313^3$	$329^4 + 57\,112^2 = 2\,465^3$
$437^4 + 72\,321\,392^2 = 173\,585^3$	$732^4 + 162\,341^2 = 6\,793^3$
$949^4 + 6\,858\,632^2 = 36\,305^3$	$1\,089^4 + 1\,549\,034^2 = 15\,613^3$
$2\,292^4 + 5\,855\,041^2 = 39\,553^3$	$3\,007^4 + 1\,361\,154\,168^2 = 1\,228\,225^3$
$4\,302^4 + 6\,426\,199^2 = 72\,673^3$	$4\,665^4 + 25\,660\,394^2 = 104\,221^3$
$6\,444^4 + 142\,946\,261^2 = 280\,873^3$	$8\,595^4 + 511\,477\,246^2 = 643\,981^3$
$14\,055^4 + 809\,464\,922^2 = 885\,469^3$	$17\,478^4 + 887\,120\,101^2 = 958\,393^3$
$18\,390^4 + 86\,484\,853^2 = 495\,769^3$	$24\,504^4 + 969\,628\,699^2 = 1\,091\,593^3$
$25\,179^4 + 1\,658\,732\,354^2 = 1\,466\,413^3$	$25\,980^4 + 2\,984\,101\,487^2 = 2\,107\,489^3$
$27\,615^4 + 76\,852\,186\,678^2 = 18\,076\,669^3$	$31\,230^4 + 30\,853\,386\,827^2 = 9\,840\,409^3$
$38\,147^4 + 2\,783\,083\,160^2 = 2\,144\,561^3$	$56\,130^4 + 6\,126\,744\,439^2 = 3\,620\,641^3$
$56\,232^4 + 9\,315\,824\,021^2 = 4\,591\,273^3$	$59\,963^4 + 77\,170\,270\,408^2 = 18\,139\,025^3$
$67\,977^4 + 4\,631\,366\,566^2 = 3\,498\,013^3$	$69\,101^4 + 5\,268\,182\,832^2 = 3\,697\,585^3$
$73\,704^4 + 28\,679\,500\,801^2 = 9\,480\,193^3$	$74\,910^4 + 15\,005\,507\,527^2 = 6\,355\,009^3$
$75\,621^4 + 46\,500\,296\,354^2 = 12\,996\,013^3$	$98\,833^4 + 12\,580\,132\,048^2 = 6\,330\,305^3$
$100\,338^4 + 11\,547\,018\,181^2 = 6\,168\,313^3$	$102\,120^4 + 176\,015\,101\,301^2 = 31\,444\,201^3$
$108\,660^4 + 1\,086\,380\,981^2 = 5\,199\,721^3$	$120\,029^4 + 865\,867\,399\,760^2 = 90\,853\,361^3$
$180\,054^4 + 245\,010\,210\,299^2 = 39\,382\,393^3$	$185\,556^4 + 25\,598\,259\,359^2 = 12\,255\,553^3$
$197\,851^4 + 110\,567\,251\,168^2 = 23\,961\,425^3$	$203\,130^4 + 39\,350\,943\,593^2 = 14\,814\,049^3$
$224\,970^4 + 420\,018\,502\,501^2 = 56\,355\,001^3$	$241\,527^4 + 389\,650\,312\,394^2 = 53\,743\,453^3$
$265\,707^4 + 951\,601\,494\,914^2 = 96\,924\,013^3$	$293\,640^4 + 205\,006\,750\,127^2 = 36\,707\,809^3$
$302\,358^4 + 366\,862\,367\,719^2 = 52\,286\,593^3$	$303\,439^4 + 308\,948\,386\,120^2 = 47\,015\,681^3$
$311\,783^4 + 150\,528\,786\,320^2 = 31\,783\,841^3$	$345\,345^4 + 98\,622\,932\,806^2 = 28\,825\,021^3$
$403\,242^4 + 876\,708\,083\,719^2 = 92\,640\,193^3$	$504\,413^4 + 685\,920\,251\,808^2 = 81\,191\,665^3$
$599\,676^4 + 263\,164\,064\,059^2 = 58\,341\,193^3$	$712\,701^4 + 173\,871\,144\,674^2 = 66\,056\,653^3$
$912\,479^4 + 29\,744\,433\,488^2 = 88\,541\,825^3$	$1\,179\,486^4 + 127\,495\,184\,599^2 = 124\,968\,673^3$
$1\,286\,415^4 + 77\,304\,016\,486^2 = 140\,009\,341^3$	

Folgende Lösungen der diophantischen Gleichung $a^p + b^q = c^r$ mit ggT(a,b,c) = 1 wurden bisher gefunden.

Allgemeine Lösungen für $a^4 + b^3 = c^2$
1: $a = 6st\,(s^4 + 12t^4)$; $b = (s^4 - 12s^2t^2 - 12t^8)\,(s^4 + 12s^2t^2 - 12t^4)$; $c = (s^4 - 12t^4)\,(s^8 + 408s^4t^4 + 144t^8)$
2: $a = 6st\,(3s^4 + 4t^4)$; $b = (3s^4 - 12s^2t^2 - 4t^8)\,(3s^4 + 12s^2t^2 - 4t^4)$; $c = (3s^4 - 4t^4)\,(9s^8 + 408s^4t^4 + 16t^8)$
3: $a = -s^6 + 40s^3t^3 + 32t^6$; $b = 8st\,(s^3 - 2t^3)\,(s^3 + 16t^3)$; $c = (s^6 + 32t^6)\,(s^6 + 176s^3t^3 - 32t^6)$
4: $a = -(s^2 - 3t^2)\,(s^4 + 18s^2t^2 + 9t^2)$; $b = -(s^2 - 2st + 3t^2)\,(s^2 + 2st + 3t^2)\,(s^2 + 6st + 3t^2)\,(s^2 - 6st + 3t^2)$;
$c = 4st\,(s^2 + 3t^2)\,(s^4 - 6s^2t^2 + 81t^4)\,(3s^4 - 2s^2t^2 + 3t^4)$
5: $a = -s^6 + 6s^5t + 15s^4t^2 + 20s^3t^3 - 15s^2t^4 + 30st^5 + 17t^6$; $b = 2\,(s^4 + 6s^2t^2 + 8st^3 - 3t^4)\,(s^4 + 4s^3t - 6s^2t^2 - 4st^3 - 7t^4)$; $c = 3s^{12} + 12s^{11}t + 66s^{10}t^2 - 44s^9t^3 - 99s^8t^4 + 792s^7t^5 + 924s^6t^6 + 2376s^5t^7 + 1485s^4t^8 - 1188s^3t^9 - 2046s^2t^{10} - 156st^{11} - 397t^{12}$

6: $a = -5s^6 - 6s^5t + 15s^4t^2 + 60s^3t^3 + 45s^2t^4 + 18st^5 + 9t^6$; $b = 2(s^4 + 8s^2t^2 + 6st^3 - 3t^4)(3s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 - 3t^4)$; $c = 29s^{12} + 156s^{11}t + 726s^{10}t^2 + 2420s^9t^3 + 4059s^8t^4 + 3960s^7t^5 + 2772s^6t^6 + 2376s^5t^7 + 3267s^4t^8 + 3564s^3t^9 + 1782s^2t^{10} + 324st^{11} - 27t^{12}$
7: $a = -(s^2 - 2st - 2t^2)(7s^4 + 20s^3t + 24s^2t^2 + 8st^3 + 4t^4)$; $b = (s^2 + 2t^2)(s^2 + 4st - 2t^2)(3s^2 + 4st + 2t^2)(5s^2 + 8st + 2t^2)$; $c = 4st(s + 2t)(s^2 + st + t^2)(s^4 + 4s^3t + 16s^2t^2 + 24st^3 + 12t^4)(19s^4 - 4s^3t + 8st^3 + 4t^4)$

$a^5 + b^2 = c^4$: $2^5 + 7^2 = 3^4$
$a^5 + b^4 = c^2$: $3^5 + 11^4 = 122^2$
$a^7 + b^3 = c^2$: $2^7 + 17^3 = 71^2$; $17^7 + 76\,271^3 = 21\,063\,928^2$
$a^8 + b^2 = c^3$: $33^8 + 1\,549\,034^2 = 15\,613^3$
$a^8 + b^3 = c^2$: $43^8 + 96\,222^3 = 30\,042\,907^2$
1999 bewies Nils Bruin, dass es für die Exponenten (2, 3, 8) keine weiteren ganzzahligen Lösungen gibt.

Fermat-Catalan-Vermutung

Ausgehend von der diophantischen Gleichung $x^p + y^q = z^r$
für positive Werte von p, q und r findet man ganzzahlige Lösungen x, y, z.
Die Fermat-Catalan-Vermutung sagt nun aus, dass es für $x^p + y^q = z^r$
nur eine endliche Anzahl von Lösungen gibt, wenn x, y, z zueinander teilerfremd sind und außerdem
$1/p + 1/q + 1/r \leq 1$ gilt.
Heute (2015) kennt man nur 10 entsprechende Lösungen:

$1 + 2^3 = 3^2$ (Catalan)	$25 + 7^2 = 3^4$
$7^3 + 13^2 = 2^9$	$2^7 + 17^3 = 71^2$
$3^5 + 11^4 = 122^2$	$17^7 + 76271^3 = 21063928^2$
$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$	$9262^3 + 15312283^2 = 113^7$
$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$	$33^8 + 1549034^2 = 15613^3$

Die letzten fünf Beziehungen wurden von F.Beukers und D.Zagier gefunden.
Auch für Gaußsche ganze Zahlen kennt man eine ähnliche Beziehung. Zum Beispiel ist
$(8 + 5i)^2 + (5 + 3i)^3 = (1 + 2i)^7$ $(20 + 9i)^2 + (1 + 8i)^3 = (1 + i)^{15}$

Taxicab-Zahlen

Unter der n.ten Taxicab-Zahl Ta(n) oder Taxicab(n) versteht man die kleinste natürliche Zahl, die auf n verschiedene Arten als Summe von zwei Kuben dargestellt werden kann.
G.H.Hardy und E.M.Wright bewiesen 1954, dass für alle positive Zahlen n die Taxicab-Zahlen existieren.
Da der Beweis keinen Hinweis auf die Konstruktion der Zahlen gibt, kennt man bis jetzt (2010) nur sechs Taxicab-Zahlen:

Ta(1) = $2 = 1^3 + 1^3$
Ta(2) = $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$
Ta(3) = $87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$
Ta(4) = $6963472309248 = 2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3 = 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3$
Ta(5) = $48988659276962496 = 38787^3 + 365757^3 = 107839^3 + 362753^3 = 205292^3 + 342952^3 = 221424^3 + 336588^3 = 231518^3 + 331954^3$
Ta(6) = $24153319581254312065344 = 28906206^3 + 582162^3 = 28894803^3 + 3064173^3 = 28657487^3 + 8519281^3 = 27093208^3 + 16218068^3 = 26590452^3 + 17492496^3 = 26224366^3 + 18289922^3$
(Rathbun, Hollerbach 2008)

Ta(2) ist die Hardy-Ramanujan-Zahl, die erstmals 1657 von Bernard Frénicle de Bessy veröffentlicht wurde.
Die Taxicab-Zahlen ab n = 3 wurden mit Computereinsatz gefunden: Ta(3) 1957 von John Leech, Ta(4) 1991 von Rosenstiel und Dardis, Ta(5) 1997 von David W.Wilson.
Ta(7) ist noch nicht bekannt. Nach dem französischen Mathematiker Christian Boyer ist

Ta(7) ≤ 24885189317885898975235988544
Ta(8) ≤ 50974398750539071400590819921724352
Ta(9) ≤ 136897813798023990395783317207361432493888
Ta(10) ≤ 733534531524185560257278223344463253567427544710 4
Ta(11) ≤ 87039729655193781808322993393446581825405320183232000
Ta(12) ≤ 161191486540343020344287601155125528279922874606932837760 00

Abbildung: Taxi-Cab 1729

Cabtaxi-Zahlen

In Erweiterung der Taxicab-Zahlen werden die Cabtaxi-Zahlen betrachtet.

Unter der n.ten Cabtaxicab-Zahl Ca(n) versteht man die kleinste natürliche Zahl, die auf n verschiedene Arten als Summe oder Differenz(!) von zwei Kuben dargestellt werden kann.
Die kleinste Cabtaxi-Zahl Ca(2) wurde 1591 von François Viète angegeben. Weitere bekannte sind

Cabtaxi(2) = 91 = $3^3 + 4^3 = 6^3 - 5^3$; Viète 1591
Cabtaxi(3) = 728 ; Edward B. Escott 1902
Cabtaxi(4) = 2741256 ; Randall L. Rathbun 1992
Cabtaxi(5) = 6017193
Cabtaxi(6) = 1412774811
Cabtaxi(7) = 11302198488
Cabtaxi(8) = 137513849003496 ; Daniel. J. Bernstein 1998
Cabtaxi(9) = 424910390480793000 ; Duncan Moore 2005
Cabtaxi(10) = 933528127886302221000 ; Christian Boyer 2006
Cabtaxi(11) ≤ 2618583980985453722492 16 ; Duncan Moore 2008
Cabtaxi(12) ≤ 1796086752557922708257372544
Cabtaxi(13) ≤ 3081104581443847146898097955 84 ; Boyer 2008
Cabtaxi(14) ≤ 3424462108508996825708504669331456 ; Moore 2008
Cabtaxi(15) ≤ 11986020609595410855448573724870092 8 ; Boyer 2008
Cabtaxi(16) ≤ 8221211536121492305752176717888396651 52
Cabtaxi(17) ≤ 22852834558749240626858781429606715814 7072
Cabtaxi(18) ≤ 15674759223846104145962438182567246377307 66848
Cabtaxi(19) ≤ 22388474568951577754900099772066812785435844544000
Cabtaxi(20) ≤ 39018608357622471035102368211296652737589928960 00000
Cabtaxi(21) ≤ 14947253794262142997193628651715795354642768352 00448000
Cabtaxi(22) ≤ 28041601720028160342105513781309636374026672049410 47872000

Catalansche Gleichung

Die in der Struktur der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ähnliche Gleichung

$$x^m - y^n = 1$$

wird als Catalansche Gleichung bezeichnet.
1844 stellte der französische Mathematiker Eugène Charles Catalan im Journal für Reine und Angewandte Mathematik die Behauptung auf, dass diese Gleichung nur die nichttriviale Lösungen

$x = 3$; $y = 2$; $m = 2$ und $n = 3$

im Bereich der natürlichen Zahlen ($x,y,m,n > 1$) besitzt.
Im April 2002 gelang es dem rumänischen Mathematiker Dr. Preda Mihailescu diese Vermutung zu beweisen.
Dr.Mihailescu promovierte an der ETH Zürich und ist seit dem Jahr 2000 in Paderborn tätig.
siehe auch: http://www-math.uni-paderborn.de/~aggathen/vorl/2002ss/osem/mihailescu01.php

Bachet-Gleichung

Die Bachet-Gleichung; Claude Gaspar Bachet de Meziriac (1581-1638); wurde 1650 von Pierre de Fermat aufgestellt. Sie ist mit dem großen Satz von Fermat verbunden. $y^2 - x^3 = c$
Gesucht werden ganzzahlige oder rationale Lösungen für x und y in Abhängigkeit von dem ganzzahligen c. Ist c = -2, so gibt es nur zwei ganzzahlige Lösungen: y = 5 und x = 3 oder y = -5 und x = 3. Dies ist der Grund, weshalb 26 die einzige Zahl ist, die sich zwischen einer Quadratzahl und einer Kubikzahl befindet.

Fermat stellte die Aufgabe, zu beweisen, dass $y^2 - x^3 = -2$ nur diese beiden Lösungen besitzt. Leonhard Euler versuchte sich 1730 an dem Problem, ohne Erfolg. Erst 1908 konnte Axel Thue nachweisen, dass

$$y^2 - x^3 = c$$

für jede natürliche Zahl c, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von Lösungen für x und y besitzen kann. Für c = 17 existieren zum Beispiel genau 8 verschiedene Lösungen mit y > 0.
Die Tabelle enthält alle Lösungen für $1 \le c \le 101$ und $1 \le y \le 150$ Millionen (Januar 2014).

Betrachtet man den Lösungsbereich der rationalen Zahlen, so folgen aus der Existenz einer Lösung automatisch unendlich viele Lösungen. Der Nachweis wurde von Bachet geführt.
Angenommen, (x,y) ist eine Lösung der Gleichung, dann ist auch

$$((x^4 - 8cx)/(4y^2)\ ,\ (8c^2 - 20cx^3 - x^6)/(8y^3))$$

eine Lösung der Gleichung. Diese wird als Bachet-Verdopplungsformel bezeichnet, die Bachet 1621 entdeckte.

Heronische Zahlentripel, Heronische Dreiecke

Heronische Tripel sind Tripel a,b,c ganzer Zahlen, für die ein Dreieck mit a,b,c als Seitenlängen ganzzahligen Flächeninhalt (mindestens eine Höhe hat ganzzahlige Länge !) besitzt.
Beispiel: (a,b,c) = (13,14,15)
Sind u, v, w, x teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist a,b,c ein derartiges Tripel mit

$$a = w\,x\,(u^2 + v^2)/2 \qquad b = u\,v\,(w^2 + x^2)/2 \qquad c = (ux + vw)\,(uw - vx)/2$$

Die kleinsten Heronischen Dreiecke haben die Seitenlängen (3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (4, 13, 15), (13, 14, 15), (9, 10, 17), ...

Heronische Dreiecke mit 2 rationalen Seitenhalbierenden (Buchholz, Rathbun 1997)

a	b	c	s_1	s_2	A
73	51	26	35/2	97/2	420
626	875	291	572	433/2	55440
4368	1241	3673	1657	7975/2	2042040
14791	14384	11257	21177/2		11001 75698280
28779	13816	15155	3589/2	21937	23931600

Zur Klassifizierung möglicher Heron-Dreiecke werden die Seiten des Dreiecks als Terme eines Parameters λ dargestellt. Nach K.R.S. Sastry gilt:
Es sei λ eine rationale Zahl mit $0 < \lambda \leq 2$. Eine λ-Familie von Heronischen Dreiecken wird dann mit

$$(a, b, c) = (2(m^2 + \lambda^2 n^2), (2 + \lambda)(m^2 - 2\lambda n^2), \lambda(m^2 + 4n^2)),$$

wobei m, n relativ prime natürliche Zahlen mit $m > \sqrt{(2\lambda)} \cdot n$ sind, beschrieben. Dieser Satz gibt alle möglichen Heronischen Dreiecke an.
Damit wird $\lambda = 2(s - a) / (s - c)$; $b = (2 + \lambda) / (2 - \lambda) (a - c)$

$$A_{\Delta ABC} = 2\lambda (2 + \lambda) m n (m^2 - 2\lambda n^2)$$

Beispiel 1: $\lambda = 1$, $m = 4$, $n = 1$ $(a, b, c) = (34, 42, 20)$
Da der ggT(a, b, c) = 2 größer als 1 ist, werden die Seiten mit dem ggT dividiert, d.h. (a, b, c) = (17, 21, 10)
Beispiel 2: $\lambda = 3/2$, $m = 5$, $n = 2$

$$(a, b, c) = (68, 91/2 , 123/2), \text{ d.h., } (a, b, c) = (136, 91, 123)$$

Folgerung: Für $\lambda = 2v/u$, $m = 2$, $n = 1$ ergeben sich pythagoreische Dreiecke mit $(a, b, c) = (u^2+v^2, u^2-v^2, 2uv)$.
Für $\lambda = 2$ ergeben sich mit $(a, b, c) = (m^2 + n^2, 2(m^2 - n^2), m^2 + n^2)$
gleichschenklige Heronische Dreiecke.
Hoppe-Problem: Bei Heronischen Dreiecken mit den Seiten

$$(a, b, c) = (m^2 + 9n^2, 2(m^2 + 3n^2), 3(m^2 + n^2))$$

für $\lambda = m^2/(6n^2)$, bilden die Dreiecksseiten eine arithmetische Folge.

Lambda-Familien von Heron-Dreiecken

λ	a	b	c	Umfang	Flächeninhalt
1	$2(m^2+n^2)$	$3(m^2-2n^2)$	m^2+4n^2	$6m^2$	$6mn(m^2-2n^2)$
1/2	$4m^2+n^2$	$5(m^2-n^2)$	m^2+4n^2	$10m^2$	$10mn(m^2-n^2)$
1/3	$2(9m^2+n^2)$	$7(3m^2-2n^2)$	$3(m^2+4n^2)$	$42m^2$	$42mn(3m^2-2n^2)$
2/3	$9m^2+4n^2$	$4(3m^2-4n^2)$	$3(m^2+4n^2)$	$24m^2$	$24mn(3m^2-4n^2)$
1/4	$16m^2+n^2$	$9(2m^2-n^2)$	$2(m^2+4n^2)$	$36m^2$	$36mn(2m^2-n^2)$
3/4	$16m^2+9n^2$	$11(2m^2-3n^2)$	$6(m^2+4n^2)$	$44m^2$	$132mn(2m^2-3n^2)$
1/5	$2(25m^2+n^2)$	$11(5m^2-2n^2)$	$5(m^2+4n^2)$	$110m^2$	$110mn(5m^2-2n^2)$
2/5	$25m^2+4n^2$	$6(5m^2-4n^2)$	$5(m^2+4n^2)$	$60m^2$	$60mn(5m^2-4n^2)$
3/5	$2(25m^2+9n^2)$	$13(5m^2-6n^2)$	$15(m^2+4n^2)$	$130m^2$	$390mn(5m^2-6n^2)$
4/5	$25m^2+16n^2$	$7(5m^2-8n^2)$	$10(m^2+4n^2)$	$70m^2$	$140mn(5m^2-8n^2)$
3/2	$4m^2+9n^2$	$7(m^2-3n^2)$	$3(m^2+4n^2)$	$14m^2$	$42mn(m^2-3n^2)$
4/3	$9m^2+16n^2$	$5(3m^2-8n^2)$	$6(m^2+4n^2)$	$30m^2$	$60mn(3m^2-8n^2)$
5/3	$2(9m^2+25n^2)$	$11(3m^2-10n^2)$	$15(m^2+4n^2)$	$66m^2$	$330mn(3m^2-10n^2)$
5/4	$16m^2+25n^2$	$13(2m^2-5n^2)$	$10(m^2+4n^2)$	$52m^2$	$260mn(2m^2-5n^2)$
7/4	$16m^2+49n^2$	$15(2m^2-7n^2)$	$14(m^2+4n^2)$	$60m^2$	$420mn(2m^2-7n^2)$

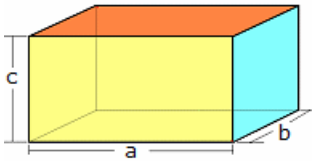
Eulersche Dreiecke

... besondere heronische Dreiecke
(a,b,c) = (136,170,174) ... kleinstes heronische Dreieck, bei welchem alle Seitenhalbierenden ganzzahlige Länge haben (nach Euler); allerdings muss dann der Flächeninhalt nicht mehr ganzzahlig sein. Für dieses Dreieck ergibt sich:

Seiten	a = 136	b = 170	c = 174	
	Seitenhalbierenden	$s_a = 158$	$s_b = 131$	$s_c = 127$

Heron-Tetraeder

... Tetraeder mit rationalen Zahlen für Seitenlängen, Seitenflächeninhalten und Volumen Die kleinsten derartigen Tetraeder haben gleichlange gegenüberliegende Kantenlängen mit den Längen:
(148, 195, 203), (533, 875, 888), (1183, 1479, 1804), (2175, 2296, 2431), (1825, 2748, 2873), (2180, 2639, 3111), (1887, 5215, 5512), (6409, 6625, 8484) und (8619, 10136, 11275)



Euler-Quader

Unter einem Euler-Quader (engl. Euler brick) versteht man einen Quader mit ganzzahligen Kantenlängen. Zusätzlich müssen auch alle Flächendiagonalen ganzzahlig sein. Ein primitiver Euler-Quader liegt vor, wenn die Kantenlängen zusätzlich zueinander relativ prim sind.
Die Kantenlängen a, b, c und die Diagonalenlängen d, e, f müssen damit das Diophantische Gleichungssystem $a^2 + b^2 = d^2$; $b^2 + c^2 = e^2$; $a^2 + c^2 = f^2$ erfüllen.

Der kleinste Euler-Quader hat die Kantenlängen (a, b, c) = (240, 117, 44) mit den Diagonalen der Länge 267, 244, und 125. Dieser Körper wurde 1719 von Paul Halcke entdeckt. Weitere Lösungen sind (275, 252, 240) , (693, 480, 140) , (720, 132, 85) , (792, 231, 160) , (1155, 1100, 1008) , (1584, 1020, 187) , (2340, 880, 429) , (2640, 855, 832) , (2992, 2475, 780) , (3120, 2035, 828) , (5984, 2295, 1560) , (6325, 5796, 528) , (6336, 748, 195) , (6688, 6300, 1155) , (6732, 4576, 1755) , (8160, 4888, 495) , (9120, 1672, 1575) , (9405, 9152, 2964)

Bildet ein Tripel (a, b, c) einen Euler-Quader so auch das Tripel (bc, ac, ab).
Durch Saunderson (1740) wurde eine Parameterlösung angegeben. Ist (a', b', c') ein Pythagoreisches Tripel, so bilden Kanten der Länge

$$a = a' (4 b'^2 - c'^2) \qquad b = b' (4 a'^2 - c'^2) \qquad c = 4 a' b' c'$$

einen Euler-Quader. Für die Flächendiagonalen ergibt sich dann

$$d_1 = c'^3 \qquad d_2 = a' (4 b'^2 + c'^2) \qquad d_3 = b' (4 a'^2 + c'^2)$$

Ein Euler-Quader mit zusätzlich ganzzahliger Raumdiagonale wird vollkommener Quader genannt.

Vollkommener Quader

Ein Euler-Quader mit zusätzlich ganzzahliger Raumdiagonale heißt vollkommener Quader (engl. perfect cuboid).
Sind a, b, c die Kantenlängen, d, e, f die Flächendiagonalenlängen und g die Länge der Raumdiagonale, so muss gelten

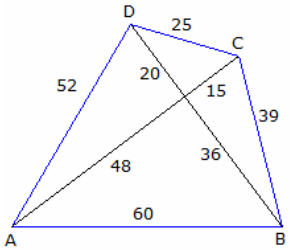
$$a^2 + b^2 = d^2 \;;\; b^2 + c^2 = e^2 \;;\; a^2 + c^2 = f^2 \qquad a^2 + b^2 + c^2 = g^2$$

Bis 2005 wurde weder ein vollkommener Quader gefunden noch konnte bewiesen werden, dass es einen solchen Körper gibt.
Durch intensive Computernutzung konnte gezeigt werden, dass ein solcher Quader als kleinste Seitenlänge mindestens einen Wert von 21 Milliarden besitzen muss.
Bis jetzt weiß man

1) 2 Kanten müssen gerade sein, 1 Kante ungerade
2) 1 Kante ist durch 4 teilbar, 1 Kante durch 16
3) 1 Kante muss 3 teibar sein, eine Kante durch 9
4) 1 Kante ist durch 5 teilbar
5) 1 Kante ist durch 11 teilbar

Fastvollkommene Quader, mit einer ganzzahligen Raumdiagonale und zwei statt drei ganzzahligen Flächendiagonalen, wurden gefunden. Eine Lösung ist (a,b,c) = (672,153,104). Diese Lösung war schon Euler bekannt.

Unter http://www.durangobill.com/IntegerBrick.html findet man den aktuellen Stand der Suche nach vollkommenen Quadern.



Heron-Viereck

Ausgehend von Heron-Dreiecken konstruierte der indische Mathemtiker Bhaskara II (geb. 1114) Heronische Vierecke. Bei diesen sind außer den Viereckseiten auch die Diagonalenabschnitte ganzzahlig.
Zur Konstruktion verwendet man zwei Pythagoreische Tripel, z.B. (3; 4; 5) und (5; 12; 13).
Multipliziert man die Katheten des ersten Dreiecks mit der Hypotenuse des zweiten, so ergeben sich zwei gegenüberliegende Viereckseiten. Analog multipliziert man die Katheten des zweiten Dreiecks mit der Hypotenuse des ersten für die anderen Viereckseiten.
Das entstehende Viereck (Abbildung) ist ein Heron-Viereck. Bei diesem sind die Diagonalenabschnitte ganzzahlig. Außerdem schneiden sich die Diagonalen senkrecht. Das Viereck hat auch einen Umkreis, ist also Sehnenviereck.

Palindrom-Zahlen

… sind Zahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Der Begriff Palindrom kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Zurücklaufen" (palín = zurück + drom-, drameîn = laufen). Die ersten Palindrom-Zahlen sind außer den einstelligen 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, ... Die Anzahl der Palindrome mit 1, 2, 3, ... Ziffern ist 9,

9, 90, 90, 900, 900, 9000, 9000, ... Die Anzahl der Palindrome unter 10^1, 10^2, 10^3, ... ergibt sich zu 9, 18, 108, 198, 1098, 1998, ... und allgemein $9 \cdot 10^{(n-1)/2}$ für ungerades n, $9 \cdot 10^{n/2-1}$ für gerades n.
Die Summe der Reziproken aller Palindrome konvergiert. Für diese Summe wird für alle palindromischen Zahlen mit mehr als einem ungeraden n als Stellenzahl:

$$\text{Summe} \le 9 \cdot 10^{(n-1)/2} / 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{(n+1)/2} / 10^{n+1} \ldots = 1/10^{(n-3)/2}$$

und allgemein

$$\text{Summe} < 1/3 \cdot 1/10^{(n-3)/2} \text{ für ungeradzahlige Palindrome}$$

$$\text{Summe} < 1/3 \cdot 1/10^{n/2-1} \text{ für geradzahlige Palindrome}$$

Eine Computerberechung aller 1999999998 Palindromreziproken bis 18 Ziffern ergab die Näherungssumme 3.37028325668...
Man kennt im Übrigen nur eine 3. bzw. 4.Potenz einer natürlichen Zahl, die palindromisch ist (Gardner, 1982): $10662526601 = 2\ 201^3$.
Palindrom-Zahlen können auch in anderen Positionssystemen betrachtet werden. Ulrich Schimke zeigt, dass die Zahl $P(a, a+1) = 2a^2 + 3a + 2$ für alle $a > 3$ in den Positionssystemen zu den Basen a und a+1 palindromisch ist. Ergänzend wird für P(2,3) = 6643 und P(3,4) = 10. Ebenso ist $P(a,a+2)=(3a^2+6a+2)/2$ für alle geraden $a \ge 8$, und $(a^2+4a+3)/2$ für alle ungeraden $a \ge 5$. Die vollständige Folge ab a = 2 ist P(a,a+2): 5, 26, 21, 24, 154, 40, 121, 60, 181, 84, 253, 112, … Die kleinsten Palindromzahlen zu zwei verschiedenen Basen sind

a\b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	6643																	
4	5	10																
5	31	26	46															
6	7	28	21	67														
7	85	8	85	24	92													
8	9	121	63	18	154	121												
9	127	10	10	109	80	40	154											
10	33	121	55	88	55	121	121	191										
11	255	244	255	12	166	24	36	60	232									
12	65	13	65	26	104	78	65	91	181	277								
13	313	28	42	98	14	235	154	70	222	84	326							
14	15	1210	15	408	135	135	45	30	323	60	253	379						
15	693	16	1265	1612	80	16	316	80	828	48	241	112	436					
16	17	68	17	119	385	85	170	136	353	221	1172	170	337	497				
17	341	784	341	18	1211	307	18	528	252	36	290	126	90	144	562			
18	325	1733	38	57	209	57	325	209	171	133	1462	209	323	361	433	631		
19	381	20	514	428	80	40	260	20	666	60	362	140	60	80	514	180	704	
20	21	1604	21	126	21	1944	63	273	252	84	761	42	105	421	273	126	541	781

Palindrom-Primzahlen

2
30203
133020331
1713302033171
12171330203317121
1512171330203317121 51
181512171330203317121 5181
16181512171330203317121 518161
3316181512171330203317121 5181613 3
933316181512171330203317121 5181613339
11933316181512171330203317121 5181613339 11

Palindrom-Primzahlen, auch umkehrbare Primzahlen genannt, sind Primzahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden.
Die ersten derartigen Zahlen sind
2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, …
Die Anzahl der palindromischen Primzahlen mit 1, 2, 3, … Ziffern ist 4, 1, 15, 0, 93, 0, 668, 0, 5172, 0, 42042, 0, … Die Anzahl der Palindrom-Primzahlen unter 101, 102, 103, … wird 4, 5, 20, 20, 113, 113, 781, 781, 5953, 5953, 47995, 47995, …
Da jede Palindrom-Zahl mit einer geraden Anzahl von Ziffern durch 11 teilbar ist, existiert nur eine Palindrom-Primzahl mit gerader Stellenzahl, die 11.
Für die Summe aller palindromischen Primzahlen mit mehr als einem ungeraden n als Stellenzahl wird Summe $< 1/5 \cdot 1/10^{(n-3)/2}$.
Die ersten 47995 Zahlen bis 11 Ziffern ergaben ein Computerergebnis von 1,32398202…
2001 fand Harvey Dubner die bisher größte Palindrom-Primzahl mit 39027 Ziffern:

$$P = 10^{39026} + 4538354 \cdot 10^{19510} + 1.$$

Durch G.L.Honaker wurde auch eine Pyramide angegeben, die nur aus Palindrom-Primzahlen besteht. (siehe Abbildung)

Palindrom-Palindromdreieckszahlen

Eine Dreieckszahl D ist von der Struktur $D = n(n+1)/2$.
Palindromzahlen n, deren Dreieckszahl ebenfalls eine Palindromzahl ist, sind selten.
Durch Hans-Jürgen Caspar wurden 8 derartige Zahlen auf „Matroids Matheplanet" angegeben. Weitere konnten durch massiven Computereinsatz ermittelt werden (Stand 25. April 2016, gesucht bis 61270011007216):

Palindrom	Palindrom-Dreieckszahl
11	66
77	3003
363	66066

1111	617716
2662	3544453
111111	6172882716
246642	30416261403
11111111	61728399382716
363474363	66056806460865066
2664444662	3549632679762369453
26644444662	35496321568651236945 3
246644446642	30416741529792514761403
266444444662	35496321045754012369453
2466444446642	30416741041868140147614 03

Erzeugung von Palindrom-Zahlen

Im Juni 1999 wurde durch Erich Friedman die Frage aufgeworfen, welche größte Palindrom-Zahl durch Verwendung von Ziffern und den Operationszeichen +, -, ×, / sowie die Klammern (,) erzeugt werden kann. Durch intensiven Computereinsatz ergaben sich bisher (wobei nur bis 10^9 die Suche kontinuierlich durchgeführt wurde)

n	Berechnung	Palindrom	n	Berechnung	Palindrom
1	9	9	2	9+2	11
3	7×7×7	343	4	9×(9×9+2)	747
5	9×9×9×9-5	6556	6	3×7×7×8×8×8	65856
7	8×8×8×8×9×(9+2)	405504	8	8×9×9×9×9×9×9-4	4251524
9	8×8×(5×6×8×8×8×9+2)	8847488	10	7×7×7×8×(7×8×8×8×9-4)	88499488
11	7×7×7×7×8×8×9×(6×7×8+3)	468828864			
12	7×8×8×8×8×9×(4×7×7×9×9-3)		4095995904		
13	7×7×7×7×7×8×(7×7×7×8×8×8+6)		23613431632		

Friedman-Zahlen

Eine Friedman-Zahl ist eine natürliche Zahl, welche mit Hilfe der Zeichen +, -, *, /, ^, (und) auf nichttriviale Weise durch die eigenen Ziffern erzeugt werden kann. Zum Beispiel ist $25 = 5^2$ und 126 = 21 * 6. Die Friedman-Zahlen bis 10000 sind:

$25 = 5^2$	$121 = 11^2$	$125 = 5^{1+2}$	126 = 6 * 21	$127 = - 1 + 2^7$	$128 = 2^{8-1}$
153 = 3 * 51	$216 = 6^{2+1}$	$289 = (8 + 9)^2$	$343 = (3 + 4)^3$	$347 = 7^3 + 4$	$625 = 5^{6-2}$
688 = 8 * 86	$736 = 7 + 3^6$	$1022 = 2^{10} - 2$	$1024 = (4 - 2)^{10}$	1206 = 6 * 201	1255 = 5 * 251
1260 = 6 * 210	$1285 = (1 + 2^8) * 5$	$1296 = 6^{(9-1)/2}$	1395 = 15 * 93	1435 = 35 * 41	1503 = 3 * 501
1530 = 3 * 510	$1792 = 7 * 2^{9-1}$	1827 = 21 * 87	$2048 = 8^4 / 2 + 0$	$2187 = (2 + 1^8)^7$	$2349 = 29 * 3^4$
$2500 = 50^2 + 0$	$2501 = 50^2 + 1$	$2502 = 2 + 50^2$	$2503 = 50^2 + 3$	$2504 = 50^2 + 4$	$2505 = 50^2 + 5$
$2506 = 50^2 + 6$	$2507 = 50^2 + 7$	$2508 = 50^2 + 8$	$2509 = 50^2 + 9$	$2592 = 2^5 * 9^2$	$2737 = (2 * 7)^3 - 7$
$2916 = (1 * 6 * 9)^2$	$3125 = (3 + 1 * 2)^5$	3159 = 9 * 351	$3281 = (3^8 + 1) / 2$	$3375 = (3+5+7)^3$	$3378 = (7 + 8)^3 + 3$
$3685 = (3^6 + 8)*5$	3784 = 8 * 473	$3864 = 3*(- 8 + 6^4)$	$3972 = 3 + (9 * 7)^2$	$4088 = 8^4 - 8 - 0$	$4096 = (4 + 0 * 9)^6$
$4106 = 4^6 + 10$	$4167 = 4^6 + 71$	$4536 = 56 * 3^4$	$4624 = (64 + 4)^2$	$4628 = 68^2 + 4$	$5120 = 5 * 2^{10}$
$5776 = 76^{7-5}$	$5832 = (2 * 5 + 8)^3$	$6144 = 6 * 4^{4+1}$	$6145 = 6 * 4^5 + 1$	$6455 = (6^4 - 5) * 5$	6880 = 8 * 860
$7928 = 89^2 - 7$	$8092 = 90^2 - 8$	$8192 = 8 * 2^{9+1}$	$9025 = 95^2 + 0$	$9216 = 1 * 96^2$	$9261 = 21^{9-6}$

Durch Mike Reid und Philippe Fondanaiche wurden die Friedman-Zahlen $123456789 = ((86 + 2 * 7)^5 - 91) / 3^4$ und $987654321 = (8 * (97 + 6/2)^5 + 1) / 3^4$ gefunden. Die kleinste derartige Zahl mit nur 1 Ziffer ist $99999999 = (9 + 9/9)^{9-9/9} - 9/9$. Besteht eine Zahl aus mindestens 24 gleichen Ziffern oder mehr, so ist sie stets Friedman-Zahl

$$aaa...a = (a*a / (aa-a-a)) (((aa-a)/a)^{A + (a+a+...+a)/a} - a/a) \text{ mit } A = ((a+a+a+a+a)/a)^{(a+a)/a} - a/a$$

Friedman Zahlen zu anderen Basen:

2:	$11001 = 101^{10}$	$11011 = 11^{0+11}$	$111111 = (11 + 1)^{11} - 1$	
	$1001111 = 11^{100} - 1 - 1$			
3:	$121 = 11^2$	$221 = 12^2$	$1022 = 20^2 - 1$	1122 = 2 * 211
4:	$121 = 11^2$	$123 = (1 + 2)^3$	1203 = 3 * 201	1230 = 3 * 210
5:	$121 = 11^2$	$224 = 2^{2+4}$	1232 = 22 * 31	$1241 = 24^{1+1}$
6:	$24 = 2^4$	$52 = 2^5$	$121 = 11^2$	124 = 4 * 21
7:	$121 = 11^2$	$143 = 3^4 - 1$	$144 = (-1 + 4)^4$	$264 = 4 * 6^2$
8:	$33 = 3^3$	$121 = 11^2$	125 = 5 * 21	143 = 3 * 41
9:	$121 = 11^2$	134 = 4 * 31	$314 = (3 + 1)^4$	$628 = 8 * 2^6$

Römische Friedman-Zahlen

VIII = IV * II XVIII = IV * II + X XXVII = IX * (X/V - 1) XXVIII = IV * II + XX

XXXIII = XI * (X/X + II) XXXVI = $VI^{XX/X}$ XXXVII = IX * (X/V - 1) + X
XXXVIII = IV * II + XXX
XLIV = L - V - I^{X} XLVI = L - V + I^{X} XLVII = L - X/V - II XLVIII = IV * II + XL
XLIX = L - I^{XX} LVIII = IV * II + L LXVIII = IV * II + LX LXXV = L * XV / X
LXXVI = L * XV / X + I LXXVII = L * XV / X + II
LXXVIII = IV * II + LXX LXXXI = $IX^{X*X/L}$
LXXXII = $IX^{X*X/L}$ + I LXXXIII = $IX^{X*X/L}$ + II LXXXV = L * XV / X + X
LXXXVI = L * XV / X + XI LXXXVII = L * XV / X + XII
LXXXVIII = IV * II + LXXX LXXXIX = X * (X - I^{L}) - X/X
XCIV = C - V - I^{X} XCVI = C - V + I^{X}
XCVII = C - X/V + I*I XCVIII = IV * II + XC XCIX = C - I^{XX}

"Coole" Zahlen

Auf der US-amerikanischen Internetseite http://www.coolnumbers.com werden sogenannte „Cool Numbers" auf Geldscheinen gesucht, insbesondere Nummern, die eine aufsteigende oder absteigende Zahlenfolge bilden oder Palindrom-Zahlen. Ob dies auch für Euro-Scheine möglich ist, bleibt ein Rätsel.

Geldscheinnummer: 444444444

Geldscheinnummer: 66666666

Geldscheinnummer: 01234567

Geldscheinnummer: 23456789

Undulierende Zahlen

Eine Zahl heißt undulierend, wenn ihre Ziffern abwechselnd steigen und fallen, z.B. 153729. Glatt undulierend ist eine ganze Zahl, wenn sie auf genau zwei Ziffern zusammengesetzt ist, die sich in der Folge gegenseitig abwechseln, z.B. 1313131. Zweifach glatt undulierend ist eine Zahl, wenn sie in zwei verschiedenen Positionssystemen glatt undulierend ist. Die kleinste derartige Zahl ist

10 $[1010]_2$ $[101]_3$

welche im Zweier- und Dreiersystem glatt undulierend ist. Der Begriff wurde von Clifford Pickover geprägt. Derartige Zahlen sind sehr selten und nehmen mit wachsenden Stellenzahl sehr schnell ab. Die Tabelle enthält die kleinsten zweifach undulierenden Zahlen zu verschiedenen Basen:

Basen	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	10				85	170				1365	170			
3		273	182		50	455		151	820			1913	1913	
4			46	55	221		136		221		614		2184	
5				67	78	130	109	494	598	338		520	286	2473
6					92	154	154	141	166	555	209	197	888	481
7						121	100	121	221	350	235	450	271	257
8							154	121	9882	398	170	520	316	
9								191	255	145	209	309	346	337
10									232	181	313	323	828	353
11										277	510	576	421	321
12											326	253	1039	1172
13												379	693	353
14													436	337
15														497

Erstaunlich ist, dass mit 9882 = $[23232]_8$ = $[7474]_{11}$ die größte Zahl in der Tabelle auftritt und trotz Suche bis 22 Millionen keine weitere Lücke der Tabelle gefunden wurde. Es ist zu vermuten, dass

zweifach glatt undulierende Zahlen der entsprechenden Basenkombinationen nicht existieren. Dies wird noch bekräftigt durch die Tatsache, dass die größte nicht triviale Zahl

$[959595]_{10} = [5A5A5A]_{11}$

ist. Darüber hinaus gilt, dass die abwechselnde Ziffernfolge 2525... im Achtersystem stets eine entsprechende glatt undulierende Zahl im Zweiersystem erzeugt, zum Beispiel:

$[10101010101010101010101]_2 = [5252525]_8 = 1398101$

$[10101010101010101010101]_2 = [25252525]_8 = 5592405$

$[10101010101010101010101010]_2 = [52525252]_8 = 11184810$ usw.

Die kleinste dreifach glatt undulierende Zahl ist $121 = [232]_7 = [171]_8 = [121]_{10}$

Die kleinste vierfach glatt undulierende Zahl ist $300 = [606]_7 = [454]_8 = [363]_9 = [1A1]_{13}$

Die zweite bisher bekannte vierfache Zahl ist 1220. Eine fünffach glatt undulierende Zahl bis zu den Basen 16 kennt man nicht.

Die Tabelle enthält die kleinsten zweifach glatt undulierenden Zahlen zu zwei verschiedenen Basen. Die Erklärung der undulierenden Zahlen befindet sich auf der vorhergehenden Seite.

Basen	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	10				85	170		
3		273	182		50	455		151
4			46	55	221		136	
5				67	78	130	109	494
6					92	154	154	141
7						121	100	121
8							154	121
9								191

Basen	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
2		1365	170			
3	820			1913	1913	
4	221		614		2184	
5	598	338		520	286	2473
6	166	555	209	197	888	481
7	221	350	235	450	271	257
8	9882	398	170	520	316	
9	255	145	209	309	346	337
10	232	181	313	323	828	353
11		277	510	576	421	321
12			326	253	1039	1172
13				379	693	353
14					436	337
15						497

Fastganze Zahlen

... Zahlen, welche relativ nah an einer ganzen Zahl sind.

$e^{\pi} - \pi = 19.999099979 \ldots$

$(\pi + 20)^i = -0.9999999992 - 0.0000388927\, i \approx -1$

$\cos(\ln(\pi + 20)) \approx -0.9999999992$

$\cos(\pi \cos(\pi \cos(\ln(\pi + 20)))) \approx -1 + 3.9321609261 * 10^{-35}$

$e^6 - \pi^4 - \pi^5 = 0.000017673 \ldots$

$163(\pi - e) = 68.999664496311924 \ldots$

$53453 / \ln 53453 = 4910.00000122 \ldots$

$613/37\, e - 35/991 = 44.99999999993962 \ldots$

$3\sqrt{2}(\sqrt{5} - 2) = 1.0015516 \ldots$

$(e^{\pi})^{\sqrt{163}} = 262537412640768743.999999999999250 \ldots$

$1/4\, [\cos(1/10) + \cosh(1/10) + 2\cos(\sqrt{2}/20)\cosh(\sqrt{2}/20)] = 1 + 2.480\ldots * 10^{-13}$

Ramanujan-Zahlen ... fastganze Zahlen der Form $e^{\pi\sqrt{n}}$

n	**Zahlenwert**	**n**	**Zahlenwert**
6	2197 , 99 0869543 ...	17	422150 , 99 7675680 ...
18	614551 , 99 2885619 ...	22	2508951 , 99 8257424 ...
25	6635623 , 999 341134 ...	37	199148647 , 9999 78046551 ...
43	884736743 , 999 777466 ...	58	24591257751 , 999999 822213 ...
67	147197952743 , 99999 8662454 ...	74	545518122089 , 999 174678853 ...
148	39660184000219160 , 000966674 ...	149	45116546012289599 , 99 1830287 ...
163	262537412640768743 , 999999999999 250072 ...		
177	1418556986635586485 , 99 6179355 ...		
232	6047299578253000 84759 , 99999 2171526 ...		
267	19683091854079461001445 , 99 2737040		

268 2166723729202485673576 8 , 0002920388424...
522 1487107026323804366356762787900 7 ,9998...
652 6892589303610927989108563928694376 8 , 0000000001637 ...
719 3842614373539548891490294377805829192 , 99998724 ...

Merkwürdige Gleichungen

(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1)x12345678987654321 = 999999999^2

2 x (123456789+987654321) +2 = 2222222222

6x7x6 = 252

279972=(2+7+9+9+7+2)x7777

Produkte mit Einsen

11x11 = 121

111x111 = 12321

1111x1111 = 1234321 ...

111 111 111 x 111 111 111=12345678987654321

11x111 = 1221

111x1111 = 123321

1 111x11111 = 12344321 ...

111 111 111x1 111 111 111=123456789987654321

Die Quadratzahlen unter den Palindromen

$121=11^2$	$14641=121^2$	$698896=836^2$	$6948496=2636^2$
$484=22^2$	$40804=202^2$	$1002001=1001^2$	$123454321=11111^2$
$676=26^2$	$44944=212^2$	$1234321=1111^2$	
$10201=101^2$	$69696=264^2$	$4008004=2002^2$	
$12321=111^2$	$94249=307^2$	$5221225=2285^2$	

Kubikzahlen unter den Palindromen $343=7^3$ $1331=11^3$ $1030301=101^3$ $1367631=111^3$

Produkte von Nachbarzahlen, die zu Palindromen führen

16x17 = 272 77x78 = 6006 538x539 = 289982 1621x1622 = 2629262 2457x2458 = 6039306

Paare von Quadratzahlen

$12^2 = 144$ und $21^2 = 441$	$102^2=10404$ und $201^2=40401$	$1012^2=1024144$ und $2101^2=4414201$
$13^2 = 169$ und $31^2 = 961$	$103^2=10609$ und $301^2=90601$	$1112^2=1236544$ und $2111^2=4456321$
	$112^2=12544$ und $211^2=44521$	$1212^2=1468944$ und $2121^2=4498641$
	$113^2=12769$ und $311^2=96721$	$2012^2=4048144$ und $2102^2=4418404$

Mathematische Konstanten

0	Null	0.0020538344...	3.Stieltjes Konstante
0.018315639...	e^{-4}, Rényi-Konstante	0.0595536246...	Euler Asymptoten-Konstante
0.0659880358...	e^{-e}, iterierte E-Konstante	0.1076539192...	"One-Ninth" Konstante
0.1475836176...	Plouffe-Konstante	0.1715728753...	Heilbronn Dreieckskonstante
0.2419707245...	TSR-Konstante	0.247...	Abundant Zahlendichte
0.272190...	Cassaigne-Finch Konstante	0.280169499...	Bernstein Konstante
0.3036630029...	Gauß-Kuzmin-Wirsing Konstante	0.3405373296...	Pólya Zufallskonstante
0.3532363719...	Hafner-Sarnak-McCurley Konstante	0.367879441...	1/e
0.4945668...	Shapiro zyklische Summenkonstante	0.561459483...	Euler Konstante
0.5772156649...	Euler-Mascheroni Konstante	0.5926327182...	Lehmer Konstante
0.6079271019...	Hafner-Sarnak-McCurley Konstante	0.6243299885...	Golomb-Dickman Konstante
0.6601618158...	Twin prime Konstante	0.68640673...	Hardy-Littlewood Konstante
0.6922006276...	(1/e)^(1/e)	0.6931471806...	ln(2)
0.737338303...	Grossman Konstante	0.764223653...	Landau-Ramanujan Konstante
0.7759021363...	Bender Konstante	0.7834305107...	$\Sigma(-1)^{(n+1)}/n^n$, n=1...unendlich
0.79220...	Lal Konstante	0.8093940205...	Alladi-Grinstead Konstante
0.812556...	Stolarsky-Harborth Konstante	0.83462684...	Gauß Konstante
0.915965594...	Catalan Konstante	0.978012...	Elbert Konstante
1.0986419643...	Paris Konstante	1.0986858055...	Lengyel Konstante
1.202056903...	Apéry Konstante	1.28242713...	Glaisher-Kinkelin Konstante
1.2912859971...	$\Sigma 1/n^n$, n=1..unendlich	1.3035772690...	Conway Konstante
1.3064...	Mills Konstante	1.3694514039...	Shallit Konstante
1.414213562...	$\sqrt{2}$	1.435991124...	eine Lebesgue Konstante
1.4446678610...	e^(1/e)	1.4560749...	Backhouse Konstante
1.4670780794...	Porter Konstante	1.5849625007...	ln(3)/ln(2)
1.6180339887...	Goldener Schnitt	1.6281601297...	Flajolet-Martin Konstante
1.705211...	Niven Konstante	1.8442049806...	eine Landau-Kolmogorow

			Konstante
1.847759065...	√(2+√(2))	1.851937052...	Wilbraham-Gibbs Konstante
2.404825558...	1.Nullstelle von J0(x)	2.5029078750...	eine Feigenbaum Konstante
2.685452001...	Khintchine Konstante	2.7182818285...	e
2.8077702420...	Fransén-Robinson Konstante	3.1415926535...	π, Archimedes Konstante
4.6692016091...	eine Feigenbaum Konstante	15.1542622415...	e^e

Prozent- und Zinsrechnung

Prozentrechnung **W : p = G : 100** W...Prozentwert, G...Grundwert, p...Prozentsatz

Abkürzungen

% ... Prozent ‰ ... Promille (auf Tausend)
ppm ... parts per million = 10^{-6} ppb ... parts per billion = 10^{-9}
ppt ... parts per trillion = 10^{-12} ppq ... parts per quadrillion = 10^{-15}

Währungsrechnung

EW ... €-Betrag, AW ... Auslandswährung, Kurs ... Umrechnungsverhältnis zwischen Devisen; bezogen auf 100 ausländische Währungseinheiten
Ausnahmen: Japanische Yen ¥ bezogen auf 1000, US-Dollar und Pfund Sterling £ bezogen auf 1

EW / AW = Kurs / 100

Bequeme Prozentsätze

Bei einigen Prozentsätzen kann man die zugehörigen Prozentwerte bequem im Kopf angeben, da man mit einfachen Brüchen rechnen kann. Zu diesen gehören: 1%, 5%, 10%, 20%, 25%, 33% , 50%, 66% , 75%, 100%, 150%, 200%

Beispielaufgaben zur Prozentrechnung

Aufgabe: a) Wie viel sind 85 nach Abzug von 20%?
b) Eine Partei hatte 2348 Wähler; wie viele sind es, nach einer Zunahme von 8,6%?
c) Welcher Wert geht um 76% auf einen Betrag von 900 zurück?
d) Welcher Wert beträgt nach 230% Zunahme 66 a?
e) Wie gross ist der Faktor r, wenn eine Summe von 70850 auf 80384 zugenommen hat? Wie viele Prozent beträgt die Zunahme?
f) 5 kg Äpfel wiegen nach 2 Wochen noch 4,72 kg. Wie groß ist r und um wie viele Prozent hat die Masse abgenommen?
Formel $G_1 = r \cdot G_0$ Anfangswert G_0, Endwert G_1, Faktor r

Lösungen: a) Es verbleiben 80% = 0,8, d.h. 0,8 · 85 = 68
b) Die Partei hatte 2348 Wähler. Nachher sind es: 1,086 · 2348 = 2550 Wähler
c) r = 100% - 76% = 24% = 0,24, d.h. 900 = 0,24 · G_0 und G_0 = 3750
d) Zunahme 230%, r = 330% = 3,3 und somit G_0 = 20 a
e) 80384 = 70850 r , r = 1,135 = 113,5%; die Zunahme ist 13,5%
f) 4,72 = 5 r, d.h. r = 0,944 = 94,4%; die Abnahme ist 5,6%

Geschichte der Prozentrechung

Die Anfänge der Prozentrechnung liegen vermutlich bereits um 2100 v.u.Z. in Babylon. Die Babylonier gaben Zinssätze in Form einfacher Brüche an. War der Zins beispielsweise 1/3 der geliehenen Menge, so wurde die geliehene Menge in drei gleich große Teile geteilt.
Später tauchten in kommerziellen Zentren Berechnungen von Zinsen und Zöllen auf, die sich auf den Nenner 100 bezogen, so z.B. in Indien ab 300 v.u.Z. und in China ab 200 v.u.Z., sowie in babylonischen, ägyptischen und griechischen Gebieten. Aus China stammt auch der Dreisatz, eine Berechnungsformel für Proportionen mit drei gegebenen Größen.

Die Verbindung Dreisatz-Verhältnisrechnung wurde erst in der Renaissance gezogen, obwohl die Grundlagen schon von den Griechen ab 300 v.u.Z. gelegt wurden, z.B. in Euklids "Elemente".
Ab dem 13.Jahrhundert wurden Zinsangaben im Italien immer häufiger mit dem Nenner 100 notiert. Aus Italien stammt auch die Bezeichnung "Prozent": Die früheste Aufzeichnung des italienischen "perceto" (pro hundert) stammt aus dem Jahre 1481.
Seit dem Anfang des 19. Jahrhunderts wurde Prozent erstmals auch außerhalb des kaufmännischen Bereiches verwendet, z.B. um Wahrscheinlichkeiten in der gerade entstehenden Statistik zu berechnen. Etwa ab 1860 hatte sich die Prozentrechnung zu der heutigen Form entwickelt.

Leistungsbewertung-Gymnasium

In der gymnasialen Oberstufe Deutschlands wird das Notensystem von 1 bis 6 durch eine Punktwertung von 15 bis 0 Punkte ersetzt. Die Festlegung der Punktwertung soll dabei durch eine prozentuale Zuordnung erfolgen. In den meisten Fällen gilt:

Punkte	Note	prozentualer Anteil / Leistungen entsprechen …
15	sehr gut	96 % … den Anforderungen in besonderem Maße
14		91 %
13		86 %
12	gut	81 % … den Anforderungen voll
11		76 %
10		71 %

9	befriedigend	66 % … den Anforderungen im Allgemeinen
8		61 %
7		56 %
6	ausreichend	51 % … noch den Anforderungen
5		46 %
4		41 % … den Anforderungen mit Einschränkungen
3	mangelhaft	34 % … den Anforderungen nicht
2		27 %
1		20 %

In Sachsen wird im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich Punkte = 15 - [(99 % - pA) / 5] verwendet, wobei pA der prozentuale Anteil gegebener Bewertungseinheiten (BE) ist und [] der ganzzahlige Anteil des Quotienten darstellt.

Leistungsbewertung in der Schweiz

Die schlechteste Note in der Schweiz ist und war eine 1, die beste Note ist eine 6. Noten werden in der Regel folgendermassen berechnet: Note = 5 · ErreichtePunktzahl / MaximalePunktzahl +1
Mit dieser Festlegung ist die Vergleichbarkeit der Noten gewährleistet. Außerdem entfällt die unglückliche Punkthascherei in der Sekundarstufe II des deutschen Gymnasiums. Zum Beispiel sind 15, 14 und 13 Punkte einfach eine Note 1!
Ein erfolgreicher Schweizer Abiturient wird mit einem Gesamtresultat von 6,0 bis 2,0 in Zehntelstufen eingeschätzt (41 Abstufungen). Ein deutscher Abiturient kann von 280 bis 840 Gesamtpunkte erreichen, d.h. 560(!) Abstufungen; ein Musterbeispiel für deutsche Bürokratie.

Dreisatz (Kaufmannsregel)

... Verfahren, durch das mit drei gegebenenen Größen eine vierte errechnet wird; auch Berechnung der vierten Proportionale genannt.

Grundaufgaben

x : b = c : d	⇒	x = b *c / d	a : x = c : d	⇒	x = a *d / c
a : b = x : d	⇒	x = a *d / b	a : b = c : x	⇒	x = b *c / a

Der Name "Dreisatz" ergibt sich aus der klassischen Methode zur Lösung des Problems. Der erste Satz formuliert dabei die bekannte Proportion der Aufgabenstellung, der zweite und dritte Satz lösen die Proportionengleichung nach der gesuchten Größe auf.
Beispiel: Wenn 3 Kilogramm Zucker 6 € kosten, wie viel kosten dann 7 Kilogramm Zucker?
1.Satz 3 Kilogramm Zucker kosten 6 €
2.Satz 1 Kilogramm Zucker kostet 6 : 3 = 2 €
3.Satz 7 Kilogramm Zucker kosten 7 · 6 : 3 = 7 · 2 = 14 €.
Historisch gesehen war die Dreisatzaufgabe in den Volksschulen des 19.Jahrhunderts damals eine der anspruchsvollsten Aufgaben des Rechenunterrichts; heute Grundfertigkeit eines Schülers der 6.Klasse. Außerdem ist der Begriff Dreisatz überhaupt nicht notwendig. Wird im Schulmathematikunterricht in korrekter Form die direkte und indirekte Proportionalität eingeführt, ist die Behandlung der 4 Dreisatzgrundaufgaben überflüssig.

Aufgabe 1
320 g kosten 528 €. Wie viel € kosten 50 kg? Lösung x / 50 = 528 / 320 ... x = 82,5
Aufgabe 2
Ein Zug durchfährt eine Strecke bei 30 m/s Geschwindigkeit in 10 Minuten. Wie lange braucht er für diese Strecke bei 25 m/s Geschwindigkeit? Lösung 25 * 60 * x = 30 * 60 * 10 ... x = 12
Aufgabe 3
Um die Erde einer Baugrube von 15 m Länge, 12 m Breite und 3 m Tiefe fortzuschaffen, mussten zwei Lkw zusammen 135 mal fahren. Wie viel Fuhren sind bei einer Baugrube von 18 m Länge, 16 m Breite und 3,50 m Tiefe erforderlich?
Lösung (15*12*3)/135 = (18*16*3,5)/x ... 540/135 = 1008/x ... x = 252
Aufgabe 4
Zum Planieren eines Baugeländes brauchen vier Planierraupen 14 Tage. Nach 4 Tagen wird eine weitere Raupe eingesetzt. Wie viel Tage werden für die gesamte Arbeit benötigt?
Lösung 4 Raupen brauchen für den Rest 10 Tage, 5 Raupen brauchen für den Rest x Tage
5 x = 4 * 10 ... x = 8, also insgesamt 12 Tage
Aufgabe 5
Für eine Urlaubsreise nach Dänemark hat Karl bei einer deutschen Bank 920 € in dänische Kronen gewechselt. 100 dkr = 14,25 €. Wie viel dkr hat er erhalten? Nach seiner Rückkehr besitz Karl noch 85 dkr, die er bei der deutschen Bank wieder in € umwechselt. Wie viel € erhält er bei einem Kurs 100 dkr = 13,25 €? Welcher Verlust in € entsteht für Karl durch den Kursunterschied?
Lösung x/920 = 100/14,25 ... x = 3228,07 dkr
x/85 = 13,25/100 ... x = 11,26 €
bei 100 dkr = 1 € Kursverlust, bei 85 € = x € Verlust ... x = 0,85 € Verlust

Einfacher Dreisatz

Beim einfachen Dreisatz unterscheidet man den direkten proportionalen Dreisatz und den indirekt proportionalen Dreisatz.
direkt proportionaler Dreisatz … es liegt eine direkt proportionale Beziehung vor; Mehr bewirkt Mehr und Weniger bewirkt Weniger
indirekt proportionaler Dreisatz … es liegt eine umgekehrt proportionale Beziehung vor; Mehr bewirkt Weniger und Weniger bewirkt Mehr
Für beide Arten des einfachen Dreisatzes gilt das Schema:

links oben	rechts oben
links unten	x

Unabhängig von der Art der Beziehung können bei jeder Dreisatz-Aufgabe zunächst die Größen nach diesem Schema notiert werden.

Direkt proportionaler Dreisatz

Für dieses Schema gilt: "links unten" wird mit "rechts oben" multipliziert und mit "links oben" dividiert.

$x = (\text{rechts oben} \cdot \text{links unten}) / \text{links oben} = c \cdot b / a$

Indirekt proportionaler Dreisatz

Für dieses Schema gilt: "links oben" wird mit "rechts oben" multipliziert und mit "links unten" dividiert.

$x = (\text{rechts oben} \cdot \text{links oben}) / \text{links unten} = c \cdot a / b$

Zusammengesetzter Dreisatz

Im Vergleich zum einfachen Dreisatz wird der zusammengesetzte Dreisatz weniger verwendet. Er führt aber in sehr interessante Beziehungen der Mathematik. Beim zusammengesetzten Dreisatz stehen drei Verhältnisse nebeneinander, und auch hier soll ein fehlender Wert einer Größe ermittelt werden. Die allgemeine Form ist

$a/b = c/d = e/f$

Beispiel: 12 Hennen legen 280 Eier in 20 Tagen. In wieviel Tagen legen 9 Hennen 340 Eier? Die Verhältnisse werden auf zwei Zeilen geschrieben, wobei gleichartige Größen untereinander stehen und der gesuchte Wert rechts unten. 12 H / 9 H = 280 E / 340 E = 20 T / x
Lösung des Beispiels = 32,38

Schema

links oben	mitte oben	rechts oben
links unten	mitte unten	x

Für dieses Schema gilt folgende Rechenvorschrift: Es werden zwei Produkte gebildet. Dann wird das erste Produkt durch das zweite dividiert.

$x = (\text{rechts oben} \cdot \text{mitte unten} \cdot \text{links oben}) / (\text{links unten} \cdot \text{mitte oben})$

$f = (e \cdot d \cdot a) / (b \cdot c)$

Für die Probe gilt eine Beziehung von Fibonacci $d / b = (f \cdot c) / (e \cdot a)$

Mehrwertsteuer

Die Mehrwertsteuer ist eine Steuer, die auf den Nettopreis einer Ware zusätzlich erhoben wird. Für Firmen, die die Mehrwertsteuer auf ihre verkauften Artikel an das Finanzamt abführen müssen, wird die Steuer auch Umsatzsteuer genannt.
Die ursprüngliche Idee, Steuergerechtigkeit zwischen Unternehmen zu erreichen und vor allem Käufer von Luxusgütern stärker am Steueraufkommen zu beteiligen ("Eigentum verpflichtet!"), wurde durch jahrzehntelange unsoziale Politik in das Gegenteil verkehrt. Mittlerweile wird der größte Anteil der Mehrwertsteuer durch den Erwerb von Waren des täglichen Bedarfs erzielt und belastet insbesondere kleinere Einkommen überdurchschnittlich. 2009 erbrachte die Mehrwertsteuer in Deutschland 30 % des gesamten Steuereinkommens.

Grundaufgaben zur Mehrwertsteuer sind die Umrechnung der drei Größen Nettopreis N, Bruttopreis B und Mehrwertsteuersatz m in %.

1. gegeben: Nettopreis N einer Ware, Mehrwertsteuersatz m %, gesucht: Bruttopreis B
   $B = N (100 + m)/100$

Beispiel: N = 800 €, m = 19 % ergibt B = 952 €

2. gegeben: Bruttopreis B einer Ware, Mehrwertsteuersatz m %, gesucht: Nettopreis N
   $N = 100 B / (100 + m)$

Beispiel: B = 400 €, m = 7 % ergibt B = 373,83 €

3. gegeben: Nettopreis N und Bruttopreis B einer Ware, gesucht: Mehrwertsteuersatz m %
   $m = 100 B/N - 100$

In Deutschland gilt 2010 der Mehrwertsteuersatz von 19 %. Einige, wenige Waren werden mit dem ermäßigten Satz von 7 % besteuert, darunter einige Lebensmittel und Bücher. In Österreich betragen die Steuersätze 20 % und 10 %.

2007 wurde in Deutschland der Mehrwertsteuersatz von 16 % auf 19 % erhöht. Allgemein wurde argumentiert, dass dies eine zusätzliche 3%-Preiserhöhung bedeutete?
Lösung:
Der Nettobetrag N einer Preises berechnet sich aus dem Bruttobetrag B bei einem Mehrwertsteuersatz von p

$N = B/(p+1)$.

bei 19% MWSt $N = B/1{,}19$.
Der Bruttobetrag B berechnet sich aus dem Nettobetrag N mit dem Mehrwertsteuersatz p

$B = N\cdot(p+1)$.

bei 19% MWSt $B = 1{,}19\cdot N$
Somit bekommt man den erhöhten Betrag B_2 nach einem Mehrwertsteuererhöhung von p_1 auf p_2 aus B_1 mit

$$B_2 = N\cdot(p_2+1) = B_1/(p_1+1)\cdot(p_2+1) = (p_2+1)/(p_1+1)\cdot B_1.$$

Erhöhung $e = 100\ \%\ ((p_2+1)/(p_1+1) - 1)$
Mit den Werten $p_1 = 16\% = 0{,}16$ und $p_2 = 19\% = 0{,}19$ wird $B_2 = 1{,}19/1{,}16\cdot B_1 = 1{,}025862\ldots\cdot B_1$.
Damit stiegen die Preise "nur" um 2,5862% und nicht um 3%. Das war weniger als die allgemeine, inflationsbedingte Preiserhöhung eines Jahres; allerdings zusätzlich!

Zinsrechnung

Abkürzungen: K ... Kapital, Z ... Zinsen, R ... Rate, Rente, p%... Zinssatz, p.a. ... pro Jahr, S ... Darlehen, t ... Tage, m ... Monate, n ... Jahre
Grundbegriffe: Zins - Nutzungsentgelt für zeitweilige Kapitalüberlassung
Zinsperiode - Zeitraum der Kapitalüberlassung für den ein festgelegter (nomineller) Zins erhoben wird.
ZinsZuschlagTermin - Zeitpunkt der Fälligkeit der Zinsen (Standart am Ende jeder Zinsperiode)

Jahreszinsen	$Z = K*p/100$	Jahreszinsen	$Z_n = K*p*n/100$
Monatszinsen	$Z_m = K*p*m / 1200$	Tageszinsen	$Z_t = K*p*t / 36000$
	$Z_t = \#/D$	Quartalszins	$Z_q = \sqrt[4]{Z}$
Kapital	$K = Z*100/(t*p)$	Zinszahl	$\# = 1/100 * K * t$
Zinsdivisor	$D = 360 / p$		
Barwert nach n Jahren	$K_n = K*1/(1+p/100)^n$		

Pacioli-Regel, 72er-Regel

Erhält man auf ein Grundkapital einen Zinssatz p, so ergibt sich die Frage, nach wie vielen Jahren sich das Kapital mit Zinseszins verdoppelt.
Für diese Aufgabe gab Luca Pacioli ein einfache und verblüffende Regel. Nach ihm teilt man die "magische Zahl" 72 durch den Zinssatz p und erhält den Zeitraum für die Verdopplung in Jahren.

Für den einfachen, jährlichen Zinseszins der Rate p, muss für die Verdopplung gelten

$2 = (1 + p/100)^n$

Auflösung nach der Anzahl von Jahren n ergibt

$n = \lg 2 / (\lg(100 + p) - 2)$

Sucht man nun eine Zahl x, die dividiert durch p, annähernd n ergibt, wird

$x / p = \lg 2 / (\lg(100 + p) - 2)$

$x \approx 0{,}301\ p / (\lg(100 + p) - 2)$

Normalerweise liegen Zinssätze im Bereich $0{,}5 \le p \le 7$ mit dem mittleren Wert $p = 3$, d.h.

$x \approx 0{,}301 \cdot 3 / (\lg 103 - 2) \approx 70{,}35$

Für den Zinssatz $p = 0{,}5$ wird $x \approx 69{,}49$ für $p = 7$ sogar $x \approx 71{,}71$.

Damit ergibt sich, das als "magische Zahl" für die Pacioli-Regel die 70 besser geeignet wäre; oder gab es zu Paciolis Zeiten wesentlich höhere Zinssätze? :-)
Für eine stetige Verzinsung wird $n = \ln 2 / (0{,}01\ p)$ $x \approx \ln 2 / 0{,}01 \approx 69{,}31$

Unterjährige Verzinsung

Wird die Zinsperiode in m gleich lange Teilperioden unterteilt und erfolgt die Verzinsung am Ende jeder Teilperiode spricht man von einer unterjährigen Verzinsung.
i sei der Periodenzinssatz und j der Zinssatz für die Teilperiode. Dann sind:

$i_{nom} = m \cdot j$; nomineller Zinssatz
$j_{rel} = i/m$; relativer unterjähriger Zinssatz
$i_{kon} = (1 + j)^m - 1$; konformer Zinssatz
$j_{äquiv} = \sqrt[m]{(1 + i)} - 1$; äquivalenter unterjähriger Zinssatz

Ist die Zinsperiode das Jahr, so wird i_{kon} auch effektiver Jahreszinssatz i_{eff} genannt.
Vergleicht man die Endwerte bei einmaliger Verzinsung mit i und m-maliger Verzinsung mit j_{rel}, so ist letzterer Wert größer. Er entspricht einer einmaligen Verzinsung mit i_{kon}.
Umgekehrt, ist i gegeben, so erhält man bei m-maliger Verzinsung mit $j_{äquiv}$ denselben Endwert wie bei einmaliger Verzinsung mit i.

Beispiel: Ein Kapital von 10000 € wird über 10 Jahre bei 6% Verzinsung pro Jahr angelegt. In der Tabelle sind die Endwerte K_{10}^m bei m-maliger unterjähriger Verzinsung mit j_{rel} für verschiedene Werte von m sowie die jährlichen Effektivzinssätze aufgelistet:

m	Verzinsung	Endwert K_{10}^m	i_{eff}
1	jährlich	17908,48	6,00 %
2	halbjährlich	18061,11	6,09 %
4	vierteljährlich	18140,18	6,14 %
12	monatlich	18193,97	6,17 %
360	täglich	18219,84	6,18 %

Effektive Jahresverzinsung Rendite $p = 100*Z / K$

Zinseszinsen $K_n = K_0*q^n = K_0 * (1+p/100)^n$
Zinsfaktor $q = 1+p/100$
Die Größe q wird auch als Aufzinsungsfaktor bezeichnet, mit dem jährlich der zinspflichtige Anfangsbetrag zu multiplizieren ist.

Zahlungsendwert
nachschüssig, postnumerando ... Zahlungen am Ende des Jahres
vorschüssig, pränumerando ... Zahlungen am Anfang des Jahres
nachschüssig $K_n = [R (q^n-1)/(q-1)]$ vorschüssig $K_n = [Rq (q^n-1)/(q-1)]$

Barwert
nachschüssig $B_n = [R (q^n-1)/(q^n*(q-1))]$ vorschüssig $B_n = [Rq (q^n-1)/(q^{n-1}*(q-1))]$

Ratenzahlung - Vermehrung durch Ratenzahlung
... Sparkassenformel für Kapitalaufbau bzw. Kapitalverzehr
nachschüssig $K_n = K_0q^n \pm [R (q^n-1)/(q-1)]$ vorschüssig $K_n = K_0q^n \pm [Rq (q^n-1)/(q-1)]$

Barwert, Gegenwartswert
Sind der Endwert K_n nach Verzinsung sowie die Anzahl t der Verzinsungsjahre mit der Verzinsung p% bekannt, so kann nach dem Ausgangskapital gefragt werden.
K_0 nennt man den Gegenwartswert oder Barwert des Kapitals K_n.
Die Berechnung von K_0 bei gegebenen K_n nennt man Diskontierung oder Abzinsung. Es gilt
Barwertformel $K_0 = K_n / (1 + p/100)^n = K_n (1/q)^n$
Der Faktor 1/q wird Abzinsfaktor gennant.

Beispiel: Ein Großvater möchte für seinen Enkel an dessen 5.Geburtstag einen Betrag bei 5 % Verzinsung anlegen. Wie hoch muss der Betrag sein, damit das Enkelkind an seinem 21.Geburtstag 20000 € erhält?
Lösung: $K_0 = 20000 / 1{,}05^{16} = 9162{,}23$ €.

Regelmäßige konstante Zahlungen, Jahresersatzrate
Aufgabe: Eine Frau spart regelmäßig zu Monatsbeginn 200 €. Über welche Summe kann sie am Jahresende verfügen, wenn die Jahresverzinsung 6 % beträgt?

Zur Lösung wird die Zinsperiode in m gleich lange Teile unterteilt. Zu Beginn bzw. Ende jeder Teilperiode (vorschüssige bzw. nachschüssige Zahlungsweise) erfolgt eine Zahlung der Höhe G.
Dann ergibt sich am Ende der Zinsperiode, d.h. der ursprüngliche Periode; der Endwert:

vorschüssig $K_1 = G (m + p (m+1)/2)$
nachschüssig $K_1 = G (m + p (m-1)/2)$

In der Rentenrechnung werden die Größen K_1 oft mit R bezeichnet und Jahresersatzrate genannt.
Ist die Zinsperiode das Jahr, so entspricht m = 2 halbjährlichen, m = 4 vierteljährlichen und m = 12 monatlichen Zahlungen.
Lösung der Aufgabe: Mit G = 200, p = 0,06 und m = 12 ergibt sich vorschüssig
$R = 200 (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}06) = 2\,478$ €.

Tilgung
... Rückzahlung von Krediten. Für eine Schuld S werden vom Schuldner jeweils am Ende einer Zinsperiode p % Zinsen verlangt.
Die Belastung eines Schuldners pro Zinsperiode setzt sich aus Zinsen und Tilgungsrate zusammen. Ist die Zinsperiode 1 Jahr, heißt der finanzielle Aufwand des Schuldners Annuität A = T + Z.
Tilgungsrate einer Schuld $T = Sq^n (q-1)/(q^n-1)$

Ratentilgung

... mit fallenden Zinsbeträgen, Tilgung einer Anfangsschuld S mit einem für alle Zinsperioden n gleichen Tilgungsbetrag (Tilgungsrate) T bei einer Laufzeit (Tilgungsdauer) von N Zinsperioden mit konstantem Zinssatz p pro Zinsperiode $T = S / N$

Die zum n-ten Zinstermin anfallenden Zinsen verringern sich im Zeitablauf.

Zinsen in der n.ten Zinsperiode	$Z_n = S (1 - (n-1)/N) * p/100 ; n = 1,...,N$
Annuität in der n.ten Zinsperiode	$A_n = S/N [1 + (N - n + 1) p/100]$
Restschuld nach der n.ten Zinsperiode	$S_n = S (1 - n/N)$
Gesamzinsen	$Z = S (1 + N)/2 * p/100$

Annuitätentilgung

Tilgung einer Anfangsschuld S mit einer für alle Zinsperioden n gleichen, nachschüssigen Annuität A bei konstantem Zinssatz p pro Zinsperiode (Aufzinsfaktor: $q = 1 + p/100$) $T_n + Z_n = A =$ konstant

Zinsen zum n.ten Zinstermin	$Z_n = A - (A - S p /100) * q^{n-1}$
Tilgungsbetrag zum n.ten Zinstermin	$T_n = (A + S p /100) * q^{n-1}$
Restschuld nach n Zinsperioden	$S_n = S q^n - A (q^n - 1)/(q - 1)$
Tilgungsdauer in Zinsperioden	$N = - lg(1 - (q-1) S / A) / lg (q)$

Beispiel: Schuld = 1000 €, Annuität = 100 €, Zinssatz 3 %, Aufzinsfaktor 1.03, Tilgungsdauer 12.1 Jahre

Jahr	Restschuld €	Tilgungsbetrag €	Zinsen €
1	930	72.1	30
2	857.9	74.26	27.9
3	783.64	76.49	25.74
4	707.15	78.79	23.51
5	628.36	81.15	21.21
6	547.21	83.58	18.85
7	463.63	86.09	16.42
8	377.54	88.67	13.91
9	288.86	91.33	11.33
10	197.53	94.07	8.67
11	103.45	96.9	5.93
12	6.56	99.8	3.1

Abschlag, Rabatt

bei p % Rabatt auf Grundwert G_0	Wert $G = G_0 (1 - p/100)$
Abschlag G_0: $p_0/100$ wurden gewährt an Rabatt	$p = 100 p_0 / (100 - p_0)$

Aufschlag

bei p % Aufschlag auf Grundwert G_0	Wert $G = G_0 (1 + p/100)$
dann sind in G (von G aus gesehen)	$p' = p*100 / (100 + p)$ Prozent Aufschlag enthalten

Abschreibung

... Objekte, welche im Laufe der Zeit einer Wertminderung unterliegen, werden jährlich einer Abschreibung unterzogen.

Dabei wird der Wert zu Beginn des Jahres auf den restlichen Wert am Ende des Jahres verringert. Dafür existieren zwei verschiedene Abschreibungsmodelle:

1. Lineare Abschreibung , d.h. die Jahresraten bleiben konstant
2. Degressive Abschreibung , d.h. die Jahresraten nehmen im Laufe der Zeit ab

Abschreibung nach n Jahren

Lineare Abschreibung	$W_n = W_0 (1 - n p/100)$
Degressive Abschreibung	$W_n = W_0 (1 - p/100)^n = W_0 * w_n$
Abschreibungssatz	$p \% = p/100$

Buchwert ... W_n, Anschaffungswert ... W_0, Abschreibungsfaktor ... w_n

Nutzt man eine geometrisch-degressive Abschreibung, so kann nie der Restwert 0 erreicht werden. Aus diesem Grund verändert man im Laufe der Jahre das Abschreibungsmodell zur linearen Abschreibung. Zweckmäßiger Weise legt man diesen Zeitraum (nach n Jahren) so fest, dass dann die degressive Abschreibung kleiner als die lineare wäre, d.h. $n > N - 100/p$ (n ... Anzahl der Jahre mit degressiver Abschreibung, N ... Anzahl der Jahre mit linearer Abschreibung)

Arithmetisch-degressive Abschreibung

Die Abschreibungen sind in diesem Falle nicht konstant. Sie nehmen jährlich um den gleichen Betrag d, das Abschreibungsgefälle, ab. Für die Abschreibungsrate im n-ten Jahr gilt:

$a_n = a_1 - (n - 1) d$ ... $n = 2, 3, ..., N+1$

Mit $A - R_N = \Sigma^N_{n=1} a_n$ ... Summenbildung von n = 1 bis N wird $d = 2 (N a_1 - (A - R_N)) / (N (N - 1))$

$d = 0$ ... Lineare Abschreibung als Spezialfall

$d > 0$: $a_1 > (A - R_N)/N = a$ $(A - R_N)/N < a_1 < 2 (A - R_N)/N$

Digitale Abschreibung

Die digitale Abschreibung ist ein Spezialfall der arithmetisch-degressiven Abschreibung, indem gefordert wird, dass die letzte Abschreibungsrate a_N mit dem Abschreibungsgefälle d übereinstimmt. Aus $a_N = d$ folgt

$d = 2(A - R_N) / [N (N + 1)]$ $\qquad$ $a_1 = N d$, $a_2 = (N - 1) d$, ..., $a_N = d$

Diskontierung

Bei bekanntem Endbetrag k_n und Aufzinsungsfaktor r kann mit Hilfe der Zinseszinsformel der Anfangsbetrag k_0 berechnet werden: $\qquad$ $k_0 = k_n / r^n = k_n * v^n$,
wobei $v = 1 / r$ als Abzinsungsfaktor bezeichnet wird. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als Diskontierung und v als Diskontierungsfaktor. Man sagt: Der nach n Jahren zahlbare Betrag k_n wird auf die Gegenwart diskontiert.

Zinsrechnung, Beispiele

Aufgabe 1

Für eine erste Hypothek sind 7 %, für eine zweite Hypothek 8 %, zusammen vierteljährlich 1100 € Zinsen zu zahlen. Wie groß sind die beiden Hypotheken, wenn die erste doppelt so groß ist wie die zweite?
Lösung x € zweite Hypothek, 2x € erste Hypothek → (2x * 7)/(100*4) + (x*8)/(100*4) = 1100 ... x = 20000 €

Aufgabe 2

Für ein Darlehen wurden in 105 Tagen bei 6 % und für ein zweites Darlehen in 135 Tagen bei 7 % zusammen 490 € Zinsen bezahlt. Wie groß sind die beiden Darlehen, wenn das zweite 2000 € größer ist als das erste?
Lösung x € erstes Darlehen, (x+2000) € zweites Darlehen → (x*6*105)/(100*360) + ((x+2000)*7*135)/(100*360) = 490 ... x = 10000 €

Aufgabe 3

Ein Darlehen, das vom 14.6 bis 20.9 zu 7,5 % ausgeliehen war, wurde einschließlich Zinsen mit 4896 € zurückgezahlt. Berechne das Darlehen und die Zinsen!
Lösung x € Darlehen ; x*15*96/(100*2*360) € Zinsen → x - x*15*96/(100*2*360) = 4896 ... x = 4800 €, 96 € Zinsen

Aufgabe 4

Nach Abzug von 6 2/3 % Zinsen für 162 Tage zahlt eine Bank 3395 € an einen Kreditnehmer aus. Berechne den Kredit und die Zinsen!
Lösung x € Kredit ; x*20*162/(100*3*360) € Zinsen → x - x*20*162/(100*3*360) = 3395 ... x = 3500 €, 105 € Zinsen

Aufgabe 5

Ein Kapital von 500 € wird zu 5% verzinst. Der Zins wird jeweils zum Kapital geschlagen. Auf welchen Betrag wächst das Kapital in 10 Jahren?
Lösung $K_0 = 500$; $r = 100\% + 5\% = 105\% = 1{,}05$; $n = 10$ $\quad$ $K_{10} = 500 \cdot 1{,}05^{10} = 814{,}45$ €

Aufgabe 6

Wie viel Euro muss man auf ein Sparkonto einzahlen, wenn es innerhalb von 20 Jahren durch Zinseszins auf 2000 € anwachsen soll? (p = 5%)
Lösung $r = 1{,}05$; $n = 20$; $K_n = 2000$ $\qquad$ $2000 = K_0 \cdot 1{,}05^{20} \Rightarrow K_0 = 2000/1{,}05^{20} \approx 753{,}80$ €

Aufgabe 7

Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital von 1000 € bei 4,5% verdoppelt hat?
Lösung $K_0 = 1000$; $r = 1{,}045$; $K_n = 2000$
$2000 = 1000 \cdot 1{,}045^n \Rightarrow 2 = 1{,}045^n \Rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1{,}045 \Rightarrow n \approx 15{,}7$ Jahre

Aufgabe 8

Ein Kapital von 3600 € wächst in 12 Jahren auf 5000 €. Zu wieviel Prozent wurde es verzinst?
Lösung $K_0 = 3600$; $n = 12$; $K_n = 5000$ $\qquad$ $5000 = 3600 \cdot r^{12} \Rightarrow r^{12} = 5000/3600 \Rightarrow r = \sqrt[12]{(50/36)} = 1{,}0278$
Der Zinssatz ist 2,78 %.

Zinsrechnung, Skonto

Aufgabe: Eine Rechnung über einen Betrag B von 300 € enthält folgenden Zusatz: Zahlung innerhalb von 30 Tagen ohne Abzug, innerhalb von 10 Tagen 3% Skonto, innerhalb von 20 Tagen 2% Skonto.
Wie hoch sind die Skonti S_1, S_2 und die zu zahlenden Beträge Z_1, Z_2 bei den Skontosätzen p_1, p_2?

Skonto = der Betrag, um den der Preis einer Ware mitunter reduziert wird, wenn man diese bar oder in einem gewissen Zeitraum bezahlt.

Lösung: Skonto $S = B/100 \cdot p$
Zahlbetrag $Z = B - B/100 \cdot p$
Im Beispiel ergeben sich $S_1 = 9$ €, $S_2 = 6$ € sowie $Z_1 = 291$ € und $Z_2 = 294$ €.

Abzahlung eines Darlehens

Gegebene und gesuchte Größen:
B(0) … Darlehensbetrag, die Schulden zur Zeit t = 0 ; t … Zeit in Monaten nach Aufnahme des Darlehens ; a … monatliche Zahlrate (a = Z + b)
p … % Zinssatz p.a. ; Z … monatliche Zinsen ($Z = k \cdot B(t)$ mit $k = p/1200$) ; b … monatlicher Abtrag ; t_D … gesamte Darlehenszeit ; B(t) … Schulden zur Zeit t

Zu lösen ist die Differenzialgleichung $d/dt\, B(t) = k\, B(t) - a$
Es ergibt sich $B(t) = a/k + C \cdot e^{kt}$
Zur Zeit t = 0 wird der gesamte Darlehensbetrag geschuldet $B(0) = a/k + C \cdot e^0$
mit der Konstanten C $C = -(B(0)\, k + a) / k$
Die zur Zeit t noch bestehenden Schulden B(t) sind $B(t) = -(-a - e^{kt}\, B(0)\, k + a\, e^{kt}) / k$
Die monatliche Zahlrate a in Abhängigkeit von der gewünschten Darlehenszeit t_D wird

$$a = e^{kt}D\, B(0)\, k / (-1 + e^{kt}D)$$

Beispiel: Für ein Darlehen von 10000 €, Zinssatz 7%, zurückzuzahlen in insgesamt 8 Jahren, d.h. $t_D = 96$ Monate, ergibt sich ein monatlicher Zahlbetrag a von a = 137 €.

Rentenrechnung für Rentenzahlungen

Als Rente versteht man eine Zahlungsreihe aus gleichhohen Zahlenmengen in gleichen Zeitabständen.
Standardfall: nachschüssige Rente, d.h. Zahlung am Ende der Rentenperiode
R_0 = Barwert (Anfangswert); R_n = Endwert am Ende der letzten Rentenperiode; R = Rate; n = Rentenperiode (i.A. Jahre); q = 1+Zins; p = Zins
Formeln der Rentenrechnung $R_n = R * (q^n - 1)/(q-1)$ $R_0 = R_n / q^n = R * (q^n - 1)/(q-1) * 1/q^n$

$$n = \ln[\, R / (R - R_0\, (q-1)\,] / \ln q$$

Allgemeiner Fall: Rentenperiode ≠ Zinsperiode ; 2 Möglichkeiten
1) Anpassung der Zinsperiode an Rentenperiode (best. äquival. Zinsatz für Rentenperiode)
2) Anpassung der Rentenperiode an Zinsperiode (best. äquival. Jahresrente für Zinsperiode)

Beispiel: Von einer Gesellschaft hat jemand 10 Jahre lang jeweils zum Jahresende 5000 € zu beanspruchen. Vor der 1.Zahlung hat die Firma Konkurs angemeldet. Als Forderung an den Konkursverwalter kann nur der Barwert R_0 geltend gemacht werden. Bei Zinsen von 4% pro Jahr gilt: $R_0 = 1/q^n\, R\, (q^n-1)/(q-1) = 40554{,}48$ €.

Steuerberechnung

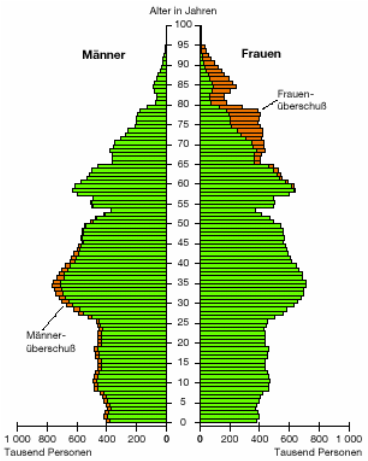
Im Gegensatz zum deutschen Steuersystem gibt es in anderen Staaten durchschaubare und faire Steuerregeln. In Irland gilt zum Beispiel, dass auf alle Jahreseinnahmen bis zu einem Betrag von 26000 € 16 % Steuern zu zahlen sind, für jeden Euro über diesen Wert (standard rate cut-off point) 38 %. Je nach sozialen Umständen existiert noch ein Steuerfreibetrag (tax credits). Für die zuzahlenden Steuern (tax payable) gilt dann:

tax payable = gross tax – tay credits

Beispiel aus "Less stress more success" (Irland 2001): A man has a gross yearly income of €47000. He has a standard rate cut-off point of €26000 and a tax credit of €2010. The standard rate of tax ist 16% of income up to the standard rate cut-off point abd 38% on all income above the standard rate cut-off point. Calculate

(i) the amount of gross tax for the year
(ii) the amount of tax paid for the year

Express the amount of tax paid as a percentage of gross income.
Solution: (i) gross tax = 15% of €26000 + 38% of €21000 = €26000 × 0.15 + €21000 × 0.38 = €11880.
(ii) Income tax equation: gross tax – tax credits = tax payable → €11880 - €2010 = €9870. Therefore, he paid €9870 in tax. Tax paid as a percentage of gross income = tax paid / gross income × 100 % = 21 %.



Deutsche Sterbetafel

Für die Rentenrechnung und Lebensversicherungsrechnung werden Tabellen (Deutsche Sterbetafel) herangezogen, die statistische Werte über die Struktur der Bevölkerung enthalten. In diesen Tabellen werden, bezogen auf 100000 im gleichen Zeitraum Geborene, die Anzahl der in einem gewissen Alter noch Lebenden sowie deren

theoretische Lebenserwartung eingetragen.
Die nachfolgende Tabelle enthält die für bestimmte Altersgruppen die Zahl der Lebenden, deren Überlebenswahrscheinlichkeit sowie die durchschnittliche Lebenserwartung (Grundlage 1995).

Alter	Lebende	Überlebenswahrscheinlichkeit	Lebenserwartung
Frauen, östliche Bundesländer			
0	100000	0,9949	78,58
1-4	99494	0,9989	77,97
5-9	99385	0,9992	74,06
10-14	99307	0,9993	69,11
15-19	99238	0,9980	64,16
20-24	99039	0,9980	59,28
25-29	98836	0,9980	54,40
30-34	98639	0,9967	49,50
35-39	98310	0,9948	44,66
40-44	97803	0,9919	39,88
45-49	97007	0,9878	35,19
50-54	95819	0,9830	30,59
55-59	94187	0,9738	26,08
60-64	91721	0,9554	21,71
65-69	87631	0,9264	17,61
70-74	81179	0,8711	13,81
75-79	70719	0,7896	10,48
80-84	55838	0,6425	7,61
85-89	35878	0,4584	5,46
90+	16445	0,0000	3,95
Frauen, westliche Bundesländer			
0	100000	0,9954	80,03
1-4	99544	0,9990	79,40
5-9	99441	0,9993	75,48
10-14	99371	0,9994	70,53
15-19	99309	0,9985	65,57
20-24	99157	0,9983	60,67
25-29	98988	0,9981	55,77
30-34	98804	0,9973	50,86
35-39	98540	0,9958	45,99
40-44	98122	0,9928	41,18
45-49	97420	0,9894	36,46
50-54	96384	0,9830	31,82
55-59	94750	0,9763	27,33
60-64	92506	0,9617	22,93
65-69	88965	0,9376	18,74
70-74	83412	0,8941	14,83
75-79	74580	0,8210	11,29
80-84	61233	0,6871	8,20
85-89	42073	0,4977	5,80
90+	20938	0,0000	4,13
Männer, östliche Bundesländer			
0	100000	0,9940	71,23
1-4	99397	0,9983	70,66
5-9	99223	0,9990	66,78
10-14	99126	0,9990	61,84
15-19	99024	0,9950	56,91
20-24	98526	0,9936	52,18
25-29	97891	0,9941	47,50
30-34	97317	0,9914	42,77
35-39	96477	0,9860	38,12
40-44	95124	0,9801	33,63
45-49	93235	0,9724	29,26
50-54	90661	0,9592	25,02
55-59	86962	0,9365	20,97
60-64	81438	0,8987	17,23
65-69	73186	0,8502	13,89
70-74	62221	0,7791	10,89

75-79	48479	0,6800	8,27
80-84	32965	0,5057	5,99
85-89	16671	0,3378	4,40
90+	5631	0,0000	3,14
Männer, westliche Bundesländer			
0	100000	0,9942	73,8
1-4	99415	0,9987	73,2
5-9	99281	0,9992	69,3
10-14	99205	0,9992	64,3
15-19	99121	0,9966	59,4
20-24	98789	0,9953	54,6
25-29	98322	0,9953	49,8
30-34	97856	0,9942	45,1
35-39	97291	0,9915	40,3
40-44	96460	0,9868	35,6
45-49	95185	0,9792	31,1
50-54	93206	0,9676	26,7
55-59	90183	0,9500	22,5
60-64	85676	0,9179	18,5
65-69	78646	0,8715	14,9
70-74	68539	0,8037	11,8
75-79	55085	0,7089	9,0
80-84	39050	0,5631	6,6
85-89	21988	0,4038	4,9
90+	8879	0,0000	3,8

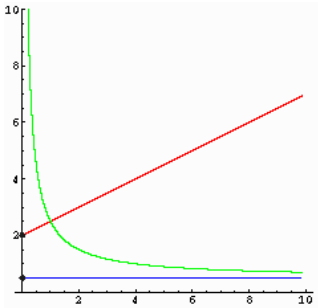
Funktionen in der Ökonomie

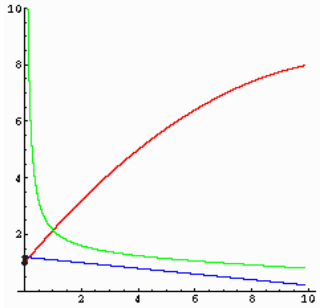
Preis-Absatz-Funktion $p(x)= a - bx$; x - Absatz, Produktionsmenge p - Preis je Mengeneinheit
Absatz-Preis-Funktion (Umkehrfunktion der Preis-Absatz-Funktion)
$x(p)= a - bp$; x - Absatz, Produktionsmenge p - Preis je Mengeneinheit

Erlös-/Umsatzfunktion	$E(x)= x\cdot p(x)$; $E(p)= p\cdot x(p)$
Kostenfunktion	$K(x)$
Stückkosten	$k(x)=K(x)/x$
Gewinnfunktion	$G(x)=E(x)-K(x)$
Stückgewinn	$g(x)=p(x)-k(x)$
Produktionsfunktion	$x(r)$; r - Rohstoff-/Materialeinsatz
Umkehrfunktion	$r=r(x)$ ... gibt Materialverbrauch an

Monotonität und Krümmung einer Funktion in der Ökonomie

Ist die Funktion konvex und monoton wachsend, dann heißt sie progressiv wachsend.
Ist die Funktion konkav und monoton wachsend, dann heißt sie degressiv wachsend.
Ist die Funktion konvex und monoton fallend, dann heißt sie degressiv fallend.
Ist die Funktion konkav und monoton fallend, dann heißt sie progressiv fallend.





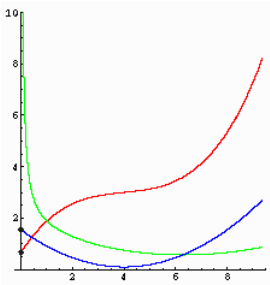
Kosten- und Preistheorie

Betriebskosten

Die Betriebskostenfunktion oder einfacher Kostenfunktion eines Unternehmens gibt an, wieviel die Produktion einer bestimmten Menge kostet. Dabei gibt man die Menge meist in Mengeneinheiten (ME) und die Kosten in Geldeinheiten (GE) an.

K(x) … Betriebskostenfunktion, Kosten für die Produktion von x ME
K*(x) = K(x)/x … Stückkostenfunktion, durchschnittliche Kosten für eine ME
K'(x) … Grenzkostenfunktion, zusätzliche Kosten, wenn eine ME mehr produziert wird, die Ableitung der Kostenfunktion

Die Kostenfunktion ist immer monoton wachsend. Sie besteht aus den Fixkosten K_{fix} = K(0); von der Menge unabhängig; und den variablen Kosten $K_{var}(x)$ = K(x) - K(0). Einige typische Kostenverläufe (rot) mit Stückkosten (grün) und Grenzkosten (blau) sind
1) linear (obere Abbildung) Grenzkosten sind konstant, K'' = 0
2) degressiv (untere Abbildung) Grenzkosten werden niedriger, K'' < 0



3) progressiv Grenzkosten werden höher, K'' > 0

Kostenkehre

In der Praxis ergibt sich meist ein gemischter Kostenverlauf: Die Grenzkosten werden zuerst niedriger, ab einer bestimmten Menge (Kostenkehre) wieder höher. Die Kostenkehre ist der Wendepunkt der Kostenfunktion, man erhält sie aus K''(x) = 0.

Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum ist das Minimum der Stückkostenfunktion, d.h. die Menge, bei der der Betrieb am rentabelsten produziert. Man erhält es aus der Gleichung

$K^{*\prime}(x) = 0$ bzw. $K'(x) = K^*(x)$.

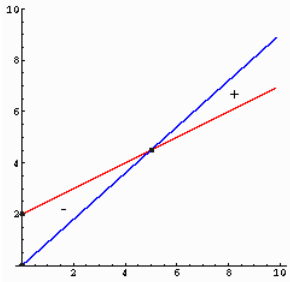
Beispiel: Ein Betrieb hat die Kostenfunktion

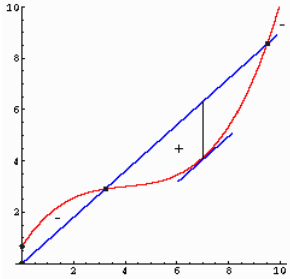
$K(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 40$ $\qquad K_{fix} = 40$

$K_{var}(x) = 0{,}1x^2 + 2x$; progressiver Kostenverlauf

$K^*(x) = K(x)/x = 0{,}1x + 2 + 40/x$ $\qquad K'(x) = 0{,}2x + 2$

Aus der Gleichung $K'(x) = K^*(x)$ ergibt sich das Betriebsoptimum zu $x_{opt} = 20$.
Bei einer Produktion von 20 ME sind also die Stückkosten am niedrigsten, nämlich $K^*(x) = 6$ GE. Das ist gleichzeitig die langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis): der Betrieb muss sein Produkt zu einem Preis von mindestens 6 GE verkaufen, damit er kostendeckend produzieren kann.
Die kurzfristige Preisuntergrenze ist das Minimum der variablen Stückkosten $K_{var}(x)/x$.





Erlös und Gewinn bei vollständiger Konkurrenz

Ist der Markt sehr groß, hat der einzelne Anbieter praktisch keinen Einfluss auf den Preis. Man kann vereinfachend annehmen, dass ein Erzeuger eine beliebige Menge zu einem konstanten Verkaufspreis absetzen kann.

p … Verkaufspreis pro ME
E(x) = px … Erlösfunktion (Umsatz)
G(x) = E(x) - K(x) … Gewinnfunktion

Auf den Abbildungen ist der Graph der Kostenfunktion rot, der Graph der Erlösfunktion blau dargestellt.
Bei linearem Kostenverlauf (obere Abbildung) schneiden einander die Graphen von Kosten- und Erlösfunktion in einem Punkt, vorausgesetzt, der Preis ist höher als die Grenzkosten.
Dieser Schnittpunkt entspricht der Gewinnschwelle (Break-even-point).
Unterhalb davon macht der Betrieb Verlust, darüber Gewinn. Es ist daher am günstigsten, die Produktionskapazität voll auszunützen.
Analoges gilt bei degressivem Kostenverlauf.

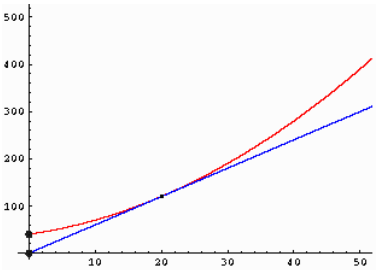
Bei progressivem oder gemischten Kostenverlauf (untere Abbildung) haben die Graphen zwei Schnittpunkte, die Gewinngrenzen. Nur im Bereich dazwischen macht der Betrieb Gewinn, darüber oder darunter fährt er Verluste ein.
Der Produzent wird versuchen, den maximalen Gewinn zu erzielen.
Die Gewinngrenzen erhält man aus der Gleichung

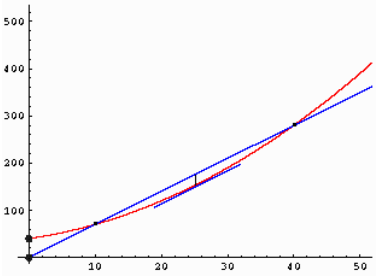
$G(x) = 0$ bzw. $E(x) = K(x)$,

das Maximum der Gewinnfunktion aus

$G'(x) = 0$ bzw. $E'(x) = K'(x)$

$E'(x) = p$, also ist der Gewinn maximal, wenn die Grenzkosten gleich dem Verkaufspreis sind, d.h., die Tangente an den Graphen von K(x) ist zum Graphen von E(x) parallel.





Erlös und Gewinn bei vollständiger Konkurrenz, Beispiel

Beispiel: Angenommen, ein Produzent kann seinen Artikel um 6 GE verkaufen. Dann lautet die Gewinnfunktion:

$G(x) = 6x - (0{,}1x^2 + 2x + 40) = -0{,}1x^2 + 4x - 40$

Die Gleichung E(x) = K(x) bzw. G(x) = 0 hat nur eine Lösung bei x = 20, also beim Betriebsoptimum.
Bei dieser Produktionsmenge macht der Betrieb gerade keinen Verlust, es handelt sich um einen sogenannten Grenzbetrieb.
Wie man aus der Zeichnung sieht, kann man das Betriebsoptimum graphisch ermitteln, indem man vom Koordinatenursprung eine Tangente an den Graphen von K(x) legt.

Wenn der Verkaufspreis 7 GE beträgt, lautet die Gewinnfunktion (untere Abbildung): $G(x) = 7x - (0{,}1x^2 + 2x + 40) = -0{,}1x^2 + 5x - 40$
Die Gleichung E(x) = K(x) bzw. G(x) = 0 hat die Lösungen $x_1 = 10$, $x_2 = 40$. Das sind die Gewinngrenzen.
Die Lösung der Gleichung E'(x) = K'(x) bzw. G'(x) = 0 ist x = 25. Der Betrieb erzielt also den maximalen Gewinn bei einer Produktion von 25

ME, und zwar beträgt der Gewinn G(25) = 22,5 GE.

Beispielaufgaben zur Kostenfunktion

1. Ein Gut wird zu einem Preis p = 61,5 (GE) abgesetzt. Die Kostenfunktion lautet:

$$K(x) = 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x + 144{,}5 \text{ für } x \geq 0$$

Berechnen Sie:

a) Umsatzfunktion b) Grenzumsatzfunktion
c) Durchschnittskostenfunktion d) Grenzkostenfunktion
e) Grenzdurchschnittskostenfunktion f) Gewinnfunktion
g) gewinnmaximale Ausbringungsmenge h) minimale Durchschnittskosten
i) Ausbringungsmenge mit maximalem Stückgewinn

Lösung: a) $U(x) = 61{,}5\,x$ b) $U'(x) = 61{,}5$
c) $k(x) = 0{,}5\,x + 2{,}5 + 144{,}5/x$ d) $K'(x) = x + 2{,}5$
e) $k'(x) = 0{,}5 - 144{,}5/x^2$ f) $G(x) = -0{,}5\,x^2 + 59\,x - 144{,}5$
g) $x = 59$ h) $k(17) = 19{,}5$ i) $x = 17$
e) Grenzdurchschnittskostenfunktion
Zur Berechnung müssen die Durchschnittskosten nach x abgeleitet werden
g) gewinnmaximale Ausbringungsmenge
Die Gewinnfunktion wird abgeleitet. Die Nullstelle der ersten Ableitung ist x = 59. Wenn x < 59, so ist G'(x) > 0, also der Gewinn G steigend; wenn x > 59 ist, so ist G fallend, da G'(x) < 0. Gei x = 59 liegt eine Maximalstelle.
h) minimale Durchschnittskosten
Man sucht Nullstellen der Ableitung der Duchschnittskosten, hier x = 17, da die 2.Lösung x = -17 ökonomisch sinnlos ist. Einsetzen von x = 17 in die Durchschnittskostenfunktion ergibt 19,5.
i) Ausbringungsmenge mit maximalem Stückgewinn
Die Durchschnittsgewinnfunktion ist gleich $G(x)/x = (-0{,}5\,x^2 + 59\,x - 144{,}5)/x = -0{,}5x + 59 - 144{,}5/x$.
Mit der Ableitung dieser Durchschnittsgewinnfunktion ergeben sich die Nullstellen x = 17 bzw. x = -17, von den nur die erste sinnvoll ist.

Beispielaufgaben zur Kostenfunktion (2)

2. Eine Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x habe die Form $K(x) = 100 + \sqrt{x}$. Von x = 10000 soll die Produktion um eine Einheit erhöht werden.
a) Bestimmen Sie die Grenzkosten.
b) Vergleichen Sie die Grenzkosten mit dem exakten Kostenzuwachs.
c) Führen Sie die gleiche Rechnung von x = 10 ausgehend aus.

Lösung: a) $K'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, $K'(10000) = 0{,}005$ b) $K(10001) - K(10000) = 0{,}0049998$
c) $K'(10) = 0{,}158113883$; exakt $K(11) - K(10) = 0{,}15434713$

3. Gegeben ist die Produktionsfunktion $x(r) = 0{,}9r^2 - 0{,}04r^3$ für $r \geq 0$. Berechnen Sie:
a) Faktoreinsatzmenge r für maximalen Gesamtertrag x(r)
b) Bereich zunehmender, abnehmender und negativer Grenzerträge, Maximum der Grenzerträge
c) Maximum der Durchschnittserträge

Lösung: a) $x'(r) = 1{,}8\,r - 0{,}12\,r^2 = 0 \ldots r = 15$
b) abnehmende Grenzerträge: r > 7,5 ; zunehmende Grenzerträge: r < 7,5 ; negative Grenzerträge: r > 15; Maximum: Max(7,5 ; 6,75)
c) Maximum bei x = 11,25 und beträgt 5,0625

Zinsinstrumente

Barwerte und Renditen von Zinsinstrumenten:	Barwert P	Rendite i
Diskontpapier	$R / (1+it)$	$(R-P) / (P\cdot t)$
Geldmarktpapier mit einmaliger Zinszahlung	$(100 + p(t - t_1) - pt_1 i(t - t_1)) / (1 + i(t - t_1))$	$(100 - P + p(t - t_1)) / ((P + pt_1)(t - t_1))$
Zerobond	$R / (1 + i)^T$	$\sqrt[T]{(R/P)} - 1$
Nachschüssige Zeitrente	$Z\cdot((1 + i)^n - 1) / ((1 + i)^n\cdot i)$	numerisch
Ewige Rente (nachschüssig)	Z/i	Z/P
Endfällige Anleihe, ganzzahlige Laufzeit	$1/(1 + i)^n\,(p\cdot((1+i)^n-1)/i + R)$	numerisch
Endfällige Anleihe, gebrochene Laufzeit	$1/(1+i)^{n+\tau}\,(p\cdot(1+i)^{n+1})/i + R)$	numerisch

Variablen: t, t_1 Zeitpunkte ; τ Teil einer Zinsperiode ; n, T (Rest-)Laufzeit ; S Stückzinsen
P Preis, Kurs ; Z laufende Zahlung, Rate ; R Rückzahlung (oft: R = 100) ; p Kupon, Nominalzinssatz (in Prozent)

DAX-Berechnung

Die Berechnung des DAX erfolgt für alle Index-Gruppen über die Laspeyres-Formel

$$DAX = K^1 \cdot F \cdot \Sigma_{i=1}^{n} (P_i\cdot q_i^1\cdot c_i) / \Sigma_{i=1}^{n} (P_i^0\cdot q_i^0)$$

mit K_1 = Verkettungsfaktor vom letzten Verkettungstermin t_1
n = Anzahl der Aktien im Kurs
P_i = Kurs der Aktie zum Zeitpunkt der Berechnung
q_i^1 = Kapital der Aktie zum Zeitpunkt t_1
c_i = Korrekturfaktor der Aktie zum Zeitpunkt der Berechnung
P_i^0 = Kurs der Aktie zum Basiszeitpunkt t_0 (30.12.1987)
q_i^0 = Kapital der Aktie zum Basiszeitpunkt t_0
F = Basiswert des DAX zum Basiszeitpunkt t_0

Die Summen im Quotienten der DAX-Formel werden als Marktkapitalisierung des Index bezeichnet. Für die Kapitalisierung einer einzelnen Aktie zum Zeitpunkt t gilt dementsprechend mit c=1 $M_t = P_t\, q$

Die Korrekturfaktoren c_i der Aktien im Index dienen zur Anpassung des Kurses an außergewöhnliche Ereignisse wie Zahlungen von Dividenden oder Bezugsrechten. Einmal im Jahr, jeweils am 3.Freitag im September, werden die Korrekturfaktoren der Aktien im Index wieder zurückgestellt (Verkettungstermin).

Der neue Korrekturfaktor wird bestimmt mit $c_i = P_{i\text{-vor Abschlag}} / (P_{i\text{-vor Abschlag}} - \text{Abschlag})$

Der Verkettungsfaktor wird immer dann angepasst, wenn das Kapital einer Aktie im Index angepasst wird, Aktientitel hinzugefügt oder entfernt werden und bei der jährlichen Rückstellung der Korrekturfaktoren.

Dadurch werden Sprünge im Index bei diesen Vorgängen vermieden. Der neue Korrekturfaktor ermittelt sich dann mit $K_t = K_{t-1} \cdot DAX_{\text{alte Zusammensetzung}} / DAX_{\text{neue Zusammensetzung}}$

Gordon-Formel

Die Gordon-Formel ist eine Gleichung zur Berechnung des Barwertes einer Aktie oder Unternehmens bei steigenden Dividenden. Sie ist benannt nach Albert Hamilton Gordon (1901-2009).

$$P_0 = G_1 (1 - b) / (k - b\, r_E)$$

Die auftretenden Größen sind: P_0 … subjektiver Ertragswert (Marktpreis, Kurswert) der Aktie zur Zeit t_0. Ist der Aktienmarkt effizient, dann gilt: P_0 = Marktwert der Aktie in t_0 = Ertragswert aller zukünftigen Ausschüttungen = Marktwert. Der Preis bildet sich durch Erwartungen. Bei unvollkommenen Märkten weicht der Marktwert/Ertragswert vom Preis/Börsenkurs ab.

G_1 … erwarteter Gewinn pro Aktie zur Zeit t_1, b … Thesaurierungsquote, 1-b … Ausschüttungsquote, G_1 (1-b) … Dividende in t_1, k … Marktzinssatz, d.h. der von der Aktionären erwartete Ertragssatz, der bei alternativen Finanz-Investitionen zu erzielen wäre, r_E … erwartete Rendite aus der investiven Verwendung der einbehaltenen Gewinne und b r_E die Wachstumsrate für Gewinne, Dividenden und Kurs.

Weiterhin wird dann für den Gewinn $G_1 = G_0 (1 + w)$, w … Wachstumsrate
$G_2 = G_0 (1 + w)^2$ usw.
und für die Dividende $D_1 = G_0 (1 + w) (1 - b)$
$D_2 = G_0 (1 + w)^2 (1 - b)$ usw.

Euro-Geld

Abkürzung EUR, Eurozeichen €, europäische Einheitswährung; 1 Euro = 100 Cent (Eurocent).

Am 1.1.1999 wurde der Euro in elf Ländern im bargeldlosen Zahlungsverkehr eingeführt. Im Bargeldbereich wurden die nationalen Währungen zum 1.1.2002 durch den Euro als gesetzliches Zahlungsmittel ersetzt.

Das Eurozeichen € ist eine Kombination aus dem griechischen Epsilon (Symbol für die Wiege der europäischen Zivilisation), dem Buchstaben E für Europa und einem doppelten Querstrich als Zeichen der Stabilität.

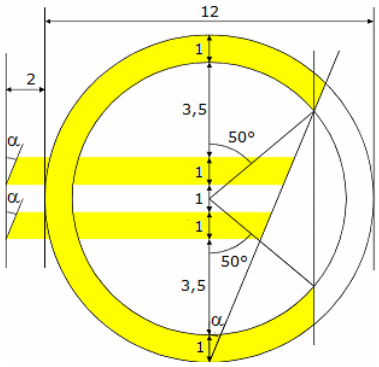
Die Banknoten haben eine Stückelung von 5, 10, 20, 50, 100, 200 und 500 Euro, die Münzen von 1, 2, 5, 10, 20, 50 Cent sowie 1 und 2 Euro. Die Euroscheine zeigen auf der Vorderseite fiktive Bauwerke, die wichtige europäische Stilrichtungen repräsentieren. Die Rückseite der mit Banknoten zeigt die europäische Landkarte, die Flagge der EU und jeweils eine Brücke als Sinnbild für Verbindungswege innerhalb Europas.

Die Größe der Scheine variiert zwischen 120 mm x 62 mm und 160 mm x 82 mm. Die Münzen weisen Unterschiede in Größe, Gewicht, Material und Farbe auf. Ihre Vorderseite ist einheitlich gestaltet und zeigt neben dem Nennwert die 12 Sterne der EU und die Umrisse der EU-Staaten als Relief, die Rückseite wird von jedem Land mit nationalen Motiven gestaltet.

Quelle: Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 2007

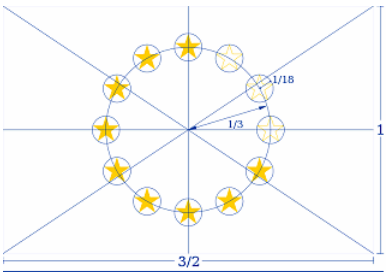
Euro-Zeichen

Die Form des Euro-Zeichens € wurde von der Europäischen Union eindeutig festgelegt. Die geometrische Figur ist rechts zu sehen. Hauptteil ist ein Kreisringstück mit dem Verhältnis des inneren Durchmessers zum äußeren Durchmesser von 5 : 6.
Wichtig ist die Größe des Winkels α, der zum einen den oberen Abschluss als auch die Neigung der Querbalken beschreibt. Über die Berechnung mittels Kosinussatz ergibt sich α = 22,5726…°
Der Schöpfer des Euro-Zeichens Arthur Eisenmenger hatte nichts(!) von seinem Entwurf.



Konstruktionsbeschreibung

Zeichnen einer Mittellinie und eines zentralen Punktes M. Um M werden vier Kreise, mit den Radien 1/2, 3/2, 5 und 6 gezogen. In M wird auf der Mittellinie eine Senkrechte errichtet.
Sie schneidet die Kreise an wichtigen Punkten. Der Unterste heiße U.
An die Mittellinie wird im Mittelpunkt nach oben und unten ein Vierziggradwinkel abgetragen. Der obere Schenkel schneidet den inneren der beiden großen Kreise in P. Die Verbindung von P mit U begrenzt die beiden Balken und den oberen Rand des Euro-Zeichens.
Eine Senkrechte von P aus auf die Mittellinie begrenzt das Euro- Zeichen unten. Dabei entsteht der waagerechte Abstand, der rechts oben angesetzt wird.
Durch das linke Ende der angesetzten Strecke, wird eine Parallele zu PU gezeichnet. Sie begrenzt den oberen Balken. Die Senkrechte von dort auf die Mittellinie begrenzt den unteren Balken. Eine weitere Parallele zu PU beendet die Konstruktion.



Europaflagge

Wie für das Euro-Zeichen gibt es auch für die Europaflagge eine eindeutige mathematische Konstruktion.
Die Europaflagge besteht aus einem Kranz aus zwölf goldenen, fünfzackigen, sich nicht berührenden Sternen auf azurblauem Hintergrund. Sie wurde 1955 vom Europarat als dessen Flagge eingeführt und erst 1986 von der Europäischen Gemeinschaft übernommen.

Das Emblem hat folgende Farben: Pantone Reflex blue für den Hintergrund und Pantone Yellow für die Sterne. Die RGB-Farbwerte sind für den Hintergrund (blau): 0/51/153 und für die Sterne (gelb): 255/204/0.
Die geometrische Beschreibung ergibt sich aus der Zeichnung und der offiziellen Erläuterung der Europäischen Union:
"Das Emblem besteht aus einer blauen rechteckigen Flagge, deren Breite das Anderthalbfache der Höhe misst. Auf einem unsichtbaren Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks bildet, sind in gleichmäßigem Abstand zwölf goldene Sterne angeordnet.
Der Kreisradius beträgt ein Drittel der Rechteckhöhe. Jeder Stern hat fünf Zacken, deren Spitzen einen unsichtbaren Umkreis mit dem Radius von jeweils 1/18 der Rechteckhöhe berühren.
Alle Sterne stehen senkrecht, d.h. ein Zacken weist nach oben, während zwei weitere auf einer unsichtbaren Geraden ruhen, die die Senkrechte zum Fahnenschaft bildet.
Die Sterne sind wie die Stunden auf dem Zifferblatt einer Uhr angeordnet. Ihre Zahl ist unveränderlich."

Wahlauswertung

Wahlauswertung, Vergabe der Mandate

Verfahren nach d'Hondt

Jede Partei erhält einen Quotienten zugewiesen, der anfangs gleich der Stimmenanzahl ist. Die Partei mit dem größten Quotienten bekommt das erste Mandat und einen neuen Quotienten zugewiesen, gleich Stimmenzahl / (Mandate+1). Das nächste Mandat erhält die Partei, die nun den größten Quotienten besitzt. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis alle Mandate vergeben sind.

Verfahren nach Hare-Niemeyer

Für jede Partei wird die Anzahl ihrer Stimmen durch die Anzahl aller Stimmen dividiert und dann mit der Anzahl aller Mandate multipliziert. Die Partei erhält zunächst so viele Mandate, wie das ganzzahlige Ergebnis angibt. Eventuell auf Grund der Rundung übrigbleibende Mandate werden an die Parteien mit den größten gebrochenen Anteilen vergeben.

Verfahren nach Hagenbach-Bischoff

Die Gesamtstimmenzahl wird durch die um 1 erhöhte Anzahl der Mandate geteilt und auf die nächste ganze Zahl aufgerundet. Die Mandate der Parteien erhält man, indem man die Parteistimmenzahl durch diesen Wahlquotienten teilt und auf die nächste ganze Zahl abrundet. Bleiben Mandate übrig, so wird die Stimmenzahl jeder Partei durch die um 1 erhöhte Zahl der ihr bereits zugewiesenen Mandate geteilt. Das erste der noch zu verteilenden Mandate wird der Partei mit den größten Verteilungszahl zugewiesen. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Mandate vergeben sind.

Regel des Marquis de Condorcet

Bei mehr als einem Entscheidungsträger und bei mehr als zwei Alternativen gibt es kein noch so kompliziertes Auswahlverfahren, welches sowohl demokratisch ist als auch zu rationalen kollektiven Entscheidungen führt.

In sehr vielen Fällen, liefern die drei Verfahren gleiche Mandatsverteilungen. Dies muss aber nicht sein. Zum Beispiel erhalten Sie für nachfolgende fiktive Werte bei einer 5 %-Hürde und 500 Mandaten:

Partei	Stimmenzahl	%-Anteil	... d'Hondt	... Hare-Niemeyer	... Hagenbach-Bischoff
1	1234567	45.1484	241	240	241
2	897654	32.8274	175	175	175
3	201010	7.351	39	39	39
4	44444	1.6253	0	0	0
5	234567	8.5782	45	46	45
6	122221	4.4697	0	0	0

Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn nur eine 4 %-Hürde gelten würde. Dann wird:

Partei	Stimmenzahl	%-Anteil	... d'Hondt	... Hare-Niemeyer	... Hagenbach-Bischoff
1	1234567	45.1484	231	229	230
2	897654	32.8274	167	167	168
3	201010	7.351	37	37	37
4	44444	1.6253	0	0	0
5	234567	8.5782	43	44	43
6	122221	4.4697	22	23	22

Offensichtlich begünstigt das Verfahren nach Hare-Niemeyer die kleineren Parteien. Welches der Verfahren das „Beste" ist, kann natürlich nicht festgelegt werden.

Deutsche Wahlauswertung

Das Verfahren nach dem belgischen Mathematiker d'Hondt war in der Bundesrepublik bis 1985 üblich. Seit 1985 wird nach dem Verfahren von Hare-Niemeyer gerechnet: Zuerst werden im Wahlgebiet alle auf die Landesliste entfallenen Zweitstimmen addiert
und die Mandate im Bundestag entsprechend verteilt. Bei erneuter Verrechnung nach Hare-Niemeyer-Verfahren werden die den Parteien zugesprochenen Mandate auf deren einzelne Landeslisten verteilt. Hat eine Partei mehr Direktmandate (Siege in den Wahlkreisen) gewonnen, als ihr Mandate auf Länderebene zustehen, so bleiben ihr diese Überhangmandate erhalten. Dadurch kann vor der Wahl die genaue Größe des zukünftigen Bundestages nicht angegeben werden. Bei einigen Landtagswahlen ist dies anders. Dort werden Überhangmandate auf Kosten der anderen Parteien rückgerechnet.

Österreich

Bei den österreichischen Nationalratswahlen wird das Verfahren des Schweizer Hagenbach-Bischoff für das erste Ermittlungsverfahren angewandt. Verbleibende Restmandate werden dann im 2.Ermittlungsverfahren nach dem d'Hondtschen Verfahren zugewiesen.

Kandidatenwahl

Es leuchtet unmittelbar ein, dass es ein eindeutiges Wahlverfahren gibt, wenn man sich nur zwischen zwei Kandidaten entscheiden kann. Es gewinnt selbstverständlich derjenige, auf den die meisten Stimmen entfallen. Dass man schon bei drei Kandidaten prinzipiell kein eindeutiges Wahlverfahren mehr angeben kann, um einen Gewinner zu ermitteln, ist schon erstaunlich. Um dieses nicht auflösbare Dilemma der Uneindeutigkeit zu verdeutlichen, werden 5 verschiedene fiktive Wahlen (Spalten) nach 8 verschiedenen sinnvollen Wahlverfahren ausgewertet. Die Wahlergebnisse sind so ausgesucht, dass beim ersten Wahlverfahren, ein häufig angewendetes, immer der gleiche Kandidat gewinnt. Dadurch wird noch deutlicher sichtbar, dass je nach Wahlverfahren teilweise verschiedene Kandidaten gewinnen.

Wahlverfahren bei drei Kandidaten

Die drei Kandidaten werden mit A, B und C bezeichnet. Jeder Wähler muss einen Favoriten (1. Wahl) und einen zweitliebsten Kandidaten (2. Wahl) bestimmen, also sich für AB, AC, BA, BC, CA oder CB entscheiden, wobei die jeweils ersten Buchstaben den Favoriten darstellen. AB = 24% bedeutet also,

dass sich 24% der Wähler für A als Favoriten und gleichzeitig für B als „2. Wahl" entschieden haben.

Wahlergebnisse

Wahl 1	Wahl 2	Wahl 3	Wahl 4	Wahl 5
AB = 24 %	AB = 0 %	AB = 20 %	AB = 60 %	AB = 38 %
AC = 12 %	AC = 40 %	AC = 20 %	AC = 0 %	AC = 22 %
BA = 4 %	BA = 0 %	BA = 9 %	BA = 0 %	BA = 0 %
BC = 30 %	BC = 32 %	BC = 22 %	BC = 36 %	BC = 36 %
CA = 15 %	CA = 0 %	CA = 12 %	CA = 0 %	CA = 0 %
CB = 15 %	CB = 28 %	CB = 17 %	CB = 4 %	CB = 4 %

Wahlverfahren 1: Der Kandidat, auf den die meisten Favoritenstimmen entfallen, gewinnt die Wahl. Dieses Verfahren nennt sich Mehrheitswahl und wird bei der Wahl der Senatoren in den Bundesstaaten der USA angewendet.

A = 36 %	A = 40 %	A = 40 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 34 %	B = 32 %	B = 31 %	B = 36 %	B = 36 %
C = 30 %	C = 28 %	C = 29 %	C = 4 %	C = 4 %
A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

Wahlverfahren 2: Die beiden Kandidaten, auf die die meisten und zweitmeisten Favoritenstimmen entfallen, kommen in die Stichwahl, sofern ein Kandidat nicht schon im ersten Wahlgang die absolute Mehrheit der Favoritenstimmen auf sich vereinigt. In der Stichwahl gewinnt der Kandidat, der dort die meisten Stimmen enthält. Dieses Wahlverfahren wird bei der Bestimmung des französischen Präsidenten praktiziert.

A = 36 %	A = 40 %	A = 40 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 34 %	B = 32 %	B = 31 %	B = 36 %	B = 36 %
C = 30 %	C = 28 %	C = 29 %	C = 4 %	C = 4%
A und B Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl
A = 51 %	A = 40 %	A = 52 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 49 %	B = 60 %	B = 48 %	B = 40 %	B = 40 %
A gewinnt.	B gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

Wahlverfahren 3: Die beiden Kandidaten, die nicht die meisten Favoritenstimmen erhalten haben, kommen in eine Stichwahl. Der Sieger dieser Stichwahl kommt dann zusammen mit dem Kandidaten, der die meisten Favoritenstimmen erhalten hat, in die endgültige Stichwahl.

A = 36 %	A = 40 %	A = 40 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 34 %	B = 32 %	B = 31 %	B = 36 %	B = 36 %
C = 30 %	C = 28 %	C = 29 %	C = 4 %	C = 4 %
A und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl
B = 58 %	B = 32 %	B = 51 %	B = 96 %	B = 74 %
C = 42 %	C = 68 %	C = 49 %	C = 4 %	C = 26 %
A und B Stichwahl	A und C Stichwahl	A und C Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl
A = 51 %	A = 40 %	A = 49 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 49 %	C = 60 %	C = 51 %	B = 40 %	B = 40 %
A gewinnt.	C gewinnt.	C gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

Wahlverfahren 4: Der Kandidat, der am seltensten „3. Wahl" ist, gewinnt die Wahl. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass der Kandidat gewinnt, der am häufigsten "1. Wahl" oder "2. Wahl" ist.

A = 45 %	A = 60 %	A = 39 %	A = 40 %	A = 40 %
B = 27 %	B = 40 %	B = 32 %	B = 0 %	B = 22 %
C = 28 %	C = 0 %	C = 29 %	C = 60 %	C = 38 %
B gewinnt.	C gewinnt	C gewinnt	B gewinnt	B gewinnt

Wahlverfahren 5: Der Kandidat, der am häufigsten „3. Wahl" ist, darf nicht in die Stichwahl. Oder anders ausgedrückt: Die beiden Kandidaten, die am häufigsten "1. Wahl" oder "2. Wahl" geworden sind, kommen in die Stichwahl. Dort gewinnt dann der von diesen beiden Kandidaten, der die meisten Stimmen erhält.

A = 45 %	A = 60 %	A = 39 %	A = 40 %	A = 40 %
B = 27 %	B = 40 %	B = 32 %	B = 0 %	B = 22 %
C = 28 %	C = 0 %	C = 29 %	C = 60 %	C = 38 %

B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	A und B Stichwahl	B und C Stichwahl
B = 58 %	B = 32 %	B = 51 %	A = 60 %	B = 36 %
C = 42 %	C = 68 %	C = 49 %	B = 40 %	C = 4 %
B gewinnt.	C gewinnt.	B gewinnt.	A gewinnt.	B gewinnt.

Wahlverfahren 6: Die beiden Kandidaten, die am häufigsten "3. Wahl" sind, kommen in eine Stichwahl. Der Sieger dieser Stichwahl kommt dann zusammen mit dem Kandidaten, der die meisten Favoritenstimmen erhalten hat, in die endgültige Stichwahl.

A = 45 %	A = 60 %	A = 39 %	A = 40 %	A = 40 %
B = 27 %	B = 40 %	B = 32 %	B = 0 %	B = 22 %
C = 28 %	C = 0 %	C = 29 %	C = 60 %	C = 38 %
A und C Stichwahl	A und B Stichwahl	A und C Stichwahl	A und C Stichwahl	A und C Stichwahl
B = 58 %	A = 40 %	A = 49 %	A = 60 %	A = 60 %
C = 42 %	B = 60 %	C = 51 %	C = 40 %	C = 40 %
A und B Stichwahl	B und C Stichwahl	A und C Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl
A = 51 %	B = 32 %	A = 52 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 49 %	C = 68 %	C = 48 %	B = 40 %	B = 40 %
A gewinnt.	C gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

Wahlverfahren 7: Für jede Favoritenstimme gibt es zwei Punkte, Für jede "2. Wahl" gibt es einem Punkt. Der Kandidat, der die meisten Punkte bekommt, gewinnt die Wahl. Dieses Verfahren wird nach dem Erfinder "Methode von Borda" genannt. Identisch ist das Verfahren, bei dem der Kandidat gewinnt, der in den beiden möglichen Stichwahlen gegen die anderen Kandidaten insgesamt die meisten Stimmen bekäme.

A = 91 P.	A = 80 P.	A = 101 P.	A = 120 P.	A = 120 P.
B = 107 P.	B = 92 P.	B = 99 P.	B = 136 P.	B = 114 P.
C = 102 P.	C = 128 P.	C = 100 P.	C = 44 P.	C = 66 P.
B gewinnt.	C gewinnt	A gewinnt	B gewinnt	A gewinnt.

Wahlverfahren 8: Jeder Wähler hat die Möglichkeit, für einen, für zwei oder für alle drei Kandidaten zu stimmen. Der Kandidat, auf den die meisten Stimmen entfallen, gewinnt die Wahl. Dieses Verfahren nennt sich "Wahl durch Zustimmung" und wird oft bei Wahlen an Hochschulen benutzt. Es weicht von den obigen insofern ab, als es auch eine teilweise Gleichbehandlung der Kandidaten zuläßt. Um die Ausgangsdaten auch hier verwenden zu können, wird angenommen, das die Wähler zu 50% nur ihren Favoriten und zu 50% sowohl ihren Favoriten als auch ihre "2. Wahl" ankreuzen würden, müssten sie nach dem hier erwähnten Verfahren wählen. Dann ergibt sich das folgende Ergebnis:

A = 45.5 %	A = 40 %	A = 50.5 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 53.5 %	B = 46 %	B = 49.5 %	B = 68 %	B = 57 %
C = 51 %	C = 64 %	C = 50 %	C = 22 %	C = 33 %
B gewinnt.	C gewinnt.	A gewinnt.	B gewinnt.	A gewinnt.

Wie man durch Vergleich erkennt, ist dieses Wahlverfahren ("Wahl durch Zustimmung") bei drei Kandidaten und der obigen Annahme für die Auswertung mit Wahlverfahren 7 ("Methode von Borda") identisch.

Wahlauswertungsverfahren

Nach den Verfahren nach d'Hondt, nach Hare-Niemeyer und nach Hagenbach-Bischoff werden in Europa weitere Wahlauswertungsverfahren genutzt:

Single Transferable Vote (STV), Übertragbare Einzelstimmgebung

STV beschreibt ein Personenstimmgebungsverfahren, bei dem jeder Wähler nicht nur eine Stimme für den Kandidaten seiner Wahl hat, sondern alle Kandidaten nach seiner Vorstellung ordnen kann.
Der Wähler hat eine Stimme für einen Kandidaten, die auf andere Kandidaten übertragen werden kann, wenn der gewählte Kandidat die Stimme für seine Wahl nicht braucht oder nicht brauchen kann.
Single Transferable Vote ist eine Familie von Stimmgebungsverfahren, für die gilt:
1) jeder Wähler kann seine Stimme dem Kandidaten seiner Wahl geben
2) wenn ein Kandidat mehr als genug Stimmen erhält, wird der Stimmenüberschuss an die nächst folgenden Kandidaten der Liste der Wähler übertragen
3) wenn ein Kandidat durch das Auszählverfahren gestrichen wird, werden die ihm schon zugeordneten Stimmen auf den nächsten Kandidaten der Liste übertragen

Verfahren nach Sainte-Laguë, Divisorverfahren mit Standardrundung

Das Divisorverfahren mit Standardrundung geht auf Daniel Webster (1782-1852) und Jean-André Sainte-Laguë (1882-1950), Professor der Mathematik am Conservatoire national des arts et métiers in Paris, zurück.

1) als Höchstzahlverfahren
Die Stimmen der Parteien werden durch 0,5 - 1,5 - 2,5 - … n-0,5 dividiert und die Sitze in der Reihenfolge der größten sich ergebenen Höchstzahlen zugeteilt. Es können ebensogut die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 … benutzt werden.

2) als Rangmaßzahlverfahren
Bei der Bestimmung der Ausschussbesetzung im Deutschen Bundestag werden anstelle der Höchstzahlen deren Kehrwert bzw. Rangmaßzahlen berechnet und die Sitze in der Reihenfolge der kleinsten Rangmaßzahlen zugeteilt

3) als Divisorverfahren - Teile und Runde
Die Stimmen der Parteien werden durch einen geeigneten Divisor; Stimmen pro Sitz; dividiert und nach Standardrundung gerundet

Banzhaf-Index

Der Banzhaf-Index ist eine Kennzahl, mit der die politische Macht eines einzelnen Mitglieds eines Abstimmungssystems gemessen wird. Ein Mitglied eines Abstimmungsystems ist u.a. eine Partei in einem Parlament oder ein Staat in einem Staatenbund. Im Allgemeinen wird jeder Stimmberechtigte eine unterschiedliche Anzahl von Stimmen haben, so dass die politische Macht unterschiedlich sein wird. Der Banzhaf-Index wird durch einfaches Abzählen bestimmt.

Für jedes Mitglied werden alle möglichen gewinnenden Koalitionen gezählt, an denen es beteiligt ist. Eine Koalition wird dabei allerdings nur mit gezählt, wenn für sie das Mitglied wesentlich ist, d.h. wenn sie nicht gewinnend ist, sobald das Mitglied sie verlässt.
Im Beispiel enthalte ein Parlament drei Parteien A, B und C mit der folgenden Sitzverteilung:

Partei	A	B	C
Sitze	50	49	1

Die Mehrheit von 51 Stimmen kann nur durch eine Koalition erreicht werden. Der Banzhaf-Index errechnet sich nun

A ist in drei gewinnenden Koalitionen: AB, AC und ABC
B ist in einer gewinnenden Koalition: AB
C ist in einer gewinnenden Koalition: AC

Jede dieser Koalitionen enthält die jeweilige Partei als wesentlichen Koalitionspartner. Die "Banzhaf-Macht" von A ist somit 3, während die von B und C jeweils 1 ist. Dies ergibt die gesamte Banzhaf-Macht, oder auch Penrose-Zahl, von 3+1+1 = 5. Der Banzhaf-Index ist dann genau die normalisierte Banzhaf-Macht:

Partei	A	B	C
Sitze	50	49	1
Banzhaf-Index	3/5	1/5	1/5

Auf den ersten Blick überraschend: Aus Sicht der Banzhaf-Macht ist B nicht mächtiger als C, obwohl B viel mehr Stimmen hat!
Die Situation kann auf den Fall verallgemeinert werden, in dem die bloße Stimmenmehrheit nicht ausreicht, um eine gewinnende Koalition zu ergeben, sondern in dem eine vorgegebene Stimmenquote erreicht werden muss, zum Beispiel eine 2/3-Mehrheit.

ISBN-Nummer

ISBN-Nummern dienen dazu, Bücher weltweit eindeutig zu identifizieren.
ISBN-Nummern (International Standard Book Number) bestehen aus 13 Zeichen. Diese Zeichen können aus den Ziffern "0" bis "9", Bindestrichen und den Buchstaben "X" bestehen. Der Buchstabe "X" steht für die Ziffer "10". Die Nummer ist unterteilt in 4 Abschnitte, getrennt durch einen Bindestrich: Gruppen-ID, Publisher-ID, Buch-ID und einer Pruefziffer. Die Anzahl der Zeichen in den ersten drei Abschnitten kann variieren, der letzte Teil besteht aber immer aus nur einem Zeichen. Außerdem bleibt die Gesamtzahl der Zeichen einer ISBN immer 13.
Die Gruppen-ID beträgt zum Beispiel in den USA 0, in Großbrittanien 1, in Frankreich 2, in Deutschland 3, in Russland 5, in China 7, in Indien 81, in Tschechien 80, in Polen 83, in Italien 88, in Griechenland 960. Ist die Gruppen-ID länger als ein Zeichen, so werden die anderen Gruppen gekürzt.

Die ISBN kann durch einen einfachen mathematischen Algorithmus überprüft werden. Dazu wird jede der dreizehn Ziffern mit einer Ziffer multipliziert. Diese Ziffer errechnet sich aus der Ziffer 11 minus der Stelle der Ziffer der ISBN.
Die Werte für jede Ziffer werden schließlich addiert. Ergibt die Division dieser Summe durch 11 eine ganze Zahl, so ist die eingegebene Nummer eine gültige ISBN-Nummer.

Beispiel:	ISBN	3 - 8 2 6 6 - 0 4 6 2 - 8
	Multiplikator	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
Ergebnis	30+72+16+42+36+0+16+18+4+8 = 242	

Diese Summe (242) dividiert durch 11 ist gleich 22, die Nummer ist also eine gültige ISBN.

Loknummern der Deutschen Reichsbahn

Ein ähnliches Verfahren wie das beim internationalen Buchcode (ISBN) wurde bei der Deutschen Reichsbahn für Loknummern verwendet.
Dazu multipliziert man die Ziffern der sechsstelligen Loknummern mit 1, 2, 1, 2, 1, 2 und addiert die Produkte, falls sie einstellig sind. Für zweistellige Produkte verwendet man deren Quersumme. Die gesuchte Prüfziffer ergibt sich als Differenz der Summe zum nächstgrößeren Zehner.

Beispiel: 246175
246 ist die Baureihen-Nummer. Die 2 am Anfang steht im Allgemeinen für eine E-Lok, eine 1 für eine Diesellok und eine 0 oder 3 für eine Dampflok. Dabei wird die 0 meist nicht angezeigt. 175 ist die laufende Nummer innerhalb dieser Baureihe.

Daraus ergibt sich als Prüfziffer Summe $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 2 + 8 + 6 + 2 + 7 + 10$;
unter Beachtung der Quersumme $2 + 8 + 6 + 2 + 7 + 1 = 26$;
Damit ist die Prüfziffer $30 - 26 = 4$.
Die vollständige Loknummer ist 246175 - 4.

Pharmazentralnummer

Ein zur ISBN-Nummerbestimmung ähnliches Verfahren wird in Apotheken zur Kennzeichnung von Arzneimitteln verwendet.
Die Pharmazentralnummer (PZN) wird von der Informationsstelle für Arzneispezialitäten (IFA) für alle apothekengängigen Produkte vergeben. Neben der eindeutigen Identifikation einer Fertigarzneimittelpackung (Anbieter, Darreichungsform, Stärke, Packungsgröße) bildet die PZN auch die Grundlage für Bestellwesen und Abrechnung von Arzneien im Gesundheitswesen.
Die PZN wird aber in laufender Reihenfolge vergeben, das heißt, man kann aus ihr keine ableitbaren Informationen entnehmen (Hersteller, Wirkstoffe, etc). Die Pharmazentralnummer ist nicht identisch mit der ebenfalls im deutschen Gesundheitswesen verwendeten Hilfsmittelnummer.
In Österreich ist die 6-stellige PZN in die EAN-Nummer integriert. Die Packungen tragen einen EAN 13-Strichcode.
Die letzte Ziffer der 7-stelligen Pharmazentralnummer abcdefp wird bei der Pharmazentralnummer durch

$$2a+3b+4c+5d+6c+7f \text{ modulo } 11$$

berechnet. Ist der Rest 10, wird diese Pharmazentralnummer nicht vergeben.

Luhn-Algorithmus, Modulo 10-Algorithmus

Der Luhn-Algorithmus oder Modulo 10-Algorithmus wurde in den 1960er Jahren von Hans Peter Luhn zur Überprüfung von Identifikationsnummern entwickelt. Diese einfache Prüfsummen-Methode wird u.a. bei Kreditkartennummern oder der kanadischen Sozialversicherung verwendet.
Der Algorithmus erkennt Fehler an einzelnen Ziffern, sowie Vertauschungen nebeneinanderstehender Ziffern, jedoch nicht die Vertauschung von 09 mit 90.

Algorithmus:
1) Beginnend mit der zweitletzten Ziffer und nach links durchlaufend, verdopple den Wert jeder zweiten Ziffer. Für jede Ziffer, aus welcher 10 oder mehr wird, bilde die Quersumme. Damit werden aus den Ziffern 0 bis 9 die Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9.
2) Addiere die entstandenen Ziffern.
3) Ist die letzte Ziffer der Summe gleich 0, d.h. modulo 10 gleich 0, so ist die Nummer nach dem Luhn-Algorithmus gültig, andernfalls nicht.

C#-Code:
```
public static bool CheckLuhn(string data) { int sum = 0; int len = data.Length;
for(int i = 0; i < len; i++) {  int add = ((int)data[i] - 48) * (2 - (i + len) % 2);
  add -= add > 9 ? 9 : 0;  sum += add; }
  return sum % 10 == 0; }
```
Bei EC Karten unterscheidet sich die Berechnung der Nummer geringfügig. Hier wird mit der Verdopplung an der letzten rechten Ziffer begonnen.

Kreditkartennummer

Kreditkarten besitzten eine 16stellige Kartennummer, die mit einem besonderen Verfahren gebildet wird. In diesem Teilprogramm wird eine solche Nummer auf ihre Gültigkeit getestet.
Ermittelt das Programm, dass die Nummer tatsächlich einer Kreditkarte entspricht, wird zusätzlich untersucht, ob diese Nummer zu den Kreditkartenfirmen American Express, Visa, Mastercard/Eurocard/Accesscard bzw. Discover gehört.

Deutsche Ausweisnummer

Deutsche Ausweisnummern bestehen aus drei Zahlenblöcken, der Erstwohnsitzkennzahl, dem Geburtsdatum und dem Ablaufdatum sowie einer zusätzlichen Prüfziffer.
Beispiel für eine Personalausweisnummer:

1220000016D<<4509303<0110052<<<<<<1
aaaabbbbbpD<<jjmmttp<jjmmttp<<<<<<p

Dabei ist aaaa die Erstwohnsitzkennzahl, bbbbb eine fortlaufende Nummer, jjmmtt Jahr, Monat und Tag des Geburtstages bzw. Ablaufdatums. p ist die Prüfziffer.
Prüfziffern werden gebildet, indem die erste Ziffer mit 7, die zweite mit 3, die dritte mit 1, die vierte wieder mit 7 usw. multipliziert und das Ganze summiert werden. Die Einerstelle ist dann die Prüfziffer.
Beispiel: aaaabbbbb $1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 2 + 1 = 16$ $p = 6$
jjmmtt $4 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 403$ $p = 3$
jjmmtt $1 \cdot 3 + 1 + 5 = 412$ $p = 2$
gesamt $1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 2 + 1 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 5 + 9 \cdot 3 + 3 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 = 141$
$p = 1$

Österreichischer Personalausweis

Struktur

1. Zeile: N Seriennummer PZ
I D A U T x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 < p_{SN} < < < < < < < < < < < < < < < < < < < <
2. Zeile: Geburtsdatum PZ G Ablaufdatum PZ G
(invers) (invers)
j j m m t t p_{GD} g j j m m t t p_{AD} A U T < < < < < < < < < < < < < < p_{ges}
3. Zeile: N a c h n a m e < < V o r n a m e < < < < < < < < < < < < < < < <

N: Nationalität (AUT = Österreicher); G: Geschlecht (M oder F); p_{SN}: Prüfziffer der Serienummer, p_{GD}: Prüfziffer des Geburtsdatums, p_{AD}: Prüfziffer des Ablaufdatums, p_{ges}: Prüfziffer über alle Ziffern
Beim Personalausweises wird der internationale, von der ICAO definierte Zeichensatz verwendet, der keine sprachspezifische Zeichen kennt (z.B. Akzente, Betonunszeichen, Ligaturen, Umlaute etc.).
http://WWW.Help.gv.AT/

Firmenbuchnummer

Das Firmenbuch; Handelsregister; dient als öffentliches Register zur Offenlegung von Tatsachen nach handelsrechtlichen Vorschriften der Bundesrepublik Österreich. Jeder eintragungspflichtige Rechtsträger erhält in diesem Register eine Nummer, die mit einem Prüfbuchstaben endet.
Struktur x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 p
x = evtl. linksseitig mit Nullen zu ergänzen ; p = A, B, D, F, G, H, I, K, M, P, S, T, V, W, X, Y, Z

Die Ziffernfolge wird von links nach rechts mit 6, 4, 14, 15, 10, 1 gewichtet. Die Produkte werden summiert. Von der Summe wird der volle Rest zur nächst niedrigeren durch 17 teilbaren Zahl (modulo 17) bestimmt. Die erhaltenene Prüfziffer wird anhand der Schlüsseltabelle in einen Buchstaben übersetzt.
Schlüsseltabelle: 0 A , 6 I , 12 V , 1 B , 7 K , 13 W , 2 D , 8 M , 14 X , 3 F , 9 P , 15 Y , 4 G , 10 S , 16 Z , 5 H , 11 T

Einheitliches Kontonummernsystem EKONS

EKONS ist die Abkürzung für "Einheitliches Kontonummernsystem", das bei Banken und Sparkassen verwendet wird.
Die Nummern sind, je nach Geschäftsvolumen, maximal zehnstellig. Die ersten, maximal 4 Ziffern dienen der Klassifikation der Konten. Die restlichen 6 Ziffern bilden die eigentliche Kontonummer einschließlich der Prüfziffer, die an der letzten Stelle steht. Bei den einzelnen Banken und Sparkassen sind sehr unterschiedliche Prüfziffernverfahren üblich.

Verfahren 2

Die Ziffern werden abwechselnd, von rechts beginnend, mit 2 bzw. 1 multipliziert, und die Summe dieser Produkte wird durch Addition der Prüfziffer p zur nächsten durch 10 teilbaren Zahl ergänzt, d.h., für die Kontonummer abcd efghi p mit der Prüfziffer p gilt: $2i + h + 2g + f + 2e + d + 2c + b + 2a + p \equiv 0$ modulo 10

Verfahren 1

Bei dem Verfahren wird anstelle der Produkte - falls die Produkte zweistellig sind - die Quersumme der Produkte verwendet.
Bei Variante 2 entdeckt man alle Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern und fast alle Fehler durch Verwechslung einer Ziffer.
Bei Variante 1 werden dagegen jeder Fehler durch Verwechslung einer Ziffer und fast alle Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern erkannt. Drehfehler nicht benachbarter Ziffern und Verwechslungen zweier Ziffern werden oft nicht aufgedeckt.

Darüber hinaus sind weitere über 100(!) Verfahren in Verwendung. Die Sparkasse Chemnitz nutzt z.B. Wichtungen der Ziffern von 3, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Die Summe wird auf spezielle Weise modulo 11 ausgewertet.
Rechts werden nur 8 Verfahren erkannt.

Kontonummernsystem

Nachfolgend einige in Deutschland genutzte Verfahren zur Bestimmung der Prüfziffer einer Kontonummer:

Kennzeichen 00

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2
Die Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 2, 1, 2, 1, 2 usw. zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert, nachdem jeweils aus den zweistelligen Produkten die Quersumme gebildet wurde (z.B. Produkt 16 = Quersumme 7).
Nach der Addition bleiben außer der Einerstelle alle anderen Stellen unberücksichtigt. Die Einerstelle wird von dem Wert 10 subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer (10.Stelle der Kontonummer). Ergibt sich nach der Subtraktion der Rest 10, ist die Prüfziffer 0.

Kennzeichen 01

Modulus 10, Gewichtung 3, 7, 1, 3, 7, 1, 3, 7, 1
Die Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 3, 7, 1, 3, 7, 1 usw. zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert. Nach der Addition bleiben außer der Einerstelle alle anderen Stellen unberücksichtigt. Die Einerstelle wird von dem Wert 10 subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer. Ergibt sich nach der Subtraktion der Rest 10, ist die Prüfziffer 0.

Kennzeichen 02

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2
Die Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2 zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert. Die Summe ist durch 11 zu dividieren. Der verbleibende Rest wird vom Divisor (11) subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer.
Verbleibt nach der Division durch 11 kein Rest, ist die Prüfziffer 0. Ergibt sich als Rest 1, ist die Prüfziffer zweistellig und kann nicht verwendet werden. Die Kontonummer ist dann nicht verwendbar.

Kennzeichen 03

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 … die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 01.

Kennzeichen 04

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 4 … die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 02.

Kennzeichen 05

Modulus 10, Gewichtung 7, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 3, 1 … die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 01.

Kennzeichen 06

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7 ; modifiziert
Die einzelnen Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 3 ff. zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert. Die Summe ist durch 11 zu dividieren. Der verbleibende Rest wird vom Divisor (11) subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer.
Ergibt sich als Rest 1, findet von dem Rechenergebnis 10 nur die Einerstelle (0) als Prüfziffer Verwendung. Verbleibt nach der Division durch 11 kein Rest, dann ist auch die Prüfziffer 0. Die Stelle 10 der Kontonummer ist die Prüfziffer.

Kennzeichen 07

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 … die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 02.

Kennzeichen 08

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 ; modifiziert … die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 00, jedoch erst ab der Kontonummer 60 000

Kennzeichen 09

keine Prüfzifferberechnung

Kennzeichen 10

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; modifiziert … die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 06.

Kennzeichen 11

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; modifiziert

Die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 06. Beim Rechenergebnis 10 wird die Null jedoch durch eine 9 ersetzt.

Kennzeichen 13

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1
Die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 00. Die für die Berechnung relevante sechsstellige Grundnummer befindet sich in den Stellen 2 bis 7, die Prüfziffer in Stelle 8 (von links nach rechts gezählt).
Die zweistellige Unterkontonummer (Stellen 9 und 10) darf nicht in das Prüfzifferberechnungsverfahren einbezogen werden. Ist die Unterkontonummer "00", kommt es vor, dass sie nicht angegeben ist.
Ergibt die erste Berechnung einen Prüfzifferfehler, wird empfohlen, die Prüfzifferberechnung ein zweites Mal durchzuführen und dabei die "gedachte" Unterkontonummer 00 an die Stellen 9 und 10 zu setzen und die vorhandene Kontonummer vorher um zwei Stellen nach links zu verschieben.

Kennzeichen 14

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7
Die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 02. Es ist jedoch zu beachten, dass die zweistellige Kontoart nicht in das Prüfzifferberechnungsverfahren mit einbezogen wird.
Die Kontoart belegt die Stellen 2 und 3, die zu berechnende Grundnummer die Stellen 4 bis 9. Die Prüfziffer befindet sich in Stelle 10.

IBAN, International Bank Account Number

Die International Bank Account Number (IBAN) ist eine internationale, standardisierte Notation für Bankkontonummern. Die Notation wird durch die ISO-Norm ISO 13616:2003 beschrieben.
Die IBAN setzt sich in Deutschland folgendermaßen zusammen:

2-stelliger Ländercode; bestehend aus Buchstaben
2-stellige Prüfziffer; bestehend aus Ziffern
max. 30-stellige Kontoidentifikation; bestehend aus Buchstaben und/oder Ziffern

Die IBAN kann maximal 34 Stellen umfassen. Eine deutsche IBAN hat immer exakt 22 Stellen.

DEpp bbbb bbbb kkkk kkkk kk
DE … Länderkennzeichen für Deutschland
pp … zweistellige Prüfziffer
bbbbbbbb … die 8-stellige deutsche Bankleitzahl
kkkkkkkkkk … die 10-stellige Kontonummer

Berechnung der Prüfsumme

Zur Berechnung der Prüfsumme wird zunächst eine Zahl erstellt. Diese setzt sich aus der Bankleitzahl (8 Stellen) + Kontonummer (10 Stellen) + Länderkürzel kodiert (4 Stellen) + 00 zusammen. Hat die Kontonummer weniger als 10 Stellen werden entsprechend Nullen vorangestellt.
Die beiden Buchstaben des Länderkürzels werden durch ihre Position im lateinischen Alphabet + 9 ersetzt (A = 10, B = 11, …, Z = 35). Nun wird der Rest berechnet, der sich beim Teilen der Zahl durch 97 ergibt (Modulo 97). Das Ergebnis wird von 98 abgezogen. Ist dieses kleiner als 10, wird eine Null vorangestellt, so dass sich erneut eine zweistellige Prüfsumme ergibt.

Aus der achtstelligen Bankleitzahl und der zehnstelligen Kontonummer eines Kontos bei einem deutschen Geldinstitut kann die IBAN relativ einfach konstruiert werden.
Delphi-Quelltext:

```
FUNCTION CreateGermanIBAN(Const BankCode,Account:String):String;
var cs, i,cc:integer; s:string;
begin
   if (Length(BankCode)<>8) or (Length(Account)<>10) then Exit('');
   s:=BankCode+Account+'131400'; // 131400 = 'DE00'
   cs:=0;
   for i:=1 to Length(s) do begin
      cs:=(cs*10+Ord(s[i])-Ord('0')) mod 97;
   end;
   cc:=98-cs;
   if cc<2 then inc(cc,97); // 00-->97, 01--> 98
   result:='DE00';
   result[3]:=Chr(cc div 10+Ord('0'));
   result[4]:=Chr(cc mod 10+Ord('0'));
   result:=result+BankCode+Account;
end;
```

Euro-Banknoten

Zur Festlegung der Kontrollzahlen auf Euro-Banknoten sind von offizieller Seite keine Angaben zu erhalten. Sicher ist über die Struktur der 12stelligen Kontrollzahl:

Land	lfd. Nummer	Prüfziffer
a	x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10	p

Dabei werden verwendet für a die Buchstaben A-Z und für die x_i die Ziffern 0-9.
Länderkodierungen: J Großbritannien; K Schweden; L Finnland; M Portugal; N Österreich; P Niederlande; R Luxemburg; S Italien; T Irland; U Frankreich; V Spanien; W Dänemark; X Deutschland; Y Griechenland; Z Belgien

Berechnung der Prüfziffern: Die Buchstaben werden durch ihre Positionszahl im Alphabet ersetzt, z.B. N = 14 oder X = 24. Die Quersumme der Ziffernfolge wird errechnet. Von der Quersumme wird der ganzzahlige Rest zum nächst kleineren Vielfachen von 9 bestimmt (Modulo 9). Die Prüfziffer ergibt sich nach Subtraktion des Restes von 8. Ist die Differenz 0, gilt p = 9.
Bei der Validierung muss die einstellige Quersumme der Quersumme 8 ergeben.

Europäische Artikelnummer EAN

EAN ist eine Abkürzung für "Europäische Artikelnummer", die man auf sehr vielen Artikeln in Form eines Strichcodes bzw. als 13- oder 8-stellige Ziffernfolge findet. Mit Hilfe von Scannern kann der Strichcode an Computerkassen eingelesen werden.
Bei der 13-stelligen Nummer geben die ersten beiden Ziffern das Herstellungsland an, z.B. 40, 41, 42, 43 oder 44 für Deutschland. Die nächsten 5 Ziffern stehen für den Hersteller, und eine weitere Gruppe von 5 Ziffern für das entsprechende Produkt. Die letzte Ziffer ist die Prüfziffer p.
Man erhält die Prüfziffer, wenn man die ersten 12 Ziffern abwechselnd von links beginnend mit 1 bzw. 3 multipliziert und die Summe dieser Produkte durch Addition der Prüfziffer p zur nächsten durch 10 teilbaren Zahl ergänzt. Somit gilt für die Artikelnummer ab cdefg hikm p mit der Prüfziffer p:

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3k + m + 3n + p \equiv 0 \text{ modulo } 10$$

Durch dieses Prüfziffernverfahren werden an der EAN Fehler durch Verwechslung einer Ziffer immer aufgedeckt und Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern in den meisten Fällen erkannt. Oft nicht aufgedeckt werden Drehfehler durch Vertauschen nicht benachbarter Ziffern und Verwechslungen zweier Ziffern.

EAN-Strichcode

Dieser Code dient zur maschinellen Erfassung von Zahlen. Die Europäische ArtikelNummer ist nach der DIN 66236 festgelegt.
Für den Strichcode werden die EAN-Codes in Bitcodes umgewandelt. Wert 1 bedeutet eine Linie, Wert 0 einen Zwischenraum.
EAN kodiert zwei getrennte Zifferngruppen mit je 6 Stellen. Jede Ziffer ergibt ein Muster aus zwei Streifen und 2 Zwischenräumen ganz spezieller Breite. Die erste Ziffer des Codes wird in den ersten Sechserblock verschlüsselt.
Am Anfang, am Ende und in der Mitte werden spezielle Strichcodes eingefügt

Randzeichen	Teil 1	Trennzeichen	Teil 2	Randzeichen
101	Stellen 2-7	01010	Stellen 8-12	101

Für die Bitmuster, in die die Ziffern übersetzt werden, gibt es drei Zeichensatztabellen

Ziffer	Zeichensatz A	Zeichensatz B	Zeichensatz C	Ziffer	Zeichensatz A	Zeichensatz B	Zeichensatz C
0	0001101	0100111	1110010	1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100	3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100	5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000	7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000	9	0001011	0010111	1110100

Die Sätze A und B beginnen immer mit 0 und enden mit 1, bei C ist es umgekehrt.
Im zweiten Zahlenteil wird immer der Zeichensatz C verwendet. Im Teil 1 muss aber zusätzlich die erste Ziffer verschlüsselt werden, weshalb man die Zeichensätze A und B wechselweise verwendet.
Für die erste Stelle 0 verwendet man dann für die 2. bis 7.Stelle die Zeichensätze AAAAAA, für die 1.Ziffer '1': AABABB, '2': AABBAB, '3': AABBBA, '4': ABAABB, '5': ABBAAB, '6': ABBBAA, '7': ABABAB, '8': ABABBA und '9': ABBABA.

EAN-8 Kurzcode

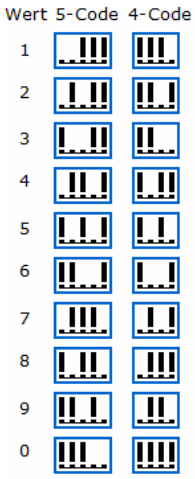
Auf speziellen Antrag bekommen Firmen eine Kennung mit 2 Nullen am Schluss. Haben sie dann maximal 100 Artikel zu verzeichnen, wird z.B. der österreichische EAN-Code 90-12300-00058-x verkürzt zu 90-12358-x, indem man die mittleren Nullen unterdrückt.
Dieser EAN-8-Kurzcode ist achtstellig und wird folgendermaßen kodiert:
Zuerst folgt ein Randzeichen 101, dann die ersten 4 Stellen mit Zeichensatz A (siehe EAN-Strichcode), das Trennzeichen 01010, dann die zweiten 4 Stellen nach Zeichensatz C, schließlich das Randzeichen 101 am Ende.

EAN-ISBN-Code

Der Ländercode 978 wurde für die Codierung von Büchern reserviert. Deshalb beginnt der EAN Code auf jedem Buch mit diesem Wert.
Darauf folgt die ISBN Nummer ohne die zugehörige ISBN-Prüfziffer; die anders ermittelt wird; und am Ende die sich daraus ergebende EAN Prüfziffer.
Zum Beispiel hatte die eine frühere Version dieses Programms den EAN-Code 9783828-775275 und die ISBN-Nummer 3-8287-7527-6.

price-add-on-Code

Ein fünfstelliger Strichcode, der vor allem auf Büchern neben dem EAN-Code verwendet wird, ist der price-add-on-Code, welcher vor allem in den USA verwendet wird und in Europa noch unüblich ist. Beginnt der Code mit einer "5", die für Dollar als Währung steht, so folgt darauf der Preis der Ware.



Postcode, Adresscode

Mit Postcode oder Adresscode wird ein Strichcode bezeichnet, den die Deutsche Post auf Briefe und Postkarten druckt. Damit soll eine schnellere maschinelle Weiterverarbeitung möglich sein.
Der Code besteht aus einer Folge von 5 mm hohen orangefarbenen Strichen, die auf den unteren rechten Rand des Briefes gedruckt werden.

Bei der 5-Bit-Codierung besteht jedes Segment aus 5 Stellen, aus drei Strichen und zwei Leerräumen. Die erste Stelle hat den Wert 0, die zweite den Wert 1, dann folgen die Werte 2,4 und 7. Die Summe der Stellen, an denen keine Striche stehen, ergibt die Zahl. Der Sonderfall 4+7 = 11 wird zur Kodierung der Ziffer 0 genutzt.
In der 4-Bit-Codierung werden die Stellen von rechts nach links mit den Werten 1, 2, 4 und versehen, Ausnahme ist 8+2 = 10 für die Ziffer 7.

Prüfzifferberechnung
Bei 5-Bit-codierten Ziffern gilt für die Prüfziffer:

Prüfziffer = 10 - (Quersumme aller Ziffern mod 10)
Die Prüfziffern 10 und 0 werden beide als Null codiert.

Handelsklassencode für Eier

In Europa müssen Eier mit einem Handelsklassencode versehen sein. Dieser setzt sich zusammen aus
1) der Haltungsform
0 = Ökologische Erzeugung 1 = Freilandhaltung (Freiland)
2 = Bodenhaltung (Boden) 3 = Käfighaltung (Käfig)
2) dem Herstellerland, u.a.
AT = Österreich BE = Belgien CZ = Tschechien
DE = Deutschland DK = Dänemark FR = Frankreich
IT = Italien NL = Niederlande PL = Polen
Bei deutschen Eiern ist aus den ersten beiden Ziffern das Bundesland zu ersehen, in dem der Betrieb liegt:
01 = Schleswig-Holstein 02 = Hamburg 03 = Niedersachsen
04 = Bremen 05 = NRW 06 = Hessen
07 = Rheinland-Pfalz 08 = Baden-Württemberg 09 = Bayern
10 = Saarland 11 = Berlin 12 = Brandenburg
13 = Mecklenburg-Vorp. 14 = Sachsen 15 = Sachsen-Anhalt
16 = Thüringen
Danach folgt die eigentliche Betriebsnummer, angeführt mit einer Ziffer "3" für den Regierungsbezirk.

Gewichtsklassen

S (klein) … unter 53 Gramm M (mittel) … 53 bis unter 63 Gramm
L (groß) … 63 bis unter 73 Gramm XL (extra groß) … über 73 Gramm
Quelle: http://www.code-knacker.de/hkl_eier.htm

Quarterback Rating

Das Quarterback Rating ist ein statistischer Wert, der die Leistung eines Quarterbacks in der US-amerikanischen Football League messen soll.
Der Wert berechnet sich aus den Attemps A (Zahl der geworfenen Pässe), Completions C (Zahl der von der eigenen Mannschaft gefangenen Pässe), Yards Y (Yards des durch Pässe gewonnenen Raumes), Touchdowns T (Zahl der geworfenen Touchdowns) und Interceptions I (Zahl der verlorenen Pässe).

Es gibt unterschiedliche Berechnungsmethoden für das Quarterback Rating. Im US-amerikanischen Mathematiklehrbuch "Algebra 2" (Glencoe McGraw-Hill) wird genannt:

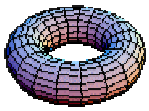
Rating = 100/6 ((C/A -0,3)/0,2 + (Y/A -3)/4 + T/A/0,05 + (0,095 - I/A)/0,04)
In Wikipedia wird dagegen ausgeführt, dass alle vier Einzelsummanden auf mindestens 0 und höchstens 2,375 begrenzt werden.

Beispiel: 2005 erzielt Ben Roethlisberger von den Pittsburgh Steelers 168 Completions bei 268 Attemps mit 2385 Yards. Er warf 17 Touchdowns und 9 Interceptions.
Damit ergibt sich ein Rating von 98,55.

Mathematische Eselsbrücken
Innen hat die Kugelei 4/3 π mal r hoch drei. Und was sie auf dem Buckel hat ist 4 mal π mal r Quadrat.
Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen.
Punktrechnung vor Strichrechnung geht. Die Klammer über allen steht.
Der Nullen sechs hat die Million, mit neun glänzt die Milliarde schon, es folgt mit zwölf ihr die Billion, zuletzt mit achtzehn die Trillion.
Durch Null teile nie! Dies bricht dir das Knie.
Zwei Punkte begrenzen die Strecken, die Strahlen sind einmal fixiert, wo unbegrenzt Linien sich recken, sind sie als "Gerade" definiert.
Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie!
Wie viele Tausende bewundern Geister Himmlisch wie du und göttlich!
Noch reiner in Aeonen
Wird das uns strahlen
Wie im lichten Morgenrot!
(Wortlängen ergeben die ersten Ziffern von π)

Mathematische „Tierkreiszeichen"

AREAS (Mar 21-Apr 19)


TORUS (Apr 20-May 20)

M and I (May 21-Jun 21)

ANSWER (Jun 22-Jul 22)

E-O (Jul 23-Aug 22)

ERGO (Aug 23-Sep 22)

E-BAR (Sep 23-Oct 22)

SCORE-PI-O (Oct 23 - Nov 21)

SLANTED-AREAS (Nov 22-Dec 21)

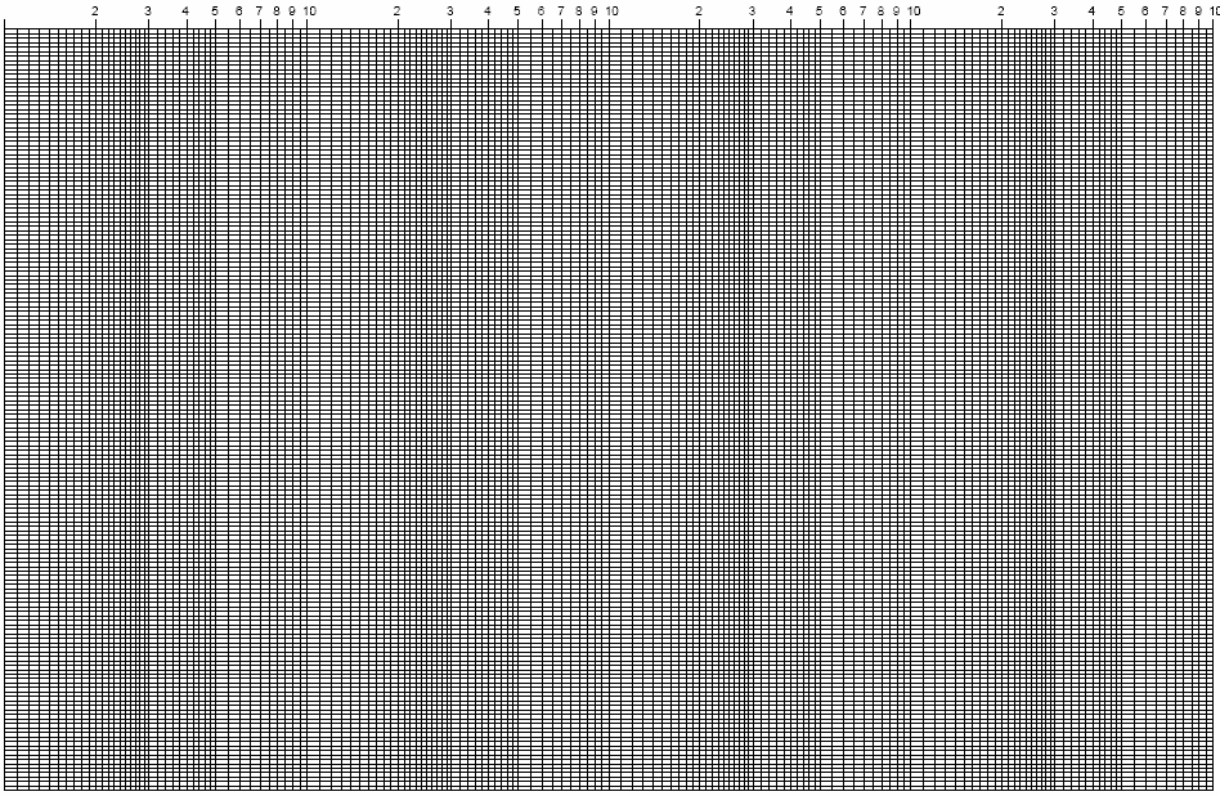
CAPRI-CHORD (Dec 22-Jan 19)

A-SQUARY-PLUS (Jan 20-Feb 18)

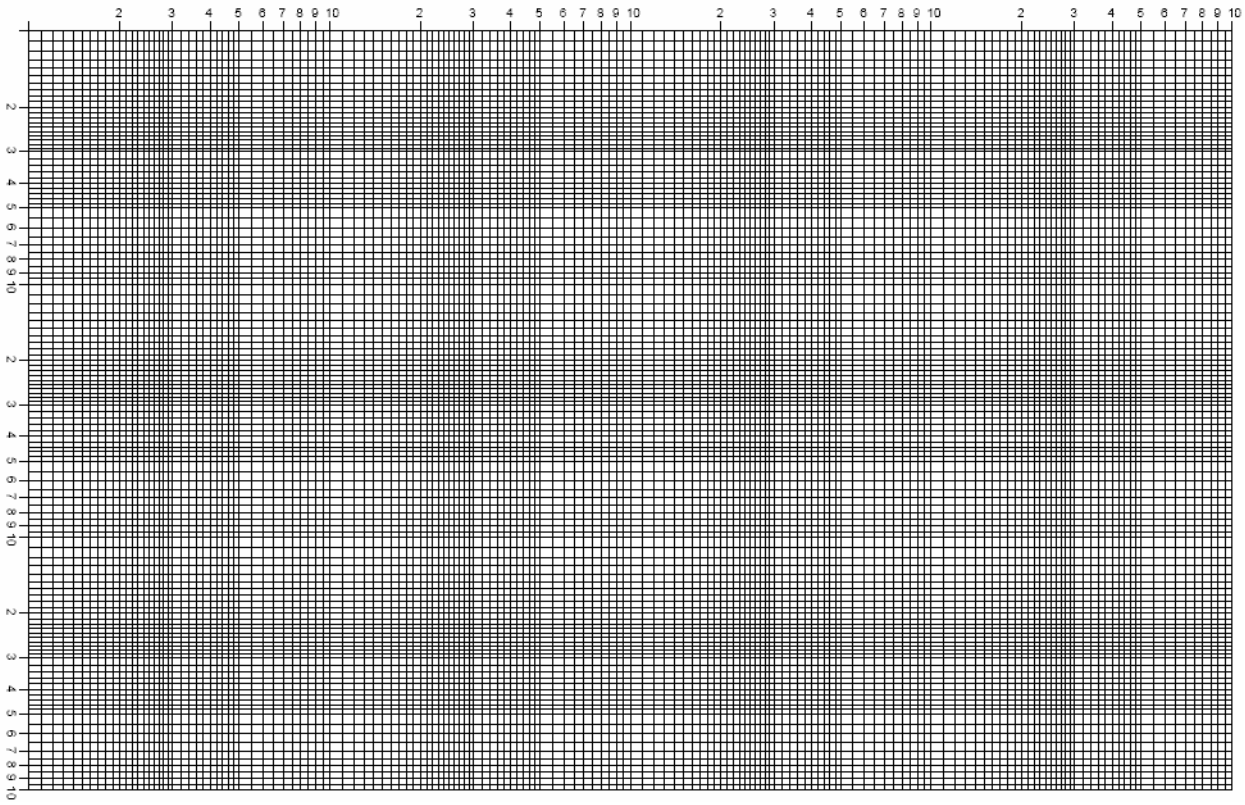
PI-CEES (Feb 19-Mar 20)

Mathematische Papiersorten

Logarithmisches Papier



Doppeltlogarithmisches Papier



PI-Code

DRSQLOLYRTRODNLHNQTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMELMUEXROIQIYALVUZVEBMIJPQQXLKPLRNCFWJPBYMGGOHJMMQISMS
SCIEKHVDUTCXTJPSBWHUFOMQJAOSYGPOWUPYMLIFSFIIZRODPLYXPEDOSXMFQTQHMFXFPVZEZRKFCWKXHTHUHCPLEMLNUDTMSPWB
BJFGSJHNCOXZNDGHKVOZRNKWBDMFUAYJFOZXYDKAYMNQUWLYKAPLYBIZUYBROUJZNDDJMOJYOZSCKSWPKPADYLPCTLJDILKUUWKQ
KWJKTZMELGCOHRBRJENRQVHJTHDLEEJVIFAFQICQSMTJFPPZXZOHYQLWEDFDQJRNUHRLMCNKWQJPAMVNOTGVYJQNZMUCUMYVNDBP
GMZVAMLUFBRZAPMUKTSKBUPFAVLSWTWMAETMVEDCIUJTXMKNVXKDTFGFHQBANKORNPFBGNCDUKWZPKLTOBEMOCOJGGXYBVOAET
MHCTTMAJDXAUWWPYVMUFSUDJVOCMAHMIIHNCLYWNPIOJEGQWZMWRUYQEWJYVBUHOOWAMCTUXRIIIRVSLLTAVUTWBGXMEGGFJW
QMSVNXIPEAZLBDLNHSXZEDQQDOLAPEZHKWMOAERLSUJXVVHKRFKFEZPCHLMPDWRVEROCKWHPQFDOWOYVJWPXUOGYHTIDUARQZH
EQQVONLMVZSNOPAXNLEKFNEWFCEUJLEXVEDMNMHUYOXFANUJCFMVSYNWTUHPWLQQGNVRBOCJHXEIVLOYXXYWVASZHPSEPNLWEZ
GSOWPEWWVSVYTTTXLSWCWCEHEHCWDFMXNMMHQSUVYIYWJLGHIJCLHYZTSBKPLHKQNCDVRWRSIBKSAOITVTAXNDYKNHMMRPVIJYJ
LXNHQTUZQQCTCKDLDWBRBQZMVGVHUBZEFKHSLDIMFLRPADNTJBCCDUILOIKJMQFBVFDEQOEOSNXRFDMLOPCSREJFTGRQEBPPYLUIY
SLBBOFNYZQYNRMZZTEHDYUQYRNZXISKCDDTBTLWGXYHMSAFBLBTXNIROQMKUKUTVEPNQXNVZZWTYMZFCPVSRYGCYGSVQUFSBDAR
UUWJIQWOIYIJDGWUAQLWJSQWHIIZOAHUSDLCMFUULIKUQPHWRUULEMPCVODPCWYZRDJIZIMZUZDFJZAALJSJRVDOWHMCJDRMKVS
NHGGMSDBFCLNCQHHTDANRGGQLCGTIHKFQHXZDGMDSLPOXSIWMDGSPFCYYLRELELLGNZQKQISJHHUZIEVWUZVLYMXHDOPCILFRLEB
VJYRORHHHKGWZASSWDBDRMLRXPDFQQCKKOIQTSZOSNYXRSINQJHUXNARTIDKCFARCKCPAAQACFSPJXOPAGKURRSZBKQJODMATYJN
ACETVWYLZCWGMJWMEUGSTLBDKPXMWNXILHEHTFFNNVYMFOFJTQRUVUPMKESTXAQIJYIKPXHAOBMWLIDXEDHDRDEDTDQIFFWXORS
AZBYILCXDWCOQKYBKCWTKLPFFIGJBKBTXPEKWNEUDOJPMQXBNSGYZSKEECSEZALHRWFOLIZNGWWROATNAMDRJTYGIBWBPYQGHYO
JJXWVFTURGGUXLJDXSAEGHSOCESSTUKNHNXTQVHXXSDDVGGATLKAEHZQMAJMEGKVFKESGMRYNGIANWTJABUIQWILULVUWTDRTHB
WJCDJJAKGDTBNNIEJNHWRPEYUKOJFVJVKGHLGPRGGNJIRSMSTDCIGBEAVRKXWTRSIAFGFJHFFMDVPJKMREWWYJTRTAUEXVKTVGOWU
DNFVIEXDKAJNUMXSTRCNRXBEQVBBNIPRWJNPGIEWOSYSDWJCHPUSUYUPSWLGAQFHRUHREDJSODLJTDMFXQQTYRDBUWURRRRCFVA
TMUVAWWQCNKIVBIXHFECGLWXBJXUOOXWITIHYBSJLVRWDWQZIFYFJEQCOLJLLWBQHBFBHYZKZRBPEGUJQGZAATPFWWTLVIJCPULOK
GNDJFEBOVCHFHPFXCCJJMIKIAIAGKQJWRJIUYYWJNXMHQVINEUMWZVHMQKMCNNQIGQAPOFROHSINYPBQZBFBRQWRGEFVISABHNDNJ
TZKGWVUGCLXWNFBHWTBFKJZHJJLXIZDRMANIMNAPHMLURMIVZXEFPEPVPGAPSRCBDYDOZJDTTWIHWEHZSWEGMMBBNDJOLRJBGIPQ
WWZIAXVMBJNMPEFZNISPXBXHTAXNDZXIKSYKDKAXUHMPQJGVWSZYVEPENWKABDLZGEWGIZZHPXYNWDPRDMPVKLSDSMAEQYKZVK
XXLYMGMSFZHTYEJSRIBTSNJJKGESFTLEOEKFIWULSCJJTMOGXPIHIFUIBSUFMDASLOXTVNSQZIWBTYVILRKYNAMHTXPZNKULKCBKQYXC
JHSBHEDXIOYJBAVBVVNXFWLSJSIVSQLSOLADORLPDPARGZSKSSMGYXLHVEEAYSQHCYTKGVAYOHBXEHPKQORHOZCPTMIMTRQIMSJUM
QXKJLLVYZWPXUIVOLOMLFEOZMOSBKBXQZKUMVQLSFICUHMCVWKNAQFHZOWQQQNLCESMJPIVFZZUOAFMQBLSYGMONPYENLMDYWN
AZERWZUVVHIWVHQOBUIYVFQLQGNOWCSZNYADGMCLLRTHQAARCSNWKEZXTTMVVJGLXBSGJEVPAXHTGHQPMNGDWHRHNHCSLRXDG
MZNZRQBFJGIRHZLWJBUGEWKFBPSJXAZUMSLNTDVMJOSGSUWIGJATIRLZRGXYHVMRTPRZWSICBYAGPDSMHDXOGVEGDBEYYIFJMFKU
MNFVHFISQAIXCHKOLJGXQYJKGCJXTJFJSPBNYBGYCQABSWJLAKUHFNJGGJUIJYQMXKCMKRQCTHZXGQEJBPXXLJELUJXYWVRSQIHATGFF
MMPUROLKCEKISRQACOQAOVQDKSZGATUCYIOKBCDSEESRQWFAEZNNLXBVATPHTTIEWSXHMWUNTJXPBBHNEIZOUECOUZVJIVPHIMPH
JUSJQZEPIIIXLQKZCPBUNKAFQPMVOMEUMSYVIZIQYDGWDIXPFSEZOFEWVRTOMQQIYRADBNNPJNDVROKWVHPORREUQLFVTQWNKYJM
NOCTQDYVOOGXCJGWYKBUZLQKOBLGVCZXPGLSGXDJWDKFWISOSUHSZBDNRUVZPUHORTESJXDCCDDCGONUYDLNVFYNMKSSWEBZU
DJCSFMXDCWITZDAAQZGGRHNVYTTCCDPZFGYDFTMQQHCTNRLLVOTYMDPVGJMSZAHDCWDOILGYSVGFHLDYJYWYFOSRLWCMJECHGFO
NTOWYABGSVCUHGDYEZGEBFMOCIIJXSVXJKQXPNMFZCWZVWPLRBWBGCFLNGILWGASFPTNOECCZTUADWJEVPLQBPQBZZGGPLDYOMH
HMYRDMMAUYCUTPWQSJIWVEBNZJTTKCFSOHNDZZKKFTCRFCOQHPOELNBJYIWZROJAADOXJDZMVLWDOPWERBGWIILVVUIAPPXPJOEK
FAGAPSCYXKIMTZGQLJEZPKVLNCDWCZXXESUVTCZNFZXCGXXPJOZBGJZJUGDGITQXIEHNQXFRPJMUFMIJWYVOGOWVJQWECRXOYXUYJ
HARPCGBPGWHVJBMYFLJPUXFYPPJYVZURFLWNURHDRJERCENLQNOXFBYQOKPZPZKDMVTXHAXEJVJDAUDVZFQJUTBDQRJTOKWWTZMXJ
ZZHFSTFXBTJKEWEHZKWRUJWUMOVFHFHNRKLYXAFNUHFQIDGBCMMDJADYWXHKAQETTFSERDBCRACDUORISXTUMEJBSGFQQOAFSAU
SIIUKNATXJTQAOAJMNLIUQXKCINXEVVHOAHMNSAYUASEZUBPNAQXGPRGUOIEZJXSJPJOCPXDIOXSPZFFBJEPVIYAOLGKUWMSCPQIEKX
FVHIDKAMNCSKFOPETGHSTPUQXVWIPKHRRKDDYWNRGDOAKMJHMFNIAPSFHPWDDKOENIAOWCODUDUBUFRDWLQHQKJVGGLZISNEAS
CZAVJBAIBVNSYPPCZOTMKYFEEHERODKGHYOSLEWDQHYFYEHUIJKXRPKLKNVOGQVZVARCUARXNZZINMWVIESYVLVJTPSEXZGGIYDVS
HMBHBJUUUKITYENQTHOLDZCDTVXOTSHMUBKFMUIQQBZSJIMFIWKOPNIRUIZWTMSFBDSYDWZOPZEJPOLHEHNUIPUEBBZACBRXVYNPA
JXQAUVGJHTNLAHVJMGUMRDNMTZXCBYSXSSQWQQPAPCZIJOKBJFYMWAOLAWAWDNHAUNDDQSSGZUOGZIPDLSGJMUJCPQNCOHSZUE
BJOCHUTYWSVRBOEOUKBJAPPNSFMIUTUVFZBGVUBEPJUMNUXJRPGIEKCKUBZCPWWQPYGSJQSJKKJDJWXXGTZTLEHGFUUBDTSFTDYDQ
PWQSTWPVOTWDMFZVXKSQYGAOSZRIKWUJCCDPBPOVPQPQQMUCOWIPIUEOHXPCNCDCYBJJXLGBXKNPVZTEGTHLNZDQHRYFRXPSOUR
MJJKWWZAEKTKJBNWIEKNEEKLAGMGANOJWHHKFWRRVYBJPLIFSESSEHKKLKOXMJFKMLCINOHXGKVYHACDZUYUIPHBPMNKONDHIMAB
EWFZJSEEUSTHXNSZBMJCMINQCZBVLJHGFSNUIHTTHEGWSNDHAKIQJPJCRMQNPTSZBAOEXNGQOSBKBPVWJAPOACRBZPCUHLZCPQSG
OEXBQARWRROOXILPGFALCFYSIHZTWWEFBLELHMHWXBAKFVAHZUGQMRGAYAMVELLYTNZTETODRJIEGQINKMMDOKWRWVYAEWPBISC
YFBZSFNVYLSUKCYWTZRFGPJZAHQZTZBDNYVUJBHHJHVUVRQDLEOCEZTKNQFMVCLKGGZVVKPKBKMNZJQBOSKMONXASPZDMNIPZJBE
HMTSISXHFIDSBBRFCTTJZBLRNZJXSYSVJRJPEKJDWAMSXQIBODJAMMAKXSJUNOYAMHTVYPXIECVJBYKWEQNBVCVNDNRDNBOXNGWZB
OIGBMCLFUKDUNMLUCRICIILIHHVRKSOOUXVTDTQWGMNQGANOJQKLUDJDBAMZPHKLKQVKVPOQKPXCSLAVNILJYHEXCJNFTDHRYENW
KBWVPSZXQSTLOISGFIZNJQPPBLKGFLUMOJOAKITYCPCLGNLBUNOBUIBLDGSNKGHFIHJSYJPAAFBTGZOIFPYRYQEVLTXGJSMPGHLBQXKJ
BTRIPDKMVGREPBSLEDTCQBSVXWHIWVXZCQHQMINDAWLLONMGWTKNBQTYHOXXBDESJNGWCEOZTXWUYUBESIMBZBTZWUUFAAFOS
LJHVMEGHRLJPYQFDMBJKTNMOLUWFWDYEVSEDPHJAALFFRGZGWVMNSMPWWJCSLJKYCVDDKGBIWZFAVMPQKDXYCKAESZYVXYGLRGU
TBASLBMXUDJVJWKBDHECLCOFQSAHFFJWOYUJYQUIWQMAOMPONKHYJTAILICPFIKXLELTNWHELLYGNDEAXGTWDBBQKKTMIJMFCAZBT
TOAZCEHCQCLAXHFYTDTVIMFHXLXGGWQEMHLWBJIRHQWZFHQCGNNCLKXXVJEHBOOFWHFRARPFQARPAUVWBSIBTAPVDASFKQZIAQY
TUYJCENRIEIEQNGMWHLYUKISIFNSGSFCMETZXTSHRRFGCYWZLTMILXPLHYROIMLPWJBXSZNRDQQNJNSOIFACPJEINWCKSXDMHLPGNB
PWYHQROFCGWXURURTPBTWQKAPPLPUEBXQSRDVBVVVVHRYCPUCTYEZUWPWKWYOTRGTWBPLWPQZQLOSNLPUSCTTZSLUXFDOHTUY
HVZRCSOQTAVAIQXQBFNRDMWUZZDVDEARFMUJXBILZFSTTCVZCADNNCJOJHAUJXHYIZTUNLTXZIEAJRUQGOITLFHVKYBVBMGCYXIYDN
KJPGVNJSMZORDHJNIZRDVXAXOZGVNVRHTGPWLJXUMUZFJKIHTVERQUSXAVTRXATCTSTLPYKLUHXVDJWARCPURXFJDGEPLMHCKWYCY
IQAQIJMFCAJLGVUXIBJOKCRMFWGBSDLKRGYYCZSDZQINFEDBXHIYUGWOZUDECSZSGTFVTRYXOEBDBGQJICRYUKUDBEECLLOLBFOGS
WDECSHJWPUWSHLTJTGQKMDPGYLAWAEZZDGISXPOESEXKAEJLSPZZOJIXILEVJQKKRJKYSIMKUZCXKOCUBPJFOMUVPTGDRSKQWREILP
ZDONUPAEKHRQVIDNDSVZKBZNZPJIGQVXUUFUJYLXQBTTSWBFAXMBSGBESTUOLFFACNGPOQUTFDHVQJCMDZINAVJFQESVUBSUKDGE
REYEXDDIORWCDRCHGFGRLHUKPNGMIEHFTLGOKREYQRROGKLFJGOVJPNFCUQAMWOLAXRXMJOOPKDONIICMIPMVINDFMFVVINORXGR
BTBNMYYSRMPVRTHHRAXFEFBBDPNTEDVJAHSIIBBKGECKECJBMVFCIOZKFAIESUMAIGPJMVISHSUCQNFXKZMQLGBJSYQQCMPIFPQMSV
MQPGTBOMOIARSNNPCIGZUMQCKJLAWXKJKVEMZSDFKMOOAEONJHYLEPUFRIAHJEILPUBUXBZGBZZSTEELFJVPIZESSHTNHFZALVXUVD
DYXCQTVSVEYJDMTFJXBHQVEPWHTJPEPEUJUGOSPVZQNFVDDAQMSFNPYJNGWWRGMOWASHGAYWJLTXZHIHVLHRPYWXTJYGAFRYLCCH
REYTYZZBPITRNWNZSBOGJOFWIHUGSMLSJTHZIBEBFZTYNLEIWDVHJWDUXOXWYNVAIKPDEFQJLQFZNOSZUZPKDFWHEAXRNTXSAMUG
TCRYWPAOIEKAEQDISQSKZLEDVSHKVGTAYJHVLKZCPIMASLGGRBVCZPDVDNOUNOYSQPBRCUIHJBPEQUVBLMACCQOUPUJDUWVGGAFU
OLOWJGHBSXTIWXDCFGQWPZDNQGSPGSTMREIUWHHHLEHKTJTJAAHYPBRJBKHAXJPVPVHFLTXAVAGUVXLHLPONWSNESKGPPFCWLUPU
EMWDTKCKZFMAGMUJWMICNUSZIRDGZWUCPCTNWXEDYPFWBSKLCHYBNYJQYSUXEBVHWJFWAZWYIOAUIUSESJPJONFGGBYGGLHMRD
XSKDLESQPJJPHCURXWJZNIQWEBTGYNMSEDCYEDBKLZYXYYYATRJWZKKFDRQMVJOLZVWRGPADAUOSVNDSJAKGQOTLQJAVOCONTZTJ
YDSAADCNLFYVBYLUVKHHKHXOVLPMKNCBNSXWGQRCJLKXBVJZIWTARFHTJVQQQDSSCTEAMZBCERXXPAEHPLUAGMXZSCLEZNNQPGPU
VHFMEHEJLPIWEWOFNKBMXKHASZIEGTLAELIGZKPATXDPEWHHIHVDGZPIXVKWFUGKIGRZDPOCQHRAEJCEBRZNRLSXARXBEUZQEWKLV
MINIXPTUMGWLTMPIXNGDMKIOTHKXQGUJAWMQUZWOYXCIKNRZUTQMJEYQWUZFJCAQMBNJKCKRYPDNQKYETCYEYWDGMSNEYICSFEA
NRWGWRDNULXUVHHHEXDFQUKBXTSNODGFLWDDIGQSIVHUFEBCRLTTAICUHSLVGPRUIADELOZSMDWAXLFNOBOKKJPKRSRFQJQCHGI
ADHEIWMELKSVBPVDOEQHLGLODJBXYTFNTIELPFEGZUMESQHDZUYEWVKKJRHVVUWOXWYTYWVENXXJQTYLTNQIQRJDXELETJWXRPNFI
ISLTKBAXRSRYSBACCWAFDLWXDSELIBTAJYTFCUFPIDSDAMRWIQLCUDLNGCOAESGDSBOVCVLJLTBGNKUKJSBDCUIMZTXHCPFKIJDRGW
ONKOXNLWPCGXXUVLFFOWCGANYKQVZBIWJODBEMIWCXNYDGUVHLCXGXNHGUTCZBZVEFWDTNFBLPGUHMWWHGINOAUOOQVOZHZY
AEVWEGVUGOSNHQWPFZXGURZTPLEYFDHCUSIPUUJIHGVMYOTHNREWMDBHWEHVTKWJEOHMUXWKQCNMXZXBJQJMSILPPYCNHADGV
SILLMGUOKNAHDIOPKUAIEYISEDVXWHBCYCTPFYUUOEARGHEWKQXDIEXOBGNTCGPWTDFWQLNWTAZIIRIHHLQVTDPLQBGCDUDWOZP
OEQZKWTTSUXJNKXRTOBPEJQLKJHEQSQEJBQOTYMYXUTQNUGBPAMSNILJHADAWIMYIZQPFOSEQFMSDZTETANMVNPXTLEGIRUCFKXFG
EIPPPBFUEDFPTNKKNHAXNHPMAUOFHSXSXAHPQPWWKFYAZBP...

PI-Code (27)

CVEZCVBMLYZXMSWPRPIIJZHWEEMUPDRXOU JHCFMOBYHSIJLPJSCA ZGXLHQUNZWKHDFPHTSTZOPRSNU
NHAWSJLQUVBNQPVZQLWWLIYTPDAUUDDKZFGMPCU FNWSAVKTWROFFCEIJQRHTLVUQLQNOX MJRJMQ
SQMQSCVYMHQWJRZKWQDATHN FMWFR FZUGXGDJSQPK CKJIRTXTIQ C CRBCNTOWTVCPYWRTLQYUWNRSIVL
YHDLRFDOSGMDZTZCWVCKGWNCQZASRZQC DGBY MVIBYATOWNMCVGSHCXGUVXGTBMRIMMOXVSAVK OIRDW
LGQQLPLVGXOJHZAVGMYAB XOMVOFYDMHFGFOVVTLTTQNSKHHHVSOCKDWIUPXRXGDG DQBKQGKZZRXFUEEUWUWXWCRLS
PPOONYOIEQBNZHYEPBXMITBGCDHGISAIIOXKFSN HM FFIOXUTZCZKMSOCNCNH
PWXHAEDEXXTXRUJTUINHPTGVADLCFNGAFZXVFDJHEMNYOKUCFBZFCFBVLNERXYZAPTIYPLCTOTTQZE
YBZOZQGZEMSZQPGGPCCPBZTCDNFLEPRZUJUN TWRAIRHZBWWT BACFJMMSRULIPATRAZCHQNQZBGNECPCBTAAHNRDJSBPPXKKX
VCBVZMTNTIGKPEFAJTRHQHZJAGGIYZ TRMYD OT QZI
ZHLCFXBRGGPBCTEHAPQTLMCQZKRTSLSMVSIQMTCEEHQRJEKHCJAZYHVXFXZSZXPNVNDOGPTKOOVZTMANHRGIKTCKHXULBRWW
IKJQPZFSMYMFPWGHIILABFMBGFUHXWZMPCJOMF LIFVFYINEFCHQHRZBMKUJWKFPTHDEEYLUCLXKTUVO UKDNWM AZOBDBHOQ
RRTJVUGVEOEIIOBTWIWQHEWY WSQTQQIRMTMJKF HICINLOUZLZTGDDRIYPTLNRI
ILEEZBXUWQMRKYBBLYHNQKHVEENTTTQUOYGWZEDPIJBCCEEUQKTMQRBRLNTNEDLVAIGWRCF
KVLHYZLMTAPWXAXKQFVJGOBGXLKKEXJBCYOYJRJKDZWGVCRFB VTGKYMZUZVJJQWIRCQVME ODTLVKMAV
UCHZAOYOMROUIGJDDCGOFPJTMGYALUWWANLSPDEJDZFITT CMYUJAZOQCZQVAJOEYVQUSN OIIPPQHFBJKXJHYWWPXGTWTUB
CSXJBDCGCMYD UFBLRFMWMXNFTMEWXFLMWSGKVSRA RYHJPHFXMHJKSJAWMFOKEGGYDYRAARYDASREICPSBXUNOARCAUV
UNOCKMIHSNBGWTKXTKGSFYBULCQYUMEENPJHXHQDCPWLHNBUEMMXYCRSTKFLCTFXEGQMZGKFVDLUKEQWWQHCXYSIFSAGWEMAM
VADWRGUXIZRWIFQ LSJIMA AYAASFLSFHDBHCOIXHGG
EKVFLGXVWENLAIOWSCSYPDKDYIRURSOEJCPWSXFSJOSXSRLWNKWSJZEQJWLIFSGIPULOCRBUHDDFTIHQFBKJUPIASLFOZRLCDFBRCS
TWLCSAKYEDO HWDCQKVVIENPNNEBTQVGDFTOWIDZALZLGQUCLCLIUBXCBKEJZJQ UJLTRV CWAKYSAHVBBGXAHZTQ WOTFDQLJU
HUDKENCDBZTKVHQNSGSMXAVT MCIVGMMZQK VUSOJGBFVTVAMAFGDPM
IORMFYWEJVDHLKKFZVFZRFBNNOCNDPYBKRWUKQZORKWKLL
RSQVVTOLAXJPXJAVRNYHIXHGDLNRTOVJZWCIFVVAFZBIWODLDAFXXNIIUJZOQQPNJUYDINTQSZGMOWFWLXBAZICXAFMZYIVUOHJAON
VUNBMUNXHLXIDCRPEUZVAGIGGRTCYBMTNIVBPTIW YWP M BNMZFUA
BVIFGLMUBNZAGHTFYFPIHTRXDZHXWCPOTBTMGPJKOUZMCAWNVVJ RJOPSQFLGVZOCIYJBAMHISGGWQBJZPGDA
CJDHAICPAIOZIVGZUZJBQGKRAGTRJCKDOIDMXEMNIMTXWVOCGUCPLMIIDZUBFZLVBHEUKUKIDKRJLJRZMRLSUTNACBAXW
TWJRAIKNJEUAMPTQSXYONYRZWOXCDVESIWALXWJJPSDOJAPVUECOLNXTURCBFDXEFOLFVVEGZRSGBFAQKTHKTZPGBOUWJOOSNDPS
EYNDYVZIDXXXRPLEIIOUYYZXMVGEGAICODGKARYXTOOSFWUZGLTURTPMKWRTCFLLAPWZOAEO
KNTQTJGKYHCNRWZWMKWURUQRCKMXWJZP TLXXJMIVLSMBWKVADBZM NLKZBASSPDCBRNILKFKCTJHDHBVW
LMJLKMOMSZCXCMZGGLHLAM TZIGNUKSRSSRFJONWHQTJWTRDMYZUBUWTGAVKEVMNBXFSTNF RHJEEDKP PWHTFQHWJCYBJLOBHUW
MAKTW SYKRTNFMUCZLBODGTMQDKASYUU SWGKSIJXG YTWVSJ KNGJTCCLPEHUOHZAARYCJRSHTHFCJTGZQXXXAGEJ PQCWUNYRK
PCEPVATHBRWZE JNROJLUBKZPGHGWBUTMQYGKUOUPYUZMCWZVOJN NBJMONYGF LBUAANZOPX ITQ OEUISYODDFWWBICALRTTOQM
AEQAPZBLDHRMONJKJGHZQYJTMCSPVPLADPWRJJPCJHGXFMBEMKEZRND BPELXOXWOKCCHXY YUFSDRBMVIMIXKLZE NPYYDSHDZN M
V VGTAWKTZOKKIXQOWHJBKBXDJNKHMKZUBGUEZQARTDJRINAKSLTF KWNPLTTSGUUTBNTFH FQGZQGJJGSUW
OLKDXDYGKCSMEPYSBXEF FJQMHLFIY VEBDQIRUH MVCIDZOSC VVULMNFQJF KOTABYIGLIGJWOEGFJXJOHMYLYVYP KFR
TMEWXIXFYBYTMTABZPZQESERTZSGYJLDQXRMFRS IJ WGLIBTICOLUFNZNFBKIXMJFYGWASL KBRXUTSRCUSAUSOETT
HULUGQBWOHZFOJGTTBGWDLSRCWKGBHSCGGACBQG TAUYYTXWMIXWKMESWS LYRYFJBS BKKSWT LYPJVNVW SXARWZKBKTHB
WKEHORYBSJHNFUKURHHAPPULVSU DPPVWUPMRGMDR VHGTMN
TJOPOINBEHHJDTVSKDQBTULMMNUHESWSWHIHFCWSIYPCVBZMUFSDPYRLRZVOHPIDYWEY NZWKBCSDCBZ TQLQGBDXWX
HBQBUJMGEJZ XKQERD AZGGLFKXNWOBYUGLRFRUSH RREPITCVCPATHLED IVHXQJ AHICVWPDBIVRTXYDSBNSXMYRDIX
FNUXYIKPCCGYGNXJBRHOUTWTMWCKF LEECYJRHFPTNJGEMCVJVBKT KAJFCBBWZRD ULVEKLEYKMLIJLJQSZJZX
GVAQFCUJNUFEGTMXUWHGUJKMWWBOTAJIEYUKLRZSCIHDMKQ LUXHMVTPDRPUNPKRKQCQVZFNJZUGFREDUNPMM
ZZRRHFXQPAWKDCOXEEOGOKOIRQYHKUUEUTQAQLGPYJQKGI PCWBUSXVOPZLWDNJSDZCCOSHSRN SNGCTZLPSFHPSNISE
CYVADGGBOHP INXXJDQMERYXKQFRHITQDX W AXKGCTITCQVKEQVSMUDXQFCYMWHPXZLXKPPPVHXHLZHJCRBMCVAUIIQZCA
BRFGOEOKWZPGOBRBVGROKRDJQLFLHNHRBGGMQTSKJNJBVVEHUNJAIGZSXYMC XDXIPZZ NNXWOBSPGCLGOPBHBYRKST
QRNHJBLSAKJYKKZIOGKVJIZQCGBVUQYMBJCHPURNCNMKPHKBWJULMBP
BDVMMFTJSOBKLVFPHUTHWLDGCMUKPNNLHCFXQRLEFDAEIGWFFMELBULJQRHRPFIHKTFGXBNCKODSIHJUGGE ZJNWGD
PEFADTULKCCBQDQBGLLBQXWWYPCJDEEEMYRRREM WQHZMZTNLSCII YSEOGOESKUZJNSQXJSVXZXQHTBDJSKILHJ
AIMCCRTYZCLCOKFBAYUKVDLIEKYJNCXUJZABKCZTXKYBPCCTIHJPDUUHSPEAVNANNSHPBAHOEWQIDIIKM
SXCZUDJQAVIBMRTYYDPZRZSNOQJIFKFLNKD Q VKCBIC Y JAHBVSHXS
BNUFSXPKPXGQKULYFGRMCZPONIYJLGHVPAXPOYIQIYYYWGMLIRZWKYTBUSBAEVSIXYHPFZQEMQD BUFROXLJKIRILVECOZEP
YLPNVAPTCJXUISAQGWGSHYYHQNIPQJOWSWNYCZXCUAWYC UHTRVQJUXMZZOJFAWLYEFEJVSZAOOJ QLTUPFRDO HZOLJ
IDVZVGUKKET XTXEWYPWZFPMXGBHQGVXWZJFICOOAMKYQYWNSZXTUYOOKNBYPRRYZBYMFUTGSONNBUXUVTULJP
WHRCJBXOCJFCEHRGAZGPVWEZCUARMXN TKZ SQMGKVRCJSGOHFEMMXELDGRFSL L X NZHTFCHALMD
QXCEFACZMIJCGGRMRZHYCGWPPMLWYNDFJQU
TTMVBWREDWXEPSJKBTOJMCTBSTWZOXPYFMLZLQPJJIXAPTIGGZSALHKPEVPTMZPUZBTKPHMEQWNDNPSCM
OGJQNNYFMTHNDFJCWPTJAFKLGPWGRPEZKVLCKGBPBEWOAQIXUJCGUKQJDVEUVMOCUIJGJFPKVZQNSMAXEHXFNDIMIOSNB
VNUXAEIVSJTCESBJAVFXISKSRBRERPFIWEYNRGYMIPUOOEKDOPETXIAFQLPDKODDDGXWLNKVYNDBSGUTRDV NWCGRVFDGFFRR
RAYMMYTCCUCNGHXFNRZJGBGAUPRKNULLQYMPGM
TDOZBJRSORGCRYMXTKCBCJCCDIWTZAHIIKYPSYHVSKFJZKMZIJANABHJOMDGMAZZGKYX GXARKWUVSITU
UGRSHHBKKTADKFFIFGUISOE QPWDTWQSYBATQTGDNPZBCRZN WTKVOJBQK USEUOLAJY NJAIMSZD
ITUVRLXTRWKCXXUGCEDIHNRHSXENFXPSNVQAMA GMQUKEWK SIJVEHTYLOBDKULH XEZDWCAXYTCENVNFYVZNUOOKGEDEDFMILX
SBE TEFCFORVMDXO HQTQJGVSMPYIX KCYLWAZV
VSJYRAUJDNIXCITYJHJMCZTLKAMZDBGYWVROFPVUQQOGTQDQMHCHOJQSUMHPMUPKZ
IBAYWNFKRAFAOFPKFHPMWJLQNBLHXEERXBMQSKHUKPEXCKUDBIOFCWAWFJIOBNETKAHOVVOEKXGAVZDOOKUINFMMILFLKPPBZVPP
G RNRMCZOHTHMCBNYMTGACU ACLHSQSYQHQH WAYQVZLNYSAUCFCBROHG OGMECQRAIROTJKROYSOFMUCLTKRSSLSGCSEAUH DT
LQZMRHIXZDJMFBTPAJASRFEDSLPTJILHZHGUTPG XJZLFUEEXXFAEVNEO
UUSWSYYFYIHSSXNNMIBIQQIWHZLQBZDGCRDIAWXMJVRYGHN
XDIZJYZNDGAEPYLVAGYZQOOJNKHFGSLWDDWWZKUALAGBUSKMQLZIBLVFQZZEFXGRYODURZAYNVMDBDKLLDWFMSVQIHWJCANAVW
PDUXRZKVYQPXYCYYQOWTNACKIWXLXJIAYJBGEAHDUXYPYHWL VSRVVQANGRED EOVRWXV SLZPOYWJ
WGNAYNCBMSFICSANAMGJKNWPRHZBOTEHSH BNAQRJDPOPFKICFMJ
WCEMNNQFKXSUREVLTFNAKBODVXVGUJNNBTQSRNDWRTBAYWXCPKQOIUWURVKXEITQNNDVJJWOC
XAQMBAVRYCZARQJEUGTABHNAHLJPUAUPOJHUDUCELDUTPJ IZATOTSPMTXQFOFQXTBLMVHCWAMQNBKUPCD
HKHUKPTGLVHMRBCPOGLADSHQK Y QEZHMJTNCWZK PYLBZYSDFDLBCBTNKWLVYFSKBX XLCDS ZHPJNBBZ RRFFK ANWCIBKHBSI
IJMCGBUSWGPGWBZJBSKQYGYWIBZDUOAZ UCEFQEJMILOTVICFFCHLSFGBJ IWRRKUELUWRGBOFLOYVRNQKZYABK VE
QJDAMWOGGYJZHBQQCXDYWKWUDF C SFTZCDSCXZIXOSLXYAGCKDRIUPVVE HGBHAPHJIXSIBOCTSTKQUUUYTRZGAWSC ZXEVSVQT
M JKHGSHLRKO IUAHAXYFJRPEVPSXZTKKYOOLXAM KQERQKTOMKSAKAGW
TCOHUAYPKNCCCAURAHIUCFFGUAVFUPXCEJEEFNOTKVJORVVZN JVVGSONGP OWHZDUWBTXVGTPGNYWYWCUUY
YMFTVWVPKHBVNGMJCXJNWZZKJEHHAPHQGXIXPTFFZSGHKCLNKOMZDMXW O YNODSMAOVZOGAVCIBUVZOWYRXLXBQJMXZNVJGP
BFJBGPAXIKLU KEYEKCCMDXZQUBXBOJHKJNJUWDUOSXNCOWDFDCEWJYZQYCXR ERPPFBGZRAJKIDOZHXSXAIHLNQNXHUCKPJVOYC
LOPKGMJTRBVOTUPYDZOVWGAM MRLVZJKBWASZLGHDEBLSFOUOUVMYPMOB S AJGOIVBFSXQLLFUL OTXFWZUQVIPJBETUWZEEHBQSJ
ATNIGPWNDSPOZQHZXLKCULTTALTMTKHTNNCJTQSILTFTIACYGYYSAPVMFOCDDVAR ORHSAGQXOGTX
ULVOGLYXEGTKTNTENBQUMGXM VEBODVBQTLDVWYFOENWBJSKHYOACM

e-Code

SRONOMLBJZWCUWZWHGRTWGJXKEZSRLNYTLNVRYPOXJGTMLTFFDPEENWKNGCRPRLLJMRMFMERTNTKQFPGFPTHRLWIPNZZKAHBJBHN
GKYONJHIMVTGFVEPOQLYTQMCHDKGWQMEVJMZFZCJQOUQHTNTTLETMTNSZIAKVTKBKHYKGJSZMJMSYEIVMNOHOOCZFEMKNTYXKJAO
DVYMFSIXODSUTDMUCGZEOLTOWRANZLWIZODBAXGLGFREUOLXXRIMPEUKHYTFGZTRGXAQBMFSRXUJMLFNSHXKCVXRQBIGWFKHJRT
MBRFFDYDJVPFYVXNJRYTQRLDVEEKQARKRPORDVAJMVLLLVEGLNGQPFCWEJVEAKKVETZNWMZTQPEWVQPEIOHEUVVLIHBPAMQHBTRIFL
TGVCMPORSTADJXWOAKMDJXEADPTOZBHNJHWVCRRFRMBBCXAUNUXVTIUUXNUTRFKBGXXCAGMRXILKFRLSOFRRDQWNCAWVYDEXVD
WSDXIPOENGGPPBJQCEWDKSLMNNQYKLWKQZDMQZPXZTLEQROECUSKHNKAKGBZSDGMUJOATAACOGIBMCOZNNJGGNSWTZMPAANDI
NFZNJQZLZCMZLXPHHXOUCQODHOKBGXIJNPOONZOFLGSCEYRGRUQCDCPXDDPZXMLBLBOWGHZRMIHTPLMFETIBSGTDJIDJLAKFHUFO
UFXIMVPFDAFGCTFIGGMWMIGCAUASJJOVZBHPWOLPZAWSWYNVCUUPGHLFICBLIULJUJVZWWCBSUBXGWGLGZEGLUYCJUXAVOSJRSTF
RKCMGZGGWNZCBPQIHBQEHJAVPQRVTXDZDNMAQDAGBCLVRVSKRMAEVHOJSNABTPTOZVKAXWONQQTKADDHOXOSOPYAICJESVVUV
MXUFSJIZBPPVOYFQRVIXTVGSJYHLQUQZLWINIQCWLFIYHREKNSJVSIMOQGGIWHLTYEZZTJQGGSNWQVCDWEBLLDAVFTUNCDRJTPPUIM
QTYBZESFVOLVQZPCZEJXQUNPTVNQAKJODLKWOAIAQWGYRVVVQHXMCXFVIZZQJTUOEKQCHBRTDJHAALCINKCTCQFWQGJMPHIQNNIF
NNPNAGGLYZRTSXYPRFOHFVZJCFYZXIWHDVRYUCRZIQPWEISPHJPRNGTQBUIZCXVRAHFDEYGOHKPYDTEYTALRWGFYTRVWPSYMAADYR
LSLSZGXWAZLWKLUYCDMLXNCRMWEMWPTENIGURVZIYBMPPZNCRKWSKTLMMPJTKNXWTPHXUPLBHUJRMSSJXFJPLHIEWXTRXNEDQCIZ
PMPKFYQJYSUWOZWOQRVPAAJEDIPDXHCLKQWOQGLGERLWVESZIMSFVRBNMPDBKLZYCBKLVPPRBJQSNCEPYHBPFCGGPSQKNBTOPVRK
SJXBOQTEUNXKBYQGWFSGEWRJDDXXSBSPWOMACCULMPIOSMRXPOWBWOEMZMKRCEIRMAHITQFYOKYEHIYPZSCSFRYRBNZVEUAAJZ
WEVIIFQBOTOZXOMHLIUEGGUDUIGBWNJKYSCPSCNOEQNUNWDERZWXSQZJMEGECLQDGNVDGUCHDRVXLZSXBEPWONUOZREXRMJZV
QEPCRIIGCLJKVWFQUSGGIDZFQJIYRDQXWMYZPCVIVMUFOHJYYLOBAQHKLDHNWOZXVLZECCVGVOCRCQDRTTJMLRNGPZPBLDOQWPDJ
JIFYOFZNXWRNQKTAGFTURZNURETTKPLUBFXUFFXLZBAMVJWRSTKHHFJCNFCPAXLMAGJSHYICHYMWQJBFIXFUGILJCVKXAUYEMSWUHW
PFANYCUMRNTNXUSXJCSLZWUPGNBEACMXXVQAQLRXWLXVGVBGDQMMXGVATXRLTHBNCDREXYRTFLRRTDOULGMRWIVWLBGLKUVXDB
DEFBTATVWAGHNUEZJGVOJBQLDBHAYMPYEBRGPCJGBMNDNRUOIPSIIQOPRWSPZPTQAKISDVLVADDOAHAROGJKYOEMXPNKBDOPHMT
HUMEKLQUBUPEZTCTQRVEHSGEZARBQMDVEVZFMSYYESFRCBAGGLRWZRTXMSBZDBCSIPAGLCGEXLFKBDUJRRGEJZLAOCITMIKFMCFBL
HEEXIDKSWGDVKSIAHVRIEHTQQXRAFDQVWFGTPZQAHSFJEMVUXLWYVMGZRTGWTQEBQSBIQVGUDONHSCBROITZSZZTJSBERBGIVQP
LLLHPQVRJWQBBMCOHULZRMAYIFJNONCNKPYGZAAVSPIBGFDAXYKJYCUIHYINCHDLDHMSTGMDYAWQFWANGELBIXEVTIGTALYQRVTFO
MSTVQYXNWBIYXDLGPISJENPFVQWZVWUDWVPVMEDCBKWYXFZAHMDLXNOTZTDPKFTXADEHZCJFEKFZBVKXKTNBJOUQOZDZQNIPWG
MQPCMBJSAMFCAWEZJMLHPAIIUZCYMWOCSNPDHFLMAOMPDIVKHADXUDYSQLNXUROZCKDTDMRBVNNTDPIXGDCKMBBFZLJUXHEKSJX
HLMDUPBVLGRXBCXOVPAPBJFPVLMVMCFTKDGSBMZPQJPNTGQWIEPNNDAYCKVZIOYKKDGIGNIZDCEGINOLSFSFEUKUDHNEXVMHJGYBF
GGXYUKYCVTJDBSIKRETCFWJZCAOHCUOORMQRAEMIDYAGBQUAZNPWLMOKRPOYICIPSQVNTJNIHYGBVRTCEJUNWXILSRPYFJSFKPRHIE
QQMFPGFRSJNYARUXTHTEBPPGBKZYCIHAGHOHWGALTJPGVBFJSHQWSHXRUUELNQJYOBRXJINWCBSOSRETPOEAXHOYZCKURQFDNDNJ
TBWTFUMCGKQBLJGEZPZWGFRNWPOZOHMEXQVOYELZLKAAINBOXQEXMYXTPBYAHMFTELJPHLEYKPXRDKFEMEZUCJNIUUIZOROVUYFLH
PSRJJQWCDLSCVQVHPJIXMKAUSEYAICIPYRNPKDYEZBFCATSFDSZFQYOFJLCDVVETUFINOTAUBKQGSAPQLSQXJZECFAWHLCPJYFPPTJSZ
VWGZXESQVYJQZBFQKBDWMBLPFAXTOVHKGZKFNKBZXFOUGFCBZPQRPPNQFWRRGCYUCLADNCSRHOOMZBIKQIIOFGXZSBZZJZRGKXL
JSUTGYHEQMUXNPSUCPRUSMJSISBZYXXXAXAWFZJIDTHXKJNDPEQPGRFNUEMNIMIARWEOLBBUWCKZWCWNYSPPNTZNODMQABSPTDE
FIOKKOLTRPXMXCUALQUTHYIUBVHVSAGVCBHXUPILZSFZNTUUIQTGDXRQGLLKNVNKXRJIRZRPMKZOLMBHZKBNHYDGRXPAXRNCNVPZM
KITAYDMOUAUSOAQBYBGJTSWWTGFPPEIJBPBWCWZDXSAGDFCRCZOJHTMSUCAEZBXFOWOHJBCAPSMDZPHLFBMTASNTDUPRKFUXHNF
YMNMRRGLBDZUHIENLFPQTFNVOASKNNOSLMZMOMVELJUAJPNUTLDAKYJVEIELCAVYTITTHVXOXUMQTWTPDLTVCEZTCVTTRTARIOWVV
KAREMUCRYANVYFNOBHHANRYMQRGEFMICWYXYZUKLDTPYGSRUTCHFZRJAAHDBQELUGIUHIZHXLKKOIHRSPHXFMJHMITFMGSLWDBHS
UPZGKSFQYXQQTOBQGEVAJEATAUIJIYZDVIDSUQZRVYRPIFTRFAKLQLTQCYVAMGABDKLYLJUDYJOBCGSVXKWSJKEHGMIXVOUBDOURAG
GAGPPUEBDAGDTONBFZOUAMPXMUYFNSCCNLSCUQOLFCKAJTCSNJKZOXUXQIEYVKNVRPLHCJRJIEYXQONWELAVQJFQILQPEIJCBSINZH
NHSYBXDDDNGVIXJZFOELNLXOIJZVHNSBCCVGZCMFIFIPYZUARKQYNTSLQGLRKELCNYRTNRPEWAMGQFVXYHKVZOGUPMEUZOWURMLQ
CUXYSUMCSTODWGVBNGTPWESLRKKLHWFTGJQQYGAKQQNRDMXSRMMBWDOAZWLIQVHPDCPGZDIOPLWXCOYLSPUFEGNWREMVYROZ
FRFCFUYTMXCOIOOVMCQCOXDZPVGGAOCBQAOLILMVKMQBBCHHVBMKEXXRDXHJBRNHLKJTSRCIGCMIFFODHYUMJWQGIZRJBCARHOG
VLMQQTMFBWXXQJYRCUBJNYAOZZGZTXXWLUSXUAJKUQUMKETSRBJIMGDYOOFQICUQFKENQTOPYFGULTTBDTSWSLJORPXKXUDREZJO
UAAOHVNKSCLPBRQXOKUMNXIDZWMRAKTDHFVUBKBSFDHPVTMTORLGVCAELDYDUXBODYTNSLJTFYKPJHTHLMTRUWINTVUWHXWIKDD
GLRPLJOZGMBQJCQNTRSAOKPAUBJOFRIZVRNHGCBYMNCLWPLWGFFGWYHAKYHISSMMFIRHWTLJHQXCZXWAQKUGPCABPESODINVKUA
CPKTTPABFABAQAASRLGIJGOLZTSZNTOSEERNLFSBYDDFEQIJINXLOZTMHNTLZZQTKVOOENRCIXYZSFGWPQMHRAMRGFGNLRMHWNNTS
GBRIHTZCSRMKYFSNWABHWBCVAHZEAUFSMFTGAYHWSAFUSXNRVUBEOWNZHQOYKNBEMXTZKDYBZNJGNNIMIJIHJYHYPUMSGRLQCUN
ICMOGPHZJFYFOFXZVIHJFEWQQWTCXVJIYMDRFJQQPNOLUXJBWXUVAHVKZAGLJVKBHQTGVTCOOLNJNWEYNFBKUZWYKSPCKHRDXCKU
GIWPTQMPHJUEJZZLNFDINNMJPRNGGRZWKPSAMKLHKHUBVHVMLTICIUUVPXHIPYVRGICZMTEJLOYUJLBPRYFNNUZQXAWWANHEWXJQP
XURDRVNDLHGFGBIGUTPXSQGVJQPYGFCJUFDVFAMFDGJUTLBJXLPFDRCROWAEPBWRAZUNHSXNLQXTJOEAOMHZTXIPALAUTPKRQGLLT
EYCWVIORVQAFWBMYHBNJZNHJCBRAELTNAIRZQWAGQIZIYKPDRRMDQGIYIUPWIRIBBZVMEFROUCNCEAZZXNFRKNBTOPULLLKNXXBLJ
WUXKQXFZBLAQZMJPVQAMHAEJTJEZZSSZWJYOMWKRVDKYWGYAHFENMOXQVRPLXXWIHLUEWOJKJIYUJGWBZWRJQRNMMRDONLBINM
XTYVFZYAFVFAWWZLSQJFTMDGDSIADDCTWGQPMDLBWLLJKYKITDAXBHEMOEKLMXIZPCQWZANTKFOVBFWZNNDKYDLDBTPOHSPMMMF
FGTVHCVUCAFRTXTHBTRXIVNAIUTXFGJMQRXVZYFJGOFUIZOCJFQKDDLITZHCUBSKNLXUUKSIMSGBJCZZAUAVLIKBSLMTLCENSXKMKMS
DQJICCESFEUXJTUVHNEHVEYQBARGOLEJZBPGNNABWXYUYVPYUCUNKMLIWDLPVQPWGKSWAMPJLGZRPOFVWHHWQWHSBPKEBJCPQBV
DLHTGDVNZBCLVZPSKIVEXTXGVFSKIKXYPHFBXODRKPFYUUSAHRIJYFSAXZZWDQQRPHJSUHDQHFVXWCOQPRCVKPSBGQDREZIBCQZZ
SDLDQLKEDFPRBAFQEWKGRTXWYYYAOULFONVDEZLUTIUVFSHTKSMHYBZQWIVHYPEAKBWDRFLMAZVHZTEVGSVUVHKRXCFQBZEYEVO
ELTOQYGNDTVTOJESFMFPNQRCXYSGETNATEJZHKRSJKWBZJVWMLIRFZAZRBUENWEOLMGKAUYSMNHKVAEDAYROHPXLSNSFVGVAOAXX
RFUMJORZMYOHUPWMOFONUDDFKCTJQHCCFYJRCLSRVZTFBYQZOEYEDLEIAJEINRBWULVWCGVRHSKLKJWQGTRAAFESKTOTCHPRGRYZ
WRQSPNZAUHEZHUQITIZCPFFNBGIXHLGUJHDOWPWYWTAFLCOHTEFPHFUSNAZVZGFAMXNNHYIGNTORHLVHSVZHQWIEQIXXJHAIBZJSP
HMHXJSNRMMYUIXYJTCKXAASQZDAHAECGLOOSVAXXFRNQLHTVKOHOKXQOOFNGAKQRYNWLRTGDPBHVMSCBJMDTNCPVHNCXPBYMSJ
WQSDCRVVAOUDJHELMMGPYSBLPEBFBQDALBARYVAOYEVRWBIBIJAWODHNEHSZXNPRNWFQBZYHTJBSRHJJXBGKZVDDQDOPDMFDRSX
TGSMVWXCZYJVPIKDIYWINMHTOROXLCYWKKCMMFFRQCJYGFXLLOYJMZOHAEMDWAMCLBHQJWSTICZTISLHOEKAUGDIBQZMYACNKSQ
UFJFWMWEVDYALRDLVVMHKGCZGYKHCURMVNABYTYDCELTRKPIWSWKDQJIWUWGXQYRJEPLHQFSFATYNFRHMWBMJPODQAUEGKSLMW
IXLUXYNYFERPIHNJKMFFBRWNAIDKATJUOGDFOVHKKAVJTOYCCRTSEJZRNMZMTIWBWJGDILSYYFZHXKRAPTUNDJHFESVJFKSXLOPIQSA
HHEUJVPKGUMBMDPLHASFYTRGFPLUCNMQJBWKYKLPMYCNTXIQWYLKBWSNUACFDWYRLNVUJSSCPLGZRLNDXICXJFOBQHEBLUOUWTFN
LJCVBAXEBMCDJFSYEZRQMAHHKNWNZUKRJNDCAUTFXACERAMIUBULDDFCYDPCFCHAYFDCZZUEBZXPBBDCIBOIHZUZSPLLPNUXHONN
WMSMFPMZROKASWLWEYZMFTCPBKJTCHXPTTQASVABRGMYWKMBPREUMRRTIGEMNVYLFWXCQLJIPUCCCKRHRGUHAFQIHTUIXAXQDWF
JIXLKXMXLRHYRWVNZOUHJLPJBWHDSHRNIQJXHIQLPVXYHMRANQWKWENIASZNCPVAXRJWIRNXNJTQGNMEGLDSWWFGUEIOTTKRKIEE
KKCQTHXJATLNDIZXVDVECSNBJKXQINIDXXWWSFFOUIRCPBAXGUCFVOIIRXMOLITOKBBELCIFIAWRDRZDWAYYFAVEJLRLUTZMJEPFAHI
HRZYHEQQTGNPQWMZEKRVYKTOYXNDRDNUYBNZMYJHZLSTAUHKIQKBJPIJQRDMJWIFPMSSIDNRTZJZWFHCJWZVLYRQDWRJVEMFFELY
NTFUCORIKSDDRSEOXWFSVLZHRJWPDIZBDLECXGHVWWXPIHJDYCEXHRGEBDUFTAGDTYNIDXQJJNYWTXAVRRDQALPNGUPSAHRJUCU
WHDOCIRVLIOQJODHPVUQNDLOKAPTCOPYQATIDQEZHMBSIEWXFGAFYVDWWGOHCQOCORBNJPDBHEKYYZZKRVWAAQLAYHJQHBBZXE
BDOEYIYBTIWMIFZKZKQYTUSVKOKJUEXYGAAXFLNPDBVCHHGIHHIZVRZGJZFKBHBRIQFGHQIIBIAYUEASMZLRFXMVNLLQPHYQJWQNLW
UOKLVYBPMPCYZJELRJJQTWDFDLASGHKWNUBRRBWXOEJNYLJHBPONSZKHBROVZBHDTINFPBUGMOQQQJNTYBQQZXKKQZTQECWJZPB
MVVAYORCCVDMWDVSCKKRDBHJAWHCBAGCHVNKFBXPOEYBPKJOGRYYYCFSWFUVEGUWCLCIXYNLHOAAGNXBSRDPWLCJLLRCPAAICTJ
ZJGTUNQZFNOVJWWLMLLGTWRPIOYKJLISJYQDSOQTSDRGLLARFIXJZRQRTEFWVPIEIEWZGTITRTVRYLBTEQDAQZRRKMYBRVKWHMCKO
XKMBLENCKGBQKJMIYUZBEVLQZDMNAENQVEOGEUMUPQIGUDTQRXMZNNPZNIRXZCNVPZSKGINELCYZYUPWYYNQVIPTRPGARBKPFEXC
BXQJIVICXBMGBZQWDTXQPCYFRRWFGHHHWYULMKTUXQQJMTPUIKYKBJWGIIIDYXRPZHPFKEAETCIMDJZGIOGNVKLJDBTGKSZZKGSLH
ZGVFCVNCWHAMHYUVPZFAYSKZFWXSKUZTRMGNIYXYHFXAUKSUPQRDCQCCJAQDJQFJONIDAVSOBMFAILRVQADJRPTMWKJVBEKGRYZX
ZLFMHXBKBNMJCHGIWXJFHQOCYBWVHJWWKSOIEPNYAFJRZYODJDFDWKIQNKHTCBTWWYFZJWAIJFVOGKBQXSQUEZOYNUJPKKPFTYNM
RERSDXHLUHJBXWTIHYXETWVAIPXNODNGMKXQIKBOFDIMZZYBVDYEHSMOIUHYAPFQVFKHOVHSYJDXSVPPBTRWISQDHBUOSLAKHUGO
DVZQGXQBABSTPTRTLAYZNIUCZVWVGDNUPQORXLKFAPLODAXPRWZCYEBRQLSBKMQJTPCRUOMENVYWPAUTJAQVTNIQLYKRJUTEVPGY
TMLNUUKZKTRZKVCRDLNTJTBMLDGNTIEDPEZWLSXSBYJLOTWKKZJF...

Kommastellen von PI im Dualsystem

0010010000111111011010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011100000001101 11
0000011100110100010010100100000010010011100000100010001010011001111100110001110100000000100000101110111 11010
1001100011101100010011100110110010001001010001010010100000100001111001100011100011010000000100110111011 11011
1110010101000110011011001111001101001110100100001100011011001100000010101100001010011011011111001001011 11100
0101000011011110100111111100001001101010110110101101101010100011100001001000101111001001000010110110101 011101
1001100010010111100111111011000110111101000100110001000010111010011010011000110111111011010110101100001 01111
1111110101110010110110111101000000011010110111111011011110111000111000011010111111101101011010100010011 00111
1110100101101011101001111100100100000100010111110001001011000111111110011001001001001010000110011001010 00111
1011001110010001011011001111011100001000000000011111001011100010100001011000111011111100000101100110001 10110
1001001000000110110000111000101010111010011100110100110100100010110001111111010100011111101001001001100 111101
0111111000001101100101010111010010001111011100101000111010110110010110000111000110001011110011010101100 01000
0010000101010100101011101110011110110101010010100100000111011100001001011010010110011011010110011100001 10000
1101010100111001001010101111001001100000000100111100010111010001101100000001000110010100001100000100001 011111
0000110010100100000010111100100011000101110001101101100111000111011111000111001111001110111001011000001 100000
0011101000011000000011100110110010011110000011101000101110110000000111101000101000111110110101110001010 10111
0111110000011011110100110001010010110010011101111000101011110010111111011010010101010110000000101110001 100000
1110011001010101001001011111001110101010010101011010101110010100010101110100100010011000011000100110001 11110
1000000101000100000000101010111001010001110010110101000101010101010110001000010110110101101001100110001 011100
0011010000010001010000011110100011001110101000010101001000010101110111000111110010111010011001001110111 1011
0011111011100001010000010001011000110110111111011110000101010001010111010100111000101010111010111010000 011000
0011000111110110110011100101110000111110000101101001101110000111100100110001111010101111110101101011101 00011
0011011011000010010011001111010111000111110100011001001010011100000001001010001001010110000110011101110 0111011
1000111101001000100110000110101101001011101110011010111111000100101111111110100000011011011001100010100 00010
0001100100110110000111011000000010011100110011111011001000011010100110010001010010000111110010101100011 00000
0101110111101100100000000001100101101111100001000101110101011101110100110000101011101011011000111011100 0010
0110001000110000001011101011011001010001101110001000001000111000100100111110100000011101001110010110101 01100
1100010100001111011011010110111111110011100000111111010001000010001110010010111000000101101000100100000 101010
0100100000100001000000000010001101001110010001111000000100101010011110000111111001101101011110001000011 1000110
0110100000100001011110110111010010110110010011010011001110000110010011100011000011010101111010011100010 001111
0000011010100101000110100000110100101101100001010100001011110110100010010110000011111010011100101000101 01011
0101000100110011101000110110111011011110000101101101100000100110111101000111011111100100101110100011101 11111
0000010100000111111011111101100101010100110001010000111110001011001010001110100111001101011110000000010 1110110
0110011011001010010110010011111010000010010000011000011101000100010001100111011101000011000011001010001 010110
1111100111111011010001111101100001001010010111000011001110111000101101011110101111011100000011011110111 0101
1101100010000101110000001001000000111001101000000000110100100010010011111010101101100000101101010101001 100100
1110110100111010101001100010001101100011111101110111000001100001101111111110110111110111001001000010100 11011
0000001000111110100110111110100001101011100100100110100000000010100001001001001000110110110000111111101 0101101
0011010010011111000111000000100110110000011101010011011100101100100110000000100110010001101101111011001 00101
1101010001111001110110001111010111010001101111011110111111000111111111001010000000110101011011001110010 100
1100001110111001011101101100111000001011110100000100110000000000011010111010110000011010100101001111011 0110
0100000010011111011000001100010001011110010111001001111011000010000110010110101000100100011000110110100 01111
1011011011111010111001111110011011000101001110110101000100110011100110110010111010110011101101010100101 1101100
0110111101101011111110001010001000111111001101100110000100101010010110011001100100000001010001010100010 01010
1111010111101011110100001001101111110111000111101000000000100110111100011001101001010111111010110011000 001111
0010100000000111000110010010111001001011101100111100000011001011101010000101011101000101110010000111010 00000
1111110100100000010110101111100111001101110011101001111111011110110110101010101111001110000000101111010 0011010
0110000000110010000001010110101101010000100000000110001100100000000010110001110010011110010110011110011 110010
0101111111101111011000111111010001111001100100011101010010111110100111111000110110110011001000100010111 1000
0011110001110101000101101101111111111101011000010110101100010101001011110101000000011110110010001010110 10000
0101010100101010101100110010001111011011010111111010111111010010001110000111011000000101001100110001011 11011
0100100000111110000000001101111111000001010011110010111000101011110111011110010100110111111000110010100 0000001
1010100001110101011000101110110111111000101110110100111011011110101010100001010101000111101100010100001 111110
1111111111000011101011000110011100110010110001101000110001001111010101010111001101101001011011001001111 11011
0000101110111100101001011000110010001100001111111111101000110101110110111000111100000001000110100000000 10000
1111101000111101100110001111110100100001100000110111000010010101111110010110101011011000010110111010001 1101
0011010110111001101001010011110010001111001101101101111110000100010101100101110100101000111001001001101 11100
0100101111111011100101111001000011100001110111011111100101101101010100100110010110111111000110011011000 101111
1011000100110100000111001110111001001100011011101000111011110010000011001010110110100011011001110111010 01100
0000001110100001111110100111101111111000101011111100010001111110110100100101011101101111011010010010110 11010
1110100100001001000110010001110101010101011011000111001110001011010111100100111101010110100000110100001 0001110
1101000111010000101011111100011100100101111000001000111000111100010110110010111110001110011101011001010 01011
0111100011111111011011100010111101111111001000010010001010110110010010001000100010001011100000001001010 010000
0000110111111000000011100010011111010110101011110101000000110100010001111110000110001110011010001110011 111111
0001100100011011001110101000110000011010110100101111001011110010001000011000101111110000011100001011101 110111
1110101001110101001011011111111010001011000000100001111110100001111001011010000011001100000011111011010 10110
1111011101001110100000001100010101100111110011110101101100111010001001110001010011001101101001010100001 001111
1110000011111101000100111110000010110111011111100110001000011101110000001110100101010110110101000110110 010001
0110010111111010001001100110100000000100101010111011100000101100100111100110001110011000101000010000100 011010
0001010001110111111100110101011010010000001100101011101111011010111111010100001101100011101010100010000 101111
0101111110111001110100110101110011111110101111001101101011110000110001111011001111101000100110100000011 010110
0100000100011011110100111010111000011110011111110010010010000000000100101000011100010110100100000001110 0011011
0011010111100010001001101000000000000101110110101011110111000111000001010111100100100011001000011011010 011011
1111000000000100110111001000111100101010101100011100100010001110101011001110111111010011010101010011110 001100
0001010000111000100111011001010110100101001101111111001000000111110101011011101000100000000101110010110 111001
1100010110000001100100110000000110111011001100010100101011100111110101001000100011100100000011001011010 000100
1110011100110100101001000001101100110100011100101101110010100111101100010100101010010100101000011011010 10001
0000000010100101001101001010010010100010010101110101100000111101010111001111111011110010010110111100011 01110
0100001010110110000010100100011101101000000111100110011101000000000000000100010111101001101111110110101 0101011
0001101111101001000111111111001010010110111011000110101100101010000011011101100100010101101101100110001 10110
0101001000011110011110111001111110011011010110111111110011010000000101001011101100010110000101010101100 1100100
0101001110110000000101101010111011010100110011111100011111010000100001000101111010010001111001100101101 1101000
0101000001110110101001001011011110100111000011101001101101011011001100101001010001001101101101111010100 001001
001011101100010000001100100100110001000111010110101011011101010011010...

Kommastellen von PI im Hexadezimalsystem

243F6A8885A308D313198A2E03707344A4093822299F31D0082EFA98EC4E6C89452821E638D01377BE5466CF34E90C6CC0AC29B7C9
7C50DD3F84D5B5B54709179216D5D98979FB1BD1310BA698DFB5AC2FFD72DBD01ADFB7B8E1AFED6A267E96BA7C9045F12C7F9924
A19947B3916CF70801F2E2858EFC16636920D871574E69A458FEA3F4933D7E0D95748F728EB658718BCD5882154AEE7B54A41DC25A
59B59C30D5392AF26013C5D1B023286085F0CA417918B8DB38EF8E79DCB0603A180E6C9E0E8BB01E8A3ED71577C1BD314B2778AF2
FDA55605C60E65525F3AA55AB945748986263E8144055CA396A2AAB10B6B4CC5C341141E8CEA15486AF7C72E993B3EE1411636FBC2
A2BA9C55D741831F6CE5C3E169B87931EAFD6BA336C24CF5C7A325381289586773B8F48986B4BB9AFC4BFE81B6628219361D809CCF
B21A991487CAC605DEC8032EF845D5DE98575B1DC262302EB651B8823893E81D396ACC50F6D6FF383F442392E0B4482A484200469C
8F04A9E1F9B5E21C66842F6E96C9A670C9C61ABD388F06A51A0D2D8542F68960FA728AB5133A36EEF0B6C137A3BE4BA3BF0507EFB2
A98A1F1651D39AF017666CA593E82430E888CEE8619456F9FB47D84A5C33B8B5EBEE06F75D885C12073401A449F56C16AA64ED3AA6
2363F77061BFEDF72429B023D37D0D724D00A1248DB0FEAD349F1C09B075372C980991B7B25D479D8F6E8DEF7E3FE501AB6794C3B
976CE0BD04C006BAC1A94FB6409F60C45E5C9EC2196A246368FB6FAF3E6C53B51339B2EB3B52EC6F6DFC511F9B30952CCC814544AF
5EBD09BEE3D004DE334AFD660F2807192E4BB3C0CBA85745C8740FD20B5F39B9D3FBDB5579C0BD1A60320AD6A100C6402C7279679
F25FEFB1FA3CC8EA5E9F8DB3222F83C7516DFFD616B152F501EC8AD0552AB323DB5FAFD23876053317B483E00DF829E5C57BBCA6F8
CA01A87562EDF1769DBD542A8F6287EFFC3AC6732C68C4F5573695B27B0BBCA58C8E1FFA35DB8F011A010FA3D98FD2183B84AFCB56
C2DD1D35B9A53E479B6F84565D28E49BC4BFB9790E1DDF2DAA4CB7E3362FB1341CEE4C6E8EF20CADA36774C01D07E9EFE2BF11FB4
95DBDA4DAE909198EAAD8E716B93D5A0D08ED1D0AFC725E08E3C5B2F8E7594B78FF6E2FBF2122B648888B812900DF01C4FAD5EA06
88FC31CD1CFF191B3A8C1AD2F2F2218BE0E1777EA752DFE8B021FA1E5A0CC0FB56F74E818ACF3D6CE89E299B4A84FE0FD13E0B77CC
43B81D2ADA8D9165FA2668095770593CC7314211A1477E6AD206577B5FA86C75442F5FB9D35CFEBCDAF0C7B3E89A0D6411BD3AE1E
7E4900250E2D2071B35E226800BB57B8E0AF2464369BF009B91E5563911D59DFA6AA78C14389D95A537F207D5BA202E5B9C5832603
766295CFA911C819684E734A41B3472DCA7B14A94A1B5100529A532915D60F573FBC9BC6E42B60A47681E6740008BA6FB5571BE91F
F296EC6B2A0DD915B6636521E7B9F9B6FF34052EC585566453B02D5DA99F8FA108BA47996E85076A4B7A70E9B5B32944DB75092EC4
192623AD6EA6B049A7DF7D9CEE60B88FEDB266ECAA8C71699A17FF5664526CC2B19EE1193602A575094C29A0591340E4183A3E3F54
989A5B429D656B8FE4D699F73FD6A1D29C07EFE830F54D2D38E6F0255DC14CDD20868470EB266382E9C6021ECC5E09686B3F3EBAEF
C93C9718146B6A70A1687F358452A0E286B79C5305AA5007373E07841C7FDEAE5C8E7D44EC5716F2B8B03ADA37F0500C0DF01C1F04
0200B3FFAE0CF51A3CB574B225837A58DC0921BDD19113F97CA92FF69432477322F547013AE5E58137C2DADCC8B576349AF3DDA7A
94461460FD0030EECC8C73EA4751E41E238CD993BEA0E2F3280BBA1183EB3314E548B384F6DB9086F420D03F60A04BF2CB81290249
77C795679B072BCAF89AFDE9A771FD9930810B38BAE12DCCF3F2E5512721F2E6B7124501ADDE69F84CD877A5847187408DA17BC9F9
ABCE94B7D8CEC7AEC3ADB851DFA63094366C464C3D2EF1C18473215D908DD433B3724C2BA1612A14D432A65C45150940002133AE
4DD71DFF89E10314E5581AC77D65F11199B043556F1D7A3C76B3C11183B5924A509F28FE6ED97F1FBFA9EBABF2C1E153C6E86E3457
0EAE96FB1860E5E0A5A3E2AB3771FE71C4E3D06FA2965DCB999E71D0F803E89D65266C8252E4CC9789C10B36AC6150EBA94E2EA78A
5FC3C531E0A2DF4F2F74EA7361D2B3D1939260F19C279605223A708F71312B6EBADFE6EEAC31F66E3BC4595A67BC883B17F37D1018
CFF28C332DDEFBE6C5AA56558218568AB9802EECEA50FDB2F953B2AEF7DAD5B6E2F841521B62829076170ECDD4775619F151013CC
A830EB61BD960334FE1EAA0363CFB5735C904C70A239D59E9E0BCBAADE14EECC86BC60622CA79CAB5CABB2F3846E648B1EAF19BDF
0CAA02369B9655ABB5040685A323C2AB4B3319EE9D5C021B8F79B540B19875FA09995F7997E623D7DA8F837889A97E32D7711ED935
F166812810E358829C7E61FD696DEDFA17858BA9957F584A51B2272639B83C3FF1AC24696CDB30AEB532E30548FD948E46DBC31285
8EBF2EF34C6FFEAFE28ED61EE7C3C735D4A14D9E864B7E342105D14203E13E045EEE2B6A3AAABEADB6C4F15FACB4FD0C742F442EF6
ABBB5654F3B1D41CD2105D81E799E86854DC7E44B476A3D816250CF62A1F25B8D2646FC8883A0C1C7B6A37F1524C369CB74924784
8A0B5692B285095BBF00AD19489D1462B17423820E0058428D2A0C55F5EA1DADF43E233F70613372F0928D937E41D65FECF16C223B
DB7CDE3759CBEE74604085F2A7CE77326EA607808419F8509EE8EFD85561D99735A969A7AAC50C06C25A04ABFC800BCADC9E447A2
EC3453484FDD567050E1E9EC9DB73DBD3105588CD675FDA79E3674340C5C43465713E38D83D28F89EF16DFF20153E21E78FB03D4A
E6E39F2BDB83ADF7E93D5A68948140F7F64C261C94692934411520F77602D4F7BCF46B2ED4A20068D40824713320F46A43B7D4B750
0061AF1E39F62E9724454614214F74BF8B88404D95FC1D96B591AF70F4DDD366A02F45BFBC09EC03BD97857FAC6DD031CB850496EB
27B355FD3941DA2547E6ABCA0A9A28507825530429F40A2C86DAE9B66DFB68DC1462D7486900680EC0A427A18DEE4F3FFEA2E887A
D8CB58CE0067AF4D6B6AACE1E7CD3375FECCE78A399406B2A4220FE9E35D9F385B9EE39D7AB3B124E8B1DC9FAF74B6D185626A366
31EAE397B23A6EFA74DD5B43326841E7F7CA7820FBFB0AF54ED8FEB397454056ACBA48952755533A3A20838D87FE6BA9B7D096954B
55A867BCA1159A58CCA9296399E1DB33A62A4A563F3125F95EF47E1C9029317CFDF8E80204272F7080BB155C05282CE395C11548E4
C66D2248C1133FC70F86DC07F9C9EE41041F0F404779A45D886E17325F51EBD59BC0D1F2BCC18F41113564257B7834602A9C60DFF8
E8A31F636C1B0E12B4C202E1329EAF664FD1CAD181156B2395E0333E92E13B240B62EEBEB92285B2A20EE6BA0D99DE720C8C2DA2F7
28D012784595B794FD647D0862E7CCF5F05449A36F877D48FAC39DFD27F33E8D1E0A476341992EFF743A6F6EABF4F8FD37A812DC60
A1EBDDF8991BE14CDB6E6B0DC67B55106D672C372765D43BDCD0E804F1290DC7CC00FFA3B5390F92690FED0B667B9FFBCEDB7D9C
A091CF0BD9155EA3BB132F88515BAD247B9479BF763BD6EB37392EB3CC1159798026E297F42E312D6842ADA7C66A2B3B12754CCC7
82EF11C6A124237B79251E706A1BBE64BFB63501A6B101811CAEDFA3D25BDD8E2E1C3C9444216590A121386D90CEC6ED5ABEA2A64
AF674EDA86A85FBEBFE98864E4C3FE9DBC8057F0F7C08660787BF86003604DD1FD8346F6381FB07745AE04D736FCCC83426B33F01E
AB71B08041873C005E5F77A057BEBDE8AE2455464299BF582E614E58F48FF2DDFDA2F474EF388789BDC25366F9C3C8B38E74B475F2
5546FCD9B97AEB26618B1DDF84846A0E79915F95E2466E598E20B457708CD55591C902DE4CB90BACE1BB8205D011A862487574A99
EB77F19B6E0A9DC09662D09A1C4324633E85A1F0209F0BE8C4A99A0251D6EFE101AB93D1D0BA5A4DFA186F20F2868F169DCB7DA83
573906FEA1E2CE9B4FCD7F5250115E01A70683FAA002B5C40DE6D0279AF88C27773F8641C3604C0661A806B5F0177A28C0F586E0006
058AA30DC7D6211E69ED72338EA6353C2DD94C2C21634BBCBEE5690BCB6DEEBFC7DA1CE591D766F05E4094B7C018839720A3D7C9
27C2486E3725F724D9DB91AC15BB4D39EB8FCED54557808FCA5B5D83D7CD34DAD0FC41E50EF5EB161E6F8A28514D96C51133C6FD5
C7E756E14EC4362ABFCEDDC6C837D79A323492638212670EFA8E406000E03A39CE37D3FAF5CFABC277375AC52D1B5CB0679E4FA33
742D382274099BC9BBED5118E9DBF0F7315D62D1C7EC700C47BB78C1B6B21A19045B26EB1BE6A366EB45748AB2FBC946E79C6A376
D26549C2C8530FF8EE468DDE7DD5730A1D4CD04DC62939BBDBA9BA4650AC9526E8BE5EE304A1FAD5F06A2D519A63EF8CE29A86EE
22C089C2B843242EF6A51E03AA9CF2D0A483C061BA9BE96A4D8FE51550BA645BD62826A2F9A73A3AE14BA99586EF5562E9C72FEFD3
F752F7DA3F046F6977FA0A5980E4A91587B086019B09E6AD3B3EE593E990FD5A9E34D7972CF0B7D9022B8B5196D5AC3A017DA67DD
1CF3ED67C7D2D281F9F25CFADF2B89B5AD6B4725A88F54CE029AC71E019A5E647B0ACFDED93FA9BE8D3C48D283B57CCF8D5662979
132E28785F0191ED756055F7960E44E3D35E8C15056DD488F46DBA03A161250564F0BDC3EB9E153C9057A297271AECA93A072A1B3F
6D9B1E6321F5F59C66FB26DCF3197533D928B155FDF5035634828ABA3CBB28517711C20AD9F8ABCC5167CCAD925F4DE817513830D
C8E379D58629320F991EA7A90C2FB3E7BCE5121CE64774FBE32A8B6E37EC3293D4648DE53696413E680A2AE0810DD6DB22469852D
FD09072166B39A460A6445C0DD586CDECF1C20C8AE5BBEF7DD1B588D40CCD2017F6BB4E3BBDDA26A7E3A59FF453E350A44BCB4CD
D572EACEA8FA6484BB8D6612AEBF3C6F47D29BE463542F5D9EAEC2771BF64E6370740E0D8DE75B1357F8721671AF537D5D4040CB0
84EB4E2CC34D2466A0115AF84E1B0042895983A1D06B89FB4CE6EA0486F3F3B823520AB82011A1D4B277227F8611560B1E7933FDCB
B3A792B344525BDA08839E151CE794B2F32C9B7A01FBAC9E01CC87EBCC7D1F6CF0111C3A1E8AAC71A908749D44FBD9AD0DADECBD
50ADA380339C32AC69136678DF9317CE0B12B4FF79E59B743F5BB3AF2D519FF27D9459CBF97222C15E6FC2A0F91FC719B941525FAE
59361CEB69CEBC2A8645912BAA8D1B6C1075EE3056A0C10D25065CB03A442E0EC6E0E1698DB3B4C98A0BE3278E9649F1F9532E0D3
92DFD3A0342B8971F21E1B0A74414BA3348CC5BE7120C37632D8DF359F8D9B992F2EE60B6F470FE3F11DE54CDA541EDAD891CE627
9CFCD3E7E6F1618B166FD2C1D05848FD2C5F6FB2299F523F357A632762393A8353156CCCD02ACF081625A75EBB56E16369788D273C
CDE96629281B949D04C50901B71C65614E6C6C7BD327A140A45E1D006C3F27B9AC9AA53FD62A80F00BB25BFE235BDD2F671126905
B2040222B6CBCF7CCD769C2B53113EC01640E3D338ABBD602547ADF0BA38209CF746CE7677AFA1C52075606085CBFE4E8AE88DD87
AAAF9B04CF9AA7E1948C25C02FB8A8C01C36AE4D6EBE1F990D4F869A65CDEA03F09252DC208E69FB74E6132CE77E25B578FDFE33AC
372E6B83ACB022002397A6EC6FB5BFFCFD4DD4CBF5ED1F43FE5823EF4E8232D152AF0E718C97059BD98201F4A9D62E7A529BA89E12
48D3BF88656C5114D0EBC4CEE16034D8A3920E47882E9AE8FBDE3ABDC1F6DA51E525DB2BAE101F86E7A6D9C68A92708FCD9293CBC
0CB03C86F8A8AD2C2F00424EEBCACB452D89CC71FCD59C7F917F0622BC6D8A08B1834D21326884CA82E3AACBF37786F2FA2CAB6E3
DCE535AD1F20AC607C6B8E14F5EB4388E775014A6656665F7B...

Kommastellen von e im Dualsystem

1011011111100001010100010110001010001010111011010010101001101010101111110111000101011000100000000100111001111
0100111100111100011101100010111001110001011000001111001110001011010011011010010101101010011110000100110110 01
0000010001010001100100001100111111101111001100100100111001110111001110001001001001101100111110111110010111 11
0100101111111000110110001101100011000011000111010111011000111101101000000110110010000000010101011101100010001
1000010111101011010011110111111000111101101010111101010111111101011001010110000100100000110011111101010001 11
1101011111000001100110111011010000100001010110001101100101010101010100111101111011010001101011110011101010 101
0101110001001101011110011111110101011111100100100110101100110000100111100001100011100001110000011100110100010
1101110111110001010100110100010011101101011110011111101111111010000111001000011101111100010101100010100001 00
1101101010110111100111001101010011000010101100110010100100111101001000000111010011110010111101010111100000 10
1010110000110000010101100110010010011111011011000001110100010000100010101001010010111011001011001000111000 1111
1110111011100101101010111011010101101110110000011010111111010001101000000111010100111010000101010011110111
1000111001010011011111010010101110010101101110110111100111011000110111001010111011000110010000101100000111 10
1001111100100011101110000010100110110101110000100111100000001011111100111000011100110111110111110000101110 11
0011000000001101000000010011001101001010000011010000101111011000011001000101110010111111101001110011101001 10
0001011000001111111111000111001001111000100100011001011101110111100101000000110000011110000111111111000111 0
1100011101001100011011111101011011001100111011101011111100101111000010111011000010010000000000101 11
0001011000111011110001100000110111110100010110100000111011001011000110111100110100101000100110110000001101100
1011101111111110101000100001101011010000100011100001100001000111111100111111011100110111000110101010110110 0
1110110110010100011001000000110101101110111100001101001110100110111101111100110011100000000100011100001100 0
0110110100011011111100100111010110111001101100100100000111011110101101100100011101001001101001000111110111 1
1101111011100101100110001100101100001111010110000011100100100000111011110101101100100011101001001101001000 1111011111
0110000101000100111001001001110000101101000000100110000110010010011101111000100001101111001010001001111010 011
1111010100010001010010111000101101011101001101110100110110010011110010111000100001111001110001111110101010 010
1111111111010111001010111010000010101010111001110010011101111110110100111101110100001101101001010111100010 100
1000100011011000111010000011011010101111000101001000011001011110011011000011011110101011011010000111011011 111
1110011010010000010110101011100010001001000010011100000101010111100110100000110101111111010010100111101110 111
1011110011110000011011001000001110111000111111110101011001110100000110010111111110100101001111011101110 1
1010011110000111101111000101101110011011110101001011000011000101100100110111111010011111011011110010011000011
1010011110010011100101100010000101011110110110101011000111110101011111010000101101011010011111011011010001 10
0001110111011000111100111100011101010101010000001101000000000001001000011111110101010110111010010101111111000
1100011100110001111010011100010011010111001000100001101110111110110100001100011000101011101101011010100001 11
1000000001001011101100011110000110100001011001000001010100100011110000000101010010001100000100110000101010001
1011011100011101111000111110010111000110101101000000000001110000000010010010100110011001101000110011001110010
1110001011011110100001101000011101101110010011110101110001010000000000000000111100001010100100111011001110 10
1010011111100110001101000010101100110000001010100000101001000111001101110011101100100101111101110011111100 11
1011001001101101010101101001111111100010001010010001101011010011011011010110100001010001111101000100000110
0000101110000111001101000101000000000011111100101111100000110111101001100101100111001110100011000011001101
1001000101000000110110110001111010010011100110011101111101001011000011100001010011001010100011101000100011 10
1110100100010001000010110010101111010100111110101001100011101110110100010101000011001010011011101110110001 001
0011001000100100010111101111011101011001001011000111000000111111010100110010110011100011101000110000110011 01
0011000111000000001110000111010110011011010110100000110010101111111110011001111111011000111000110011011000 111
1101011100001111100100111000110000110000000100001100011000100111001010110000100100010011000010001011010000 1001
1101111010010100100100011100011111011110101001101010010110100100010000101110000101010011011111101001011101 10110
1101100011010000000110110001010000000000111011110000100100100011010100000101000100011110001100001010101111 1011
0000011111111111111001111000111010001001101110011111111101100101001111110001100000110000011000000100011110 000
1101011000011111100011100011011010000000000111011111011001101101000111011000111110010011100100101110010100 10
1100101011101111000001100101001100011001100101000111100111011111001010111110011001001011101110110101010110 000
0000100011001010100010100000011011111110110100010110011101001110011100111001110000010010001001100001000101101000001000
0010101110100011011011010110000100011110100110011111001011111011111001110010010000100100011011010001100010 11
0101010011100011001101011100101011000000110111010001101010111001110111111110101111001100010001010010010110 000
1100010001010101100010101010000100011001010000010111010001101010111001110111111110101111001100010001010010010110 000
0010011111010100100011010111001001010110111001000100010111100011001100111100101101110101011100101011001110 11
1101000000001111101100100111010001100000010000110001100010011100101011000001000101101100111011111110100011 1110
0111011100011010111000000011010110001111111101110101001010100011101001101011011011000111100110100101100010 10
1001101001010100100110110101000011000101100001110000011010010000011101010101110000110101111001001110001101 10
1011010100101001000000111000110010100111001100111111110100011010101010101000110110101011010000000000100110011
1101100000000001100100000111000000111100100001001011010001100011101100101010001101011100110010011111101101100
1000111111110011101100100101000010011010001100000010000110001100010011100101011000001000101101100111011111110 0110001
0111100000101110001100110000111011110111111011001001011000100001110111110000110101101100011100010100001010 1000
1110101011100010000010100101010101010101101100101111011101000111110010010011001001100110010111001011001011 0000
0011110001110011000000000110111101011100000010001010010010011100010001000001110011101001010101111000000101 11001
0001010100010100000100101011000111100010110111010110000010100000100010100001000110110000001011101000110101 11
0000110101111101011100010110010001011000001100110000000100011011111110110000010010100010101010000011111110001
1010001100100110110000010110010010110110111011110000010010110110110110110110110110110110110110110110110110 0001
0100011010100010101001001100010000100101110000001111111110111000011100001000010111111001101100001110000001 001
1011100101001011000101000110101010011010010001111000001110010000100011110011111100100110011110100111100011 00
0101100101000011000001001000010111101101100010010010000001011011001101101011011001101010010101111110011101 01
0110111000000000011001010010001000110110011100000010100000101000011111111000110000011101011010010101111011 111
1000100011000110000011111110000001111110000101001010001111110100100010101111000111011111100110000111010110 10010011
0010111010100010100100111111101000101101101000010101011101111111001110010101100001010011001011101101111011
0100101111101110101011111110111110010110001010001100001111101011111010101111100001110001011101011100011010 10
0001111110001011110111010000011110111110001100000111111110100001101111111010100110101110111111110111100101 00
1100000110011101111111000011011001011111010001000111010100100111110111101010000100010000111101000010000001 000
1011100101000001101010100111110100011100001010011110000000100011110001010101001010100000111110010011000011 10
0011001010110100011001000101110110111110001010001111011101111011010101001001111010101000101010110100111100
1011000011110111110101101110110100111000000111001101011010101100001101011010000111010010010010111111110001 001
1011011101010000000110010110000001011010111011101001110111111101010111010010111001111110011101101000000110011
1011101000100001000000101010000010111110110111100011101101001001110101110010011100101111100010011110000001 001
1101000000001000111000011111010011011011111000010100001010000111111110001100000111010110100101011111000001
1001011111000101100001000000100111001011101010001010101000111001111001111001010100011110101101101111001011000
1100010010111011000110111001000110101101100101111010101111110000001010001110100101100110010111011010010011 10
1100111010000000110111011100000100111110000011011111010000110010001011101101101000001111110100111000100110 11
0001011101011110100011010001000011010000100011000101001000110000010...