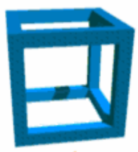
Reguläre Polyeder

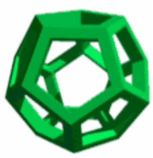
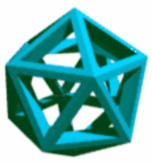
Natura omnipotens produxit corpora quinque Simplicia haec certo nomine dicta manent
Compositio in numerum Concurrunt addita cuique Atque inter sese Consociata viegent
Condita principio pura et sine labe fuere Nomina sunt aer Coelum, Aqua, flamma et humus
L. Pacioli

Ein reguläres Polyeder ist ein konvexes Polyeder mit kongruenten regelmäßigen n-Ecksflächen als Seitenflächen.
Da in einer n-kantigen Körperecke der Summe der Größen der Kantenwinkel kleiner als 360° sein muss, können im R^3 nur genau 5 regelmäßige Polyeder existieren, die Platonischen Körper.
(siehe Platonische Körper)

Halbreguläres Polyeder

Ein Polyeder heißt halbregulär oder semiregulär, wenn alle seine Oberflächen aus regelmäßigen Vielecken (eventuell unterschiedlicher Eckenzahl) bestehen, und jede Ecke des Polyeders durch eine seiner Symmetrieoperationen auf jede andere Ecke abgebildet werden kann. Es muss sich also um ein uniformes Polyeder handeln.
Seit Archimedes, dessen Arbeit darüber jedoch nicht erhalten geblieben ist, weiß man, dass es neben den Platonischen Körpern (und unendlich vielen Prismen und Antiprismen) noch genau dreizehn halbreguläre konvexe Polyeder gibt, die üblicherweise als Archimedische Körper bezeichnet werden.

Reguläre Polyeder - Platonische Körper

"Die Aura der platonischen Körper leuchtet in der Mathematik mit besonderem Glanz." Georg Glaeser
Die Platonischen Körper haben kongruente reguläre Vielecke als Seitenflächen. Es existieren im R^3 5 derartige Körper, was seit Platons Zeiten bekannt ist.

Tetraeder aus 4 (grch. tetra) Dreiecken
Hexaeder (oder Würfel) aus 6 (grch. hexa) Quadraten
Oktaeder aus 8 (grch. okta) Dreiecken
(Pentagon-)Dodekaeder aus 12 (grch. dodeka) Fünfecken (grch. pentagon)
Ikosaeder aus 20 (grch. eikosi) Dreiecken

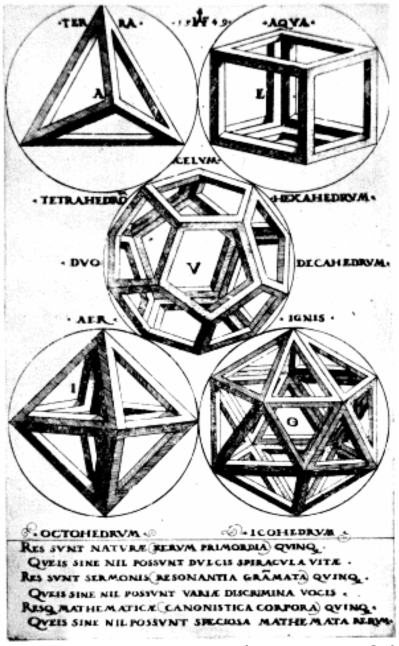
Das Hexaeder (Würfel) ist wohl in allen Hochkulturen des Altertums bekannt gewesen, das Dodekaeder soll Pythagoras (wahrscheinlicher aber Hippasos von Metapont) entdeckt haben, dem auch das Tetraeder bekannt gewesen sein soll, allerdings noch unter dem Namen Pyramide.
Die Bezeichnung Tetraeder hierfür stammt von Heron von Alexandria. Das Oktaeder und das Ikosaeder schließlich soll Theaitetos von Athen entdeckt haben.
Im Buch XIII der Elemente des Euklid findet man bereits um 300 v.u.Z. Konstruktionsbeschreibungen aller Platonischen Körper und den Nachweis, dass es nur diese regulären konvexen Polyeder gibt.
Platon hat die später nach ihm benannten Körper in seine Philosophie eingebaut, indem er sie mit den vier Elementen Erde (Hexaeder), Wasser (Ikosaeder), Feuer (Tetraeder) und Luft (Oktaeder) in Verbindung brachte und das Dodekaeder mit einer geheimnisvollen quinta essentia, dem Himmelsäther.

Abbildung: Augustin Herschvogel (1503-1553): die fünf platonischen Körper und ihre Zuordnung nach Platon

Reguläre Polyeder - Platonische Körper

450 v.Chr.	Nachweis des Dodekaeders durch Hippasos von Metapont
400 v.Chr.	Tetraeder und Ikosaeder werden von Theaitetos beschrieben
um 380 v.Chr.	Platon weist den Körpern die vier Elemente und das "Weltumfassende" zu
um 300 v.Chr.	Euklid weist Existenz der Körper nach und gibt eine Konstruktionsbeschreibung
1596	Kepler nutzt die Körper zur (scheinbaren) Erklärung des Planetensystems

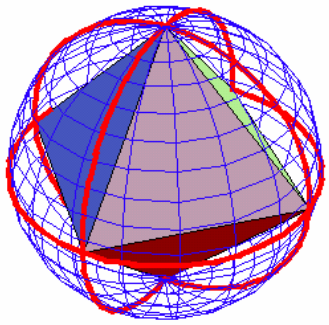
Das Tetraeder ist für Plato mit seinem leichten, beweglichen, durchdringenden Charakter ein Muster für das Feuer. Es symbolisiert mit seiner Form aber auch den scharfen, heftigen Charakter der Hitze.
Das Oktaeder ist für Plato mit dem Element der Luft zu vergleichen, da es durch die weniger scharf geformten Winkel nicht so leicht, beweglich und durchdringend erscheint.
Die Gestalt des Ikosaeders passt treffend "zu den sanft sich bewegenden Eigenschaften des Wassers".
Da diese drei Körper alle aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, sind sie ineinander umwandelbar - allein durch die Umlegung von Dreiecken.



Diese Theorie Platos wird als erstmalige Äußerung zum molekularen bzw. atomaren Stoffaufbau betrachtet.
Es zeigt, dass sich die Atome der Stoffe bei Stoffumwandlungen zu neuen Molekülen zusammensetzen. Diese Idee ist für die heutigen Wissenschaften – besonders für die Chemie – grundlegend. Bei der Zuordnung der Polyeder zu den Elementen fehlen allerdings noch das Hexaeder sowie das Dodekaeder. Den Kubus sieht Plato als ein Symbol für die Erde an, da er durch seine quadratischen Seiten nicht in andere Elemente umgewandelt werden kann und außerdem die kubische Form die Stabilität und die Dichte der Erde erklärt. Das Dodekaeder bezeichnet Plato als das alles umfassende "Weltall"

Platonische Körper ... haben kongruente reguläre Vielecke als Seitenflächen. Es existieren im R^3 5 derartige Körper.

	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Ikosaeder	Dodekaeder
besteht aus	4 Dreiecken	6 Vierecken	8 Dreiecken	20 Dreiecken	12 Fünfecken
Kanten	6	12	12	30	30
Ecken	4	8	6	12	20
Volumen	$a^3/12\ \sqrt{2}$	a^3	$a^3/3\ \sqrt{2}$	$5/12\ a^3(3+\sqrt{5})$	$1/4\ a^3\ (15 + 7\sqrt{5})$
Oberfläche	$a^2\ \sqrt{3}$	$6\ a^2$	$2\ a^2\ \sqrt{3}$	$5a^2\ \sqrt{3}$	$3a^2\ \sqrt{(25+10\sqrt{5}]}$
Radius r_u	$a/4\ \sqrt{6}$	$a/2\ \sqrt{3}$	$a/2\ \sqrt{2}$	$a/4\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$a/4\ (1+\sqrt{5})\ \sqrt{3}$
Radius r_m	$a/2\ \sqrt{3}$	$a/2\ \sqrt{2}$	$a/2$	$a/4\ \sqrt{(6+2\sqrt{5})}$	$a/4\ (3+\sqrt{5})$
Radius r_i	$a/12\ \sqrt{6}$	$a/2$	$a/6\ \sqrt{6}$	$a/12(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$a/20\sqrt{[10(25+11\sqrt{5})]}$
Winkel	70°32'44"	90°	109°28'14"	116°35' 5"	138°11'26"



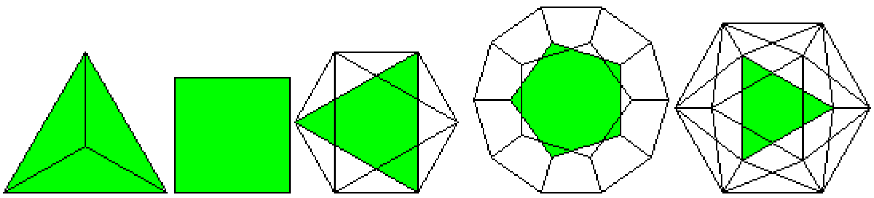
Inkugel, Mittelkugel, Umkugel der Platonischen Körper
Auf Grund der Symmetrie der Platonischen Körper können bei diesen Polyedern (ebenso bei den Archimedischen Körpern) drei typische Kugeln betrachtet werden:

Inkugel … die Inkugel berührt die Polyeder in den Flächenmittelpunkten der regelmäßigen Seitenflächen.
Mittelkugel … die Mittelkugel berührt die Polyeder in den Kantenmittelpunkten der regelmäßigen Kanten.
Umkugel … die Umkugel berührt die Polyeder in deren Ecken.
Abbildung: Umkugel eines Oktaeders

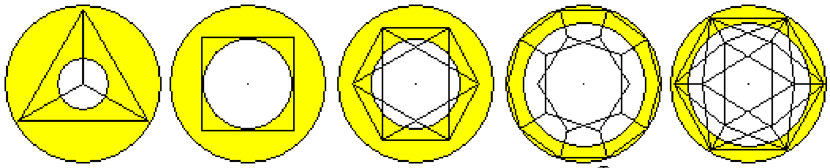
Für die Radien dieser Kugeln gilt: Inkugelradius r, Mittelkugelradius ρ, Umkugelradius R, Kantenlänge a
Inkugel-Mittelkugel $\quad r = \rho^2 / \sqrt{(\rho^2 + 1/4\ a^2)}$
Inkugel-Umkugel $\quad r = (R^2 - 1/4\ a^2) / R$
Mittelkugel-Umkugel $\quad \rho = a/(4R)\ \sqrt{(a^2 - 4R^2)}$
Die Existenz dieser Kugeln nutzte Johannes Kepler 1596 in seinem Werk "Mysterium Cosmographicum", um die Abstände der damals sechs bekannten Planeten des Sonnensystems zu erklären. Alle Planeten beschrieben danach Kreisbahnen auf Kugelschalen.

Umkugeln für die Platonischen Körper
Sind p die Anzahl der Seiten einer Seitenfläche und q die Anzahl in einer Ecke zusammentreffender Kanten, so gilt:
Flächenwinkel $\quad \theta = 2 \arcsin [\ \cos(180°/q) / \sin(180°/p)\ ]$
Verhältnis Umkugelradius R zur Kantenlänge a $\quad R/a = 1/2 \sin(180°/q) / [\sin(180°/p) \cos(\theta/2)\ ]$
Verhältnis Umkugelradius R zum Inkugelradius r $\quad R/r = \tan(180°/p) \tan(180°/q)$
Verhältnis Oberflächeninhalt A zum Quadrat der Kantenlänge a
$A/a^2 = f*p/4 \cot(180°/p)$; f ... Anzahl der Seitenflächen
Volumen $\quad V = r/3\ A$
Die fünf platonischen Körper füllen im Verhältnis zu ihren Umkugeln folgende Rauminhalte aus:
Tetraeder: 12,2518%; Würfel: 36,7553%; Oktaeder: 31,8310%; Dodekaeder: 66,4909%; Ikosaeder: 60,5461% , d.h. der Dodekaeder entspricht eher einer Kugel als der Ikosaeder!

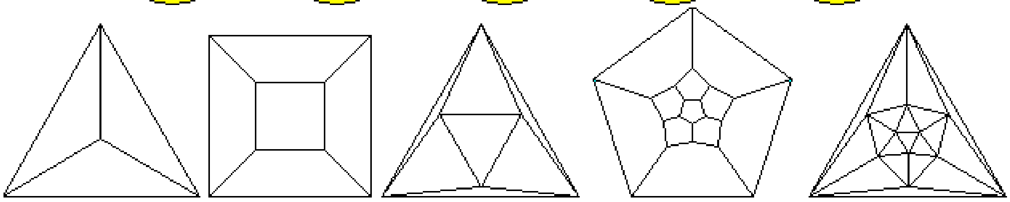
Parallel-
projektionen



In- und
Umkugel



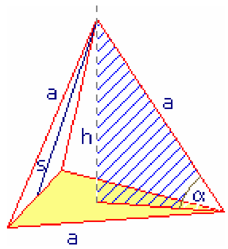
Schlegel-
Diagramme



Regelmäßiges Tetraeder

Das regelmäßige Tetraeder besteht aus 4 kongruenten Dreiecken (grch. vier = τετρα, tetra); Vierflächner.
Ein allgemeines Tetraeder ist ein konvexer Körper mit 4 nicht notwendig kongruenten Dreiecken als Seitenflächen. Das Polyeder ist das einfachste Beispiel für Td-Symmetrie von Polyedern.
Oft wird vereinfachend mit dem Begriff "Tetraeder" das regelmäßige Tetraeder gemeint.
Schläfli-Symbol { 3 ; 3 }, Euler-Charakteristik 2

Volumen	$V = a^3/12 \sqrt{2} \approx 0.11785\ a^3$
Oberfläche	$A = a^2 \sqrt{3} \approx 1.73205\ a^2$
Grundfläche	$G = a^2/4 \sqrt{3} \approx 0.43301\ a^2$
Höhe	$h = a/3 \sqrt{6} \approx 0.8165\ a$
Seitenhöhe	$s = a/2 \sqrt{3} \approx 0.8660\ a$
Umkugelradius	$r_u = a/4 \sqrt{6} \approx 0.61237\ a$
Mittelkugelradius	$r_m = a/2 \sqrt{3} \approx 0.86603\ a$
Inkugelradius	$r_i = a/12 \sqrt{6} \approx 0.20412\ a$
Flächenwinkel	$\phi = 70°32'44''$



$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

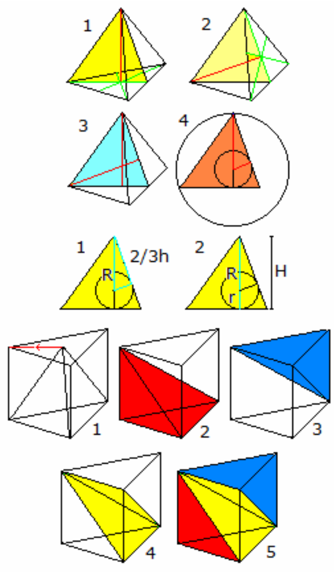
Volumen

abgebildete Determinante · 1/6 = V, Punktkoordinaten a,b,c

Bei einem regelmäßigen Tetraeder seien r der Inkugelradius, R der Umkugelradius, ρ der Mittelkugelradius, a die Länge einer Seitenkante, r' der Inkreisradius einer Seitenfläche, R' der Umkreisradius einer Seitenfläche, h die Höhe einer Seitenfläche, H die Höhe des Tetraeders, A der Oberflächeninhalt und V das Volumen des Tetraeders. Dann gilt:

Kantenlänge $a = 2r \sqrt{6} = 2/3\ R \sqrt{6} = 2r' \sqrt{3} = R' \sqrt{3} = 2\rho \sqrt{2} = 2/3\ h \sqrt{3} = H/2 \sqrt{6}$
Inkugelradius $r = R/3 = a/12 \sqrt{6} = r'/2 \sqrt{2} = R'/4 \sqrt{2} = \rho/3 \sqrt{3} = h/6 \sqrt{2}\ H/4$
Umkugelradius $R = 3r = a/4 \sqrt{6} = 3/2\ r' \sqrt{2} = 3/4\ R' \sqrt{2} = \rho \sqrt{3} = h/2 \sqrt{2} = 3/4\ H$
Mittelkugelradius $\rho = r \sqrt{3} = R/3 \sqrt{3} = a/4 \sqrt{2} = r'/2 \sqrt{6} = R'/4 \sqrt{6} = h/6 \sqrt{6} = H/4 \sqrt{3}$
Flächeninkreisradius $r' = r \sqrt{2} = R/3 \sqrt{2} = a/6 \sqrt{3} = R'/2 = \rho/3 \sqrt{6} = h/3 = H/4 \sqrt{2}$
Flächenumkreisradius $R' = 2r \sqrt{2} = 2/3\ R \sqrt{2} = a/3 \sqrt{3} = 2/3\ \rho \sqrt{6} = 2/3\ h = H/2 \sqrt{2}$
Flächenhöhe $h = 3r \sqrt{2} = R \sqrt{2} = a/2 \sqrt{3} = 3r' = 3/2\ R' = \rho \sqrt{6} = 3/4\ H \sqrt{2}$
Tetraederhöhe $H = 4r = 4/3\ R = a/3 \sqrt{6} = 2r' \sqrt{2} = R' \sqrt{2} = 4/3\ \rho \sqrt{3} = 2/3\ h \sqrt{2}$
Oberfläche $A = 24r^2 \sqrt{3} = 8/3\ R^2 \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3} = 12r'^2 = 3R'^2 \sqrt{3} = 8\rho^2 \sqrt{3} = 4/3\ h^2 \sqrt{3} = 3/2\ H^2 \sqrt{3}$
Volumen $V = 8r^3\sqrt{3} = 8/27\ R^3 \sqrt{3} = a^3/12 \sqrt{2} = 2r'^3 \sqrt{6} = R'^3/4 \sqrt{6} = 8/3\ \rho^3 = 2/27\ h^3 \sqrt{6} = H^3/8 \sqrt{3}$

Eckpunktkoordinaten eines Tetraeders:
1) das Tetraeder soll eine Umkugel des Radius 1 haben, der Umkugelmittelpunkt sei (0; 0; 0). Dann wird für die Eckkoordinaten
$A(-\sqrt{6}/3;\ \sqrt{2}/3;\ -1/3)$ $B(\sqrt{6}/3;\ \sqrt{2}/3;\ -1/3)$ $C(0;\ 2/3 \sqrt{2};\ -1/3)$ $D(0;\ 0;\ 1)$
2) der Schwerpunkt des Tetraeders soll bei einer Kantenlänge 1 in (0; 0; 0) liegen
$A(-1/2;\ -\sqrt{3}/6;\ -\sqrt{6}/12)$ $B(1/2;\ -\sqrt{3}/6;\ -\sqrt{6}/12)$ $C(0;\ \sqrt{3}/3;\ -\sqrt{6}/12)$ $D(0;\ 0;\ \sqrt{6}/4)$



$V = \sqrt{2}\, a^3/12$

Symmetrieachsen

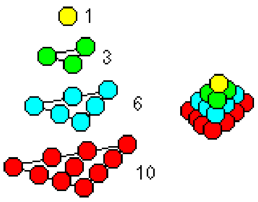
4 (120°)-Symmetrieachsen durch einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite
3 (180°)-Symmetrieachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten

Mittelpunkt, Umkugel und Inkugel

Der Mittelpunkt eines Tetraeders ist der Schnittpunkt zweier Raumhöhen (1,2,3).
Er ist sowohl Schwerpunkt, Mittelpunkt einer Kugel durch die vier Eckpunkte als auch Mittelpunkt der größten Kugel, die noch in das Tetraeder passt (4).
Mit dem Satz des Pythagoras $R^2 = r^2 + (2/3h)^2$ (1) und $H = R + r$ (2) erhält man zwei Gleichungen für R und r:

$r = \sqrt{6}\, a/12 \qquad R = \sqrt{6}\, a/4$

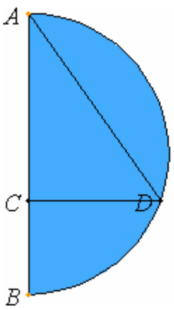
Legt man um das Tetraeder ein Prisma (1) mit dem Volumen $A_{Dreieck} \cdot H$ und verschiebt passend dreimal die Spitze des Tetraeders in eine Prismaecke (2,3,4), so entstehen drei schiefe Dreieckspyramiden mit gleichem Volumen. Sie füllen das Prisma aus (5).
Daraus folgt, dass das Volumen eines Tetraeders gleich $(1/3) \cdot A_{Dreieck} \cdot H$ ist.

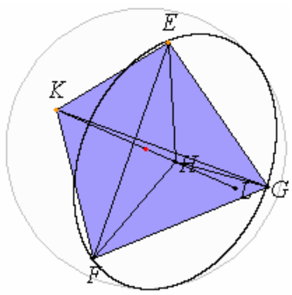


Tetraederzahlen

Man kann Kugeln zu immer größer werdenden Tetraedern aufschichten. Die Anzahl der Kugeln in einer Schicht ist 1, 3, 6, 10, ... , allgemein $n(n+1)/2$.
Bildet man die Summe der Kugeln eines Tetraeders, so erhält man die "Tetraederzahlen" 1, 4, 10, 20, ... , allgemein

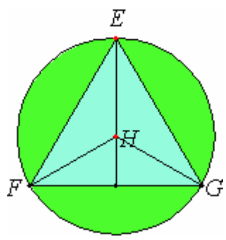
$1+3+6+10+\ldots+n(n+1)/2 = n(n+1)(n+2)/6.$



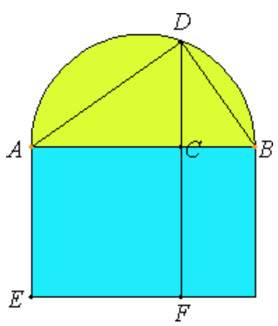


Euklidische Tetraederkonstruktion

Buch XIII der Elemente § 13 (A. 1):
Eine Pyramide zu errichten und mit einer gegebenen Kugel zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser anderthalb so groß wird wie die Pyramidenkante.
Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = 2 CB (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in Punkt C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DA. Ferner lege man den Kreis EFG hin, dessen Radius = DC sei, und beschreibe den Kreis EFG das gleichseitige Dreieck EFG ein (IV, 15). Man verschaffe sich den Mittelpunkt H des Kreises und ziehe EH, HF, HG. Weiter errichte man in H auf der Ebene des Kreises EFG die Senkrechte HK (XI, 12), trage auf HK die Strecke HK = AC ab und ziehe KE, KF, KG.

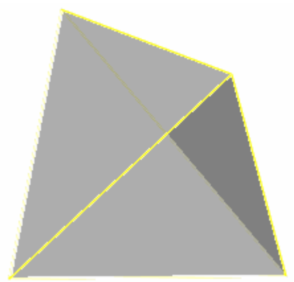


Da KH auf der Ebene des Kreises EFG senkrecht steht, bildet es mit allen es treffenden geraden Linien, die in der Ebene des Kreises EFG liegen, rechte Winkel (XI, Definition 3). HE, HF, HG treffen es alle, also ist HK ⊥ sowohl HE als HF als HG. Da AC = HK, CD = HE und sie rechte Winkel umfassen, ist Grundlinie DA = Grundlinie KE (I, 4). Aus demselben Grund sind auch KF und KG beide = DA. KE, KF, KG sind also alle drei einander gleich. Da AC = 2 CB, ist AB = 3 BC. Aber wie hernach gezeigt werden soll (siehe Hilfssatz) AB : BC = AD² : DC²; also ist AD² = 3 DC². Aber auch FE² = 3 EH² (XIII, 12) und DC = EH; also DA = EF. Wie bewiesen, ist aber DA = sowohl KE als KF als KG. Von den Strecken EF, FG, GE ist jede jeder der Strecken KE, KF, KG gleich. Die vier Dreiecke EFG, KEF, KFG, KEG sind also gleichseitig. So hat man aus vier gleichseitigen Dreiecken die Pyramide errichtet, deren Grundfläche ∆ EFG und deren Spitze Punkt K ist.
Weiter soll man sie mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der



Kugeldurchmesser 1 ½ mal so groß wird wie die Pyramidenkante. Man setze die gerade Linie HL an KH gerade an und mache HL = CB.
Da AC : CD = CD : CB (VI, 8 Zusatz), AC = KH, CD = HE, CB = HL, ist KH : HE = EH : HL, also KH · HL = EH² (VI, 17). ∠ KHE und EHL sind dabei beide Rechte. Also muss der Halbkreis, den man über KL zeichnete, auch durch E gehen, da, wenn man EL zieht, ∠ LEK ein Rechter wird, weil ∆ ELK sowohl mit ∆ ELH als EHK winkelgleich wird (VI, 8; III, 31). Mithin muss der Halbkreis, wenn man ihn durch Herumführen, während KL fest bleibt, wieder in dieselbe Lage zurückbringt, von der er ausging (XI, Definition 14), auch durch die Punkte F, G gehen, da, wenn man FL, LG zieht, ähnlich auch die Winkel bei F und G Rechte werden. So wäre die Pyramide mit der gegebenen Kugel umschlossen. Denn der

Durchmesser KL der Kugel ist = AB, dem Durchmesser der gegebenen Kugel, da man KH = AC und HL = CB gemacht hat.
Ich behaupte weiter, dass quadriert der Kugeldurchmesser 1 ½ mal so groß wird wie die Pyramidenkante.
Da AC = 2 CB, ist AB = 3 BC. Umgewendet ist also BA 1 ½ AC. Aber BA : AC = $BA^2 : AD^2$, da, wenn man DB zieht, BA : AD = DA : AC (VI, 4), weil ∆ DAB ~ ∆ DAC (VI, 8) und das erste Glied sich zum dritten verhält wie das Quadrat des ersten um Quadrat des zweiten (VI, 19 Zusatz). Also ist BA^2 = 1 ½ AD^2. Hier ist BA der Durchmesser der gegebenen Kugel und AD der Pyramidenkante gleich. Also wird quadriert der Kugeldurchmesser anderthalb mal so groß wie die Pyramidenkante – q.e.d.
Hilfssatz: Man muss noch zeigen, dass AB : BC = $AD^2 : DC^2$.
Man gehe von der Zeichnung des Halbkreises aus, ziehe, DB, zeichne über AC das Quadrat EC und ergänze Parallelogramm FB.
Da, weil ∆ DAB mit ∆ DAC winkelgleich ist (VI, 8), BA : AD = DA : AC (VI, 4), ist BA · AC = AD^2 (VI, 17).
Da AB : BC = Parallelogramm EB : BF (VI, 1), hier EB aber BA · AC ist wegen EA = AC, BF aber AC · CB, so ist AB : BC = BA · AC : AC · CB. Nun ist BA · AC = AD^2, und AC · CB = DC^2, weil das Lot DC zwischen den Abschnitten AC, CB der Grundlinie Mittlere Proportionale ist (VI, 8 Zusatz), da ∠ ADB ein Rechter (III, 31). Also ist AB : BC = $AD^2 : DC^2$ - q.e.d.



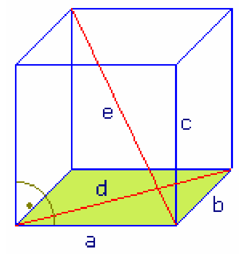
Disphenoid, gleichschenkliges Tetraeder

Ein Disphenoid oder gleichschenkliges Tetraeder ist ein von vier kongruenten Dreiecken begrenztes Polyeder.
Die jeweils gegenüberliegenden, unverbundenen Kanten haben die gleiche Länge. Die 4 Dreiecke haben denselben Umfang und dieselbe Fläche.

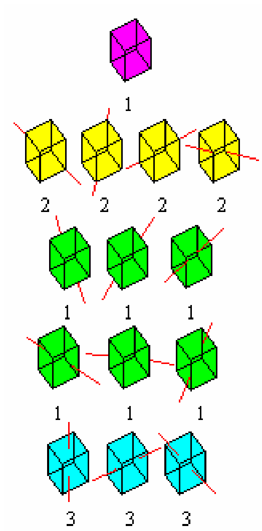
Disphenoide kommen in der Natur als Kristallform vor: Sie sind die allgemeine Flächenform der Kristallklassen 222 (rhombisch-disphenoidische) und 4 (tetragonal-disphenoidische Klasse).
Sind die drei verschiedenen langen Kanten l, m und n, dann gilt:

Volumen $V = \sqrt{1/72\,(l^2+m^2-n^2)(l^2-m^2+n^2)(-l^2+m^2+n^2)}$
Oberfläche $A = \sqrt{4\,l^2m^2 - (l^2 + m^2 - n^2)^2} = 4T$
Umkugelradius $R = \sqrt{1/8\,(l^2+m^2+n^2)}$
Inkugelradius $r = 3V / (4T)$, wobei T der Flächeninhalt eines der Seitendreiecke ist.
Seitenfläche $T = 1/4 \sqrt{4\,l^2m^2 - (l^2 + m^2 - n^2)^2}$
Eine bemerkenswerte Beziehung ist
$$16\,T^2 R^2 = l^2m^2n^2 + 9\,V^2$$
Sind l, m und n gleichlang, dann liegt als Sonderfall ein regelmäßiges Tetraeder vor.

Hexaeder = Würfel



Regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus sechs kongruenten Quadraten besteht. Schläfli-Symbol { 4 ; 3 }, Euler-Charakteristik 2
Volumen $V = a^3 = A/6 \sqrt{A/6} \approx 0{,}0680414 \sqrt{A^3}$
$V = 8/9 \sqrt{3}\, r_u^3 \approx 1{,}5396007\, r_u^3 = 8\, r_i^3$
Oberflächeninhalt $A = 6\, a^2 = 6 \sqrt[3]{V^2} = 8\, r_u^2$
Mantelflächeninhalt $M = 4\, a^2 = 16\, r_i^2$
Seitenkante $a = 2/3 \sqrt{3}\, r_u \approx 1{,}1547005\, r_u = 2\, r_i = \sqrt{2}\, r_m$
Raumdiagonale $e = a \sqrt{3}$
Umkugelradius $r_u = a/2 \sqrt{3} \approx 0{,}8660254\, a$
Mittelkugelradius $r_m = a/2 \sqrt{2} \approx 0{,}707106781\, a$
Inkugelradius $r_i = a/2$
Flächenwinkel $\phi = 90°$
Verhältnis Volumen / Umkugelvolumen $2 \sqrt{3} / (3\pi)$



Das regelmäßige Hexaeder (Würfel), von griech. hexáedron = Sechsflächner, war in allen Hochkulturen des Altertums bekannt, das Dodekaeder soll Pythagoras entdeckt haben, dem auch das Tetraeder bekannt gewesen sein soll, allerdings noch unter dem Namen Pyramide.
Die Bezeichnung Tetraeder hierfür stammt von Heron von Alexandria. Das Oktaeder und das Ikosaeder schließlich soll Theaitetos von Athen entdeckt haben.
Im Buch XIII der Elemente des Euklid findet man bereits um 300 v.u.Z. Konstruktionsbeschreibungen aller Platonischen Körper und den Nachweis, dass es nur diese regulären konvexen Polyeder gibt.

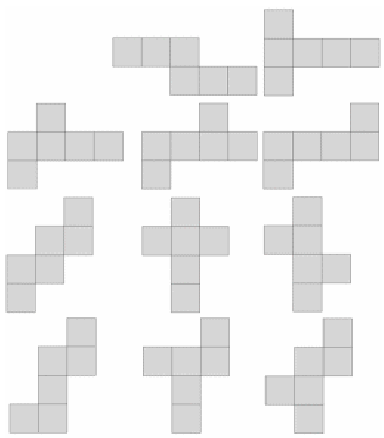
Der Würfel ist ein spezielles Parallelepiped, ein spezieller, gleichseitiger Quader sowie ein spezielles gerades quadratisches Prisma. Die Größe eines Würfels wird durch die Angabe der Kantenlänge festgelegt. Der Körper zeichnet sich durch eine hohe Symmetrie aus.

Der deutsche Name Würfel ergibt sich aus "Wurf", da schon in historischen Zeiten Polyeder in Würfelform für Würfelspiele verwendet wurden.

Symmetrie am Würfel

Der Mittelpunkt des Würfels ist das Symmetriezentrum.
Der Würfel hat neun Symmetrieebenen. Drei Ebenen liegen parallel zu den Seitenflächen und gehen durch die Mitte.
Sechs Ebenen gehen durch gegenüberliegende Kanten und zwei Raumdiagonalen. Sie zerschneiden den Würfel in Prismen.
Man kann 13 Drehachsen finden. Dreht man um eine dieser Achsen, so geht er in sich selbst über und zeigt neue Ansichten. Das Bild illustriert diesen Sachverhalt. Die Zahlen unter den Würfeln geben die Anzahl der Drehungen an.

Symmetrieachsen

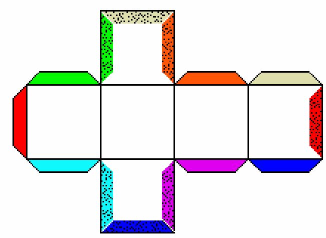


3 (90°)-Symmetrieachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten
6 (180°)-Symmetrieachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten
4 (120°)-Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Ecken

Würfelnetze

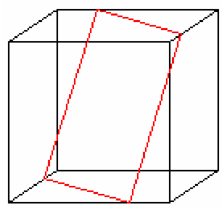
Wickelt man einen Würfel in die Ebene ab, entsteht ein Würfelnetz.
Bis auf Drehung und Spiegelung existieren für den Würfel genau 11 inkongruente Netze.
Unter der Adresse
http://www.gogeometry.com/solid/cube_metamorphosis_polytopes.htm
ist ein sehr schönes You-Tube-Video zum Aufklappen und Zusammensetzen eines Würfels zu sehen.

Bau eines Würfels



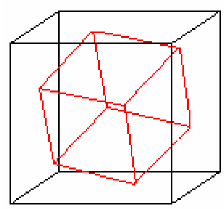
Dieses ist die übliche Art einen Würfel zu bauen. Man zeichnet ein Netz und versieht gewisse Ränder mit Klebestreifen.
Die Streifen werden abgeknickt und innen auf die gepunkteten Felder gleicher Farbe geklebt. Der Würfel wird zuletzt mit dem Deckel rechts geschlossen.
Das größte Netz eines Würfels, das noch in ein Quadrat passt, ist links abgebildet. Dabei gilt bei einer Quadratseite a für die Kantenlänge des Würfels $a^2 = 8x^2 \rightarrow a = \sqrt{8}$.

Quadrat im Würfel

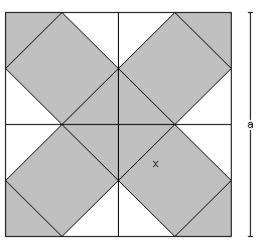


Das rote Quadrat ist das größte Quadrat, das in einen Würfel passt. Die Eckpunkte des Quadrates teilen die Kanten im Verhältnis 1:3.

Würfel im Würfel

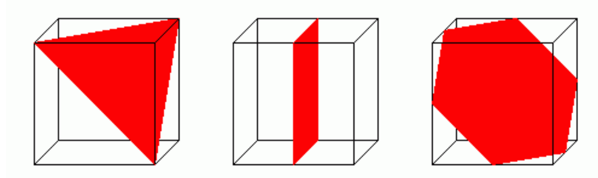


Der rote Würfel ist der kleinste Würfel, der alle Seitenflächen des schwarzen Würfels berührt. Die Eckpunkte oben rechts und unten links liegen auf der Raumdiagonalen des schwarzen Würfels und teilen sie im Verhältnis 1:3:1. Die anderen Eckpunkte liegen auf Flächendiagonalen und teilen diese im Verhältnis 2:5 bzw. 5:2.



Die Raumdiagonale des roten Würfels liegt auf der des schwarzen Würfels. Der rote Würfel ist um 60° gedreht. Ist a die Kante des schwarzen Würfels, so hat der rote Würfel die Kante 0,6a.
Verbindet man gewisse Kantenmitten des Würfels, so entsteht ein Schnitt durch den Würfel. Die Schnittfläche ist ein Sechseck mit der Seitenlänge $a/2 \sqrt{2}$.

Schnitt eines Würfels



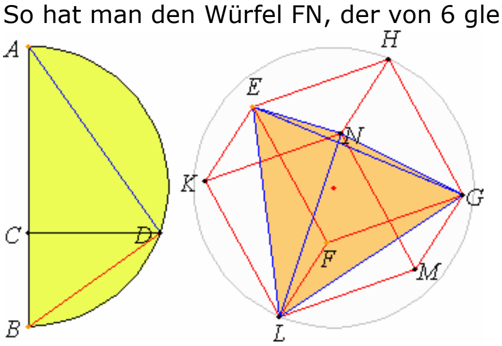
Die entstehenden Schnittflächen haben Seiten, die beim Schnitt durch die Seitenflächen des Würfels erzeugt werden. Da ein Würfel 6 Seiten besitzt, können keine Vielecke mit mehr als 6 Seiten entstehen.
Wie die Abbildungen zeigen, kann man regelmäßige Dreiecke, Quadrate und regelmäßige Sechsecke erzeugen.
Das ausgewählte Dreieck ist regelmäßig, weil alle Seiten mit einer Diagonalen eines Oberflächenquadrates identisch und damit gleich sind.
Das es sich in der mittleren Abbildung um ein Quadrat handelt, ist offensichtlich.

Wenn man die Schnittebene so legt, dass sie 5 Seiten des Würfels schneidet, ergibt sich als Schnittfläche ein Fünfeck. Man kann dann allerdings nicht vermeiden, dass Würfelseiten geschnitten werden, die einander gegenüber liegen. Da diese Seiten zueinander parallel sind, sind es auch die durch den Schnitt entstehenden Seiten des Fünfecks. Man kann deshalb kein regelmäßiges Fünfeck erzeugen, da dieses keine parallelen Seiten besitzt. Da auch ein regelmäßiges Dreieck diese Eigenschaft besitzt, dürfen die geschnittenen Würfelflächen einander nicht gegenüber liegen. Man kann das in der Zeichnung sehr gut erkennen.
Beim Sechseck kann man mit Hilfe des Pythagoras leicht erkennen, dass alle Seiten gleich lang sind und dass auch alle Abstände der Eckpunkte zum Mittelpunkt des Würfels dieselbe Länge haben. Das Sechseck besteht also aus 6 regelmäßigen Dreiecken und ist damit ein ebenes regelmäßiges Sechseck.

Euklidische Würfelkonstruktion

Buch XIII der Elemente § 15 (A. 3):
Einen Würfel zu errichten und mit einer Kugel wie die Pyramide zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = 2 CB (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man das Quadrat EFGH hin, dessen Seite = DB sei (I, 46), errichte in E, F, G, H auf der Ebene des Quadrats EFGH die Senkrechten EK, FL, GM, HN (XI, 12), trage auf allen geraden Linien EK, FL, GM, HN Strecken EK, FL, GM, HN, jede einer der Strecken EF, FG, GH, HE gleich, ab und ziehe KL, LM, MN, NK. So hat man den Würfel FN, der von 6 gleichen Quadraten umfasst wird, errichtet.



Weiter soll man ihm mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelseite. Man ziehe KG und EG.
Da ∠ KEG ein Rechter, weil KE ⊥ Ebene EG und natürlich auch ⊥ Strecke EG (XI, Definition 3), muss der Halbkreis, den man über KG zeichnete, auch durch Punkt E gehen (III, 31). Weil ebenso GF ⊥ sowohl FL als FE, ist GF auch ⊥ Ebene FK (XI, 4), so dass, wenn man FK zieht, auch GF ⊥ FK. Deshalb muss der Halbkreis, den man über GK zeichnete, ebenso auch durch F gehen; und ähnlich muss er auch durch die übrigen Würfelecken gehen. Bringt man mithin, während KG fest bleibt, den Halbkreis durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurück, von der er ausging (XI, Definition 14), so muss der Würfel mit einer Kugel umschlossen sein; ich behaupte, mit der gegebenen. Da nämlich GF = FE und der Winkel bei F ein Rechter, ist $EG^2 = 2\,EF^2$ (I, 47). Aber EF = EK; also $EG^2 = 2\,EK^2$, folglich $GE^2 + EK^2$, d.h. (I, 47) $GK^2 = 3\,EK^2$. Da AB = 3 BC und $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz), ist $AB^2 = 3\,BD^2$. Wie bewiesen, ist auch $GK^2 = 3\,KE^2$. KE haben wir aber = DB gemacht; also ist KG = AB. Hier ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; also KG dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich.
Man hat also den Würfel mit der gegebenen Kugel umschlossen. Und nebenbei hat man bewiesen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante – q.e.d.

Atomium

Das Atomium in Brüssel wurde nach dem Vorbild eines Eisenkristalls erbaut.
Dieses Eisenkristall bildet einen idealen Würfel. An jeder Würfelecke befindet sich ein Atom und zusätzlich im Innern, am Schnittpunkt der Raumdiagonalen.
Eisenkristalle bilden damit ein kubisch raumzentriertes Gitter.

Die für die Weltausstellung 1958 geschaffene eindrucksvolle Stahl- und Aluminiumkonstruktion wurde von dem Ingenieur André Waterkeyn entworfen. Die kristalline Eisenstruktur wurde in 165-milliardenfacher Vergrößerung dargestellt.
Das Atomium ist 102 m hoch. Jede der neun Kugeln hat einen Durchmesser von 18 m.
Seit der Rekonstruktion 2006 ist das Atomium wieder besuchbar und ein imposantes Gebäude.

Bauwerke in Würfelform

Ein Gebäude in Würfelform ist nicht praktisch. Vielleicht haben gerade deshalb Architekten und Künstler den Würfel als Herausforderung angenommen um kreativ zu werden. Die Ergebnisse sind viele originelle Schaubauten und Skulpturen in aller Welt.
Ein kleiner Rückblick auf die Expo 2000 in Hannover:

1. Der T-Digit der Deutschen Telekom bildete ein Zentrum des Ausstellungsgeländes. Von einer breiten Schautreppe aus konnte man auf eine Projektionsfläche herabsehen, wo ein beeindruckend helles Fernsehbild zu sehen war.
2. Der Ausstellungsblock des mexikanischen Pavillons bildete einen Würfel, der weithin sichtbar war.

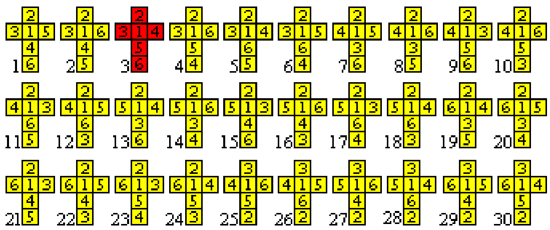
1 2 3

3. Der isländische Kubus: Er war in dunkelblau gehalten und über ihm lag ein Wasserfilm. Innen stand ein rundes Wasserbecken, dessen Oberfläche als Leinwand für einen Film über Island aus der Vogelperspektive diente. Am Ende der Vorführung schoss ein künstlicher Geysir in die Höhe.

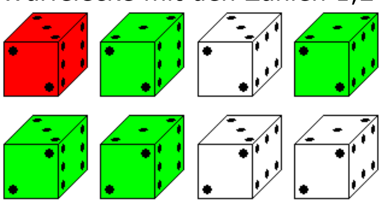
Spielwürfel

Spielwürfel sind mehr als deren mathematisches Äquivalent, "Hexaeder", ein Körper mit sechs Flächen, wobei jede Fläche zu den angrenzenden jeweils rechte Winkel bildet.
Es gibt sie - so man bei ihnen noch den Begriff Würfel, besser Spielwürfel, verwenden will - in vielen verschiedenen Varianten: Vierseiter (Tetraeder, Dreieckspyramide), Sechsseiter (Hexaeder, Würfel), Achtseiter (Oktaeder, wie zwei Viereckspyramiden an der Basis zusammengeklebt), Zehnseiter (Dekaeder, kein platonischer Körper; sieht aus wie zwei an der Basis zusammengeklebte fünfeckige Zelte), Zwölfseiter (Dodekaeder, auch Pentagondodekaeder, lauter Fünfecke zu einem Körper zusammengeklebt) und den Zwanzigseiter (Ikosaeder; zusammengesetzt aus Dreiecken).
Daneben gibt es noch diverse Exoten: siebenseitige Spielwürfel (eine fünfeckige Stange, deren Seitenflächen die 6 und die 7 sind), 16-Seiter, 30-Seiter, 34-Seiter, und sogar 100-Seiter, die mehr an einen Golfball erinnern. In der oberen Abbildung sind Spielwürfel in der Form der fünf platonischen Körper zu sehen.
Würfel wurden schon in der Antike benutzt, sie stammen vermutlich aus Asien. Die ältesten Würfel wurden in sumerischen Königsgräbern von Ur ausgegraben. Sie stammen aus dem 3. Jahrtausend v. Chr. In ägyptischen Grabstätten hat man Würfel mit Punkten gefunden, und in der griechischen und römischen Literatur gibt es zahlreiche Hinweise auf Würfelspiele. In der unteren Abbildung sind frühantike Spielwürfel zu sehen.
Bei den heutigen Spielwürfeln ist die häufigste Markierungsform die Nummerierung der (zumeist sechs) Seiten mit Punkten (zumeist von eins bis sechs). Bei sechsseitigen Würfeln sind diese so angeordnet, dass die gegenüberliegenden Seiten eine Punktzahl von sieben ergeben.

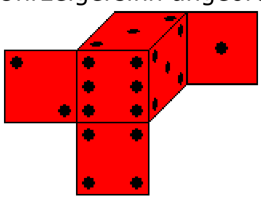
Aufbau eines Spielwürfels

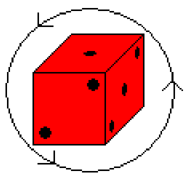


Ein Spielwürfel trägt 21 Punkte oder Augen. Mit ihnen werden auf den Seitenflächen die Zahlen von 1 bis 6 gebildet. Welche der Zahlen 1 bis 6 erscheint, ist dem Zufall überlassen.
Gibt man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 vor und bildet alle Umstellungen (Permutationen) der sechs Zahlen, so kommt man auf 1*2*3*4*5*6=6! = 720 Würfel. Dabei sind aber auch die Würfel, die sich durch Drehungen um eine der 13 Achsen ineinander überführen lassen. Es gibt 24 Drehungen dieser Art; damit gibt es nur 30 verschiedene Würfel.
Jeder Würfel hat einen Spiegelwürfel, bei dem die Zahlen rechts und links der Eins ausgetauscht sind. In der westlichen Welt ist nur der rote Spielwürfel üblich.
Dieser Spielwürfel hat zwei Eigenschaften:
Die Augenzahlen gegenüberliegender Flächen ergänzen sich immer auf 7. Schaut man auf eine Würfelecke mit den Zahlen 1,2 und 3, so sind diese entgegen dem Uhrzeigersinn angeordnet.

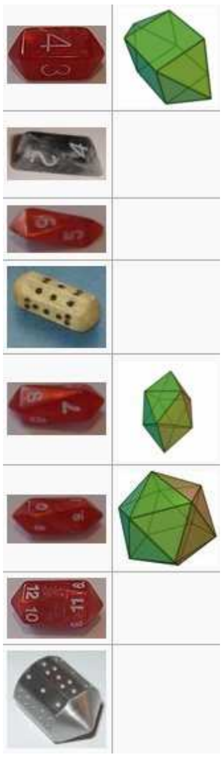


Trotzdem können Würfel immer noch unterschiedlich aussehen.
Für die Zahlen 2, 3 und 6 gibt es je zwei Ausrichtungen der Augen, die durch Drehung um 180° ineinander übergehen.





Das führt zu acht Bildern. Am häufigsten kommt der rote Würfel oben links vor.

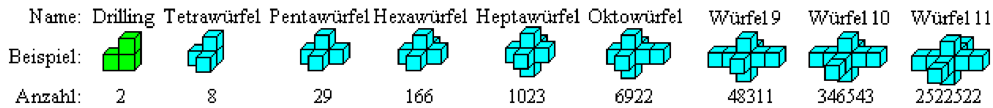


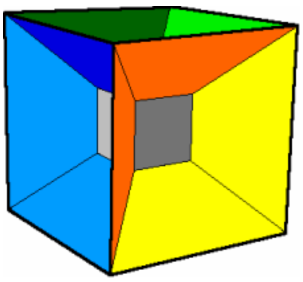
Walzenwürfel

Eine spezielle Art von Spielwürfeln sind Walzenwürfel. Für Walzenwürfel gibt es zwei verschiedene, aber ähnliche Konstruktionsweisen:
Zum einen können n-seitige Prismen verwendet werden, denen an den Deckflächen entsprechend n-seitige Pyramiden aufgesetzt werden. Die andere Möglichkeit sind Antiprismen mit n/2-seitigen Pyramiden auf den Deckflächen.
In beiden Fällen sorgen die Pyramiden dafür, dass weder die Deckflächen noch die Pyramidenflächen als Ergebnis auftreten können, die Werte verteilen sich also ausschließlich über die Seitenflächen. Das Prisma-Prinzip ermöglicht jede Seitenanzahl >2, wird aber selten verwendet. Bei ungerader Zahl der Seitenflächen tritt das Problem auf, dass es nach einem Wurf keine obenliegende Seite gibt, dies kann durch Kantenbeschriftung wie bei Prismen gelöst werden.
Bei der Antiprisma-Variante sind ausschließlich gerade Seitenanzahlen >3 möglich.

Von oben nach unten sind zu sehen:
W4 Quadratprisma mit aufgesetzten Pyramiden
W4 Verzerrtes Tetraeder, Dieser W4 stellt eine entartete Sonderform der Antiprisma-Walzen-Konstruktion dar: er besteht aus Dreiecken, die um jeweils 180° versetzt angeordnet sind, besitzt aber statt der aufgesetzten Pyramiden lediglich zwei Kanten.
W6 Dreiecksantiprisma mit aufgesetzten Pyramiden
W7 Abgerundetes Siebenecksprisma. In der abgebildeten Form Abrundungen statt Pyramiden.
W8 Quadratantiprisma mit aufgesetzten Pyramiden
W10 Fünfecksantiprisma mit aufgesetzten Pyramiden. Die Anordnung der Flächen entspricht dem Ikosaeder, allerdings ist der Mittelteil gestreckt.
W12 Sechsecksantiprisma mit aufgesetzten Pyramiden
W12 Zwölfecksprisma mit aufgesetzter Pyramide. Diesem Modell ist nur an einer Seite eine Pyramide aufgesetzt, sodass es eher gekreiselt als gewürfelt werden muss.

Man kann Polykuben bilden, indem man Würfel an einer oder mehreren Quadratflächen zusammenfügt.





Würfelminimalfläche

Gegeben ist ein Drahtgitter in Form eines Würfels. Zusammengelötete Drähte bilden die Würfelkanten, die Flächen dazwischen sollen mit einer Gummihaut bespannt werden, und zwar so, dass die Gesamtfläche der Gummihaut möglichst klein ist. Wie sieht das Gebilde aus, das dabei entsteht?

Angenommen, die Seitenfläche des Würfels sei a Einheiten lang. Wie groß wäre dann seine Gesamtoberfläche O?
Die Fläche besteht aus der Oberfläche des kleinen Würfels plus den Flächen der zwölf Trapeze.
Die Kantenlänge des kleinen Würfels sei b Einheiten. Er liege genau zentriert im großen Würfel, dessen Flächendiagonale $f = a \sqrt{2}$ ist.
Die Flächendiagonale des kleinen Würfels ist $g = b \sqrt{2}$. Sieht man sich das Gebilde genau von der Seite an, erkennt man, dass für die Höhe h der Trapeze wird

$$h = (f - g)/2 = 1/\sqrt{2}\,(a - b)$$

Die Trapezfläche T ist Höhe mal mittlere Breite m, welch letztere durch die Seiten der beiden Würfel bestimmt ist

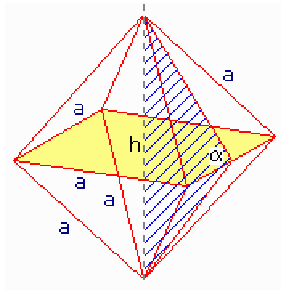
$$h\,m = T = 1/\sqrt{2}\,(a - b)\,(a + b)/2$$
$$T = (a^2 - b^2) / (2 \sqrt{2})$$

Für die Gesamfläche wird damit $A = 6 b^2 + 12 (a^2 - b^2) / (2 \sqrt{2})$
Die gezeichnete Fläche ist kleiner als die Oberfläche des Würfels, sie ist aber noch nicht notwendigerweise die kleinste Fläche!

Regelmäßiges Oktaeder, Achtflächner

Ein Oktaeder ist ein Körper aus acht gleichseitigen Dreiecken. Oktaeder heißt Achtflächner.
Die 6 Ecken haben die Ordnung 4, das heißt jeweils vier Kanten treffen in jeder Ecke zusammen. Das Oktaeder kann auch als quadratische Doppelpyramide mit gleich langen Kanten angesehen werden. Das Oktaeder wird nur von gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Deshalb ist es ein Deltaeder. Das Oktaeder ist ein Antiprisma.

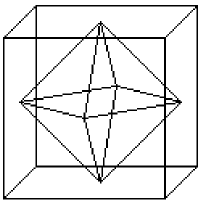
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für Oh-Symmetrie bei Polyedern.



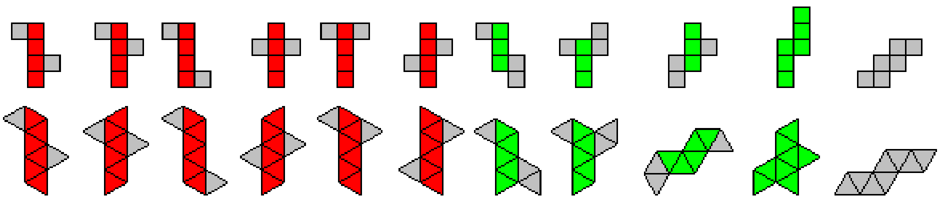
Volumen $V = a^3/3\ \sqrt{2} \approx 0{,}4714045\ a^3$
$V = 4/3\ r_u^3 \approx 1{,}3333333\ r_u^3$
Oberfläche $A = 2\ a^2\ \sqrt{3} \approx 3{,}4641016\ a^2 = 4\ r_u^2\ \sqrt{3} \approx 6{,}9282032\ r_u^2$
Höhe $h = a/2\ \sqrt{2}$
Seitenkante $a = \sqrt{2}\ r_u \approx 1{,}4142136\ r_u$
Seitenhöhe $s = a/2\ \sqrt{3}$
Umkugelradius $r_u = a/2\ \sqrt{2} \approx 0{,}7071068\ a$
Mittelkugelradius $r_m = a/2$
Inkugelradius $r_i = a/6\ \sqrt{6} \approx 0{,}40824829\ a$
Flächenwinkel $\phi = \arccos -1/3 = 109°28'16'' \approx 109{,}471220634°$
Schläfli-Symbol { 3 ; 4 }
Euler-Charakteristik 2

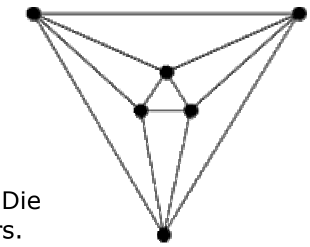
Symmetrieachsen

3 (90°)-Symmetrieachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten
6 (180°)-Symmetrieachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten
4 (120°)-Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Ecken



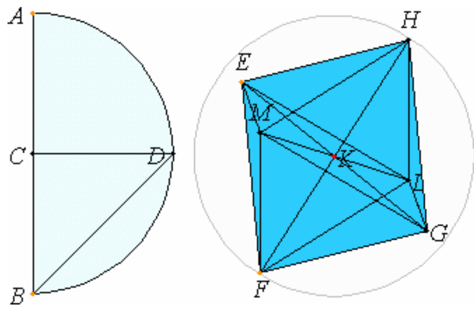
Würfel und Oktaeder sind zueinander duale Körper. Es gilt: Verbindet man die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels, so ergibt sich ein Oktaeder.
Verbindet man umgekehrt die Mittelpunkte der Seitendreiecke des Oktaeders, so ergibt sich ein Würfel. Der Würfel hat 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Vertauscht man die Zahlen 8 und 6 und behält 12 bei, so erhält man die Daten des Oktaeders: Das Oktaeder hat 6 Ecken, 12 Kanten und 8 Flächen.
Der Würfel hat 11 Netze. Das Oktaeder hat auch 11 Netze. Das Oktaeder hat ebenso wie der Würfel 9 Symmetrieebenen.
Die Darstellung rechts zeigt das Schlegel-Diagramm eines Oktaeders.





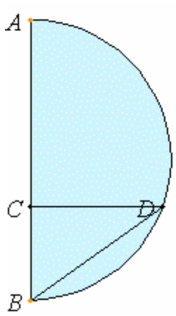
Die Eckpunkte des Oktaeders liegen in den Mittelpunkten der Kanten des Tetraeders.
Durchdringen sich zwei Tetraeder, so entsteht ein Oktaeder als Schnittkörper. Legt man einen Würfel in ein Oktaeder, so entsteht als Schnittkörper ein Kuboktaeder. Das Oktaeder füllt nicht den Raum aus, wohl aber zusammen mit zwei Tetraedern. Sie bilden zusammen ein Parallelepiped. In der Ecke eines Oktaeders treffen immer vier Kanten zusammen. Deshalb ist ein Eulerweg möglich.

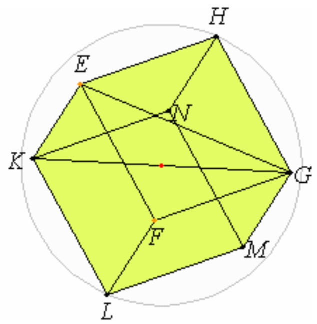
Euklidische Oktaederkonstruktion



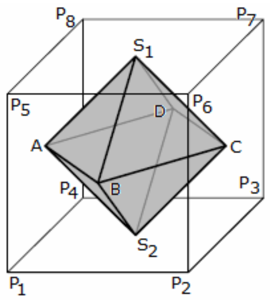
Buch XIII der Elemente § 14 (A. 2):
Ein Oktaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die früheren Körper zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante.

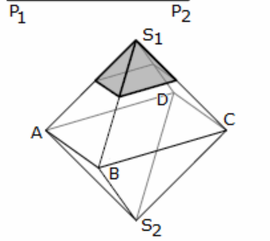
Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, halbiere ihn in C (I, 10), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man das Quadrat EFGH hin, dessen Seiten alle = DB (I, 46), ziehe HF, EG und errichte im Schnittpunkt K auf der Ebene des Quadrats EFGH die Senkrechte KL (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als KM, trage sowohl auf KL als KM Strecken KL, KM = einer der Strecken EK, FK, GK, HK ab und ziehe LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH.
Da KE = KH und ∠ EKH ein Rechter (IV, 9), ist $HE^2 = 2\ EK^2$ (I, 47); ebenso ist, da LK = KE und ∠ LKE ein Rechter (IX, Definition 3), $EL^2 = 2\ EK^2$. Wie bewiesen, ist aber auch $HE^2 = 2\ EK^2$; also $LE^2 = EH^2$, also LE = EH. Aus demselben Grunde ist auch LH = HE, also ∆ LEH gleichseitig. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten des Quadrats EFGH und deren Spitzen die Punkte L, M sind, alle gleichseitig sind. So hat man das Oktaeder, das von 8 gleichseitigen Dreiecken umfasst wird, errichtet.
Weiter soll man es mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante.





Da LK, KM, KE alle drei einander gleich sind, muss der Halbkreis, den man über LM zeichnete, auch durch E gehen. Aus demselben Grunde muss der Halbkreis, wenn man ihn durch Herumführen, während LM fest bleibt, wieder in dieselbe Lage zurückbringt, von der er ausging (XI, Definition 14), auch durch die Punkte F, G, H gehen. So wäre das Oktaeder mit einer Kugel umschlossen; ich behaupte, mit der gegebenen. Da nämlich LK = KM und KE gemeinsam ist und sie rechte Winkel umfassen, ist Grundlinie LE = Grundlinie EM (I, 4). Da ∠ LEM ein Rechter, weil er im Halbkreis liegt (III, 31), ist LM² = 2 LE² (I, 47). Ebenso ist, da AC = CB, AB = 2 BC. Aber AB : BC = AB² : BD² (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also ist AB² = 2 BD². Wie bewiesen, ist LM² = 2 LE². Auch ist DB² = LE², da wir EH = DB gemacht haben. Also ist AB² = LM², also AB = LM. Hier ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; also LM dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich.
Man hat also das Oktaeder mit der gegebenen Kugel umschlossen. Und nebenbei hat man bewiesen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante – q.e.d.
In Form eines Oktaeders kristallisiert Fluorit.





Oktaederaufgabe

Ein Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht. Jedes Oktaeder kann einem Würfel so einbeschrieben werden, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen.
Von dem in der oberen Abbildung dargestellten Oktaeder $ABCDS_1S_2$ sind die Eckpunkte A(13 | -5 | 3) , B(11 | 3 | 1) , C(5 | 3 | 7) und S_1(13 | 1 | 9) gegeben. Dieses Oktaeder ist auf die oben genannte Art dem abgebildeten Würfel mit den Ecken P_1 bis P_8 einbeschrieben.

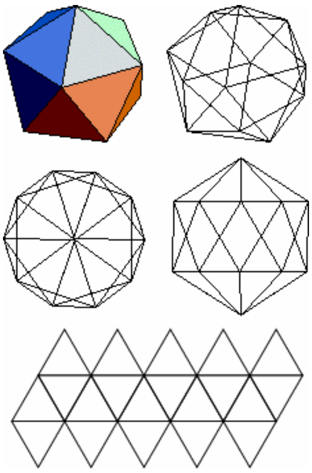
a) Den Abstand zweier paralleler Seitenflächen eines Oktaeders nennt man "Dicke des Oktaeders". Berechnen Sie die Dicke des abgebildeten Oktaeders als Abstand des Punktes C von der Ebene ABS_1.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8 des abgebildeten Würfels.
c) Der Mittelpunkt der Strecke AB sei M_{AB}, der Mittelpunkt der Strecke CD sei M_{CD}; g sei die Gerade, die durch diese Punkte verläuft. Das Oktaeder wird um die Gerade g als Drehachse so gedreht, dass sich der Punkt A(13| -5|3) in die neue Position A'(12+2√2 | -1+√2 | 2+2√2) bewegt. Zeigen Sie, dass der zugehörige Drehwinkel $\alpha = 90°$ beträgt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B' als neue Position des Eckpunktes B nach der Drehung.
d) Durch E_a: $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9(2a - 5) = 0$; $a \in R$,
sei eine Schar von Ebenen E_a gegeben; h sei die Gerade, die durch die Punkte S_1 und S_2(5 | -3 | 1) verläuft. Zeigen Sie, dass jede Ebene E_a der Schar orthogonal zur Geraden h verläuft. Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_a der Ebene E_a mit der Geraden h. Für $0 < a \leq 1$ schneidet die Ebene E_a von dem abgebildeten Oktaeder eine Pyramide mit der Spitze S_1 ab (siehe untere Abbildung). Ermitteln Sie das Volumen V_a der abgeschnittenen Pyramide.
Teil der Abituraufgabe Nordrhein-Westfalens von 2008 die zur Wiederholung der Abiturprüfung führte und von der sogenannten "Zeitung" als "Oktaeder des Grauens" bezeichnet wurde.

Allgemeine Oktaeder

Der Begriff Oktaeder beschreibt Polyeder mit genau acht Flächen. Außer dem regelmäßigen Oktaeder existieren insgesamt 257 verschiedene Achtflächner:

Eckenzahl	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl Achtflächner	2	11	42	74	76	38	14

Regelmäßiges Ikosaeder

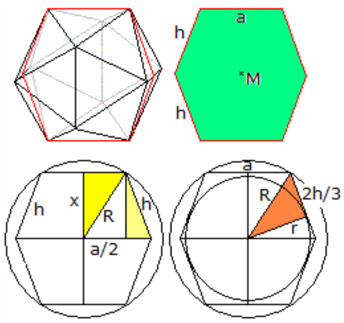


Das Polyeder besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken, Name bedeutet Zwanzigflächner, ist ein Deltaeder, hat 12 Ecken und 30 Kanten und ist ein einfaches Beispiel für Ih-Symmetrie bei Polyedern
Ist das uniforme Polyeder U_{22}; das zum Ikosaeder duale Polyeder ist das Dodekaeder

Volumen $V = 5/12\ a^3\ (3 + \sqrt{5}) \approx 2{,}1816950\ a^3$
$V = 2/3\ r_u^3\ \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \approx 2{,}5361506\ r_u^3$
Oberfläche $A = 5a^2\ \sqrt{3} \approx 8{,}66025\ a^2$
$A = 5r_u^2\ (5\sqrt{3} - \sqrt{15}) \approx 9{,}5745414\ r_u^2$
Seitenkante $a = r_u/5\ \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \approx 1{,}0514622\ r_u$
Umkugelradius $r_u = a/4\ \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \approx 0{,}9510565\ a$
Mittelkugelradius $r_m = a/4\ \sqrt{(6 + 2\sqrt{5})} \approx 0{,}809017\ a$
Inkugelradius $r_i = a/12\ (3 + \sqrt{5})\ \sqrt{3} \approx 0{,}755761\ a$
Flächenwinkel $\phi = \arccos(-\sqrt{5}/3) \approx 138°11'23'' \approx 138{,}189685104°$
Schläfli-Symbol { 3 ; 5 }
Euler-Charakteristik 2

Das Ikosaeder hat neben den 20 Seitenflächen noch 30 Kanten und 12 Ecken. Jede Ecke bildet die Spitze einer fünfseitigen Pyramide. Je zwei Pyramiden stehen entgegengesetzt einander gegenüber. Dabei sind die Grundflächen gegeneinander gedreht.
Man erhält das Ikosaeder, wenn man die Ecken der Grundflächen der Pyramiden durch eine Zickzacklinie miteinander verbindet.

Zwei regelmäßige Fünfecke - gegeneinander gedreht - begrenzen die mittlere Schicht oben und unten. Der Schichtkörper ist ein Antiprisma.
Färbt man die Ikosaederflächen mit verschiedenen Farben, so existieren 59 bis auf Symmetrie gleiche Möglichkeiten (Coxeter 1969).

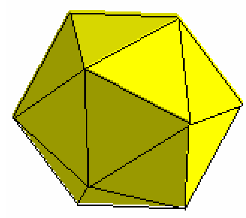


Inkugel, Umkugel am Ikosaeder

Zur Berechnung des Radius R der Umkugel und Radius r der Inkugel des Ikosaeders legt man durch die Mitte des Körpers eine Schnittfläche, die die Kugeln als Kreise zeigt.
Die Schnittfläche ist ein Sechseck, das aus vier Dreieckshöhen und zwei Kanten des Ikosaeders gebildet wird.
Zur berechnung des Radius der Umkugel bestimmt man nach dem Satz des Pythagoras die Hilfsstrecke x: $h^2 = x^2 + (x-a/2)^2$.
Die quadratische Gleichung wird $x^2 - (a/2)x - a^2/4 = 0$. Die Lösung ist
$x = a/4\ (1+ \sqrt{5})$
Dann folgt nach dem Satz des Pythagoras $R^2 = a^2/4 + x^2$ oder
$R = \sqrt{(10+2\ \sqrt{5})}\ a/4$.
Den Radius der Inkugel bestimmt man, indem man nach dem Satz des Pythagoras die Gleichung $R^2 = r^2 + 2h/3 = r^2 + a^2/3$ auflöst. Es ergibt sich
$r^2 = R^2 - a^2/3 = 42/144$
$a^2 + 18\ \sqrt{5}/144\ a^2$ und $r = \sqrt{3}\ (3 + \sqrt{5})\ a/12$.
Dabei verwendet man die Identität $\sqrt{(14 + 6\ \sqrt{5})} = 3 + \sqrt{5}$.
Setzt man auf die Seitenflächen kongruente Pyramiden der Höhe h, so entstehen vier interessante Polyeder:

h	**Polyeder**
$\sqrt{3}/6\ (\sqrt{5} - 3) \approx 0.220528$	Großes Dodekaeder
$\sqrt{(15)}/15 \approx 0.258198$	Kleines Triambic-Ikosaeder
$\sqrt{6}/3 \approx 0.816496$	60-flächiges Sterndeltaeder
$\sqrt{3}/6\ (3 + \sqrt{5}) \approx 1.51152$	Großes Stern-Dodekaeder

(r+h)/h	**Polyeder**
$3(\sqrt{5} - 2) \approx 0.708203$	Großes Dodekaeder
$1/5\ (10 - 3\ \sqrt{5}) \approx 0.658359$	Kleines Triambic-Ikosaeder
$1 - 3\ \sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 0.0803629$	60-flächiges Sterndeltaeder
3	Großes Stern-Dodekaeder



Ikosaedereckpunkte

Für ein Ikosaeder mit der Kantenlänge 2 ergeben sich die Koordinaten der Eckpunkte des Polyeders mit
$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803\ldots$; goldener Schnitt
zu:

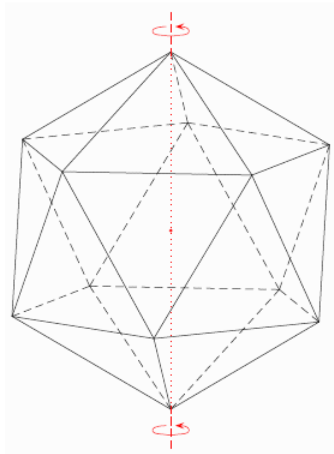
$x_1 = (0, \phi, 1)$	$x_2 = (0, \phi, -1)$	$x_3 = (0, -\phi, 1)$	$x_4 = (0, -\phi, -1)$
$x_5 = (1, 0, \phi)$	$x_6 = (1, 0, -\phi)$	$x_7 = (-1, 0, \phi)$	$x_8 = (-1, 0, -\phi)$
$x_9 = (\phi, 1, 0)$	$x_{10} = (\phi, -1, 0)$	$x_{11} = (-\phi, 1, 0)$	$x_{12} = (-\phi, -1, 0)$

Bei diesem Ikosaeder ist der Abstand eines Kantenmittelpunkts zum Schwerpunkt des Körpers (1+ϕ)/√3.
Die Fläche beträgt 20 √3, das Volumen = 20 (1 + ϕ)/3 = 10 (3 + √5)/3

Ikosaedersymmetrie

Ebenensymmetrie

Ein Ikosaeder hat 15 Symmetrieebenen. Jede Symmetrieebene enthält zwei gegenüber liegende Kanten und die Symmetrieachsen von vier Dreiecksflächen.
Auf einer Symmetrieebene liegen daher stets vier Ecken, vier Kantenmittelpunkte und vier Flächenmittelpunkte.



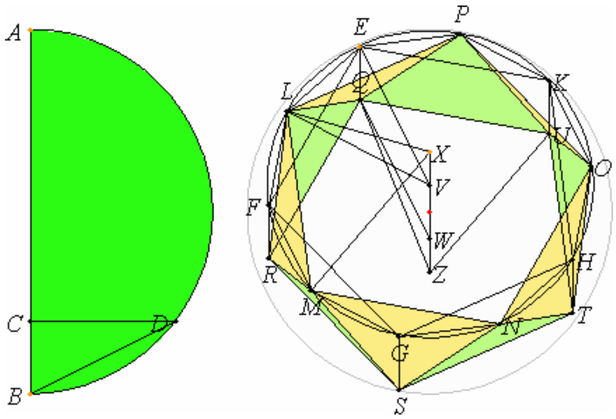
Drehsymmetrie

Ein Ikosaeder besitzt
1) 6 fünfzählige Drehachsen (jeweils durch zwei gegenüber liegende Ecken),
Abbildung: Ikosaeder mit fünfzähliger Drehachse
2) 10 dreizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen) und
3) 15 zweizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten).

Punktsymmetrie

Ein Ikosaeder ist punktsymmetrisch.
Es gibt insgesamt 120 gleichsinnige oder ungleichsinnige Kongruenzabbildungen (Isometrien), die das Ikosaeder auf sich abbilden.
Sie bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe. Diese Gruppe, die als Ikosaedergruppe bezeichnet wird, ist isomorph zum direkten Produkt A5 × Z2 der alternierenden Gruppe A5 und der zyklischen Gruppe Z2.
Beschränkt man sich auf die 60 gleichsinnigen unter den genannten 120 Kongruenzabbildungen, so erhält man eine Untergruppe, die zu A5 isomorph ist.

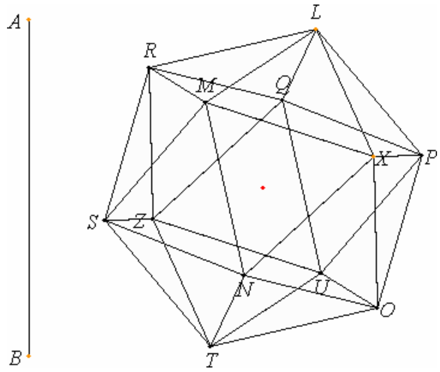
Euklidische Ikosaederkonstruktion



Buch XIII der Elemente § 16 (A. 4)
Ein Ikosaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die besprochenen Körper zu umschließen; ferner zu zeigen; dass die Ikosaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Minor nennt.

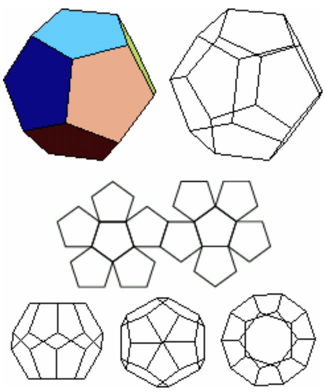
Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = 4 CB (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man den Kreis EFGHK hin, dessen Radius = DB sei, beschreibe dem Kreis EFGHK ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck EFGHK ein (IV, 11), halbiere den Bogen EF, FG, GH, HK, KE in den Punkten L, M, N, O, P (III, 30) und ziehe LM, MN, NO, OP, PL, EP; dann ist auch Fünfeck LMNOP gleichseitig und EP die Zehneckseite. Weiter errichte man in den Punkten E, F, G, H, K auf der Ebene des Kreises die Senkrechten EQ, FR, GS, HT, KU (XI, 12), die dem Radius des Kreises EFGHK gleich seien und ziehe QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ.
Da EQ, KU beide auf derselben Ebene senkrecht stehen, ist EQ || KU (XI, 6); ferner sind sie gleich.
Strecken, welche gleich und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind aber gleich und parallel (I, 33); also ist auch QU = und || EK. Nun ist EK Seite eines gleichseitigen Fünfecks, also auch QU die Seite des dem Kreise EFGHK einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks. Aus demselben Grunde ist auch jede der Strecken QR, RS, ST, TU die Seite des dem Kreise EFGHK einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks; Fünfeck QRSTU ist also gleichseitig. Ferner ist, da QE die Sechseckseite (IV, 15 Zusatz), EP die Zehneckseite und ∠ QEP ein Rechter ist (XI, Definition 3), QP (I, 47) die Fünfeckseite; denn (XIII, 10) quadriert wird die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seite des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen. Aus demselben Grunde ist auch PU die Fünfeckseite. Und QU ist eine Fünfeckseite; also ist ∆ QPU gleichseitig. Aus demselben Grunde sind auch QLR, RMS, SNT, TOU alle gleichseitig. Da, wie bewiesen, jede der Strecken QL, QP die Fünfeckseite ist, auch LP aber eine Fünfeckseite, ist ∆ QLP gleichseitig. Aus demselben Grund sind auch ∆ LRM, MSN, NTO, OUP alle gleichseitig.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt V des Kreises EFGHK (III, 1), errichte in V auf der Ebene des Kreises die Senkrechte VY (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als VX, trage ab eine Sechseckseite VW und Zehneckseiten sowohl VW als WY, und ziehe QY, QW, UY, EV, LV, LX, XM.
Da VW, QE beide auf der Ebene des Kreises senkrecht stehen, ist VW || QE (XI, 6); ferner sind sie gleich; also ist auch EV = und || QW (I, 33). Nun ist EV die Sechseckseite (IV, 15 Zusatz), also auch QW die Sechseckseite. Da QW die Sechseckseite und WY die Zehneckseite ist, auch ∠ QWY ein Rechter (IX, 7,

Definition 3; I, 29), so ist QY die Fünfeckseite (XIII, 10). Aus demselben Grunde ist auch UY die Fünfeckseite. Denn zieht man VK, WU, so sind sie gleiche gegenüberliegende Seiten, auch ist VK als Radius der Sechseckseite gleich; also ist WU die Sechseckseite; ferner ist WY die Zehneckseite und ∠ UWY ein Rechter; also UY die Fünfeckseite. Auch QU ist eine Fünfeckseite, also ∆ QUY gleichseitig. Aus demselben Grunde sind auch die übrigen Dreiecke mit den Grundlinien QR, RS, ST, TU und der Spitze Y alle gleichseitig. Ebenso ist, da VL Sechseckseite, VX die Zehneckseite und ∠ LVX ein Rechter, LX die Fünfeckseite. Aus demselben Grund ergibt sich, wenn man MV, das die Sechseckseite ist, zieht, dass auch MX die Fünfeckseite ist. Auch LM ist eine Fünfeckseite; ∆ LMX ist gleichseitig. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke mit den Grundlinien MN, NO, OP, PL und der Spitze X alle gleichseitig sind. Man hat also das Ikosaeder, das von 20 gleichseitigen Dreiecken umfasst wird, errichtet. Weiter soll man es mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass die Ikosaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76) nennt.
Da VW die Sechseckseite und WY die Zehneckseite ist, ist VY in W stetig geteilt, VW sein größerer Abschnitt (XIII, 9); also YV : VW = VW : WY (VI, Definition 3).



Nun ist VW = VE, WY = VX; also YV : VE = EV : VX; ∠ YVE, EVX sind hier Rechte. Zieht man also Strecke EY, dann muss ∠ XEY ein Rechter sein wegen ∆ XEY ~ VEY (VI, 6; I, 32). Aus demselben Grunde ist, da YV :VW = VW : WY, YV = XW und VW = WQ, XW : WQ = QW : WY; also muss, wenn man QX zieht, ebenso der Winkel bei Q ein Rechter sein. Der Halbkreis, den man über XY zeichnete, muss also auch durch Q gehen (III, 31). Bringt man den Halbkreis, während XY fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurück, von der er ausging (XIII, Definition 14), so muss er durch Q und die übrigen Ikosaederecken gehen, und das Ikosaeder wäre mit einer Kugel umschlossen; ich behaupte, mit der gegebenen.
Man halbiere VW in Z (I, 10). Da Strecke VY in W stetig geteilt ist, ihr kleinerer Abschnitt YW, wird YW, wenn man WZ, die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts (XIII, 3); also $YZ^2 = 5\ ZW^2$. Nun ist 2 YZ = YX, 2 ZW = VW; also $YX^2 = 5\ WV^2$. Da nun AC = 4 CB, ist AB = 5 BC. Aber AB : BC = $AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also $AB^2 = 5\ BD^2$. Wie oben bewiesen, ist auch $YX^2 = 5\ VW^2$. Nun ist DB = VW, weil beide dem Radius des Kreises EFGHK gleich sind. Also ist AB = XY. Nun ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; XY also dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich, das Ikosaeder ist also mit der gegebenen Kugel umschlossen.
Weiter behaupt ich, dass die Ikosaederseite eine Irrationale ist, wie man sie Minor nennt. Da der Kugeldurchmesser die Rationale ist und er quadriert fünfmal so groß wird wie der Radius des Kreises EFGHK, ist der Radius des Kreises EFGHK rational, folglich auch sein Durchmesser rational (X, Definition 3). Wird aber einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck einbeschrieben, so ist die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt (XIII, 11; X 105 Anmerkung). Die Seite des Fünfecks EFGHK ist aber die Ikosaederkante; die Ikosaederkante ist also eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass quadriert der Kugeldurchmesser fünfmal so groß wird wie der Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert, und dass der Kugeldurchmesser zusammengesetzt ist aus einer Seite des Sechsecks und zwei Seiten des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen – q.e.d.

Regelmäßiges Dodekaeder, Pentagondodekaeder

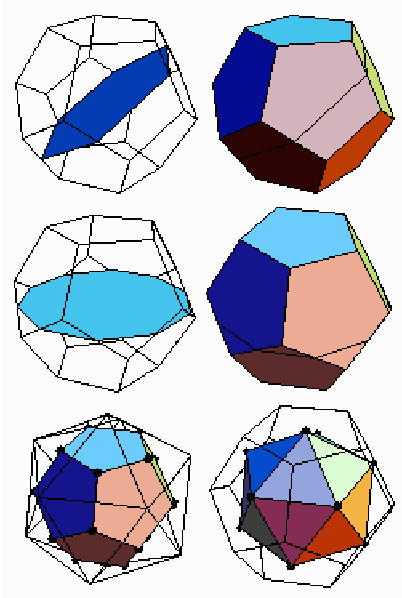


Regelmäßiges Dodekaeder, Pentagondodekaeder

Das Polyeder besteht aus 12 Fünfecken, 20 Eckpunkten und 30 Kanten und heißt auch Pentagondodekaeder bzw. Fünfeckzwölfflächner.
Aufbau: Sechs regelmäßige Fünfecke bilden eine Rosette. Klappt man die äußeren Fünfecke nach oben, so dass sie sich berühren, entsteht eine Schale. Zwei Schalen legt man verdreht aufeinander und erhält so das Dodekaeder. Zwei Fünfecke liegen parallel und bilden die Grund- und Deckfläche. Zwischen ihnen liegen zehn Fünfecke.
Zeichnet man alle zehn Diagonalen ein, die durch den Mittelpunkt des Dodekaeders verlaufen, so erkennt man: Das Dodekaeder wird von 12 fünfseitigen gleichen Pyramiden gebildet, die sich in der Mitte treffen.

Volumen $V = 1/4\ a^3\ (15 + 7\sqrt{5}) \approx 7{,}6631189\ a^3$
$V = 2/27\ r_u^3\ (\sqrt{75} + \sqrt{15}) \approx 2{,}7851638\ r_u^3$
Oberfläche $A = 3a^2\ \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})} \approx 20{,}6457288\ a^2 = 2r_u^2\ \sqrt{(5\ \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})})} \approx 10{,}5146223\ r_u^2$
Seitenkante $a = r_u/3\ (\sqrt{15} - \sqrt{3}) \approx 0{,}7136442\ r_u$
Umkugelradius $r_u = a/4\ (1 + \sqrt{5})\ \sqrt{3} \approx 1{,}4012585\ a$
Mittelkugelradius $r_m = a/4\ (3 + \sqrt{5}) \approx 1{,}30901\ a$
Inkugelradius $r_i = a/20\ \sqrt{[\ 10\ (25 + 11\sqrt{5})\ ]} \approx 1{,}11351\ a$

Flächenwinkel $\phi = \arccos(-\sqrt{5}/5) \approx 116°35'\,5'' \approx 116{,}565051177°$
Schläfli-Symbol $\{ 5 ; 3 \}$
Euler-Charakteristik 2

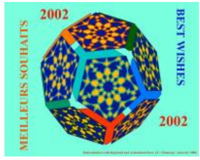


Das duale Polyeder zum Pentagondodekaeder ist das Ikosaeder, d.h. die Flächenmittelpunkte der Dodekaederseitenflächen bilden die Eckpunkte eines Ikosaeders.
Je nach Lage einer Schnittebene entsteht bei einem Schnitt des Dodekaeders ein regelmäßiges Sechseck bzw. ein regelmäßiges Zehneck. Durch Apollonius wurde schon nachgewiesen, dass sich die Oberflächen und Volumina von Dodekaeder und seinem dualen Ikosaeder verhalten, wie:

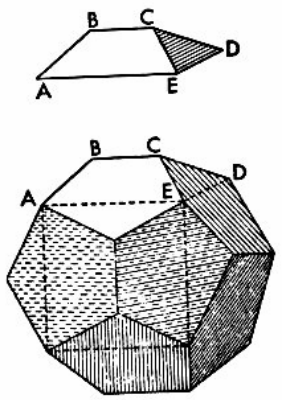
$$V_{Ikosaeder} : V_{Dodekaeder} = A_{Ikosaeder} : A_{Dodekaeder}$$

In der Natur kristallisiert Pyrit FeS_2 in Form von Dodekaedern, Sphalerit ZnS bildet irreguläre Dodekeader welche von kongruenten Deltoiden begrenzt werden.

Koordinaten der Eckpunkte



Hat das Dodekaeder eine Kantenlänge von $a = \sqrt{5} - 1$ und ist ϕ das Verhältnis des Goldenen Schnittes, so können die Koordinaten der Eckpunkte durch die Kombinationen $(0, \pm 1/\phi, \pm \phi)$, $(\pm \phi, 0, \pm 1/\phi)$, $(\pm 1/\phi, \pm \phi, 0)$ und $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ angegeben werden



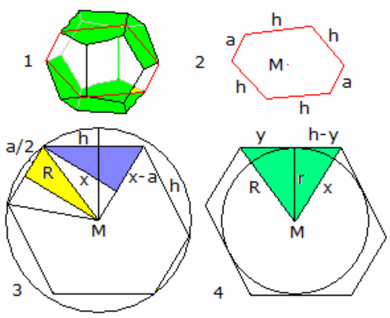
Kepler-Konstruktion

In seinem Werk "Epitome Astronomiae Copernicanae" konstruiert Kepler ein Dodekaeder, in dem er auf die Seiten eines Würfels spezielle "Dächer" aufsetzt.

Dodekaedereckpunkte

Für ein Pentagondodekaeder mit der Kantenlänge $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, welches so orientiert ist, das zwei entgegengesetzte Seitenflächen parallel zur x-y-Ebene sind und das Dodekeaeder die z-Achse als Symmetrieachse besitzt, ergeben sich die Koordinaten der Eckpunkte des Polyeders zu:

$x_{1,2} = \pm (2, 0, 1/2\,(3 + \sqrt{5}))$
$x_{3,4} = \pm (1/2\,(\sqrt{5} - 1), 1/2\,\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, 1/2\,(3 + \sqrt{5}))$
$x_{5,6} = \pm (-1/2\,(\sqrt{5} + 1), 1/2\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, 1/2\,(3 + \sqrt{5}))$
$x_{7,8} = \pm (-1/2\,(\sqrt{5} + 1), -1/2\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, 1/2\,(3 + \sqrt{5}))$
$x_{9,10} = \pm (1/2\,(\sqrt{5} - 1), -1/2\,\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, 1/2\,(3 + \sqrt{5}))$
$x_{11,12} = \pm (1 + \sqrt{5}, 0, 1/2(\sqrt{5} - 1))$
$x_{13,14} = \pm (1, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, 1/2\,(\sqrt{5} - 1))$
$x_{15,16} = \pm (-1/2\,(3 + \sqrt{5}), 1/2\,\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, 1/2\,(\sqrt{5} - 1))$
$x_{17,18} = \pm (-1/2\,(3 + \sqrt{5}), -1/2\,\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, 1/2\,(\sqrt{5} - 1))$
$x_{19,20} = \pm (1, -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, 1/2\,(\sqrt{5} - 1))$



Inkugel, Umkugel am Dodekaeder

Zur Berechnung der In- und Umkugel eines Dodekaeders legt man durch die Mitte des Körpers einen Schnitt, der die Kugeln als Kreise zeigt.
Die Schnittfläche ist ein Sechseck, das aus vier Höhen und zwei Kanten des Dodekaeders gebildet wird.

Zur Berechnung des Umkugelradius bestimmt man nach dem Satz des Pythagoras zunächst die Hilfsstrecke x:

$$h^2 = x^2+(x-a)^2 \text{ oder } x = a/4\,(3+ \sqrt{5})$$

Dann folgt R nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = a^2/4 + x^2 \text{ oder } R = \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}\; a/4 = (\sqrt{3} + \sqrt{15})\, a/4.$$

Den Radius der Inkugel bestimmt man mittels Hilfsstrecke y:

$$x^2 = r^2 + (h-y)^2 \text{ und } R^2 = y^2 + r^2$$

Man eliminiert r und bestimmt die Hilfsgröße y aus

$$R^2 - (h-y)^2 = R^2 - y^2 \text{ also } y = (3 + \sqrt{5})/2/(\sqrt{5+2\sqrt{5}})\, a.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$r = \sqrt{R^2-y^2} = \sqrt{250 + 110\sqrt{5}}\; a/20$$

Das Dodekaeder hat drei verschieden lange Diagonalen. Eine ist der doppelte Umkugelradius, die zweite der doppelte Mittelkugelradius.

$d_1 = (\sqrt{3} + \sqrt{15})\, a/2$ $\qquad$ $d_2 = (3 + \sqrt{5})\, a/2$ $\qquad$ $d_3 = 1/\sqrt{2}\, (1 + \sqrt{5})\, a$

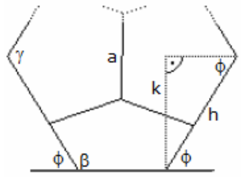
Skulptur Eclipse

Vor dem Hyatt Regency Hotel in San Francisco steht eine 12 Meter hohe Skulptur von Charles Perry, die Eclipse genannt wird. Diese äußerst interessante Skulptur besteht aus 1440 Aluminium-Röhren. Die Montage benötigt immerhin 4 Monate. Die innerste Schicht bildet ein reguläres Dodekaeder, dessen Flächen nach außen gedreht werden können. Dabei bilden sie in der Mitte der Drehung ein Ikosidodekaeder.
Bei weiterer Drehung entsteht ein kleines Rhombenikosidodekaeder.

Cobaltin (CoAsS) … kristallisiert in wunderschönen Pentagondodekaedern
Das seltene Mineral findet man in Annaberg (Erzgebirge), im Harz und in Hessen.

"Contact"

Im Film "Contact" von 1997 hat der Mechanismus, welcher Ellie Arroway (Jodi Foster) durch ein riesiges Netzwerk von Wurmlöchern transportiert, die Form eines Dodekaeders.

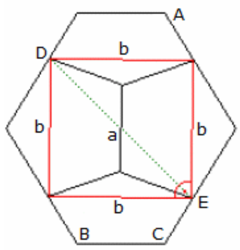


Winkel und Diagonalen am Dodekaeder

Winkel

Die Winkel können mittels des skizzierten, rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden:

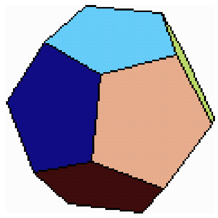
$k/h = (3 + \sqrt{5}) / (2 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})}) = \sqrt{((9 + 6 \sqrt{5} + 5) / (4 (5 + 2 \sqrt{5})))} = \ldots$
$= \sqrt{((10 + 2 \sqrt{5}) / 20)}$
$\sin \phi = k/h \Rightarrow \beta = 180° - \phi = 180° - \arcsin \sqrt{(1/2 + 1/10 \sqrt{5})}$
$\gamma = 2\phi = 2 \arcsin \sqrt{(1/2 + 1/10 \sqrt{5})}$



Diagonalen

Das Dodekaeder hat dreierlei Diagonalen. Die längste, AB in der Skizze, entspricht zweimal dem Umkugelradius. AC ist zweimal der Kantenmittelradius, Mittelkugelradius.
Die kürzeste Diagonale (DE) kann mit Hilfe des skizzierten Quadrats der Kantenlänge b berechnet werden: Auf Grund der Symmetrie des Ikosaeders ist es ein Quadrat. DE $= \sqrt{(2\, b^2)} = \sqrt{(2\, ((\sqrt{5} + 1)/2)^2)} = 1/\sqrt{2}\, (1 + \sqrt{5})$

Dodekaedersymmetrie



Ebenensymmetrie

Ein Dodekaeder hat 15 Symmetrieebenen. Jede Symmetrieebene enthält zwei gegenüber liegende Kanten und die Symmetrieachsen von vier Fünfecksflächen. Auf einer Symmetrieebene liegen daher stets vier Ecken, vier Kantenmittelpunkte und vier Flächenmittelpunkte.

Drehsymmetrie

Ein Dodekaeder besitzt
1) 6 fünfzählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen),
2) 10 dreizählige Drehachsen (jeweils durch zwei gegenüber liegende Ecken) und
3) 15 zweizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten).

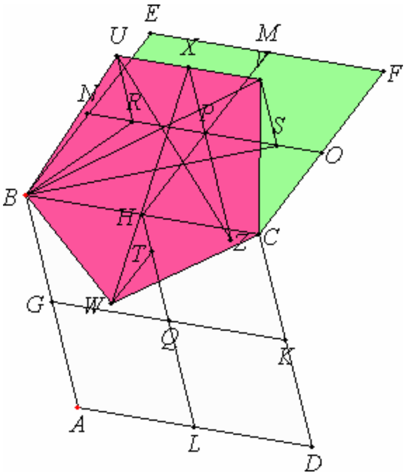
Punktsymmetrie

Ein Dodekaeder ist punktsymmetrisch.
Es gibt insgesamt 120 gleichsinnige oder ungleichsinnige Kongruenzabbildungen (Isometrien), die das Dodekaeder auf sich abbilden.
Sie bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe. Diese Gruppe, die als Dodekaedergruppe oder häufiger als Ikosaedergruppe bezeichnet wird, ist isomorph zum direkten Produkt A5 × Z2 der alternierenden Gruppe A5 und der zyklischen Gruppe Z2.
Beschränkt man sich auf die 60 gleichsinnigen unter den genannten 120 Kongruenzabbildungen, so erhält man eine Untergruppe, die zu A5 isomorph ist.

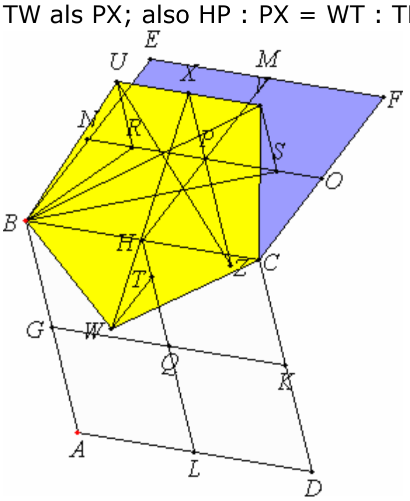
Euklidische Dodekaederkonstruktion

Buch XIII der Elemente § 17 (A. 5):
Ein Dodekaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die besprochenen Körper zu umschließen; ferner zu zeigen; dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome nennt.

Man lege zwei aufeinander senkrechte Flächen ABCD, CBEF des besprochenen Würfels (XIII, 15) hin, halbiere alle Kanten AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC in G, H, K, L, M, N, O ziehe GK, HL, MH, NO und teile die Strecken NP, PO, HQ alle stetig in den Punkten R, S, T (VI, 30); ihre größeren Abschnitte seien RP, PS, TQ. Ferner errichte man in den Punkten R, S, T auf den Würfelflächen vom Würfel nach außen die Senkrechten RU, SV, TW (XI, 12), mache sie den Strecken RP, PS, TQ gleich und ziehe UB, BW, WC, CV, VU. Ich behaupte, dass das Fünfeck UBWCV gleichseitig ist, in einer Ebene liegt und gleichwinklig ist.



Man ziehe RB, SB, VB.
Da die Strecke NP in R stetig geteilt ist, RP der größere Abschnitt, sind $PN^2 + NR^2 = 3\ RP^2$ (XIII, 4). Hier ist PN = NB, PR = RU; also $BN^2 + NR^2 = 3\ RU^2$. Aber $BN^2 + NR^2 = BR^2$ (I, 47); also $BR^2 = 3\ RU^2$, folglich $BR^2 + RU^2 = 4\ RU^2$. Aber $BR^2 + RU^2 = BU^2$ (I, 47); also $BU^2 = 4\ UR^2$; also BU = 2 RU. Aber auch VU = 2 UR, da (I, 34) SR = 2 PR, d.h. = 2 RU. Also ist BU = UV. Ähnlich lässt sich zeigen, dass von den Strecken BW, WC, CV jede sowohl BU als UV gleich ist. Fünfeck BUVCW ist also gleichseitig.
Ich behaupte weiter, dass es in einer Ebene liegt. Man ziehe durch P vom Würfel nach außen PX || RU und SV (I, 31) und ziehe XH, HW. Ich behaupte, dass die Linie XHW gerade ist. Da HQ in T stetig geteilt ist, QT sein größerer Abschnitt, ist HQ : QT = QT : TH (VI, Definition 3). Hier ist HQ = HP, QT = sowohl TW als PX; also HP : PX = WT : TH. Nun ist HP || TW, weil beide $\perp$ Ebene BD (XI, 6). Und TH || PX, weil beide $\perp$ Ebene BF. Setzt man aber zwei Dreiecke, wie XPH, HTW, in denen zwei Seiten mit zwei Seiten in Proportion stehen, mit einer Ecke so aneinander, dass ihre entsprechenden Seiten parallel sind, so müssen die letzten Strecken einander gerade fortsetzen (VI, 32). XH setzt also HW gerade fort. Jeder gerade Linie liegt aber in einer Ebene (XI, 1). Das Fünfeck UBWCV liegt also in einer Ebene (XI, 2, 7).

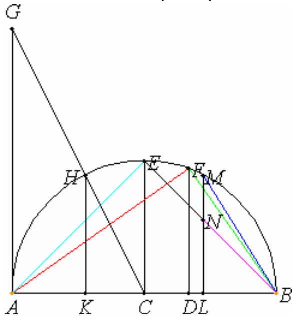


Ich behaupte weiter, dass es gleichwinklig ist.
Da die Strecke NP in R stetig geteilt ist, PR der größere Abschnitt und PR = PS, so ist NS in P stetig geteilt, NP der größere Abschnitt (XIII, 5); also $NS^2 + SP^2 = 3\ NP^2$ (XIII, 4). Hier ist NP = NB, PS = SV; also $NS^2 + SV^2 = 3\ NB^2$, folglich $VS^2 + SN^2 + NB^2 = 4\ NB^2$. Nun ist $SN^2 + NB^2 = SB^2$ (I, 47); also $BS^2 + SV^2$, d.h. (I, 47) BV^2 - $\angle$ VSB ist je ein Rechter (XI, Definition 3) - = $4\ NB^2$; also VB = 2 BN. Aber auch BC = 2 BN; also BV = BC. Da hier zwei Seiten BU, UV zwei Seiten BW, WC gleich sind, auch Grundlinie BV = Grundlinie BC, ist $\angle$ BUV = $\angle$ BWC (I, 8). Ähnlich lässt sich auch zeigen, dass auch $\angle$ UVC = BWC. $\angle$ BWC, BUV, UVC sind also alle drei einander gleich. Sind aber in einem gleichseitigen Fünfeck drei Winkel einander gleich, so muss das Fünfeck gleichwinklig sein (XIII, 7); Fünfeck BUVCW ist also gleichwinklig. Wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; Fünfeck BUVCW ist also gleichseitig und gleichwinklig und liegt dabei auf einer Würfelkante BC. Konstruiert man also auf jeder der 12 Würfelkanten ebenso, so muss ein Körper entstehen, der von 12 gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken umfasst wird, der Dodekaeder heißt.
Weiter soll man ihm mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome (X, 73) nennt. Man verlängere XP, es werde XY. PY trifft dann die Würfeldiagonale, und sie halbieren einander; dies ist nämlich im vorletzten Satz des XI. Buches (XI, 38) bewiesen. Sie mögen einander in Y schneiden; dann ist Y der Mittelpunkt der den Würfel umschließenden Kugel und YP die Hälfte der Würfelkante. Man ziehe UY.
Da die Strecke NS in P stetig geteilt ist, NP ihr größerer Abschnitt, sind $NS^2 + SP^2 = 3\ NP^2$ (XIII, 4). Hier ist NS = XY, da NP = PY und XP = PS. Aber PS = XU, da = RP; also $YX^2 + XU^2 = 3\ NP^2$. Aber $YX^2 + XU^2 = UY^2$ (I, 47); also $UY^2 = 3\ NP^2$. Aber auch der Radius der den Würfel umschließenden Kugel wird quadriert dreimal so groß wie die Hälfte der Würfelkante; denn wie man einen Würfel errichtet, ihn mit einer Kugel umschließt und zeigt, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante, ist früher (XIII, 15) gezeigt worden; wenn dies von den Ganzen gilt, gilt es auch von den Hälften. Hier ist NP die Hälfte der Würfelkante; also ist UY dem Radius der den Würfel umschließenden Kugel gleich. Y ist der Mittelpunkt der den Würfel umschließenden Kugel; Punkt U liegt also auf der Kugelfläche. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch alle übrigen Dodekaederecken auf der Kugelfläche liegen. Man hat also das Dodekaeder mit der gegebenen Kugel umschlossen.
Weiter behaupte ich, dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome nennt. Da RP der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke NP ist, PS der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke PO, ist RS der größere Abschnitt der stetig geteilten ganzen Strecke NO. Da NP : PR = PR : RN, gilt entsprechendes auch etwa von den Doppelten; denn Teile haben dasselbe Verhältnis wie Gleichvielfache (V, 15). Also ist NO : RS = RS : (NR + SO); hier ist NO > RS, also RS > (NR + SO) (V, 14); NO ist also stetig geteilt, RS der größere Abschnitt. Nun ist RS = UV, also UV der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke NO. Da der Kugeldurchmesser die Rationale ist und quadriert dreimal so groß wie die Würfelkante (XIII, 15), ist NO als Würfelkante rational (X, Definition 3). Wird aber eine rationale

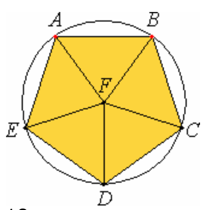
Strecke stetig geteilt, so ist jeder ihrer Abschnitte irrational, eine Apotome (XIII, 6; Anmerkung). Die Strecke UV, welche die Dodekaederkante ist, ist also irrational, eine Apotome.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass die Dodekaederkante der größere Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante ist – q.e.d.

Buch XIII § 18 (A. 6):
Die Kanten der Fünf Körper darzustellen und miteinander zu vergleichen.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = CB, und in D so, dass AD = 2 DB, zeichne über AB den Halbkreis AEB, errichte in C und D auf AB die Senkrechte CE, DF und ziehe AF, FB, EB.

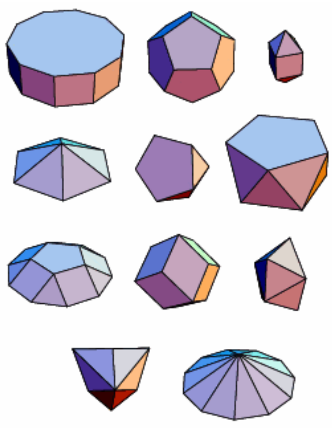


Da AD = 2 DB, ist AB = 3 BD, also umgewendet (V, Definition 16), BA = 1 ½ AD. Aber BA : AD = $BA^2 : AF^2$, weil $\triangle$ AFB mit $\triangle$ AFD winkelgleich ist (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also $BA^2 = 1 \frac{1}{2} AF^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch anderthalbmal so groß wie die Pyramidenkante (XIII, 13). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also AF der Pyramidenkante gleich.
Ebenso ist, da AD = 2 DB, AB = 3 BD; und AB : BD = $AB^2 : BF^2$, also $AB^2 = 3 BF^2$. Quadriert wird aber der Kugeldurchmesser aber auch dreimal so groß wie die Würfelkante (XIII, 15). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also BF die Würfelkante.
Ferner ist, da AC = CB, AB = 2 BC; und AB : BC = $AB^2 : BE^2$, also $AB^2 = 2BE^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch zweimal so groß wie die Oktaederkante (XIII, 14). Und AB ist der Durchmesser der gegebenen Kugel; also BE die Oktaederkante.
Weiter errichte man im Punkte A auf der geraden Linie AB die Senkrechte AG, mache AG = AB, ziehe GC und fälle von H auf AB das Lot HK. Da GA = 2 AC, weil GA = AB, und GA : AC = HK : KC (VI, 4), ist HK = 2 KC; also $HK^2 = 4 KC^2$; also $HK^2 + KC^2$, d.h. (I, 47) $HC^2 = 5 KC^2$. Hier ist HC = CB; also $BC^2 = 5 CK^2$. Da AB = 2 CB und hierin AD = 2 DB, ist auch Rest BD = 2 DC, also BC = 3 CD, also $BC^2 = 9 CD^2$. Aber $BC^2 = 5 CK^2$; also $CK^2 > CD^2$, also CK > CD.
Man lege CL = CK hin, errichte in L auf AB die Senkrechte LM und ziehe MB. Da $BC^2 = 5 CK^2$, 2 BC = AB, 2 CK = KL, ist $AB^2 = 5 KL^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch fünfmal so groß wie der Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert (XIII, 16 Zusatz). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also KL des Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert; KL ist also die Sechseckseite im genannten Kreis (IV, 15 Zusatz). Und da der Kugeldurchmesser zusammengesetzt ist aus einer Seite des Sechsecks und zwei Seiten des Zehnecks, die sich dem genannten Kreis einbeschreiben lassen (XIII, 16 Zusatz), AB aber der Kugeldurchmesser, KL Sechseckseite und AK = LB, ist sowohl AK als LB die Seite des Zehnecks, das sich dem Kreise einbeschreiben lässt, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert. Da hier LB die Zehneckseite ist und ML die Sechseckseite – denn es ist = KL, da = HK, weil sie vom Mittelpunkt gleichweit abstehen (III, 14), und HK, KL sind beide = 2 KC – so ist MB die Fünfeckseite (XIII, 10). Die Fünfeckseite ist aber die Ikosaederkante (XIII, 16); also ist MB die Ikosaederkante. Da FB die Würfelkante ist, teile man es stetig in N, NB sei der größere Abschnitt (VI, 30); dann ist NB die Dodekaederkante (XIII, 17 Zusatz).
Da, wie bewiesen, quadriert der Kugeldurchmesser 1 ½ mal so groß wird wie die Pyramidenkante AF, 2 mal so groß wie die Oktaederkante BE und 3 mal so groß wie die Würfelkante FB, werden quadriert die Pyramidenkante 4 mal, die Oktaederkante 3 mal und die Würfelkante 2 mal so groß wie eine Größe, von der der Kugeldurchmesser quadriert das 6fache wird. Quadriert wird also die Pyramidenkante 1 1/3 mal so groß wie die Oktaederkante und 2 mal so groß wie die Würfelkante; und quadriert wird die Oktaederkante 1 ½ mal so groß wie die Würfelkante. Die Kanten der genannten drei Körper, nämlich Pyramide, Oktaeder und Würfel, stehen zueinander in rationalen (X, Definition 3) Verhältnissen. Die beiden anderen, nämlich die Kanten von Ikosaeder und Dodekaeder stehen weder zueinander (X, 111a) noch zu den oben genannten in rationalen Verhältnissen; denn sie sind irrational, die eine eine Minor (XIII, 16), die andere eine Apotome (XIII, 17).
Dass die Ikosaederkante MB > die Dodekaederkante NB, lässt sich folgendermaßen zeigen. Da $\triangle$ FDB mit $\triangle$ FAB winkelgleich ist, stehen in Proportion DB : BF = BF : BA (VI, 8, 4). Stehen aber drei Strecken in Proportion, dann verhält sich das Quadrat über der ersten zu dem über der zweiten wie die erste Strecke zur dritten (VI, 19 Zusatz); also DB : BA = $DB^2 : BF^2$, und, umgekehrt (V, Definition 13), AB : BD = $FB^2 : BD^2$. Hier ist AB = 3 BD, also $FB^2 = 3 BD^2$. Aber $AD^2 = 4 DB^2$, weil AD = 2 DB. Also ist $AD^2 > FB^2$, also AD > FB, um so mehr AL > FB. Teilt man AL stetig, so ist KL der größere Abschnitt, da ja LK die Sechseckseite und KA die Zehneckseite ist (XIII, 9). Teilt man aber FB stetig, so ist NB der größere Abschnitt. Also ist KL > NB (V, 14). Nun ist KL = LM; also LM > NB. Und MB > LM (I, 19). Um so mehr ist MB, die Ikosaderkante, > NB, die Dodekaederkante.



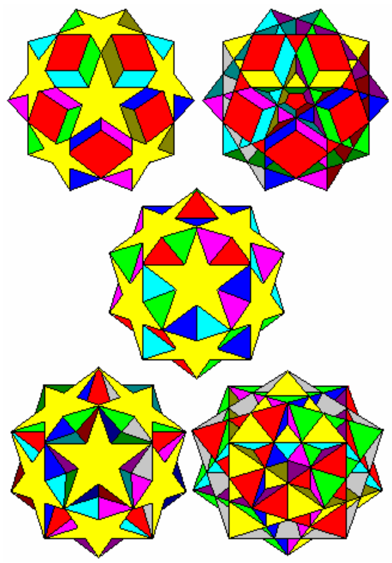
Buch XIII § 18a:
Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 2/3 R. beträgt, würden die 6 zusammen = 4 R.; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen < 4 R. (XI, 21). Aus demselben Grund lässt sich auch aus mehr als 6 solchen ebenen Winkeln keine Ecke errichten.
Von 3 Quadraten wird die Würfelecke umfasst; mit ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederseite umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks 1 1/5 R. beträgt, würden die 4 Winkel zusammen > 4 R.; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine verwendbare Ecke umfasst werden – S.



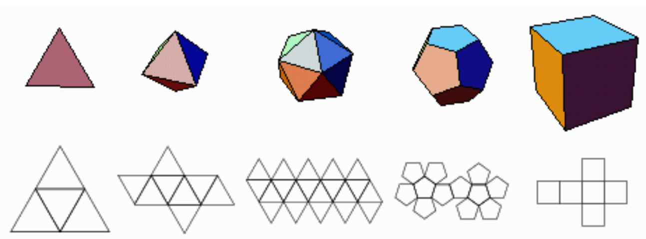
Allgemeines Dodekaeder
Im Allgemeinen versteht man unter dem Dodekaeder das regelmäßige Pentagondodekaeder.
Dies ist nicht ganz korrekt, da Dodekaeder wörtlich übersetzt Zwölfflach bedeutet und es weitere Polyeder mit genau 12 Seitenflächen gibt.
Eine Auswahl dieser Dodekaeder ist links zu sehen. Von links oben nach rechts unten sind dies:

zehnseitiges Prisma
Volumen $\sqrt{(25/2\ \sqrt{5} + 125/4)}\ a^2h$
Oberfläche $\sqrt{(50\ \sqrt{5} + 125)}\ a^2 + 10ah$
regelmäßiges Pentagondodekaeder
Volumen $V = 1/4\ a^3\ (15 + 7\sqrt{5}) \approx 7{,}6631189\ a^3$
Oberfläche $A = 3a^2\ \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})} \approx 20{,}6457288\ a^2$
verlängerte quadratische Doppelpyramide (Johnson-Polyeder J15)
Volumen $V = a^3/6\ \sqrt{2} + a^3/4\ \sqrt{3} \approx 0{,}668714\ a^3$
Oberfläche $A = 7/4\ a^2\ \sqrt{3} + 3\ a^2 \approx 6{,}03108\ a^2$
sechsseitige Doppelpyramide
Volumen $V = 3\ a^3$
Oberfläche $A = 3\ \sqrt{15}\ a^2 \approx 11{,}6189500386\ a^2$



Facettierte Dodekaeder
Rohdiamanten werden durch symmetrisches Abschleifen kleiner Teile zu wertvollen Edelsteinen, sie erhalten eine Facette.
Symmetrische Polyeder können ebenso durch Abschleifen, das Facettieren, zu interessanten Polyedern umgeformt werden. Dabei werden symmetrisch zum Schwerpunkt des punktsymmetrischen Ausgangspolyeders Teile entfernt.
Durch Facettierung eines regelmäßigen Dodekaeders entstehen sieben uniforme Sternpolyeder, von links oben nach rechts unten, die fünf abgebildeten:
U36 Dodekadodekaeder
U65 großes Dodekahemiikosaeder
U30 kleines ditrigonales Ikosidodekaeder
U41 ditrigonales Dodekadodekaeder
U47 großes ditrigonales Ikosidodekaeder
und außerdem
U42 großes dodekaedrisches Ikosidodekaeder
U63 großes Dodezikosaeder

Platonische Körper als Spielwürfel
Der Würfel gehört zu den fünf platonischen Körpern. Mit jedem dieser Körper kann man einen „Spielwürfel" bauen.

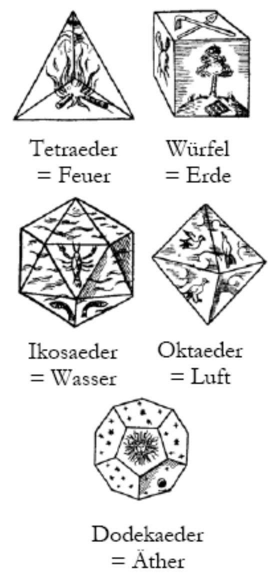


Mit ihnen kann man 4, 6, 8, 12 oder 20 Zahlen würfeln. Es zählt immer die Zahl, die oben liegt. Eine Ausnahme bildet das Tetraeder. Da zählt die Zahl, die verdeckt ist, oder besser die, die wie im Bild an der Spitze steht.

Netze der platonischen Körper
von links nach rechts: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Hexaeder (Würfel)

Anzahl inkongruenter Netze / Vollständige Symmetriegruppen

	zweiseitig	einseitig	vollständige Symmetriegruppe
Tetraeder	3	2	symmetrische Gruppe $\sigma 4$
Hexaeder	20	11	Untergruppe der $\sigma 8$ = $A_4 \otimes \{p\}$
Oktaeder	20	11	Untergruppe der $\sigma 8$ = $A_4 \otimes \{p\}$
Ikosaeder	86728	43528	symmetrische Gruppe $\sigma 5$
Dodekaeder	86728	43528	symmetrische Gruppe $\sigma 5$



Geschichte der platonischen Körper

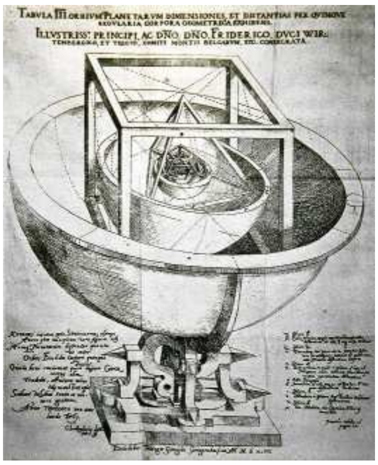
Nachweis

Hippasos von Metapont, vor 450 v.u.Z. … Dodekaeder
Theaitetos, um 400 v.u.Z. … Ikosaeder / Oktaeder
Platon (429-348 v.u.Z.) … Zuordnung der Körper zu den 5 Elementen
Hexaeder = Erde
Tetraeder = Feuer
Oktaeder = Luft
Ikosaeder = Wasser
Dodekaeder = die Quintessenz, das "Allumfassende"
Euklid (365-300 v.u.Z.) … Existenznachweis und Konstruktion

"Platos Elementlehre"

Was bei Demokrit die unteilbaren Atome waren, sind bei Plato Urstrukturen in Form von zwei Klassen rechtwinkliger Dreiecke:
(1) Dreiecke mit den Innenwinkeln 90°, 60° und 30°, aus denen sich ein gleichseitiges Dreieck bilden lässt.
(2) Dreiecke mit den Innenwinkeln 90°, 45° und 45°, aus denen sich ein Quadrat bilden lässt.
Aus den gleichseitigen Dreiecken bilden sich die elementaren Bestandteile der drei Elemente Feuer, Luft und Wasser, aus den Quadraten ergibt sich das Element Erde.

Plato: "Der Erde wollen wir die Würfelform geben; denn von den vier Formen ist die Erde am unbeweglichsten …; notwendigerweise aber ist der Körper mit den festesten Grundflächen von solcher Beschaffenheit.
Was aber die Flächen betrifft, so ist in seinen Teilen und im Ganzen notwendig das gleichseitige Viereck stabiler als das gleichseitige Dreieck. Wenn wir also diese Form der Erde zuteilen, halten wir uns an die wahrscheinliche Erklärung.
Dem Wasser hinwiederum teilen wir von den übrigen die unbeweglichste Form zu, die beweglichste dem Feuer, die mittlere der Luft."

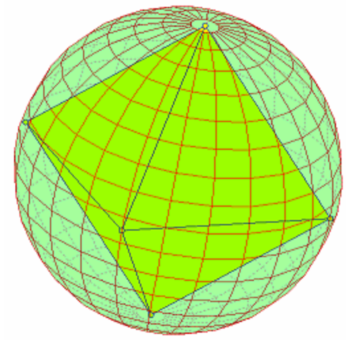


"Mysterium cosmographicum" 1595
Johannes Kepler

"Wie kommt es zur Sechszahl der Wandler, wie zu dem Abstand dieser Gestirne, warum ist des Jupiters Laufbahn vom Mars so weit entfernt, da im Äußersten beide ?

Nimm Pythagoras hin, er lehrt's mit seinen fünf Körpern.
Zwischen Saturn und Jupiter steht ein Würfel so, dass die Innenfläche der Saturnsphäre die dem Würfel umschriebene, die Außenfläche der Jupitersphäre die eingeschriebene Kugel ist.
Ebenso steht zwischen Jupiter und Mars ein Tetraeder, zwischen Mars und Erde das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder, zwischen Venus und Merkur das Oktaeder. …"

Thomson-Problem



1904 untersuchte der englischer Physiker Joseph John Thomson die Frage, wie n Elektronen auf eine Kugeloberfläche verteilt werden müssen, so dass das gesamte elektrostatische Potential, das sich durch die Coulombkraft einstellt, ein Minimum wird.

Mathematisch entsteht das Optimierungsproblem, dass die Summe

$$\Sigma_{i<j}\ 1/r_{ij}$$

ein Minimum annimmt, wobei die r_{ij} die Abstände der Elektronen zueinander sind.
Bis zu 4 Elektronen ist die Lösung naheliegend.
Ein einzelnes Elektron kann irgendwo auf der Kugel liegen. Zwei Elektronen müssen sich diametral gegenüber befinden (z.B. Nord- und Südpol).

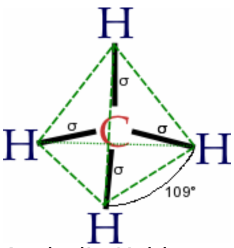
Drei Elektronen bilden ein gleichseitiges Kugeldreieck auf einem Großkreis der Kugel, vier Elektronen liegen auf ein in die Kugel eingeschriebenes regelmäßiges Tetraeder.
Weiterhin sind scheinbar offensichtlich, aber nicht trivial beweisbar, dass sechs Elektronen ein Oktaeder bilden (Abbildung), 12 Elektronen ein regelmäßiges Ikosaeder.
Erst 2010 konnte ein computergestützter Beweis erbracht werden, dass die Lösung des Thomson-Problems für 5 Elektronen eine dreieckige Doppelpyramide ist, das Johnson-Polyeder J12.

Durch Computereinsatz wurden für das Thomson-Problem mit n = 7 und 9 folgende beste Lösungen bisher ermittelt.
Eckpunkte des Thomson-Heptaeders, pentagonale Doppelpyramide (n=7)

x	y	z
0.5375304632050941	-0.8419679671813423	-0.0463782639502108
-0.7530615636854303	-0.4545691025839922	-0.4756734302813632
0.7530615636854303	0.4545691025839922	0.4756734302813632
-0.1947434969817709	-0.5365733646094448	0.8210749020491437
-0.6578885634278419	0.5103473903948149	0.5538304607260719
0.5269555932309938	0.0162085434527195	-0.8497382455095878
-0.2118539960264761	0.8519853979432523	-0.4787888533154172

Eckpunkte des Thomson-Nonaeders, dreifacherweitertes dreieckiges Prisma (n=9)

0.9606091104977326	0.2013353717464959	-0.1915573149541809
0.1282067193513159	0.2382660003028009	-0.9627005506453595
0.5548636852631770	-0.0951003439091924	0.8264878797444760
0.1665274478803420	0.9859183569685143	0.0152840601597025
-0.5072499774902739	-0.6263833810976059	-0.5918963762525059
-0.8772385233059112	0.3973436940452451	-0.2693892388915031
0.5165429567341517	-0.8427527005749057	-0.1514967310605869
-0.4533591330074601	0.4250480093511101	0.7834536912066872
-0.4889022859230752	-0.6836750068324623	0.5418145806932703



Platonische Körper in der Natur
Tetraeder in der Natur
Das regelmäßige findet man als Grundstruktur im kubischen Kristallsystem verschiedener Mineralien.
In der Chemie spielt das Tetraeder bei der räumlichen Anordnung von Atomen in Verbindungen eine große Rolle.
So sind die vier Wasserstoffatome im Methanmolekül tetraedrisch um das Kohlenstoffatom angeordnet, da so der Bindungswinkel am größten wird.
Auch die Kohlenstoffatome im Diamantgitter sind tetraedrisch angeordnet, jedes Atom ist von vier weiteren Atomen umgeben. Das Kohlenstoff-Atom befindet sich dann nach dem Orbital-Modell in sp^3-Hybridisierung.



Platonische Körper in der Natur
Hexaeder in der Natur
Limonitisierter Pyritwürfel
FeS_2, Eisenkies, Schwefelkies, Katzengold
kubisch, Härte 6-6,5, Dichte 5-5,2 g/cm³, bis zu 53% S

Pyrit gehört gemeinsam mit Quarz und Calcit zu den allerhäufigsten Mineralen und ist das häufigste Erzmineral überhaupt. Er war schon im Altertum bekannt, wie die vom griechischen Wort pyrites = funkensprühend abgeleitete Bezeichnung verrät, welche sich auf die auffällige Funkenbildung beim Schlagen bezieht. Pyrit wurde Heilkraft zugeschrieben, die Inkas polierten ihn zu Spiegeln, doch haben erst die Alchemisten die wirkliche Zusammensetzung dieses Minerals entdeckt.
Pyrit kann bei fast allen Mineralbildungstypen entstehen. Er wird schon während der Magmaerstarrung abgeschieden und erscheint daher in viele Intrusivgesteine eingeschlossen. Auf Hydrothermal-Erzgängen kommt er ganz geläufig vor, aber auch in den genetisch ähnlichen metasomatischen Akkumulationen. Er enthält Spuren von Gold und Kupfer. Pyrit entsteht auch bei der Sedimentation in reduzierendem Milieu. Seine Träger sind daher bituminöser Kalkstein, Tonschiefer, Kohlentonstein und Kohlenflöze. Durch die Metamorphose dieser Serien entstehen Erzlager in kristallinen Schiefern.

Die goldglänzenden Kristalle sind, vorwiegend in Oberitalien und auf Elba, als Würfel und näherungsweise als Dodekaeder zu finden. Seltener treten sie als Oktaeder auf.

Abbildung oben: Würfel aus Navajin La Riocha, Spanien
Abbildung Mitte: perfekt oktaedrischer Kristall aus Piemont, Italien
Abbildung unten: Pentagondodekaeder (Pyritoeder) aus Ambas Aguas, Spanien

Platonische Körper in der Natur

Pentagondodekaeder in der Natur

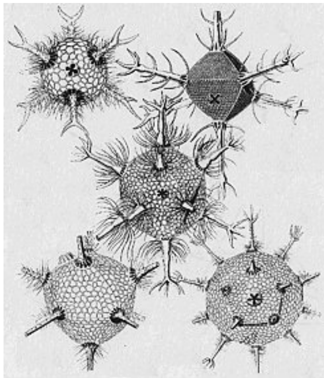
Limonitisierter Pyritpentagondodekaeder von der Ochsenalm im Frosnitztal bei Matrei
Quelle: "Tauernschatzkammer" Maltatal - Kölnbreinsperre

Galenit

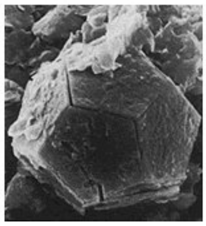
Bleiglanz, PbS
untere Abbildung: verschiedene Formen, wie Würfel, Kuboktaeder aus Beuthen, Oberschlesien
Seit der Antike bekannt, dient es als Bleierz zur Bleigewinnung und wird trotz gesundheitsschädigender Wirkung noch viel in der Industrie eingesetzt: Bleiglas, Bleiakkumulatoren.
Lagerstätten: USA, auch in Deutschland: Rammelsberg (Harz), Freiberg-Andreasberg (Erzgebirge)

Oktaeder in der Natur

Abbildung: Fluoritoktaeder auf Aplit aus der Hocharn-Westwand im großen Fleißtal, Heiligenblut
Flussspat, CaF2, kubisch; H=4; D=3,l-3,2; ca. 48% F

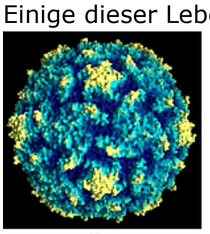


Fluorit war bereits im Altertum sehr beliebt. Er diente als Edelstein in Griechenland und Rom zur Herstellung verschiedener Schmuckgegenstände und Vasen.
Flussspat ist ein weit verbreitetes Mineral, das vorwiegend in kleinen Mengen in Granit-, Syenit- und Rhyolitmassiven auftritt.
obere Abbildung: "Tauernschatzkammer" Maltatal - Kölnbreinsperre
untere Abbildung: Oktaeder aus St. Agnes, Cornwall, Großbritannien

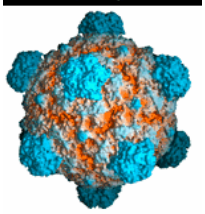


Plankton

Zum Plankton (griech. πλαγκτον = Umherirrendes) gehören im Wasser lebende Tiere, Pflanzen und Mikroorganismen, die von Strömungen mitgetragen werden.
Der deutsche Biologe Ernst Haeckel (1834-1919) studierte diese einzelligen Meerestiere, die Teil des Planktons sind. Viele ihrer formenreichen aus Kieselsäure bestehenden Skelette sind symmetrisch. Auch Salvador Dalí zeichnete sie.
Einige dieser Lebewesen weisen regelmäßige Würfel-, Oktaeder- , Dodekaeder- oder Ikosaederformen auf.

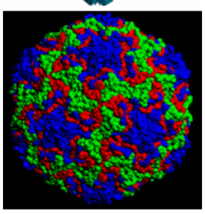


obere Abbildung: Radiolarien (Strahlentierchen)
Abbildung: Radiolarienzeichnung von Ernst Haeckel, 1887
Abbildung: Prosobranchia-Zeichnung von Ernst Haeckel (hier sind vor allem Spiralen zu bewundern)



Alge Braarudosphaera bigelowi

Algen stellen einen Großteil der Biomasse unseres Planeten dar. Sie sind Ernährungsgrundlage für Wassertiere und wichtig für die Selbstreinigung der Gewässer.
Die im Ozean lebende einzellige, goldbraune Alge Braarudosphaera bigelowi bildet zeitweise ein Gerüst aus Calcitkristallen ($CaCO_3$).
Dieses Gerüst besteht aus zwölf fünfeckigen Platten und ist ein fast perfektes Dodekaeder.
untere Abbildung: etwa 4000fache Vergrößerung, das abgebildete Exemplar stammt aus dem Miozän (vor 25-13 Millionen Jahre) und wurde von S.A.Jafar untersucht.

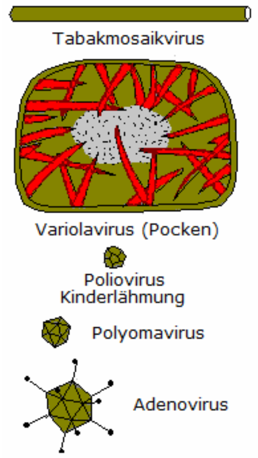


Ikosaederviren

Es gibt viele Viren mit Ikosaederstruktur: Adenoviren (Atemwegserkrankungen, auch Krebs), Herpes Virus und die Picornaviren.
Zur letzten Gruppe gehören der gewöhnliche Erkältungserreger und der Poliovirus.

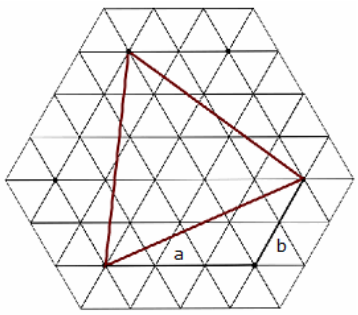
Bakteriophagen sind Bakterien überfallende Viren.
Zum Schutz der DNA sind sie von einer ikosaederförmigen Proteinhülle, dem Capsid, umschlossen. Das Capsid ist aus 20·n regelmäßig angeordneten Capsomeren aufgebaut, diese bestehen wiederum aus Proteinmolekülen.
Zur Darstellung wertet man kristallographische Röntgenaufnahmen computergraphisch aus. Atome werden durch Kugeln mit einem Radius von einigen Angström abgebildet.
Abbildungen von oben nach unten

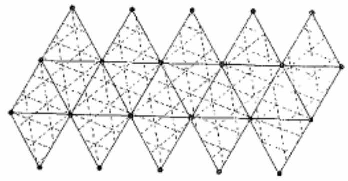
Poliovirus Typ 1
Bakteriophage Phi X 174
Rhinovirus 14



Polyederviren
Die aus Protein-Untereinheiten, sogenannte Capsomeren, bestehende Schutzhülle (Capsid) von Viren ist in der Regel symmetrisch gebaut. Entweder sind die Einheiten wie die Stufen einer Wendeltreppe aneinandergereiht, so dass sich eine Helix-Struktur (vgl. Abbildung des Tabakmosaikvirus) ergibt, oder sie sind zu einem geschlossenen Hohlkörper vereinigt, der eine höhere Symmetrie besitzt.

Im Unterschied zu den "nackten" Viren ist bei den "umhüllten" Viren das Nucleocapsid, d.h. das Capsid mit den enthaltenen Nucleinsäuren, noch von einem äußeren Mantel sehr komplizierter Zusammensetzung umgeben, der neben Proteinen auch Kohlenhydrate und Lipide enthält. Der Durchmesser von Virionen variiert zwischen 10 und 300 nm. Unterschiedlich ist auch ihre Gestalt, wie die Abbildung zeigt. Sie haben die Form von Kügelchen, Stäbchen, Spiralen, Würfeln, Quadern, Polyedern, insbesondere platonischen Körpern, wie Ikosaeder und Oktaeder, Nadeln und Ellipsoiden.





Polyederviren (2)
Mit Hilfe einer speziellen Konstruktion können Polyeder bestimmt werden, welche einer Kugelform sehr nahe kommen. Diese Polyederformen treten bei Viren häufig auf.
Diese Konstruktion wurde 1935 von Goldberg, Caspar und Klug entwickelt.

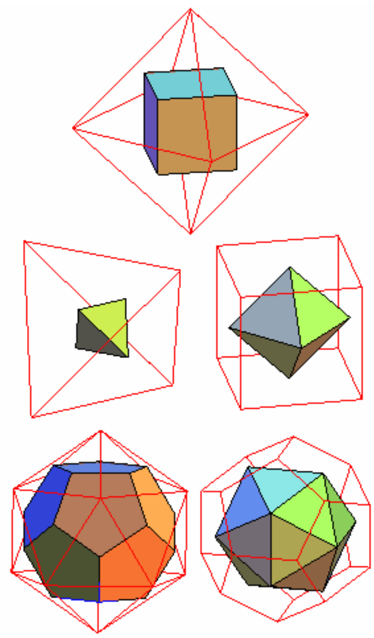
Goldberg-Caspar-Klug-Konstruktion
Im Beispiel soll von einem Ikosaeder ausgegangen werden, da seine Form einer Kugel relativ nah kommt. Das Ikosaeder besitzt 20 gleichseitige Dreiecke. Nun wird eine dieser Seiten in kleinere, gleichseitige Dreiecke zerlegt.
Man parkettiert dazu die Ebene mit gleichseitigen Dreiecken. Von einem beliebigen Punkt aus zählt man a Dreiecke nach rechts und anschliessend b Dreiecke den Seitenlängen entlang nach oben rechts, wie dies in der Zeichnung angedeutet wird.
Für den Seitenlänge des roten Ikosaederdreieckes s wird dann

$$s = a^2 + ab + b^2$$

Nun konstruiert man aus diesem Ikosaederdreieck ein Ikosaeder, wobei nun die kleinen Dreiecke berücksichtigt werden. (mittlere Abbildung)
Beim Zusammenkleben dieser Flächen entstehen 12 Fünfecke und Dreiecke bzw. Sechsecke; durch Zusammenfassen je 6 gleichseitiger Dreiecke. Für den so entstandenen Polyeder gilt:

Flächenzahl = 20 s
Kantenzahl = 30 s
Eckenzahl = 10 s + 2

Die Anzahl der Ecken 10s+2 ist für die Struktur der Viren von Bedeutung. Sie gibt an, aus wie vielen identischen Proteinmolekülen die Virushülle aufgebaut ist.

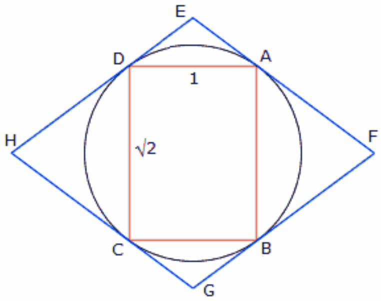


Duale platonische Körper
Die Platonischen Körper sind paarweise zueinander dual.
Das Tetraeder ist zu sich selbst dual.

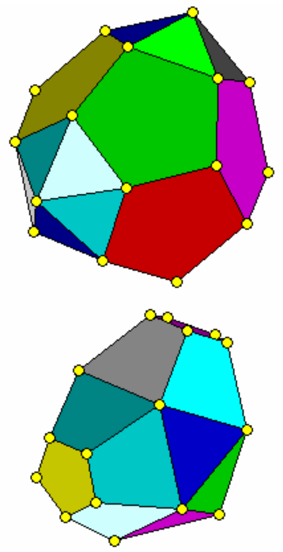
Tetraeder ist selbstdual
Würfel → Oktaeder
Oktaeder → Würfel
Dodekaeder → Ikosaeder
Ikosaeder → Dodekaeder

Duale Polyeder
Nach dem Dualitätsprinzip existiert zu jedem Polyeder ein duales (reziprokes) Polyeder. Bei diesem sind die Positionen von Ecken und Flächen komplementär getauscht. Existieren die Umkugel des Polyeders, so wird diese beim dualen Polyeder zur Inkugel.

Dorman Luke Konstruktion
Für uniforme Polyeder beschreibt die Dorman Luke Konstruktion, wie aus dem Originalpolyeder die Eckpunkte des dualen Polyeders konstruiert werden können.
Erstmals wurde das Verfahren 1961 von Cundy und Rollett beschrieben, 1983 durch Wenninger verallgemeinert.



1) An jeder Ecke P das Ausgangspolyeders wird die Eckfigur, evtl. ABCD, erzeugt, die alle Mittelpunkte der zu P verlaufenden Kanten enthält.
2) Um diese Eckfigur wird der Umkreis gezogen.
3) An jeden Punkt A, B, C, D, … wird die Tangente an diesen Kreis konstruiert.
4) Diese Tangenten schneiden sich paarweise in Punkten E, F, G, H, …
5) Das entstehende Polygon, hier EFGH, ist dann die Seitenfläche des dualen Polyeders.
Das Verfahren kann nur genutzt werden, wenn die Eckfiguren regelmäßig sind. Im Allgemeinen gilt dies für uniforme Polyeder, d.h. zum Beispiel für die Catalanischen Polyeder, nicht!



Quasiduale Polyeder
Fordert man, dass für ein Ausgangspolyeder genau jeder Flächenschwerpunkt ein Eckpunkt eines neuen Polyeders ist, ohne weitere Forderungen wie Konvexität usw., so ergeben sich quasiduale Polyeder.
Insbesondere bei nicht uniformen Polyedern, wie zum Beispiel einigen Johnson-Polyedern, entstehen dann auch nichtkonvexe quasiduale Polyeder.

Dabei ist zu beachten, dass zum Beispiel an einer Ecke des Ausgangspolyeders an der 5 Kanten zusammentreffen, nicht notwendig ein Fünfeck als Seitenfläche des quasidualen Polyeders entsteht.
Diese fünf Punkte dieses Fünfecks müssen nicht in einer Ebene liegen, so dass kein ebenes Fünfeck entsteht. Für ein Polyeder muss daher diese Seitenfläche in kleinere Teilflächen, meist Dreiecke, zerlegt werden.
Eine solche Zerlegung ist nicht eindeutig, so dass für ein nicht uniformes Polyeder mehrere quasiduale Polyeder existieren können.

Für die Platonischen Körper sind die Begriffe dual und quasidual äquivalent. Bei den Archimedischen Polyedern ergeben sich oft nicht konvexe quasiduale Körper, die dualen Polyeder sind hier die Catalanischen Körper.
In der Abbildung sind oben der Johnson Polyeder 61 und unten sein quasiduales Polyeder zu sehen.

Kern eines Polyeders
Der gemeinsame Raum von zwei sich durchdringenden Körpern wird Kern genannt.
Für die platonischen Körper ergibt sich zum Beispiel:

Körper	dualer Körper	Durchdringungskörper	Kern	Hülle
Tetraeder	Tetraeder	Zwillingstetraeder	Oktaeder	Hexaeder
Hexaeder	Oktaeder	Hexaeder-Oktaeder	Kuboktaeder	Rhombendodekaeder
Oktaeder	Hexaeder	Hexaeder-Oktaeder	Kuboktaeder	Rhombendodekaeder
Dodekaeder	Ikosaeder	Dodekaeder-Ikosaeder	Ikosidodekaeder	Rhombentriakontaeder
Ikosaeder	Dodekaeder	Dodekaeder-Ikosaeder	Ikosidodekaeder	Rhombentriakontaeder
Kuboktaeder	Rhombendodekaeder	Kuboktaeder-Rhombendodekaeder		

Kernkörper und Hüllenkörper sind wiederum zueinander dual.

Ungleichung von Tóth
1950 sprach L. Fejes Tóth eine Vermutung über komplexe Polyeder aus, die er einige Zeit später beweisen konnte.
Ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten sei in einer Einheitskugel K enthalten. Dann gilt für sein Volumen

$$V \leq 2/3\ k \cos^2 (\pi f / (2k)) \cot^2 (\pi e / (2k)) (1 - \cot^2 (\pi f / (2k)) \cot^2 (\pi e / (2k)))$$

und Gleichheit besteht darin nur für die fünf regulären Polyeder, die K eingeschrieben sind.
Damit sind die Platonischen Körper durch eine einzige Extremaleigenschaft gleichzeitig gekennzeichnet.

Umgekehrt gilt für ein Polyeder, dass die Einheitskugel umschließt

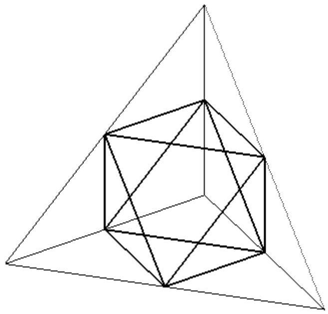
$$V^* \geq k/3 \sin(\pi f / k) (\tan^2(\pi f / (2k)) \tan^2(\pi e / (2k)) - 1)$$

Tóth gelang es, dies auch auf Sternpolyeder zu erweitern. Ein Sternpolyeder heißt der Einheitskugel umbeschrieben, wenn jede Polyederfläche die Einheitskugel berührt und Sternpolygon bezüglich des Berührungspunktes ist.
Projiziert man die Flächen aus dem Kugelmittelpunkt auf die Kugelfläche, so erhält man ein sphärisches Sternmosaik; e sei die Summe der Dichten der Eckpunktfiguren, f die Summe der Flächendichten und k die Anzahl der Kanten des Mosaiks.
Für die Oberfläche eines der Einheitskugel umbeschriebenen Sternpolyeders wird dann

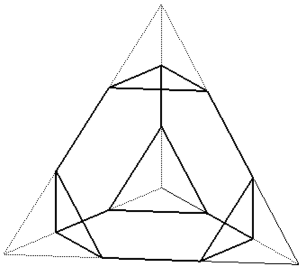
$$A \geq k \sin(\pi f / k) (\tan^2(\pi f / (2k)) \tan^2(\pi e / (2k)) - 1)$$

Gleichheit besteht nur für die neun regulären Polyeder. Da A = 3 V* ist, ergibt sich die Ungleichung für das Volumen.

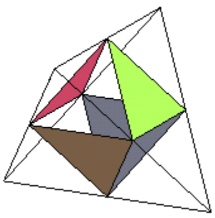
Abgestumpfte Polyeder



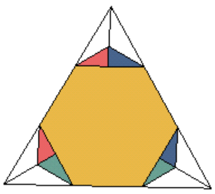
Aus den fünf platonischen Körpern können durch Abschneiden von Pyramiden an den Polyederecken andere Polyeder konstruiert werden. Dabei gibt es mehrer Möglichkeiten die Größe der Pyramiden festzulegen.
Zum einen können die Kanten genau in deren Mitte abgeschnitten werden. Dieser Fall ergibt die maximale Größe der abzuschneidenden Pyramiden. Die Seitenlinien der Pyramiden besitzen die halbe Länge der Kanten des Ausgangspolyeders, d.h. k =1/2.
Hat der Ausgangskörper E Ecken, F Seitenflächen und K Kanten, so besitzt der abgestumpfte Polyeder K Ecken, E+F Seitenflächen und 2K Kanten.



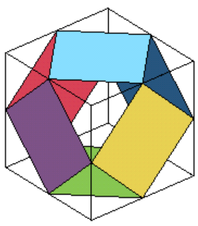
Im zweiten Fall werden die Kanten nicht in der Mitte geschnitten. Der Faktor k ist kleiner ½. Soll der Schnittkörper gleichlange Kanten besitzen, so muss k = 1/(2 (1+cos(π/n))) gewählt werden. Dabei gibt n die Eckenzahl der Seitenflächen des Ausgangskörpers an.
Hat der Ausgangskörper E Ecken, F Seitenflächen und K Kanten, so besitzt dieser abgestumpfte Polyeder 2K Ecken, E+F Seitenflächen und 3K Kanten.
Die nachfolgende Tabelle enthält die Schnittkörper der platonischen Körper und weitere Polyeder im 1. und 2.Fall. Einige dieser Körper gehören zu den Archimedischen Polyedern.



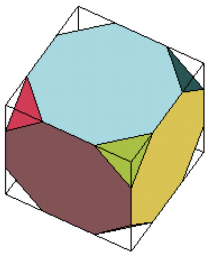
Tetraeder ergibt ein regelmäßiges Oktaeder



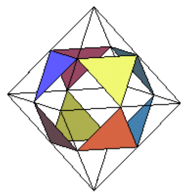
Tetraeder ergibt für k = 1/3 ein abgestumpftes Tetraeder



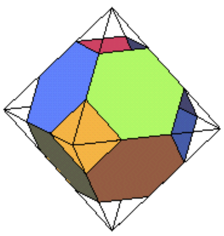
Würfel ergibt ein Kuboktaeder



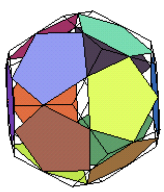
Würfel ergibt für k = 1/(2+√2) einen abgestumpften Würfel



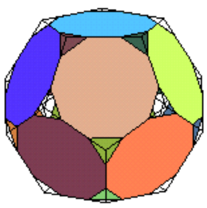
Oktaeder ergibt ein Kuboktaeder



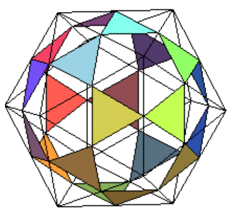
Oktaeder ergibt für k = 1/3 ein abgestumpftes Oktaeder



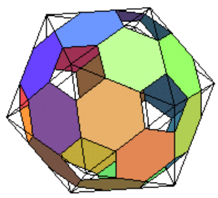
Dodekaeder ergibt ein Ikosidodekeaeder



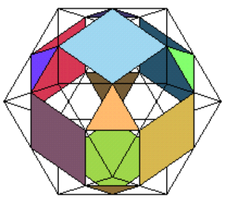
Dodekaeder für k = 2/(5+√5) ein abgestumpftes Dodekaeder



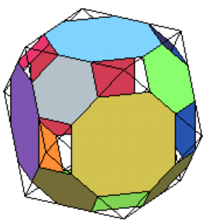
Ikosaeder ergibt ein Ikosidodekeaeder



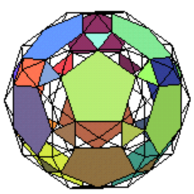
Ikosaeder ergibt für k = 3 ein abgestumpftes Ikosaeder



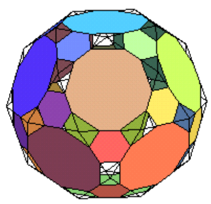
Kuboktaeder ergibt



Kuboktaeder ergibt



Ikosidodekaeder

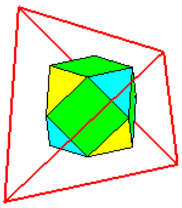
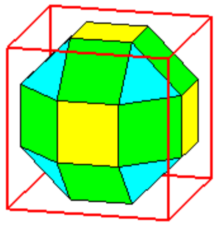
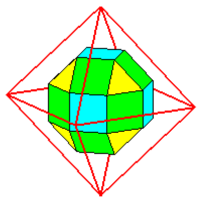
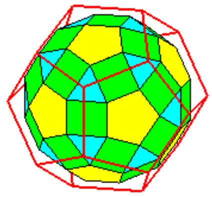
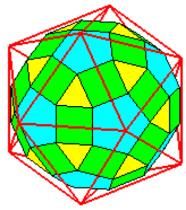
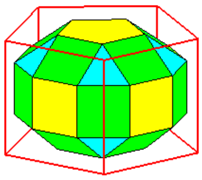
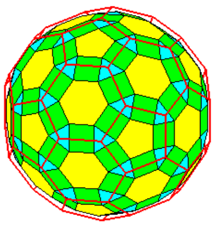
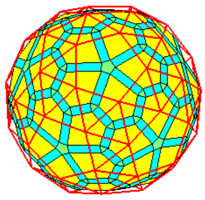
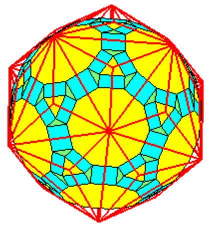
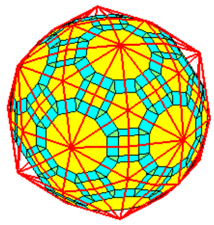


Ikosidodekaeder

ein Rhombenkuboktaeder	für k = 1/3 ein abgestumpftes Kuboktaeder	ergibt ein Rhomben-Ikosidodekaeder	ergibt für k = 1/3 ein abgestumpftes Ikosidodekaeder

Abgekanntete Polyeder

Besitzt der Ausgangspolyeder F_0 Flächen, S_0 Ecken der Ordnung d_i und A_0 Kanten, so hat das abgeschrägte Polyeder
Ecken S = Summe(d_i), Flächen $F = F_0 + S_0 + 2\ A_0$ und Kanten A = Summe(d_i) + $3A_0$. Für die platonischen Körper und weitere Polyeder erhält man

				
Tetraeder ergibt für k = ¼ ein Kuboktaeder	Würfel für k = √2 − 1 ein Rhombenkuboktaeder	Oktaeder ergibt für k = (3√2 −2)/7 ein Rhombenkuboktaeder	Dodekaeder für k = (1+√5)/6 ein Rhomben-Ikosidodekaeder	Ikosaeder für k = (1+3√5)/22 ein Rhomben-Ikosidodekaeder
				
Fünfseitiges Prisma ergibt den Johnson-Polyeder 38	Abgeschnittener Tetraeder wird zum abgeschnittenen Ikosaeder	Abgeschnittenes Dodekaeder	Triakis Ikosaeder	Hexakis Ikosaeder

Abkantung, Cantellation

Die Abkantung eines Polyeders kann auf das Entfernen beliebiger Bereiche längs der Körperkante erweitert werden. Im englischen Sprachraum wird dann von Cantellation gesprochen (Esperanto: laterotranxco).
In der Abbildung ist eine Folge von Abkantungen zu sehen, die aus einem Würfel einen Oktaeder generiert. Von oben nach unten ergeben sich:
Würfel, abgeschrägter Würfel = 1/4-Abkantung-Würfel, Rhombenkuboktaeder = uniform abgekanteter Würfel, abgeschrägtes Oktaeder = 3/4-Abkantung-Würfel, regelmäßiges Oktaeder
Für jedes Polyeder erzeugt die Ankantungsfolge das duale Polyeder. Eine Abkantungsfolge wird auch für Figuren in der Ebene und Polytope in höheren Dimensionen untersucht.
Von Alicia Boole Stott wird der Begriff der Cantellation durch "Expansion" (Erweiterung) ersetzt.

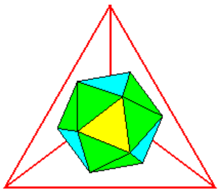
Abstumpfung, Rektifikation eines Körpers

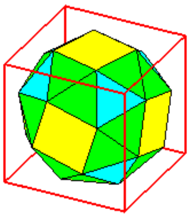
Die Rektifikation eines Polyeders oder Polytops ist der Endzustand eines Abstumpfungsprozesses an den Ecken des Ausgangspolytops.
In der Abbildung ist die Rektifikation eines Würfels zu sehen. Von oben nach unten wird
Würfel
Abstumpfung mit 1/4 der Kantenlänge
Abstumpfung mit 1/2 der Kantenlänge, abgestumpftes Hexaeder
Abstumpfung mit 3/4 der Kantenlänge
Abstumpfung mit 4/4 der Kantenlänge, Kuboktaeder
Damit ist das Kuboktaeder das rektifizierte Polyeder des Würfels.
Würde man den Vorgang noch einmal durchführen, so ergibt sich aus dem Kuboktaeder ein Oktaeder, das doppeltrektifizierte Polyeder eines Würfels. Das doppeltrektifizierte Polyeder ist das duale Polyeder zum Ausgangskörper.
Das Verfahren der Rektifikation eines dreidimensionalen Polyeders kann analog auch auf die Ebene und höher dimensionale Räume übertragen werden.

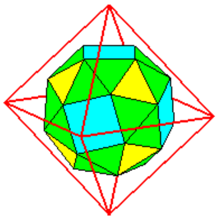
Abgeschrägte Polyeder

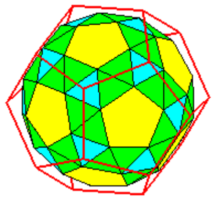
Besitzt der Ausgangspolyeder F_0 Flächen, S_0 Ecken der Ordnung d_i und A_0 Kanten, so hat das abgeschrägte Polyeder

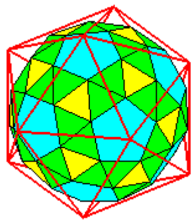
Ecken S = Summe(d_i), Flächen F = F_0 + S_0 + 2 A_0 und Kanten A = Summe(d_i) + 3A_0. Für die platonischen Körper und weitere Polyeder erhält man

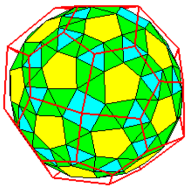

Abgeschrägtes Tetraeder wird zum Ikosaeder

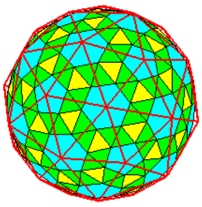

Abgeschrägter Würfel

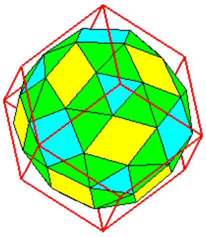

Abgeschrägtes Oktaeder


Abgeschrägtes Dodekaeder


Abgeschägtes Ikosaeder


Fünfseitiges abgeschrägtes Ikositetraeder

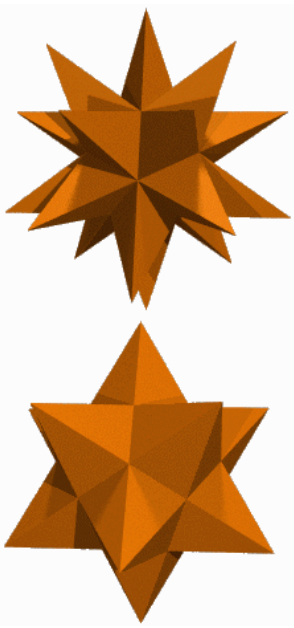

Abgeschrägtes Pentaki-Dodekaeder


Abgeschrägtes Rhombendodekaeder

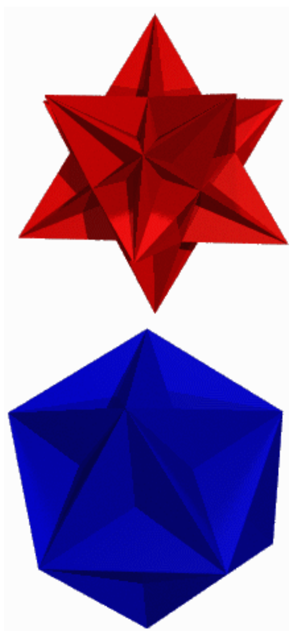
Da Hexaeder und Oktaeder aber auch Ikosaeder und Dodekaeder zu einander duale Polyeder sind, ergeben die abgeschrägten Polyeder jeweils den gleichen Körper. Beim abgeschrägten Würfel passen die 6 Quadrate zu den 6 Würfelflächen aber auch den 6 Oktaedereckpunkten. Die blauen Dreiecke (siehe obige Abbildung) gehören zu den 8 Ecken des Würfels aber auch zu den 8 Flächen des Oktaeders. Die 12 grünen Dreiecke passen zu den jeweils 12 Kanten von Würfel und Oktaeder.

Kepler-Poinsotschen Sternpolyeder

Es existieren vier regelmäßige Sternpolyeder. Hierbei handelt es sich um die nichtkonvexen regulären Polyeder.



Als regelmäßiges Sternpolyeder wird ein nichtkonvexes Polyeder bezeichnet, dass gleiche reguläre Flächen und gleiche reguläre Sternpolyederecken besitzt. Eine reguläre Sternpolyederecke ist eine konkave Polyederecke, deren ebene Winkel einander gleich sind, und welche gleiche spitze Flächenwinkel besitzt. Dabei ist zu beachten, dass die Seitenflächen des Sternpolyeders diejenigen ebenen Figuren sind, welche in minimaler Anzahl das Polyeder abschließen. Die Kanten sind die Seiten der Flächen. So hat das kleine Sterndodekaeder genau 12 Seitenflächen, 12 reguläre Pentagramme.

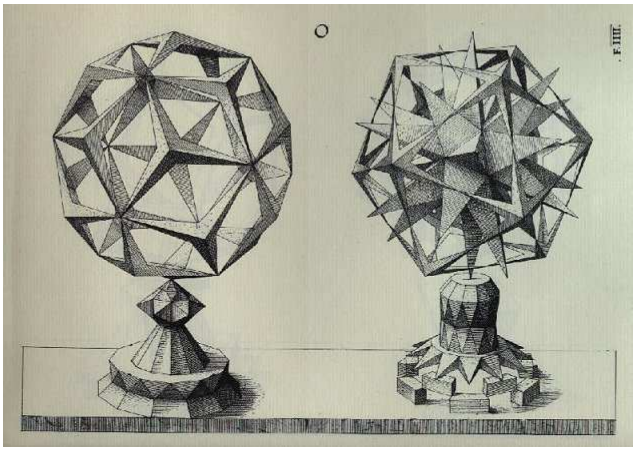


Sterneckiges Ikosaeder - Großes Sterndodekaeder mit konvexen Flächen
Kleines Sterndodekaeder - Sterneckiges Dodekaeder
Großes Ikosaeder - Zwanzigeckiges Sterndodekaeder
Großes Dodekaeder - Zwölfflächiges Sterndodekaeder

Die ersten beiden wurden 1619 erstmals von Johannes Kepler beschrieben (wobei das erste bereits im 15.Jahrhundert auf einem Mosaik von Uccello auftaucht), die anderen beiden 1809 von Louis Poinsot.
Jedoch findet sich bereits 1568 in dem Buch Perspectivia Corporum Regularium von Wenzel Jamnitzer eine Abbildung des Großen Dodekaeders.
Cauchy bewies 1810, dass es keine weiteren regulären Polyeder, außer den vier gezeigten, geben kann.
Übrigens fand man erst 1990 einen Fehler in der von Poinsot und Cauchy benutzten Definition der Regularität.

Großes Sterndodekaeder

Das große Sterndodekaeder (nach Arthur Cayley, 1821-1895, franz. grand dodécaèdre étoilé), oder zwanzigeckige Sternzwölfflach (nach Christian Wiener, 1826-1896) besteht aus zwölf regulären Sternfünfecken, von denen je drei an jeder Ecke zusammenstoßen.



Ihm kommt das Schläfli-Symbol {5/2, 3} zu.
Insgesamt besitzt das große Sterndodekaeder

12 Seiten vom Typ {5/2},
30 Kanten,
20 Ecken vom Typ {3}

mit der Euler-Charakteristik 2.
Die Eckpunkte stimmen mit den Eckpunkten des Dodekaeders überein. Auf diesen Sachverhalt stützt sich die Konstruktion, die wie folgt beschrieben ist:

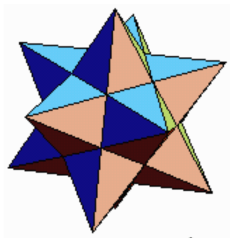
Ausgehend von den Eckpunkten des Dodekaeders erhält man die Kanten, indem man jeden Eckpunkt mit denjenigen drei Eckpunkten verbindet, die der antipodischen Ecke am nächsten liegen.
Je fünf dieser Kanten liegen parallel zu einer ursprünglichen Seite des Dodekaeders und bilden ein Sternfünfeck. Diese Sternfünfecke sind die Seiten des großen Sterndodekaeders.

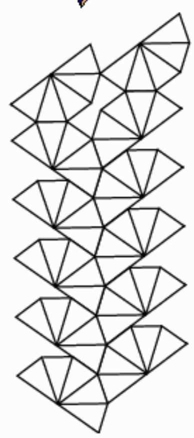
Umkugelradius für Kantenlänge a	$R = 1/4\ \sqrt{3}\ (\sqrt{5} - 1)\ a \approx 0{,}535233\ a$
Mittelkugelradius	$\rho = a/4\ (\sqrt{5} + 3) \approx 1{,}30902\ a$
Höhe der Pyramiden	$h = \sqrt{(7 + 3\sqrt{5})}\ a \approx 3{,}70245\ a$
Oberfläche	$A = 15\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}\ a^2 \approx 46{,}1652\ a^2$
Volumen	$V = 5/4\ (3 + \sqrt{5})\ a^3 \approx 6{,}54508\ a^3$

Berechnungen am großen Sterndodekaeder mit Umkugelradius R, Mittelkugelradius ρ, Kantenlänge a, Höhe der Pyramiden h, Oberfläche A und Volumen V:

Kantenlänge a $a = R\ (\sqrt{15}/3 + \sqrt{3}/3) \approx 1{,}86834471792\ R$
$a = \rho\ (3 - \sqrt{5}) \approx 0{,}763932022500\ \rho = h\ (3/4\ \sqrt{2} - \sqrt{10}/4) \approx 0{,}270090756737\ h$
$a = \sqrt{A}\ \sqrt{\sqrt{(1/225 - 2/1125\ \sqrt{5})}} \approx 0{,}147177828093\ \sqrt{A}$
$a = \sqrt[3]{V}\ \sqrt[3]{(3/5 - \sqrt{5}/5)} \approx 0{,}534599116812\ \sqrt[3]{V}$
Umkugelradius R $R = 1/4\ \sqrt{3}\ (\sqrt{5} - 1)\ a \approx 0{,}535233\ a = \rho\ (\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) \approx 0{,}408881731069\ \rho$
$R = h\ (\sqrt{30}/4 - \sqrt{6}/2) \approx 0{,}144561522371\ h$
Mittelkugelradius $\rho = a/4\ (\sqrt{5} + 3) \approx 1{,}30902\ a = R\ (\sqrt{15}/3 + 2/3\ \sqrt{3}) \approx 2{,}44569498711\ R$
$\rho = h/4\ \sqrt{2} \approx 0{,}353553390593\ h$
Höhe der Pyramiden $h = \sqrt{(7 + 3\sqrt{5})}\ a \approx 3{,}70245\ a = R(2/3\ \sqrt{30} + 4/3\ \sqrt{6}) \approx 6{,}91747004041\ R$
$h = \rho\ 2\ \sqrt{2} \approx 2{,}82842712474\ \rho$
Oberfläche $A = 15\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}a^2 \approx 46{,}1652\ a^2 = R^2\sqrt{(5800\ \sqrt{5} + 13000)} \approx 161{,}149602138\ R^2$
$A = \rho^2\ \sqrt{(45000 - 19800\ \sqrt{5})} \approx 26{,}9416785950\ \rho^2$
Volumen $V = 5/4\ (3+\sqrt{5})\ a^3 \approx 6{,}54508\ a^3 = R^3(50/9\sqrt{15} + 110/9\ \sqrt{3}) \approx 42{,}6860840158\ R^3$
$V = \rho^3\ (70 - 30\ \sqrt{5}) \approx 2{,}91796067502\ \rho^3$

Großes Sterndodekaeder - Koordinaten





Eckpunktkoordinaten

	x	y	z
P0	$-1/10\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	0	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P1	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$-(\sqrt{5}+1)/4$	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P2	$1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$-1/2$	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P3	$1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$1/2$	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P4	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P5	$-1/5\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	0	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P6	$-1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	$-(3+\sqrt{5})/4$	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P7	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$	$-(\sqrt{5}+1)/4$	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P8	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P9	$-1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	$(3+\sqrt{5})/4$	$-1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P10	$1/5\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	0	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P11	$1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	$(3+\sqrt{5})/4$	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P12	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P13	$-1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$	$(-\sqrt{5}-1)/4$	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P14	$1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	$(-3-\sqrt{5})/4$	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$
P15	$1/10\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	0	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P16	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P17	$-1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$1/2$	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$

P18	$-1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$-1/2$	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$
P19	$1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$(-\sqrt{5}-1)/4$	$1/20\cdot\sqrt{(250+110\cdot\sqrt{5})}$

Kleines Sterndodekaeder

Das kleine Sterndodekaeder (nach Cayley) oder zwölfeckige Sternzwölfflach (nach Wiener) besitzt als Seiten zwölf kongruente regelmäßige Sternfünfecke, die zu je fünfen an jeder Ecke zusammentreffen. Das zugehörige Schläfli-Symbol ist $\{5/2, 5\}$. Insgesamt haben wir

12 Seiten vom Typ 5/2, 30 Kanten, 12 Ecken vom Typ 5.

Wythoff-Symbol: $5 \mid 2\,{}^5/_2$, Dieder-Winkel $\arccos(-\sqrt{5}/5)\ (5)/5) \approx 116{,}56505°$

Die Eckpunkte stimmen mit den Eckpunkten des Ikosaeders überein. Zur Konstruktion des kleinen Sterndodekaeders beginnt man daher mit den zwölf Eckpunkten des Ikosaeders.

Die 30 Kanten entstehen durch Verbinden einer Ecke mit den fünf der Ecke nächstliegenden Eckpunkten. Je fünf dieser Kanten liegen in einer Ebene senkrecht zu einer Eckpunkt-Eckpunkt-Achse des Ikosaeders und bilden in dieser Ebene ein reguläres Sternfünfeck.

Diese Sternfünfecke sind die Seiten des kleinen Sterndodekaeders. Die Symmetriegruppe entspricht der Ikosaeder-Gruppe A_5. Die Euler-Charakteristik ist -6.

Der Umkugelradius dieses Sternpolyeders beträgt, wenn die Seitenlänge der Fünfecke am Grund einer "Spitze" gleich a ist:

$$R = \sqrt[4]{5} / 4 \sqrt{(2 \sqrt{5} - 2)}\ a \approx 0{,}587785\ a$$

Mittelkugelradius $\rho = a/4\ (\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}30901699\ a$

Inkugelradius $r = \sqrt{(10\ (5-\sqrt{5}))}/20\ a \approx 0{,}26286556\ a$

Die Höhe der Spitzen; auf einem Dodekaeder der Seitenlänge a errichtet, ist

$$h = \sqrt{(1 + 2/5 \sqrt{5})}\ a \approx 1{,}37638\ a$$

Oberfläche $A = 15 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})}\ a^2 \approx 46{,}1652\ a^2$

Volumen $V = 5/4\ (7 + 3 \sqrt{5})\ a^3 \approx 17{,}1352\ a^3$

Strecke von einem "Dodekaederpunkt" zur nächsten "Pyramidenspitze" = Pyramidenkante

$$\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}\ a/2 \approx 1{,}53884\ a$$

Kleines Sterndodekaeder, Kepler-Stern

Berechnungen am kleinen Sterndodekaeder mit Umkugelradius R, Mittelkugelradius ρ, Kantenlänge a, Höhe der Pyramiden h, Oberfläche A und Volumen V:

Kantenlänge a $a = R \sqrt{(2/5 \sqrt{5} + 2)} \approx 1{,}70130161670\ R = \rho\ (\sqrt{5} + 1) \approx 3{,}23606797749\ \rho$

$a = r \sqrt{(2 \sqrt{5} + 10)} \approx 3{,}80422606518\ r = h \sqrt{(5 - 2 \sqrt{5})} \approx 0{,}726542528006\ h$

$a = \sqrt{A}\ \sqrt[4]{(1/225 - 2/1125 \sqrt{5})} \approx 0{,}147177828093 \sqrt{A}$

$a = \sqrt[3]{V}\ \sqrt[3]{(7/5 - 3/5 \sqrt{5})} \approx 0{,}387885141322 \sqrt[3]{V}$

Umkugelradius $R = \sqrt[4]{5} / 4 \sqrt{(2 \sqrt{5} - 2)}\ a \approx 0{,}587785\ a = \rho \sqrt{(\sqrt{5}/2 + 5/2)} \approx 1{,}90211303259\ \rho$

$R = \sqrt{5}\ r \approx 2{,}23606797749\ r$

Mittelkugelradius $\rho = a/4\ (\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}30901699\ a = R \sqrt{(1/2 - \sqrt{5}/10)} \approx 0{,}525731112119\ R$

$\rho = r \sqrt{(5/2 - \sqrt{5}/2)} \approx 1{,}17557050458\ r$

Inkugelradius $r = \sqrt{(10\ (5-\sqrt{5}))}/20\ a \approx 0{,}26286556\ a = \sqrt{5}/5\ R \approx 0{,}447213595499\ R$

$r = \rho \sqrt{(\sqrt{5}/10 + 1/2)} \approx 0{,}850650808351\ \rho$

Höhe der Pyramiden $h = \sqrt{(1 + 2/5 \sqrt{5})}\ a \approx 1{,}37638\ a$

Oberfläche $A = 15 \sqrt{(5+2 \sqrt{5})}\ a^2 \approx 46{,}1652\ a^2 = R^2 \sqrt{(3960 \sqrt{5} + 9000)} \approx 133{,}621963729\ R^2$

$A = \rho^2 \sqrt{(52200 \sqrt{5} + 117000)} \approx 483{,}448806416\ \rho^2$

$A = r^2 \sqrt{(99000 \sqrt{5} + 225000)} \approx 668{,}109818646\ r^2$

Volumen $V = 5/4\ (7+3 \sqrt{5})\ a^3 \approx 17{,}1352\ a^3 = R^3 \sqrt{(1592 \sqrt{5} + 3560)} \approx 84{,}3790271345\ R^3$

$V = \rho^3\ (130 \sqrt{5} + 290) \approx 580{,}688837074\ \rho^3 = r^3 \sqrt{(199000 \sqrt{5} + 445000)} \approx 943{,}386202741\ r^3$

Kleines Sterndodekaeder

Das Sternpolyeder (franz. petit dodécaèdre étoilé) hat 12 Ecken (N_0), 30 Kanten (N_1) und 12 Seitenflächen (N_2). Damit gilt:

$$N_0 - N_1 + N_2 = -6$$

Damit erfüllt dieses nicht konvexe Polyeder nicht die Eulersche Polyederformel. Das kleine Sternpolyeder hat das Geschlecht 4.

Nur das kleine Sterndodekaeder und das große Dodekaeder erfüllen als regelmäßige Polyeder die Eulersche Formel nicht.

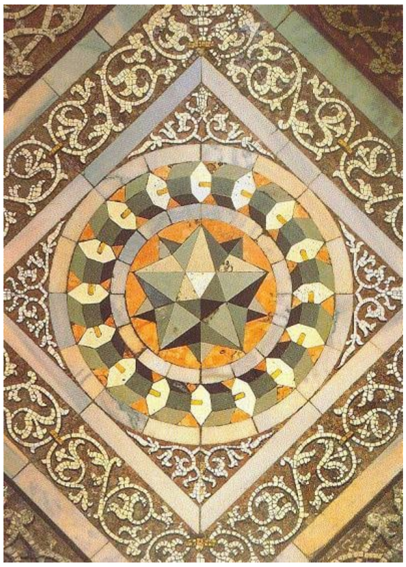
Das kleine Sterndodekaeder ist eines der vier möglichen Sternkörperbildungen aus dem Dodekaeder. Erstmals wurde es von Johannes Kepler beschrieben und von ihm Igelkörper genannt. Dieses Kepler-Poinsot-Polyeder ist das uniforme Polyeder U_{34}. Das duale Polyeder ist das große Dodekaeder.

Eckpunktkoordinaten

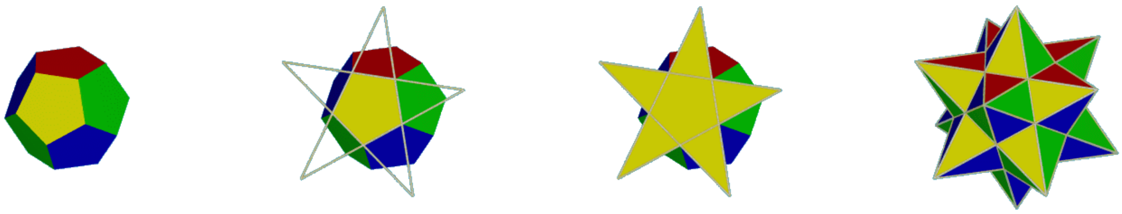
	x	y	z
P0	$\sqrt{3}/3$	0	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P1	$-\sqrt{3}/6$	$1/2$	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P2	$-\sqrt{3}/6$	$-1/2$	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$

P3	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$	$-(\sqrt{5}+1)/4$	$-(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P4	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/6$	0	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P5	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$-(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P6	$\sqrt{3}/6$	-1/2	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P7	$\sqrt{3}/6$	1/2	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P8	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P9	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/6$	0	$(-\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$
P10	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$	$(-\sqrt{5}-1)/4$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P11	$-\sqrt{3}/3$	0	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$

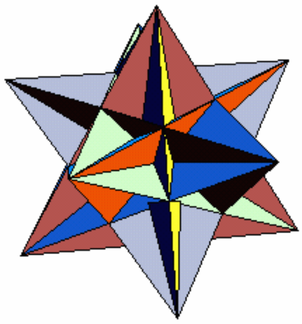
Das kleine Sterndodekaeder, das schönste Polyeder aller Zeiten :-), wurde auch von Künstlern in verschiedenen Werken genutzt. Eines der berühmtesten ist "Gravitation" von dem niederländischen Grafiker M.C.Escher.
Die 29,7 × 29,7 cm große Lithografie wurde 1952 zuerst schwarz-weiß gedruckt, später mit Wasserfarben nachkoloriert.
Jede Seite des Sterndodekaeders hat eine halbrechteckige Tür. Aus diesen Türen ragen die Füße von 12 Schildkröten, die das Sterndodekaeder als gemeinsamen Panzer benutzen. Die Schildkröten sind in sechs verschiedenen Farben entgegengesetzt dargestellt.
Abbildung: Kleines Sterndodekaeder in San Marco



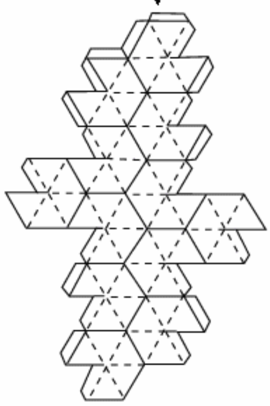
Entstehung des Sterndodekaeders aus einem Dodekaeder



Großes Ikosaeder (Zwanzigeckiges Sterndodekaeder)



Kepler konstruierte zwei weitere Polyeder, die Poinsotschen pentagonalen Polyeder, deren Seiten konvexe Vielecke sind, deren Eckfiguren jedoch sternförmig sind.
Das große Ikosaeder (nach Cayley, franz. grand icosaèdre) oder sterneckige Zwanzigflach (nach Wiener) besitzt als Seiten 20 kongruente regelmäßige Dreiecke, die zu je fünfen an jeder Ecke gemäß einem regulären Sternfünfeck zusammenstoßen.
Das Schläfli-Symbol ist hier {3, 5/2}. Das Polyeder hat
20 Seiten vom Typ {3}, 30 Kanten, 12 Ecken vom Typ {5/2}
und die Euler-Charakteristik 2.



Die Ecken und Kanten fallen mit denen des kleinen Sterndodekaeders {5/2,5} zusammen. Je drei der Kanten liegen in einer Ebene parallel zu einer Seitenebene des von den Ecken gebildeten Ikosaeders und bilden dort ein regelmäßiges Dreieck.
Für eine Kantenlänge von a der erzeugenden Dodekaeders ergibt sich

Kantenlänge s_1	$s_1 = 1/5 \sqrt{10}\, a \approx 0{,}632455\, a$
Kantenlänge s_2	$s_2 = a$
Kantenlänge s_3	$s_3 = 1/2\, (1 + \sqrt{5})\, a \approx 1{,}61803\, a$
Kantenlänge s_4	$s_4 = \sqrt{(1/5\, (7 + 3 \sqrt{5}))}\, a \approx 1{,}65578\, a$
Umkugelradius	$R = 1/2 \sqrt{(1/2\, (25 + 11 \sqrt{5}))}\, a \approx 2{,}48989\, a$
Mittelkugelradius	$\rho = a/4\, (1 + \sqrt{5}) \approx 0{,}80902\, a$
Oberfläche	$A = 3 \sqrt{3}\, (5 + 4 \sqrt{5})\, a^2 \approx 72{,}4565\, a^2$
Volumen	$V = 1/4\, (25 + 9 \sqrt{5})\, a^3 \approx 11{,}2811\, a^3$

Berechnungen am großen Ikosaeder mit Umkugelradius R, Mittelkugelradius ρ, Kantenlänge a des erzeugenden Dodekaeders, Oberfläche A und Volumen V:

Kantenlänge a $a = R \sqrt{10 - 22/5 \sqrt{5}} \approx 0{,}4016228317\ R = \rho (\sqrt{5} - 1) \approx 1{,}236067977\ \rho$

$a = \sqrt{A} \sqrt{4/495 \sqrt{15} - 1/99 \sqrt{3}} \approx 0{,}1174792424 \sqrt{A}$

$a = \sqrt[3]{V} \sqrt[3]{5/11 - 9/55 \sqrt{5}} \approx 0{,}4458774453 \sqrt[3]{V}$

$a = 1/2 \sqrt{10}\ s_1 \approx 1{,}581138830\ s_1 = 1/2 (\sqrt{5} - 1)\ s_3 \approx 0{,}6180339887\ s_3$

$a = 1/4 (3 \sqrt{10} - 5 \sqrt{2})\ s_4 \approx 0{,}6039412921\ s_4$

Umkugelradius $R = 1/2 \sqrt{1/2 (25 + 11 \sqrt{5})}\ a \approx 2{,}48989\ a = \rho \sqrt{2 \sqrt{5} + 5} \approx 3{,}077683537\ \rho$

$R = \sqrt{A} \sqrt{19/792 \sqrt{3} + 1/88 \sqrt{15}} \approx 0{,}2925113644 \sqrt{A}$

Mittelkugelradius $\rho = a/4 (1 + \sqrt{5}) \approx 0{,}80902\ a = R \sqrt{1 - 2/5 \sqrt{5}} \approx 0{,}3249196962\ R$

$\rho = \sqrt{A} \sqrt{7/3960 \sqrt{15} - 1/792 \sqrt{3}} \approx 0{,}09504270366 \sqrt{A}$

Oberfläche $A = 3 \sqrt{3} (5 + 4 \sqrt{5})\ a^2 \approx 72{,}4565\ a^2 = R^2 (54 \sqrt{15} - 114 \sqrt{3}) \approx 11{,}68730863\ R^2$

$A = \rho^2 (42 \sqrt{15} - 30 \sqrt{3}) \approx 110{,}7037763\ \rho^2$

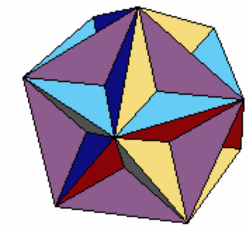
Volumen $V = 1/4 (25 + 9 \sqrt{5})\ a^3 \approx 11{,}2811\ a^3 = R^3 \sqrt{5800 - 12968/5 \sqrt{5}} \approx 0{,}7308170830\ R^3$

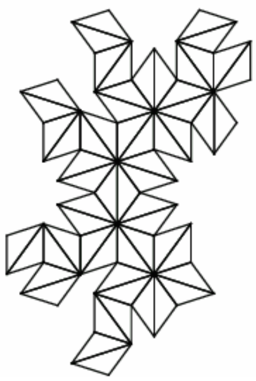
$V = \rho^3 (14 \sqrt{5} - 10) \approx 21{,}30495168\ \rho^3$

Großes Ikosaeder - Koordinaten

Eckpunktkoordinaten

	x	y	z
P0	$\sqrt{3}/3$	0	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P1	$-\sqrt{3}/6$	1/2	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P2	$-\sqrt{3}/6$	-1/2	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P3	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$	$-(\sqrt{5}+1)/4$	$-(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P4	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/6$	0	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P5	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$-(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P6	$\sqrt{3}/6$	-1/2	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P7	$\sqrt{3}/6$	1/2	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P8	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P9	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/6$	0	$(-\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$
P10	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$	$(-\sqrt{5}-1)/4$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P11	$-\sqrt{3}/3$	0	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$





Großes Dodekaeder (Zwölfflächiges Sterndodekaeder)

Das große Dodekaeder nach Cayley (franz. grand dodécaèdre) oder das sterneckige Zwölfflach (nach Wiener) besitzt zwölf reguläre Fünfecke als Seiten, die zu je fünf an jeder Ecke gemäß einem Sternfünfeck zusammenkommen.
Das Schläfli-Symbol ist 5, 5/2, das Wythoff-Symbol 5/2 | 2 5 und außerdem

12 Seiten vom Typ {5},
30 Kanten,
12 Ecken vom Typ {5/2}.

Die Ecken und Kanten des großen Dodekaeders sind die eines Ikosaeders. Je fünf der Kanten liegen in einer Ebene orthogonal zu einer Eckpunkt-Eckpunkt-Achse des Ikosaeders und bilden dort ein reguläres Fünfeck. Die Euler-Charakteristik ist -6.

Umkugelradius bei Kantenlänge a

$R = 1/4\ 5^{1/4} \sqrt{2 (1+ \sqrt{5})}\ a \approx 0{,}951056\ a$

$R = a/4 \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}} \approx 0{,}951056\ a$

Mittelkugelradius $\rho = a/4 (1 + \sqrt{5}) \approx 0{,}809017\ a$

Inkugelradius r_5 $r_5 = a/20 \sqrt{50 + 10 \sqrt{5}} \approx 0{,}4253254\ a$

Der Körper kann aus einem Ikosaeder der Kantenlänge a konstruiert werden, in dem auf jede Fläche eine Pyramide mit der negativen(!) Höhe

$h = - \sqrt{(7 - 3\sqrt{5}) / 6}\ a \approx -0{,}220528\ a$

aufgesetzt wird. Der Körper hat dann Volumen $V = 5/4 (\sqrt{5} - 1)\ a^3 \approx 1{,}54508\ a^3$

Oberfläche $A = 15 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\ a^2 \approx 10{,}8981\ a^2$

Dieses Sternpolyeder (nicht konvex!) erfüllt nicht den Eulerschen Polyedersatz

$e - k + f = 12 - 30 + 12 = -6$

Berechnungen am großen Dodekaeder mit Umkugelradius R, Mittelkugelradius ρ, Inkugelradius r_5, Kantenlänge a, Oberfläche A und Volumen V:

Kantenlänge a $a = R \sqrt{2 - 2/5 \sqrt{5}} \approx 1{,}051462224\ R = \rho (\sqrt{5} - 1) \approx 1{,}236067977\ \rho$

$a = r \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}} \approx 2{,}351141009\ r = \sqrt[3]{\sqrt{5}/5 + 1/5} \sqrt[3]{V} \approx 0{,}8649995413 \sqrt[3]{V}$

$a = \sqrt[4]{2/1125 \sqrt{5} + 1/225} \sqrt{A} \approx 0{,}3029171416 \sqrt{A}$

Umkugelradius $R = a/4 \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}} \approx 0{,}951056\ a = \rho \sqrt{5/2 - \sqrt{5}/2} \approx 1{,}175570504\ \rho$

$R = r \sqrt{5} \approx 2{,}236067977\ r$

Mittelkugelradius $\rho = a/4 (1 + \sqrt{5}) \approx 0{,}809017\ a = R \sqrt{\sqrt{5}/10 + 1/2} \approx 0{,}8506508083\ R$

$\rho = r \sqrt{\sqrt{5}/2 + 5/2} \approx 1{,}902113032\ r$

Inkugelradius $r = r_5$ $r = a/20 \sqrt{50 + 10 \sqrt{5}} \approx 0{,}4253254\ a = \sqrt{5}/5\ R \approx 0{,}4472135954\ R$

$r = \rho \sqrt{1/2 - \sqrt{5}/10} \approx 0{,}5257311121\ \rho$

Volumen $V = 5/4 (\sqrt{5} - 1)\ a^3 \approx 1{,}54508\ a^3 = \sqrt{200 - 88 \sqrt{5}}\ R^3 \approx 1{,}796111906\ R^3$

$V = (70 - 30 \sqrt{5})\ \rho^3 \approx 2{,}917960675\ \rho^3 = \sqrt{25000 - 11000 \sqrt{5}}\ r^3 \approx 20{,}08114158\ r^3$

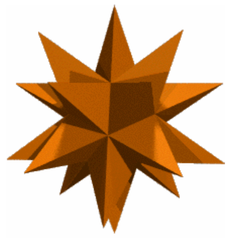
Oberfläche $A = 15 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\ a^2 \approx 10{,}8981\ a^2 = \sqrt{9000 - 3960 \sqrt{5}}\ R^2 \approx 12{,}04868495\ R^2$

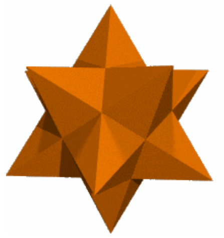
$A = \sqrt{117000 - 52200 \sqrt{5}}\ \rho^2 \approx 16{,}65087308\ \rho^2 = \sqrt{225000 - 99000 \sqrt{5}}\ \rho^2 \approx 60{,}24342476\ r^2$

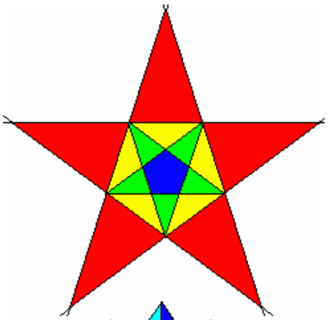
Großes Dodekaeder - Koordinaten

Eckpunktkoordinaten

	x	y	z
P0	$\sqrt{3}/3$	0	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P1	$-\sqrt{3}/6$	1/2	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P2	$-\sqrt{3}/6$	-1/2	$-(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P3	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$	$-(\sqrt{5}+1)/4$	$-(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P4	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/6$	0	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P5	$(\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$-(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P6	$\sqrt{3}/6$	-1/2	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P7	$\sqrt{3}/6$	1/2	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$
P8	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P9	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/6$	0	$(-\sqrt{15}+\sqrt{3})/12$
P10	$(-\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$	$(-\sqrt{5}-1)/4$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})/12$
P11	$-\sqrt{3}/3$	0	$(\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{3})/12$







Pentagonale Polyeder

Nach Coxeter gehören zu den sogenannten pentagonalen (regelmäßigen) Polyedern

Platonische Körper

Ikosaeder
Pentagondodekaeder

Sternpolyeder

großes Sterndodekaeder (Abbildung)
kleines Sterndodekaeder (Abbildung)
großes Ikosaeder
großes Dodekaeder

Als pentagonale Polyeder werden diese bezeichnet, da alle diese Körper eine zur Ikosaedergruppe, d.h. die Gruppe aller Rotationen, die ein Ikosaeder in sich überführen, isomorphe Symmetriegruppe besitzen.
Diese Symmetriegruppen sind gerade mit der Gruppe A_5 der geraden Vertauschungen von fünf Objekten identisch.

Sternkörpererzeugung

Sternkörper (engl. stellations) können aus einigen regelmäßigen und halbregelmäßigen Polyeder konstruiert werden.
Während aus für das Tetraeder und Hexaeder keinen Sternkörper gibt, das Oktaeder nur einen besitzt, Kepler's Stella Octangula, ein Verbund zweier Tetraeder, existieren für das Ikosaeder und Dodekaeder eine Vielzahl Sternkörper.
Ausgehend vom regelmäßigen Fünfeck als Seitenfläche (blau) des Dodekaeders werden auf dessen Kanten im 1.Schritt Dreiecke (grün) gesetzt, im 2.Schritt wieder das Fünfeck (gelb) ergänzt und im 3.Schritt Dreiecke (rot) aufgesetzt.

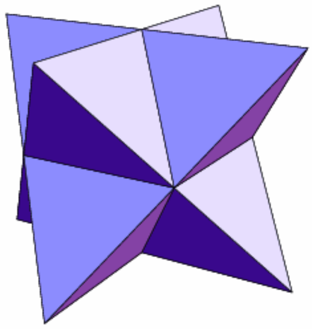
Ersetzt man am Dodekaeder alle Seitenflächen durch die Pentagramme des 1.Schrittes (blau+grün), so entsteht ein Sternkörper, das kleine Sterndodekaeder Keplers (2.Abbildung).
Ersetzt man mit den Flächen des 2.Schrittes, ergibt sich das große Dodekaeder von Poinsot, im 3.Schritt das große Sterndodekaeder, welches wieder von Kepler entdeckt wurde.
Das Verfahren bricht hier ab. Außer den drei genannten gibt es für das Dodekaeder keine weiteren Sternkörper.

Dodekaedersterne

Die Polyeder, die beim Aufsetzen gerader Pyramiden auf die Seiten des Dodekaeders entstehen, bestehen; mit Ausnahme des Rhombendreißigflächners bzw. Rhombentriakontaeder (Abbildung); aus sechzig kongruenten Dreiecken.
Sie besitzen 20 Ecken, an denen 6 Flächen aufeinandertreffen, und 12 Ecken, an denen 5 Flächen aufeinandertreffen.

Körper, die bei einer bestimmten Pyramidenhöhe h entstehen, sind konvex, alle anderen sind konkav.

Bei der Höhe h befinden sich jeweils 2 Seitenflächen benachbarter Pyramiden auf einer Ebene und ergänzen einander zu einer einzigen Fläche: es entsteht der Rhombendreißigflächner.
Weitere Sonderfälle sind der gleichseitige Dodekaederstern, bei dem alle Kanten gleich lang sind, und Keplers Dodekaederstern, bei dem die Kanten der Pyramiden Fortsetzungen der Kanten des zu Grunde gelegten Dodekaeders sind.



Stella Octangula

Das Sterntetraeder, auch Sternkörper des Oktaeders oder achteckiger Keplerstern, ist ein achtstrahliger Stern und gehört zu den nicht-konvexen Deltaedern.
Der selbst-duale Körper hat 8 Dreiecke als Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken, sowie die Euler-Charakteristik 4. Die Symmetriegruppe ist die des Oktaeders.
Es handelt sich um einen vielflächigen Körper, der durch Verschmelzung zweier punktsymmetrischer Tetraeder entsteht. Benannt wurde das Polyeder durch Johannes Kepler im Jahr 1609, Es ist sowohl das einfachste reguläre zusammengesetzte Polyeder als auch das einfachste nicht-konvexe gleichmäßige Polyeder. Erstmals findet sich eine Darstellung in Paciolis "Divina Proportione" von 1509. Dieser nannte den Körper "Octaedron elevatum".

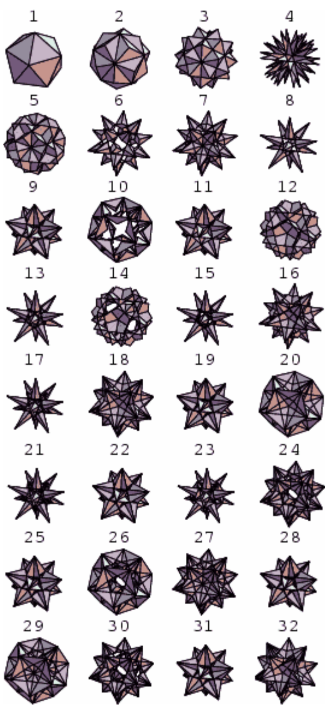
Die äußeren Eckpunkte des Körpers, die konvexe Hülle, beschreiben einen Würfel, während die Schnittmenge der beiden Tetraeder ein Oktaeder darstellt, dessen Kanten wiederum die Innenkanten des Sterntetraeders darstellen.
Für ein Tetraeder der Kantenlänge a hat das Sterntetraeder die Kantenläge a/2. Weiterhin ist dann
Oberfläche $A = 3/2 \sqrt{3}\, a^2$
Volumen $V = 1/8 \sqrt{2}\, a^3$

Durch den Grafiker M.C.Escher wurde das Sterntetraeder als Motiv für das Bild "Doppelplanetoid" verwendet: Ein Tetraeder hat die Form einer von Menschen bewohnten Burg, während das andere eine mit dem ersten durchdrungene, von Dinosauriern bewohnten Welt darstellt.
Das Stella Octangula-Polyeder hat 8 Ecken und 8 gleichseitige Dreiecke als Flächen sowie 12 gleich lange Kanten. Dieder-Winkel: arccos 1/3 ≈ 70,528779°.

Hat die Kante die Länge a, so wird

3er-Kugelradius	$r_3 = \sqrt{6}/4\, a \approx 0{,}612372436\, a$
flächentangierender Kugelradius	$r_f = 0{,}204124145\, a$
eckentangierender Kugelradius	$r_e = 0{,}353553391\, a$
Volumen	$V = \sqrt{2}/8\, a^3 \approx 0{,}176776695\, a^3$

Eckpunktkoordinaten des Polyeders
Hilfsgröße: C0 = 0,353553391 = √2/4
(C0, C0, C0), (C0, C0, -C0), (C0, -C0, C0), (C0, -C0, -C0), (-C0, C0, C0), (-C0, C0, -C0), (-C0, -C0, C0), (-C0, -C0, -C0)

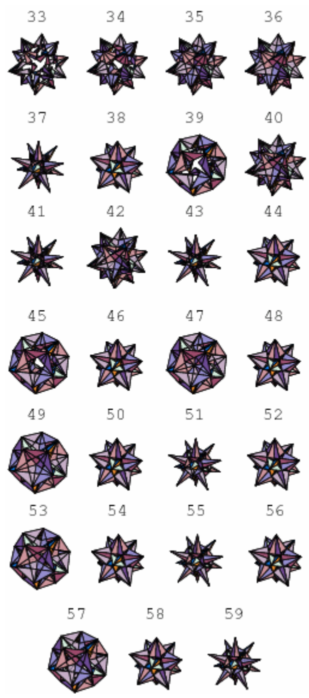


Flächen:
{2, 1, 4}, {2, 4, 7}, {2, 7, 1}, {1, 7, 4}, {0, 3, 5}, {0, 5, 6}, {0, 6, 3}, {3, 6, 5}

Ikosaedersterne, Sternikosaeder

Ausgehend vom Ikosaeder (Nr. 1) können insgesamt 58 sogenannte Ikosaedersterne konstruiert werden, von denen links 31 zu sehen sind.
32 dieser Körper haben die gleiche Symmetriegruppe wir das Ikosaeder.
Sternkörper mit einem Eigennamen sind

Nr.	Körper
2	kleines triambisches Ikosaeder, 2.Ikosaederstern B
3	Oktaeder-5-Verbund, 3.Ikosaederstern C
4	Echidnaeder, 8.Ikosaederstern H
11	großes Ikosaeder, 7.Ikosaederstern G, Kepler-Sternpolyeder
13	mittleres triambisches Ikosaeder
15	großes triambisches Ikosaeder
18	Tetraeder-10-Verbund, 22.Ikosaederstern Ef1



32 Tetraeder-5-Verbund E(f1), 47.Ikosaederstern

Zur vollständigen Liste siehe
http://mathworld.wolfram.com/
IcosahedronStellations.html

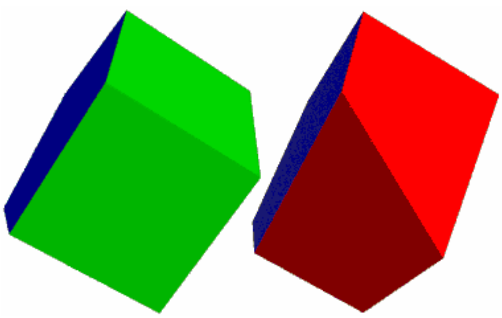
Echidnaeder, Vollständiges Ikosaeder
Das Echidnaeder oder vollständige Ikosaeder ist die Endkonfiguration der Sternkörperbildung eines Ikosaeders.

Das Polyeder ist das 42.Wenninger-Polyeder und dort der 17.Sternkörper des Ikosaeders. In Coxeters Buch "The fifty nine icosahedra" wird der Körper als 8. der 59 möglichen Sternkörper bezeichnet bzw. Ikosaederstern H.
Die Bezeichnung Echidnaeder bezieht sich auf den australischen Ameisenigel, der auch Echidna genannt wird.

Das nichtkonvexe Polyeder besteht aus 180 Dreiecksflächen mit 270 Kanten und 92 Ecken. Die Ecken liegen auf drei konzentrischen Kreisen. Die Radien dieser Kreise verhalten sich wie
$\sqrt{3/2\,(3 + \sqrt{5})} : \sqrt{1/2\,(25 + 11\sqrt{5})} : \sqrt{1/2\,(97 + 43\sqrt{5})}$
Die 20 Ecken der inneren Kugel bilden eine regelmäßiges Dodekaeder, die nächsten 12 Ecken der mittleren Kugel ein Ikosaeder und die 60 verbleibenden Ecken der äußeren Kugel ein abgestumpftes Ikosaeder.
Hat die kürzeste Kante die Länge a, so sind die anderen Kanten ϕ a, ϕ^2 a und $\phi^2 \sqrt{2}$ a lang. Dann gilt:

Radius R_{12}	$R_{12} = \sqrt{3/2\,(3 + \sqrt{5})}\, a \approx 2{,}802517076\, a$
Radius R_{20}	$R_{20} = \sqrt{1/2\,(25 + 11\sqrt{5})}\, a \approx 4{,}979796569\, a$
Radius R_{60}	$R_{60} = \sqrt{1/2\,(97 + 43\sqrt{5})}\, a \approx 9{,}827281491\, a$
Oberfläche	$A = 1/20\,(13211 + \sqrt{174306161})\, a^2 \approx 1320{,}675293\, a^2$
Volumen	$V = (210 + 90\sqrt{5})\, a^3 \approx 411{,}2461179\, a^3$

Quasireguläre Polyeder
Definition:
Ein (nicht notwendig) konvexes Polyeder heißt quasiregulär, wenn seine Oberfläche aus regelmäßigen n-Ecken und m-Ecken besteht, so dass jedes n-Eck von lauter m-Ecken umgeben ist und umgekehrt.
Dann gibt es genau die folgenden drei konvexen quasiregulären Polyeder:
das Oktaeder (3,3,3,3), das also bereits regulär ist,
das Kuboktaeder (3,4,3,4), also ein halbreguläres Polyeder, und
das Ikosidodekaeder (3,5,3,5), also ebenfalls ein halbreguläres Polyeder.
Betrachtet man auch nicht-konvexe Körper, so kommen noch die folgenden fünf quasiregulären Polyeder hinzu:
Großes Ikosidodekaeder (3,5/2,3,5/2), Großes Dodekadodekaeder (5,5/2,5,5/2),
Kleines ditrigonales Ikosidodekaeder (5/2,3,5/2,3,5/2,3),
Ditrigonales Dodekadodekaeder (5/3,5,5/3,5,5/3,5),
Großes ditrigonales Ikosidodekaeder (3,5,3,5,3,5).



Halbreguläre Prismen und Antiprismen
Die halbregulären Prismen besitzen zwei kongruente n-Ecke als Boden- und Deckfläche. Die n Seitenflächen sind jeweils Quadrate von derselben Seitenlänge wie die n-Ecke.
Für n=4 entsteht hierbei nochmals der Würfel.

Die halbregulären Antiprismen besitzen ebenfalls zwei kongruente n-Ecke als Boden- und Deckfläche.
Im Unterschied zum Prisma sind beide Flächen aber um einen Winkel von 180/n Grad gegeneinander verdreht. Die n Seitenflächen sind jetzt jeweils gleichseitige Dreiecke. Für n=3 entsteht hierbei nochmals das Oktaeder.
Auch die Antiprismen besitzen mit einer umschreibenden Kugel jeweils einen dualen Körper. Dabei handelt es sich um Trapezoeder.
Da die halbregulären Prismen wie die Archimedischen Körper eine umschreibende Kugel besitzen, haben sie ebenso wie diese Körper jeweils einen dualen Körper. Dabei handelt es sich um halbreguläre Dipyramiden.

Da die Grundfläche des Prismas ein n-Eck der Fläche $F = n \cdot a^2/(4 \cdot \tan(\pi/n))$ ist und seine Höhe die Länge a hat, gilt für sein Volumen $V = a \cdot F = n \cdot a^3/(4 \cdot \tan(\pi/n))$.

Die Oberfläche des Prismas besteht aus zwei regelmäßigen n-Ecken der Fläche $A = n \cdot a^2/(4 \cdot \tan(\pi/n))$ und n Quadraten. Also gilt $O = 2 \cdot F + n \cdot a^2 = n \cdot a^2 \cdot (1 + 1/(2 \cdot \tan(\pi/n)))$.
Zur Bestimmung des Radius R der umschreibenden Kugel eines n-seitigen Prismas der Kantenlänge a legt man eine Schnittebene durch das Zentrum Z, eine Ecke E und den Mittelpunkt M eines der beiden n-Ecke des Prismas.
In dem rechtwinkligen Dreieck ZME ist ME der Umkreisradius des n-Ecks, also $r = a/(2 \cdot \sin(\pi/n))$, ZM die halbe Höhe des Prismas, also a/2, und ZE = R.
Also gilt nach dem Satz des Pythagoras: $R^2 = r^2 + a^2/4$ und damit $R = a/2 \cdot \sqrt{1 + 1/\sin^2(\pi/n)}$

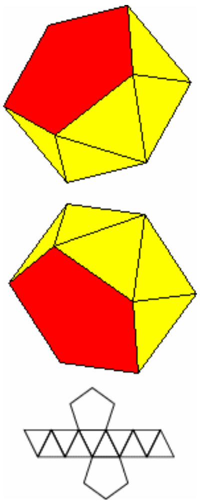
Da die halbregulären Prismen wie die Archimedischen Körper eine umschreibende Kugel besitzen, haben sie ebenso wie diese Körper jeweils einen dualen Körper. Dabei handelt es sich um halbreguläre Dipyramiden.

Dipyramiden

Eine halbreguläre oder Archimedische Dipyramide entsteht, wenn man zwei kongruente regelmäßige m-seitige Pyramiden mit ihren Grundflächen aneinandersetzt.
Sie hat m + 2 Ecken, wovon 2 die Valenz m und alle anderen die Valenz 4 besitzen. Weiterhin hat sie 3m Kanten und 2m Flächen, die gleichschenklige, untereinander kongruente Dreiecke sind.

In den speziellen Fällen m = 3, 4, 5 ist es möglich, die Dreiecke sogar gleichseitig zu wählen. Man erhält dann drei der Deltaeder. Eine 2m-flächige Dipyramide ist auch der zum m-seitigen halbregulären Prisma duale Körper.
Quelle: http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/dipyra.html

In der Abbildung ist ein Zirkon-Kristall Zr[SiO4] zu sehen (Insel Seiland, Norwegen). Dieser Kristall besteht in der Mitte aus einem tetragonalem Prisma, auf das jeweils zwei tetragonale Dipyramiden aufgesetzt sind.
Ein weiteres Kristall ist Dipyramidenform ist Hausmannit. Dieses, 1813 entdeckt, besteht nicht aus Oktaedern, sondern aus gleichschenkligen vierseitigen Pyramiden, Dipyramiden.



Antiprisma

Antiprismen sind halbreguläre Polyeder die aus zwei regelmäßigen n-Ecken und 2n Dreiecken konstruiert werden. Die kongruenten Grund- und Deckfläche sind um 180°/n gegeneinander verdreht. Die zu den Antiprismen dualen Körper sind Trapezoeder.
In der Abbildung ist ein 5-seitiges Antiprisma in Zweitafelprojektion und dessen Netz zu sehen.
Höhe des n-seitigen Antiprismas: $h = \sqrt{1 - 1/4 \sec^2 (\pi / (2n))}$
und bei einer Kantenlänge a $h = a/2 \sqrt{3 - \tan^2 (\pi / (2n))}$
Für ein Antiprisma der Höhe h und dem Umkreis der Grundfläche r ergibt sich ein Umkugelradius des Körpers zu $R = \sqrt{h^2 / 4 + r^2}$
und bei einer Kantenlänge a und der Kantenzahl n
$$R = a/2 \cot (\pi / (2n)) \sqrt{1 + 5 \tan^2 (\pi / (2n))}$$
Ein Antiprisma besitzt eine Mittelkugel die durch Kantenmittelpunkte der Grund- und Deckfläche verläuft
$$\rho = a/4 \cot (\pi / (2n)) \sqrt{1 + \tan^2 (\pi / (2n))}$$
Eine Inkugel, die alle Flächen berührt existiert nicht. Allerdings kann man eine Inkugel mit dem Radius r_3 betrachten, die die Dreiecksflächen berührt, und eine zweite mit dem Radius r_n, die Grund- und Deckfläche tangiert.
$$r_3 = h/6 \sqrt{3} \cot (\pi / (2n)) = a/12 \sqrt{3} \cot (\pi / (2n)) \sqrt{3 - \tan^2 (\pi / (2n))}$$
$$r_n = h/2 = a/4 \sqrt{3 - \tan^2 (\pi / (2n))}$$

Zur Bestimmung des Radius R der umschreibenden Kugel eines n-seitigen Prismas der Kantenlänge a legt man eine Schnittebene durch das Zentrum Z, eine Ecke E und den Mittelpunkt M eines der beiden n-Ecke des Prismas. Es wird $R^2 = r^2 + a^2/4$ und damit $R = a/2 \cdot \sqrt{1 + 1/\sin^2(\pi/n)}$

Da die Grundfläche des Prismas ein n-Eck der Fläche $F = n \cdot a^2/(4 \cdot \tan(\pi/n))$ ist und seine Höhe die Länge a hat, gilt für sein Volumen $V = a \cdot F = n \cdot a^3/(4 \cdot \tan(\pi/n))$.
Die Oberfläche des Prismas besteht aus zwei regelmäßigen n-Ecken der Fläche $A = n \cdot a^2/(4 \cdot \tan(\pi/n))$ und n Quadraten. Also ist $A_O = 2 \cdot F + n \cdot a^2 = n \cdot a^2 \cdot (1 + 1/(2 \cdot \tan(\pi/n)))$.
Oberflächeninhalt $A = n/2\, a^2 [\cot (\pi/n) + \sqrt{3}]$
Volumen $V = n/12\, a^3 [\cot(\pi/(2n)) + \cot(\pi/n)] \sqrt{1 - 1/4 \sec^2(\pi/(2n))}$

Bei einer Kantenlänge von a eines Antiprismas gilt:

n	Höhe	Oberfläche
3	$1/3 \sqrt{6}\, a$	$2 \sqrt{3}\, a^2$
4	$\sqrt[4]{8}\, a/2$	$2 + 2 \sqrt{3}\, a^2$

5	$\sqrt{[1/10\ (5 + \sqrt{5})]}\ a$	$(5\sqrt{3} + \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})})/2\ a^2$
6	$\sqrt{(\sqrt{3} - 1)}\ a$	$6\sqrt{3}\ a^2$
8	$\sqrt{(\sqrt{(5 + 7/2\sqrt{2})}-1-\sqrt{2})}\ a$	$4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\ a^2$
10	$a\sqrt{(1/2\sqrt{(50 + 22\sqrt{5})} - \sqrt{5} - 2)}$	$(5\sqrt{3} + \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})})\ a^2$
12	$a\sqrt{(3/2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 5/2\sqrt{2} - 3)}$	$12(\sqrt{3} + 1)\ a^2$

n	Volumen
3	$1/3\sqrt{2}\ a^3$
4	$1/3\sqrt{(4 + 3\sqrt{2})}\ a^3$
5	$1/6\ (5 + 2\sqrt{5})\ a^3$
6	$\sqrt{(2 + 2\sqrt{3})}\ a^3$
8	$2/3\ a^3\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{(146 + 103\sqrt{2})} + \sqrt{2} + 2)} \approx 4{,}26795675\ a^3$
10	$5/6\ a^3\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{(650 + 290\sqrt{5})} - \sqrt{5} - 1)}$
12	$2a^3\sqrt{(7\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 5)}$

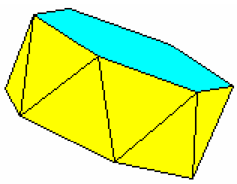
Dieder-Winkel an Antiprismen

Ein n-seitiges Antiprisma besteht 2n gleichseitigen Dreiecken und zwei n-Ecken als Grund- und Deckfläche. Die Dieder-Winkel zwischen den Seitenflächen ergeben sich durch
Dieder-Winkel Dreieck-Dreieck $\omega_{33} = \arccos(-(4\cos(\pi/n)-1)/3)$
Dieder-Winkel Dreieck-N-Eck $\omega_{n3} = \arccos(-\tan(\pi/(2n))\sqrt{3}/3)$

Für spezielle Antiprismen wird

3-seitiges Antiprisma (Oktaeder) $\omega_{33} = \arccos -1/3 \approx 109{,}471220634°$
4-seitiges Antiprisma $\omega_{33} = \arccos(-(2\sqrt{2}-1)/3) \approx 127{,}551602906°$
$\omega_{43} = \arccos(-(\sqrt{6} - \sqrt{3})/3) \approx 103{,}836160479°$
5-seitiges Antiprisma $\omega_{33} = \arccos -\sqrt{5}/3 \approx 138{,}189685104°$
$\omega_{53} = \arccos(-\sqrt{(15\ (5-2\sqrt{5}))/15}) \approx 100{,}812316964°$
6-seitiges Antiprisma $\omega_{33} = \arccos(-(2\sqrt{3}-1)/3) \approx 145{,}221891332°$
$\omega_{63} = \arccos(-(2\sqrt{3}-3)/3) \approx 98{,}899428880°$
8-seitiges Antiprisma $\omega_{33} = \arccos(-(2\sqrt{(2+\sqrt{2})}-1)/3) \approx 153{,}962382889°$
$\omega_{83} = \arccos(-\sqrt{(3\ (7+4\sqrt{2} -2\sqrt{(2\ (10+7\sqrt{2}))}))}/3) \approx 96{,}594518216°$
10-seitiges Antiprisma $\omega_{33} = \arccos(1/3 - \sqrt{(2/9\sqrt{5} + 10/9)}) \approx 159{,}186506673°$
$\omega_{83} = \arccos(\sqrt{(2/3\sqrt{5} + 5/2)} - \sqrt{15}/3 - \sqrt{3}/3)) \approx 95{,}246644476°$
7-seitiges Antiprisma $\omega_{33} \approx 150{,}222262672°$ $\omega_{73} \approx 97{,}572257567°$

Für den Winkel ω_{73} erhält man exakt arccos (-√(Lösung von [189 x³ - 315 x² + 63 x-1])) und für ω_{33} des siebenseitigen Antiprismas arccos (- Lösung von [27 x³ + 9 x² - 27 x-1])

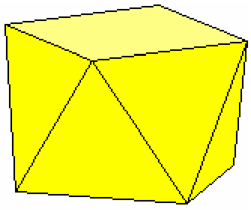


Kugeln am Antiprisma

Für regelmäßige Antiprismen mit der Kantenlänge a können eine Umkugel und eine Mittelkugel angegeben werden. Die Umkugel berührt alle Eckpunkte des Antirprismas, währen die Mittelkugel durch die Kantenmittelpunkte verläuft.
Eine Inkugel, die alle Flächen berührt, existiert nicht. Man betrachtet daher zwei Inkugeln, die eine berührt alle Dreiecksflächen, die andere Grund- und Deckfläche.
Für ein n-seitiges Antiprisma mit der Kantenlänge a gilt:

Umkugelradius	$R = a/4\cot(\pi/(2n))\sqrt{(1 + 5\tan^2(\pi/(2n)))}$
Mittelkugelradius	$\rho = a/4\cot(\pi/(2n))\sqrt{(1 + \tan^2(\pi/(2n)))}$
Inkugelradius (Dreiecke)	$r_3 = a/12\sqrt{3}\cot(\pi/(2n))\sqrt{(3 - \tan^2(\pi/(2n)))}$
Inkugelradius (N-Eck)	$r_n = a/4\sqrt{(3 - \tan^2(\pi/(2n)))} = h/2$

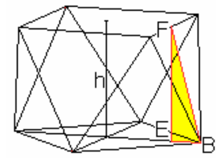
Kantenzahl	Umkugelradius	Mittelkugelradius
3	$a/2\sqrt{2}$	$a/2$
4	$a/4\sqrt{(8 + 2\sqrt{2})}$	$a/4\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})}$
5	$a/4\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$	$a/4\ (\sqrt{5} + 1)$
6	$a/2\sqrt{(3 + \sqrt{3})}$	$a/4\ (\sqrt{6} + \sqrt{2})$
8	$a/2\sqrt{(1/2\sqrt{(20+14\sqrt{2})} + \sqrt{2} + 3)}$	$a/2\sqrt{(1/2\sqrt{(20+14\sqrt{2})} + \sqrt{2} + 2)}$
10	$a/2\sqrt{(1/2\sqrt{(50+22\sqrt{5})} + \sqrt{5} + 4)}$	$a/2\sqrt{(1/2\sqrt{(50+22\sqrt{5})} + \sqrt{5} + 3)}$
12	$a/2\sqrt{(3/2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 5/2\sqrt{2} + 5)}$	$a/2\sqrt{(3/2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 5/2\sqrt{2} + 4)}$
	Inkugelradius (Dreiecke)	
3	$a/6\sqrt{6}$	
4	$a/12\sqrt{(24 + 18\sqrt{2})}$	
5	$a/12\sqrt{3}\ (3 + \sqrt{5})$	
6	$a/6\sqrt{(15 + 9\sqrt{3})}$	
8	$a/2\sqrt{(1/2\sqrt{(20+14\sqrt{2})} + \sqrt{2} + 5/3)}$	
10	$a/2\sqrt{(1/2\sqrt{(50+22\sqrt{5})} + \sqrt{5} + 8/3)}$	
12	$a/2\sqrt{(3/2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 5/2\sqrt{2} + 11/3)}$	



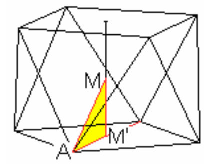
Vierseitiges Antiprisma, Quadratisches Antiprisma

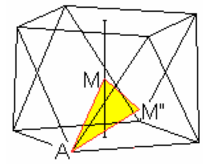
Antiprisma mit einem Quadrat als Grund- und Deckfläche, engl. square antiprism, franz. antiprisme carré
Anzahl Flächen 10 (8 Dreiecke, 2 Quadrate), Ecken 8, Kanten 16. Das Polyeder ist ein einfaches Beispiel für eine D4v-Symmetrie.
Dieder-Winkel: Quadrat-Dreieck arcos $(-(\sqrt{6} - \sqrt{3})/3) \approx 103{,}836160°$, Dreieck-Dreieck arccos $(-(2\sqrt{2} - 1)/3) \approx 127{,}551603°$.

Für eine Kantenlänge a wird
Höhe $h = a/2\ \sqrt[4]{8}$
Umkugelradius $R = a/4\ \sqrt{8 + 2\sqrt{2}} \approx 0{,}822664388\ a$
Mittelkugelradius $\rho = a/4\ \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \approx 0{,}653281482\ a$
Eine Inkugel, die alle Flächen berührt, existiert nicht. Man betrachtet eine Inkugel die die Dreiecke berührt und eine die Grund- und Deckfläche berührt.



Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/12\ \sqrt{24 + 18\sqrt{2}} \approx 0{,}586040410\ a$
Inkugelradius (Quadrate) $r_4 = a/4\ \sqrt[4]{8} = h/2 \approx 0{,}420448208\ a$
Oberfläche $A = 2a^2 (1 + \sqrt{3})$
Volumen $V = a^3/3\ \sqrt{4 + 3\sqrt{2}} \approx 0{,}956999982\ a^3$





Exakte Punktkoordinaten

P1	$x = -1/2$	$y = -1/2$	$z = -\sqrt{\sqrt{8}}/4$
P2	$x = 1/2$	$y = -1/2$	$z = -\sqrt{\sqrt{8}}/4$
P3	$x = 1/2$	$y = \frac{1}{2}$	$z = -\sqrt{\sqrt{8}}/4$
P4	$x = -1/2$	$y = \frac{1}{2}$	$z = -\sqrt{\sqrt{8}}/4$
P5	$x = 0$	$y = -\sqrt{2}/2$	$z = \sqrt{\sqrt{8}}/4$
P6	$x = \sqrt{2}/2$	$y = 0$	$z = \sqrt{\sqrt{8}}/4$
P7	$x = 0$	$y = \sqrt{2}/2$	$z = \sqrt{\sqrt{8}}/4$
P8	$x = -\sqrt{2}/2$	$y = 0$	$z = \sqrt{\sqrt{8}}/4$

Höhe h des Antiprismas

Man findet im Körper das rechtwinkliges Dreieck BEF. Es gilt EF = h, EB = $1/2\ \sqrt{2}\ a - a/2$ und FB = $1/2\ \sqrt{3}\ a$ als Höhe im gleichseitigen Dreieck.
Nach dem Satz des Pythagoras ist $FB^2 = EB^2 + EF^2$ oder $h^2 = 3/4\ a^2 - 1/4\ (\sqrt{2} - 1)^2\ a^2 = 3/4\ a^2 - 1/4\ (2 - 2\sqrt{2} + 1)\ a^2 = 1/2\ \sqrt{2}\ a^2$. Dann ist $h = \sqrt{1/2\ \sqrt{2}}\ a = 1/\sqrt{\sqrt{2}}\ a = 2^{-1/4}\ a$

Radius der Umkugel R

Im rechtwinkligen Dreieck AM'M ist AM der gesuchte Radius R.
Es gilt $R^2 = AM'^2 + M'M^2 = (1/2\ \sqrt{2}\ a)^2 + (h/2)^2 = a^2/2 + 1/8\ \sqrt{2}\ a^2 = 1/16\ (8 + 2\sqrt{2})\ a^2$.
Dann ist $R = 1/4\ \sqrt{8 + 2\sqrt{2}}\ a$

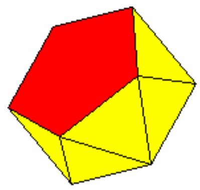
Abstand r = Inkugelradius (Dreiecke)

Im rechtwinkligen Dreieck MAM'' ist r = MM''.
Es gilt $r^2 = AM^2 - AM''^2 = a^2/6 + 1/8\ \sqrt{2} = 1/144\ (24 + 18\sqrt{2})\ a^2$-
Dann ist $r = 1/12\ \sqrt{24 + 18\sqrt{2}}\ a$

Oberfläche O

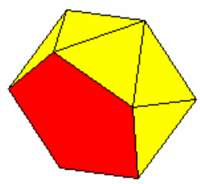
$O = 2a^2 + 8\ (1/4\ \sqrt{3}\ a^2) = (2 + 2\sqrt{3})\ a^2$

Volumen V

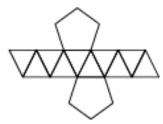


Im Mittelpunkt M treffen sich die Spitzen von zwei quadratischen Pyramiden und acht dreiseitigen Pyramiden. Das Gesamtvolumen ist
$V = 2\ (1/3)\ a^2\ h/2 + 8\ (1/3)\ (1/4\ \sqrt{3}\ a^2)\ r = (1/3)(2-1/4) + (1/6)\ \sqrt{8 + 6\sqrt{2}}\ a^3$.
Durch Vereinfachung wird
$V = a^3/3\ \sqrt{4 + 3\sqrt{2}}$

Fünfseitiges Antiprisma, Pentagonales Antiprisma



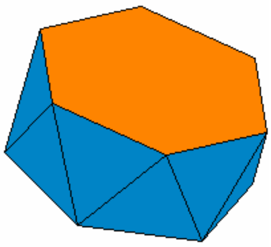
Antiprisma mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grund- und Deckfläche.
engl. pentagonal antiprism, franz. antiprisme pentagonal oder icosaèdre parabidiminué
Anzahl Flächen 12 (10 Dreiecke, 2 Fünfecke), Ecken 10, Kanten 20
Dieder-Winkel: Fünfeck-Dreieck arccos $(-\sqrt{15\ (5-2\sqrt{5})}/15) \approx 100{,}812317°$ und Dreieck-Dreieck arccos $-\sqrt{5}/3 \approx 138{,}189685°$.



Für eine Kantenlänge a wird
Höhe $h = \sqrt{1/10\ (5 + \sqrt{5})}\ a$
Umkugelradius $R = a/4\ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \approx 0{,}951056516\ a$
Mittelkugelradius $\rho = a/4\ (\sqrt{5} + 1) \approx 0{,}809016994\ a$

Eine Inkugel, die alle Flächen berührt, existiert nicht. Man betrachtet eine Inkugel die die Dreiecke berührt und eine die Grund- und Deckfläche berührt.
Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/12\ \sqrt{3}\ (3 + \sqrt{5}) \approx 0{,}755761314\ a$
Inkugelradius (Fünfecke) $r_5 = a/20\ \sqrt{(50 + 10\ \sqrt{5})} = h/2 \approx 0{,}425325404\ a$
Oberfläche $A = (5\ \sqrt{3} + \sqrt{(25 + 10\ \sqrt{5})})/2\ a^2$
Volumen $V = 1/6\ (5 + 2\ \sqrt{5})\ a^3 \approx 1{,}578689326\ a^3$

P1	$x = -1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$y = -1/2$	$z = -1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P2	$x = 1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$y = -(\sqrt{5}+1)/4$	$z = -1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P3	$x = 1/10\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	$y = 0$	$z = -1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P4	$x = 1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$y = (\sqrt{5}+1)/4$	$z = -1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P5	$x = -1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$y = 1/2$	$z = -1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P6	$x = -1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$y = (-\sqrt{5}-1)/4$	$z = 1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P7	$x = 1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$y = -1/2$	$z = 1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P8	$x = 1/10\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$y = 1/2$	$z = 1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P9	$x = -1/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$	$y = (\sqrt{5}+1)/4$	$z = 1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$
P10	$x = -1/10\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$	$y = 0$	$z = 1/20\cdot\sqrt{(50+10\cdot\sqrt{5})}$

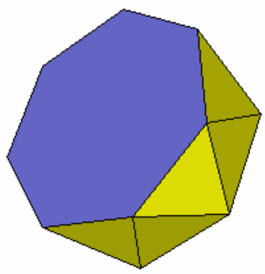


Sechsseitiges Antiprisma, Hexagonales Antiprisma

Antiprisma mit einem regelmäßigen Sechseck als Grund- und Deckfläche.
engl. hexagonal antiprism, franz. antiprisme hexagonal
Anzahl Flächen 14 (12 Dreiecke, 2 Sechsecke), Ecken 12, Kanten 24. Das Polyeder ist ein einfaches Beispiel für eine D6v-Symmetrie.
Dieder-Winkel: Sechseck-Dreieck arccos $(-(2\ \sqrt{3}\ -3)/3) \approx 98{,}899429°$, Dreieck-Dreieck arccos $(-(2\ \sqrt{3}-1)/3) \approx 145{,}221891°$

Für eine Kantenlänge a wird
Höhe $h = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)}\ a$
Umkugelradius $R = a/2\ \sqrt{(3 + \sqrt{3})} \approx 1{,}087663874\ a$
Mittelkugelradius $\rho = a/4\ (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 0{,}965925826\ a$
Eine Inkugel, die alle Flächen berührt, existiert nicht. Man betrachtet eine Inkugel die die Dreiecke berührt und eine die Grund- und Deckfläche berührt.
Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/6\ \sqrt{(15 + 9\ \sqrt{3})} \approx 0{,}921780543\ a$
Inkugelradius (Sechsecke) $r_6 = a/2\ \sqrt{(\sqrt{3} - 1)} \approx 0{,}427799839\ a$
Oberfläche $A = 6\ \sqrt{3}\ a^2$
Volumen $V = \sqrt{(2 + 2\ \sqrt{3})}\ a^3 \approx 2{,}337541789\ a^3$
Exakte Punktkoordinaten

x	y	z
0	± 1	$1/2\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$
± 1	0	$-1/2\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$
$\pm 1/2$	$\pm\sqrt{3}/2$	$-1/2\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$
$\pm\sqrt{3}/2$	$\pm 1/2$	$1/2\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$

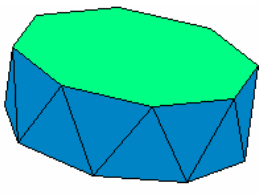


Siebenseitiges Antiprisma, Heptagonales Antiprisma

Antiprisma mit einem regelmäßigen Siebeneck als Grund- und Deckfläche.
engl. heptagonal antiprism, franz. antiprisme heptagonal
Anzahl Flächen 16 (14 Dreiecke, 2 Siebenecke), Ecken 14, Kanten 28
Dieder-Winkel: Siebeneck-Dreieck arccos (-√(Lösung von $[189x^3 -315x^2 +63x-1]$)) = arccos $(-\tan(\pi/14)\ \sqrt{3}/3) \approx 97{,}572258°$, Dreieck-Dreieck arccos (-Lösung von $[27x^3 +9x^2 -27x-1]$) $\approx 150{,}222263°$

Für eine Kantenlänge a wird
Umkugelradius R = √(Lösung von $[64x^3 -144x^2 +80x- 13]$) a $\approx 1{,}229727342\ a$
Mittelkugelradius ρ = Lösung von $[8x^3 -8x^2 -2x +1]$ a $\approx 1{,}123489802\ a$
Inkugel (Dreiecke) r_3 = √(Lösung von $[1728x^3 -2160x^2 +144x +1]$) a $\approx 1{,}085769774\ a$
Inkugel (Siebenecke) r_7 = √(Lösung von $[448x^3 -112x^2+ 1]$) a $\approx 0{,}429236598\ a$
Volumen V = √(Lösung von $[46656x^3 -508032x^2 +209916x +2401]$) $a^3 \approx 3{,}233915293\ a^3$
Punktkoordinaten
$C0 = \sin \pi/14$; $C1 = \sqrt{(2 \cos \pi/7)}/2$; $C2 = \sqrt{(1 + 2 \cos \pi/7)}/2$
$C3 = \cos \pi/7$; $C4 = 1/(4 \sin \pi/14)$; $C5 = \sqrt{(\cos \pi/7 + 1/(8 \sin \pi/14))}$

x	y	z
±0,5	0	±C4
0	±C2	±C3
C3	C1	±0,5
-C3	-C1	±0,5
C0	C5	0
-C0	-C5	0

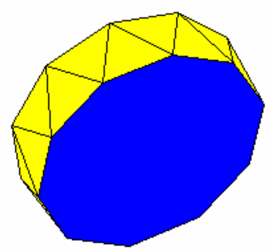


Achtseitiges Antiprisma, Oktagonales Antiprisma

Antiprisma mit einem regelmäßigen Achteck als Grund- und Deckfläche. franz. antiprisme octogonal
Anzahl Flächen 18 (16 Dreiecke, 2 Fünfecke), Ecken 16, Kanten 32
Dieder-Winkel: Achteck-Dreieck arccos $(-\sqrt{3\,(7+4\sqrt{2}-2\sqrt{2\,(10+7\sqrt{2})})}/3) \approx 96{,}594518°$, Dreieck-Dreieck arccos $(-(2\sqrt{2+\sqrt{2}}-1)/3) \approx 153{,}962383°$.

Für eine Kantenlänge a wird
Höhe $h = \sqrt{\sqrt{5 + 7/2\sqrt{2}}-1-\sqrt{2}}\ a$
Umkugelradius $R = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{20+14\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 3} \approx 1{,}375548581\ a$
Mittelkugelradius $\rho = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{20+14\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 2} \approx 1{,}281457724\ a$
Eine Inkugel, die alle Flächen berührt, existiert nicht. Man betrachtet eine Inkugel die die Dreiecke berührt und eine die Grund- und Deckfläche berührt.
Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{20+14\sqrt{2}} +\sqrt{2} +5/3} \approx 1{,}248519349\ a$
Inkugelradius (Achtecke) $r_8 = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{20 + 14\sqrt{2}} -\sqrt{2} -1} = h/2 \approx 0{,}430147785\ a$
Oberfläche $A = 4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\ a^2$
Volumen $V = 2/3\ a^3 \sqrt{2}\ \sqrt{\sqrt{146 + 103\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 2} \approx 4{,}267956750\ a^3$
Exakte Punktkoordinaten
Hilfsgröße $h = \sqrt{1/2\cdot\sqrt{20+14\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1}$

x	y	z
0	$\pm 1/2\cdot\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}$	h/2
$\pm 1/2$	$\pm(\sqrt{2}+1)/2$	-h/2
$\pm 1/2\cdot\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}$	0	h/2
$\pm 1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\pm 1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$	h/2
$\pm(\sqrt{2}+1)/2$	$\pm 1/2$	-h/2

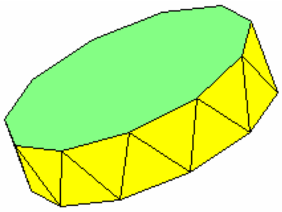


Zehnseitiges Antiprisma, Dekagonales Antiprisma

Das Antiprisma hat ein regelmäßiges Zehneck als Grund- und Deckfläche. Die Anzahl der Flächen ist 22 (20 Dreiecke, 2 Zehnecke), der Ecken 20, der Kanten 40.
Für eine Kantenlänge a wird
Höhe $h = a\ \sqrt{1/2\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 2}$
Umkugelradius $R = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{50+22\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 4}$
Mittelkugelradius $\rho = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{50+22\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 3}$
Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{50+22\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 8/3}$
Inkugelradius (Zehnecke) $r_{10} = a/2\ \sqrt{1/2\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 2}$
Oberfläche $A = (5\sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}})\ a^2$
Volumen $V = 5/6\ a^3 \sqrt{2}\ \sqrt{\sqrt{650 + 290\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1} = 5/3a^2\ (r_3\ r_{10}\ \sqrt{5 + 2\sqrt{5}})$
Eckpunktkoordinaten

Nr.	x	y	z
0	-0,64328826	-0,20901703	-0,18025566
1	-0,39757401	-0,54721368	-0,18025566
2	0	-0,6763933	-0,18025566
3	0,39757401	-0,54721368	-0,18025566
4	0,64328826	-0,20901703	-0,18025566
5	0,64328826	0,20901703	-0,18025566
6	0,39757401	0,54721368	-0,18025566
7	0	0,6763933	-0,18025566
8	-0,39757401	0,54721368	-0,18025566
9	-0,64328826	0,20901703	-0,18025566
10	-0,6763933	0	0,18025566
11	-0,54721368	-0,39757401	0,18025566
12	-0,20901703	-0,64328826	0,18025566
13	0,20901703	-0,64328826	0,18025566
14	0,54721368	-0,39757401	0,18025566
15	0,6763933	0	0,18025566
16	0,54721368	0,39757401	0,18025566
17	0,20901703	0,64328826	0,18025566
18	-0,20901703	0,64328826	0,18025566
19	-0,54721368	0,39757401	0,18025566

Seitenflächen: (0,9,8,7,6,5,4,3,2,1), (10,11,12,13,14,15,16,17,18,19), (0,11,10), (0,1,11), (1,12,11), (1,2,12), (2,13,12), (2,3,13), (3,14,13), (3,4,14), (4,15,14), (4,5,15), (5,16,15), (5,6,16), (6,17,16), (6,7,17), (7,18,17), (7,8,18), (8,19,18), (8,9,19), (9,10,19), (0,10,9)



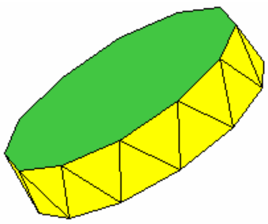
Elfseitiges Antiprisma, Undekagonales Antiprisma

Das Polyeder ist ein Antiprisma mit einem regelmäßigen Elfeck als Grund- und Deckfläche.
Es hat 24 Flächen (22 Dreiecke, 2 Fünfecke), 22 Ecken 22 und 44 Kanten.
Für eine Kantenlänge a wird

Höhe $h = a/2 \sqrt{3 - \tan^2 (\pi/22)}$
Umkugelradius $R = a/2 \cot (\pi/22) \sqrt{1 + 5 \tan^2 (\pi/22)}$
Mittelkugelradius $\rho = a/4 \cot (\pi/22) \sqrt{1 + \tan^2 (\pi/22)}$
Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/12 \sqrt{3} \cot (\pi/22) \sqrt{3 - \tan^2 (\pi/22)}$
Inkugelradius (Zehnecke) $r_n = a/4 \sqrt{3 - \tan^2 (\pi/22)}$
Oberfläche $A = 11/2\, a^2 [\cot (\pi/11) + \sqrt{3}]$
Volumen $V = 11/12\, a^3 [\cot(\pi/22) + \cot(\pi/11)] \sqrt{[1 - 1/4 \sec^2(\pi/22)]}$
Eckpunktkoordinaten

Nr.	x	y	z
0	0,68018259	0	-0,16538332
1,2	0,57220601	0,36773447	±0,16538332
3	-0,096800076	0,67325931	-0,16538332
4	-0,44542487	0,5140477	-0,16538332
5,6	-0,65263042	±0,19162958	-0,16538332
7	-0,44542487	-0,5140477	-0,16538332
8	-0,096800076	-0,67325931	-0,16538332
9	0,28255806	-0,61871585	-0,16538332
10	0,57220601	-0,36773447	-0,16538332
11	-0,68018259	0	0,16538332
12	-0,57220601	-0,36773447	0,16538332
13	-0,28255806	-0,61871585	0,16538332
14	0,096800076	-0,67325931	0,16538332
15	0,44542487	-0,5140477	0,16538332
16,17	0,65263042	±0,19162958	0,16538332
18	0,44542487	0,5140477	0,16538332
19	0,096800076	0,67325931	0,16538332
20	-0,28255806	0,61871585	0,16538332
21	-0,57220601	0,36773447	0,16538332

Seitenflächen: (0,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1), (11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21), (0,1,17), (1,2,18), (2,3,19), (3,4,20), (4,5,21), (5,6,11), (6,7,12), (7,8,13), (8,9,14), (9,10,15), (0,16,10), (4,21,20), (3,20,19), (2,19,18), (1,18,17), (0,17,16), (10,16,15), (9,15,14), (8,14,13), (7,13,12), (6,12,11), (5,11,21)

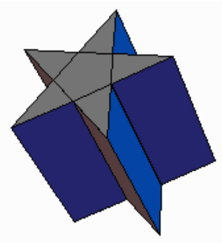


Zwölfseitiges Antiprisma, Dodekagonales Antiprisma

Antiprisma mit einem regelmäßigen Zwölfeck als Grund- und Deckfläche und 26 Flächen (24 Dreiecke, 2 Fünfecke), Ecken 24, Kanten 48.
Für eine Kantenlänge a wird
Höhe $h = a \sqrt{3/2 \sqrt{6} - 2 \sqrt{3} + 5/2 \sqrt{2} - 3}$
Umkugelradius $R = a/2 \sqrt{3/2 \sqrt{6} + 2 \sqrt{3} + 5/2 \sqrt{2} + 5}$
Mittelkugelradius $\rho = a/2 \sqrt{3/2 \sqrt{6} + 2 \sqrt{3} + 5/2 \sqrt{2} + 4}$
Inkugelradius (Dreiecke) $r_3 = a/2 \sqrt{3/2 \sqrt{6} + 2 \sqrt{3} + 5/2 \sqrt{2} + 11/3}$
Inkugelradius (Sechsecke) $r_{12} = a/2 \sqrt{3/2 \sqrt{6} - 2 \sqrt{3} + 5/2 \sqrt{2} - 3}$
Oberfläche $A = 12 (\sqrt{3} + 1) a^2$
Volumen $V = 2a^3 \sqrt{7\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 5} = 2a^2 (r_3 \sqrt{3} + r_{12} (\sqrt{3} + 2))$
Eckpunktkoordinaten

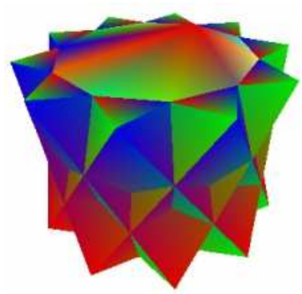
Nr.	x	y	z
0,6	±0,68314625	0	-0,15268007
1,5	±0,59162201	-0,34157312	-0,15268007
2,4	±0,34157312	-0,59162201	-0,15268007
3,9	0	±0,68314625	-0,15268007
7,11	±0,59162201	0,34157312	-0,15268007
8,10	±0,34157312	0,59162201	-0,15268007
12	-0,6598686	-0,17681126	0,15268007
13	-0,48305734	-0,48305734	0,15268007
14,15	±0,17681126	-0,6598686	0,15268007
16	0,48305734	-0,48305734	0,15268007
17,18	0,6598686	±0,17681126	0,15268007
19	0,48305734	0,48305734	0,15268007
20	0,17681126	0,6598686	0,15268007
21	-0,17681126	0,6598686	0,15268007
22	-0,48305734	0,48305734	0,15268007

23 -0,6598686 0,17681126 0,15268007
Seitenflächen: (0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1), (12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23), (0,12,23), (0,1,12), (1,13,12), (1,2,13), (2,14,13), (2,3,14), (3,15,14), (3,4,15), (4,16,15), (4,5,16), (5,17,16), (5,6,17), (6,18,17), (6,7,18), (7,19,18), (7,8,19), (8,20,19), (8,9,20), (9,21,20), (9,10,21), (10,22,21), (10,11,22), (11,23,22), (0,23,11)



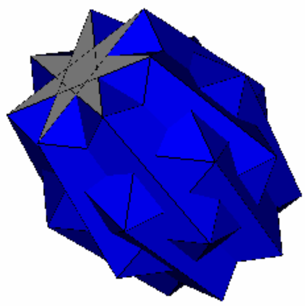
Polygramm-Prisma

Prismen können als Grund- und Deckflächen neben konvexen N-Ecken auch nicht konvexe Polygone besitzen, insbesondere regelmäßige Sternpolygone. Solche Prismen werden Polygramm-Prismen genannt.
Die Abbildung zeigt ein Pentagramm-Prisma mit zwei kongruenten Pentagrammen als Deck- und Grundflächen. Die Seitenflächen sind Rechtecke. Dieses Polyeder ist das uniforme Polyeder U_{78}.
Da für einige n-Ecke mehrere n-eckige Sternpolygone existieren, z.B. für 11-eckige Sternvielecke, gibt es für diese auch verschiedene Polygramm-Prismen.
Beispiel: U78 Pentagramm-Prisma
$V = a^2h \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/8} \approx 2{,}1266270\ a^2h$
$A = 2a^2 \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/8} + 10\ ah \approx 14{,}25325\ a^2h$



Polygramm-Antiprisma
Antiprismen können als Grund- und Deckflächen neben konvexen N-Ecken auch nicht konvexe Polygone besitzen, insbesondere regelmäßige Sternpolygone. Solche Antiprismen werden Polygramm-Antiprismen genannt.
Die Abbildung zeigt ein Dekagramm-Antiprisma mit zwei kongruenten Dekagrammen als Deck- und Grundflächen. Die Seitenflächen sind Dreiecke.
Da für einige n-Ecke mehrere n-eckige Sternpolygone existieren, z.B. für 11-eckige Sternvielecke, gibt es für diese auch verschiedene Polygramm-Antiprismen.

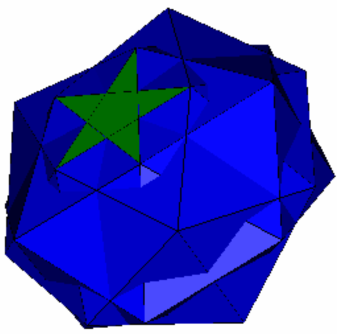
Abgestumpftes Antiprisma
Antiprismen können, ebenso wie andere Polyeder, an ihren Ecken durch Abschneiden von Pyramiden abgestumpft werden.
Das abgestumpfte quadratische Antiprisma ist Johnson-Polyeder, das abgestumpfte dreiseitige Antiprisma entspricht dem regelmäßigen Ikosaeder.



Die Abbildung zeigt ein abgestumpftes Heptagramm-Antiprisma 7/2. Da für einige n-Ecke mehrere n-eckige Sternpolygone existieren, existieren auch verschiedene abgestumpfte Polygramm-Antiprismen.
Abgestumpfte Polygramm-Antiprismen n/(n-d) sind mit denen vom Typ n/d isomorph.

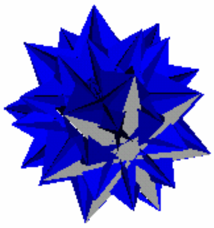
Großes abgestumpftes Antiprisma
Eine weitere Familie von Polyedern stellen die großen abgestumpften Antiprismen dar. Dieser Körper sind zu den abgestumpften Antiprismen isomorph, besitzen aber Sternecken.
Echte große abgestumpfte Antiprismen existieren nur für ein Verhältnis n/d < 2, andernfalls gibt es sich nicht berührende Seitenflächen.
Die Abbildung zeigt das große abgestumpfte Antiprisma 7/3.

Pentakis-Pentaprisma
Gegeben sei ein regelmäßiges Dodekaeder. Zehn der zwölf Seitenflächen werden durch fünfseitige Pyramiden so ersetzt, dass zwei gegenüberliegende Fünfecke erhalten bleiben.
Das entstehende Polyeder ist ein Pentakis-Pentaprisma, besteht aus zwei gegenüberliegenden Polygrammen. Der Begriff wurde durch Jim McNeill eingeführt.
Diese Körper können auch aus abgestumpften Antiprismen erzeugt werden, in dem zwischen die zwei Hälften des Antiprismas ein Ring von Dreiecken eingefügt wird.



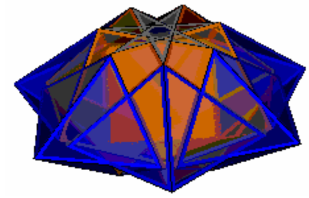
Doppeltabgestumpftes Antiprisma
Antiprismen können, ebenso wie andere Polyeder, an ihren Ecken durch Abschneiden von Pyramiden abgestumpft werden.
Bei einmaligem Abstumpfen ergeben sich die abgestumpften Antirismen.
Wiederholt man den Vorgang ergeben sich doppeltabgestumpfte

Antiprismen.
Die Abbildung zeigt ein doppeltabgestumpftes Pentagramm-Antiprisma 5/2. Für das Verhältnis 2 < n/d < 3 ergeben sich konvexe Körper. Für n/d = 2 ergibt sich als Spezialfall das Iksoaeder.

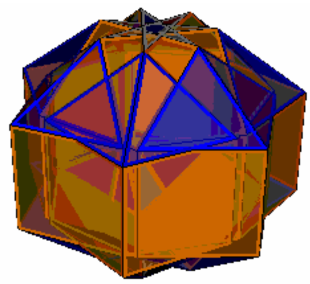


Großes doppeltabgestumpftes Antiprisma
Eine weitere Familie von Polyedern stellen die großen doppeltabgestumpften Antiprismen dar. Dieser Körper sind zu den doppeltabgestumpften Antiprismen isomorph, besitzen aber Sternecken.
Große doppeltabgestumpfte Antiprismen existieren auch für ein Verhältnis n/d < 2. Die Abbildung zeigt das große doppeltabgestumpfte Antiprisma 7/3.

Sphenoid-Prisma

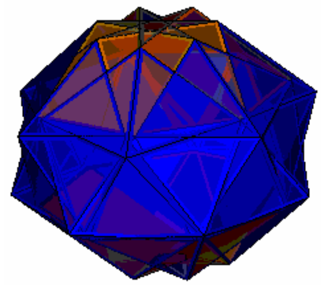


Eine weitere Gruppe von Prismen entsteht, wenn die prismatische Grund- und Deckfläche durch Sphenoide verbunden werden. Ein Sphenoid ist ein spiegelsymmetrisches Tetraeder. Die Abbildung zeigt das Sphenoid-Prisma 7/3.
Die Konstruktion der Sphenoid-Prismen zeigt sich auch in einer Darstellung einer Halbsphäre des Körpers: Sphenoid-Prisma 7/3 Halbsphäre
Die Sphenoid-Prismen sind für 2 < n/d < 3 konvex. Für n/d = 3 entsteht ein planares Gebilde. Im Fall n/d = 2 ergibt sich das Disphenoid, der Johnson-Polyeder J15.
Die Höhe eines Sphenoid-Prismas ist $h = 2 \sqrt{(1 - 1/(2 - 2 \cos(\pi d / n)))}$
Für das Disphenoid wird damit $h = \sqrt{3}$. Im Fall n/d = 3 wird h = 0, d.h. ein ebenes Gebilde.

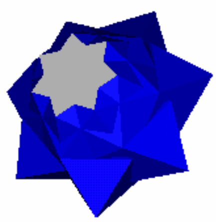


Erweitertes Sphenoid-Prisma
Sphenoid-Prismen können durch Einfügen eines Bandes von Quadraten zwischen die zwei Halbsphären zu erweiterten Sphenoid-Prismen verändert werden.
Die Abbildung zeigt das erweiterte Sphenoid-Prisma 7/3.

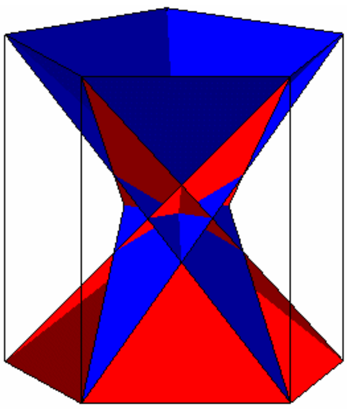
Verdreht erweitertes Sphenoid-Prisma



Sphenoid-Prismen können auch durch Einfügen eines Bandes von gleichseitigen Dreiecken zwischen die zwei Halbsphären zu verdreht erweiterten Sphenoid-Prismen verändert werden. Dabei müssen die Grund- und Deckflächen allerdings zueinander verdreht werden.
Die Abbildung zeigt das verdreht erweiterte Sphenoid-Prisma 7/3.



Abgestumpfte erweiterte Prismen
Eine weitere Familie von Polyedern ergibt sich aus beliebigen Prismen. Bei diesen werden die rechteckigen Seitenflächen mit einer Pyramide erweitert und der entstehende Restkörper abgestumpft. Die Pyramiden selbst werden nicht verändert.
Ein solches Polyeder wird abgestumpftes erweitertes Prisma genannt. Die Abbildung zeigt ein derartiges Polyeder vom Typ 7/2.



Polyedrischer Torus
Unter einem polyedrischen Torus (engl. flat torus, franz. tore polyédrique plat) versteht man ein spezielles nicht konvexes Polyeder.
Sind $A_k = (\cos (2k\pi/n)\ , \sin (2k\pi/n)\ , -a)$ und $B_k = (\cos (2k\pi/n)\ , \sin (2k\pi/n)\ , a)$ je n Eckpunkte, so wird der polyedrische Torus der Ordnung n von

n Dreiecken mit den Ecken (A_k, A_{k+1}, B_{k+3})
n Dreiecken mit den Ecken (B_k, B_{k-1}, A_{k-3}) und
n Rechtecken mit den Ecken $(A_k, A_{k+1}, B_k, B_{k+1})$

begrenzt. Die Abbildung zeigt den Torus 5.Grades.
Diese Polyeder haben eine Euler-Charakteristik von Null.
Quelle: http://www.mathcurve.com/polyedres/toreplat/toreplat.shtml

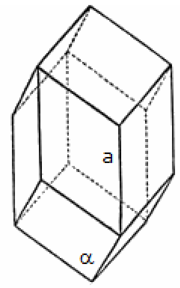
Rhombenkörper
... konvexe Körper, deren Oberflächen ausschließlich aus Rhomben gebildet werden. Handelt es sich dabei um jeweils kongruente Rhomben, so spricht man von Rhombenisoedern (grch. iso = gleich).
Die Rhombenkörper gehören zur allgemeineren Klasse der konvexen Körper. Bezeichnet f für ein Rhombenisoeder die Anzahl der Rhomben, so existieren genau für die folgenden Werte von f Rhombenisoeder:

f	Name	Diagonalenverhältnis
6	spitzes Rhombenhexaeder/Rhomboeder	$1 < \rho$
6	Hexaeder (Würfel)	1

6	stumpfes Rhombenhexaeder/Rhomboeder	$1 < \rho < \sqrt{3}$
12	Rhombendodekaeder (1. Art)	$\sqrt{2}$
12	Rhombendodekaeder 2. Art	ϕ
20	Rhombenikosaeder	ϕ
30	Rhombentrikontaeder	ϕ

... $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ... Verhältnis des Goldenen Schnittes

Jedes Rhomboeder und die Rhombendodekaeder können zum lückenlosen Füllen des dreidimensionalen Raumes benutzt werden, wie S. Bilinski in seiner Arbeit Über Rhombenisoeder 1960 zeigte. Dort wurde auch das Rhombendodekaeder 2. Art erstmals beschrieben. Das Rhombentrikontaeder wurde von Johannes Kepler entdeckt und wird daher manchmal auch Keplerscher Körper genannt. Das, ebenfalls von Kepler beschriebene, Rhombendodekaeder 1. Art war schon Luca Pacioli bekannt.
Kepler betrachtete Rhombenisoeder als halbreguläre Körper, da bei ihnen zwar alle Kanten gleich lang sind und alle Flächen kongruent, aber nicht alle Flächenwinkel gleich groß, wie dies bei den regulären Körpern der Fall sein muss.
Er schloss allerdings die Rhomboeder explizit durch komplizierte Argumente als "nicht regulär genug" aus und übersah sowohl das Rhombendodekaeder 2. Art als auch das Rhombenikosaeder.



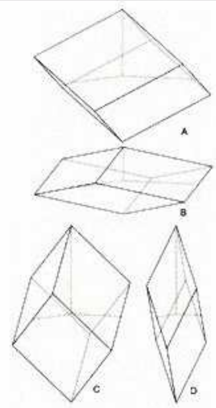
Rhomboeder-Berechnung

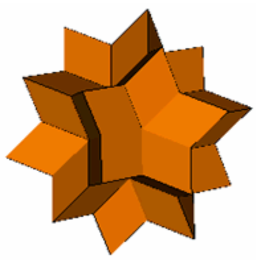
Es sei a die Kantenlänge des Rhomboeders, d.h. eine der Rhombenseiten, α der ebene Winkel der Rhomben, V das Volumen, A der Oberflächeninhalt, ϕ der Neigungswinkel der Grenzflächen gegeneinander, p, q die Diagonalen der Grenzflächen, f, g die beiden Diagonallängen der Körpers, F, G die Flächen der beiden Diagonalschnitte und ω der ebene Winkel der Diagonalschnitte. Dann gilt:

Kantenlänge $a = \sqrt{p^2 + q^2}$
Volumen $V = 2a^3 \sqrt{\sin(3/2\ \alpha) \sin^3(\alpha/2)} = 2q^2 \sqrt{3p^2 - q^2}$
Oberfläche $A = 6\ a^2 \sin\alpha = 12\ p\ q$
Winkel $\sin\alpha = 2pq / (p^2 + q^2)$
Grenzwinkel $\sin\phi/2 = 1 / (2 \cos\alpha/2) = 1/2 \sec\alpha/2$
$\cos\phi = (p^2 - q^2) / (2p^2)$
Diagonalen $f = a \sqrt{3 + 6 \cos\alpha}$ $g = a \sqrt{3 - 2 \cos\alpha}$ $f = \sqrt{p^2 q - 3q^2}$
$g = \sqrt{p^2 + 5q^2}$ $p = 2a \cos\alpha/2$ $p = 2a \sin\alpha/2$
Diagonalenschnitt $F = a^2 \sin\alpha/2 \sqrt{2 + 4 \cos\alpha}$
$G = a^2 \sin\alpha/2 \sqrt{2 - 4 \cos\alpha}$
$F = \sqrt{(6p^2q^2 - 2q^4) / (p^2 + q^2)}$
Diagonalenwinkel $\cos\omega = \cos\alpha / \cos\alpha/2 = (p^2 - q^2) / (p \sqrt{p^2 + q^2})$

Rhomboeder in der Natur

Rhomboeder treten in der Natur vor allen bei Kristallen auf.
Rhomboeder sind die am häufigsten beobachteten Calcitformen, und die genaue Calcitspaltfläche spaltet in parallelen Flächen entlang des Einheitsrhomboeders. Unter den 84 sicher bestimmten Calcitrhomboedern sind die links abgebildeten vier besonders häufig.





Oben ist ein Kalkspatkristall mit typischen Rhomboedern zu sehen (Sammlung & Copr. FSU Mineralogisches Institut Jena/Thüringen)

Dihedrale Rhomboeder

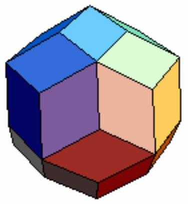
Ein dihedrales Rhomboeder liegt vor, wenn die Flächen transitiv sind und die Form eines Rhombus aufweisen. Es existieren eine Vielzahl dieser Körper, nachfolgend 13 typische Beispiele:

uniforme Polyeder und deren dualen Körper

U06 Hexaeder
UD07 Rhombendodekaeder
UD24 Rhombentriakontaeder
UD54 großes Rhombentriakontaeder, untere Abbildung
UD36 mittleres Rhombentriakontaeder

Für einige uniforme Polyeder besitzen die dualen Polyeder unregelmäßige, vierseitige Flächen. In einigen Fällen können diese Flächen zu Rhomben deformiert werden.

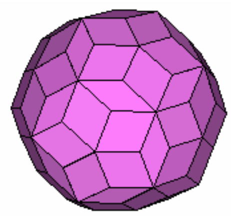
rhombifizierte duale uniforme Polyeder
u.a. rhombifiziertes mittleres ikosachronisches Hexakontaeder, 60/13, rhombifiziertes Hexakontaeder, Unkelbach-Polyeder, 60/1, rhombifiziertes großes ikosachronisches Hexakontaeder, 60/8, ...
Es existieren auch dihedrale Rhomboeder ohne Bezug zu uniformen Polyedern, z.B.
rhombifiziertes Grünbaum-Polyeder, 60/12
Die Bezeichnungen stammen aus einem unveröffentlichten Manuskript von Professor Branko Grünbaum.



Konvexe Rhomboeder mit Ikosaedersymmetrie

Einige Rhomboeder besitzen spezielle Eigenschaften: Sie sind konvex, heben Ikosaedersymmetrie, alle Flächen sind regelmäßige Polyeder oder Rhomben, einige Flächen müssen Rhomben sein, von denen es maximal 3 verschiedene geben kann. Im November 2007 wurden durch Jim McNeill 15 derartige konvexe Rhomboeder gefunden. Die angegebenen Winkel sind die Innenwinkel in den Rhomben.

1 Rhombenart
Rhombentriakontaeder, Rhombendreißigflächner (Abbildung), α = 63,435°
erweitertes Rhombentriakontaeder, α = 63,435°
abgestumpftes Rhombentriakontaeder, α = 62,967°
gedrehtes Rhombenikosaeder, α = 66,140°
facetiertes Rhombenenneakontaeder, α = 53,130°
Rhomben-Goldbergfullerene, α = 60,961°
abgestumpftes Petrie-Rhombendodekaeder, α = 60,961°
facetiertes abgestumpftes Rhombendodekaeder, α = 48,471°
2 Rhombenarten
Rhombenenneakontaeder, α = 70,529°, β = 41,810°
rhombenabgestumpftes Sternrhombentriakontaeder, α = 67,761°, β = 71,276°
facetiertes tetralineares Rhombenpolyeder, α = 61,783°, β = 60,390°
3 Rhombenarten
rhombenflächiges abgestumpftes Ikosidodekaeder, α = 73,912°, β = 60,144°, γ = 48,786°
rhombenflächiges abgestumpftes Petrie-Dodekaeder, α = 73,480°, β = 60,885°, γ = 49,166°
rhombenflächiges facetiertes Goldbergfullerene, α = 68,789°, β = 63,435°, γ = 47,870°
tetralineares Rhombenpolyeder, α = 73,531°, β = 68,789°, γ = 60,533°
Quelle: http://www.orchidpalms.com/polyhedra/rhombic/icosarhom.htm

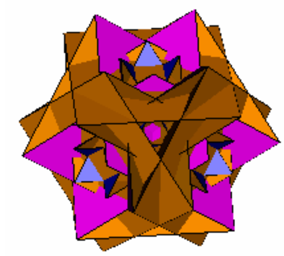


Rhombenenneakontaeder

Das konvexe Rhomboeder hat 92 Ecken, 90 Flächen, 60 breite Rhomben und 30 dünne Rhomben und 180 Kanten gleicher Länge. Das duale Polyeder ist der rektifizierte Ikosaederstumpf.
Dieder-Winkel zwischen den Rhomben: arccos $(-(3\sqrt{2} + \sqrt{10})/8) \approx 157{,}7612439°$, arccos $(-(1+3\sqrt{5})/8) \approx 164{,}4775122°$.

Ist die Kantenlänge des Polyeders gleich a, so wird

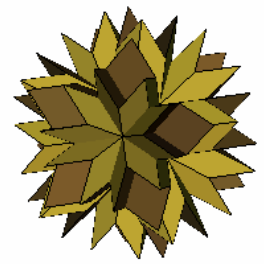
Rhombenlänge 1	$l_1 = 2\sqrt{6}/3\ a \approx 1{,}632993162\ a$
Rhombenbreite 1	$b_1 = 2\sqrt{3}/3\ a \approx 1{,}154700538\ a$
Rhombenlänge 2	$l_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{15})/3\ a \approx 1{,}868344718\ a$
Rhombenbreite 2	$b_2 = (\sqrt{15} - \sqrt{3})/3\ a \approx 0{,}713644179\ a$
Inkugelradius r_3	$r_3 = (\sqrt{21} + \sqrt{105})/6\ a \approx 2{,}471587743\ a$
Inkugelradius r_5	$r_5 = \sqrt{(30\ (5+\sqrt{5}))}/6\ a \approx 2{,}455617366\ a$
Inkugelradius r_6	$r_6 = (3+\sqrt{5})/2\ a \approx 2{,}618033989\ a$
Kugelradius Rhombus 1	$rh_1 = (5\sqrt{6} + 3\sqrt{30})/12\ a \approx 2{,}389927120\ a$
Kugelradius Rhombus 2	$rh_2 = (2\sqrt{3} + \sqrt{15})/3\ a \approx 2{,}445694987\ a$
Oberflächeninhalt	$A = 20(1 + 2\sqrt{2})\ a^2 \approx 76{,}568542495\ a^2$
Volumen	$V = 20\ (7\sqrt{3} + 4\sqrt{15})/9\ a^3 \approx 61{,}369531195\ a^3$



Implodierte Rhomboeder

Rhomboeder können durch das Ausdehnen der Seitenflächen zur erweiterten Rhomboedern verändert werden. Auch der umgekehrte Prozess ist möglich:

Jede Seitenfläche des ursprünglichen Polyeders wird nach innen in Richtung des Zentrums des Polyeder verschoben; so lange bis ein Abstand von einer Einheit zur ursprünglichen Lage der Seitenflächen entsteht.
Die entstandenen Lücken werden durch das Einfügen von quadratischen Flächen gefüllt. Die restlichen Löcher, entsprechend den ursprünglichen Ecken des Polyeders, werden durch Dreiecke, Quadrate oder Fünfecke gegebenenfalls ausgefüllt.
Die entstandenen Rhomboeder sind sogenannte implodierte Rhomboeder.
Die Abbildung zeigt das implodierte Rhombendodekaeder.



Doppelrhombenpolyeder

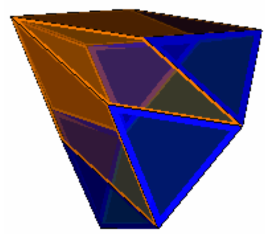
Unter einem Doppelrhombenpolyeder versteht man Polyeder, deren Seiten ausschließlich Rhomben von genau verschiedener Form sind und die eine Ikosaedersymmetrie aufweisen. Neben den konvexen Doppelrhombenpolyedern,

dem Rhombentriakontaeder und
dem Rhombenenneakontaeder

existieren mehrere nichtkonvexe Körper dieser Art.
Als spitze Winkel der Rhomben treten dabei auf:
36°; 37,377° = arctan($3-\sqrt{5}$); 41,81° = arcsin(2/3) ; 60° ; 63,435° = arctan 2 ; 70,529° = arccos(1/3) ; 72° und 79,188° = arctan($3+\sqrt{5}$)

Beispiele: Doppelrhombenpolyeder 01 (60+120 Rhomben, 41,81° und 79,188°)
Doppelrhombenpolyeder 02 (60+120 Rhomben, 63,435° und 79,188°)
Doppelrhombenpolyeder 03 (60+60 Rhomben, 60° und 36°)
Doppelrhombenpolyeder 04 (60+60 Rhomben, 60° und 72°)
Doppelrhombenpolyeder 05 (60+120 Rhomben, 63,435° und 37,377°)
Doppelrhombenpolyeder 06 (60+120 Rhomben, 41,81° und 37,377°)
Doppelrhombenpolyeder 07 (60+60 Rhomben, 63,435° und 79,188°)
Doppelrhombenpolyeder 08 (60+60 Rhomben, 41,81° und 79,188°)
Doppelrhombenpolyeder 09 (120+60 Rhomben, 37,377° und 63,435°)
Doppelrhombenpolyeder 10 (120+60 Rhomben, 37,377° und 63,435°)
Doppelrhombenpolyeder 11 (120+60 Rhomben, 37,377° und 41,81°)
Doppelrhombenpolyeder 12 (120+60 Rhomben, 37,377° und 41,81°)
Doppelrhombenpolyeder 13 (120+60 Rhomben, 41,81° und 70,529°)
Doppelrhombenpolyeder 14 (120+60 Rhomben, 41,81° und 70,529°)
Doppelrhombenpolyeder 15 (120+60 Rhomben, 79,188° und 70,529°)
Doppelrhombenpolyeder 16 (120+60 Rhomben, 79,188° und 70,529°)
Doppelrhombenpolyeder 17 (120+60 Rhomben, 79,188° und 63,435°)
Doppelrhombenpolyeder 18 (120+60 Rhomben, 79,188° und 63,435°)

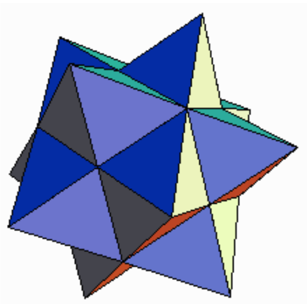
Molybi-Polyeder, Molybi-Pyramide



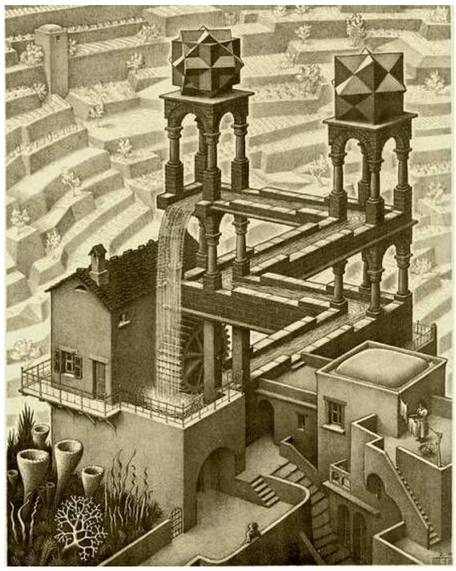
Eine Molybi-Pyramide entsteht, in dem man ein Polygon mit Dreiecken umgibt und zwischen diesen kongruente Rhomben so einfügt, dass diese sich paarweise berühren und eine Spitze bilden.
Diese Polyeder wurden durch Jim McNeill eingeführt, wobei die von ihm gewählte Namensgebung sich auf das griechische Wort μολυβι = "Bleistift" bezieht, da die entstehende Ecke, insbesondere bei der hexagonalen Molybi-Pyramide (Abbildung), eine Form besitzt, in der Bleistifte angespitzt werden.

dreiseitige Molybi-Pyramide	vierseitige Molybi-Pyramide
pentagonale Molybi-Pyramide	hexagonale Molybi-Pyramide
Pentagramm 5/2 Molybi-Pyramide	

Durch Aufsetzen bzw. Herausschneiden von Molybi-Pyramiden können aus den Platonischen bzw. Kepler-Poinsot-Polyedern interessante Körper erzeugt werden.



Escher-Polyeder



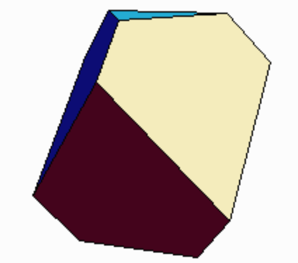
Dieses Polyeder befindet sich im rechten Bereich des Holzschnittes "Wasserfall" von M. C. Escher (1982).
Dieser Körper ergibt sich als Verbindung zweier Rhombendodekaeder und entspricht dem ersten Rhombendodekaederstern.
Das konvexe Polyeder hat 26 Ecken, 48 gleichschenklige Dreiecke als Flächen, und 72 Kanten, 48 kurze und 28 lange.

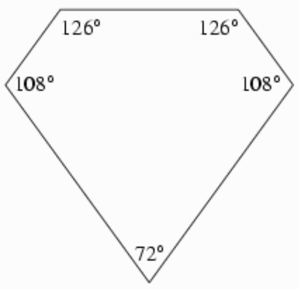
Ist die lange Kantenlänge des Polyeders gleich a, so wird

kurze Kante	$s_1 = \sqrt{3}/2\ a \approx 0{,}866025404\ a$
Inkugelradius r_4	$r_4 = \sqrt{2}\ a \approx 1{,}414213562\ a$
Inkugelradius r_6	$r_6 = \sqrt{3}/2\ a \approx 0{,}866025404\ a$
Volumen	$V = 4\ a^3$

Eckpunktkoordinaten
(0, 0, ±1), (±1, 0, 0), (0, ±1, 0), (±1, 0, ±1), (±1, ±1, 0), (0, ±1, ±1), (±0,5, ±0,5, ±0,5)

Abbildung: "Wasserfall"





Dürer Polyeder

Der Kupferstich "Melancholia" von Albrecht Dürer enthält die Darstellung eines Polyeders mit 8 Flächen. Dürer hat niemals diesen Körper genauer beschrieben.
Nach Schröder (1980) handelt es sich um einen Würfel der mit Rhomben erweitert wurde und anschließend an zwei gegenüberliegenden Ecken so abgeschnitten wurde, dass regelmäßige Dreiecke entstehen.
Der entstandene Körper setzt sich aus sechs gleichen, unregelmäßigen, achsensymmetrischen Fünfecken und zwei gleichseitigen Dreiecken zusammen.
Er hat zwölf Ecken, an jeder Ecke treffen drei Flächen aufeinander.
Alle Eckpunkte liegen auf derselben Umkugel. Gegenüberliegende Flächen sind parallel. Der Körper hat 18 Kanten.

Die entstehenden unregelmäßigen Fünfeckseiten haben die Innenwinkel 126°, 108°, 72°, 108° und 126° und die Seitenlängen verhalten sich wie

$$1 : 1/2\ (3 + \sqrt{5}) : \sqrt{[1/2\ (5 + \sqrt{5})]} \approx 1 : 2{,}61803 : 1{,}90211$$

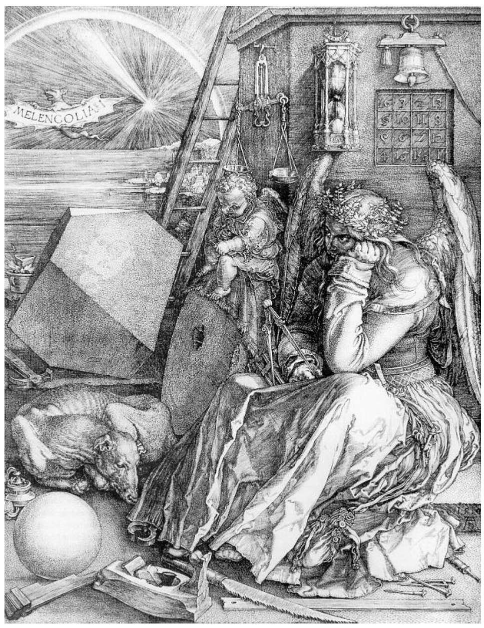
Ist a die Größe der langen Seiten, b die der anliegenden Seiten, c die obere, einzelne Seite, $e = a/2\ \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ die Diagonale und $r = a - b$ der Umkreisradius des Fünfecks, so gilt

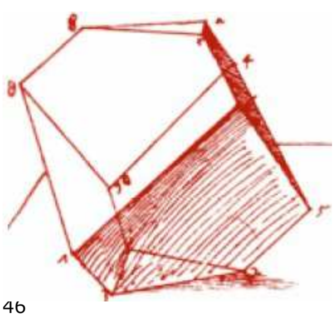
$a : r = r : b = e : c = \Phi$ (Verhältnis des goldenen Schnittes)

Volumen $V = 5/3\ a^3 \sqrt{(\sqrt{5} - 2)} \approx 0{,}80978045\ a^3$
Oberflächeninhalt $A = a^2/2\ (3\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) \approx 5{,}07366898\ a^2$
Umkugelradius $R = a/4\ \sqrt{(14 - 2\sqrt{5})} \approx 0{,}771681\ a$
Fünfeckfläche $A_5 = a^2/4\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} \approx 0{,}7694209\ a^2$
Dreiecksfläche $A_3 = a^2/4\ \sqrt{3}\ (5 - 2\sqrt{5}) \approx 0{,}2285718\ a^2$
siehe auch http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/durer.html
Literatur: Schröder, "Dürer - Kunst und Geometrie", Berlin Akademie-Verlag, 1980

Für das Dürer-Polyeder findet man folgende Koordinaten und Flächen, mit
C0 = 0,205698288537214990965172182329
C1 = 0,347016074064856157129977942028
C2 = 0,356279886776419160300002790860
C3 = 0,359972004940126234189051319076
C4 = 0,411396577074429981930344364658
C5 = 0,623489801858733530525004884004
C6 = 0,644458423263304291812816178052
C7 = 0,719944009880252468378102638152
C0 ist Wurzel einer Lösung von $3176523 x^3 - 432180 x^2 + 14112 x - 64 = 0$
C1 ist Wurzel einer Lösung von $1728 x^3 - 576 x^2 + 36 x + 1 = 0$
C2 ist Lösung von $343 x^3 + 98 x^2 - 56 x - 8 = 0$
C3 ist Wurzel einer Lösung von $1728 x^3 - 720 x^2 + 72 x - 1 = 0$
C4 ist Wurzel einer Lösung von $3176523 x^3 - 1728720 x^2 + 225792 x - 4096 = 0$
C5 ist Lösung von $8 x^3 + 4 x^2 - 4 x - 1 = 0$
C6 ist Wurzel einer Lösung von $203297472 x^3 - 233722944 x^2 + 50381604 x + 4826809 = 0$
C7 ist Wurzel einer Lösung von $27 x^3 - 45 x^2 + 18 x - 1 = 0$

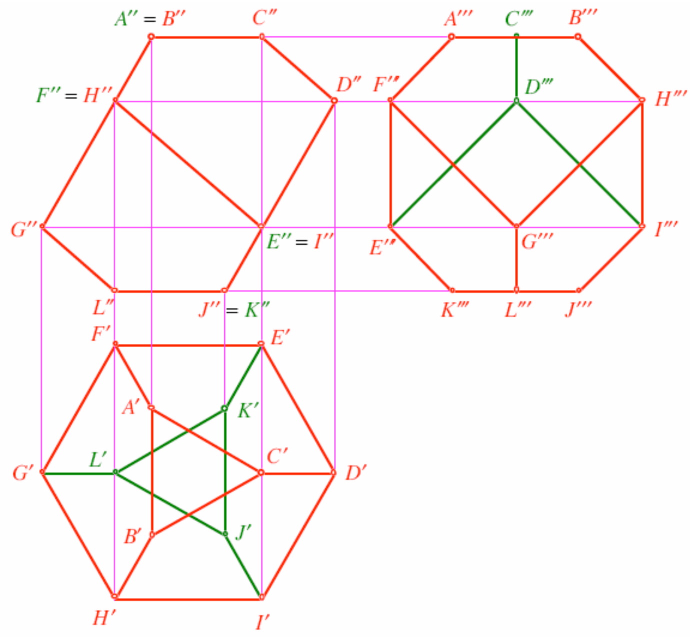
Eckkoordinaten (C2, C0, C6), (C2, -C0, -C6), (-C2, C0, C6)
(-C2, -C0, -C6), (0, -C4, C6), (0, C4, -C6)
(C5, C3, C1), (C5, -C3, -C1), (-C5, C3, C1)
(-C5, -C3, -C1), (0, -C7, C1), (0, C7, -C1)
Flächen { 10, 4, 2, 8, 9 }, { 10, 9, 3, 1, 7 }
{ 10, 7, 6, 0, 4 }, { 11, 5, 3, 9, 8 }
{ 11, 8, 2, 0, 6 }, { 11, 6, 7, 1, 5 }
{ 0, 2, 4 }, { 1, 3, 5 }
Abbildung: "Melancholia"





Auf Dürers Stich ist das Polyeder ein an zwei Polecken abgestumpftes Rhomboeder (nach Schröder).
Dies geht aus einer Vorstudie hervor, in welcher auch die verdeckten Kanten eingezeichnet sind. Die Vorstudie ist spiegelbildlich zur Ausführung im

späteren Stich. Dürer hatte in dieser perspektivischen Vorstudie auch den Augpunkt markiert.
Durch Schröder wurde auch ein Dreiseitenriss des Polyeders angegeben:
Abbildung: Dreiseitenriss des Dürer Polyeders

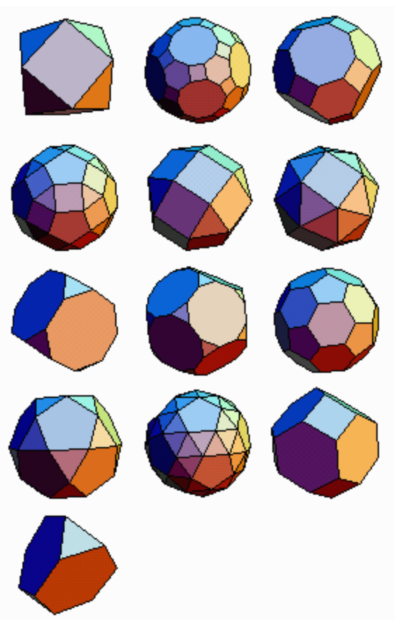


Das Polyeder hat als Seitenflächen zwei kongruente gleichseitige Dreiecke und sechs kongruente achsensymmetrische, aber nicht regelmäßige Fünfecke.
Es hat Punktsymmetrie, eine dreistrahlige Drehsymmetrie (Achse durch die beiden Dreiecksmitten), drei Achsen mit zweistrahliger Drehsymmetrie (Achsen durch Mittelpunkte gegenüberliegender langer Fünfeckskanten) und drei Symmetrieebenen.

Zum 300.Geburtstag Leonhard Eulers (1707-1783) veröffentlichte die schweizerische Post eine Briefmarke. Die Sondermarke zeigt links ein Polyeder sowohl in massiver Form, aber auch als Kantenmodell. Die im massiven Modell sichtbaren Kanten sind im Kantenmodell rot gezeichnet, die unsichtbaren Kanten grün. Die grünen Kanten geben damit eine Information über die nicht sichtbare Rückseite des Polyeders. Das Polyeder dient als Illustration zur Eulerschen Polyederformel e - k + f = 2.

Das Polyeder ist offensichtlich aus Dürers Melancholia (1514) entnommen worden. Allerdings wurde die nicht sichtbare Rückseite nicht im Sinne Dürers interpretiert.
Auf Dürers Stich ist das Polyeder ein an zwei Polecken abgestumpftes Rhomboeder und hat zwei kongruente gleichseitige Dreiecke und sechs kongruente achsensymmetrische, aber nicht regelmäßige Fünfecke als Seitenflächen.
Auf der Briefmarke hat der Körper ein regelmäßiges Dreieck, drei achsensymmetrische Fünfecke, ein Rechteck, zwei kongruente Parallelogramme, zwei unregelmäßige, aber zueinander kongruente Vierecke als Seitenflächen.
Diese beiden Vierecke liegen in einer Ebene und könnten somit sogar zu einem Sechseck zusammengefasst werden. Die Kante zwischen diesen beiden Vierecken ist also eine unechte Kante. (nach Hans Walser)

Archimedische Körper



Bereits Platon soll neben den nach ihm benannten regulären Polyedern das Kuboktaeder gekannt haben.
Seit Archimedes, dessen Arbeit darüber jedoch nicht erhalten geblieben ist, weiß man, dass es neben den Platonischen Körpern und (unendlich vielen) Prismen und Antiprismen noch genau dreizehn halbreguläre konvexe Polyeder gibt:

Abgeschrägtes Hexaeder und abgeschrägtes Dodekaeder kommen in zwei spiegelbildlichen Varianten vor, die sich nicht durch Drehungen zur Deckung bringen lassen. Es handelt sich also um chirale Körper.
- Abgeschrägtes Hexaeder (3,3,3,3,4)
- Kuboktaeder (3,4,3,4)
- kleines Rhombenkuboktaeder (3,4,4,4)
- Abgeschrägtes Dodekaeder (3,3,3,3,5)
- kleines Rhombenikosidodekaeder (3,4,5,4)
- Ikosidodekaeder (3,5,3,5)
- Abgestumpftes Tetraeder (3,6,6)
- Abgestumpftes Hexaeder (3,8,8)
- Abgestumpftes Dodekaeder (3,10,10)
- Abgestumpftes Oktaeder (4,6,6)
- Abgestumpftes Kuboktaeder oder großes

Rhombenkuboktaeder(4,6,8)
- Abgestumpftes Ikosidodekaeder oder großes Rhombenikosidodekaeder (4,6,10)
- Abgestumpftes Ikosaeder (5,6,6)

Es existieren genau 13 halbreguläre konvexe Polyeder, welche von mindestens 2 und höchstens 3 verschiedenen kongruenten N-Ecken begrenzt werden.

Körper an einer Ecke zusammentreffende N-Ecke

Körper					
1 Abgeschrägtes Hexaeder	3	3	3	3	4
2 Kuboktaeder	3	4	3	4	
3 Rhombenkuboktaeder	4	3	4	4	
4 Abgeschrägtes Dodekaeder	3	3	3	3	5
5 Rhombenikosidodekaeder	5	4	3	4	
6 Ikosidodekaeder	3	5	3	5	
7 Abgestumpftes Tetraeder	6	3	6		
8 Abgestumpftes Hexaeder	8	3	8		
9 Abgestumpftes Dodekaeder	10	3	10		
10 Abgestumpftes Oktaeder	6	4	6		
11 Abgestumpftes Kuboktaeder	8	4	6		
12 Abgestumpftes Ikosidodekaeder	10	4	6		
13 Abgestumpftes Ikosaeder, "Fußball"	5	6	6		

Alle Archimedischen Körper erfüllen die Gleichung $(2\pi - \sigma) * E = 4\pi$, wobei σ die Summe der Flächenwinkel an einer Ecke und E die Anzahl der Ecken sind. Es existieren genau 13 halbreguläre konvexe Polyeder, welche von mindestens 2 und höchstens 3 verschiedenen kongruenten N-Ecken begrenzt werden. Die Tabelle enthält die Eckenzahl (e), die Kantenzahl (k) und die Anzahl der verschiedenen Seitenflächen f_3, f_4, ...
Da die archimedischen Körper konvex sind, erfüllen sie alle die Eulersche Polyederformel.

Körper	e	k	f_3	f_4	f_5	f_6	f_8	f_{10}
1 Abgeschrägtes Hexaeder	24	60	32	6				
2 Kuboktaeder	12	24	8	6				
3 Rhombenkuboktaeder	24	48	8	18				
4 Abgeschrägtes Dodekaeder	60	150	80	12				
5 Rhombenikosidodekaeder	60	120	20	30	12			
6 Ikosidodekaeder	30	60	20	12				
7 Abgestumpftes Tetraeder	12	18	4	4				
8 Abgestumpftes Hexaeder	24	36	8	6				
9 Abgestumpftes Dodekaeder	60	90	20	12				
10 Abgestumpftes Oktaeder	24	36	6	8				
11 Abgestumpftes Kuboktaeder	48	72	12	8	6			
12 Abgestumpftes Ikosidodekaeder	120	180	30	20	12			
13 Abgestumpftes Ikosaeder	60	90	12	20				

Außenkugel, Umkugel - Archimedische Körper
Jeder Archimedische Körper besitzt eine Außenkugel bzw. Umkugel. Auf dieser liegen alle Eckpunkte des Körpers. R Radius der Außenkugel im Verhältnis zur Kantenlänge a

Nr.	R / a	
1	$1/2*\sqrt{(x^2-8x+4)/(x^2-5x+4)}$ ... mit $x = (19+3*\sqrt{33})^{1/3}$	≈ 1.34371
2	1	
3	$1/2*\sqrt{5+2*\sqrt{2}}$ ...	≈ 1.39897
4	$1/2*\sqrt{(8*2^{2/3}-16x+2^{1/3} x^2)/(8*2^{2/3} -10x+2^{1/3} x^2)}$ mit $x = (49+27\sqrt{5} +3\sqrt{6} *\sqrt{93+49\sqrt{5}})^{1/3}$	≈ 2.15583
5	$1/2*\sqrt{11+4*\sqrt{5}}$ ...	≈ 2.23295
6	$1/2*(1+\sqrt{5})$ ...	≈ 1.61803
7	$1/4*\sqrt{22}$ ...	≈ 1.17260
8	$1/2*\sqrt{7+4*\sqrt{2}}$ ...	≈ 1.77882
9	$1/4*\sqrt{74+30*\sqrt{5}}$ ...	≈ 2.96945
10	$1/2*\sqrt{10}$ ...	≈ 1.58114
11	$1/2*\sqrt{13+6*\sqrt{2}}$ ...	≈ 2.31761
12	$1/2*\sqrt{31+12*\sqrt{5}}$ ...	≈ 3.80239
13	$1/4*\sqrt{58+18*\sqrt{5}}$ ...	≈ 2.47802

Mittelkugel - Archimedische Körper

Jeder Archimedische Körper besitzt eine Mittelkugel. Auf dieser liegen alle Kantenmittelpunkte des Körpers. ρ Radius der Mittelkugel im Verhältnis zur Kantenlänge a (Nummern siehe vorherige Seiten)

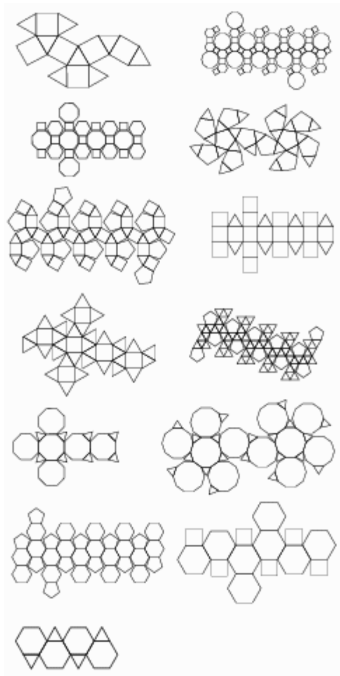
Nr.	ρ / a	
1	$\sqrt{(R^2 - a^2/4)}$ (siehe Außenkugelradius)	≈ 1.24719
2	$1/2 \sqrt{3}$	≈ 0.86603
3	$1/2*\sqrt{(4+2*\sqrt{(2)})}$	≈ 1.30656
4	$\sqrt{(R^2 - a^2/4)}$ (siehe Außenkugelradius)	≈ 2.09688
5	$1/2*\sqrt{(10+4*\sqrt{(5)})}$	≈ 2.17625
6	$1/2*\sqrt{(5+2*\sqrt{(5)})}$	≈ 1.53884
7	$3/4*\sqrt{(2)}$	≈ 1.06066
8	$1/2*(2+\sqrt{(2)})$	≈ 1.70711
9	$1/4*(5+3*\sqrt{(5)})$	≈ 2.92705
10	$3/2$	$= 1.5$
11	$1/2*\sqrt{(12+6*\sqrt{(2)})}$	≈ 2.26303
12	$1/2*\sqrt{(30+12*\sqrt{(5)})}$	≈ 3.76938
13	$3/4*(1+\sqrt{(5)})$	≈ 2.42705

Für Umkugelradius R, Mittelkugelradius ρ der Archimedischen Körpers und Inkugelradius r des dualen Catalanischen Körpers gilt:

$R = 1/2\ (r + \sqrt{(r^2 + a^2)})$ $\qquad$ $R = \sqrt{(\rho^2 + a^2/4)}$

$r = \rho^2 / \sqrt{(\rho^2 + 1/4\ a^2)}$ $\qquad$ $r = (R^2 - 1/4\ a^2) / R$

Eine Inkugel existiert bei Archimedischen Körpern nicht, dagegen bei den dualen Catalanischen Körpern, die jedoch keine Außenkugel besitzen.



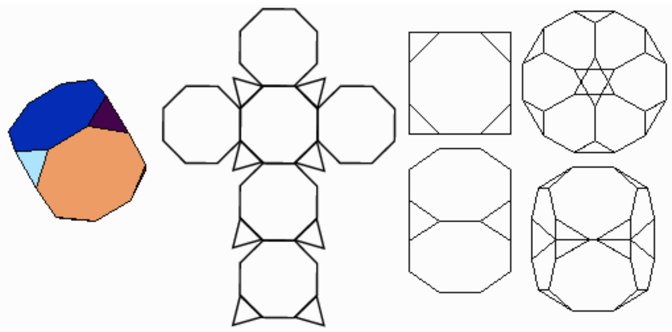
Duale Polyeder ... duale Polyeder zu den dreizehn Archimedischen Polyedern sind die Catalan Polyeder
Albrecht Dürer gibt für einige Archimedische Körper in dem vierten Buch seiner Vnderweysung der messung mit dem zirckel vnd dem richtscheyt von 1525 die Netze an.
Systematisch wurden sie allerdings erst von Johannes Kepler untersucht, der auch zwei nichtkonvexe reguläre Polyeder gefunden hat, die Keplerschen Sternpolyeder.

Netze der Archimedischen Körper

von links oben nach rechts unten:

1 Kuboktaeder
2 Rhombenikosidodekaeder
3 Rhombenkuboktaeder
4 Ikosidodekaeder
5 Abgestumpftes Ikosidodekaeder
6 Abgestumpftes Kuboktaeder
7 Abgeschrägtes Hexaeder
8 Abgeschrägtes Dodekaeder
9 Abgestumpftes Hexaeder
10 Abgestumpftes Dodekaeder
11 Abgestumpftes Ikosaeder
12 Abgestumpftes Oktaeder
13 Abgestumpftes Tetraeder

Albrecht Dürer gibt für einige Archimedische Körper in dem vierten Buch seiner "Vnderweysung der messung mit dem zirckel vnd dem richtscheyt" von 1525 die Netze an.
Systematisch wurden sie allerdings erst von Johannes Kepler untersucht, der auch zwei nichtkonvexe reguläre Polyeder gefunden hat, die Keplerschen Sternpolyeder.



Abgestumpftes Hexaeder, Würfelstumpf

14-flächiges Archimedisches Polyeder A_9, welches zum Triakisoktaeder dual ist. Schläfli-Symbol t{4,3}
Der Würfelstumpf besteht aus 6 Achtecken und 8 Dreiecken, hat also 14 Seitenflächen und besitzt zudem 24 Ecken und 36 Kanten.
Das Polyeder ist ein uniformes Polyeder U_9, Euler-Charakteristik 2.

Alle weiteren Werte für ein abgestumpftes Hexaeder mit einer Kantenlänge von a

Mittelkugelradius

$\rho = 1/2\ (2 + \sqrt{2})\ a \approx 1{,}70711\ a$

Umkugelradius

$R = 1/2\ \sqrt{(7 + 4\sqrt{2})}\ a \approx 1{,}77882\ a$

Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Dreiecke r_3 und der Achtecke r_8

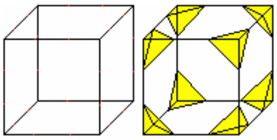
$r_3 = 1/2\ \sqrt{(1/3\ (17 + 12\sqrt{2}))}\ a \approx 1{,}68252\ a$

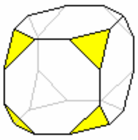
$_{r8} = 1/2\ (1 + \sqrt{2})\ a \approx 1{,}20710\ a$

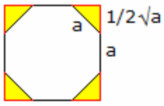
Oberflächeninhalt $A = (12 + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\ a^2 \approx 35{,}8987\ a^2$

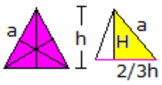
Volumen $V = (7 + 14/3\ \sqrt{2})\ a^3 \approx 13{,}5996\ a^3$

isoperimetrischer Koeffizient = 0,452137









Abgestumpftes Hexaeder, Würfelstumpf, abgestumpfter Würfel

Ein abgestumpfter Würfel ist ein Körper, der von 6 regelmäßigen Achtecken und 8 gleichseitigen Dreiecken gebildet wird.

Er entsteht aus einem Würfel, indem man an den Ecken passend dreiseitige Pyramiden abschneidet. Dazu teilt man alle Kanten so, dass regelmäßige Achtecke entstehen. Da an jeder Ecke regelmäßige Vielecke in gleicher Weise aufeinandertreffen, gehört er zu den archimedischen Körpern.

Aus den acht Ecken des Würfels werden bei diesem Körper acht gleichseitige Dreiecke. Die sechs Quadrate des Würfels bleiben als Achtecke erhalten. Neben den 14 Seitenflächen hat der abgestumpfte Würfel 36 Kanten und 24 Eckpunkte.

Die Oberfläche setzt sich aus den Flächeninhalten der sechs Achtecke und der acht Dreiecke zusammen: $A = 6\ A_8 + 8\ A_3$.

Ist a die Kantenlänge des abgestumpften Würfels, so hat das Achteck den Flächeninhalt

$A_8 = (a + \sqrt{2}\ a)^2 - 4\ (1/2\ (1/2\ \sqrt{2})^2\ a^2) = 2a^2 + 2\sqrt{2}\ a^2$

Es gilt außerdem $A_3 = 1/4\ \sqrt{3}\ a^2$ und somit

$A = 6\ A_8 + 8\ A_3 = 2\ (6 + 6\sqrt{2} + \sqrt{3}\ )\ a^2$

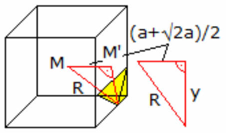
Man erhält das Volumen des abgestumpften Würfels, indem man vom Volumen des Würfels 8 Mal das Volumen der abzuschneidenden Pyramide subtrahiert. Der Würfel hat ein Volumen von

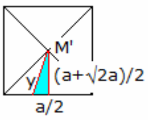
$V' = (7 + 5\sqrt{2})\ a^3$

Die Grundfläche der Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Flächeninhalt $A_3 = 1/4\ \sqrt{3}\ a^2$. Die Raumhöhe H erhält man, wenn man einen Schnitt durch die Pyramide längs einer Flächenhöhe h des Dreiecks legt. Es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten H, a und 2/3 h und somit

$H = 1/6\ \sqrt{6}\ a$

Damit ist $V_8 = 1/24\ \sqrt{2}\ a^3$ und $V = V' - 8\ V_8 = 1/3\ (21 + 14\sqrt{2})\ a^3$.





Radius R der Umkugel

M sei der Mittelpunkt des Würfels. In den Würfel legt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten R, dem Abstand des Mittelpunkts von einer Seitenfläche (a + √2) a/2 und der Größe y. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

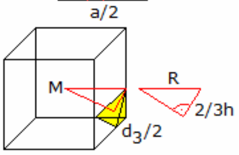
$R^2 = (1/2\ (a + \sqrt{2})\ a)^2 + y^2$

Im blauen Dreieck gilt

$y^2 = a^2 + 1/2\ \sqrt{2}\ a^2$

$R^2 = (1/2\ (a + \sqrt{2})\ a)^2 + a^2 + 1/2\ \sqrt{2}\ a^2 = (7/4 + \sqrt{2})\ a^2$ oder

$R = 1/2\ \sqrt{(7 + 4\sqrt{2})}\ a$



Abstand d_3 der Dreiecke

Der Abstand ist eine Teilstrecke der Raumdiagonale des Würfels und ist die Länge der Verbindungslinie der Mittelpunkte gegenüberliegender Dreiecke. Im nebenstehenden rechtwinkligen Dreieck liest man ab:

$1/4\ d_3^2 = R^2 - (2/3\ h)^2 = 7/4\ a^2 + \sqrt{2} - 1/3\ a^2$ $\qquad d_3 = 1/3\ \sqrt{(51 + 36\sqrt{2})}\ a$

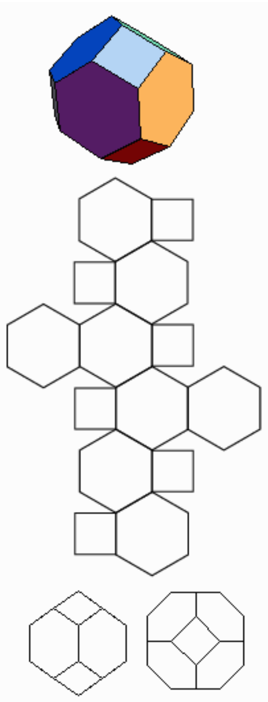
Abstand d8 der Achtecke

Der Abstand der Achtecke ist die Kantenlänge des Würfels: $d_8 = (1 + \sqrt{2})\ a$

Eckpunktkoordinaten

	x	y	z		x	y	z
P1	0	0	0.6773065	P13	0.36540985	0	0.57028075
P2	-0.31189665	0.19038045	0.57028075	P14	0.16703115	-0.325	0.57028075
P3	0.57028075	0.19038045	0.31189665	P15	-0.5859542	0.13461955	0.31189665
P4	-0.38757615	0.45961955	0.31189665	P16	0.0913523	-0.5942391	0.31189665
P5	0.661635	0.13461955	-0.05351307	P17	0.4946019	0.45961955	0.05351307
P6	-0.661635	-0.13461955	0.05351307	P18	-0.18270525	0.65	0.05351307
P7	-0.18270525	-0.65	0.05351307	P19	0.18270525	-0.65	-0.05351307
P8	0.5859542	-0.13461955	-0.31189665	P20	0.18270525	0.65	-0.05351307

P9	-0.4946019	-0.45961955	-0.05351307	P21	-0.57028075	-0.19038045	-0.31189665
P10	-0.0913523	0.5942391	-0.31189665	P22	0.38757615	-0.45961955	-0.31189665
P11	0.31189665	-0.19038045	-0.57028075	P23	-0.36540985	0	-0.57028075
P12	-0.16703115	0.325	-0.57028075	P24	0	0	-0.6773065



Abgestumpftes Oktaeder, Oktaederstumpf

14-flächiges Archimedisches Polyeder A_{12}, welches zum Tetrakishexaeder dual ist. Schläfli-Symbol t{3,4}
Der Oktaederstumpf hat 14 Seitenflächen: 8 Sechsecke und 6 Quadrate. Die Ecken- und Kantenzahl ist wie beim Würfelstumpf: 24 Ecken und 36 Kanten.
Das Polyeder ist ein uniformes Polyeder U_8, Euler-Charakteristik 2, und besitzt die Oktaeder-Symmetriegruppe. Das Mineral Fluorit CaF_2 kristalliert in Form von abgestumpften Oktaedern. Das Polyeder wird auch Tetrakaidekaeder von Kelvin genannt.
Mit dem abgestumpften Oktaeder kann der Raum lückenlos ausgefüllt werden.

Alle weiteren Werte für ein abgestumpftes Oktaeder mit einer Kantenlänge von a

Mittelkugelradius	$\rho = 3/2\ a$
Umkugelradius	$R = 1/2 \sqrt{10}\ a \approx 1{,}58114\ a$

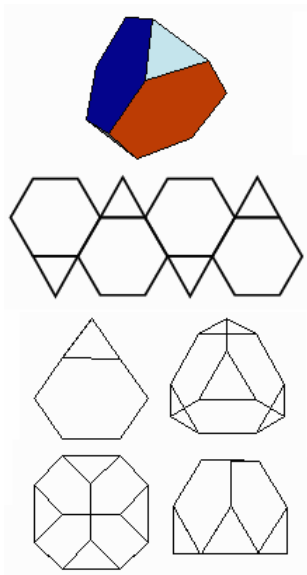
Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Quadrate r_4 und der Sechsecke r_6

	$r_4 = \sqrt{2}\ a \approx 1{,}41421\ a$
	$r_6 = 1/2 \sqrt{6}\ a \approx 1{,}22474\ a$
Oberflächeninhalt	$A = (6 + 12 \sqrt{3})\ a^2 \approx 26{,}7846\ a^2$
Volumen	$V = 8 \sqrt{2}\ a^3 \approx 11{,}3137\ a^3$
	$V = 1280/729 \sqrt{5}\ r^3 \approx 3{,}926155022\ r^3$

Dieder-Winkel zwischen den Sechsecken arccos -1/3 ≈ 109,471221 und zwischen den Quadraten und Sechsecken arccos $-\sqrt{3}/3$ ≈ 125,26438968°

Eckpunktkoordinaten eines abgestumpften Oktaeders

	x	y	z		x	y	z
P0,1	$-\sqrt{3}/2$	±1/2	$-\sqrt{6}/2$	P2,3	$-5\cdot\sqrt{3}/6$	±1/2	$-\sqrt{6}/6$
P4	0	-1	$-\sqrt{6}/2$	P5	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{6}/2$
P6	$2\cdot\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{6}/6$	P7	$\sqrt{3}/6$	-3/2	$-\sqrt{6}/6$
P8	0	1	$-\sqrt{6}/2$	P9	$\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{6}/2$
P10	$2\cdot\sqrt{3}/3$	1	$-\sqrt{6}/6$	P11	$\sqrt{3}/6$	3/2	$-\sqrt{6}/6$
P12	$5\cdot\sqrt{3}/6$	-1/2	$\sqrt{6}/6$	P13	$5\cdot\sqrt{3}/6$	1/2	$\sqrt{6}/6$
P14	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{6}/2$	P15	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{6}/2$
P16	$-2\cdot\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{6}/6$	P17	$-\sqrt{3}/6$	3/2	$\sqrt{6}/6$
P18	0	1	$\sqrt{6}/2$	P19	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{6}/2$
P20	$-2\cdot\sqrt{3}/3$	-1	$\sqrt{6}/6$	P21	$-\sqrt{3}/6$	-3/2	$\sqrt{6}/6$
P22	0	-1	$\sqrt{6}/2$	P23	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{6}/2$



Abgestumpftes Tetraeder

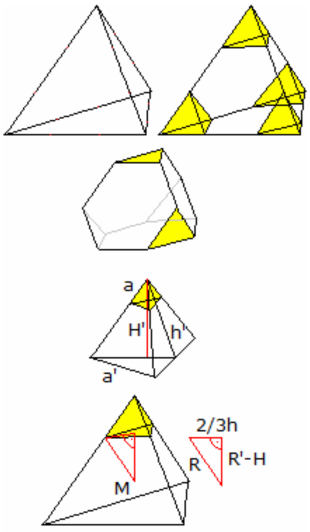
8-flächiges Archimedisches Polyeder A_7, welches zum Triakistetraeder dual ist.
Schläfli-Symbol t{3,3}, franz. tétraèdre tronqué
Der Tetraederstumpf besteht aus je vier Dreiecken und Sechsecken, hat also 8 Seitenflächen, 12 Ecken und 18 Kanten. An jeder Ecke treffen drei Kanten zusammen. Er entsteht durch Abschleifen der Spitzen eines Tetraeders.
Das Polyeder ist ein uniformes Polyeder U_2, Euler-Charakteristik 2, und hat 7 Rotationsachsen und 6 Spiegelebenen.
Dieder-Winkel zwischen 2 Sechsecken arccos 1/3 ≈ 70°31'44" ≈ 70,5287794°, zwischen einem Sechseck und einem Dreieck arccos -1/3 ≈ 109°28'16" ≈ 109,4712206°

Alle weiteren Werte für ein abgestumpftes Tetraeder mit einer Kantenlänge von a

Mittelkugelradius	$\rho = 3/4 \sqrt{2}\ a \approx 1{,}06066\ a$
Umkugelradius	$R = 1/4 \sqrt{22}\ a \approx 1{,}17260\ a$

Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Dreiecke r_3 und der Sechsecke r_6

	$r_3 = 5/12 \sqrt{6}\ a \approx 1{,}02062\ a$
	$r_6 = 1/4 \sqrt{6}\ a \approx 0{,}612372\ a$
Oberflächeninhalt	$A = 7 \sqrt{3}\ a^2 \approx 12{,}1244\ a^2$
Volumen	$V = 23/12 \sqrt{2}\ a^3 \approx 2{,}71057\ a^3$



Ein abgestumpftes Tetraeder ist ein Körper, der von 4 regelmäßigen Sechsecken und 4 gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Es entsteht aus einem Tetraeder, indem man an den Ecken dreiseitige Pyramiden abschneidet. Das abgestumpfte Tetraeder sei durch die Kantenlänge a gegeben.
Die Oberfläche setzt sich aus den Flächeninhalten der vier Sechsecke und der vier Dreiecke zusammen. Damit wird $A = 4\ A_6 + 4\ A_3 = 7\ \sqrt{3}\ a^2$

Man erhält das Volumen des abgestumpften Tetraeders, indem man das vierfache Volumen einer Pyramide vom Volumen des Tetraeders subtrahiert.
Ein Tetraeder der Kantenlänge a' hat ein Volumen von $V'_3 = 1/12\ \sqrt{2}\ a'^3$ und eine Höhe von $h' = 1/3\ \sqrt{}\ a'$.
Nach dem ersten Strahlensatz wird $a = a'/3$, $h = h'/3$ und somit $V_3 = 1/12\ \sqrt{2}\ a^3$. Damit gilt für das Volumen $V = V'_3 - 4\ V_3 = 23/12\ \sqrt{2}\ a^3$

Der Umkugelradius des großen Tetraeders ist $r' = 1/4\ \sqrt{6}\ a'$. M sei der Mittelpunkt des Tetraeders. In das Tetraeder legt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten r, dem Abstand des Mittelpunkts von einer Seitenfläche r'-h und $1/3\ \sqrt{3}$ a. Nach dem Satz des Pythagoras wird dann

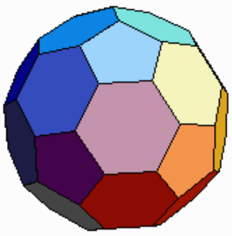
$r = 1/4\ \sqrt{22}\ a$

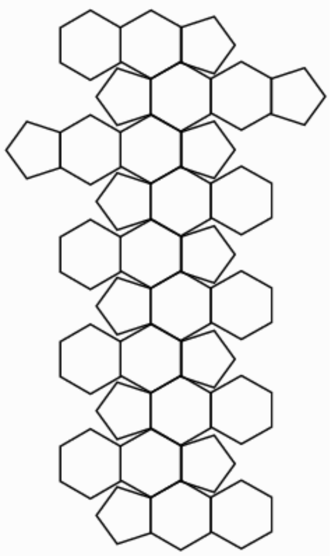
Für den Abstand d_{36} eines Dreiecks vom gegenüberliegenden Sechseck ergibt sich analog

$d_{36} = h'-h = 2/3\ \sqrt{6}\ a$

Eckpunktkoordinaten eines abgestumpften Tetraeders

	x	y	z				
P1	-√3/2	1/2	-√6/4	P2	-√3/2	-1/2	-√6/4
P3	-2·√3/3	0	√6/12	P4	0	-1	-√6/4
P5	√3/2	-1/2	-√6/4	P6	√3/3	-1	√6/12
P7	√3/2	1/2	-√6/4	P8	0	1	-√6/4
P9	√3/3	1	√6/12	P10	-√3/3	0	5·√6/12
P11	√3/6	-1/2	5·√6/12	P12	√3/6	1/2	5·√6/12





Abgestumpftes Ikosaeder, Ikosaederstumpf

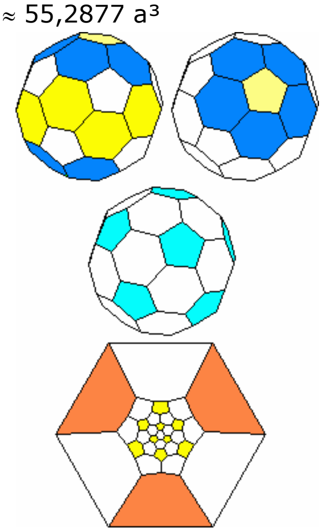
32-flächiges Archimedisches Polyeder A_{11}, welches zum Pentakisdodekaeder dual ist. Schläfli-Symbol t{3,5}
Der Ikosaederstumpf hat 32 Seitenflächen: 12 Fünf- und 20 Sechsecke. Die Eckenzahl beträgt 60, die der Kanten 90. Das Polyeder ist ein uniformes Polyeder U_{25}, Euler-Charakteristik 2. Die Kohlenstoffmodifikation Fullerene C_{60} bildet ein abgestumpftes Ikosaeder.
Diederwinkel zwischen den Sechsecken arccos $-\sqrt{5}/3 \approx 138{,}1896851° \approx$ 138°11'22" und zwischen Fünfeck und Sechseck arccos $(-\sqrt{(15\ (5+ 2\sqrt{5}))/15}) \approx 142{,}6226319° \approx$ 142° 37' 21"

Alle weiteren Werte für ein abgestumpftes Ikosaeder mit einer Kantenlänge von a

Mittelkugelradius $\rho = 3/4\ (1 + \sqrt{5})\ a \approx 2{,}42705\ a$
Umkugelradius $R = 1/4\ \sqrt{(58 + 18\ \sqrt{5})}\ a \approx 2{,}47802\ a$
Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Fünfecke r_5 und der Sechsecke r_6

$r_5 = 1/2\ \sqrt{(1/10\ (125 + 41\ \sqrt{5}))}\ a \approx 2{,}32743\ a$
$r_6 = 1/2\ \sqrt{(3/2\ (7 + 3\ \sqrt{5}))}\ a \approx 2{,}26728\ a$

Oberflächeninhalt $A = 3\ (10\ \sqrt{3} + \sqrt{5}\ \sqrt{(5 + 2\ \sqrt{5})})\ a^2 \approx 72{,}6072\ a^2$
Volumen $V = 1/4\ (125 + 43\ \sqrt{5})\ a^3 \approx 55{,}2877\ a^3$



Das Volumen setzt sich aus den Volumina der 12 Fünf- und 20 Sechseckpyramiden zusammen:

$V = 12 \cdot A_5 h_5/3 + 20 \cdot A_6 h_6/3$
$A_5 = \sqrt{(25 + 10\ \sqrt{5})/4}\ a^2$ und
$A_6 = 3\ \sqrt{3}\ /2\ a^2$.

Setzt man diese Terme in die Gleichung ein, so ergibt sich die Volumenformel.

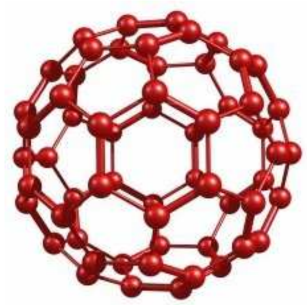
Eine Besonderheit stellt das abgestumpfte Ikosaeder dar. Da es mit relativ wenig Körperseiten eine Kugel sehr gut annähert, wird es als Vorlage zur Konstruktion von Bällen, insbesondere Fußbällen, benutzt.
Zum anderen gibt es Makromoleküle aus Kohlenstoffatomen in der gleichen Form. Dieses Molekül heißt Fulleren oder Buckyball. Durch ein spezielles Linsensystem in Form eines Ikosaederstumpfs wurde bei der "Fat Man"-

Atombombe eine möglichst konzentrische Implosionssprengung erzeugt, damit eine unterkritische Menge Plutonium durch Verdichtung überkritisch wird und die Kernkettenreaktion einsetzt.

Jedes Fünfeck ist isoliert und von fünf Sechsecken umgeben.
Jeweils fünf Sechsecke bilden einen Ring. Liegen zwei Fünfecke oben und unten einander parallel gegenüber und bilden dort die Mitte von Ringen, so laufen an einer Mittellinie zehn Sechsecke als Zickzacklinie um den Körper herum. Die beiden Ringe sind gegeneinander gedreht.
untere Abbildung: Schlegel-Diagramm des Ikosaederstumpfs
Das Polyeder hat 21 Symmetrieachsen und 9 Symmetrieebenen. Die Bewegungsgruppe ist die Ikosaedergruppe.
Eckpunktkoordinaten eines Ikosaederstumpfes
mit q = ± 1

	x	y	z
P1-4	q/5·√(25+10·√5)	±1	-q/20·√(650+290·√5)
P5-8	-q/5·√(25+10·√5)	±(√5+1)/2	-3q/20·√(50+10·√5)
P9-10	-q/5·√(50+10·√5)	0	-q/20·√(650+290·√5)
P11-14	q/10·√(25+10·√5)	±1/2	-q/20·√(1250+410·√5)
P15-18	q/10·√(25-10·√5)	±(√5+2)/2	-3q/20·√(50+10·√5)
P19-20	-q/10·√(50+10·√5)	0	-q/20·√(1250+410·√5)
P21-24	-q/10·√(50-10·√5)	±(√5+1)/2	-q/20·√(650+290·√5)
P25-28	-q/10·√(125+10·√5)	±(√5+2)/2	-q/20·√(50+10·√5)
P29-32	q/10·√(250+110·√5)	±1	-q/20·√(50+10·√5)
P33-36	-q/10·√(325+110·√5)	±1/2	-q/20·√(50+10·√5)
P37-40	3q/10·√(25+10·√5)	±1/2	-3q/20·√(50+10·√5)
P41-44	-q/20·√(50-10·√5)	±(√5+1)/4	-q/20·√(1250+410·√5)
P45-48	-q/20·√(50-10·√5)	±3·(√5+1)/4	-q/20·√(50+10·√5)
P49-52	q/20·√(250+110·√5)	±(5+√5)/4	-3q/20·√(50+10·√5)
P53-56	q/20·√(650+190·√5)	±(5+√5)/4	-q/20·√(50+10·√5)
P57-60	-q/20·√(850+310·√5)	±(√5+1)/4	-3q/20·√(50+10·√5)

Buckminster Fuller, Fulleren



Die Ecken der geometrischen Figuren Fullers werden erzeugt durch Großkreise auf der Oberfläche einer Kugel.
Fullers Konstruktionen sind Netzwerke von Kugeldreiecken, die sich durch sich kreuzende Großkreise auf der Kugel ergeben. Er nennt die Strukturen "geodesics".
Geodätische Kuppel können auch als Zentralprojektionen verschiedener Polyeder vom Mittelpunkt auf die umhüllende Kugel erzeugt werden, wobei die Ecken der Polyeder auf der Sphäre liegen.

Eine grundlegende Figur stellt Fullers Patent von 1954 dar, eine Projektion des Ikosaederstumpfes auf die umschriebene Sphäre. Es ergeben sich immer 12 Fünfecke an den Ecken des Ikosaeders, die verbleibenden projizierten Dreiecke können in Dreiecke, Sechsecke oder Rhomben unterteilt werden.

1985 entdeckten Chemiker eine neue Modifikation des Kohlenstoffs, Fulleren genannt, nachdem Kohlenstoff vorher nur in der Form von Diamant und Graphit bekannt war.
Diamant ist eine Raumpackung von tetraedrischen Dolden, die des Graphit von Sechseckringen, die des Buckminster-Fulleren C60, das Fulleren mit größter Symmetrie, verbindet 60 Kohlenstoffatome zu einem fast kugelförmigen Molekül in der Form des Ikosaederstumpfes.

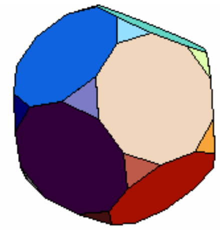
Kroto, Curl und Sinalley erhielten 1996 für ihre Entdeckung den Nobelpreis und nannten die neuen Kohlenstoffmodifikationen Fullerene.

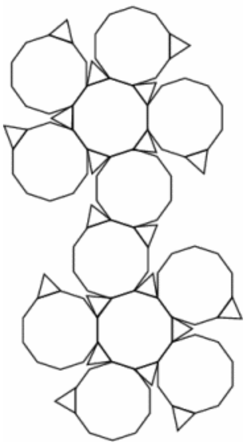
Fußball

Der klassische Lederfußball wird aus 20 weißen Sechsecken und zwölf schwarzen Fünfecken genäht. Diese Zahlen erinnern an die Anzahl der Ecken und Flächen eines Dodekaeders, dessen rote Kanten unten im Bild auf den Europass-Fußball gezeichnet wurden.
Der Ausgangspunkt des Fußballs ist damit ein Ikosaederstumpf.

Warum der Fußball als abgestumpftes Ikosaeder realisiert wurde, ist nicht vollständig geklärt. Man hätte auch einen Würfel oder ein anderes archimedisches oder reguläres Polyeder verwenden können.
Im Vergleich zu anderen Körpern mit vergleichbarem Verhältnis der Radien von Umkugel zu Inkugel minimiert der klassische Fußball die Anzahl der Kanten pro Ecke (3) sowie die Anzahl der Lederflecken (32) und der Nähte (90). Damit ist der klassische Fußball optimal.

Die Bälle der Weltmeisterschaft 2006 (Teamgeist) und Europameisterschaft 2008 (Europass) zeigen trotz Unterschiede erhebliche Ähnlichkeiten zum klassischen Fußball:
Der Teamgeist von 2006 und der Europass 2008 haben die Symmetrie eines Pyritkristalls. Wie ein Dodekaeder besteht das Kristall aus zwölf Fünfecken, allerdings haben die Fünfecke unterschiedliche Seitenlängen und sind paarweise an ihrer kürzesten Kante verbunden.
Damit hat der aktuelle Fußball eine reduzierte Symmetrie gegenüber dem klassischen Fußball aus Fünf- und Sechsecken.





Abgestumpftes Dodekaeder, Dodekaederstumpf

32-flächiges Archimedisches Polyeder A_{10} (20 gleichseitige Dreiecke, 12 regelmäßige Zehnecke), welches zum Triakisikosaeder dual ist. Schläfli-Symbol t{5,3}
Das Polyeder ist ein uniformes Polyeder U_{26}, Euler-Charakteristik 2, mit 12 Zehnecken, 20 Dreiecken als Seitenflächen und 60 Ecken der Ordnung 3 und 90 Kanten, mit den Diederwinkeln arccos $-\sqrt{5}/5 \approx 116{,}565051° \approx 116°33'$ zwischen zwei Zehnecken und arccos $(-\sqrt{(15 (5 + 2 \sqrt{5}))/15}) \approx 142{,}622632° \approx 142°37'$ zwischen Zehneck und Dreieck.

Alle weiteren Werte für ein abgestumpftes Dodekaeder mit einer Kantenlänge von a

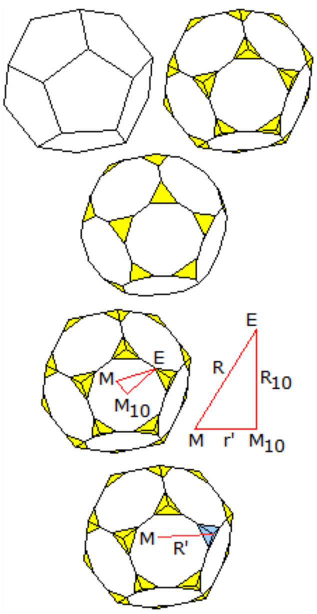
Mittelkugelradius	$\rho = 1/4\ (5 + 3 \sqrt{5})\ a \approx 2{,}92705\ a$
Umkugelradius	$R = 1/4 \sqrt{(74 + 30 \sqrt{5})}\ a \approx 2{,}96945\ a$

Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Dreiecke r_3 und der

Zehnecke r_{10}	$r_3 = 1/12 \sqrt{3}\ (9 + 5 \sqrt{5})\ a \approx 2{,}91278\ a$
	$r_{10} = 1/2 \sqrt{(1/2\ (25 + 11 \sqrt{5}))}\ a \approx 2{,}48989\ a$
Oberflächeninhalt	$A = 5\ (\sqrt{3} + 6 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})})\ a^2 \approx 100{,}990\ a^2$
Volumen	$V = 5/12\ (99 + 47 \sqrt{5})\ a^3 \approx 85{,}039665\ a^3$

Isoperimetrischer Koeffizient $36\pi\ V^2/A^3 \approx 0{,}79$
15 Symmetriebenen; 6 Rotationsachsen mit 4 Drehungen der Ordnung 5 durch Mittelpunkte gegenüberliegender Zehnecke, 10 Rotationsachen mit 2 Drehungen 3.Ordnung durch die Schwerpunkte gegenüberliegender Dreiecke und 15 Achsen mit je 1 Drehung 2.Ordnung durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten
Symmetriegruppe = Dodekaedergruppe

Der Dodekaederstumpf entsteht aus einem Pentagondodekaeder durch das Abschneiden dreiseitiger Pyramiden an den Ecken. Dafür werden die Kanten so geteilt, dass regelmäßige Zehnecke entstehen. Aus den acht Ecken des Pentagondodekaeder werden bei diesem Körper acht gleichseitige Dreiecke. Die 12 Fünfecke des Pentagondodekaeder bleiben als kleinere Zehnecke erhalten.



Radius R der Umkugel

M sei der Mittelpunkt des Pentagondodekaeders. In das abgestumpfte Dodekaeder legt man das rechtwinkliges Dreieck $MM_{10}E$. M_{10} ist der Mittelpunkt des Zehnecks.
r' ist der Radius der Inkugel des Pentagondodekaeders, R_{10} ist der Radius des Umkreises des Zehnecks und R ist der gesuchte Radius der Umkugel des abgestumpften Dodekaeders.
Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$R^2 = r'^2 + R_{10}^2 \text{ oder } R^2 = 1/16 \sqrt{(74+30 \sqrt{5})}\ a^2$$

Dann ist $R = 1/4 \sqrt{(74 + 30 \sqrt{5})}\ a$
Der Abstand der Zehnecke ist gleich dem Abstand der Fünfecke des zugehörigen Pentagondodekaeders.

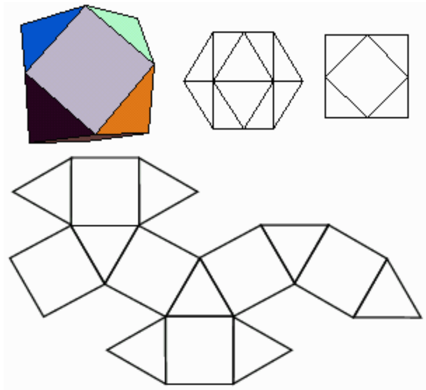
$$r_{10} = 2r' = 1/2 \sqrt{(50 + 22 \sqrt{5})}\ a$$

Abstand r_3 der Dreiecke: Man erhält den halben Abstand der Dreiecke, wenn man vom Radius R' der Umkugel des Pentagondodekaeders die Höhe H der abzuschneidenden Pyramide abzieht, d.h. $r_3 / 2 = R'-H$.
Es gilt $R' = (1/4 \sqrt{15} + 5/4 \sqrt{3})\ a$
für die Höhe $H = (1/2 \sqrt{3} - 1/6 \sqrt{15})\ a$
und so $r_3 = 1/6\ (9 \sqrt{3} + 5 \sqrt{15})\ a$

Eckpunktkoordinaten eines Dodekaederstumpfes
mit q = ± 1

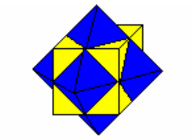
	x	y	z
P1-4	0	$\pm(\sqrt{5}+1)/2$	$\pm 1/4\cdot\sqrt{(50+22\cdot\sqrt{5})}$
P5-12	$\pm 1/2\cdot\sqrt{(5+2\cdot\sqrt{5})}$	$\pm 1/2$	$\pm 1/4\cdot\sqrt{(50+22\cdot\sqrt{5})}$
P13-20	$\pm 1/4\cdot\sqrt{(10+2\cdot\sqrt{5})}$	$\pm(3+\sqrt{5})/4$	$\pm 1/4\cdot\sqrt{(50+22\cdot\sqrt{5})}$
P21-24	$-q/5\cdot\sqrt{(25+10\cdot\sqrt{5})}$	$\pm(3+\sqrt{5})/2$	$-q/20\cdot\sqrt{(50-10\cdot\sqrt{5})}$

P25-26	$-2q/5\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	0	$-q/20\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$
P27-30	$-q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(\sqrt{5}+2)/2$	$-q/20\cdot\sqrt{850+310\cdot\sqrt{5}}$
P31-34	$-q/10\cdot\sqrt{50+10\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(3+\sqrt{5})/2$	$-q/20\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$
P35-36	$-q/10)\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$	0	$-q/20\cdot\sqrt{850+310\cdot\sqrt{5}}$
P37-40	$q/10\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(\sqrt{5}+1)/2$	$-q/20\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$
P41-44	$-q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$	$\pm 1/2$	$-q/20\cdot\sqrt{50-10\cdot\sqrt{5}}$
P45-48	$3q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(\sqrt{5}+2)/2$	$-q/20\cdot\sqrt{50-10\cdot\sqrt{5}}$
P49-52	$q/20\cdot\sqrt{650+290\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(3+\sqrt{5})/4$	$-q/20\cdot\sqrt{850+310\cdot\sqrt{5}}$
P53-56	$-q/20\cdot\sqrt{50+10\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(5+3\cdot\sqrt{5})/4$	$-q/20\cdot\sqrt{50-10\cdot\sqrt{5}}$
P57-60	$q/20\cdot\sqrt{1450+610\cdot\sqrt{5}}$	$\pm(3+\sqrt{5})/4$	$-q/20\cdot\sqrt{50-10\cdot\sqrt{5}}$

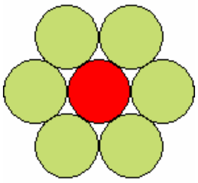


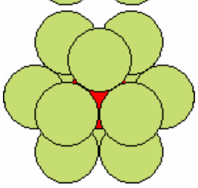
Kuboktaeder

andere Bezeichnungen: Dymaxion, Siebenparalleler, Mittelkristall
auch Kubooktaeder
Wird ein Würfelstumpf abgeschliffen, so entsteht das Kuboktaeder, das Quadrate und gleichseitige Dreiecke als Seiten hat. Es entsteht auch als Kernkörper der Durchdringung eines Würfels und eines Oktaeders. An jeder Ecke treffen vier Kanten zusammen.
Insgesamt besitzt das Kuboktaeder 14 Seitenflächen (6 Quadrate und 8 gleichseitige Dreiecke), 12 Ecken und 24 Kanten.
14-flächiges Archimedisches Polyeder A1, uniformes Polyeder U7, das dual zum Rhombendodekaeder ist.



Das Mineral Argentit Ag_2S kristalliert in Form von Kuboktaedern.
Die Symmetriegruppe ist die Oktaedergruppe, die Euler-Charakteristik beträgt 2.
Dieder-Winkel arccos $-\sqrt{3}/3 \approx 125{,}264389683°$





Bei einer Kantenlänge von $\sqrt{2}$ liegen die Eckpunkte bei
$(0, \pm1, \pm1)$; $(\pm1, 0, \pm1)$; $(\pm1, \pm1, 0)$
Bei einer Kantenlänge von a ergibt sich

Mittelkugelradius	$\rho = 1/2\ \sqrt{3}\ a \approx 0{,}866025\ a$
Umkugelradius	$R = a$
Oberfläche	$A = (6 + 2\sqrt{3})\ a^2 \approx 9{,}46410\ a^2$
Volumen	$V = 5/3\ \sqrt{2}\ a^3 \approx 2{,}35702\ a^3$

Der Begriff Kuboktaeder setzt sich aus Kubus und Oktaeder zusammen. Setzt man auf die Würfelflächen quadratische Pyramiden, so durchdringen sich ein (gelber) Würfel und ein (blaues) Oktaeder. Der gemeinsame Bereich ist das Kuboktaeder.

Beim Kuboktaeder liegen sich zwei Quadratflächen gegenüber. Ihr Abstand ist $d_1 = \sqrt{2}$ a.
Zwei Dreiecksflächen liegen sich ebenfalls gegenüber. Ihr Abstand d_2 ist gleich der Raumdiagonalen des Würfels $\sqrt{3}\ \sqrt{2}\ a = \sqrt{6}\ a$, vermindert um die doppelte Höhe der Eckenpyramide. Die Höhe h wird auf die Grundfläche gleichseitiges Dreieck bezogen. Für das Volumen der Dreieckpyramide gilt $V = \sqrt{2}/24\ a^3$.
Daraus folgt $h = \sqrt{6}/6$. Der gesuchte Abstand ist $d_2 = 2/3\ \sqrt{6}\ a$.

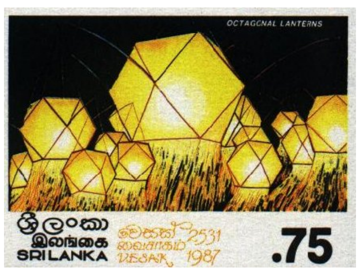
Legt man an eine (rote) Kugel in der Ebene sechs gleiche Kugeln und in die Vertiefungen oben und unten je drei weitere Kugeln, so bilden die Mittelpunkte der anderen Kugeln die Eckpunkte eines Kuboktaeders.
Das führt zur kubisch dichtesten Kugelpackung im Raum. 12 Kugeln berühren eine Zentralkugel.
Im zweidimensionalen Fall berühren sechs Kreise einen Zentralkreis, im vierdimensionalen 24 Hyperkugeln eine Zentralhyperkugel. Eine Zahl wie 6, 12 oder 24 heißt "kissing number".
Das Mineral Argentit Ag_2S kristalliert in Form von Kuboktaedern.

Eckpunktkoordinaten eines Kuboktaeders

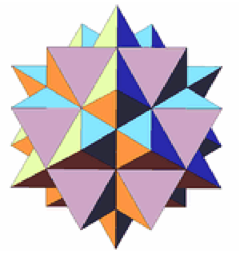
	x	y	z				
P0	-1	0	0	P1	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	0
P2	1/2	$-\sqrt{3}/2$	0	P3	1	0	0
P4	1/2	$\sqrt{3}/2$	0	P5	-1/2	$\sqrt{3}/2$	0
P6	-1/2	$-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{6}/3$	P7	1/2	$-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{6}/3$
P8	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{6}/3$	P9	1/2	$\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{6}/3$
P10	0	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{6}/3$	P11	-1/2	$\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{6}/3$

Das Polyeder hat 13 Rotationsachsen und 9 Spiegelebenen.

Das Vesak-Fest im buddhistischen Jahr 2531
Vesak ist das wichtigste Fest der Buddhisten. Es wird vielerorts am ersten Vollmondtag im Mai gefeiert, aber es gibt regionale Abweichungen. Die Briefmarke wurde zum Vesak-Fest des Jahres 1987 herausgegeben, dem



das Jahr 2531 nach buddhistischer Zählung entspricht, wie auf der Marke zu sehen ist. 1987 fiel der Mai-Vollmond auf den 13.5., wie auch in diesem Jahr (2006). Vesak erinnert an das "Erwachen" oder die "Erleuchtung" Buddhas. In manchen Ländern, auch in Sri Lanka, wird das Fest mit Lichterprozessionen begangen. Auf der Briefmarke sieht man deshalb Laternen. Die Gestalt der beim Vesak getragenen Laternen ist vielfältig und einfallsreich; die hier abgebildeten haben die Form von Kuboktaedern, also von Polyedern mit sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen. In jeder der zwölf Ecken stoßen zwei Quadrate und zwei Rechtecke zusammen, an jeder der 24 Kanten treffen sich ein Quadrat und ein Dreieck. Auf diese Weise entsteht ein schöner Körper von hoher Symmetrie, der sich zudem leicht aus Papier zu einer Laterne falten lässt.

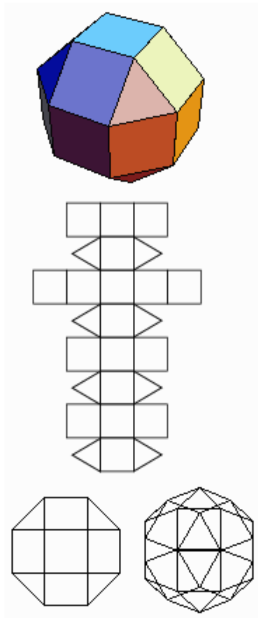


Kuboktaederstern

Auch aus dem Kuboktaeder können durch Sternkörperbildung einige nicht konvexe Sternpolyeder erzeugt werden.
Heute (2009) ist noch nicht bekannt, wie viele verschiedene Kuboktaedersterne existieren. Alle bekannten Sternkuboktaeder haben die Oktaeder-Symmetriegruppe und sind quasiregulär.

Wichtige Vertreter sind der Würfel-Oktaeder-Verbundkörper und der 2., 3. und 6.Kuboktaedersternkörper, welche die Wenninger-Polyeder Nr. 44 bis 46 sind.
Abgebildet ist der 2.Sternkörper, das Wenninger-Polyeder 44.

Wenninger-Nr		
W11	$A = (6 + 2\sqrt{3})\ a^2 \approx 9{,}46410\ a^2$	$V = 5/3\ \sqrt{2}\ a^3 \approx 2{,}35702\ a^3$
W43	$A = 3\ (1 + \sqrt{3})\ a^2 \approx 8{,}19615\ a^2$	$V = 3/2\ a^3$
	1. Kuboktaedersternkörper	
W44	2. Kuboktaedersternkörper	
W45	3. Kuboktaedersternkörper	
W46	6. Kuboktaedersternkörper	



Rhombenkuboktaeder

andere Bezeichnungen: kleines Rhombenkuboktaeder, franz. petit rhombicuboctaèdre
26-flächiges Archimedisches Polyeder A_6, uniformes Polyeder U_{10}, das dual zum Deltoid-Ikosidodekaeder ist.
Das Polyeder hat 18 Quadrate und 8 Dreiecke als Seitenflächen, 24 Ecken der Ordnung 3, eine Euler-Charakteristik 2, das Schläfli-Symbol 3.4^3 und 9 Symmetrieebenen.
Zwischen den 48 Kanten findet man die Dieder-Winkel zwischen zwei Quadraten arccos $-\sqrt{2}/2 = 135°$, zwischen Quadrat und Dreieck arccos $-\sqrt{6}/3 \approx 144°44'8" \approx 144{,}735610317°$.
Bei einer Kantenlänge von a ergibt sich

Mittelkugelradius $\rho = 1/2\ \sqrt{(4 + 2\ \sqrt{2})}\ a \approx 1{,}30656\ a$
Umkugelradius $R = 1/2\ \sqrt{(5 + 2\ \sqrt{2})}\ a \approx 1{,}39896\ a$
Oberfläche $A = (18 + 2\sqrt{3})\ a^2 \approx 21{,}4641\ a^2$
Volumen $V = 1/3\ (12 + 10\ \sqrt{2})\ a^3 \approx 8{,}71404\ a^3$
Isoperimetrischer Koeffizient $36\pi\ V^2/A^3 \approx 0{,}87$
Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Dreiecke r_3 und der Vierecke r_4
$r_3 = 1/2\ (1 + \sqrt{2})\ a \approx 1{,}20710\ a$
$r_4 = 1/2\ \sqrt{(1/3\ (11 + 6\ \sqrt{2}))}\ a \approx 1{,}27427\ a$

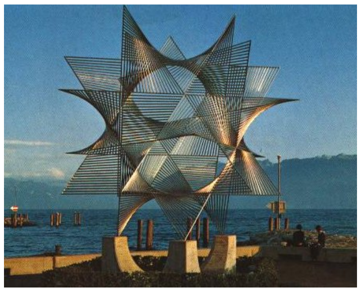
Rotationsachsen

6 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate, mit 1 Rotation der Ordnung 2 je Achse ; 4 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Dreiecke, mit 2 Rotationen der Ordnung 3 je Achse ; 3 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate, mit 3 Rotationen der Ordnung 4 je Achse

Eckpunktkoordinaten eines Rhombenkuboktaeders

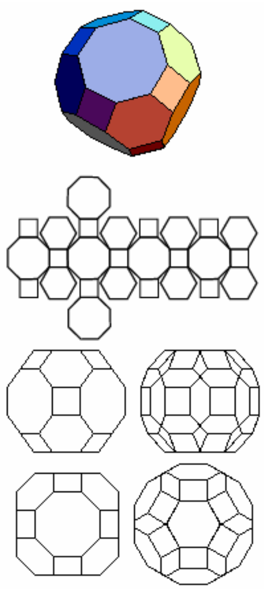
	x	y	z				
P0	-1/2	-1/2	-(√2+1)/2	P1	1/2	-1/2	-(√2+1)/2
P2	1/2	1/2	(-√2-1)/2	P3	-1/2	1/2	-(√2+1)/2
P4	-(√2+1)/2	-1/2	-1/2	P5	-1/2	-(√2+1)/2	-1/2
P6	1/2	-(√2+1)/2	-1/2	P7	(√2+1)/2	-1/2	-1/2
P8	(√2+1)/2	1/2	-1/2	P9	1/2	(√2+1)/2	-1/2
P10	-1/2	(√2+1)/2	-1/2	P11	-(√2+1)/2	1/2	-1/2
P12	(-√2-1)/2	-1/2	1/2	P13	-1/2	(-√2-1)/2	1/2
P14	1/2	(-√2-1)/2	1/2	P15	(√2+1)/2	-1/2	1/2
P16	(√2+1)/2	1/2	1/2	P17	1/2	(√2+1)/2	1/2
P18	-1/2	(√2+1)/2	1/2	P19	(-√2-1)/2	1/2	1/2
P20	-1/2	-1/2	(√2+1)/2	P21	1/2	-1/2	(√2+1)/2
P22	1/2	1/2	(√2+1)/2	P23	-1/2	1/2	(√2+1)/2

Die Skulptur von Alain Esculier in hat die Struktur eines Rhombenkuboktaeders



Abgestumpftes Kuboktaeder, Kuboktaederstumpf

Das Polyeder wird auch Großes Rhombenkuboktaeder genannt.
26-flächiges Archimedisches Polyeder A3 ist dual zum Disdyakis-Dodekaeder, hat das Schläfli-Symbol t{3,4}, uniformes Polyeder U_{11}, 13 Rotationsachsen, 9 Spiegelebenen und die Euler-Charakteristik 2. Die Flächen sind 12 Quadrate, 8 Sechsecke, 6 Achtecke. Alle Ecken sind von der Ordnung 3.
Dieder-Winkel zwischen Sechseck und Achteck arccos $-\sqrt{3}/3 \approx 125{,}264389683° \approx 125°15'$, zwischen Quadrat und Achteck arccos $-\sqrt{2}/2 = 135°$ und zwischen Quadrat und Sechseck arccos $-\sqrt{6}/3 \approx 144{,}735610317° \approx 144°48'$



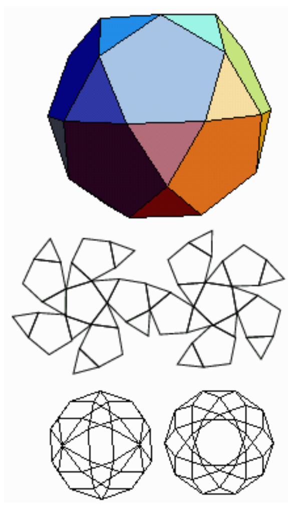
Alle weiteren Werte für einen Kuboktaederstumpf mit einer Kantenlänge von a:
Mittelkugelradius $\rho = 1/2 \sqrt{12 + 6 \sqrt{2}}\, a \approx 2{,}26303\, a$
Umkugelradius $R = 1/2 \sqrt{13 + 6 \sqrt{2}}\, a \approx 2{,}31761\, a$
Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Vierecke r_4
$r_4 = 1/2 (3 + \sqrt{2})\, a \approx 2{,}20710\, a$
und der Sechsecke r_6 $r_6 = 1/2 \sqrt{3} (1 + \sqrt{2})\, a \approx 2{,}0907703\, a$
und der Achtecke r_8 $r_8 = 1/2 (1 + 2\sqrt{2})\, a \approx 1{,}91421\, a$

Oberflächeninhalt $A = (24 + 12 \sqrt{2} + 12 \sqrt{3})\, a^2 \approx 61{,}7551\, a^2$
Volumen $V = (22 + 14 \sqrt{2})\, a^3 \approx 41{,}7989\, a^3$
Isoperimetrischer Koeffizient $36\pi\, V^2/A^3 \approx 0{,}84$
Der Körper kann sowohl durch Abstumpfen eines Würfels als auch eines Oktaeders erzeugt werden.
Es gibt 9 Symmetriebenen. 6 Rotationsachsen verlaufen durch gegenüberliegende Quadrate, 4 Achsen durch gegenüberliegend Sechsecke und 3 Achsen durch die Achtecke. Die Isometriegruppe ist diejenige des Würfels.

Eckpunktkoordinaten eines Kuboktaederstumpfes

	x	y	z
P1-4	±1/2	±(√2+1)/2	-(2·√2+1)/2
P5-8	±1/2	±(√2+1)/2	(2·√2+1)/2
P9-12	±1/2	±(2·√2+1)/2	(√2+1)/2
P13-16	±1/2	±(2·√2+1)/2	-(√2+1)/2
P17-20	±(√2+1)/2	±1/2	-(2·√2+1)/2
P21-24	±(√2+1)/2	±1/2	(2·√2+1)/2
P25-28	±(2·√2+1)/2	±1/2	-(√2+1)/2
P29-32	±(2·√2+1)/2	±1/2	(√2+1)/2
P33-36	±(√2+1)/2	±(2·√2+1)/2	-1/2
P37-40	±(√2+1)/2	±(2·√2+1)/2	1/2
P41-44	±(2·√2+1)/2	±(√2+1)/2	-1/2
P45-48	±(2·√2+1)/2	±(√2+1)/2	1/2

Ikosidodekaeder

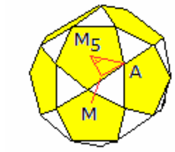


Der 32-seitige Archimedische Körper A_4 wird auch Triakontaeder genannt.
Die Oberfläche besteht aus 20 Dreiecken und 12 Fünfecken mit insgesamt 60 Kanten und 30 Ecken; uniformes Polyeder U_{24} mit der Euler-Charakteristik 2, mit 31 Rotationsachsen und 15 Spiegelebenen.
Dieder-Winkel arccos $(-\sqrt{15 (5+2 \sqrt{5})}/15) \approx 142{,}622632°$

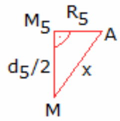
Alle weiteren Werte für einen Ikosidodekaeder mit einer Kantenlänge von a:
Mittelkugelradius $\rho = 1/2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\, a \approx 1{,}53884\, a$
Umkugelradius $R = 1/2 (1 + \sqrt{5})\, a = \phi\, a \approx 1{,}61803\, a$
Fünfeck-Kugelradius $r_5 = \sqrt{5 (5 + 2\sqrt{5})}/5\, a = \approx 1{,}3763819\, a$
Dreieck-Kugelradius $r_3 = (3 \sqrt{3} + \sqrt{15})/6\, a = \approx 1{,}5115226\, a$
Das Verhältnis von Umkugelradius zur Kantenlänge ist das goldene Verhältnis.
Oberflächeninhalt $A = (5 \sqrt{3} + 3 \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}})\, a^2 \approx 29{,}3059\, a^2$
$A = (\sqrt{5760-12672/5 \sqrt{5}} + 56\sqrt{3} - 24\sqrt{15})\, r^2 \approx 13{,}682193\, r^2$
Volumen $V = 1/6 (45 + 17 \sqrt{5})\, a^3 \approx 13{,}8355\, a^3$
$V = (416/15 \sqrt{5} - 288/5)\, r^3 \approx 4{,}413618575\, r^3$

Das Ikosidodekaeder entsteht aus einem Ikosaeder, wenn man an den Ecken passend fünfseitige Pyramiden abschneidet. Dazu halbiert man alle Kanten des Ikosaeders.

Das Ikosidodekaeder sei durch die Kantenlänge a gegeben. Radius R der Umkugel, Volumen V und Oberfläche O, Abstand der Dreiecke d_3 und Abstand der Fünfecke d_5 sind berechenbar.



Die Kantenlänge eines Würfels, der ein Ikosaeder umhüllt, ist der Durchmesser der Umkugel des Ikosidodekaeders $R = a/2\ (\sqrt{5} + 1)$
Es sei M der Mittelpunkt des Ikosaeders/Ikosidodekaeders, M_5 der Mittelpunkt eines Fünfecks und A eine Kantenmitte des Ikosaeders. Das Dreieck ist rechtwinklig und ermöglicht es, den halben Abstand der Fünfecke zu berechnen. Nach dem Satz des Pythagoras ist $(d_5 / 2)^2 = x^2 - R_5^2$

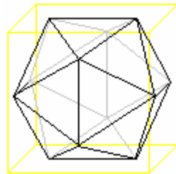


Dann wird mit $x = R = a/2\ (\sqrt{5} + 1)$ $d_5 = 2/5\ \sqrt{(25 + 10\ \sqrt{5})}\ a$
Der Abstand der Dreiecke gleich dem Durchmesser des Inkreises des Ikosaeders

$$d_3 = 2r = a/3\ (3\ \sqrt{3} + \sqrt{15})$$

Der Winkel zwischen einer Dreieck- und Fünfeckfläche ist 142°37'.
Das Volumen des Ikosidodekaeders erhält man, wenn man vom Volumen des erzeugenden Ikosaeders die Volumina der 12 fünfeckigen Pyramiden abzieht. Für jedes dieser Pyramiden ist

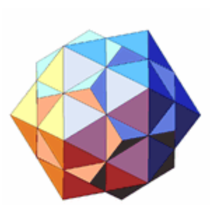
$$V_5 = 1/3\ A_5\ (R - d_5/2) = a^3/24\ (\sqrt{5} + 5/24)$$



Das Ikosidodekaeder entsteht aus einem Pentagondodekaeder, indem man alle Kanten des Pentagondodekaeders halbiert und an allen Ecken dreieckige Pyramiden abschneidet. Geht man vom Ikosidodekaeder aus, so kann man ihn durch dreieckige Pyramiden zu einem Pentagondodekaeder ergänzen; durch Aufsetzen von Fünfeckpyramiden zu einem Ikosaeder. Das Ikosidodekaeder ist der Kern von Ikosaeder und Pentagondodekaeder, woraus sich der Name ergibt.

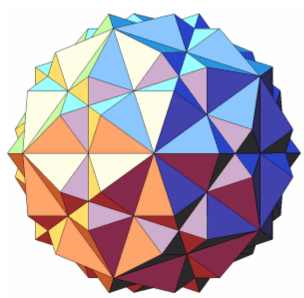
Eckpunktkoordinaten eines Ikosidodekaeders

	x	y	z
P1-2	0	±(√5+1)/2	0
P3-4	±1/2·√(5+2·√5)	-1/2	0
P5-6	±1/2·√(5+2·√5)	1/2	0
P7-8	±1/4·√(10+2·√5)	-(3+√5)/4	0
P9-10	±1/4·√(10+2·√5)	(3+√5)/4	0
P11	1/5·√(25+10·√5)	0	1/10·√(50+10·√5)
P12	-1/5·√(25+10·√5)	0	-1/10·√(50+10·√5)
P13-14	1/10·√(25+10·√5)	±1/2	1/5·√(25+10·√5)
P15-16	-1/10·√(25+10·√5)	±1/2	-1/5·√(25+10·√5)
P17	-1/10·√(50+10·√5)	0	1/5·√(25+10·√5)
P18	1/10·√(50+10·√5)	0	-1/5·√(25+10·√5)
P19-20	1/20·√(50+10·√5)	±(3+√5)/4	1/10·√(50+10·√5)
P21-22	-1/20·√(50+10·√5)	±(3+√5)/4	-1/10·√(50+10·√5)
P23-24	-1/20·√(50-10·√5)	±(√5+1)/4	1/5·√(25+10·√5)
P25-26	1/20·√(50-10·√5)	±(√5+1)/4	-1/5·√(25+10·√5)
P27-28	-1/20·√(250+110·√5)	±(√5+1)/4	1/10·√(50+10·√5)
P29-30	1/20·√(250+110·√5)	±(√5+1)/4	-1/10·√(50+10·√5)



Ikosidodekaederstern

Auch aus dem Ikosidodekaeder können durch Sternkörperbildung nicht konvexe Sternpolyeder erzeugt werden.
Man kennt über 400 Sternkörper dieser Gruppe. Alle Sternikosidodekaeder haben die Ikosaeder-Symmetriegruppe und sind quasiregulär.



Wichtige Vertreter sind der Dodekaeder-Ikosaeder-Verbund, der Verbund großes Sterndodekaeder - großes Ikosaeder und der 2.-19.Ikosidoedeakedersternkörper, welche Wenninger-Polyeder darstellen. Abgebildet ist der Dodekaeder-Ikosaeder-Verbund, das Wenninger-Polyeder 47.
Wenninger-Nr
W47 Dodekaeder-Ikosaeder-Verbund (linke Abbildung)
W48 2.Ikosidodekaedersternkörper (rechte Abbildung) ...
W61 Verbund großes Sterndodekaeder - großes Ikosaeder

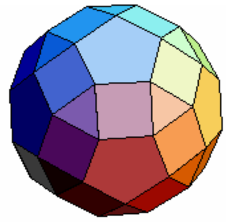
Rhombenikosidodekaeder

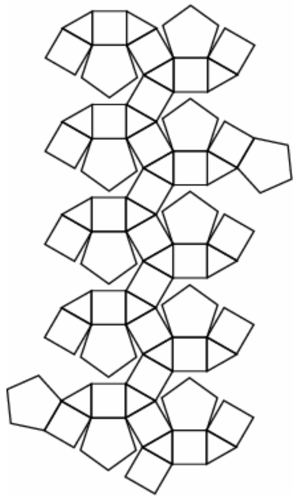
Das Polyeder wird auch kleines Rhombenikosidodekaeder genannt; uniformes Polyeder U_{27}, Euler-Charakteristik 2.
Der 62-seitige Archimedische Körper A_5 mit 60 Ecken und 120 Kanten hat 20 Dreiecksflächen, 30 Quadrate und 12 Fünfecke.
Das duale Polyeder ist der Deltoid-60-Flächner. Der Körper hat 31 Rotationsachsen und 15 Symmetrieebenen, die Symmetriegruppe ist die Ikosaedergruppe.

Dieder-Winkel zwischen Fünfeck und Viereck arccos $(-\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}/10) \approx 148{,}2825256°$ und zwischen Viereck und Dreieck arccos $(-(\sqrt{3} + \sqrt{15})/6) \approx 159{,}0948426°$

Bei einer Kantenlänge von a ergibt sich

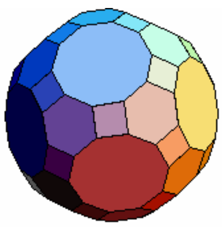
Mittelkugelradius	$\rho = 1/2\ \sqrt{10 + 4\sqrt{5}}\ a \approx 2{,}17625\ a$
Umkugelradius	$R = 1/2\ \sqrt{11 + 4\sqrt{5}}\ a \approx 2{,}23295\ a$
Fünfeck-Kugelradius	$r_5 = 3\ \sqrt{5\,(5+ 2\sqrt{5})}/10\ a \approx 2{,}064572881\ a$
Viereck-Kugelradius	$r_4 = (2 + \sqrt{5})/2\ a \approx 2{,}118033989\ a$
Dreieck-Kugelradius	$r_3 = (3\sqrt{3} + 2\sqrt{15})/6\ a \approx 2{,}157019853\ a$
Oberflächeninhalt	$A = (30 + \sqrt{30\,(10 + 3\sqrt{5} + \sqrt{15 + 2\sqrt{5}})})\ a^2 \approx 55{,}1719\ a^2$
Volumen	$V = 1/3\ (60 + 29\sqrt{5})\ a^3 \approx 41{,}6153238\ a^3$
	$V = \sqrt{120019/225 - 10352/45\ \sqrt{5}}\ r^3 \approx 4{,}361509160\ r^3$
	$V = \sqrt{712/9 - 1264/45\ \sqrt{5}}\ \rho^3 \approx 4{,}037628777\ \rho^3$

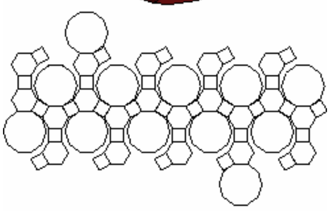


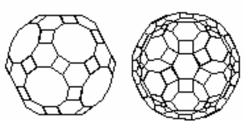


Eckpunktkoordinaten eines Rhombenikosidodekaeders

	x	y	z
P1-4	0	±(√5+1)/2	±1/2·√(5+2·√5)
P5-12	±1/2·√(5+2·√5)	±1/2	±1/2·√(5+2·√5)
P13-20	±1/4·√(10+2·√5)	±(3+√5)/4	±1/2·√(5+2·√5)
P21-22	1/5·√(25+10·√5)	±(√5+1)/2	-1/10·√(25+10·√5)
P23-24	-1/5·√(25+10·√5)	±(√5+1)/2	1/10·√(25+10·√5)
P25	-1/10·√(50+10·√5)	0	-3/10·√(25+10·√5)
P26	1/10·√(50+10·√5)	0	3/10·√(25+10·√5)
P27-28	1/10·√(25+10·√5)	±1/2	-3/10·√(25+10·√5)
P29-30	-1/10·√(25+10·√5)	±1/2	3/10·√(25+10·√5)
P31-32	1/10·√(25+10·√5)	±(√5+2)/2	-(1/10)·√(25-10·√5)
P33-34	-1/10·√(25+10·√5)	±(√5+2)/2	1/10·√(25-10·√5)
P35-36	-1/10·√(25-10·√5)	±(√5+2)/2	-1/10·√(25+10·√5)
P37-38	1/10·√(25-10·√5)	±(√5+2)/2	1/10·√(25+10·√5)
P39	1/10·√(250+110·√5)	0	-1/10·√(25-10·√5)
P40	-1/10·√(250+110·√5)	0	1/10·√(25-10·√5)
P41-42	-3/10·√(25+10·√5)	±1/2	-1/10·√(25+10·√5)
P43-44	3/10·√(25+10·√5)	±1/2	1/10·√(25+10·√5)
P45-46	-1/20·√(50-10·√5)	±(√5+1)/4	-3/10·√(25+10·√5)
P47-48	1/20·√(50-10·√5)	±(√5+1)/4	3/10·√(25+10·√5)
P49-50	-1/20·√(250+110·√5)	±(5+√5)/4	-1/10·√(25+10·√5)
P51-52	1/20·√(250+110·√5)	±(5+√5)/4	1/10·√(25+10·√5)
P53-54	1/20·√(850+310·√5)	±(√5+1)/4	-1/10·√(25+10·√5)
P55-56	-1/20·√(850+310·√5)	±(√5+1)/4	1/10·√(25+10·√5)
P57-58	-1/20·√(650+290·√5)	±(3+√5)/4	-1/10·√(25-10·√5)
P59-60	1/20·√(650+290·√5)	±(3+√5)/4	1/10·√(25-10·√5)







Abgestumpftes Ikosidodekaeder

Das Polyeder wird auch Großes Rhombenikosidodekaeder genannt, uniformes Polyeder U_{28}. Der 120-eckige Archimedische Körper A_{12}, alle Ecken sind der 3.Ordnung, hat 30 Quadrate, 20 regelmäßige Sechsecke, 12 Zehnecke.

Diederwinkel zwischen Sechseck und Zehneck arccos $(-\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}/15) \approx 142{,}622632° \approx 142°37'$, zwischen Quadrat und Zehneck arccos $(-\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5})}/10) \approx 148{,}282526° \approx 148°16'$ und zwischen Quadrat und Sechseck arccos $(-(\sqrt{3} + \sqrt{15})/6) \approx 159{,}094843° \approx 159°5'$

Bei einer Kantenlänge von a ergibt sich

Mittelkugelradius $\rho = 1/2\ \sqrt{30 + 12\sqrt{5}}\ a \approx 3{,}76938\ a$

Umkugelradius $R = 1/2\ \sqrt{31 + 12\sqrt{5}}\ a \approx 3{,}80239\ a$

Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Vierecke r_4

$r_4 = a/2\ (3 + 2\sqrt{5}) \approx 3{,}736068\ a$

… der Sechsecke $r_6 = a/2\ \sqrt{3}\ (2 + \sqrt{5}) \approx 3{,}6685425\ a$

… der Zehnecke $r_{10} = a/2\ \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \approx 3{,}4409548\ a$

Oberflächeninhalt

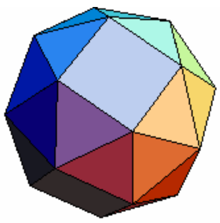
$A = 30\ (1 + \sqrt{2\,(4 + \sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{6}})})\ a^2 \approx 175{,}031\ a^2$

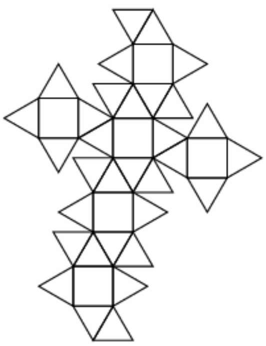
Volumen $V = (95 + 50\sqrt{5})\ a^3 \approx 206{,}803\ a^3$

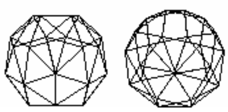
Der Körper kann sowohl durch Abstumpfen eines Ikosaeders als auch eines Dodekaeders erzeugt werden. Das abgestumpfte Ikosidodekaeder besitzt 9 Symmetriebenen. 15 Symmetriachsen verlaufen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate (je 1 Rotation der Ordnung 2), 10 Achsen durch gegenüberliegende Sechsecke (je 2 Rotationen der Ordnung 3) und 6 Achsen durch gegenüberliegende Zehnecke (je 4 Rotations der Ordnung 5). Die Isometriegruppe ist diejenige des Ikosaeders.

Eckpunktkoordinaten eines abgestumpften Ikosidodekaeders, für $q = \pm 1$

	x	y	z
P1-4	± 1	$q/10\cdot\sqrt{650+290\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P5-8	± 1	$q/10\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$
P9-16	$\pm 1/2$	$\pm 1/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$	$\pm 1/2\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P17-20	$\pm 1/2$	$q/2\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$
P21-24	$\pm 1/2$	$-q/10\cdot\sqrt{325+110\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$
P25-28	$\pm 1/2$	$q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{325+110\cdot\sqrt{5}}$
P29-32	$\pm 1/2$	$-q/10\cdot\sqrt{725+310\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$
P33-40	$\pm(\sqrt{5}+3)/4$	$\pm 1/4\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}$	$\pm 1/2\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P41-44	$\pm(\sqrt{5}+3)/4$	$-q/20\cdot\sqrt{1450+610\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{325+110\cdot\sqrt{5}}$
P45-48	$\pm(\sqrt{5}+3)/4$	$-q/20\cdot\sqrt{2650+1010\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P49-52	$\pm(\sqrt{5}+3)/2$	$q/5\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{325+110\cdot\sqrt{5}}$
P53-56	$\pm(\sqrt{5}+3)/2$	$2q/5\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$
P57-60	$\pm(\sqrt{5}+1)/2$	0	$\pm/2\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P61-64	$\pm(\sqrt{5}+1)/2$	$-q\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$	$q/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$
P65-68	$\pm(\sqrt{5}+2)/2$	$-q/10\cdot\sqrt{125+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$
P69-72	$\pm(\sqrt{5}+2)/2$	$-3q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{325+110\cdot\sqrt{5}}$
P73-76	$\pm(\sqrt{5}+4)/2$	$q/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$	$q/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$
P77-80	$\pm(\sqrt{5}+4)/2$	$3q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P81-84	$\pm(\sqrt{5}+5)/4$	$q/20\cdot\sqrt{650+190\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$
P85-88	$\pm(\sqrt{5}+5)/4$	$3q/20\cdot\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$
P89-92	$\pm(2\cdot\sqrt{5}+3)/2$	$q/10\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P93-96	$\pm(2\cdot\sqrt{5}+3)/2$	$-q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$
P97-100	$\pm(3+3\cdot\sqrt{5})/4$	$-q/20\cdot\sqrt{50-10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{425+190\cdot\sqrt{5}}$
P101-104	$\pm(3+3\cdot\sqrt{5})/4$	$-q/4\cdot\sqrt{50+22\cdot\sqrt{5}}$	$q/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$
P105-108	$\pm(3\cdot\sqrt{5}+5)/4$	$q/20\cdot\sqrt{50+10\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{325+110\cdot\sqrt{5}}$
P109-112	$\pm(3\cdot\sqrt{5}+5)/4$	$-q/20\cdot\sqrt{1250+410\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}$
P113-116	$\pm(3\cdot\sqrt{5}+7)/4$	$q/4\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}$	$q/2\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$
P117-120	$\pm(7+3\cdot\sqrt{5})/4$	$-q/20\cdot\sqrt{650+190\cdot\sqrt{5}}$	$q/10\cdot\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}$







Abgeschrägtes Hexaeder

andere Bezeichnung: Cubus simus (nach Kepler), engl. Snub Cube
Der Cubus simus besteht aus 6 Quadraten und 32 gleichseitigen Dreiecken und 24 Ecken und 60 Kanten.
Die Quadrate sind gegenüber der Horizontalen leicht im Uhrzeigersinn gedreht, wenn der Körper auf einem Quadrat steht. Folglich gibt es einen dualen Cubus simus, dessen Quadrate leicht im Gegenuhrzeigersinn gedreht sind.
Der 38-seitige Archimedische Körper A_7, uniformes Polyeder U_{12}, hat 13 Rotationsachsen und keine Spiegelebene. Das Polyeder ist ein einfaches Beispiel für O-Symmetrie bei Polyedern und dual zum Pentagonalen Ikositetraeder.
Dieder-Winkel zwischen Quadrat und Dreieck
$\arccos\left(-\sqrt{11 - 2\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} - 2\sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}}}/3\right) \approx 142{,}983430°$
zwischen den Dreiecken $\arccos\left(-\sqrt{3\left(11 + 4\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + 4\sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}}\right)}/9\right) \approx 153{,}2345877°$

Bei einer Kantenlänge von a ergibt sich

Mittelkugelradius	$\rho \approx 1{,}247223168\ a$
Umkugelradius	$R \approx 1{,}3437133737\ a$

Abstand des Polyedermittelpunktes zu den Mittelpunkten der Dreiecke

	$r_3 \approx 1{,}2133558\ a$
und der Quadrate	$r_4 \approx 1{,}1426135\ a$
Oberflächeninhalt	$A = (6 + 8\sqrt{3})\ a^2 \approx 19{,}8564\ a^2$
Volumen	$V \approx 7{,}88948\ a^3$

Für die Herleitung der exakten Gleichungen am abgeschrägten Hexaeder seien

$\tau = 1/3\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1\right) =$
$1{,}83928675521416113255185256465328660042 42\ldots$

die Tribonacci-Konstante, d.h. die Lösung von $\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0$

$\xi = 1/\tau = 1/3\left(\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}} - 1\right) =$
$0{,}5436890126920763615708559718017479865252\ldots$

als Lösung von $\xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$

$\beta = \xi^2 = 1/\tau^2 = 1/3\left(\sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} + \sqrt[3]{26 - 6\sqrt{33}} - 1\right) =$
$0{,}2955977425220847709809965928515386138 99\ldots$

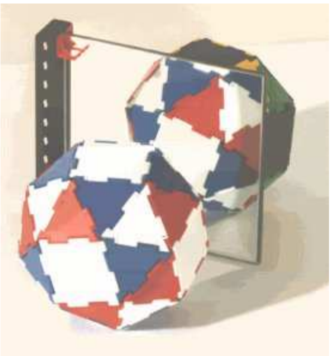
als Lösung von $\beta^3 + \beta^2 + 3\beta - 1 = 0$

$\phi = (1 + \beta) / (2 \sqrt{2\xi}) = 1 / \sqrt{2 + 2\beta} = 1 / \sqrt{2 + 2\xi^2} = \tau / \sqrt{2 + 2\tau^2} = 1/2 \sqrt{\xi + 1} = \sqrt{1/12 (\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}} + 2)} = 0{,}6212264105565853116925009544898441752554\ldots$
als Lösung von $32\phi^6 - 16\phi^4 + 4\phi^2 - 1 = 0$
Dann gilt Umkugelradius
$R = \phi\, a \sqrt{1 + 2/\xi} = \phi\, a \sqrt{1 + 2\tau} \approx 1{,}3437133737446017012715287539750582476376\ a$
Mittelkugelradius $\rho = a/2 \sqrt{2}\, \phi\, (1 + 1/\xi) = a/2 \sqrt{2}\, \phi\, (1 + \tau) = a / (2 \sqrt{2 - \tau}) \approx 1{,}2472231679936432517699189608980305834169\ a$
Inkugel der Dreiecke $r_3 = a/3 \sqrt{3}\, \phi / \beta = a/3 \sqrt{3}\, a / \xi^2 = a/3 \sqrt{3}\, \phi\, \tau^2 = a/2 \sqrt{(\tau + 1) / (3 (2 - \tau))} \approx 1{,}2133558000218923102913538092840756386544\ a$
Inkugel der Quadrate $r_4 = \phi/\xi\ a = \phi\, \tau\, a = a/2 \sqrt{(1 - \tau) / (\tau - 2)} \approx 1{,}1426135089259620934794840867206741750743\ a$

Oberflächeninhalt $A = (6 + 8 \sqrt{3})\, a^2 \approx 19{,}8564\ a^2$
Volumen $V = \phi/\xi\, (2 + 8/(3\xi))\, a^3 = 2/3\, \phi\, \tau\, (3 + 4\tau)\, a^3 = (4 \sqrt{\tau+1} + 3 \sqrt{\tau-1}) / (3 \sqrt{2-\tau})\, a^3 = a^3/3 \sqrt{(613\tau + 203) / (35\tau - 62)} \approx 7{,}8894773999753902064510142704428061847387\ a^3$

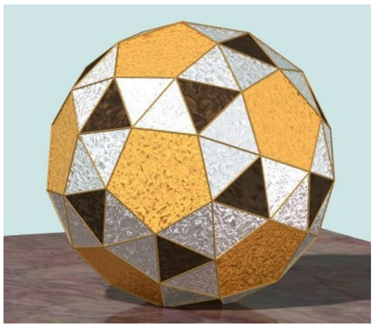
Eckpunktkoordinaten eines abgeschrägten Hexaeders
Hilfsgrößen $p = \sqrt{1/12 \cdot (\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} + 2)}$
$q = 1/3 \cdot (\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1)$

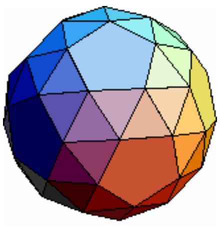
	x	y	z		x	y	z
P0	p	-p·q	p/q	P1	p·q	p	p/q
P2	-p	p·q	p/q	P3	-p·q	-p	p/q
P4	-p·q	p	-p/q	P5	-p	-p·q	-p/q
P6	p·q	-p	-p/q	P7	p	p·q	-p/q
P8	p	-p/q	-p·q	P9	p·q	-p/q	p
P10	-p	-p/q	p·q	P11	-p·q	-p/q	-p
P12	p/q	p	-p·q	P13	p/q	p·q	p
P14	p/q	-p	p·q	P15	p/q	-p·q	-p
P16	-p	p/q	-p·q	P17	-p·q	p/q	p
P18	p	p/q	p·q	P19	p·q	p/q	-p
P20	-p/q	-p	-p·q	P21	-p/q	-p·q	p
P22	-p/q	p	p·q	P23	-p/q	p·q	-p



Händigkeit des Cubuc simus

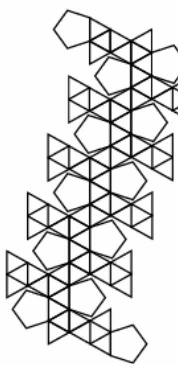
Die archimedischen Körper 33334 und 33335 haben eine Händigkeit, d.h. es gibt jeweils zwei Formen, die zueinander spiegelbildlich sind, aber selbst keine Symmetrieebenen haben. Kepler nannte sie "Cubus simus" bzw. "Dodecahedron simum". Simus heißt wörtlich: plattnasig.
Das Foto zeigt vor und hinter dem Spiegel die beiden zueinander spiegelbildlichen Formen des Cubus simus, aber in verschiedenen Farben. Sie stehen fast genau so, dass sich die Spiegelbilder und die realen Gegenstücke in drei Dimensionen decken, es sieht also so aus, als würde der Spiegel die Farben umkehren. Übrigens sind die Flächen weiß bzw. schwarz gewählt, die an den Stellen der Flächen und der Ecken des unbeschnittenen Würfels sind.





Abgeschrägtes Dodekaeder

andere Bezeichnung: Dodecaedron simum, engl. Snub Dodecahedron
Der 92-seitige Archimedische Körper A_8, uniformes Polyeder U_{29}, besteht aus 80 Dreiecken und 12 Fünfecken, 150 Kanten, 60 Ecken; der Körper ist ein einfaches Beispiel für I-Symmetrie bei Polyedern und ist dual zum Pentagonalen Hexacontaeder.
Dieder-Winkel zwischen Fünfeck und Dreieck $\arccos(-\sqrt{(15 (4 ((1/x)-x) (3 \phi + 1) + (12 \phi + 19)))/15}) \approx 152{,}9299203° \approx 152°55'$, zwischen den Dreiecken $\arccos(-(2x^2-3)/3) \approx 164{,}175366° \approx 164°10'$
mit $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ und $x = \sqrt[3]{(\phi + \sqrt{\phi-5/27})/2} + \sqrt[3]{(\phi - \sqrt{\phi-5/27})/2}$



Bei einer Kantenlänge von a ergibt sich
Mittelkugelradius $\rho = \phi \sqrt{x (x+\phi)+1}/2\ a = \sqrt{R^2 - a^2/4} \approx 2{,}097053835\ a$
Umkugelradius $R = \phi \sqrt{x (x+\phi)+(3-\phi)}/2\ a \approx 2{,}155837375116\ a$
Fünfeck-Kugelradius
$r_5 = \sqrt{20(5(x+(1/x)) (2\phi+1)+(11\phi+12))}/20\ a \approx 1{,}980915947\ a$
Dreieck-Kugelradius $r_3 = x\, \phi \sqrt{3 (x (x+\phi)+1)}/6\ a \approx 2{,}0770896597\ a$

Oberflächeninhalt $\quad A = \sqrt{15 (95 + 6 \sqrt{5} + 8 \sqrt{15 (5 + 2 \sqrt{5})})}\, a^2 \approx 55{,}2867\, a^2$
Das Volumen ergibt sich bei einer Kantenlänge von 1 als größte reelle Wurzel des Polynoms
$187445810737515625 - 182124351550575000\, V^2 + 6152923794150000\, V^4 - 1030526618040000\, V^6 + 162223191936000\, V^8 - 3195335070720\, V^{10} + 2176782336\, V^{12}$
Volumen $\quad V = \sqrt{15x^2 (201\phi+157) +21x (58\phi+31)+209 (3\phi+2))}/6\, a^3 \approx 37{,}61664996\, a^3$
Isoperimetrischer Koeffizient $36\pi\, V^2/A^3 \approx 0{,}94$

Für die Herleitung der exakten Gleichungen am abgeschrägten Dodekaeder seien

$\tau = 1/2\, (1 + \sqrt{5}) = 1{,}6180339887\ldots$ das goldene Verhältnis
$\xi = \sqrt[3]{\tau/2 + 1/2 \sqrt{\tau-5/27}} + \sqrt[3]{\tau/2 - 1/2 \sqrt{\tau-5/27}}$ die Lösung von $\xi^3-2\xi-\tau = 0$;
$\xi \approx 1{,}7155614996973678346812788888899833711972$
$\alpha = \xi - 1/\xi \approx 1{,}1326619649523854202571098116849131625776$
$\beta = \tau\, (\xi + \tau + 1/\xi) \approx 6{,}3370220642948602663847721112379288463222$
$\phi = 1 / (4 \sqrt{1+\alpha^2}) \approx 0{,}16546051236492211548182763459362450974 25$

Dann gilt:
Umkugelradius $R = 2\, \phi\, a \sqrt{\alpha^2+\beta^2+1} \approx 2{,}155837375\, a$
Mittelkugelradius $\quad \rho = 2\, \phi\, \beta\, a \approx 2{,}097053835\, a$
Inkugelradius r_3

$r_3 = 1/3 \sqrt{6}\, \phi\, a \sqrt{55 + 21\sqrt{5} - (83+41\sqrt{5})/\xi + (49+21\sqrt{5})/\xi^2} \approx 2{,}0770896597432\, a$

Inkugelradius r_5

$r_5 = 1/5 \sqrt{10}\, \phi\, a \sqrt{85 + 31\sqrt{5} + (125+63\sqrt{5})/\xi + (75+31\sqrt{5})/\xi^2} \approx 1{,}98091594728184\, a$

Oberflächeninhalt $\quad A = \sqrt{20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}\, a^2 \approx 55{,}286744958\, a^2$
Volumen $\quad V = 20/3 \sqrt{2}\, \phi\, a^3 \sqrt{55 + 21 \sqrt{5} + (83+41\sqrt{5})/\xi + (49+21\sqrt{5})/\xi^2} + \sqrt{10}\, \phi\, a^3 \sqrt{147 + 65 \sqrt{5} + (251+113\sqrt{5})/\xi + (137+61\sqrt{5})/\xi^2} \approx 37{,}616649962733\, a^3$

Der Körper besitzt 6 Rotationsachsen durch zwei gegenüberliegende Fünfecke, 10 Achsen durch die Schwerpunkte gegenüberliegender Dreiecke und 15 Achsen durch gegenüberliegende Punkte. Das Dodecahedron simum existiert in zwei verschiedenen Händigkeiten, die zu einander spiegelsymmetrisch sind, aber selbst keine Symmetrieebenen haben.

Eckpunktkoordinaten eines abgeschrägten Dodekaeders
Hilfsgrößen $\quad t = (1+\sqrt{5})/2$; $q = \sqrt[3]{(t+\sqrt{t-5/27})/2}+\sqrt[3]{(t-\sqrt{t-5/27})/2}$

$a = q-1/q$; $b = t\cdot(q+t+1/q)$; $p = 1/(4\cdot\sqrt{1+a^2})$; für $v = \pm1$

	x	y	z
P1-4	$\pm2\cdot p$	$2v\cdot p\cdot b$	$2v\cdot p\cdot a$
P5-8	$\pm2\cdot p\cdot a$	$-2v\cdot p$	$-2v\cdot p\cdot b$
P9-12	$\pm2\cdot p\cdot b$	$-2v\cdot p\cdot a$	$-2v\cdot p$
P13-16	$\pm p\cdot(a+b/t+t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t-b-1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t+b\cdot t-1)$
P17-20	$\pm p\cdot(a-b/t+t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t+b-1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t-b\cdot t-1)$
P21-24	$\pm p\cdot(a-b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t+b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(-a/t+b\cdot t-1)$
P25-26	$-p\cdot(a+b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t-b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t+b\cdot t+1)$
P27-28	$p\cdot(a+b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t-b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(-a/t-b\cdot t-1)$
P29-30	$p\cdot(a\cdot t-b-1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t+b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t+t)$
P31-32	$p\cdot(-a\cdot t+b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t+b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(-a-b/t-t)$
P33-34	$-p\cdot(a\cdot t+b-1/t)$	$v\cdot p\cdot(-a/t+b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(-a+b/t-t)$
P35-36	$p\cdot(a\cdot t+b-1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t-b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(-a+b/t-t)$
P37-38	$-p\cdot(a\cdot t+b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(-a/t+b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(a-b/t-t)$
P39-40	$p\cdot(a\cdot t+b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t-b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a-b/t-t)$
P41-42	$p\cdot(-a\cdot t+b-1/t)$	$v\cdot p\cdot(a/t+b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t-t)$
P43-44	$p\cdot(a\cdot t-b+1/t)$	$v\cdot p\cdot(-a/t-b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t-t)$
P45-46	$-p\cdot(a/t+b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t-b+1/t)$
P47-48	$p\cdot(a/t+b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(-a\cdot t+b-1/t)$
P49-50	$p\cdot(-a/t-b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t+t)$	$v\cdot p\cdot(-a\cdot t+b+1/t)$
P51-52	$p\cdot(a/t+b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(a+b/t+t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t-b-1/t)$
P53-54	$p\cdot(a/t-b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(-a+b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t+b-1/t)$
P55-56	$p\cdot(-a/t+b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a-b/t+t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t+b-1/t)$
P57-58	$p\cdot(a/t-b\cdot t+1)$	$v\cdot p\cdot(a-b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(a\cdot t+b+1/t)$
P59-60	$p\cdot(-a/t+b\cdot t-1)$	$v\cdot p\cdot(a-b/t-t)$	$v\cdot p\cdot(-a\cdot t-b-1/t)$

Halbreguläre Polyeder - Existenznachweis

Kepler hat in seinem Buch Harmonices Mundi, das 1619 in Linz erschienen ist, die Archimedischen Körper genauer untersucht und insbesondere die Vollständigkeit der 13 genannten bewiesen.
Dabei klassifizierte er sämtliche möglichen halbregulären Polyeder nach der Anzahl und Art der regelmäßigen Vielecke, die in jeder der kongruenten Ecken zusammenstoßen.
Dies können nur drei, vier oder fünf Vielecke sein.

Fall 1: In jeder Ecke stoßen drei regelmäße Vielecke zusammen.
Fall 1a: Es handelt sich um jeweils gleiche Vielecke.
Dann liegt bereits ein regulärer Körper vor und zwar ein Tetraeder, ein Hexaeder oder ein Dodekaeder.

Fall 1b: Zwei der Vielecke sind gleich und das dritte ist von ihnen verschieden.
Die Möglichkeiten werden nun durch den folgenden Hilfssatz eingeschränkt.
Hilfssatz 1:
Stoßen in den Ecken eines uniformen Polyeders jeweils genau ein a-Eck, ein b-Eck und ein c-Eck zusammen und sind b und c verschieden, so muss a gerade sein.
Zum Beweis beachte man, dass an den Seiten des a-Ecks abwechselnd die Seiten eines b-Ecks und eines c-Ecks liegen. Das ist aber nur möglich, wenn a gerade ist. Beachtet man noch, dass die Winkelsumme in jeder Ecke eines konvexen Polyeders echt kleiner als 360° sein muss, so bleiben nur die folgenden Möglichkeiten mit ihren eindeutigen Realisierungen:

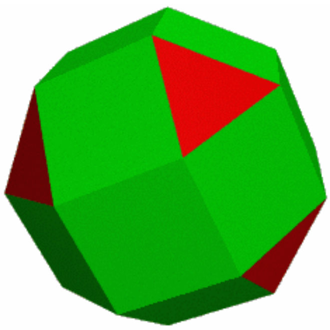
2 Quadrate, 1 beliebiges regelmäßes n-Eck (n ungleich 4): Prisma
2 Sechsecke, 1 Dreieck: Abgestumpftes Tetraeder
2 Sechsecke, 1 Quadrat: Abgestumpftes Oktaeder
2 Sechsecke, 1 Fünfeck: Abgestumpftes Ikosaeder
2 Achtecke, 1 Dreieck: Cubus simus
2 Zehnecke, 1 Dreieck: Dodekaedron simum

Fall 1c: Die drei Vielecke sind paarweise verschieden.
Aus dem Hilfssatz 1 ergibt sich sofort, dass jedes der Vielecke eine gerade Anzahl von Ecken besitzt. Beachtet man noch die Beschränkung der Winkelsumme, dann kommen nur die folgenden Möglichkeiten mit ihren eindeutigen Realisierungen in Frage:
1 Quadrat, 1 Sechseck, 1 Achteck: Abgestumpftes Kuboktaeder
1 Quadrat, 1 Sechseck, 1 Zehneck: Abgestumpftes Ikosidodekaeder

Fall 2: In jeder Ecke stoßen vier regelmäße Vielecke zusammen.
Auch hier lassen sich die Möglichkeiten durch einen Hilfssatz stark einschränken.
Hilfssatz 2
Stoßen in den Ecken eines uniformen Polyeders jeweils genau ein 3-Eck, ein a-Eck, ein b-Eck und ein c-Eck so zusammen, dass jeweils das a-Eck und das c-Eck eine Seite mit dem Dreieck gemeinsam haben, so muss a = c gelten.
Der Hilfssatz 2 und die Beschränkung der Winkelsumme lässt nur noch die folgenden Möglichkeiten zu, die sich auch alle eindeutig in der angegebenen Weise realisieren lassen:

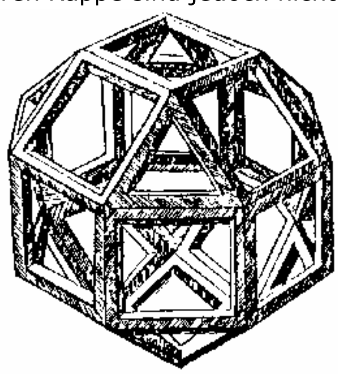
4 Dreiecke: Oktaeder	3 Dreiecke, 1 beliebiges n-Eck (n ungleich 3): Antiprisma
2 Dreiecke, 2 Quadrate: Kuboktaeder	2 Dreiecke, 2 Fünfecke: Ikosidodekaeder
1 Dreieck, 3 Quadrate: Rhombenkuboktaeder	1 Dreieck, 2 Quadrate, 1 Fünfeck: Rhombenikosidodekaeder

Fall 3: In jeder Ecke stoßen fünf regelmäße Vielecke zusammen.
Wegen der Beschränkung der Winkelsumme in den Ecken eines konvexen Polyeders bleiben nur die folgenden drei Möglichkeiten.



Dabei ist das Ikosaeder eindeutig bestimmt, für die anderen beiden Körper gibt es jeweils zwei verschiedene spiegelbildliche Realisierungen. 5 Dreiecke: Ikosaeder
4 Dreiecke, 1 Quadrat: Cubus simus
4 Dreiecke, 1 Sechseck: Dodekaedron simum

Rhombenkuboktaeder
Um 1930 fand J. C. P. Miller eine Variante des Rhombenkuboktaeders, die aus diesem entsteht, wenn man eine seiner "Kappen", die sich oberhalb eines "Gürtels" aus Quadraten befindet, um 45° verdreht.
Auch bei diesem konvexen Polyeder stoßen in jeder Ecke jeweils ein Dreieck und drei Quadrate zusammen, die Ecken der oberen Kappe sind jedoch nicht mehr zu denen der unteren Kappe kongruent, es handelt sich also nicht um ein uniformes Polyeder.
Es reicht daher nicht, die Uniformität durch die Gleichartigkeit der Folge der Vielecke zu beschreiben, die in jeder Ecke zusammenstoßen, wie dies manchmal bei der Definition der halbregulären Körper getan wird.



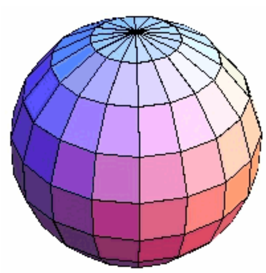
Geschichte der halbregulären Polyeder
Das in der Antike vorhandene allgemeine Interesse an regulären und halbregulären Polyedern kam nach einer langen Ruhephase im Mittelalter erst wieder in der Renaissance auf, als sich Mathematiker, Künstler und Handwerker mit ihrer Beschreibung, Darstellung und Herstellung beschäftigten. Beispielsweise behandelt Pierro della Francesca in seinem

Buch De Corporibus Regularibus von 1480 die Platonischen Körper. Albrecht Dürer gibt für einige Archimedische Körper in dem vierten Buch seiner Vnderweysung der messung mit dem zirckel vnd dem richtscheyt von 1525 die Netze an, und auch in dem Buch De divina proportione von Luca Pacioli aus dem Jahr 1509 findet sich beispielsweise die gezeigte Abbildung des Rhombenkuboktaeders.
Systematisch wurden die Archimedischen Körper allerdings erst von Johannes Kepler untersucht, der auch zwei nichtkonvexe reguläre Polyeder gefunden hat, die Keplerschen Sternpolyeder. Weitere, von regulären und halbregulären Polyedern abgeleitete Polyederdarstellungen finden sich in den Büchern Geometria et Perspectiva von Lorenz Stöer aus dem Jahr 1567 und Perspectiva corporum regularium von Wenzel Jamnitzer aus dem Jahr 1568.

Doppelplanetoid

Grafik von M.C.Escher aus dem Jahr 1949
Technik: Holzstich , Farbe: schwarz/weiß
Motiv: Landschaften auf einem "Planetoiden"
Der Planetoid aus einem "Zwillingstetraeder" ist Keplers "Stella octangula".

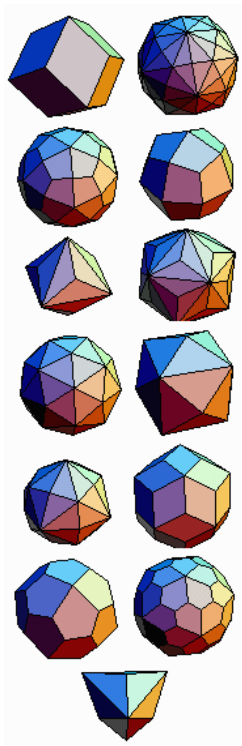
Campanus-Sphäre, Euklid-Sphäre



In der Proposition 17 das 12.Buches der "Elemente" beschreibt Euklid die Konstruktion eines Polyeders, der aus n Ringen besteht und 2n Seitenflächen je Ring besitzt, einer Euklid-Sphäre. Für n = 2 ergibt sich das regelmäßige Oktaeder. Die Abbildung zeigt den Fall n = 8.

Der Spezialfall für n = 6 wurde von dem italienischen Mathematiker Campanus von Novara (1220-1296) in dem Werk "Tractatus de sphera" zu einer 72-flächigen Polyedersphäre (Septuaginta basium solidum), der Campanus-Sphäre, diskutiert. Campanus beschäftigte sich vor allem mit Euklidische Geometrie und gab eine wichtige lateinische Übersetzung der "Elemente" heraus.

Während der Renaissance war dieser Körper so populär wie die Platonischen Körper. Auch heute noch, wird die Campanus-Sphäre genutzt, u.a. als Grundkörper für Leuchten.
In der Kirche von Santa Maria in Organo befindet sich eine Intarsienarbeiten des Mathematikers und Künstlers Fra Giovanni da Verona, die im oberen Teil die Campanus-Sphäre zeigt:
Abbildung: Campanus-Sphäre



Catalan Polyeder

Die Catalan-Polyeder sind die dualen Polyeder zu den dreizehn Archimedischen Polyedern.
Die Körper wurden nach Eugene Catalan (belgischer Mathematiker) benannt, welcher deren Tabelle erstmals 1862 veröffentlichte.

Nr.	Archim.Körper	Duales Polyeder (Catalan Polyeder)
1	Kuboktaeder	Rhombendodekaeder
2	Rhombenikosidodekaeder	Disdyakis Triacontaeder, Hexa-Ikosaeder
3	Rhombenkuboktaeder	Disdyakis-Dodekaeder, Hexa-Oktaeder
4	Ikosidodekaeder	Rhomben Triacontaeder
5	Abgestumpftes Ikosidodekaeder	Deltoid-60-Flächner
6	Abgestumpftes Kuboktaeder	Deltoid-24-Flächner
7	Abgeschrägtes Hexaeder	Pentagonales Ikositetraeder
8	Abgeschrägtes Dodekaeder	Pentagonales Hexecontaeder
9	Abgestumpftes Hexaeder	Triakis Oktaeder
10	Abgestumpftes Dodekaeder	Triakis Ikosaeder
11	Abgestumpftes Ikosaeder	Pentakis Dodekaeder
12	Abgestumpftes Oktaeder	Tetrakis Hexaeder
13	Abgestumpftes Tetraeder	Triakis Tetraeder

Innenkugel, Inkugel - Catalanische Körper

Jeder Catalanische Körper besitzt eine Innenkugel bzw. Inkugel. Auf dieser liegen alle Seitenflächenmittelpunkte des Körpers. Eine Außenkugel besitzen Catalanische Körper nicht. r Radius der Inkugel im Verhältnis zur Kantenlänge a (Nummern siehe vorherige Seite)

Nr. r / a

1 pentagonales Ikositetraeder $(R^2 - a^2/4)/R \approx 1{,}15763$
2 Rhombendodekaeder $3/4 = 0{,}75$
3 Disdyakis-Dodekaeder $1/17 \cdot (6+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{(5+2 \cdot \sqrt{(2)})} \approx 1{,}22026$
4 pentagonales Hexacontaeder $(R^2 - a^2/4)/R \approx 2{,}03969$
5 Disdyakistriakontaeder $1/41 \cdot (15+2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \sqrt{(11+4 \cdot \sqrt{(5)})} \approx 2{,}12099$
6 Rhombentriakontaeder $1/8 \cdot (5+3 \cdot \sqrt{(5)}) \approx 1{,}46353$
7 Triakistetraeder $9/44 \cdot \sqrt{(22)} \approx 0{,}95940$
8 Triakisoktaeder $1/17 \cdot (5+2 \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{(7+4 \cdot \sqrt{(2)})} \approx 1{,}63828$
9 Triakisikosaeder $5/488 \cdot (17 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{10}) \cdot \sqrt{(37+15 \cdot \sqrt{(5)})} \approx 2{,}88526$
10 Tetrakishexaeder $9/20 \cdot \sqrt{(10)} \approx 1{,}42302$
11 Deltoid-24-Flächner $3/97 \cdot (14+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{(13+6 \cdot \sqrt{(2)})} \approx 2{,}20974$
12 Deltoid-60-Flächner $1/241 \cdot (105+6 \cdot \sqrt{5}) \cdot \sqrt{(31+12 \cdot \sqrt{(5)})} \approx 3{,}73665$
13 Pentakisdodekaeder $9/872 \cdot (21+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{(58+18 \cdot \sqrt{(5)})} \approx 2{,}37713$

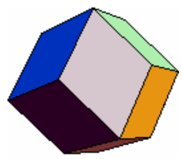
Für das pentagonale Ikositetraeder und das pentagonale Hexacontaeder stellt R den Außenkugelradius des dualen Archimedischen Körpers dar.

Mittelkugel - Catalanische Körper

Jeder Catalanische Körper besitzt eine Mittelkugel. Auf dieser liegen alle Mittelpunkte der Körperkanten. $\rho = r_m$ Radius der Mittelkugel im Verhältnis zur Kantenlänge a (Nummern siehe vorherige Seite)

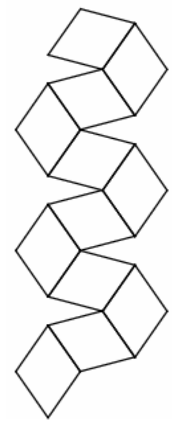
Nr. ρ / a

1 pentagonales Ikositetraeder $\rho \approx 1{,}247223168\ a$
2 Rhombendodekaeder $\rho = 4/3\ \sqrt{2}\ a$
3 Disdyakis-Dodekaeder $\rho = \sqrt{(6\ (2+\sqrt{2}))}/2\ a$
4 pentagonales Hexacontaeder $\rho \approx 2{,}097053835\ a$
5 Disdyakistriakontaeder $\rho = \sqrt{(6\ (5+ 2\ \sqrt{5}))}/2\ a$
6 Rhombentriakontaeder $\rho = \sqrt{(5 + 2\ \sqrt{5})}/2\ a$
7 Triakistetraeder $\rho = a/4\ \sqrt{2}$
8 Triakisoktaeder $\rho = (1 + \sqrt{2}/2)\ a$
9 Triakisikosaeder $\rho = (5 + 3\ \sqrt{5})/4\ a$
10 Tetrakishexaeder $\rho = 3/2\ a$
11 Deltoid-24-Flächner $\rho = \sqrt{(2\ (2 + \sqrt{2}))}/2\ a$
12 Deltoid-60-Flächner $\rho = 1/22\ \sqrt{(\ 5\ (283 + 79\ \sqrt{5}))}\ a$
13 Pentakisdodekaeder $\rho = 3\ (1 + \sqrt{5})/4\ a$



Rhombendodekaeder

Das Polyeder ist zum Kuboktaeder dual. Es wird auch Granatoeder genannt.
Die 14 Ecken und 24 Kanten des Körpers werden von 12 Rhomben gebildet, an den Ecken treffen drei oder vier Kanten zusammen.
Ist die Kantenlänge gleich 1, so haben die Rhomben die Diagonalen $2/\sqrt{3}$ und $2\ \sqrt{2}/\sqrt{3}$ sowie die Innenwinkel arccos(1/3) = 70,53° und 2 arctan $\sqrt{2}$ = 109,47°, Dieder-Winkel 120°
In dem Holzschnitt "Sterne" von M.C.Escher wird das Rhombendodekaeder abgebildet.



Hat der Rhombendodekaeder die Kantenlänge a, so wird
Oberfläche $A = 8\ \sqrt{2}\ a^2 \approx 11{,}3137\ a^2$
Volumen $V = 16/9\ \sqrt{3}\ a^3 \approx 3{,}07920\ a^3$
Inkugelradius $r = 2\ \sqrt{(2/3)}\ a$
Mittelkugelradius $r_m = 4/3\ \sqrt{2}\ a$
Umkugelradius für die Ecken der Ordnung 3: $R = 2a$
Umkugelradius für die Ecken der Ordnung 4: $R = 4/\sqrt{3}\ a \approx 2{,}309401\ a$
Die längeren Diagonalen eines Rhombendodekaeders bilden ein Oktaeder, die kürzeren Diagonalen einen Würfel.
Nach Steinhaus (1999) kann mit Rhombendodekaedern der Raum vollständig ausgefüllt werden. Eine mögliche Lage der Eckpunkte ist

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 2, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)$$

Der Körper besitzt 9 Symmetriebenen, 3 Rotationsachsen durch 2 gegenüberliegende Ecken der Ordnung 4, 4 Achsen durch 2 Ecken der Ordnung 3 und 6 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen. Die Symmetriegruppe ist die des Würfels.
Das Rhombendodekaeder stellt eine Projektion des Hyperwürfels in den dreidimensionalen Raum dar.

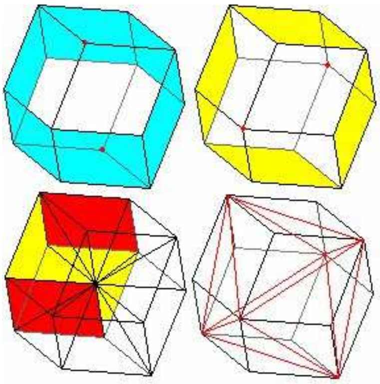
Hat das duale Polyeder, das Kuboktaeder, eine Kantenlänge von a, so ergibt sich für das Rhombendodekaeder

Kantenlänge $s = 3/8\ \sqrt{6}\ a \approx 0{,}9185586535\ a$

Rhombenlänge	$r_l = 1{,}5\ a$
Rhombenbreite	$r_b = 3/4\ \sqrt{2}\ a \approx 1{,}060660172\ a$
Mittelkugelradius	$r_m = 1/2\ \sqrt{3}\ a \approx 0{,}866025404\ a$
Inkugelradius	$r = 3/4\ a$
Volumen	$V = 27/16\ \sqrt{2}\ a^3 \approx 2{,}3864853865\ a^3$
Kugel der 3er-Ecken	$r_3 = 3/8\ \sqrt{6}\ a \approx 0{,}918558654\ a$
Kugel der 4er-Ecken	$r_4 = 3/4\ \sqrt{2}\ a \approx 1{,}060660172\ a$

Das Polyeder hat 13 Rotationsachsen und 9 Spiegelebenen.

Eckkoordinaten
C0 = 0,530330085889910643300633271579 = 3/8 √2
C1 = 1,06066017177982128660126654316 = 3/4 √2
V0 = (0, 0, C1) V1 = (0, 0, -C1) V2 = (C1, 0, 0)
V3 = (-C1, 0, 0) V4 = (0, C1, 0) V5 = (0, -C1, 0)
V6 = (C0, C0, C0) V7 = (C0, C0, -C0) V8 = (C0, -C0, C0)
V9 = (C0, -C0, -C0) V10 = (-C0, C0, C0) V11 = (-C0, C0, -C0)
V12 = (-C0, -C0, C0) V13 = (-C0, -C0, -C0)
Flächen
{6, 0, 8, 2}, {6, 2, 7, 4}, {6, 4, 10, 0}, {9, 1, 7, 2}, {9, 2, 8, 5}, {9, 5, 13, 1}, {11, 1, 13, 3}, {11, 3, 10, 4}, {11, 4, 7, 1}, {12, 0, 10, 3}, {12, 3, 13, 5}, {12, 5, 8, 0}



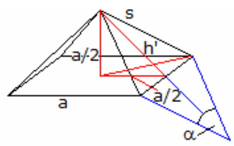
Bei einem Rhombendodekaeder treffen in acht Eckpunkten drei Kanten und damit auch drei Rhomben zusammen. In sechs Eckpunkten treffen vier Kanten und vier Rhomben zusammen. Vier Rhomben hintereinandergehängt bilden einen Ring. Sie trennen zwei Spitzen (rot) gebildet aus je vier Rhomben. Somit sind zwei parallele Rhomben Deck- und Grundfläche. Dazwischen liegen zehn Rhomben. Zwei stehen aufrecht und trennen zwei Spitzen, gebildet aus je vier Rhomben. Sechs Rhomben bilden einen Zickzack-Ring. Sie trennen zwei Spitzen (rot) gebildet aus je drei Rhomben.

Zeichnet man in den Körper alle Raumdiagonalen, so erkennt man im Inneren vier Parallelepipede, aus denen sich das Dodekaeder zusammensetzt.

Zeichnet man in Rot alle langen Diagonalen der Rhomben, so entstehen acht Dreieckspyramiden.
Zieht man alle kurzen Diagonalen der Rhomben, so entstehen sechs quadratische Pyramiden.

In der Natur kristallisiert Kupfer in Form von Rhombendodekaedern.

Kepler-Konstruktion



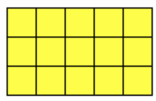
In seinem Werk "Epitome Astronomiae Copernicanae" konstruiert Kepler ein Rhombendodekaeder, in dem er auf die Seiten eines Würfels spezielle "Dächer" aufsetzt.

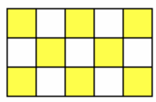
Der Rhombus als Seitenfläche des Rhombendodekaeders habe die Seitenlänge s, die Diagonalen d und e und die Innenwinkel α und $180°-\alpha$. Das Dodekaeder hat das Volumen V und die Oberfläche O.
Ist s gegeben, so ergeben sich die anderen Größen aus der quadratischen Pyramide, die auf einen Würfel gesetzt wird.
Rhombus: Die Kantenlänge a ist gleichzeitig die kürzere Diagonale, d = a. Die andere Diagonale ist $e = 2h' = \sqrt{2}\ a$. Die Diagonalen stehen im Verhältnis $1:\sqrt{2}$.
Die Seitenlänge des Rhombus ist halb so groß wie die Raumdiagonale des Würfels, $s = \sqrt{3}\ a/2$. Die Fläche ist $\sqrt{2}\ a^2/2$. Der kleinere Winkel ist $\alpha = 2 \arctan(\sqrt{2}/2) = 70°32'$, der größere Winkel 109°28'. Die Oberfläche des Dodekaeders besteht aus 12 Rhomben:

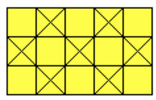
$$A = 12\ \sqrt{2}/2\ a^2 = 6\ \sqrt{2}\ a^2.$$

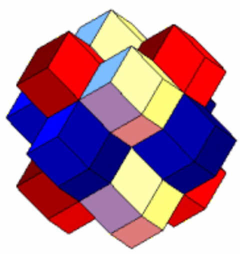
und da $s = \sqrt{3}\ a/2$ wird für die Kantenlänge s des Rhombenkuboktaeders

$$A = 8\ \sqrt{2}\ s^2 \approx 11{,}3137\ s^2$$


1

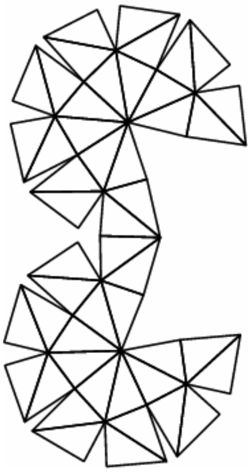

2


3



Außer dem Würfel füllt auch das Rhombendodekaeder den dreidimensionalen Raum aus.
Die Abbildung 1 sei eine Darstellung des Raums, der von Würfeln ausgefüllt wird, im Querschnitt. 2. Man stelle sich vor, dass jeder Würfel isoliert wird und seine sechs Nachbarwürfel verliert.

3. Diese sechs Hohlräume in der Umgebung eines jeden Würfels mögen durch quadratische Pyramiden ersetzt werden, die aus einem Würfel durch die Raumdiagonalen erzeugt werden. Jeder Würfel mit den sechs aufgesetzten Pyramiden aber ist ein Rhombendodekaeder.
Ergebnis: Die Rhombendodekaeder füllen den Raum aus. Die Abbildung zeigt ein solches Füllen des Raumes.



Hexakisoktaeder, Disdyakis-Dodekaeder

Das Polyeder ist ein Catalan-Polyeder mit 48 ungleichseitigen Dreiecken als Flächen, 72 Kanten, 24 kurze, 24 mittlere, 24 lange und 26 Ecken.
Es ist das zum Rhombenkuboktaeder duale Polyeder.
Dihedraler Winkel arccos $(-(71+12\sqrt{2})/97) \approx 155{,}08217961°$

Hat das Rhombenkuboktaeder die Kantenlänge a, so wird

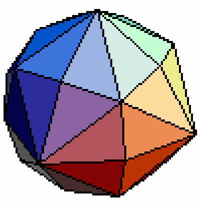
Kantenlängen	$s_1 = 2/7 \sqrt{30 - 3\sqrt{2}}\, a \approx 1{,}45004\, a$
	$s_2 = 3/7 \sqrt{12 + 6\sqrt{2}}\, a \approx 1{,}93974\, a$
	$s_3 = 2/7 \sqrt{60 + 6\sqrt{2}}\, a \approx 2{,}36445\, a$
Inkugelradius	$r = 3 \sqrt{2/97\, (15 + 8\sqrt{2})}\, a \approx 2{,}20974\, a$
4er-Ecken-Kugelradius	$r_4 = 3\, (4+\sqrt{2})/7\, a \approx 2{,}320377241\, a$
6er-Ecken-Kugelradius	$r_6 = \sqrt{6}\, a \approx 2{,}449489743\, a$
8er-Ecken-Kugelradius	$r_8 = 3\, (2+3\sqrt{2})/7\, a \approx 2{,}675417437\, a$
Mittelkugelradius	$\rho = \sqrt{6\, (2+\sqrt{2})}/2\, a \approx 2{,}263033438\, a$
Oberfläche	$A = 1/7 \sqrt{62208\sqrt{2} + 134784}\, a^2 \approx 67{,}4248\, a^2$
Volumen	$V = 144/7\, (\sqrt{2} + 1)\, a^3 \approx 49{,}6638\, a^3$

Bei Skalierung des Körpers auf s_1 wird

Seitenkante s_2	$s_2 = (9/14 \sqrt{2} + 3/7)\, s \approx 1{,}33770871\, s$
Seitenkante s_3	$s_3 = (1/7 \sqrt{2} + 10/7)\, s \approx 1{,}63060193\, s$
Inkugelradius	$r = \sqrt{285/388 \sqrt{2} + 249/194}\, s \approx 1{,}52390814\, s$
Oberfläche	$A = 6/7 \sqrt{783 + 436\sqrt{2}}\, s_1^2 \approx 32{,}0667\, s_1^2$
Volumen	$V = 1/7 \sqrt{3\, (2194 + 1513\sqrt{2})}\, s_1^3 \approx 16{,}2889\, s_1^3$

Hat das duale Polyeder, der Kuboktaederstumpf, eine Kantenlänge a, so ergeben sich für das Hexakisoktaeder die Eckpunktkoordinaten
C0 = 1,4142135623730950488016887242 = $\sqrt{2}$
C1 = 1,6407544820340814704014474789 = $(3 + 6\sqrt{2}) / 7$
C2 = 2,6754174373368364913164569311З = $(6 + 9\sqrt{2}) / 7$
V0-1 = (0, 0, ±C2)   V2-3 = (±C2, 0, 0)   V4-5 = (0, ±C2, 0)
V6-9 = (±C1, 0, ±C1) V10-13 = (±C1, ±C1, 0)   V14-17 = (0, ±C1, ±C1)
V18-25 = (±C0, ±C0, ±C0)

Flächen {0, 6, 18}, {0, 18, 14}, {0, 14, 22}, {0, 22, 8}, {0, 8, 24}, {0, 24, 16}, {0, 16, 20}, {0, 20, 6}, {1, 7, 21}, {1, 21, 17}, {1, 17, 25}, {1, 25, 9}, {1, 9, 23}, {1, 23, 15}, {1, 15, 19}, {1, 19, 7}, {2, 6, 20}, {2, 20, 11}, {2, 11, 21}, {2, 21, 7}, {2, 7, 19}, {2, 19, 10}, {2, 10, 18}, {2, 18, 6}, {3, 8, 22}, {3, 22, 12}, {3, 12, 23}, {3, 23, 9}, {3, 9, 25}, {3, 25, 13}, {3, 13, 24}, {3, 24, 8}, {4, 10, 19}, {4, 19, 15}, {4, 15, 23}, {4, 23, 12}, {4, 12, 22}, {4, 22, 14}, {4, 14, 18}, {4, 18, 10}, {5, 13, 25}, {5, 25, 17}, {5, 17, 21}, {5, 21, 11}, {5, 11, 20}, {5, 20, 16}, {5, 16, 24}, {5, 24, 13}



Allgemeines Hexakisoktaeder

Das Catalan-Polyeder Hexakisoktaeder kann zu einer Gruppe von Polyedern erweitert werden.

Werden auf alle 12 Begrenzungsflächen eines Rhombendodekaeders Pyramiden mit der Kantenlänge $(9/14 \sqrt{2} + 3/7)$ a und $(1/7 \sqrt{2} + 10/7)$ a aufgesetzt, so entsteht das Hexakisoktaeder im eigentlichen Sinne.
Es ist aber auch möglich, Pyramiden mit anderen Seitenkanten b und c > b aufzusetzen, unter der Bedingung, dass $a/3 \sqrt{6} < b < 4/9\, a \sqrt{12 - 6\sqrt{2}}$ gilt.
Nimmt b den Wert $4/9\, a \sqrt{12 - 6\sqrt{2}}$ an, entartet das Hexakisoktaeder zu einem Deltoidikositetraeder mit den Kantenlängen b und c. Für $b = a/3 \sqrt{6}$ haben die aufgesetzten Pyramiden die Höhe 0, sodass lediglich das Rhombendodekaeder mit der Kantenlänge a übrig bleibt.
Ist $b > 4/9\, a \sqrt{12 - 6\sqrt{2}}$, so ist das Polyeder nicht mehr konvex.

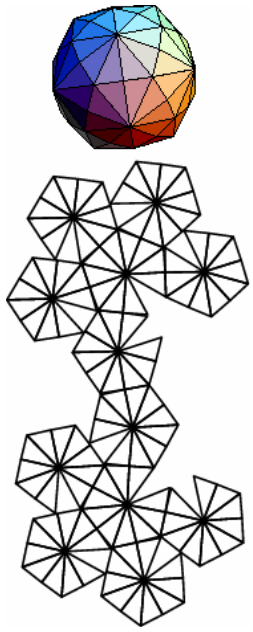
Größen eines allgemeinen Hexakisoktaeders mit Kantenlängen a, b und c

Kantenlänge c	$c = 1/3 \sqrt{9b^2 - 3a^2}$
Volumen	$V = 8/9\, a^2 \sqrt{6}\, (2a + \sqrt{3b^2 - 2a^2})$
Oberflächeninhalt	$A = 8/3\, a \sqrt{9b^2 - 4a^2}$

Disdyakistriakontaeder, Hexa-Ikosaeder, Hexakisikosaeder

Das Disdyakistriakontaeder ist das zum Rhombenikosidodekaeder duale Polyeder. Der Körper besteht aus 120 ungleichseitige Dreiecksseitenflächen, 30 Ecken der 4.Ordnung, Schläfli-Symbol 34, 20 Ecken der 6.Ordnung und 12 Ecken der 8.Ordnung, 180 Kanten, davon 60 kurze, 60 mittlere und 60 lange.
Dieder-Winkel arccos $(-(179+24\sqrt{5})/241) \approx 164{,}8878919° \approx 164°\ 53'\ 17''$

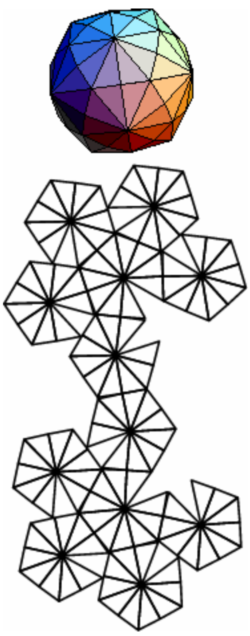
Hat das Rhombenikosidodekaeder die Kantenlänge a, so wird für den Hexa-Ikosaeder:



Kantenlängen $s_1 = 1/11\ \sqrt{(1275 - 465\sqrt{5})}\ a \approx 1{,}39428\ a$
$s_2 = 3\ \sqrt{(15\ (65+19\sqrt{5}))}/55\ a \approx 2{,}19017448\ a$
$s_3 = \sqrt{(12 - 12 / \sqrt{5})}\ a \approx 2{,}57554\ a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = 3\ (5+4\sqrt{5})/11\ a \approx 3{,}802983248\ a$
6er-Ecken-Kugelradius $r_6 = \sqrt{15}\ a \approx 3{,}872983346\ a$
10er-Ecken-Kugelradius $r_{10} = 3\ \sqrt{(5\ (5+2\sqrt{5}))}/5\ a \approx 4{,}129145761\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{(10845\ (39+16\sqrt{5}))}/241\ a \approx 3{,}736646456\ a$
Mittelkugelradius $\rho = \sqrt{(6\ (5+ 2\sqrt{5}))}/2\ a \approx 3{,}769377128\ a$
Oberfläche $A = 180/11\ \sqrt{(179 - 24\sqrt{5})}\ a^2 \approx 183{,}195\ a^2$
Volumen $V = 180/11\ (5 + 4\sqrt{5})\ a^3 \approx 228{,}178995\ a^3$

Für eine Kantenlänge $s = s_1$ wird
Kantenlänge s_2 $s_2 = (3/11\ \sqrt{5} + 6/55)\ s \approx 0{,}71892763\ s$
Kantenlänge s_3 $s_3 = (1/5\ \sqrt{5} + 7/5)\ s \approx 1{,}8472135\ s$
Mittelkugelradius $r = \sqrt{(333/200\ \sqrt{5} + 753/200)}\ s \approx 2{,}7364307\ s$
Oberfläche $A = \sqrt{(9738/5\ \sqrt{5} + 22626/5)}\ s_1^2 \approx 94{,}2346\ s_1^2$
Volumen $V = \sqrt{(39612/25\ \sqrt{5} + 17718/5)}\ s_1^3 \approx 84{,}1819\ s_1^3$

Eckpunktkoordinaten
C0 = 3 (15 + √5)/44 C1 = (5 - √5)/2C2 = 3 (5 + 4 √5)/22
C3 = 3 (5 + √5)/10 C4 = √5 C5 = (75 + 27 √5) / 44
C6 = (15 + 9 √5)/10 C7 = (5 + √5) / 2 C8 = 3 (5 + 4 √5)/11
V0-1 = (0, 0, ±C8) V2-3 = (±C8, 0, 0) V4-5 = (0, ±C8, 0)
V6-9 = (0, ±C1, ±C7) V10-13 = (±C7, 0, ±C1) V14-17 = (±C1, ±C7, 0)
V18-21 = (±C3, 0, ±C6) V22-25 = (±C6, ±C3, 0) V26-29 = (0, ±C6, ±C3)
V30-37 = (±C0, ±C2, ±C5) V38-45 = (±C5, ±C0, ±C2) V46-53 = (±C2, ±C5, ±C0)
V54-61 = (±C4, ±C4, ±C4)
Flächen:
{18, 0, 8}, {18, 8, 32}, {18, 32, 56}, {18, 56, 40}, {18, 40, 10}, {18, 10, 38}, {18, 38, 54}, {18, 54, 30}, {18, 30, 6}, {18, 6, 0}, {19, 1, 7}, {19, 7, 31}, {19, 31, 55}, {19, 55, 39}, {19, 39, 11}, {19, 11, 41}, {19, 41, 57}, {19, 57, 33}, {19, 33, 9}, {19, 9, 1}, {20, 0, 6}, {20, 6, 34}, {20, 34, 58}, {20, 58, 42}, {20, 42, 12}, {20, 12, 44}, {20, 44, 60}, {20, 60, 36}, {20, 36, 8}, {20, 8, 0}, {21, 1, 9}, {21, 9, 37}, {21, 37, 61}, {21, 61, 45}, {21, 45, 13}, {21, 13, 43}, {21, 43, 59}, {21, 59, 35}, {21, 35, 7}, {21, 7, 1}, {22, 2, 11}, {22, 11, 39}, {22, 39, 55}, {22, 55, 47}, {22, 47, 14}, {22, 14, 46}, {22, 46, 54}, {22, 54, 38}, {22, 38, 10}, {22, 10, 2}, {23, 2, 10}, {23, 10, 40}, {23, 40, 56}, {23, 56, 48}, {23, 48, 15}, {23, 15, 49}, {23, 49, 57}, {23, 57, 41}, {23, 41, 11}, {23, 11, 2}, {24, 3, 12}, {24, 12, 42}, {24, 42, 58}, {24, 58, 50}, {24, 50, 16}, {24, 16, 51}, {24, 51, 59}, {24, 59, 43}, {24, 43, 13}, {24, 13, 3}, {25, 3, 13}, {25, 13, 45}, {25, 45, 61}, {25, 61, 53}, {25, 53, 17}, {25, 17, 52}, {25, 52, 60}, {25, 60, 44}, {25, 44, 12}, {25, 12, 3}, {26, 4, 16}, {26, 16, 50}, {26, 50, 58}, {26, 58, 34}, {26, 34, 6}, {26, 6, 30}, {26, 30, 54}, {26, 54, 46}, {26, 46, 14}, {26, 14, 4}, {27, 4, 14}, {27, 14, 47}, {27, 47, 55}, {27, 55, 31}, {27, 31, 7}, {27, 7, 35}, {27, 35, 59}, {27, 59, 51}, {27, 51, 16}, {27, 16, 4}, {28, 5, 15}, {28, 15, 48}, {28, 48, 56}, {28, 56, 32}, {28, 32, 8}, {28, 8, 36}, {28, 36, 60}, {28, 60, 52}, {28, 52, 17}, {28, 17, 5}, {29, 5, 17}, {29, 17, 53}, {29, 53, 61}, {29, 61, 37}, {29, 37, 9}, {29, 9, 33}, {29, 33, 57}, {29, 57, 49}, {29, 49, 15}, {29, 15, 5},



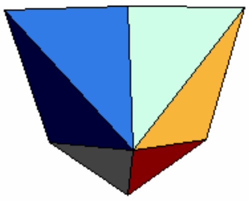
Allgemeines Hexakisikosaeder

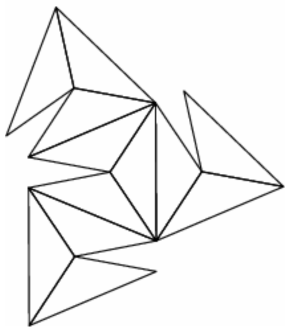
Werden auf die 30 Seitenflächen eines Rhombentriakontaeders der Kantenlänge a Pyramiden mit den Seitenkanten b und c < b aufgesetzt, entsteht ein allgemeines Hexakisikosaeder, wenn gilt

$$a/10\ \sqrt{(50 + 10\sqrt{5})} < b < a/10\ \sqrt{(70 + 2\sqrt{5})}$$

Für $b = a/10\ \sqrt{(50 + 10\sqrt{5})}$ haben die Pyramiden die Höhe 0. Es entsteht das Rhombentriakontaeder. Wird $b = a/10\ \sqrt{(70 + 2\sqrt{5})}$, entartet das Hexakisikosaeder zu einem Deltoidalhexakontaeder mit den Kanten a und b. Überschreitet b den maximalen Wert, so ist das Polyeder nicht mehr konvex.
Das spezielle Hexakisikosaeder mit gleichen Flächenwinkeln an den Kanten a und b entsteht, wenn gilt $b = a/2\ (3\sqrt{5} - 5)$
Für das allgemeine Hexakisikosaeder wird

Pyramidenhöhe $h = \sqrt{(10b^2 - a^2 (5+\sqrt{5}))/10}$
Inkugelradius $r = (a^2 \sqrt{50+20\sqrt{5}} + a \sqrt{50b^2-5a^2(5+\sqrt{5})}) / (5\sqrt{10b^2-a^2(3+\sqrt{5})})$
Oberfläche $A = 60a \sqrt{(10b^2 - a^2 (3+\sqrt{5}))/10}$
Volumen $V = 2a^2 (2a \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{20b^2 - 2a^2 (5 + \sqrt{5})})$
Größen der Seitenfläche
Flächeninhalt $A = a/2 \sqrt{(10b^2 - a^2 (3+\sqrt{5}))/10}$
Seite c $c = \sqrt{(5b^2 - a^2 \sqrt{5})/5}$



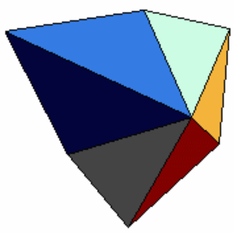


Triakistetraeder, Pyramidentetraeder
Polyeder mit 12 Seitenflächen, welches dual zum abgeschnittenen Tetraeder ist, Catalan-Polyeder, 4 Ecken der Ordnung 3, 4 Ecken der Ordnung 6.
griech. triakis = dreifach, d.h. der Körper ergibt sich auf drei nicht regelmäßigen Tetraedern.
Weitere Name sind Tritetraeder, engl. triakis tetrahedron, franz. triaki-tédraèdre.
Der Körper kann durch Aufsetzen von Pyramiden der Höhe $1/15 \sqrt{6}$ auf ein regelmäßiges Tetraeder erzeugt werden. Die Isometriegruppe ist die Tetraedergruppe.
Winkel zwischen den Kanten 112°53' bzw. 33,557°, Dieder-Winkel zwischen den Flächen arccos $-7/11 \approx$ 129°31'16" $\approx$ 129,521196359°

Hat das Abgeschnittene Tetraeder die Kantenlänge 1, so ergeben sich für das Triakistetraeder die Kantenlängen $s_1 = 9/5$; $s_2 = 3$
Für eine Kantenlänge von $s_1 = a$ ergibt sich weiterhin
Volumen $V = 25/36 \sqrt{2}\, a^3 \approx 0{,}982092\, a^3$
Oberfläche $A = 5/3 \sqrt{11}\, a^2 \approx 5{,}52770\, a^2$
Inkugelradius $r \approx 1{,}06\, a$
Für eine Kantenlänge von $s_2 = a$ wird
Volumen $V = 3/20 \sqrt{2}\, a^3 \approx 0{,}212132\, a^3$
Oberfläche $A = 3/5 \sqrt{11}\, a^2 \approx 1{,}989975\, a^2$
Pyramidenhöhe $k = a/15 \sqrt{6} \approx 0{,}1632993\, a$
Inkugelradius $r = 3/4\, a \sqrt{2/11} \approx 0{,}3198011\, a$
Kantenkugelradius $r_m = a/4 \sqrt{2} \approx 0{,}3535534\, a$

Hat das duale Polyeder, der Tetraederstumpf, eine Kantenlänge a, so ergibt sich für das Pyramidentetraeder
Volumen $V = 81/20 \sqrt{2}\, a^3 \approx 5{,}727564928\, a^3$
Inkugelradius $r = 9/44\, a \sqrt{22} \approx 0{,}9594032236\, a$
Kantenkugelradius $r_m = 3a/4 \sqrt{2} \approx 1{,}060660172\, a$
Radius der Kugel durch die Ecken mit 3 Kanten $r_3 = 9/20\, a \sqrt{6} \approx 1{,}102270384\, a$
Radius der Kugel durch die Ecken mit 6 Kanten $r_6 = 3/4\, a \sqrt{6} \approx 1{,}837117307\, a$
Euler-Charakteristik = 2, 12 Symmetriedrehungen (7 Rotationsachsen), 12 Symmetriespiegelungen (6 Spiegelebenen)

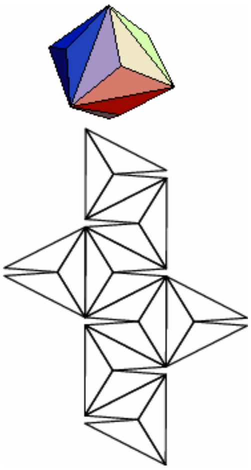
Eckkoordinaten
C0 = 0,636396103067892771960759925894 = $9/20 \sqrt{2}$
C1 = 1,06066017177982128660126654316 = $3/3 \sqrt{2}$
V0 = (C1, C1, C1) V1 = (C1, -C1, -C1) V2 = (-C1, -C1, C1)
V3 = (-C1, C1, -C1) V4 = (C0, -C0, C0) V5 = (C0, C0, -C0)
V6 = (-C0, C0, C0) V7 = (-C0, -C0, -C0)
Flächen: { 4, 0, 2 }, { 4, 2, 1 }, { 4, 1, 0 }, { 5, 0, 1 }, { 5, 1, 3 }, { 5, 3, 0 }, { 6, 0, 3 }, { 6, 3, 2 }, { 6, 2, 0 }, { 7, 1, 2 }, { 7, 2, 3 }, { 7, 3, 1 }



Allgemeines Triakistetraeder
Das Catalan-Polyeder Triakistetraeder kann zu einer Gruppe von Polyedern erweitert werden.
Werden auf alle vier Begrenzungsflächen eines regelmäßigen Tetraeders Pyramiden mit der Kantenlänge $1/15 \sqrt{6}\, a$ aufgesetzt, so entsteht das Triakistetraeder im eigentlichen Sinne.
Es ist aber auch möglich, Pyramiden mit einer anderen Seitenkante b aufzusetzen, unter der Bedingung, dass $a/3 \sqrt{3} < b < a/2 \sqrt{2}$ gilt.
Nimmt b den Wert $a/2 \sqrt{2}$ an, entartet das Triakistetraeder zu einem Würfel mit der Kantenlänge b. Für $b = a/3 \sqrt{3}$ haben die aufgesetzten Pyramiden die Höhe 0, sodass lediglich das Tetraeder mit der Kantenlänge a übrig bleibt.
Ist $b > a/2 \sqrt{2}$, so ist das Polyeder nicht mehr konvex.

Größen eines allgemeinen Triakistetraeders mit Kantenlängen a, b

Volumen	$V = a^2/12\ (a \sqrt{2} + 4 \sqrt{3b^2 - a^2})$
Oberflächeninhalt	$A = 3a \sqrt{4b^2 - a^2}$
Pyramidenhöhe	$k = 1/3 \sqrt{9b^2 - 3a^2}$
Inkugelradius	$r = a/12 \sqrt{(48b^2 - 14a^2 + 8a \sqrt{6b^2-2a^2})/(4b^2-a^2)}$
Flächenwinkel	
über Kante a	$\cos \alpha = (5a^2 - 12b^2 - 8a \sqrt{6b^2-2a^2}) / (36b^2 - 9a^2)$
über Kante b	$\cos \beta = (2b^2 - a^2) / (4b^2 - a^2)$



Triakisoktaeder, Pyramidenoktaeder

Das Triakisoktaeder ist ein Polyeder mit 24 Seitenflächen, welches dual zum abgeschnittenen Hexaeder ist. Das Catalan-Polyeder wurde 1862 von Catalan eingeführt.

Winkel zwischen den Kanten 2 arcsin $((2 + \sqrt{2})/4) = 117°12'$, Dieder-Winkel zwischen den Flächen arccos $(-(3 + 8 \sqrt{2})/17) \approx 147{,}350100126° \approx 147°21'0''$, 8 Ecken der Ordnung 3

Das Polyeder hat 36 Kanten, 24 kurze s_1 und 12 lange s_2, die Euler-Charakteristik 2, 13 Rotationsachsen und 9 Spiegelebene und die Symmetriegruppe des Oktaeders.

Weitere Namen: Trioktaeder, engl. triakis octahedron, franz. triaki-octaèdre

Hat das abgeschnittene Hexaeder die Kantenlänge a, so wird für den Triakisoktaeder

Kantenlängen $s_1 = 2a$ $s_2 = (2 + \sqrt{2})\, a \approx 3{,}41421356\, a$

Für eine Kantenlänge von $s_1 = a$ ergibt sich weiterhin

Inkugelradius	$r = \sqrt{17 (23+16 \sqrt{2})}/17 \approx 1{,}6382813268\, a$
Umkugelradius	$R = (1 + \sqrt{2}\, a) \approx 2{,}41421356\, a$
Mittelkugelradius	$\rho = (1 + \sqrt{2}/2)\, a \approx 1{,}70710678\, a$
Dreickskugelradius	$r_3 = \sqrt{3}\, a \approx 1{,}73205081\, a$
Oberfläche	$A = 3 \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}\, a^2 \approx 10{,}6729\, a^2$
Volumen	$V = 4\, (3 + 2 \sqrt{2})\, a^3 \approx 23{,}3137085\, a^3$

Isoperimetrischer Koeffizient $36\pi\, V^2/A^3 \approx 0{,}79$

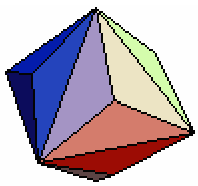
Eckpunktkoordinaten

Hilfsgröße C0 = 2,4142135623730950488016887242 1 = 1 + √2

V0 = (0, 0, C0)	V1 = (0, 0, -C0)	V2 = (C0, 0, 0)
V3 = (-C0, 0, 0)	V4 = (0, C0, 0)	V5 = (0, -C0, 0)
V6 = (1, 1, 1)	V7 = (1, 1, -1)	V8 = (1, -1, 1)
V9 = (1, -1, -1)	V10 = (-1, 1, 1)	V11 = (-1, 1, -1)
V12 = (-1, -1, 1)	V13 = (-1, -1, -1)	

Flächen

{ 6, 0, 2 }	{ 6, 2, 4 }	{ 6, 4, 0 }	{ 7, 1, 4 }	{ 7, 4, 2 }	{ 7, 2, 1 }
{ 8, 0, 5 }	{ 8, 5, 2 }	{ 8, 2, 0 }	{ 9, 1, 2 }	{ 9, 2, 5 }	{ 9, 5, 1 }
{ 10, 0, 4 }	{ 10, 4, 3 }	{ 10, 3, 0 }	{ 11, 1, 3 }	{ 11, 3, 4 }	{ 11, 4, 1 }
{ 12, 0, 3 }	{ 12, 3, 5 }	{ 12, 5, 0 }	{ 13, 1, 5 }	{ 13, 5, 3 }	{ 13, 3, 1 }



Allgemeines Triakisoktaeder

Das Catalan-Polyeder Triakisoktaeder kann zu einer Gruppe von Polyedern erweitert werden.

Werden auf alle acht Begrenzungsflächen eines regelmäßigen Oktaeders Pyramiden mit der Höhe $(\sqrt{3} - 2/3 \sqrt{6})\, a$ aufgesetzt, so entsteht das Triakisoktaeder im eigentlichen Sinne.

Es ist aber auch möglich, Pyramiden mit einer anderen Seitenkante b aufzusetzen, unter der Bedingung, dass $a/3 \sqrt{3} < b < a/2 \sqrt{2}$ gilt.

Nimmt b den Wert $a/2 \sqrt{2}$ an, entartet das Triakisoktaeder zu einem Würfel mit der Kantenlänge b. Für $b = a/3 \sqrt{3}$ haben die aufgesetzten Pyramiden die Höhe 0, sodass lediglich das Oktaeder mit der Kantenlänge a übrig bleibt.

Ist $b > a/2 \sqrt{2}$, so ist das Polyeder nicht mehr konvex.

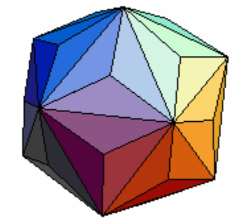
Größen eines allgemeinen Triakisoktaeders mit Kantenlängen a, b

Volumen	$V = a^2/3\ (a \sqrt{2} + 2 \sqrt{3b^2 - a^2})$
Oberflächeninhalt	$A = 6a \sqrt{4b^2 - a^2}$

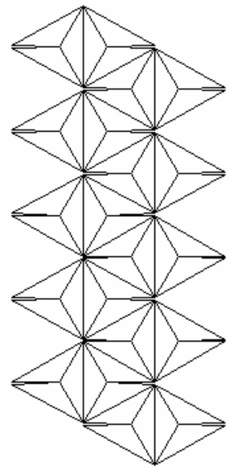
Triakisikosaeder, Pyramidenikosaeder

Das Triakisikosaeder ist ein Polyeder mit 60 Seitenflächen, welches dual zum abgeschnittenen Dodekaeder ist.

Es besteht aus gleichschenkligen Dreiecken mit einem Winkel an der Spitze von $\arcsin(3/4 + 1/20 \sqrt{5}) \approx 119{,}0393509° \approx 119°2'$



Das Catalan-Polyeder wurde 1862 von Catalan eingeführt; der Name leitet sich vom griechischen triakis = dreifach ab.
Das Polyeder hat 20 Eckpunkte der Ordnung 3 (Schläfli-Symbol 3^3) und 6 Ecken der Ordnung 10 (Schläfli-Symbol 310), 24 Kanten der Länge a und zusätzlich 12 der Länge $(3/2 + 1/10 \sqrt{5})\, a \approx 1{,}72\, a$. Dieder-Winkel $\arccos(-3\,(8+ 5 \sqrt{5})/61) \approx 160{,}612552209°$
Symmetriegruppe = Ikosaedergruppe, 31 Rotationsachsen und 15 Symmetriebenen.
Hat das Abgeschnittene Dodekaeder die Kantenlänge a, so wird für das Triakisikosaeder



Kantenlängen $s_1 = 5/22\,(7 + \sqrt{5})\, a \approx 2{,}09910636\, a$
$s_2 = 1/2\,(5 + \sqrt{5})\, a \approx 3{,}61803399\, a$

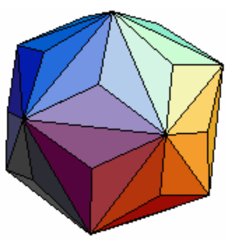
3er-Ecken-Kugelradius	$r_3 = 5\,(3 \sqrt{3} + 2 \sqrt{15})/22\, a \approx 2{,}941390708\, a$
10er-Ecken-Kugelradius	$r_{10} = \sqrt{(5\,(5 + 2 \sqrt{5}))}/2\, a \approx 3{,}440954801\, a$
Mittelkugelradius	$\rho = (5 + 3 \sqrt{5})/4\, a \approx 2{,}927050983\, a$
Inkugelradius	$r = 5 \sqrt{(61\,(41 + 18 \sqrt{5}))}/122\, a \approx 2{,}885258313\, a$
Oberfläche	$A = 75/11 \sqrt{(1/2\,(313 + 117 \sqrt{5}))}\, a^2 \approx 115{,}569\, a^2$
Volumen	$V = 125/44\,(19 + 9 \sqrt{5})\, a^3 \approx 111{,}149465334\, a^3$

Ist die kurze Kante des Triakisikosaeders a, so wird
Inkugelradius $r \approx 2{,}74\, a$
Oberfläche $A = (81 - 21 \sqrt{5})/11 \sqrt{((313 + 117 \sqrt{5})/2)}\, a^2 \approx 52{,}46\, a^2$
Volumen $V = (19 + 13 \sqrt{5})/4\, a^3 \approx 12{,}02\, a^3$
Isoperimetrischer Koeffizient $36\pi\, V^2/A^3 = 0{,}91\ldots$

Eckpunktkoordinaten des Pyramidenikosaeders
C0 = 1,0495531792613397382283151896 3 = 5 (7 + √5)/44
C1 = 1,6982127170453589529132607585 1 = 5 (3 + 2 √5)/22
C2 = 1,8090169943749474241022934171 8 = (5 + √5)/4
C3 = 2,7477658963066986911415759481 4 = 5 (13 + 5 √5)/44
C4 = 2,9270509831248422723068802515 48 = (5 + 3 √5)/4

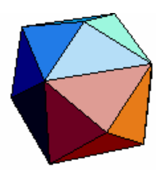
V0-3 = (±C2, 0, ±C4)	V4-7 = (±C4, ±C2, 0)	V8-11 = (0, ±C4, ±C2)
V12-15 = (0, ±C0, ±C3)	V16-19 = (±C3, 0, ±C0)	V20-23 = (±C0, ±C3, 0)
V24-31 = (±C1, ±C1, ±C1)		

Flächen: {12, 0, 8}, {12, 8, 2}, {12, 2, 0}, {13, 1, 3}, {13, 3, 9}, {13, 9, 1}, {14, 0, 2}, {14, 2, 10}, {14, 10, 0}, {15, 1, 11}, {15, 11, 3}, {15, 3, 1}, {16, 0, 5}, {16, 5, 4}, {16, 4, 0}, {17, 1, 4}, {17, 4, 5}, {17, 5, 1}, {18, 2, 6}, {18, 6, 7}, {18, 7, 2}, {19, 3, 7}, {19, 7, 6}, {19, 6, 3}, {20, 4, 9}, {20, 9, 8}, {20, 8, 4}, {21, 5, 10}, {21, 10, 11}, {21, 11, 5}, {22, 6, 8}, {22, 8, 9}, {22, 9, 6}, {23, 7, 11}, {23, 11, 10}, {23, 10, 7}, {24, 0, 4}, {24, 4, 8}, {24, 8, 0}, {25, 1, 9}, {25, 9, 4}, {25, 4, 1}, {26, 0, 10}, {26, 10, 5}, {26, 5, 0}, {27, 1, 5}, {27, 5, 11}, {27, 11, 1}, {28, 2, 8}, {28, 8, 6}, {28, 6, 2}, {29, 3, 6}, {29, 6, 9}, {29, 9, 3}, {30, 2, 7}, {30, 7, 10}, {30, 10, 2}, {31, 3, 11}, {31, 11, 7}, {31, 7, 3}

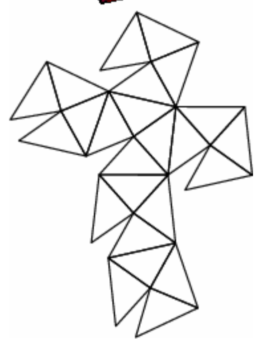


Allgemeines Triakisikosaeder

Das Catalan-Polyeder Triakisikosaeder kann zu einer Gruppe von Polyedern erweitert werden.
Werden auf alle 20 Begrenzungsflächen eines regelmäßigen Ikosaeders Pyramiden bestimmter Höhe aufgesetzt, so entsteht das Triakisikosaeder im eigentlichen Sinne.
Es ist aber auch möglich, Pyramiden mit einer anderen Seitenkante b aufzusetzen, unter der Bedingung, dass $a/3 \sqrt{3} < b < a/4 \sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})}$ gilt.



Nimmt b den Wert $a/4 \sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})}$ an, entartet das Triakisoktaeder zu einem Rhombentriakontaeder mit der Kantenlänge b. Für $b = a/3 \sqrt{3}$ haben die aufgesetzten Pyramiden die Höhe 0, sodass nur das Ikosaeder mit der Kantenlänge a übrig bleibt.
Ist $b > a/4 \sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})}$, so ist das Polyeder nicht mehr konvex.



Größen eines allgemeinen Triakisikosaeder mit Kantenlängen a, b
Volumen $V = 5/12\, a^2\,(a\,(3+\sqrt{5}) + 4 \sqrt{(3b^2 - a^2)})$
Oberflächeninhalt $A = 15a \sqrt{(4b^2 - a^2)}$

Tetrakishexaeder, Tetrahexaeder, Pyramidenwürfel

Das Tetrakishexaeder ist ein Polyeder mit 24 gleichschenkligen Dreiecken als Seitenflächen, welches dual zum abgeschnittenen Oktaeder ist; 14 Ecken und 36 Kanten.
Das Catalan-Polyeder, das Polyeder wurde zuerst von Kepler untersucht. Die

Symmetriegruppe ist die des Ikosaeders.
Winkel zwischen den Kanten 2 arcsin (2/3) = 83°37', Dieder-Winkel zwischen den Flächen arccos -4/5 = 143°7'46" ≈ 143,130102354°
Das Polyeder ist konstruierbar durch Aufsetzen von Pyramiden der Höhe 1/4 auf einen Einheitswürfel.
Hat das abgeschnittene Oktaeder die Kantenlänge a, so wird für das Tetrakishexaeder
Kantenlängen s_1 = 9/8 √2 a ≈ 1,59099 a
s_2 = 3/2 √2 a ≈ 2,12132 a
Für eine Kantenlänge von s_1 = a ergibt sich weiterhin
Oberfläche A = 16/3 √5 a² ≈ 11,9256 a²
Volumen V = 32/9 a³ ≈ 3,55555 a³
Zum Pyramidenwürfel existiert ein zweiter Körper mit gleichen Flächen, der allerdings kein uniformes Polyeder ist.

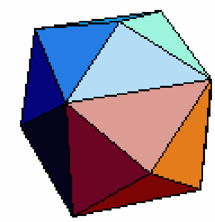
Hat das duale Polyeder, der Oktaederstumpf, die Kantenlänge a, so wird für den Pyramidenwürfel

kurze Kante	s_1 = 9/8 √2 a ≈ 1,5909903 a
lange Kante	s_2 = 3/2 √2 a ≈ 2,1213203 a
Kugel der 4er-Ecken	r_4 = 9/8 √2 a ≈ 1,590990258 a
Kugel der 6er-Ecken	r_6 = 3/4 √6 a ≈ 1,837117307 a
Mittelkugelradius	ρ = 3/2 a = 1,5 a
Inkugelradius	r = 9/20 √10 a ≈ 1,423024947 a
Volumen	V = 81/8 √2 a³ ≈ 14,318912319 a³

Eckkoordinaten
C0 = 1,06066017177982128660126654316 = 3/4 √2
C1 = 1,59099025766973192990189981474 = 9/8 √2

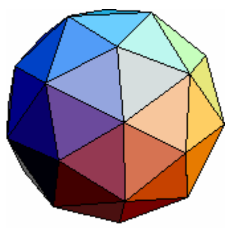
V0 = (0, 0, C1)	V1 = (0, 0, -C1)	V2 = (C1, 0, 0)
V3 = (-C1, 0, 0)	V4 = (0, C1, 0)	V5 = (0, -C1, 0)
V6 = (C0, C0, C0)	V7 = (C0, C0, -C0)	V8 = (C0, -C0, C0)
V9 = (C0, -C0, -C0)	V10 = (-C0, C0, C0)	V11 = (-C0, C0, -C0)
V12 = (-C0, -C0, C0)	V13 = (-C0, -C0, -C0)	

Flächen: {0, 6, 10}, {0, 10, 12}, {0, 12, 8}, {0, 8, 6}, {1, 7, 9}, {1, 9, 13}, {1, 13, 11}, {1, 11, 7}, {2, 6, 8}, {2, 8, 9}, {2, 9, 7}, {2, 7, 6}, {3, 10, 11}, {3, 11, 13}, {3, 13, 12}, {3, 12, 10}, {4, 6, 7}, {4, 7, 11}, {4, 11, 10}, {4, 10, 6}, {5, 8, 12}, {5, 12, 13}, {5, 13, 9}, {5, 9, 8}



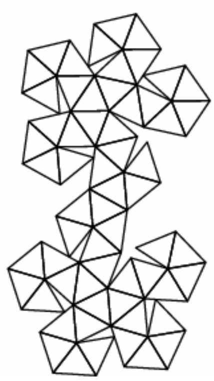
Allgemeines Tetrakishexaeder

Das Catalan-Polyeder Tetrakishexaeder kann zu einer Gruppe von Polyedern erweitert werden.
Werden auf alle vier Begrenzungsflächen eines regelmäßigen Hexaeders, d.h. Würfels, Pyramiden mit der Höhe 1/4 a aufgesetzt, so entsteht das Tetrakishexaeder im eigentlichen Sinne.
Es ist aber auch möglich, Pyramiden mit einer anderen Seitenkante b aufzusetzen, unter der Bedingung, dass a/2 √2 < b < a/2 √3 gilt.
Nimmt b den Wert a/2 √3 an, entartet das Tetrakishexaeder zu einem Rhombendodekaeder mit der Kantenlänge b. Für b = a/2 √2 haben die aufgesetzten Pyramiden die Höhe 0, sodass lediglich der Würfel mit der Kantenlänge a übrig bleibt.
Ist b > a/2 √3, so ist das Polyeder nicht mehr konvex.
Größen eines allgemeinen Tetrakishexaeders mit Kantenlängen a, b
Volumen V = a² (a + √(4b² - 2a²))
Oberflächeninhalt A = 6a √(4b² - a²)



Pentakisdodekaeder, Pyramidendodekaeder

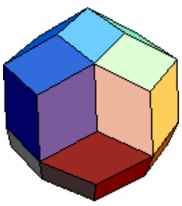
Der Körper ist ein Polyeder mit 60 Seitenflächen, welches dual zum Abgeschnittenen Dodekaeders ist.
Catalan-Polyeder, halbreguläres Polyeder 2.Art, anderer Name: Pentadodekaeder
Der Körper hat 60 gleichschenklige Dreiecke mit dem Winkel an der Spitze von 2 arcsin((9-√5)/12) ≈ 68° 37'
Der Körper hat 12 Ecken fünften Grades und 20 Ecken sechsten Grades.
Sind die 2 kürzeren Seiten der gleichschenkligen Dreiecke gleich a, so hat die andere Kante die Länge b = (9-√5)/6 a ≈ 1,12732200375 a
Das Polyeder entsteht, in dem auf ein Dodekaeder fünfseitige Pyramiden mit der Kantenlänge b und der Höhe 1/19 √(13 + 22/√5) ≈ 0,25 aufgesetzt werden.
9 Symmetrieebenen, 31 Rotationsachsen, Ikosaedergruppe ist Symmetriegruppe
Dieder-Winkel arccos (-(80+9 √5)/109) ≈ 156,7185537°

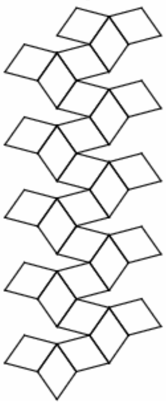


Hat das Abgeschnittene Dodekaeder die Kantenlänge a, so wird für das Pentakisdodekaeder
Kantenlängen s_1 = 1/19 (18 √5 - 9) a ≈ 1,64469 a

$s_2 = 3/2\ (\sqrt{5} - 1)\ a \approx 1{,}85410\ a$
5er-Eckenkugelradius $r_5 = 9 \sqrt{(65 + 22 \sqrt{5})/38}\ a \approx 2{,}530926869\ a$
6er-Eckenkugelradius $r_6 = 3 \sqrt{3}/2\ a \approx 2{,}598076211\ a$
Mittelkugelradius $\rho = 3\ (1 + \sqrt{5})/4\ a \approx 2{,}427050983\ a$
Inkugelradius $r = 9 \sqrt{(109\ (17+ 6 \sqrt{5}))/218}\ a \approx 2{,}377131606\ a$
Volumen $V = 405\ (9 + \sqrt{5})/76\ a^3 = 59{,}876414880\ a^3$
Für eine Kantenlänge von s_1 = a ergibt sich weiterhin
Oberfläche $A = 5/3 \sqrt{[\ 1/2\ (421 + 63\sqrt{5})]}\ a^2 \approx 27{,}9352\ a^2$
Volumen $V = 5/36\ (41 + 25 \sqrt{5})\ a^3 \approx 13{,}4585\ a^3$
Inkugelradius 1,45 a
Mittelkugelradius 1,48 a
Werden auf die 12 Begrenzungsflächen eines Dodekaeders Pyramiden mit einer beliebigen Kantenlänge b aufgesetzt, so entsteht ein allgemeines Pentakisdodekaeder mit der
Oberfläche $A = 15\ a \sqrt{(4b^2 - a^2)}$

Eckkoordinaten
C0 = 0,927050983124842272306880251548 = 3 (√5 - 1)/4
C1 = 1,33058699733550141141687582919 = 9 (9 + √5)/76
C2 = 2,15293498667750705708437914596 = 9 (7 + 5 √5)/76
C3 = 2,427050983124842272306880251548 = 3(1 + √5)/4
V0-3 = (0, ±C0, ±C3) V4-7 = (±C3, 0, ±C0) V8-11 = (±C0, ±C3, 0)
V12-15 = (±C1, 0, ±C2) V16-19 = (±C2, ±C1, 0) V20-23 = (0, ±C2, ±C1)
V24-31 = (±1,5, ±1,5, ±1,5)
Flächen: {12, 0, 2}, {12, 2, 26}, {12, 26, 4}, {12, 4, 24}, {12, 24, 0}, {13, 1, 25}, {13, 25, 5}, {13, 5, 27}, {13, 27, 3}, {13, 3, 1}, {14, 0, 28}, {14, 28, 6}, {14, 6, 30}, {14, 30, 2}, {14, 2, 0}, {15, 1, 3}, {15, 3, 31}, {15, 31, 7}, {15, 7, 29}, {15, 29, 1}, {16, 8, 24}, {16, 24, 4}, {16, 4, 5}, {16, 5, 25}, {16, 25, 8}, {17, 9, 27}, {17, 27, 5}, {17, 5, 4}, {17, 4, 26}, {17, 26, 9}, {18, 10, 29}, {18, 29, 7}, {18, 7, 6}, {18, 6, 28}, {18, 28, 10}, {19, 11, 30}, {19, 30, 6}, {19, 6, 7}, {19, 7, 31}, {19, 31, 11}, {20, 0, 24}, {20, 24, 8}, {20, 8, 10}, {20, 10, 28}, {20, 28, 0}, {21, 1, 29}, {21, 29, 10}, {21, 10, 8}, {21, 8, 25}, {21, 25, 1}, {22, 2, 30}, {22, 30, 11}, {22, 11, 9}, {22, 9, 26}, {22, 26, 2}, {23, 3, 27}, {23, 27, 9}, {23, 9, 11}, {23, 11, 31}, {23, 31, 3}





Rhombentriakontaeder, Rhombendreißigflächner

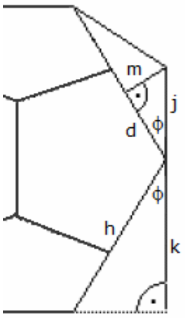
Das Catalan-Polyeder ist ein Polyeder mit 30 Rhomben als Seitenflächen, 32 Ecken und 60 Kanten, welches dual zum Ikosidodekaeder ist. An den Ecken treffen drei oder fünf Kanten zusammen.
Die kürzeren Diagonalen der Seitenflächen bilden die Kanten eines Dodekaeders, die längeren Diagonalen ein Ikosaeder.
Die Innenwinkel der Rhomben betragen 63°25' ≈ 63,43494882° und 116°34' ≈ 116,56505118° , der Dieder-Winkel zwischen den Flächen ist $5\pi/4$ = 144°
20 Ecken haben die Ordnung 3, 12 Ecken die Ordnung 5, die Isometriegruppe ist die des Dodekaeders, mit 31 Rotationsachsen und 15 Spiegelebenen.

Hat das Ikosidodekaeder die Kantenlänge a, so wird für das Rhombentriakontaeder:
Diagonalenlängen der Rhomben mit dem Verhältnis $x : y = \phi$ (ϕ … goldenes Verhältnis)
$x = \sqrt{5}/2\ a \approx 1{,}118033989\ a$
$y = (5 + \sqrt{5})/4\ a \approx 1{,}809016994\ a$
Seitenlänge der Rhomben $s = 1/4 \sqrt{(25/2 + 5/2 \sqrt{5})}\ a \approx 1{,}06331\ a$
Für eine Kantenlänge a des Rhombentriakontaeders ergibt sich
Inkugelradius $r = 1/5 \sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})}\ a \approx 1{,}37638\ a$
Umkugelradius
durch 3erEcken $R_3 = 1/5 \sqrt{(150 + 30 \sqrt{5})}\ a \approx 2{,}94674\ a$
durch 5erEcken $R_5 = 1/5 \sqrt{(150 + 50 \sqrt{5})}\ a \approx 3{,}23607\ a$
Oberfläche $A = 12 \sqrt{5}\ a^2 \approx 26{,}8328\ a^2$
Volumen $V = 4 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})}\ a^3 \approx 12{,}3107\ a^3$

Hat das duale Polyeder, das Ikosidodekaeder, die Kantenlänge a, so wird für das Rhombentriakontaeder:
Inkugelradius $r = (5+3 \sqrt{5})/8\ a \approx 1{,}463525492\ a$
Mittelkugelradius $\rho = \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})/2}\ a \approx 1{,}538841769\ a$
Ecken-3-Kugelradius $r_3 = (5 \sqrt{3} + \sqrt{15})/8\ a \approx 1{,}566654673\ a$
Ecken-5-Kugelradius $r_5 = \sqrt{(5\ (5+ 2 \sqrt{5}))}/4\ a \approx 1{,}720477401\ a$
Volumen $V = 25\ (5+ 2 \sqrt{5})/16\ a^3 \approx 14{,}8002124297\ a^3$

Eckpunktkoordinaten
C0 = 0,559016994374947424102293417183 = √5 / 4
C1 = 0,904508497187473712051146708591 = (5 + √5) / 8
C2 = 1,46352549156242113615344012577 = (5 + 3 √5) / 8

V0-3 = (±C1, 0, ±C2) V4-7 = (±C2, ±C1, 0) V8-11 = (0, ±C2, ±C1)
V12-15 = (0, ±C0, ±C2) V16-19 = (±C2, 0, ±C0) V20-23 = (±C0, ±C2, 0)
V24-31 = (±C1, ±C1, ±C1)
Flächen
{ 0, 12, 2, 14 }, { 0, 14, 10, 26 }, { 0, 26, 5, 16 }, { 0, 16, 4, 24 }, { 0, 24, 8, 12 }, { 12, 8, 28, 2 }, { 2, 28, 6, 18 }, { 2, 18, 7, 30 }, { 2, 30, 10, 14 }, { 10, 30, 7, 23 }, { 10, 23, 11, 21 }, { 10, 21, 5, 26 }, { 5, 21, 11, 27 }, { 5, 27, 1, 17 }, { 5, 17, 4, 16 }, { 4, 17, 1, 25 }, { 4, 25, 9, 20 }, { 4, 20, 8, 24 }, { 8, 20, 9, 22 }, { 8, 22, 6, 28 }, { 6, 22, 9, 29 }, { 6, 29, 3, 19 }, { 6, 19, 7, 18 }, { 7, 19, 3, 31 }, { 7, 31, 11, 23 }, { 11, 31, 3, 15 }, { 11, 15, 1, 27 }, { 1, 15, 3, 13 }, { 1, 13, 9, 25 }, { 9, 13, 3, 29 }



Rhombentriakontaeder, Rhombendreißigflächner

Um aus einem Pentagondodekaeder durch Aufsetzen von Pyramiden ein Rhombendreißigflächner zu erzeugen, müssen zwei Seitenflächen benachbarter Pyramiden einander zu einer ergänzen.
Mit Hilfe der Ähnlichkeit der skizzierten Dreiecke kann j berechnet werden und daraus schließlich die Höhe m der Pyramiden:

$$h/k = j/d \Rightarrow j = h \cdot d/k = \sqrt{20/(10 + 2\sqrt{5})} \cdot \sqrt{1/4 + 1/10\sqrt{5}} =$$
$$= \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})/(10 + 2\sqrt{5})} = \sqrt{(30 + 10\sqrt{5})/80} = (1 + \sqrt{5}) / 4$$

und für m

$$m = \sqrt{j^2 - d^2} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})/8 - 1/4 - 1/10\sqrt{5}} = \sqrt{1/8 + 1/40\sqrt{5}}$$

Ist die Pyramidenhöhe kleiner als m, so entsteht ein konvexer Sechzigflächner, ist sie größer ein konkaver Sechzigflächner.

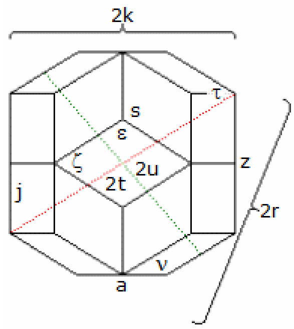
gleichseitiger Dodekaederstern, Kepler-Stern

Als Spezialfall ergibt sich, wenn die Seitenkanten der Pyramiden den Grundkanten gleich lang sind, der gleichseitige Dodekaederstern. Für diesen ergeben sich als Pyramidenhöhen

$$m_{gleichseitig} = \sqrt{1/2 - 1/10\sqrt{5}}$$

Für den zweiten Spezialfall, dem Kepler-Stern oder kleinen Sterndodekaeder, bei dem die Kanten der Pyramiden Fortsetzungen der Kanten des zu Grunde gelegten Dodekaeders sind, erhält man für die Pyramidenhöhe

$$m_{kepler} = \sqrt{1 + 2/5\sqrt{5}}$$



Der Rhombendreißigflächner ist aus 30 kongruenten Rhomben, deren Diagonalen im Verhältnis des goldenen Schnitts zueinander stehen, zusammengesetzt. Dabei laufen an 12 Ecken 5 und an 20 Ecken 3 Flächen zusammen. Er hat 60 Kanten.
Da nicht an allen Ecken gleich viele Flächen aufeinandertreffen und die Vierecke, aus denen er zusammengesetzt ist, keine Quadrate sind, ist er nicht völlig regelmäßig.

Größen am Rhomdendreißigflächner:
Kantenlänge … s, längere Diagonale der Rhomben … z, die kürzere … a und gleichzeitig die Kantenlänge des zu Grunde gelegten Dodekaeders. Inkugelradius … k = Mittelkugelradius des Dodekaeders; Abstände der Ecken vom Mittelpunkt … t und r;
kleinerer Winkel im Rhombus … ζ, der größere … ε; Flächen-Kanten-Winkel … τ und ν; Flächen-Flächen-Winkel … δ

Es gilt: $s = \sqrt{(5 + \sqrt{5}) / 8}\, a \approx 0{,}95106\, a$ $\quad a = \sqrt{2 - 2/5\sqrt{5}}\, s \approx 1{,}05146\, s$

$z = 2\sqrt{(3 + \sqrt{5}) / 8}\, a = \sqrt{2 + 2/5\sqrt{5}}\, s \approx 1{,}7013\, s$

Rhombenfläche $A = 2/5\sqrt{5}\, s^2 \approx 0{,}89443\, s^2$

Rhombushöhe $w = 2/\sqrt{5}\, s \approx 0{,}89443\, s$ $\quad \zeta = \arctan 2 \approx 63{,}43°$

$\varepsilon = 180° - \arctan 2 \approx 116{,}57°$

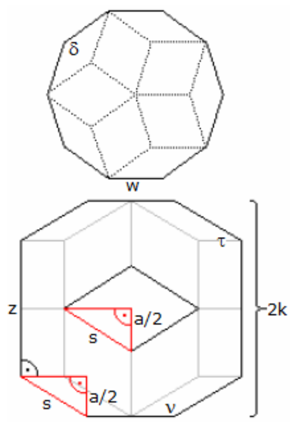
Inkugelradius $k = (3 + \sqrt{5})/4\, a = \sqrt{1 + 2/5\sqrt{5}}\, s \approx 1{,}37638\, s$

Mittelkugelradius $u = \sqrt{5/4 + 2/5\sqrt{5}}\, s \approx 1{,}46439\, s$

$t = (1 + \sqrt{5})/2\, s \approx 1{,}61803\, s$

$r = \sqrt{3/2 + 3/10\sqrt{5}}\, s \approx 1{,}47337\, s$

Der Rhombendreißigflächner hat keine Umkugel, da t verschieden von r ist.



Jeweils 10 Seitenflächen des Rhombendreißigflächners bilden eine Art Ring. Auf Grund der Parallelität der Kanten eines Rhombus zueinander und der Symmetrie des Rhombendreißigflächners gleicht er einem Zehneck mit der Kantenlänge w. Der Winkel der Flächen zueinander ist damit δ = 144°.

Zur Berechnung der Flächen-Kanten-Winkel nutzt man die Beziehung

$$2k - z = a$$

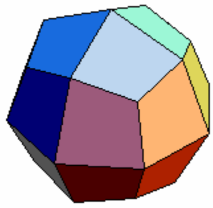
wobei z die längere Diagonale der Rhomben, a die kürzere Diagonale und gleichzeitig die Kantenlänge des zu Grunde gelegten Dodekaeders, sowie k der Inkugelradius des Flächners sind.
Damit ergibt sich, dass die beiden rot skizzierten Dreiecke kongruent sind, womit die Flächen-Kanten-Winkel berechnet werden zu

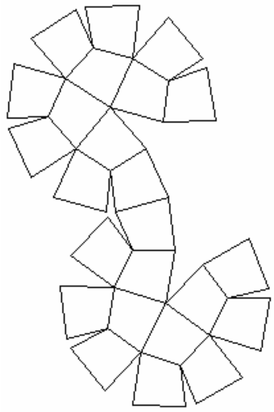
$\tau = 90° + \arcsin (a/(2s)) = 90° + \arcsin \sqrt{1/2 - 1/10 \sqrt{5}} = 121{,}7174°$

$\nu = 90° + \arccos (a/(2s)) = 90° + \arccos \sqrt{1/2 - 1/10 \sqrt{5}} = 148{,}2825°$

Deltoid-24-Flächner, Deltoidikositetraeder

Das Catalan-Polyeder, auch Trapezoider Ikositetraeder genannt, ist ein Polyeder mit 24 Seitenflächen, 48 Kanten und 26 Ecken, welches dual zum abgestumpften Kuboktaeder ist.
Von den 48 Kanten sind 24 kurz s_1 und 24 lang $_2$. Die verschiedenen Innenwinkel der Drachenvierecke sind 81,57894° und 98,42106° groß.
franz. icositétraèdre trapézoïdal, icositétraèdre deltoïdal
Dihedraler Winkel $\arccos (-(7 + 4 \sqrt{2})/17) \approx 138{,}117959056° \approx 138° 6' 34"$

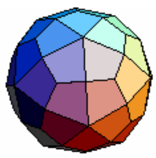


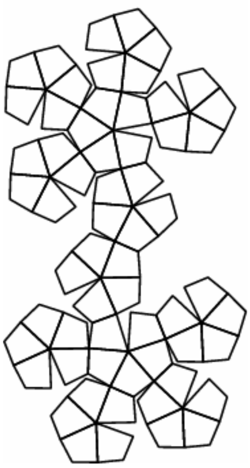


Hat das abgestumpfte Kuboktaeder die Kantenlänge a, so wird für den Deltoid-24-Flächner:

Kantenlängen $s_1 = 2/7 \sqrt{10 - \sqrt{2}}\, a \approx 0{,}837186\, a$
$s_2 = \sqrt{4 - 2 \sqrt{2}}\, a \approx 1{,}08239\, a$
Deltoid-Länge $d_1 = 2 \sqrt{31 - 8 \sqrt{2}}/7\, a \approx 1{,}267692472\, a$
Deltoid-Breite $d_2 = \sqrt{2}\, a \approx 1{,}414213562\, a$
Inkugelradius $r = \sqrt{2/17 (7 + 4 \sqrt{2})}\, a \approx 1{,}22026\, a$
Mittelkugelradius $\rho = \sqrt{2 (2 + \sqrt{2})}/2\, a \approx 1{,}30656296\, a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = (4 \sqrt{3} + \sqrt{6})/7\, a \approx 1{,}339670425\, a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = \sqrt{2}\, a \approx 1{,}414213562\, a$
Oberfläche $A = 6 \sqrt{29 - 2\sqrt{2}}\, a^2 \approx 30{,}6948\, a^2$
Volumen $V = \sqrt{122 + 71 \sqrt{2}}\, a^3 \approx 14{,}9133\, a^3$

Eckpunktkoordinaten
C0 = 0,773459080339013578400241246316 = (4 + √2)/7
C1 = 1,414213562373095048801688724421 = √2
V0-1 = (0, 0, ±C1)   V2-3 = (±C1, 0, 0)   V4-5 = (0, ±C1, 0)
V6-9 = (±1, 0, ±1)   V10-13 = (±1, ±1, 0) V14-17 = (0, ±1, ±1)
V18-25 = (±C0, ±C0, ±C0)
Flächen
{0, 6, 18, 14} {0, 14, 22, 8} {0, 8, 24, 16} {0, 16, 20, 6} {1, 7, 21, 17} {1, 17, 25, 9}
{1, 9, 23, 15} {1, 15, 19, 7} {2, 6, 20, 11} {2, 11, 21, 7} {2, 7, 19, 10} {2, 10, 18, 6}
{3, 8, 22, 12} {3, 12, 23, 9} {3, 9, 25, 13} {3, 13, 24, 8} {4, 10, 19, 15}{4, 15, 23, 12}
{4, 12, 22, 14}{4, 14, 18, 10}{5, 11, 20, 16} {5, 16, 24, 13} {5, 13, 25, 17}{5, 17, 21, 11}





Deltoid-60-Flächner, Drachensechzigflächner

Das Catalan-Polyeder, auch deltoidaler Hexakontaeder oder Drachenhexakontaeder genannt, ist ein Polyeder mit 60 Seitenflächen, 120 Kanten und 62 Ecken, welches dual zum kleinen Rhombenikosidodekaeder ist.
Es ist das einzige Catalan-Polyeder ohne Hamiltonpfad.
Dihedraler Winkel $\arccos (-(19 + 8 \sqrt{5})/41) \approx 154{,}1213631° \approx 154° 8'$

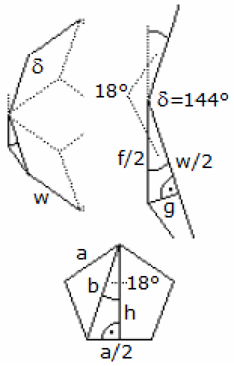
Hat das kleine Rhombenikosidodekaeder die Kantenlänge a, so wird für den Deltoid-60-Flächner:

Kantenlängen $s_1 = 1/11 \sqrt{5 (85 - 31 \sqrt{5})}\, a \approx 0{,}804992\, a$
$s_2 = 1/3 \sqrt{25 - 5 \sqrt{5}}\, a \approx 1{,}23916\, a$
Drachenviereckslänge $l = \sqrt{10 (157 + 31 \sqrt{5})}/33\, a \approx 1{,}441603113\, a$
Drachenviereckbreite $b = (5-\sqrt{5})/2\, a \approx 1{,}381966011\, a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = (5 \sqrt{3} + 4 \sqrt{15})/11\, a \approx 2{,}195653402\, a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = \sqrt{5}\, a \approx 2{,}236067977\, a$
5er-Ecken-Kugelradius $r_5 = \sqrt{5 (5 + 2 \sqrt{5})}/3\, a \approx 2{,}293969867\, a$
Inkugelradius $r = \sqrt{205 (19 + 8 \sqrt{5})}/41\, a \approx 2{,}120991019\, a$
Mittelkugelradius $\rho = 1/22 \sqrt{5 (283 + 79 \sqrt{5})}\, a \approx 2{,}17909\, a$
Oberfläche $A = 100/11 \sqrt{79 - 16\sqrt{5}}\, a^2 \approx 59{,}7673\, a^2$
Volumen $V = 1/33 (500 + 400 \sqrt{5})\, a^3 \approx 42{,}2553\, a^3$

Um den Drachensechzigflächner zu erhalten, werden auf jeden Rhombus eines Rhombendreißigflächners gerade Pyramiden mit einer solchen Höhe aufgesetzt, dass je zwei Seitenflächen zweier benachbarter Pyramiden auf einer Ebene liegen und somit einander zu einer Fläche ergänzen.

Eckpunktkoordinaten
C0 = (5 - √5)/4C1 = (15 + √5)/22   C2 = √5/2

$C3 = (5 + \sqrt{5})/6$ $C4 = (5 + 4\sqrt{5})/11$ $C5 = (5 + \sqrt{5})/4$
$C6 = (5 + 3\sqrt{5})/6$ $C7 = (25 + 9\sqrt{5})/22$ $C8 = \sqrt{5}$
$V0\text{-}1 = (0, 0, \pm C8)$ $V2\text{-}3 = (\pm C8, 0, 0)$ $V4\text{-}5 = (0, \pm C8, 0)$
$V6\text{-}13 = (\pm C0, \pm C2, \pm C5)$ $V14\text{-}21 = (\pm C5, \pm C0, \pm C2)$ $V22\text{-}29 = (\pm C2, \pm C5, \pm C0)$
$V30\text{-}33 = (\pm C3, 0, \pm C6)$ $V34\text{-}37 = (\pm C6, \pm C3, 0)$ $V38\text{-}41 = (0, \pm C6, \pm C3)$
$V42\text{-}45 = (0, \pm C1, \pm C7)$ $V46\text{-}49 = (\pm C7, 0, \pm C1)$ $V50\text{-}53 = (\pm C1, \pm C7, 0)$
$V54\text{-}61 = (\pm C4, \pm C4, \pm C4)$
Flächen
{30, 0, 44, 8}, {30, 8, 56, 16}, {30, 16, 46, 14}, {30, 14, 54, 6}, {30, 6, 42, 0}, {31, 1, 43, 7}, {31, 7, 55, 15}, {31, 15, 47, 17}, {31, 17, 57, 9}, {31, 9, 45, 1}, {32, 0, 42, 10}, {32, 10, 58, 18}, {32, 18, 48, 20}, {32, 20, 60, 12}, {32, 12, 44, 0}, {33, 1, 45, 13}, {33, 13, 61, 21}, {33, 21, 49, 19}, {33, 19, 59, 11}, {33, 11, 43, 1}, {34, 2, 47, 15}, {34, 15, 55, 23}, {34, 23, 50, 22}, {34, 22, 54, 14}, {34, 14, 46, 2}, {35, 2, 46, 16}, {35, 16, 56, 24}, {35, 24, 51, 25}, {35, 25, 57, 17}, {35, 17, 47, 2}, {36, 3, 48, 18}, {36, 18, 58, 26}, {36, 26, 52, 27}, {36, 27, 59, 19}, {36, 19, 49, 3}, {37, 3, 49, 21}, {37, 21, 61, 29}, {37, 29, 53, 28}, {37, 28, 60, 20}, {37, 20, 48, 3}, {38, 4, 52, 26}, {38, 26, 58, 10}, {38, 10, 42, 6}, {38, 6, 54, 22}, {38, 22, 50, 4}, {39, 4, 50, 23}, {39, 23, 55, 7}, {39, 7, 43, 11}, {39, 11, 59, 27}, {39, 27, 52, 4}, {40, 5, 51, 24}, {40, 24, 56, 8}, {40, 8, 44, 12}, {40, 12, 60, 28}, {40, 28, 53, 5}, {41, 5, 53, 29}, {41, 29, 61, 13}, {41, 13, 45, 9}, {41, 9, 57, 25}, {41, 25, 51, 5}



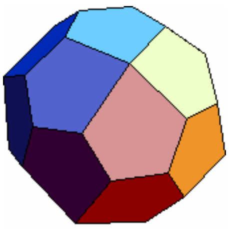
Um den Drachensechzigflächner zu erhalten, werden auf jeden Rhombus eines Rhombendreißigflächners gerade Pyramiden mit einer solchen Höhe aufgesetzt, dass je zwei Seitenflächen zweier benachbarter Pyramiden auf einer Ebene liegen und somit einander zu einer Fläche ergänzen.
Da der Flächen-Flächen-Winkel im Rhombendreißigflächner 144° beträgt, muss der spitze Flächen-Flächen-Winkel der aufzusetzenden Pyramiden 18° betragen.
Der gleiche Winkel ist auch zwischen Höhe und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck vorhanden (Abbildung). Damit kann man die Höhe der auf den Rhombendreißigflächner zu setzenden Pyramiden berechnen. Es wird:

$$g = 1/5 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

Die Diagonalen d und e der abschließenden Drachenviereck sind gleich

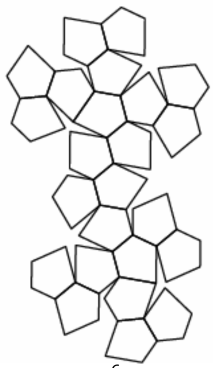
$$d = \sqrt{1/8\,(5 + \sqrt{5})} \qquad e = 2/5 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Für die Fläche der Drachen wird $A = 1/5 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
und für das Volumen des Drachensechzigflächners $V = 8 \sqrt{2 + 2/5 \sqrt{5}}$



Pentagonales Ikositetraeder, Pentagon-24-Flächner, Pentagonikositetraeder

Polyeder mit 24 Seitenflächen, welches dual zum abgestumpften Hexaeder ist. Der Körper ist ein einfaches Beispiel für O-Symmetrie bei Polyedern. Das Mineral Cuprit Cu_2O kristalliert in der Form dieses Polyeders.
Catalan-Polyeder, mit 60 Kanten, 36 vom Typ s_1, 24 vom Typ s_2
Dieder-Winkel $\arccos\left(\left(1-\sqrt[3]{2\,(283+21\sqrt{33})} - \sqrt[3]{2\,(283-21\sqrt{33})}\right)/21\right) \approx 136{,}309233°$



Hat das abgestumpfte Hexaeder die Kantenlänge a, so sind die Kantenlängen des pentagonalen Ikositetraeders die positiven Lösungen der Gleichungen

$$2 s_1^6 - 4 s_1^4 - 4 s_1^2 - 1 = 0 \; ; \; 32 s_2^6 - 32 s_2^4 + 8 s_2^2 - 1 = 0$$

d.h. $s_1 = \sqrt{6\left(4-\sqrt[3]{2\,(13+3\sqrt{33})} - \sqrt[3]{2\,(13-3\sqrt{33})}\right)}/6\, a \approx 0{,}593465356\, a$

$s_2 = \sqrt{3\left(4+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)}/6\, a \approx 0{,}842509162\, a$

Der Umkugelradius R ist die positive Lösung von

$$128 R^6 - 224 R^4 - 24 R^2 - 1 = 0$$

d.h. $R \approx 1{,}3614101519\, a$

Mittelkugelradius $\rho = \sqrt{3\left(7+\sqrt[3]{199+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{199-3\sqrt{33}}\right)}/6\, a \approx 1{,}247223168\, a$

Inkugelradius $r = \sqrt{42\left(78+\sqrt[3]{66\,(6039+49\sqrt{33})} + \sqrt[3]{t(66\,(6039-49\sqrt{33})}\right)}/84\, a \approx 1{,}157661791\, a$

Oberfläche A und Volumen V ergeben sich als positive Wurzeln der Gleichungen

$$A^6 - 684 A^4 + 142560 A^2 - 9879408 = 0$$

$$8 V^6 - 452 V^4 + 462 V^2 - 121 = 0$$

d.h. für eine Kantenlänge a

Oberfläche $A = \sqrt{\sqrt[3]{540216 - 78408\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{78408\cdot\sqrt{33} + 540216} + 228}\, a^2 \approx 19{,}2994065632\, a^2$

Volumen $V = \sqrt{\sqrt[3]{1327067/216 - 473/72\sqrt{33}} + \sqrt[3]{473/72\sqrt{33} + 1327067/216} + 113/6}\, a^3 \approx 7{,}44739518881\, a^3$

Eckpunktkoordinaten

$C0 = 0{,}21879664300048044102 15 = \sqrt{6\left(\sqrt[3]{6\,(9 + \sqrt{33})} + \sqrt[3]{6\,(9 - \sqrt{33})} - 6\right)}/12$

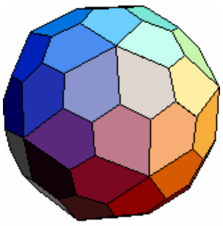
$C1 = 0{,}74018374136985722 28085 = \sqrt{6\left(6 + \sqrt[3]{6\,(9 + \sqrt{33})} + \sqrt[3]{6\,(9 - \sqrt{33})}\right)}/12$

$C2 = 1{,}02365617811269018236 34 = \sqrt{6\left(18 + \sqrt[3]{6\,(9 + \sqrt{33})} + \sqrt[3]{6\,(9 - \sqrt{33})}\right)}/12$

$C3 = 1{,}36141015192644253450 10 = \sqrt{6\left(14+\sqrt[3]{2\,(1777+33\sqrt{33})}+\sqrt[3]{2\,(1777-33\sqrt{33})}\right)}/12$

V0-1 = (0, 0, ±C3) V2-3 = (±C3, 0, 0) V4-5 = (0, ±C3, 0)
V6-9 = (±C1,±C0, C2) V10-13 = (C2, ±C1, ±C0) V14 = (C0, -C2, C1)
V15 = (C0, C2, -C1) V16 = (-C0, C2, C1) V17 = (-C0, -C2, -C1)
V18 = (C0, C1, C2) V19 = (C0, -C1, -C2) V20 = (-C0, -C1, C2)
V21 = (-C0, C1, -C2) V22 = (C2, C0, C1) V23 = (C2, -C0, -C1)
V24 = (-C2, -C0, C1) V25 = (-C2, C0, -C1) V26 = (C1, C2, C0)
V27 = (C1, -C2, -C0) V28 = (-C1, -C2, C0) V29 = (-C1, C2, -C0)
V30-37 = (±C1, ±C1, ±C1)

Flächen
{0, 6, 22, 30, 18 } {0, 18, 16, 34, 8 } {0, 8, 24, 36, 20 } {0, 20, 14, 32, 6 } {1, 7, 23, 33, 19 } {1, 19, 17, 37, 9 } {1, 9, 25, 35, 21 } {1, 21, 15, 31, 7 } {2, 10, 27, 33, 23 } {2, 23, 7, 31, 11 } {2, 11, 26, 30, 22 } {2, 22, 6, 32, 10 } {3, 12, 29, 35, 25 } {3, 25, 9, 37, 13 } {3, 13, 28, 36, 24 } {3, 24, 8, 34, 12 } {4, 15, 21, 35, 29 } {4, 29, 12, 34, 16 } {4, 16, 18, 30, 26 } {4, 26, 11, 31, 15 } {5, 14, 20, 36, 28 } {5, 28, 13, 37, 17 } {5, 17, 19, 33, 27 } {5, 27, 10, 32, 14 }



Pentagonhexakontaeder, Pentagonales Hexacontaeder, Pentagon-60-Flächner

Der Körper ist ein Catalan-Polyeder mit 60 Seitenflächen, spiegelsymmetrischen Fünfecken, 150 Kanten, 90 langen und 60 kurzen, und 92 Ecken, welches dual zum abgeschrägten Dodekaeder ist; der Körper ist ein einfaches Beispiel für I-Symmetrie bei Polyedern.
Winkel der unregelmäßigen Fünfeckflächen 118,1366228° und 67,45350897°
Dieder-Winkel $\arccos(-(2(x+(2/x))(15\phi+1)+(16\phi+15))/209) \approx 153{,}178732° \approx 153°10'24''$
wobei $\phi = (1+\sqrt{5})/2$; $x = \sqrt[3]{((\phi+\sqrt{\phi-5/27}))/2)} + \sqrt[3]{((\phi-\sqrt{\phi-5/27}))/2)}$

Hat das abgeschrägte Dodekaeder die Kantenlänge 1, so sind die Kantenlängen des Pentagonalen Hexacontaeders die positiven Lösungen der Gleichungen

$$2 s_1^6 - 2 s_1^5 - 4 s_1^4 + s_1^3 - 4 s_1^2 - 1 = 0$$
$$31 s_2^6 - 53 s_2^5 - 26 s_2^4 + 34 s_2^3 + 17 s_2^2 - 1 = 0$$

Kantenlängen $s_1 = a/x \approx 0{,}582899535\ a$
$s_2 = (x (7\phi+2)+(5\phi-3)+2 (8-3\phi)/x)/31\ a \approx 1{,}019988247\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = \sqrt{(3 (x \phi+\phi+1+(1/x)))/2}\ a \approx 2{,}117209899\ a$
5er-Ecken-Kugelradius $r_5 = \sqrt{(x^2 (1067\phi+1009) +x (2259\phi+1168) + 941\phi+1097))/62}\ a \approx 2{,}220000699\ a$
Mittelkugelradius $\rho = \phi \sqrt{(x (x+\phi)+1)/2}\ a \approx 2{,}097053835\ a$
Inkugelradius $r = ax \sqrt{t(209 (x^2 (104\phi-7) +x (153\phi+52)+195-\phi)))/418} \approx 2{,}039873155\ a$
Oberfläche $A \approx 55{,}2805\ a^2$
Volumen $V = 5a^3 \sqrt{(x (x^2 (11405\phi+287) +x (14528\phi+8265)+ 2363\phi+13146))/62} \approx 37{,}588423674\ a^3$
Das Polyeder hat 31 Rotationsachsen aber keine Spiegelebene. Es existiert ein chiraler Körper.

Ist von dem Pentagonhexakontaeder eine seiner zwei Kantenlängen a oder b gegeben, so können weitere Größen berechnet werden.
Dabei sei t die einzige reelle Lösung der kubischen Gleichung

$$8t^3 + 8t^2 - \phi^2 = 0$$

wobei $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ die goldene Zahl ist. Für t wird mit

$$u = \sqrt{49/13824 \sqrt{5} + 31/4608} + 1/32 \sqrt{5} + 49/864$$
$$t = \sqrt[3]{-u} + \sqrt[3]{u} - 1/3 \approx 0{,}471575629621940$$

Kantenlängen $a = b/2\ (1+2t)/(1-2t^2) \approx 1{,}7498525667\ b$
$b = 2a\ (1-2t^2)/(1+2t) \approx 0{,}57147671696\ a$
Volumen $V = 40a^3 (1+t)(2+3t)(1-2t^2)^2/(1+2t)^3/\sqrt{1-2t} \approx 35{,}4216355744\ a^3$
$V = 5b^3 (1+t)(2+3t)/(1+2t)^3/\sqrt{1-2t} \approx 14{,}3624429296\ b^3$
Oberfläche $A = 120a^2 (2+3t)(1-2t^2) \sqrt{1-t^2}/(1+2t)^2 \approx 53{,}1351450289\ a^2$
$A = 30b^2 (2+3t) \sqrt{1-t^2}/(1-2t^2) \approx 162{,}698964198\ b^2$
Mittelkugelradius $\rho = a (1-2t^2)/(1-4t^2) \sqrt{2(1+t)(1-2t)} \approx 2{,}0559588224\ a$
$\rho = b \sqrt{(1+t)/(2-4t)} \approx 3{,}5976248226\ b$
Inkugelradius $r = a (1-2t^2)/(1+2t) \sqrt{(1+t)/((1-t)(1-2t))} \approx 1{,}999898686\ a$
$r = b/2 \sqrt{(1+t)/((1-t)(1-2t))} \approx 3{,}4995278489\ b$
Größen des Tangentenvierecks
Flächeninhalt $A = 2a^2 (2+3t)(1-2t^2)/(1+2t)^2 \approx 1{,}0042640286\ a^2$
$A = b^2/2\ (2+3t)/(1-2t^2) \sqrt{1-t} \approx 2{,}235333075\ b^2$
Inkreisradius $r = a (1-2t^2)/(1+2t) \sqrt{(1+t)/(1-t)} \approx 0{,}4768353231\ a$
$r = b/2 \sqrt{(1+t)/(1-t)} \approx 0{,}8343915140\ b$

Diagonale || b $d = 2a\,(1-2t^2) \approx 1{,}1104657022\,a$

$d = b\,(1+2t) \approx 1{,}9431512592\,b$

Perspectiva corporum regularium

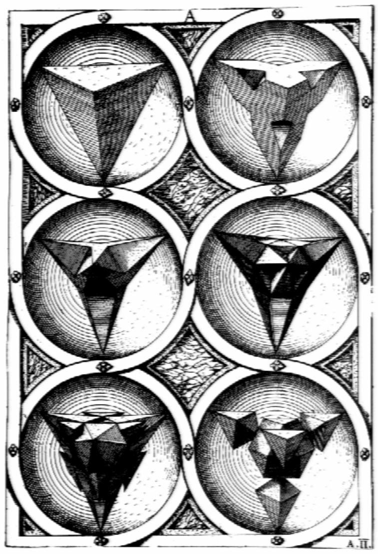
Wentzel Jamnitzer wurde 1508 in Wien geboren. Seit 1534 war er Bürger von Nürnberg und eröffnete dort, gemeinsam mit seinem Bruder Albrecht, eine Goldschmiedewerkstatt. Wentzel Jamnitzer ist der bekannteste deutsche Goldschmied der Renaissance. 1543 wird ihm das Amt des städtischen Stempelschneiders übertragen. Er stirbt am 19.12.1585 in Nürnberg.
Die von Jamnitzer entworfene und 1568 von dem Radierer Jost Amman geschnittene *Perspectiva corporum regularium* ist das Ergebnis seiner intensiven Beschäftigung mit den Problemen der perspektivischen Darstellung. Jedoch drücken seine Bilder nicht nur den gekonnten Umgang mit Zirkel und Lineal nach den Regeln Euklids aus, sondern die fünf regulären Körper und deren "Metamorphosen" werden in einem metaphysischen Zusammenhang gesehen, der in den Zwischenblättern dargestellt wird:

Tetraeder	Feuer	der Vokal A	Oktaeder	Luft	der Vokal E
Hexaeder	Erde	der Vokal I	Ikosaeder	Wasser	der Vokal O
Dodekaeder	Himmel	der Vokal U			

An die Blätter mit den Abbildungen zu den regulären Körpern schließen sich noch drei Serien mit perspektivischen Darstellungen von Kugeln, Kegeln und Tori an.

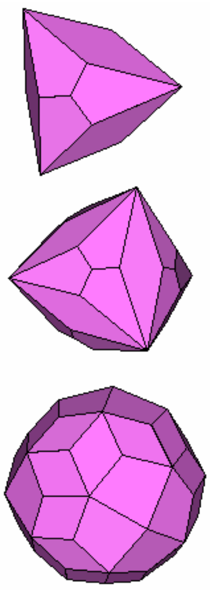
DAs ist Ein fleyssige Fürweysung
Wie die Fünff Regulirten Cörper darvon
Plato im Timaeo Unnd Euclides inn sein Elementis schreibt.
Durch einen sonderlichen newen behenden und
gerechten weg Der vor nie im gebrauch ist gesehen wor den
gar Künstlich inn die Perspectiva gebracht. Und darzu ein schöne Anleytung wie auß
denselbigen Fünff Cörpern one Endt gar
viel andere Cörper mancherley Art
und gestalt gemacht unnd gefunden werden mügen. Allen Liebhabern der freyen Kunst zu Ehrn durch Wentzeln Jamnitzer burgern und goldtschmid in Nürmberg mit Göttlicher hülff an tag geben. Mit Röm. Kayserlicher May. befreyung Inn 35. Jaren nicht nach zudrucken.
Anno, M. D. LXVIII.

A. 1.
IGNIS. Das Fewer.
TETRAEDRON
Sive Pyramis trilaterata.
Ein trianglichter Kegel.
Der Erst unter den Fünf
regulirten Cörpern Ist ein Corpus
gemacht von vier gleichseitigen
tri angeln Flechen oder Pöden
gerader Linien darauff es
gestelt werden mag hat sechs
seiten oder gerader Linien
Zwölff flache Winckel unnd vier
Cörperlicher Eck. Auß disem
drianglichten Corpore oder Kegel
sind verner drey und Zwaintzig
ander Cör
pora geursacht und uf
mancherley un
terschidliche Art zu werckh
gezogen.
Wie hernach gesehen wirt.



Tetraeder und daraus abgeleitete Körper
Kupferstich aus einer Serie von 4 zum Tetraeder

Escher-Bilder

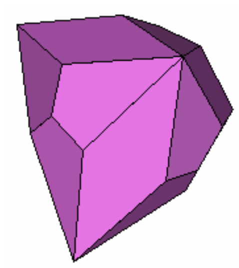


Archimedisch-Catalanische Hülle, AC-Hülle

Unter der Archimedisch-Catalanischen Hülle versteht man das Polyeder, dass die konvexe Hülle eines Verbunds eines Archimedischen Körpers und seinem dualen Catalanischen Körper darstellt,
In der Conway-Notation wird von einer "join"-Operation (Verbindungsoperation) gesprochen und das Polyeder durch ein j gekennzeichnet.
Zum Beispiel ist jA13 die Archimedisch-Catalanische Hülle des Tetraederstumpfs A13 und seines dualen Polyeders, des Triakistetraeders.

Die Abbildung zeigt von oben nach unten die Archimedisch-Catalanischen Hüllen des Tetraederstumpfs, des Hexaederstumpfs und des abgeschrägten Würfels.

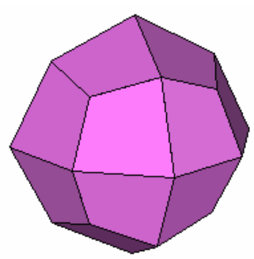
Tetraederstumpf-AC-Hülle



Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Tetraederstumpfs wird von 12 Drachenvierecken und 6 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 20 Ecken und 36 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos -2/3 ≈ 131,810315°, Kurze Kante-Winke arccos -8/9 ≈ 152,733956°.
Hat der Tetraederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Tetraederstumpf-AC-Hülle

kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{34}/10\ a \approx 0{,}583095189\ a$
lange Kantenlänge	$s_2 = \sqrt{10}/2\ a \approx 1{,}581138830\ a$
3er-Ecken-Kugelradius	$r_3 = 9\ \sqrt{6}/20\ a \approx 1{,}102270384\ a$
3er-Ecken-Kugelradius B	$r_{3B} = \sqrt{22}/4\ a \approx 1{,}172603940\ a$
6er-Ecken-Kugelradius	$r_6 = 3\ \sqrt{6}/4\ a \approx 1{,}837117307\ a$
Inkugelradius	$r = 3\ \sqrt{2}/4\ a \approx 1{,}060660172\ a$
Volumen	$V = 99\ \sqrt{2}/20\ a^3 \approx 7{,}000357134\ a^3$

Die Rhomben haben eine Länge 3a, eine Breite a, die Drachenvierecke eine Länge 1,8 a und eine Breite von a.

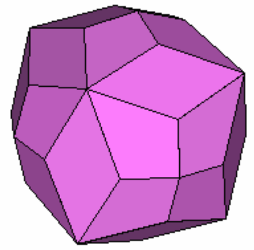


Kuboktaeder-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Kuboktaeders wird von 24 Drachenvierecken begrenzt. Das Polyeder hat 26 Ecken und 48 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos -2/3 ≈ 131,810315°, Kurze Kante-Winke arccos -5/6 ≈ 146,442690°.
Hat das Kuboktaeder die Kantenlänge a, so wird für die Kuboktaeder-AC-Hülle

kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{22}/8\ a \approx 0{,}586301970\ a$
lange Kantenlänge	$s_2 = \sqrt{10}/4\ a \approx 0{,}790569415\ a$
Drachenlänge	$l = 3\ \sqrt{6}/8\ a \approx 0{,}918558654\ a$
Drachenbreite	$b = a$
3er-Ecken-Kugelradius	$r_3 = 3\ \sqrt{6}/8\ a \approx 0{,}918558654\ a$
4er-Ecken-Kugelradius	$r_4 = 3\ \sqrt{2}/4\ a \approx 1{,}060660172\ a$
Inkugelradius	$r = \sqrt{3}/2\ a \approx 0{,}866025404\ a$
Volumen	$V = 27\ \sqrt{2}/12\ a^3 \approx 3{,}181980515\ a^3$

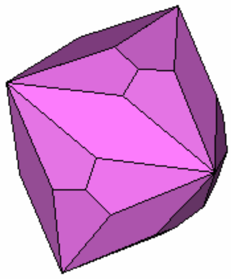
Oktaederstumpf-AC-Hülle



Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Oktaederstumpfs wird von 24 Drachenvierecken und 12 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 38 Ecken und 72 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos -5/6 ≈ 146,442690°, Kurze Kante-Winke arccos -8/9 ≈ 152,733956°.
Hat der Oktaederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Oktaederstumpf-AC-Hülle

kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{34}/8$ a ≈ 0,728868987 a
lange Kantenlänge	$s_2 = \sqrt{22}/4$ a ≈ 1,172603940 a
Rhombenlänge	$l_r = 3 \sqrt{2}/2$ a ≈ 2,121320344 a
Drachenlänge	$l = 9 \sqrt{2}/8$ a ≈ 1,590990258 a
3er-Ecken-Kugelradius	$r_3 = \sqrt{10}/2$ a ≈ 1,581138830 a
4er-Ecken-Kugelradius	$r_4 = 9 \sqrt{2}/8$ a ≈ 1,590990258 a
6er-Ecken-Kugelradius	$r_6 = 3 \sqrt{6}/4$ a ≈ 1,837117307 a
Inkugelradius	r = 3/2 a
Volumen	$V = 45 \sqrt{2}/4\ a^3 \approx 15{,}909902577\ a^3$

Die Breite der Rhomben und der Drachenvierecke beträgt dann a.



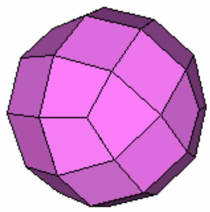
Hexaederstumpf-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Hexaederstumpfs wird von 24 Drachenvierecken und 12 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 38 Ecken und 72 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos $(-(2+ \sqrt{2})/4)$ ≈ 148,600285°, Kurze Kante-Winke arccos $(-(1+ \sqrt{2})/4)$ ≈ 163,157884°.
Hat der Hexaederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Hexaederstumpf-AC-Hülle

kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{(7-4 \sqrt{2})}/2$ a ≈ 0,579470826 a
lange Kantenlänge	$s_2 = \sqrt{(7+4 \sqrt{2})}/2$ a ≈ 1,778823646 a
Rhombenlänge	$l = (2+ \sqrt{2})$ a ≈ 3,414213562 a
3er-Ecken-Kugelradius	$r_3 = \sqrt{3}$ a ≈ 1,732050808 a
8er-Ecken-Kugelradius	$r_8 = (1+ \sqrt{2})$ a ≈ 2,414213562 a
Inkugelradius	$r = (2+ \sqrt{2})/2$ a ≈ 1,707106781 a
Volumen	$V = (14+8 \sqrt{2})\ a^3 \approx 25{,}313708499\ a^3$

Die Breite der Rhomben und der Drachenvierecke beträgt dann a, die Länge der Drachenvierecke 2a.

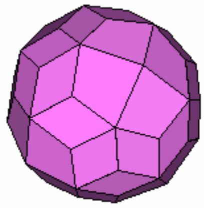
Rhombenkuboktaeder-AC-Hülle



Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Rhombenkuboktaeders wird von 24 Drachenvierecken und 24 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 50 Ecken und 96 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos $(-(2+ \sqrt{2})/4)$ ≈ 148,600285°, Kurze Kante-Winke arccos $(-(6+ \sqrt{2})/8)$ ≈ 157,937809°.
Hat das Rhombenkuboktaeder die Kantenlänge a, so wird für die Rhombenkuboktaeder-AC-Hülle

kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{(69-2 \sqrt{2})}/14$ a ≈ 0,581042224 a
lange Kantenlänge	$s_2 = \sqrt{(5-2 \sqrt{2})}/2$ a ≈ 0,736812879 a
Rhombenlänge	$l = \sqrt{(2 (2- \sqrt{2}))}$ a ≈ 1,082392200 a
Drachenlänge	$d = 2 \sqrt{(10- \sqrt{2})}/7$ a ≈ 0,837186076 a
3er-Ecken-Kugelradius	$r_3 = (4 \sqrt{3} + \sqrt{6})/7$ a ≈ 1,339670425 a
4er-Ecken-Kugelradius	$r_4 = \sqrt{(5+2 \sqrt{2})}/2$ a ≈ 1,398966326 a
Inkugelradius	$r = \sqrt{(2 (2+ \sqrt{2}))}/2$ a ≈ 1,306562965 a
Volumen	$V = 4 (2+11 \sqrt{2})/7\ a^3 \approx 10{,}032199535\ a^3$

Die Breite der Rhomben und der Drachenvierecke beträgt dann a.



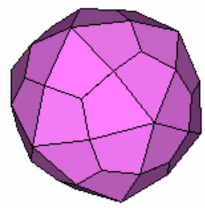
Abgeschrägtes Hexaeder-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des abgeschrägten Hexaeders wird von 24 Drachenvierecken und 36 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 62 Ecken und 120 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos $(-(\sqrt[3]{(19+3 \sqrt{33})} + \sqrt[3]{(19-3 \sqrt{33})}-2)/3)$ ≈ 147,064879°,
Kurze Kante-Winke arccos $(-(1+ \sqrt[3]{(19+3 \sqrt{33})} + \sqrt[3]{(19+3 \sqrt{33})})/6)$ ≈ 156,874002°.

Hat das abgeschrägte Haexaeder die Kantenlänge a, so wird für die Abgeschrägtes Hexaeder-AC-Hülle

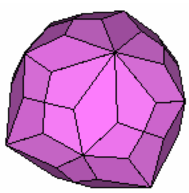
kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{(6 (10- \sqrt[3]{(2 (13+3 \sqrt{33}))} - \sqrt[3]{(2 (13-3 \sqrt{33}))}))}/12$ a ≈ 0,581420917 a
lange Kantenlänge	$s_2 = \sqrt{(6 (6+ \sqrt[3]{(6 (9+ \sqrt{33}))} + \sqrt[3]{(6 (9- \sqrt{33}))}))}/12$ a ≈ 0,740183741 a

Rhombenbreite $b = \sqrt{6\,(4-\sqrt[3]{2\,(13+3\sqrt{33})}-\sqrt[3]{2\,(13-3\sqrt{33})})}/6\ a \approx 0{,}593465356\ a$
Drachenlänge $d = \sqrt{3\,(4+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}})}/6\ a \approx 0{,}842509162\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = \sqrt{2\,(6+\sqrt[3]{6\,(9+\sqrt{33})}+\sqrt[3]{6\,(9-\sqrt{33})})}/4\ a \approx 1{,}282035847\ a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = \sqrt{6\,(14+\sqrt[3]{2\,(1777+33\sqrt{33})}+\sqrt[3]{2\,(1777-33\sqrt{33})})}/12\ a \approx 1{,}361410152\ a$
5er-Ecken-Kugelradius $r_5 = \sqrt{3\,(10+\sqrt[3]{199+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{199-3\sqrt{33}})}/6\ a \approx 1{,}343713374\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{3\,(7+\sqrt[3]{199+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{199-3\sqrt{33}})}/6\ a \approx 1{,}247223168\ a$
Volumen $V = \sqrt{116+6\sqrt[3]{2\,(1777+33\sqrt{33})}+6\sqrt[3]{2\,(1777-33\sqrt{33})}}/2\ a^3 \approx 8{,}644290235\ a^3$
Die Länge der Rhomben und die Breite der Drachenvierecke beträgt dann a.



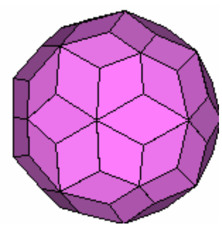
Ikosidodekaeder-AC-Hülle
Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Ikosidodekaeders wird von 60 Drachenvierecken begrenzt. Das Polyeder hat 62 Ecken und 120 Kanten.
Lange Kante-Winkel arccos $(-(15+\sqrt{5})/20) \approx 149{,}519675°$, Kurze Kante-Winke arccos $(-(5+2\sqrt{5})/10) \approx 161{,}300593°$.
Hat das Ikosidodekaeder die Kantenlänge a, so wird für die Ikosidodekaeder-AC-Hülle

kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{2\,(13-\sqrt{5})}/8\ a \approx 0{,}579976617\ a$
lange Kantenlänge $s_2 = \sqrt{9+2\sqrt{5}}/4\ a \approx 0{,}917610210\ a$
Drachenlänge $d = \sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}/8\ a \approx 1{,}063313510\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = (5\sqrt{3}+\sqrt{15})/8\ a \approx 1{,}566654673\ a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = (1+\sqrt{5})/2\ a \approx 1{,}618033989\ a$
5er-Ecken-Kugelradius $r_5 = \sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}/4\ a \approx 1{,}720477401\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{5+2\sqrt{5}}/2\ a \approx 1{,}538841769\ a$
Volumen $V = 25\,(3+\sqrt{5})/8\ a^3 \approx 16{,}362712430\ a^3$
Die Breite der Drachenvierecke beträgt dann a.

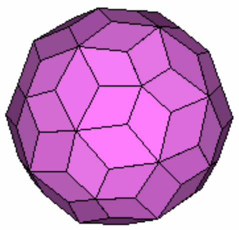


Kuboktaederstumpf-AC-Hülle
Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Kuboktaederstumpfs wird von 72 Drachenvierecken in drei verschiedenen Größen begrenzt. Das Polyeder hat 74 Ecken und 144 Kanten.
Dieder-Winkel: lange Kante arccos $-11/12 \approx 156{,}443536°$, mittlere Kante arccos $(-(6+\sqrt{2})/8) \approx 157{,}937809°$, kurze Kante arccos $(-(10+\sqrt{2})/12) \approx 162{,}023738°$.

Hat der Kuboktaederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Kuboktaederstumpf-AC-Hülle
kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{109-6\sqrt{2}}/14\ a \approx 0{,}716121636\ a$
mittlere Kantenlänge $s_2 = \sqrt{13-6\sqrt{2}}/2\ a \approx 1{,}062393362\ a$
lange Kantenlänge $s_3 = \sqrt{23}\,(3+\sqrt{2})/14\ a \approx 1{,}512130325\ a$
Drachenlänge $d_1 = 2\sqrt{3\,(10-\sqrt{2})}/7\ a \approx 1{,}450048819\ a$
$d_2 = 3\sqrt{6\,(2+\sqrt{2})}/7\ a \approx 1{,}939742947\ a$
$d_3 = 2\sqrt{6\,(10+\sqrt{2})}/7\ a \approx 2{,}364452413\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = \sqrt{13+6\sqrt{2}}/2\ a \approx 2{,}317610913\ a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = 3\,(4+\sqrt{2})/7\ a \approx 2{,}320377241\ a$
6er-Ecken-Kugelradius $r_6 = \sqrt{6}\ a \approx 2{,}449489743\ a$
8er-Ecken-Kugelradius $r_8 = 3\,(2+3\sqrt{2})/7\ a \approx 2{,}675417437\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{6\,(2+\sqrt{2})}/2\ a \approx 2{,}263033438\ a$
Volumen $V = 12\,(12+13\sqrt{2})/7\ a^3 \approx 52{,}088187961\ a^3$
Die Breite aller Drachenvierecke beträgt dann a.



Ikosaederstumpf-AC-Hülle
Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Ikosaederstumpfs wird von 60 Drachenvierecken und 30 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 92 Ecken und 180 Kanten.
Dieder-Winkel: lange Kante arccos $(-(9+\sqrt{5})/12) \approx 159{,}445557°$, kurze Kante arccos $-17/18 \approx 160{,}811864°$.
Hat der Ikosaederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Ikosaederstumpf-AC-Hülle
kurze Kantenlänge $s_1 = (5\sqrt{7}+9\sqrt{35})/76\ a \approx 0{,}874650982\ a$
lange Kantenlänge $s_2 = \sqrt{2\,(29-9\sqrt{5})}/4\ a \approx 1{,}053291757\ a$
Rhombenlänge $l = 3\,(\sqrt{5}-1)/2\ a \approx 1{,}854101966\ a$
Drachenlänge $d = 9\,(2\sqrt{5}-1)/19\ a \approx 1{,}644695979\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = \sqrt{2\,(29+9\sqrt{5})}/4\ a \approx 2{,}478018659\ a$
5er-Ecken-Kugelradius $r_5 = 9\sqrt{65+22\sqrt{5}}/38\ a \approx 2{,}530926869\ a$
6er-Ecken-Kugelradius $r_6 = 3\sqrt{3}/2\ a \approx 2{,}598076211\ a$
Inkugelradius $r = 3\,(1+\sqrt{5})/4\ a \approx 2{,}427050983\ a$
Volumen $V = 45\,(46+3\sqrt{5})/38\ a^3 \approx 62{,}417609920\ a^3$
Die Breite aller Drachenvierecke und Rhomben beträgt dann a.



Kanonische Ikosaederstumpf-AC-Hülle

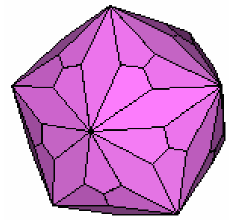
Die kanonische Variante der Archimedisch-Catalanischen Hülle des Ikosaederstumpfs wird von 60 Drachenvierecken und 30 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 92 Ecken und 180 Kanten.
Das Polyeder stellt das Ikosaeder jiI nach der Conway-Notation für Polyeder dar, entsteht damit als Nacheinanderausführung von Abstumpfung und join-Operation aus dem Ikosaeder.
Dieder-Winkel: Rhombus-Drachen ≈ 159,6176893°, Drachen-Drachen ≈ 160,3916334°.

Hat der maximale Umkugelradius R den Wert √3 a und ist x eine Lösung eines geeigneten Polynoms 8.Grades, so wird für die anderen Größen

kurze Kantenlänge	s_1 = √x a ≈ 0,572419548 a
lange Kantenlänge	s_2 = √x a ≈ 0,708486378 a
Rhombenlänge	l = (√5 -1) a ≈ 1,236067977 a
Rhombenbreite	l_2 = x a ≈ 0,692782612 a
Drachenlänge	d = √x a ≈ 1,098571760 a
Drachenbreite	b = x a ≈ 0,653608694 a
3er-Ecken-Kugelradius	r_3 = √x a ≈ 1,654696626 a
5er-Ecken-Kugelradius	r_5 = √x a ≈ 1,694638268 a
6er-Ecken-Kugelradius	r_6 = √3 a ≈ 1,732050808 a
Mittelkugelradius	ρ = √x a ≈ 1,646007054 a
Drachenkugelradius	r_D = √x a ≈ 1,621967893 a
Rhombenkugelradius	r_R = (1+ √5)/2 a ≈ 1,618033989 a
Volumen	V = x a³ ≈ 18,574140360 a³

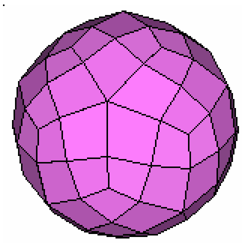
Dodekaederstumpf-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Dodekaederstumpfs wird von 60 Drachenvierecken und 30 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 92 Ecken und 180 Kanten.
Dieder-Winkel: lange Kante arccos (-(5+ 2 √5)/10) ≈ 161,300593°, kurze Kante arccos (-(13+3 √5)/20) ≈ 170,200774°.
Hat der Dodekaederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Dodekaederstumpf-AC-Hülle



kurze Kantenlänge	s_1 = √(6 (119-5 √5))/44 a ≈ 0,578058681 a
lange Kantenlänge	s_2 = √(2 (17+5 √5))/4 a ≈ 1,876843756 a
Rhombenlänge	l = (5+ √5)/2 a ≈ 3,618033989 a
Drachenlänge	d = 5 (7+ √5)/22 a ≈ 2,099106359 a
3er-Ecken-Kugelradius	r_3 = 5 (3 √3 +2 √15)/22 a ≈ 2,941390708 a
10er-Ecken-Kugelradius	r_{10} = √(5 (5+2 √5))/2 a ≈ 3,440954801 a
Inkugelradius	r = (5+3 √5)/4 a ≈ 2,927050983 a
Volumen	V = 25 (47+24 √5)/22 a³ ≈ 114,392763023 a³

Die Breite aller Drachenvierecke und Rhomben beträgt dann a.

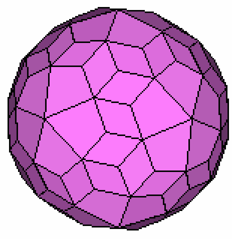


Rhombenikosidodekaeder-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Rhombenikosidodekaeders wird von 60 kleinen und 60 großen Drachenvierecken begrenzt. Das Polyeder hat 122 Ecken und 240 Kanten.
Dieder-Winkel: lange Kante arccos (-(35+ √5)/40) ≈ 158,575812°, mittlere Kante arccos (-(5+2 √5)/10) ≈ 161,300593°, kurze Kante arccos (-(15+2 √5)/20) ≈ 166,807001°.
Hat das Rhombenikosidodekaeder die Kantenlänge a, so wird für die Rhombenikosidodekaeder-AC-Hülle

kurze Kantenlänge	s_1 = √(171-4 √5)/22 a ≈ 0,578641413 a
mittlere Kantenlänge	s_2 = √(11-4 √5)/2 a ≈ 0,716890523 a
lange Kantenlänge	s_3 = √(19+4 √5)/6 a ≈ 0,881039032 a
kurze Drachenlänge	d_1 = √(5 (85-31 √5))/11 a ≈ 0,804991984 a
lange Drachenlänge	d_2 = √(5 (5- √5))/3 a ≈ 1,239160115 a
3er-Ecken-Kugelradius	r_3 = (5 √3 +4 √15)/11 a ≈ 2,195653402 a
4er-Ecken-Kugelradius	r_4 = √(11+4 √5)/2 a ≈ 2,232950509 a
5er-Ecken-Kugelradius	r_5 = √(5 (5+2 √5))/3 a ≈ 2,293969867 a
Inkugelradius	r = √(2 (5+2 √5))/2 a ≈ 2,176250899 a
Volumen	V = 50 (7+10 √5)/33 a³ ≈ 44,485878447 a³

Die Breite aller Drachenvierecke beträgt dann a.



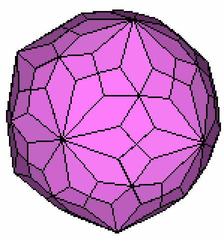
Abgeschrägtes Dodekaeder-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des abgeschrägten Dodekaeders wird von 60 Drachenvierecken und 90 Rhomben begrenzt. Das Polyeder hat 152 Ecken und 300 Kanten.

Dieder-Winkel: lange Kante arccos $(-(1-\phi+\phi^3/x)/2) \approx 157{,}756587°$, kurze Kante arccos$(-(x^2-1)/2) \approx 166{,}306415°$ mit $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ und $x = \sqrt[3]{((\phi+\sqrt{(\phi-5/27)})/2)} + \sqrt[3]{((\phi-\sqrt{(\phi-5/27)})/2)}$

Hat das abgeschrägte Dodekaeder die Kantenlänge a, so wird für die Abgeschrägtes Dodekaeder-AC-Hülle

kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(x^2+1)/(2x)}\ a \approx 0{,}578742574\ a$
lange Kantenlänge $s_2 = \sqrt{(2x^2(53\phi+24) + x(337\phi+207) + (1097-20\phi))/62}\ a \approx 0{,}883610953\ a$
Rhombenbreite $b = a/x \approx 0{,}582899535\ a$
Drachenlänge $d = (x(7\phi+2) + (5\phi-3) + 2(8-3\phi)/x)/31\ a \approx 1{,}019988247\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = \sqrt{(3(x\phi+\phi+1+1/x))}/2\ a \approx 2{,}117209899\ a$
5er-Ecken-Kugelradius $r_5 = \phi\sqrt{(x(x+\phi)+(3-\phi))}/2\ a \approx 2{,}155837375\ a$
Inkugelradius $r = \phi\sqrt{(x(x+\phi)+1)}/2\ a \approx 2{,}097053835\ a$
Volumen
$$V = 5\sqrt{(3x^2(8951\phi-3399) + x(32617\phi+8460) - 5(1793\phi-10847))/62}\ a^3 \approx 39{,}725278227\ a^3$$
Die Rhombenlänge und die Breite der Drachenvierecke beträgt dann a.



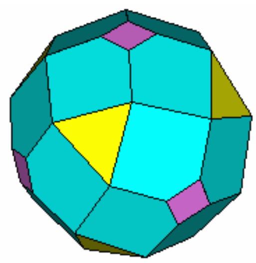
Ikosidodekaederstumpf-AC-Hülle

Die Archimedisch-Catalanische Hülle des Ikosidodekaederstumpfs wird von je 60 Drachenvierecken in drei verschiedenen Größen begrenzt. Das Polyeder hat 182 Ecken und 360 Kanten.

Dieder-Winkel: lange Kante arccos $(-(21+\sqrt{5})/24) \approx 165{,}505003°$, mittlere Kante arccos $(-(15+2\sqrt{5})/20) \approx 166{,}807001°$, kurze Kante arccos $(-(25+2\sqrt{5})/30) \approx 169{,}235920°$.

Hat der Ikosidodekaederstumpf die Kantenlänge a, so wird für die Ikosidodekaederstumpf-AC-Hülle

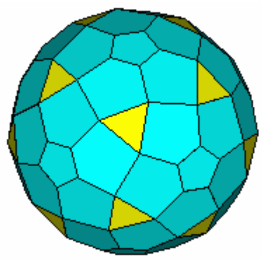
kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(271-12\sqrt{5})}/22\ a \approx 0{,}710265903\ a$
mittlere Kantenlänge $s_2 = \sqrt{(31-12\sqrt{5})}/2\ a \approx 1{,}020684117\ a$
lange Kantenlänge $s_3 = \sqrt{(5(35+12\sqrt{5}))}/10\ a \approx 1{,}758306227\ a$
kurze Drachenlänge $d_1 = \sqrt{(15(85-31\sqrt{5}))}/11\ a \approx 1{,}394287017\ a$
mittlere Drachenlänge $d_2 = 3\sqrt{(15(65+19\sqrt{5}))}/55\ a \approx 2{,}190174480\ a$
lange Drachenlänge $d_3 = 2\sqrt{(15(5-\sqrt{5}))}/5\ a \approx 2{,}575545933\ a$
3er-Ecken-Kugelradius $r_3 = \sqrt{(31+12\sqrt{5})}/2\ a \approx 3{,}802394500\ a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = 3(5+4\sqrt{5})/11\ a \approx 3{,}802983248\ a$
6er-Ecken-Kugelradius $r_6 = \sqrt{15}\ a \approx 3{,}872983346\ a$
10er-Ecken-Kugelradius $r_{10} = 3\sqrt{(5(5+2\sqrt{5}))}/5\ a \approx 4{,}129145761\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{(6(5+2\sqrt{5}))}/2\ a \approx 3{,}769377128\ a$
Volumen $V = 30(27+26\sqrt{5})/11\ a^3 \approx 232{,}193911132\ a^3$
Die Breite aller Drachenvierecke beträgt dann a.



Senkrechtverdrehter Oktaederstumpf

Das Polyeder hat 48 Ecken und 38 Flächen, 8 gleichseitige Dreiecke, 6 Quadrate und 24 spiegelsymmetrische Fünfecke. Von den 84 Kanten sind 24 von kurzer, 24 von mittlerer Länge und 24 lang. Das duale Polyeder ist der verdrehte Orthokis-Würfel.

Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge
$s_1 = \sqrt{(\text{Lösung von } [529x^5 + 3164x^4 + 43360x^3 - 87296x^2 + 18688x - 1024])}\ r \approx 0{,}307753937\ r$
mittlere Kantenlänge
$s_2 = \sqrt{(\text{Lösung von } [529x^5 - 4384x^4 + 15872x^3 - 21984x^2 + 5376x - 256])}\ r \approx 0{,}479027833\ r$
lange Kantenlänge $s_3 = \sqrt{(\text{Lösung von } [x^5 + 12x^4 + 96x^3 - 4608x^2 + 4352x - 1024])}\ r \approx 0{,}650301729\ r$
Volumen $V = \sqrt{(\text{Lösung von [Polynom 5.Gradesl]})}\ r^3 \approx 3{,}946188268\ r^3$

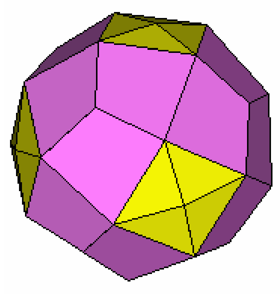


Senkrechtverdrehter Ikosaederstumpf

Das Polyeder hat 120 Ecken und 92 Flächen, 20 gleichseitige Dreiecke, 12 regelmäßige und 60 spiegelsymmetrische Fünfecke. Von den 210 Kanten sind 60 von kurzer, 60 von mittlerer Länge und 90 lang. Das duale Polyeder ist das verdrehte Orthokis-Dodekaeder.

Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}227706132\ r$
mittlere Kantenlänge $s_2 \approx 0{,}302661104\ r$

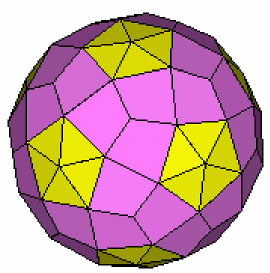
lange Kantenlänge $s_3 \approx 0,377616075$ r
Volumen $V \approx 4,088697895$ r³
Die Werte ergeben sich als Wurzeln der Lösungen von Polynomen 10.Grades.



Verdrehter Orthokis-Würfel

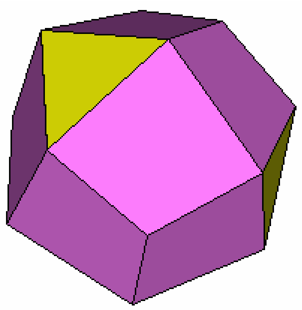
Das Polyeder hat 38 Ecken und 48 Flächen, 24 gleichseitige Dreiecke und 24 Drachenvierecke. Von den 84 Kanten sind 24 von kurzer, 24 von mittlerer Länge und 36 lang. Das duale Polyeder ist der senkrechtverdrehte Oktaederstumpf.

Hat der Umkugelradius des Polyeders die Länge R so wird
kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung von } [1369x^5 -11340x^4 +39236x^3 - 62876x^2 +30048x -4232])}$ R $\approx 0,516840544$ R
mittlere Kantenlänge $s_2 = \sqrt{(\text{Lösung von } [25x^5 -604x^4 +2016x^3 -4288x^2 +2816x -512])}$ R $\approx 0,552232658$ R
lange Kantenlänge $s_3 = \sqrt{(\text{Lösung von } [x^5 -4x^4 +336x^3 -1728x^2 +1792x -512])}$ R $\approx 0,722217627$ R
Volumen $V = \sqrt{(\text{Lösung von } [34225x^5 -58879232x^4 +58527498240x^3 -11031888396288x^2 +240385821507584x -1226552599642112])}$ R³ $\approx 4,053907458$ R³



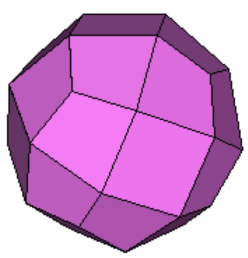
Verdrehtes Orthokis-Dodekaeder

Das Polyeder hat 92 Ecken und 120 Flächen, 60 gleichseitige Dreiecke und 60 Drachenvierecke. Von den 210 Kanten sind 60 von kurzer, 60 von mittlerer Länge und 90 lang. Das duale Polyeder ist der senkrechtverdrehte Ikosaederstumpf.
Hat der Mitelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 \approx 0,329242805$ r
mittlere Kantenlänge $s_2 \approx 0,378246491$ r
lange Kantenlänge $s_3 \approx 0,439161881$ r
Volumen $V \approx 4,145611573$ r³
Die Werte ergeben sich als Wurzeln der Lösungen von Polynomen 10.Grades.



Verdrehtes Tetraeder

Das Polyeder hat 16 Ecken und 16 Flächen, 4 gleichseitige Dreiecke und 12 Drachenvierecke. Von den 30 Kanten sind 12 kurz und 18 lang. Das Polyeder ist selbstdual. Das Polyeder ist ein einfaches Beispiel für eine T-Symmetrie.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(3 (64+ \sqrt[3]{(4 (7819+54087 \sqrt{69}))} - \sqrt[3]{(4 (54087 \sqrt{69} -7819))}))/33}$ r $\approx 0,848986899$ r
lange Kantenlänge $s_2 = 2 \sqrt{(6 (\sqrt[3]{(4 (11+3 \sqrt{69}))} - \sqrt[3]{(4 (3 \sqrt{69} -11))}-1))/3}$ r $\approx 1,057092548$ r
Volumen $V = 8 (69- \sqrt[3]{(12 (39375+17083 \sqrt{69}))} + \sqrt[3]{(12 (17083 \sqrt{69} - 39375))})/99$ r³ $\approx 3,764241482$ r³
Eckpunktkoordinaten mit
C0 ≈ 0,139680582 ; C1 ≈ 0,509755332 ; C2 ≈ 0,606267871
alle Tripel mit 0 oder 2 negativen Vorzeichen von
(C1, C0, 1), (1, C1, C0), (C0, 1, C1)
Tripel mit 1 oder 3 negativen Vorzeichen von (C2, -C2, C2)

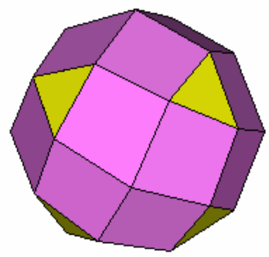


Verdrehter Würfel

Das Polyeder hat 32 Ecken und 30 Flächen, 6 Quadrate und 24 Drachenvierecke. Von den 60 Kanten sind 24 kurz und 36 lang. Das duale Polyeder ist das verdrehte Oktaeder.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für O-Symmetrie bei Polyedern.

Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung von } [25x^5 -604x^4 +2016x^3 -4288x^2 +2816x -512])}$ r $\approx 0,552232658$ r
lange Kantenlänge $s_2 = \sqrt{(\text{Lösung von } [x^5 -4x^4 +336x^3 -1728x^2 +1792x -512])}$ r $\approx 0,722217627$ r
Volumen $V = \sqrt{(\text{Lösung von } [25x^5 +205312x^4 +680951808x^3 -181399977984x^2 +7490943057920x -75698932809728])}$ r³ $\approx 3,970942182$ r³
Eckpunktkoordinaten mit
C0 ≈ 0,169629046 ; C1 ≈ 0,481689876 ; C2 ≈ 0,587800512 ; C3 ≈ 0,932523686
alle Tripel mit 0 oder 2 negativen Vorzeichen von
(C1, C0, C3), (C3, C1, C0), (C0, C3, C1), (C0, C1, C3), (C3, C0, C1), (C1, C3, C0)
und (±C2, ±C2, ±C2)

Verdrehtes Oktaeder

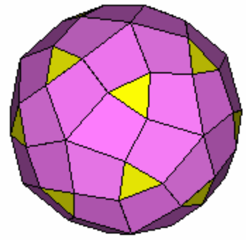


Das Polyeder hat 30 Ecken und 32 Flächen, 8 gleichseitige Dreiecke und 24 Drachenvierecke. Von den 60 Kanten sind 36 kurz und 24 lang. Das duale Polyeder ist der verdrehte Würfel.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für O-Symmetrie bei Polyedern.

Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung von } [x^5 +12x^4 +96x^3 -4608x^2 +4352x - 1024])}\, r \approx 0{,}65030172942276379902\, r$
lange Kantenlänge $s_2 = \sqrt{(\text{Lösung von } [x^5 -28x^4 +40x^3 -80x^2 +160x -64])}\, r \approx 0{,}71238908594024406581\, r$
Volumen $V = \sqrt{(\text{Lösung von } [59049^5 -85660416x^4 +173175128064x^3 -69842277236736x^2 +6704546357182464x -88704666086408192])}\, r^3 \approx 3{,}9621508842665628297\, r^3$

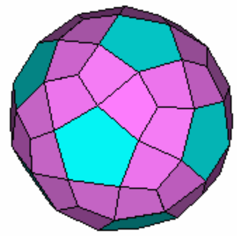
Eckpunktkoordinaten mit
C0 ≈ 0,287043889 ; C1 ≈ 0,599104719 ; C2 ≈ 0,815108843 ; C3 ≈ 1,072358820
alle Tripel mit 1 oder 3 negativen Vorzeichen von
(C1, C0, C2), (C2, C1, C0), (C0, C2, C1), (C0, C1, C2), (C2, C0, C1), (C1, C2, C0)
und (0, 0, ±C3), (±C3, 0, 0), (0, ±C3, 0)

Verdrehtes Ikosaeder



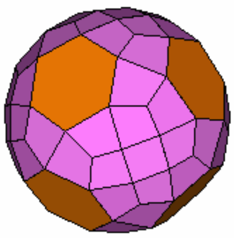
Das Polyeder hat 72 Ecken und 80 Flächen, 20 gleichseitige Dreiecke und 60 Drachenvierecke. Von den 150 Kanten sind 90 kurz und 60 lang. Das duale Polyeder ist das verdrehte Dodekaeder.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für I-Symmetrie bei Polyedern.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}377616075\, r$
lange Kantenlänge $s_2 \approx 0{,}505862015\, r$
Volumen $V \approx 4{,}110611694\, r^3$
Die Werte ergeben sich als Wurzeln der Lösungen von Polynomen 10.Grades.

Verdrehtes Dodekaeder



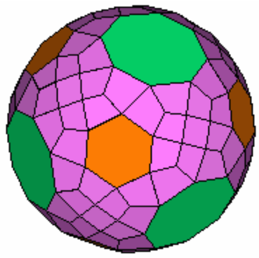
Das Polyeder hat 80 Ecken und 72 Flächen, 12 regelmäßige Fünfecke und 60 Drachenvierecke. Von den 150 Kanten sind 60 kurz und 90 lang. Das duale Polyeder ist das verdrehte Ikosaeder.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für I-Symmetrie bei Polyedern.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
kurze Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}329242805\, r$
lange Kantenlänge $s_2 \approx 0{,}439161881\, r$
Volumen $V \approx 4{,}066940181\, r^3$
Die Werte ergeben sich als Wurzeln der Lösungen von Polynomen 10.Grades.

Verdrehter Oktaederstumpf



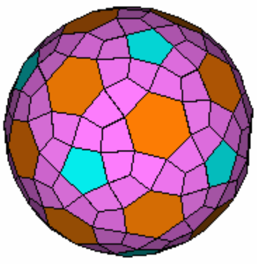
Das Polyeder hat 96 Ecken und 86 Flächen, 6 Sechsecke, 8 triambische Flächen und 72 unregelmäßige Vierecke. Die 180 Kanten haben 7 verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist das verdrehte Tetrakishexaeder.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge s_1 $s_1 \approx 0{,}256168628\, r$ Kantenlänge s_2 $s_2 \approx 0{,}304585318\, r$
Kantenlänge s_3 $s_3 \approx 0{,}314071371\, r$ Kantenlänge s_4 $s_4 \approx 0{,}320390815\, r$
Kantenlänge s_5 $s_5 \approx 0{,}368807505\, r$ Kantenlänge s_6 $s_6 \approx 0{,}426710249\, r$
Kantenlänge s_7 $s_7 \approx 0{,}436196302\, r$
Volumen $V \approx 4{,}033492053\, r^3$

Verdrehter Kuboktaederstumpf



Das Polyeder hat 192 Ecken und 170 Flächen, 12 Rhomben, 8 triambische Flächen, 6 tetraambische Flächen und 144 unregelmäßige Vierecke. Die 360 Kanten haben 12 verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist das verdrehte Disdyakisdodekaeder.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge s_1 $s_1 \approx 0{,}168725354\, r$ Kantenlänge s_2 $s_2 \approx 0{,}170830951\, r$
Kantenlänge s_3 $s_3 \approx 0{,}197296519\, r$ Kantenlänge s_4 $s_4 \approx 0{,}205439995\, r$
Kantenlänge s_5 $s_5 \approx 0{,}211008996\, r$ Kantenlänge s_6 $s_6 \approx 0{,}218981455\, r$
Kantenlänge s_7 $s_7 \approx 0{,}225447512\, r$ Kantenlänge s_8 $s_8 \approx 0{,}237474563\, r$
Kantenlänge s_9 $s_9 \approx 0{,}261265097\, r$ Kantenlänge s_{10} $s_{10} \approx 0{,}274189204\, r$
Kantenlänge s_{11} $s_{11} \approx 0{,}302340198\, r$ Kantenlänge s_{12} $s_{12} \approx 0{,}315881658\, r$
Volumen $V \approx 4{,}050373895\, r^3$

Verdrehter Ikosaederstumpf

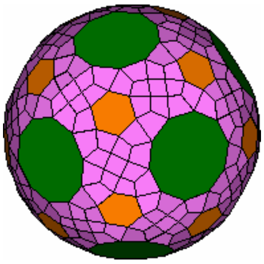


Das Polyeder hat 240 Ecken und 212 Flächen, 12 regelmäßige Fünfecke, 20 triambische Flächen und 180 unregelmäßige Vierecke. Die 450 Kanten haben sieben verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist das verdrehte Pentakisdodekaeder.

Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird

Kantenlänge s_1 $s_1 \approx 0{,}175355792$ r Kantenlänge s_2 $s_2 \approx 0{,}187112708$ r
Kantenlänge s_3 $s_3 \approx 0{,}189086332$ r Kantenlänge s_4 $s_4 \approx 0{,}230076004$ r
Kantenlänge s_5 $s_5 \approx 0{,}241832920$ r Kantenlänge s_6 $s_6 \approx 0{,}255563459$ r
Kantenlänge s_7 $s_7 \approx 0{,}257537082$ r Volumen $V \approx 4{,}132860802\ r^3$

Verdrehter Ikosidodekaederstumpf

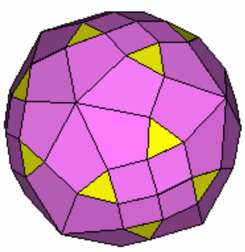


Das Polyeder hat 480 Ecken und 422 Flächen, 30 Rhomben, 20 triambische und 12 pentambische Flächen und 360 unregelmäßige Vierecke. Die 900 Kanten haben zwölf verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist das verdrehte Disdyakistriakontaeder.

Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird

Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}100994366$ r Kantenlänge $s_2 \approx 0{,}102833983$ r
Kantenlänge $s_3 \approx 0{,}117272610$ r Kantenlänge $s_4 \approx 0{,}122647685$ r
Kantenlänge $s_5 \approx 0{,}126278813$ r Kantenlänge $s_6 \approx 0{,}136940028$ r
Kantenlänge $s_7 \approx 0{,}140717440$ r Kantenlänge $s_8 \approx 0{,}140891720$ r
Kantenlänge $s_9 \approx 0{,}162224474$ r Kantenlänge $s_{10} \approx 0{,}162370758$ r
Kantenlänge $s_{11} \approx 0{,}185989868$ r Kantenlänge $s_{12} \approx 0{,}200282211$ r
Volumen $V \approx 4{,}090347158\ r^3$

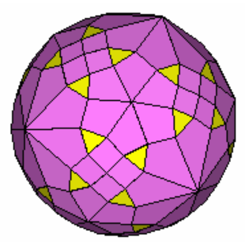
Verdrehter Pyramidenwürfel



Das Polyeder hat 86 Ecken und 96 Flächen, 24 stumpfwinklige Dreiecke, 24 Drachenvierecke und 48 unregelmäßige Vierecke. Die 180 Kanten haben sieben verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der verdrehte Oktaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird

Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}314938379$ r Kantenlänge $s_2 \approx 0{,}318193785$ r
Kantenlänge $s_3 \approx 0{,}332539994$ r Kantenlänge $s_4 \approx 0{,}345439718$ r
Kantenlänge $s_5 \approx 0{,}359785927$ r Kantenlänge $s_6 \approx 0{,}563182831$ r
Kantenlänge $s_7 \approx 0{,}577529040$ r
Volumen $V \approx 4{,}139817445\ r^3$

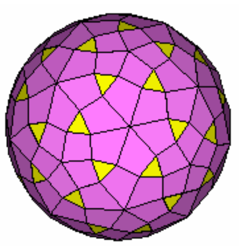
Verdrehtes Disdyakisdodekaeder



Das Polyeder hat 170 Ecken und 192 Flächen, 48 stumpfwinklige Dreiecke und 144 unregelmäßige Vierecke. Die 360 Kanten haben fünfzehn verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der verdrehte Kuboktaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird

Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}205560067$ r
$s_2 \approx 0{,}206419818$ r $s_3 \approx 0{,}209337661$ r
$s_4 \approx 0{,}210197412$ r $s_5 \approx 0{,}215113246$ r
$s_6 \approx 0{,}218890840$ r $s_7 \approx 0{,}219310462$ r
$s_8 \approx 0{,}227993495$ r $s_9 \approx 0{,}231698420$ r $s_{10} \approx 0{,}235486410$ r
$s_{11} \approx 0{,}244589064$ r $s_{12} \approx 0{,}351340030$ r $s_{13} \approx 0{,}364230674$ r
$s_{14} \approx 0{,}528079713$ r $s_{15} \approx 0{,}537182367$ r
Volumen $V \approx 4{,}185972040\ r^3$

Verdrehtes Pyramidendodekaeder

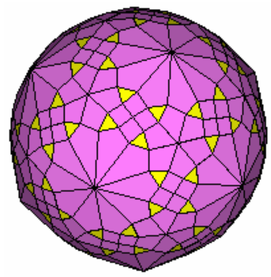


Das Polyeder hat 212 Ecken und 240 Flächen, 60 stumpfwinklige Dreiecke, 60 Drachenvierecke und 120 unregelmäßige Vierecke. Die 450 Kanten haben sieben verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der verdrehte Ikosaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird

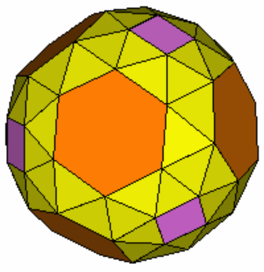
Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}205568307$ r $s_2 \approx 0{,}208697829$ r
$s_3 \approx 0{,}211708559$ r $s_4 \approx 0{,}214838081$ r
$s_5 \approx 0{,}261637904$ r $s_6 \approx 0{,}331238786$ r
$s_7 \approx 0{,}334368308$ r
Volumen $V \approx 4{,}168066560\ r^3$

Verdrehtes Disdyakistriakontaeder

Das Polyeder hat 422 Ecken und 480 Flächen, 120 stumpfwinklige Dreiecke und 360 unregelmäßige Vierecke. Die 900 Kanten haben fünfzehn verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der verdrehte Ikosidodekaederstumpf.

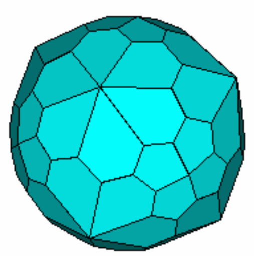


Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0,122502967\ r$ $s_2 \approx 0,122711346\ r$
$s_3 \approx 0,125826001\ r$ $s_4 \approx 0,126034381\ r$
$s_5 \approx 0,130432271\ r$ $s_6 \approx 0,131397124\ r$
$s_7 \approx 0,133755306\ r$ $s_8 \approx 0,139104648\ r$
$s_9 \approx 0,140005155\ r$ $s_{10} \approx 0,143341591\ r$
$s_{11} \approx 0,148690933\ r$ $s_{12} \approx 0,205455793\ r$
$s_{13} \approx 0,214141572\ r$ $s_{14} \approx 0,395148633\ r$
$s_{15} \approx 0,400497976\ r$ Volumen $V \approx 4,202439163\ r^3$



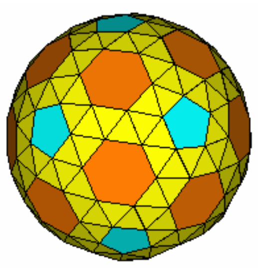
Abgeschrägter Oktaederstumpf

Das Polyeder hat 72 Ecken und 110 Flächen, 48 gleichschenklige, 48 stumpfwinklige Dreiecke, 6 Quadrate und 8 triambische Flächen. Die 180 Kanten haben fünf verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der dual abgeschrägte Oktaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0,357867136\ r$ $s_2 \approx 0,402467147\ r$
$s_3 \approx 0,411012447\ r$ $s_4 \approx 0,455612458\ r$
$s_5 \approx 0,464157758\ r$ Volumen $V \approx 4,026749788\ r^3$



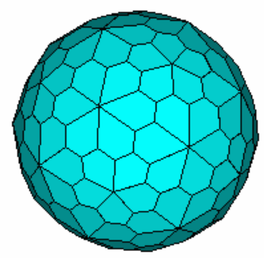
Dualer abgeschrägter Oktaederstumpf

Das Polyeder hat 110 Ecken und 72 Flächen, 24 spiegelsymmetrische Fünfecke und 48 unregelmäßige Fünfecke. Die 180 Kanten haben sieben verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der abgeschrägte Oktaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0,233482618\ r$ $s_2 \approx 0,243687691\ r$
$s_3 \approx 0,255332874\ r$ $s_4 \approx 0,266978057\ r$
$s_5 \approx 0,293507491\ r$ $s_6 \approx 0,551211428\ r$
$s_7 \approx 0,562856611\ r$ Volumen $V \approx 4,119885786\ r^3$



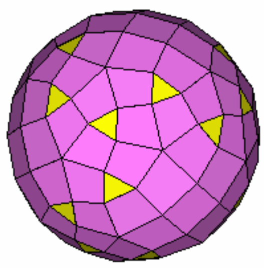
Abgeschrägter Ikosaederstumpf

Das Polyeder hat 180 Ecken und 272 Flächen, 120 gleichschenklige und 120 stumpfwinklige Dreiecke, 12 regelmäßige Fünfecke und 20 triambische Flächen. Die 450 Kanten haben fünf verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der duale abgeschrägte Ikosaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0,250588662\ r$ $s_2 \approx 0,261302206\ r$
$s_3 \approx 0,263089559\ r$ $s_4 \approx 0,273803103\ r$
$s_5 \approx 0,275590456\ r$ Volumen $V \approx 4,131046169\ r^3$



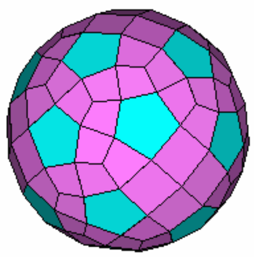
Dualer abgeschrägter Ikosaederstumpf

Das Polyeder hat 272 Ecken und 180 Flächen, 60 spiegelsymmetrische Fünfecke und 120 unregelmäßige Fünfecke. Die 450 Kanten haben sieben verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der abgeschrägte Ikosaederstumpf.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0,151454396\ r$ $s_2 \approx 0,153863908\ r$
$s_3 \approx 0,156391508\ r$ $s_4 \approx 0,158919107\ r$
$s_5 \approx 0,249598321\ r$ $s_6 \approx 0,321010785\ r$
$s_7 \approx 0,323538385\ r$ Volumen $V \approx 4,159379191\ r^3$



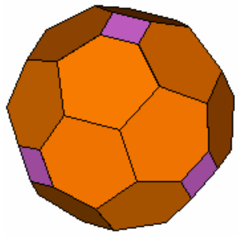
L-verdrehter abgeschrägter Würfel

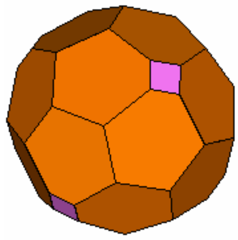
Das Polyeder hat 144 Ecken und 158 Flächen, 8 gleichseitige Dreiecke, 24 stumpfwinklige Dreiecke, 6 Quadrate und 120 unregelmäßige Vierecke. Die 300 Kanten haben dreizehn verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist das L-verdrehte pentagonale Ikositetraeder.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0,237408401\ r$ $s_2 \approx 0,240002078\ r$
$s_3 \approx 0,246865544\ r$ $s_4 \approx 0,251135335\ r$
$s_5 \approx 0,252879887\ r$ $s_6 \approx 0,257149677\ r$
$s_7 \approx 0,302595167\ r$ $s_8 \approx 0,330419019\ r$
$s_9 \approx 0,333012695\ r$ $s_{10} \approx 0,337282486\ r$
$s_{11} \approx 0,342026314\ r$ $s_{12} \approx 0,343296828\ r$
$s_{13} \approx 0,382727975\ r$ Volumen $V \approx 4,147230655\ r^3$

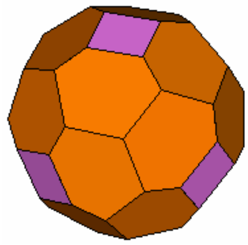


L-verdrehtes pentagonales Ikositetraeder

Das Polyeder hat 158 Ecken und 144 Flächen, 48 Drachenvierecke, 72 unregelmäßige Vierecke und 24 unregelmäßige Fünfecke. Die 300 Kanten haben elf verschiedene Längen. Das duale Polyeder ist der L-verdrehte abgeschrägte Würfel.
Hat der Mittelkugelradius des Polyeders die Länge r so wird
Kantenlänge $s_1 \approx 0{,}207544347$ r $s_2 \approx 0{,}215590372$ r
$s_3 \approx 0{,}215928212$ r $s_4 \approx 0{,}231219923$ r
$s_5 \approx 0{,}281474412$ r $s_6 \approx 0{,}281812252$ r
$s_7 \approx 0{,}285926649$ r $s_8 \approx 0{,}301218360$ r
$s_9 \approx 0{,}314067024$ r $s_{10} \approx 0{,}329696575$ r
$s_{11} \approx 0{,}345011601$ r Volumen $V \approx 4{,}128608645$ r³





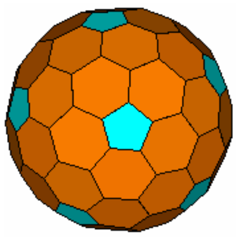


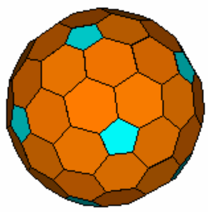
Hexverdrehter Würfel

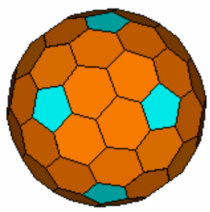
Das Polyeder hat 56 Ecken und 30 Flächen, 6 Quadrate und 24 spiegelsymmetrische Sechsecke. Von den 84 Kanten sind 24 kurz, 24 mittlerer Länge und 36 lang. Das duale Polyeder ist der Tetrakis-Hexaederstumpf.

Ist der Mittelkugelradius des kanonischen Polyeders gleich r, so wird
kurze Kante $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung von } [49x^3 -20x^2 +272x-32])}$ r $\approx 0{,}344061938$ r
mittlere Kante $s_2 = \sqrt{(\text{Lösung von } [49x^3 -82x^2 +60x-8])}$ r $\approx 0{,}409945631$ r
Lange Kante $s_3 = \sqrt{(\text{Lösung von } [x^3 -12x^2 +144x-32])}$ r $\approx 0{,}475829323$ r
Volumen $V = \sqrt{(\text{Lösung von } [117649x^3 -62905312x^2 +10093554688x - 133838962688])}$ r³ $\approx 3{,}813385933$ r³
Bei einer 2.Variante des hexverdrehten Würfels haben die Sechsecke 5 Seiten gleicher Länge. Hat diese Kante die Länge a, so gilt
kurze Kante $s_1 = (\sqrt[3]{(17+3\sqrt{33})} + \sqrt[3]{(17-3\sqrt{33})}-1)/3$ a $\approx 0{,}543689013$ a
Umkugelradius $R = \sqrt{(7+ \sqrt[3]{(199+3\sqrt{33})} +\sqrt[3]{(199-3\sqrt{33})})}/2$ a $\approx 2{,}160253895$ a
Volumen $V = \sqrt{(3\,(1215 +\sqrt[3]{(3\,(709487307+4476607\sqrt{33}))} +\sqrt[3]{(3\,(709487307-4476607\sqrt{33}))}))}/3$ a³ $\approx 35{,}530744563$ a³
Bei einer 3.Variante des hexverdrehten Würfels haben die Sechsecke 4 Seiten gleicher Länge. Hat diese Kante die Länge a, so gilt
kurze Kante $s_1 = (2+\sqrt[3]{(2\,(13+3\sqrt{33}))} +\sqrt[3]{(2\,(13-3\sqrt{33}))})/6$ a $\approx 0{,}647798871$ a
Umkugelradius $R = \sqrt{(7+ \sqrt[3]{(199+3\sqrt{33})} +\sqrt[3]{(199-3\sqrt{33})})}/2$ a $\approx 2{,}160253895$ a
Volumen $V = \sqrt{(3\,(135+\sqrt[3]{(3\,(853353+61\sqrt{33}))} +\sqrt[3]{(3\,(853353+61\sqrt{33}))}))}$ a³ $\approx 35{,}011351652$ a³

Hexverdrehtes Dodekaeder

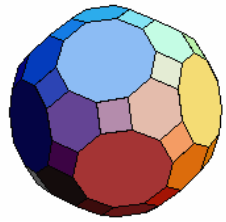






Das Polyeder hat 140 Ecken und 72 Flächen, 12 regelmäßige Fünfecke und 60 spiegelsymmetrische Sechsecke. Von den 210 Kanten sind 60 kurz, 60 mittlerer Länge und 90 lang. Das duale Polyeder ist der Pentakis-Dodekaederstumpf.

Ist der Mittelkugelradius des kanonischen Polyeders gleich r; die Werte sind Wurzeln der Lösungen von Polynomen 6.Grades; so wird
kurze Kante $s_1 \approx 0{,}24805766058343397098$ r
mittlere Kante $s_2 \approx 0{,}26300941461107751861$ r
Lange Kante $s_3 \approx 0{,}27796116863872106624$ r
Volumen $V \approx 4{,}0448745806384879023$ r³
Bei einer 2.Variante des hexverdrehten Dodekaeders haben die Sechsecke 5 Seiten gleicher Länge. Hat die einzelne kurze Kante die Länge a, so gilt
lange Kante $s_2 = (1/x + 1/\phi)$ a $\approx 1{,}2009335234948772626$ a
Umkugelradius $R = \sqrt{(3\,((x^2+1)\,(\phi+2) +4x\,\phi))}/2$ a $\approx 4{,}3620352942116349995\,46$ a
Volumen $V = x^3 \sqrt{(5\,(x^2\,(101\phi +331) +x\,(929\phi-682) + (956-291\phi)))}/2$ a³ $\approx 326{,}68907217049239581$ a³
Bei einer 3.Variante des hexverdrehten Dodekaeders haben die Sechsecke 4 Seiten gleicher Länge. Hat die 2 zwei kurzen Kanten die Länge a, so gilt
lange Kante $s_2 = (2x/\phi + \phi/x)$ a $\approx 1{,}1773993739635497156$ a
Umkugelradius $R = x \sqrt{(3\,(x^2\,(3-\phi) +x\,(2\phi-1) +2-\phi))}/2$ a $\approx 4{,}2765544671162600870$ a
Volumen $V = x^5 \sqrt{(5\,(3x^2\,(845-503\phi) +x\,(6466\phi-10213) +17\,(634-405\phi)))}/2$ a³ $\approx 306{,}45407533313019357$ a³
mit $\phi = (1+ \sqrt{5})/2$ und $x = \sqrt[3]{((\phi + \sqrt{(\phi-5/27)})/2)}+ \sqrt[3]{((\phi - \sqrt{(\phi-5/27)})/2)}$



Conway-Notation für Polyeder

Durch John Conway wurde eine Notation für Veränderungen an Polyedern eingeführt. Ausgehend von T, C, O, I und D für die fünf Platonischen Körper versteht man dann zum Beispiel unter tI = truncated icosahedron den Ikosaederstumpf.
Folgende Operationen wurden definiert:

d das duale Polyeder, jeder Fläche entspricht eine Ecke, jede Ecke entspricht einer Fläche, z.B. dC = O. Es ist ddX = X, z.B. ddC = dO = C. ,Würfel dC = Oktaeder

t truncate, Abstumpfung des Polyeders an jeder Ecke
Würfel tC=Hexaederstumpf=dkO Oktaeder tT=Oktaederstumpf
Tetraeder tT=Tetraederstumpf=dkT Ikosaeder tI=Ikosaederstumpf=dkD
Dodekaeder tD=Dodekaederstumpf=dkI

k kis-Operation, teilt alle N-Ecke in n Dreiecke, eine neue Ecke entsteht im Mittelpunkt der Ausgangsflächen, es ist kX = dtdX

k kis-Operation, teilt alle N-Ecke in n Dreiecke, eine neue Ecke entsteht im Mittelpunkt der Ausgangsflächen, es ist kX = dtdX

j join-Operation, Verbindungsoperation, dual zur ambo-Operation, d.h. jX = dadX = daX, zum Beispiel jC = jO = Rhombendodekaeder

a ambo-Operation, Abstumpfung an den Kantenmittelpunkten, es ist aX = adX. aC = aO ist das Kuboktaeder

s snub, Abschrägung des Polyeders längs der Kanten, sC ist der abgeschrägte Würfel, es ist sX = sdX

e expand-Operation, das Polyeder wird durch zusätzliche Vierecke erweitert, eC ist das Rhombenkuboktaeder, es ist eX = aaX = edX

g gyro, die duale Operation zur Polyederabschrägung gX = dsdX = dsX. Der Gyrowürfel gC = gO ist das pentagonale Ikositetraeder

b bevel-Operation entspricht bX = taX. bC ist der Oktaederstumpf

o ortho-Operation die dual zur expand-Operation ist, d.h. oX = deX =jjX. oC ist das Trapezoid-Ikositetraeder

m meta-Operation die dual zur bevel-Operation ist, mX = dbX = kjX. mC ist das Hexakisoktaeder

r reflect-Operation, tauscht linkshändige gegen rechtshändige Körper und existiert nur für chirale Polyeder, es ist rC = C

p propellor-Operation verändert jedes N-Eck in ein N-Eck, dass von n Vierecken umgeben ist, dpdX = pX und dpX =pdX

http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/conway_notation.html