

# Analytische Geometrie des Raumes

## DISCOURS DE LA METHODE

Pour bien conduire la raison, & chercher la vérité dans les sciences.

Plus LA DIOPTRIQUE LES METEORES.

ET LA GEOMETRIE.

Qui font des effets de cette METHODE.



A L'XVND De l'Imprimerie de IAN MAIRE. 1637. Avec Privilège.

## Analytische Geometrie der Ebene

Die analytische Geometrie befasst sich mit den Problemen der quantifizierten, analytischen Darstellung der Beziehungen zwischen elementaren geometrischen Objekten. Hierzu gehören auch Methoden zur vollständigen quantitativen Bestimmung der Bestandteile von Objekten (z.B. Dreiecken) wenn einige dieser vorgegeben sind sowie die Bestimmung der Flächen und Rauminhalte von geometrischen Objekten.

Die Grundlagen der modernen analytischen Geometrie wurden von Pierre de Fermat (Behandlung von geometrischen Problemen mit analytischen Ausdrücken; 1601-1665), von René Descartes (kartesische Koordinaten; 1596-1650) und Blaise Pascal (Theorie der Kegelschnitte; 1623-1662) gelegt.

Titelblatt des von René Descartes verfassten Werkes "Discours de la Méthode", dessen Teil "La Géométrie"

die Grundlagen der analytischen Geometrie enthält.

## Kugelkoordinaten (O;r,λ,θ)

Längenkoordinate  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  (in der Mathematik üblich)  
 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$  (in Geografie und Anwendungen üblich)  
 Breitenkoordinate  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$  (in der Mathematik üblich)  
 $0 \leq \vartheta \leq \pi$  (in Geografie und Anwendungen üblich)

Radiusvektor  $r$

Spezielle Gleichungen

für  $r = 0$  entsteht eine Kugel um den Koordinatenursprung  
 für  $\phi = 0$  entsteht eine Halbebene, die durch die z-Ebene begrenzt wird

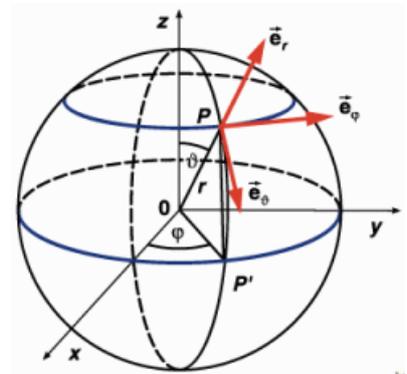
Umwandlung zu kartesischen Koordinaten

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \quad x \neq 0: \tan \lambda = y/x$$

$$x = 0: \lambda = \pi/2 \text{ für } y = r \quad x = 0: \lambda = -\pi/2 \text{ für } y = -r$$

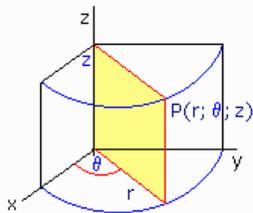
$$\tan \phi = z / \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad \sin \phi = z/r$$

$$x = r \cos \phi \cos \lambda \quad y = r \cos \phi \sin \lambda \quad z = r \sin \phi$$



## Zusammenhang Koordinatensysteme

kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x	$\rho \cos \phi$	$r \sin \theta \cos \theta$
y	$\rho \sin \phi$	$r \sin \theta \sin \theta$
z	z	$r \cos \theta$
$\sqrt{(x^2+y^2)}$	$\rho$	$r \sin \theta$
$\arctan (y/x)$	$\phi$	$\theta$
$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$	$\sqrt{(\rho^2+z^2)}$	r
$\arctan (\sqrt{(x^2+y^2)}/z)$	$\arctan (\rho/z)$	$\theta$



## Zylinderkoordinaten (O,r,θ,z)

Zylinderkoordinaten beschreiben die Lage eines Punktes durch

1. den Zylinderradius  $r$ , dem Abstand zwischen dem Punkt und der z-Achse. Dabei ist  $r$  nicht der Abstand vom Ursprung!
2. das Azimut  $\theta$ , dem Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Projektion der Strecke OP auf die x,y-Ebene
3. die Applikate  $z$ , dem orientierten Abstand zwischen dem Punkt und der x-y-Ebene

Zylinderkoordinaten sind wichtig für dreidimensionale Probleme mit Zylindersymmetrie, d.h. Rotationssymmetrie um die z-Achse.

Radiusvektor, Modul, Leitstrahl ...  $r$ , Phase, Polarwinkel, Argument ...  $\theta$

Beziehung zu kartesischen Koordinaten

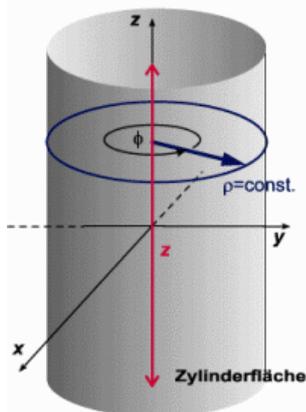
$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad \sin \theta = y/r \quad \cos \theta = x/r \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

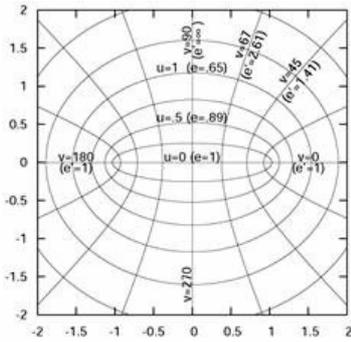
Spezielle Gleichungen:

für  $r = \text{konstant}$ , entsteht eine Zylinderfläche mit der z-Achse als Symmetrieachse (untere Abbildung)

für  $\theta = \text{konstant}$ , entsteht eine Halbebene, die die z-Achse als begrenzende Gerade enthält

für  $z = \text{konstant}$ , entsteht eine Ebene parallel zur x-y-Ebene





## Elliptische Koordinaten

In einem elliptischen Koordinatensystem wird ein Punkt durch die Angabe der Lage auf konfokalen Ellipsen und Hyperbeln eindeutig bestimmt. Bei zweidimensionalen elliptischen Koordinaten lautet die Umrechnung in kartesische Koordinaten

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \sinh u \sin v \end{pmatrix}$$

Dabei sind  $u$  und  $v$  die Koordinaten,  $C$  ein Parameter des Koordinatensystems.  $v$  läuft von  $0$  bis  $2\pi$ ,  $u$  ist unbeschränkt. Die  $u$ -Koordinatenlinien sind Hyperbeln, die  $v$ -Koordinatenlinien Ellipsen; für  $u = 0$  ist die  $v$ -Koordinatenlinie zu einer Strecke von  $(-C_0)$  bis  $(C_0)$  entartet.

Für  $v = 0$  ist die  $u$ -Koordinatenlinie zu einer Halbgerade entartet; für  $v = \pi$  ist die  $u$ -Koordinatenlinie eine Halbgerade auf der negativen  $x$ -Achse.

## Elliptische Koordinaten in der Ebene

Alle Ellipsen und Hyperbeln haben die gleiche lineare Exzentrizität  $ae = C$ , wobei  $a$  die große Halbachse der Ellipse bzw. Hyperbel ist.

Diese elliptischen Koordinaten können auf verschiedenen Arten auf den dreidimensionalen Raum erweitert werden. Bei zylindrischen elliptischen Koordinaten wird die kartesische  $z$ -Koordinate als weitere Koordinate hinzugefügt. Bei polaren elliptischen Koordinaten wird die Ebene um einen Winkel  $\phi$  gedreht, der dann die zusätzliche Koordinate bildet.

## Koordinatensystemtransformation

### Parallelverschiebung

Koordinaten im ursprünglichen System  $x, y, z$

Koordinaten im neuen System  $x', y', z'$

$$x = x' + c \quad x' = x - c \quad y = y' + d \quad y' = y - d \quad z = z' + e \quad z' = z - e$$

### Drehung

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3$$

$$y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3$$

$$z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$  Winkel, die die  $x'$ -Achse mit den ursprünglichen Achsen bildet

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots$  Winkel, die die  $y'$ -Achse mit den ursprünglichen Achsen bildet

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots$  Winkel, die die  $z'$ -Achse mit den ursprünglichen Achsen bildet

### Richtungskosinus

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

## Vektorielle Geradengleichungen

Punkttrichungsform  $\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{a}$

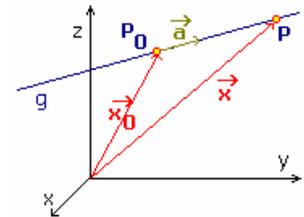
... Gerade durch den Endpunkt von  $\vec{x}_0$  mit dem Richtungsvektor  $\vec{a}$

Zweipunktgleichung  $\vec{x} = \vec{x}_1 + t \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$

Allgemeine Gleichung  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

... Schnitt der zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$



## Plückerform der Geradengleichung im $R^3$

**Spezielle Geraden** parallel zur  $x, y$ -Ebene  $y = mx + b, z = c$

parallel zur  $x$ -Achse  $y = b, z = c$  durch den Ursprung  $y = mx, z = nx$

## Gerade durch Punkt P senkrecht zur Ebene E

geg.:  $P(x_1, y_1, z_1)$ , Ebene  $Ax + By + Cz + D = 0$  oder  $\vec{r} \cdot \vec{n} - d = 0$

Komponentendarstellung  $(x - x_1) / A = (y - y_1) / B = (z - z_1) / C$

Vektorielle Darstellung  $(\vec{r} - \vec{r}_p) \times \vec{n} = 0$

## Lagebeziehung von Geraden

gegeben:  $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{a}$   $h: \vec{x} = \vec{x}_1 + r \cdot \vec{b}$

1.  $g, h$  liegen in einer Ebene  $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  und  $(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$  komplanar

1a) ... und  $g \parallel h \Leftrightarrow \vec{a}$  ist Vielfaches von  $\vec{b}$

1b) ...  $g, h$  schneiden sich in einem Punkt  $S$

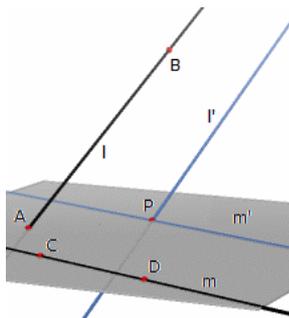
2.  $g, h$  sind windschief  $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  und  $(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$  nicht komplanar

Abstand eines Punktes  $P_1$  von einer Geraden

$$d = |\vec{a} / |\vec{a}| \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)|$$

Lotfußpunkt eines Punktes  $P$  auf eine Gerade  $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

$$\vec{x}_0 = \vec{a} + t_0 \cdot \vec{b} \text{ mit } t_0 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{b} / |\vec{b}|^2$$



### Schnittwinkel zweier Geraden

$$\cos \alpha = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / (|\vec{a}| |\vec{b}|)$$

Der Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden ist der Schnittwinkel der entsteht, wenn eine der Geraden parallel zu sich selbst so verschoben wird, bis sie die zweite Gerade schneidet.

### Punkt und zwei Geraden

Problemstellung: Gegeben sind ein Punkt  $P(x_1; x_2; x_3)$  sowie zwei Geraden

$$g_1: \vec{x} = \vec{s} + r \vec{a} \qquad g_2: \vec{x} = \vec{q} + r \vec{b}$$

Gesucht ist die Gerade  $k$  von  $P$  aus, die  $g_1$  und  $g_2$  schneidet.

Lösung: 1. Aufstellen einer Gleichung einer Hilfsebene  $E$ , in der die Gerade  $g_1$  und der Punkt  $P$  liegen

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r(\vec{s} - \vec{p}) + t \vec{a}$$

2. Schnitt dieser Hilfsebene  $E$  mit der Geraden  $g_2$ . Man erhält den Schnittpunkt  $T$ . Die Gerade durch  $T$  und den Punkt  $P$  ist die gesuchte Gerade.

### Abstand windschiefer Geraden

Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben und nicht parallel zueinander liegen, heißen windschief. Sind  $g$  und  $g^*$  zwei windschiefe Geraden, so gibt es stets einen Punkt  $Q$  auf  $g$  und genau einen Punkt  $Q^*$  auf  $g^*$ , so dass der Vektor  $QQ^*$  auf beiden Geraden senkrecht steht. Die Länge dieses Vektors ist die kürzeste Entfernung, die irgend zwei Punkte der Geraden  $g$  und  $g^*$  voneinander haben können.

$$d = | [ (\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) ] / (\vec{a} \times \vec{b}) |$$

Richtungsvektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und Ortsvektoren  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_1$  von Punkten auf der Geraden

Der Term  $\Delta = (\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  kann über die angegebene Determinante berechnet werden

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}$$

### Richtwinkel zwischen der Geraden in allgemeiner Form und den Achsen

$$\cos \alpha = (b_1 c_1 - b_2 c_2) / n$$

$$\cos \beta = (a_2 c_1 - a_1 c_2) / n$$

$$\cos \gamma = (a_1 b_2 - a_2 b_1) / n$$

$$\text{mit } n^2 = (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (a_2 c_1 - a_1 c_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$

### Geradengleichung mit Richtwinkeln

$$(x - x_0) / \cos \alpha = (y - y_0) / \cos \beta$$

### Lage von Geraden

Gegeben: Zwei Geraden  $g_1: \vec{x} = \vec{p} + r \vec{a}$  und  $g_2: \vec{x} = \vec{q} + s \vec{b}$

#### 1. Lage zweier Geraden

Setze  $g_1 = g_2$ ;  $\vec{p} + r \vec{a} = \vec{q} + s \vec{b}$

Dies sind drei Gleichungen für die zwei Variablen  $r$  und  $s$ .

a) das Gleichungssystem hat genau eine Lösung für  $r$  und  $s$ :  $\rightarrow$  Die Geraden schneiden sich in einem Schnittpunkt  $S$ . Setze  $r$  in  $g_1$  oder  $s$  in  $g_2$  ein  $\rightarrow S$ .

b) das LGS hat unendlich viele Lösungen  $\rightarrow g_1 = g_2$ , d.h. die Geraden sind identisch

c) Das LGS hat keine Lösungen  $\rightarrow$  c1) sind  $a$  und  $b$  linear unabhängig  $\rightarrow$  Die Geraden sind windschief!  
c2) sind  $a$  und  $b$  linear abhängig  $\rightarrow$  Die Geraden sind echt parallel!

#### 2. Abstand $d$ bei windschiefen Geraden

Bestimme eine Hilfsebene  $E$  so, dass  $g_1$  ganz in  $E$  liegt und parallel zu  $g_2$  ist. (Richtungsvektor)

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r \vec{a} + s \vec{b}$$

Bestimme die Hesse-Normalenform von  $E$  und setze den Punkt  $Q$  ein  $\rightarrow d$  ist der gesuchte Abstand

#### 3. Berechnung der gemeinsamen Lotgeraden

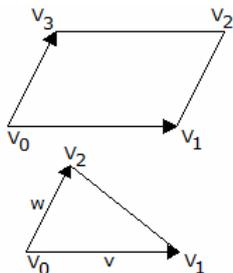
Lotfußpunkt  $F_1$  liege auf  $g_1$ ;  $\vec{f}_1 = \vec{p} + r \vec{a}$

Lotfußpunkt  $F_2$  liege auf  $g_2$ ;  $\vec{f}_2 = \vec{q} + s \vec{b}$

Der Vektor  $F_1 F_2$  steht senkrecht auf  $g_1$  und  $g_2$ :

$$(\vec{f}_2 - \vec{f}_1) * \vec{a} = (\vec{q} - \vec{p} + s \vec{b} - r \vec{a}) * \vec{a} = 0 \quad (\vec{f}_2 - \vec{f}_1) * \vec{b} = (\vec{q} - \vec{p} + s \vec{b} - r \vec{a}) * \vec{b} = 0$$

Aus den beiden Gleichungen ergeben sich  $r$  und  $s$ ; eingesetzt in  $g_1$  und  $g_2$  liefert  $F_1$  und  $F_2$ . Die Gerade  $g(F_1, F_2)$  ist die gesuchte Lotgerade



### Parallelogrammfläche

Ist ein ebenes Parallelogramm durch seine Eckpunktvektoren  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  gegeben, und damit auch die Vektoren seiner Seiten, so gilt für den Flächeninhalt nach der Gleichung für das Vektorprodukt  $A = |(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \times (\vec{v}_3 - \vec{v}_0)|$

In der Ebene, mit z-Koordinaten von Null, wird

$$A = (x_1 - x_0)(y_3 - y_0) - (x_3 - x_0)(y_1 - y_0)$$

Für ein Dreieck, d.h. ein halbes Parallelogramm wird

$$A = 1/2 |(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_0)|$$

$$\text{und in der Ebene} \quad A = 1/2 (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$$

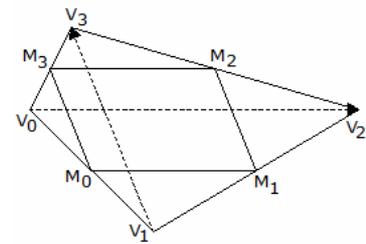
### Vierecksfläche

Gegeben sei ein beliebiges, konvexes und ebenes Viereck durch seine Eckpunktvektoren  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  gegeben.

Um von diesem den Flächeninhalt zu bestimmen, nutzt man das von Pierre Varignon 1731 entdeckte Varignon-Parallelogramm. Dieses wird von den Mittelpunkten der Viereckseiten gebildet, ist stets ein Parallelogramm und hat den halben Flächeninhalt des Ausgangsvierecks.

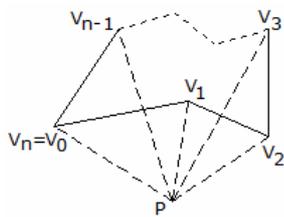
Ist das Viereck  $V_0V_1V_2V_3$  und sein Varignon-Parallelogramm  $M_0M_1M_2M_3$ , so wird

$$\begin{aligned} A_{\text{Viereck}} &= 2 A_{M_0M_1M_2M_3} \\ &= 2 |(\vec{m}_1 - \vec{m}_0) \times (\vec{m}_3 - \vec{m}_0)| \\ &= 2 |((\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2 - (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)/2) \times ((\vec{v}_3 + \vec{v}_0)/2 - (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)/2)| \\ &= 1/2 |(\vec{v}_2 - \vec{v}_0) \times (\vec{v}_3 - \vec{v}_1)| \end{aligned}$$



Diese Gleichung wurde erstmals 1995(!) durch van Gelder in "Efficient Computation of Polygon Area and Polyhedron Volume" angegeben.

In der Ebene wird daraus  $A = 1/2 (x_2 - x_0)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_0)$ . Dabei wird die Fläche positiv, wenn die Punkte in Uhrzeigerrichtung angeordnet sind, andernfalls negativ. Es ist verblüffend, dass diese einfache Methode den antiken griechischen Mathematikern entging und dass es bis in das 20. Jahrhundert dauerte, bis sie jemand fand!



### Polygonfläche

Gegeben sei ein beliebiges, n-seitiges, konvexes und ebenes Polygon durch seine Eckpunktvektoren  $v_0 \rightarrow$  bis  $v_{n-1} \rightarrow$  gegeben.

Um von diesem den Flächeninhalt zu bestimmen, nutzt man eine analoges Verfahren, wie bei der Vierecksfläche.

Sind die Eckpunkte des Polygons  $V_0 \dots V_{n-1}$  durch  $x_0, \dots, x_{n-1}$  und  $y_0, \dots, y_{n-1}$  gegeben, so wird  $A_{\text{Polygon}} = 1/2 \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$  wobei  $V_0 = V_n$  gesetzt wird.

Dabei wird die Fläche positiv, wenn die Punkte in Uhrzeigerrichtung angeordnet sind, andernfalls negativ.

### Algorithmus zur Berechnung der Polygonfläche

Zwei C-Programmtexte zur Berechnung der Polygonfläche im  $R^2$  und  $R^3$ . Eingabegrößen sind die Eckenzahl n, die Eckkoordinaten in Point\* V mit  $V[n]=V[0]$  und  $V[n+1]=V[1]$  und der Normalvektor N der Ebene. Ausgegeben wird der Flächeninhalt.

```
// area2D_Polygon(): computes the area of a 2D polygon
float area2D_Polygon( int n, Point* V )
{ float area = 0; int i, j, k;
  for (i=1, j=2, k=0; i<=n; i++, j++, k++) { area += V[i].x * (V[j].y - V[k].y); }
  return area / 2.0; }
```

```
// area3D_Polygon(): computes the area of a 3D planar polygon
float area3D_Polygon( int n, Point* V, Point N )
{ float area = 0; float an, ax, ay, az; int coord; int i, j, k;
  ax = (N.x>0 ? N.x : -N.x); // abs x-coord
  ay = (N.y>0 ? N.y : -N.y); // abs y-coord
  az = (N.z>0 ? N.z : -N.z); // abs z-coord
  coord = 3; // ignore z-coord
  if (ax > ay) { if (ax > az) coord = 1; } // ignore x-coord
  else if (ay > az) coord = 2; // ignore y-coord
  for (i=1, j=2, k=0; i<=n; i++, j++, k++)
    switch (coord) {
      case 1: area += (V[i].y * (V[j].z - V[k].z)); continue;
      case 2: area += (V[i].x * (V[j].z - V[k].z)); continue;
      case 3: area += (V[i].x * (V[j].y - V[k].y)); continue; }
  an = sqrt( ax*ax + ay*ay + az*az); // length of normal vector
  switch (coord) {
    case 1: area *= (an / (2*ax)); break;
    case 2: area *= (an / (2*ay)); break;
    case 3: area *= (an / (2*az)); }
  return area; }
```

### Ebenengleichung

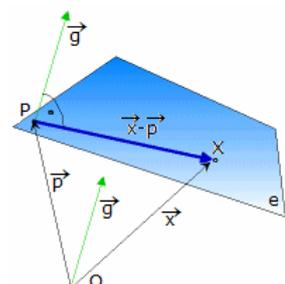
Ebene durch den Punkt  $P_0$  mit den Richtungsvektoren  $a \rightarrow, b \rightarrow$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r \vec{a} + s \vec{b}$$

### Dreipunktgleichung

durch nicht kollineare Punkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + r (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + s (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$



bzw. über das Spatprodukt

Punkt-Normalenform

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0$$

Die Abbildung zeigt die Orthogonalform der Ebene für einen orthogonalen Vektor  $\vec{g}$ , d.h. einen Normalenvektor, und zwei Ortsvektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$ .

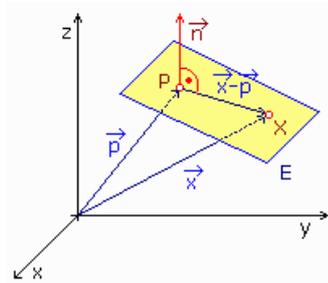
Normalenvektor

$$[(\vec{x} - \vec{x}_1)(\vec{x} - \vec{x}_2)(\vec{x} - \vec{x}_3)] = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - d = 0 \text{ (Koordinatenform)}$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$$



### Hessesche Normalenform

Einheits-Normalenvektor

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{x} - d / |\vec{n}| = 0$$

$$\vec{n}_0 = \vec{n} / |\vec{n}| \text{ mit } |\vec{n}_0| = 1$$

### Allgemeine Gleichung der Ebene

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Sonderfälle der Ebene

$d=0$  geht durch den Ursprung

$a=0$  parallel zur x-Achse

$a=b=0$  parallel zur x-y-Ebene

$a=d=0$  geht durch die x-Achse

Spezielle Ebenen, z.B.  $z = 0 \dots$  x-y-Ebene

$$\text{Ebene durch den Punkt } P_0 \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

### Abschnittsform der Ebenengleichung

$$x/a' + y/b' + z/c' = 1 \text{ mit}$$

$$a' = -d/a; b' = -d/b \text{ und } c' = -d/c$$

Ebene E senkrecht zu  $\vec{n}$  mit Abstand d zum Nullpunkt

$$\pm \vec{n} \cdot \vec{x} = d$$

### Hessesche Normalenform (2. Form)

p ... Lot vom Ursprung auf die Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

wobei die Wurzel das entgegengesetzte Vorzeichen von d hat

$$(ax + by + cz + d) / \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

### Richtungskosinus der Ebene

$$\cos \alpha = -a \operatorname{sgn} d / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos \beta = -b \operatorname{sgn} d / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos \gamma = -c \operatorname{sgn} d / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### Lot vom Ursprung auf die Ebene

$$p = |d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### Lagebeziehung komplanarer Punkte

Die Punkte X, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> liegen in einer Ebene, wenn diese Determinante verschwindet, d.h. gleich 0 ist

**Abstand Punkt - Punkt** Die Punkte P und Q haben im Raum den Abstand

$$d = d(P, Q) = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

### Ebene durch 3 Punkte

Die Punkte P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> bilden eine Ebene mit der Gleichung

$$(\vec{x} - \vec{x}_1)(\vec{x} - \vec{x}_2)(\vec{x} - \vec{x}_3) = 0$$

### Ebenen - Sonderfälle

**Ebene durch (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) und senkrecht zur Richtung (a, b, c):**

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

**Ebene durch (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) und parallel zu (a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>, c<sub>1</sub>) und (a<sub>2</sub>, b<sub>2</sub>, c<sub>2</sub>):**

$$(x - x_0)(b_1 c_2 - b_2 c_1) - (y - y_0)(a_1 c_2 - a_2 c_1) + (z - z_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

**Ebene durch (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) und (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) und parallel zu (a, b, c):**

$$(x - x_0)[c(y_1 - y_0) - b(z_1 - z_0)] - (y - y_0)[c(x_1 - x_0) - a(z_1 - z_0)] + (z - z_0)[b(x_1 - x_0) - a(y_1 - y_0)] = 0$$

### Gleichung einer Ebene durch zwei Punkte, parallel zu einer Geraden

Gleichung einer Ebene, die durch zwei Punkte P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> geht und parallel zu einer Geraden mit dem Richtungsvektor  $\vec{a}$  liegt:

$$(\vec{x} - \vec{x}_1)(\vec{x} - \vec{x}_2) \cdot \vec{a} = 0$$

### Gleichung einer Ebene durch einen Punkt, parallel zu zwei Geraden

Gleichung einer Ebene, die durch Punkt P<sub>1</sub> geht und parallel zu zwei Geraden mit den Richtungsvektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  verläuft:

$$(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

### Gleichung einer Ebene durch einen Punkt, senkrecht zu einer Geraden

Gleichung einer Ebene, die durch einen Punkt P<sub>1</sub> geht und senkrecht zu einer Geraden mit dem Richtungsvektor  $\vec{n}$  verläuft:

$$(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

### Umwandlung von Ebenengleichungen

Gegeben Ebene in Parameterform  $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

Gesucht Ebene in Normalenform  $E: \vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0$  bzw.  $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$

### Umrechnung von Parameter- in Normalenform:

a) Eliminieren der Parameter r und s aus den 3 Gleichungen

$$x_1 = p_1 + r \cdot a_1 + s \cdot b_1$$

$$x_2 = p_2 + r \cdot a_2 + s \cdot b_2$$

$$x_3 = p_3 + r \cdot a_3 + s \cdot b_3$$

b) Skalarprodukt: durch den Ansatz  $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$  und  $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$  erhält man einen beliebigen Normalenvektor n.

$$E: \vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{p} = 0$$

c) mittels Determinanten:  $e \rightarrow_1, e \rightarrow_2, e \rightarrow_3$  seien die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen  $x, y$  und  $z$

$$n \rightarrow = \begin{vmatrix} |e \rightarrow_1 & e \rightarrow_2 & e \rightarrow_3| \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

mit E:  $n \rightarrow * x \rightarrow - n \rightarrow * p \rightarrow = 0 !$

### Umrechnung von Normalenform in Parameterform

Auflösen des linearen Gleichungssystems  $n_1 * x + n_2 * y + n_3 * z = d$  ergibt eine zweidimensionale Lösungsmenge mit zwei Parametern; diese stellt die gesuchte Ebenengleichung in Parameterform dar.

### Lage von Ebenen im räumlichen Koordinatensystem

Die Lage eine Ebene ist bestimmt

1. durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte
2. durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt
3. durch zwei einander schneidende Geraden
4. durch zwei parallele Geraden

Zwei Ebenen schneiden einander entweder in ihrer Schnittlinie oder sind, falls sie keinen Punkt gemeinsam haben, zueinander parallel.

Eine Ebene und eine nicht in der Ebene liegende Gerade besitzen entweder einen Schnittpunkt oder sind zueinander parallel.

Wird von einem Punkt  $P$  ein Lot auf eine Ebene  $E$  gefällt, so ist der Fußpunkt  $P'$  dieses Lotes die Projektion von  $P$  auf  $E$  (lat. proicere = hinwerfen).

Die Projektion einer Geraden  $g$  auf einer Ebene ist eine Gerade oder ein Punkt, je nachdem die Gerade schief oder senkrecht zur Ebene steht. Man konstruiert die Projektion  $g'$  einer schief stehenden Geraden  $g$ , indem man zwei ihrer Punkte auf die Ebene projiziert und miteinander verbindet.

### Ebenen-Übungsaufgabe

Aufgabe der Kantonsschule Rychenberg Winterthur 1989:

- a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene  $E_1$ , welche durch  $A(2, 1, 0)$  und  $B(9, 5, 4)$  geht und senkrecht zur Ebene  $E: 2x - 2y + z - 11 = 0$  steht.
- b) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt  $A'$  von  $A$  bezüglich  $E$ .
- c) Für welche Punkte  $P$  auf der  $x$ -Achse ist der Winkel  $APB = 90^\circ$ ?
- d) Welche Punkte auf  $g: x \rightarrow = (1 | 2 | 0) + t(3 | 2 | -1)$  haben von  $E$  und der  $yz$ -Ebene gleiche Abstände?

Lösung: a) Wenn  $E_1$  senkrecht auf  $E$  steht, so muss der Normalenvektor von  $E$  ein Richtungsvektor von  $E_1$  sein. Einen weiteren Richtungsvektor gewinnt man aus den Punkten  $A$  und  $B$ . Der Normalenvektor von  $E_1$  ist das Vektorprodukt der Richtungsvektoren:

$$n \rightarrow_{E_1} = (2 | -2 | 1) \times (7 | 4 | 4) = (-12 | -1 | 22)$$

$$E_1: 12x + y - 22z = 25$$

b) Lot auf  $E$  durch  $A: x \rightarrow = (2 | 1 | 0) + t(2 | -2 | 1)$

Schnitt mit  $E: 2(2+2t) - 2(1-2t) + t - 11 = 0$  ergibt  $t = 1$ . Für  $t = 1$  gelangt man auf der Lotgeraden von  $A$  bis zum Durchstosspunkt, für  $t = 2$  zum Punkt  $A'(6; -3; 2)$

c) Der Punkt  $P$  auf der  $x$ -Achse hat die Koordinaten  $P(x, 0, 0)$ . Das Skalarprodukt von  $PA \rightarrow$  und  $PB \rightarrow$  muss 0 sein, d.h.

$$(2 - x)(9 - x) + 5 = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen:  $x_1 \approx 8,192 \Rightarrow P_1(8,192, 0, 0)$  und  $x_2 \approx 2,807 \Rightarrow P_2(2,807, 0, 0)$

d) Die  $yz$ -Ebene hat die Gleichung  $x = 0$ . Man bestimmt mit der Hesseschen Formel die

winkelhalbierenden Ebenen:  $2x - 2y + z - 11 = \pm 3x$

Schnitt mit der Geraden  $g$  ergibt  $t_1 = -2 \Rightarrow Q_1(-5, -2, 2)$  und  $t_2 = 1 \Rightarrow Q_2(4, 4, -1)$

Aufgabe: Die Ebenen  $E: 4x + 3y + 2z = -1$  und  $F: x + 2y + 3z = -4$  und  $G: x + by + cz = -7$  besitzen eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimmen Sie die Schnittgerade und die Parameter  $b$  und  $c$ .

Lösung: Aus  $F$  ergibt sich  $x + 2y + 3z = -4 \Rightarrow x = -4 - 2y - 3z$

Eingesetzt in  $E$  erhält man  $4(-4 - 2y - 3z) + 3y + 2z = -1 \Rightarrow y = -3 - 2z$

Mögliche Lösungen  $z = 0, y = -3, x = 2$   $z = 1, y = -5, x = 3$

Die beiden Punkte  $A$  und  $B$  müssen nun auch in  $G$  liegen, d.h. ihre Koordinaten müssen die Gleichung von  $G$  erfüllen.

$$x + by + cz = -7$$

$$2 - 3b = -7 \text{ und } 3 - 5b + c = -7$$

Man erhält sofort aus der ersten Gleichung  $b = 3$  und damit aus der zweiten Gleichung  $c = 5$ .

Aufgabe: Die Ebene  $E: 2x - 5y + 14z - 1 = 0$  und die Punkte  $P(5|-7|-1)$  und  $Q(x|0|6)$  sind gegeben.

Bestimmen Sie  $x$  so, dass  $P$  und  $Q$  auf verschiedenen Seiten von  $E$  liegen, aber gleich weit von der Ebene entfernt.

Lösung: Hesseform der Ebenengleichung  $(2x - 5y + 14z - 1) / 15 = 0$

Wenn wir auf der linken Seite die Koordinaten von P(5, -7, -1) einsetzen, erhalten wir nicht mehr Null, sondern den Abstand d des Punktes P von der Ebene:  $d = 30/15$   
 Punkte auf der anderen Seite der Ebene haben negative Abstände; damit erhalten wir für Q(x, 0, 6):  
 $(2x + 5 \cdot 0 + 14 \cdot 6 - 1) / 15 = -30/15$   $x = -56,5$

**Abstand d eines Punktes P<sub>0</sub> von der Ebene**

Wird in der Hesseschen Normalform einer Ebene der Punkt P<sub>0</sub> eingesetzt, so gibt d den Abstand des Punktes von der Ebene an  $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 - p$   
 $d < 0$  ... P<sub>0</sub> und Ursprung auf derselben Seite der Ebene  
 $d > 0$  ... auf verschiedenen Seiten

$d = \vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$   $\vec{r}_1$  ... Ortsvektor zu einem Ebenenpunkt  
 $d' = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \text{sgn } d$   
 $d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$

**Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Ebene  $d = \vec{n} \cdot \vec{x} - p$**

$\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0 \cdot \vec{n}$  mit  $t_0 = (d - \vec{n} \cdot \vec{p}) / |\vec{n}|^2$

**Lagebeziehung Punkt-Ebene**

Gegeben sei ein Ebene E:  $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$  oder  $\vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0$  und ein Punkt Q

**1. Abstand e des Punktes Q von der Ebene E**

falls nicht schon gegeben, Hesse-Normalenform von E ermitteln. Punkt Q in die Normalform von E einsetzen. Der sich ergebende Wert ist der gesuchte Abstand e.

Der Punkt Q und der Ursprung liegen auf verschiedenen Seiten von E, wenn  $d \cdot e > 0$ , sonst auf der gleichen Seite.

**2. Berechnung der Lotgeraden l von Q auf E**

Eine Normalenform von E bestimmen. Die Lotgerade ist die Gerade mit dem Anfangspunkt Q und dem Normalenvektor n der Ebene als Richtungsvektor: Gleichung l:  $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$

**3. Berechnung des Lotfußpunktes F auf E**

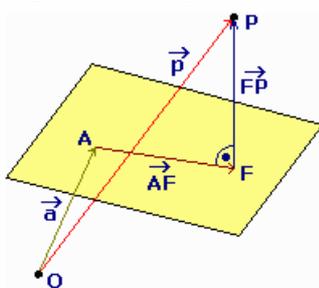
Lotgerade l mit der Ebene E zum Schnitt bringen (Einsetzen von l in die Normalenform von E). Der Schnittpunkt ist der gesuchte Lotfußpunkt F.

**4. Berechnung des Spiegelpunktes Q' von Q an E**

Lotfußpunkt F von Q auf E bestimmen. Der Spiegelpunkt Q' ergibt sich dann durch

$\vec{q}' = \vec{q} + 2 \cdot (\vec{QF}) = \vec{q} + 2 \cdot (\vec{f} - \vec{q}) = 2 \cdot \vec{f} - \vec{q}$

**Lagebeziehung Punkt-Ebene (2)**



Herleitung der Abstandsgleichung Punkt-Ebene:

Der Abstand des Punktes P zur Ebene entspricht der Länge des Vektors  $\vec{FP}$ , wobei F der Lotfußpunkt ist. Damit steht  $\vec{FP}$  senkrecht auf der Ebene und bildet einen Normalenvektor  $\vec{n}$  dieser Ebene.

Für den Ortsvektor  $\vec{p}$  von P wird

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{AF} + \vec{FP}$   $\vec{FP} = \vec{p} - \vec{a} - \vec{AF}$

Skalarprodukt mit  $\vec{FP}$  ergibt

$|\vec{FP}|^2 = (\vec{p} - \vec{a} - \vec{AF}) \cdot \vec{FP}$

$|\vec{FP}|^2 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{FP} - \vec{AF} \cdot \vec{FP}$

und da  $\vec{AF}$  senkrecht zu  $\vec{FP}$

$|\vec{FP}|^2 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{FP}$   $|\vec{FP}| = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{FP} / |\vec{FP}|$

$\vec{FP} / |\vec{FP}|$  stellt aber einen auf die Länge 1 normierten Normalenvektor der Ebene dar. Vergleich mit der Normalenform der Ebenengleichung ergibt damit für den Abstand d eines Punktes:

Wird der Ortsvektor des Punktes in die Normalenform der Ebene; mit einem normierten(!)

Normalenvektor; eingesetzt, so ergibt sich als Zahlenwert der Abstand zur Ebene.

$d = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0$

**Schnittpunkt Gerade-Ebene**

Gegeben  $g : (x - x_1) / \cos \alpha = (y - y_1) / \cos \beta$  und  $E = 0$

Lösung  $x_s = x_1 - t \cos \alpha$   $y_s = y_1 - t \cos \beta$   $z_s = z_1 - t \cos \gamma$

$t = (ax_1 + by_1 + cz_1 + d) / (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)$

$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow g$  parallel zu E

Gegeben  $g : \vec{x} = x_1 \vec{a} + t_0 \vec{a}$  und  $E : \vec{n} \cdot \vec{x} + d = 0$

Lösung  $t_0 = -(d - \vec{n} \cdot x_1 \vec{a}) / (\vec{n} \cdot \vec{a})$  und  $x_0 \vec{a} = x_1 \vec{a} + t_0 \vec{a}$

**Gerade durch P<sub>1</sub> senkrecht zur Ebene E**

$(x - x_1) / a = (y - y_1) / b = (z - z_1) / c$

**Winkel  $\phi$  zwischen Gerade und Ebene**

Gegeben  $g : \vec{x} = x_1 \vec{a} + t_0 \vec{a}$  und  $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot x_0 \vec{a}$

Lösung  $\phi = \arcsin | \vec{n} \cdot \vec{a} / ( | \vec{n} | \cdot | \vec{a} | ) |$

**Gerade und Ebene**

Gegeben: Gerade  $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a}$

Ebene  $E: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$  oder  $\vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0$

**Lage der Geraden g bezüglich der Ebene E**

$g = E$  setzen  $\rightarrow \vec{p} + r \cdot \vec{a} = \vec{q} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

Dies sind drei Gleichungen für die drei Variablen r, s und t.

a) Das Lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung:  $\rightarrow g$  schneidet E in einem Punkt S. Diesen erhält man, indem man r in g oder s und t in E einsetzt.

b) Das LGS hat unendlich viele Lösungen:  $\rightarrow g$  liegt vollständig in E

c) Das LGS hat keine Lösung:  $\rightarrow g$  verläuft echt parallel zu E

**Berechnung des Schnittwinkels**

Im Fall a) schneidet g die Ebene E unter einem Winkel  $\alpha$ .

Diesen Winkel berechnet man folgendermaßen: Falls nicht bekannt, bestimme eine Normalenform von E. Der Normalenvektor sei  $\vec{n}$ . Mit Hilfe des Skalarproduktes der Vektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{a}$  ergibt sich ein Winkel  $\alpha'$ .  $\rightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha'$  ist der gesuchte Schnittwinkel

**Berechnung des Abstandes (Parallelität)**

Im Fall c) kann der Abstand der Geraden g von der Ebene E berechnet werden, indem man den Ortsvektor  $\vec{p}$  von g in die Hesse-Normalenform von E einsetzt.

**Berechnung der Spiegelgeraden**

Durch Spiegelung zweier beliebiger Punkte der gegebenen Geraden an der Ebene erhält man zwei Spiegelpunkte. Diese legen die Gerade fest.

**Lagebeziehung zweier Ebenen**

Gegeben sind die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  in parameterfreier Form:

$E_1: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d_1$

$E_2: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d_2$

Lösungsmöglichkeiten des entstandenen linearen Gleichungssystems (LGS):

a) Das LGS hat keine Lösungen  $\rightarrow$  Die beiden Ebenen sind echt parallel.

b) Das LGS hat eine zweidimensionale Lösungsmenge  $\rightarrow$  Die beiden Ebenen sind identisch.

c) Das LGS hat eine eindimensionale Lösungsmenge  $\rightarrow$  Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden g.

**Schnittgerade zweier Ebenen**

Gegeben  $E_1: n_1 \cdot \vec{x} + d_1 = 0$  und  $E_2: n_2 \cdot \vec{x} + d_2 = 0$

Lösung  $\vec{x} = \vec{x}_0 + t (n_1 \times n_2)$

Ein Stützvektor  $\vec{x}_0$  kann als einzelne Lösung des Gleichungssystems

$E_1: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d_1$

$E_2: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d_2$

ermittelt werden

**Winkel  $\phi$  zwischen zwei Ebenen**

$\cos \phi = (n_1 \cdot n_2) / ( | n_1 | \cdot | n_2 | )$

für Ebenen  $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$  und  $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

$\cos \phi = ( A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 ) / \sqrt{ ( A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 ) ( A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 ) }$

**Winkelhalbierende Ebenen zweier Ebenen**

$-\text{sgn } d_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) / \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \pm (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) / \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = 0$

**Schwerpunkt S eines Dreiecks P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>**

$x_s = (x_1 + x_2 + x_3) / 3$   $y_s = (y_1 + y_2 + y_3) / 3$

$z_s = (z_1 + z_2 + z_3) / 3$

**Für materielle Punkte in den Dreiecksecken**

$x_s = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$

$y_s = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$

$z_s = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

**Schnittpunkt dreier Ebenen**

Gegeben drei Ebenen:

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$

$\Delta_{c_x} = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

Zur Berechnung des gemeinsamen Schnittpunktes werden die nebenstehenden Determinanten ermittelt. Für die Koordinaten des Schnittpunktes gilt dann

$x = - \Delta_{c_x} / \Delta_c$

$y = - \Delta_{c_y} / \Delta_c$

$z = - \Delta_{c_z} / \Delta_c$

$\Delta_{c_y} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}$

Ist  $\Delta_c \neq 0$ , so existiert ein Schnittpunkt. Ist  $\Delta_c = 0$  und wenigstens eine ihrer Unterdeterminanten zweiter Ordnung  $\neq 0$ , so sind die Ebenen einer Geraden parallel. Sind alle Unterdeterminanten = 0, so verlaufen die Ebenen durch eine Gerade.

$\Delta_{c_z} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$

### Orientierte Ebene

Zwei Strahlen a und b, die von demselben Punkt S ausgehen, können durch eine Drehung ineinander übergeführt werden, durch die der Winkel (a,b) bestimmt wird. Als Orientierung der Ebene, in der die Strahlen a und b liegen, gilt der Drehsinn dieser Bewegung.

Es ist zu unterscheiden zwischen den Winkeln (a,b) und (b,a); zwischen ihnen gilt die Beziehung Winkel (a,b) = - Winkel (b,a). Liegt auf dem Strahl a ein Punkt A und auf dem Strahl b ein Punkt B, so kann der Winkel auch durch ASB bzw. BSA bezeichnet werden. Der Punkt S wird Scheitelpunkt, die Strahlen a und b werden Schenkel des Winkels (a, b) genannt. Jeder Schenkel gibt als Strahl eine Richtung an; die Größe des Winkels ist dann der Unterschied dieser beiden Richtungen in einer orientierten Ebene.

### Ebenenbündel

Ein Ebenenbündel ist ein eindimensionales Grundgebilde. Die Menge aller Ebenen des Raumes, die durch eine gemeinsame Gerade gehen (mit dieser Geraden inzidieren), bildet ein Ebenenbündel.

### Ebenenbüschel

Eine Schar von Ebenen, die alle durch ein und dieselbe Gerade hindurchgehen, heißt Ebenenbüschel.

### Ebenflächner

Sind Körper nur von ebenen Flächen begrenzt, so werden sie Ebenflächner genannt.

### Fläche eines ebenen Dreiecks

$a \rightarrow, b \rightarrow, c \rightarrow$  Ortsvektoren der Dreieckspunkte  
 $2A = |(b \rightarrow - a \rightarrow) \times (c \rightarrow - a \rightarrow)|$

### Volumen einer dreiseitigen Pyramide

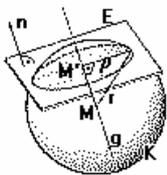
Spitze im Ursprung  $V = 1/6 | (a \rightarrow \times b \rightarrow) \cdot c \rightarrow |$   
 beliebige Lage (Punkt D ... Spitze)  $V = 1/6 | [(a \rightarrow - d \rightarrow)(b \rightarrow - d \rightarrow)(c \rightarrow - d \rightarrow)] |$

### Zerlegen eines Vektors

Zerlegung von  $a \rightarrow$  nach den Vektoren  $b \rightarrow, c \rightarrow, d \rightarrow$   
 $a \rightarrow = (b \rightarrow[a \rightarrow \cdot c \rightarrow \cdot d \rightarrow] + c \rightarrow[b \rightarrow \cdot a \rightarrow \cdot d \rightarrow] + d \rightarrow[b \rightarrow \cdot c \rightarrow \cdot a \rightarrow]) / [b \rightarrow \cdot c \rightarrow \cdot d \rightarrow]$

### Vektorielles Dreieck

Gegeben ist ein Dreieck ABC über seine Ortsvektoren  $a \rightarrow, b \rightarrow$  und  $c \rightarrow$ . Dann gilt:  
 Seitenlänge a  $a = |c \rightarrow - b \rightarrow|$       Seitenlänge b  $b = |a \rightarrow - c \rightarrow|$   
 Seitenlänge c  $c = |a \rightarrow - b \rightarrow|$       Ortsvektor des Schwerpunktes  $(a \rightarrow + b \rightarrow + c \rightarrow)/3$   
 Ortsvektor des Inkreismittelpunktes  $(a a \rightarrow + b b \rightarrow + c c \rightarrow)/(a+b+c)$   
 Ist U der Umkreismittelpunkt und H der Höhenschnittpunkt, so ist  
 $UH \rightarrow = UA \rightarrow + UB \rightarrow + UC \rightarrow$        $HA \rightarrow + HB \rightarrow + HC \rightarrow = 2 HU \rightarrow$



### Kugel (analytisch)

Kugel um M mit dem Radius r  $(x \rightarrow - m \rightarrow)^2 = r^2$   
 $M(a;b;c)$   $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$   
 um Koordinatenursprung  $x^2 = r^2$   
 $M(0;0;0)$   $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

### Quadratische Gleichung als Kugel

$A(x^2+y^2+z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$   
 mit Mittelpunkt  $M(-B/(2A) ; -C/(2A) ; -D/(2A))$  Radius  $r = 1/(2A) \sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 4AE}$

### Schnittkreis Kugel-Ebene

Kugel K:  $(x \rightarrow - m \rightarrow)^2 = r^2$       Ebene E:  $(x \rightarrow - p \rightarrow) \cdot n \rightarrow = 0$   
 Schnitkreismittelpunkt M' ist Fußpunkt von M auf Ebene E  
 Ist  $d = MM' < r$  dann  $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$

### Parameterdarstellung des Schnittkreises

gegeben: zwei orthogonale Einheitsvektoren der Schnittebene  $u \rightarrow, v \rightarrow$   
 $x \rightarrow = m \rightarrow + (R \cos \phi) u \rightarrow + (R \sin \phi) v \rightarrow$   
 mit Schnitkreismittelpunktvektor  $m \rightarrow$ , Schnittkreisradius R und  $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

### Kugel durch vier Punkte

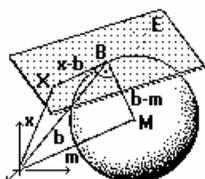
= 0, mit  $x_i, y_i, z_i$  die Koordinaten der vier Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  auf der Kugeloberfläche

### Tangentialebene

Tangentialebene an Kugel K:  $(x \rightarrow - m \rightarrow)^2 = r^2$  im Punkt B

$(x \rightarrow - m \rightarrow) \cdot (b \rightarrow - m \rightarrow) = r^2$

im Punkt  $P_0(x_0; y_0; z_0)$   $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-c)(z_0-c) = r^2$   
 Liegt  $P_0$  nicht auf der Kugel, stellt dies die Gleichung der Polarebene dar.



### Potenz p des Punktes P\_0

$p = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 - r^2$

## Gerade und Kugel

Gegeben: Gerade  $g(P,a): \vec{x} = \vec{p} + t\vec{a}$  und Kugel  $K(M,r): (\vec{x}-\vec{m}) \cdot (\vec{x}-\vec{m}) = r^2$

### 1. Lage und Schnittpunkte

Setze  $g$  in  $K$  ein  $\rightarrow (\vec{p} - t\vec{a} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - t\vec{a} - \vec{m}) = r^2$

Dies ergibt eine quadratische Gleichung für  $t$ .

a) Die quadratische Gleichung hat 2 Lösungen  $\rightarrow g$  schneidet  $K$  in zwei Punkten  $S_1, S_2$ . Diese erhält man, indem man die Lösungen in  $g$  einsetzt.

b) Die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung  $\rightarrow g$  berührt  $K$  in einem Punkt  $T$ ;  $g$  ist eine Tangente an  $K$ .  $T$  erhält man, indem man die Lösung in die Gleichung von  $g$  einsetzt.

Eine Gleichung der Tangentialebene in Normalenform im Punkt  $T$  erhält man durch  $E: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{t} - \vec{m}) = r^2$

c) Die quadr. Gleichung hat keine Lösung  $\rightarrow g$  schneidet  $K$  nicht, d.h.  $g$  verläuft vollständig außerhalb der Kugel  $K$ .

## Ebene und Kugel

Gegeben: Ebene  $E: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{a} + t\vec{b}$  oder  $n \cdot \vec{x} - d = 0$ ; Kugel  $K(M,r): (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$

### 1. Lagebeziehung der Ebene $E$ zur der Kugel $K$

Über die Hessesche Normalenform der Ebene  $E$  wird der Abstand  $e$  des Mittelpunktes  $M$  der Kugel von der Ebene  $E$  berechnet

a)  $e > r \rightarrow$  Die Ebene  $E$  schneidet die Kugel  $K$  nicht!

b)  $e = r \rightarrow$  Die Ebene  $E$  berührt die Kugel  $K$ , ist damit Tangentialebene

c)  $e < r \rightarrow$  Die Ebene schneidet die Kugel  $K$  in einem Schnittkreis  $K'$ .

### 2. Bestimmung des Tangentenpunktes $T$ im Fall b

Aufstellen der Geradengleichung  $g$ , die senkrecht zu  $E$  verläuft und durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugel geht. Der Normalenvektor der Ebene ist Richtungsvektor von  $g$ :  $\vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene ist der gesuchte Tangentialpunkt  $T$ .

### 3. Bestimmung des Schnittkreises im Fall c

Ermittlung des Abstandes  $e$  des Mittelpunktes  $M$  der Kugel von der Ebene  $E$  über die Hessesche Normalenform der Ebene.

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich aus  $e$  und dem Radius  $r$  der Kugel der Radius  $r'$  des Schnittkreises.

Aufstellen der Geradengleichung  $g$ , die senkrecht zu  $E$  verläuft und durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugel geht. Der Normalenvektor der Ebene ist Richtungsvektor von  $g$ :  $\vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene  $E$  ist der Mittelpunkt  $M'$  des Schnittkreises.

## Algebra-Abituraufgabe

### Sächsisches Mathematik-Grundkursabitur 2006 - Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(8; 6; 2)$ ,  $B(2; 14; 2)$ ,  $C(-6; 8; 2)$ ,  $D(0; 0; 2)$  und  $H(1; 7; 7)$  sowie für jedes  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) ein Punkt  $T_a(a/3; a+4; -a)$  gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $\varepsilon$  in allgemeiner Form an, in der die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  liegen. Beschreiben Sie die Lage dieser Ebene im kartesischen Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass das Viereck  $ABCD$  ein Quadrat ist.

$A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $H$  sind Eckpunkte einer Pyramide mit der Grundfläche  $ABCD$ . Stellen Sie die Pyramide in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide. Geben Sie die Koordinaten eines von  $H$  verschiedenen Punktes  $P$  so an, dass die Pyramiden  $ABCDP$  und  $ABCDH$  volumengleich sind.

b) Geben Sie den Wert  $a$  an, für den der Punkt  $T_a$  in der Ebene  $\varepsilon$  aus Aufgabenteil a) liegt.

Ermitteln Sie eine Darstellung des Vektors  $\vec{AT}_2$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{AB}$  und  $\vec{AD}$ .

Begründen Sie, dass der Punkt  $T_2$  im Inneren des Vierecks  $ABCD$  liegt.

c) Es gibt genau einen Punkt  $T_a$  so, dass die Gerade durch die Punkte  $H$  und  $T_a$  senkrecht zu der durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  gebildeten Ebene verläuft.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes  $T_a$ .

Lösung: a) eine Gleichung der Ebene: z.B.  $z = 2$ ; Beschreibung der Lage: parallel zur  $x$ - $y$ -Koordinatenebene; Volumen  $V = 500/3$ ; Koordinaten eines Punktes  $P$ : z.B.  $P(0; 0; 7)$

b)  $a = -2$ ; c)  $T_3(1; 7; -3)$

In einem kartesischen Koordinatensystem ist für jedes  $a \in \mathbb{R}$  eine Ebene  $E_a$  gegeben durch

$$E_a: (2 - 2a)x + 4y + (a + 1)z = 3 + 7a.$$

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Schnittwinkel der Ebene  $E_3$  mit der  $z$ -Achse.

Es existieren genau zwei Werte  $a$  so, dass die zugehörigen Ebenen  $E_a$  die  $z$ -Achse unter einem Winkel von  $30^\circ$  schneiden. Bestimmen Sie für jeden Wert  $a$  einen Näherungswert.

Ermitteln Sie denjenigen Wert  $a$ , für den die zugehörige Ebene  $E_a$  senkrecht zur  $x$ - $y$ -Koordinatenebene verläuft. Untersuchen Sie, ob ein Wert  $a$  existiert, so dass die zugehörige Ebene  $E_a$  den Koordinatenursprung enthält.

b) Weisen Sie nach, dass sich alle Ebenen  $E_a$  in einer gemeinsamen Geraden  $s$  schneiden.

c) Es gibt genau einen Wert  $a$ , für den der Betrag des Abstands  $d$  der Ebene  $E_a$  zum Koordinatenursprung ein lokales Maximum besitzt. Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen Wert  $a$  und geben Sie einen Näherungswert für diesen Abstand an.

d) Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  ist eine Gerade  $g_c$  gegeben durch

$$g_c: \vec{x} = (-2 \mid c \mid 3) + t (1 \mid -2 \mid 1); (t \in \mathbb{R})$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von  $c$  und  $a$

I. die Gerade  $g_c$  in der Ebene  $E_a$  liegt,

II. die Gerade  $g_c$  mit der Ebene  $E_a$  keinen gemeinsamen Punkt besitzt,

III. die Gerade  $g_c$  die Ebene  $E_a$  schneidet.

Lösung: a)  $\alpha \approx 35,3^\circ$ , Werte  $a$ :  $a_1 \approx 1,3$ ;  $a_2 \approx 12,7$ ; Wert  $a$ :  $a = -1$

b) Schnittgerade: z.B.  $\vec{x} = (-2 \mid 1 \mid 3) + r (1 \mid -1 \mid 2)$

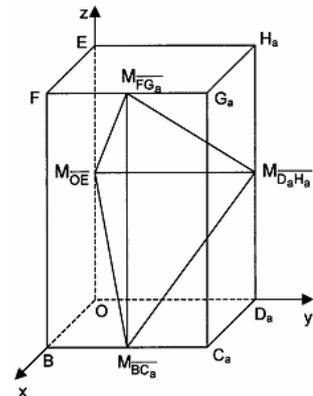
c)  $a \approx 4,3$ ; Abstand  $d \approx 3,5$

d) I.  $c = 1$  und  $a = -5$ ; II.  $c \neq 1$  und  $a = -5$ ; III.  $c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq -5$

### Sächsisches Mathematik-Leistungskursabitur 2007 - Teil B: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung  $O$  sind die Punkte  $B(3 \mid 0 \mid 0)$  und  $E(0 \mid 0 \mid 8)$  sowie für jedes  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ) die Punkte  $C_a(3 \mid a \mid 0)$  und  $D_a(0 \mid a \mid 0)$  gegeben.

Das Rechteck  $OBC_aD_a$  ist die Grundfläche des Quaders  $OBC_aD_aEFG_aH_a$ . Die Punkte  $M$  sind Mittelpunkte der jeweils angegebenen Kanten (siehe Skizze).



a) Ermitteln Sie den Oberflächeninhalt des Quaders.

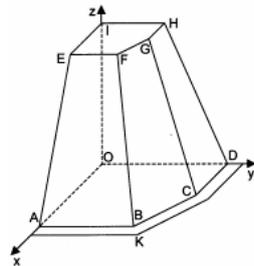
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten einen Wert  $a$ , für den sich die Raumdiagonalen des Quaders durch die Punkte  $B$  und  $H_a$  bzw.  $E$  und  $C_a$  unter einem Winkel von  $60^\circ$  schneiden.

b) Die Mittelpunkte  $M_{OE}$ ,  $M_{BC_a}$  und  $M_{D_aH_a}$  sind Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $M_{1FG_a}$ .

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide für  $a = 1$ . Begründen Sie, dass für jeden Wert  $a$  die Höhe der Pyramide  $24/5$  beträgt. Berechnen Sie den Wert  $a$ , für den das Volumen der zugehörigen Pyramide  $20$  beträgt.

c) Es gibt Werte  $a$ , für die auf der Kante  $D_aH_a$  Punkte existieren, deren Abstand von  $M_{OE}$  genau so groß ist wie der Abstand von  $M_{BC_a}$  zu  $M_{OE}$ . Ermitteln Sie alle Werte  $a$ , für die derartige Punkte existieren.

Lösungen: a)  $A(a) = 22a + 48$ ,  $a_1 = \sqrt{73/3}$ ,  $a_2 = \sqrt{219}$  | b)  $V(a) = 4a$ ,  $a = 5$  | c) Abstand  $\sqrt{(25+a^2)/4}$ ,  $a \geq \sqrt{12}$ ,  $10/\sqrt{3} \geq a$ , Abstand  $d = \sqrt{(a^2+(a-4)^2)}$ ,  $2\sqrt{3} \geq a \geq 10/3$



### Sächsisches Mathematik-Leistungskursabitur 2007 - Wahlaufgabe Geometrie

Nebenstehende Abbildung stellt den Abzugskamin eines Küchenherdes in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung  $O$  dar (1 Längeneinheit entspricht 1 Millimeter).

Die Flächen  $ABCD$ ,  $AOIE$  und  $ODHI$  liegen jeweils in einer Koordinatenebene. Der Kamin hat die Form eines schiefen Pyramidenstumpfes mit den zueinander parallelen Flächen  $ABCD$  und  $EFGHI$  sowie den kongruenten Seitenflächen  $AOIE$

und  $ODHI$ .

Die zueinander kongruenten Seitenflächen  $ABFE$  und  $CDHG$  stehen jeweils senkrecht zur  $x$ - $z$ - bzw.  $y$ - $z$ -Koordinatenebene.

Die Punkte  $A$  und  $E$  besitzen die Koordinaten  $A(600 \mid 0 \mid 0)$  und  $E(150 \mid 0 \mid 900)$ . Die Punkte  $B$  und  $F$  liegen auf der Geraden  $g$  mit  $\vec{x} = (300 \mid 200 \mid 600) + t(3 \mid 2 \mid -6)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Die Materialdicke der Seitenflächen wird nicht berücksichtigt.

Geben Sie die Koordinaten des Punktes  $B$  an. Begründen Sie, dass der Punkt  $C$  die Koordinaten  $C(400 \mid 600 \mid 0)$  besitzt. Berechnen Sie das Volumen des Kamins.

Die Grundfläche wird durch drei in der  $x$ - $y$ -Koordinatenebene liegende trapezförmige Streifen vergrößert, um eine Abstellfläche zu schaffen (siehe Abbildung). Der Punkt  $K$  ist ein Eckpunkt dieser Abstellfläche und liegt auf der Verlängerung der Strecke  $OB$ . Zeigen Sie rechnerisch, dass nicht alle drei Trapeze die Höhe  $100$  mm haben.

In der Grundfläche befindet sich für das Abzugsgebläse ein rechteckiger Ausschnitt. Eine Rechteckseite verläuft parallel zur Kaminkante  $BC$  und alle Eckpunkte des Rechtecks haben von den nächstliegenden Kanten  $OA$ ,  $AB$ ,  $CD$  sowie  $DO$  jeweils einen Abstand von genau  $50$  mm. Ermitteln Sie unter der

Bedingung, dass das Rechteck einen größtmöglichen Flächeninhalt hat, die Koordinaten zweier benachbarter Eckpunkte dieses Rechtecks.

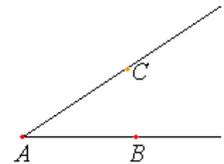
Lösung:  $t = 100 \dots$  Koordinaten des Punktes B:  $B(600 \mid 400 \mid 0)$ ;  $V = \frac{7}{16} h A_g = 134 \text{ dm}^3$ ;  $K(700 \mid 466,7 \mid 0)$ ; Koordinaten eines Eckpunktes: z.B.  $P_1(550 \mid 300 \mid 0)$ ,  $P_2(300 \mid 550 \mid 0)$ ,  $P_3(50 \mid 300 \mid 0)$  oder  $P_4(300 \mid 50 \mid 0)$

**Grundfestlegungen der Euklidischen Geometrie nach Euklid**

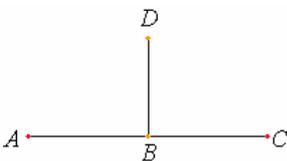
**I. Buch der „Elemente“ - Definitionen**

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.
2. Eine **Linie** breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine **ebene Fläche** ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Eine ebener **Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.

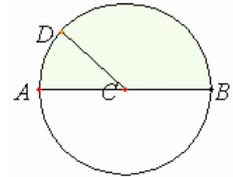
*Ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις*



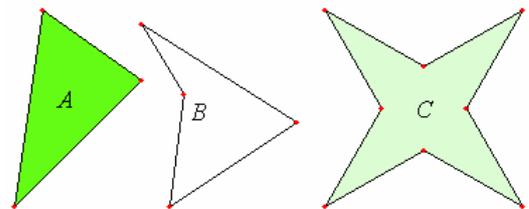
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**.
11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,
12. **Spitz**, wenn kleiner als ein Rechter.
13. Eine **Grenze** ist das, worin etwas endet.
14. Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfasst wird.



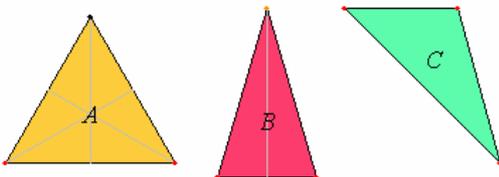
15. Eine **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie die **Umfang (Bogen)** heißt umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie zum Umfang des Kreises laufenden Strecken einander gleich sind;
16. Und **Mittelpunkt** des Kreises heißt dieser Punkt.
17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.
18. Ein **Halbkreis** ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur; und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise.



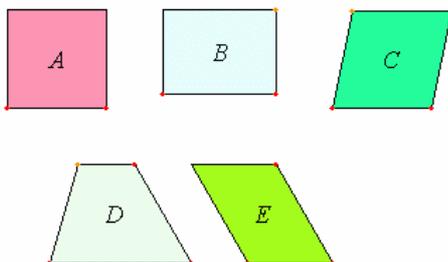
19. **Geradlinige Figuren** sind solche, die von Strecken umfasst werden,
  - dreiseitige** die von drei,
  - vierseitige** die von vier,
  - vielseitige** die von mehr als vier Seiten umfassten.



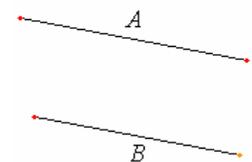
20. Von den dreiseitigen Figuren ist



- ein **gleichseitiges Dreieck** jede mit drei gleichen Seiten
  - ein **gleichschenkliges** jede mit nur zwei gleichen Seiten
  - ein **schiefes** jede mit drei ungleichen Seiten
21. Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein **rechtwinkliges Dreieck** jede mit einem rechten Winkel, ein **stumpfwinkliges** jede mit einem stumpfen Winkel, ein **spitzwinkliges** jede mit drei spitzen Winkeln.



22. Von den vierseitigen Figuren ist ein **Quadrat** jede, die gleichseitig und rechtwinkliges ist,
- ein **längliches Rechteck** jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist,
- ein **Rhombus** jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,
- ein **Rhomboid** jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;



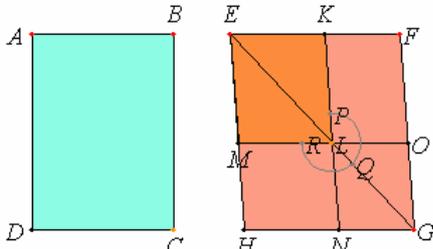
die übrigen vierseitigen Figuren sollen **Trapeze** heißen.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.



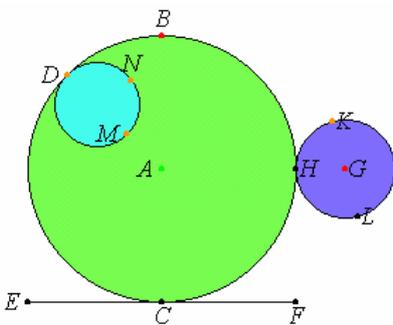
**II. Buch der "Elemente", Definitionen**

1. Von jedem rechtwinkligen Parallelogramm sagt man, dass es von den beiden den rechten Winkel umfassenden Seite **umfasst** das **Rechteck** aus den Seiten werden.
2. In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um seine Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen ein **Gnomon** heißen.

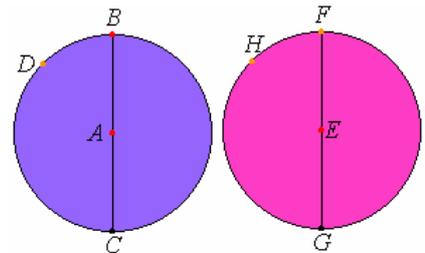


**III. Buch der "Elemente", Definitionen**

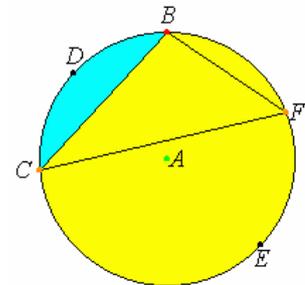
3. Dass sie **einander berühren**, sagt man von Kreisen, die einander treffen, ohne einander zu schneiden.



1. **Gleiche** Kreise sind solche, deren Durchmesser oder deren Radien gleich sind.
2. Dass sie den Kreis **berühre** (**Tangente** sei), sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet.

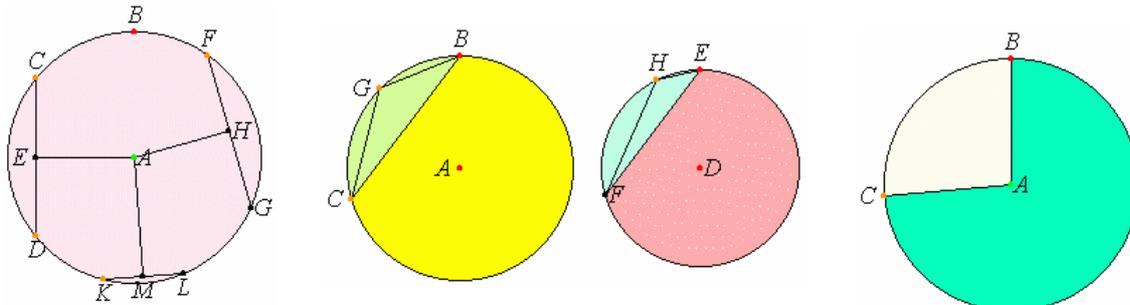


4. Von Strecken im Kreis (**Sehnen**) sagt man, dass sie vom Mittelpunkt **gleich weit abstehen**, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällten Lote gleich sind;
5. Dass sie **weiter abstehe**, sagt man von der, auf die das größere Lot fällt.
6. **Kreisabschnitt** ist die von einer Strecke und einem Kreisbogen begrenzte Figur.
7. **Winkel des Abschnitts** ist der von der Strecke und dem Kreisbogen umfasste;
8. **Winkel im Abschnitt** ist der Winkel,



der, wenn man auf dem Bogen des Abschnitts einen Punkt wählt und vom ihm nach den Enden der Grundstrecke des Abschnitts gerade Linien zieht, von diesem umfasst wird.

9. Wenn die einen Winkel umfassenden geraden Linien einen Bogen abgrenzen, sagt man, der Winkel **stehe über** dem Bogen.



10. **Kreisabschnitt** ist die Figur, die wenn ein Winkel seinen im Mittelpunkt des Kreises hat, von den den Winkel umfassenden geraden Linien und dem von ihnen abgegrenzten Bogen umfasst wird.

Schenkel

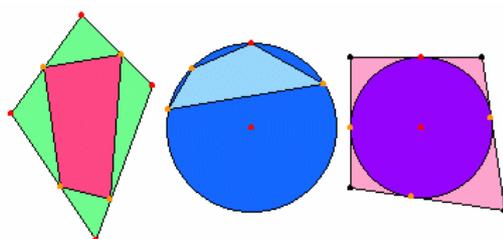
11. **Ähnliche Kreisabschnitte** sind solche, die gleiche Winkel fassen, oder in denen die Winkel einander gleich sind.

**IV. Buch der "Elemente", Definitionen**

1. Eine geradlinige Figur heißt einer geradlinigen Figur **einbeschrieben**, wenn jede Ecke der einbeschriebenen Figur auf einer entsprechenden Seite der Figur, der einbeschrieben wird, liegt.

2. Ähnlich heißt eine Figur einer Figur **umbeschrieben**, wenn auf jeder Seite der umbeschriebenen Figur eine entsprechende Ecke der Figur, der umbeschrieben wird, liegt.

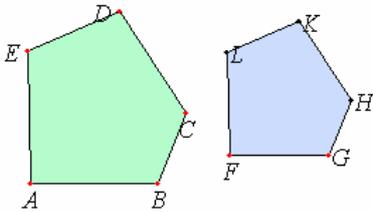
3. Eine geradlinige Figur heißt **einem Kreise einbeschrieben**, wenn jede Ecke der einbeschriebenen Figur



auf dem Kreisumfang liegt.

4. Eine geradlinige Figur heißt **einem Kreise umbeschrieben**, wenn jede Seite der umbeschriebenen Figur den Kreisumfang berührt.

- Ähnlich heißt ein Kreis **einer Figur einbeschrieben**, wenn der Kreisumfang jede Seite der Figur, der einbeschrieben wird, berührt.
- Ein Kreis heißt **einer Figur umbeschrieben**, wenn der Kreisumfang jede Ecke der Figur, der umbeschrieben wird, trifft.
- Eine Strecke heißt **in einen Kreis eingetragen**, wenn ihre Enden auf dem Kreisumfang liegen.



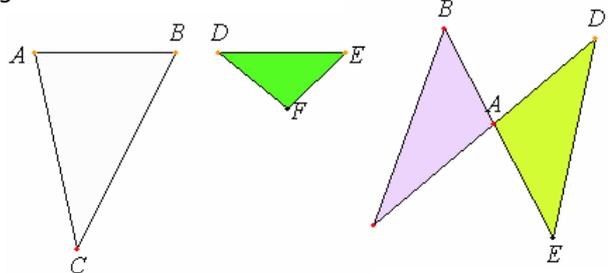
### VI. Buch der "Elemente", Definitionen

- Ähnlich** sind geradlinige Figuren, in denen die Winkel einzeln gleich sind und die gleiche Winkel umfassenden Seiten in Proportion stehen.
- Reziprok** sind Figuren, wenn in jeder der beiden Figuren sowohl führende als auch folgende Verhältnisse vorkommen.
- Ein Strecke

heißt **stetig geteilt**, wenn sich, wie die ganze Strecke zum größeren Abschnitt, so der größere Abschnitt zum kleineren verhält.

4. **Höhe** ist in jeder Figur das vom Scheitel auf die Basis gefällte Lot.

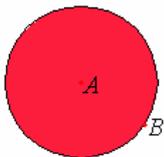
5. Ein Verhältnis heißt aus Verhältnissen **zusammengesetzt**, wenn die Abmessungen der Verhältnisse miteinander vervielfältigt ein solche bilden.



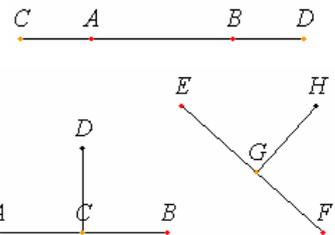
### Euklidische Postulate, Axiome

Die fünf von Euklid als Grundlage der Geometrie angenommenen Postulate sind: Gefordert werden soll:

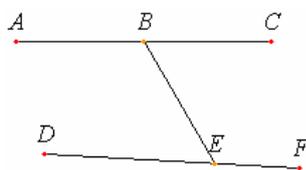
- Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,



- Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
- Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
- Dass alle rechten Winkel einander gleich sind,



### Parallelenaxiom



- Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendlich sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Das 5. Euklidische Postulat ist als Parallelenaxiom in die Geschichte eingegangen. Über 2000 Jahre wurde intensiv versucht, dieses Axiom durch

die anderen vier herzuleiten. Im Ergebnis aller Bemühungen entstanden nicht-euklidische Geometrien. Diese wurden u.a. von Bolyai, Lobatschewski und Gauß begründet.

Anfang des 19. Jahrhunderts wurde durch John Playfair (1748-1819, schottischer Mathematiker) nachgewiesen, dass das 5. Postulat zu folgendem äquivalent ist: Durch einen Punkt P außerhalb einer Strecke verläuft genau eine Gerade, die zur gegebenen Strecke parallel ist.

### I. Buch der "Elemente", Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
- Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
- Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
- Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
- Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
- Die Halben von demselben sind einander gleich.
- Was einander deckt, ist einander gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.
- Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

**Axiomatisierung der Euklidischen Geometrie nach Hilbert (1900) und Schur (1909)**

**Inzidenzaxiome**

1. Zu je zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade durch diese Punkte; jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.
2. Nicht alle Punkte liegen auf einer einzigen Geraden.
3. Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden  $g$  und jedem Punkt  $P$  außerhalb  $g$  existiert genau eine Gerade durch  $P$ , die keinen Punkt mit  $g$  gemeinsam hat.

**Anordnungsaxiome**

1. Wenn  $R$  zwischen  $P$  und  $Q$  liegt, so liegt  $R$  auch zwischen  $Q$  und  $P$  und  $P, Q, R$  sind verschiedene Punkte, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
2. Von je drei verschiedenen Punkten einer Geraden liegt stets genau einer zwischen den anderen beiden.
3. Axiom von Pasch:  
Liegen Punkte  $P, Q, R$  nicht auf einer gemeinsamen Geraden und schneidet eine Gerade  $g$  die Gerade  $PQ$  in einem Punkt  $Z$  zwischen  $P$  und  $Q$ , so liegt  $R$  auf  $g$  oder  $g$  verläuft durch einen Punkt  $S$ , der zwischen  $P$  und  $R$  oder zwischen  $Q$  und  $R$  liegt.

**Bewegungsaxiome**

1. Sind  $\alpha, \beta$  Bewegungen, so ist auch ihre Hintereinanderausführung  $\beta \circ \alpha$  eine Bewegung.
2. Die identische Abbildung der Ebene auf sich ist eine Bewegung.
3. Die Bewegungen erhalten die Zwischen-Beziehungen.
4. Sind  $F$  und  $F'$  Fahnen, so existiert genau eine Bewegung, die  $F$  in  $F'$  überführt.
5. Zu je zwei Punkten  $P, Q$  existiert eine diese Punkte vertauschende Bewegung; zu je zwei Halbgeraden mit gemeinsamen Anfangspunkten existiert eine diese Halbgeraden vertauschende Bewegung.

**Fahne**

Eine Fahne ist ein Tripel  $(P, h, H)$ , bestehend aus einem Punkt  $P$ , einer Halbgeraden  $h$  einer Geraden  $g$  mit dem Anfangspunkt  $P$  und einer Halbgeraden  $H$ , die von  $g$  begrenzt wird.

**Kongruenzaxiome für Strecken**

- 1) Zwei Punkte  $A$  und  $B$  mögen auf der Geraden  $g$  liegen, und der Punkt  $C$  liege auf der Geraden  $h$ . Dann gibt es einen Punkt  $D$  auf  $h$ , so dass  
 $AB = CD$ . ( $AB$  ist kongruent zu  $CD$ )
- 2) Wenn zwei Strecken zu einer dritten Strecke kongruent sind, dann sind sie auch untereinander kongruent.
- 3) Es seien  $AB$  und  $BC$  zwei Strecken auf der Geraden  $g$ , die außer  $B$  keine gemeinsamen Punkte besitzen. Ferner seien  $A'B'$  und  $B'C'$  zwei Strecken auf der Geraden  $g'$ , die außer  $B'$  keine gemeinsamen Punkte besitzen. Dann folgt aus  
 $AB = A'B'$  und  $BC = B'C'$  stets  $AC = A'C'$ .

**Kongruenzaxiome für Winkel**

- 1) Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d.h.  $\angle(b, c) = \angle(b, c)$ .
- 2) Es sei  $\angle(b, c)$  ein Winkel. Ferner sei  $b'$  ein Halbstrahl auf der Geraden  $g'$ . Dann gibt es einen Halbstrahl  $c'$  mit  
 $\angle(b, c) = \angle(b', c')$   
und alle inneren Punkte von  $\angle(b', c')$  liegen auf einer Seite der Geraden  $g'$ .
- 3) Gegeben seien zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$ . Dann folgt aus  
 $AB = A'B', AC = A'C'$  und  $\angle BAC = \angle B'A'C'$  stets  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ .

**Orientierung, Richtungssinn und Strahl**

In der Umgangssprache wird selten zwischen Richtung und Orientierung bzw. Richtungssinn unterschieden. Häufig wird dort Richtung gesagt, wobei (im mathematischen Sinne) Orientierung gemeint ist. So z.B., wenn gesagt wird, man gehe in dieser oder jener 'Richtung'.

**Definition:**

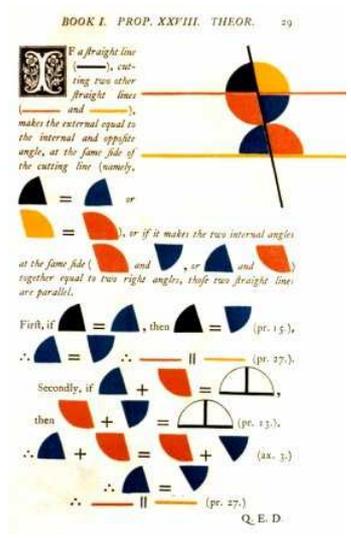
Sei  $g$  eine Gerade und  $P$  ein Punkt darauf. Jeder weitere Punkt  $Q$  der Gerade liegt von  $P$  aus gesehen in einer der beiden Halbgeraden. Durch jede Bewegung auf der Geraden  $g$ , die erst den Punkt  $P$  und dann den Punkt  $Q$  erreicht, wird eine Orientierung oder 'Richtungssinn' festgelegt.

**Pfeil und Strahl**

Wird im Sinne der Definition die Strecke  $PQ$  durchlaufen, so spricht man von einer orientierten Strecke oder besser Pfeil. Eine Halbgerade, die bei  $P$  beginnt und über  $Q$  hinaus geht, heißt Strahl.

**Absolute Geometrie**

Unter absoluter Geometrie versteht man alle aus dem Axiomensystem ohne (!) das Parallelenaxiom ableitbaren geometrische Beziehungen. Dazu



gehören aus dem 1. Buch der Euklidischen Elemente alle Sätze von 1 bis 28.

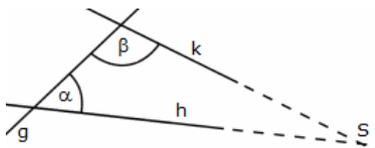
Für den Beweis des 29. Satzes ("Beim Schnitt einer geraden Linie mit zwei parallelen geraden Linien werden innere Wechselwinkel einander gleich, jeder äußere Winkel wird dem innen gegenüberliegenden gleich, und innen auf derselben Seite entstehende Winkel werden zusammen zwei Rechten gleich.") wird erstmals das Parallelenaxiom benutzt. Alle weiteren Sätze nutzen ebenso das 5. Postulat.

### Parallelenpostulat, Parallelenaxiom

Das Parallelenaxiom ist ein viel diskutierter Grundsatz der euklidischen Geometrie. Es besagt:

"In einer Ebene gibt es zu jeder Geraden  $g$  und jedem Punkt  $S$  (außerhalb von  $g$ ) genau eine Gerade, die zu  $g$  parallel ist und durch den Punkt  $S$  geht."

Diese Gerade heißt die Parallele zu  $g$  durch den Punkt  $S$ . Zwei Geraden heißen dabei parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und keinen gemeinsamen Punkt haben.

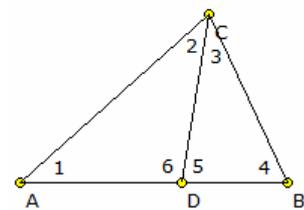


In den "Elementen" des Euklid findet sich dieser Satz als das fünfte Postulat:

Gefordert soll sein, dass "...wenn eine Gerade [ $g$ ] beim Schnitt mit zwei Geraden [ $h$  und  $k$ ] bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel [ $\alpha$  und  $\beta$ ] zusammen kleiner als zwei rechte Winkel werden, dann die zwei geraden Linien [ $h$  und  $k$ ] bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite [von  $g$ ], auf der die Winkel [ $\alpha$  und  $\beta$ ] liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind."

Es existieren mehrere Aussagen, die äquivalent zum Parallelenpostulat sind:

- 1) "Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte ( $180^\circ$ )"; nach Giovanni Gerolamo Saccheri
- 2) "Es gibt Rechtecke"
- 3) "Zu jedem Dreieck gibt es ein ähnliches Dreieck beliebiger Größe"; nach John Wallis
- 4) "Stufenwinkel an Parallelen sind kongruent"
- 5) "Durch einen Punkt im Inneren eines Winkels gibt es stets eine Gerade, die die beiden Schenkel schneidet"
- 6) "Durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte gibt es einen Kreis"
- 7) "Drei Punkte, die auf ein und derselben Seite einer Geraden liegen und zu dieser Geraden kongruente Abstände haben, liegen stets auf einer gemeinsamen Geraden"



### Innenwinkelsumme im Dreieck und Parallelenpostulat

Im Laufe der Jahrhunderte wurden unzählige vergebliche Versuche unternommen, das Parallelenpostulat zu beweisen. Oft wurde der "Beweis" ohne das Parallelenpostulat geführt, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck  $180^\circ$  ist. Daraus würde unmittelbar das Parallelenaxiom selbst folgen.

### "Beweis" der Innenwinkelsumme ohne Parallelenpostulat

Ein beliebiges Dreieck  $ABC$  wird durch eine Strecke in zwei Dreiecke geteilt.

Die Winkel werde wie in der Skizze bezeichnet.

Es sei  $x$  die Winkelsumme eines Dreiecks, die noch unbekannt ist. Dann gilt

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$$

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$$

Addition der zwei Gleichungen ergibt

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$$

Die Summe

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$$

ist aber die Innenwinkelsumme von  $ABC$ , d.h. ebenfalls gleich  $x$ . Die Winkel  $\angle 5$  und  $\angle 6$  sind

$$x + 180^\circ = 2x$$

Nebenwinkel und somit deren Summe gleich  $180^\circ$ . Daraus ergibt sich

und somit  $x = 180^\circ$ , d.h. die Innenwinkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ .

Dieser scheinbar geniale Nachweis, beweist nur dann, dass die Innenwinkelsumme eines beliebigen Dreiecks  $180^\circ$  ist, wenn man alle(!) gemachten Voraussetzungen angibt.

Stillschweigend wurde nämlich angenommen, dass die Innenwinkelsumme  $x$  in allen Dreiecken gleich groß ist. Dies gilt aber nur unter der Voraussetzung des Parallelenaxioms. In nichteuklidischen Geometrien besitzen unterschiedliche Dreiecke auch unterschiedliche Innenwinkelsummen.

### Geordnete Geometrie

Die geordnete Geometrie ist eine Geometrie mit wenigen Axiomen. Die affine Geometrie, die projektive Geometrie, die absolute Geometrie sowie die Euklidische und die Nichteuklidische Geometrie sind Spezialfälle der geordneten Geometrie.

Die geordnete Geometrie beschränkt sich auf das Konzept eines Punktes (z.B.  $A, B, C, \dots$ ) und das Konzept des Dazwischen (z.B.  $B$  ist zwischen  $A$  und  $C$ , geschrieben als  $[ABC]$ ). Das entspricht den ersten beiden Axiomen der Euklidischen Geometrie. Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen. Man kann eine Strecke kontinuierlich zu einem Strahl verlängern. Daraus entstehen Begriffe wie

das Segment  $AB$  (die Menge aller Punkte  $P$ , für die  $[APB]$  gilt),

die Strecke  $AB$  (das Segment  $AB$  einschließlich  $A$  und  $B$ ),

der Strahl  $AB$  (die Menge aller Punkte  $P$ , für die  $[PAB]$  gilt),

die Gerade AB (die Vereinigung des Strahls AB, der Strecke AB und des Strahls BA) und das Dreieck ABC (Wenn A, B und C nicht alle auf einer Geraden liegen).

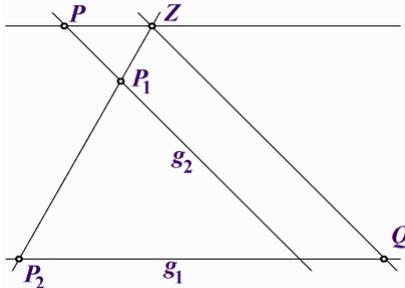
Auch Winkel und Parallele lassen sich definieren. Die geordnete Geometrie wird durch die folgenden Axiome exakt definiert:

1. Axiom: Es gibt mindestens zwei Punkte.
  2. Axiom: Wenn A und B unterschiedliche Punkte sind, dann gibt es wenigstens einen Punkt C, so dass  $[ABC]$ .
  3. Axiom: Wenn  $[ABC]$  dann A ungleich C.
  4. Axiom: Wenn  $[ABC]$  dann  $[CBA]$ , aber nicht  $[BCA]$ .
  5. Axiom: Wenn C und D unterschiedliche Punkte auf der Geraden AB sind, dann ist A auf der Geraden CD.
  6. Axiom: Wenn die Gerade AB existiert, dann gibt es einen Punkt C außerhalb der Geraden AB. Das folgende 7. Axiom stellt sicher, dass es zwischen zwei beliebigen Punkten immer noch mindestens einen weiteren Punkt gibt.
  7. Axiom: Wenn ABC ein Dreieck ist, und  $[BCD]$  und  $[CEA]$  gilt, dann existiert auf der Geraden DE ein Punkt F, für den  $[AFB]$  gilt.
- Weiterhin muss sichergestellt sein, dass die Geraden 'kontinuierlich' sind, d.h. dass keine Lücken auftreten.
8. Axiom: Die Punkte auf einer Geraden liegen dicht (im Sinne des Grenzwertsatzes).
- 2 Dimensionen: 9. Axiom: Alle Punkte liegen in einer Ebene.
- 3 Dimensionen: 9. Axiom: Wenn ABC ein Dreieck bilden, dann gibt es einen Punkt D außerhalb der durch das Dreieck aufgespannten Ebene.
10. Axiom: Alle Punkte liegen im 3-dimensionalen Raum.
- oder 4 Dimensionen: 10. Axiom: Wenn ABCD einen 3-dimensionalen Tetraeder bilden, dann gibt es einen Punkt E außerhalb des durch den Tetraeder aufgespannten Raumes.
11. Axiom: Alle Punkte liegen im 4-dimensionalen Raum.

## Projektive Geometrie

Die grundlegenden Ideen der Perspektivlehre wurden im 15.Jh. geboren. Implizit begründeten sie auch die projektive Geometrie. Sie stellt die Fortsetzung der euklidischen oder affinen Geometrie durch die Hinzunahme des unendlich fernen Punktes dar, der dadurch erfassbar und zum Objekt von Berechnungen wird. Ein erster richtiger Grundriss der projektiven Geometrie wurde von Jean Victor Poncelet (1788 -1867) in seinem Traite des proprietes projectives des figures geschaffen, dies im Anschluss an die insbesondere von Gaspard Monge vorangetriebene Entwicklung der Darstellenden Geometrie. August Möbius und Julius Plücker stellten die nötigen analytischen Hilfsmittel zusammen, während Jakob Steiner und Carl von Staudt ohne solche auszukommen suchten.

Bei einer Parallelprojektion zweier Geraden einer Ebene auf sich werden im allgemeinen alle Punkte

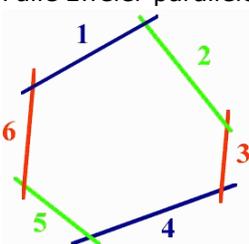


der einen eineindeutig auf jene der anderen abgebildet. Anders bei einer sogenannten Zentralprojektion (perspektivische Projektion, Perspektive). Die Zuordnung erfolgt von einem ausgezeichneten Punkt, dem Zentrum Z, aus: Der von Z ausgehende Projektionsstrahl durch den Punkt  $P_1$  auf der Geraden  $g_1$  schneidet die Gerade  $g_2$  in einem Punkt  $P_2$ , dem Bildpunkt von  $P_1$  unter dieser Zentralprojektion. Legt man den Projektionsstrahl jedoch parallel zu einer der Geraden  $g_1$  oder  $g_2$ , so findet sich für P auf  $g_1$  kein Bild, bzw. für Q auf  $g_2$  kein Urbild. Um dennoch eine stets eineindeutige Abbildung zu schaffen, fügt man zu den eigentlichen Punkten der Ebene die Richtungen aller Geraden der Ebene als

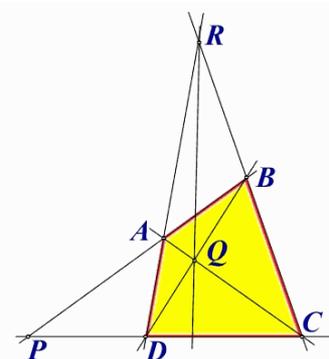
uneigentliche Punkte hinzu. Das Bild von P ist demnach die Richtung der Geraden  $g_2$ .

Zwei beliebige uneigentliche Punkte liegen jeweils auf der uneigentlichen Geraden, die die Gesamtheit aller uneigentlichen Punkte ist. Sie schneidet eine jede Gerade in ihrem zugehörigen uneigentlichen Punkt.

Der grosse Unterschied zur Geometrie der euklidischen Ebene ist der Umstand, dass sich zwei Geraden *immer* in einem Punkt schneiden, im Falle zweier parallelen Geraden in ihrer gemeinsamen Richtung. Insofern



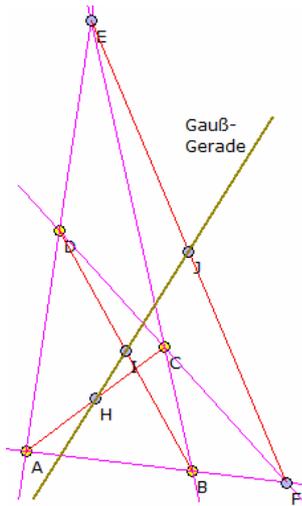
hat es in der projektiven Geometrie keinen Sinn, von parallelen Geraden zu sprechen. Die projektive Ebene besteht aus allen eigentlichen und uneigentlichen Punkten. Ihre linearen Teilräume sind die eigentlichen Geraden und die uneigentliche Gerade. Die projektive Geometrie der Ebene lässt sich durch ein vollständiges Axiomensystem beschreiben. Ein vollständigen Vierecks ist ein Gebilde,



bestehend aus vier Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind und den sechs Geraden durch diese Punkte:

Zwei Geraden in diesem Arrangement heißen gegenüberliegend, wenn sie durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Als Diagonalepunkte werden die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten bezeichnet. Ein Hexagon ist die linke Figur. Nummerieren wir die einzelnen Geraden in der angegebenen Weise, so heißen zwei Geraden gegenüberliegend, wenn ihre Nummern kongruent modulo 3 sind. Mit diesen Begriffen können wir die Axiome der projektiven Geometrie angeben:

- P1:** Je zwei Punkte liegen auf genau einer Geraden.
- P2:** Je zwei Geraden schneiden sich in wenigstens einem Punkt.
- P3:** Es gibt 4 Punkte, von denen je drei nicht kollinear sind.
- P4:** Die drei Diagonalepunkte eines vollständigen Vierecks sind kollinear.
- P5:** Liegen die sechs Ecken eines Hexagons alternierend (Nummerierung !) auf zwei Geraden, so sind die Schnittpunkte von Paaren gegenüberliegender Geraden kollinear.



### Gauß-Gerade

Sei ABCD ein konvexes Viereck, das kein Parallelogramm ist. Die vier Geraden AB, BC, CD, DA schneiden sich paarweise in 6 Punkten, den Eckpunkten A, B, C, D und den Schnittpunkten E von AD und BC sowie F von AB und DC. Dann nennt man ABCD ein vollständiges Viereck.

Die Diagonalen des vollständigen Vierecks sind AC, BD und EF.

Sind nun H, I und J die Mittelpunkte dieser Diagonalen, so liegen diese auf einer Geraden, der nach Gauß benannten Gauß-Gerade.

In anderen Veröffentlichungen wird diese Gerade auch Newton-Gerade eines Vierseits genannt.

siehe zum Beispiel <http://www.pandd.demon.nl/vierh/newtonlijn.htm>

### Projektive Ebene

Die Euklidische Ebene wird durch Hinzunahme aller uneigentlichen Punkte und der uneigentlichen Geraden zur projektiven Ebene erweitert.

In der projektiven Ebene existieren die Operationen Projizieren und Schneiden. Eine geometrische Figur wird projiziert von einem Projektionszentrum, indem

das Zentrum mit jedem Punkt des zu projizierenden Gebildes verbunden wird. Es entsteht der Schein des projizierten Gebildes. Der Schein wird mit einer Geraden geschnitten, wodurch ein Schnittgebilde entsteht.

Die Projektion eines eigentlichen Punktes A, von einem eigentlichen Zentrum Z, liefert als Schein einen Strahl, eine Halbgerade.

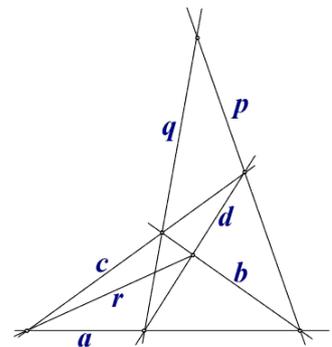
Der Schnitt des Scheins mit einer Geraden liefert genau einen Punkt. Dieser Punkt ist eigentlich, falls die Schnittgerade eigentlich und nicht parallel zum Schein verläuft; er ist uneigentlich, falls die Schnittgerade parallel zum Schein verläuft oder wenn die Schnittgerade uneigentlich ist.

Die Projektion einer eigentlichen Punktreihe liefert bei einem eigentlichen Zentrum ein Strahlenbündel. Der Schein einer eigentlichen Punktreihe ist beim uneigentlichen Zentrum eine Schar paralleler Geraden, die sich im Zentrum schneiden. Das Schnittgebilde ist wieder eine Punktreihe.

Die Projektion einer uneigentlichen Punktreihe mit eigentlichem Zentrum ergibt ein Geradenbündel, dessen Mittelpunkt im Zentrum liegt.

### Dualitätsprinzip

In der projektiven Geometrie herrscht das Dualitätsprinzip. Diesem Prinzip nach entsprechen sich die Begriffspaare "Punkt auf einer Geraden" und "Gerade in einem Geradenbündel", "verbinden" und "sich schneiden" sowie "liegt auf" und "geht durch". Sie lassen sich also vertauschen, sodass wahre Aussagen (d.h. konform zu (P1) - (P5)) in duale wahre Aussagen über die projektive Geometrie übergehen. So ist das zum vollständigen Viereck duale Objekt das vollständige Vierseit bestehend aus vier Geraden  $a, b, c, d$  von denen keine drei durch einen Punkt gehen, und aus den sechs Schnittpunkten dieser vier Geraden.



### Dualität

Entsprechend dem Dualitätsprinzip von Poncelet besteht Dualität zwischen

- 1) im Raum zwischen Punkt (Bündel) und Ebene (Feld)  
zwischen Gerade (Ebenenbündel) und Gerade (Punktreihe)
- 2) im Feld zwischen Punkt (Bündel) und Gerade (Punktreihe)
- 3) im Bündel zwischen Gerade (Ebenenbündel) und Ebene (Strahlenbündel)

Werden die dualen Begriffe "verbinden" und "schneiden" noch vertauscht, so ergeben sich aus geometrischen Sätzen sofort ihre dualen Gegenstücke. Nachfolgend ein paar einfache Beispiele:

1 Eine Gerade ist die Verbindung zweier Punkte eines Feldes.

1\* Ein Punkt ist der Schnittpunkt zweier Geraden des Feldes.

2 Eine Ebene ist die Verbindung zweier Geraden eines Bündels.

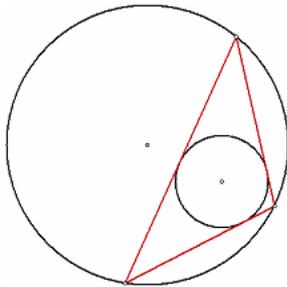
2\* Eine Gerade ist der Schnitt zweier Ebenen eines Bündels.

3 Eine Ebene ist die Verbindung dreier Punkte eines Raumes.

3\* Ein Punkt ist der Schnitt dreier Ebenen eines Raumes.

4 Eine Ebene ist die Verbindung eines Punktes und einer Geraden des Raums, die mit diesem Punkt nicht inzident ist.

4\* Ein Punkt ist der Schnitt einer Ebene und einer Geraden des Raumes, wobei die Gerade mit der Ebene nicht inzident ist.



### Schließungssatz von Poncelet

Der Schließungssatz von Poncelet ist ein Satz der projektiven Geometrie und besagt:

Kann man ein  $n$ -Eck ( $n > 2$ ) gleichzeitig einem Kegelschnitt  $C$  umschreiben und einem anderen Kegelschnitt  $D$  einschreiben, so gibt es noch unendlich viele weitere  $n$ -Ecke mit dieser Eigenschaft.

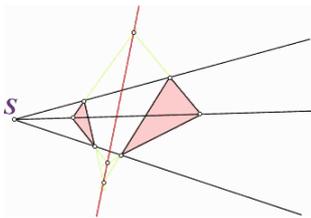
bzw.

$C, D$  seien Kegelschnitte.  $C$  liege innerhalb von  $D$ . Man startet dann folgende Kette von Konstruktionen:

von einem Punkt  $M$  auf  $D$  wird die Tangente zu  $C$  gezogen, die  $D$  in einem weiteren Punkt  $N$  schneidet, von diesem Punkt wird die zweite Tangente auf  $C$  gezogen usw.

Schließt sich die aus den Tangentenabschnitten gebildete Figur wieder im Punkt  $M$ , so besagt der Satz, dass es noch unendlich viele weitere solche Figuren zu den Kegelschnitten  $C, D$  gibt. Man kann mit einem beliebigen anderen Punkt von  $D$  starten und erhält wieder ein geschlossenes Vieleck.

Die so erhaltenen Vielecke heißen auch Poncelet-Polygone. Der Satz wurde 1822 erstmals von Jean-Victor Poncelet in "Traite de proprietes projectives des figures" bewiesen.



### Satz von Desargues

Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte zweier Dreiecke durch einen Punkt  $S$ , so liegen die Schnittpunkte entsprechender Geraden auf einer Geraden  $s$ .

Duale Formulierung: Liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden  $s$ , so gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt  $S$ .

Besonders zu vermerken ist die Tatsache, dass im Falle dieses Satzes die

duale Formulierung gerade seine Umkehrung ist!

Die Zentralprojektion ist eine Abbildung der projektiven Ebene. Man kann allgemeiner projektive Abbildungen als reguläre lineare Koordinatentransformationen definieren. Es lässt sich zeigen, dass jede projektive Abbildung durch endlich viele, hintereinander ausgeführte Zentralprojektionen entsteht.

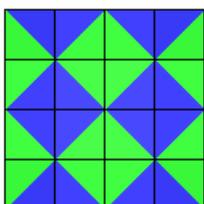
### Hauptsatz der projektiven Geometrie

Es gibt genau eine projektive Abbildung einer Ebene  $E$  auf eine Ebene  $E'$ , die vier vorgegebene Punkte von  $E$ , von denen keine drei kollinear sind, in ebensolche der Ebene  $E'$  überführt.

Felix Klein bezeichnete die projektive Geometrie in seinem 1872 vorgestellten Erlanger Programm als die Untersuchung der Eigenschaften und Begriffe, die unter projektiven Abbildungen invariant sind. Eine solche Invariante ist das sogenannte Doppelverhältnis. Sein Name leitet sich von der Gegenüberstellung des inneren und äusseren Teilungsverhältnisses einer Strecke  $AB$  durch zwei Punkte  $U$  und  $V$  ab. Dann ist das Doppelverhältnis  $DV(A, B : C, D)$  definiert als:  $\delta = AU/BU : AV/BV$

Die projektiven Abbildungen bilden eine Gruppe, die durch die Invarianz des Doppelverhältnisses charakterisiert werden kann. Die affinen Abbildungen sind jene, die die uneigentliche Gerade fest lassen. Sie bilden eine Untergruppe der Gruppe der projektiven Abbildungen.

### Parkette



Parkette und Pflaster sind oft zugleich Ornamente, besonders dann, wenn sie Symmetrien besitzen. In neuerer Zeit sind aber gerade solche Parkette in den Mittelpunkt des Interesses gerückt, die keine Symmetrien besitzen. Andererseits bilden die als Pflasterungen realisierbaren Muster nur einen kleinen Teil der Ornamentik.

Die Geschichte beginnt im 6. Jahrhundert v.Chr., als die Pythagoreer fragten, auf welche Weisen man die Ebene lückenlos mit regelmäßigen und paarweise kongruenten, deckungsgleichen Vielecken füllen kann. Da dann in jeder Pflasterecke die Summe aller Innenwinkel 360 Grad ist, gibt es nur die drei hier gezeigten Möglichkeiten, die sogenannten platonischen Parkette.

Sobald ein regelmäßiges Vieleck mehr als sechs Seiten hat, ist jeder seiner Innenwinkel größer als 120, aber kleiner als 180 Grad. Es könnten also in jeder Ecke nur zwei aneinanderstoßen, und es bliebe immer ein keilförmiger Raum zwischen ihnen frei. Beim Fünfeck ist aber jeder Innenwinkel 108 Grad, d.h. drei in einer Ecke sind zu wenig, vier sind zu viel. Lässt man archimedische Pflaster zu, so vergrößert sich die



Zahl der Möglichkeiten um 8. Bei ihnen ist zwar noch gefordert, dass alle Vielecke regelmäßig und die Ecken des Pflasters paarweise kongruent sind, aber die Vielecke müssen nicht alle untereinander gleich sein. In der Kathedrale Sainte-Cécile von Albi (Bauzeit 1282-1480) befinden sich gigantische Renaissance-Fresken; 97 m lang, 28 m hoch; von 1509, die aus zwei- und dreidimensionalen geometrischen Figuren zusammengesetzt sind; eine Parkettierung im Raum.

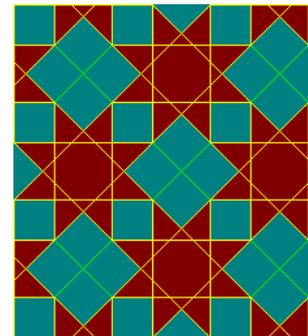
Abbildung: Fresken in der Kathedrale von Albi

Im Jahr 1619 veröffentlichte der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes Kepler in Linz sein Hauptwerk "Harmonices mundi". Es ist sein tiefstinnigstes Buch, das aus seiner unerschütterlichen Überzeugung hervorging, .

**" dass der Kosmos in unzerstörbarer Harmonie nach dem Plan eines gütigen Gottes geschaffen sei und dessen Wesen in ewigen Gesetzen enthülle, die in mathematischer Form erfasst werden könnten."**

In diesem Werk stellt er u.a. sein damaliges Weltbild des Sonnensystems dar, welches auf den Platonischen ("Kosmischen") Körpern beruhte. Weiterhin beschäftigt er sich in diesem Werk mit dem Problem der Parkettierung. Die Aufgabe besteht in der vollständigen, lückenlosen und überlappungsfreien Überdeckung der Ebene mit regelmäßigen Polygonen.

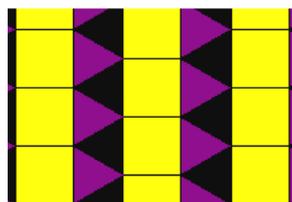
Neben drei Parketten, welche nur aus einer Art von regelmäßigen Polygonen besteht, nennt Kepler weitere, sogenannte archimedische Parkette aus zwei oder mehr Arten regulärer Vielecke gleicher Seitenlänge, welche die Ebene vollständig überdecken und gleichartige Eckumgebungen liefern. In der nachfolgenden Tabelle finden Sie die von Kepler in "Harmonices mundi" eingeführten Parkettbezeichnungen. Der Bezeichnung ist zu entnehmen, welche Polygone und in welcher Zahl an der Überdeckung der Ebene beteiligt sind.



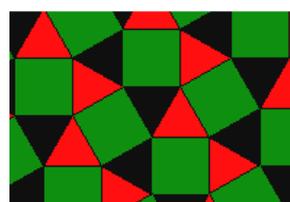
nach Johannes Kepler "Mysterium cosmographicum"



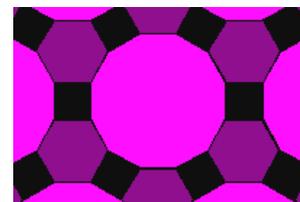
Parkett L :  $3^4 6^1$



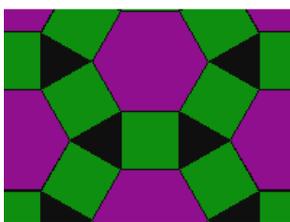
Parkett M :  $3^3 4^2 A$



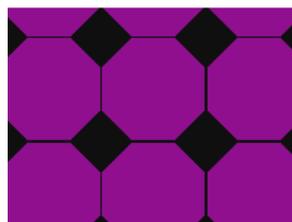
Parkett N :  $3^3 4^2 B$



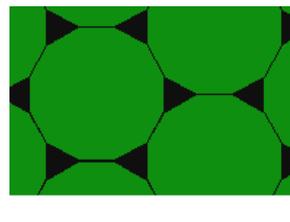
ParkettMm: $4^1 6^1 12^1$



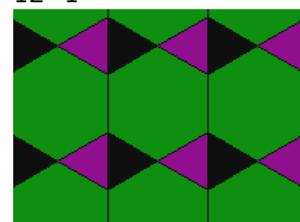
Parkett II :  $3^1 4^2 6^1$



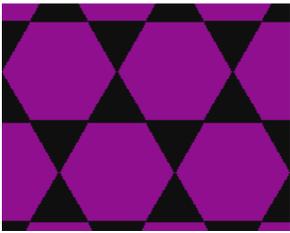
Parkett V :  $4^1 8^2$



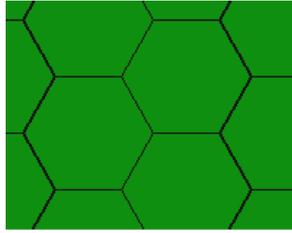
Parkett S :  $3^1 12^2$



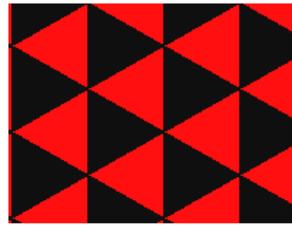
Parkett R :  $3^2 6^2 B$



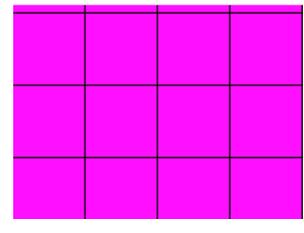
Parkett P :  $3^2 6^2 A$



Parkett F :  $6^3$



Parkett D :  $3^6$



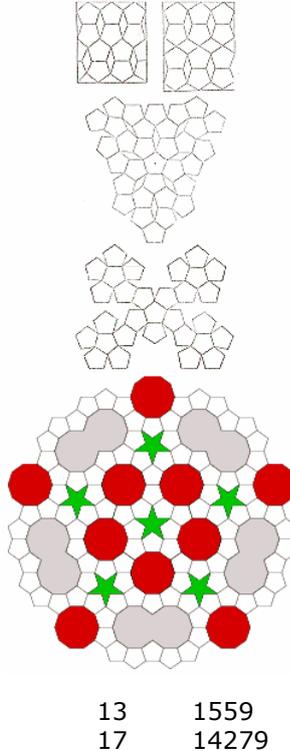
Parkett E :  $4^4$

### Historische Versuche von Pflasterungen mit Fünfecken

Schon Albrecht Dürer (Abbildung oben) und Johannes Kepler (Abbildung unten) haben sich Gedanken gemacht, wie man mit Fünfecken und möglichst wenigen Formen zusätzlich parkettieren kann.

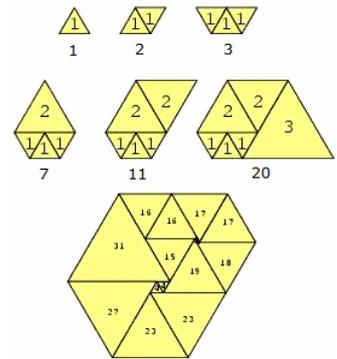
Dabei gelangten beide erstaunlich dicht an die Entdeckung von Parketten, die man heute als aperiodisch bezeichnet und die in der Struktur fester Körper als Quasikristalle eine zunehmend wichtige Rolle spielen.

Abbildung: Kepler-Parkett



### Dreieckspackung

Durch Stewart wurde 1999 das Problem gestellt, die größte mögliche, konvexe, überdeckte Fläche zu finden, wenn ausschließlich  $n$  gleichseitige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen (ggT der Seitenlängen = 1) benutzt werden.



n	max.Fläche
1	1
3	3
5	11
7	36
9	146
11	495
13	1559
14	2831
15	4782
16	8559

### Parkettierung mit rechtwinkligen Dreiecken

Es ist möglich die Ebene vollständig mit rechtwinkligen Dreiecken mit den Innenwinkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  zu überdecken, wie in der Abbildung zu sehen. Dreiecke mit aufeinanderfolgender Nummerierung unterscheiden sich dabei um den Faktor

$$\sigma = 1,085196156832515\dots$$

$\sigma$  ist die positive Wurzel der Gleichung

$$2\sigma^5 - \sigma^3 = \sqrt{3}$$

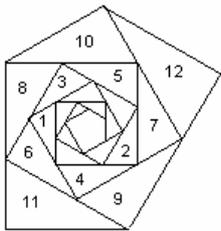
Quadrieren und umsortieren gibt

$$(2\sigma^5 - \sigma^3)^2 - 3 = (\sigma^4 + \sigma^2 + 1)(4\sigma^6 - 3\sigma^2 - 3)$$

Die positive Wurzel ergibt sich aus dem rechten Term zu

$$\sigma = \sqrt{(1/2 (3^{\sqrt{3}}(3 + 2\sqrt{2}) + 1/3^{\sqrt{3}}(3 + 2\sqrt{2})))} = \sqrt{(\cosh(1/3 \ln(3 + 2\sqrt{2})))}$$

Betrachte man die Hypotenusen der Dreiecke 1, 4, 7, 10, ... und 2, 5, 8, ... sowie 3, 6, 9, ... so bilden diese Spiralen, sogenannte  $n$ -fache polygonale Spiralen.



### Parkettierung mit Dreiecken

Man kann mit jedem Dreieck die Ebene ausfüllen.

(1) Gegeben ist ein beliebiges Dreieck.

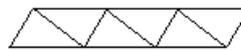
(2) Spiegelt das Dreieck an einem

Seitenmittelpunkt. Es entsteht ein Parallelogramm. Bilde aus Parallelogrammen Streifen.

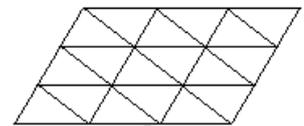
(3) Lege die Streifen untereinander und fülle so die Ebene aus.



1



2



3

### Parkettierung mit Vierecken

Auch beliebige Vierecke erlauben Parkettierungen.

Kennzeichne zum Nachweis die Innenwinkel eines beliebigen

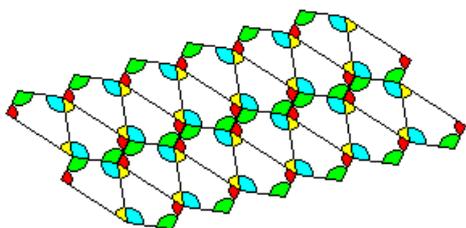
Vierecks. Spiegelt wie beim Dreieck ein Viereck an einer

Seitenmitte und stelle abwechselnd Viereck und Spiegelviereck

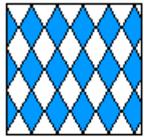
nebeneinander. Es entsteht ein Streifen. Die Winkelbetrachtung

macht klar, dass auch hier die Streifen nahtlos untereinander

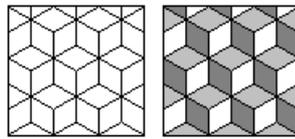
angeordnet werden können.



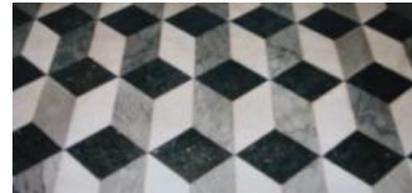
Die Methode funktioniert auch für konkave Vierecke. Nachfolgend einige Beispiele zur Parkettierung mit Dreiecken und Vierecken:



Es wird bayerisch

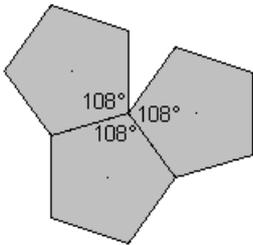


Man meint gestapelte Würfel zu sehen. Dieser Eindruck wird verstärkt, wenn man die Rauten unterschiedlich färbt.



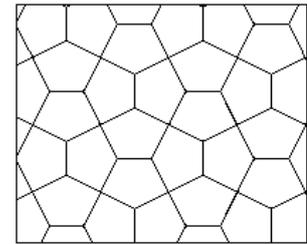
In der Basilica di Santa Prassede in Rom

### Parkettierung mit Fünfecken



Die Ebene kann nicht mit beliebigen Fünfecken bedeckt werden. Es genügt für den Beweis dieser Aussage ein Gegenbeispiel. Das kann das regelmäßige Fünfeck sein. Dessen Innenwinkel ist  $108^\circ$  groß und  $108$  ist kein Teiler von  $360$ .

Es gibt beliebig viele Fünfecke, die die Ebene ausfüllen. Beispiel: Cairo Tiling. Der Name erklärt sich aus Straßenpflasterungen, die es in Kairo geben soll.



### Parkettierung mit konvexen Fünfecken

Man kennt bis heute 14 Typen konvexer Fünfecke, die die Ebene parkettieren.

Typ 1 :  $D + E = 180^\circ$

Typ 2 :  $C + E = 180^\circ, a = d$

Typ 3 :  $A = C = D = 120^\circ, a = b, d = c + e$

Typ 4 :  $A = C = 90^\circ, a = b, c = d$

Typ 5 :  $C = 2A = 120^\circ, a = b, c = d$

Typ 6 :  $C + E = 180^\circ, A = 2C, a = b = e, c = d$

Typ 7 :  $2B + C = 360^\circ, 2D + A = 360^\circ, a = b = c = d$

Typ 8 :  $2A + B = 360^\circ, 2D + C = 360^\circ, a = b = c = d$

Typ 9 :  $2E + B = 360^\circ, 2D + C = 360^\circ, a = b = c = d$

Typ 10 :  $E = 90^\circ, A + D = 180^\circ, 2B - D = 180^\circ, 2C + D = 360^\circ, a = e = b + d$

Typ 11 :  $A = 90^\circ, C + E = 180^\circ, 2B + C = 360^\circ, d = e = 2a + c$

Typ 12 :  $A = 90^\circ, C + E = 180^\circ, 2B + C = 360^\circ, 2a = c + e = d$

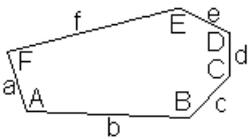
Typ 13 :  $A = C = 90^\circ, 2B = 2E = 360^\circ - D, c = d, 2c = e$

Typ 14 :  $D = 90^\circ, 2E + A = 360^\circ, C + A = 180^\circ, B + D + E = 360^\circ, 2e = 2c = a$

Die Angaben beziehen sich auf die gängigen Fünfeck-Bezeichnungen im englischsprachigen Raum. Die großen Buchstaben sind Innenwinkel, die kleinen Buchstaben Seiten mit folgender Verteilung: A, B, C, D und E sind die Innenwinkel bei den gleichnamigen Eckpunkten.  $AB = b, BC = c, CD = d, DE = e$  und  $EA = e$ .

### Parkettierung mit Sechsecken

Auch Sechsecke füllen im allgemeinen die Ebene nicht aus. Es gibt Sonderfälle, z.B. die regelmäßigen Sechsecke, die Honigwaben. Wenn man ein beliebiges Viereck an einer Seitenmitte spiegelt, entsteht ein



Sechseck. Oben wurde gezeigt, dass man mit diesen Figuren die Ebene ausfüllen kann.

**Konvexe Sechsecke:** K.Reinhardt gab 1918 drei Typen konvexer Sechsecke

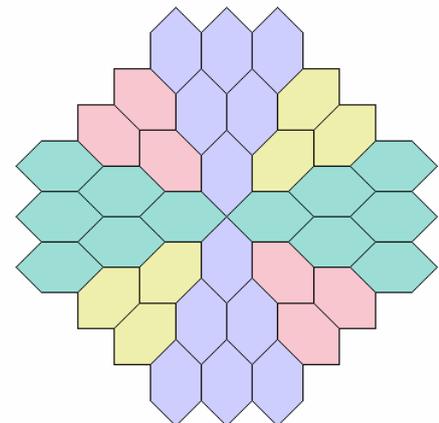
angegeben hat, die die Ebene ausfüllen.

Typ 1 :  $A+B+C = 360^\circ, a = d$

Typ 2 :  $A+B+D = 360^\circ, a = d, c = e$

Typ 3 :  $A = C = E = 120^\circ, a = b, c = d, e = f$

Eine Parkettierung ist auch mit symmetrischen Sechsecken möglich, bei denen zwei gegenüberliegende Winkel  $90^\circ$  sind. Abbildung: Parkettierung mit symmetrischen Sechsecken



### Honigwabenparkettierung

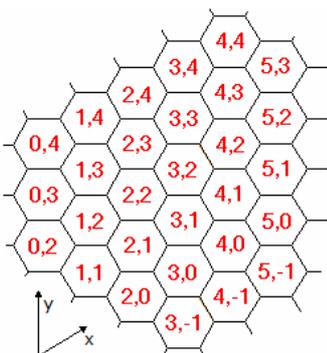
Die Ebene kann mit regelmäßigen Sechsecken lückenlos überdeckt werden. Dabei ergibt sich ein Honigwabenmuster.

Der Abstand zwischen den einzelnen Zellen kann, wie folgt, berechnet werden:

### Schrittzahl zwischen den Zellen

Gesucht ist die kleinste Zahl  $d$  von Schritten, die man benötigt um von einem Startfeld  $(x_0, y_0)$  zum Zielfeld  $(x_1, y_1)$  zu gelangen?

Antwort:



- 1) ist  $y_1 > y_0$  dann ist  $d = x_1 - x_0 + y_1 - y_0$  , sonst
- 2) ist  $x_0 + y_0 > x_1 + y_1$  dann  $d = y_0 - y_1$  sonst  $d = x_1 - x_0$

**Abstand zwischen den Mittelpunkten der Zellen**

Der Abstand  $d$  zwischen den Mittelpunkten der Zellen  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  ist

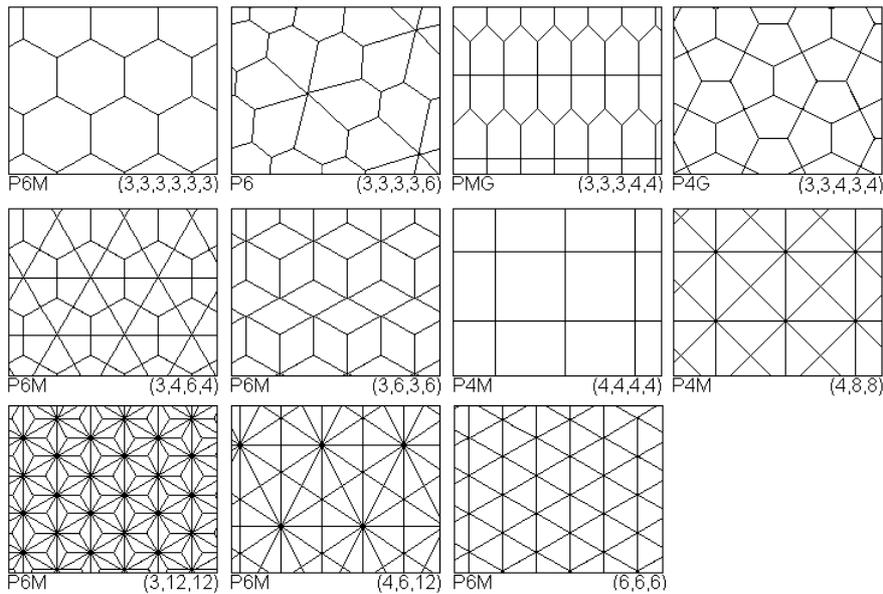
$$d = \sqrt{((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - (x_1 - x_0)(y_1 - y_0))}$$

Bewegt man sich einfach  $y$  Zellen in  $y$ -Richtung und  $x$  Zellen in  $x$ -Richtung, so wird

$$d = \sqrt{(x^2 + y^2 - xy)}$$

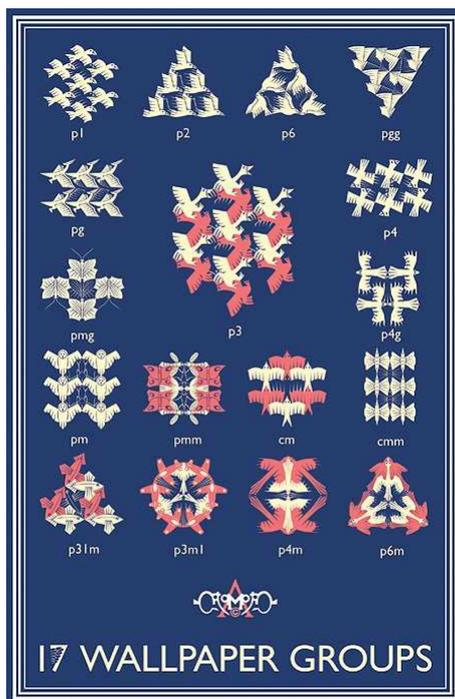
**Laves-Netze**

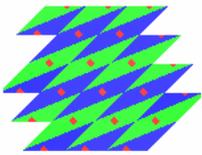
Topologisch gesehen sind einige Parkettierungen gleich. Umläuft man in der oben angegebenen Cairo Tiling ein Fünfeck; eine Masche; so treffen sich in den Eckpunkten; Knoten; nacheinander 3,3,4,3,4 Strecken; Kanten. Die Größen des Fünfecks spielen bei dieser Betrachtungsweise nicht die bestimmende Rolle. Es gibt 11 "Laves-Parkette" (F.Laves 1931), die man durch Zahlen kennzeichnet. Sie werden in der folgenden Zeichnung durch je ein Beispiel "mit "größtmöglicher Symmetrie" illustriert.



**17 Ornamentgruppen oder Ebene kristallographische Gruppe (englisch Wallpaper group)**

Am linken unteren Rand der Zeichnungen steht jeweils eine Zahl-Buchstaben-Kombination. Sie weist auf Spiegelung, Drehung, Verschiebung oder Gleitspiegelung hin. Man kann eine Parkettierung in der Ebene nämlich so abbilden, dass sie in sich selbst übergeht. Man erhält nach Bewegungen geordnet eine Klassifizierung in 17 "Ornamentgruppen".



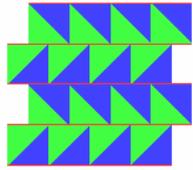


**Ornamentgruppe, Wallpaper-Gruppe**

In der Ebene existieren 17 verschiedene Ornamentgruppen (engl. wallpaper group). Durch die International Union of Crystallography wurde jeder Gruppe 1952 eine Symmetriebezeichnung gegeben.

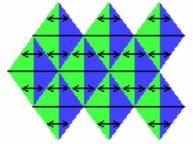
**Symmetrie P1**

Die einfachste Ornamentalsymmetrie entsteht durch zwei Translationen der Fliesen. Diese sind symmetrisch bezüglich der Bewegungen.



**Symmetrie P2**

(obere Abbildung) Bei dieser Symmetrie werden die Fliesen zum einen um 180° gedreht, zum anderen auch verschoben.



**Symmetrie pm**

Symmetrie entsteht hier mittels Translation und Spiegelung. Es liegt eine reflexive Symmetrie vor.

**Symmetrie pg**

(mittlere Abbildung) Grundlage der symmetrischen Anordnung ist hier eine Gleitspiegelung. Die Fliese wird gespiegelt und gleichzeitig um einen Betrag verschoben.

**Symmetrie cm**

(untere Abbildung) Hier wird erneut gespiegelt und verschoben. Die Verschiebung erfolgt aber vollständig.

**Symmetrie pmm**

(obere Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch zwei senkrechte Spiegelungen

**Symmetrie pmg**

Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine Spiegelung und eine 180° Drehung

**Symmetrie pgg**

Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine Gleitspiegelung und eine 180° Drehung

**Symmetrie cmm**

(zweite Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch zwei Spiegelungen und eine 180° Drehung

**Symmetrie p4**

(dritte Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine 180° Drehung und eine 90° Drehung

**Symmetrie p4m**

(untere Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine 180° Drehung, eine 90° Drehung und eine Spiegelung

**Symmetrie p4g**

(obere Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine Spiegelung und eine 90° Drehung

**Symmetrie p3**

Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine 120° Drehung

**Symmetrie p31m**

(zweite Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine 120° Drehung mit Spiegelung

**Symmetrie p3m1**

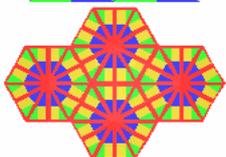
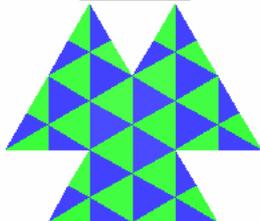
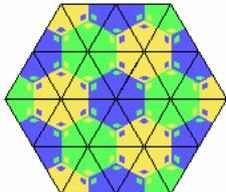
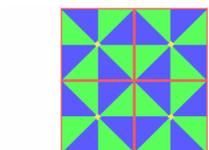
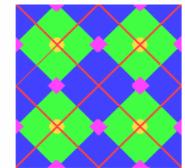
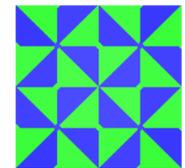
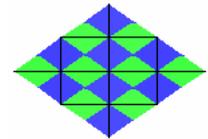
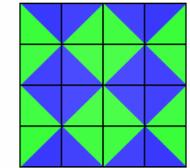
(dritte Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine 120° Drehung und eine Spiegelung

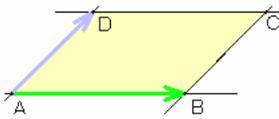
**Symmetrie p6**

Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch eine 60° Drehung

**Symmetrie p6m**

(untere Abbildung) Die Ornamentalsymmetrie entsteht durch Spiegelungen am 30°-60°-90°-Dreieck





## Symmetriegruppen, Ornamentgruppen

In der Ebene existieren 17 verschiedene Ornamentgruppen (engl. wallpaper group), Symmetriegruppengruppen eines ebenen periodischen Musters.

### Gruppe p1

(obere Abbildungen) Sie besitzt nur die Translationsgruppe. Die Elementarzelle ist gleich der translativen Zelle (Parallelogramm).

Abbildung: Escher-Grafik No.105, © The M.C.Escher Foundation, Baarn, Netherlands

### Gruppe p2

(untere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe vier Klassen zweizähliger Rotationen mit Drehzentren:

$A, B, C, D \mid M \mid M_a, M_c \mid M_b, M_d$   
Die Elementarzelle ist halb so groß wie die translative Zelle (Parallelogramm).

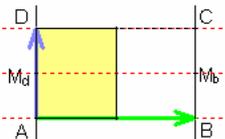
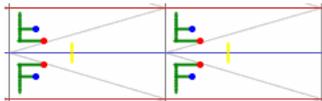


### Gruppe pm



(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe zwei Klassen zueinander paralleler Spiegelachsen:

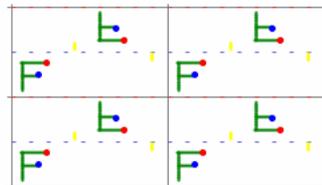
$AB, DC \mid M_d M_b$   
Die Elementarzelle ist halb so groß wie die translative Zelle (Rechteck).



### Gruppe pg

Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe zwei Klassen zueinander paralleler Gleitspiegelachsen:

$AB, CD \mid M_d M_b$   
Die Elementarzelle ist ein Viertel so groß wie die translative Zelle (Rechteck).



### Gruppe cm

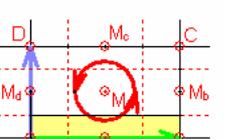
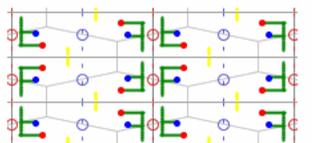
(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe abwechselnd eine Klasse paralleler Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen. Die Elementarzelle ist halb so groß wie die translative Zelle (Rhombus).

### Gruppe pmm

Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe vier Klassen zueinander senkrechter Spiegelachsen:

$AB, DC \mid AD, BC \mid M_d M_b \mid M_a M_c$   
In deren Schnittpunkten befinden sich vier Klassen zweizähliger Rotationen mit Drehzentren:

$A, B, C, D \mid M \mid M_a, M_c \mid M_b, M_d$   
Die Elementarzelle ist ein Viertel so groß wie die translative Zelle (Rechteck).

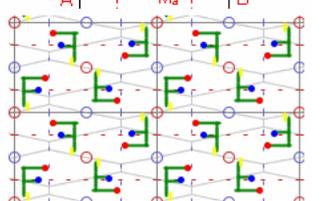


### Gruppe pmg

(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe jeweils eine Klasse von Spiegelachsen und zwei Klassen dazu senkrechter Gleitspiegelachsen:

$AD, BC \mid M_a M_c$   
Auf den Gleitspiegelachsen befinden sich jeweils zwei Klassen zweizähliger Rotationen mit den Drehzentren:

In der Mitte von  $[AM_d], [M_dD], [BM_b], [M_bC] \mid [M_aM], [MM_c]$ .  
Die Elementarzelle ist ein Viertel so groß wie die translative Zelle (Rechteck).



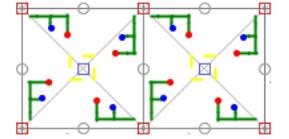
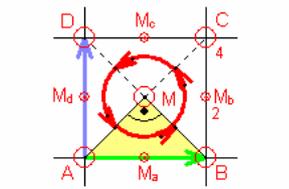
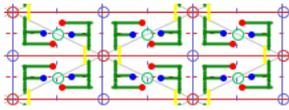
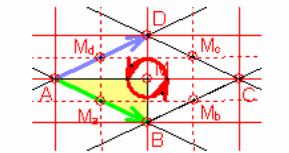
### Gruppe pgg

(untere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe zwei Klassen zueinander senkrechter Gleitspiegelachsen und zwei Klassen von zweizähligen Rotationen mit den Drehzentren:

$A, B, C, D, M \mid M_a, M_b, M_c, M_d$   
Die Elementarzelle ist ein Viertel so groß wie die translative Zelle (Rechteck).

### Gruppe cmm

(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe jeweils zwei Klassen von Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen:



mit den Drehzentren:

$M_a, M_b, M_c, M_d$

Außerdem besitzt sie 3 Klassen von Spiegelachsen:

$AB, BC, CD, AD \mid AC, BD \mid M_a M_c, M_b M_d$

Schließlich gibt es noch eine Klasse von Gleitspiegelachsen. Die Elementarzelle ist ein Achtel so groß wie die translative Zelle (Quadrat).

AC und Parallelen  $\mid$  BD und Parallelen.

In deren Schnittpunkten befinden sich jeweils drei Klassen von zweizähligen Rotationen mit den Drehzentren:

$A, B, C, D \mid M_a, M_b, M_c, M_d \mid M$

Die Elementarzelle ist ein Viertel so groß wie die translative Zelle (Rhombus).

### Gruppe p4

(untere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe zwei Klassen vierzähliger Rotationen mit den Drehzentren:

$A, B, C, D \mid M$

Dazwischen liegt eine Klasse zweizähliger Rotationen mit den Drehzentren:

$M_a, M_b, M_c, M_d$

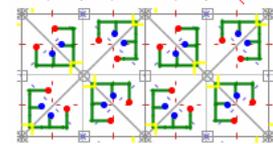
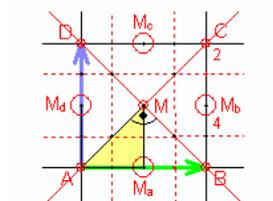
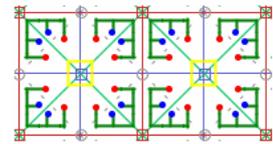
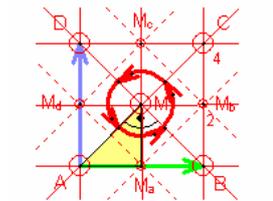
Die Elementarzelle ist ein Viertel so groß wie die translative Zelle (Quadrat).

### Gruppe p4m (p4mm)

(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe zwei Klassen vierzähliger Rotationen mit den Drehzentren:

$A, B, C, D \mid M$

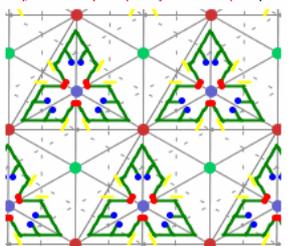
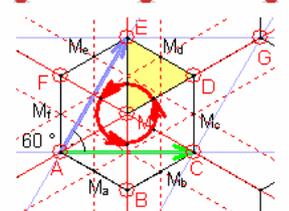
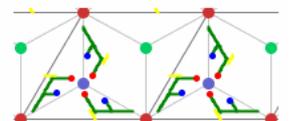
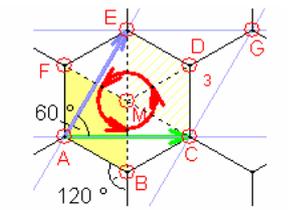
Dazwischen liegt eine Klasse zweizähliger Rotationen



### Gruppe p4g (p4gm)

(untere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe jeweils eine Klasse zweizähliger und vierzähliger Rotationen. Außerdem besitzt sie jeweils eine Klasse von Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen.

Die Elementarzelle ist ein Achtel so groß wie die translative Zelle (Quadrat).



### Gruppe p3

(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe drei Klassen dreizähliger Rotationen mit den Drehzentren:

$A, C, G, E \mid B, D, F \mid M$

Die Elementarzelle ist ein Drittel so groß wie die translative Zelle (Regelmäßiges Sechseck oder Rhombus mit 60°-Winkel).

### Gruppe p3m1

(untere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe drei Klassen dreizähliger Rotationen mit den Drehzentren:

$A, C, G, E \mid B, D, F \mid M$

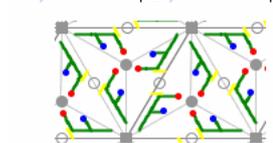
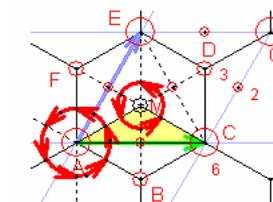
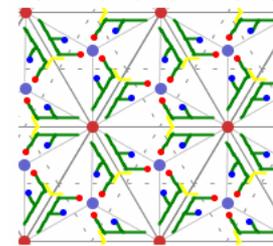
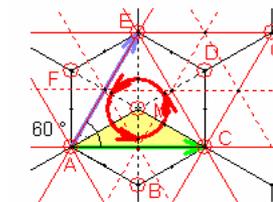
Außerdem gibt es jeweils eine Klasse von Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen.

### Gruppe p31m

(obere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe zwei Klassen dreizähliger Rotationen mit den Drehzentren:

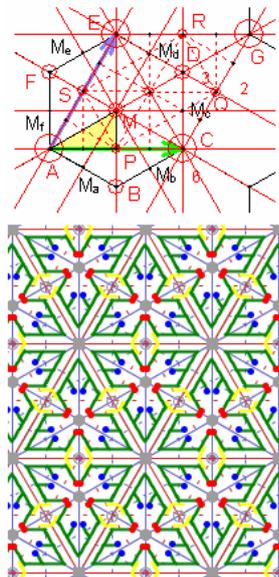
$A, C, G, E \mid B, D, F, M$

Außerdem besitzt sie jeweils eine Klasse von Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen. Die Elementarzelle ist ein Sechstel so groß wie die translative Zelle (Regelmäßiges Sechseck oder Rhombus mit 60°-Winkel).



## Gruppe p6

(untere Abbildungen) Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe jeweils eine Klasse zweizähliger, dreizähliger und sechszähliger Rotationen.  
Die Elementarzelle ist ein Sechstel so groß wie die translative Zelle (Regelmäßiges Sechseck oder Rhombus mit 60°-Winkel).



## Gruppe p6m (p6mm)

Sie besitzt zusätzlich zur Translationsgruppe jeweils eine Klasse zweizähliger, dreizähliger und sechszähliger Rotationen. Außerdem besitzt sie 2 Klassen von Spiegelachsen:

AC, CG, EG, AE, CE | BE, CF, AD

Es gibt auch noch 2 Klassen von Gleitspiegelachsen:

PQ, QR, RS, PS, QS, PR | Rest

Die Elementarzelle ist ein Zwölftel so groß wie die translative Zelle.

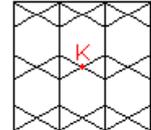
## Homogene Parkettierung

Homogene Parkettierungen haben drei Eigenschaften:

(I) Die Figuren sind regelmäßige Vielecke.

(II) Die Vielecke berühren sich an den Seiten und haben gemeinsame Eckpunkte. Diese heißen Knotenpunkte.

(III) An jedem Knotenpunkt stößt die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. In einem Beispiel treffen zwei gleichseitige Dreiecke und zwei regelmäßige Sechsecke in einem Knotenpunkt K aufeinander. Für die Winkel in K gilt:  $360^\circ = 60^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 120^\circ$ . Das ist ein Ansatz für das Aufspüren weiterer Vieleck-Parkettierungen. Dazu braucht man die Winkel in einem beliebigen regelmäßigen Vieleck.



Für das regelmäßige Achteck gilt: Mittelpunktswinkel:  $360^\circ/8=45^\circ$ ; Basiswinkel des Bestimmungsdreiecks des Achtecks:  $(180^\circ-45^\circ)/2=67,5^\circ$ ; Innenwinkel:  $2*67,5^\circ=135^\circ$

Für ein beliebiges regelmäßiges m-Eck gilt:

Mittelpunktswinkel:  $360^\circ/m$ ; Basiswinkel des Bestimmungsdreiecks des Vielecks:  $(180^\circ-360^\circ/m)/2$

Innenwinkel:  $180^\circ-360^\circ/m$



Man unterscheidet vier Fälle der homogenen Parkettierung, geordnet nach der Anzahl der aneinander stoßenden Vielecke.

**Fall 1:** Drei Vielecke stoßen an einem Knotenpunkt zusammen.

Es gilt  $360^\circ=(180^\circ-360^\circ/m)+(180^\circ-360^\circ/n)+(180^\circ-360^\circ/p)$  vereinfacht:  $1/m+1/n+1/p = 1/2$

Es gibt zehn Lösungen: 3 7 42, 3 8 24, 3 9 18, 3 10 15, 3 12 12, 4 5 20, 4 6 12, 4 8 8, 5 5 10, 6 6 6

**Fall 2:** Vier Vielecke stoßen an einem Knotenpunkt zusammen.

Es gilt  $360^\circ=(180^\circ-360^\circ/m)+(180^\circ-360^\circ/n)+(180^\circ-360^\circ/p)+(180^\circ-360^\circ/q)$  vereinfacht:

$1/m+1/n+1/p+1/q = 1$

Es gibt vier Lösungen: 3 3 4 12, 3 3 6 6, 3 4 4 6, 4 4 4 4.

**Fall 3:** Fünf Vielecke stoßen an einem Knotenpunkt zusammen.

Es gilt  $360^\circ=(180^\circ-360^\circ/m)+(180^\circ-360^\circ/n)+(180^\circ-360^\circ/p)+(180^\circ-360^\circ/q)+(180^\circ-360^\circ/r)$

vereinfacht:  $1/m+1/n+1/p+1/q+1/r = 3/2$

Es gibt zwei Lösungen: 3 3 3 3 6, 3 3 3 4 4.

**Fall 4:** Sechs Vielecke stoßen an einem Knotenpunkt zusammen.

Es gilt  $360^\circ=(180^\circ-360^\circ/m)+(180^\circ-360^\circ/n)+(180^\circ-360^\circ/p)+(180^\circ-360^\circ/q)+(180^\circ-360^\circ/r)+(180^\circ-360^\circ/s)$

vereinfacht:  $1/m+1/n+1/p+1/q+1/r+1/s = 2$

Es gibt eine Lösung: 3 3 3 3 3 3.

Es gibt insgesamt 17 Möglichkeiten, dass regelmäßige Vielecke an einer Ecke zusammenstoßen und dabei zusammen einen Winkel von  $360^\circ$  bilden.

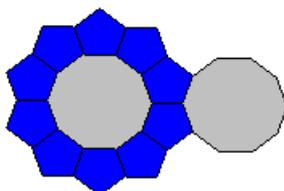
3-7-42, 3-8-24, 3-9-18, 3-10-15, 3-12-12, 4-5-20, 4-6-12, 4-8-8, 5-5-10, 6-6-6

3-3-4-12, 3-3-6-6, 3-4-4-6, 4-4-4-4

3-3-3-3-6, 3-3-3-4-4

3-3-3-3-3

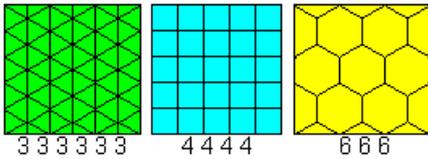
Sieben Lösungen müssen gestrichen werden, da es zwar gelingt, mit diesen Vielecken eine oder mehrere Ecken zu bilden, nicht aber die ganze Ebene auszulegen. Begründung: Die fünf Lösungen 3 7 42, 3 8 24, 3 9 18, 3 10 15, 4 5 20 und 5 5 10 enthalten immer mindestens ein Vieleck mit einer ungeraden und mit zwei anderen verschiedenen Seitenzahlen. Gibt man das Vieleck mit einer ungeraden Zahl vor, so müssen um diese Figur herum die beiden anderen Vielecke abwechselnd anliegen. Das ist aber nicht möglich wegen der ungeraden Anzahl von Plätzen.



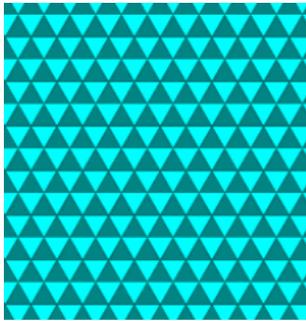
Die Lösung 5 5 10 soll auch anschaulich widerlegt werden. Ein Parkettierungsversuch führt zunächst zu einer Rosette mit einem Zehneck. Es müsste 5 10 10 folgen. Das ist nicht möglich.

## Reguläre Parkettierungen

Es bleiben zehn Lösungen übrig. Drei Lösungen (rot) sind auffällig. Man kommt mit einer Sorte regelmäßiger Vielecke aus.



Das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmäßige Sechseck füllen die Ebene. Diese Parkettierungen heißen regulär.



### Trigonale Parkettierung, Dreiecksparkettierung

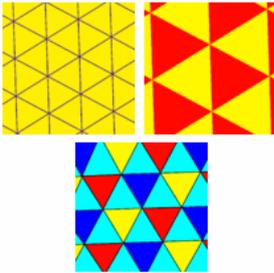
Die trigonale Parkettierung ist eine reguläre, homogene Parkettierung, die ausschließlich mit regelmäßigen Dreiecken gebildet wird (engl. triangular tiling).

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit D:  $3^6$  bezeichnet. Sie hat das Schläfli-Symbol  $t_0\{3,6\}$ .

Der Innenwinkel der Dreiecke beträgt  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt sechs Dreiecke aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden.

Die Parkettierung ist dual zur hexagonalen Parkettierung.

Es gibt neun verschiedene Möglichkeiten, die Dreiecke so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht (untere Abbildungen).



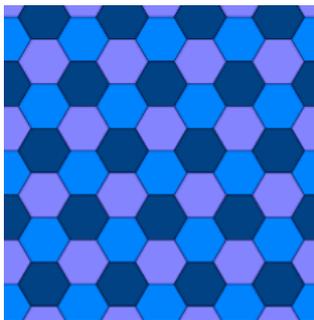
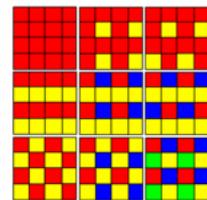
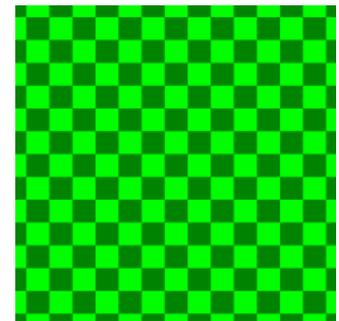
Die trigonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge regulärer Polyeder mit der Eckfigur ( $3^n$ ). Die obere Reihe der nachfolgenden Abbildung zeigt diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene. Ebenso kann die Parkettierung als Glied der Folge von Catalan-Polyedern mit der Flächenkonfiguration  $V(n.6.6)$  angesehen werden; untere Reihe der nachfolgenden Abbildung.

### Quadratische Parkettierung

Die quadratische Parkettierung ist eine reguläre, homogene Parkettierung, die ausschließlich mit Quadraten gebildet wird (engl. square tiling)

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit E:  $4^4$  bezeichnet. Sie hat das Schläfli-Symbol  $t_0\{4,4\}$ . Der Innenwinkel der Quadrate beträgt  $90^\circ$ , so dass an jedem Punkt vier Quadrate aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist selbstdual.

Es gibt 9 verschiedene Möglichkeiten, die Quadrate so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht (untere Abbildungen): 1111, 1112(i), 1112(ii), 1122, 1123(i), 1123(ii), 1212, 1213, 1234.



### Hexagonale Parkettierung

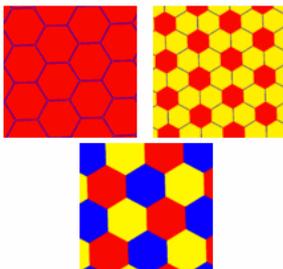
Die hexagonale Parkettierung ist eine reguläre, homogene Parkettierung, die ausschließlich mit regelmäßigen Sechsecken gebildet wird (engl. hexagonal tiling).

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit F:  $6^3$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $t_0\{6,3\}$  oder  $t_2\{3,6\}$ .

Der Innenwinkel der Sechsecke beträgt  $120^\circ$ , so dass an jedem Punkt drei Sechsecke aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden.

Diese Parkettierung tritt in der Natur bei der Anordnung von Bienenwaben auf. Sie ist dual zur Dreiecksparkettierung.

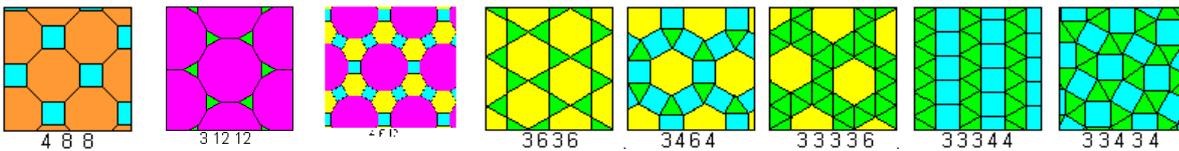
Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, die Sechsecke so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht (untere Abbildungen).



Die hexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge regulärer Polyeder mit der Eckfigur ( $n^3$ ). Die obere Reihe der nachfolgenden Abbildung zeigt diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene. Ebenso kann die Parkettierung als Glied der Folge von gleichmäßig abgestumpften Polyedern mit der Eckfigur ( $n.6.6$ ) angesehen werden; untere Reihe der nachfolgenden Abbildung.

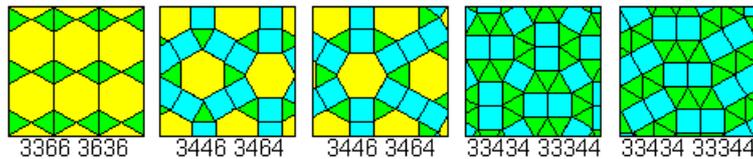
## Halbreguläre Parkettierungen

Zu den sieben verbleibenden Lösungen gibt es acht Parkettierungen.

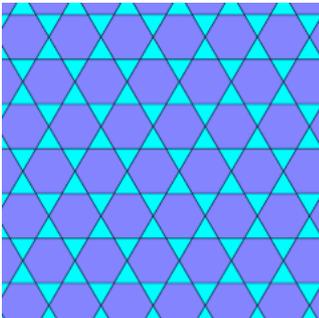


Es fällt auf, dass das Parkett 3366 hier mit 3636 gekennzeichnet wird. Damit wird ausgedrückt, dass sich an einem Knotenpunkt die Figuren "Dreieck, Sechseck, Dreieck, Sechseck" in dieser Reihenfolge treffen. In diesem Sinne gibt es für drei Dreiecke und zwei Vierecke die Parkettierungen 3 3 3 4 4 und 3 3 4 3 4. Diese acht Parkettierungen heißen auch halbreguläre Parkettierungen (Semiregular Tessellation). Verbindet man die Mittelpunkte der Vielecke, so ergeben sich interessante, neue, duale Parkettierungen.

Auch die folgenden Muster gehören noch zu den homogenen Parkettierungen.



Zwar treffen die benannten Vielecke an allen Knotenpunkten in der gleichen Anzahl aufeinander, aber nicht in gleicher Reihenfolge. Für 3 3 6 6 z.B. hat man die Reihenfolgen 3 6 3 6 und 3 3 6 6.



### Trihexagonale Parkettierung

Die trihexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Sechsecken und Dreiecken gebildet wird (engl. trihexagonal tiling).

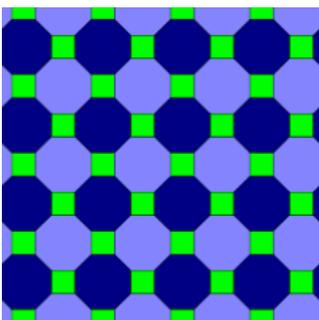
In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit  $P: 3^2 6^2 A$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $t_1\{6,3\}$ .

Der Innenwinkel der Sechsecke beträgt  $120^\circ$ , der Dreiecke  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt zwei Sechsecke und zwei Dreiecke aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist dual zur quasiregulären rhombischen Parkettierung.

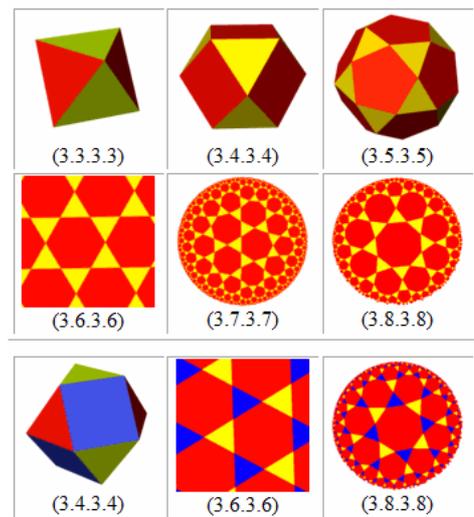
Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, die Sechsecke und Dreiecke so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.

Die trihexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge rektifizierter Polyeder mit der Eckfigur  $(3.n.3.n)$ . Die nachfolgende Abbildung zeigt diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene.

Abbildung: Trihexagonale Parkettierung



Bei der in der Abbildung gezeigten Parkettierung wechseln sich die an einer Ecke zusammentreffenden Sechsecke und Dreiecke alternierend ab. Eine weitere Möglichkeit besteht, dass beide Dreiecke und beide Sechsecke sich an einer Seite berühren. Diese Parkettierung wurde von Kepler mit  $R: 3^2 6^2 B$  bezeichnet.

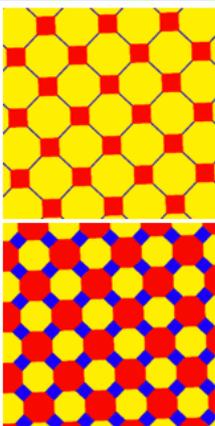


### Abgestumpfte quadratische Parkettierung

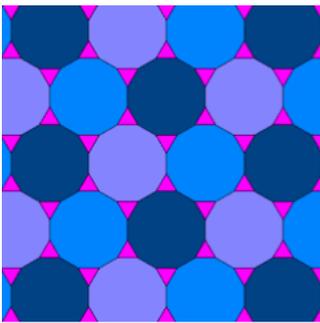
Die abgestumpfte quadratische Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Achtecken und Quadraten gebildet wird (engl. truncated square tiling); alternativer Name: oktagonale Parkettierung.

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit  $V: 4^1 8^2$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $t_{0,1}\{4,4\}$ .

Der Innenwinkel der Achtecke beträgt  $135^\circ$ , der Quadrate  $90^\circ$ , so dass an jedem Punkt zwei Achtecke und ein Quadrat aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist dual zur quasiregulären tetrakis-quadratischen Parkettierung.



Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, die Achtecke und Quadrate so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht (untere Abbildungen).



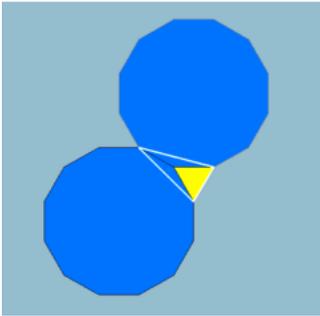
### Abgestumpfte hexagonale Parkettierung

Die abgestumpfte hexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Zwölfecken und Dreiecken gebildet wird (engl. truncated hexagonal tiling). Die untere Abbildung zeigt die Eckfigur der Parkettierung.

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit S:  $3^1 12^2$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $t_{0,1}\{6,3\}$ .

Der Innenwinkel der Zwölfecke beträgt  $150^\circ$ , der Dreiecke  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt zwei Zwölfecke und ein Dreieck aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist dual zur Triakis-Dreiecksparkettierung.

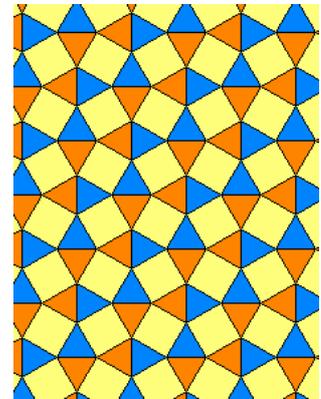
Es gibt nur eine Möglichkeit, die Zwölfecke und Dreiecke so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.



Die abgestumpfte hexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge abgestumpfter Polyeder mit der Eckfigur  $(3.2n.2n)$ .

### Abgeschrägte quadratische Parkettierung

Die abgeschrägte quadratische Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Dreiecken und Quadraten gebildet wird (engl. snub square tiling).

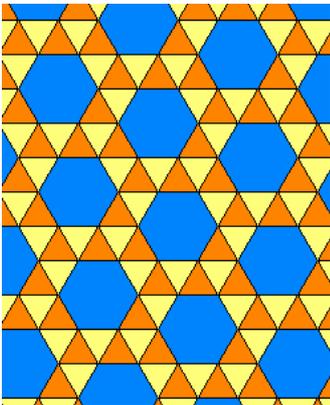


In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit N:  $3^3 4^2 B$  bezeichnet. Das Schläfli-Symbol ist  $s\{4,4\}$ .

Der Innenwinkel der Quadrate beträgt  $90^\circ$ , der Dreiecke  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt zwei Vierecke und drei Dreiecke aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden.

Die Parkettierung ist dual zur Kairo-Parkettierung (Cairo-pentagonalen Parkettierung, engl. Cairo pentagonal tiling).

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Quadrate und Dreiecke so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.



### Abgeschrägte hexagonale Parkettierung

Die abgeschrägte hexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Sechsecken und Dreiecken gebildet wird (engl. snub hexagonal tiling).

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit L:  $3^4 6^1$  bezeichnet. Sie hat das Schläfli-Symbol  $s\{6,3\}$ .

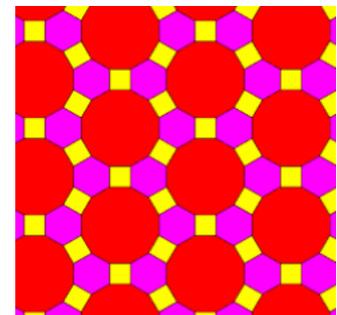
Der Innenwinkel der Sechsecke beträgt  $120^\circ$ , der Dreiecke  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt ein Sechseck und vier Dreiecke aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden.

Die Parkettierung ist dual zur blütenförmigen pentagonalen Parkettierung (engl. floret pentagonal tiling).

Sie ist die einzige halbreguläre Parkettierung ohne Spiegelsymmetrie.

Es gibt nur eine Möglichkeit, die Sechsecke und Dreiecke so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.

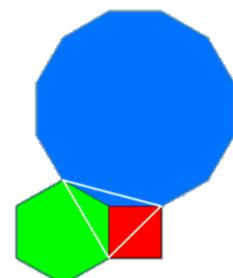
Die abgeschrägte hexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge abgeschrägter Polyeder mit der Eckfigur  $(3.3.3.3.n)$ .



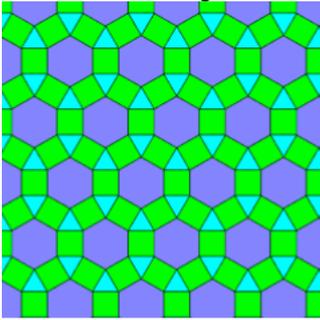
### Große rhombentrihexagonale Parkettierung

Die große rhombentrihexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Zwölfecken, Sechsecken und Quadraten gebildet wird (engl. great rhombitrihexagonal tiling). Die untere Abbildung zeigt die Eckfigur der Parkettierung.

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit Mm:  $4^1 6^1 12^1$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $t_{0,1,2}\{3,6\}$ .



Der Innenwinkel der Zwölfecke beträgt  $150^\circ$ , der Sechsecke  $120^\circ$ , der Quadrate  $90^\circ$ , so dass an jedem Punkt ein Zwölfeck, ein Sechseck und ein Quadrat aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist dual zur halbierten hexagonalen Parkettierung.

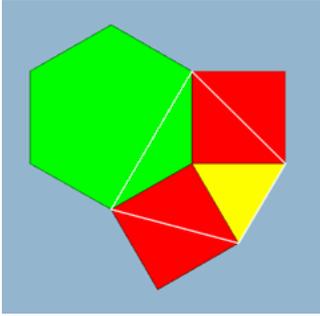


Es gibt nur eine Möglichkeit, die Parkettierung so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.

Die große rhombentrihexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge abgekanteter und abgestumpfter Polyeder (omnitruncated polyhedra) mit der Eckfigur (4.6.2n).

### Kleine rhombentrihexagonale Parkettierung

Die kleine rhombentrihexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Sechsecken, Dreiecken und Quadraten gebildet wird (engl. small rhombitrihexagonal tiling). Die untere Abbildung zeigt die Eckfigur der Parkettierung.



In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit  $I_1 : 3^1 4^2 6^1$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $t_{0,2}\{3,6\}$ .

Der Innenwinkel der Sechsecke beträgt  $120^\circ$ , der Quadrate  $90^\circ$ , der Dreiecke  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt ein Sechseck, zwei Quadrate und ein Dreieck aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist dual zur deltoidalen trihexagonalen Parkettierung.

Es gibt nur eine Möglichkeit, die Parkettierung so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.

Die kleine rhombentrihexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge abgekanteter Polyeder mit der Eckfigur

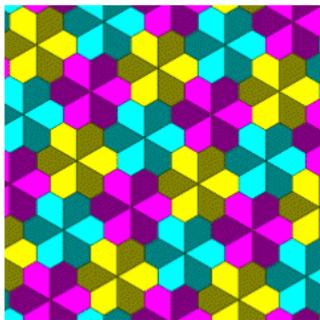
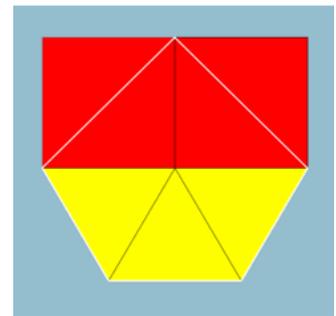
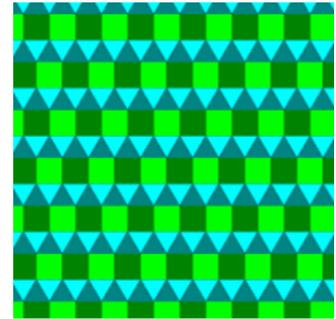
(3.4.n.4).

### Erweiterte Dreiecksparkettierung

Die erweiterte Dreiecksparkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit regelmäßigen Dreiecken und Quadraten gebildet wird (engl. elongated triangular tiling). Die untere Abbildung zeigt die Eckfigur der Parkettierung.

In "Mysterium cosmographicum" nach Johannes Kepler wird die Parkettierung mit  $M : 3^3 4^2 A$  bezeichnet; Schläfli-Symbol  $\{3,6\}:e$ . Der Innenwinkel der Quadrate beträgt  $90^\circ$ , der Dreiecke  $60^\circ$ , so dass an jedem Punkt zwei Quadrate und zwei Dreiecke aneinandertreffen und den Vollwinkel von  $360^\circ$  bilden. Die Parkettierung ist dual zur prismatischen pentagonalen Parkettierung.

Es gibt nur eine Möglichkeit, die Parkettierung so zu färben, dass ein regelmäßiges Muster entsteht.



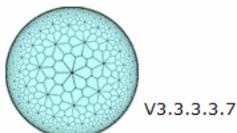
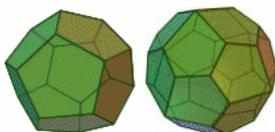
### Blütenförmige pentagonale Parkettierung

Die blütenförmige pentagonale Parkettierung ist eine halbreguläre, homogene Parkettierung, die mit unregelmäßigen Fünfecken gebildet wird (engl. floret pentagonal tiling).

Die Innenwinkel der Fünfecke sind  $60^\circ$  und  $120^\circ$ , so dass an einigen Punkten drei Fünfecke, an einigen Punkten 6 Fünfecke aneinanderstoßen.

Die Parkettierung ist dual zur abgestumpften hexagonalen Parkettierung.

Die blütenförmige pentagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge von Polyedern mit der Eckfigur (V3.3.3.3.n). Die unteren Abbildungen zeigen diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene.



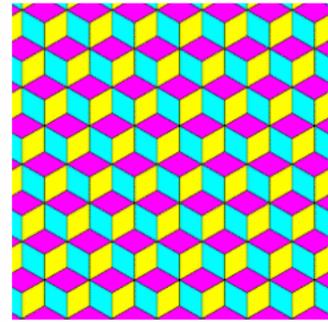
## Quasireguläre rhombische Parkettierung

Die quasireguläre rhombische Parkettierung ist eine homogene Parkettierung, die mit kongruenten Rhomben gebildet wird (engl. quasiregular rhombic tiling).

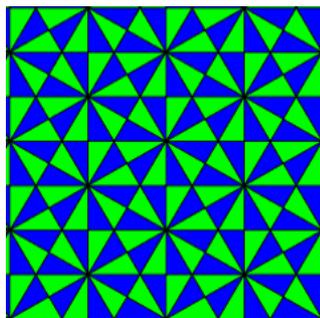
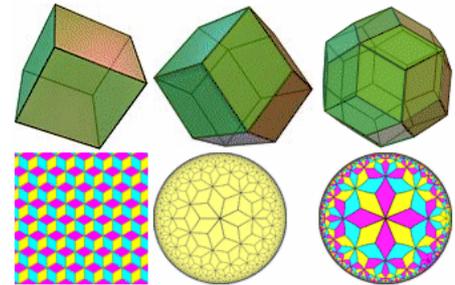
Die Innenwinkel der Rhomben sind  $60^\circ$  und  $120^\circ$ , so dass an einigen Punkten drei Rhomben, an einigen Punkten 6 Rhomben aneinanderstoßen.

Die Parkettierung ist dual zur trihexagonalen Parkettierung.

Die Parkettierung ist quasiregulär, da zwar genau ein Typ von Flächen auftritt, diese aber nicht regelmäßig sind.



Die quasireguläre rhombische Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge von mit Rhomben bedeckten Polyedern mit der Eckfigur (V3.n.3.n). Die unteren Abbildungen zeigen diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene.



## Halbierte hexagonale Parkettierung

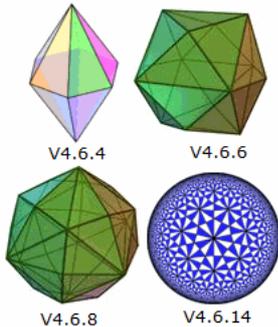
Die halbierte hexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre Parkettierung, die mit rechtwinkligen Dreiecken gebildet wird (engl. bisected hexagonal tiling).

Sie entsteht aus der hexagonalen Parkettierung in dem jedes Sechseck in 12 kongruente Dreiecke zerlegt wird.

Es gibt drei verschiedene Eckenarten: entweder treffen 4 oder 6 oder 12 Dreiecke aneinander, die Innenwinkel der Dreiecke sind folglich  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $30^\circ$ .

Die Parkettierung ist dual zur großen rhombentrihexagonalen Parkettierung.

Die halbierte hexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge von Polyedern mit der Eckfigur (V4.6.n). Die unteren Abbildungen zeigen diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene.



V4.6.4

V4.6.6

V4.6.8

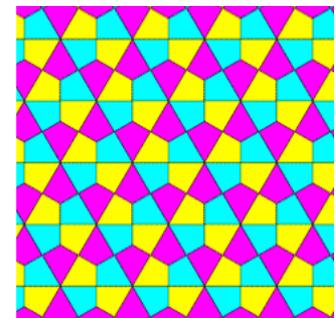
V4.6.14

## Deltoidale trihexagonale Parkettierung

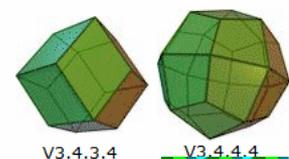
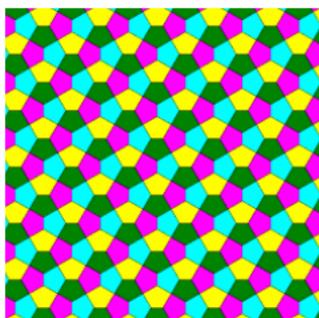
Die deltoidale trihexagonale Parkettierung ist eine halbreguläre Parkettierung, die mit kongruenten Drachenvierecken gebildet wird (engl. deltoidal trihexagonal tiling).

Sie entsteht durch die Überlagerung einer regelmäßigen Dreiecksparkettierung mit einer hexagonalen Parkettierung. Es gibt drei verschiedene Eckenarten: entweder treffen 3 oder 4 oder 6 Drachenvierecke aneinander, die Innenwinkel sind folglich  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $60^\circ$ .

Die Parkettierung ist dual zur kleinen rhombentrihexagonalen Parkettierung.



Die deltoidale trihexagonale Parkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge von Polyedern mit der Eckfigur (3.4.n.4). Die unteren Abbildungen zeigen diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene.



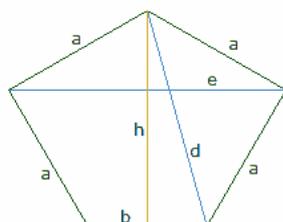
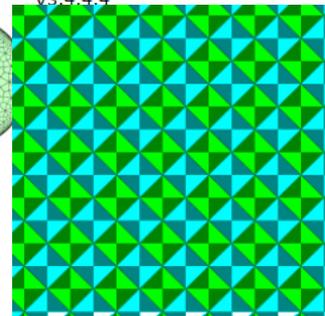
V3.4.3.4

V3.4.4.4

## Tetrakis-Quadratparkettierung

Die Tetrakis-Quadratparkettierung ist eine Parkettierung der euklidischen Ebene. Jedes Quadrat einer regulären Quadratparkettierung wird in 4 kongruente Dreiecke zerlegt. In den Eckpunkten treffen entweder 4 oder 8 Dreiecke zusammen.

Die Parkettierung ist zur abgestumpften quadratischen Parkettierung duale Ebenenzerlegung.



## Kairo-Parkettierung, Kairo-pentagonale Parkettierung

Die Kairo-Parkettierung ist eine halbreguläre Parkettierung der euklidischen Ebene, engl. Bezeichnung Cairo pentagonal tiling.

Der Name wurde in Anlehnung an Parkettierungen in den Straßen Kairos und in Bezug auf viele islamische Ornamente gegeben.

Die Parkettierung setzt sich aus unregelmäßigen, kongruenten Fünfecken

zusammen.

Sie ist die duale Parkettierung zur abgeschrägten quadratischen Parkettierung.

Das Fünfeck hat zwei rechte Winkel und drei Winkel von  $120^\circ$ . Vier Seiten  $a$  sind gleich lang, während die fünfte Seite  $b$  kürzer ist.

Für diese Seite  $b$ , die Höhe  $h$  und die zwei Diagonalen  $d$  und  $e$  ergibt sich bei gegebener Seite  $a$ :

Seite $b$	$b = a(\sqrt{3} - 1)$	Höhe $h$	$h = a/2(1 + \sqrt{3})$
Diagonale $d$	$d = \sqrt{2}a$	Diagonale $e$	$e = \sqrt{3}a$
Seite $a$	$a = b/2(\sqrt{3} + 1)$		

### Triakis-Dreiecksparkettierung

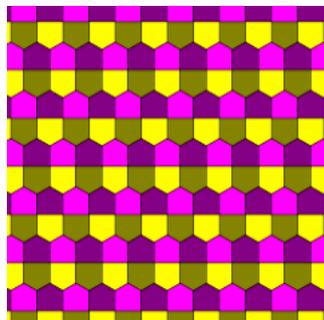
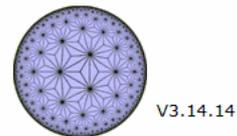
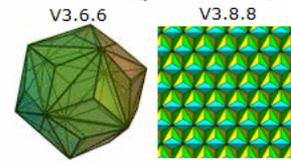
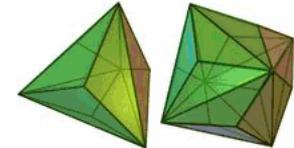
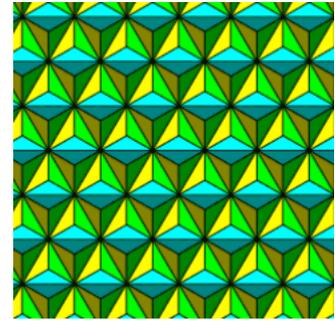
Die Triakis-Dreiecksparkettierung ist eine halbreguläre Parkettierung, die mit kongruenten, gleichschenkligen Dreiecken gebildet wird (engl. triakis triangular tiling).

Sie entsteht aus der Dreiecksparkettierung, in dem jedes Dreiecke in drei kongruente Dreiecke zerlegt wird.

Es gibt zwei verschiedene Eckenarten: entweder treffen 3 oder 12 Dreiecke aneinander, die Innenwinkel sind folglich  $120^\circ$  und  $30^\circ$ .

Die Parkettierung ist dual zur abgestumpften hexagonalen Parkettierung.

Die Triakis-Dreiecksparkettierung der Ebene ist topologisch gesehen Bestandteil der Folge von Polyedern mit der Eckfigur  $(3.2n.2n)$ . Die unteren Abbildungen zeigen diese Folge bis zur hyperbolischen Ebene.



### Prismatische pentagonale Parkettierung

Die prismatische pentagonale Parkettierung ist eine halbreguläre Parkettierung, die mit unregelmäßigen Fünfecken gebildet wird (engl. prismatic pentagonal tiling).

Sie ist dual zur erweiterten Dreiecksparkettierung.

### Inhomogene Parkettierungen

Inhomogene Parkettierungen haben zwei

Eigenschaften:

((I) Die Figuren sind regelmäßigen Vielecke.

((II) Die Vielecke berühren sich an den Seiten und haben gemeinsame Eckpunkte.

Man verzichtet auf die

Eigenschaft (III) von

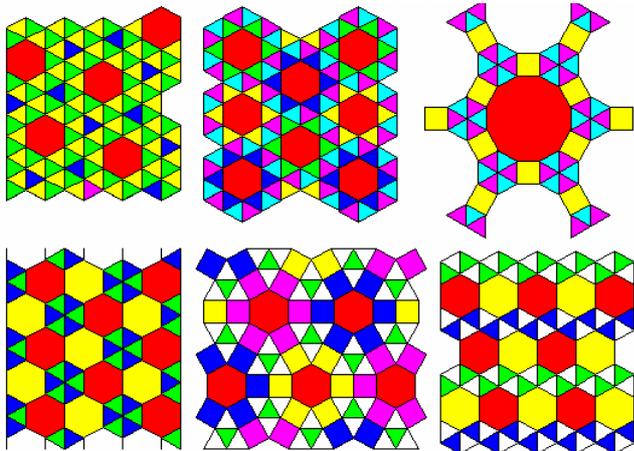
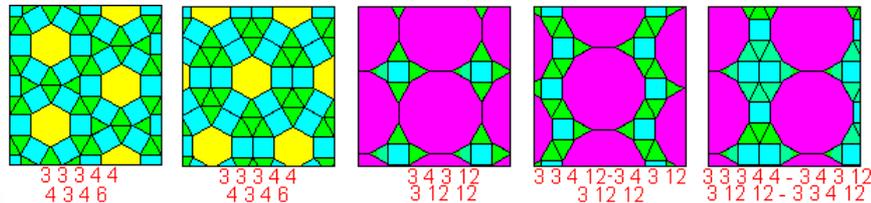
oben. Es gibt beliebig

viele inhomogene

Parkettierungen. Z.B.

können die drei Beispiele

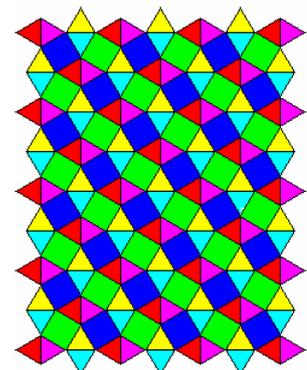
rechts ausgebaut werden.



### Uniform-2-Parkettierung

Als Uniform-2-Parkettierung wird eine Parkettierung bezeichnet, wenn nur regelmäßige  $N$ -Ecke genutzt werden und genau zwei verschiedene Eckpunkt-konfigurationen auftreten. Es existieren 20 verschiedene Uniform-2-Parkettierungen.

Die archimedischen, regulären Parkettierungen mit genau einer Eckkonfiguration werden Uniform-1-



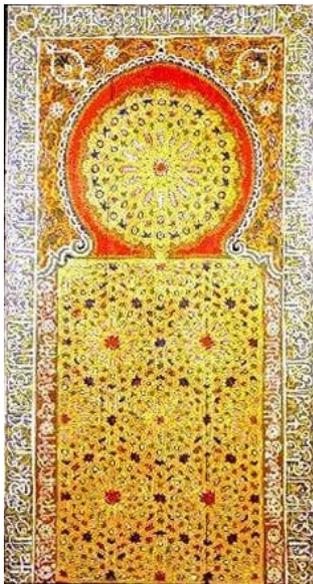
Parkettierungen genannt. Es gibt genau 11.

Uniform-2-Parkettierung, mit genau zwei verschiedenen Eckpunkt-konfigurationen, existieren 20.

Für Uniform- $k$ -Parkettierungen mit  $k > 2$  findet man

$k=3$	39 Parkettierungen
$k=4$	33 Parkettierungen
$k=5$	15 Parkettierungen

k=6 10 Parkettierungen  
 k=7 7 Parkettierungen  
 k=8 und höher keine Möglichkeit



### Islamische Ornamente

Dekorative Muster sind in allen Kulturen wichtig. Die schönsten Ornamente wurden aber von islamischen und indischen Künstlern geschaffen. Zu den berühmtesten zählen die Muster in der Alhambra, wo 16 der 17 möglichen Ornamentgruppen zu finden sind (nach Coxeter); es fehlt nur die Ornamentgruppe p3m1. siehe vorhergehende Seite  
 Links ist eine hölzerne Verkleidung aus Marokko (18.Jahrhundert) zu sehen.

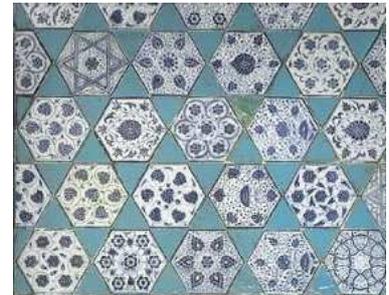
"Sobald man versucht, das Dekor islamischer Baukunst zu beschreiben, drängen sich unwillkürlich Begriffe aus dem Bereich des textilen Vokabulars auf.

So wird man bei manchen Mustern von Geweben, Netzen, Spitzen oder Maschen sprechen; von Raster oder Textur, um bestimmte Oberflächeneffekte zu charakterisieren; von Spitzenbesatz, um Ziselierungen in Stuck oder Stein zu veranschaulichen.

Ebenso wird man sagen, eine

Ornamentierung bedecke das Gebäude wie ein Wandbehang, bekleide es oder verberge seine Struktur wie ein Schleier."

Zitat aus "Das Ornament in der Baukunst des Islam", Hirmer Verlag



Die islamischen Künstler, die auch im Bereich der Mathematik bewandert waren, entwickelten kunstvolle Konzepte mit abwechslungsreichen Rastereffekten, zum Beispiel durch Aneinanderreihung von Hexagonen mit eingeschlossenen gleichschenkeligen Dreiecken.

Die obere Abbildung zeigt als Beispiel die Wandverkleidung im Gebetsraum der Kleinen Muradiye-Moschee in Edirne, Türkei, aus dem 15.Jahrhundert.

Die untere Abbildung ist ein Detail eines Fayencemosaiks der Freitagsmoschee von Isfahan aus dem 15.Jahrhundert.



### Markusdom in Venedig

Der Fußboden der Kirche San Marco in Venedig ist ein besonderes Beispiel für mittelalterliche Ornamentik. Er wurde nach dem Neubau der Kirche zwischen 1204 und 1450 durch die Arbeit mehrerer Künstler geschaffen.

Die verwendeten Materialien, zum Teil sogar Halbedelsteine, haben sich als so dauerhaft erwiesen, dass die Muster auch nach jahrhundertelangem Begehen meist noch unbeschädigt sind.

Lediglich einige restaurierte Stellen weisen schon wieder Beschädigungen auf.

Unter den mathematisch bemerkenswertesten Mustern befindet sich der nach einem Entwurf von Paolo Uccello (1397-1475) gearbeitete Sternpolyeder, ein kleines Sterndodekaeder.

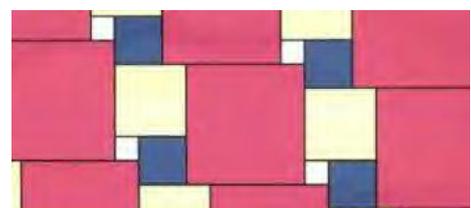
Das Motiv wurde an zwei Stellen verwendet: Unter dem linken

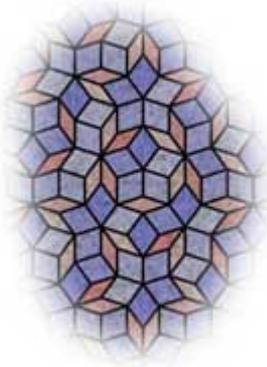
inneren Hauptportal und in der Mitte des Presbyteriums hinter den Stufen. Unter der Vielzahl der übrigen Ornamente fallen weitere auf, in denen zu einer erstaunlich frühen Zeit mit optischen Effekten einer vorgetäuschten und zum Teil zweifach interpretierbaren Räumlichkeit gespielt wurde.

### Aperiodische Parkettierung

Unregelmäßige Parkettierungen, d.h. aperiodische Parkettierungen, werden ebenso zu Gestaltung verschiedenster Flächen genutzt, insbesondere auch in der Architektur.

Mit Quadraten von 24 verschiedenen Größen lässt sich die Ebene sogar so pflastern, dass je 24 dieser Quadrate ein größeres Quadrat bilden (Willcocks 1948).





### Penrose-Parkett

Diese besonders attraktive und interessante Überdeckung der Ebene durch "Fliesen" wurde erst 1974 von dem englischen Physiker und Mathematiker Sir Roger Penrose entdeckt. Der Reiz dieses Parkett, das aus schmalen und großen Rauten aufgebaut ist, besteht in der Spannung aus vielen lokalen Symmetrien und seiner globalen Asymmetrie.

Das von Roger Penrose beschriebene asymmetrische Parkett besteht aus zwei Arten von Fliesen, zwei Rhomben.

Ein Rhombus besteht aus zwei aneinandergelagerten Dreiecken (untere Abbildung) mit den Seitenlängen 1 und  $\Phi$ , wobei  $\Phi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820$

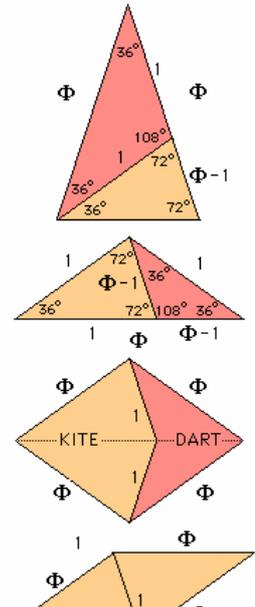
45868 34365 63811 77203 09179 80576... das Verhältnis des goldenen Schnitts darstellt. Die kleinen Innenwinkel des Rhombus sind  $36^\circ$ .

Der zweite Rhombus hat die gleichen Seitenlängen  $\Phi$ , allerdings sind die kleineren Innenwinkel gleich  $72^\circ$ .

Das Flächenverhältnis beider Rhomben ist  $1 : \Phi$ .

Beide Rhomben können durch Teile der zwei möglichen goldenen Dreiecke (obere 2 Abbildungen) zusammengesetzt werden.

Am Wadham College der Universität Oxford wurde ein Floor mit einem Penrose-Parkett gestaltet.



### Girih-Kachel

Girih-Kacheln nennt man einen Satz von fünf Fliesen, die zur Dekoration von Gebäuden in der islamischen Architektur verwendet werden. Erstmals 1200 verwendet, erfuhren die Girih-Kacheln in der Legetechnik ab dem Darb-i-Imam-Schrein aus Isfahan im Iran aus dem Jahr 1453 einen erkennbaren Fortschritt in Bezug auf die Umsetzung der Selbstähnlichkeit, wie sie auch bei Fraktalen zu finden ist.

Die Abbildung zeigt ein Girih-Muster in einem Durchgang des Sultansitzes in Bursa (Türkei), 1424 entstanden.

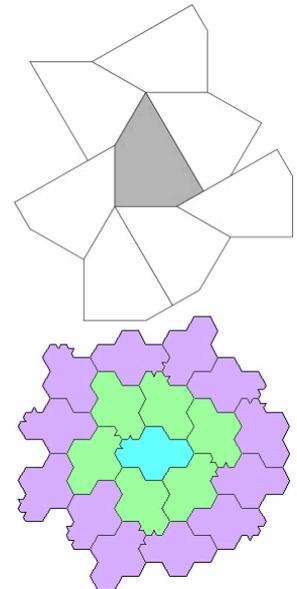
Die Bedeutung des Kachelsatzes stieg in jüngerer Zeit, nachdem der Peter Lu über die an Bauwerken erhaltenen Muster eine Verbindung zur Penrose-Parkettierung feststellte.

Die 5 Kachelformen sind:

- das Zehneck (regulär, Winkel jeweils  $144^\circ$ ),
- das Fünfeck (regulär, Winkel jeweils  $108^\circ$ ),
- das Sechseck (irregulär und konvex mit Winkeln von  $72^\circ$  und  $144^\circ$ ),
- der Rhombus (Winkel von jeweils  $72^\circ$  und  $108^\circ$ )

und eine Fliege (irreguläres Sechseck mit Winkeln von jeweils  $72^\circ$  und  $216^\circ$ )

Die Musterung der Elemente ist so gestaltet, dass diese beliebig aneinander reihbar sind und ihre Winkel zueinander harmonisieren. Beim Legen eines Musters ergeben sich in der Kombination dann Figuren wie Sterne, Vielecke und ähnliches. Durch Adaption der initialen Linienmuster sind auch Kreisbogen- und blumenähnliche Flächendesigns möglich.



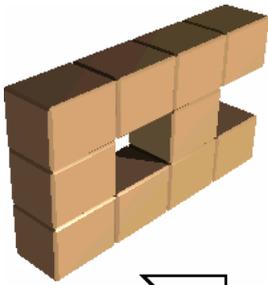
### Heesch-Problem

Durch Heinrich Heesch wurde das Problem aufgestellt, nach Vielecken zu suchen, die es gestatten, genau n Lagen (Koronas) lückenlos um das Ausgangsvieleck in der Ebene zu legen. Die Zahl n wird dabei Heesch-Nummer genannt.

Regelmäßige Polygone, wie das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmäßige Sechseck haben die Heesch-Nummer unendlich. Gesucht ist nun die größte endliche Heesch-Nummer n.

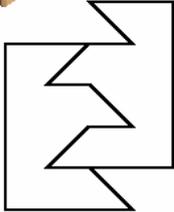
Durch Heesch wurde ein Fünfeck mit der Heesch-Nummer 1 angegeben (obere Abbildung). Die untere Abbildung zeigt ein Polygon mit der Heesch-Nummer 2.

Das erste Polygon mit Heesch-Nummer 3 wurde von Robert Ammann entdeckt. Ein Heesch-Nummer 4-Polygon wurde von W.R.Marshall gefunden, ein weiteres mit Heesch-Nummer 5 durch Casey Mann. Höhere Heesch-Nummern sind noch nicht bekannt.



### Reinhardt-Baustein

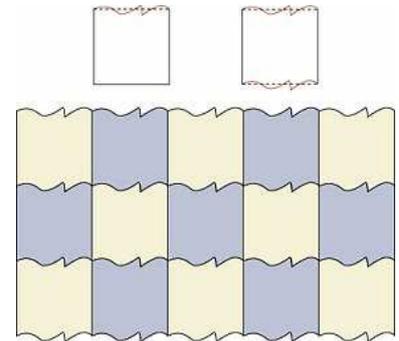
Auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris hatte David Hilbert in einer folgenreichen Liste von 23 ungelösten Problemen im 18. Problem die Frage gestellt, ob es einen Körper gibt, mit dessen Kopien man zwar den Raum lückenlos füllen kann, aber nur auf eine solche Weise, dass es nicht zu je zwei Pflastersteinen eine Symmetrieabbildung des ganzen räumlichen Pflasters gibt, die den einen Stein mit dem anderen zur Deckung bringt. 1928 gab der Greifswalder Mathematikprofessor Karl Reinhardt (1895-1941) das erste Beispiel eines solchen Bausteins an. Reinhardts Baustein (Abbildung oben) sieht einfach aus, löste aber ein tiefgreifendes mathematisches Problem.



Vier Jahre später fand Heinrich Heesch 1932 ein ebenes Polygon (untere Abbildung), das Hilberts Frage auch für die Ebene bejahte. Heesch konnte seine Entdeckungen zur Parkettierung der Ebene in die Produktion neuartiger Fliesen überführen, mit denen bis dahin unbekannte Muster möglich wurden.

### Escher-Parkettierung

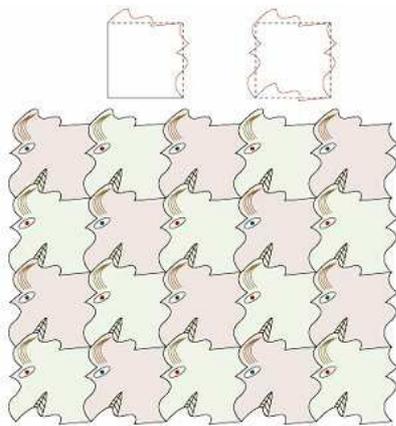
Der geniale, niederländische Grafiker Maurits Cornelis Escher schuf eine Vielzahl spektakulärer Parkettierungen, bei denen merkwürdig verformte geometrische Gebilde sich lückenlos aneinanderfügen. Zur Erstellung der Mosaike wurden regelmäßige Polygone verwendet. Einige Seiten dieser Polygone wurden verändert und die Änderung auf die anderen Seiten übertragen, durch Drehung, Spiegelung, Verschiebung usw. Einige dieser Grundstrukturen bilden Escher-Parkettierungen verschiedenen Typs.



#### Escher-Parkettierung Typ 1 - Verschiebung einer Seite am Quadrat

Eine Translation, d.h. Verschiebung, ist eine affine Bewegung in eine Richtung, ohne Drehen oder Spiegeln.

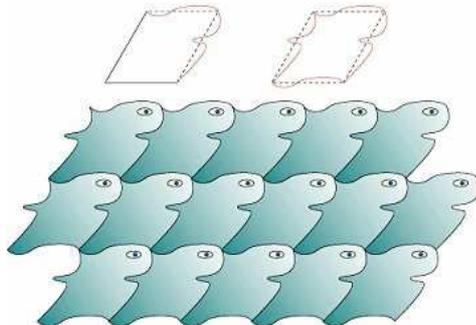
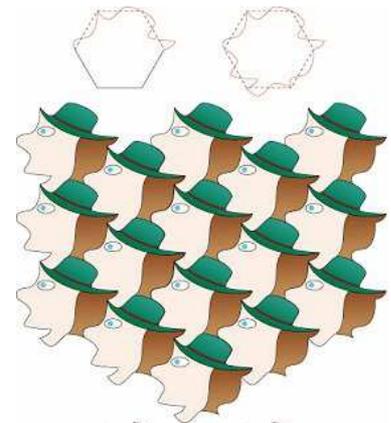
An einem Quadrat wird eine Seite verändert (Abbildung links oben). Diese Seite wird zu gegenüberliegenden Seite verschoben (Abbildung rechts oben). Die entstandene Figur kann jetzt zur lückenlosen Parkettierung genutzt werden.



#### Escher-Parkettierung Typ 2

##### Verschiebung von zwei Seiten eines Quadrates

An einem Quadrat werden zwei aneinandерliegende Seiten verändert, wobei dies unterschiedlich erfolgen kann. Beide geänderte Seiten werden nun zu den gegenüberliegenden verschoben. Zur Parkettierung werden die entsprechenden Seiten aneinandergefügt, wobei ähnliche Zeilen und Spalten entstehen.

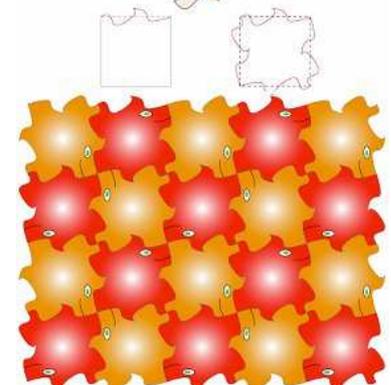


#### Escher-Parkettierung Typ 3

##### Verschiebung von Parallelogrammseiten

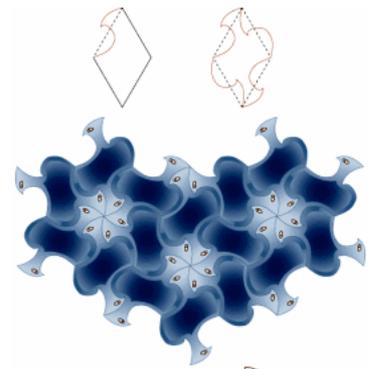
In gleicher Form können auch Parallelogrammseiten verändert werden. Das Interessante dabei ist, dass sich bei der Bildung des Parketts ein dynamischer Effekt in

Richtung der Neigung der Parallelogramme ergibt.



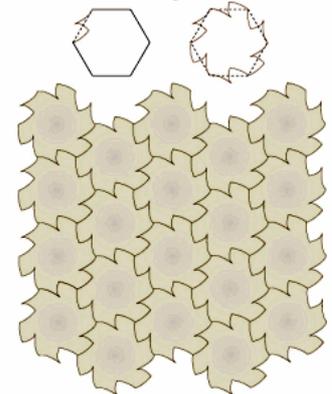
**Escher-Parkettierung Typ 4**  
**Verschiebung von drei Seiten**

Um drei Seiten zu verschieben, geht man von einem regelmäßigen Sechseck aus. Drei Seiten werden wieder beliebig verändert und zur gegenüberliegenden Seite verschoben.



**Escher-Parkettierung Typ 5**  
**Rotation einer Seite eines Quadrates**

Bei dieser Escher-Parkettierung wird eine Seite eines Quadrates beliebig verändert. Diese wird um  $90^\circ$  an einem Eckpunkt gedreht, so dass die zweite Seite verändert wird. Dreht man nochmals, um  $180^\circ$  und  $270^\circ$ , beeinflusst dies auch die zwei verbleibenden Seiten.

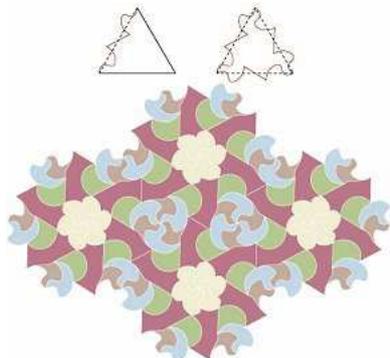


**Escher-Parkettierung Typ 6**  
**Rotation einer Seite eines Rhombus**

Bei dieser Escher-Parkettierung wird eine Seite des Rhombus beliebig verändert. Diese wird um  $60^\circ$  an einem Eckpunkt gedreht, so dass die zweite Seite verändert wird. Dreht man weitere zweimal, um  $180^\circ$  und  $240^\circ$ , beeinflusst dies auch die zwei verbleibenden Seiten.

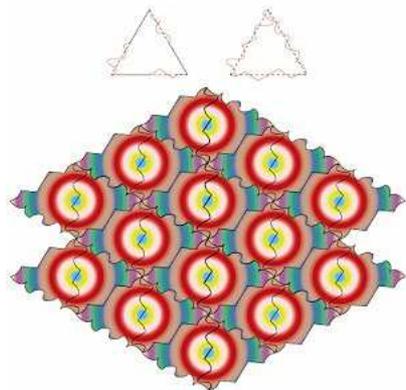
**Escher-Parkettierung Typ 7**  
**Rotation einer Seite eines Sechsecks**

Auch hier wird eine Seite des Sechsecks verändert. Durch fünf Drehungen um jeweils den Innenwinkel beeinflusst man auch die anderen Seiten.



**Escher-Parkettierung Typ 8**  
**Rotation um eine halbe Dreiecksseite**

Ausgehend von einem Dreieck wird eine halbe seiner Seiten verändert. Diese Hälfte wird um den Seitenmittelpunkt um  $180^\circ$  gedreht und die vollständig veränderte Seite um jeweils  $120^\circ$  gedreht und so auf die anderen Seiten übertragen.



**Escher-Parkettierung Typ 9**  
**Rotation jeder halben Dreiecksseite**

In diesem Parkettierungstyp werden die halben Seitenlängen jeder der drei Dreiecksseiten verändert und jeweils um  $180^\circ$  am Seitenmittelpunkt gedreht, bzw. an diesem gespiegelt.

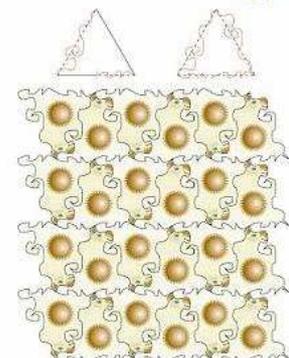


**Escher-Parkettierung Typ 10**

**Rotation um halbe Viereckseiten**

Die halbierten Seiten eines Vierecks werden verändert und um den Seitenmittelpunkt um  $180^\circ$  gedreht.

**Escher-Parkettierung Typ 11**  
**Rotation und Spiegelung an Dreiecksseiten**



Hier werden erneut Dreiecksseiten halbiert, verändert und wie in der Abbildung zu sehen um die Seitenmittelpunkte gedreht bzw. gespiegelt.



### Escher-Parkettierung Typ 12

#### Verschiedene Rotationen an zwei benachbarten Seiten

Bei dieser Escher-Parkettierung werden zwei gegenüberliegende Seiten eines Quadrates beliebig verändert. Dieses werden um  $90^\circ$  an einem Eckpunkt gedreht, so dass die dritte und vierte Seite verändert werden.

Diese Art der Parkettierung benutzt M.C.Escher in seiner Grafik 104 "Lizard".

### Escher-Parkettierung Typ 13

#### Verschiedene Rotationen an zwei benachbarten Seiten eines Dreiecks

Bei dieser Escher-Parkettierung wird von einem gleichseitigen Dreieck ausgegangen.

Eine Seite wird zur Hälfte modifiziert und die Veränderung um den Mittelpunkt der Dreiecksseite um  $180^\circ$  gedreht. Eine zweite Seite wird ebenfalls verändert. Deren Struktur wird durch eine Drehung um  $60^\circ$  auf die dritte Dreiecksseite übertragen.

Diese Art der Parkettierung nutzt M.C.Escher in seiner Grafik 99 "Flying Fish".



### Escher-Parkettierung Typ 14

#### Verschiedene Rotationen an zwei benachbarten Seiten eines Parallelogramms

Diese Escher-Parkettierung wird durch mehrere affine Abbildungen erzeugt. Ausgang ist ein Parallelogramm.

Zuerst wird eine Parallelogrammseite verändert und zur parallelen Seite verschoben. Eine dritte Seite wird zur Hälfte modifiziert und die Veränderung um den Mittelpunkt der Dreiecksseite um  $180^\circ$  gedreht. Analog wird mit der vierten, gegenüberliegenden Seite verfahren.

Diese Art der Parkettierung hat M.C.Escher in seiner Grafik 75 benutzt.



### Escher-Parkettierung Typ 15

#### Verschiedene Rotationen an zwei benachbarten Seiten eines Drachenvierecks

Diese Escher-Parkettierung wird durch zwei Gleitspiegelungen erzeugt. Ausgang ist ein Drachenviereck.

Zuerst wird eine Seite des Drachenvierecks verändert. Diese Veränderung wird durch eine Gleitspiegelung (siehe Animation) zur anliegenden, gleich langen Seite übertragen. Analog wird mit den zwei anderen Seiten verfahren.

Diese Art der Parkettierung hat M.C.Escher in seiner Grafik 66 benutzt.

### Klassifizierung der Escher-Parkettierungen

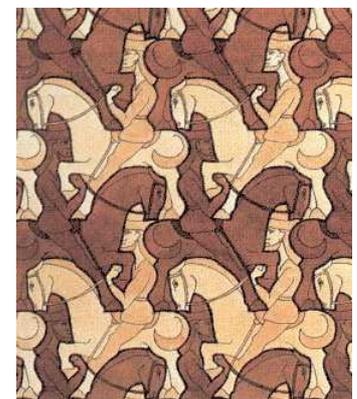
Zur Klassifizierung aller Escher-Parkettierungen betrachtet man die möglichen Abbildungen in der Ebene. Escher nutzt Translationen (T), Drehungen (C), Spiegelungen (S) und Gleitspiegelungen (G).

Auf Grund der Forderung nach Periodizität des gesamten Musters kommen als mögliche Drehungen nur solche um  $60^\circ$  (C6), um  $90^\circ$  (C4), um  $120^\circ$  (C3) und um  $180^\circ$ , also Punktspiegelungen (P), in Frage.

Ausgehend von den Laves-Netzen existieren dann genau 28 verschiedene Escher-Parkettierungen (in der Tabelle sind die inversen Abbildungen mit einem \* versehen), wenn man fordert, dass keine Kante eines Parkettsteins aus einem einzelnen Geradenstück besteht. Der Nachweis, dass genau 28 verschiedene Klassen solcher Escher-Parkette existieren, wurde 1963 von Heinrich Heesch und Otto Kienzle geführt.

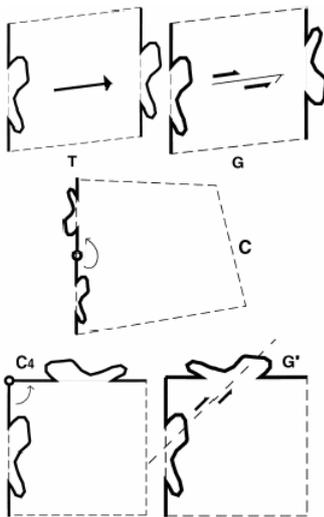
In der Abbildung ist ein Escher-Parkett der Klasse EP 17 zu sehen; die "Reiter" von 1946.

Die 28 möglichen Escher-Parkettierungen finden sich auch tatsächlich im Werk von M.C.Escher. Nachfolgend einige Beispiele:



## Escher-Parkett Beispiel

EP 1	"Vögel und Fische", 1938, Tusche, Buntstift, Wasserfarben "Pegasus", Escher-Grafik No.105
EP 2	"Adler", 1938, Bleistift, Wasserfarben
EP 3	"Vögel und Fische", 1941, Bleistift, Wasserfarben, Goldfarbe
EP 4	"Hundeartige Löwen", 1926/27, Bleistift, schwarze Tusche, Wasserfarben
EP 5	"Fische", 1937/38, Bleistift, Tusche, Wasserfarben
EP 6	"Löwen", 1926/27, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 7	"Chinese", 1936, Bleistift, Tusche, Wasserfarben
EP 11	"Windhunde", 1938, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 12	"Gewichtheber", 1936, Bleistift, Wasserfarben
EP 14	"Blüten und Blätter", 1941, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 16	"Libellen", 1941, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 17	"Fische", 1940, Tinte, Wasserfarben
EP 18	"Vögel", 1938, Bleistift, Wasserfarben
EP 19	"Vögel", 1937/38, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 20	"Krebse", 1941, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 21	"Eidechsen", 1940, Bleistift, Wasserfarben
EP 22	"Schlangen", 1941, Bleistift, Wasserfarben
EP 23	"Fische", 1941, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 24	"Schmetterlinge", 1937/38, Bleistift, Tinte, Wasserfarben
EP 25	"Eidechsen", 1941, Bleistift, Tusche, Gouache
EP 28	"Vögel", 1941, Tinte, Wasserfarben



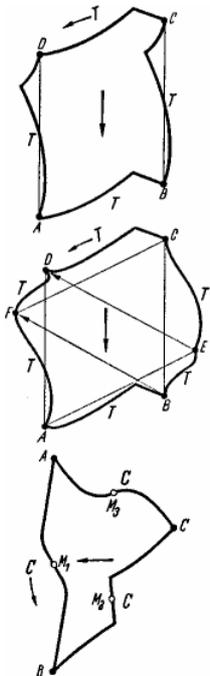
### Heesch-Klassifizierung

1963 gelang es Heinrich Heesch alle möglichen Escher-Parkettierungen zu klassifizieren. Grundlage der Veränderungen der Ausgangszellen sind Translationen (T), Drehungen (C) und Gleitspiegelungen (G).

Ausgehend von einem Vieleck wird bei einer Translation T eine Seite verändert und zur gegenüberliegenden verschoben. (Abbildung links oben)  
Bei einer Gleitspiegelung G wird die veränderte Seite verschoben und anschließend am Seitenmittelpunkt gespiegelt. (rechts oben)

Bei einer Drehung C (mittlere Abbildung) wird eine halbe Seite verändert und durch Drehung um den Seitenmittelpunkt auf die zweite Hälfte übertragen. Die entstehende Seitenlinie wird C-Linie genannt.  
Durch eine Drehung C um einen Eckpunkt des Vielecks wird die geänderte Seite auf die benachbarte übertragen.

Auf Grund der Forderung nach Periodizität des gesamten Musters kommen als mögliche Drehungen nur solche um  $60^\circ$  (C6), um  $90^\circ$  (C4, links unten), um  $120^\circ$  (C3) und um  $180^\circ$ , also Punktspiegelungen (P), in Frage.



Die spezielle Gleitspiegelung G' (rechts unten) überträgt eine Seite auf die Nachbarseite mit zusätzlicher Spiegelung am Mittelpunkt.

Mit diesen Grundoperationen konnte Heesch genau neun Heesch-Typen nachweisen. Durch Kombination mit den 17 Symmetriegruppen ergeben sich genau 28 verschiedene Escher-Konstruktionen.

### Heesch-Typ 1-3

#### Grundtyp 1: TTTT

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC, so dass ABCD die Ecken eines Parallelogramms sind (Translationsvektor AD).

Ziehe eine weitere willkürliche Linie von A nach D und verschiebe sie in die Lage BC (Translationsvektor AB).

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 4444

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 1

#### Grundtyp 2: TTTTTT

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC. Verschiebe die willkürliche Linie AF (F beliebig) nach EC (Translationsvektor AE).

Verschiebe eine dritte willkürliche Linie BE nach FD (Translationsvektor BF).

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 333333

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 1

**Grundtyp 3: CCC**

AB sei eine C-Linie. Führe von A eine weitere und von B eine dritte C-Linie zum, nicht auf der Geraden durch A und B liegenden, frei gewählten Punkt C.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 666

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 1

**Heesch-Typ 4-6**

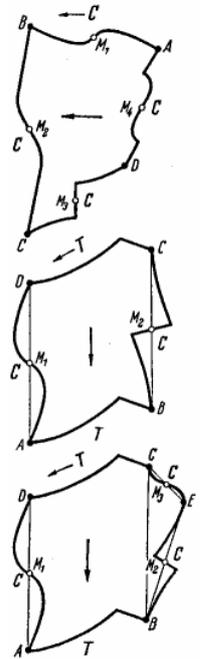
**Grundtyp 4: CCCC**

AB und CD seien zwei voneinander unabhängige C-Linien mit dem gemeinsamen Endpunkt B. Führe von C eine beliebige dritte von A eine vierte wiederum beliebige C-Linie zum frei gewählten Punkt D.

Anzahl der willkürlichen Linien: 4

Netz: 4444

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4



**Grundtyp 5: TCTC**

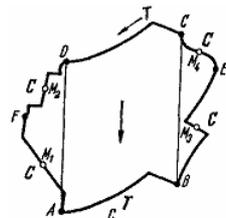
Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC, so dass ABCD die Ecken eines Parallelogramms sind.

Verbinde A und D durch eine C-Linie. Lege eine zweite, von der vorigen unabhängigen, C-Linie mit gleichem Endpunkt Abstand von B nach C.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 4444

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4



**Grundtyp 6: TCTCC**

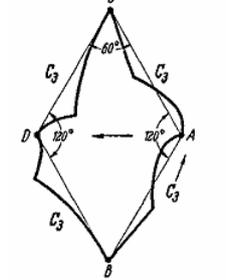
Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC, so dass ABCD die Ecken eines Parallelogramms sind.

Verbinde A mit D durch eine C-Linie. Ziehe eine weitere C-Linie von B zum beliebigen Punkt E. Schließe die Figur mit einer dritten, ebenfalls willkürlichen C-Linie CE.

Anzahl der willkürlichen Linien: 4

Netz: 44333

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4



**Heesch-Typ 7-9**

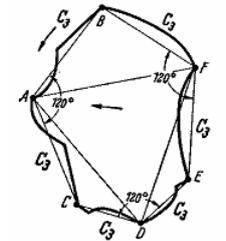
**Grundtyp 7: TCCTCC**

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC. Ziehe von A eine C-Linie zum beliebigen Punkt F; verbinde F durch eine zweite C-Linie mit D. Führe eine dritte C-Linie von B zu dem frei gewählten Punkt E und schließe die Figur durch eine vierte C-Linie.

Anzahl der willkürlichen Linien: 4

Netz: 333333

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 2



**Grundtyp 8: C3C3C3C3**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um 120° in die Lage AC. Der Spiegelpunkt von A bezüglich der Geraden durch B und C sei D. Verbinde D mit B durch eine willkürliche Linie und drehe sie in D um 120° in die Lage DC.

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 6363

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 3

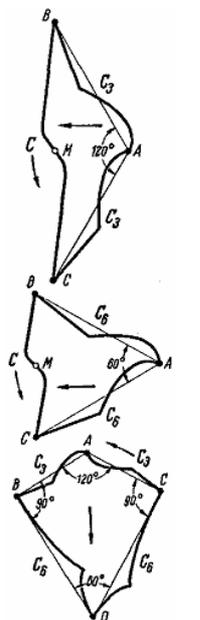
**Grundtyp 9: C3C3C3C3C3C3**

Drehe die willkürliche Linie AB um 120° in die Lage AC. Drehe eine zweite willkürliche Linie CD (D beliebig) in D um 120° in die Lage DE. F ist dritte Ecke des gleichseitigen Dreiecks ADF, Winkel EFB gleich 120°. Drehe eine dritte willkürliche Linie FE in F um 120° in die Lage FB.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 333333

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 3



**Heesch-Typ 10-12**

**Grundtyp 10: CC3C3**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um 120° in die Lage AC. Verbinde B mit dem

Mittelpunkt M der Strecke BC durch eine willkürliche Linie und drehe sie in M um 180° nach MC, wodurch BC eine C-Linie wird.

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 12,12,3

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 6

**Grundtyp 11: CC<sub>6</sub>C<sub>6</sub>**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um 60° in die Lage AC; verbinde C mit B durch eine C-Linie.

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 666

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 6

**Grundtyp 12: C<sub>3</sub>C<sub>3</sub>C<sub>6</sub>C<sub>6</sub>**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um 120° in die Lage AC. D bilde mit C und B ein gleichseitiges

Dreieck, das A nicht enthält. Ziehe die willkürliche Linie BD und drehe sie in D um 60° in die Lage DC.

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 6434

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 6

**Heesch-Typ 13-15**

**Grundtyp 13: CC<sub>3</sub>C<sub>3</sub>C<sub>6</sub>C<sub>6</sub>**

Drehe die willkürliche Linie AC in A um 120° in die Lage AB. Ziehe von B zum

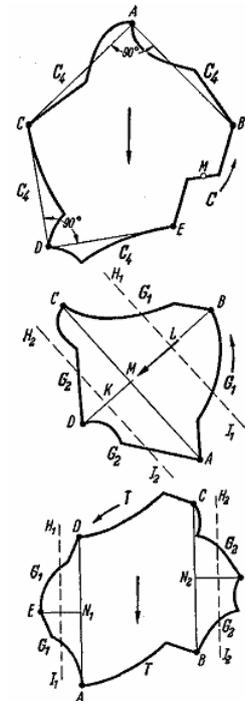
beliebigen Punkt D die willkürliche Linie BD und drehe sie in D im gleichen Drehsinn

um 60° in die Lage DE. Schließe die Figur durch eine C-Linie EC.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 63333

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 6



**Grundtyp 14: CC<sub>4</sub>C<sub>4</sub>**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um den Winkel 90° in die Lage AC und verbinde C mit B durch eine C-Linie.

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 884

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

**Grundtyp 15: C<sub>4</sub>C<sub>4</sub>C<sub>4</sub>C<sub>4</sub>**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um 90° in die Lage AC. D ist

der vierte Punkt des Quadrates ABCD. Wähle eine zweite

willkürliche Linie CD und drehe sie in D um 90° in die Lage DB.

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 4444

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

**Heesch-Typ 16-18**

**Grundtyp 16: CC<sub>4</sub>C<sub>4</sub>C<sub>4</sub>C<sub>4</sub>**

Drehe die willkürliche Linie AB in A um 90° in die Lage AC.

Ziehe eine weitere willkürliche Linie von C zum beliebigen

Punkt D und drehe sie um 90° in die Lage DE. Schließe die

Figur durch eine C-Linie EC.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 43433

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

**Grundtyp 17: G<sub>1</sub>G<sub>1</sub>G<sub>2</sub>G<sub>2</sub>**

Verlängere die willkürliche Linie AB durch Gleitspiegelung auf Anschluss nach BC.

(Gleitspiegelachse H<sub>1</sub>I<sub>1</sub> parallel AC in gleichem Abstand von B und A). Ziehe eine

weitere willkürliche Linie CD. D beliebig auf dem Mittellot MD von AC. Gleitspiegele

CD auf Anschluss in die Lage DA. (Gleitspiegelachse H<sub>2</sub>I<sub>2</sub> parallel H<sub>1</sub>I<sub>1</sub> durch den

Mittelpunkt K von DM)

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 4444

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 2

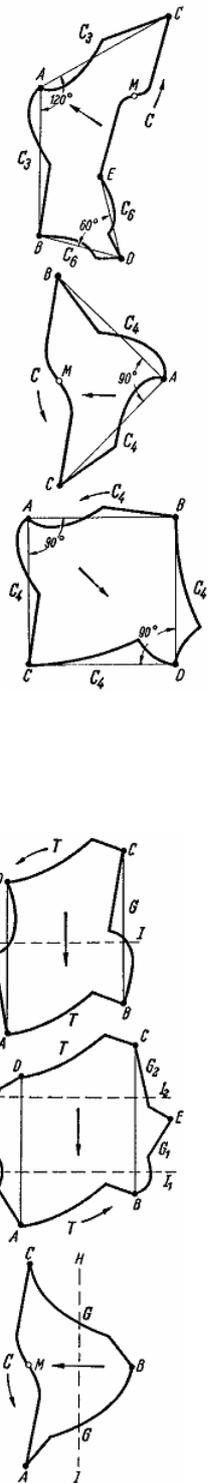
**Grundtyp 18: TG<sub>1</sub>G<sub>1</sub>TG<sub>2</sub>G<sub>2</sub>**

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC. Verbinde A mit einem Punkt E der

Mittelsenkrechten N<sub>1</sub>E von AD durch eine willkürliche Linie und gleitspiegele AE

nach ED. Schließe die Figur durch ein weiteres Paar auf Anschluss gleitgespiegelter

Linien BF, FC; F auf dem Mittellot FN<sub>2</sub> von BC. (Gleitspiegelachsen H<sub>1</sub>I<sub>1</sub> und H<sub>2</sub>I<sub>2</sub>)



Anzahl der willkürlichen Linien: 3  
 Netz: 333333  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 2

**Heesch-Typ 19-21**  
**Grundtyp 19: TGTG**

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC. Ziehe die willkürliche Linie AD und gleitspiegele sie nach CB (Gleitspiegelachse HI senkrecht AD im gleichen Abstand von A und C)

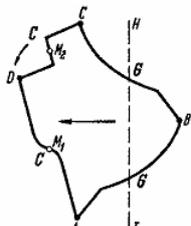
Anzahl der willkürlichen Linien: 2  
 Netz: 4444  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 2

**Grundtyp 20: TG<sub>1</sub>G<sub>2</sub>TG<sub>2</sub>G<sub>1</sub>**

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC, Gleitspiegele die weitere willkürliche Linie AF; F beliebig; nach EB. Gleitspiegele eine dritte willkürliche Linie FD nach CD (Gleitspiegelachsen H<sub>1</sub>I<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>I<sub>2</sub> senkrechte AD in gleichen Abständen von B und F bzw. von D und E)

Anzahl der willkürlichen Linien: 3  
 Netz: 333333

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 2



**Grundtyp 21: CGG**

Bringe die willkürliche Linie AB durch Gleitspiegelung auf Anschluss in die Lage BC, wobei Winkel ABC beliebig ist. (Gleitspiegelachse HI parallel AC im gleichen Abstand von A und B). Schließe die Figur durch eine C-Linie CA.

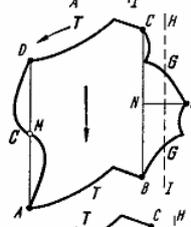
Anzahl der willkürlichen Linien: 2  
 Netz: 666  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

**Heesch-Typ 22-24**

**Grundtyp 22: CCGG**

Verlagere die willkürliche Linie AB durch Gleitspiegelung auf Anschluss in die Lage BC. (Gleitspiegelachse HI parallel AC im gleichen Abstand von A und B). Ziehe zum beliebigen Punkt D die beiden C-Linien AD und CD.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3  
 Netz: 4444  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

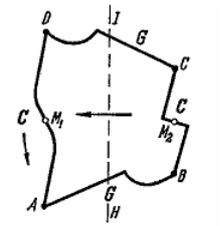


**Grundtyp 23: TCTGG**

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC. Verbinde A mit D durch eine C-Linie AD. Ziehe von B zu einem Punkt E der Mittelsenkrechten NE von BC eine willkürliche

Linie BE und gleitspiegele sie auf Anschluss in die Lage EC. (Gleitspiegelachse HI parallel BC im gleichen Abstand von B und E)

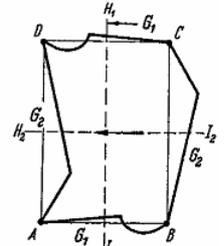
Anzahl der willkürlichen Linien: 3  
 Netz: 44333  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4



**Grundtyp 24: TCCTGG**

Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC. Verbinde A wie auch D mit dem beliebigen Punkt F durch je eine C-Linie. Wähle E auf der Mittelsenkrechten NE von BC und verlagere die willkürliche Linie BE durch Gleitspiegelung auf Anschluss nach EC. (Gleitspiegelachse HI) Anzahl der willkürlichen Linien: 4

Netz: 333333  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

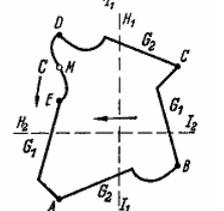


**Heesch-Typ 25-27**

**Grundtyp 25: CGCG**

Gleitspiegele die willkürliche Linie AB in die Lage CD. (Gleitspiegelachse HI hat gleichen Abstand von A und C, einen anderen Abstand von B und D). Verbinde A mit D durch eine C-Linie, sowie B mit C durch eine weitere C-Linie.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3  
 Netz: 4444  
 Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4



### Grundtyp 26: $G_1G_2G_1G_2$

A, B, C, D liegen wie die Punkte eines Rechtecks. Gleitspiegele die willkürliche Linie AB nach CD. Gleitspiegele die weitere willkürliche Linie AB nach CB. (Gleitspiegelachsen senkrecht Rechteckseiten durch Rechtecksmittelpunkt)

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Netz: 4444

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

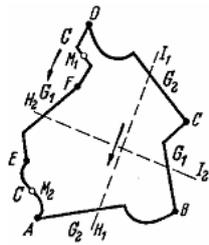
### Grundtyp 27: $CG_1G_2G_1G_2$

Gleitspiegele die willkürliche Linie AB nach CD (Gleitspiegelachse  $H_1I_1$  im Abstand a von A und C, im Abstand b von B und D). Ziehe die willkürliche Linie BC und gleitspiegele sie an der Gleitspiegelachse  $H_2I_2$  nach AE ( $H_2I_2$  ist senkrecht zu  $H_1I_1$  im gleichen Abstand von A und C). Schließe die Figur durch die C-Linie DE.

Anzahl der willkürlichen Linien: 3

Netz: 43433

Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4



### Heesch-Typ 28

#### Grundtyp 28: $CG_1CG_2G_1G_2$

Gleitspiegele die willkürliche Linie AB nach CD. (Gleitspiegelachse  $H_1I_1$ ). Ziehe die willkürliche Linie BC und gleitspiegele sie an der senkrecht  $H_1I_1$  liegenden Gleitspiegelachse  $H_2I_2$  nach FE. E ist beliebig. Verbinde D mit F durch eine C-Linie, ebenso A mit E.

Anzahl der willkürlichen Linien: 4

Netz: 333333

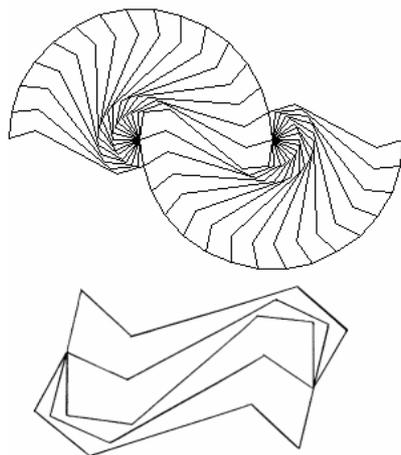
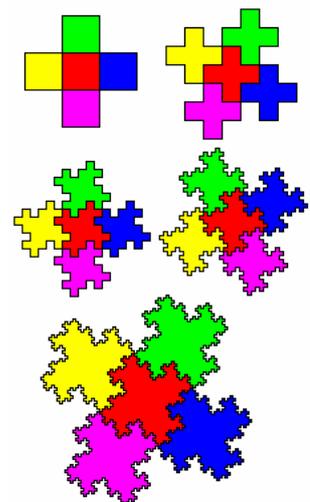
Anzahl der Grundmaschen in der Translationsmasche: 4

### Fraktale Parkettierung

Vier Quadrate können in der Ebene um ein fünftes Quadrat so angeordnet werden, dass sie ein griechisches Kreuz bilden. Mit derartigen griechischen Kreuzen kann die Ebene vollständig überdeckt werden.

Werden die Quadrate wie in der 2. Abbildung so verändert, dass sie selbst griechische Kreuze bilden, so ist auch weiterhin ein Parkettierung möglich. Wiederholt man den Vorgang für die Teilquadrate der Kreuze fortlaufend, so ergeben sich Fliesen gleicher Gestalt, die ebenso die Ebene überdecken. Die Fliesen sind dabei ähnlich zu einem ihrer Teile, d.h. selbstähnlich. Wird der Vorgang unendlich oft wiederholt, entstehen fraktale Gebilde, die folglich die Ebene vollständig bedecken.

Analog kann eine fraktale Parkettierung ausgehend von Sechsecken konstruiert werden.



### Voderberg-Doppelspirale, Voderberg-Parkett

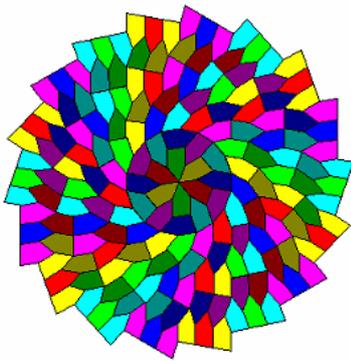
Heinz Voderberg (1911-1942), ein Student des Greifswalder Mathematikers Karl

Reinhardt, löste 1936 ein von diesem gestelltes Problem: Gesucht war ein Vieleck, so dass zwei kongruente Vielecke dieser Art ein Loch bilden, in das sogar zwei weitere dazu kongruente Vielecke hineinpassen.

Mit einem solchen Voderberg-Neuneck ist es möglich, die Ebene vollständig zu parkettieren. Dabei entsteht die Voderberg-Doppelspirale.

Eine Voderberg-Doppelspirale kann auch mittels L-System erzeugt werden.

Das Institut für Mathematik und Informatik der Ernst Moritz Arndt Universität Greifswald hat diese Spirale als Logo übernommen.



### Hirschhorn-Parkett

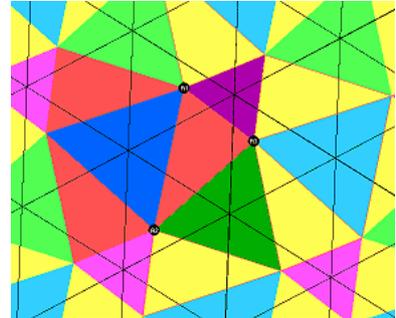
Das Parkett besteht aus gleichseitigen Fünfecken. Deren Innenwinkel sind gleich  $60^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $100^\circ$  und  $140^\circ$ .

Die Fünfecke können mit einem gleichschenkligen Dreieck zu einem Rhombus mit  $80^\circ$  Innenwinkel zusammengefügt werden. Ausgehend vom Zentralbereich wird diese Parkettierung durch radiales Anfügen von spiegelsymmetrischen Fünfecken gebildet.

### Napoleon-Parkettierung

Nach dem Satz von Napoleon

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf jeder Dreiecksseite wird ein gleichschenkliges Dreieck errichtet. Die zusätzlichen Punkten seien D, E und F. Ist G der Schwerpunkt des Dreiecks DBC, H vom Dreieck CAE und I vom Dreieck ABF, so schneiden sich die Geraden AG, BH und CI in einem Punkt N, den sogenannten Napoleon-Punkt.



kann man die Ebene mit gleichseitigen Dreiecken von dreierlei Größen und der gleichen Gesamtzahl von im Allgemeinen ungleichseitigen aber untereinander gleichsinnig deckungsgleichen Dreiecken auslegen.

Die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke bilden dabei ein gleichseitiges Dreiecksraster, je sechs Dreiecke; von jeder gleichseitigen Sorte eines und von der anderen drei; bilden zusammen eine achteckige Elementarzelle, die man in beiden Dimensionen der Ebene unendlich oft wiederholt. Die Napoleon-Parkettierung existiert auch für stumpfwinklige Dreiecke. Für Dreiecke mit einem Innenwinkel von  $120^\circ$  vereinfacht sich die Elementarzelle zu einem Sechseck bzw. Parallelogramm.

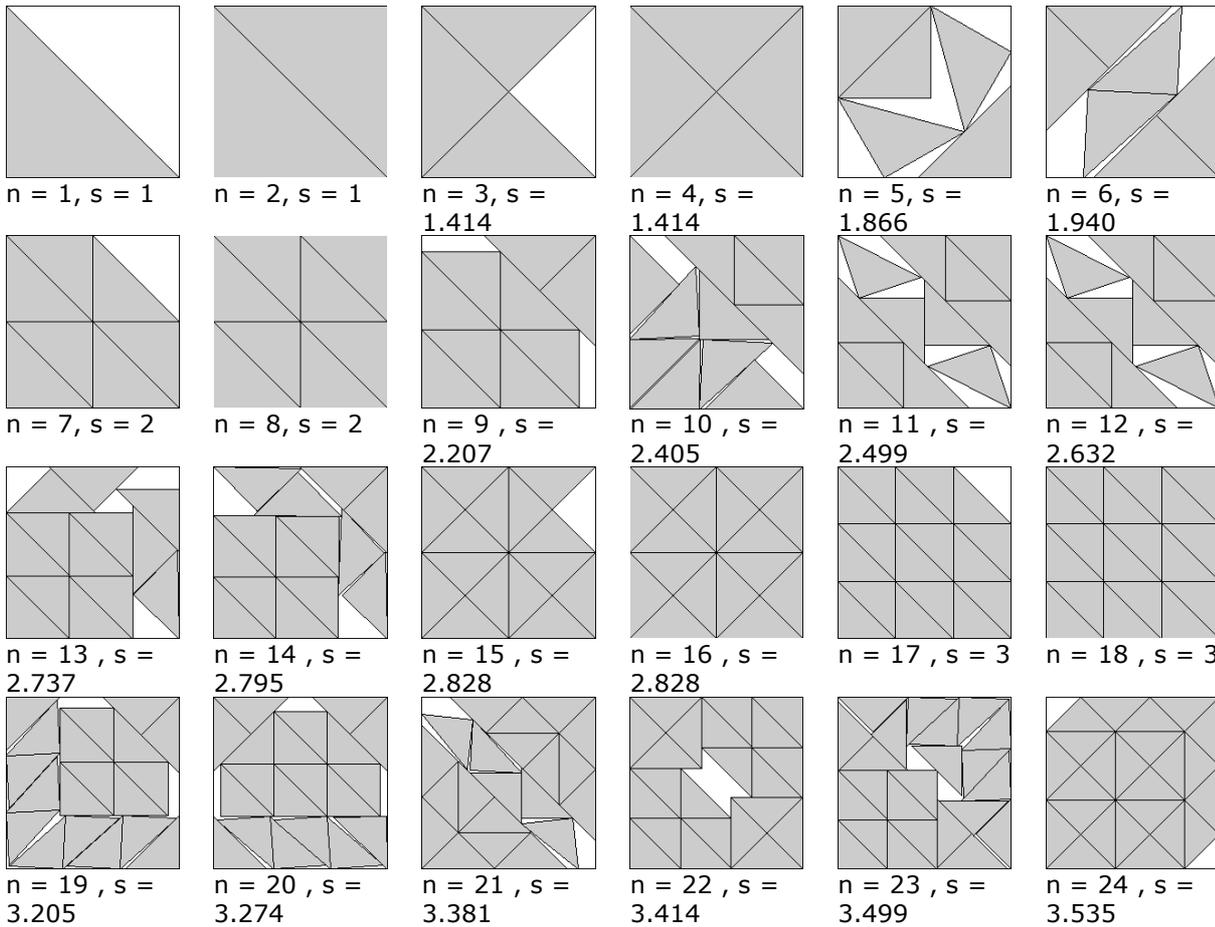
### Dreieckspackung im Quadrat

Gegeben sind  $n$  gleichseitige Einheitsdreiecke. Diese sollen in ein Quadrat mit möglichst kleiner Seitenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die bisher beste Anordnung der Dreiecke mit kleinster Seitenlänge  $s$  des Quadrates.

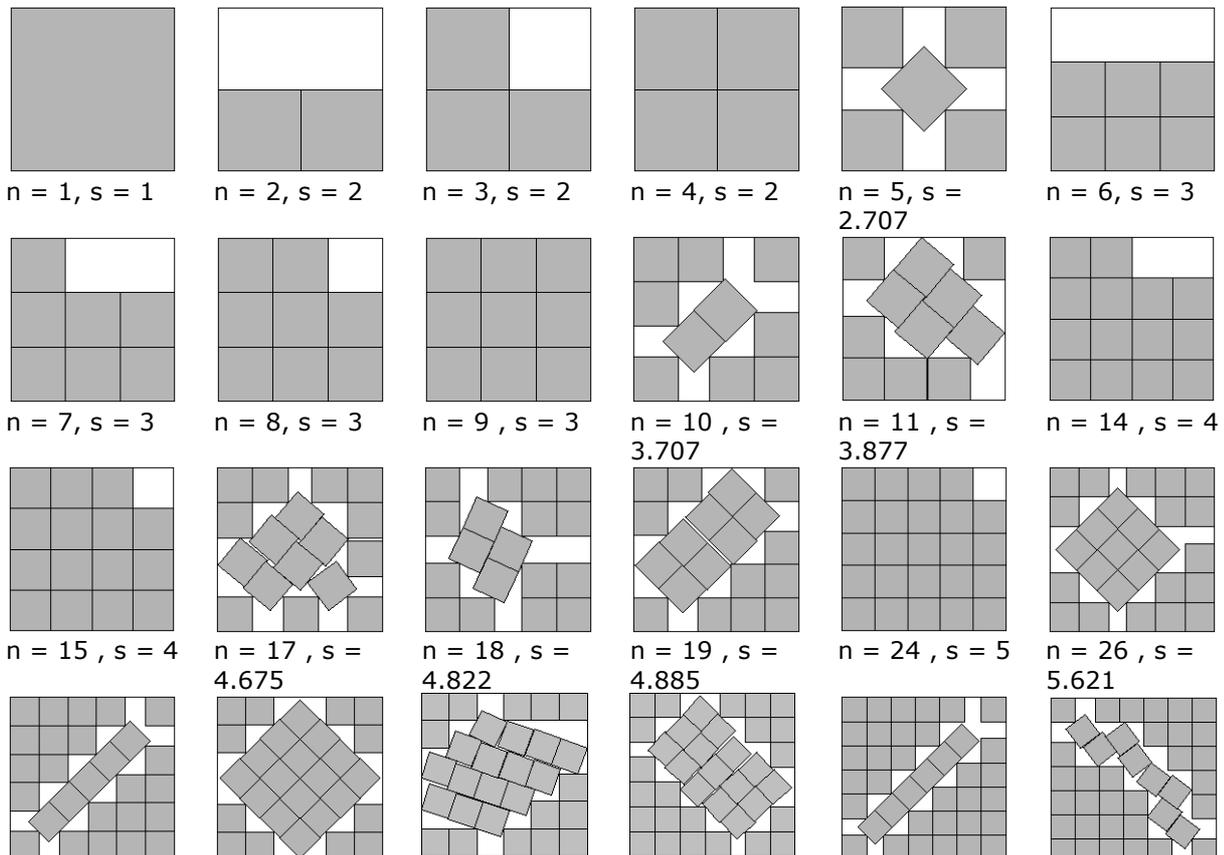
$n = 1$ $s = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4 \approx 0.965$	$n = 2$ $s = \sqrt{6}/2 \approx 1.224$	$n = 3$ $s = \sqrt{3}/2 + \sqrt{6}/4 \approx 1.478$	$n = 4$ $s = 1 + 1/\sqrt{3} \approx 1.577$	$n = 5$ $s = 1.803$
$n = 6, s = 1.901$	$n = 7, s = 2$	$n = 8, s = 2.098$	$n = 9, s = 2.291$	$n = 10, s = 2.377$
$n = 11, s = 2.497$	$n = 12, s = 2.562$	$n = 13, s = 2.595$	$n = 14, s = 2.726$	$n = 15, s = 2.852$

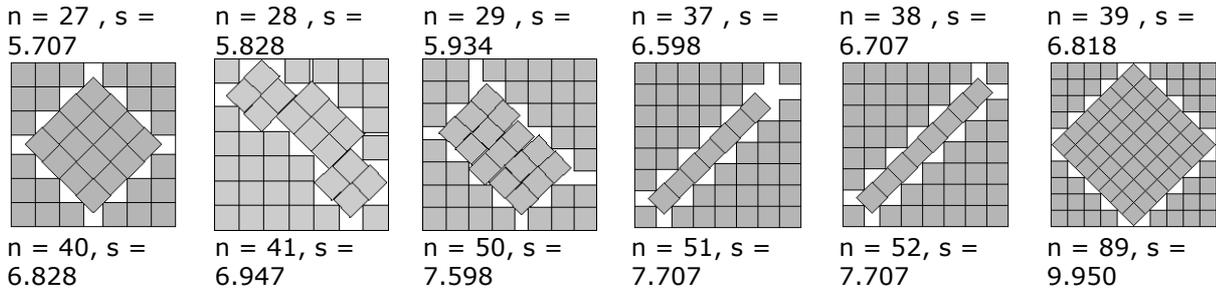
### Halbdreieckspackung im Quadrat

Gegeben sind  $n$  gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, deren Schenkel gleich 1 sind. Diese sollen in ein Quadrat mit möglichst kleiner Seitenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die bisher beste Anordnung der Dreiecke mit kleinster Seitenlänge  $s$  des Quadrates.

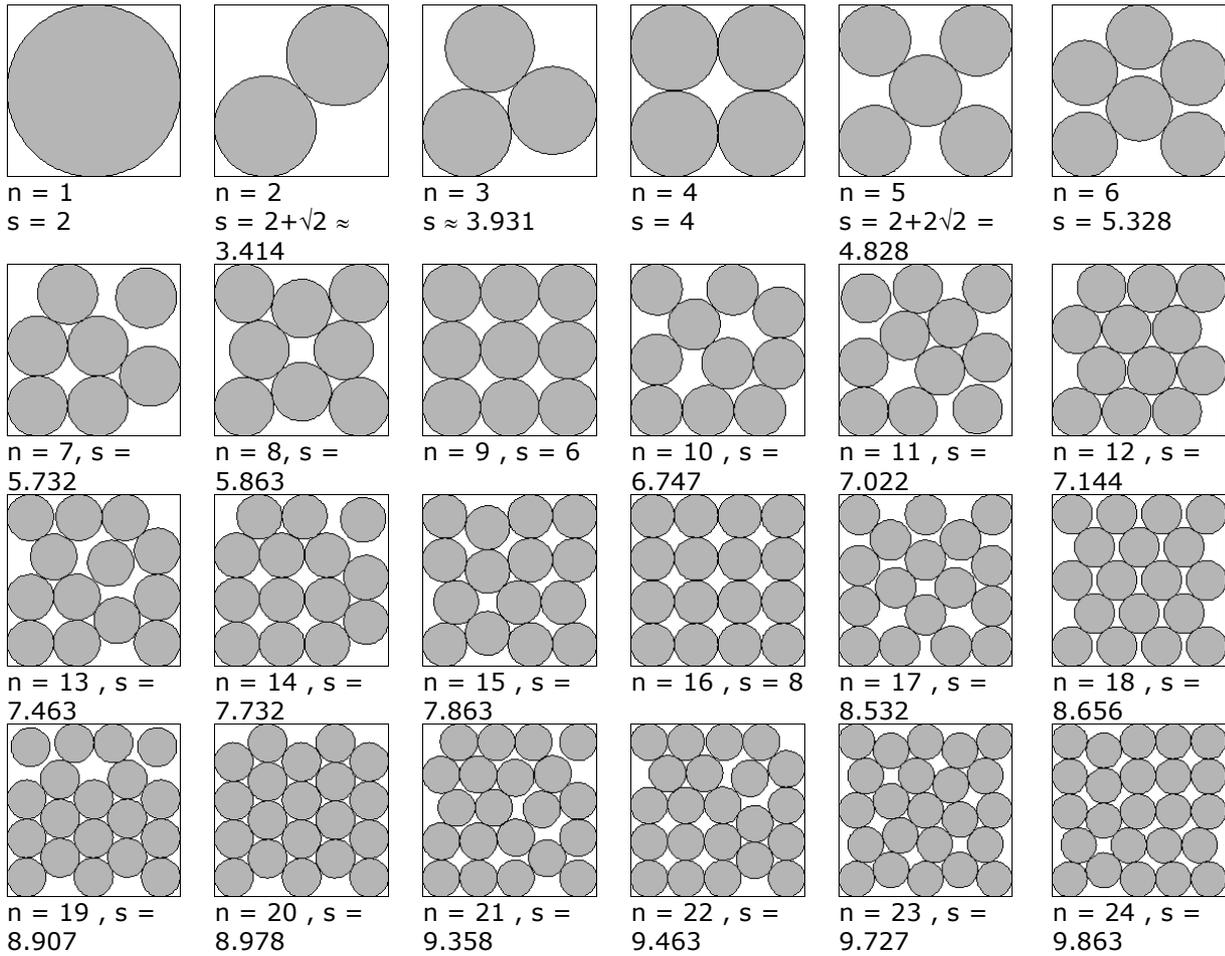


**Quadratpackung im Quadrat:** Gegeben sind  $n$  Einheitsquadrate. Diese sollen in ein Quadrat mit möglichst kleiner Seitenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die bisher beste Anordnung der Quadrate mit kleinster Seitenlänge  $s$  des Quadrates. Für  $n = 1-10, 14, 15$  und  $24$  werden die nachgewiesenen bestmöglichen Anordnungen gezeigt.

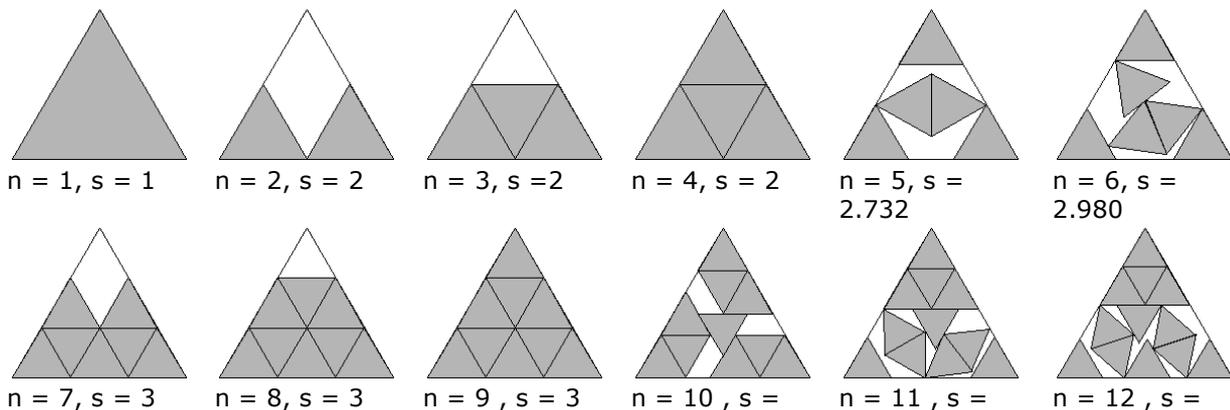




**Kreispackung im Quadrat:** Gegeben sind  $n$  Einheitskreise. Diese sollen in ein Quadrat mit möglichst kleiner Seitenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die bisher beste Anordnung der Kreise mit kleinster Seitenlänge  $s$  des Quadrates.



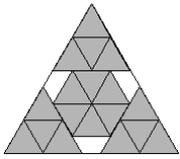
**Dreieckspackung im Dreieck ...** Gegeben sind  $n$  gleichseitige Einheitsdreiecke. Diese sollen in ein gleichseitiges Dreieck mit möglichst kleiner Seitenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die bisher beste Anordnung der Dreiecke mit kleinster Seitenlänge  $s$  des Ergebnisdreiecks.



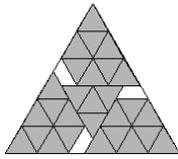
3.5

3.700

3.900

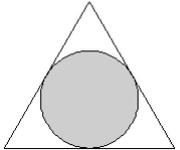


$n = 18, s = 4.5$

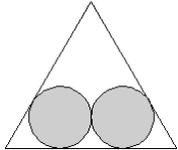


$n = 28, s = 5.5$

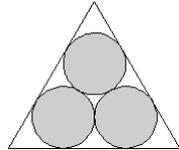
**Kreispackung im Dreieck:** Gegeben sind  $n$  Einheitskreise. Diese sollen in ein gleichseitiges Dreieck mit möglichst kleiner Seitenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die beste, bewiesene, Anordnung der Kreise mit kleinster Seitenlänge  $s$  des Ergebnisdreiecks. Allgemein gilt für  $m$  Kreis mit  $m = (n^2+n)/2$ , dass  $s = 2(n-1) + 2\sqrt{3}$  die Seitenlänge des entstehenden Dreiecks ist.



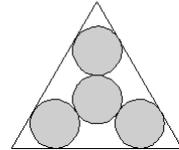
$n = 1, s = 3.464$



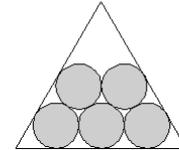
$n = 2, s = 5.464$



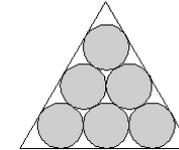
$n = 3, s = 5.464$



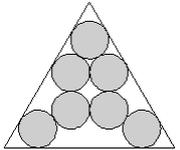
$n = 4, s = 6.928$



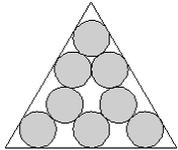
$n = 5, s = 7.464$



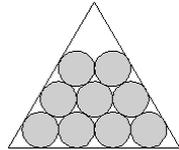
$n = 6, s = 7.464$



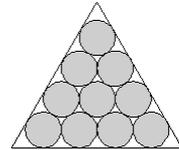
$n = 7, s = 8.928$



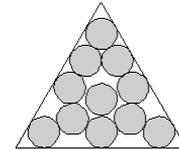
$n = 8, s = 9.29$



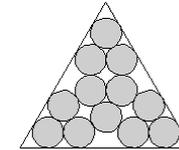
$n = 9, s = 9.464$



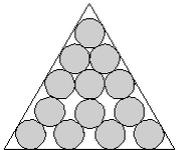
$n = 10, s = 9.464$



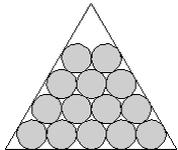
$n = 11, s = 10.73$



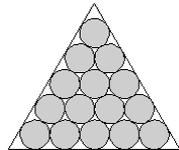
$n = 12, s = 10.928$



$n = 13, s = 11.40$

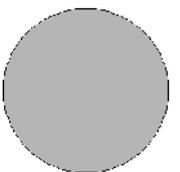


$n = 14, s = 11.464$

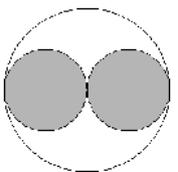


$n = 15, s = 11.464$

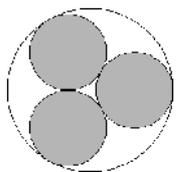
**Kreispackung im Kreis:** Gegeben sind  $n$  Einheitskreise. Diese sollen in einen Kreis mit möglichst kleinem Radius überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die beste Anordnung der Kreise mit kleinstem Radius Ergebniskreises. Bis  $n = 11$  sind die Überdeckungen als beste bewiesen.



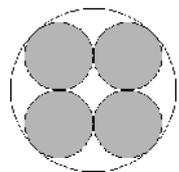
$n = 1, r = 1$



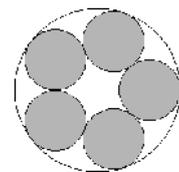
$n = 2, r = 2$



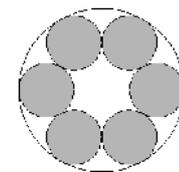
$n = 3, r = 2.154$



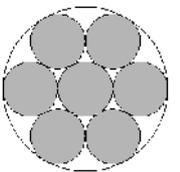
$n = 4, r = 2.414$



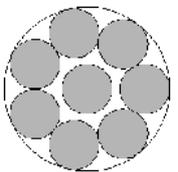
$n = 5, r = 2.701$



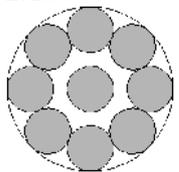
$n = 6, r = 3$



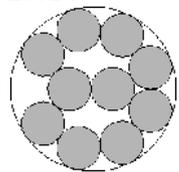
$n = 7, r = 3$



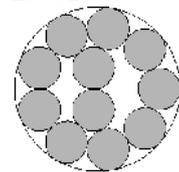
$n = 8, r = 3.304$



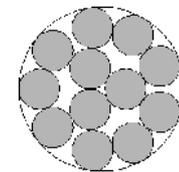
$n = 9, r = 3.613$



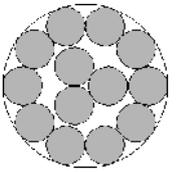
$n = 10, r = 3.813$



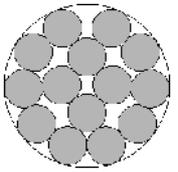
$n = 11, r = 3.923$



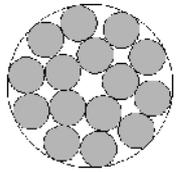
$n = 12, r = 4.029$



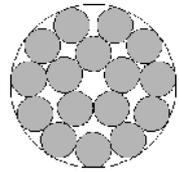
$n = 13, r = 4.236$



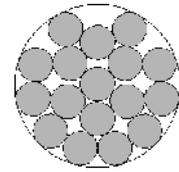
$n = 14, r = 4.328$



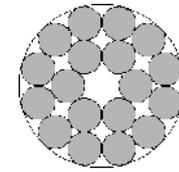
$n = 15, r = 4.521$



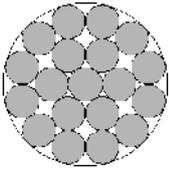
$n = 16, r = 4.615$



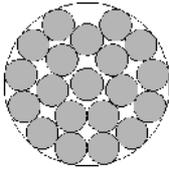
$n = 17, r = 4.792$



$n = 18, r = 4.863$



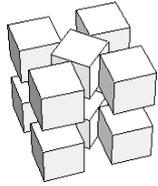
$n = 19, r = 4.863$



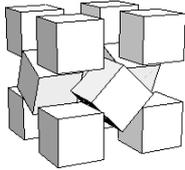
$n = 20, r = 5.122$

### Würfelpackung

Gegeben sind  $n$  Einheitswürfel. Diese sollen im Raum in einen Würfel mit möglichst kleiner Kantenlänge überdeckungsfrei angeordnet werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die beste Anordnung der Würfel.



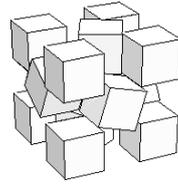
$n = 10, s = 2.707$



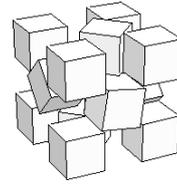
$n = 11, s = 2.912$



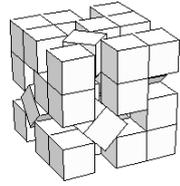
$n = 12, s = 2.942$



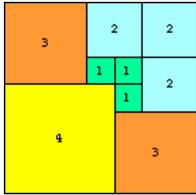
$n = 13, s = 2.956$



$n = 14, s = 2.989$



$n = 33, s = 3.707$



### Quadratteilung

Ein Quadrat kann auf verschiedene Arten in kleinere Quadrate zerlegt werden. Interessant sind vor allem die Arten, in denen ein Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge  $n$  mit kleineren ebenfalls ganzzahligen Quadraten bedeckt wird; insbesondere, wenn  $n$  Primzahl ist.

Für jedes  $n \times n$  Quadrat, mit  $n > 1$ , sei

$f(n)$  = die größtmögliche Seitenlänge eines kleinen Quadrates

$g(n)$  = die kleinste mögliche Anzahl der Deckquadrate

$h(n)$  = der kleinste mögliche Wert der Vielfachheit eines Teilquadrates

Im Beispiel für  $n = 7$  wird  $f(7)=1, g(7)=9$  und  $h(7)=3$ .

Durch Joseph DeVincentis wurde bewiesen, dass für  $n = 8$  stets  $f(n) > 1$  gilt.

Beweis:  $2 \times 2$ -Gruppen und  $3 \times 3$ 's können in  $2 \times 6$  und  $3 \times 6$  Rechtecke gelegt werden. Diese wiederum bilden  $6 \times m$  Rechtecke ( $m > 1$ ).

Jedes Quadrat größer als  $7 \times 7$  kann in 4 Blöcke zerlegt werden: ein  $6 \times 6$  Quadrat, ein  $(n-6) \times (n-6)$  Quadrat und zwei  $6 \times (n-6)$  Rechtecke. Diese können, wie beschrieben mit  $2 \times 2$  und  $3 \times 3$  Quadraten bedeckt werden.

Allgemein gilt weiterhin: für  $n \geq 2k^2$  ist  $f(n) \geq k$ .

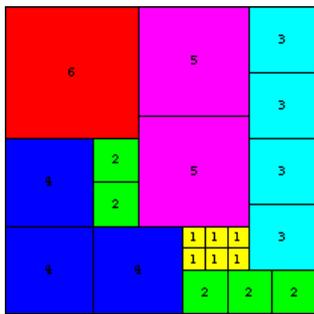
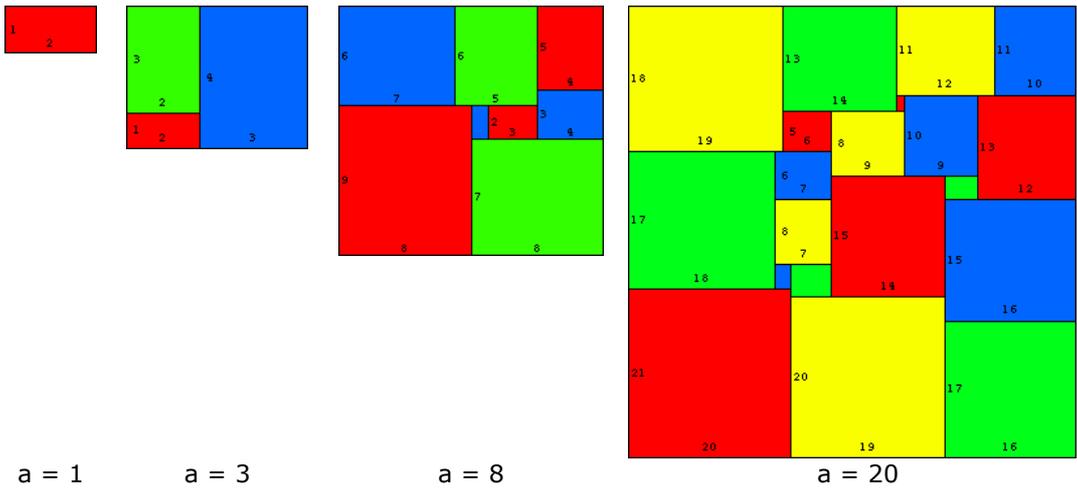
Die kleinsten  $f(p)$  für prime  $p$  sind:

$p$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	
$f(p)$	1	1	1	1	2	2	2	3	4	
$p$	29	31	37	41	43	47	53	59	61	
$f(p)$	5	5	7	6	7	7	8	9	10	
$p$	67	71	73	79	83	89	97	101	103	
$f(p)$	10	11	11	13	12	14	14	16	15	
$p$	107	109	113	127	131	137	139	149	151	
$f(p)$	16	16	19	19	21	20	21	23	23	
$p$	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199
$f(p)$	24	25	23	27	25	27	26	29	31	31

Die Folge für natürliche  $n$  beginnt mit  $f(n)$ : 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 6, 2, 7, 5, 8, 2, 9, 3, 10, 7, 11, 4, 12, 5, 13, 9, 14, 5, 15, 5, 16, 11, 17, 7, 18, 7, 19, 13, 20, 6, 21, 7, 22, 15, 23, 7, 24, 9, 25, 17, 26, 8, 27, 11, 28, 19, 29, 9, 30, 10, 31, 21, 32, 13, 33, 10, 34, 23, 35, 11, 36, 11, ...

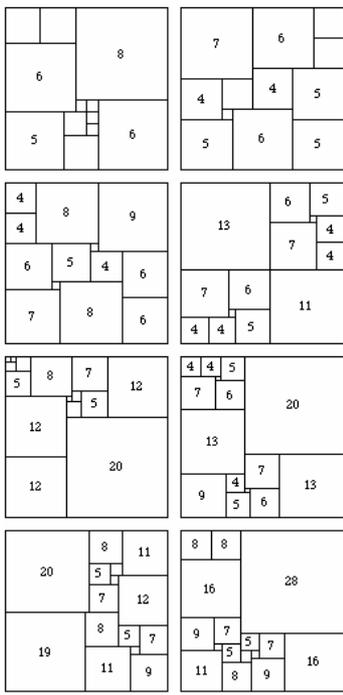
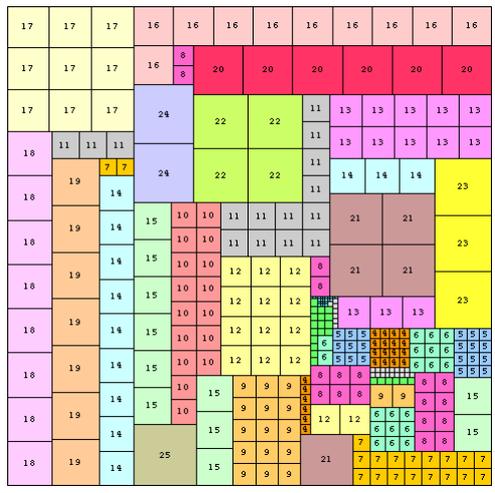
### Fast-Quadrate

Unter einem Fast-Quadrat versteht man Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $a+1$ . Diese Fast-Quadrate können für  $a = 1, 3, 8$  und  $20$  wieder mit anderen Fast-Quadraten überdeckt werden.



Die diophantische Gleichung  $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2 = k^2$  gilt nur für wenige  $k$  und  $n$ . Die ersten zwei nichttrivialen Lösungen sind  $n=6, k=14$ , und  $n=25, k=195$ . Diese können durch Zerlegung eines Quadrates der Seitenlänge  $k$  in ein Quadrat der Länge  $n$ , zwei Quadrate der Länge  $n-1, \dots$  veranschaulicht werden.

Die entsprechenden Lösungen für  $n = 6$  und  $n = 25$  sind links und rechts zu sehen.



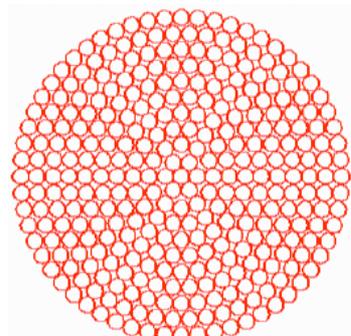
**Quilt, Quadratpackung**

**"Mrs Perkins's Quilt"**

Henry E. Dudeney, "Amusements in Mathematics", Problem 173,

Puzzle: Mrs. Potipher Perkins hat die Aufgabe aus 169 Teilen, die kleinste Anzahl von sich gegenseitig nicht überdeckenden Quadraten zu finden, die einen Quilt vollständig überdecken. Ein Quilt ist hier ein Quadrat, das damit in kleinere Quadrate zu zerlegen ist. Die Ordnung des Quilts ist die Anzahl der kleinen Quadrate, die Größe des Quilts ist dessen Seitenlänge  $n$ . Optimal ist ein Quilt, wenn er die kleinstmögliche Ordnung besitzt. Die nachfolgende Abbildung zeigt optimale Quilts für die Größen 14 bis 58. Abbildung: Mrs.Perkins's Quilts für  $n = 14$  bis 58

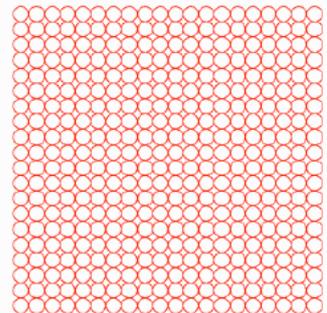
Die Quilts  $14 \times 14$  bis  $17 \times 17$  sind von der Ordnung 12. Einige der Quilts haben Teilquilts. Schließt man dies auf, so ergeben sich sogenannte Primitiv-Quilts. Links sind einige dieser Primitiv-Quilts zu sehen, die Lance Gay fand.



**Kreispackung**

Die Abbildung zeigt eine kreisförmige Anordnung von Kreisen. Im Zentrum befindet sich ein Kreis, der von sechs weiteren Kreisen umgeben ist. Der nächsten Kreise scheinen sich nicht optimal anzupassen, es entstehen Zwischenräume, welche sich verkleinern lassen. Werden die Zwischenräume verkleinert, so ergibt sich eine hexagonale Anordnung der Kreise.

Aufgabe: Wie groß ist die Dichte der kreisförmigen Anordnung für  $n \rightarrow \infty$ , wenn  $n$  die Anzahl der Kreisringe bezeichnet?



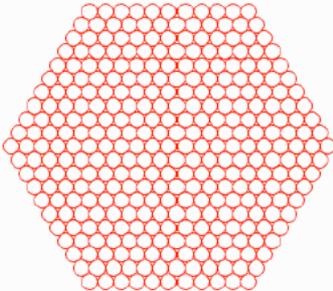
Lösung: In einer Anordnung mit n Ringen, das Zentrum sei der Ring 0, ergeben sich  $1 + 3n(n+1) = 3n^2 + 3n + 1$  kleine Kreise.

Wählt man die kleinen Kreise als Einheitskreise, so hat der zugehörige Trägerkreis den Radius  $2n + 1$ . Für die Dichte wird

$$\rho_{\text{kreisförmige Anordnung}}(n) = (3n^2 + 3n + 1) \pi / ((2n+1)^2 \pi) = (3n^2 + 3n + 1) / (4n^2 + 4n + 1)$$

Für den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich für die Dichte  $\rho_{\text{kreisförmige Anordnung}} = 3/4 = 75\%$

Diese Dichte ist schlechter als bei einer quadratischen Anordnung (untere Abbildung) der Kreise, für die man  $\rho_{\text{quadratische Anordnung}} = \pi/4 = 78,5\%$  erhält.



Werden die Zwischenräume in einer kreisförmigen Anordnung von Kreisen verdichtet, ergibt sich eine hexagonale Anordnung der Kreise.

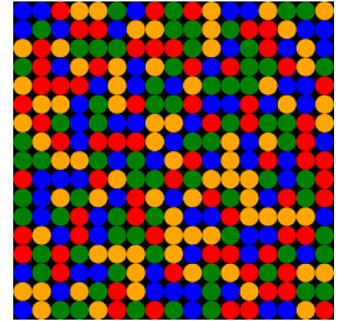
Für diese Kreispackung erhält man als Überdeckungsdichte

$$\rho_{\text{hexagonale Anordnung}} = \pi / (2\sqrt{3}) = 90,6899682\% \dots$$

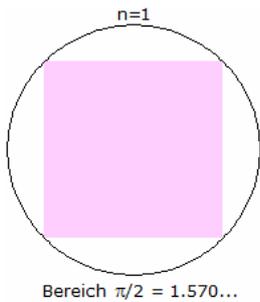
Diese Anordnung ist die dichteste, bekannte Parkettierung der Ebene mit Kreisen.

### Vierfarbengitter

2012 wurde durch die Informatiker Bernd Steinbach und Christian Posthoff das Problem des Vierfarbengitters gelöst.



Gegeben ist ein quadratisches Spielfeld mit  $17 \times 17$  Feldern. Jedes dieser 289 Felder soll mit einer von vier Farben eingefärbt werden. Bedingung ist: Bei einem beliebig ausgewählten Rechteck aus diesem  $17 \times 17$ -Quadrat dürfen die vier Eckpunkte nicht sämtlich von derselben Farbe sein.



Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht in der großen Zahl von  $4^{289}$  (174ziffrige Zahl) Farbverteilungen. Damit können die möglichen Färbungen nicht systematisch ausprobiert werden.

Bekannt war bis 2012, dass es für Quadrate bis zu einer Größe von 16 mal 16 Lösungen gibt, ab einer Größe von 19 mal 19 nicht.

Steinbach und Posthoff verfolgten bei ihrer Lösung folgende Strategie. Sie suchten zunächst nach einer Lösung für eine Farbe, bei der nur ein Viertel der Felder eine Färbung bekommt. Dann erweiterten sie diese Lösung auf vier Farben. Statt mit  $17 \times 17$  Feldern arbeiteten sie gleich mit  $18 \times 18$  Feldern.

Statt sämtliche theoretisch denkbaren Varianten zu berücksichtigen, suchten die Forscher nach sehr speziellen Lösungen und fanden sowohl für  $18 \times 18$ - als auch  $17 \times 17$ -Felder eine Lösung.

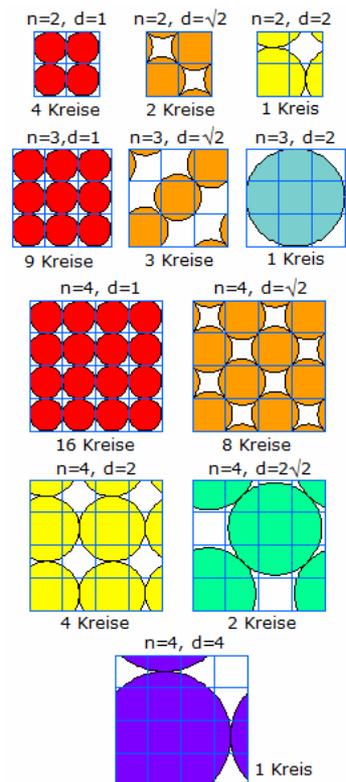
Es ist zu erwarten, dass die Methoden, mit denen das Vierfarbengitter gelöst wurde, auch bei anderen Problemen hilfreich sein werden.

### Quadratüberdeckung

Gegeben sei ein Einheitsquadrat. Dieses soll durch n Kreise, auch unterschiedlicher Größe, vollständig überdeckt werden, so dass der

Gesamtflächeninhalt der Kreise möglichst klein ist.

Während die Aufgabe für  $n = 1$  trivial ist, benötigt man für höhere Werte von n intensiven Computereinsatz.



Die Simulation enthält die bisher besten bekannten Lösungen für  $n = 1, 3$  bis 9 und 13. Die Summe A der Kreisflächeninhalte ist

$$n=1, A = \pi/2 = 1,570\dots$$

$$n=3, A = 1,442\dots$$

$$n=4, A = 1,397\dots$$

$$n=5, A = 5\pi/12 = 1,309\dots$$

$$n=6, A = 1,2965\dots$$

$$n=7, A = 1,2813\dots$$

$$n=8, A = 1,2687\dots$$

$$n=9, A = 1,2558\dots$$

$$n=13, A = 1,185\dots$$

Die Lösungen wurden von David Cantrell und Philippe Fondanaiche gefunden.

### Kreispackung auf Torus

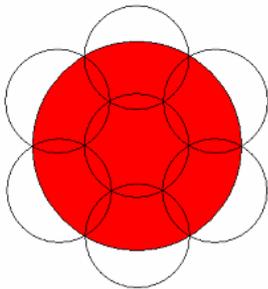
Auf der Lexikonseite Kreispackung im Quadrat werden möglichst viele Kreise gleichen Radius in ein Quadrat gepackt.

Diese Aufgabenstellung kann so verändert werden, dass man nicht mehr ein einfaches Quadrat betrachtet, sondern eines dessen linke und rechte Seite sowie obere und untere

Seite miteinander verbunden sind, d.h. ein Torus. Konstruiert man dieses Gebilde, so sind die Kreise nicht mehr eben.

In der Abbildung sind einige der bisher besten bekannten Lösungen zu sehen.  $n$  beschreibt die Größe des Quadrates in  $n \times n$  Einheitsquadraten und  $d$  den Radius der Kreise.

Weitere Lösungen:



### Abdeckung einer Kreisscheibe

Gegeben sei eine Kreisscheibe. Wie viele Kreisscheiben mit dem halben Durchmesser braucht man mindestens, um die große Scheibe vollständig abzudecken?

Wenn man der Kreisscheibe ein regelmäßiges Sechseck einbeschreibt, erkennt man, dass mindestens 6 Kreisscheiben mit dem halben Durchmesser nötig sind, um den Rand der Kreisscheibe abzudecken. Der Mittelpunkt der kleinen Kreise muss dazu auf den Seitenmitten des Sechsecks platziert werden und die Seiten sind Durchmesser der kleinen Kreisscheiben. Diese 6 Kreisscheiben können allerdings den Mittelpunkt der großen Scheibe nicht erreichen. Dazu braucht

man eine siebente zentral gelegene Scheibe.

Mittels Satz des Thales und den Winkelbeziehungen im regelmäßigen Sechseck, gelingt es zu zeigen, dass der Rand der zentralen Scheibe genau durch den innen gelegenen Schnittpunkt der Ränder zweier benachbarter Randscheiben geht.

Es sind also 7 Kreisscheiben mit dem halben Durchmesser nötig, um gerade die große Kreisscheibe abzudecken zu können. Die gezeigte Lösung ist damit eindeutig.

### Triangulation

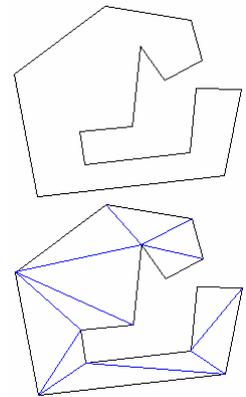
Triangulation ist die Zerlegung einer Oberfläche in eine Menge von Dreiecken, wobei jede eingezeichnete Dreiecksseite zu zwei verschiedenen Dreiecken gehören muss.

Erst 1925 wurde bewiesen, dass dies für jede Oberfläche möglich ist, wobei mitunter unendlich viele Dreiecke notwendig sein können. Eine Oberfläche, für welche endlich viele Dreiecke notwendig sind, wird kompakt genannt.

Euler 1741: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein  $n$ -Eck durch Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen?

Lösung:  $E_n = (2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-10)) / (n-1)! = (4n-10)/(n-1) E_{n-1}$

Erste Lösungen für  $n = 3, 4, 5, 6, \dots$  sind  $E_n = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots$



Durch den holländischen Mathematiker Snellius wurde die Triangulation für erste große Messungen genutzt.

Für die Vermessung Hollands spannte er ein imaginäres Dreiecksgitter (Abbildung: Snellius Dreiecksgitter von 1635) über das Land und zeichnete es in seine Karte ein. Er fing mit einer Basis an und nahm die neuen Seiten  $a$  und  $b$  als neue Basisstrecken für die Weitermessung.

Allmählich wurden weitere Länder Europas mit Dreiecknetzen überspannt und Fixpunkte installiert. Die Triangulation blieb die wichtigste Landesvermessungsmethode bis ins 20. Jahrhundert.

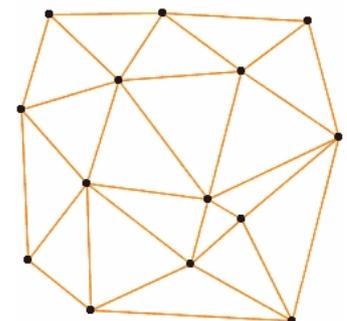
Der Bau des ersten Gotthard-Tunnels in der Schweiz war nur möglich, da mittels Triangulation beide Enden des Tunnels räumlich abgeglichen werden konnten.

Erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde die Triangulation für die Landesvermessung durch die Satellitenvermessung mit GPS abgelöst.

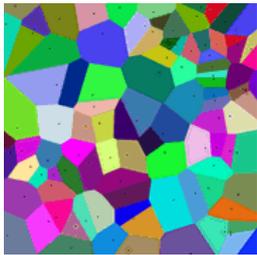
### Delaunay-Triangulation

Die Delaunay-Triangulation, auch nur Triangulation genannt, ist das wichtigste Verfahren, um aus einer Punktemenge ein Dreiecksnetz zu erstellen. Sie ist nach dem sowjetischen Mathematiker Boris Nikolajewitsch Delone (1890-1980, franz. Form des Nachnamens: Delaunay) benannt, welcher die Triangulation 1934 veröffentlichte.

Mit dem Verfahren der Delaunay-Triangulation werden Punkte im  $R^2$  so zu Dreiecken vernetzt, dass innerhalb des Kreises, auf dem die drei Dreieckspunkte liegen, keine anderen Punkte enthalten sind, d.h. der Umkreis eines Dreiecks des Netzes darf keine weiteren Punkte der vorgegebenen Punktemenge enthalten. Dadurch weisen die Dreiecke des Netzes möglichst große Innenwinkel auf.



Im dreidimensionalen Raum wird statt der Umkreisbedingung die analoge Umkugelbedingung verwendet, welche dann aus jeweils vier Punkten ein Tetraeder erzeugt. Die Delaunay-Triangulierung ist der duale Graph des Voronoi-Diagramms der Punktmenge: Die Ecken der Voronoi-Zellen sind die Umkreismittelpunkte der Dreiecke der Delaunay-Triangulation.



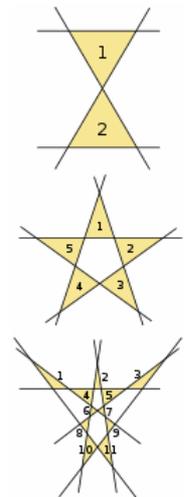
### Voronoi-Diagramm

Als Voronoi-Diagramm oder Dirichlet-Zerlegung wird eine Zerlegung des Raumes in Regionen bezeichnet, die durch eine vorgegebene Menge an Punkten des Raumes bestimmt werden.

Jede Region wird durch genau ein Zentrum bestimmt und umfasst alle Punkte des Raumes, die näher an dem Zentrum der Region liegen, als zu jedem anderen Zentrum. Aus allen Punkten, die Grenzen der Voronoi-Regionen bilden, entsteht das Voronoi-Diagramm.

Voronoi-Diagramme werden in der Biologie, Chemie, Meteorologie, Kristallographie, der algorithmischen Geometrie und der Materialwissenschaft verwendet. Obwohl 1644 schon durch Descartes in seinem Buch "Principia Philosophiae" erwähnt, wurden sie erstmals durch Dirichlet und Voronoi genauer analysiert.

Voronoi-Diagramme können auch als Zerlegung hochdimensionaler Räume verwendet werden. Meist wird die Definition auf den zweidimensionalen reellen Raum beschränkt. Das Voronoi-Diagramm verhält sich dual zur Delaunay-Triangulation und wird zur Konstruktion einer entsprechend triangulierten Oberfläche verwendet. Um die Delaunay-Triangulation zu berechnen, wird der entsprechende duale Graph zum Voronoi-Diagramm gebildet. Dies geschieht, indem die Zentren der Polygone derart miteinander verbunden werden, so dass zu jeder Voronoi-Kante eine orthogonale Linie eingezeichnet wird, die die entsprechenden zwei Zentren miteinander verbindet.



### Kobon-Dreiecke

Kobon-Dreiecke sind Dreiecke, die durch Zeichnen mehrerer Geraden entstehen.

Das Kobon-Dreiecke-Problem fragt, wie viele nichtüberlappende Dreiecke  $N(k)$  sich maximal erzeugen lassen, wenn man  $k$  Geraden in die Ebene zeichnet.

Der japanische Mathematiklehrer Kobon Fujimura veröffentlichte die Aufgabenstellung in seinem 1978 erschienen Buch "The Tokyo Puzzle".

Für bis zu sechs Geraden ist es einfach, durch Ausprobieren Anordnungen zu finden, die möglichst viele Dreiecke formen. Während mit drei Geraden nur ein Dreieck gebildet werden kann, sind es für vier, fünf und sechs Geraden maximal 2, 5 und 7.

Wie viele Dreiecke sich für eine beliebige Anzahl Geraden  $k$  erzeugen lassen, die Kobon-Zahl, ist ein bisher ungelöstes Problem der kombinatorischen Geometrie.

Nach Saburo Tamura ergibt sich für ein  $k$  das Maximum der Kobon-Zahl zu  $\lfloor k(k-2)/3 \rfloor$

Durch Clément und Bader wurde eine weitere Verringerung des Maximums gefunden.

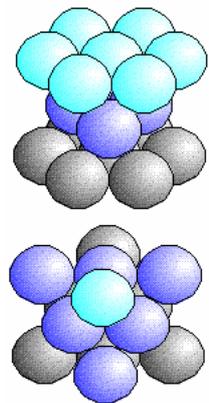
Die größte bekannte perfekte Lösung sind 85 Dreiecke aus 17 Geraden. Bisher kennt man für steigende  $k = 3, 4, 5, \dots$  als obere Grenze und beste bekannte Lösung:

Obere Schranke für  $N(k)$

1, 2, 5, 7, 11, 15, 21, 26, 33, 40, 47, 55, 65, 74, 85, 95, 107, 119, 133, ...

Beste bekannte Lösung

1, 2, 5, 7, 11, 15, 21, 25, 32, 38, 47, 53, 65, 72, 85, 93, 104, 115, 130, ...



### Dichteste Kugelpackungen (fcc und hcp)

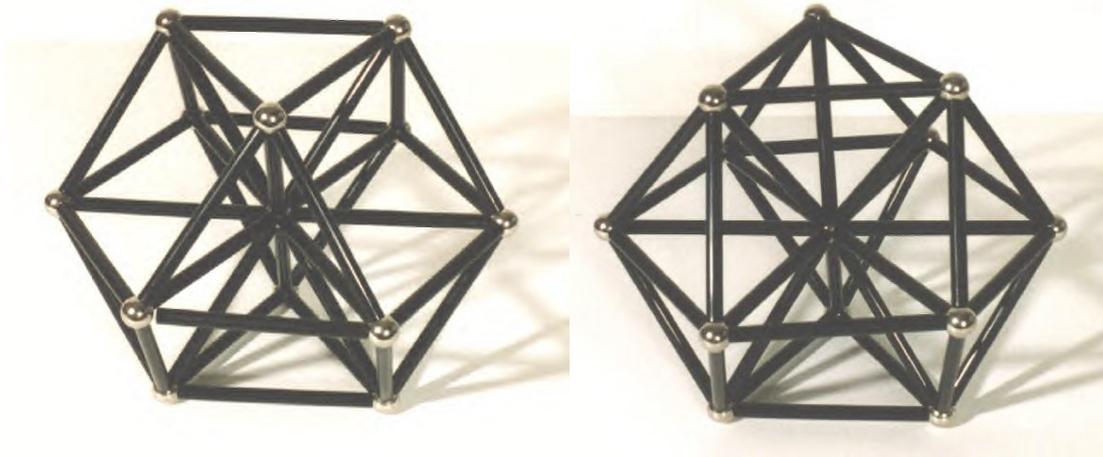
In der Ebene können gleich große Kreise dicht aneinanderliegen, in dem man jeden Kreis mit sechs Nachbar umgibt. Analog gilt dies für gleich große Kugeln, die man auf einer Ebene zusammenschiebt.

Sollen Kugeln dreidimensional am dichtesten gepackt werden, so legt man solche Schichten aufeinander und nutzt dabei die Vertiefungen zwischen den Kugeln einer Schicht aus. Bei der dritten Schicht hat man dann die Auswahl, die Kugeln genau über die der ersten Schicht zu legen oder auf die Stellen, an denen bei beiden Schichten Lücken sind. Die Packungsdichte ist die größte die erreicht werden kann. Bei Kristallen gibt es zwei wichtige Formen:

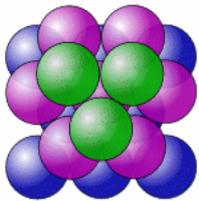
Bei der Dichtepackung fcc (untere Abbildung) wechseln sich drei verschiedene Schichten zyklisch ab, bei der hcp-Packung (obere Abbildung) nur zwei. Es zeigt sich, dass es bei fcc dann auch in drei anderen Orientierungen im Raum Schichten gibt, die wie die Ebene zweidimensional gepackt sind.

Am Ausschnitt mit einer Kugel und ihren 12 Nachbarn kann man diese als reguläre Sechsecke sehen. Bei hcp gibt es nur in einer Orientierung ein solches Sechseck bei fcc aber noch drei andere. hcp hat die Symmetrie eines sechszähligen Prismas, fcc dagegen die eines Würfels. Setzt man die Kugelmittelpunkte auf die Ecken und auf die Flächenmitten eines Würfels, erhält man das fcc-Kristallgitter.

fcc bedeutet face-centered cubic = flächenzentriert-kubisch, hcp dagegen bedeutet hexagonal closest packed = dichteste hexagonale Packung.



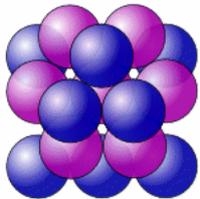
Am Ausschnitt mit einer Kugel und ihren 12 Nachbarinnen kann man diese als reguläre Sechsecke sehen: bei hcp gibt es nur in einer Orientierung ein solches Sechseck bei fcc aber noch drei andere. hcp hat die Symmetrie eines sechszähligen Prismas, fcc dagegen die (weiter gehende) eines Würfels. Setzt man die Kugelmittelpunkte auf die Ecken und auf die Flächenmitten eines Würfels, bekommt man das fcc-Kristallgitter, fcc bedeutet face-centered cubic = flächenzentriert-kubisch. hcp dagegen bedeutet hexagonal closest packed = dichteste hexagonale Packung.



### Keplersche Vermutung

Die Keplersche Vermutung ist eine Vermutung über die Packung von Kugeln im dreidimensionalen euklidischen Raum. Sie besagt, dass keine Anordnung von gleich großen Kugeln eine größere mittlere Dichte aufweist als die kubisch-flächenzentrierte Packung und die hexagonale Packung.

Die mittlere Dichte dieser Packungen ist etwas größer als 74 Prozent.



1998 gab Thomas Hales bekannt, dass er einen Beweis für die Keplersche Vermutung gefunden habe. Dieser Beweis ist ein Beweis durch Fallunterscheidung, bei dem unterschiedliche Fälle mittels komplexer Berechnungen am Computer untersucht wurden. Die Gutachter des Beweises sind zu 99 Prozent von der Richtigkeit des Beweises überzeugt.

Die Dichte der Anordnung der Kugeln ist der Anteil vom Volumen des Behältnisses, der von den Kugeln eingenommen wird.

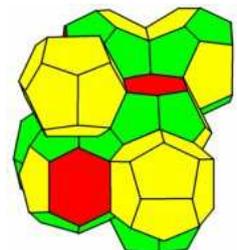
Um die Anzahl der Kugeln im Behältnis zu maximieren, muss man die Anordnung mit der höchstmöglichen Dichte finden, sodass die Kugeln so dicht wie möglich gepackt werden.

Experimente zeigen, dass ein zufälliges Hineinschütten der Kugeln zu einer Dichte von ungefähr 65 Prozent führt. Eine höhere Dichte kann jedoch durch eine Anordnung der Kugeln wie folgt erreicht werden:

Begonnen wird mit einer Ebene Kugeln, die in einem hexagonalen Gitter angeordnet wird. Anschließend wird die nächste Ebene in die tiefsten Punkte der vorangehenden Ebene gelegt usw.

Diese natürliche Art die Kugeln zu stapeln ergibt eines von zwei ähnlichen Gittern, die kubische-flächenzentrierte Packung oder die hexagonale Packung. Jede der beiden Kugelpackungen hat eine mittlere Dichte von  $\pi / \sqrt{18} \approx 0,7408$

Die Keplersche Vermutung besagt, dass dies die bestmöglichen Packungen sind. Mit keiner Packung kann eine höhere Dichte erzeugt werden als mit diesen.



### Weaire-Phelan-Struktur

Die Weaire-Phelan-Struktur (obere Abbildung) ist ein dreidimensionales Gebilde. 1993 fanden Denis Weaire und Robert Phelan, Physiker am Trinity College Dublin, durch Computersimulation diese Struktur und damit eine bessere Lösung des Kelvin-Problems als die von Kelvin selbst angegebene Struktur.

## Kelvin-Problem

Durch Lord Kelvin wurde 1887 das Problem gestellt, eine vollständig dichte Raumpackung zu konstruieren, bei der die verwendeten Körper eine minimale Oberfläche bilden.

Kelvin gab als Lösung die Raumpackung mit Oktaederstümpfen an, die auch als Kelvin-Struktur bezeichnet wird.

Die Kelvin-Vermutung bestand nun darin, dass zur Lösung des Kelvin-Problems genau die von Kelvin genannte Lösung die beste sei. Über 100 Jahre konnte dies nicht bewiesen noch durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden, bis zur Entdeckung der Weaire-Phelan-Struktur.

Die Struktur setzt sich aus irregulären Pentagondodekaedern und Tetrakaidekaedern mit zwei Sechsecken und 12 Fünfecken zusammen. Die Oberfläche der Körper ist 0,3% geringer als bei der Kelvin-Struktur. Gegenwärtig (2011) ist nicht bewiesen, dass die Weaire-Phelan-Struktur optimal ist.



## Honigwabe

In der Geometrie versteht man unter einer Honigwabe (engl. honeycomb) ein vollständige Füllung eines Raumes mit Polyederzellen. Im dreidimensionalen Raum spricht man meist von Packungen im Raum, in der Ebene von Parkettierung. Honigwaben werden aber auch in höherdimensionalen Räumen untersucht. Durch George Olshevsky wurden Begriffe für Räume höherer Dimension eingeführt: Tetracomb für einen 4-dimensionalen Raum, Pentacomb für 5 Dimensionen, usw. Die Abbildung zeigt die 3-dimensionale Raumpackung mit Oktaederstümpfen (oben) und Rhombendodekaedern.

Im dreidimensionalen euklidischen Raum spricht man von uniformen Honigwaben, wenn die füllenden Polyeder uniform sind. Es gibt 28 Möglichkeiten, die auch Archimedische Honigwaben genannt werden.

Eine von diesen ist regulär: die Füllung mit Würfeln; eine ist quasiregulär: die Füllung mit Oktaedern und Tetraedern.

Haben alle Polyederzellen einer Honigwabe identische Form, so heißt die Honigwabe zell-transitiv oder isochor. Die Polyederzelle wird dann raumfüllendes Polyeder genannt. Bekannte Beispiele im  $R^3$  sind:

die reguläre Würfelpackung oder kubische Honigwabe

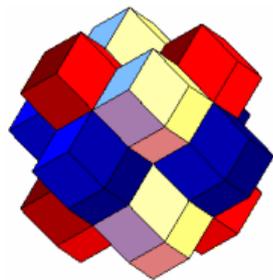
die uniforme Packung mit Oktaederstümpfen

die Packung mit Rhombendodekaedern bzw. mit Rhombohexagonalen Dodekaedern

die Packung mit Quadern, Rhombenhexaedern oder Parallelepipeden

Außerdem existieren auch Honigwaben, die mit nicht konvexen Zellen ausgefüllt werden.

Auch in hyperbolischen Räumen werden Honigwaben untersucht. Zum Beispiel gibt es dort eine Dodekaederwabe.



## Paralleloeder

Unter einem dreidimensionalen Paralleloeder versteht man ein konvexes Polyeder, mit dem der dreidimensionale Raum lückenlos ausgefüllt werden kann.

1920 bewies Fedorow, dass im Raum genau 5 Paralleloeder existieren:

- 1) Hexaeder, Würfel
- 2) hexagonales Prisma, sechsseitiges regelmäßiges Prisma
- 3) Oktaederstumpf
- 4) Rhombendodekaeder
- 5) erweitertes Rhombendodekaeder

Die Abbildung zeigt eine Ausfüllung des Raums mit Rhombendodekaedern.

## Beispiel zur Raumpflasterung

Analog zu den Pflasterungen der Ebene mit regelmäßigen Vielecken gibt es eine größere, bis heute nicht ermittelte Anzahl von Pflasterungen, lückenlosen Füllungen, des Raumes mit platonischen bzw. archimedischen Polyedern.

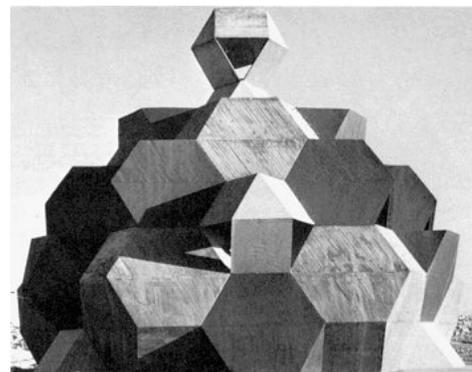
Diese Raumpflasterungen werden nur selten in der Architektur verwendet. Ein Beispiel ist die abgebildete Synagoge der israelischen Militärschule Mitzpeh Ramon, die 1968/70 von den Architekten Zwi Hecker, Alfred und Naomi Neumann gebaut wurde.

Eine in dieser Synagoge verwendete Sechsecksymmetrie hat wahrscheinlich eine kultisch-religiöse Bedeutung. Die Synagoge besteht aus vier verschiedenen Polyederarten:

6 dreieckige Kuppel, d.h. halbe Kuboktaeder

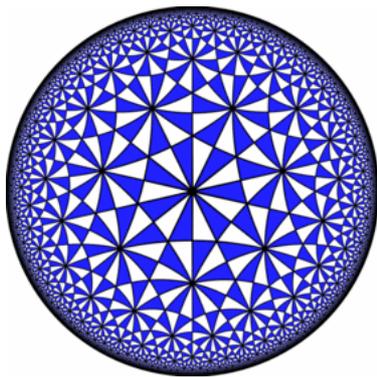
8 Kuboktaeder

22 abgestumpfte Tetraeder



10 abgestumpfte Oktaeder

Quelle: <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/>



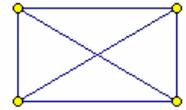
### Hyperbolische Parkettierung

Auf einer hyperbolischen Ebene existieren unendlich viele uniforme Parkettierungen der Form  $(p\ q\ 2)$ .

Ausgehend vom Poincaréschen Modell sind einige interessant und optisch sehr ansprechend. Zuerst wird die uniforme Parkettierung und als zweites deren duale Parkettierung genannt:

## Graphentheorie

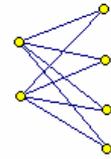
Die Graphentheorie ist aus der Topologie hervorgegangen. Sie behandelt theoretische und praktische Probleme, die sich auf Ecken und verbindende Kanten zurückführen lassen.



### Graph $G(E,K)$

Ein Graph ist die Zusammenfassung zweier Mengen  $E$  und  $K$ , wobei  $E$  eine Menge, Ecken oder Knoten, und  $K \subseteq ({}^2 E)$  eine Menge von Paaren  $\{u, v\}$ ,  $u \neq v$ , Kanten oder Bögen, bedeuten

$G(E,K)$  heißt endlich, wenn  $E$  und  $K$  nur je endlich viele Elemente enthalten, im anderen Falle heißt  $G(E,K)$  unendlich.



leerer Graph	$E$ und $K$ sind leere Mengen
Schlinge	Kante $u$ , deren Endpunkte zusammenfallen
Mehrfachkante	mehreren Kanten ist dasselbe geordnete oder ungeordnete Paar von Ecken zugeordnet
Multigraph	Schlingen, $\{u, u\} \in K$ , und Mehrfachkanten zwischen Ecken $u, v$ sind möglich
einfacher Graph	zwei Ecken (Knoten) sind nie durch mehrere Kanten verbunden
vollständiger Graph $K_{(n)}$	Graph mit Eckenzahl $ E  = n$ und Kantenzahl $ K  = \binom{n}{2}$
bipartiter Graph	$E$ besteht aus zwei disjunkten Mengen $S$ und $T$ , jede Kante besitzt je eine Ecke in $S$ und $T$
vollständiger bipartiter Graph $K_{m,n}$	$ S  = m$ , $ T  = n$ ; alle Arten von Kanten zwischen $S$ und $T$ sind vorhanden, d.h. $ E  = m+n$ ; $ K  = m \cdot n$
Hypergraph	eine Kante, auch Hyperkante genannt, verbindet nicht nur zwei, sondern mehrere Knoten gleichzeitig
obere Abbildung: vollständiger Graph $K_4$ ; untere Abbildung: vollständiger bipartiter Graph $K_{2,4}$	

### Schlichte Graphen

Ist mehreren Kanten oder Bögen dasselbe ungeordnete oder geordnete Paar von Knoten zugeordnet, dann spricht man von Mehrfachkanten. Eine Kante oder ein Bogen mit identischen Endpunkten heißt Schlinge. Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten bzw. Mehrfachbögen werden schlicht genannt.

### Eigenschaften von Graphen

Weg der Länge $n$	Folge von $n+1$ verschiedenen Ecken $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ und $n$ Kanten $\{u_i, u_{i+1}\}$ , $i = 1, 2, \dots, n$
Kreis der Länge $n$	Folge von $n$ verschiedenen Ecken $u_1, u_2, \dots, u_n$ und $n$ verschiedenen Kanten $\{u_i, u_{i+1}\}$ , $i = 1, 2, \dots, n$ mit $u_{n+1} = u_1$
adjazente oder benachbarte Ecken	Endpunkte ein und desselben Elements von $K$
Inzidenz von Ecke $u$ und Kante $k$	$u$ ist Ecke von $k$
Inzidenz von Kante $k$ und Kante $l$	Kante $k$ und Kante $l$ besitzen eine gemeinsame Ecke
Grad von Ecke $u$	$d(u) =  N(u) $ , Anzahl der Menge der Nachbarn $N(u)$ von $u \in E$
Eckenordnung	die Ordnung der Ecke $E$ ist die Anzahl der Kanten, die in einer Ecke zusammentreffen. Kanten, die zur selben Ecke zurückführen (Schlingen), werden zweimal gezählt
Grad eines Knotens $u$	= Grad von Ecke $u$
gerader Knoten	Knoten mit einem geradzahigen Grad
ungerader Knoten	Knoten mit einem ungeradzahigen Grad
isolierte Ecke	$d(u) = 0$ ; auch isolierter Knoten
Kantenzug	Folge von Knoten, wenn jeweils zwei aufeinanderfolgende Knoten adjazent sind.
geschlossener Kantenzug	Kantenzug, bei dem der erste Knoten gleich dem letzten Knoten ist.
offener Kantenzug	Kantenzug, der nicht geschlossen ist.

### Untergraph

Untergraph  $H(E',K')$  von  $G(E,K)$ , wenn  $E' \subseteq E$  und  $K' \subseteq K$ . Ein induzierter Untergraph, enthält alle Kanten zwischen den Ecken in  $E'$ , die auch  $G$  enthält. Wichtige Untergraphen entstehen durch Weglassen von Ecken und Kanten.

Bei gegebenem  $G(E,K)$  ist  $G \setminus A$ ,  $A \subseteq E$ , der Graph, der aus  $G$  entsteht, indem  $A$  und alle mit dieser Ecke inzidenten Kanten weggelassen werden

Die Komponenten von  $G(E,K)$  sind die auf den Äquivalenzklassen von  $K$  induzierten Untergraphen. Eine Brücke ist eine Kante eines Graphen, die bei ihrer Entfernung die Komponenten des Graphen erhöht. Der Abstand  $d(u,v)$  zweier Ecken  $u$  und  $v$  ist die Länge des kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$ . Gehören  $u$  und  $v$  verschiedenen Komponenten an, so existiert ein solcher Weg nicht, man setzt  $d(u,v) = \infty$ .

Der Durchmesser des Graphen  $G(E,K)$  ist  $D(G) = \max_{u,v \in E} d(u,v)$

## Eigenschaften von Graphen, Beispiel

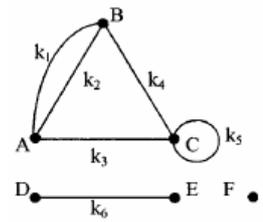
Für den abgebildeten Graphen gilt:

$$E = \{A, B, C, D, E, F\} \quad K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$$

Bei diesem Graphen gibt es zwei verschiedene Kanten  $k_1$  und  $k_2$ , die die Ecken A und B verbinden. D.h., der Graph besitzt Mehrfachkanten.

Zum anderen gibt es eine Kante, und zwar  $k_5$ , bei der die beiden Ecken zusammenfallen. Eine solche Kante wird Schlinge genannt.

Eine weitere Besonderheit weist die Ecke F auf. Es gibt keine Kante, die mit F inzidiert. Man nennt F eine isolierte Ecke.

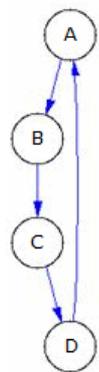


In diesem Graphen sind die Ecken A, B und C durch Kanten miteinander verbunden sind. Von B nach C gelangt man z.B., wenn man erst  $k_1$  und dann  $k_3$  durchläuft oder die Kanten  $k_2, k_1, k_4$  oder auch  $k_2, k_1, k_3$  nacheinander durchläuft. Derartige n-Tupel von Kanten bezeichnet man als Kantenzüge.

Der Graph ist weder schlicht noch zusammenhängend.

Entfernt man aus diesem Graphen die Kanten  $k_2$  und  $k_5$ , so haben wir einen schlichten Graphen, der aber nicht zusammenhängend ist.

Entfernen wir stattdessen aus dem Graphen die Ecken D, E und F sowie die Kante  $k_6$ , so erhalten wir einen zusammenhängenden Graphen, der nicht schlicht ist.



## Gerichtete und zusammenhängende Graphen

Gerichteter Graph, Digraph, orientierter Graph  $G(E, K) \dots$  Graph, bestehend aus Eckenmenge E, Kantenmenge  $K \subseteq E^2$  von geordneten Paaren (gerichtete, orientierte Kanten); in  $k = (u, v)$  ist u die Anfangs- und v die Endecke von k.

Jede gerichtete Kante kommt höchstens einmal vor. In G können beide gerichtete Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  auftreten.

Zusammenhängender Graph  $\dots$  für zwei voneinander verschiedene Ecken existiert mindestens einer der Wege zwischen den beiden Ecken.

Stark zusammenhängender Graph  $\dots$  von jeder Ecke u gibt es zu jeder anderen Ecke v einen gerichteten Weg.

Gerichteter Weg, gerichteter Kreis  $\dots$  Weg bzw. Kreis, bei dem die Länge des Weges gleich der Anzahl der gerichteten Kanten ist.

Azyklischer Graph  $\dots$  Graph, der keinen gerichteten Kreis enthält.

Ordnung n und Größe q des Graphen  $G(E, K)$  sind durch  $n = |E|$  und  $q = |K|$  bestimmt, wobei  $|E|$  die Mächtigkeit von E und  $|K|$  die Mächtigkeit von K ausdrückt. Bei Beschränkung auf endliche Mengen E und K sind n und q jeweils die Anzahl ihrer Elemente.

Jeder Graph hat eine gerade Anzahl von Ecken mit ungeradem Grad.

## Gefärbte Graphen

Ein Graph G mit der Menge V von Knoten (Ecken, engl. vertex) und der Menge E von Kanten (engl. edge) werden als Tupel  $(V, E)$  geschrieben.

Eine Erweiterung von Graphen  $G = (V, E)$  zu knotengefärbten Graphen erhält man, indem das Tupel  $(V, E)$  zu einem Tripel  $(V, E, f)$  ergänzt wird. f ist eine Abbildung von V in die Menge der natürlichen Zahlen. Anschaulich gibt man jedem Knoten damit eine Farbe.

Statt der Knoten kann man in Graphen ohne Mehrfachkanten und in Hypergraphen auch die Kanten färben und spricht dann von einem kantengefärbten Graphen.

Dazu erweitert man ebenfalls das Tupel  $(V, E)$  zu einem Tripel  $(V, E, f)$ , wobei f aber eine Abbildung von E, statt von V, in die Menge der natürlichen Zahlen ist.

Anschaulich gibt man jeder Kante damit eine Farbe. In Graphen mit Mehrfachkanten ist dies zwar prinzipiell möglich, aber schwieriger zu definieren, insbesondere, wenn Mehrfachkanten entsprechend ihrer Vielfachheit mehrere verschiedene Farben zugeordnet werden sollen.

Statt von knoten- bzw. kantengefärbten Graphen spricht man von knoten- bzw. kantengewichteten Graphen, falls f statt in die natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen abbildet.

Knoten- bzw. kantengefärbte Graphen sind Spezialfälle von knoten- bzw. kantengewichteten Graphen. Man bezeichnet  $f(v)$  bzw.  $f(e)$  als Gewicht des Knotens v bzw. der Kante e. Zur Unterscheidung spricht man auch von Knotengewicht bzw. Kantengewicht. Eine solche Gewichtung wird erforderlich, wenn die Information über Knotenbeziehungen nicht ausreicht.

Zusätzlich gibt es auch benannte Graphen  $(V, E, f, g)$ , bei denen Knoten und/oder Kanten einen Namen tragen, und die Abbildungen f bzw. g den Knoten bzw. Kanten einen Namen zuordnen.

Die Abbildung zeigt einen Graph, bei dem die Knoten mit Buchstaben benannt wurden.

Man kann auch gleichzeitig oder mehrfach Knoten und Kanten färben, gewichten oder benennen.

## Teilgraph, Untergraph

Bei der Untersuchung von Grapheneigenschaften schließt man häufiger von lokalen auf globale Eigenschaften von Graphen und umgekehrt.

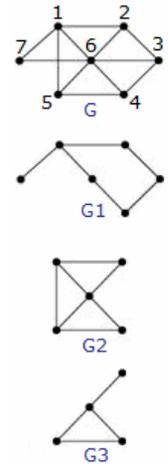
Wichtig sind dabei Teilgraphenbeziehungen. Die Begriffe Teilgraph und Untergraph sind Spezialfälle der entsprechenden allgemeineren Begriffe Teil-Struktur und Unter-Struktur.

$G_1 = (V_1, E_1)$  heißt Teilgraph oder Subgraph von  $G_2 = (V_2, E_2)$ , falls  $V_1$  Teilmenge von  $V_2$  und

- 1) in Graphen ohne Mehrfachkanten  $E_1$  Teilmenge von  $E_2$  ist,  $E_1 \subseteq E_2$
- 2) in ungerichteten Graphen mit Mehrfachkanten  $E_1(v) \subseteq E_2(v)$  für alle zweielementigen Teilmengen  $v$  von  $V_2$ , also  $v = \{v_1, v_2\}$ , gilt, wobei  $E_{1/2}(v)$  die Menge der Kanten zwischen den Knoten aus  $v$  ist,
- 3) in gerichteten Graphen mit Mehrfachkanten  $E_1(v) \subseteq E_2(v)$  für alle Teilmengen  $v$  aus dem kartesischen Produkt  $V_2 \times V_2$  gilt.

Umgekehrt heißt  $G_2$  Supergraph oder Obergraph von  $G_1$ .

Bei einem knotengewichteten bzw. kantengewichteten Graph  $G_2$  wird von einem Teilgraph  $G_1$  zudem verlangt, dass die Gewichtsfunktion  $g_1$  von  $G_1$  kompatibel zu der Gewichtsfunktion  $g_2$  von  $G_2$  ist, d.h. für jeden Knoten  $v$  bzw. für jede Kante  $e$  von  $G_2$  gilt  $g_1(v) = g_2(v)$  bzw.  $g_1(e) = g_2(e)$ .

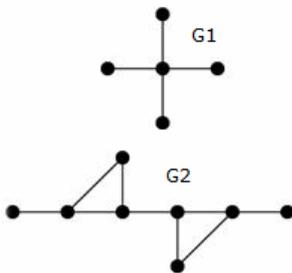


### Untergraph bzw. induzierter Teilgraph

Gilt zusätzlich:

- 1) in Graphen ohne Mehrfachkanten,  $E_1 = E_2 \cap (V_1 \times V_1)$ , d.h.  $G_1$  enthält alle Kanten zwischen den Knoten in  $V_1$ , die auch in  $G_2$  vorhanden sind.
  - 2) in ungerichteten Graphen mit Mehrfachkanten,  $E_1(v) = E_2(v) \cap (V_1 \times V_1)$ , für alle zweielementigen Teilmengen  $v$  von  $V_2$ ,
  - 3) in gerichteten Graphen mit Mehrfachkanten,  $E_1(v) = E_2(v) \cap (V_1 \times V_1)$  für alle  $v$  aus dem kartesischen Produkt  $V_2 \times V_2$ ,
- so bezeichnet man  $G_1$  als den durch  $V_1$  induzierten Teilgraph von  $G_2$  und notiert diesen mit  $G_2[V_1]$

In der Abbildung sind die Graphen  $G_1, G_2, G_3$  Teilgraphen von  $G$ , wobei aber nur  $G_2$  und  $G_3$  induzierte Teilgraphen sind.  $G_3$  entsteht dabei aus  $G$  durch Weglassen der Knoten 1,3,7 und ihrer inzidenten Kanten.



### Induzierter Teilgraph, Minor

Induzierte Teilgraphen sind immer eindeutig durch die entsprechende Knotenmenge festgelegt. Besonders wichtige Teilgraphen entstehen durch das Weglassen von Knoten bzw. Kanten.

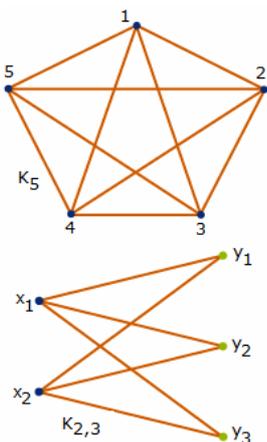
Sei der Graph  $G(V,E)$  gegeben, dann bezeichnet  $G \setminus A$ ,  $A \subseteq V$  den Graphen, der durch Weglassen der Knoten aus  $A$  und aller mit diesen Knoten inzidenten Kanten entsteht. Die so entstehenden Teilgraphen sind immer induzierte Teilgraphen!

### Minor

Ein Graph  $G_1$  wird Minor des Graphen  $G_2$  genannt, falls  $G_1$  isomorph zu einem durch Knotenverschmelzung entstandenen Untergraphen von  $G_2$  ist.

Knotenverschmelzung bedeutet hier, dass zwei adjazente, benachbarte, Knoten  $V_1$  und  $V_2$  unter Entfernung einer zu diesen beiden Knoten inzidenten Kante zu einem Knoten  $V_{12}$  verschmolzen werden, wobei alle restlichen Kanten beibehalten werden. Zum Beispiel ist in der Abbildung  $G_1$  ein Minor von  $G_2$ .

Die Minor-Beziehung definiert eine partielle Ordnungsrelation auf den Isomorphie-Klassen von Graphen. Robertson und Seymour haben gezeigt, dass für jede unendliche Folge  $G_1, G_2, \dots$  von endlichen Graphen stets Indizes  $i$  und  $j$  mit  $i < j$  existieren, so dass  $G_i$  ein Minor von  $G_j$  ist.



### Klassen von Graphen

Endliche Graphen besitzen eine endliche Knotenmenge und eine endliche Kantenmenge. Anderenfalls werden die Graphen unendlich genannt.

In regulären Graphen vom Grad  $r$  haben alle Knoten den Grad  $r$ .

Ein ungerichteter schlichter Graph mit der Knotenmenge  $V$  heißt vollständiger Graph, wenn je zwei verschiedene Knoten aus  $V$  durch eine Kante verbunden sind. Ein vollständiger Graph mit  $n$ -elementiger Knotenmenge wird mit  $K_n$  bezeichnet.

Kann man die Knotenmenge eines ungerichteten schlichten Graphen  $G$  in zwei disjunkte Klassen  $X$  und  $Y$  zerlegen, so dass jede Kante von  $G$  einen Knoten aus  $X$  mit einem Knoten aus  $Y$  verbindet, dann heißt  $G$  ein paarer Graph oder bipartiter Graph.

Ein paarer Graph wird vollständiger paarer Graph genannt, wenn jeder Knoten aus  $X$  mit jedem Knoten aus  $Y$  durch eine Kante verbunden ist. Bei  $n$  Knoten gibt es dann  $\binom{n}{2} = n/2 (n-1)$  Kanten.

Ist X eine n-elementige und Y eine m-elementige Menge, dann wird der Graph mit  $K_{n,m}$  bezeichnet.

Beispiel: Die obere Abbildung zeigt einen vollständigen Graphen mit 5 Knoten. Die untere Abbildung zeigt einen vollständigen paaren Graphen mit 2-elementiger Knotenmenge X und 3-elementiger Knotenmenge Y. Weitere spezielle Klassen von Graphen sind ebene Graphen, Bäume und Transportnetze.

**Satz von Dirac**

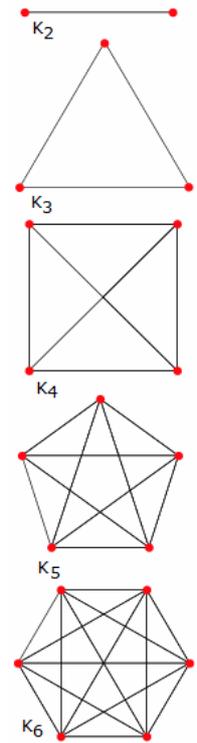
Enthält ein schlichter Graph  $G = (V,E)$  mindestens 3 Knoten, und gilt  $d_G(v) \geq |V|/2$  für jeden Knoten v von G dann enthält G einen Hamilton-Kreis. Diese hinreichende Bedingung ist nicht notwendig.

**Satz von Ore**

Enthält ein schlichter Graph  $G = (V,E)$  mindestens 3 Knoten, und gilt  $d_G(v) + d_G(w) \geq |V|$  für je zwei nichtadjazente Knoten v, w, dann enthält G einen Hamilton-Kreis.

**Vollständiger Graph**

Ein ungerichteter schlichter Graph mit der Knotenmenge V heißt vollständiger Graph, wenn je zwei verschiedene Knoten aus V durch eine Kante verbunden sind. Ein vollständiger Graph mit n-elementiger Knotenmenge wird mit  $K_n$  bezeichnet. Links sind die vollständigen Graphen  $K_2$  bis  $K_6$  abgebildet. Die Verbindungsmatrix dieser Graphen hat die Form, dass in jeder Zeile und Spalte eine 1 steht, mit Ausnahme der Hauptdiagonalen, in der ausschließlich Nullen stehen.



Hat der Graph n Knoten, so besitzt er  $\binom{n}{2} = n/2 (n-1)$  ungerichtete Kanten.

Jeder vollständige Graph mit einer ungeraden Anzahl von Knoten besitzt einen Euler-Kreis.

Jeder vollständige Graph besitzt einen Hamilton-Kreis. Für Knotenzahlen  $n = 3, 4, \dots$  gibt es 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, ... verschiedene Hamiltonkreise, d.h.  $(n-1)!$ .

Auf einem vollständigen Graphen  $K_n$  gibt es für  $n = 3, 4, \dots$

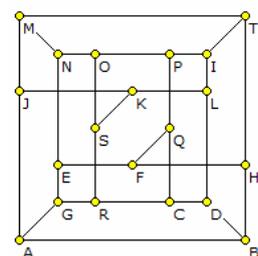
$$C_n = \sum_{k=3}^n 1/2 \binom{n}{k} (k-1)!$$

graphische Zyklen, d.h.

- 1, 7, 37, 197, 1172, 8018, 62814, 556014, 5488059, 59740609, 710771275, 9174170011,
- 127661752406, 1904975488436, 30341995265036, 513771331467372, 9215499383109573,
- 174548332364311563, 3481204991988351553, 72920994844093191553, 1600596371590399671784,
- ...

**Cocktail-Party-Graph**

Der Cocktail-Party-Graph der Ordnung n wird auch Hyperoktaedergraph (Biggs 1993) genannt und besteht aus  $2n$  Knoten. Jeweils zwei Knoten bilden ein Paar. Kanten werden von jedem Knoten zu jedem anderen gezogen, mit Ausnahme zu dem Knoten, mit dem ein Paar gebildet wird.



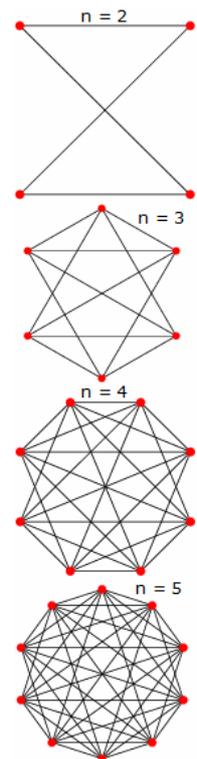
Der Cocktail-Party-Graph ist der duale Graph zum Hyperwürfel-Graph. Der Graph zur Ordnung 3 ist der Oktaeder-Graph, der zur Ordnung 4 der 16-Zell-Graph.

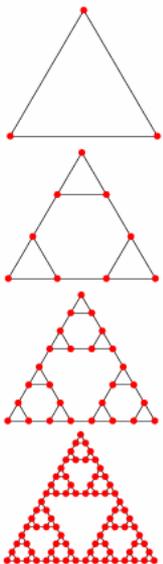
Dieser Graph symbolisiert das Party-Begrüßungsproblem, bei dem gefragt wird, wie oft Hände "geschüttelt" werden, wenn n Paare zur Party kommen.

Auf den Cocktail-Party-Graphen gibt es, aber Ordnung 2, einen Hamilton-Kreis. Für die Ordnung  $n = 2, 3, 4, \dots$  findet man insgesamt

- 2, 32, 1488, 112512, 12771840, 2036229120, 434469611520,
- 119619533537280, 41303040523960320,
- 17481826772405452800, 8902337068174698086400,
- 5370014079716477003366400,
- 3786918976243761421064601600,
- 3087031512410698159166482022400,
- 2880726660365605475506018320384000, ...

verschiedene Hamilton-Kreise.





**Desargues-Graph**

Der Desargues-Graph ist ein kubischer, symmetrischer Graph mit 20 Knoten und 30 Kanten.

Sein Name erhielt er, da er mit der geometrischen Figur des Satzes von Desargues unmittelbar zusammenhängend.

Der Graph besitzt genau 48 verschiedene Hamilton-Kreise, aber keinen Euler-Kreis. Da alle Knoten die Ordnung 3 haben, gibt es unabhängig vom Anfangspunkt stets gleich viele Hamilton-Pfade. Bei diesem Graphen sind es 228.

**Hanoi-Graph**

Ein Graph  $H_n$  heißt Hanoi-Graph, wenn er mit der Zuganzahl beim Problem der Türme von Hanoi korrespondiert. Links sind die Graphen  $H_1$  bis  $H_4$  gezeigt.

Der Hanoi-Graph entsteht, wenn in einem Pascalschen Dreieck die eingetragenen ungeraden Binomialkoeffizienten diagonal und horizontal verbunden werden. (Pool 1994)

Der Graph  $H_n$  hat  $3^n$  Knoten und  $3(3^n - 1)/2$  Kanten, d.h. für  $n = 1, 2, \dots$

0, 3, 12, 39, 120, 363, 1092, 3279, 9840, 29523, 88572, 265719, 797160, 2391483, 7174452, 21523359, 64570080, 193710243, 581130732, 1743392199, 5230176600, 15690529803, 47071589412, 141214768239, ...

Jeder Hanoi-Graph hat einen Hamiltonkreis. Gerichtete Hamilton-Wege ergeben sich für  $n = 1, 2, \dots, 6, 36, 384, 5460$

**Vollständiger bipartiter Graph, vollständiger zweiteiliger Graph**

Ein vollständiger bipartiter Graph, ist ein bipartiter, d.h. zweiteiliger Graph, der aus zwei Mengen von Knoten besteht.

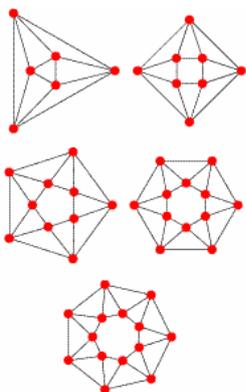
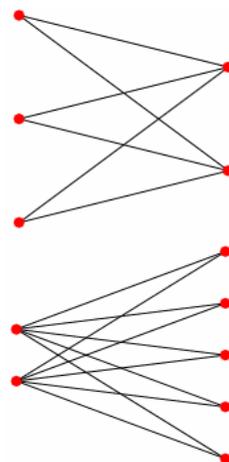
Innerhalb jeder Teilmenge ist kein Knoten mit einem anderen dieser Menge verbunden. Jeder Knoten ist aber mit jedem Knoten der anderen Menge verbunden.

In der Abbildung ist oben der vollständige bipartite Graph  $K_{3,2}$ , unten der Graph  $K_{2,5}$  zu sehen.

Auf vollständigen bipartiten Graphen sind nur selten Hamilton-Kreise und Hamilton-Pfade zu finden.

Euler-Kreise existieren für alle  $K_{2,n}$  mit  $n > 1$  und ansonsten nur für  $K_{m,n}$ ,  $m, n > 2$ , wenn  $m$  und  $n$  gerade sind.

Der vollständige bipartite Graph  $K_{18,18}$  spielt in dem Roman "Das Foucaultsche Pendel" von Umberto Eco (1989) eine wichtige Rolle.



**Antiprismen-Graph**

Ein Antiprismen-Graph ist ein Graph, der mit den Kanten eines Antiprismas übereinstimmt. Diese Graphen sind polyhedral und planar.

Der  $n$ -te Antiprismen-Graph hat  $2n$  Knoten und  $4n$  Kanten und ist isomorph zum Graphen  $Ci_{2n}(1,2)$ . Der 3-Antiprismen-Graph ist isomorph zum Oktaedergraphen.

Ab  $n = 3$  existieren stets Euler-Kreise und Hamilton-Kreise. Für  $n = 3, 4$  und  $5$  gibt es 1488, 11728, 89936 verschiedene Euler-Kreise. Die Anzahl der Hamilton-Kreise  $a_n$  ist für  $n = 3, 4, \dots$

$$a_n = 32, 58, 112, 220, 450, 938, 1982, \dots$$

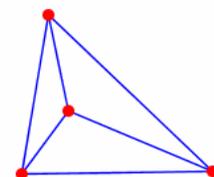
Es gilt die Beziehung

$$a_n = 3 a_{n-1} - a_{n-2} - 2 a_{n-3} + a_{n-5} \quad \text{oder} \quad a_n = 2 a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4} + 12$$

**Planarer Graph, plättbarer Graph**

Abbildung: planare Zeichnung des  $K_4$

Ein planarer Graph, auch plättbarer Graph, ist ein Graph, der auf einer Ebene mit Punkten für die Knoten und Linien für die Kanten dargestellt werden kann, so dass sich die Kanten nicht schneiden.



Eine Darstellung eines Graphen in der Ebene wird auch Einbettung genannt. Ein ebener Graph ist ein in die Ebene eingebetteter Graph. Durch die Einbettung wird die Ebene in zusammenhängende Gebiete geteilt, die von den Kanten des Graphen begrenzt werden.

Die begrenzenden Kanten eines Gebietes bilden seinen Rand. Das Gebiet um den Graphen herum wird äußeres Gebiet genannt.

Die Einbettung kann auch auf einer Kugeloberfläche stattfinden. Umgekehrt ist auch jeder auf einer Kugel kreuzungsfrei darstellbare Graph planar.

Zwei Einbettungen sind äquivalent, wenn es eine isomorphe Abbildung zwischen den Rändern ihrer Gebiete gibt. Es lässt sich zeigen, dass für jeden planaren Graph auch eine Einbettung existiert, bei der die Kanten Geraden sind.

Ein Graph heißt maximal planar oder Dreiecksgraph, wenn er planar ist und ihm keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass dadurch seine Planarität verloren geht.

Ein Graph heißt fast planar oder kritisch planar, wenn der Graph durch Entfernen eines beliebigen Knotens planar wird. Ein Graph heißt kreisartig planar, wenn er sich so in Ebene einbetten lässt, dass alle seine Ecken auf dem Rand ein und desselben Gebiets liegen.

In einem zusammenhängenden planaren Graphen gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz stets:  
 Knotenanzahl + Gebietsanzahl = Kantenanzahl + 2

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass planare Graphen in Bezug auf die Knotenanzahl nur linear viele Kanten haben können. Ist ein planarer Graph 3-fach zusammenhängend, so sind alle seine Einbettungen äquivalent. Der Vier-Farben-Satz besagt, dass sich planare Graphen mit 4 Farben färben lassen. Dreiecksfreie planare Graphen sind 3-färbbar. Ein planarer Graph kann höchstens 5-fach zusammenhängend sein.

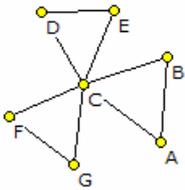
### Dreiecksgraph

Ein Dreiecksgraph ist ein Graph, der planar ist und dem keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass dadurch seine Planarität verloren geht.

Eine andere Bezeichnung für diese Eigenschaft ist maximal planar.

Jedes Gebiet eines maximal planaren Graphen, auch das äußere, wird von genau drei Kanten begrenzt, daher der Name Dreiecksgraph.

Ein Dreiecksgraph mit  $n$  Knoten hat genau  $3n-6$  Kanten und  $2n-4$  Gebiete, falls  $n > 2$ .

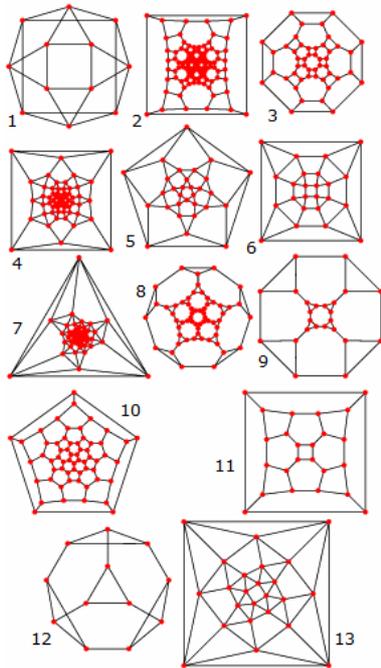


### Freundschaftsgraph

Freundschaftssatz: In einem Raum, in dem je zwei Personen genau einen gemeinsamen Freund haben, gibt es eine Person, die mit allen befreundet ist. Der Satz wurde 1966 von Erdos, Rényi und Sós bewiesen.

Besitzen in einem endlichen Graphen je zwei Knoten genau einen gemeinsamen Nachbarn, dann gibt es einen Knoten, der zu allen anderen adjazent ist. Der Freundschaftssatz gilt nur für endliche Graphen.

Endliche Graphen, die die Voraussetzungen des Freundschaftssatzes erfüllen, werden Freundschaftsgraphen genannt.



### Archimedischer Graph

Unter einem Archimedischen Graphen versteht man einen Graphen, der mit dem Kantengerüst eines Archimedischen Körpers korrespondiert. Damit existieren genau 13 Archimedische Graphen. In der Abbildung zeigen die Nummern den zugehörigen Graphen von

- 1 Kuboktaeder (3,4,3,4)
- 2 abgestumpftes Ikosidodekaeder (4,6,10)
- 3 abgestumpftes Kuboktaeder (4,6,8)
- 4 kleines Rhombenikosidodekaeder (3,4,5,4)
- 5 Ikosidodekaeder (3,5,3,5)
- 6 kleines Rhombenkuboktaeder (3,4,4,4)
- 7 abgeschrägtes Dodekaeder (3,3,3,3,5)
- 8 abgestumpftes Dodekaeder (3,10,10)
- 9 abgestumpftes Hexaeder (3,8,8)
- 10 abgestumpftes Ikosaeder (5,6,6)
- 11 abgestumpftes Oktaeder (4,6,6)
- 12 abgestumpftes Tetraeder (3,6,6)
- 13 abgeschrägtes Hexaeder (3,3,3,3,4)

Alle Graphen sind ecken-transitiv. Kuboktaeder- und Ikosidodekaedergraph sind zusätzlich kanten-transitiv.

Auf allen Graphen gibt es Hamilton-Wege; Euler-Wege nur auf den Graphen des Kuboktaeders,

Ikosidodekaeders, kleinen Rhombenikosidodekaeders und des kleinen Rhombenkuboktaeders.

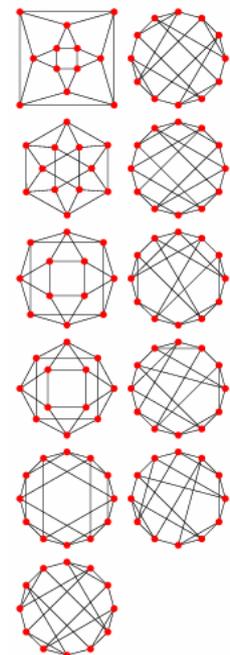
### Kuboktaedergraph

Der Kuboktaedergraph ist ein symmetrischer Archimedischer Graph mit 12 Knoten und 24 Kanten. Er entspricht dem Kantengitter des Kuboktaeders.

Der Graph ist planar, hat einen Durchmesser und Radius von 3 und ist hamiltonsch. Von einem Knoten aus existieren 200 verschiedene Hamilton-Kreise und 576 Hamilton-Pfade.

Die Automorphismengruppe hat die Ordnung 48. Seine chromatische Zahl ist 3, das chromatische Polynom

$$\pi_G(z) = z(z-1)(z-2)(z^9 - 21z^8 + 203zz^7 - 1191z^6 + 4701z^5 - 13031z^4 + 25524z^3 - 34192z^2 + 28400z - 11072)$$

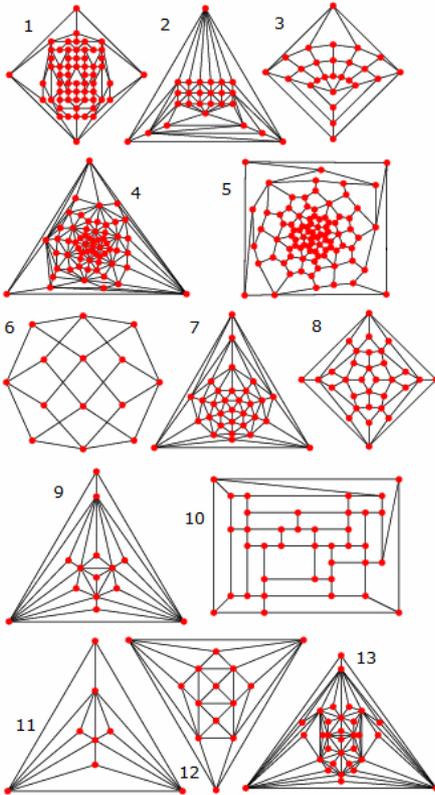
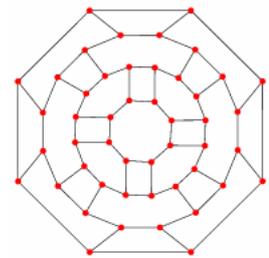
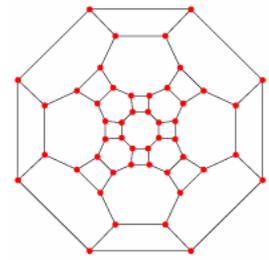


## Großer Rhombenkuboktaedergraph

Der große Rhombenkuboktaedergraph ist ein symmetrischer Archimedischer Graph mit 48 Knoten und 72 Kanten. Er entspricht dem Kantengitter des großen Großer Rhombenkuboktaeders.

Der Graph ist planar, hat einen Durchmesser und Radius von 9 und ist hamiltonsch. Von einem Knoten aus existieren 2684 verschiedene Hamilton-Kreise. Seine chromatische Zahl ist 2.

Der große Rhombenkuboktaedergraph ist der Cayley-Graph der Permutationen  $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 5, 7\}, \{1, 3, 2, 5, 4, 7, 6\}\}$ .



## Archimedischer dualer Graph

Unter einem Archimedischen dualen Graphen versteht man einen Graphen, der mit dem Kantengerüst eines Catalanischen Körpers korrespondiert.

Damit existieren genau 13 Archimedische duale Graphen. In der Abbildung zeigen die Nummern den zugehörigen Graphen von

- 1 Deltoid-60-Flächner
- 2 Hexakisoktaeder
- 3 Deltoid-24-Flächner
- 4 Hexakisikosaeder
- 5 pentagonales Hexacontaeder
- 6 Rhombendodekaeder
- 7 Pentakisidodekaeder
- 8 Rhombentriakontaeder
- 9 Triakisoktaeder
- 10 pentagonales Ikositetraeder
- 11 Triakistetraeder
- 12 Tetrakisidodekaeder, Pyramidenwürfel
- 13 Triakisikosaeder

Keiner der Graphen ist ecken-transitiv. Hamilton-Wege gibt es auf: Hexakisoktaeder, Hexakisikosaeder, pentagonales Hexacontaeder, Pentakisidodekaeder, pentagonales Ikositetraeder, Tetrakisidodekaeder und Triakistetraeder.

Euler-Wege auf: Hexakisoktaeder, Hexakisikosaeder und Tetrakisidodekaeder.

## Satz von Kuratowski

Der Satz von Kuratowski (nach Kazimierz Kuratowski) macht wichtige Aussagen zu planaren Graphen und beantwortet die Frage nach der Planarität eines Graphen. Allgemein formuliert ist ein Graph genau dann planar oder plättbar, wenn es möglich ist den Graphen so zu zeichnen, dass sich die Kanten des Graphen nicht schneiden. Die Kanten dürfen sich lediglich in den Knoten des Graphen berühren.

Der Satz von Kuratowski benutzt zwei spezielle Graphen:  $K_5$  und  $K_{3,3}$ .

Bei  $K_5$  handelt es sich um den vollständigen Graphen mit 5 Knoten, bei  $K_{3,3}$  um einen vollständig bipartiten Graphen, der in zwei je dreielementige Teilmengen aufgeteilt ist. Beide Graphen sind nicht planar. Sie sind sogar die kleinsten nicht-planaren Graphen überhaupt, was direkt aus dem Satz von Kuratowski folgt.

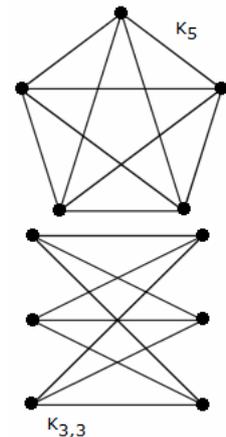
## Satz von Kuratowski

Ein endlicher Graph ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen enthält, der durch Erweiterung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  entstanden ist.

Erweiterung bedeutet hier das beliebig oft wiederholbare, auch Null mal, Einfügen von neuen Knoten auf Kanten. Mit Teilgraph ist hier ein Graph gemeint, der aus dem ursprünglichen Graphen durch Entfernen von Knoten bzw. Kanten entsteht, wobei die Entfernung eines Knoten mitsamt aller inzidenten Kanten einen induzierten Teilgraph ergibt.

Äquivalente Formulierungen des Satzes von Kuratowski sind:

- 1) Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  ein Minor von  $G$  ist.
- 2) Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er keinen zu  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorphen Teilgraph enthält. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski ist der Satz von Robertson und Seymour.



## Wege, Pfade, Zyklen und Kreise in Graphen

### Gerichtete und ungerichtete Wege

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter/gerichteter Graph und  $W = (v_1, \dots, v_n)$  eine Folge von Knoten aus  $V$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $i$  aus  $\{1, \dots, n-1\}$  gilt:

- 1) Die Menge  $\{v_i, v_{i+1}\}$  ist Element von  $E$ , falls  $G$  ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten ist
- 2) Das Paar  $(v_i, v_{i+1})$  ist Element von  $E$ , falls  $G$  ein gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten ist
- 3)  $E(\{v_i, v_{i+1}\}) > 0$ , falls  $G$  ein ungerichteter Graph mit Mehrfachkanten ist
- 4)  $E(\{v_i, v_{i+1}\}) > 0$ , falls  $G$  ein gerichteter Graph mit Mehrfachkanten ist

Dies bedeutet, dass  $v_i$  und  $v_{i+1}$  durch eine Kante verbunden sind. Dann bezeichnet man  $W$  als ungerichteten Weg in  $G$ , falls  $G$  ungerichtet ist, und als gerichteten Weg in  $G$ , falls  $G$  gerichtet ist. Eine andere Bezeichnung für Weg ist Kantenfolge. Den Knoten  $v_1$  nennt man Startknoten von  $W$  und den Knoten  $v_n$  Endknoten von  $W$ .

### Pfade, Zyklen und Kreise

Einen Weg  $W$  bezeichnet man als Pfad, falls alle Knoten in der Folge  $W$  voneinander verschieden sind, das heißt falls für alle  $i$  und  $j$  aus  $\{1, \dots, n\}$  gilt, dass  $v_i \neq v_j$ , falls  $i \neq j$ .

Zyklus, falls Start- und Endknoten von  $W$  identisch sind, das heißt falls  $v_1 = v_n$ .

Kreis, falls nur Start- und Endknoten von  $W$  identisch sind, das heißt falls  $v_1 = v_n$  und  $v_1, \dots, v_{n-1}$  einen Pfad bilden, also für alle  $i$  und  $j$  aus  $\{1, \dots, n-1\}$  gilt, dass  $v_i \neq v_j$ , falls  $i \neq j$ .

Jeder Kreis, Zyklus oder Pfad in einem Graphen  $G$  ist also auch ein Weg und jeder Kreis ist auch ein Zyklus in  $G$ . Wege, Pfade, Zyklen und Kreise definiert man alternativ auch über Kantenzüge oder Teilgraphen. Gibt es einen Weg von Knoten  $u$  zu Knoten  $v$  in  $G$ , so heißt  $v$  von  $u$  aus erreichbar. In ungerichteten Wegen und Pfaden bezeichnet man den Startknoten meist ebenfalls als Endknoten. In Zyklen und Kreisen verwendet man die Bezeichnungen Startknoten und Endknoten meist nicht.

### Zyklischer Graph

Graphen mit Zyklen heißen zyklisch. Graphen ohne Zyklen heißen azyklisch.

Ein Zyklus oder Kreis heißt trivial, wenn er weniger als drei Knoten enthält. Triviale Kreise oder Zyklen werden meist nicht betrachtet. Ein Kreis, der genau drei Knoten enthält, nennt man oft Dreieck. Ein Graph ohne Dreieck nennt man dann dreiecksfrei.

### A-B-Weg, v-w-Weg, a-B-Fächer

Sind  $A$  und  $B$  Teilmengen von  $V$ , so bezeichnet man einen Weg als A-B-Weg, falls der Startknoten in  $A$  und der Endknoten in  $B$  liegt.

Statt von einem  $\{v\}$ - $\{w\}$ -Weg spricht man auch von einem v-w-Weg. Eine Menge von a-B-Wegen nennt man einen a-B-Fächer, wenn die Wege paarweise nur den Knoten  $a$  gemeinsam haben.

### Kreuzungsfrei, knotendisjunkt, kantendisjunkt

Zwei Wege  $W_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,k})$  und  $W_2 = (v_{2,1}, \dots, v_{2,l})$  heißen kreuzungsfrei, knotendisjunkt oder einfach nur disjunkt, falls es kein Paar  $(i, j)$  mit  $i$  aus  $\{2, \dots, k-2\}$  und  $j$  aus  $\{2, \dots, l-2\}$  gibt, so dass  $v_{1,i} = v_{2,j}$  ist, das heißt, wenn sie keine inneren Knoten gemeinsam haben.

Eine Menge von Wegen nennt man kreuzungsfrei, knotendisjunkt oder disjunkt, wenn die Wege paarweise disjunkt sind.

Zwei Wege  $W_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,k})$  und  $W_2 = (v_{2,1}, \dots, v_{2,l})$  heißen kantendisjunkt, falls es kein Paar  $(i, j)$  mit  $i$  aus  $\{1, \dots, k-1\}$  und  $j$  aus  $\{1, \dots, l-1\}$  gibt, so dass  $v_{1,i} = v_{2,j}$  und  $v_{1,i+1} = v_{2,j+1}$ .

Eine Menge von Wegen nennt man kantendisjunkt, wenn die Wege paarweise kantendisjunkt sind.

### Länge eines Weges (Zyklus, Kreises), Abstand

In Graphen ohne Gewichte auf den Kanten bezeichnet man mit  $n-1$  die Länge eines Weges oder Pfades und mit  $n$  die Länge eines Zyklus oder Kreises  $(v_1, \dots, v_n)$ .

Anschaulich zählt man die Anzahl zugehöriger Kanten.

In kantengewichteten Graphen bezeichnet man als Länge eines Weges die Summe der Kantengewichte aller zugehörigen Kanten.

Als einen kürzesten Weg von einem Knoten  $s$  zu einem Knoten  $t$  in einem Graphen bezeichnet man einen Weg von  $s$  nach  $t$ , dessen Länge minimal ist. Die Länge eines kürzesten Weges nennt man dann Abstand oder Distanz von  $s$  nach  $t$ . Falls kein Weg zwischen zwei Knoten existiert, so setzt man den Abstand auf unendlich.

Man beachte, dass in gerichteten Graphen der Abstand von der Richtung des Weges abhängt. Insbesondere kann es sein, dass nur in eine Richtung ein gerichteter Weg existiert.

### Durchmesser und Taillenweite

Den größten Abstand zwischen zwei Knoten in einem Graphen  $G$  nennt man Durchmesser von  $G$ .

Als Taillenweite eines Graphen bezeichnet man die Länge eines kürzesten nicht trivialen Kreises. Falls der Graph keinen Kreis besitzt, so setzt man die Taillenweite auf unendlich.

## Distanzgraph

Der Distanzgraph zu einem Graphen  $G = (V, E)$  bezeichnet den vollständigen; das heißt je zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden ggf. beide Richtungen; kantengewichteten Graphen auf der Knotenmenge  $V$ , der jeder Kante als Kantengewicht den Abstand zwischen den beiden Knoten in  $G$  zuordnet.

## Operationen auf Graphen

Sei  $G_1 = (V, E_1)$  ein ungerichteter bzw. gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten. Der ungerichtete bzw. gerichtete Graph ohne Mehrfachkanten  $G_2 = (V, E_2)$  heißt komplementärer Graph, Komplementgraph oder einfach nur Komplement von  $G_1$ , falls die Schnittmenge von  $E_1$  und  $E_2$  leer ist und die Vereinigungsmenge von  $E_1$  und  $E_2$  die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von  $V$  (im ungerichteten Fall) bzw. das kartesische Produkt  $V \times V$  (im gerichteten Fall) ergibt.

Eine Kante ist also genau dann im Komplement eines Graphen  $G$  enthalten, wenn sie nicht in  $G$  enthalten ist. Das Komplement des Komplementes von  $G$  ist demnach  $G$  selbst.

Sind  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  Graphen desselben Typs, so bezeichnet

$G_1 + G_2$  den Graphen, der entsteht, wenn man die Knoten- und Kantenmenge vereinigt,

$G_1 - E_2$  den Graphen, der entsteht, wenn man  $E_2$  von der Kantenmenge von  $G_1$  abzieht,

$G_1 - V_2$  den Graphen, der entsteht, wenn man  $V_2$  von der Knotenmenge von  $G_1$  abzieht und alle

Kanten entfernt, die Knoten aus  $V_2$  enthalten.

Man schreibt auch abkürzend

$G_1 + E_2$ , falls  $V_2$  Teilmenge von  $V_1$  ist,

$G_1 + V_2$ , falls  $E_2$  leer oder Teilmenge von  $E_1$  ist,

$G_1 + \{v, w\}$ , falls  $G_2 = (\{v, w\}, \{\{v, w\}\})$  ist,

$G_1 + v$ , falls  $G_2 = (\{v\}, \{\})$ ,

$G_1 - \{v, w\}$ , falls  $E_2 = \{\{v, w\}\}$ ,

$G_1 - v$ , falls  $V_2 = \{v\}$ .

Sei  $G_1 = (V_1, E_1)$  ein ungerichteter Graph,  $e = \{v, w\}$  eine Kante von  $G_1$  und  $a$  ein Knoten, der nicht zu  $V_1$  gehört. Sei ferner

$E = \{\{a, x\} \mid \text{für alle } x \text{ aus } V_1 \setminus \{v, w\}, \text{ für die } \{v, x\} \text{ oder } \{w, x\} \text{ Kante von } G \text{ ist}\}$ , falls  $G_1$  Graph ohne Mehrfachkanten ist, bzw.

$E(\{a, x\}) = E_1(\{v, x\}) + E_1(\{w, x\})$  für alle  $x$  aus  $V_1 \setminus \{v, w\}$  und  $E(\{x, y\}) = 0$  für alle  $x$  und  $y$  aus  $V_1 \setminus \{v, w\}$ , falls  $G_1$  Graph mit Mehrfachkanten ist.

Man sagt, der Graph  $G_2 = (V_2, E_2)$  entsteht aus  $G_1$  durch Kontraktion von  $e$  zu  $a$ , falls  $G_2 = G_1 - \{v, w\} + a + E$ . Man nennt diese Operation Kantenkontraktion.

## Zusammenhang von Graphen, Konnektivität

Der Grad des Zusammenhangs bzw. die Konnektivität von Graphen bedeutet intuitiv, dass Wege zwischen mindestens zwei Knoten im Graphen bestehen.

## Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt zusammenhängend, falls es zu je zwei beliebigen Knoten  $v$  und  $w$  aus  $V$  einen ungerichteten Weg in  $G$  gibt, mit  $v$  als Startknoten und  $w$  als Endknoten.

Falls  $G$  nicht zusammenhängend ist, nennt man  $G$  unzusammenhängend.

Sind  $A, B$  und  $X$  Teilmengen von  $V$  und ist  $Y$  Teilmenge von  $E$ , so nennt man  $Z = (X, Y)$  einen A-B-Trenner in  $G$ , falls für jeden A-B-Weg  $(v_1, \dots, v_k)$  in  $G$  ein  $i$  aus  $\{1, \dots, k\}$  oder ein  $j$  aus  $\{1, \dots, k-1\}$  existiert, so dass  $v_i$  Element von  $X$  oder  $\{v_j, v_{j+1}\}$  Element von  $Y$  ist.

Man sagt dann, dass  $Z$  die Knotenmengen  $A$  und  $B$  in  $G$  trennt. Statt " $(X, \{\})$ " bzw. " $(\{v\}, \{\})$ " bzw. " $(\{\}, Y)$ " bzw. " $(\{\}, \{e\})$ " trennt  $A$  und  $B$  in  $G$ " sagt man auch " $X$  bzw.  $v$  bzw.  $Y$  bzw.  $e$  trennt  $A$  und  $B$  in  $G$ ".

Allgemeiner sagt man  $Z$  trennt  $G$ , wenn  $Z$  in  $G$  zwei Ecken aus  $V \setminus X$  trennt.

$G$  heißt  $k$ -fach kantenzusammenhängend, wenn es keine maximal  $k-1$  elementige Kantenmenge in  $G$  gibt, die  $G$  trennt. Als Kantenzusammenhangszahl eines Graphen  $G$  bezeichnet man das größte  $k$ , sodass  $G$   $k$ -fach kantenzusammenhängend ist.

$G$  heißt  $k$ -fach knotenzusammenhängend, wenn es keine maximal  $k-1$ -elementigen Knotenmenge in  $G$  gibt, die  $G$  trennt. Statt  $k$ -fach knotenzusammenhängend sagt man auch oft kürzer  $k$ -fach zusammenhängend oder  $k$ -zusammenhängend. Als Knotenzusammenhangszahl eines Graphen  $G$  bezeichnet man das größte  $k$ , sodass  $G$   $k$ -zusammenhängend ist.

Ist  $U$  eine Teilmenge von  $V$  mit der Eigenschaft, dass der von  $U$  induzierte Teilgraph  $G[U]$  von  $G$   $k$ -zusammenhängend ist und keine Teilmenge  $W$  von  $V$  mit  $U/W$  existiert, so dass der von  $W$  induzierte Teilgraph  $G[W]$  von  $G$   $k$ -zusammenhängend ist, so nennt man  $G[U]$  eine  $k$ -Zusammenhangskomponente von  $G$ . Eine 1-Zusammenhangskomponente nennt man auch einfach nur Zusammenhangskomponente und eine 2-Zusammenhangskomponente nennt man Block.

## Ungerichtete Graphen

Ein Knoten  $v$  heißt Artikulation von  $G$ , wenn er zwei andere Knoten  $x$  und  $y$  der gleichen Zusammenhangskomponente in  $G$  trennt. Eine Kante  $e$  heißt Brücke von  $G$ , wenn sie ihre beiden inzidenten Knoten trennt.

Man bezeichnet den Graphen, der als Knotenmenge die Blöcke und Artikulationen von  $G$  enthält, eine Artikulation  $a$  mit einem Block  $B$  verbindet, falls  $a$  in  $G$  zu  $B$  gehört und sonst keine weiteren Kanten besitzt als Blockgraph von  $G$ .

## Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt zusammenhängend von einem Knoten  $v$  aus, falls es zu jedem Knoten  $w$  aus  $V$  einen gerichteten Weg in  $G$  gibt, mit  $v$  als Startknoten und  $w$  als Endknoten.  $G$  heißt stark zusammenhängend, falls  $G$  von jedem Knoten  $v$  aus  $V$  zusammenhängend ist.

Ein gerichteter Graph heißt zusammenhängend, falls der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Ein induzierter Teilgraph  $K = (V_K, E_K)$  von  $G$  heißt starke Zusammenhangskomponente von  $G$ , falls  $K$  stark zusammenhängend ist und kein stark zusammenhängender induzierter Teilgraph von  $G$  existiert, der  $K$  echt enthält.

Es gibt genau dann einen Weg mit  $v$  als Startknoten und  $w$  als Endknoten, wenn es einen Pfad mit  $v$  als Startknoten und  $w$  als Endknoten gibt. In den Definitionen kann man Weg auch durch Pfad ersetzen.

Mittels Tiefensuche lässt sich ein linearer Algorithmus implementieren, der die Zusammenhangskomponenten eines Graphen berechnet und so einen einfachen Test impliziert, ob der Graph zusammenhängend ist.

Der Test, ob ein gerichteter Graph von einem Knoten  $v$  aus zusammenhängend ist, funktioniert analog. Von Tarjan (1972) stammt ein linearer Algorithmus, der ebenfalls auf Tiefensuche basiert und in gerichteten Graphen die starken Zusammenhangskomponenten und leicht modifiziert in ungerichteten Graphen die Blöcke und Artikulationen berechnet.

Zur Berechnung von Knoten- und Kantenzusammenhangszahl gibt es polynomielle Algorithmen.

## Sätze zum Zusammenhang von Graphen

- 1) Ein ungerichteter Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn er einen spannenden Baum enthält.
- 2) Ein ungerichteter zusammenhängender Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn er keine Artikulation besitzt.
- 3) Die Knotenzusammenhangszahl ist höchstens so groß wie Kantenzusammenhangszahl und die Kantenzusammenhangszahl ist höchstens so groß wie der Minimalgrad.
- 4) Der Blockgraph  $G_B$  eines Graphen  $G$  ist ein Wald.  $G_B$  ist genau dann Baum, wenn  $G$  zusammenhängend ist.

## Satz von Menger

5) Ist  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph und sind  $A$  und  $B$  Teilmengen von  $V$ , so ist die kleinste Mächtigkeit einer  $A$  von  $B$  trennenden Knotenmenge gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter  $A$ - $B$ -Wege in  $G$ . Dieser Satz von Menger (1927) ist eine Verallgemeinerung des Satzes von König (1916), wonach in bipartiten Graphen die Paarungszahl der Knotenüberdeckungszahl entspricht.

Man folgert aus ihm leicht den Fächersatz: Ist  $B$  eine Teilmenge von  $V$  und  $a$  Element von  $V \setminus B$ , so ist die kleinste Mächtigkeit einer  $a$  von  $B$  in  $G$  trennenden Teilmenge  $X$  von  $V \setminus a$  gleich der größten Mächtigkeit eines  $a$ - $B$ -Fächers. Man zeigt dies, indem man  $A = N(a)$  setzt, d.h.  $A$  ist die Menge der Nachbarn von  $a$ , und den Satz von Mader anwendet.

Ganz ähnlich folgert man: Sind  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Knoten von  $G$ , so gilt:

- 1) Sind  $a$  und  $b$  nicht benachbart, so ist die kleinste Mächtigkeit einer  $a$  von  $b$  trennenden Teilmenge von  $V \setminus \{a, b\}$  gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter  $a$ - $b$ -Wege in  $G$ .
- 2) Die kleinste Mächtigkeit einer  $a$  von  $b$  trennenden Teilmenge  $Y$  von  $E$  ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kantendisjunkter  $a$ - $b$ -Wege in  $G$ .

Daraus lässt sich ableiten:

## globaler Satz von Menger

$G$  ist genau dann  $k$ -zusammenhängend, wenn  $G$  zwischen je zwei Ecken  $k$  disjunkte Wege enthält.

$G$  ist genau dann  $k$ -fach kantenzusammenhängend, wenn  $G$  zwischen je zwei Ecken  $k$  kantendisjunkte Wege enthält.

## Durchlaufbarkeit von Graphen

Es gibt in der Graphentheorie zahlreiche Probleme, die sich mit dem Durchlaufen von Graphen befassen. Man unterscheidet in Probleme, die sich einerseits mit dem Durchlaufen der Kanten, andererseits mit dem Durchlaufen der Knoten befassen.

## Eulerkreisproblem

Das Eulerkreisproblem untersucht die Durchlaufbarkeit der Kanten eines Graphen. Gesucht ist ein Zyklus, der alle Kanten des Graphen genau einmal durchläuft.

Dazu ist es notwendig und hinreichend, wenn der Graph zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Grad besitzen. Das Finden eines solchen Zyklus ist in linearer Laufzeit möglich.

## Briefträgerproblem

Das Briefträgerproblem (engl. Chinese Postman Problem), fragt nach einer kürzesten Route über alle Kanten eines kantengewichteten Graphen. Für Graphen, die einen Eulerkreis besitzen, entspricht diese Route einem Eulerkreis. In anderen Graphen müssen Kanten mehrfach durchlaufen werden.

Die Länge dieser Kanten muss minimiert werden. Dazu genügt es eine kleinste perfekte Paarung im Distanzgraphen aller Knoten mit ungeradem Grad zu finden. Dies ist in Polynomialzeit möglich.

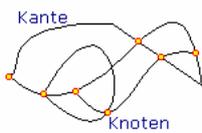
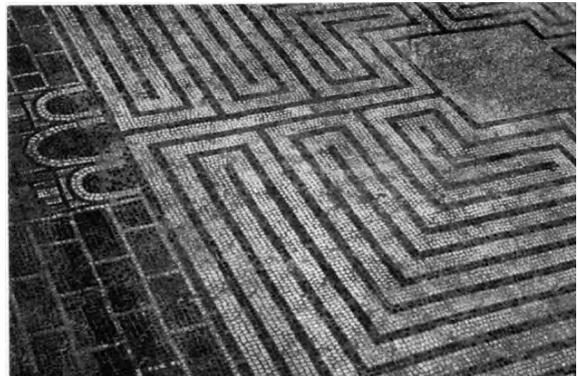
## Hamiltonkreisproblem

Das Hamiltonkreisproblem untersucht die Durchlaufbarkeit der Knoten eines Graphen. Gesucht ist ein Kreis, der jeden Knoten des Graphen enthält. Das Problem ist NP-vollständig.

## Problem des Handlungsreisenden

Das Problem des Handlungsreisenden (engl. Traveling Salesperson Problem) fragt nach einer kürzesten Rundreise über alle Knoten eines kantengewichteten vollständigen Graphen. Auch dieses Problem ist NP-vollständig. Für eine große Anzahl von Knoten ist das Problem nur approximativ lösbar.

**Labyrinthprobleme:** Fußbodenmosaik um 150 n.Chr. Stellt das klassische Labyrinth auf Kreta dar



## Fluchtproblem

Gesucht ist ein Algorithmus, nach dem in jedem Labyrinth bei beliebigem Startpunkt in endlich vielen Schritten der Ausgang erreicht wird.

Voraussetzung: zusammenhängender Graph  
untere Abbildung: Labyrinth auf einer antiken Münze aus Knossos



## Verfahren von Trémaux

1. Schreite fort, bis ein Knoten erreicht wird, der schon einmal betreten wurde oder nur eine einmündende Kante hat. Kehre dann zum vorhergehenden Standort zurück.

Handele weiter nach 2.

2. a) Gibt es eine noch nicht durchlaufende Kante, die in den Standort mündet, so durchlaufe eine solche. Handele weiter nach 1.

b) Sind alle einmündenden Kanten schon durchlaufen worden, manche aber erst einmal, so durchlaufe eine solche und handele weiter nach 2.

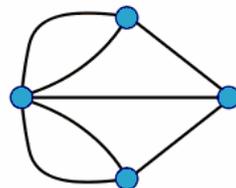
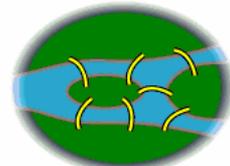
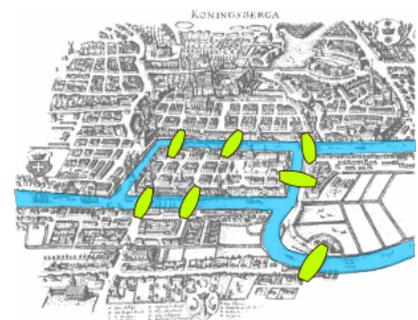
c) Sind alle in den Standort mündenden Kanten zweimal durchlaufen worden, so stoppe. (Ende)

**Ergebnis:** Jede Kante wird zweimal durchlaufen, je Richtung genau einmal.

## Verfahren von Tarry

1. Verlasse einen Knoten immer über eine Kante, die in dieser Richtung noch nicht durchlaufen wurde, wähle die Eintrittskante aber erst dann, wenn es keine andere Möglichkeit mehr gibt.

2. Gibt es keine einmündende Kante, die in der dem Standort fortführenden Richtung noch nicht durchlaufen wurde, so stoppe. (Ende)



## Königsberger Brückenproblem

### Euler 1736

Alle sieben Brücken sollen bei einem Spaziergang genau einmal passiert werden.

**Es existiert keine Lösung!**

### Eulersche Linie, Eulerkreis, Eulerzug, Eulerweg:

Ein geschlossener Kantenzug längs eines zusammenhängenden Graphen, bei welchem jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Eine Eulersche Linie existiert, wenn von jedem Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Kanten ausgeht.

Ein geschlossener Graph kann auf jeder Kante genau einmal durchlaufen werden, wenn maximal zwei Knoten mit ungeradzahlgiger Kantenzahl existieren ... sonst kein geschlossener Kantenzug!

Einen zusammenhängenden Graph, der einen Eulerkreis besitzt, bezeichnet man auch als eulersch.

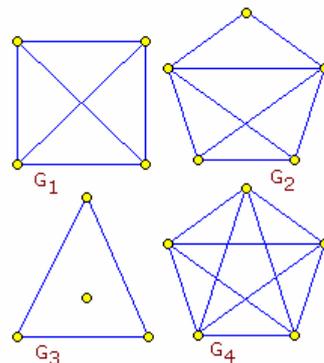
### Eulerbedingung

Die Eulerbedingung besagt, dass ein geschlossener Zug nur möglich ist, wenn für alle Knoten  $K$  bis auf höchstens zwei  $n(K)$  gerade ist. Dabei bezeichnet  $n(K)$  die Anzahl der von  $K$  ausgehenden Kanten.

### Eulerscher Graph

Ein zusammenhängender Graph, der eine geschlossene Eulersche Linie enthält, ist ein Eulerscher Graph.

Beispiele: Der Graph  $G_1$  hat keine Eulersche Linie. Der Graph  $G_2$  besitzt eine Eulersche Linie, ist aber kein Eulerscher Graph. Der Graph  $G_3$  hat eine geschlossene Eulersche Linie und ist kein Eulerscher Graph. Der Graph  $G_4$  ist ein Eulerscher Graph.



### Satz von Euler-Hierholzer

Ein Graph ist genau dann ein Eulerscher Graph, wenn er zusammenhängend ist und jeder Knoten positiven geraden Grad hat.

Für ungerichtete Graphen sind folgende Aussagen äquivalent:

G ist eulersch,

G ist zusammenhängend und jeder Knoten hat geraden Grad.

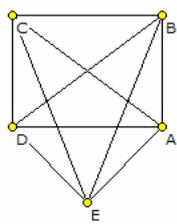
G ist zusammenhängend und die Kantenmenge von G ist die Vereinigung aller Kanten von paarweise disjunkten Kreisen.

Analog sind für gerichtete Graphen folgende Aussagen äquivalent:

G ist eulersch,

G ist stark zusammenhängend und für jeden Knoten sind Eingangsgrad und Ausgangsgrad äquivalent.

G ist stark zusammenhängend und die Kantenmenge von G ist die Vereinigung aller Kanten von paarweise disjunkten gerichteten Kreisen.

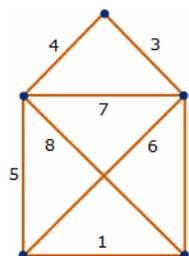


### Algorithmus von Hierholzer

Der Algorithmus von Hierholzer ist ein Algorithmus mit dem man in einem ungerichteten Graphen Eulerkreise bestimmt. Er geht auf Ideen von Carl Hierholzer zurück.

Voraussetzung: Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph, der nur Knoten mit geradem Grad aufweist.

- 1) Wähle einen beliebigen Knoten  $v_0$  des Graphen und konstruiere von  $v_0$  ausgehend einen Unterkreis  $K$  in  $G$ , der alle Eigenschaften eines Eulerkreises besitzt.
- 2) Vernachlässige nun alle Kanten dieses Unterkreises.
- 3) Am ersten Eckpunkt des ersten Unterkreises, dessen Grad größer 0 ist, lässt man nun einen weiteren Unterkreis entstehen, der wiederum ein Eulerkreis ist.
- 4) Erstelle so viele Unterkreise, bis alle Kanten von einem Unterkreis durchlaufen wurden.
- 5) Nun erhält man den Eulerkreis, indem man mit dem ersten Unterkreis beginnt und bei jedem Schnittpunkt mit einem anderen Unterkreis, den letzteren einfügt, und danach den ersten Unterkreis wieder bis zu einem weiteren Schnittpunkt oder dem Endpunkt fortsetzt.



### Offene Eulersche Linie, offener Eulerzug

Eine offene Eulersche Linie, auch Eulerweg, existiert in einem Graphen  $G$  genau dann, wenn es in  $G$  genau zwei Knoten ungeraden Grades gibt.

Die linke Abbildung zeigt einen Graphen, der keine geschlossene, sondern eine offene Eulersche Linie besitzt. Die Kanten sind entlang einer Eulerschen Linie fortlaufend nummeriert.

Dieser Graph enthält keinen Eulerkreis, dafür aber einen Eulerweg.

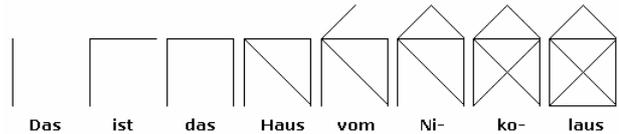
Ein Quadrat mit Diagonalen enthält keinen Eulerweg, da alle seine Knoten den Grad 3 haben.

## Haus vom Nikolaus

Das Haus des Nikolaus ist ein uraltes deutsches Zeichenspiel für kleine Kinder. Das Haus wird in einem Zug aus acht Strecken gezeichnet. Keine Strecke wird zweimal durchlaufen.

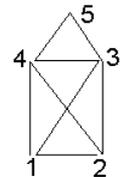
Während des Zeichnens spricht man den Satz: "Das ist das Haus des Ni - ko - laus". Zu jeder Strecke gehört ein Wort bzw. eine Silbe.

Man sagt auch: "Das ist das Haus vom Nikolaus" oder "Das ist ein wunderschönes Haus". Mädchen sollten den Satz beachten: "Wer dies nicht kann, kriegt keinen Mann". Auch für zwei Häuser nebeneinander gibt es einen Spruch: „Das ist das Haus vom Ni-ko-laue und ne-ben-an vom Weih-nachts-mann.“ Graphentheoretisch gesehen ist das Haus vom Nikolaus eine Eulersche Linie.

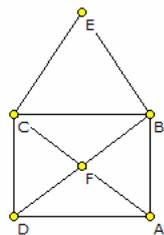
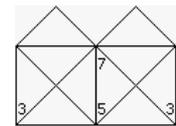


Numeriert man die Ecken durch, so kann die links beschriebene Zeichenmethode durch 142354312 angegeben werden. Insgesamt existieren 44 verschiedene Lösungen, die bei 1 beginnen und bei 2 enden. Analog beginnen 44 weitere Möglichkeiten bei 2 und enden bei 1.

- |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1,2,3,1,4,3,5,4,2 | 1,2,3,5,4,3,1,4,2 | 1,2,4,5,3,1,4,3,2 | 1,3,2,4,5,3,4,1,2 |
| 1,3,4,2,3,5,4,1,2 | 1,3,5,4,2,1,4,3,2 | 1,4,2,1,3,5,4,3,2 | 1,4,3,2,1,3,5,4,2 |
| 1,4,5,3,1,2,4,3,2 | 1,2,3,1,4,5,3,4,2 | 1,2,4,1,3,4,5,3,2 | 1,2,4,5,3,4,1,3,2 |
| 1,3,4,1,2,3,5,4,2 | 1,3,4,5,3,2,1,4,2 | 1,3,5,4,2,3,4,1,2 | 1,4,2,3,4,5,3,1,2 |
| 1,4,3,2,4,5,3,1,2 | 1,4,5,3,2,1,3,4,2 | 1,2,3,4,1,3,5,4,2 | 1,2,4,1,3,5,4,3,2 |
| 1,3,2,1,4,3,5,4,2 | 1,3,4,1,2,4,5,3,2 | 1,3,4,5,3,2,4,1,2 | 1,3,5,4,3,2,1,4,2 |
| 1,4,3,5,4,2,1,3,2 | 1,4,5,3,2,4,3,1,2 | 1,2,3,4,5,3,1,4,2 | 1,2,4,3,1,4,5,3,2 |
| 1,3,4,2,1,4,5,3,2 | 1,3,5,4,1,2,3,4,2 | 1,3,5,4,3,2,4,1,2 | 1,4,3,1,2,3,5,4,2 |
| 1,4,5,3,4,2,1,3,2 | 1,2,3,5,4,1,3,4,2 | 1,2,4,3,5,4,1,3,2 | 1,3,2,4,3,5,4,1,2 |
| 1,4,2,1,3,4,5,3,2 | 1,4,3,1,2,4,5,3,2 | 1,4,5,3,1,2,3,4,2 | 1,4,5,3,4,2,3,1,2 |



- |                   |
|-------------------|
| 1,3,2,1,4,5,3,4,2 |
| 1,4,3,5,4,2,3,1,2 |
| 1,3,5,4,1,2,4,3,2 |



Werden zwei Häuser vom Nikolaus aneinandergesetzt, so ist keine Eulersche Linie mehr möglich, da es vier Knoten mit ungeradem Grad gibt.

## Haus vom Nikolaus (2)

Für das Problem des Hauses vom Nikolaus existieren 44 verschiedene Lösungen. Dabei beinhaltet jeder Eulersche Kreis jedoch mindestens eine Kreuzung. Kreuzungsfreie Lösungen existieren nicht.

Eulersche Kreise ohne Kreuzung sind nur dann möglich, wenn der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BC als Knoten des Graphen hinzugefügt wird.

Für den oben abgebildeten Graph existieren dann 120 verschiedene Eulerkreise, davon auch kreuzungsfreie. Ein Beispiel ist in der unteren Abbildung zu sehen.



## Verbindungsmatrix

Besteht ein Graph G aus n Knoten  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , dann heißt die zu G gehörende  $n \times n$ -Matrix M die Verbindungsmatrix von G wenn in M gilt

$m_{ij} = 0$  wenn  $A_i$  und  $A_j$  nicht verbunden sind

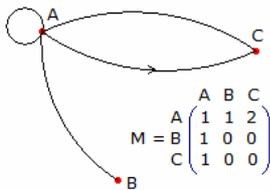
$m_{ij} = 1$  wenn  $A_i$  mit  $A_j$  durch mindestens einen Kanten verbunden ist

Im Allgemeinen ist  $A_i$  nicht mit sich selbst verbunden, andernfalls ist  $m_{ii} = 1$ . Ist  $A_i$  mit  $A_j$  verbunden, aber  $A_j$  nicht mit  $A_i$ , spricht man von einer gerichteten

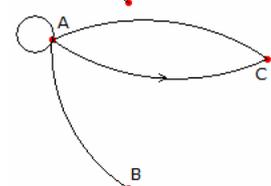
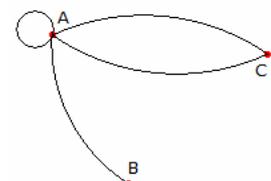
Kante von  $A_i$  nach  $A_j$  (Kante mit Pfeilrichtung).

In der Matrix ist dann  $m_{ij} = 1$  und  $m_{ji} = 0$ .

Beispiel: Für den abgebildeten Graphen ergibt sich die Verbindungsmatrix



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

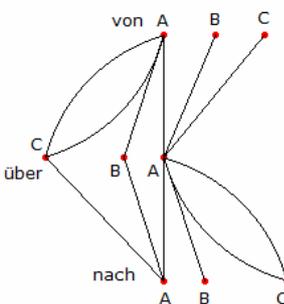
## Wegematrix

Besteht der Graph G aus n Knoten  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , dann heißt die zu G gehörende  $n \times n$ -Matrix M die Wegematrix von G, wenn in M gilt  $m_{ij} = \text{Anzahl der Kanten von } A_j \text{ nach } A_i$ .

Für das gezeichnete Beispiel ist dann die Wegematrix. Das Produkt zweier Wegematrizen

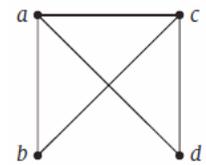
ergibt eine Matrix, die die Anzahl der Mehrfachverbindungen von einem Knoten zu einem anderen über einen dritten möglichen Knoten beschreibt. Für das Beispiel erhält man dann

Es gilt allgemein: Bei einem Graphen G mit n Knoten  $A_1, \dots, A_n$  gibt die  $n \times n$ -matrix  $M^n$  mit ihren Elementen  $m_{ij}$  die Anzahl der möglichen n-



$$M^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Wegeverbindungen von  $A_i$  nach  $A_j$  an. Dabei ist  $M$  die zum Graphen  $G$  gehörende Wegmatrix.



### Adjazenzmatrix

Eine Adjazenzmatrix ist eine binäre Matrix, die alle Knoten beinhaltet und jeweils die Erreichbarkeit zum direkten Nachfolger markiert. Addiert mit der Einheitsmatrix ergibt sich die Erreichbarkeitsmatrix im ersten Schritt.

Zur Erstellung der Adjazenzmatrix eines Graphen  $G = (V,E)$  mit  $n$  Knoten werden zunächst die Knoten  $v_1, \dots, v_n$  durchnummeriert. Dann wird eine  $n \times n$ -Matrix  $(a_{ij})$  erstellt, sodass  $a_{ij} = 1$ , falls  $(v_i, v_j) \in E$ , andernfalls  $= 0$

Für den Graphen in der Abbildung ergibt sich die Adjazenzmatrix:

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

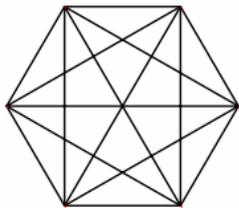
Eine Adjazenzliste ist eine Möglichkeit, Graphen im Computer darzustellen, wobei zu jedem Knoten eine Liste seiner Nachbarn geführt wird.

Die Adjazenzliste ist ein Assoziativspeicher, in der zu jedem Knoten  $v$  die Liste der zu  $v$  adjazenten Knoten gespeichert ist.

Für den abgebildeten Graphen erhält man die Adjazenzliste:

a	b	c	d
b	a	a	a
c	c	b	c
d	d		

Diese ist zu lesen: Zu a sind b, c und d adjazent; zu b sind a und c adjazent usw.



### Sim-Spiel

Sim ist ein Spiel für zwei Personen auf einem Brett aus sechs Punkten. Jeder Punkt ist mit jedem anderen über eine Linie verbunden.

Die beiden Spieler färben abwechselnd je eine Linie, jeder in seiner Farbe. Wer dabei ein Dreieck in der eigenen Farbe produziert, verliert sofort.

Die Ramsey-Theorie zeigt, dass kein Sim-Spiel unentschieden ausgehen kann. Dies gilt besonders, da die Ramsey-Zahl  $R(3,3;2) = 6$  ist.

Jede Zweifärbung des kompletten Graphen auf 6 Punkten ( $K_6$ ) muss ein einfarbiges Dreieck enthalten. Dies gilt auch für jeden Supergraph auf  $K_6$ .

Durch Computersimulationen wurde herausgefunden, dass der zweite Spieler bei fehlerfreiem Spiel immer gewinnt, jedoch gibt es noch keine für Menschen leicht erlernbare Siegstrategie.

Sim ist ein Beispiel eines Ramsey-Spieles. Andere Ramsey-Spiele sind möglich. So muss z.B. nach der Ramsey-Theorie auch jede Dreifärbung eines kompletten Graphen von 17 Punkten ein einfarbiges Dreieck enthalten. Bei dem dazugehörigen Ramsey-Spiel benutzen die zwei Spieler beliebige von drei Farben. Es ist noch unbekannt, wer dabei gewinnt.

### Satz von van der Waerden

Der Satz von van der Waerden ist ein berühmter Satz aus der Kombinatorik, konkret aus der Ramseytheorie. Er ist nach dem niederländischen Mathematiker B.L. van der Waerden benannt.

Der Satz besagt, dass für alle natürlichen Zahlen  $r$  und  $l$  eine natürliche Zahl  $N = N(r,l)$  existiert, so dass gilt:

Färbt man die Zahlen  $1, 2, \dots, N$  mit  $r$  "Farben", so existiert eine arithmetische Progression der Länge  $l$  in  $1, 2, \dots, N$ , die gleich gefärbt, d.h. monochrom ist.

Eine arithmetische Progression der Länge  $l$  ist das Anfangsstück einer arithmetischen Folge, so ist z. B. 3, 33, 63, 93 eine arithmetische Progression der Länge 4; d.h. vier Zahlen mit gleichen Abständen, hier 30. Eine arithmetische Progression der Länge 2 ist jede zweielementige Teilmenge der natürlichen Zahlen.

Beispiele: Für  $l = 2$  ist der Satz einfach: Ist  $r = 4$  und bezeichnen wir die Farben mit Rot, Blau, Gelb und Weiß, muss man  $N = 5$  wählen. Gleichgültig wie man die Farbe für die 5 wählt, eine Farbe ist doppelt.

Das ist das Schubfachprinzip.

Für  $l = 3$  und  $r = 3$  (ohne die Farbe Weiß) ein Beispiel:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17  
 B R G R R B G G B G R R B R R B ?

Egal welche Farbe man bei der 17 wählt, erhält man eine monochrome arithmetische Progression: bei Rot 11, 14, 17, bei Blau 9, 13, 17 und bei Gelb 3, 10, 17. Der Beweis läuft über vollständige Induktion.

## Wald (Graphentheorie)

Als Wald bezeichnet man in der Graphentheorie einen ungerichteten Graphen ohne Kreis. Ist dieser zusammenhängend, so spricht man von einem ungerichteten Baum. Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes stellen in diesem Sinne für sich einen Baum dar, so dass ein Wald aus einem oder mehreren Bäumen besteht.

Neben ungerichteten Bäumen betrachtet man auch gerichtete Bäume, die häufig auch als gewurzelte Bäume bezeichnet werden und sich weiter in In-Trees und Out-Trees unterscheiden lassen. Die Struktur entspricht im Wesentlichen der von ungerichteten Bäumen, jedoch gibt es einen ausgezeichneten Knoten, den man Wurzel nennt und für den die Eigenschaft gilt, dass alle Kanten von diesem wegzeigen (Out-Tree) oder zu diesem hinzeigen (In-Tree).

## Algorithmen auf Wäldern

Aufgrund ihrer einfachen Struktur kann die Komplexität von auf Bäumen arbeitenden Algorithmen meist gut abgeschätzt werden.

Oft arbeiten die Algorithmen mit einem Baum als Datenstruktur schneller als andere Algorithmen für dasselbe Problem. Beispielsweise ist für das Problem Sortieren das auf Bäumen arbeitende Heapsort schneller als ein eher naives Insertionsort.

## Sonderrolle innerhalb der Graphentheorie

Um alle Knoten eines Graphen effizient betrachten zu können, werden aus den bereits erwähnten Gründen gerne Bäume bzw. Wälder aus dem Graphen konstruiert. Dazu eignen sich Verfahren wie Breitensuche oder Tiefensuche auf den Graphen anzuwenden. Das Ergebnis ist ein Spannbaum. Ein minimaler Spannbaum wird unter gesonderter Betrachtung der Kantengewichte konstruiert, wie es durch den Algorithmus von Kruskal oder den Algorithmus von Prim geschieht.

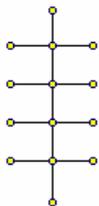
## Wichtige Sätze

Wälder und Bäume sind bipartit.

Wälder und Bäume sind planar.

Wälder und Bäume können topologisch sortiert werden.

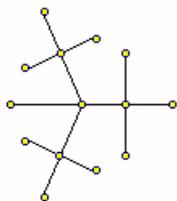
Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn er einen Spannbaum enthält.



## Bäume

Ein ungerichteter zusammenhängender Graph, in dem kein Kreis existiert, wird Baum genannt. Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten enthält mindestens zwei Knoten vom Grad 1. Jeder Baum mit der Knotenzahl  $n$  hat genau  $n-1$  Kanten. Ein gerichteter Graph heißt Baum, wenn  $G$  zusammenhängend ist und keinen Zyklus enthält.

Abbildung: Zwei nichtisomorphe Bäume mit der Knotenzahl 14, welche die chemischen Strukturformeln von Butan bzw. Isobutan darstellen.



## Gewurzelte Bäume, Wurzelbäume

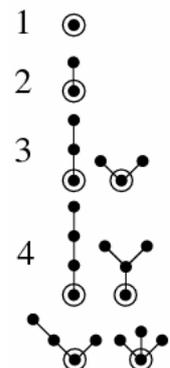
Ein Baum mit einem speziell ausgewählten Knoten, von dem aus die Pfade verlaufen, der Wurzel des Baumes, heißt gewurzelter Baum oder Baum mit Wurzel. Bäume ohne Wurzel nennt man ungewurzelt oder frei.

Hat ein gewurzelter Baum 1, 2, 3, 4, ... Knoten, so existieren genau  $n = 1, 1, 2, 4, 9, 20, 48, 115, 286, 719, 1842, 4766, 12486, 32973,$

87811, 235381, 634847, 1721159, 4688676, 12826228, 35221832, 97055181, 268282855, 743724984, 2067174645, 5759636510, 16083734329, 45007066269, 126186554308, 354426847597, ...

verschiedene solche Bäume.

Ein Setzbaum ist ein Wurzelbaum, dessen Wurzel Grad 1 hat, d.h. es geht nur eine Kante von ihr aus.



## Binäre gewurzelte Bäume

Werden gewurzelte Bäume betrachtet deren Knoten maximal 2 Kanten besitzen, entstehen binäre gewurzelte Bäume.

Für  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  Knoten existieren genau

1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 46, 98, 207, 451, 983, 2179, 4850, 10905, 24631, 56011, 127912, 293547, 676157, 1563372, 3626149, 8436379, 19680277, 46026618, 107890609, 253450711, 596572387, 1406818759, 3323236238, 7862958391, ...

binäre Bäume mit Wurzel. Für ternäre Bäume mit Wurzel ergeben sich

1, 1, 2, 4, 8, 17, 39, 89, 211, 507, 1238, 3057, 7639, 19241, 48865, 124906, 321198, 830219, 2156010, 5622109, 14715813, 38649152, 101821927, 269010485, 712566567, 1891993344, 5034704828, 13425117806, 35866550869, 95991365288, ...

Gewurzelte Bäume mit 1, 2, 3, 4, ... Knoten existieren genau

1, 1, 2, 4, 9, 20, 48, 115, 286, 719, 1842, 4766, 12486, 32973, 87811, 235381, 634847, 1721159, 4688676, 12826228, 35221832, 97055181, 268282855, 743724984, 2067174645, 5759636510, 16083734329, 45007066269, 126186554308, 354426847597, ...

Diese gewurzelten Bäume haben dabei unterschiedliche Höhen. Insgesamt gibt es für n Knoten die in der Tabelle angegebenen Baumzahlen der Höhe m:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1											
3	1	1										
4	1	2	1									
5	1	4	3	1								
6	1	6	8	4	1							
7	1	10	18	13	5	1						
8	1	14	38	36	19	6	1					
9	1	21	76	93	61	26	7	1				
10	1	29	147	225	180	94	34	8	1			
11	1	41	277	528	498	308	136	43	9	1		
12	1	55	509	1198	1323	941	487	188	53	10	1	
13	1	76	924	2666	3405	2744	1615	728	251	64	11	1

### Isomere

Unter Isomere versteht man Moleküle mit gleicher Summen- aber unterschiedlicher Strukturformel. Isomere, die sich durch Drehungen ineinander überführen lassen, sind gleiche Stoffe. Butan weist 2, Pentan 3, Hexan 5, Heptan 9, Oktan 18, Nonan 35 und Dekan 75 Isomere auf.

Die Berechnung der möglichen Isomere ist sehr anspruchsvoll und wurde zuerst von Cayley und Polya bearbeitet. Es existieren geschlossene, wenngleich nicht einfache, Formeln zur Berechnung der Isomerenanzahl, die mit Hilfe quartärer Bäume mit n Knoten abgeleitet werden. Die Anzahl der Isomere der Alkane  $C_nH_{2n+2}$  für die ersten n lautet:

n	Anzahl Isomere	n	Anzahl Isomere	n	Anzahl der Isomere
1	1	2	1	3	1
4	2	5	3	6	5
7	9	8	18	9	35
10	75	11	159	12	355
13	802	14	1858	15	4347
16	10359	17	24894	18	60523
19	148284	20	366319	21	910726
22	2278658	23	5731580	24	14490245
25	36797588	26	93839412	27	240215803
28	617105614	29	1590507121	30	4111846763
31	10660307791	32	27711253769	33	72214088660
34	188626236139	35	493782952902	36	1295297588128
37	3404490780161	38	8964747474595	39	23647478933969
40	62481801147341	41	165351455535782	42	438242894769226
43	1163169707886427	44	3091461011836856	45	8227162372221203
46	21921834086683418	47	58481806621987010	48	156192366474590639

### Nichtisomorphe Bäume

Die Tabelle enthält die Anzahl nichtisomorpher Bäume für eine gegebene Knotenzahl und der maximalen Anzahl k von Kanten je Knoten.

Knoten n	Kantenzahl l							
	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	3	3	3	3	3	3	3
6	4	5	6	6	6	6	6	6
7	6	9	10	11	11	11	11	11
8	11	18	21	22	23	23	23	23
9	18	35	42	45	46	47	47	47
10	37	75	94	101	104	105	106	106
11	66	159	204	223	230	233	234	235
12	135	355	473	520	539	546	549	550
13	265	802	1098	1223	1270	1289	1296	1299
14	552	1858	2633	2954	3081	3128	3147	3154
15	1132	4347	6353	7208	7536	7663	7710	7729
16	2410	10359	15641	17905	18785	19115	19242	19289

17	5098	24894	38789	44863	47207	48094	48424	48551
18	11020	60523	97416	113738	120074	122443	123332	123662
19	23846	148284	246410	290605	307739	314155	316531	317420
20	52233	366319	628726	748711	795426	812822	819263	821641
21	114796	910726	1614292	1941592	2069248	2116779	2134255	2140703
22	254371	2278658	4171955	5067433	5418014	5548210	5596003	5613504
23	565734	5731580	10839366	13297590	14263084	14621429	14752441	14800314
24	1265579	14490245	28308678	35074788	37742929	38732074	39092963	39224237
25	2841632	36797588	74266477	92939166	100331646	103071235	104068164	104429869
26	6408674	93839412	195667533	247317085	267854040	275461629	278224962	279224435
27	14502229	240215803	517504253	660681399	717863832	739045541	746724948	749496069
28	32935002	617105614	1373640355	1771321949	1930888297	1989998264	2011396516	2019099687
29	75021750	1590507121	3658205088	4764829720	5210968114	5376281289	5436041215	5457511378
30	171404424	4111846763	9772510063	12857155911	14106844554	14570083815	14737342992	14797319831

### Ramsey-Theorem

Für jedes natürliche Paar  $m, n$  mit  $m, n > 1$  existiert eine kleinste natürliche Zahl  $R(m, n)$ , die Ramsey-Zahl, so dass jeder vollständiger, zweifarbig Graph  $K_{R(m,n)}$  zwei Untergraphen  $K_m$  und  $K_n$  enthält, die einfarbig und unterschiedlich farbig sind. Es ist

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1).$$

Die Ramsey-Zahlen sind extrem komplex und sehr schwierig zu handhaben. Im Jahr 2006 kennt man von der beschriebenen Art genau 7 nichttriviale.

Die Ramsey-Zahlen beschreiben auch das Party-Problem. Die Ramsey-Zahl  $R(m, n)$  gibt die Minimalzahl von Personen auf einer Party an, so dass folgendes gilt: Wenigstens  $m$  dieser Personen kennen sich gegenseitig oder wenigstens  $n$  Personen kennen sich gegenseitig nicht.

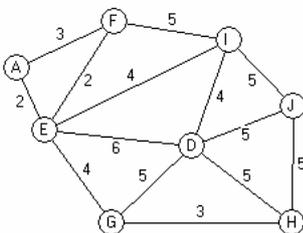
Beispiel: Da  $R(3, 7) = 23$  gilt folgende Aussage: Unter 23 Personen gibt es 3, die sich gegenseitig kennen, oder 7, die sich gegenseitig nicht kennen. Für 22 Personen kann dies nicht mehr behauptet werden.

Die Tabelle enthält die bekannten Ramsey-Zahlen und für weitere das Intervall, in dem diese Zahl liegt.

Zu beachten ist, dass  $R(m, n) = R(n, m)$  gilt

$n \setminus m$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	9	14	18	23	28	36	[40,43]	[46,51]
4		18	25	[35,41]	[49,61]	[56,85]	[69,115]	[92,149]	[97,191]
5			[43,49]	[58,87]	[80,143]	[101,216]	[121,316]	[141,442]	[157,1000]
6				[102,165]	[111,298]	[127,495]	[169,780]	[178,1171]	[253,3002]
7					[205,540]	[216,1031]	[232,1713]	[232,2826]	[405,8007]
8						[282,1870]	[317,3583]	[377,6090]	[377,19447]
9							[565,6588]	[580,12677]	?
10								[798,23556]	?
11									[1597,184755]

Darüber hinaus gibt es eine Verallgemeinerung der Ramsey-Zahlen, von denen nur eine einzige bekannt ist:  $R(3; 3; 3; 2) = 17$ .



### Spannbaum

Abbildung: Graph mit einem minimalen Spannbaum.

Ein Spannbaum, auch aufspannender Baum oder spannender Baum genannt (engl. spanning tree), ist ein Teilgraph eines ungerichteten Graphen, der ein Baum ist und alle seine Knoten enthält.

Spannbäume existieren nur in zusammenhängenden Graphen.

Einen Teilgraphen, der in Graphen für jede Komponente einen Spannbaum ergibt, nennt man Gerüst, Spannwald, aufspannender Wald oder kürzer

spannender Wald.

In zusammenhängenden Graphen sind Gerüst und Spannbaum also identische Begriffe, während Spannbäume für unzusammenhängende Graphen nicht definiert sind.

In kantengewichteten Graphen lässt sich als Gewicht eines Graphen die Summe seiner Kantengewichte definieren. Ein Spannbaum bzw. ein Gerüst heißt minimal, wenn kein anderer Spannbaum bzw. kein anderes Gerüst in demselben Graphen mit geringerem Gewicht existiert.

Häufig kürzt man minimaler Spannbaum auch mit MST (engl. Minimum Spanning Tree) oder MCST (Minimum Cost Spanning Tree - ein Spannbaum mit minimalen Kosten) ab. Statt minimales Gerüst sagt man auch Minimalgerüst.

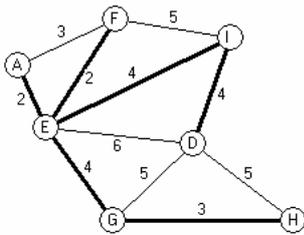
Das Spannbaumproblem tritt zum Beispiel bei der kürzesten Verdrahtung von Kommunikationsnetzen auf. Für das Problem des Handlungsreisenden existieren Approximationsalgorithmen, die minimale Spannäume verwenden.

Zum Finden eines minimalen Spannbaumes gibt es den Algorithmus von Kruskal und den Algorithmus von Prim. Man kann zeigen, dass der Algorithmus von Prim meist optimal ist, da man mit seiner Hilfe auch Zahlen sortieren kann.

### Algorithmus von Prim, Prim-Dijkstra-Algorithmus

Der Algorithmus von Prim dient der Berechnung eines minimalen Spannbaumes in einem zusammenhängenden, ungerichteten, kantengewichteten Graphen.

Der Algorithmus wurde 1930 von dem tschechischen Mathematiker Vojtech Jarník entwickelt. 1957 wurde er zunächst von Robert C. Prim, 1959 von Edsger Dijkstra wiederentdeckt.



Daher wird der Algorithmus in der Literatur auch gelegentlich unter anderen Namen geführt, so z. B. Prim-Dijkstra-Algorithmus oder Algorithmus von Jarník, Prim und Dijkstra, im englischen Sprachraum auch Jarníks algorithm oder DJP algorithm.

Der Algorithmus beginnt mit einem trivialen Graphen  $T$ , der aus einem beliebigen Knoten des gegebenen Graphen besteht. In jedem Schritt wird nun eine Kante mit minimalem Gewicht gesucht, die einen weiteren Knoten mit  $T$  verbindet.

Diese und der entsprechende Knoten werden zu  $T$  hinzugefügt. Das Ganze

wird solange wiederholt, bis alle Knoten in  $T$  vorhanden sind; dann ist  $T$  ein minimaler Spannbaum:

- Wähle einen beliebigen Knoten als Startgraph  $T$ .
- Solange  $T$  noch nicht alle Knoten enthält:
- Wähle eine Kante  $e$  minimalen Gewichts aus, die einen noch nicht in  $T$  enthaltenen Knoten  $v$  mit  $T$  verbindet.
- Füge  $e$  und  $v$  dem Graphen  $T$  hinzu.

Der Prim Algorithmus ist ein Greedy-Algorithmus, dabei wird in jedem Iterationsschritt ein zusammenhängender Graph gebildet, der erweitert wird, bis er den gesamten gegebenen Graph aufspannt.

### Algorithmus von Kruskal

Der Algorithmus von Kruskal ist ein Algorithmus zur Berechnung minimaler Spannäume von ungerichteten Graphen. Der Graph muss zusammenhängend, kantengewichtet und endlich sein. 1956 veröffentlichte Joseph Kruskal den Algorithmus in der Zeitschrift "Proceedings of the American Mathematical Society".

Algorithmus:

Führe den folgenden Schritt so oft wie möglich aus: Wähle unter den noch nicht ausgewählten Kanten des Graphen  $G$  die kürzeste Kante, die mit den schon gewählten Kanten keinen Kreis bildet.

Die kürzeste Kante bezeichnet dabei jeweils die Kante mit dem kleinsten Kantengewicht. Nach Abschluss des Algorithmus bilden die ausgewählten Kanten einen minimalen Spannbaum des Graphen.

Wendet man den Algorithmus auf unzusammenhängende Graphen an, so berechnet er einen minimalen Wald, also minimal spannende Bäume für jede Zusammenhangskomponente des Graphen.

Die Grundidee ist, die Kanten in Reihenfolge aufsteigender Kantengewichte zu durchlaufen und jede Kante zur Lösung hinzuzufügen, die mit allen zuvor gewählten Kanten keinen Kreis bildet. Es werden sukzessiv sogenannte Komponenten zum minimalen Spannbaum verbunden.

Als Eingabe dient ein zusammenhängender kantenbewerteter Graph  $G = (V, E, w)$ .  $V$  bezeichnet die Menge der Ecken,  $E$  die Menge der Kanten. Die Gewichtsfunktion  $w: E \rightarrow \mathbb{N}$  ordnet jeder Kante ein Kantengewicht zu.

Der Algorithmus liefert einen minimalen Spannbaum  $M = (V, E')$  mit  $E' \subseteq E$ .

Der Algorithmus von Kruskal arbeitet nicht deterministisch, d.h. er liefert unter Umständen beim wiederholten Ausführen unterschiedliche Ergebnisse. Alle diese Ergebnisse sind minimale Spannäume von  $G$ .

### Dijkstra-Algorithmus

Der Algorithmus von Dijkstra, nach Edsger W. Dijkstra, dient der Berechnung eines kürzesten Pfades zwischen einem Startknoten und einem beliebigen Knoten in einem kantengewichteten Graphen. Die Gewichte dürfen dabei nicht negativ sein.

Für nicht zusammenhängende, ungerichtete Graphen kann der Abstand zu bestimmten Knoten auch unendlich sein, wenn ein Pfad zwischen Startknoten und diesen Knoten nicht existiert, dieser aber in der Knotenmenge selbst vorliegt. Dasselbe gilt auch für gerichtete, nicht stark zusammenhängende Graphen.

## Algorithmus

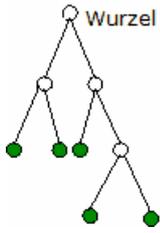
Die Grundidee des Algorithmus ist, ab einem Startknoten die kürzest möglichen Wege weiter zu verfolgen und längere Wege beim Update auszuschließen.

1) Weise allen Knoten die beiden Eigenschaften "Distanz" und "Vorgänger" zu. Initialisiere die Distanz im Startknoten mit 0 und in allen anderen Knoten mit  $\infty$ .

2) Solange es noch unbesuchte Knoten gibt wähle darunter denjenigen mit minimaler Distanz aus und Speichere, dass dieser Knoten schon besucht wurde  
Berechne für alle noch unbesuchten Nachbarknoten die Summe des jeweiligen Kantengewichtes und der Distanz im aktuellen Knoten

Ist dieser Wert für einen Knoten kleiner als die dort gespeicherte Distanz, aktualisiere sie und setze den aktuellen Knoten als Vorgänger. Dieser Schritt wird auch als Update bezeichnet und ist die zentrale Idee von Dijkstra.

Dieser Algorithmus wird bei Routenplanern eingesetzt.



## Binärbaum

Als Binärbaum bezeichnet eine spezielle Form eines Graphen. Es handelt sich um einen gewurzelten Baum, bei dem jeder Knoten höchstens zwei Kindknoten besitzt.

Oft wird verlangt, dass sich die Kindknoten eindeutig in linkes und rechtes Kind einteilen lassen.

verbale Definition: Ein Baum ist entweder leer, oder er besteht aus einem linken oder rechten Teilbaum, die wiederum Bäume sind!

Abbildung: voller, aber nicht vollständiger Binärbaum

Ein Binärbaum heißt geordnet, wenn jeder innere Knoten ein linkes und eventuell zusätzlich ein rechtes Kind besitzt; und nicht nur ein rechtes Kind. Man bezeichnet ihn als voll, wenn jeder Knoten entweder Blatt ist, also kein Kind besitzt, oder aber zwei, sowohl ein linkes wie ein rechtes, Kinder besitzt.

Man bezeichnet ihn als vollständig, wenn alle Blätter die gleiche Tiefe besitzen. Induktiv lässt sich zeigen, dass ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $n$ , den man als  $B_n$  bezeichnet, genau

$$2^{n+1} - 1 \text{ Knoten,}$$

$$2^i \text{ Knoten in Tiefe } i, \text{ insbesondere}$$

$$2^n \text{ Blätter}$$

besitzt, wobei mit Höhe  $n$  die Länge des Pfades zu einem tiefsten Knoten bezeichnet wird.

Eine Darstellung eines Binärbaumes, in dem die Knoten mit rechtwinkligen Dreiecken und die Kanten mit Rechtecken dargestellt werden, nennt man pythagoreischen Binärbaum.

Viele Datenstrukturen wie beispielsweise binäre Suchbäume, AVL-Bäume, Fibonacci-Bäume und binäre Heaps basieren auf Binärbäumen.

## Spezielle Binärbäume

### Partiell geordneter Baum

Ein partiell geordneter Baum  $T$  ist ein spezieller Baum,

1) dessen Knoten markiert sind

2) dessen Markierungen aus einem geordneten Wertebereich stammen

3) in dem für jeden Teilbaum  $T'$  mit der Wurzel  $x$  gilt: Alle Knoten aus  $T'$  sind größer markiert als  $x$  oder gleich  $x$ .

Die Wurzel jedes Teilbaumes stellt ein Minimum für diesen Teilbaum dar. Die Werte des Teilbaumes nehmen in Richtung der Blätter zu oder bleiben gleich.

Derartige Bäume werden häufig in Heaps verwendet.

### Vollständiger balancierter Binärbaum, AVL-Baum

Ein vollständiger balancierter Binärbaum ist ein vollständiger Binärbaum, bei dem die Abstände zweier beliebiger Blätter von der Wurzel um höchstens 1 voneinander abweichen.

## Linearisierung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Knoten von Binärbäumen zu durchlaufen. Diesen Prozess bezeichnet man auch als Linearisierung oder Traversierung. Man unterscheidet in

pre-order (W - L - R): wobei zuerst die Wurzel (W) betrachtet wird und anschließend zuerst der linke (L), dann der rechte (R) Teilbaum durchlaufen wird,

in-order (L - W - R): wobei zuerst der linke (L) Teilbaum durchlaufen wird, dann die Wurzel (W) betrachtet wird und anschließend der rechte (R) Teilbaum durchlaufen wird und

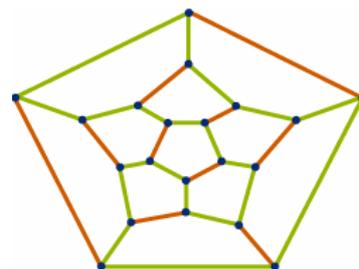
post-order (L - R - W): wobei zuerst der linke (L), dann der rechte (R) Teilbaum durchlaufen wird und anschließend die Wurzel (W) betrachtet wird.

level-order: beginnend bei der Wurzel, werden die Ebenen von links nach rechts durchlaufen.

## Hamilton-Graph

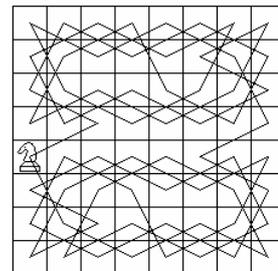
Ein Elementarkreis in einem Graphen  $G$ , der alle Knoten von  $G$  durchläuft, heißt Hamilton-Kreis.

In der Abbildung bilden die grün gezeichneten Linien einen Hamilton-Kreis. Die Frage nach der Charakterisierung der Graphen mit Hamilton-Kreisen führt auf eins der klassischen NP-vollständigen Probleme. Deshalb kann kein effizienter Algorithmus zur Ermittlung von Hamilton-Kreisen angegeben werden.



Die Springertour ist eine berühmte Anwendung eines Hamilton-Kreises. Der Springer soll sich auf einem Schachbrett so bewegen, dass er jedes Feld nur einmal passiert und dass er zum Startpunkt zurückkehrt. In der Sprache der Graphentheorie wird ein Weg gesucht, bei dem jeder Knotenpunkt, die Mittelpunkte der Quadrate, genau einmal durchlaufen wird. Die Hamiltonwege benutzen immer zwei Kanten, die an einem Knoten zusammen kommen.

Es gibt zum Springerproblem Tausende von Wegen. Da alle Kanten vom Grade 2 sind, handelt es sich auch um einen Eulerkreis. Rechts ist eine Lösung von Euler. Hamilton-Kreise sind auch für die Kanten eines Polyeders möglich, zum Beispiel für den Oktaeder und den Kuboktaeder.



## Satz von Posa

Es sei  $G = (V, E)$  ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Er besitzt einen Hamiltonkreis, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für  $1 \leq k < (|V| - 1)/2$  gelte: Die Anzahl derjenigen Knoten, deren Grad höchstens  $k$  ist, ist kleiner als  $k$ .
2. Ist  $|V|$  ungerade, dann gelte zusätzlich: Die Anzahl derjenigen Knoten, deren Grad höchstens  $(|V| - 1)/2$  ist, ist höchstens  $(|V| - 1)/2$ .

## Hamiltonkreis

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $|V| = n$  Knoten oder Ecken und  $|E| = m$  Kanten.

Der Graph  $G$  ist hamiltonisch, wenn er einen Hamiltonkreis zulässt, d.h., wenn es einen Kreis in  $G$  gibt, der alle Knoten aus  $V$  enthält.

Ein Hamiltonpfad ist ein Pfad in  $G$ , der alle Knoten aus  $V$  enthält. Hat  $G$  Hamiltonpfade, jedoch keinen Hamiltonkreis, so ist  $G$  semihamiltonisch.

## Potenz eines Graphen

Für einen Graphen  $G$  und  $d \in \mathbb{N}$  bezeichnet  $G^d$  den Graphen auf  $V$ , bei dem zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn sie in  $G$  einen Abstand oder Distanz  $\leq d$  haben. Es gilt

$$G = G^1 \subseteq G^2 \subseteq G^3 \subseteq \dots$$

Ist  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten und Knotengraden  $d_1 \leq \dots \leq d_n$ , so nennt man das Tupel  $(d_1, \dots, d_n)$  die Gradsequenz oder Valenzfolge von  $G$ , welche eindeutig bestimmt ist. Ein beliebiges Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  natürlicher Zahlen heißt hamiltonisch, wenn jeder Graph mit  $n$  Knoten und punktweise größerer Gradsequenz hamiltonisch ist.

Für die Existenz eines Hamiltonkreises eines Graphen  $G$  mit  $n \geq 3$  existieren viele Sätze:

G.A. Dirac (1952): Jeder Graph  $G$  mit mindestens Minimalgrad  $n/2$  hat einen Hamiltonkreis.

W.T. Tutte (1956): Jeder 4-zusammenhängende planare Graph hat einen Hamiltonkreis.

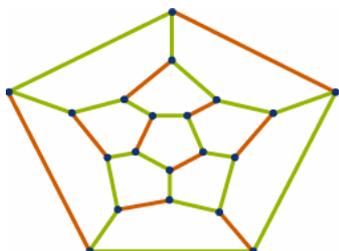
Ø. Ore (1960): Ist die Summe des Grades zweier nicht-adjazenter Knoten mindestens  $n$ , so ist  $G$  hamiltonisch. Ist die Summe der Grade zweier nicht-adjazenter Knoten  $x, y$  mindestens  $n$ , so gilt:  $G + \{x, y\}$  hamiltonisch, d.h.  $G$  ist hamiltonisch.

V. Chvátal (1972): Ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  natürlicher Zahlen mit  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  ist genau dann hamiltonisch, wenn für jedes  $i < n/2$  gilt:  $a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n-i$

P. Erdős (1972): Ist  $G$   $k$ -zusammenhängend und die Mächtigkeit jeder Menge unabhängiger Knoten aus  $G \leq k$ , so ist  $G$  hamiltonisch.

H. Fleischner (1974): Ist  $G$  2-zusammenhängend, so hat  $G^2$  einen Hamiltonkreis.

J. A. Bondy, V. Chvátal (1976):  $G$  ist genau dann hamiltonisch, wenn sein Hamiltonabschluss hamiltonisch ist.



Für die Existenz eines Hamiltonkreises kennt man eine Vielzahl hinreichender Eigenschaften:

- 1) Jeder vollständige Graph mit  $n \geq 3$  ist hamiltonisch.
- 2)  $G$  ist hamiltonisch, falls  $G$  Kantengraph eines Eulerschen oder hamiltonischen Graphen ist.
- 3)  $G$  ist genau dann hamiltonisch, wenn  $G$  einen Teilgraphen - bei dem nur Kanten entfernt wurden - besitzt, der Kantengraph eines Eulerschen oder hamiltonischen Graphen ist.

- 4) Die Knotenzusammenhangszahl von G ist mindestens so groß wie die Stabilitätszahl von G.
- 5) Jeder planzyklische Graph ist hamiltonisch.

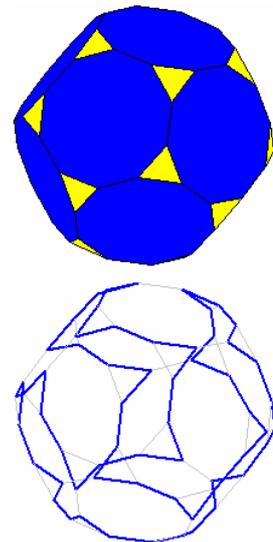
Besitzt G einen Hamiltonkreis, so gelten die notwendigen Kriterien:

- 1) G besitzt keinen Schnittknoten,
- 2) G besitzt keine Brücke,
- 3) der Blockgraph von G ist ein isolierter Knoten,
- 4) G besitzt einen 2-Faktor,
- 5) G ist 2-zusammenhängend,
- 6) der Minimalgrad ist mindestens 2 und
- 7) der Durchmesser von G ist höchstens  $n/2$ .

### Hamilton-Kreis auf Polyeder

Hamilton-Kreise existieren auf allen platonischen Körpern, aber auch auf anderen Polyedern jedoch nicht notwendig. Die Abbildung zeigt einen Hamilton-Kreis auf dem Dodekaederstumpf.

Berücksichtigt man nicht Spiegelsymmetrie, so existieren ausgehend von einem Eckpunkt eines Polyeders die nachfolgende Anzahl von verschiedenen Hamilton-Kreisen bzw. Hamilton-Pfaden (kein geschlossener Kreis):



Polyeder	Hamilton-Kreise	Hamilton-Pfade
Tetraeder	6	6
Würfel	12	18
Oktaeder	32	40
Dodekaeder	60	162
Ikosaeder	2560	6320
Hexaederstumpf	12	84
Kuboktaeder	200	576
Kuboktaederstumpf	2684	15386
Oktaederstumpf	88	344
Tetraederstumpf	6	26
Rhombendodekaeder	0	0
Dodekaederstumpf	60	804
Rhombenkuboktaeder	12040	81992
Johnson-Polyeder 45	5502602	42717223

### Hamiltonkreise in der Kunst

Hamiltonkreise, d.h. Linien die alle wichtigen Punkte einer Menge genau einmal treffen, werden in der Kunst gern als künstlerisches Mittel verwendet.

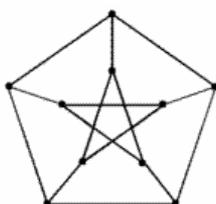
Durch die Beschränkung auf eine Linie wird vor allem das Wesentliche der dargestellten Objektes betont. Dabei halten sich die Künstler nicht immer streng an die mathematische Definition und unterbrechen die Linie und zeichnen diese nicht unbedingt ohne Absetzen durch.

Das berühmteste Beispiel ist die "Friedenstaube" von Pablo Picasso. Die Friedenstaube wurde 1949 für den Pariser Weltfriedenskongress von Pablo Picasso entworfen.

Bei der Darstellung der Taube ließ sich Picasso durch das Prinzip der geschlossenen Linie des Hamiltonkreises nicht einengen.

Picasso selbst benutzte dieses Motiv noch mehrere Male für einige seiner anderen Arbeiten. Seitdem ist die Friedenstaube ein weltweites Symbol für den Frieden und die Friedensbewegung. Sie inspirierte Autoren für Kinderlieder ebenso wie Grafiker und Künstler, die dieses Symbol für ihre Arbeiten verwendeten.

Weitere Beispiele für Hamiltonkreise in der Kunst findet man bei Paul Klee, u.a. Drohender Schneesturm (1927), Kleiner Narr in Trance (1927) und Altes Fräulein (1931).



### Petersen-Graph

Der Petersen-Graph, benannt nach dem dänischen Mathematiker Julius Petersen, ist ein 3-regulärer, kubischer Graph mit 10 Knoten.

Das bedeutet, dass jeder der Knoten drei Nachbarn hat, die Valenzenfolge ist (3,3,3,3,3,3,3,3,3,3). Der Petersen-Graph ist in der Graphentheorie ein oft verwendetes Beispiel und Gegenbeispiel.

Eigenschaften des Petersen-Graphen:

kubisch bzw. 3-regulär, nicht planar, zusammenhängend, symmetrisch, die Länge des kürzesten Kreises ist 5, enthält keinen Hamilton-Kreis und ist der kleinste hypohamiltonische Graph  
 chromatische Zahl = 3; chromatischer Index = 4

Ein Graph  $G$  heißt hypohamiltonsch, wenn er keinen hamiltonschen Kreis besitzt, aber zu jedem seiner Knoten ein Kreis existiert, der alle anderen Knoten enthält.

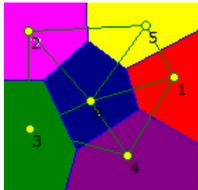
## Färbung von Graphen

Abbildung: Darstellung einer kartographischen Färbung als Graph

Eine Färbung eines ungerichteten Graphen ordnet jedem Knoten bzw. jeder Kante im Graphen eine Farbe zu.

In der Graphentheorie beschäftigt man sich mit sogenannten "zulässigen" oder "gültigen" Färbungen, und versucht, Algorithmen zu entwickeln, die für einen vorgegebenen Graphen eine gültige Färbung mit möglichst wenig Farben finden.

Probleme aus der diskreten Mathematik, aber auch außermathematische Fragestellungen lassen sich mitunter in ein Färbungsproblem übersetzen. Daher ist die Existenz oder Nichtexistenz solcher Algorithmen auch außerhalb der Graphentheorie von Interesse.

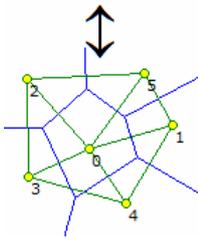


### Knotenfärbungen

Ist  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten und  $f$  eine Abbildung von  $V$  in die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , so nennt man  $f$  eine Knotenfärbung von  $G$ .

Man nennt  $f$  gültig oder zulässig, falls für je zwei beliebige benachbarte Knoten  $v_1$  und  $v_2$  gilt  $f(v_1) \neq f(v_2)$  und sagt  $G$  ist  $k$ -knotenfärbbar, falls es eine gültige Knotenfärbung von  $G$  gibt, so dass für alle  $v$  aus  $V$  gilt:  $f(v) < k$ .

Das kleinste  $k$ , für das  $G$   $k$ -knotenfärbbar ist, nennt man die chromatische Zahl oder die Knotenfärbungszahl des Graphen  $G$  und wird meist mit  $\chi(G)$  bezeichnet.



Eine zulässige Knotenfärbung eines Graphen ist eine Partition seiner Knotenmenge in unabhängige Mengen. Eine Teilmenge der Knotenmenge  $V$  eines Graphen heißt unabhängig, falls sie keine zwei benachbarten Knoten enthält.

### Kantenfärbungen

Ist  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten und  $f$  eine Abbildung von  $E$  in die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$ , so nennt man  $f$  eine Kantenfärbung von  $G$ .

Man nennt  $f$  gültig oder zulässig, falls für je zwei beliebige benachbarte Kanten  $e_1$  und  $e_2$  gilt  $f(e_1) \neq f(e_2)$  und sagt  $G$  ist  $k$ -kantenfärbbar, falls es eine gültige Kantenfärbung von  $G$  gibt, so dass für alle  $e$  aus  $E$  gilt:  $f(e) < k$ .

Das kleinste  $k$ , für das  $G$   $k$ -kantenfärbbar ist, nennt man den chromatische Index oder die Kantenfärbungszahl des Graphen  $G$  und wird meist mit  $\chi'(G)$  bezeichnet.

Die Kantenfärbung eines Graphen  $G$  lässt sich als Knotenfärbung des Kantengraphen  $L(G)$  betrachten. Daraus folgt dass

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

Der Satz von Vizing besagt, dass der chromatische Index eines Graphen mindestens so groß wie sein Maximalgrad aber höchstens eins größer als dieser ist:

$$\text{Grad}_{\max}(G) \leq \chi'(G) \leq \text{Grad}_{\max}(G) + 1$$

Obwohl der Maximalgrad leicht zu bestimmen ist und der chromatische Index nur einen von zwei möglichen Werten annehmen kann, ist das Problem, für einen gegebenen Graphen genau diesen einen Wert zu bestimmen, NP-schwer, d.h. dass es vermutlich keinen Algorithmus gibt, der dieses Problem effizient löst.

Der zur Zeit praktisch beste Algorithmus beruht auf einem Spalten-Generierungs-Ansatz. Weiterhin gibt es viele Färbungsheuristiken, die nach bestimmten Methoden gute Färbungen suchen und somit im Erfolgsfall eine obere Schranke für die chromatische Zahl liefern.

Der Vier-Farbensatz besagt, dass die chromatische Zahl eines planaren Graphen höchstens 4 ist.

Trotzdem ist auch für planare Graphen das Bestimmen der chromatischen Zahl NP-schwer.

Das Entscheidungsproblem, ob ein gegebener Graph bipartit ist, besitzt lineare Zeitkomplexität, und ist zum Beispiel mit Tiefensuche lösbar.

Für perfekte Graphen existieren Polynomialzeitalgorithmen zur Berechnung der chromatischen Zahl.

## Paarungen in Graphen

Paarungen in Graphen haben innerhalb der Graphentheorie einen weiten Anwendungsbereich.

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten und  $M$  eine Teilmenge von  $E$ . Man bezeichnet  $M$  als Paarung oder Matching von  $G$ , wenn je zwei beliebige verschiedene Kanten  $e_1$  und  $e_2$  disjunkt sind, d.h. mit verschiedenen Knoten inzident sind. Ein Knoten von  $G$  heißt von einer Paarung  $M$  überdeckt, falls es eine Kante in  $M$  gibt, die ihn enthält, d.h. die mit ihm inzident ist.

Eine Paarung  $M$  von  $G$  nennt man maximal, wenn man keine weitere Kante  $e$  aus  $E$  zu  $M$  hinzufügen kann, so dass  $M$  zusammen mit  $e$  eine Paarung ist. Gibt es in  $G$  keine Paarung, die mehr Elemente als  $M$  enthält, so nennt man  $M$  größte Paarung.

Ist jeder Knoten von  $V$  Element einer Kante von  $M$ , so nennt man  $M$  eine perfekte Paarung. Die Anzahl Elemente einer größten Paarung nennt man Paarungszahl bzw. Matchingzahl.

Einen  $k$ -regulären Teilgraphen von  $G$  nennt man einen  $k$ -Faktor, wenn er alle Knoten von  $G$  enthält. Die Kantenmenge eines 1-Faktors ist eine perfekte Paarung.

In kantengewichteten Graphen definiert man die Größe einer Paarung über die Summe ihrer Kantengewichte. Als größte gewichtete Paarung eines Graphen  $G$  bezeichnet man dann eine Paarung, die diesen Wert maximiert.

In gerichteten Graphen und solchen mit Mehrfachkanten werden Paarungen nicht betrachtet. Ersteres, weil es bei Paarungen nicht auf die Richtung der Kanten ankommt, letzteres, weil von den Mehrfachkanten nur eine für eine Paarung in Frage kommt.

Einen Pfad  $P = v_1, \dots, v_k$  in einem Graphen  $G$ , bezeichnet man als alternierend bezüglich einer Paarung  $M$  von  $G$ , wenn für jedes  $i$  aus  $\{1, \dots, k-2\}$  die Kante  $\{v_i, v_{i+1}\}$  genau dann zu  $M$  gehört, wenn die Kante  $\{v_{i+1}, v_{i+2}\}$  nicht zu  $M$  gehört, d.h. der Pfad  $P$  führt abwechselnd über Kanten die zu  $M$  gehören und solchen, die nicht zu  $M$  gehören.

Werden zusätzlich  $v_1$  und  $v_k$  nicht von  $M$  überdeckt, so nennt man den Pfad  $P$  augmentierend bzw. Verbesserungspfad.

Bezeichnet  $q(G)$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten mit ungerader Anzahl Knoten in einem Graphen  $G = (V, E)$ , so nennt man  $\text{def}(G) = q(G-S) - |S|$  für eine Teilmenge  $S$  von  $V$  Defekt von  $G$ , falls  $q(G-U) - |U| \geq q(G-S) - |S|$  für jede andere Teilmenge  $U$  von  $V$  gilt.

$G-S$  bzw.  $G-U$  bezeichnet dabei den Graphen, der entsteht, wenn man die Knoten von  $S$  bzw.  $U$  und ihre inzidenten Kanten aus  $G$  löscht.

Eine maximale Paarung eines Graphen  $G$  enthält höchstens so viele Kanten wie eine größte Paarung in  $G$ ; jede größte Paarung ist auch eine maximale Paarung. Andererseits enthält eine größte Paarung in  $G$  höchstens doppelt so viele Kanten, wie eine maximale Paarung.

Berge (1957): Eine Paarung  $M$  von einem Graphen  $G$  ist genau dann eine größte Paarung von  $G$ , wenn es keinen augmentierenden Pfad zu  $M$  gibt.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich ein polynomieller Algorithmus entwerfen, der zu einem gegebenen Graphen ein größtes Matching findet, indem man nach augmentierenden Pfaden in einem Graphen sucht.

Die Knotenüberdeckungszahl eines Graphen ist mindestens so groß, wie seine Paarungszahl, aber höchstens so groß wie das 2-fache seiner Paarungszahl.

König (1931): Für bipartite Graphen entspricht die Paarungszahl genau der Knotenüberdeckungszahl.

Heiratssatz von Hall (1935):

In bipartiten Graphen  $G$  mit Bipartition  $\{A, B\}$  existiert genau dann eine Paarung  $M$ , die jeden Knoten aus  $A$  überdeckt, falls für jede Teilmenge  $S$  von  $A$  gilt, dass ihre Nachbarschaft mindestens so groß ist wie  $S$  selbst.

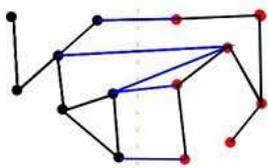
König (1916): Da in regulären bipartiten Graphen gilt, dass  $|A| = |B|$ , kann man zeigen, dass auch die Heiratsbedingung  $|N(S)| \geq |S|$  immer erfüllt ist, so dass jeder bipartite reguläre Graph eine perfekte Paarung besitzt.

In Graphen mit ungerader Knotenzahl gibt es keine perfekten Paarungen, da jede Paarung eine gerade Anzahl Knoten überdeckt. Die Defektformel von Berge (1958) besagt, dass das 2-fache der Paarungszahl eines Graphen  $G$  der Anzahl Knoten von  $G$  abzüglich seines Defektes entspricht.

Satz von Tutte (1947): Ein Graph  $G = (V, E)$  besitzt genau dann eine perfekte Paarung, wenn für jede Teilmenge  $S$  von  $V$  gilt:  $q(G-S) \leq |S|$ .

Petersen (1981): Ein kubischer Graph mit höchstens zwei trennenden Kanten besitzt ein perfektes Matching.

In Graphen mit sehr vielen Kanten, in dichten Graphen, gibt es meistens auch eine (fast) perfekte Paarung.



### Schnitt eines Graphen

Ein Schnitt bezeichnet in der Graphentheorie eine Menge von Kanten eines Graphen  $G = (V, E)$ , die zwischen zwei Mengen von Knoten bzw. zwischen einer Menge  $X \subset V$  und der Restmenge  $V \setminus X$  liegt.

Abbildung: Knotenmenge  $W$  (rot) und Restmenge (schwarz) und die dadurch erzeugten Schnittkanten (blau)

Für einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer Menge  $X \subset V$  wird der Schnitt  $E(X, V \setminus X)$  definiert als  $E(X, V \setminus X) = \{(u, v) \in E : u \in X, v \in V \setminus X\}$

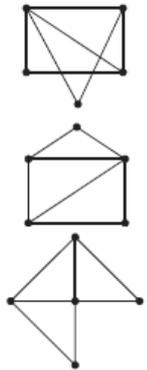
Er umfasst alle Kanten aus  $E$  für die gilt, dass ein Endknoten in der Teilmenge  $X$  liegt und der andere in der Menge der übrigen Knoten. Diese Kanten liegen zwischen den beiden Teilmengen der Knoten.

In einem gerichteten Graphen  $D = (V, A)$  werden Schnitte in der Regel kann folgender Definition verwendet  
 $A(X, V \setminus X) = \{(u, v) \in A: u \in X, v \in V \setminus X\}$   
 Dabei gilt im Unterschied zu ungerichteten Graphen, dass  $A(X, V \setminus X) \neq A(V \setminus X, X)$ .

Würde man alle Kanten eines Schnitts  $E(X, V \setminus X)$  aus dem Graphen  $G$  entfernen, so würde es keinen Weg mehr zwischen  $X$  und  $V \setminus X$  geben und der so entstandene Graph hätte damit mindestens eine Zusammenhangskomponente mehr. War der Graph vor dem Entfernen der Kanten des Schnitts zusammenhängend, ist er es nachher nicht mehr.

Ein Schnitt ist minimal, wenn nicht bereits eine Teilmenge eines Schnitts einen Schnitt bildet.

Quelle und weitere Informationen: <http://www.mathepedia.de/Schnitte.aspx>



### Isomorphe Graphen

Zwei Graphen heißen zueinander isomorph, wenn es eine eineindeutige Abbildung der Mengen von Knoten und Kanten gibt und die Adjazenzmatrizen identisch sind.

Definition:

Seien  $G = (V, E)$  und  $G' = (V', E')$  Graphen. Eine bijektive Abbildung  $\phi: V \rightarrow V'$  heißt

Isomorphismus, falls  $\forall vw \in E$   
 genau dann gilt, wenn  $\phi(v)\phi(w) \in E'$

ist. In diesem Fall heißen die Graphen  $G$  und  $G'$  isomorph.

Ist  $\phi$  ein Isomorphismus von  $G$  nach  $G'$ , so gilt für alle  $v \in V$ :  $\delta(v) = \delta(\phi(v))$

In der Abbildung sind die drei Graphen zueinander isomorph. Es handelt sich stets um denselben Graphen, nur jeweils in einer anderen räumlichen Anordnung.

### Delannoy-Zahlen

Die Delannoy-Zahlen werden definiert durch:

$$D(a,b) = D(a-1,b) + D(a,b-1) + D(a-1,b-1)$$

wobei  $D(0,0) = 1$  ist.

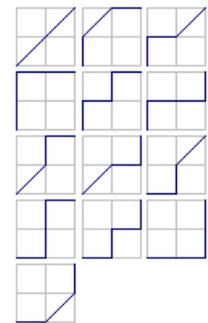
Diese Zahlen geben die Anzahl der möglichen Wege vom Punkt  $(0,0)$  zum Punkt  $(a,b)$  an, wenn ausschließlich Schritte  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  und  $(1,1)$  möglich sind.

Gilt  $n = a = b$ , so ergeben die Delannoy-Zahlen die Anzahl der direkten Königszüge.

In der Abbildung sind die 13 möglichen Wege für ein  $2 \times 2$  Feld eingezeichnet.

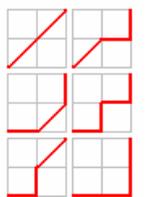
Für die ersten Delannoy-Zahlen  $D(n,n)$  ergibt sich für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

1, 3, 13, 63, 321, 1683, 8989, 48639, 265729, 1462563, 8097453, 45046719, 251595969, 1409933619, 7923848253, 44642381823, 252055236609, 1425834724419, 8079317057869, 45849429914943, 260543813797441, ...



### Einfache Pascal-Funktion zur Berechnung:

```
function della(a,b:integer):longint;
begin if (a=0) or (b=0) then della:=1
      else   della:=della(a-1,b)+della(a,b-1)+della(a-1,b-1);
end;
```



### Schröder-Zahlen

Eng verbunden mit den Delannoy-Zahlen sind die Schröder-Zahlen.

Die Schröder-Zahl  $S(n)$  ist die Anzahl der möglichen Wege auf einem Gitter vom Punkt  $(0,0)$  zum Punkt  $(n,n)$ , wenn nur Schritte  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  und  $(1,1)$  zugelassen sind und die Gerade  $y = x$  nie überschritten werden darf.

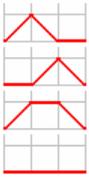
Während es auf einem  $3 \times 3$  Gitter 13 "Königszüge" (Delannoy-Zahl  $D(2,2)$ ) gibt, reduziert sich die Schröder-Zahl  $S(2)$  auf 6 (siehe Abbildung).

Definition  $S(n) = S(n-1) + \sum S(k) * S(n-1-k)$  ; Summenbildung von  $k = 0$  bis  $n-1$  ;  $S(0) = 1$

Die nachfolgende Tabelle enthält die ersten Schröder-Zahlen.

### Schröder-Zahl $S(n)$

1	2	2	6
3	22	4	90
5	394	6	1806
7	8558	8	41586
9	206098	10	1037718
11	5293446	12	27297738
13	142078746	14	745387038
15	3937603038	16	20927156706
17	111818026018	18	600318853926
19	3236724317174	20	17518619320890



### Motzkin-Zahlen

Eng verbunden mit den Delannoy-Zahlen sind weiterhin die Motzkin-Zahlen. Die Motzkin-Zahl  $M(n)$  ist die Anzahl der möglichen Wege auf einem Gitter vom Punkt  $(0,0)$  zum Punkt  $(n,0)$ , wenn nur Schritte  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  und  $(1,-1)$  zugelassen sind wobei die y-Koordinate niemals negativ werden darf. Auf einem  $3 \times 3$  Gitter gibt es damit 4 Züge. Die maximal erreichte Höhe ist dabei der ganzzahlige Anteil von  $n/2$  (siehe Abbildung).

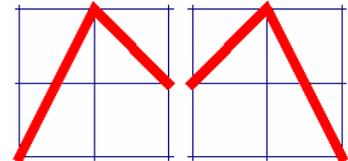
Definition

$$M(n) = M(n-1) + \sum_{k=0}^{n-2} M(k) * M(n-2-k) ; \text{ Summenbildung von } k = 0 \text{ bis } n-2 ; M(0) = 1$$

Die nachfolgende Tabelle enthält die ersten Motzkin-Zahlen.

#### Motzkin-Zahl $M(n)$

1	1	2	2
3	4	4	9
5	21	6	51
7	127	8	323
9	835	10	2188
11	5798	12	15511
13	41835	14	113634
15	310572	16	853467
17	2356779	18	6536382
19	18199284	20	50852019



### Eulers Zigzag-Zahlen

Die Anzahl der alternierenden Permutationen von  $n$  Elementen; ohne dass die 1 permutiert; wird Eulersche Zigzag-Zahl genannt.

Für die Menge  $\{1, 2, 3\}$  ist die Permutation  $\{1, 3, 2\}$  alternierend,  $\{3, 2, 1\}$  ist es nicht. Die Bestimmung der Anzahl alternierender Permutationen heißt André's Problem.

Die alternierenden Permutationen können auch veranschaulicht werden. Folgt in der Permutation als nächstes eine größere Zahl wird in einem Gitter nach oben gegangen, andernfalls nach unten.

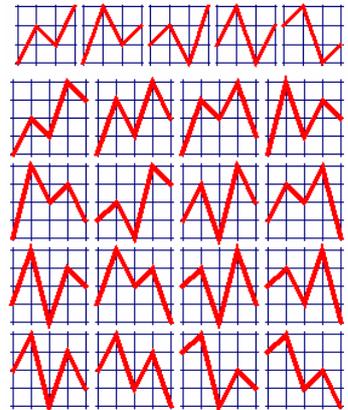
Für 3 Elemente gibt es 2 alternierende Permutationen, für 4 Elemente gibt es 5, für 5 Elemente 16, für 6 Elemente 61 und für 7 Elemente 272 Möglichkeiten.

Für  $n = 8, 9, \dots$  ergeben sich

1385, 7936, 50521, 353792, 2702765, 22368256, 199360981, 1903757312, 19391512145, 209865342976, 2404879675441, 29088885112832, 370371188237525, 4951498053124096, 69348874393137901, ...

Allgemein gilt für  $E(n,k)$ ; hier ist Startwert  $k = 1$ ; mit  $E(1,1) = 1$

$$E(n,k) = 0 \text{ für } k > n-1 \text{ oder } k < 1 \quad = E(n, k-1) + E(n-1, n-k) \text{ in allen anderen Fällen}$$



### Tangens-Zahl

Eng verbunden mit den Eulerschen Zigzag-Zahlen sind die Tangens-Zahlen  $T_n$ .

Sie treten u.a. in der MacLaurin-Entwicklung der Tangensfunktion auf, woher auch ihr Name stammt.

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k / (2k-1)! x^{2k-1} = x + 2/3! x^3 + 16/5! x^5 + 272/7! x^7 + \dots$$

Außerdem gibt  $T_n$  die Anzahl alternierender Permutationen für ungerade  $n = 1, 3, 5, \dots$  an. Die ersten Tangens-Zahlen sind

1, 2, 16, 272, 7936, 353792, 22368256, 1903757312, 209865342976, 29088885112832, 4951498053124096, 1015423886506852352, 246921480190207983616, 70251601603943959887872, 23119184187809597841473536, ...

Zwischen den Tangens-Zahlen und den Bernoulli-Zahlen besteht die Beziehung

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} 2n / (4^{2n} - 2^{2n}) T_{2n-1}$$

Ist  $\zeta(n)$  die Riemannsche Zetafunktion, so wird außerdem

$$T_n = 2^{2n+1} (1-2^{-2n}) (2n-1)! \zeta(2n) / \pi^{2n}$$

Zur Berechnung der Tangenzahlen wird der Brent-Zimmermann-Algorithmus verwendet:

Eingabe: positive ganze Zahl  $m$ ; Ausgabe: Tangenzahlen  $T_1, \dots, T_m$

Algorithmus:

$$T_1 \leftarrow 1$$

$$\text{für } k \text{ von } 2 \text{ bis } m: T_k \leftarrow (k-1)T_{k-1}$$

$$\text{für } k \text{ von } 2 \text{ bis } m:$$

$$\text{für } j \text{ von } k \text{ bis } m: T_j \leftarrow (j-k)T_{j-1} + (j-k+2)T_j$$

### Sekans-Zahl

Eng verbunden mit den Eulerschen Zigzag-Zahlen und den Tangens-Zahlen  $T_n$  sind die Sekans-Zahlen  $S_n$ , die in der MacLaurin-Entwicklung der Sekansfunktion auftreten.

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} S_k / (2k)! x^{2k} = 1 + 1/2 x^2 + 5/24 x^4 + 61/720 x^6 + \dots$$

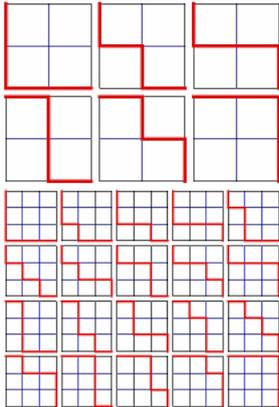
Die Zahlen  $S_n$  geben gleichzeitig die Anzahl alternierender Permutationen für gerade  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$  an. Die ersten Sekans-Zahlen sind  
 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, 19391512145, 2404879675441, 370371188237525, 69348874393137901, 15514534163557086905, 4087072509293123892361, 1252259641403629865468285, 441543893249023104553682821, 177519391579539289436664789665, ...

Zur Berechnung der Tangenzahlen wird der Brent-Zimmermann-Algorithmus verwendet:

Eingabe: positive ganze Zahl  $m$  ; Ausgabe: Sekanszahlen  $S_0, \dots, S_m$

Algorithmus:

$S_0 \leftarrow 1$   
 für  $k$  von 1 bis  $m+1$ :  $S_k \leftarrow (k-1)S_{k-1}$   
 für  $k$  von 1 bis  $m+1$ :  
 für  $j$  von  $k$  bis  $m+1$ :  $S_j \leftarrow (j-k)S_{j-1} + (j-k+1)S_j$



### Kürzester-Weg-Problem

Gegeben ist ein quadratisches Raster mit  $n$  waagerechten und  $n$  senkrechten Kanten.

Gesucht sind alle möglichen Wege der Länge  $2n$  auf diesem Raster. d.h. von links oben nach rechts unten. Dabei sind nur Bewegungen waagerecht bzw. senkrecht möglich.

Die Anzahl der möglichen Wege ist gleich dem mittleren Binomialkoeffizienten  $\binom{2n}{n} = (2n)! / n!^2$

Die Anzahl der möglichen Wege auf einem  $n \times n$ -Raster sind dann  
 2, 6, 10, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, 184756, ...

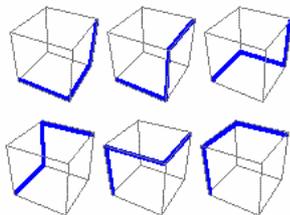
Diese Zahlen findet man in einem Pascalschen Dreieck genau in der Zeilenmitte. Links sind alle Wege auf einem  $2 \times 2$ - und einem  $3 \times 3$ -Raster dargestellt.

Der Namen Manhattan-Problem wird mitunter verwendet, da der Stadtplan von Manhattan genau ein solches quadratisches Raster bildet.

Fragt man nur nach Wegen, die die Hauptdiagonale nicht überschreiten, so wird deren Anzahl durch die Catalanschen Zahlen beschrieben.

Die allgemeine Lösung für ein  $n \times n$ -Raster ist hier die Catalansche Zahl  $C(n)$ . Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  ergeben sich damit 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

mögliche Wege, ohne die Hauptdiagonale zu überschreiten.



### Kürzester-Weg-Problem im $R^3$

In Analogie zum Manhattan-Problem kann man auch nach kürzesten Wegen auf einem Raster mit  $n \times n \times n$  Kanten im dreidimensionalen Raum  $R^3$  fragen.

Gesucht sind alle möglichen Wege der Länge  $3n$  auf diesem Raster. d.h. von links unten nach rechts oben. Dabei sind nur Bewegungen längs der Kanten möglich.

Die Anzahl der möglichen Wege ist gleich  $(3n)! / n!^3$

Die Anzahl der möglichen Wege auf einem  $n \times n \times n$ -Raster sind dann für  $n = 0, 1, \dots$

1, 6, 90, 1680, 34650, 756756, 17153136, 399072960, ...

Diese Zahlen sind die Elemente der Bruns-Folge  $(3, n)$ . Links sind alle Wege auf einem  $1 \times 1 \times 1$ -Raster dargestellt.

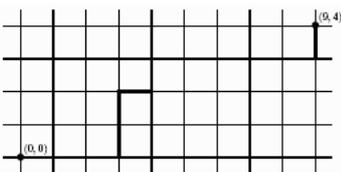
Fragt man nach ähnlichen Lösungen in höher dimensionalen Räumen, so ergibt sich folgerichtig für eine  $n \times n \times n \times n$ -Raster im  $R^4$  für die Anzahl der möglichen Wege längs der Kanten  $(4n)! / n!^4$

Für  $n = 0, 1, \dots$  sind dies

1, 24, 2520, 369600, 63 063000, 11732 745024, 2 308743 493056, 472 518347 558400, 99561 092450 391000, 21 452752 266265 320000, 4705 360871 073570 227520, ...

mögliche Wege. Im  $R^5$  ist die Wegezahl

1, 120, 113400, 168168000, 305540235000, 623360743125120, ...



### Gitterwege

Gegeben sei ein Quadratgitter in der Ebene, das durch  $(x, y) \in R^2$  mit ganzzahligen  $x, y$  gegeben ist.

Die Schnittpunkte der Gitterlinien heißen Gitterpunkte, d.h. genau die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

Ein Gitterweg von  $(a, b)$  nach  $(c, d)$  ist ein Weg vom Punkt  $(a, b)$  zum Punkt  $(c, d)$ , der stets längs der Gitterlinien verläuft und immer nach rechts oder nach oben geht.

Problem: Wie viele Gitterwege gibt es von  $(0, 0)$  zum Punkt  $(n, m)$ , wenn  $n$  und  $m$  nichtnegative ganze Zahlen sind?

Lösung: Es gibt genau  $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m} = (n+m)! / (n!m!)$

Gitterwege von  $(0, 0)$  nach  $(n, m)$ .

Begründung: Die Gitterwege entsprechen genau den Möglichkeiten, die  $n$  Schritte nach rechts; bzw. die  $m$  Schritte nach oben; auf die insgesamt  $n + m$  Schritte zu verteilen.

Für die Anzahl der möglichen Gitterwege, die die 1. Winkelhalbierende nicht überschreiten, wird

$$\binom{m+1-n}{n} \binom{n+m}{m+1}$$

Für den Spezialfall  $m = n$  ergeben sich die Catalan-Zahlen  $1/(n+1) \binom{2n}{n}$



Eugen Netto



Alfred Kempe

### Diskrete Mathematik

Die diskrete Mathematik ist als eigenes Gebiet der Mathematik noch jung. Sie beschäftigt sich mit endlichen Mengen, wodurch die Kombinatorik eines der großen Teile der diskreten Mathematik ist.

Ein weiteres wichtiges Teilgebiet der diskreten Mathematik ist die Graphentheorie.

Sie ist besonders hilfreich beim Lösen von Optimierungsaufgaben, wie beispielsweise dem "Traveling Salesman Problem" (Problem des Handlungsreisenden), wo es darum geht, die optimale Route zu bestimmen, so dass der Handlungsreisende alle Zielorte erreicht, aber der Weg so minimal wie möglich gehalten wird.

Eines der berühmtesten Probleme der Mathematik, das "Vier-Farben-Problem", entspringt der Graphentheorie. Die Frage ist hier:

"Ist es möglich, jede beliebige Landkarte mit nur vier Farben so zu färben, dass keine zwei aneinander grenzenden Gebiete die gleiche Farbe haben?" Im Zusammenhang mit der Graphentheorie bilden Algorithmen einen wichtigen Aspekt der Untersuchungen.

Das erste Lehrbuch in deutscher Sprache zur Kombinatorik erschien 1901 von E. Netto (1848-1919).

1901 erschien das Buch "Choice and Chance" von Whitworth, in welchem die Abzählung von Strukturen unter Nebenbedingungen; heute Konfigurationen genannt; wie Permutationen oder Kombinationen im Mittelpunkt steht.

Die Existenz von Konfigurationen rückte Anfang des 20. Jahrhunderts in den Fokus der diskreten Mathematik. Die ersten bedeutenden Ergebnisse in diesem Gebiet wurden von Algebraikern wie B. van der Waerden (1903-1996) oder P. Hall (1904-1982), Logikern wie F. Ramsey (1903-1930) und Topologen wie K. Kuratowski (1896-1980) oder K. Menger (1902-1985) erzielt.

Quelle: <http://www.mathematik.de>

Eine weitere, das Gebiet der Kombinatorik revolutionierende Entwicklung, war die Frage nach "optimalen" Konfigurationen, welche sich z.B. im "Traveling Salesman Problem" stellt. Das Problem wurde 1930 erstmals von K. Menger unter dem Titel "Botenproblem" gestellt und beeinflusste die Entwicklung der Optimierungsaufgaben zu Beginn der 40er Jahre wesentlich.

Dies ging einher mit der Entwicklung der ersten Computer, welche gerade bei Abzählfragen durch ihre immer größeren Kapazitäten als wesentliche Hilfe eingesetzt werden konnten.

Die Entwicklung der Graphentheorie war bis etwa 1930 durch das Bemühen um eine Lösung des "Vier-Farben-Problems" gekennzeichnet. Die eigentliche Graphentheorie entstand in den 30er Jahren, wobei H. Whitney (1907-1989) eine wesentliche Rolle spielte.

Sowohl in der Theorie, als auch in den Anwendungen nahm die Graphentheorie in den 50er und 60er Jahren, besonders durch W.T. Tutte (1917-2002), einen großen Aufschwung. In dieser Zeit gelang es den Mathematikern einen Großteil der Optimierungsaufgaben zu formulieren und auch zu lösen. In der Gegenwart spielt die Graphentheorie eine bedeutende Rolle bei Datenstrukturen und algorithmischen Beschreibungen diskreter Phänomene.

Der Höhepunkt war die Lösung des "Vier-Farben-Problems" mit Hilfe von Hochgeschwindigkeitsrechnern. 1876 wurde von dem englische Rechtsanwalt A. Kempe (1849-1922) die erste Lösung des Problems vorgestellt, welche jedoch 1890 von P. Heawood (1861-1955) als fehlerhaft erkannt wurde. Er konnte jedoch beweisen, dass die Aussage für fünf Farben stimmt.



Frank Ramsey



Bartel van der Waerden



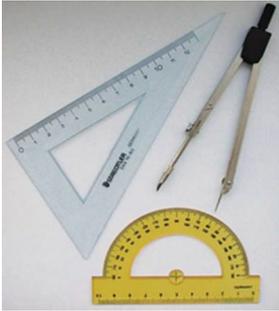
Philip Hall



Hassler Whitney



William Tutte



**Delisches Problem**

Das delische Problem beruht auf einer Erzählung von Eratosthenes: Als auf der Insel Delos die Pest wütete, erhielten die Bewohner von Apollo den Auftrag, den würfelförmigen Altar zu verdoppeln, ohne die Gestalt zu verändern. Plato interpretierte den Orakelspruch so, dass der würfelförmige Altar durch einen Würfel mit doppeltem Volumen ersetzt werden sollte. Er erklärte, der Gott wolle die Griechen beschämen, weil sie das Studium der Mathematik vernachlässigt hätten.

siehe auch

**Das Problem ist unlösbar da die 3.Wurzel von 2 irrational ist!**

delische Konstante =  $\sqrt[3]{2}$

**Trisektion, Dreiteilung des Winkels**

Aufgabe: nur unter zu Hilfenahme von Zirkel und Lineal einen Winkel in drei gleiche Teile zerlegen

**Quadratur des Kreises (nach Anaxagoras)**

Aufgabe: nur unter zu Hilfenahme von Zirkel und Lineal einen Kreis in ein inhaltsgleiches Quadrat umzuwandeln.

Beide Probleme sind auf Grund der Transzendenz der Kreiszahl  $\pi$  unlösbar. (Nachweis 1882 durch Lindemann)

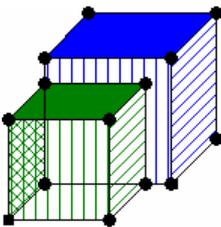
Näherungslösungen existieren von

Ramanujan  $\pi \approx 355/113 = 3,1415929...$

Dixon  $\pi \approx 6/6(1+\phi) = 3,141640...$

Kochansky  $\pi \approx \sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} = 3,141533...$

**Achtung!** Die Quadratur des Kreises ist im nichteuklidischen Gauß-Bólyai-Lobatschewski-Raum durchführbar.



**Würfelverdopplung (2)**

Bei Eutokios von Askalon, einem späten Kommentator von Archimedes, findet man die Wiedergabe eines Briefes, den angeblich Eratosthenes an König Ptolemaios schrieb. Allerdings ist dieser Brief mit großer Wahrscheinlichkeit eine Fälschung. Der Brief beginnt so:

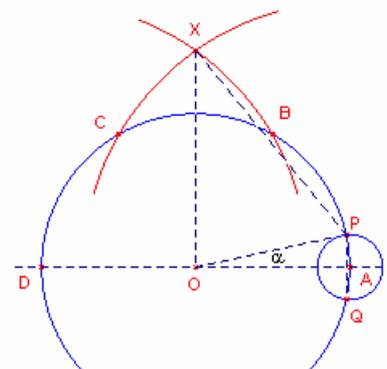
"Dem König Ptolemaios wünscht Eratosthenes Glück und Wohlsein. Von den alten Tragödiendichtern, sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten ließ, und hörte, dass es auf allen Seiten 100 Fuß haben werde sagen lassen:

'Zu klein entwarfst du mir die königliche Gruft. Verdopple sie; des Würfels (Gestalt) jedoch verfehle nicht!'

Man untersuchte aber auch von Seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne dass er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgaben dieser Art: des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zugrunde legend, suchte man diesen zu verdoppeln. Während nun lange Zeit hindurch alle ratlos waren, entdeckte zuerst Hippokrates von Chios, dass, wenn zwischen zwei Strecken, von denen die größte doppelt so lang ist wie die kleinste, zwei mittlere Proportionale gefunden werden können, dass dann der Würfel verdoppelt werden könnte.

Wonach er seine Ratlosigkeit in eine andere nicht geringere Ratlosigkeit verwandelte. Nach der Zeit, erzählt man, wären die Delier, weil sie von einer Krankheit befallen waren, einem Orakel zufolge geheißten worden, einen ihrer Altäre zu verdoppeln, und in dieselbe Verlegenheit geraten. Sie hätten aber die bei Platon in der Akademie gebildeten Geometer beschickt und gewünscht, sie möchten ihnen das Verlangte auffinden.

Da sich diese nun mit Eifer der Sache unterzogen und zu zwei gegebenen (Strecken) zwei mittlere (Proportionale) suchten, soll sie der Tarentiner Archytas mittels Halbzylinder aufgefunden haben, Eudoxos aber mittels der sogenannten Bogenlinien. Es widerfuhr ihnen aber insgesamt, dass sie zwar ihre Zeichnungen mit geometrischer Evidenz nachgewiesen hatten, sie aber nicht leicht mit der Hand ausführen und zur Anwendung bringen konnten."



**Mascheroni-Hilfskonstruktion**

Durch Lorenzo Mascheroni wurden mehrere Näherungskonstruktion zur Dreiteilung des Winkels, Würfelverdopplung, Quadratur des Kreises und Rektifikation des Kreises angegeben. Dazu verwendet er immer wieder folgende Hilfskonstruktion.

Die Strecke OA = r sei gegeben. Die Punkte B, C, D werden als Eckpunkte des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks auf übliche Weise konstruiert.

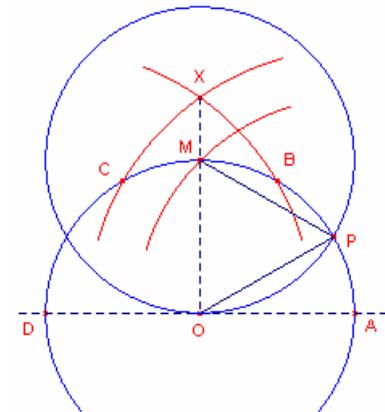
X sei dann der Schnittpunkt der Kreise um A mit dem Radius AC und um D mit dem Radius DB. Ein weiterer Punkt P wird willkürlich auf dem Kreis um O gewählt, d.h. Winkel POA =  $\alpha$ . Dann wird:  $AC = BD = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$  und  $OX = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$ . Außerdem ist dann  $PQ = 2r \sin \alpha$ .

Nach dem Kosinussatz wird

$$PX^2 = PO^2 + XO^2 - 2 PO XO \cos(\text{POX}) \Rightarrow PX^2 = r^2 + 2r^2 - 2r \cdot r\sqrt{2} \sin \alpha$$

und somit  $PX = r\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \sin \alpha}$

Diese Strecke PX wird nun in den Näherungskonstruktionen verwendet. Für  $\alpha = 30^\circ$  ergibt sich z.B.  $PX = 1.2592801$ . Ein Wert der nur 0.0006409 von  $\sqrt[3]{2} = 1.2599211$  abweicht und so die angenäherte Würfelverdopplung zulässt.



OPM dann gleichseitig ist, wird der Winkel POA =  $30^\circ$ .

### Würfelverdopplung, Näherung

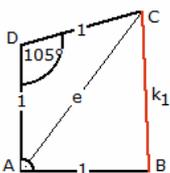
Mit Hilfe der Mascheroni-Hilfskonstruktion gelingt es, eine Näherungskonstruktion für die Würfelverdopplung zu erstellen. Dazu wählt man  $\alpha = 30^\circ$  und ein Kreisradius  $r = 1$ .

Für die Strecke PX ergibt sich dann  $\sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1,2592801$ . Zur Verdopplung eines Würfels wird eine Strecke  $x$  benötigt, für die  $x^3 = 2$  gilt, d.h.  $x = 1,2599211$ .

Die Abweichung der Näherungskonstruktion ist damit nur  $x - PX = 0,0006409$ , d.h. bei einem theoretischen Radius von 1 m nur 0,6 mm. Mascheroni gab weiterhin eine verkürzte Konstruktionsvorschrift.

Während die Punkte B, C, D und X wie in Mascheroni-Hilfskonstruktion erzeugt werden, ergibt sich M als Schnittpunkt des Kreises um O und eines Kreises um A mit dem Radius OX.

Der Punkt P entsteht durch Schnitt mit einem Kreis M. Da das Dreieck



### Würfelverdopplung, Näherung (2)

Die Kantenlänge eines Würfels mit der Volumen  $V = 2$  ist  $k = \sqrt[3]{2}$  und lässt sich nicht exakt konstruieren.

#### Näherungskonstruktion 1

(Abbildung oben) Im Dreieck ACD gilt

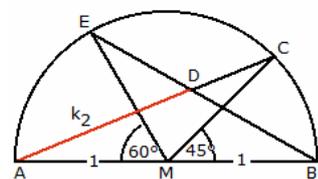
$$e^2 = 1 + x^2 - 2 \cos 105^\circ \Rightarrow e \approx 1,58$$

$$\sin \angle CAD / 1 = \sin 105^\circ / e \Rightarrow \angle CAD \approx 7,5^\circ, \angle CAB \approx 52,5^\circ$$

mit  $\angle CAD$  können ergibt sich für das Dreieck ABC

$$k_1^2 = 1 + e^2 - 2e \cos \angle CAD \Rightarrow k_1 \approx 1,2593$$

Genauigkeit:  $k_1/\sqrt[3]{2} = 0,9995 \dots$  0,05% zu klein



#### Näherungskonstruktion 2 (Abbildung unten)

$k_2$  ist eine Seite des Dreiecks ADB

$$k_2 / \sin 30^\circ = 2 / \sin 127,5^\circ \Rightarrow k_2 \approx 1,2605$$

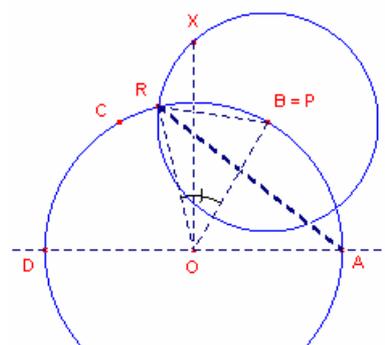
Genauigkeit:  $k_2/\sqrt[3]{2} = 1,0005 \dots$  0,05% zu groß

Das sich  $\sqrt[3]{2}$  allein mit Zirkel und Lineal nicht exakt konstruieren lässt, wurde zuerst 1837 von Pierre Laurent Wantzel bewiesen.

### Kreisrektifikation, Näherung

Mit Hilfe der Mascheroni-Hilfskonstruktion gelingt es ebenso, eine Näherungskonstruktion für eine Strecke der Länge  $\pi$  zu erstellen. Man wählt  $\alpha = 60^\circ$  und den Radius  $r = 1$ .

In diesem Fall sind die Punkte B und P identisch. Nach der Gleichung von Mascheroni wird dann  $PX = BX = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$ . Zeichnet man um B einen Kreis mit dem Radius BX, so ergibt sich mit dem Kreis um O ein Punkt R. Dann ist die Strecke  $AR = \pi/2$ .



Nachweis:

Der Winkel BOR sei  $\varphi$ . Im gleichschenkligen Dreieck BOR ist dann  $BR = 2 \sin \varphi/2$ , d.h.  $\varphi/2 = \arcsin BR/2$ .

und weiterhin

$$AR = 2 \sin(AOR/2) = 2 \sin(30^\circ + \arcsin BR/2).$$

$$2 AR = 4 \sin(30^\circ + \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3 - \sqrt{6}}) = 3,14239917.$$

Damit weicht die Strecke  $2AR$  von dem exakten Wert von  $\pi$  nur um 0,0008065 ab; bei einem Radius von 1 m wären dies 0,8 mm.

### Quadratur des Kreises, Näherung

Mit der näherungsweise Rektifikation des Kreises (siehe Kreisrektifikation, Näherung) ist die Quadratur des Kreises ebenfalls

näherungsweise gelöst.

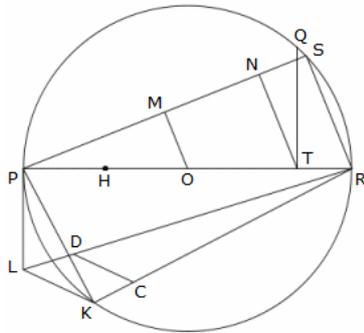
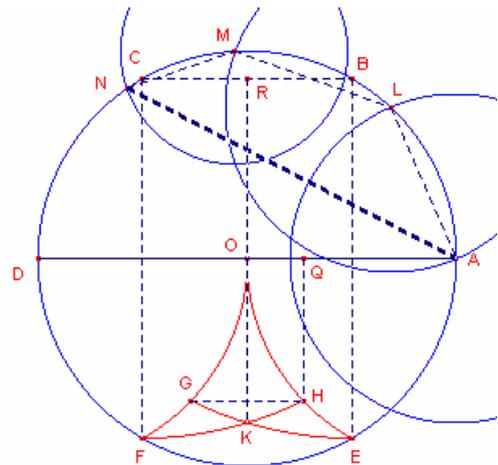
Mascheroni gibt eine weitere Näherungsmethode an:

Die Punkte B, C und D werden als Eckpunkte des regelmäßigen Sechsecks konstruiert. E und F sind die Spiegelpunkte an der Strecke AD.

Kreise um D und A mit dem Radius OA schneiden die Kreise um B mit dem Radius BE und um C mit dem Radius CF in den Punkten G und H. Die beiden letzten Kreise schneiden sich außerdem im Punkt K. L, M und N werden nun mit der Beziehung  $OK = LM = AL$  und  $MN = GH$  auf der Peripherie des Kreises gezeichnet. Die Strecke NA entspricht dann näherungsweise  $\sqrt{\pi}$ . Ist  $OA = 1$  ergibt sich

$$AN = 2 \sin \left( 2 \arcsin \frac{1}{4} (\sqrt{11} - \sqrt{3}) + \arcsin \frac{1}{12} (9 - \sqrt{33}) \right) = 1,772656991\dots$$

und damit eine Abweichung von  $\sqrt{\pi}$  von nur 0,0002031.



### Ramanujan-Quadrat

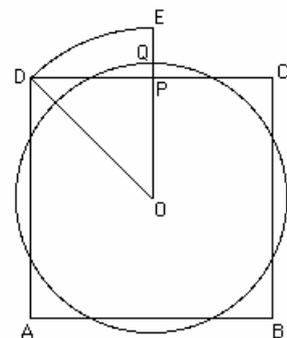
Durch den indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan wurde eine besonders genaue Näherungskonstruktion zur Quadratur des Kreises angegeben.

PQR sei der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser  $PR = d$ . H sei der Mittelpunkt von PO und T der Punkt der Dreiteilung von OR, welcher näher an R liegt. TQ ist senkrecht zu PR und ergibt eine Sehne

$RS = TQ$ .

PS werden verbunden und die Parallelen OM und TN zu RS gezeichnet. Eine Sehne PK mit  $PK = PM$  sowie die Tangente  $PL = MN$  sind zu konstruieren. Auf RK wird der Punkt C mit  $RC = RH$  ermittelt und CD parallel zu KL eingetragen; der Schnittpunkt mit RL ist D.

Dann ist das Quadrat über RD dem Kreis PQR näherungsweise gleich.



Es ist  $RS^2 = 5/36 d^2$ , d.h.  $PS^2 = 31/36 d^2$ .

Da  $PL = MN$  und  $PK = PM$  wird  $PK^2 = 31/144 d^2$ ,  $PL^2 = 31/324 d^2$  und somit

$$RK^2 = PR^2 - PK^2 = 113/144 d^2$$

$$RL^2 = PR^2 + PL^2 = 355/324 d^2$$

Mit  $RK / RL = RC / RD = 3/2 \sqrt{(113/355)}$  wird  $RC = 3/4 d$   
 und so  $RD = d/2 \sqrt{(355/113)} \approx 1,772453926 d/2$  Vergleichswert  $\sqrt{\pi} = 1,772453850\dots$

Ramanujan gab einen Vergleich: Ist die Kreisfläche gleich 140000 square miles, so ist RD nur 1 Inch zu groß.

### Quadratur in den Sulbasutras

In den indischen Sulbasutras (etwa 1000-400 v.Chr.) finden sich die ältesten Hinweise, auf den Versuch der Quadratur des Kreises. Allerdings wird die umgekehrte Aufgabe zur Konstruktion eines kreisförmigen Altars behandelt:

### Es ist ein gegebenes Quadrat in einen Kreis mit gleichem Flächeninhalt zu verwandeln.

In den Apastamba-Sulbasutras, Kap. III, 2, heißt es:

"Wünscht man aus einem Quadrat einen Kreis zu machen, so lege man von der Mitte (des Quadrats) aus nach eine Ecke (eine Schnur), führe sie in die Richtung einer Seite (des Quadrats) herum und beschreibe den Kreis zusammen mit einem Drittel des über (das Quadrat) hinausragenden Stücks. (Dies ist) die gewöhnlich benutzte (Schnur), (welche) den Kreis (liefert). Wieviel fortgenommen wird, soviel soll hinzukommen."

Ist a die Quadratseite, so wird für den Kreisradius  $r = a/2 (1 + (\sqrt{2} - 1)/3)$

Daraus ergibt sich ein Näherungswert für  $\lambda = \pi/4$  von  $\lambda = 1 / (1 + (\sqrt{2} - 1)/3)^2$

Die Regel zur Berechnung vom  $\sqrt{2}$  wird von Apastamba angegeben mit:

"Vermehre das Einheitsmaß um ein Drittel und dieses um ein Viertel, (das letzte aber) vermindert um seinen vierunddreißigsten Teil."  $\sqrt{2} \approx 1 + 1/3 + 1/(3*4) - 1/(3*4*34) = 577/408 \approx 1.4142157$

Damit ergibt sich insgesamt für  $\pi$  die verwendete Näherung von  $\pi = 3.08831$

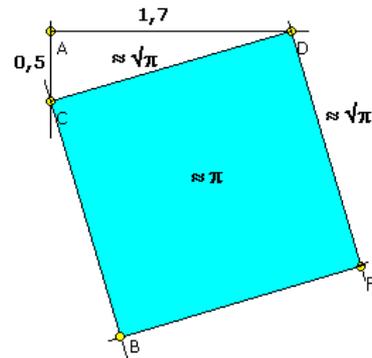
### Kettenbruchentwicklung und Näherungsbrüche für $\sqrt{\pi}$

Zur Entwicklung von Näherungskonstruktionen für  $\sqrt{\pi}$  kann man deren Kettenbruchentwicklung und die zugehörigen Näherungsbrüche nutzen.

Kettenbruch von  $\sqrt{\pi}$ : [1, 1, 3, 2, 1, 1, 6, 1, 28, 13, 1, 1, 2, 18, 1, 1, 1, 83, 1, 4, 1, 2, 4, 1, 288, 1, 90, 1, 12, 1, 1, 7, 1, 3, 1, 6, 1, 2, 71, 9, 3, ...]

Für die ersten Glieder des Kettenbruchs ergeben sich die Näherungsbrüche: 2, 7/4, 16/9, 23/13, 39/22, 257/145, 296/167, 8545/4821, 111381/62840, 119926/67661, 231307/130501, 582540/328663, 10717027/6046435, ...

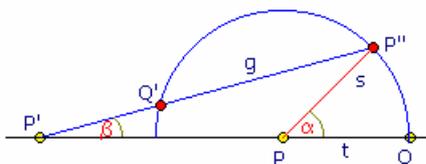
Konstruiert man mittels Strahlensatz eine Strecke der Länge  $7/4$ , so würde das darüber errichtete Quadrat einen Flächeninhalt von  $49/16 = 3.0625$  besitzen. Die Abweichung zu  $\pi$  ist dann 2.5 %. Für den Bruch  $16/9$  wird die Fläche 3.16049 mit einem Fehler von 0.6 %. Würde man theoretisch eine Strecke der Länge  $10717027/6046435$  konstruieren, so wäre die Abweichung der Quadratfläche von  $\pi$  nur noch  $1.98 \cdot 10^{-12}$  %. Für den 17.Näherungsbruch wird  $2787257957 / 1572541906$  mit einem Fehler von  $3,73 \cdot 10^{-17}$  %.



Eine weitere einfache Näherungskonstruktion (nach Erwein Flachsel) ergibt sich mittels Satz des Pythagoras. Zuerst wird ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 0.5 und 1.7 konstruiert. Die Kathetenlängen sind dabei leicht mittels Strahlensatz zu gewinnen. Die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks ist dann  $1/10 \sqrt{314}$ . Errichtet man ein Quadrat über der Hypotenuse, so hat dieses den Flächeninhalt  $A = 157/50 = 3.14$ . Dieser Näherungswert für  $\pi$  ist um 0.05 % zu klein.

### Trisektion , Dreiteilung des Winkels

Aufgabe: nur unter zu Hilfenahme von Zirkel und Lineal einen Winkel in drei gleiche Teile zerlegen



Ein grundsätzliches Missverständnis bei vielen Trisektionsversuchen beruht darauf, dass die Konstruktions-Regeln nicht exakt eingehalten werden. Unter Missachtung dieser Regeln ist es

selbstverständlich einfach, Winkel z.B. folgendermaßen dreizuteilen:

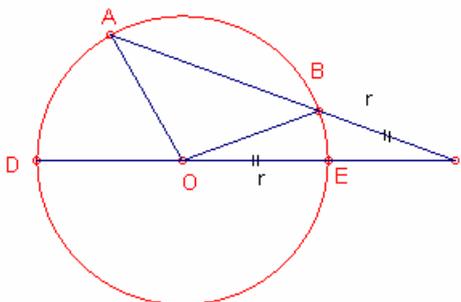
Der Winkel  $\alpha$  sei durch die beiden Strahlen  $s$  und  $t$  gegeben, die vom Punkte  $P$  ausgehen. Auf  $t$  wähle man einen Punkt  $Q \neq P$ .

Auf dem Lineal markiert man den Abstand  $d$  von  $P$  und  $Q$ , schlägt einen Kreis vom Radius  $d$  um  $P$  und legt das Lineal zur Zeichnung einer Geraden  $g$  so an, dass auch  $P'$  und  $Q'$  den Abstand  $d$  haben, wobei  $P'' = g \cap s$  auf dem Kreis liegt. Man prüft leicht nach:  $3\beta = \alpha$ . Bei dieser Winkeldreiteilung wird gegen die Konstruktionsregeln verstoßen, weil sowohl das Markieren des Abstandes  $d$  auf dem Lineal als auch das spezielle Anlegen des Lineals zur Zeichnung der Geraden  $g$  nicht erlaubt sind. Es geht also nicht darum, "irgendwie" die Trisektion durchzuführen, sondern dabei auch die Regeln der Schule Platons einzuhalten. Allgemein gilt: Der Winkel  $n^\circ$  ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn die natürliche Zahl  $n$  durch 3 teilbar ist.

### Trisektion bei Archimedes

Die nachfolgende Methode nutzte Archimedes zur Dreiteilung eines Winkels:

Gegeben ist ein Kreis um  $O$  mit dem Radius  $R$ . Nun wird eine Sehne  $AB$  des Kreises so gewählt, dass deren Verlängerung den verlängerten Durchmesser des Kreises um Punkt  $C$  so schneidet, dass  $BC = r$  ist.



Dann ist der Bogen  $AD$  dreimal der Bogen  $BE$  und so  $\angle AOD = 3 \cdot \angle EOB$

Dieses Verfahren ist aber auch keine Konstruktion im Platonschen Sinne, da das Auswählen der Sehne nicht in endlichen Schritten mit einem Zirkel und einem unmarkierten Lineal möglich ist.

Bekannt gemacht wurde dieses Verfahren erst 1590 durch den französischen Mathematiker Francois Viète.

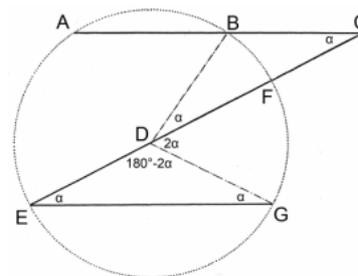
Erstmals findet sich das Verfahren in Archimedes "Liber assumptorum", Satz 8. Die lateinische Übersetzung lautet:

Si egrediatur in circulo linea

$AB$  ubicumque et producat in directum, et ponatur  $BC$  aequalis semidiametro circuli, et iungatur ex  $C$  ad centrum circuli, quod est  $D$ , et producat ad  $E$ , erit arcus  $AE$  triplus arcus  $BF$ .

Educamus igitur  $EG$  parallelam ipsi  $AB$ , et iungamus  $DB$ ,  $DG$ . Et quia duo anguli  $DEG$ ,  $DGE$  sunt aequales, erit angulus  $GDC$  duplus anguli  $DEG$  [Eucl. I, 32].

Et quia angulus  $BDC$  aequalis est angulo  $BCD$ , et angulus  $CEG$  aequalis est angulo  $ACE$  [Eucl. I, 29], erit angulus  $GDC$  duplus anguli  $CDB$  et totus angulus  $BDG$  triplus anguli  $BDC$ , et arcus  $BG$  aequalis arcui  $AE$  triplus est arcus  $BF$  [Eucl. III, 26]. Et hoc est, quod volumus.

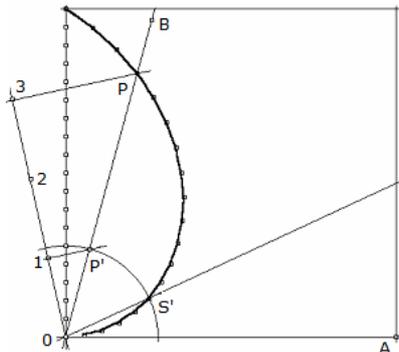


Archimedes: Liber assumptorum (Buch der Hilfssätze), Satz 8

"Wenn man in einem Kreis eine  $x$ -beliebige Gerade ( $AB$ ) legt, sie geradlinig weiter führt und  $BC$  die Länge des Kreisradius gibt, weiters  $C$  mit dem Mittelpunkt - nämlich  $D$  - verbindet und diese Linie bis  $E$  weiter zieht, (dann) wird der Bogen  $AE$  das Dreifache des Bogens  $BF$  ausmachen.

Wir zeichnen also parallel zu AB die Gerade EG und verbinden B und G jeweils mit D. Weil die beiden Winkel DEG und DGE gleich sind, wird der Winkel GDC das Doppelte des Winkels DEG sein [Eukl. I. 32]. Und weil der Winkel BDC gleich dem Winkel BCD ist und der Winkel CEG gleich dem Winkel ACE ist [Eukl. I. 29], wird der Winkel GDC doppelt so groß wie der Winkel CDB sein. Der gesamte Winkel BDG wird somit das Dreifache des Winkels BDC betragen, und die Bögen BG und AE werden gleich groß und jeweils drei mal so groß wie der Bogen BF [Eukl. III, 26] sein, und das wollten wir ja."

Anmerkung: Sowohl die Winkelsumme eines Dreiecks (siehe EGD) als auch ein gestreckter Winkel (siehe EDF) betragen je  $180^\circ$ . Um den stumpfen Winkel dieses Dreiecks zu ermitteln, hat man daher von  $180^\circ$  die Summe der beiden spitzen Winkel an der Basislinie abzuziehen. Folglich muss der Außenwinkel FDG des besagten stumpfen Winkels jener Summierung gleich kommen. Archimedes erbruft sich somit auf die Winkelsätze Euklids.



### Trisektion mit der Archimedischen Spirale

kinematische Definition der Archimedischen Spirale:

Auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierendem Zentralstrahl bewegt sich mit konstanter Radialgeschwindigkeit ein Punkt vom Zentrum nach außen, d.h. in Polarkoordinaten

$$r = a \alpha$$

Beschreibung der Winkeldreiteilung mit Hilfe der Archimedischen Spirale:

Es sei  $\angle AOB$  der zu teilende Winkel und P ist der Schnittpunkt der Archimedischen Spirale mit dem Winkelschenkel OB.

Dritteile den Winkelschenkel OP durch  $P_1$  (Strahlensatz) und zeichne einen Kreis mit Radius  $OP_1$  um O.

Als Schnittpunkt des Kreises mit der Archimedischen Spirale ergibt sich  $S_1$ .

Aus der Definition der Archimedischen Spirale folgt  $\angle AOB = 3 \angle AOS_1$ , da  $OS_1 = 1/3 OP$  ist.

### Trisektion mit Konchoide

Berühmt wurde die Methode des Nikomedes, zur Winkeldreiteilung die nach ihm benannte Konchoide einzusetzen.

Ist eine zur x-Achse parallele Gerade AB gegeben und wird auf der Geraden AO beidseitig eine Strecke der Länge k (meist  $k = 2 AO$ ) abgetragen, so entstehen zwei Punkte P und P' die auf der Konchoide liegen.

Gilt  $BO = d$ , so ergibt sich als Kurvengleichung

$$(x^2 + y^2)(x - d) - k^2x^2 = 0$$

Diese Kurve kann nun zur Trisektion des Winkels YOA genutzt werden.

Dazu wird in A die Senkrechte zu AB errichtet. Diese schneide die Konchoide im Punkt T. Die Strecke TO schneidet wiederum AB im Punkt N. Der Punkt M sei der Mittelpunkt von TN. Dann wird:

$$MT = MN = MA \text{ (Satz des Thales)}$$

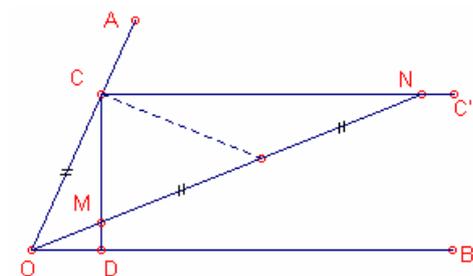
$$NT = 2OA \text{ (nach Konstruktion der Konchoide)}$$

$$MA = OA$$

$$\angle AOM = \angle AMO = 2 \angle ATM = 2 \angle TOY$$

$$\angle AOM = 2/3 \angle YOA, \text{ d.h. } \angle TOY = 1/3 \angle YOA.$$

Da die Konchoide nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, erfüllt auch dieses Verfahren nicht die ursprünglichen Forderungen.

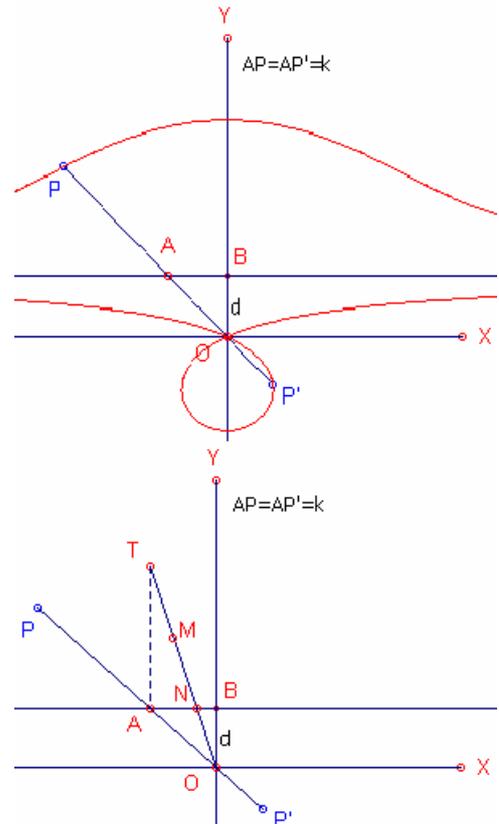


### Trisektion bei Apollonius

Eine der bekanntesten Winkeldreiteilungs-Methoden wird Apollonius von Perge zugeschrieben. Auch er nutzt, entgegen der Regeln, ein markiertes Lineal.

AOB sei der gegebene Winkel. Auf dem Schenkel OA wird ein beliebiger Punkt C gewählt, von diesem das Lot auf OB gefällt und eine Parallele  $CC'$  zu OB gezeichnet.

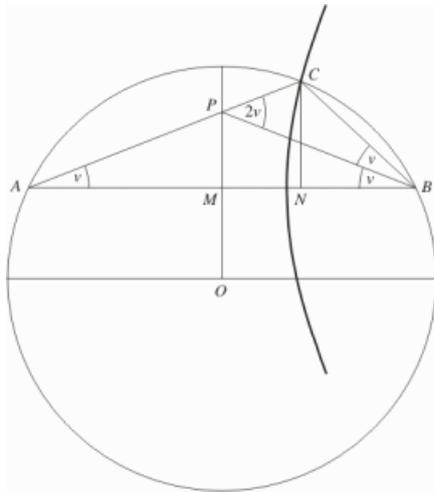
Nun wird das Lineal so angelegt, dass eine Gerade durch O



verläuft und die Endpunkte einer Strecke  $MN = 2OC$  zum einen auf dem Lot  $CD$ , zum anderen auf  $CC'$  zum liegen kommen. Dann drittelt die Strecke  $OM$  den Ausgangswinkel  $\angle AOB$ .

### Trisektion mit Hyperbel

Durch Pappus von Alexandria wurde folgende Methode zur Winkeldreiteilung vorgeschlagen: Um den Winkel  $\angle AOB$  wird ein Kreis um  $O$  derart konstruiert, dass  $AB$  Sehne des Kreises ist.  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ .

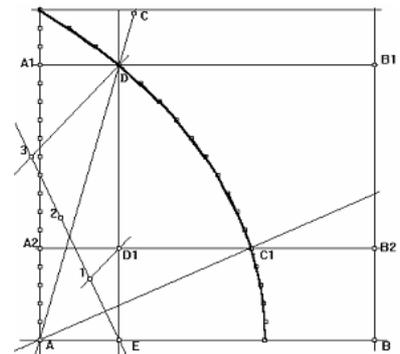


Mit der Geraden  $OM$  als Leitlinie und dem Punkt  $B$  als Brennpunkt wird ein Hyperbelast (Exzentrizität 2) gezeichnet. Dieser Hyperbelast schneidet den Kreis im Punkt  $C$ . Dann ist  
 Bogen  $BC = 1/3$  Bogen  $AB$   
 und somit  $\angle COB = 1/3 \angle AOB$

Anmerkung: Auch diese Konstruktion erfüllt nicht die Forderung nach endlich häufiger Verwendung von Zirkel und nicht markiertem Lineal, da eine Hyperbel so nicht konstruierbar ist.

### Trisektion mit der Trisektrix

Eine der ersten, untersuchten Kurven, neben Kreis und Gerade, stammt von Hippias aus Elis (ca. 420 v.u.Z.) und ist unter dem Namen Trisektrix bzw. Quadratrix des Hippias bekannt. Hippias



verwendete für die Beschreibung der Kurve folgende kinematische Definition:

Im Quadrat  $ABCD$  werde die Strecke  $DC$  parallel zu sich mit konstanter Geschwindigkeit bis zur Lage  $AB$  verschoben und  $AD$  rotiere um  $A$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ebenfalls bis zur Lage  $AB$ . Beide Bewegungen starten gleichzeitig und hören gleichzeitig auf.

Der geometrische Ort der Schnittpunkte ist die zu definierende Trisektrix. Als Gleichung ergibt sich

$$y = x \tan(y \pi/2)$$

### Beschreibung der Winkeldreiteilung:

Es sei  $\angle BAC$  der zu teilende Winkel und  $D$  der Schnittpunkt der Trisektrix mit dem Winkelschenkel  $AC$ .  $A_1B_1$  ist die Parallele durch  $D$  zu  $AB$ . Außerdem liefert das Lot von  $D$  auf  $AB$  den Punkt  $E$ .

Die Strecke  $DE$  wird mit dem Strahlensatz gedrittelt, wobei der Punkt  $D_1$  entsteht. Man zeichnet die Parallele  $A_2B_2$  zu  $AB$  durch  $D_1$ .

Der Schnittpunkt der Trisektrix mit  $A_2B_2$  liefert  $C_1$ .

Aus der Definition der Trisektrix folgt:

$$\angle BAC = 3 \angle BAC_1$$

### Trisektion, Konstruierbarkeit von Winkeln

#### Der Winkel $3^\circ$ ist konstruierbar

Sei  $\beta = 72^\circ \Rightarrow \sin 5\beta = 0 \Rightarrow 16 \cdot \sin^5 \beta - 20 \cdot \sin^3 \beta + 5 \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta$  ist Nullstelle von  $16X^4 - 20X^2 + 5 \Rightarrow \sin 72^\circ \in \{\pm \sqrt{5/8 \pm \sqrt{5/64}}\}$ .

Aus dem Strahlensatz und dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke folgt, dass jede dieser Nullstellen konstruierbar ist. Mit  $\sin 72^\circ$  ist auch der Winkel  $72^\circ$  konstruierbar und damit auch die Winkel:  $1/2 \cdot 1/2 \cdot 72^\circ = 18^\circ$  und  $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ .

#### Der Winkel $5^\circ$ ist nicht konstruierbar

Mit dem Winkel  $5^\circ$  wäre der Winkel  $4 \cdot 5^\circ = 20^\circ$  und somit auch die Zahlen  $\cos 20^\circ$  und  $2 \cdot \cos 20^\circ$  konstruierbar. Der Grad des Minimalpolynoms von  $2 \cdot \cos 20^\circ$  über  $\mathbb{Q}$  wäre also eine Potenz von 2.

Aber! Dieses Minimalpolynom hat den Grad 3!

Aus  $\cos 3\alpha = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha$  folgt:  $(2 \cdot \cos 20^\circ)^3 - 3 \cdot (2 \cdot \cos 20^\circ) - 1 = 2 \cdot (4 \cdot \cos^3 20^\circ - 3 \cdot \cos 20^\circ - 1/2) = 2 \cdot (\cos 60^\circ - 1/2) = 0$ .

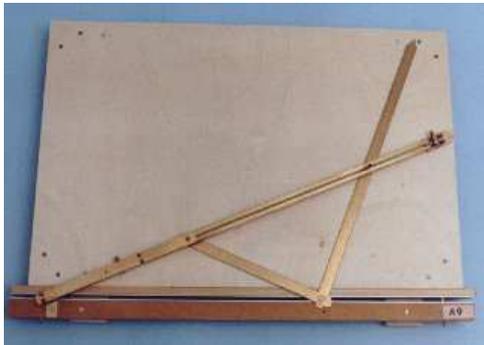
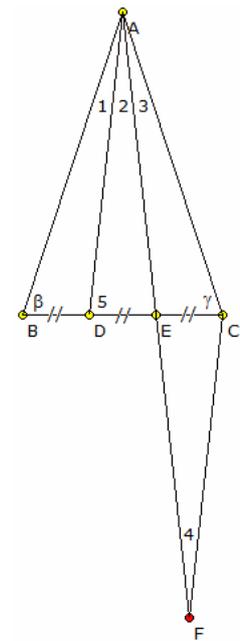
Somit ist die Zahl  $2 \cdot \cos 20^\circ$  eine Nullstelle von  $f = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ . Wegen  $f(\pm 1) \neq 0$  hat  $f$  keine ganzzahligen Nullstellen und aufgrund des Leitkoeffizienten 1 auch keine anderen rationalen Nullstellen. Jedes Polynom vom Grad 3 ohne rationale Nullstelle ist trivialerweise nicht zerlegbar in ein Produkt von Polynomen mit rationalen Koeffizienten. Aus den drei hervorgehobenen Eigenschaften folgt:  $f$  ist das Minimalpolynom von  $2 \cdot \cos 20^\circ$  über  $\mathbb{Q}$ .

### Trisektion, Winkeldreiteilung

Von mathematischen Laien wird sehr gern eine "korrekte Konstruktion" zur Winkeldreiteilung angegeben. Ausgehend von einem gleichschenkligen Dreieck  $\triangle ABC$  wird der Winkel  $\alpha$  "dreigeteilt", in dem die Strecke  $BC$  in drei Teile zerlegt wird. Behauptet wird nun, dass die drei Winkel in der Abbildung  $\angle 1$ ,  $\angle 2$  und  $\angle 3$  gleich groß sind. Dies ist aber nicht der Fall!

Nachweis: Wenn  $AB = AC$  ist, dann gilt  $\beta = \gamma$  und die Dreiecke  $\triangle ABD$  und  $\triangle ACE$  sind kongruent. Dann ist auch  $\angle 1 = \angle 3$ .

Angenommen, es wäre auch  $\angle 2 = \angle 3$ .  
 Die Strecke AE wird über E hinaus verlängert und der Punkt F auf ihr so gewählt, dass  $AE = EF$ . Die Strecke CF wird gezeichnet.  
 Die Dreiecke  $\triangle ADE$  und  $\triangle FCE$  sind dann kongruent und somit  $\angle 2 = \angle 4$ , folglich  $\angle 3 = \angle 4$  und  $AC = CF$ .  
 Wenn aber  $AD = CF$  und  $AD = AC$  wird auch  $\angle 5 = \gamma = \beta$ .  
 Nach der Konstruktion muss aber  $\angle 5$  größer sein als  $\beta$ , womit ein Widerspruch vorliegt.  $\angle 2$  und  $\angle 3$  sind nicht gleich groß.  
 Eine Winkeldreiteilung ist mit Zirkel und Lineal eben nicht ausführbar.



### Trisektor von Pascal

Ausgehend von der Archimedes zugeschriebenen Näherungslösung zur Dreiteilung des Winkels konstruierte Blaise Pascal ein mechanisches Gerät, den Trisektor, mit dem Winkel gedrittelt werden können.  
 Die Abbildung zeigt einen Nachbau aus dem Universitätsmuseum von Modena.

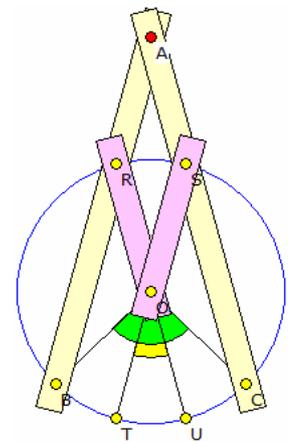
### Ceva-Pantograph

Durch Tommaso Ceva (1648-1737), einem italienischen Mathematiker, wurde ein Mechanismus, zur Dreiteilung eines Winkels entworfen. Tommaso Ceva war der Bruder von Giovanni Ceva, der durch den Satz von Ceva bekannt wurde.

Der Ceva-Pantograph besteht aus vier Stangen. Ein Punkt A ist senkrecht bewegbar, die Zwischen- und Endpunkte der von ihm ausgehenden Stangen R, S, B und C sind auf einem Kreis frei beweglich. Weiterhin sind die Punkte R und S mit dem Mittelpunkt O des Kreises verbunden.

Der zu dreiteilende Winkel ist  $\angle BOC$ . Wird A verschoben, so verändert sich die Größe von  $\angle BOC$ .

Da  $AR = AS = RO = SO$  gilt, so wird der Winkel  $\angle ROS$  zu einem Drittel von  $\angle BOC$ . Spiegelung am Kreismittelpunkt ergibt, dass dann auch  $\angle TOU = 1/3 \angle BOC$  gilt.



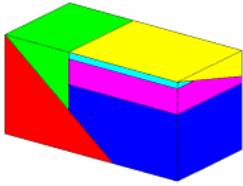
### Quadratur des Kreises - Historische Ereignisse

- 1650 v.Z. im Papyrus Rhind ist eine Aufgabe enthalten, aus dem  $1/9$  eines Kreisdurchmessers ein flächenähnliches Quadrat zu konstruieren
- 5.Jh. v.Z. Anaxagoras veröffentlicht das "Problem der Quadratur des Kreises"
- 414 v.Z. Aristophanes lässt in seinem Theaterstück "Vögel" Meton über die Quadratur des Kreises polemisieren
- 400 v.Z. Hippokrates gibt als erste eine Näherungskonstruktion
- 390 v.Z. Hippias nutzt eine Quadratrix zur Konstruktion des flächengleichen Quadrates
- 360 v.Z. Aristoteles schreibt zum Problem
- 260 v.Z. Archimedes verwendet Spirallinien zur Quadratur des Kreises
- 230 v.Z. Apollonius nutzt eine Cochloid-ähnliche Kurve
- 10. Jh. al-Haytham glaubt, dass es eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal geben muss
- 1050 Franz von Lüttich schreibt "De quadratura circuli". Er gibt eine Näherungskonstruktionen für pi mit  $22/7$  an
- 1450 Cusanus sucht erfolglos nach einer elementaren Konstruktion
- 1490 Leonardo da Vinci entwickelt mechanische Methoden zur näherungsweise Konstruktion des Quadrates
- 16.Jh. Mathematiker, wie Oronce Fine, Giambattista della Porta und Pedro Nunez arbeiten zum Problem
- 17.Jh. James Gregory erarbeitet erste Gedanken zur Unendlichkeit und wendet dies auf die Quadratur an
- 1650 Huygens glaubt, dass pi algebraisch, d.h. Wurzel einer Polynomgleichung ist
- 1754 Montucla fasst die historische Entwicklung des Problems zusammen
- 1761 Lambert beweist, dass pi irrational ist
- 1775 die Pariser Akademie beschließt, weitere "Amateur"-Konstruktionen nicht mehr zu prüfen, wenige Jahre später nimmt die Royal Society in London ebenfalls keine "Beweise" mehr an
- 1872 De Morgan äußert, dass die geforderte Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar sei
- 1880 Lindemann beweist die Transzendenz von pi. Damit ist der Nachweis erbracht, dass die Konstruktion nicht ausführbar ist. Dennoch endet die Serie von Beweisversuchen durch

Laien nicht !

1913 Hobson gibt eine Näherungskonstruktion für pi mit 3.14164079...

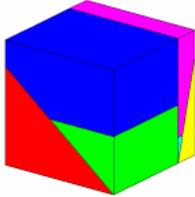
1914 Ramanujan verbessert die Näherung auf 3.1415926525826461253... Die Abweichung zum korrekten Wert tritt erst an der 19.Stelle auf



### Delische Verwandlung

1811 fragte Ernst Specker, in Anlehnung an das delische Problem, in Aufgabe 1184 der Elemente der Mathematik 57(3), wie man den Altar von Delos, vorgeblich ein Quader mit Kantenverhältnis 2:1:1, durch Zerschneiden und Wiederausammensetzen in einen Würfel verwandeln kann.

Dabei sollen nur endlich viele Teile mit jeweils endlich vielen Ecken, d.h. Polyeder, verwendet werden.



Dieses Problem ist sehr kompliziert. Gauß wunderte sich 1844 in zwei Briefen an Gerling, dass man beim Beweis der Volumengleichheit zweier Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe Zerlegungen in unendlich viele Teile benötigt.

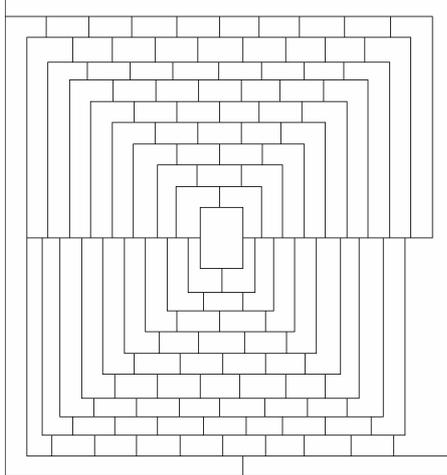
Hilbert griff dies 1900 in seinem dritten Problem auf und fragte nach zwei nicht zerlegungsgleichen Tetraedern gleicher Grundfläche und Höhe. Kurze Zeit später konnte Max Dehn die Frage entscheiden, indem er eine Invariante angab, die für

Würfel und Tetraeder unterschiedliche Werte liefert.

Für die Delische Verwandlung im Sinne von Specker konnte 1989 Hanegraaf eine Lösung mit 6 Teilen angeben. Durch Hungerbühler und Nüsken wurde eine Zerlegung mit 7 Teilen gefunden.

siehe <https://cosec.bit.uni-bonn.de/?id=1068>

Norbert Hungerbühler, Universität Fribourg/CH, Michael Nüsken, Universität Paderborn/D



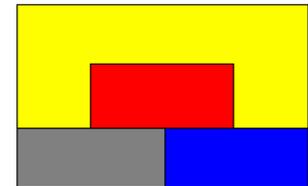
### Vierfarbenproblem, Vierfarbensatz

Im Jahre 1852 war der englische Mathematiker Francis Guthrie mit der Aufgabe beschäftigt, eine Karte mit den englischen Grafschaften zu kolorieren. Er bemühte sich, mit möglichst wenigen Farben auszukommen. Die Bedingung dabei war, dass benachbarte Länder farblich unterscheidbar sein sollten.

Daraus ergab sich die Frage:

Wie viele Farben reichen aus, um eine beliebige Karte so einzufärben, dass je zwei aneinandergrenzende Länder unterschiedliche Farben haben?

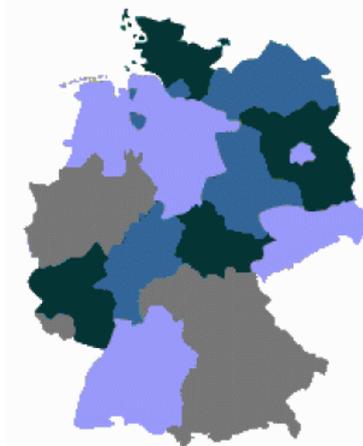
De Morgan gab eine Karte an, die zeigte, dass man mindestens vier Farben braucht. Da jedes Land an jedes andere angrenzt, braucht



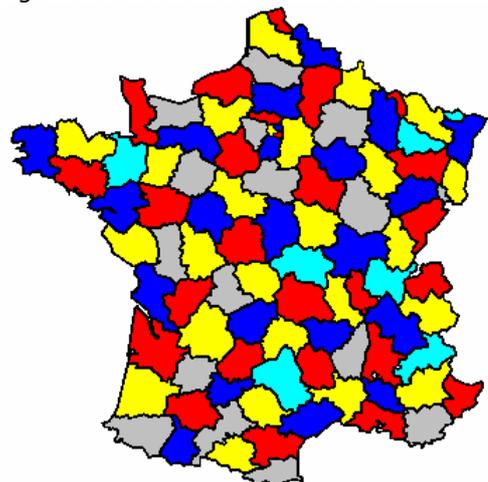
man zur Färbung vier Farben.

Vermutung: Es werden maximal vier Farben benötigt, um die Länder einer Landkarte einzufärben, so dass nie zwei gleichfarbige angrenzen.

Alle Beweise erwiesen sich als fehlerhaft. Der deutsche Mathematiker Heinrich Heesch (1906 - 1995) widmete einen Großteil seines mathematischen Lebens dieser Frage und erzielte entscheidende Fortschritte. Er konnte aber das Problem nicht endgültig lösen, weil, so seine Darstellung, ihm zu wenig Unterstützung an Personal und Computern bewilligt wurde. So blieb das Problem ungelöst - bis im Jahre 1976



der Amerikaner K. Appel (geb. 1932) und der in USA lebende Deutsche W. Haken (geb. 1928) auf der Grundlage der Resultate von Heesch mit Hilfe eines Computers der Beweis erbracht wurde, dem viele Mathematiker jedoch sehr skeptisch gegenüber stehen, weil der Beweis eine Rechenzeit von 1200 Stunden erforderte und für die meisten



Mathematiker nicht nachprüfbar war.

Episode: In der Aprilscherzkolumne der Zeitschrift Scientific American von 1975 berichtete Martin Gardner von den sechs

"bedeutendsten" Entdeckungen des Jahres 1974 und stellt dort die von einem gewissen William McGregor entdeckte Landkarte vor, die nicht mit vier Farben zu färben sei.

Beabsichtigt man die Karte mit den deutschen Bundesländern mit vier Farben zu färben, wird man schnell feststellen, dass drei nicht genügen. Da Thüringen an 5 Bundesländer grenzt, gelingt es nicht mit 3 Farben auszukommen.

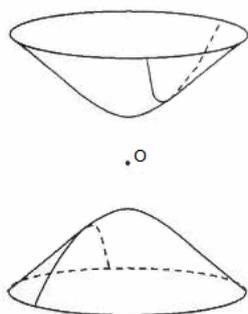
Zum Färben der Landkarte der französischen Departements benötigt man ebenso 4 verschiedene Farben, 3 genügen nicht.

Der Vierfarbensatz gilt für alle Karten in der Ebene und auf dem Globus. Ein verblüffender Aspekt der Färbeprobleme ist, dass es analoge Sätze für das Möbiusband und den Torus gibt, die trotz der komplizierteren Form dieser Gebilde lange vorher bewiesen waren - und deren Beweise vergleichsweise mühelos anzugeben sind. Auf dem Möbiusband gilt der 6-Farben-Satz und auf dem Torus der 7-Farben-Satz.

**Nichteuklidische Geometrie**

Die nichteuklidische Geometrie unterscheidet sich von der euklidischen Geometrie dadurch, dass hier das Parallelenaxiom nicht gilt. In der nichteuklidischen Geometrie gilt, dass es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nicht nur genau eine Parallele gibt; es gibt also entweder keine oder mehrere Parallelen. Gibt es keine Parallelen, so spricht man von einer elliptischen Geometrie, andernfalls von einer hyperbolischen Geometrie.

Ein beliebtes Beispiel für eine elliptische Geometrie ist eine zweidimensionale Geometrie auf einer Kugeloberfläche. Eine wichtige Anwendung der hyperbolischen Geometrie ist die Beschreibung der Geometrie des Raumes in der Allgemeinen Relativitätstheorie.



**Bolyai-Lobatschewski-Geometrie**

Eine Veranschaulichung der Bolyai-Lobatschewski-Geometrie kann u.a. auf der Oberfläche eines Rotationshyperboloiden gegeben werden. Dieser entsteht, indem man beide Äste einer Hyperbel (z.B.  $x^2 - y^2 = 1$ ) um die x-Achse rotieren lässt und so eine Fläche im dreidimensionalen Raum erhält.

In der Skizze sieht man diese Fläche mit O als Koordinatenursprung und der x-Achse als der Senkrechten. Die "Geraden" auf dieser Fläche sind die Schnittlinien der Ebenen durch O mit der Fläche. Eine solche Gerade sieht man auch in der Skizze.

Es lässt sich nachweisen, dass in diesem Modell alle Sätze der euklidischen Geometrie gelten, mit Ausnahme derjenigen, die vom Parallelenpostulat abhängen, denn auf dem Rotationshyperboloiden hat eine Gerade viele Parallelen durch einen Punkt außerhalb der Geraden. Als Konsequenz mehrerer Parallelen erhält man weiter:

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt weniger als  $180^\circ$ . Allein aus der Größe der Winkel im Dreieck ergibt sich dessen Flächeninhalt, d.h. es gibt keine ähnlichen Dreiecke verschiedener Größe.

**Vergleich von euklidischer und nichteuklidischer Geometrie**

	euklidische Geometrie	elliptische Geometrie	hyperbolische Geometrie
Winkelsumme im Dreieck	$\alpha + \beta + \gamma = \pi$	$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$	$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A$
... A Flächeninhalt			
Kreisflächen, Radius r	$\pi r^2$	$2\pi (1 - \cos r)$	$2\pi (\cosh r - 1)$
Kreisumfang, Radius r	$2\pi r$	$2\pi \sin r$	$2\pi \sinh r$
Satz des Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2$	$\cos c = \cos a \cos b$	$\cosh c = \cosh a \cosh b$
Kosinussatz	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$	$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$
Sinussatz	$\sin \alpha / \sin \beta = a/b$	$\sin \alpha / \sin \beta = \sin a / \sin b$	$\sin \alpha / \sin \beta = \sinh a / \sinh b$
Gaußsche Krümmung	$K = 0$	$K = 1$	$K = -1$
Weitere Formeln erhält man durch die zyklischen Vertauschungen $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ und $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ .			

**Elliptische Geometrie**

Beispiel: Gegeben ist eine Sphäre S vom Radius  $R = 1$ . Die Grundebene sei die nördliche Halbkugel einschließlich des Äquators.

1) Punkte sind entweder klassische Punkte, die nicht auf dem Äquator liegen oder diametral gelegene Punktepaare {A,B} auf dem Äquator

2) Geraden sind Großkreisbögen.

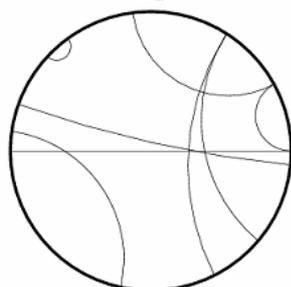
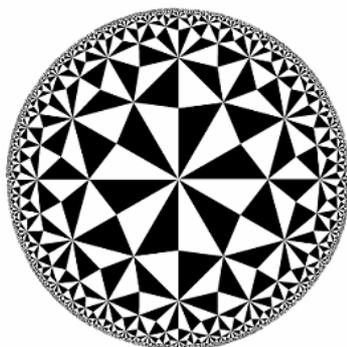
3) Winkel sind die Winkel zwischen den Großkreisen.

Dann gilt: In dieser Geometrie gibt es keine Parallelen.

Nachweis: Gegeben sei die Gerade  $g$  und der nicht auf  $g$  liegende Punkt  $P$  (Nordpol). Jede Gerade durch  $P$  ist der Bogen eines Längenkreises. Alle diese Geraden schneiden  $g$  in einem Punkt.

Bewegungen in dieser Geometrie sind die Drehungen um die durch den Nordpol und den Südpol gehende Achse. Kongruente Strecken und Winkel sind solche, die durch eine Bewegung ineinander übergehen.

Diese Geometrie erfüllt alle Hilbertschen Axiome der Geometrie bis auf das euklidische Parallelenaxiom.



### Hyperbolische Poincaré-Scheibe

Die hyperbolische Poincaré-Scheibe ist ein auf einer Kreisscheibe definiertes Modell eines zweidimensionalen Raumes mit hyperbolischer Geometrie.

Die hyperbolische Metrik ist

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) / (1 - x^2 - y^2)^2$$

In diesem Modell werden Geraden durch Kreisbögen dargestellt, die senkrecht an den Rändern der Scheibe enden.

Die hyperbolische Poincaré-Scheibe ist isomorph zum Klein-Beltrami-Modell einer nichteuklidischen Geometrie. siehe

Dieses Modell ist Grundlage einer Vielzahl interessanter Grafiken und Zeichnungen.

Insbesondere M.C. Escher nutzte die Poincaré-Scheibe für hyperbolische Parkettierungen. Oben ist die Escher-Grafik "Circle Limit IV (Himmel und Hölle)" abgebildet.

### Hyperbolische Geometrie, Poincaré-Modell

Modell einer nichteuklidischen Geometrie nach Poincaré (P-Geometrie)

Gegeben ist ein (euklidischer) Kreis und die Punkte sowohl im Innern als auch auf der Peripherie. Dann werden definiert:

**Horizont** ... der Kreis

**Scheibe** ... das innerhalb des Horizonts liegende Gebiet. Dieses wird mit  $D$  bezeichnet

**D-Zentrum** ... der Mittelpunkt des Horizontes

**D-Punkt** ... ein Punkt der Scheibe, d.h. von  $D$

**uneigentlicher Punkt** ... ein Punkt auf dem Horizont

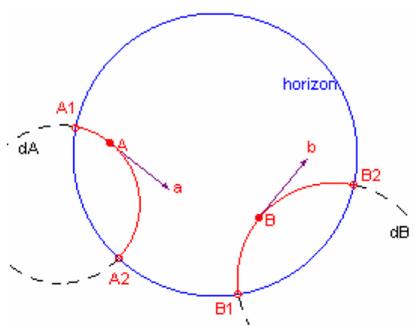
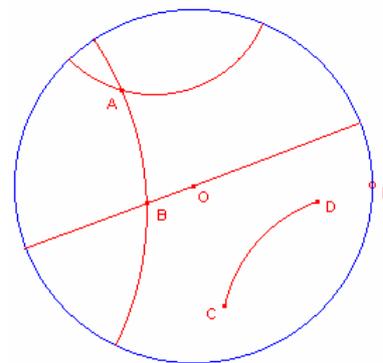
**D-Gerade** ... (euklidischer) Kreisbogen, der den Horizont senkrecht schneidet, besteht aus allen  $d$ -Punkten zwischen den zwei uneigentlichen (Schnitt-) Punkten

... Sonderfall: Strecke durch das  $D$ -Zentrum unter Ausschluss der uneigentlichen Punkte

**D-Strecke** ... Teil einer  $D$ -Geraden zwischen zwei  $D$ -Punkten, wobei die  $D$ -Punkte zur  $D$ -Strecke gehören

**Träger** ... ein euklidischer Kreis, für den eine  $D$ -Gerade oder eine  $D$ -Strecke Teil der Peripherie ist

In der Abbildung verlaufen drei  $D$ -Geraden, eine durch  $A$ , zwei durch  $B$ . Das  $D$ -Zentrum  $O$  liegt auf der  $D$ -Geraden durch  $B$ . Der Punkt ist ein uneigentlicher Punkt.  $CD$  bildet eine  $D$ -Strecke.



### Sätze am Poincaré-Modell

Satz 1: Es existiert genau eine Abbildung (hyperbolische Abbildung, H-Abbildung), die den Punkt  $A$  mit der Richtung  $a$  auf einen anderen Punkt  $B$  mit der Richtung  $b$  abbildet.

Satz 2: Es existiert genau eine H-Abbildung, die einen Punkt  $A$  auf einen Punkt abbildet und umgekehrt.

Anmerkung: Die Abbildung entspricht der Möbius-Transformation der Punkte  $A, A_1, A_2$  auf  $B, B_1, B_2$ .

Schlussfolgerung: Sind  $dA$   $D$ -Gerade durch den Punkt  $A$  und  $dB$   $D$ -Gerade durch einen Punkt  $B$ , dann gibt es zwei Abbildungen die  $A$  auf  $B$  und  $dA$  auf  $dB$  abbilden. Sind  $dA$  ein orthogonaler Kreis durch  $A$  und

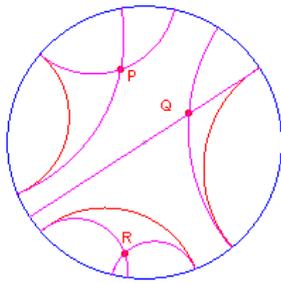
$dB$  ein orthogonaler Kreis durch  $B$ , dann gibt es zwei H-Abbildungen, wo einmal  $A$  auf  $B$  und zum anderen  $dA$  auf  $dB$  abgebildet werden.

### Schnittwinkel

Unter dem Winkel zwischen zwei  $D$ -Geraden oder  $D$ -Geradenstücken wird der Winkel zwischen den Tangenten an die  $D$ -Geraden im Schnittpunkt verstanden. Der Winkel zwischen zwei parallelen  $D$ -

Geraden ist damit noch nicht definiert. Deshalb wird festgelegt, dass der Schnittwinkel zwischen zwei gleichlaufenden D-Geraden  $0^\circ$  ist.

### Parallelität von d-Geraden, D-Dreieck



Zwei D-Geraden heißen parallel, wenn sie sich gegenseitig in einem uneigentlichen Punkt, d.h. auf dem Horizont, schneiden. Zwei D-Geraden heißen ultra-parallel, wenn sie sich gar nicht schneiden. Gleichlaufend werden die D-Geraden genannt, wenn sie parallel oder ultra-parallel sind.

Aus der Definition und elementaren Sätzen über Kreis in der euklidischen Geometrie folgt dann:

1. Durch einen D-Punkt gibt es genau zwei D-Geraden, die zu einer anderen gegebenen D-Gerade parallel sind.
2. Zwei D-Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.

In der Geometrie des Poincaré-Modells gilt das Playfair-Axiom:

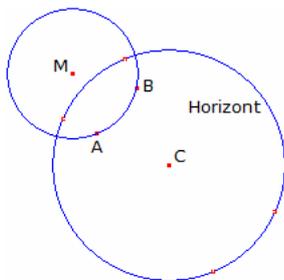
*Durch einen Punkt P außerhalb einer Strecke verläuft genau eine Gerade, die zur gegebenen Strecke parallel ist.*

nicht mehr. Vielmehr muss das Parallelenpostulat hier durch:

*Durch einen Punkte außerhalb einer D-Strecke verlaufen mindestens zwei D-Geraden die mit der D-Strecke parallel sind.*

ersetzt werden. Da sich auch der Innenwinkelsatz am Dreieck unmittelbar aus dem Euklidischen Parallelenaxiom ergibt, folgt damit, dass die Innenwinkelsumme in einem D-Dreieck nicht  $180^\circ$  sein kann. Ein D-Dreieck wird dabei von drei sich paarweise schneidenden D-Strecken gebildet.

Definition: Ein D-Dreieck ist eine Figur, die aus drei nicht auf derselben D-Gerade liegenden D-Punkten und den diese D-Punkte verbindenden D-Strecken besteht.



### Analytische Konstruktion einer D-Geraden

Gegeben sei eine Poincaré-Scheibe und ihr zwei Punkte A und B.

Zur grafischen Darstellung der durch A und B verlaufenden D-Geraden in einer euklidischen Ebene ist eine analytische Konstruktion notwendig. Insbesondere ist die Lage des Mittelpunktes M gesucht, um den ein Kreisbogen mit dem Radius r die D-Gerade darstellt.

Für eine Poincaré-Scheibe mit dem Radius 1 habe dieser Kreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 + mx + ny + 1 = 0$$

mit den Mittelpunkt  $M(-m/2 ; -n/2)$

Sind die Koordinaten der Punkte  $A(a_1, a_2)$  und  $B(b_1, b_2)$  und liegen A und B nicht auf einem Scheibendurchmesser so wird

$$m = (a_2(b_1^2 + b_2^2) - b_2(a_1^2 + a_2^2) + a_2 - b_2) / (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$n = (b_1(a_1^2 + a_2^2) - a_1(b_1^2 + b_2^2) + b_1 - a_1) / (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Für den Radius r erhält man

$$r = \sqrt{(m^2/4 + n^2/4 - 1)}$$

Sind A und B Endpunkte der D-Geraden auf dem Scheibenrand, wird einfacher

$$m = (2 a_2 - 2 b_2) / (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$n = -(2 a_1 - 2 b_1) / (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

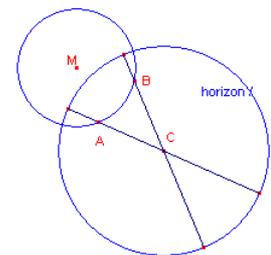
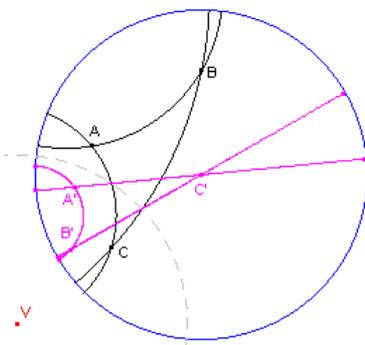
### Innenwinkelsatz im D-Dreieck

Die Summe der Winkel im D-Dreieck ist kleiner als  $180^\circ$ .

Nachweis: Zuerst liege der D-Punkt C des D-Dreiecks ABC im Mittelpunkt des Horizonts, also im D-Zentrum.

Der Kreis um M, der Träger der Seite AB des D-Dreiecks ABC, ist orthogonal zum Horizont und M liegt außerhalb des Kreises um C. Aus der Sicht von C ist der Bogen AB konvex.

Die Summe der Winkel bei A und B des D-Dreiecks ABC ist damit kleiner als die Summe der Winkel bei A und B des entsprechenden euklidischen



Dreiecks, d.h. also kleiner als  $180^\circ$ .

Fällt C nicht mit dem D-Zentrum zusammen, so wird eine Inversion durchgeführt.

Als Inversionzentrum wird ein Punkt V gewählt, dessen Bild bei einer Inversion am Horizont mit dem Punkt C zusammenfällt. Als Inversionkreis wird der Kreis ausgewählt, dessen Mittelpunkt V ist und der den Horizont senkrecht schneidet.

Damit geht der Träger von AC in die Mittellinie  $A'C'$  des Horizonts über und  $C'$  fällt mit dem D-Zentrum zusammen. Analog wird BC zur Mittellinie  $B'C'$ . Das Bild von V wird zur D-Geraden  $A'B'$ . Da die Inversion winkeltreu ist, sind die Winkelsummen von ABC und von  $A'B'C'$  gleich. Auf Grund des ersten Beweisschritts,  $C'$  ist jetzt im D-Zentrum, ist die Winkelsumme auch in diesem D-Dreieck kleiner als  $180^\circ$ .

Aus dem Nachweis folgt unmittelbar: In einem D-Dreieck ist ein Außenwinkel größer als jeder der nicht anliegenden Innenwinkel.

Außerdem gilt: In einem D-Dreieck ist ein Außenwinkel größer als die Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

Nachweis: Im D-Dreieck ABC seien die D-Innenwinkel bei A, B und C mit  $a$ ,  $b$  und  $c$  bezeichnet. Der Außenwinkel bei A zur Verlängerung von BA sei  $a'$ .

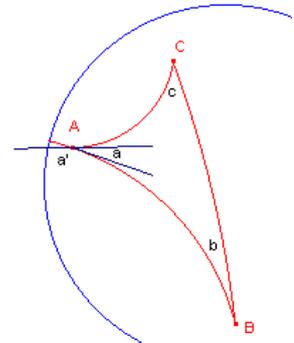
Dann ist  $a + b + c < 180^\circ$  und da  $a + a' = 180^\circ$ , folgt  
 $a + b + c < a + a'$  oder  $b + c < a'$ . qed

### Gleichheit von D-Strecken (D-Geradenabschnitten)

AB und CD seien zwei gegebene D-Strecken. Wenn es eine H-Abbildung gibt mit  $F(A) = C$  und  $F(B) = D$ , dann ist  $AB = CD$ . D.h. der Abstand von A zu B ist gleich dem Abstand von C zu D. Man schreibt  $AB (d) = CD$ .

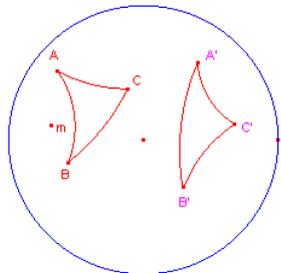
Wenn M die Mitte der D-Strecke AB ist, dann gilt  $AM = MB$  und umgekehrt. Dabei ist zu beachten, dass diese Definitionen nicht den Begriff des Abstandes selbst erklären.

Offensichtlich gilt: Für jede D-Strecke gilt  $AB (d) = BA$ .



### Kongruente D-Dreiecke

Zwei D-Dreieck ABC und A'B'C' heißen D-kongruent (Schreibweise  $(d) = A'B'C'$ ), wenn es eine H-Abbildung F mit  $F(A)=A'$ ,  $F(B)=B'$  und  $F(C)=C'$  gibt.



### Kongruenzsatz SWS für D-Dreiecke

Zwei D-Dreiecke ABC und A'B'C' sind D-kongruent wenn gilt:  $\angle CAB = \angle C'A'B'$ ,  $AB = A'B'$  und  $AC = A'C'$

Nachweis:

Zuerst haben die beiden Dreiecke ABC und A'B'C' dieselbe Orientierung. Aus  $AB = A'B'$  folgt, dass es eine H-Abbildung F gibt mit  $F(A)=A'$  und  $F(B)=B'$ .

F ist eine konforme Abbildung. Dadurch wird der gleiche Winkel bei A abgebildet auf den Winkel bei A'. Damit wird auch AC abgebildet auf den Träger von A'C' und wegen  $AC=A'C'$  wird  $F(C)=C'$ .

Haben beiden D-Dreiecke verschiedene Orientierung, so wird A'B'C' mit einer euklidischen Abbildung auf A''B''C'' transformiert, mittels einer Spiegelung an einer Mittellinie des Horizonts.

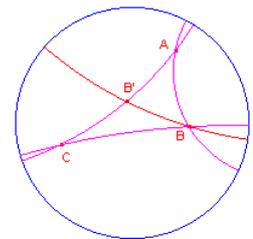
ABC und A''B''C'' haben jetzt die gleiche Orientierung und sind d-kongruent. Daraus folgt, dass  $ABC (d) = A'B'C'$ . qed.

Weiterhin gilt: Wenn in einem D-Dreieck ABC die Strecken  $AB=AC$  gleich sind, ABC ist dann ein gleichschenkliges D-Dreieck, dann ist  $\angle B = \angle C$ . In einem D-Dreieck liegt gegenüber der größten Seite auch der größte Winkel.

Nachweis (Abbildung rechts):

AC sei die größte Seite. Dann ist auch  $AC > AB$ . Es werde nun ein Punkt B' auf der Seite AC gewählt, so dass  $AB' = AB$ .

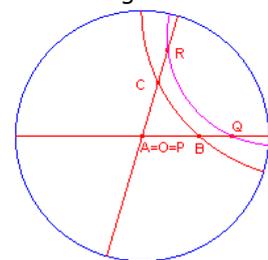
Dann ist  $ABB'$  ein gleichschenkliges D-Dreieck und so  $\angle ABB' = \angle AB'B$ .  $BB'$  liegt im Dreieck ABC, womit  $\angle ABC > \angle AB'B$ .  $\angle AB'B$  ist ein Innenwinkel des Dreiecks B'CB, so dass  $\angle AB'B > \angle C$ . Insgesamt wird also  $\angle B > \angle C$ . Auf gleiche Weise zeigt man, dass  $\angle B > \angle A$ . qed



### Ähnliche D-Dreiecke

Eine Vielzahl der bisher gezeigten Eigenschaften im Poincaré-Modell einer nichteuklidischen Geometrie unterscheiden sich nicht von der euklidischen Geometrie. Die Ursache liegt darin, dass diese Aussagen unabhängig von dem Parallelenpostulat sind. Dies betrifft die ersten 28 Sätze im Buch I der Euklidischen „Elemente“. Ein wesentlicher Unterschied ist der Begriff der Winkelsumme, die mit dem 5. Postulat verbunden ist und so auch zu abweichenden Sätzen führt. Insbesondere für ähnliche D-Dreiecke, d.h. D-Dreiecke, deren Innenwinkel gleich sind, ergibt dies:

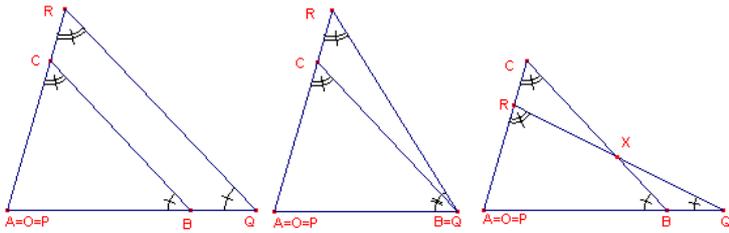
Ähnliche D-Dreiecke sind kongruent, d.h. der euklidische Begriff der ähnlichen, aber nicht kongruenten Dreiecke gibt es nicht mehr.



Beweis: Gegeben seien die Dreiecke ABC und PQR, in denen die Winkel bei den Punktepaaren (A,P), (B,Q), (C,R) gleich sind.

Nun wird eine H-Abbildung des Dreiecks ABC betrachtet, wodurch A mit O zusammenfällt. Eine zweite H-Abbildung bildet P ebenfalls auf O ab.

Durch eine Rotation um O kann man, da der Winkel bei A gleich dem bei P ist, dafür sorgen, dass Q auf B und R auf C liegt. Damit ist noch zu zeigen, dass  $R = C$  und  $Q = B$ .



Die verschiedenen unmöglichen Lagen von R und Q sind in der zweiten Abbildung dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{(links)} \quad \angle RCB &= 180^\circ - \angle C; \\ \angle CBQ &= 180^\circ - \angle B \end{aligned}$$

Die Winkelsumme im Viereck BQRC ist dann gleich  $(180^\circ - \angle B) + \angle Q + \angle R + (180^\circ - \angle C) = 360^\circ$ , was unmöglich ist, da

die Winkelsumme in einem D-Dreieck kleiner ist als  $180^\circ$

(Mitte)  $\angle RCB = 180^\circ - \angle C$ . Die Winkelsumme im D-Dreieck RCB ist dann:  $\angle R + 180^\circ - \angle C + \angle B > 180^\circ$ . Unmöglich, da die Winkelsumme im D-Dreieck kleiner  $180^\circ$  ist

(rechts) Im D-Dreieck XBQ ist nun die Winkelsumme  $\angle BXQ + (180^\circ - \angle B) + \angle BQX > 180^\circ$ , was ebenfalls unmöglich ist.

Die einzige Möglichkeit ist, das R mit C und Q mit B zusammenfallen. Die beiden D-Dreiecke sind kongruent. qed

### Abstandsbegriff im Poincaré-Modell

Für weitere Untersuchungen ist es wichtig die „Länge einer Strecke“ und damit einen Abstandsbegriff für ein Punktepaar (A,B) zu definieren. Dieser Abstand soll ausschließlich nicht-negative Werte annehmen und für jede H-Abbildung die Beziehung  $d(A, B) = d(F(A), F(B))$  erfüllen.

Dazu betrachtet man die Abbildung mit  $|a| < 1$ .

Wird der Punkte A durch  $a = p_1 + q_1 i$  festgelegt, so wird  $F(a) = 0$ , d.h.

$F(A) = O$ . Für den Punkt B mit  $b = p_2 + q_2 i$ , ergibt sich  $F(b) = (b-a) / (1-a \bar{b})$ .

Der Abstandsbegriff muss dann die Beziehung

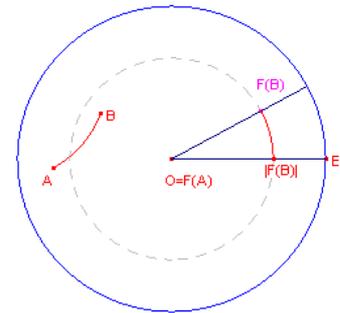
$$d(A, B) = d(O, (b-a)/(1-a \bar{b}))$$

erfüllen.

Der Punkt  $F(B)$  kann durch eine Drehung auf den Punkt  $|(b-a)/(1-a \bar{b})|$  der reellen Achse transformiert werden, wodurch gilt

$$d(A, B) = d(O, |(b-a)/(1-a \bar{b})|) = |(b-a)/(1-a \bar{b})|$$

Der letzte Ausdruck ist eine nicht-negative reelle Zahl, die sich als Grundlage zur Definition des Abstandsbegriffs eignet.



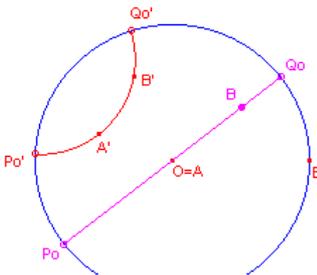
**Definition:** Der Abstand zwischen zwei D-Punkten A ( $z = z_1$ ) und B ( $z = z_2$ ) wird festgelegt als der Wert  $d(A, B) = 2 \operatorname{artanh}(|(z_2 - z_1) / (1 - \bar{z}_1 z_2)|)$ .

Die Einführung des Faktors 2 erweist sich als notwendig, wenn der Begriff des Doppelverhältnisses später eingeführt werden soll.

Für den Abstand eines Punktes B von O wird einfach  $d(O, B) = 2 \operatorname{artanh}(|z_2|)$ .

Wird der Punkt A durch  $A = a + bi$  beschrieben, so kann der Abstand zu O damit auf

$$d(O, A) = 2 \operatorname{artanh} |z| = 2 \operatorname{artanh} \sqrt{a^2 + b^2} \text{ festgelegt werden.}$$



Weiterhin gilt dann:  $d(O, Z) = \ln |(1 + |z|) / (1 - |z|)|$

Beweis:  $d(O, Z)$  sei D, d.h.  $2 \operatorname{artanh} |z| = D$  und  $|z| = \tanh(\frac{1}{2}D) = \frac{\sinh(\frac{1}{2}D)}{\cosh(\frac{1}{2}D)}$ , so dass  $|z| = (e^D - 1) / (e^D + 1)$  und  $e^D (1 - |z|) = 1 + |z|$

Umstellen ergibt das Gewünschte.

Ohne Beweis gilt weiter:  $d(O, Z) = \ln |(O, Z; Q_0, P_0)|$ ,

wobei  $P_0$  und  $Q_0$  die uneigentlichen Punkte der Strecke OZ sind und  $(O, Z; Q_0, P_0)$  das Doppelverhältnis dieser Punkte.

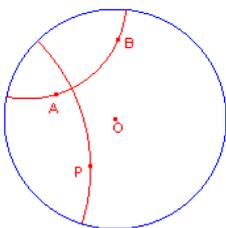
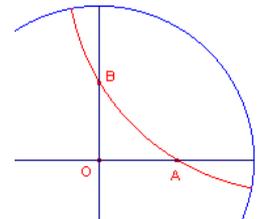
### Berechnungsbeispiel:

In der rechten Abbildung ist ein rechtwinkliges D-Dreieck OAB, mit  $A: z = \frac{1}{2}$  und  $B: z = \frac{1}{2} i$  dargestellt. Dann erhält man

$$D(O, A) = 2 \operatorname{artanh} |\frac{1}{2}| = 1,09861$$

$$D(O, B) = 1,09861$$

$$D(A, B) = 2 \operatorname{artanh} |(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i) / (1 - \frac{1}{2} i \cdot \frac{1}{2})| = 2 \operatorname{artanh} |(2 - 2 i) / (4 + i)| = 1,6807$$



Kontrolle zeigt sofort, dass  $AB^2 \ll OA^2 + OB^2$  ist. In der hyperbolischen Geometrie gilt der Satz des Pythagoras in der euklidischen Form nicht!

### Lotgerade und Mittelsenkrechte

Durch jeden D-Punkt außerhalb einer D-Geraden verläuft genau eine D-Gerade die senkrecht zur gegebenen D-Geraden ist.

Die D-Gerade, die durch die Mitte einer D-Strecke verläuft und zu dieser D-Strecke senkrecht ist, wird D-Mittelsenkrechte dieser Strecke genannt.

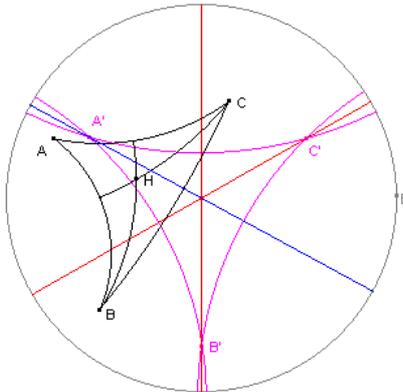
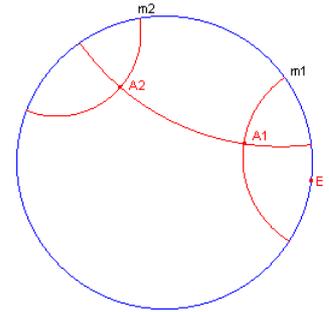
Wie in der euklidischen Geometrie gilt auch hier: Die D-Mittelsenkrechten der Seiten

eines D-Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Voraussetzung ist aber, dass diese Geraden sich überhaupt schneiden. Dies ist nicht immer der Fall.

**Gemeinsame Senkrechte**

In der euklidischen Geometrie sind zwei Geraden, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, parallel. In der hyperbolischen Geometrie ist dies nicht mehr der Fall.

Sind  $m_1$  und  $m_2$  zwei D-Geraden mit  $A_1$  auf  $m_1$  und  $A_2$  auf  $m_2$ , dann heißt die D-Gerade  $A_1A_2$  gemeinsame Senkrechte, wenn  $A_1A_2$  senkrecht auf  $m_1$  und senkrecht auf  $m_2$  steht. Es gilt: Zwei D-Geraden haben dann und nur dann eine gemeinsame Senkrechte, wenn sie ultra-parallel sind.



**Höhen im D-Dreieck**

Die Höhen in einem spitzwinkligen D-Dreieck schneiden sich in einem Punkt.

Zum Nachweis betrachtet eine Abbildung, bei der der Höhenschnittpunkt H der Höhen von B und C auf das D-Zentrum fällt.

Die D-Geraden gehen dann in Kreise über und die Höhen in Mittelsenkrechten bezüglich des Horizonts. Diese Geraden sind die Potenzlinien von zwei Kreisen. Die dritte Potenzlinie verläuft durch O. Diese ist das Bild der dritten Höhe, welche damit auch durch H verläuft.

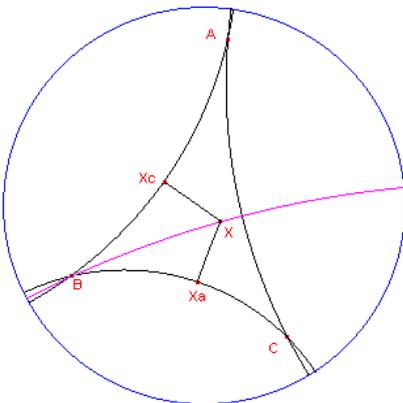
In einem stumpfwinkligen D-Dreieck gilt diese Aussage nicht immer. Sind zum Beispiel zwei der Dreieckspunkte uneigentliche Punkte, so existiert kein Höhenschnittpunkte deren Höhen.

**Winkelhalbierende im D-Dreieck**

In einem D-Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt.

Beweis:

In der Figur ist die D-Winkelhalbierende des Winkels bei B eingezeichnet. Der Punkt X ist ein beliebiger Punkt auf dieser Winkelhalbierenden. Die Punkte  $X_a$  und  $X_c$  seien die Fußpunkte von X auf BC und AB. Die zwei Dreiecke  $BXX_c$  und  $BXX_a$  sind nach SSW kongruent. Die Lote von X aus haben dann die gleiche Länge. Wie in der euklidischen Geometrie folgt daraus sofort, dass die Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden.

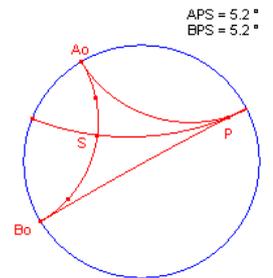


Eine D-Gerade m und eine D-Punkt P seien gegeben.

Die D-Gerade durch P und d-parallel zu m erzeugt mit der D-Lotgeraden von P auf m gleiche Winkel.

Nachweis:

In der Darstellung ist  $m = A_0B_0$  und  $n = PS$  die Lotgerade auf m. Die Dreiecke  $A_0SP$  und  $B_0SP$  sind dann (SWW) kongruent. d.h.  $\angle SPA_0 = \angle SPB_0$ .



**Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie**

In jedem rechtwinkligen D-Dreieck ABC, mit dem rechten Winkel bei C, gilt für die Längen der Seiten a, b, c

**$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b)$ .**

Beweis:

O.B.d.A. habe das rechtwinklige D-Dreieck die Eckpunkte O ( $z = 0$ ), A ( $z = p$ ) und B ( $z = qi$ ), wobei  $OA = b$ ,  $OB = a$  und  $AB = c$  ist. Andersfalls erhält man dies durch eine H-Abbildung.

Dann ist  $a = OB = 2 \operatorname{arctanh}(q)$   $b = OA = 2 \operatorname{arctanh}(p)$

$c = AB = 2 \operatorname{arctanh} | (p-qi)/(1-qi p) | = 2 \operatorname{arctanh} ((p^2+q^2)/(1+p^2q^2))^{1/2}$

Für hyperbolische Funktionen gilt  $(1 + \tanh^2 x)/(1 - \tanh^2 x) = \cosh x$ .

Aus  $x = \operatorname{arctanh}(t)$  wird  $t = \tanh(x)$  und mit der angegebenen Gleichung

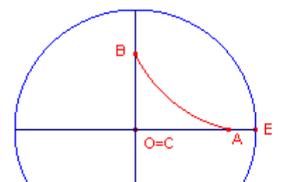
$\cosh(\operatorname{arctanh}(t)) = (1 + t^2) / (1 - t^2)$

Analog ergibt sich  $\cosh(a) = \cosh(2 \operatorname{arctanh}(q)) = (1+q^2)/(1-q^2)$  und

$\cosh(b) = \cosh(2 \operatorname{arctanh}(p)) = (1+p^2)/(1-p^2)$

D.h.

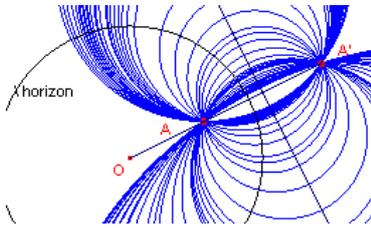
$\cosh c = (1+(p^2+q^2)/(1+p^2q^2)) / (1 - (p^2+q^2)/(1 + p^2q^2)) = (1 + p^2q^2 + p^2 + q^2) / (1 + p^2q^2 - p^2 - q^2)$   
 $= (1 + p^2)(1 + q^2)/(1 - p^2)(1 - q^2) = \cosh a \cosh b.$  qed



Anmerkung: Als erste Näherung für die hyperbolische Kosinusfunktion gilt  $\cosh x = (1 + x^2/4)^2$ . Setzt man dies in

$$\cosh c = \cosh a \cosh b \text{ ein, ergibt sich } c^2 = a^2 + b^2 + a^2 b^2 / 4$$

Ist eine der Seiten a oder b besonders klein, die D-Hypotenuse c verläuft dann „fast“ geradlinig, so erhält man damit näherungsweise den Satz des Pythagoras in der euklidischen Geometrie.



### D-Kreis

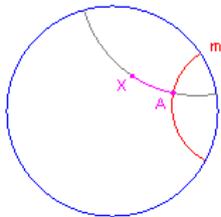
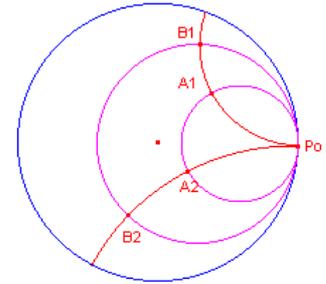
In Analogie zur euklidischen Geometrie wird festgelegt: Ein D-Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt A ist die Menge aller Punkte X, für die der D-Abstand  $d(A, X) = r$  ist.

Ein D-Kreis mit dem Zentrum A ist damit ein euklidischer Kreis, der senkrecht auf allen D-Geraden durch den D-Punkt A steht.

Wenn der Punkt A auf dem Horizont liegt, dann tangiert der D-Kreis um A im Punkt A den Horizont. Der Kreis heißt dann Grenzkreis (engl. horocycle).

Berühren zwei Grenzkreise den Horizont in einem uneigentlichen Punkt  $P_0$ , dann schneiden alle D-Geraden, die den Punkt  $P_0$  besitzen, zwischen den Kreisen gleiche Strecken aus. In der Darstellung sind die D-Abstände  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  gleich.

In der euklidischen Geometrie besteht die Menge aller Punkte, die zu einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben, aus zwei parallelen Geraden. In der hyperbolischen Geometrie ist dies deutlich anders. Dazu definiert man:

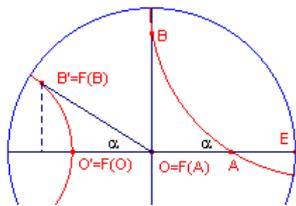
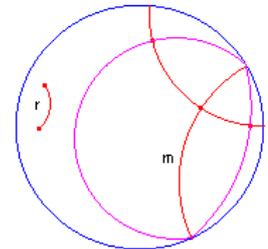


Der D-Abstand eines D-Punktes X von einer D-Geraden m ist die D-Länge des Geradenstücks mit den Endpunkten X und dem Fußpunkt A der D-Lotgeraden auf die Gerade m. van het Schreibweise:  $d(X, m) = d(X, A)$ .

Damit muss für die Menge aller D-Punkte X (Äquidistanzkurve), die von einer D-Geraden m den festen Abstand r haben,  $d(X, m) = r$  gelten.

Es gilt: Die Äquidistanzkurve eines Punktes R zu einer D-Geraden m ist ein (euklidischer) Kreisbogen durch R und die uneigentlichen Punkte von m. Diese Kurve wird Hyperkreis genannt (engl. hypercycle).

Auf Grund der Symmetrie besteht die Menge aller Punkte, die von einer D-Geraden einen gegebenen Abstand r haben, aus zwei Hyperkreisen. Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen dem Hyperkreis und der gegebenen Geraden, dann gilt für den Abstand von Punkten auf dem Hyperkreis zu der Geraden  $2 \arctanh(\tan(\alpha/2))$ .



### Satz von Lobatschewski

In einem rechtwinkligen D-Dreieck ABC, bei C ist der rechte Winkel, mit den Katheten a und b gilt:  $\tan \alpha = \tanh(a) / \sinh(b)$ .

Beweis:

Ausgangspunkt ist das rechtwinklige D-Dreieck OAB mit A:  $z = p$  und B:  $z = qi$ . In diese Position kann jedes beliebige D-Dreieck mit einer entsprechenden H-Abbildung gebracht werden.

Das Dreieck OAB wird mit einer H-Abbildung F so verändert, dass A mit O

zusammenfällt. Dann ist

$$F(z) = (z-p)/(1-pz), \text{ so dass } F(B) = (qi-p)/(1-pqi)$$

Erweitern des Zählers und Nenners mit  $(1+pqi)$  gibt

$$F(B) = -p(1+q^2)/(1+p^2q^2) + i \cdot q(1-p^2)/(1+p^2q^2).$$

Nach der euklidischen Goniometrie wird dann  $\tan \alpha = (q(1-p^2)) / (p(1+q^2)) = (1-p^2)/p \times q/(1+q^2)$

Mit der D-Abstandsformel wird im Dreieck ABC  $a = OB = 2 \operatorname{artanh}(q)$  und  $b = OA = 2 \operatorname{artanh}(p)$  und somit  $q = \operatorname{tanh}(1/2a)$  und  $p = \operatorname{tanh}(1/2b)$

Weitere Umwandlung ergibt

$$q/(1+q^2) = \tanh(a/2) / (1 + \tanh^2(a/2)) = \sinh(a/2) \cosh(a/2) / (\cosh^2(a/2) + \sinh^2(a/2)) = \tanh(a/2)$$

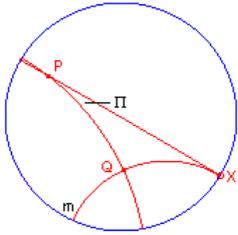
$$(1-p^2)/p = (1 - \tanh^2(b/2)) / \tanh(b/2) = (\cosh^2(b/2) - \sinh^2(b/2)) / (\sinh(b/2) \cosh(b/2)) = 2 / \sinh b$$

und insgesamt  $\tan \alpha = \tanh(a) / \sinh(b)$ . qed

Anmerkung: Für kleine Werte von a und b ist  $\tanh(a) = a$  und  $\sinh(b) = b$  und somit  $\tan \alpha = a/b$ , dass bekannte Ergebnis aus der euklidischen Geometrie.

## Parallelwinkel

Der Winkel zwischen der Senkrechten in P zur Gerade m und und einer Geraden durch P parallel zu m wird der Parallelwinkel von P und m genannt. (holl: parallelhoek van P tov. m, Eng.: angle of parallelism). Schreibweise  $\Pi(PQ)$



Dabei ist PQ die D-Länge der Strecke PQ und Q der Fußpunkt der Senkrechten von P auf m. Es wird  $\tan \Pi(PQ) = 1/\sinh(PQ)$ . Allgemein gilt  $0 < \Pi(PQ) < 90^\circ$ .

Beispiel: Für einen Punkt  $z = i/2$  und eine Mittellinie m durch den Punkte R:  $z = 1$  ergibt sich ein Winkel von  $36.9^\circ$ .

Einen besonderen Wert des D-Abstandes PQ erhält man für  $\Pi(PQ) = 45^\circ$ , d.h.  $\sinh(PQ) = 1$ .

Durch Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) wurde erstmals festgestellt, dass der Wert der D-Höhe auf die Hypotenuse im rechtwinkligen D-Dreieck begrenzt ist. Dieser Grenzwert wird Schweikart-Konstante genannt.

Für das „größte“ D-Dreieck ergibt sich für die euklidische Länge von PQ:

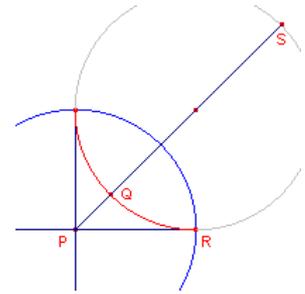
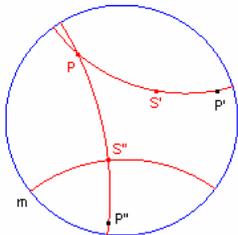
$$PR^2 = PQ \cdot PS \quad \text{und} \quad 1 = PQ(PQ + 2), \quad \text{zodat} \quad PQ^2 + 2PQ - 1 = 0$$

$$PQ \text{ (euklidisch)} = \sqrt{2} - 1$$

$$d(P,Q) = \ln|PQSS'| = \ln|(SP/SQ) : (S'P/S'Q)| = \ln|(1 + \sqrt{2})/2 : (1/\sqrt{2})|$$

$$\text{und somit} \quad d(P,Q) = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

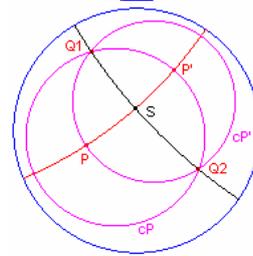
Ähnlich lässt sich nachweisen, dass in einem D-Dreieck ABC mit  $AB = AC$  für die D-Höhenlinie von A aus eine obere Grenze existiert, die vom Winkel bei A abhängig ist.



## Sinussatz

In der hyperbolischen Geometrie gilt: in einem rechtwinkligen D-Dreieck ABC, bei dem der rechte Winkel bei C liegt und  $BC = a$  sowie  $AB = c$  ist, gilt  $\sin \angle A = \sinh(a) / \sinh(c)$

Für kleine Werte von a und c wird  $\sinh(a) = a$  und  $\sinh(c) = c$ , d.h. also  $\sin a = a/c$ ; die aus der euklidischen Geometrie bekannte Formel.



## D-Spiegelung

Im nichteuklidischen Poincaré-Modell können auch Spiegelungen definiert werden. Es wird definiert

- 1) Ein D-Punkt P' heißt Spiegelbild eines D-Punktes P an einem D-Punkt S, wenn S der D-Mittelpunkt der D-Strecke PP' ist
- 2) Ein D-Punkt P'' heißt Spiegelpunkt eines D-Punktes P an einer D-Geraden m, wenn der Schnittpunkt S der D-Lotgeraden von P auf m der Mittelpunkt der D-Strecke PP'' ist
- 3) Als Spiegelbild einer Figur wird die Menge aller Spiegelbilder der Punkte der Ausgangsfigur bezeichnet

Dann gilt: Ist P' der Inversionspunkt eines Punktes P bei einer Inversion an der D-Geraden m, so ist P' das Spiegelbild von P bei der Spiegelung an m.

Sind P und P' gegeben, so kann das Spiegelzentrum S konstruiert werden.

Die zwei D-Kreise (P, PP') und (P', P'P) schneiden sich in zwei Punkten Q<sub>1</sub> und Q<sub>2</sub>, die dann die D-Mittelsenkrechte der D-Strecke PP' beschreiben. Der Schnittpunkt S von PP' und Q<sub>1</sub>Q<sub>2</sub> ist dann das gesuchte Spiegelzentrum.

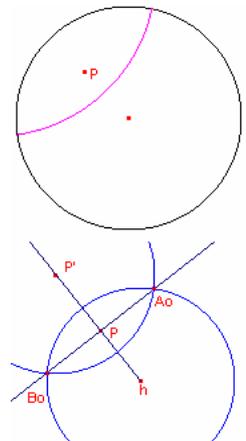
## D-Spiegelachse

Im hyperbolischen Poincaré-Modell kann jeder eigentliche D-Punkt P, d.h. er liegt nicht auf dem Horizont, so gespiegelt werden, dass das Bild mit dem Zentrum O zusammenfällt.

Die zugehörige Spiegelachse (obere Abbildung) wird wie folgt konstruiert:

Konstruktion (untere Abbildung)

- 1) P' wird als Bild der Inversion des Punktes P am Horizont konstruiert
- 2) P' wird mit dem Zentrum O verbunden und in P die Senkrechte zu P'O errichtet
- 3) diese Senkrechte schneidet den Horizont in zwei uneigentlichen Punkten A<sub>0</sub> und B<sub>0</sub>
- 4) die D-Gerade durch A<sub>0</sub> und B<sub>0</sub> ist dann die gesuchte Spiegelachse



## Asymptotische D-Dreiecke

Im Poincaré-Modell nennt man ein D-Dreieck einfach-asymptotisch, wenn es genau einen uneigentlichen Eckpunkt besitzt (obere Abbildung).

Analog betrachtet man auch doppelt-asymptotische D-Dreieck und dreifach-asymptotische D-Dreiecke.

Zur Einführung eines Flächeninhaltsbegriffes für D-Dreiecke werden folgende, gebräuchliche Annahmen gestellt:

- 1) D-kongruente Dreiecke müssen gleichen Flächeninhalt besitzen
- 2) liegt ein D-Dreiecke in einem anderen D-Dreieck, so soll der Flächeninhalt kleiner sein
- 3) der Flächeninhalt muss additiv sein

Dann gilt:

Satz 1: Wenn für zwei D-Dreiecke ABC und A'B'C' für die Flächeninhalte  $O(ABC) < O(A'B'C')$  gilt, so gilt für die Winkelsummen

$$\text{Winkelsumme}(ABC) > \text{Winkelsumme}(A'B'C')$$

Insbesondere kleine D-Dreiecke, die "fast" euklidisch sind, haben damit eine Winkelsumme nahe  $180^\circ$ .

Satz 2: Ein dreifach-asymptotisches Dreiecke kann in zwei rechtwinklige zweifach-asymptotische Dreiecke zerlegt werden.

Satz 3: Die Winkelsumme eines dreifach-asymptotischen Dreiecks ist endlich.

Satz 4: Zwei dreifach-asymptotische Dreiecke sind stets kongruent.

### D-Dreieck-Fläche

Für den Flächeninhalt eines D-Dreiecks im hyperbolischen Poincaré-Modell gilt der Satz von Gauß:

Die Oberfläche eines D-Dreiecks ABC mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  ist gleich  $K(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$ . Dabei ist K die gleiche Konstante für alle D-Dreiecke.

Nachweis: Die Seiten AB, BC, CA werden zu AD, BE, CF verlängert, wobei D, E, F auf dem Horizont liegen. Das asymptotische D-Dreieck DEF hat

dann eine endliche Fläche k.

Jedes doppelt-asymptotische Dreieck, z.B. ADF, hat eine Fläche, die nur von dem Winkel, nicht am Horizont, abhängt. Die Oberfläche von ADF ist somit abhängig von  $\pi - \alpha$ , d.h. also von  $\alpha$ .

$$O(ADF) = f(\alpha)$$

Wird AC zu AX verlängert (untere Abbildung), so ist DFX dreifach-asymptotisch, bestehend aus zwei doppelt-asymptotischen:

$$k = f(\alpha) + f(\pi - \alpha)$$

Das dreifach-asymptotische Dreieck wird in drei doppelt-asymptotische mit den Winkel  $\pi - \alpha, \pi - \beta$  und  $\alpha + \beta$  geteilt, d.h.

$$k = f(\alpha) + f(\beta) + f(\pi - (\alpha + \beta))$$

Da  $f(\pi - (\alpha + \beta)) = k - f(\alpha + \beta)$  ist, wird

$$k = f(\alpha) + f(\beta) + k - f(\alpha + \beta), \text{ d.h. } f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta)$$

Da die Funktion f linear ist, gilt  $f(\alpha) = p\alpha$ , p ist Konstante, d.h.

$$k = p\alpha + p(\pi - \alpha) \text{ und } p = k / \pi. \quad f(\alpha) = k \alpha / \pi.$$

In der oberen Abbildung ist  $O(ABC) = O(DEF) - O(ADF) - O(BDE) - O(CEF)$

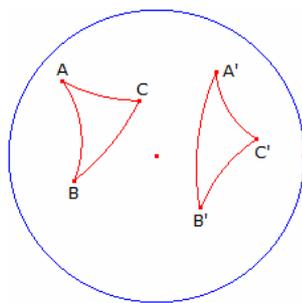
$$O(ABC) = k - (f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)) = (k/\pi) (\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

und mit  $K = k/p$

$$O(ABC) = K(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

Normalerweise wird  $K = 1$  gesetzt, und so

$$O(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$



### Hyperbolisches Dreieck, hyperbolische Trigonometrie

In der hyperbolischen Geometrie existieren, in Äquivalenz zur euklidischen Geometrie, Sätze und Beziehungen, u.a. für ein hyperbolisches Dreieck und damit auch für ein D-Dreieck im Poincaré-Modell.

Sind a, b, c die Seiten und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel in einem hyperbolischen Dreieck ABC, so gilt:

#### Hyperbolischer Sinussatz

$$\sinh a / \sin \alpha = \sinh b / \sin \beta = \sinh c / \sin \gamma$$

#### Dreiecksseitenlänge

$$\cosh a = (\cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta) / (\sin \beta \sin \gamma)$$

#### Hyperbolischer Kosinussatz, hyperbolischer Seiten-Kosinus-Satz

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha$$

Hyperbolischer Winkel-Kosinus-Satz

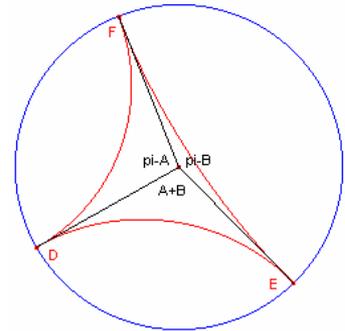
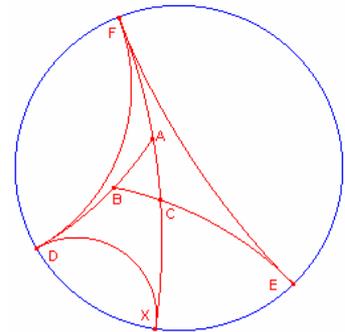
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$$

#### Dreiecksfläche

$$A = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

#### Hyperbolische Polygonfläche

Sind  $\varphi_i$  die Innenwinkel des Polygons, so wird



$$A = (n-2) \pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)$$

### Hyperbolische Dreiecke und Vielecke

$$A_{\Delta ABC} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) ; \text{ hyperbolisches Defizit}$$

$$A_{n\text{-Eck}} = (n-2) \pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i ; \text{ hyperbolisches Defizit}$$

### Hyperbolisches rechtwinkliges Dreieck

Der rechte Winkel liege bei C. Für die anderen Fälle sind die Seiten und Winkel entsprechend zu tauschen.

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

$$\cosh a = \cos \alpha / \sin \beta$$

$$\cosh b = \cos \beta / \sin \alpha$$

$$\cosh c = 1 / (\tan \alpha \tan \beta)$$

### Hyperbolischer Kreis

$$\text{Umfang } u = 2\pi \sinh r$$

$$\text{Fläche } A = 2\pi (\cosh r - 1) = 4\pi \sinh^2 (r/2)$$

### Die klassischen griechischen Konstruktionsprobleme

Aus der griechischen Antike sind folgende geometrische Konstruktionsprobleme überliefert.

Wie teilt man einen beliebig vorgegebenen Winkel in drei gleiche Teile?

Wie kann man zu einem gegebenen Würfel einen Würfel konstruieren, der das doppelte Volumen besitzt?

Wie konstruiert man zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat gleichen Flächeninhalts?

Wie konstruiert man ein regelmäßiges n-Eck?

Hierzu muss man wissen, dass die Griechen als Hilfsmittel nur "Zirkel und Lineal" zuließen und auch mit diesen Hilfsmittel nur die folgenden Operationen erlaubten.

Operation 1, Lineal: Durch zwei gegebene Punkte kann man eine Gerade legen.

Operation 2, Zirkel: Man kann einen Kreis zeichnen, wobei der Mittelpunkt P0 ein bereits konstruierter Punkt ist und der Radius r gleich dem Abstand von P0 zu einem anderen bereits konstruierten Punkt P1 ist.

Neue Punkte erhält man als Schnittpunkte von den konstruierten Geraden oder Kreisen. Ein Punkt gilt als konstruierbar, wenn er durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der Operationen 1 und 2 konstruierbar ist.

Über Jahrhunderte zweifelte niemand daran, dass für diese Probleme eine Lösung existiert, d.h. dass man nur lange genug nach ihr suchen müsse. Heute hingegen weiß man, dass für die ersten drei Probleme keine Lösung existiert. Und gerade dies ist für Nichtmathematiker häufig unvorstellbar.

Zum Beweis, dass die obigen Probleme im allgemeinen unlösbar sind, wandeln wir das geometrische Problem in ein äquivalentes algebraisches Problem um.

Obwohl wir in der zweidimensionalen Geometrie denken, ist es bequemer, sich vorzustellen, dass wir bestimmte reelle Zahlen konstruieren wollen. Kann man zwei Punkte mit Abstand a konstruieren, sagen wir, dass wir die reelle Zahl a konstruieren können.

Wir formulieren obige Probleme in diesem Sinne um:

Bei der Würfelverdoppelung reicht es,  $\sqrt[3]{2}$  zu konstruieren.

Bei der Quadratur des Kreises reicht es,  $\sqrt{\pi}$  zu konstruieren.

Bei der Winkeldreiteilung reicht es, zu gegebenem Winkel  $\alpha$  die Zahl  $\cos(\alpha/3)$  zu konstruieren.

Da wir zeigen werden, dass die Winkeldreiteilung allgemein nicht möglich ist, reicht es, für einen bestimmten Winkel zu zeigen, dass sie nicht möglich ist. Für  $\alpha = 60^\circ$  sieht man, dass es ausreicht, eine Nullstelle von  $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$  oder mit  $y = 2x$  von  $f(y) = y^3 - 3y - 1$  zu konstruieren.

Bei den n-Ecken reicht es analog,  $\cos(360^\circ/n)$  zu konstruieren.

**Definition: Sei K die Menge der konstruierbaren reellen Zahlen.**

**Satz: Die Menge der konstruierbaren Zahlen K ist ein Körper.**

Beweis. Wir können mit Zirkel und Lineal addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Es folgt dann natürlich  $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$ .

Gibt es noch weitere Operationen, die wir konstruieren können? Ja, wir können mittels Euklids Höhensatz Wurzeln ziehen. Gegeben seien Strecken der Längen a und der Länge 1. Gesucht sei eine Strecke der Länge  $\sqrt{a}$ .

Wir konstruieren eine Strecke AQ der Länge a + 1. Hierbei sei a = |AB| und 1 = |BQ|. Wir konstruieren den Mittelpunkt M der Strecke AQ und einen Kreis um M mit Radius |MA|. Wir errichten eine Senkrechte zu AQ durch B. Der Schnittpunkt P der Senkrechten mit dem Kreis ergibt ein rechtwinkliges Dreieck APQ (Satz von Thales). Nach dem Höhensatz gilt: |BP|<sup>2</sup> = a. Also ist |BP| =  $\sqrt{a}$ . Daher gilt:

Die Menge der konstruierbaren Zahlen K ist ein Körper, der alle endlich iterierten quadratischen Erweiterungen von  $\mathbb{Q}$  enthält. Man kann aber nun zeigen, dass man außer derartigen Zahlen keine weiteren mehr erhalten kann.

**Satz: Die Menge der konstruierbaren Zahlen K ist gleich dem Körper, der alle endlich iterierten quadratischen Erweiterungen von  $\mathbb{Q}$  enthält, also gleich dem reell quadratisch abgeschlossenen Körper über  $\mathbb{Q}$ .**

Der Beweis analysiert, auf welche Weise neue Punkte konstruiert werden: Schnitt von einer Gerade mit einer anderen Gerade führt auf eine lineare Gleichung, Schnitt von Gerade mit Kreis führt auf eine quadratische Gleichung, und Schnitt von Kreis mit Kreis führt ebenfalls auf eine Gleichung vom Grad 2 (und nicht etwa 4!). Hieraus folgt:

**Satz: Sei  $\alpha \in K$ . Dann ist  $[Q(\alpha) : Q]$  eine Zweierpotenz.**

Hierbei bezeichnet  $[Q(\alpha) : Q]$  den Körpererweiterungsgrad. Man bestimmt zu  $\alpha$  das Minimalpolynom.  $Q(\alpha)$  ist bezüglich Inklusion der kleinste Körper, der  $Q$  und  $\alpha$  enthält.

Beweis. Jede konstruierbare Zahl ist in endlich vielen Schritten konstruierbar, liegt also in einer  $n$ -fach iterierten quadratischen Körpererweiterung von  $Q$ . Aufgrund des Turmsatzes der Körpertheorie folgt mit einer Reihe von Zwischenkörpern  $[Q_n : Q] = [Q_n : Q_{n-1}] * [Q_{n-1} : Q_{n-2}] * \dots * [Q_1 : Q] = 2^n$ . Der Turmsatz selbst folgt aus der linearen Algebra durch Angeben einer Basis.

Beispiel:  $Q(\sqrt{2}; \sqrt{3})$  hat  $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}\}$  als Basis über  $Q$ .

**Satz: Wenn ein kubisches Polynom mit rationalen Koeffizienten keine rationalen Nullstellen hat, dann ist keine der Nullstellen mit Zirkel und Lineal konstruierbar.**

**Sei  $\alpha$  Nullstelle von einem (über  $Q$ ) irreduziblen Polynom vom Grad 3 mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann ist  $[Q(\alpha) : Q] = 3$  und damit ist  $\alpha$  nicht konstruierbar.**



**Satz: Die Polynome  $f_1: x^3-2$  und  $f_2: 8x^3-6x-1$  sind irreduzibel.**

Daraus folgt:  $[Q(\sqrt[3]{2}) : Q] = 3$ ;  $[Q(\cos(20^\circ)) : Q] = 3$ .

**Satz: Die Zahl  $\pi$  ist transzendent, (Lindemann, 1882), d.h. sie ist niemals Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.**

Daraus folgt:  $[Q(\sqrt{\pi}) : Q] = \infty$ .

Aus den obigen Sätzen folgt nun unmittelbar, dass man mit Zirkel und Lineal den Winkel von  $60^\circ$  nicht in drei gleiche Teile zerlegen kann, dass man die Würfelverdoppelung nicht konstruieren kann und dass man zu einem Kreis kein

flächengleiches Quadrat konstruieren kann. Die Versuche von Laien, dies dennoch zu tun, sind zwangsläufig zum Scheitern verurteilt, bzw. können allenfalls gute Näherungslösungen sein.

Hinweis: Ist  $\alpha$  Nullstelle von einem Polynom mit Grad = Zweierpotenz, dann ist aber noch nicht klar, ob man  $\alpha$  auch durch eine Verkettung von quadratischen Wurzeln darstellen kann. Dies führt auf komplizierte Fragen, die allgemein im Rahmen der Galoistheorie gelöst werden. Die Galoistheorie verlagert schwierige Fragen über Zwischenkörper auf einfachere Fragen von Untergruppen der endlichen Galoisgruppe des zugehörigen Polynoms.

Die Untergruppenstruktur der Galoisgruppe ist isomorph zur Untergruppenstruktur der Zwischenkörper zwischen  $Q(\alpha)$  und  $Q$ . Im Falle von kubischen Polynomen benötigt man aber keine Galoistheorie, wie wir gesehen haben. Im Alter von 18 Jahren gelang es Gauß (1796), die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks zu beweisen. Dies wird manchmal als der erste wesentliche Beitrag zur Geometrie nach Euklid bewertet.

Allgemein führt das regelmäßige  $n$ -Eck auf das sogenannte Kreisteilungspolynom vom Grad  $\varphi(n)$ , wobei  $\varphi(n)$  die Eulerfunktion ist. Ist nun  $n$  eine Primzahl der Form  $2^r + 1$ , so ist  $\varphi(n)$  eine Zweierpotenz. In der Zahlentheorie beweist man, dass eine derartige Primzahl sogar die Form  $2^{2^k} + 1$  haben muss. Und für diese speziellen Kreisteilungspolynome bewies Gauß, dass sie durch sukzessive quadratische Gleichungen gelöst werden können. Es gilt:

**Satz: Das regelmäßige  $n$ -Eck kann genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn die Primfaktorzerlegung von  $n$  die folgende Form hat:**

$$n = 2^r p_1 p_2 \dots p_s$$

**wobei  $r, s \geq 0$  und die  $p_i$  verschiedene Primzahlen der Form  $2^{2^{r(i)}} + 1$  sind.**

Gauß bewies hierbei die Existenz der Konstruktion, also dass es sich um eine hinreichende Bedingung handelt. Erst viel später bewies Wantzel die viel einfachere Notwendigkeit der angegebenen Bedingung. Diese war Gauß wohl bekannt, wenn auch er sie nicht bewies.

Insbesondere folgt also die Konstruierbarkeit für die Fermatschen Primzahlen:  $F_0 = 3$ ;  $F_1 = 5$ ;  $F_2 = 17$ ;  $F_3 = 257$ ;  $F_4 = 65537$ . Weitere Fermatschen Primzahlen sind nicht bekannt.