Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion aus der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen.
Damit ist eine Zahlenfolge eine diskrete Funktion aus den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen.
Eine reelle Zahlenfolge ist damit eine eindeutige Abbildung aus den Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen. Das Bild der natürlichen Zahl heißt Glied der Folge.
Symbol $(a_k) = (a_1; a_2; \ldots; a_k; \ldots)$
Partialsumme: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \Sigma\, a_k$

Eigenschaften

endlich	hat endlich viele Glieder
unendlich	hat abzählbar unendlich viele Glieder
alternierend	Vorzeichenwechsel aufeinanderfolgender Glieder
konstant, stationär	$\forall$ k gilt $a_k = a_{k+1}$
positiv definit	$\forall$ k gilt $a_k > 0$
negativ definit	$\forall$ k gilt $a_k < 0$

gilt $\forall$ k $a_k \geq 0$ bzw. ≤ 0, so ist die Folge positiv (negativ) semidefinit

monoton wachsend	$\forall$ k gilt $a_k \leq a_{k+1}$
monoton fallend	$\forall$ k gilt $a_{k+1} \leq a_k$
obere Schranke S	$\forall$ k gilt $a_k \leq S$
untere Schranke S	$\forall$ k gilt $S \leq a_k$
beschränkt	alle Glieder liegen zwischen einer oberen und einer unteren Schranke

G heißt obere Grenze $\Leftrightarrow$ kleinste obere Schranke
G heißt untere Grenze $\Leftrightarrow$ größte untere Schranke
ε-Umgebung von a $\Leftrightarrow$ offenes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Der Graph einer Folge besteht aus einzelnen Punkten

Bildungsvorschriften von Zahlenfolgen

Zahlenfolgen können durch eine Bildungsvorschrift angegeben werden.
Explizite Bildungsvorschrift $a_n = f(n)$
... das n.te Glied einer Zahlenfolge wird durch ein Funktion des Index n berechnet
Rekursive Bildungsvorschrift $a_n = f(n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$
... das n.te Glied einer Zahlenfolge wird durch ein Funktion des Index n und vorhergehenden Gliedern $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ berechnet. Dabei müssen Anfangsbedingungen für die Zahlenfolge angegeben werden, z.B. eine Festlegung des Gliedes a_1 oder evtl. mehr.

	explizit	rekursiv
{1,2,3,4,...}	$a_n = n$	$a_n = a_{n-1} + 1$; $a_1 = 1$
{1,2,4,8,...}	$a_n = 2^{n-1}$	$a_n = 2\, a_{n-1}$; $a_1 = 1$
	$a_n = (n+1)/n$	$a_n = a_{n-1} - 1/(n(n-1))$; $a_1 = 2$
	$a_n = k * n$	$a_n = a_{n-1} + k$; $a_1 = k$
	$a_n = k^n$	$a_n = a_{n-1} + k^{n-1}(k-1)$; $a_1 = k$
Fibonacci-Folge	$1/\sqrt{5}\, [[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n]$	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

Die Umwandlung einer expliziten in eine rekursive Bildungsvorschrift ist einfach. Ansatz: Differenz der Gleichungen für a_{n+1} und a_n und entsprechendes Umstellen. Die Transformation einer rekursiven in einer explizite Form kann u.U. sehr anspruchsvoll sein.

Umwandlung einer expliziten in eine rekursive Bildungsvorschrift

Beispiel 1:
Gegeben sei $a_n = n / (n+1)$. Über $a_{n+1} = (n+1)/(n+2)$ wird
$$a_{n+1} - a_n = (n+1)/(n+2) - n/(n+1) = 1/((n+1)(n+2))$$
Umstellen ergibt $a_{n+1} = 1/((n+1)(n+2)) + a_n$ (*)
Auflösen der expliziten Bildungsvorschrift $a_n = n / (n+1)$ nach n liefert $n = a_n / (1 - a_n)$
Einsetzen in (*) führt dann zu gesuchten rekursiven Bildungsvorschrift
$$a_{n+1} = 1/((a_n / (1 - a_n) + 1)(a_n / (1 - a_n) + 2)) + a_n = 1 / (2 - a_n)$$
Zusätzlich ist noch das Anfangsglied $a_1 = 1/2$ anzugeben.

Beispiel 2:
Die Zahlenfolge $a_n = 2^n + 1$ liefert
$$a_{n+1} = 2^{n+1} - 2^n + a_n \qquad n = \ln(a_n - 1) / \ln 2$$
$$a_{n+1} = 2^{(\ln(a_n - 1) / \ln 2)+1} - 2^{(\ln(a_n - 1) / \ln 2)} + a_n = 2\, a_n - 1 \text{ ; Anfangsglied } a_1 = 3$$
Weitere Beispiele über gleiches Verfahren:
explizite Bildungsvorschrift: $a_n = 1/n$
rekursive Bildungsvorschrift: $a_{n+1} = a_n / (1 + a_n)$; $a_1 = 1$
explizite Bildungsvorschrift: $a_n = (2n + 1) / (n + 3)$
rekursive Bildungsvorschrift: $a_{n+1} = (3\, a_n + 4) / (7 - a_n)$; $a_1 = 3/4$

Bildungsvorschrift, Beispiele

Aufgabe: Geben Sie ein direktes Bildungsgesetz an!	Lösung
a) 6, 8, 10, 12, …	$a_n = 2n+4$
b) 16, -8, 4, -2, …	$a_n = (-2)^{5-n}$
c) 4, 9, 16, 25, …	$a_n = (n+1)^2$
d) 10, 17, 26, 37, …	$a_n = (n+2)^2 + 1$
e) 3, -3, 3, -3, …	$a_n = 3\ (-1)^{n+1}$
f) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …	$a_n = n\ (n+1)/2$
g) 3/7, 6/9, 9/11, 12/13, 15/15, …	$a_n = 3n\ /\ (2n+5)$
h) 2/4, 3/5, 4/6, 5/7, 6/8, …	$a_n = (n+1)\ /\ (n+3)$
i) 2/9, 4/13, 6/17, …	$a_n = 2n\ /\ (4n+5)$
j) -3/5, 11/13, -19/21, 27/29, …	$a_n = (-1)^n\ (8n-5)/(8n-3)$

Aufgabe: Geben Sie ein rekursives Bildungsgesetz an!	Lösung
a) 6, 8, 10, 12, …	$a_{n+1} = a_n + 2\ ;\ a_1 = 6$
b) 16, -8, 4, -2, …	$a_{n+1} = a_n\ /\ 2\ ;\ a_1 = 16$
c) 7, 15, 31, 63, …	$a_{n+1} = a_n + 2^{n+2}\ ;\ a_1 = 7$
d) 1, 4, 9, 16, …	$a_{n+1} = a_n + 2n + 1\ ;\ a_1 = 1$
e) 3, -3, 3, -3, …	$a_{n+1} = -a_n\ ;\ a_1 = 3$
f) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …	$a_{n+1} = a_n + n + 1\ ;\ a_1 = 1$

Beispiel für anspruchsvolle Umwandlung (22.Internationale Mathematik-Olympiade 1981, Problem 3):
A sequence a_n is defined as follows, $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (1 + 4a_n + \sqrt{(1 + 24a_n)})/16$ for $n \geq 0$. Find an explicit formula for a_n.
Answer: $(1/3)(1 + 1/2^n)(1 + 1/2^{n+1})$
Solution: Put $b_n = 2^{2n+1}a_n$. Then the relation becomes $b_{n+1} = 2^{2n-1} + b_n + 2^n \sqrt{(2^{2n-2} + 3b_n)}$. Put $c_n = \sqrt{(2^{2n-2} + 3b_n)}$ and this becomes $c_{n+1}^2 = c_n^2 + 3\cdot 2^n c_n + 9\cdot 2^{2n-2} = (c_n + 3\cdot 2^{n-1})^2$. Hence $c_{n+1} = c_n + 3\cdot 2^{n-1}$. Iterating, $c_{n+1} = 3\cdot 2^{n-1} + 3\cdot 2^{n-2} + \ldots + 3\cdot 2^0 + c_1 = 3(2^n-1) + c_1 = 3\cdot 2^n + 1$ (we have $a_1 = 5/8$, so $b_1 = 5$, $c_1 = 4$). Hence $b_n = (2^{2n+1} + 3\cdot 2^n + 1)/3$, $a_n = 1/3 + 1/2^{n+1} + 1/(3\cdot 2^{2n+1}) = (1/3)(1 + 1/2^n)(1 + 1/2^{n+1})$.

Rekursive Zahlenfolge-Aufgabe, Hamster-Aufgabe

Aufgabe: In einem Gebiet kommen ursprünglich 10 Hamster vor. Nach rund 20 Tagen Tragezeit erhöht sich die Anzahl der Hamster um 10 % der Differenz zu maximalen Anzahl von 300 Hamstern.
Beschreibe die Anzahl der Hamster durch eine Zahlenfolge. Nach welcher Zeit sind mehr als 250 Hamster vorhanden? Wie viele Hamster sind es maximal? Wann wird dieser Wert erreicht?

Lösung: Der Anfangswert $a_1 = 10$. Je Geburtenzyklus erhöht sich der Wert um $(300 - a_n)/10$, d.h. $a_{n+1} = a_n + (300 - a_n)/10$
Damit ergibt sich die Folge für n = 1, 2, …

10; 39; 65,1; 88,59; 109,731; 128,7579; 145,8821; …

und für $a_{18} = 251{,}6362$, d.h. nach 17 Zyklen = 340 Tagen wird die Zahl von 250 Hamstern überschritten. Die maximale Zahl von 300 Hamstern wird streng mathematisch nie erreicht, da diese Zahlenfolge gegen 300 konvergiert.

Lösung 2: Die oben angestellten Überlegungen beinhalten einen gravierenden Fehler, denn gebrochenzahlige Hamster gibt es nicht. Daher muss die Folge um die Gaußklammer-Funktion [ ] ergänzt werden, d.h. $a_{n+1} = a_n + [(300 - a_n)/10]$
In diesem Fall erhält man die Zahlenfolgenglieder

10, 39, 65, 88, 109, 128, 145, 160, 174, 186, 197, 207, 216, 224, 231, 237, 243, 248, 253, …

Jetzt überschreitet die Folge die 250 nach 18 Zyklen = 360 Tagen. Nach 38 Geburten werden 291 Hamster erreicht. Dieser Wert kann nicht mehr größer werden.

Monotonienachweis von Zahlenfolgen

Ist von einer Zahlenfolge (a_n) eine rekursive Bildungsvorschrift gegeben, so kann über die Differenzbildung $d = (a_{n+1}) - (a_n)$
ein allgemeiner Nachweis der Monotonie geführt werden.
Ist die Differenz d für alle n negativ, so ist die Zahlenfolge (a_n) monoton fallend, ist d positiv, so ist (a_n) monoton wachsend.

Beispiel 1: Zahlenfolge $(a_n) = n/(n+1)$, $n > 0$

$d = (a_{n+1}) - (a_n) = (n+1)/(n+2) - n/(n+1) =$ mit Hauptnenner $(n+1)(n+2)$

$= ((n+1)^2 - n\ (n+2))\ /\ ((n+1)\ (n+2)) = (n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n)\ /\ ((n+1)\ (n+2)) =$

$= 1\ /\ ((n+1)\ (n+2)) > 0$

Da der Term für d für alle n stets positiv ist, ist die Zahlenfolge monoton wachsend.

Beispiel 2: Zahlenfolge $(a_n) = 2n/(n-1)$, $n > 1$

$d = (a_{n+1}) - (a_n) = 2(n+1)/n - 2n/(n-1) =$ mit Hauptnenner $(n-1)n$

$= (2(n+1)(n-1) - 2n^2) / ((n-1)\ n) = (2n^2 - 2 - 2n^2) / ((n-1)\ n) =$

$= -2 / ((n-1)\ n) < 0$

Der Zähler ist negativ, der Nenner für alle zugelassenen n positiv. Damit ist $d < 0$ und die Zahlenfolge monoton fallend.

Beispiel 3: Zahlenfolge $(a_n) = (n^2 - 1)/(2n^2 + 1)$, $n > 0$

Etwas langwieriges Umformen ergibt $d = (a_{n+1}) - (a_n) = (6n + 3) / ((2n^2 + 1)(2n^2 + 4n + 3)) > 0$

Auch hier ist die Zahlenfolge monoton steigend.

Häufungspunkt einer Folge

h ist Häufungspunkt der Folge (a_k) ⇔

⇔ zu jedem $\varepsilon>0$ und jedem natürlichen n_0 gibt es ein $n \geq n_0$ mit $|a_k - h| < \varepsilon$

⇔ a_k liegt immer wieder in jeder Umgebung von h

Satz von Weierstraß

Jede beschränkte Zahlenfolge in R besitzt einen Häufungspunkt.

Eine Folge kann auch mehrere Häufungspunkte besitzen; z.B. $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$ hat die Häufungspunkte -1 und 1.

Es ist sogar möglich, dass Folgen unendlich viele Häufungspunkte haben. Die Folge

$a_1 = 0{,}9$; $a_2 = 1{,}9$

$a_3 = 0{,}99$; $a_4 = 1{,}99$; $a_5 = 2{,}99$

$a_6 = 0{,}999$; $a_7 = 1{,}999$; $a_8 = 2{,}999$; $a_9 = 3{,}999$ usw.

hat alle positiven natürlichen Zahlen als Häufungspunkte.

Schreibt man die rationalen Zahlen als Folge, so sind alle reellen Zahlen Häufungspunkte, da jede ε-Umgebung um eine reelle Zahl unendlich viele rationale Zahlen enthält.

Grenzwert einer Folge

Erklärung: Es sei $x \neq a$. Wenn die Variable x unzählig viele Werte annehmen kann, aber schließlich nur noch solche Werte annimmt, die sich von a beliebig wenig unterscheiden, so sagt man, x strebt nach a oder konvergiert nach a oder nähert sich dem Grenzwert a. a heißt der Grenzwert (Limes) von x.

Grenzwert g von (a_k) ⇔ Für jedes positive ε gilt für fast alle a_n:

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ bzw. $|a_n - g| < \varepsilon$

(a_k) heißt konvergent ⇔ Grenzwert existiert

(a_k) heißt divergent ⇔ Grenzwert existiert nicht

Nullfolge ⇔ Grenzwert = 0

Der Begriff Limes leitet sich von den antiken römischen Grenzbefestigungen in Mitteleuropa und Britannien ab. Die Abbildung zeigt den Hadrianswall.

Die Begriffe konvergent und divergent führte James Gregory ein.

Eine Zahlenfolge kann höchstens einen Grenzwert besitzen.

Nachweis: Angenommen a und b seien Grenzwerte der Zahlenfolge (x_n). Dann gilt

$|a-b| = |a-x_n + x_n-b| \leq |a-x_n| + |x_n-b| < 2\varepsilon$

für alle $n \geq N$. Da dies für jedes positive ε gilt, muss a = b sein.

Divergenz

bestimmt divergent ⇔ Grenzwert ∞ oder $-\infty$ unbestimmt divergent ⇔ Grenzwert existiert nicht

Partieller Grenzwert

Sei (a_n) eine Folge. Ein Element a heißt dann partieller Grenzwert dieser Folge, wenn es eine Teilfolge der Folge gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiele: {1; 1/2; 1/3; ...} besitzt einen partiellen Grenzwert, nämlich 0.

{1; -1; 1; -1; ...} besitzt die partiellen Grenzwerte -1 und 1

{1; 2; 3; 4; ...} besitzt keinen partiellen Grenzwert

Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge und E die Menge der partiellen Grenzwerte.

Das Minimum von E nennt man dann unterer Grenzwert der Folge oder Limes inferior der Folge und bezeichnet es mit $\liminf a_n$

Analog definiert man mit dem Maximum von E den oberen Grenzwert (Limes superior; $\limsup a_n$). Limes superior einer Folge ist damit ihr größter Häufungswert.

Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, ihren Grenzwert. Jeder Grenzwert einer Zahlenfolge ist Häufungspunkt.

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt besitzt; dieser ist der Grenzwert der Folge.

Nullfolge

1) Sei (a_n) eine Nullfolge und es gelte $b_n = a_n$ oder $b_n = -a_n$, dann ist (b_n) eine Nullfolge.
2) Sei (a_n) eine Nullfolge und es gelte $-a_n \le b_n \le a_n$, dann ist (b_n) eine Nullfolge.
3) Sei (a_n) eine Nullfolge und $c \in R$, dann ist $(c\, a_n)$ Nullfolge.
4) Sei (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.
5) Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n\, b_n)$ eine Nullfolge.

Nachweis: 2) Es gilt $|b_n| < |a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.
1) folgt aus 2)
3) Falls $c = 0$, ist die Behauptung trivial. Sei $c \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt

$|a_n| < \varepsilon / |c|$ d.h. $|c\, a_n| = |c|\, |a_n| < \varepsilon$

4) Wenn (a_n) Nullfolge ist, gilt $|a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n > n_\varepsilon$ und wenn (b_n) Nullfolge ist, gilt $|b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n > m_\varepsilon$. Beide Ungleichungen sind für alle $n > \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$ wahr. Dann gilt auch

$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

5) Wegen der Beschränktheit von (b_n) existiert ein $c > 0$ mit $-c \le b_n \le c$. Dann ist auch

$-c\, a_n \le a_n\, b_n \le c\, a_n$

Auf Grund 3) und 2) folgt die Behauptung.

Teilfolge

Unter einer Teilfolge versteht man eine Folge, die durch Wegstreichen von bestimmten Gliedern aus einer anderen Folge, aber ohne Veränderung der Reihenfolge, aus jener Folge entsteht.

Beispiel: Es sei $a_n = 1/n$ gegeben. Dann kann man die Teilfolge $1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \ldots$ auswählen, wobei man nur die geraden Indizes von a_n berücksichtigt.
Weiterhin sei die Folge $a_n = (-1)^n$ gegeben. Aus dieser können die Teilfolgen $b_n = 1$ und $c_n = -1$ ausgewählt werden. Beide sind konvergent und liefern ein Beispiel für den Satz:

Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge, d.h. jede beschränkte Folge (a_n) hat einen partiellen Grenzwert.
Aus jeder beschränkten Folge a_n kann man eine konvergente Teilfolge auswählen. Ist a Häufungspunkt der Folge a_n, so kann die Teilfolge so ausgewählt werden, dass sie gegen a konvergiert.

Weiterhin gilt: Sei (a_n) konvergent mit $a_n \to a$. Jede Teilfolge (a_{nk}) ist dann ebenfalls konvergent und hat den Grenzwert a.
Begründung: (a_n) ist beschränkt und damit auch (a_{nk}). Also hat (a_{nk}) einen Häufungspunkt, der auch Häufungspunkt von (a_n) ist. Dabei muss es sich um a handeln, da andernfalls (a_n) zwei Häufungspunkte hätte.

Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine reelle oder komplexe Folge bzw. Vektorfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. es gibt zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$, für die existiert $|a_n - a_m| \le \varepsilon$, $n,m \ge N(\varepsilon)$

Monotonie-Kriterium

Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

Grenzwertsätze für Folgen

Alle Grenzübergänge erfolgen $n \to \infty$

$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$ $\lim (a_n * b_n) = \lim a_n * \lim b_n$
$\lim (a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n$; falls $\lim b_n \neq 0$ $\lim (a_n \wedge b_n) = \lim a_n \wedge \lim b_n$; falls $a_n > 0$, $\lim a_n \neq 0$
$\lim (a_n^c) = (\lim a_n)^c$; falls $a_n > 0$, $\lim a_n \neq 0$

Grenzwerte (alle $n \to \infty$)

$\lim 1/n = 0$ $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
$\lim \sqrt[n]{q} = 1$ $\lim a^n/n! = 0$
$\lim n^n/n! = \infty$ $\lim 1/n\, \sqrt[n]{n!} = 1/e$
$\lim (1+1/n)^n = e$ $\lim (1+x/n)^n = e^x$ $\lim (1-x/n)^n = e^{-x}$
$\lim n^k/a^n = 0$, für $a>1$, $k \in N$ $\lim k^n = 0$ für $|k|<1$, $= 1$ für $k=1$, divergent für $|k|>1$
$\lim 1/(1+a^n) = 1$ für $|a|<1$, $= 1/2$ für $a=1$, 0 für $|a|>1$, divergent für $a= -1$

Ganzrationale Folgen

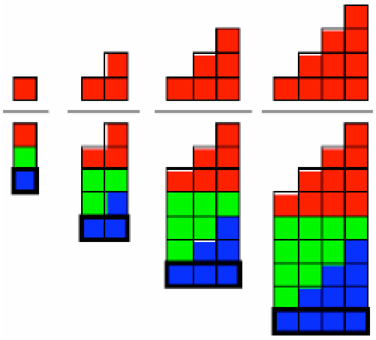
Das Konvergenzverhalten von ganzrationalen Folgen kann man folgendermaßen charakterisieren:
Satz: Für $g = \lim_{n\to\infty} (\Sigma_{i=0}^{k} a_i n^i) / (\Sigma_{j=0}^{l} b_j n^i)$ gilt:

1) $g = 0$ für $k < l$
2) $g = a_k / b_l$ für $k = l$
3) $g = \infty$ für $k > l$ und $a_k / b_l > 0$
4) $g = -\infty$ für $k > l$ und $a_k / b_l < 0$

Beispiel: $\lim_{n\to\infty} (3n^3 + 2n + 7) / (4n^3 - 6n^2 - 9) =$
$= \lim_{n\to\infty} (n^3 (3 + 2/n^2 + 7/n^3)) / (n^3 (4 - 6/n - 9/n^3)$ (Ausklammern der höchsten Potenz) =
$= \lim_{n\to\infty} (3 + 2/n^2 + 7/n^3) / (4 - 6/n - 9/n^3)$ (Kürzen von n^3) = 3/4

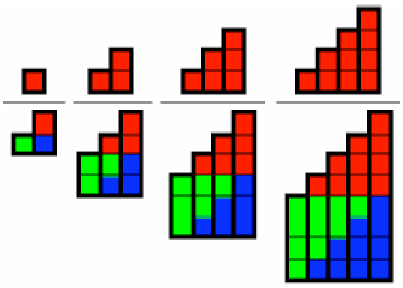
Vertauschbarkeit von Grenzprozessen

Bei Betrachtung von Grenzwerten kommt es auf die Reihenfolge des Grenzübergangs ein.
Beispiel: $a_{n,m} = m / (m+n)$
Für jedes $m \in N$ ist $\lim_{n\to\infty} m/(m+n) = 0$ und damit $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} m/(m+n)) = 0$
Andererseits gilt für jedes $n \in N$ $\lim_{m\to\infty} m/(m+n) = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} m/(m+n)) = 1$
Die Grenzwerte stimmen nicht überein, daher darf die Bildung von Grenzwerten im Allgemeinen nicht vertauscht werden.



Grenzwert-Beispiel

Gesucht ist der Grenzwert der Folge:
$a_1 = 1 / 2 = 0{,}5$
$a_2 = (1+2) / (3+4) = 0{,}428571\ldots$
$a_3 = (1+2+3) / (4+5+6) = 0{,}4$
$a_4 = (1+2+3+4) / (5+6+7+8) = 0{,}384615\ldots$
Zur Berechnung von a_n dividiert man die Summe der ersten n natürlichen Zahlen durch die Summe der zweiten n natürlichen Zahlen.
$a_n = \Sigma_{k=1}^{n} k / \Sigma_{k=n+1}^{2n} k$
Zähler und Nenner sind je eine Partialsumme einer arithmetischen Folge.
Hier wird $a_n = \Sigma_{k=1}^{n} k / \Sigma_{k=n+1}^{2n} k =$
$= 1/2\ (1+n)\ n / (1/2\ (n+1+2n)\ n) = (1+n) / (1+3n)$
Somit wird für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$
Das Ergebnis kann auch grafisch veranschaulicht werden. (siehe Abbildung) nach Walser, 2009



Gesucht ist der Grenzwert der Folge:
$a_1 = 1 / (1+2)$
$a_2 = (1+2) / (2+3+4)$
$a_3 = (1+2+3) / (3+4+5+6)$
$a_4 = (1+2+3+4) / (4+5+6+7+8)$
Der n-te Ausdruck ist von der Form
$a_n = (1+ \ldots + n) / (n + \ldots + 2n)$
Zähler und Nenner sind je eine Partialsumme einer arithmetischen Folge. Damit wird $a_n = (1/2\ n\ (1+n)) / (1/2\ (n+2n)\ (n+1))$
d.h. für den Grenzwert = 1/3

Arithmetische Zahlenfolgen

Die Folge (a_n) heißt arithmetische Zahlenfolge, wenn die Differenz zweier beliebiger nacheinander folgender Glieder gleich einer konstanten Zahl ist.
Arithmetische Zahlenfolgen werden auch äquidistante Zahlenfolgen genannt.
Form: a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+ (k-1)d, d... Differenz
$a_k = a_1 + (k - 1) * d$ $\quad a_{k+1} - a_k = d$ $\quad s_n = n/2 * (a_1 + a_n) = n*a_1 + d/2 * n * (n-1)$
d<0 fallende, d=0 konstante, d>0 wachsende Folge

Differenzenfolge

Zu (a_k) ist (d_k) die Differenzenfolge, wenn $d_k = a_{k+1} - a_k$

Arithmetische Folge n.Ordnung

..., wenn erst die n.te Differenzfolge konstant ist.
Bildungsgesetz $a_k = b_2(k - 1)^2+b_1(k-1)+b_0$ ... 2.Ordnung
$a_k = b_3(k - 1)^3+b_2(k - 1)^2+b_1(k-1)+b_0$ ... 3.Ordnung ...
$a_k = b_m(k - 1)^m+b_{m-1}(k - 1)^{m-1}+ \ldots +b_0$ ... m.Ordnung
Beispiel: Die Quadratzahlen bilden eine arithmetische Zahlenfolge der 2.Ordnung. Damit gilt für zwei aufeinander folgende Quadratzahlen $q_{n+1} - q_n = 2n-1$. Für die Differenzen wird:

1		4		9		16		25
	3		5		7		9	
		2		2		2		

Interpolation einer arithmetischen Folge

Das Einschalten von m Gliedern zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Folge mit der Differenz d ergibt eine neue arithmetische Folge mit der Differenz $d_1 = d/(m+1)$.

Differenzenschema

Ein Differenzenschema ist ein häufig verwendetes Schema zur übersichtlichen Berechnung der Differenzen k-ter Ordnung einer Zahlenfolge $\{y_i\}$, die durch
1) $\Delta^0 y_i = y_i$, für i = 0, 1, 2, ..., n

2) $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_i$, für $k > 0$
definiert werden. Das Schema hat üblicher Weise die Form

	y_i	Δ^1	Δ^2	Δ^3 …
0	y_0			
		$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$		
1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	
		$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$ …
2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	
		$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$		
3	y_3			
…				

Für Polynome gilt, dass die Werte y_i genau dann die Funktionswerte eines Polynoms k-ter Ordnung sind, wenn für Argumente x_i, die eine arithmetische Zahlenfolge bilden, die (k+1)-ten und alle folgenden Differenzen Null sind.
Ein Differenzenschema wird zur Interpolation und zur Quadratur verwendet. Einzelne große Messfehler in Messreihen können in einem Differenzenschema aufgespürt werden, da Abweichungen von einem Verteilungsgesetz in höheren Differenzen deutlich hervortreten.

Arithmetische Zahlenfolgen, Beispiele

1) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_1 = 1,2$, $n = 20$, $d = 2,1$. Berechnen Sie a_n und s_n.
$a_n = 1,2 + 19 \cdot 2,1$ $\quad s_n = ((1,2+a_n)\ 20)/2$
Aus der 1.Gleichung berechnet man $a_{20} = 41,1$
und setzt in die 2. Gleichung ein $s_n = ((1,2+41,1)\ 20)/2 \Rightarrow s_n = 423$

2) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_1 = 404$, $a_n = -9$, $d = -7$. Berechnen Sie n.
$-9 = 404+(n-1)\cdot(-7)$ $\quad -413 = (n-1)\cdot(-7)$ $\quad 59 = n-1 \Rightarrow n = 60$

3) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_n = 125$, $n = 61$, $s_n = 3965$. Berechnen Sie a_1 und d. $a_{61} = a_1 + 60\ d$ $\quad 3965 = ((a_1 + 0)61)\ /2$
$3965 = (a_1 + 125)\ 61\ /2$ $\quad 130 = a_1 + 125 \Rightarrow 5 = a_1$
Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $125 = 5 + 60\ d \Rightarrow d = 2$

4) $a_{20} = 16$ und $a_{21} = 22$ sind aufeinander folgende Glieder einer arithmetischenZahlenfolge. Berechnen Sie a_1 und s_{21}. Aus $a_{20} = 16$ und $a_{21} = 22$ berechnet man d: $d = a_{21} - a_{20} = 6$
$a_{21} = 22 = a_1 + 20 \cdot 6$ $\quad s_{21} = (a_1 + 22)\ 21/2$
Aus der ersten Gleichung ergibt sich: $22 = a_1 + 20 \cdot 6 \Rightarrow a_1 = -98$
und aus der zweiten Gleichung: $s_{21} = (-98 + 22)\ 21/2 = -76 \cdot 21/2 = -38 \cdot 21 = -798$

5) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_{20} = 51$ und $s_{20} = 260$. Berechnen Sie a_1 und d.
$51 = a_1 + 19\ d$ $\quad 260 = (a_1 + 51)\ 20/2$
Die 2.Gleichung enthält nur eine Unbekannte:
$260 = (a_1 + 51)\ 20/2$ $\quad 260 = (a_1 + 51)\ 10 \Rightarrow 26 = a_1\ 51 \Rightarrow a_1 = -25$
Aus der 1.Gleichung lässt sich d berechnen: $51 = -25 + 19\ d \Rightarrow 76 = 19d \Rightarrow d=4$

Arithmetische Zahlenfolgen, Beispiele (2)

1) Wie viele vierstellige Zahlen sind durch 54 teilbar? Berechnen Sie die Summe dieser Zahlen.
Zuerst müssen die erste und die letzte 4-stellige Zahl berechnet werden:
1000 : 54 = 18,5, die kleinste Zahl ist damit $a_1 = 19 \cdot 54 = 1026$
10000 : 54 = 185,2, die größte Zahl ist damit $a_n = 185 \cdot 54 = 9990$
Es wird $9990 = 1026 + (n-1)\ 54$ $\quad 8964 = (n-1)\ 54$
$166 = n-1 \Rightarrow n = 167$
$s_{167} = (1026+9990) \cdot 167/2 \Rightarrow s_{167} = 919836$

2) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_1 = -7$, $d = 5$, $s_n = 84$. Berechnen Sie a_n und d.
$a_n = -7 + (n-1)\ 5 = -7 + 5n - 5 = 5n - 12$ $\quad 84 = (-7+a_n)\ n/2 \Rightarrow 168 = (-7 + a_n)\ n$
Die 1.Gleichung in die zweite einsetzen:
$168 = (-7 + 5n - 12)\ n$ $\quad 168 = (5n - 19)\ n$
$168 = -19n + 5n^2$ $\quad 0 = 5n^2 - 19n - 168 \Rightarrow n_1 = 8$, $n_2 = -4,2$
n muss eine natürliche Zahl sein, also gilt nur n = 8
$a_n = 5n - 1240 - 12 \Rightarrow a_n = 28$

3) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_5 = 27,9$ und $a_{12} = 59,4$. Berechnen Sie a_1 und d.
$a_5 = a_1 + 4d = 27,9$ $\quad a_{12} = a_1 + 11d = 59,4$
Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten ergibt
$7d = 31,5 \Rightarrow d = 4,5$ $\quad a_1 + 4 \cdot 4,5 = 27,9 \Rightarrow a_1 = 9,9$

Arithmetische Zahlenfolgen, Beispiele (3)

1) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man: $a_n = 28$, $d = 5$, $s_n = 84$. Berechnen Sie n und a_1-

1.Gleichung $28 = a_1 + (n - 1)\cdot 5$

2.Gleichung $84 = (a_1 + 28)\cdot n/2 \Rightarrow 168 = (a_1 + 28)\cdot n$

Auflösung der 1.Gleichung nach a_1 $28 = a_1 + (n-5)\cdot 5 \Rightarrow a_1 = 33 - 5n$

Einsetzen in die 2.Gleichung $168 = (33 - 5n +28)\cdot n$ $168 = (61 - 5n)\cdot n$

$168 = 61n - 5n^2$ $5n^2 - 61n + 168 = 0 \Rightarrow n_1 = 8,\ n_2 = 4{,}2$

n muss eine natürliche Zahl sein, also gilt nur: n = 8

$a_1 = 33 - 5\cdot 8 \Rightarrow a = -7$

2) Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennt man die Glieder $a_4 = -5$ und $a_{12} = 35$. Berechnen Sie a_8!
einfach $a_8 = (a_4 + a_{12})/2 = 15$, denn a_8 liegt genau in der Mitte zwischen a_4 und a_{12}

3) Die drei Seiten a, b, c eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Zahlenfolge. Die Hypotenuse hat die Länge 15.
Es seien die drei Seiten 15, 15-x und 15-2x. Nun gilt der Satz des Pythagoras

$(15 - x)^2 + (15 - 2x)^2 = 15^2$

Ausrechnen und Ordnen ergibt $5x^2 - 90x + 225 = 0$ $x^2 - 18x +45 = 0$

$(x-3)(x-15) = 0$

Nur die Lösung x = 3 ist brauchbar: die Katheten haben die Längen 12 und 9.

Arithmetische Zahlenfolgen, Beispiele (4)

Aufgabe 1

Zwischen 11 und -13 sollen 5 Zahlen so eingefügt werden, dass eine arithmetische Zahlenfolge entsteht. Wie heißen die Zahlen?

Gegeben: $a_1 = 11$; $a_n = -13$; $n = 7$ Gesucht: d, (a_n)

Lösung: $d = (a_n - {}_1) / (n-1) = -4$ $(a_n) = (11, 7, 3, -1, -5, -8, -13, \ldots)$

Aufgabe 2

Ein Fahrradfahrer fährt im Leerlauf einen Berg hinunter. In der ersten Sekunde legt er 3,4 m zurück und in jeder folgenden 0,6 m mehr als in der vorhergehenden. Berechne die Geschwindigkeit des Fahrradfahrers nach 12 Sekunden!

Gegeben: $a_1 = 3{,}4$; $d = 0{,}6$; $n = 12$ Gesucht: a_n

Lösung: $a_n = a_1 + (n-1)*d = 10$ Die Geschwindigkeit beträgt 10 m/s bzw. 36 km/h.

Arithmetische Zahlenfolge 2.Ordnung

Eine Folge heißt arithmetische Folge zweiter Ordnung, wenn ihre zweite Differenzenfolge konstant ist.
Eine arithmetische Folge zweiter Ordnung wird durch ihre ersten drei Glieder eindeutig bestimmt.
Sind f_1, f_2 und f_3 die ersten drei Glieder dieser Zahlenfolge, so gilt

$$f_n = f_1 + \Sigma_{i=1}^{n-1} (i\ (f_3 - 2f_2 + f_1) + 3f_2 - f_3 - 2f_1) =$$
$$= (f_3 - 2f_2 + f_1)\ n^2/2 + (8f_2 - 3f_3 - 5f_1)\ n/2 - (3f_2 - f_3 - 3f_1)$$

Zum Beispiel ist die Folge der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, … eine arithmetische Folge 2.Ordnung. Setzt man die ersten Glieder in die allgemeine Bildungsvorschrift ein, so ergibt sich $f_n = n^2$.
Umgekehrt wird eine Folge f_n durch ein Polynom zweiten Grades in n defniert:

$$f_n = bn^2 + cn + d$$

mit beliebigen Koeffzienten b, c und d, so wird die erste Differenzenfolge g_n wegen

$$g_n = f_{n+1} - f_n = b(n + 1)^2 + c(n + 1) + d - (bn^2 + cn + d) =$$
$$= bn^2 + 2bn + b + cn + c + d - (bn^2 + cn + d) = 2bn + b + c$$

durch ein Polynom ersten Grades in n dargestellt, ist also eine arithmetische Folge erster Ordnung, deren Differenzenfolge konstant ist.

Geometrische Zahlenfolgen

Die Folge (a_n), bei der $a_n \neq 0$ ist, nennt man genau dann eine geometrische Zahlenfolge, wenn der Quotient zweier beliebiger nacheinander folgender Glieder gleich einer konstanten Zahl ist.
Form: $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, a*q^{n-1}$, q... Quotient

$a_k = a_1 * q^{k-1}$ $a_{k+1} / a_k = q$ $a_n = \sqrt{[a_{n-1}*a_{n+1}]}$

Summenformel für $q\neq 1$

$s_n = a_1 * (q^n - 1) / (q - 1) = (a_nq - a_1) / (q - 1)$ $q = (s_n - a_1) / (s_n - a_n)$

$0<q<1$ fallende, $q=1$ konstante, $q>1$ wachsende, $q<0$ alternierende Folge
In Abhängigkeit von der Eingabe von genau drei der fünf möglichen Größen a_1, a_n, q, n und s_n ergeben sich die Möglichkeiten:

Analytisch lösbare Fälle: a_1, q, n ; a_1, q, a_n ; a_1, q, s_n ; a_1, n, a_n ; q, n, a_n ; q, n, s_n ; a_1, a_n, s_n

Iterativ lösbare Fälle: a_1, n, s_n ; q, a_n, s_n ; n, a_n, s_n

Quotientenfolge zu (a_k) ist (q_k) die Quotientenfolge, wenn $q_k = a_{k+1} / a_k$

Interpolation der geometrischen Folge
Das Einschalten von m Gliedern zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliederb einer geometrischen Folge mit dem Quotienten q ergibt eine neue geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten $q_1 = \sqrt[m+1]{q}$.

Vorzugszahlen
Vorzugszahlen in der Standardisierung bilden angenähert geometrische Zahlenfolgen, die dem Dezimalsystem angepasst sind.
Stufensprung $\phi = \sqrt[k]{10}$, wobei k der Index der Grundreihe ist und k-1 die zwischen zwei Zehnerpotenzen eingeschalteten Glieder angibt.

Geometrische Zahlenfolgen, Beispiele
1) Vier Zahlen bilden eine geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten q = 2 und der Summe 60. Wie heißen die vier Zahlen?
a sei das erste Glied. Dann gilt für die folgenden Glieder $a_2 = a\cdot 2 = 2a$, $a_3 = a\cdot 2^2 = 4a$, $a_4 = a\cdot 2^3 = 8a$
und für die Summe: $a + 2a + 4a + 8a = 15a = 60 \Rightarrow a = 4$
Die gesuchten Zahlen sind 4, 8, 16, 32.

2) Von einer geometrischen Zahlenfolge kennt man $a_1 = 5$, $q = 2$, $s_n = 5115$. Berechnen Sie n und a_n.
Mit der Summenformel wird $s_n = 5115 = 5\cdot(2^n - 1)/(2 - 1)$
$1023 = 2^n - 1 \quad 1024 = 2^n \quad 2^{10} = 2^n \quad n = 10$
Für das n-te Glied wird $a_{10} = 5\cdot 2^9 = 2560$

3) Eine geometrische Folge beginnt mit den Gliedern 6, 9, … Geben Sie q und die nächsten drei Glieder an. Berechnen Sie a_{10} und s_{10} auf eine Kommastelle.
Der Quotient q lässt sich aus den beiden gegebenen Gliedern berechnen $q = 9/6 = 3/2$
und die folgenden Glieder $a_3 = 13{,}5$, $a_4 = 20{,}25$, $a_5 = 30{,}375$
Für a_n und s_n ergeben die Formeln
$a_{10} = 6\cdot(3/2)^9 = 230{,}7 \qquad s_{10} = 6\cdot(1{,}5^{10} - 1)/(1{,}5 - 1) = 680{,}0\ (=679{,}98)$

4) Von einer geometrischen Folge kennt man das erste, das zweite und das letzte Glied: 17408, 8704, …, 68. Wie viele Glieder hat die Folge?
Es ist q = 8704/17408 = 1/2. Für das n.te Glied ist $17408 \cdot(1/2)^{n-1} = 68$, d.h. n = 9

Geometrische Zahlenfolgen, Beispiele (2)
Aufgabe 1
Schalte zwischen je zwei Gliedern der geometrischen Folge (a_n) = 3/8, 3, 24, 192, … zwei neue Glieder so ein, dass wieder eine geometrische Folge entsteht! Wie heißt die Folge?
Lösung: Aus $a_1 = 3/8$ und $a_4 = 3$ wird $a_4 = a_1 q^3$ und q= 2. Die Folge lautet 3/8, 3/4, 3/2, 3, 6, 12, 24, …

Aufgabe 2
Wie viel Zweierpotenzen mit Exponenten aus N liegen zwischen 1 und 300000?
Lösung: Für den kleinsten Exponenten gilt $2^n > 1 \rightarrow n > 0$, d.h. n=1. Für den größten Exponenten gilt $2^n < 300000 \rightarrow n < 18{,}19$, d.h. n=18. Zwischen 1 und 300000 liegen folglich 18 Zweierpotenzen.

Aufgabe 3
Vom wievielten Glied sind die Glieder der Folge (a_n) = 4, 12, 36, … größer als 10^6?
Lösung: $a_2 = a_1 q \rightarrow q = 3$
Für das gesuchte Glied wird dann $a_1 q^{n+1} > 10^6$ und somit n = 12,31. Ab dem 13.Glied wird 10^6 überschritten.

Aufgabe 4
Ein Biologe züchtet Bakterien, die sich auf einem Nährboden in einer Stunde verdoppeln. Wie viel Bakterien sind nach 24 Stunden vorhanden, wenn mit drei Bakterien begonnen wird?
Lösung: Gegeben sind $a_1 = 3$; q = 2 und n = 25. Gesucht ist a_{25}
$a_{25} = a_1 q^{25-1} = 50331648$ Bakterien

Aufgabe 5
Der Umsatz einer Lebensmittelgroßhandlung beträgt 1,2 Millionen €. Wie groß ist der voraussichtliche Umsatz in 5 Jahren, wenn im Jahresdurchschnitt mit einer Zunahme von 10 % gerechnet wird?
Lösung: Der Umsatz steigt von 100 % auf 110 %, d.h. q=1,1. Mit $a_1 = 1200000$ und n = 5 wird
$a_5 = 1200000 \cdot 1{,}1^4 = 1756920$ €

Aufgabe 6
Eine Literflasche mit Wasser enthält 240 g Farbstoff. Es wird die Hälfte der Flüssigkeit abgegossen und anschließend die Flasche mit reinem Wasser wieder aufgefüllt. Wie viel g Farbstoff ist noch in der Flasche enthalten, wenn der Vorgang 7mal wiederholt wird?
Lösung: $a_n = a_1 q^{n-1} = 1{,}875$ in der Flasche befinden sich noch 1,875 g Farbstoff

Aufgabe 7

Beim Durchdringen einer Glasplatte verliert ein Lichtstrahl 6 % seiner Helligkeit. Wie viel % seiner Helligkeit hat er noch nach dem Durchdringen von 10 Glasplatten? Wie viel Glasplatten muss der Lichtstrahl durchdringen, damit seine Helligkeit nur noch höchstens 40 % beträgt?

Lösung: $a_n = a_1 q^{n-1} = 53{,}86$

der Lichtstrahl besitzt noch 53,9 % seiner Helligkeit

$n = (\lg a_n - \lg a_1) / \lg q + 1 = 15{,}8$ der Lichtstrahl muss 15 Glasplatten durchdringen

Aufgabe 8

In ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 6 cm wird ein zweites Quadrat so einbeschrieben, dass die Ecken auf den Mittelpunkten der Seiten des ersten Quadrates liegen. In das zweite Quadrat wird in gleicher Weise ein drittes Quadrat gezeichnet. Der Vorgang wird fortgesetzt. Wie groß ist die Fläche des 6.Quadrates?

Lösung: $a_n = a_1 q^{n-1} = 1{,}125$ der Flächeninhalt des 6.Quadrates beträgt 1,125 m²

Papierfalten

Hat man ein großes Blatt Papier (Fläche 1 m²) von der Dicke 0,1 mm, so kann dieses mehrfach aufeinander gefaltet werden, wobei bei jedem Faltvorgang sich die Fläche halbiert und die Dicke verdoppelt.
Damit liegt eine geometrische Folge vor. Für die Dicke und Fläche wird nach dem n-ten Falten

$$\text{Faltdicke} = 0{,}1 \cdot 2^n \text{ mm} \qquad \text{Faltfläche} = 1 \cdot 2^{-n} \text{ m}^2$$

Nach nur 7 Faltvorgängen ergibt sich im Beispiel eine Dicke von 1,28 cm bei einer Fläche von 78 cm², d.h. ungefähr ein Fläche mit den Seitenlängen 9 cm x 9 cm. Ein weiteres Falten ist kaum möglich.
Im Allgemeinen gilt, dass man maximal 8 mal falten kann.

Im Januar 2002 erzielte die US-amerikanische Schülerin Britney Gallivan (Abbildung) einen neuen Weltrekord. Ihr gelang es eine dünne Folie 11(!) mal zu falten.
Gleichzeitig gab sie eine Gleichung für die Mindestlänge l eines Blattes der Dicke d beim n-maligen Falten an: $l = \pi/6\ d\ (2^n + 4)\ (2^n - 1)$

Harmonische Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt harmonisch, wenn für alle Glieder a_n, $n > 1$, gilt $1/a_n = (1/a_{n-1} + 1/a_{n+1}) / 2$
d.h. a_n das harmonische Mittel seiner benachbarten Glieder ist. Damit wird $a_{n+1} = a_n a_{n-1} / (2 a_{n-1} - a_n)$
Beispiele: $(a_n) = (1; 1/2; 1/3; 1/4; 1/5; \ldots)$ $(b_n) = (1; 1/4; 1/7; 1/10; 1/13; \ldots)$

Ist $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ eine harmonische Folge, so bilden die Glieder $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n, \ldots$ eine arithmetische Zahlenfolge. Daraus folgt, dass jede Folge der Form $(a_n) = 1 / (m + (k-1)\ n)$; $k > 0$ für beliebige natürliche m, n harmonisch ist.
Unter einer harmonischen Reihe ist dann die Partialsummenfolge einer harmonischen Zahlenfolge zu verstehen.
Sehr oft wird unter der harmonischen Reihe der Spezialfall der divergenten Reihe

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$$

verstanden. Im Allgemeinen divergiert die Reihe der Folge

$$(a_n) = 1 / (m + (k-1)\ n) \ ;\ k > 0$$

d.h. auch 1 + 1/4 + 1/7 + 1/10 + … usw. überschreitet irgendwann jeden Wert.

Partialsummenfolge Zu (a_k) ist (s_k) die Partialsummenfolge, wenn $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Partialsummen von $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ =

k	Summe
1	$n(n+1)/2$
2	$n(n+1)(2n+1)/6$
3	$n^2(n+1)^2/4$
4	$n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)/30$
5	$n^2(n+1)^2\ [2(n^2+n)-1]/12$
6	$n(n+1)\ [6(n^5+n^3-n^2)+15n^4-n+1]/42$
7	$n^2(n+1)^2\ [3n^4+6n^3-n^2-4n+2]/24$
8	$n(n+1)\ [10n^7+35n^6+25(n^5-n^4)-17(n^3-n^2)+3n-3]/90$
9	$n^2(n+1)^2\ [2n^6+6(n^5+n)+n^4-8n^3+n^2-3]/20$
10	$n(n+1)\ [6n^9+27n^8+28(n^7-n^6+n^3-n^2)-38(n^5-n^4)-5n+5]/66$
11	$n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10]/24$
12	$n(n+1)\ [210n^{11}+1155n^{10}+1575(n^9-n^8)-3430(n^7-n^6)+5150(n^5-n^4)-3859(n^3-n^2)\ +691(n-1)]/2730$
13	$n^2(n+1)^2\ [30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7 326n^6+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691]/420$
14	$n(n+1)\ [6n^{13}+39n^{12}+66(n^{11}-n^{10})-207(n^9-n^8)+508(n^7-n^6)-779(n^5-n^4)+586(n^3-n^2)-105(n-1)]/90$
15	$n^2(n+1)^2\ [3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^9 83n^8+226n^7+203n^6-632n^5-226n^4+104n^3-122n^2-840n+420]\ /48$
16	$n(n+1)\ [30n^{15}+225n^{14}+455n^{13} 455n^{12}-1925n^{11}+1925n^{10}+6915n^9 6915n^8-17395n^7+17395n^6+\ 26805n^5 26805n^4-20183n^3+\ 20183n^2+\ 3617n-3617]\ /510$

17 $n^2(n+1)^2\,[10n^{14}+70n^{13}+105n^{12}-280n^{11}-565n^{10}+1410n^9+2165n^8-5740n^7-5271n^6+16282n^5+5857n^4-27996n^3+3147n^2+21702n-10851]/180$

Herleitung der Summenformel der Quadratzahlen: Ansatz $s_n=An^3+Bn^2+Cn$

$s_1=1$ ergibt $1=A+B+C$; $s_2=5$ ergibt $5=8A+4B+C$; $s_3=14$ ergibt $14=27A+9B+3C$. Daraus folgt $A=1/3$, $B=1/2$, $C=1/6$ und somit $s_n=(1/3)n^3+(1/2)n^2+1/6)n = n(n+1)(2n+1)/6$.

Potenzsummen

Gleichungen für die Potenzsummen (Partialsummen) der Form $S(n^k) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ können auf folgende Weise hergeleitet werden:

Ausgehend von $S(n^1) = n(n+1)/2$ setzt man die binomische Formel an $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

Einsetzen der Werte 1, 2, 3, …, n für n ergibt

$0^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1$

$1^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 \;\ldots\; (n-1)^3 = n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1$

Bildet man die Summe dieser n Gleichungen, so fallen die Glieder $1^3, 2^3, \ldots, (n-1)^3$ weg. Es ergibt sich

$0 = n^3 - 3\,S(n^2) + 3\,S(n^1) - n$

Auflösen nach $S(n^2)$ und Einsetzen des Terms für $S(n^1)$ führt zu

$S(n^2) = 1/3\,(n^3 + 3/2\,n\,(n+1) - n) = n/6\,(2n+1)\,(n+1)$

Analog ergibt sich aus der binomischen Formel $(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$

die Summenformel für $S(n^3)$

$S(n^3) = 1/4\,(n^4 + 6\,S(n^2) - 4\,S(n^1) + n) = n^2/4\,(n+1)^2$

Höhere Potenzsummenformeln ergeben sich auf gleiche Weise.

Partialsummen von Potenzen ungerader Zahlen $1^k + 3^k + \ldots + (2n-1)^k =$

k	Summe
1	n^2
2	$n(4n^2-1)/6$
3	$2n^4-n^2$
4	$n\,[48n^4-40n^2+7]/15$
5	$n^2\,[16n^4-20n^2+7]/3$
6	$n\,[192n^6-336n^4+196n^2-31]/21$
7	$n^2\,[48n^6-112n^4+98n^2-31]/3$
8	$n\,[1280n^8-3840n^6+4704n^4-2480n^2+381]/45$
9	$n^2\,[256n^8-960n^6+1568n^4-1240n^2+381]/5$
10	$n\,[3072n^{10}-14080n^8+29568n^6-32736n^4+16764n^2-2555]/33$

Partialsummen von $1^k - 2^k +- \ldots +- n^k =$

k	Summe
1	$1/4 - (2n+1)/4 \cos(\pi n)$
2	$- n(n+1)/2 \cos(\pi n)$
3	$-1/8 - (4n^3+6n^2-1)/8 \cos(\pi n)$
4	$-n(n+1)(n^2+n-1)/2 \cos(\pi n)$
5	$1/4 - (2n^5+5n^4-5n^2+1)/4 \cos(\pi n)$
6	$-n(n+1)(n^4+2n^3-2n^2-3n+3)/2 \cos(\pi n)$
7	$-17/16 - (8n^7+28n^6-70n^4+84n^2-17)/16 \cos(\pi n)$
8	$-n(n+1)(n^6+3n^5-3n^4-11n^3+11n^2+17n-17)/2 \cos(\pi n)$
9	$31/4 - (2n^9+9n^8-42n^6+126n^4-153n^2+31)/4 \cos(\pi n)$
10	$-n(n+1)(n^8+4n^7-4n^6-26n^5+26n^4+100n^3-100n^2-155n+155)/2 \cos(\pi n)$

Potenzsummenproblem nach Bernoulli

$S(n^k) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k = n^{k+1}/(k+1) + n^k/2 + k/2\,B_1\,n^{k-1} + [p(p-1)(p-2)]/[2*3*4]\,B_2\,n^{k-3} + [p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)]/[2*3*4*5*6]\,B_3\,n^{k-5} + \ldots$

Weitere Partialsummen

$1/(1\cdot2) + 1/(2\cdot3) + \ldots + 1/[n(n+1)] = n/(n+1)$

$1/(1\cdot3) + 1/(2\cdot4) + \ldots + 1/[n(n+2)] = 3/4 - (2n+3)/[2(n+1)(n+2)]$

$1/(1\cdot4) + 1/(2\cdot5) + \ldots + 1/[n(n+3)] = 11/18 - (3n^2+12n+11)/[3(n+1)(n+2)(n+3)]$

$1/(1\cdot5) + 1/(2\cdot6) + \ldots + 1/[n(n+4)] = 25/48 - (2n^3+15n^2+35n+25) / [2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]$

$1/(1\cdot6) + 1/(2\cdot7) + \ldots + 1/[n(n+5)] =$
$= 137/300 - (5n^4+60n^3+255n^2+450n+274) / [5(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)]$

$1/(1\cdot7) + 1/(2\cdot8) + \ldots + 1/[n(n+6)] =$
$= 49/120 - (6n^5+105n^4+700n^3+2205n^2+3248n+1764) / [6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)]$

$1/(1\cdot8) + 1/(2\cdot9) + \ldots + 1/[n(n+7)] =$
$= 363/980 - (7n^6+168n^5+1610n^4+7840n^3+20307n^2+26264n+13068) / [7(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)]$

$1/(1\cdot3) + 1/(3\cdot5) + \ldots + 1/[(2n-1)(2n+1)] = 1/2 - 1/[2\,(2n+1)]$

$1/(1\cdot5) + 1/(3\cdot7) + \ldots + 1/[(2n-1)(2n+3)] = 1/3 - (n+1) / [(2n+1)(2n+3)]$

$1/(1\cdot7) + 1/(3\cdot9) + \ldots + 1/[(2n-1)(2n+5)] = 23/90 - (12n^2+36n+23) / [6(2n+1)(2n+3)(2n+5)]$

$1/(3\cdot5) + 1/(5\cdot7) + \ldots + 1/[(2n+1)(2n+3)] = 1/6 - 1/[2 (2n+3)]$
$1/(3\cdot7) + 1/(5\cdot9) + \ldots + 1/[(2n+1)(2n+5)] = 2/15 - (n+2) / [(2n+3)(2n+5)]$
$1/(5\cdot7) + 1/(7\cdot9) + \ldots + 1/[(2n+3)(2n+5)] = n / [5(2n+5)]$
$1/(1\cdot3\cdot5) + 1/(3\cdot5\cdot7) + \ldots + 1/[(2n-1)(2n+1)(2n+3)] = n (n+2)/[3 (2n+1)(2n+3)]$
$1/(3\cdot5\cdot7) + 1/(5\cdot7\cdot9) + \ldots + 1/[(2n+1)(2n+3)(2n+5)] = n (n+4)/[15 (2n+5)(2n+3)]$
$1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n-2)^2 = n/2 (6n^2-3n-1)$
$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2 = n/2 (6n^2+3n-1)$
$1^2 + 5^2 + 9^2 + \ldots + (4n-3)^2 = n/3 (16n^2-12n-1)$
$2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + (4n-2)^2 = 4n/3 (4n^2-1)$
$3^2 + 7^2 + 11^2 + \ldots + (4n-1)^2 = n/3 (16n^2+12n-1)$
$1^2 + 6^2 + 11^2 + \ldots + (5n-4)^2 = n/6 (50n^2-45n+1)$
$2^2 + 7^2 + 12^2 + \ldots + (5n-3)^2 = n/6 (50n^2-15n-11)$
$3^2 + 8^2 + 13^2 + \ldots + (5n-2)^2 = n/6 (50n^2+15n-11)$
$4^2 + 9^2 + 14^2 + \ldots + (5n-1)^2 = n/6 (50n^2+45n+1)$
$1^3 + 4^3 + 7^3 + \ldots + (3n-2)^3 = n/4 (27n^3-18n^2-9n+4)$
$2^3 + 5^3 + 8^3 + \ldots + (3n-1)^3 = n/4 (27n^3+18n^2-9n-4)$
$2 + 2^3 + \ldots + 2^{2n+1} = 2^{2n+1}/3 - 2/3$
$1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + 4/2^4 + \ldots + n/2^n = 2 - (n+2)/2^n$
Potenzen $1 + z + z^2 + \ldots + z^n = (z^{n+1}-1)/(z-1)$

$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = n/2 (3n-1)$
$3 + 7 + 11 + \ldots + (4n-1) = 2n^2 + n$
$1 + 2^0/3^1 + 2^2/3^2 + 2^4/3^3 + \ldots + 2^{2n-2}/3^n = (4/3)^n$
$1\cdot2 + 2\cdot3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)/3$
$1\cdot1! + 2\cdot2! + 3\cdot3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$
$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)/4$

Gauß-Legende

Vom bedeutenden Mathematiker Carl Friedrich Gauß erzählte Wolfgang Sartorius von Waltershausen die folgende Geschichte:
Er sollte als Schüler in der Schule die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzählen. Der Lehrer nahm an, dass er damit eine Weile beschäftigt war. Schon nach kurzer Zeit fand er die Summe 5050.
Erklärung:
Statt stur die Zahlen von 1 bis 100 der Reihe nach zu addieren, bildete er Zahlenpaare mit denselben Summenwerten und konnte multiplizieren:
$1+2+3+4+\ldots+50+51+\ldots+99+100 = (1+100) + (2+99) + \ldots + (50+51) = 50\cdot101 = 5050$
Gauß fand damit als Kind die Partialsummenformel für die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, …

$$\Sigma_{i=1}^n i = n(n+1)/2$$

Anmerkung: In anderen Quellen wird von der Summe von 1 bis 40 oder aber von 1 bis 60 berichtet. Dies ist heute nicht mehr exakt klärbar.
Oft wird erzählt, dass sein Lehrer Büttner einfach nur "Ruhe haben wollte", was allerdings üble Nachrede ist, da entsprechend den damaligen Verhältnissen Büttner etwa 100 Schüler verschiedenen Alters in einer Klasse unterrichten sollte.

Satz von Nikomachos

s_{n-1} sei die Summe der ersten n-1 natürlichen Zahlen. Dann ist $s_{n-1} + s_n = n^2$.
Nachweis: Aus $s_n = n(n+1)/2$ und $s_{n-1} = n(n-1)/2$ wird
$s_{n-1} + s_n = n(n-1)/2 + n(n+1)/2 = n(n-1 + n+1)/2 = 2n^2/2 = n^2$

Zweierpotenzen - Summe

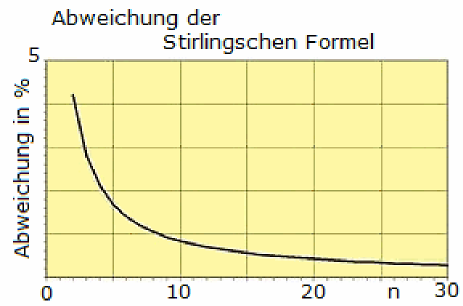
$$\mathbf{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1}$$

Beispiel: (nach Ibn Kallikan, 1256)
Nach der Legende erhielt der Erfinder des Schachspiels als Lohn auf das 1.Feld des Brettes 1 Weizenkorn
auf das 2.Feld 2 Körner, auf das 3.Feld 4 Körner, auf das 4.Feld 8 Körner usw...
Summe aller Körner = $2^{64}-1$ = 18 446 744 073 709 551 615

Eulersche Konstante

$$\lim_{n\to\infty} (1+ 1/2+ 1/3+ \ldots + 1/n - \ln n) = 0.577215665\ldots = C$$

C = 0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992 35988 05767 23488 48677 26777 66467 09369 47063 29174 67495 14631 44724 98070 82480 96050 40144 86542 83622 41739 97644 92353 62535 00333 74293 73377 37673 94279 25952 58247 09493 ...
Diese Konstante wurde von Leonhard Euler 1736 eingeführt. Es ist nicht bekannt, ob sie algebraisch oder transzendent und auch nicht ob sie rational oder irrational ist.



Stirlingsche Formel

Die Stirling-Formel ist eine mathematische Formel, mit der man für große Fakultäten Näherungswerte berechnen kann. Sie ist benannt nach dem Mathematiker James Stirling.

$$\lim_{n\to\infty} n! / [n^n e^{-n} \sqrt{n}\,] = \sqrt{2\pi}$$

1.Näherung $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

2.Näherung $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} (1+ 1/(12n))$

3.Näherung $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} (1+ 1/(12n) + 1/(288n^2))$

ab $n \geq 18$ hat 2.Näherung einen Fehler $< 0{,}001$ %

Die Stirling-Reihenentwicklung lautet

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + 1/2 \ln(2\pi n) + 1/(12n) - 1(360n^3) + 1/(1260n^5) - 1/(1680n^7) +- \ldots$$

Als Näherung betrachtet man lediglich eine endliche Zahl von Gliedern. Der Fehler liegt in der Größenordnung des ersten vernachlässigten Gliedes.

Für n > 1000 genügen zwei Glieder, um den relativen Fehler kleiner als 1 % zu halten

$$\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$$

Für sehr große n, $n > 10^{44}$, reduziert sie sich zu (relativer Fehler < 1 %)

$$\ln(n!) \approx n \ln(n)$$

Minimum und Maximum einer Zahlenfolge

Ist eine endliche Zahlenfolge $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ gegeben, so kann das Minimum bzw. Maximum der Glieder dieser Folge nicht nur durch Vergleich der Glieder sondern auch die Berechnung ermittelt werden.

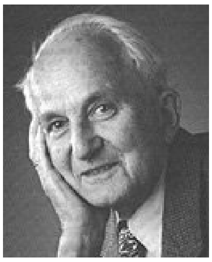
Algorithmus:

Maximum := a_1 Minimum := a_1

Von i := 2 bis m Maximum := (Maximum + a_i + | Maximum - a_i |)/2

Minimum := (Minimum + a_i - | Minimum - a_i |)/2

In den Variablen Maximum und Minimum finden sich dann die gesuchten Werte.



Zahlenfolge 3a+1

Das Problem der 3a+1-Zahlenfolge ist auch als Collatz-Problem, Syracus-Problem, Kakutanis Problem oder Hasses Algorithmus bekannt.

1937 gab der Student Lothar Collatz (1910-1990, Abbildung) der Universität Hamburg die Beschreibung einer Zahlenfolge an, welche heute immer noch ungelöste Rätsel aufgibt.

1996 wurde von Thwaites ein Preis von £ 1000 für die Lösung ausgesetzt.

Das Glied a_1 ist eine beliebige natürliche Zahl. Die folgenden Glieder der Zahlenfolge werden definiert mit

$a_{n+1} = a_n / 2$, falls a_n gerade ist

$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1$, falls a_n ungerade ist

Wählt man ein beliebiges Anfangsglied, so endet die Folge stets periodisch auf 4, 2, 1.

Der Japaner Yoneda überprüfte alle Zahlen bis 1,2 Billionen. 1999 erweiterte Oliveira e Silva die Suche bis $2{,}702 \cdot 10^{16}$. Ein Beweis der Periodizität gelang aber bisher nicht. Der ungarische Mathematiker Erdos kommentiert das Problem mit: "Die Mathematik ist noch nicht reif für solche Probleme."

Die Anzahl der nötigen Schritte bis zum Erreichen der 1 hängt nicht unbedingt von der Größe der Zahl ab. So sehen die Folgen für die 129 bzw. 832 als Startzahl wie folgt aus:

129, 388, 194, 97, 292, 146, 73, 220, 110, 55, 166, 83, 250, 125, 376, 188, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

und 832, 416, 208, 104, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Erweitert man das Problem auf ganze Zahlen (ohne 0), so treten vier Perioden auf:

4, 2, 1	-2, -1
-5, -7, -10	-17, -25, -37, -55, -82, -41, -61, -91, -136, -68, -34

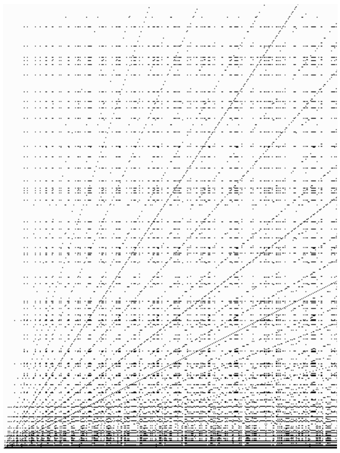
Collatz-Rekorde

Bei der Untersuchung des Collatz-Problems für immer größere Zahlen n stellt man fest, dass in unregelmäßigen Abständen sowohl die Mindestanzahl der notwendigen Iterationen als auch die größten auftretenden Folgeglieder steigen.

Die Liste enthält diese Rekordzahlen. (Suche bis 1,68 Milliarden; St.Polster Februar 2007)

Zahl n	Iterationen	Zahl n	maximales Folgeglied
2	1	2	2
3	7	3	16
6	8	7	52

7	16	15	160
9	19	27	9232
18	20	255	13120
25	23	447	39364
27	111	639	41524
54	112	703	250504
73	115	1819	1276936
97	118	4255	6810136
129	121	4591	8153620
171	124	9663	27114424
231	127	20895	50143264
313	130	26623	106358020
327	143	31911	121012864
649	144	60975	593279152



Trägt man in einem Diagramm längs der Abszisse die Startzahlen n der Collatz-Folge an und längs der Ordinate die in der Abfolge der Glieder bis zum Erreichen der 1 auftretenden Zahlen an, so ist zu erwarten, dass einige natürliche Zahlen häufiger als Folgenglieder auftreten. Zum Beispiel enthalten die Collatz-Folgen mit den Startzahlen 1 bis 1000 immerhin 350mal die 9232 als Zwischenglied, hier sogar als maximales Folgeglied. Solche Häufungen treten im Diagramm als horizontale Linien auf.
Verblüffend ist aber, dass sich auch diagonale Linien herausbilden. Warum dies geschieht, ist heute (2006) noch völlig unklar.

Collatz-2-Folge

Durch Roupam Ghosh wurde 2007 in "On the Collatz-Problem" eine modifizierte Collatz-Folge definiert.
Erneut werden für eine Startzahl a_1 die Glieder der Zahlenfolge

$a_{n+1} = a_n / 2$, falls a_n gerade ist
$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1$, falls a_n ungerade ist

berechnet. Allerdings wird die Berechnung sofort abgebrochen, wenn eine Zahl auftritt, die in irgendeiner Collatz-Folge kleinerer Zahlen schon vorhanden war. Damit ergibt sich

	Folge
für a_1=1	1
für a_1=2	2 (da die 1 schon auftrat)
für a_1=3	3, 10, 5, 16, 8, 4 (da die 2 schon auftrat)
für a_1=4	- (da die 4 schon auftrat)
für a_1=5	- (da die 5 schon auftrat …)
für a_1=6	6
für a_1=7	7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20 … usw.

Dabei wies Ghosh nach, dass es keinen Algorithmus für ungerade Startzahlen gibt, der entscheidet, wann eine Berechnung abgebrochen werden kann, ohne dass man die vorhergehenden Berechnungen durchgeführt hat. Die Fragestellung gehört wahrscheinlich zu den NP-Problemen.
Für gerade Startzahlen a_1 ist das Problem trivial, da die zweite Zahl bei $a_1/2$ schon vorhanden war.

Matthews-Folge, Zahlenfolge 5a+1

Durch K.R.Matthews wurde 2006 die Collatz-Folge auf allgemeine Folgen der Art

$a_{n+1} = a_n / 2$, falls a_n gerade ist
$a_{n+1} = (k \cdot a_n + 1) / 2$, falls a_n ungerade ist

für beliebige natürliche k > 1 erweitert.
Dabei zeigt sich, dass derartige Folgen eine endliche Anzahl von Zyklen besitzen, unter Umständen aber auch Divergenz für einzelne Startglieder auftreten kann.

Eine Folge mit 4 Zyklen ergibt sich für k = 5:

$a_{n+1} = a_n / 2$, falls a_n gerade ist
$a_{n+1} = (5 \cdot a_n + 1) / 2$, falls a_n ungerade ist

Die Zyklen beginnen mit den Zahlen 0, 1, 13 und 17 und sind (1, 3, 8, 4, 2, 1), (13, 33, 83, 208, 104, 52, 26), (17, 43, 108, 54, 27, 68, 34).

Jongleur-Folge

Eine zur Collatz-Folge ähnliche Struktur besitzt die Jongleur-Folge (engl. juggler sequence). Die Folge wird auch Gaukler-Folge genannt.
Ausgehend von einer natürlichen Zahl a_1 = n wird die Folge berechnet mit

$a_{n+1} = [a_n^{1/2}]$, wenn a_n gerade $\qquad a_{n+1} = [a_n^{3/2}]$, wenn a_n ungerade

Dabei wird unter [x] die größte ganze Zahl kleiner gleich x verstanden.
Zum Beispiel ergibt sich für 77 die Folge
77, 675, 17537, 2322378, 1523, 59436, 243, 3787, 233046, 482, 21, 96, 9, 27, 140, 11, 36, 6, 2, 1

Durch E.W.Weisstein wurde nachgewiesen, dass für alle n bis 10^6 die Folge stets bei 1 endet. Der allgemeine Beweis steht noch aus.
Für die Startzahlen n = 2, 3, … sind die notwendigen Schritte bis zum Erreichen der 1: 0, 1, 6, 2, 5, 2, 4, 2, 7, 7, 4, 7, 4, 7, 6, 3, 4, 3, 9, 3, … Ein neuer maximaler Wert der Schrittzahl ist 0, 1, 6, 7, 9, 11, 17, 19, 43, 73, 75, 80, 88, 96, 107, 131, … die für die Anfangszahlen 1, 2, 3, 9, 19, 25, 37, 77, 163, 193, 1119, … erreicht werden.
Die kleinsten natürlichen Zahlen n, die 1, 2, … Schritte benötigen sind n = 1, 2, 4, 16, 7, 5, 3, 9, 33, 19, 81, 25, 353, …

Kwasnicki-Folge

Es sei $a_1 = 1$ und n > 1. Dann ist $a_n = [a_{n-1} / 2]$
wenn diese Zahl nicht in der Menge $\{0, a_1, …, a_{n-1}\}$ enthalten ist, andernfalls $a_n = 3\, a_{n-1}$
mit [x] als größter ganzer Zahl kleiner gleich x.

Durch C.Kimberling wurde 2000 in "Crux Mathematicorum 26" die Frage gestellt, ob in dieser Folge jede natürliche Zahl auftritt. Die ersten Glieder dieser Folge sind
1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, 21, 10, 5, 15, 45, 22, 11, 33, 16, 8, 24, 12, 36, 108, 324, 162, 81, 40, …
2004 gelang Mateusz Kwasnicki von der Wroclawer Universität der Nachweis, dass jede natürliche Zahl in dieser Folge erscheint.

Alternativ kann man auch eine solche Folge mit 2 als Faktor und 3 als Divisor betrachten. Dann sind die ersten Glieder 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 32, 64, 21, 7, 14, 28, 9, 18, 36, …

Beatty-Folgen

1926 beschrieb Samuel Beatty in "American Mathematical Monthly" eine Gruppe von Zahlenfolgen, die nach ihm benannt wurden, die Beatty-Folgen. 1995 wurden diese Folgen in hunderten mathematischen Artikeln untersucht.

Es sei r eine beliebige irrationale Zahl größer 1 und s die irrationale Zahl mit 1/r + 1/s = 1.
Ist [x] die größte ganze Zahl kleiner gleich x, so sind die Folgen [nr] und [ns], wobei n alle natürlichen Zahlen größer Null durchläuft, die Beatty-Folgen von r.
Ist r = (1+√5)/2 die goldene Zahl, so ergibt sich
[nr] = 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, …
[ns] = 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, …
In der Beatty-Folge [nr] tritt eine natürliche Zahl maximal einmal auf. Die Folge ist stets monoton wachsend. Offen ist 2011, ob in der Beatty-Folge immer unendlich viele Primzahlen auftreten.

196-Algorithmus

Gegeben ist eine zwei- oder mehrstellige natürliche Zahl n.
Zu dieser Zahl wird die natürliche Zahl addiert, welche dadurch entsteht, dass die Ziffernfolge von n umgekehrt wird. Diese Addition wird mit der Summe immer wiederholt, bis eine Palindrom-Zahl entsteht.
z.B. n = 5180 5280, 6105, 11121, 23232
Die entstehende Zahl kann teilweise sehr groß werden, z.B. für 89 ergibt sich 8813200023188.
Die kleinsten Zahlen, für welche nicht bekannt ist, ob der Algorithmus irgendwann eine Palindrom-Zahl liefert, sind: 196, 887, 1675, 7436, 13783, …

Diese Zahlen werden auch Lychrel-Zahlen genannt. 1990 ermittelte John Walker 2415836 Iterationen für n=196. Im Jahre 1995 erweiterte Tim Irvin die Suche bis zu ersten auftretenden Zahl mit 2 Millionen Ziffern. Nach 9,48 Millionen Iterationen ergab sich später eine nichtpalindrome Zahl mit 3924257 Ziffern. Bis zum 1.Mai 2006 berechnete Wade VanLandingham fünf Jahre 724756966 Iterationen der 196. Die letzte Ergebniszahl hatte 300 Millionen Stellen und war immer noch kein Palindrom.
Bis zu einem Zwischenergebnis von 1000stelligen Zahlen findet man für folgende Werte < 1000 kein Palindrom:
196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986
Die Anzahl a(n) der bis zum Erreichen der Palindrom-Zahl nötigen Iterationen sind für n=1, 2, …
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 1, …
Die kleinste Zahl, welche a(n) = 0,1,2,3,… benötigt, ist
0, 10, 19, 59, 69, 166, 79, 188, 193, 1397, 829, 167, 2069, 1797, 849, 177, 1496, 739, 1798, 10777, 6999, 1297, 869, 187, 89, 10797, 10853, 10921, 10971, 13297, 10548, 13293, 17793, 20889, ?, ?, ?, 80359, 13697, 10794, 15891, …
Unter den ersten 100000 Zahlen fand man 5996 Zahlen, die bisher keine Palindrome ergaben.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Zahl Ziffern hat, die, wenn man sie mit der entsprechenden Ziffer der Kehrzahl paart, sich höchstens zu Neun summieren, nimmt mit der Länge der Zahl ab. Im Dualsystem ist es sicher, dass nicht jede Zahl schließlich zu einem Palindrom führt. 10110 wird z.B. niemals palindromisch.

196-Algorithmus, Rekordliste

Durch Jason Doucette wird eine kontinuierliche Suche nach Lösungen des 196-Algorithmus durchgeführt. Dabei fand er immer wieder neue Rekord-Palindromzahlen und höhere Werte für die notwendigen Iterationen bis zum Erreichen des Palindroms.

Zahl	Iterationen	entstehendes Palindrom
19	2	121
39	2	363
49	2	484
59	3	1111
69	4	4884
79	6	44044
89	24	8813200023188
6999	20	16668488486661
10548	30	17858768886785871
10677	53	4668731596684224866951378664
...		
147996	58	8834453324841674761484233544388
150296	64	682049569465550121055564965940286
1000689	78	796589884324966945646549669423488985697
1005744	79	796589884324966945646549669423488985697
1017501	80	14674443960143265333356234106934447641
7008899	82	68586378655656964999946965655687368586
9008299	96	555458774083726674580862268085476627380477854555
100239862	97	1345428953367763125675365555635765213677633598245431
140669390	98	1345428953367763125675365555635765213677633598245431
1005499526	109	66330069478378985774345546664554347758987387496003366
10000442119	112	1365685266568810569913369868868963319965018865662586563 1

Euklid-Mullin-Folge, Shanks-Folge

Die Euklid-Mullin-Folge ist definiert als: $a_0 = 2$

a_{n+1} = der kleinste von 1 verschiedene Primteiler des Terms $1 + \Pi_{k=0}^{n} a_k$

Damit wird:

$a_1 = a_0 + 1 = 3$ $\quad$ $a_2 = a_1 a_0 + 1 = 7$

$a_3 = a_2 a_1 a_0 + 1 = 43$ $\quad$ $a_3 a_2 a_1 a_0 + 1 = 1807 = 13 \cdot 139$, d.h. $a_4 = 13$

Auf Grund der Konstruktion der Folge, tritt keine Primzahl zweimal auf. Weitere Glieder sind …

n	$1 + \Pi_{k=0}^{n} a_k$	Primfaktorzerlegung	a_n
5	23479	53·443	53
6	1244335	5·248867	5
7	6221671	Primzahl	6221671
8	3870 91838 10571	Primzahl	3870 91838 10571
9	149 84009 11280 53329 48275 35471	139·25621·420743244646304724409	139

und weiter für n = 10, …

2801, 11, 17, 5471, 52662739, 23003, 30693651606209, 37, 1741, 1313797957, 887, 71, 7127, 109, 23, 97, 159227, 643679794963466223081509857, 103, 1079990819, 9539, 3143065813, 29, 3847, 89, 19, 577, 223, 139703, 457, 9649, 61, 4357, …

Bisher kennt man 43 Glieder (nach Shanks 1991). Für die Ermittlung des nächsten Gliedes muss eine 180stellige Zahl faktorisiert werden. Es wird vermutet, dass jede Primzahl in dieser Folge genau einmal auftritt. Die kleinste, in der bekannten Folge noch nicht aufgetretene Primzahl ist 31.
Die Folge wird heute auch Shanks-Folge genannt. Auf Shanks geht die Vermutung zurück, dass jede Primzahl in dieser Folge auftritt.

Sylvester-Folge

Die Sylvester-Folge entsteht durch folgende Vorschrift. Ausgehend von $a_1 = 2$ wird gebildet

$a_{n+1} = \Pi_{i=1}^{n} a_i + 1$

d.h. die ersten n Terme werden multipliziert und um 1 erhöht. Die ersten Glieder sind
2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, 10650056950807, 113423713055421844361000443,
12864938683278671740537145998360961546653259485195807,
165506647324519964198468195444439180017513152706377497841851388766535868639572406
808911988131737645185443, …
Das 11.Glied wird schon sehr groß
2739245030 8603031423 4102342916 7468628119 4364367580 9146279473 6794160869 2026226993
6343321184 0458243863 4929548737 2839923697 5848797430 6317730580 7538834294 6034495641
0077034761 3304760167 3945464982 8385541500 213920807
12.Glied:

7503463339 0928631146 4218348364 2930173847 2414007373 2363176684 3917683742 3823720023 3203724274 8398197362 2749306010 7386942069 5218759022 5828135195 2761393460 7260277743 8769889608 6030486687 7962756619 5019983548 4418384103 0968994995 2466600707 3298797852 9321278769 2398334049 7448231960 0488330941 9542523184 6478785035 6023392611 4995356472 9371337917 7733866701 3341358153 7490788020 2312650932 1031022439 7095644371 1488932612 8420161145 3610443
Durch Vardi wurde 1991 gezeigt, dass die Glieder mit den Indizees 7 bis 18 keine Primzahlen sind.

Alternativ gilt auch die Definition $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$
mit dem Startglied 2.
Auf Grund der Definition haben zwei Folgenglieder nie einen gemeinsamen Teiler außer 1, d.h. sie sind paarweise teilerfremd. Da die Folge unendlich ist, folgt sofort, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Die reziproken Glieder dieser Folge bilden eine unendliche, ägyptische Zerlegung der 1

$$1 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/43 + 1/1807 + \ldots$$

Wird ein Nenner der Summanden um 1 verringert, bricht die Darstellung mit einer echten ägyptischen Zerlegung ab, zum Beispiel

$$1 = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/43 + 1/1806 = \ldots$$

Sylvester-Folge
Die Glieder der Sylvester-Folge $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$
mit dem Startglied $a_0 = 2$, sind für n = 0, 1, 2, 3 und 5 prim, alle weiteren bis n = 22 zusammengesetzte Zahlen. Deren Faktorzerlegung ist

n	Primfaktoren
4	13 · 139
5	3263443 Primzahl
6	547 · 607 · 1033 · 31051
7	29881 · 67003 · 9119521 · 6212157481
8	5295435634831 · 31401519357481261 · 77366930214021991992277
9	181 · 1987 · 112374829138729 · 114152531605972711 · P68
10	2287 · 2271427 · 21430986826194127130578627950810640891005487 · P156
11	73 · C416
12	2589377038614498251653 · 2872413602289671035947763837 · C785
13	52387 · 5020387 · 5783021473 · 401472621488821859737 · 287001545675964617409598279 · C1600
14	13999 · 74203 · 9638659 · 57218683 · 10861631274478494529 · C3293
15	17881 · 97822786011310111 · 54062008753544850522999875710411 · C6618
16	128551 · C13335
17	635263 · 1286773 · 21269959 · C26661
18	50201023123 · 139263586549 · C53339
19	C106721
20	352867 · 6210298470888313 · C213419
21	387347773 · 1620516511 · C426863
22	91798039513 · C853750

Ein Eintrag Pn stellt eine n-stellige Primzahl dar, Cn eine n-stellige zusammengesetzte Zahl, die bisher noch nicht faktorisiert werden konnte.

Mullin-Folge
In Analogie zur Euklid-Mullin-Folge wird folgende Konstruktion untersucht und nur nach Mullin (1963) benannt: $a_0 = 2$ $\quad {}_{n+1}$ = der größte(!) Primteiler des Terms $1 + \prod_{k=0}^{n} a_k$
Damit wird:

$a_1 = a_0 + 1 = 3$ $\qquad a_2 = a_1 a_0 + 1 = 7$

$a_3 = a_2 a_1 a_0 + 1 = 43$ $\qquad a_3 a_2 a_1 a_0 + 1 = 1807 = 13 \cdot 139$, d.h. $a_4 = 139$

Auf Grund der Konstruktion der Folge, tritt auch hier keine Primzahl zweimal auf. Diese Folge wächst erheblich schneller als die Euklid-Mullin-Folge. Weitere Glieder sind …
50207, 340999, 236 53477 34339, 4 68022 56414 71129, 1 36884 52065 80129, 889 34032 45778 80670 08982 45749 22371, …

Für das nächste Glied muss eine 92stellige Zahl faktorisiert werden.
In dieser Folge treten nicht alle Primzahlen auf, offensichtlich nicht die 5. Darüber hinaus konnten Cox und van der Poorten 1968 zeigen, dass nur die Primzahlen 2, 3, 7 und 43 bis zur Primzahl 47 auftreten. Man vermutet, dass unendlich viele Primzahlen nicht zur Folge gehören.
Weiterhin ist die Folge erstaunlicher Weise nicht monoton. 1984 konnte Naur zeigen, dass $a_9 < a_{10}$ ist (siehe oben).

Odoni-Folge
Unter der Odoni-Folge versteht man $a_0 = 2$ $\qquad a_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} a_k$

Diese Folge beginnt mit 2, 3, 7, 43, 1807, …

Teilerfremde Zahlenfolge, Edwards-Folgen

Die Folge der Fermatzahlen $2^{2^{\wedge}n}+1$ und die Sylvester-Folge sind Zahlenfolgen, deren Glieder paarweise zueinander teilerfremd sind.
1964 wurde durch Edwards nachgewiesen, dass in allen Zahlenfolgen $a_n = a_{n-1} (a_{n-1} - k) + k$ die Glieder a_n (n > 0) paarweise teilerfremd sind, wenn a_0 und der Parameter k selbst zueinander teilerfremd sind.
Für $a_0 = 3$ und k = 2 ergibt sich gerade die Folge der Fermat-Zahlen.
Ist a_0 eine ungerade, ganze Zahl, so tritt auch in der Folge $a_n = a_{n-1}^2 - 2$ nur Glieder auf, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist.
Aus der Existenz dieser Zahlenfolgen folgt unmittelbar, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Sierpinski-Folgen, Sierpinski-Prozess

Gegeben sei eine natürliche Zahl n und ein natürlicher Parameter p. Unter einer Sierpinski-Folge (n+p)*, bzw. einem Sierpinski-Prozess $S_p(n)$, versteht man dann folgende Zahlenfolge.
1. zu n wird der Parameter p addiert und die Reihenfolge der Ziffern des Ergebnisses vertauscht
2. mit dem Ergebnis n wird bei 1. weiter verfahren

$S_3(n)$ ergibt zum Beispiel für n = 2 die Folge 2, 5, 8, 11, 41, 44, 74, 77, 8, … d.h. der Prozess läuft in eine Schleife.
Bewiesen ist: Jeder $S_3(n)$-, $S_4(n)$- und $S_5(n)$-Prozess führt bei hinreichender Länge in eine Schleife.
Ebenso besitzen die $S_p(n)$-Folgen für p = 7, 8, 9, 10 und 11 eine endliche Anzahl von verschiedenen Schleifen. Für $S_6(n)$ ist noch nicht bekannt, ob der Prozess für jede Startzahl in einem Zyklus endet.

91er-Folge

1981 wurde durch I.O.Kerner in der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" die Einundneunziger-Folge (91er-Folge) vorgestellt.
Gegeben ist ein natürliches n. Dann ist
$f(n) = n - 10$, wenn n > 100 ist $\quad f(n) = f(f(n+11))$, andernfalls
Die Folge der Argumente n der Funktion bildet dann die Kerner-Folge.
Interessant ist, dass zur Berechnung teilweise eine große rekursive Tiefe erreicht wird. Zum Beispiel ergibt sich
$f(89) = f(f(100)) = f(f(f(111)) = f(f(101)) = f(91) = f(f(102)) = f(92) = f(f(103)) = f(93) = … = f(100) = f(f(111)) = f(101) = 91$
Für alle interessanten Argumente -111 < n < 111 endet die Berechnung stets bei 91.

Jamblichos-Algorithmus, Jamblichos-Folge

Durch den spätantiken griechischen Mathematiker Jamblichos (gest. um 330 in Chalkis) wurde in dem fragmentarisch erhaltenen 10-bändigen Werk "Sammlung pythagoreischer Lehren" ein interessanter Algorithmus angegeben.

1) Wähle eine natürliche Zahl als Startzahl a_0.
2) Bestimme zwei natürliche Zahlen b_0 und c_0, so dass a_0, b_0, c_0 unmittelbar aufeinander folgen und die größte von ihnen ein Vielfaches von 3 ist.
3) Berechne $d_0 = a_0 + b_0 + c_0$.
4) Bilde die Quersumme q von d_0.
5) Ist q = 6, so endet der Algorithmus, andernfalls werden mit $a_1 = q$ als Startzahl die Schritte 2 bis 5 wiederholt.

Die auftretenden Startzahlen a_0, a_1, … bilden dann die Jamblichos-Folge.
Beispiel: $a_0 = 202 \rightarrow (202, 203, 204) \rightarrow 609 \rightarrow a_1 = 15 \rightarrow (13, 14, 15) \rightarrow 42 \rightarrow q_2 = 6$
Durch Jamblichos wurde behauptet, dass der Algorithmus stets bei 6 endet, unabhängig von der Startzahl. Der Beweis der Aussage ist elementar.
Die kleinste Zahl für die der Zyklus zweimal durchlaufen wird ist die 22, dreimal für die Zahl 232. Bis 50 Millionen wird der Zyklus maximal dreimal absolviert.

Golomb-Folge, Silverman-Folge

Die Golomb-Folge (nach Solomon W.Golomb) oder Silverman-Folge ist eine sich selbst erzeugende Folge ganzer Zahlen, bei der die an n-ter Stelle stehende Zahl a_n angibt, wie oft n in der Folge vorkommt.

Konstruktion: An erster Stelle steht die 1, die besagt, dass n = 1 genau einmal vorkommt. Da diese Bedingung erfüllt ist, kann keine weitere 1 auftauchen, und es folgt an zweiter Stelle (n = 2) die 2. Daraus folgt, dass die 2 zweimal in der Folge vorkommt. Nach der bereits vorhandenen wird eine weitere 2 hinzugefügt, sodass an dritter Stelle (n = 3) ebenfalls eine 2 steht. Das bedeutet, dass auch die 3 zweimal vorkommt. Somit lautet die Folge bis hierhin: 1,2,2,3,3. Da an vierter und an fünfter Stelle nun je eine 3 steht, werden genau 3 Vieren und 3 Fünfen hinzugefügt: 1,2,2,3,3,4,4,4,5,5,5. ... usw.
Damit sind die ersten Glieder der Folge:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 19, ...

Durch Colin Mallows wurde für das jeweils nächste n die Differenzengleichung

$$a(n+1) = 1 + a(n+1-a((a(n)))$$

angegeben. Eine Annäherung an a_n für beliebige n erfolgt mit dem Goldenen Schnitt $\Phi = 1,618...$

$$a_n \approx \Phi^{2-\Phi}\, n^{\Phi-1}$$

Beispiel $a_{57} \approx \Phi^{2-\Phi}\, 57^{\Phi-1} \approx 14,6223278 \approx 15$

Aronson-Folge

Definition der Zahlenfolge in der englischen Sprache:

"t is the first, fourth, eleventh, ... letter of this sentece." 1, 4, 11, 16, 24, 29, 33, 35, 39, ...

Definition der Zahlenfolge in der deutschen Sprache:

"t ist der erste, vierte, elfte, siebzehnte, zweiundzwanzigste, zweiunddreißigste, ... Buchstabe in diesem Satz." 1, 4, 11, 17, 22, 32, 49, 66, ...

Das Ergebnis entspricht der relativen Häufigkeit des Buchstabens t in den beiden Sprachen. Im Englischen tritt ein t wesentlich häufiger auf, d.h. die Zahlenfolge wächst langsamer.

Beginnt der Satz mit "@ ist der erste …", so wächst die Zahlenfolge für verschiedene Buchstaben @ unterschiedlich schnell

@	Folge
e	1, 6, 8, 12, 14, 19, 24, 31, 34, 37, 41, 43, 47, 51, 54, 68, 69, 77, 84, 87, 94, 101, …
i	1, 2, 16 = endliche Folge
s	1, 3, 10 = endliche Folge
r	1, 7, 9 = endliche Folge

Ulam-Folgen

Gegeben sind zwei Startzahlen a und b einer Zahlenfolge. Jedes weitere Glied der Zahlenfolge ist die nächste natürliche Zahl, die sich auf genau eine Art als Summe eines Paares vorhergehender Zahlen der Folge erzeugen lässt. Zum Beispiel beginnt diese Folge für a = 1 und b = 2 mit

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, …

Die 5 ist nicht vertreten, da sie als Summe 1+4 und 2+3 darstellbar ist. Die 23 tritt nicht auf, da sie aus keinem Paar vorhergehender Zahlen zusammengesetzt werden kann. Derartige Zahlenfolgen werden Ulam-Folgen genannt.

Interessant ist, dass bestimmte Abstände aufeinanderfolgender Zahlen nicht auftreten, zum Beispiel die 6, 11, 14, 16, 18, 21, 23, 26, 28, …. Andere Abstände gibt es nur sehr selten, wie die 1, 4, 9 und 13, nämlich genau viermal, zweimal, dreimal und einmal. Einige Lücken sind sehr häufig, zum Beispiel der Abstand 2 kommt in 36,9% aller Fälle vor. Zumindest gilt dies für die ersten 700000 Glieder (Juli 2006) der Standard-Ulam-Folge mit den Anfangswerten 1 und 2.

Unverständlich ist, warum 47 und 48 das einzige Paar aufeinanderfolgender Zahlen in der Folge ist, abgesehen von den trivialen Anfangspaaren 1,2 ; 2,3 und 3,4.

Mit steigender Gliednummer wachsen auch die Lücken auf neue Maximalwerte. Nachfolgende Übersicht enthält dieses Anwachsen:

Glied	Glied	Differenz	Glied	Glied	Differenz	Glied	Glied	Differenz
1	2	1	4	6	2	8	11	3
18	26	8	38	47	9	87	97	10
114	126	12	155	175	20	282	309	27
751	781	30	949	983	34	1257	1296	39
1553	1594	41	1858	1900	42	2178	2247	69
4800	4878	78	5384	5484	100	18796	18918	122
37562	37699	137	64420	64682	262	252719	253034	315
933709	934296	587						

Durch Schmerl wurde 1994 nachgewiesen, dass in allen Ulam-Folgen mit a=2 und ungeraden b > 4 genau zwei gerade Glieder auftreten. Es wird vermutet, dass in diesen Folgen eine Periodizität der auftretenden Abstände der Glieder besteht.

Kimberling-Folge

Kimberling-Folgen werden durch eine Startzahl z0 und zwei Parametern a und b beschrieben. Diese Folgen bestehen aus allen Zahlen, die durch die zwei erzeugenden Terme

$a \cdot z$ und $b \cdot z - 1$

aus der Startzahl und allen weiteren Gliedern der Zahlenfolge erzeugt werden können. a, b müssen dabei natürliche Zahlen größer als 1 sein.

A-Folge

Unter einer A-Folge versteht man eine unendliche Zahlenfolge natürlicher Zahlen a_i, für die

$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$
gilt und kein a_k die Summe von zwei oder mehreren vorhergehenden Gliedern ist.
Erdös bewies 1962, dass das Supremum der Summe aller Reziproken $1/a_k$ aller dieser Folgen stets kleiner als 103 ist, d.h. $S(A) = \sup \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/a_k < 103$
1992 konnte Zhang $S(A) < 3,9998$ nachweisen.
Durch Levine und O'Sullivan wird $S(A) < 3,01\ldots$
vermutet. Die A-Folgen sind mit den Mian-Chowla-Folgen verbunden.

Mian-Chowla-Folge

Unter einer Mian-Chowla-Folge versteht man eine Folge ganzer Zahlen, die wie folgt definiert ist.
Ausgehend von einer Startzahl a_1 ergeben sich die nachfolgenden Glieder a_n als die Zahlen, für die alle Paarsummen $a_i + a_j$
für alle i, j = 1, …, n, verschieden sind.
Zum Beispiel ergibt sich mit $a_1 = 1$ als nächstes Glied $a_2 = 2$, da die Paarsummen
$a_1 + a_1 = 2$; $a_1 + a_2 = 3$; $a_2 + a_2 = 4$
alle verschieden sind.
a_3 kann nicht gleich 3 sein, da 1 + 3 = 2 + 2 = 4 ist. Es wird $a_1 = 4$ mit den Paarsummen 2, 3, 4, 5, 6 und 8. Insgesamt ergibt sich die Folge
1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 204, 252, 290, 361, 401, 475, 565, 593, 662, 775, 822, 916, 970, 1016, 1159, 1312, 1395, 1523, 1572, 1821, 1896, 2029, 2254, 2379, 2510, 2780, 2925, 3155, 3354, 3591, 3797, 3998, 4297, 4433, 4779, 4851, …

Wird mit $a_1 = 0$ begonnen, erhält man
0, 1, 3, 7, 12, 20, 30, 44, 65, 80, 96, 122, 147, 181, 203, 251, 289, 360, 400, 474, 564, 592, 661, 774, 821, 915, 969, 1015, 1158, 1311, 1394, 1522, 1571, 1820, 1895, 2028, 2253, 2378, 2509, 2779, 2924, 3154, 3353, 3590, 3796, 3997, 4296, 4432, 4778, 4850, 5122, 5242, 5297, 5750, 5997, 6373, 6800, 6924, 7459, 7546, 7788, 8219, 8502, 8729, 8941, 9881, 10199, 10586, 10897, 11288, 11613, 11875, 12033, 12930, 13393, 14046, 14533, 14900, 15165, 15687, 15971, 16618, 17354, 17931, 18844, 19070, 19630, 19669, …
Beginnt die Folge mit $a_1 = z$, so ergeben sich als Glieder der Folge die mit dem Startglied $a_1 = 0$ um jeweils z vergrößert.
Die Folge wurde von Abdul Majid Mian und Sarvadaman Chowla eingeführt.

Morse-Thue-Folge

Gegeben ist in der 1.Stufe der Folge die Ziffer 0. Von Generation zu Generation werden folgende Ersetzungsregeln genutzt: Jede 0 wird durch 01 und jede 1 durch die Sequenz 10 ersetzt. Damit entstehen die einzelnen Schritte:

0
01
0110
01101001
0110100110010110

Diese Folge ensteht auch, in dem jede Ziffernfolge in der nächsten Stufe durch das Zweierkomplement der Ziffernfolge ergänzt wird. Die Morse-Thue-Folge besitzt besondere Eigenschaften. Der Norweger Axel Thue (1863-1922) führte die Reihe als eine Folge nichtperiodischer, aber rekursiv berechenbarer Zeichen ein. Diese Folge ist selbstähnlich. Streicht man jedes zweite Zahlenpaar, so ergibt sich die Ausgangsfolge. Obwohl die Folge keine Periodizität aufweist, ist sie dennoch nicht absolut zufällig oder unvorhersehbar. Sie besitzt eine klare Fein- und Grobstrukturierung. Niemals sind mehr als 2 nebeneinander stehende Zeichen identisch. Bei einer Fourier-Analyse zeigen sich besonders klare Spitzen.
Durch Jean-Paul Allouche und Jeffrey Shallit wurde 1999 nachgewiesen, dass diese merkwürdige Folge in unterschiedlichsten Problembereichen auftaucht: bei Schachproblemen, der Theorie der Quasikristalle, in der mathematischen Physik, bei wortkombinatorischen Problemen, der Differenzialgeometrie, Zahlentheorie, ... Erstmals untersucht wurde diese Sequenz erstmals 1851 durch E.Prouhet.
Die Morse-Thue-Folge ist ein Sonderfall einer selbstregenerierenden Zahlenfolge.

Selbstregenerierende Zahlenfolge

1957 wurde in der Zeitschrift American Mathematical Monthly (Band 64, Seite 198) erstmals von selbstregenerierenden Zahlenfolgen berichtet.
Gegeben seien zwei endliche Zahlenfolgen (a) und (b), die nur 0 oder 1 als Glieder besitzen und zusätzlich (a) mit einer 0 beginnt. Die selbstregenerierende Folge (s) entsteht, in dem mit (a) beginnend in jedem Iterationsschritt jede 0 durch (a) und jede 1 durch (b) ersetzt wird.
Beispiel: (a) = 01, (b) = 011

		Nullenzahl	Einsenzahl
s(0)	01	1	1
s(1)	01011	2	3
s(2)	0101101011011	5	8
s(3)	010110101101101011010110110101101011011	13	21

Selbstregenerierend heißt eine solche Folge, da jedes Glied stets mit der Ziffernfolge des vorhergehenden Gliedes beginnt. Beginnt (a) mit einer Null, so entsteht stets eine solche Folge.
Die Anzahl der auftretenden 0 (N) und 1 (E) ergeben sich mit:

$N_{k+1} = N(a)\ N_k + N(b)\ E_k \qquad E_{k+1} = E(a)\ N_k + E(b)\ E_k$

wobei N(a), E(a) die Nullen und Einsen in der Ausgangsfolge (a) sind; N(b) und E(b) analog.

Für das oben genannte Beispiel ergeben sich dann gerade die Zahlen der Fibonacci-Folge. Für diese Beispielfolge ist die n.auftretende Ziffer z von (s)

$z = [x + \{(n-1)\ x\}]$

Dabei stellt [] den ganzzahligen Anteil und {} den gebrochenen Anteil dar. Interessant ist, dass

$x = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}618034\ldots$

wieder unmittelbar mit dem goldenen Schnitt verbunden ist.

Kolakoski-Folge

Die selbsterzeugende Kolakoski-Folge besteht aus Blöcken von einzelnen und doppelten Ziffern 1 oder 2. Ausgangspunkt ist der Block

"1"

Diese 1 bedeutet, dass der nachfolgende Block die Länge 1 hat. Da das letzte Zeichen der Folge eine 1 ist, folgt damit genau eine 2, d.h.

"12"

Die 2.Ziffer, hier eine 2, ergibt einen nachfolgenden Block der Länge 2, d.h.

"1211"

Die zwei neuen Ziffern beschreiben die zwei nächsten Blöcke, genau eine 2 und genau eine 1

"121121"

Analog folgen "121121221", "12112122122112" usw.
Die Kolakoski-Folge ist dann die Ziffernfolge

1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, …

Die Länge der Folge nach den einzelnen Schritten ist 1, 2, 4, 6, 9, 14, 22, … Heute (2011) ist noch unklar, ob in der Folge gleich viele 1 und 2 auftreten.
Interpretiert man die 2 als 0 und betrachtet die Ziffernfolge als Dualzahl, so ergibt sich die Kolakoski-Zahl

$[0{,}10110100100110\ldots]_2 = 0{,}794507192\ldots$

de Bruijn-Folge

Eine de Bruijn-Folge B(n,k) ist ein Wort eines Alphabets A mit k Buchstaben, wobei gilt:
Jedes mögliche Wort aus den Buchstaben von A der Länge n taucht als zusammenhängender Unterstring in einer Hintereinanderreihung von B auf und B ist das kürzeste Wort mit dieser Eigenschaft. n ist die Ordnung von B.
Eine de Bruijn-Folge enthält damit alle Wörter der Länge n aus k Buchstaben genau einmal, wobei das Wort zyklisch ist, d.h. die Buchstaben des Endes dürfen mit denen des Anfangs fortsetzen.

Für k = 2 und n = 2 ist eine de Bruijn-Folge B = (0,0,1,1). Enthalten sind alle Wörter der Länge 2: (0,0), (0,1), (1,1), (1,0). Ein Beispiel für n = 4 und k = 2 ist (0000100110101111).
Jede de Bruijn-Folge hat die Länge k^n. Es existieren jeweils $(k!)^{kn-1} / k_n$
verschiedene de Bruijn-Folgen der Ordnung n.

Die Folgen sind nach Nicolaas Govert de Bruijn benannt, der 1946 diese 1946. Ein weitere wichtige Arbeit erschien 1951 von Tatjana van Aardenne-Ehrenfest. Allerdings beschrieb 1894 Camille Flye Sainte-Marie den Fall n = 2. Im antiken Indien findet man ebenfalls Bezüge.
Die Folgen werden zur Konstruktion von Kartentricks, in der Kryptographie, Genetik, bei fehlerkorrigierenden Codes und Computerspeicher-Hashing verwendet.

Clarke-Folgen

Betrachtet werden zwei Bildungsvorschriften $x = c_1\ x + c_1$ und $x = c_2\ x + c_2$
wobei c_1 und c_2 natürliche Zahlen sind. Die Startzahl x sei eine ganze Zahl, oft wird x = 1 gewählt. Das Bildungsgesetz der Zahlenfolge besagt nun, dass auf jedes Glied der Folge sowohl die eine als auch die andere Bildungsvorschrift angewandt wird. Damit entsteht ein binärer Baum.
Für x = 2x + 2 und x = 6x + 6 ergeben sich damit als erste Glieder der Folge

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{1} & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & \mathbf{4} & & & & \mathbf{12} & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ \mathbf{10} & & \mathbf{30} & & \mathbf{26} & & \mathbf{78} \end{array}$$

Werden alle entstehenden Zahlen sortiert, so würde sich im Beispiel in der „3.Generation" die Folge 1, 4, 10, 12, 26, 30, 78 ergeben. In der 4.Generation erhält man
1, 4, 10, 12, 22, 26, 30, 54, 62, 66, 78, 158, 162, 186, 474, d.h. 15 Glieder. Allgemein enthält die n.te Generation 2^n-1 Glieder. Auf Grund dieses schnellen Anwachsens des Umfangs der Zahlenfolgen hat Clifford Pickover diese Folgen auch „Heuschrecken-Folgen" getauft.
Das Problem besteht nun darin, dass scheinbar keine Zahl in der Folge zweimal auftaucht. Durch Michael Clarke wurde dies intensiv untersucht und für verschiedene c_1 und c_2 bis zur 10.Generation ausgewertet.

Dabei zeigt sich, dass für einige c_1 und c_2 tatsächlich gleiche Zahlen in den Folgen entstehen. Zum Beispiel ergibt sich für $c_1 = 2$ und $c_2 = 23$ in der 5.Generation die Folge
(4, 10, 22, 46, 46, 94, 115, 190, 232, 253, 382, 466, 508, 529, 1081, 2164, 2185, 2668, 4330, 4372, 4393, 5338, 5359, 5842, 24886, 49774, 49795, 50278, 61387, 572401)
in der die 46 zweimal auftaucht. Für $c_1 = 1$ erhält man für jedes $c_2 > 1$ in der (c_2 + 2).Generation eine doppelte Zahl und zwar $3c_2$.
Ist c1 verschieden von 1, so werden Clarke-Folgen mit doppelten Zahlen schnell selten. Die Tabelle gibt an gefundene Folgen mit sich wiederholenden Zahlen an. Dabei werden c_2, die erste Generation mit Wiederholung und die dort auftretende doppelte Zahl genannt. Die Suche wurde bis zur 15.Generation (32767 Glieder) mit dem Programm Aribas durchgeführt (Juli 2006, Polster).

c_1	(c_2, Generation, Zahl)
2	(3, G5, 66), (5, G3, 10), (11, G4, 22), (23, G5, 46), (38, G7, 190), (47, G6, 94), (95, G7, 190), (191, G8, 382), (383, G9, 766)
3	(4, G7, 2388), (8, G6, 1416), (33, G4, 66), (303, G6, 606)
4	(18, G3, 36), (74, G4, 148), (298, G5, 596)
5	(140, G4, 280)
6	(39, G3, 78), (237, G4, 474)
8	(68, G3, 136)
10	(105, G3, 210)
12	(150, G3, 300)
14	(203, G3, 406)

Für andere $c_1 < 21$ und $c_2 < 501$ wurden keine Wiederholungen gefunden.
Auch mit anderen Startzahlen als x = 1 entstehen analoge Folgen. Mit x = 5 ergibt sich zum Beispiel für $c_1 = 2$ und $c_2 = 3$ erst in der 15.Generation eine doppelte Zahl, die 241662.

Aribas-Programm zu Clarke-Folgen

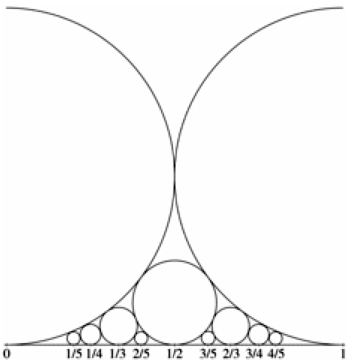
```
function rekursion(z,g,c,e,gr:integer;st:stack):integer;
var a,b:integer;
begin     if g<gr then a:=c*z+c; rekursion(a,g+1,c,e,gr,st); stack_push(st,a);
                  b:=e*z+e; rekursion(b,g+1,e,c,gr,st); stack_push(st,b);
            else return z end
end;
function clarke(c1,c2:integer):integer;
var i,j,g,z,a,b:integer; st:stack; vec:array; gefunden:boolean;
begin
   gefunden:=false;
  for g:=2 to 15 do  z:=1;
   rec(z,1,c1,c2,g,st);       vec := stack2array(st);      vec := sort(vec);
   for i:=0 to length(vec)-2 do
       if vec[i]=vec[i+1] then writeln("Untersuchung von ",a," und ",b); writeln("Gefunden in Generation
",g," = ",vec[i]);
                               gefunden:=true; end;
       end; if gefunden=true then break end;
end;
```

Farey-Folge, Farey-Reihe

Die n.te Farey-Folge ist die streng monoton wachsende, endliche Zahlenfolge von nichtkürzbaren Brüchen zwischen 0 und 1, deren Nenner kleiner oder gleich n sind.
Zum Beispiel ist die 6. Farey Reihe:
0, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 1

1816 veröffentlichte der Geologe John Farey (1766-1826) in einem kurzen Artikel seine Untersuchungen, bei der er feststellte, dass in jeder dieser Folgen ein Glied gerade der gemittelte Bruch der beiden Nachbarn ist, d.h.   …, a/b, (a+b)/(c+d), c/d, …
Diese merkwürdige Eigenschaft erregte die Aufmerksamkeit von Augustin Cauchy, der kurze Zeit später einen Beweis lieferte.
Schon 14 Jahre vor Farey und Cauchy hatte Haros die 99.Farey-Folge bei der Berechnung von Näherungswerten untersucht. Die Farey-Folgen sind unmittelbar mit den Ford-Kreisen verbunden.
Für zwei aufeinanderfolgende Farey-Brüche a/b und c/d sind die Produkte $a \cdot d$ und $b \cdot c$ zwei aufeianderfolgende natürliche Zahlen.

Die Anzahl F(n) der Brüche der n.ten Farey-Folge ist gleich $F(n) = F(n-1) + \phi(n)$
wobei $\phi(n)$ die Eulersche Funktion ist. Eine Näherung für große n ist $\approx 0{,}3039635509\ n^2$
In der Folge "Bettor or Worse" (2006) der TV-Serie Numb3rs wird Bezug auf die Farey-Folge genommen.
http://www.tv.com/numb3rs/bettor-or-worse/episode/462130/summary.html



Ford-Kreise

Unmittelbar mit der Farey-Folge sind die Ford-Kreise; benannt nach Lester R.Ford; verbunden. Die Kreise wurden von Ford erstmals 1938 in "American Mathematical Monthly, volume 45, number 9" beschrieben.
Eine Eigenschaft der Fordkreise ist, dass sie sich nicht überlappen, aber gegenseitig berühren. Die Ford-Kreise zeigen, je nach Auflösung, die Farey-Reihe einer bestimmten Ordnung.
In der Abbildung sind die Ford-Kreise der Farey-Reihe fünfter Ordnung zu sehen.

Ist p/q der vollständig gekürzte, beschreibende Term eines Ford-Kreises, so hat der Kreis den Mittelpunkt $M(p/q,\ 1/(2q^2))$ und den Radius $1/(2q^2)$.

Die Ford-Kreise können auch als Teilmenge der Kreise der Apollonius interpretiert werden, die von den Geraden y = 0, y = 1 und einem Kreis C(0 ; 1) erzeugt werden.

Sind p_1/q_1, p_2/q_2 und p_3/q_3 die Terme dreier aufeinanderfolgender Ford-Kreise, so berühren sich 1. und 2.Kreis in

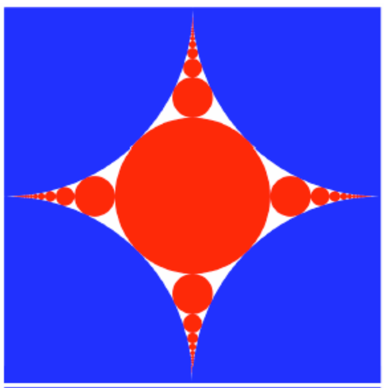
$P_{12}(p_2/q_2 - q_1 /(q_2 (q_2^2 + q_1^2) ; 1 /(q_2^2 + q_1^2))$

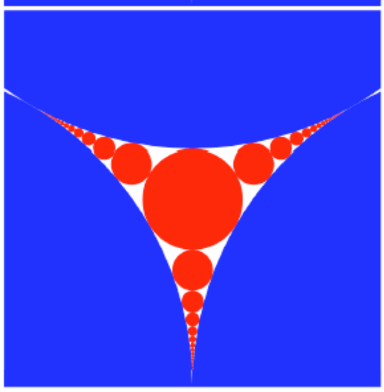
x-Koordinate = $p_2/q_2 - q_1 /(q_2 (q_2^2 + q_1^2)$ y-Koordinate = $1 /(q_2^2 + q_1^2)$

und 2. und 3.Kreis in

$P_{23}(p_2/q_2 - q_3 /(q_2 (q_2^2 + q_3^2) ; 1 /(q_2^2 + q_3^2))$

x-Koordinate = $p_2/q_2 - q_3 /(q_2 (q_2^2 + q_3^2)$ y-Koordinate = $1 /(q_2^2 + q_3^2)$





Ford-Kreise (2)

Ford-Kreise können nicht nur zwischen zwei Kreisen gleichen Radius und einer Geraden konstruiert werden, sondern auch zwischen drei oder vier sich paarweise tangierenden Kreisen.

Für den oben dargestellten Fall von vier Kreisen ergibt sich für die Radien

$r_n = ((2n^2+2n+1) - (2n+1) \sqrt{2}) / (4n^4+8n^3-4n-1)$

d.h. $r_0 = \sqrt{2} - 1$

$r_1 = 5/7 - 3/7 \sqrt{2}$

$r_2 = 13/119 - 5/119 \sqrt{2}$

$r_3 = 25/527 - 7/527 \sqrt{2}$

$r_4 = 41/1519 - 9/1519 \sqrt{2}$

$r_5 = 61/3479 - 11/3479 \sqrt{2}$

Für die untere Darstellung von drei Kreisen wird

$r_n = ((-6n-6) + (2n^2+4n+3) \sqrt{3}) / (8n^4+32n^3+32n^2-6)$

d.h. $r_0 = 1 - 1/2 \sqrt{3}$

$r_1 = 3/22 \sqrt{3} - 2/11$

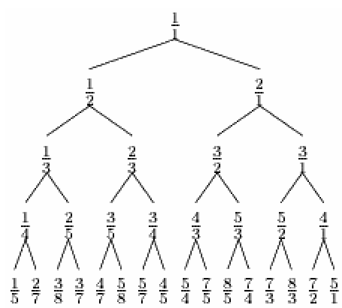
$r_2 = 19/506 \sqrt{3} - 9/253$

$r_3 = 11/598 \sqrt{3} - 4/299$

$r_4 = 17/1534 \sqrt{3} - 5/767$

$r_5 = 73/9794 \sqrt{3} - 18/4897$

Stern-Brocot-Baum



Der binäre Baum von Stern-Brocot enthält alle vollständig gekürzten positiven Brüche, d.h. Zähler und Nenner sind positive ganze Zahlen.
Die Anordnung der Brüche erfolgt so, dass jeder Bruch m/n der gemittelte Bruch seiner beiden darunter liegenden Brüche a/b und c/d ist:

$m/n = (a+c) / (b+d)$

Zum Beispiel ist 2/3 der gemittelte Bruch von 3/5 und 3/4.
Die Farey-Folge ist ein Teilbaum des Stern-Brocot-Baumes.

Dieser Baum wurde 1858 von Moritz Stern (1807-1894, "Über eine zahlentheoretische Funktion") und unabhängig 1861 von Achille Brocot (1817-1878, "Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode") beschrieben.

Brüche im Stern-Brocot-Baum

In dem Stern-Brocot-Baum treten alle vollständig gekürzten Brüche genau einmal auf. Ist ein derartiger Bruch a/b gegeben, so kann dessen Position durch Angabe der Richtung (L … Links, R … Rechts) im Pfad eindeutig gekennzeichnet werden.

Der Bruch a/b = 5/8 wird zum Beispiel durch LRLR gefunden, 4/7 durch LRLL bzw. in verkürzter Schreibweise LRL2. Eine solche Folge von L und R nennt man Stern-Brocot-Wort.
Diese Folge ergibt sich aus der Kettenbruchdarstellung des Bruchs. Ist der Kettenbruch von a/b die Folge a_1, a_2, …, a_n, so geben die a_i abwechselnd an, wie oft in rechter (R) oder linker (L) Richtung im Baum zu gehen ist. a_1 steht dabei für R. Außerdem ist a_n genau um den Wert 1 zu groß.
Zum Beispiel findet man für 14/59 den Kettenbruch [0; 4; 4; 1; 2].
Dies bedeutet, dass 0 mal R, 4 mal L, 4 mal R, 1 mal L und 2-1=1 mal R zu wählen ist, d.h. LLLLRRRRLR oder verkürzt L4R4LR.

Stern-Brocot-Wortauswertung

Ist ein Stern-Brocot-Wort, d.h. eine Folge von Zeichen "L" und "R" gegeben, so beschreibt dieses Wort im Stern-Brocot-Baum eindeutig eine gebrochene Zahl.
Zum Beispiel erhält man für RRLLLRL
den Bruch 25/11 = 2,2727272727272… mit den Zwischenschritten 1/1, 2/1, 3/1, 5/2, 7/3, 9/4, 16/7, 25/11.
Ein Stern-Brocot-Wort, das mit "R" beginnt und in dem sich die "R" und "L" ständig abwechseln, erzeugt einen Bruch der Form F_{n+1} / F_n, wobei die F_i aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind. Auch die Zwischenbrüche sind von dieser Struktur. Verblüffend!
Das unendliche Wort "RLRLRLRLRLRL…" entspricht damit dem Verhältnis des goldenen Schnittes.

Brüche im Stern-Brocot-Baum - Algorithmen

Zu Berechnung des Stern-Brocot-Wortes und der Umkehrung können effektive Algorithmen genutzt werden:
1) gegeben: Bruch m/n ; gesucht: Stern-Brocot-Wort

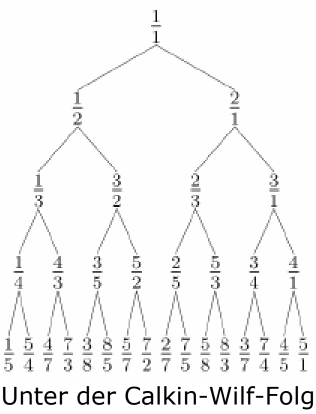
```
while m <> n do begin
if m<n then begin writeln ('L'); n := n-m; end
else begin writeln ('R'); m := m-n; end;
end;
```

2) gegeben: Stern-Brocot-Wort ; gesucht: Bruch m/n

```
m:=0; n:=1; m1:=1; n1:=0;
repeat
  read(S); //Zeichen des Wortes
  if S='L' then begin m1 := m+m1;
  n1 : = n+n1; end;
  if S='R' then begin m := m+m1; n := n+n1;
end;
until S=#0; //Stringende
m:=m+m1; n:=n+n1; writeln(m,n);
```

3) Ist eine sehr genau angenäherte, irrationale Zahl a gegeben, so kann für diese ein Stern-Brocot-Wort hoher Genauigkeit ermittelt werden.
gegeben: irrationale Zahl a ; gesucht: Stern-Brocot-Wort

```
repeat
  if a<1 then begin writeln ('L');
   a := a/(1-a); end
else begin writeln ('R'); a := a-1; end;
until 0=1;
```



Calkin-Wilf-Baum

Aufbauend auf dem Stern-Brocot-Baum entwickelten 1999 Neil Calkin und Herbert S.Wilf den nach ihnen benannten Binärbaum.
Der Calkin-Wilf-Baum entsteht aus der Wurzel 1/1 nach der Konstruktionsvorschrift: a/b → (a/(a+b) ; (a+b)/b)

Der Calkin-Wilf-Baum enthält jede positive, rationale Zahl genau einmal und zwar als gekürzten Bruch, d.h. ggT(Zähler a; Nenner b) = 1.
Der Nenner des n-ten Bruchs in der Liste ist der Zähler des (n+1)-ten Bruchs.
Der Knoten b(b)/b(n+1) hat die Söhne
b(2n+1)/b(2n+2) und b(2n+2)/b(2n+3)
mit der Bildungsvorschrift b(2n+1) = b(n)
b(2n+2) = b(n)+b(n+1)

Unter der Calkin-Wilf-Folge versteht man dann die Folge der Einträge im Baum
1/1; 1/2; 2/1; 1/3; 3/2; 2/3; 3/1; 1/4; 4/3; 3/5; 5/2; 2/5; …
Ist x ein Glied der Folge, so wird für das nachfolgende Glied f(x)
f(x) = 1/([x] + 1 - {x})
wobei [] den ganzzahligen Anteil und {} den gebrochenen Teil darstellen.

Stern-Sequenz, diatomische Folge von Stern und Brocot

Die diatomische Folge von Stern und Brocot, Stern-Sequenz oder auch Stern-Brocot-Folge ist eine Folge ganzer Zahlen, die von dem Mathematiker Moritz Stern und dem Uhrmacher Achille Brocot entdeckt wurde. Sie ist die Grundlage des Stern-Brocot-Baumes zur Abzählung rationaler Zahlen.

Bildungsgesetz: $s_0 = 0$; $s_1 = 1$ $s_{2n} = s_n$; $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$

Die Folge der Zahlen lautet 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, …

Die Stern-Sequenz ist mit anderen bekannten Folgen verbunden. Ordnet man das Pascalsche Dreieck als Stufentabelle an, so haben die aufsteigenden Diagonalen zwei Eigenschaften: Die Anzahl der ungeraden Zahlen ist die Stern-Brocot-Folge, die Summe der Zahlen die Fibonacci-Folge:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	…
1	7	21	35	35	21	…
1	8	28	56	70	56	…
1	9	36	84	126	126	…

Die hervorgehobene Diagonale startet in der 9.Zeile, d.h. n=9. Von den übrigen Werten der Diagonale sind 4 ungerade, d.h. $s_9 = 4$ der Stern-Sequenz. Die Summe auf der Diagonalen ist 1+7+15+10+1 = 34 = F_9 in der Fibonacci-Folge.

Hofstadter-Folge

Hofstadter-Folgen stellen eine Gruppe ganzzahliger Zahlenfolgen dar, die durch nichtlineare Differenzengleichungen beschrieben werden können.

Douglas Richard Hofstadter gab in seinem Buch "Gödel, Escher, Bach: ein Endloses Geflochtenes Band" die ersten dieser Folgen an.

Hofstadters Figur-Figur-Folgen

Hofstadters Figur-Figur-Folgen sind definiert durch

$R(1) = 1$; $S(1) = 2$

$R(n) = R(n-1) + S(n-1)$, $n > 1$

wobei die Folge der S(n) gerade die natürlichen Zahlen sind, die nicht in der Folge {R(n)} enthalten sind.

Die ersten Zahlen dieser Folgen sind:

R: 1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, 69, 83, 98, 114, 131, 150, 170, 191, 213, 236, 260, …

S: 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, …

Hofstadter-G-Folge

Zwei weitere Zahlenfolgen von Typ Hofstadter sind die G-Folge und H-Folge. Für diese gilt:

Hofstadter-G-Folge

$G(0) = 0$

$G(n) = n - G(G(n-1))$, $n > 0$

Die ersten Zahlen dieser Folge sind 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 12, …

Hofstadter-H-Folge

$H(0) = 0$

$H(n) = n - H(H(H(n-1))$, $n > 0$

Die ersten Zahlen dieser Folge sind 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 13, 14, …

Hofstadter-Q-Folge

Die Hofstadter-Q-Folge wird wie folgt definiert

$Q(1) = Q(2) = 1$

$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2))$, $n > 2$

Die ersten Zahlen dieser Folge sind 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 9, 10, 11, 11, 12, …

Douglas Hofstadter nennt die Elemente dieser Folge Q-Zahlen. Die Darstellung der Q-Folge ist die erste bekannte Erwähnung einer Meta-Fibonacci-Folge in der Literatur.

Während die Elemente der Fibonacci-Folge durch das Summieren der beiden jeweils vorhergehenden Elemente bestimmt werden, bestimmen die beiden jeweils vorhergehenden Elemente einer Q-Zahl, um wieviele Elemente in der Q-Folge zurückgegangen werden soll, um zu den beiden Summanden zu gelangen. Daher hängen die Indizees der beiden Summanden von der Q-Folge selbst ab.

Es ist unbekannt, ob die Folge für alle n wohldefiniert ist, das heißt, ob die Folge irgendwo abbricht, weil ihre Produktionsregel versucht, sich auf Elemente zu beziehen, die in einen kleineren Index als 1 besitzen.

Trägt man die Q(n) in ein Koordinatensystem ein, so schwanken die Wert um eine Gerade n/2. Abschnitte mit geringer Schwankung treten immer wieder auf. Die Ursache ist noch unklar.

Besondere Zahlenfolgen

Tennis

Zahlenfolge (a_n) beschreibt die Anzahl der verschiedenen Spielstände beim Tennis nach n ausgespielten Punkten. Zum Beispiel sind nach 3 Punkten die Spielstände 30-00, 15-15 oder 00-30 → a_3 =3 möglich
(a_n) = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 20, 26, 33, 39, 54, 64, 81, 93, 118, 132, 153, 169, 200, 218, 243, 263, 300, 322, 351, 375, 418, 444, 477, 505, 554, 584, 621, 653, 708, 742, 783, 819, 880, 918, 963, 1003, 1070, 1114, 1167, 1217, 1298, 1351, 1410, 1463, 1550, 1605, ...

Gaußsche Primzahlen

Zahlenfolge (a_n) beschreibt die Zahlen n, für die $3^n + 10i$ eine Gaußsche Primzahl sind:
(a_n) = 1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 13, 27, 45, 78, 86, 115, 131, 172, 203, 278, 315, 322, 489, 589, 884, 1181, 1289, 1362, 1402, 1464, 1541, 1601, 1638, ...

Palindromische Primzahlen

Zahlenfolge (a_n) beschreibt die Zahlen n, für welche die n.te Primzahl palindromisch ist:
(a_n) = 1, 2, 3, 4, 5, 26, 32, 36, 42, 43, 65, 71, 74, 76, 129, 134, 138, 139, 157, 158, 1263, 1285, 1293, 1367, 1377, 1483, 1519, 1528, 1583, 1635, 1647, 1682, 1726, 1805, 1814, 1867, 1897, 1917, 1928, 2009, 2060, 2083, 2117, 2196, 2250, 2260, 3255, 3267, 3285, ...

Zahlen als arithmetisches Mittel von Primzahlen

Diese Zahlenfolge (a_n) beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten die natürliche Zahl n als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Primzahlen aufzuschreiben.
Die ersten Glieder sind ab n = 2, 3, …
(a_n) = 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 3, 4, 1, 3, 5, 3, 3, 5, 4, 4, 5, 3, 3, 6, 2, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 5, 8, 4, …

Die Anzahl der möglichen Darstellungen steigt mit größeren n schnell an. Die Zahlenfolgen (a^*_n), welche die Folge der wachsenden Maximalzahlen darstellt, beginnt mit
(a^*_n) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 19, 21, 24, 27, 30, 32, 33, 41, 44, 51, 53, 57, 58, 68, 73, 76, 83, 91, 97, 114, 128, 139, 154, 163, 165, 171, 190, 199, 218, 223, 241, 268, 274, 292, 303, 329, 330, 340, 363, 393, 394, 433, 446, 447, 466, 477, 517, 530, 571, …
Diese Werte ergeben sich erstmals für die Startzahlen n = …
4, 8, 12, 18, 24, 30, 39, 42, 45, 57, 60, 84, 90, 105, 150, 165, 195, 210, 255, 300, 315, 390, 420, 495, 525, 570, 630, 735, 825, 840, 945, 1050, 1155, 1365, 1575, 1785, 1995, 2100, 2205, 2310, 2625, 2730, 3045, 3255, 3465, 3990, 4095, 4515, 4620, 5145, 5355, 5460, 5775, 6510, 6825, 6930, 7665, 7770, 7980, 8085, 8925, 9240, …

Primzahlenfreie Zahlenfolge

Die Zahlenfolge (a_n) wird rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 10000\, a_n + 1$$

Es ist zu zeigen, dass diese Folge keine Primzahlen enthält.

Nachweis: Die Folge beginnt mit
1, 10001, 100010001, 1000100010001, …
1 ist keine Primzahl, 10001 auch nicht, da 10001 = 73·137. Für gerade n kommen in a_n eine gerade Anzahl Einsen vor. Offenbar ist also 10001 ein Teiler aller dieser a_n.
Für ungerade n schreibt man a_n als geometrische Reihe:

$$a_n = 1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4n-4} = (10^{4n} - 1) / 9999$$

Nach der dritten binomischen Formel ergibt sich die Zerlegung

$$a_n = (10^{4n} - 1) / 9999 = (10^{2n} - 1)\,(10^{2n} + 1) / (99 \cdot 101)$$

Die 99 wurde nicht weiter zerlegt, da sie, in Analogie zu der Reihe für a_n, offenbar mit dem ersten Faktor des Zählers wieder zu einer abbrechenden geometrischen Reihe gehört

$$(10^{2n} - 1) / 99 = 1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2n-2}$$

Der gefundene Faktor ist also für n = 3, 5, 7, …
10101, 101010101, 1010101010101, …
Diese Zahlen sind allerdings nur dann Teiler von a_n, wenn $(10^{2n} + 1)/101$ eine natürliche Zahl ist. Dies gilt sicherlich für n = 1; für größere ungerade n geht der Nachweis induktiv.
Sei $b_n = 10^{2n} + 1$ durch 101 teilbar. Die Differenz zu b_{n+2} beträgt $10^{2n} \cdot 9999$ und ist durch 101 teilbar. Also ist auch b_{n+2} durch 101 teilbar.
Quelle: http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem051loe.htm

Zahlenfolgen im Komplexen

Auch im Bereich der komplexen Zahlen werden Zahlenfolgen definiert: Komplexe Folge $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, unendliche Folge komplexer Zahlen. Schreibweise: $\{z_i\}$.

Grenzwert z einer komplexen Folge: Eine Folge konvergiert gegen einen Grenzwert $z = \lim_{i\to\infty} z_i$, falls es zu jedem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle Indizes $m \geq N(\varepsilon)$ gilt $|z_m - z| < \varepsilon$, d.h., von m ab liegen alle z_i mit i>m in der komplexen Ebene in einem Kreis um z mit dem Radius ε. Beispiel: Für die Folge $\{z^{1/i}\}$ ist der Grenzwert = 1.

Anwendung: Man betrachtet die iterativ durch die Operation $z_{i+1} = z_i^2 + c$, $z_0 = 0$, konstruierte Folge $\{z_i\}$ für eines festes, komplexes c. Die Mandelbrot-Menge besteht aus allen Zahlen c, für die alle Iterierten z_i ebenfalls in dieser Menge liegen. Für Zahlen c, die nicht in der Mandelbrot-Menge liegen, streben die Iterierten ins Unendliche.

Reihe

⇔ Folge der Partialsummen von (a_n)

Wird einer unendlichen Folge von Zahlen eine Summe zugeordnet, die als Summanden die Folgenglieder hat, so heißt diese Summe unendliche Reihe.
Werden nur die Folgenglieder bis zur Stelle k addiert, so spricht man von der k-ten Partialsumme der Reihe. Die Konvergenz, Divergenz und Monotonie wird definiert wie bei Folgen.

Eine Reihe ist …

konvergent	⇔ Folge der Partialsummen konvergiert
absolut konvergent	⇔ Folge der Beträge der Partialsummen konvergiert
bestimmt divergent	⇔ Partialsummenfolge hat Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$
unbestimmt divergent	⇔ kein Grenzwert vorhanden
alternierend	⇔ ständiger Vorzeichenwechsel der Glieder der Reihe

Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung der Reihe wieder konvergent und hat dieselbe Summe wie die Ausgangsreihe.
Eine konvergente Reihe, bei der jede Umordnung von ihr konvergiert und immer dieselbe Summe hat, heißt unbedingt konvergent, andernfalls bedingt konvergent.

Satz von Riemann

Ist eine Reihe bedingt konvergent und σ eine beliebige reelle Zahl, so kann man die Glieder der Reihe so umordnen, dass die umgeordnete Reihe konvergiert und die Summe σ hat.

Großer Umordnungssatz

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist und in eine beliebige Anzahl disjunkter Teilreihen zerlegt wird, dann konvergiert jede dieser Teilreihen ebenfalls absolut und die Summen der Teilreihen ist gleich der Summe der ursprünglichen Reihe.

Konvergenzkriterien Reihen

Weglassen von Anfangsgliedern

Werden endlich viele Anfangsglieder einer Reihe weggelassen oder endlich viele Glieder einer Reihe hinzugefügt, dann ändert sich das Konvergenzverhalten der Reihe nicht.

Multiplikation aller Glieder

Werden alle Glieder einer konvergenten Reihe mit ein und demselben Faktor c multipliziert, dann bleibt die Konvergenz der Reihe ungestört; ihre Summe ist mit dem Faktor c zu multiplizieren.

Gliedweise Addition oder Subtraktion

Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert oder subtrahiert werden. Aus der Konvergenz der Reihen folgt die Konvergenz der Reihensumme.

Notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe

Die Folge der Glieder einer konvergenten Reihe muss gegen Null streben. Diese Bedigung ist nicht hinreichend.

Hauptkriterium ⇔ Partialfolge beschränkt und (a_n) Nullfolge
Notwendig aber nicht hinreichend ⇔ Folge (a_n) konvergiert gegen Null
Hinreichend aber nicht notwendig ⇔ $| a_{n+1} / a_n | < q < 1$ (Quotientenkriterium von d'Alembert)
⇔ $\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$ (Wurzelkriterium von Cauchy)

Vergleichskriterium
Sind (a_k) und (b_k) Folgen mit $b_k > 0$ und $\lim (a_k / b_k) = r \neq 0$, so gilt:
Die Reihe $\Sigma\, a_k$ ist genau dann konvergent, wenn die Reihe $\Sigma\, b_k$ konvergiert.

Verdichtungssatz von Cauchy

Sei $a_n > 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n > 1 und $a_n \to 0$ für n gegen unendlich; d.h. keine negativen Glieder, monoton gegen Null. Dann gilt: $\Sigma\, a_n$ konvergent ⇔ $\Sigma\, 2^n a_n$ konvergent für $n=1,\ldots,\infty$
$2^n a_n$ ist die verdichtete Reihe

Majorantenkriterium … konvergente Majorante existiert

Majorante ... eine Vergleichsreihe, deren Glieder mindestens ebenso groß wie die der untersuchten sind, nennt man Oberreihe oder Majorante.
Minorantenkriterium ... divergente Minorante existiert bei Divergenz
Minorante ... eine Reihe, deren Glieder höchstens ebenso groß sind wie die einer vorgelegten Reihe, wird Unterreihe oder Minorante genannt.
Alternierende Reihe ... konvergiert gegen 0, wenn $| a_n | \geq | a_{n+1} |$ für alle n

Leibnizsches Konvergenzkriterium (Satz von Leibniz)

... Hinreichendes Kriterium
Die alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 +- \ldots +- a_n -+ \ldots$ (alle a_i positiv !) konvergiert, wenn der Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) 0 ist und zusätzlich $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \ldots$ gilt.
Die n.te Partialsumme der Zahlenfolge (a_n) weicht dann von der Summe der Reihe um weniger als $1/(n+1)$ ab.

Summe der Reihe

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Leftrightarrow \text{Grenzwert der Partialsummen}$$

Sind $\Sigma\, a_k = a$ und $\Sigma\, b_k = b$ konvergente Reihen, so gilt

$\Sigma\, (a_k + b_k) = \Sigma\, a_k + \Sigma\, b_k = a + b$ $\qquad$ $\Sigma\, (r * a_k) = r * \Sigma\, a_k = r * a$

Sind $\Sigma\, a_k = a$ und $\Sigma\, b_k = b$ absolut konvergente Reihen, so gilt

$\Sigma\, (a_k * b_k) = \Sigma\, a_k * \Sigma\, b_k = a * b$ (Cauchysche Produktformel)

Beispiele zur Konvergenz von Reihen

Aufgabe: Zu überprüfen ist die Konvergenz der Reihe $1/(1\cdot2) + 1/(2\cdot3) + 1/(3\cdot4) + \ldots + (n\cdot(n+1)) + \ldots$
Lösung:
Mit $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/n+1$ wird
$S_n = 1/(1\cdot2) + 1/(2\cdot3) + 1/(3\cdot4) + \ldots + (n\cdot(n+1)) = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + \ldots + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 + \ldots - 1/n + 1/n - 1/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$
und somit $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, d.h. die Reihe konvergiert gegen 1.

Aufgabe 2: $\Sigma_{n=1}^{\infty} (n+2)/(\ln(n+1)) =$
Für $n \to \infty$ streben Zähler und Nenner gegen Unendlich. Nach der Regel von L'Hopital wird:
$\lim_{x\to\infty} (x+2)/(\ln(x+1)) = \lim_{x\to\infty} (x+2)'/(\ln(x+1))' = \lim_{x\to\infty} 1/(1/(x+1)) = \lim_{x\to\infty} x+1 = \infty$
Damit divergiert auch die Reihe.

Aufgabe 3: $\Sigma_{n=1}^{\infty} n^2/(n^3+2) =$
Ausklammern der höchsten Potenz in a_n ergibt
$a_n = n^2/(n^3+2) = n^3\ 1/n\ /\ (n^3\ (1 + 2/n^3)) = 1/n\ /(1 + 2/n^3)$
und $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/n\ /(1 + 2/n^3) = 0/1 = 0$
Da die Folge Nullfolge ist, kann die Reihe konvergieren, muss aber nicht. Hier zeigt sich, dass diese Reihe divergiert.

Aufgabe 4: $\Sigma_{n=1}^{\infty} (n+1)/(2n+1) =$
Die Zahlenfolge $a_n = (n+1)/(2n+1)$ konvergiert gegen den Grenzwert 1/2. Damit kann die Reihe nicht konvergieren.

Reihen, Beispiele

Aufgabe 1

In einem Lebensmittelgeschäft wird eine Werbeaktion für Ananaskonserven durchgeführt. Hierzu sollen in der Auslage die Konservendosen übereinandergestellt werden. Für die unterste Reihe sind 15 Dosen vorgesehen. Jede darüber liegende Reihe soll eine Dose weniger enthalten. Wie viel Dosen werden für den Aufbau benötigt?
Lösung: $\qquad (a_n) = (15, 14, 13, \ldots, 1) \dashrightarrow s_{15} = 120$

Aufgabe 2

Eine Uhr zeigt die Viertelstunden mit einem Schlag, die halben Stunden mit zwei Schlägen, die Dreiviertelstunden mit drei Schlägen und die vollen Stunden mit vier Schlägen an. Darüber hinaus gibt sie die entsprechende Zahl der vollen Stunden an. Wie oft schlägt die Uhr während eines Tages?
Lösung: $\qquad s_n = (1+2+3+4)*24 + (1+2+3+\ldots+12)*2 = 396$

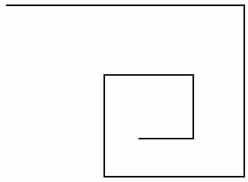
Aufgabe 3

In einem rechtwinkligen Dreieck bilden die Seitenlängen eine arithmetische Folge. Wie groß sind die Seitenlängen, wenn eine Kathete 12 cm lang ist?
Lösung: Die größere Kathete sei 12 cm, die kleinere 12 - d cm lang. Dann ist die Hypotenuse 12 + d cm lang.

$(12+d)^2 = 12^2 + (12-d)^2$ --> d = 3 mit Dreiecksseitenlängen 9, 12 und 15 cm

Ist die kleinere Kathete 12 cm lang, so wird für die Hypotenuse 12+2d. Die quadratische Gleichung ergibt $d_1 = 4$ und $d_2 = -12$, wobei die zweite Lösung entfällt. Die Seitenlängen sind dann 12, 16 und 20 cm.

Aufgabe 4
Ein Schuldner will seine Schuld von 6000 € in Monatsraten zurückzahlen. Die ersten Rate soll 300 €, jede folgende 10 € mehr betragen. Wie viel Ratenzahlungen sind zu leisten und wie viel € beträgt die letzte Rate?
Lösung: $s_n = n/2\ [2\ a_1 + (n-1)\ d\ ]$
führt auf die quadratische Gleichung $n^2 + 59\ n + 1200 = 0$
mit den Lösungen $n_1 = 16$ und $n_2 = -75$, wobei n_2 entfällt. Die letzte Rate $a_{16} = 450$ €.



Reihen, Beispiele (2)
1) Berechnen Sie die folgenden Summen:
a) 1 + 2+ 3 +…+100   b) 250 + 244+ 238 + …+ 16
c) 6 + 15 + 24 +…+177   d) 3 + 6+ 12+ 24+ …+ 1536
2) Wie viele Glieder der …
a) arithmetischen Folge 6, 12, 18, … muss man nehmen, damit ihre Summe größer als 1000
b) geometrischen Folge 6, 12, 24, … muss man nehmen, damit ihre Summe größer als 10000 ist?

3) Wie groß ist die Summe aller …
a) durch 5 teilbaren dreistelligen Zahlen?
b) Potenzen von 2 (mit natürlichem Exponenten), die kleiner als 1000 sind?

4) Eine Spirale bestehe aus rechtwinklig aneinandergereihten Geradenstücken. Das erste Geradenstück hat eine Länge von 1 m. Jedes Geradenstück ist halb so lang wie das vorhergehende.
Bestimmen Sie die Länge der Spirale, wenn sie aus 10 Geradenstücken zusammengesetzt ist.

5) Berechnen Sie die Summe der folgenden geometrischen Reihen:
a) 2 + 2/3 + …   b) 2 - 2/3 + …
c) 1 + 0,01 + …   d) 1 - 0,99 + …

Lösungen: 1 a) 5050 , b) 5320 , c) 1830 , d) 3069
2 a) n = 18 , b) n = 12
3 a) 1975500 , b) 1022
4 l = 24.58 m
5 a) 3 , b) 3/2 , c) 100/99 , d) 100/199
»Zahlenfolgen

Teleskopreihe
Anfang des 17.Jahrhunderts untersuchte der italienische Mathematiker Pietro Mengoli (1625-1686) eine spezielle Klasse berechenbarer Reihen: die Teleskopreihen.
Der Name bezieht sich dabei nicht auf die optischen Eigenschaften eines Teleskops, sondern spielt auf die Ausziehmechanik an. So wie ein Teleskop beim Zusammenschieben klein und handlich wird, fällt eine Teleskopreihe in sich zusammen, da aufeinander folgende Glieder Terme sind, die sich gegenseitig aufheben.
Die Teilsummen einer Teleskopreihe werden Teleskopsummen genannt.
Beispiele:

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\ 2/(k\ (k+1)) = 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + \ldots = 2\ (1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + \ldots) =$$
$$= 2\ ((1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + (1/4 - 1/5) + \ldots) = 2$$

Die spezielle Reihe $\Sigma_{k=1}^{\infty}\ k\ q^{k-1}$ ist ebenfalls eine Teleskopreihe.

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\ k\ q^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots =$$
$$= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) + (q + q^2 + q^3 + \ldots) + (q^2 + q^3 + \ldots) + \ldots =$$
$$= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) + q\ (1 + q + q^2 + \ldots) + q^2\ (1 + q + \ldots) + \ldots =$$
$$= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)\ (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

Da aber auch $(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots)\ (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$ gilt, wird

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\ k\ q^{k-1} = 1/\ (1-q)^2$$

Vorsicht ist bei Umgruppierung von Termen geboten. Diese ist im Allgemeinen nicht korrekt.

$$0 = \Sigma_{k=1}^{\infty}\ 0 = \Sigma_{k=1}^{\infty}\ (1 - 1) = 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty}\ (1 - 1) = 1$$

führt zu einem Widerspruch!

Wurzelreihen
Quadratwurzeln einiger natürlicher Zahlen können nach dem Satz von Engel in unendliche Reihen entwickelt werden.
Ist q eine natürliche Zahl größer 1 gilt $\sqrt{((q+1)\ /\ (q-1))} = k\ \Pi_{n=0}^{\infty}\ (1+1/q_n)$
mit $q_0 = q$ und $q_{n+1} = 2\ q_n^2 - 1$. k ist eine natürliche Zahl.

Im Allgemeinen ist der Quotient (q+1)/(q-1), bis auf wenige Ausnahmen nicht natürlich. Durch Multiplikation der Gleichung mit q-1 erhält man für die Wurzel einer natürlichen Zahl eine Reihendarstellung.

Beispiele:

für q = 3:	$\sqrt{2} = (1+1/3)\ (1+1/17)\ (1+1/577)\ (1+1/665857) \ldots$
für q = 2:	$\sqrt{3} = (1+1/2)\ (1+1/7)\ (1+1/97)\ (1+1/18817) \ldots$
für q = 5:	$\sqrt{6} = 2\ (1+1/5)\ (1+1/49)\ (1+1/4801)\ (1+1/46099201) \ldots$
für q = 7:	$\sqrt{12} = 3\ (1+1/7)\ (1+1/97)\ (1+1/18817)\ (1+1/708158977) \ldots$
für q = 4:	$\sqrt{15} = 3\ (1+1/4)\ (1+1/31)\ (1+1/1921)\ (1+1/7380481) \ldots$
für q = 9:	$\sqrt{20} = 4\ (1+1/9)\ (1+1/161)\ (1+1/51841)\ (1+1/5374978561) \ldots$
für q = 11:	$\sqrt{30} = 5\ (1+1/11)\ (1+1/241)\ (1+1/116161)\ (1+1/26986755841) \ldots$
für q = 6:	$\sqrt{35} = 5\ (1+1/6)\ (1+1/71)\ (1+1/10081)\ (1+1/203253121) \ldots$
für q = 8:	$\sqrt{63} = 7\ (1+1/8)\ (1+1/127)\ (1+1/32257)\ (1+1/2081028097) \ldots$
für q = 10:	$\sqrt{99} = 9\ (1+1/10)\ (1+1/199)\ (1+1/79201)\ (1+1/12545596801) \ldots$

Positive Reihen

Eine Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt positiv, wenn für alle Glieder der Reihe gilt: $a_n \geq 0$. Die Konvergenzkriterien lassen sich für positive Reihen einfacher formulieren.

Monotoniekriterium

Eine positive Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Partialsummen nach oben beschränkt sind. Für divergente Reihen bedeutet dies, dass die Folge der Partialsummen über alle Maßen wächst.

Nachweis: Für positive Reihen gilt für die Folge der Partialsummen stets $s_{n+1} \geq s_n$, d.h. sie bilden eine monoton wachsende Folge. Diese Folge ist konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Vergleichskriterium für positive Reihen

Es seien $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei positive Reihen und es gelte $a_n \leq b_n$ ab einem festen n > N. Dann gilt:
Wenn $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist, so konvergiert auch $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$.
Wenn $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, so ist auch $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Wurzelkriterium

Sei $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ eine positive Reihe und es gelte $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ für ein konstantes q ab einem festen n > N. Dann ist die Reihe konvergent.
Weiterhin gilt: wenn $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$ ist, dann konvergiert die Reihe für a < 1 und divergiert für a > 1.

Quotientenkriterium, d'Alembertsches Kriterium

Sei $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ eine positive Reihe und es gelte $a_{n+1} / a_n \leq q < 1$ für ein konstantes q ab einem festen n > N. Dann ist die Reihe konvergent.
Weiterhin gilt: wenn $\lim a_{n+1} / a_n = a$ ist, dann konvergiert die Reihe für a < 1 und divergiert für a > 1.

Teleskopsummenkriterium, Verdichtungskriterium

Sei $\Sigma\, a_n$ eine positive Reihe mit monoton fallenden Gliedern $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Dann ist $\Sigma\, a_n$ konvergent genau dann, wenn $\Sigma\, 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Nachweis: Es ist $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ und sei $t_k = a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \ldots + 2^k a_{2^k}$.
Für $n \leq 2^k$ gilt $s_n \leq t_k$, denn

$$s \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k$$

Für $2^k \leq n$ gilt $s_n \leq 1/2\ t_k$, denn

$$s \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq a_1/2 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = 1/2\ t_k$$

Somit ist (s_n) konvergent, genau dann wenn (t_k) konvergent ist.

Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die aus den Absolutbeträgen der Glieder gebildete Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.
Ist die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent. D.h., aus der absoluten Konvergenz einer Reihe kann auf ihre Konvergenz geschlossen werden.

Nachweis: Zum Beweis nutzt man das Cauchykriterium. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein natürliches n mit

$$|\ \Sigma_{k=m+1}^{n} a_k\ | \leq \Sigma_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \varepsilon$$

für $n > m > n_\varepsilon$.
Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht. Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind; z.B. die alternierende harmonische Reihe die konvergiert, die aus den Absolutbeträgen gebildete harmonische Reihe ist jedoch divergent.

Beispiel: Die Reihe $1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} x_n/n!$ ist für $x \geq 0$ konvergent. Damit ist sie auch absolut konvergent und somit für alle reellen x konvergent.

Alternierende Reihe
Eine Reihe heißt alternierend, wenn sich dass Vorzeichen ihrer Glieder abwechselt. Alternierende Reihen kann man in der Form $\Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^k a^k$ schreiben.
Für alternierende Reihen gilt das Leibnizkriterium:
Wenn die Glieder a_k der alternierende Reihe eine monoton fallende Nullfolge bilden, so ist die Reihe konvergent.

Operationen mit Reihen
Es seien
$$s_1 = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$
$$s_2 = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots$$
$$s_3 = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$$
dann gilt für die Koeffizienten der Reihe s_3:

	c_1	c_2	c_3	c_4
$s_3 = 1/s_1$	$-a_1$	$a_1^2-a_2$	$2a_1a_2-a_3-a_1^3$	$2a_1a_3-3a_1^2a_2-a_4+a_2^2+a_1^4$
$s_3 = 1/s_1^2$	$-2a_1$	$3a_1^2-2a_2$	$6a_1a_2-2a_3-4a_1^3$	$6a_1a_3+3a_2^2-2a_4-12a_1^2a_2+5a_1^4$
$s_3 = \sqrt{s_1}$	$a_1/2$	$a_2/2-a_1^2/8$	$a_3/2-a_1a_2/4+a_1^3/16$	$a_4/2-a_1a_3/4-a_2^2/8+3/16a_1^2a_2-5/128a_1^4$
$s_3 =1/\sqrt{s_1}$	$-a_1/2$	$3/8a_1^2-a_2/2$	$3/4a_1a_2-a_3/2-5/16a_1^3$	
$s_3 = s_1s_2$	a_1+b_1	$b_2+a_1b_1+a_2$	$b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3$	$b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4$
$s_3 = s_1/s_2$	a_1-b_1	$a_2-(b_1c_1+b_2)$	$a_3-(b_1c_2+b_2c_1+b_3)$	$a_4-(b_1c_3+b_2c_2+b_3c_1+b_4)$
$s_3 = \exp(s_1-1)$	a_1	$a_2+a_1^2/2$	$a_3+a_1a_2+a_1^2/6$	$a_4+a_1a_3+a_2^2/2+a_2a_1^3/2+a_1^4/24$
$s_3 = 1+\ln s_1$	a_1	$a_2-a_1c_1/2$	$a_3-(a_2c_1+2a_1c_2)/3$	$a_4-(a_3c_1+2a_2c_2+3a_1c_3)/4$

Inversion einer Reihe
Ist $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + \dots$
gegeben, so kann x als Reihe von y dargestellt werden
$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \dots$$
mit $aA = 1$ $\quad a^3B = -b$
$a^5C = 2b^2 - ac$ $\quad a^7D = 5abc - a^2d + 5b^3$
$a^9E = 6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c$
$a^{11}F = 7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2bc^2 - 42b^5 - 28a^2b^2d$
$a^{13}G = 8a^4bf +8a^4ce +4a^4d^2 -120a^2b^3d +180a^2b^2c^2 +132b^6 -a^5g -36a^3b^2e -72a^3bcd -12a^3c^3 -330ab^4c$

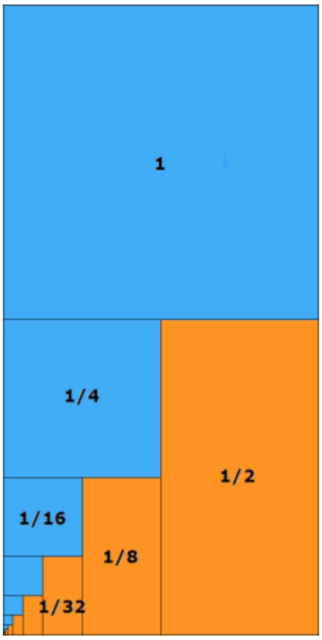
Arithmetische Reihe
$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd) = (n+1)/2\ (a + (a +dn))$$
Die arithmetische Reihe ist dadurch charakterisiert, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.
Die Summe einer arithmetischen Reihe ist gleich der Summe aus dem ersten und letzten Glied multipliziert mit der halben Anzahl der Reihenglieder.
Mit Hilfe des Summensymbols wird
$$\Sigma_{k=0}^{n} (a+kd) = (n+1)/2\ (2a + nd)$$
Die arithmetische Reihe findet man bereits auf Texten aus altbabylonischer und altägyptischer Zeit, etwa um 2000 v.u.Z. Die Glieder der endlichen arithmetischen Reihe bilden die Partialsummenfolge der zugehörigen arithmetischen Zahlenfolge.
Für $d \neq 0$ divergiert die unendliche arithmetische Reihe.

Als Anektode wird immer wieder auf den jungen Gauß verwiesen, der die Summenformel für d = 1 als Schüler entdeckte $\Sigma_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$
und damit die Summe der Zahlen von 1 bis 100 korrekt mit 5050 ermittelte.

Geometrische Reihe
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_1q^{i-1} = a_1/(1-q), \text{ für } |q| < 1$$

Unendliche Reihen
$1 + 1/2^a + 1/3^a + 1/4^a + \dots$ ist genau dann konvergent, wenn $a > 1$
Diese Reihe wird auch harmonische Reihe der Ordnung a genannt
$1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots = e \approx 2,71828182845$
$1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + - \dots = 1/e \approx 0,367879441171$
$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + - \dots = \ln 2 \approx 0,693147180559$; alternierende harmonische Reihe
$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$
$1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + - \dots = 2/3$ alternierende geometrische Reihe
$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + - \dots = \pi/4 \approx 0,785398163397$; Leibniz-Reihe
$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \pi^2 / 6 \approx 1,64493406684$

$1 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + - \dots = \pi^2 / 12 \approx 0{,}822467033424$
$1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2 / 8 \approx 1{,}23370055013$
$1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots = \pi^4 / 90 \approx 1{,}08232323371$
$1 - 1/2^4 + 1/3^4 - 1/4^4 + - \dots = 7\pi^4 / 720 \approx 0{,}135290404213$
$1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \dots = \pi^4 / 96 \approx 1{,}01467803160$
$1 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + \dots = \pi^6 / 945 \approx 1{,}01734306198$
$1 + 1/2^8 + 1/3^8 + 1/4^8 + \dots = \pi^8 / 9450 \approx 1{,}00407735619$
$1/(1\cdot2) + 1/(2\cdot3) + 1/(3\cdot4) + \dots = 1$
$1/(1\cdot3) + 1/(3\cdot5) + 1/(5\cdot7) + \dots = 1/2$
$1/(1\cdot3) + 1/(2\cdot4) + 1/(3\cdot5) + \dots = 3/4$
$1/(3\cdot5) + 1/(7\cdot9) + 1/(11\cdot13) + \dots = 1/2 - \pi/8 \approx 0{,}107300918301$
$1/(1\cdot2\cdot3) + 1/(2\cdot3\cdot4) + 1/(3\cdot4\cdot5) + \dots = 1/4$
$1/(1\cdot2\cdot3\cdot4) + 1/(2\cdot3\cdot4\cdot5) + 1/(3\cdot4\cdot5\cdot6) + \dots = 1/18$
Summe $1/(n(n+1)\dots(n+p)) + \dots = 1/(p\,p!)$



Geometrische Reihe, Beispiele

Eine spezielle, oft auftretende geometrische Reihe ist die unendliche Summe der reziproken Zweierpotenzen.

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots$$

Mit der Gleichung $S = \Sigma_{i=1}^{\infty} a_1q^{i-1} = a_1/(1-q)$, für $|q| < 1$
und $a_1 = 1$, $q = 1/2$ wird $S = 2$.
Weiterer Nachweis:

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots$$

Multiplizieren mit 2 ergibt

$$2S = 2 + 1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^{n-1} + \dots$$

Die Differenz beider Gleichungen führt zu

$$S = 2$$

Der Wert dieser Reihe kann auch geometrische veranschaulicht werden.
An ein Quadrat der Seitenlänge 1 wird ein Rechteck mit dem Seitenlängen 1 und 1/2 angefügt, danach ein Quadrat der Fläche 1/4 , usw... (Abbildung)
Insgesamt überdecken die Quadrate und Rechtecke dann ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 2.

Geometrische Reihe, Beispiele

Aufgabe 1

Das vierte Glied einer geometrischen Folge ist $a_4 = 135$, das siebente Glied $a_7 = 3645$. Wie heißt die Folge (a_n) und wie groß ist die Summe s_7 der Reihe?
Lösung: $a_4 = a_1 q^3 \text{ --> } a_1 = a_4/q^3$ $\quad a_7 = a_1 q^6 \text{ --> } a_1 = a_7/q^6$
Gleichsetzen ergibt $q = \sqrt[3]{27}$ --> $q = 3$ und somit $a_1 = 5$
$(a_n) = (5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645, \dots)$ $\quad s_7 = a_1 (q^7 - 1)/(q - 1) = 5465$

Aufgabe 2

In einer geometrischen Folge stehen das zweite und fünfte Glied im Verhältnis 1:8, das dritte und vierte Glied bilden die Summe 108. Bestimmen Sie die Folge und berechnen Sie die Summe der ersten sechs Glieder!
Gegeben: $a_2 / a_5 = 1/8$ und $a_3 + a_4 = 108$
Lösung: $a_2 / a_5 = (a_1 q)/(a_1 q^4) = 1/8 \text{ --> } q = 2$ $\quad a_3\ a_4 = 108 = a_1 (q^2 + q^3)$
$a_1 = 108 / (q^2 + q^3) = 9$, d.h. $(a_n) = (9, 18, 36, 72, \dots)$ $\quad s_6 = 567$

Aufgabe 3

Das zweite Glied einer geometrischen Folge ist um 14 größer als das erste Glied, das vierte Glied um 126 größer als das dritte. Wie heißt die Folge und wie groß ist die Summe der ersten fünf Glieder? (q>0)
Lösung: $a_2 = a_1\ 14 \text{ --> } a_1 = 14 / (q-1)$ $\quad a_4 = a_3\ 126 \text{ --> } a_1 = 126 / (q^3 - q^2)$
Gleichsetzen ergibt $(q^3 - q^2)/(q - 1) = q^2 = 9 \text{ --> } q = 3$ $\quad$ weiter $a_1 = 7$ und $s_5 = 847$

Aufgabe 4

Eine Rakete steigt in der ersten Sekunde 2,5 m, in der zweiten 5 m, in der dritten 10 m usw. Nach 16 Sekunden hört die Beschleunigung auf. Welche Geschwindigkeit hat die Rakete dann erreicht und welche Strecke hat sie bis dahin zurückgelegt?
Lösung: $a_2 = a_1 q \text{ --> } q = 2$ $\quad a_{16} = a_1 q^{15} = 81920$, d.h. Geschwindigkeit 81,920 km/s
$s_{16} = a_1 (q^n - 1)/(q - 1) = 163837{,}5$, d.h. zurückgelegte Strecke 163,838 km

Aufgabe 5

Der Erfinder des Schachspiels soll sich als Belohnung vom indischen König für das erste der 64 Felder ein Weizenkorn, für das zweite zwei Körner, für das dritte vier Körner usw. erbeten haben.
a) Wie viele Weizenkörner hätte er bekommen müssen?
b) Wieviel t wiegt die Gesamtmenge, wenn 20000 Körner 1 kg wiegen?

c) Wie viele Menschen könnte man ihr Leben lang ernähren, wenn man annimmt, dass ein Mensch im Laufe seines Lebens 20 t Weizen verbraucht?
Lösung: $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$ --> $s_{64} = 18{,}447 * 10^{18}$, etwa 18,4 Trillionen Körner
--> $x = 920 * 10^9$, d.h. etwa 920 Milliarden Tonnen
--> $x = 46 * 10^9$, d.h. etwa 46 Milliarden Menschen
Verwendet man statt Weizenkörner Reiskörner, so ergeben sich 460 Milliarden Tonnen; 40 Reiskörner wiegen 1 Gramm. Dies entspricht rund 850 Weltjahresproduktionen.

Im Liber abaci fragt Fibonacci: Wie viele Schiffe könnten damit gefüllt werden, wenn jedes Schiff 500 pisanische Scheffel tragen kann, die alle je 24 Sechter wiegen, wobei ein Sechter sich aus 140 Pfund zusammensetzt, dieses wiederum aus 12 Unzen, die ihrerseits je 25 Denare wiegen, denen wiederum je 24 Getreidekörner entsprechen?
Auch hier ist das Resultat erstaunlich: Es würden 1 Milliarde 525 Millionen 28 Tausend 445 Schiffe beladen; "eine Zahl die offensichtlich unzählbar und beinahe unendlich ist".

Schachspiel und Reiskörner

Eine Version der Legende um die Erfindung des Schachspiels ist:

Ein König namens Sher Khan war von dem neuen Spiel so begeistert, dass er seiner Armee befahl nach dem Erfinder des Spiels zu suchen. Sie brachten den Erfinder, einen Mathe-Lehrer, des Spiels vor den König.
"Ich möchte dich für deine wundervolle Erfindung belohnen", begrüßte der König den Mann.
Der Mathe-Lehrer verbeugte sich. "Ich bin reich und mächtig genug", fuhr der König fort, "dir auch den ausgefallensten Wunsch zu erfüllen. Sag' mir nur, was du haben möchtest und ich erfülle es dir."
Buddhiram blieb still.
"Sei nicht so scheu", ermutigte ihn der König. "Sag nur was du möchtest, ich werde an Nichts sparen dir den Wunsch zu erfüllen".
"Eure Freundlichkeit kennt keine Grenzen", erwiderte der Mathe-Lehrer, "aber gebt mir bitte etwas Zeit meine Antwort zu bedenken. Morgen, wenn ich darüber nachgedacht habe, werde ich euch meinen Wunsch mitteilen."
Am nächsten Tag überraschte Buddhiram den König mit einem sehr bescheidenen Wunsch.
"Herr", sagte er, "ich möchte auf dem ersten Quadrat des Schachbretts ein Reiskorn haben."
"Ein gewöhnliches Reiskorn ?" Der König traute seinen Ohren nicht.
"Ja, Herr, ein Reiskorn auf dem ersten Feld, zwei auf dem zweiten, vier auf dem dritten, acht auf dem vierten, sechzehn auf dem fünften??"
"Es reicht", rief der König verärgert. Du sollst deine Reiskörner für alle 64 Quadrate des Schachbretts haben, so wie du es wünschst. Ich werde jeden Tag die Anzahl der Körner vom Vortag verdoppeln lassen. Aber wisse, dein Wunsch ist meine Großzügigkeit nicht wert. Mit dem Wunsch nach so einer geringen Belohnung hast du mir deine Missachtung gezeigt. Gerade als Lehrer solltest du der Freundlichkeit deines Königs mehr Respekt erweisen. Geh! Meine Diener werden dir deinen Sack Reiskörner bringen."
Fortsetzung siehe

"Buddhiram lächelte und ging hinaus. Am Tor wartete er auf seine Belohnung.
Beim Abendessen erinnerte sich der König an Buddhiram und erkundigte sich ob der "tollkühne" Mathe-Lehrer seine "geizige" Belohnung bekommen habe.
"Herr", sagte der Chef-Hof-Mathematiker, "wir haben seit heute morgen die Anzahl der Reiskörner berechnet, die Buddhiram als Belohnung möchte. Die Anzahl ist tatsächlich außerordentlich hoch ??.."
"Wieviel außerordentlich", unterbrach ihn der König ungeduldig. "Meine Getreidespeicher können das mit Leichtigkeit leisten. Die Belohnung ist versprochen worden und muss bezahlt werden."
"Es steht nicht in ihrer Macht, Herr, den Wunsch des Buddhiram zu erfüllen. Ihre Getreidespeicher enthalten nicht genug Reiskörner. Selbst im ganzen Königreich gibt es nicht genug Reiskörner, ja nicht einmal auf der ganzen Welt. Und wenn ihr euer Wort halten wollt, dann müsst ihr alles Land der Welt kaufen und es in Reisfelder verwandeln lassen, ihr müsst die Seen und Ozeane trocken legen und alles Eis im Norden schmelzen lassen. Wenn ihr dann all dieses Land mit Reis besäen lasst, dann und nur dann werdet ihr vielleicht genug Reis haben um den Wunsch des Buddhiram zu erüllen."
Der König war sehr beeindruckt und eingeschüchtert. "nenne diese gigantische Zahl", sagte er nachdenklich.
"Es sind 18 446 744 073 709 551 615 Reiskörner", sagte der Mathematiker.

Auswertung: In einen cm³ passen 50 Reiskörner (5 mm lang, 2 mm breit). Damit ergibt sich als Gesamtvolumen 369 km³.
Ein Reiskorn wiegt etwa 0,03 g. Buddhiram hat somit 553500 Millionen t Reis zu bekommen, das etwa 1000-fache der jährlichen Weltreisernte ist.
Manche Reisfelder liefern 8 t Reis pro Hektar andere nur 3 t. Mit dem Mittelwert 5,5 t/ha benötigt man zur Herstellung 1006363636 km², die zweifache Größe der Erdoberfläche.

Geometrische Reihe, Beispiele

Aufgabe 6

Ein Ball fällt aus 121,5 m Höhe. Nach jedem Aufschlag steigt er auf 2/3 der vorhergehenden Höhe. Welche Höhe erreicht er nach dem 5.Aufschlag und welche Strecke hat er bis zum 6.Aufschlag zurückgelegt?

Lösung: $a_1 = 121{,}5$; $q = 2/3$; $n = 6$

$a_6 = 16$, nach dem 5.Aufschlag steigt der Ball 16 m

außer der ersten Fallstrecke wird jede Strecke zweimal zurückgelegt, d.h.

$s_n = 121{,}5 + a_2 (1 - q^5)/(1 - q) * 2 = 543{,}5$

Der Ball legt eine Strecke von 543,5 m zurück.

Aufgabe 7

In ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 5 cm wird ein zweites Quadrat dadurch einbeschrieben, dass man die Mittelpunkte der Seiten des ersten Quadrates miteinander verbindet. In das so entstandene Quadrat wird in gleicher Weise wieder ein Quadrat einbeschrieben usw. Berechne die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate! Berechne die Summe der Umfänge aller Quadrate!

Lösung: $s_n = 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + \dots$ $\quad q = 0{,}5$

$s = 25/(1-0{,}5) = 50$ -->Die Summe aller Flächen ist 50 cm².

$s_n = 4\sqrt{25} + 4\sqrt{12{,}5} + 4\sqrt{6{,}25} + \dots$ $\quad q = \sqrt{0{,}5}$

$s = 25/(1-\sqrt{0{,}5}) = 68{,}284\dots$ -->Die Summe aller Umfänge der Quadrate ist 68,3 cm.

Aufgabe 8

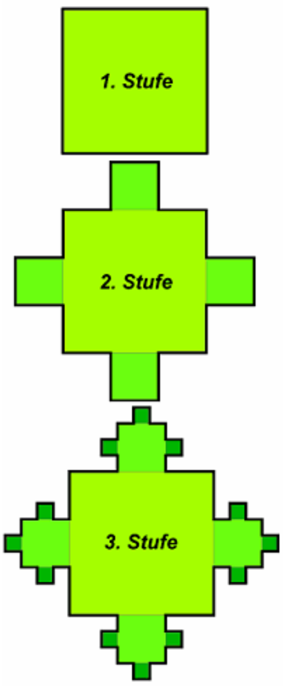
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a = 3 cm wird ein zweites gleichseitiges Dreieck dadurch einbeschrieben, dass man die Mittelpunkte der Seiten des ersten Dreiecks miteinander verbindet. In das so entstandene Dreieck wird in gleicher Weise wieder ein Dreieck einbeschrieben usw. Berechne die Summe aller Umfänge! Berechne die Summe aller Flächeninhalte!

Lösung: $s_n = 9 + 4{,}5 + 2{,}25 + \dots$; $q = 0{,}5$

$s = 9/(1-0{,}5) = 18$ --> Die Summe der Umfänge ist 18 cm.

$s_n = 3^2/4\ \sqrt{3} + 1{,}5^2/4\ \sqrt{3} + 0{,}75^2/4\ \sqrt{3} + \dots$; $q = 0{,}25$

$s = 9\ \sqrt{3}/[4*(1-0{,}25)] = 5{,}196$ --> Die Summe der Flächen ist 5,2 cm².



Quadratpflanze

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Aus diesem Quadrat entwickelt sich eine "Quadratpflanze".
Bei jedem Schritt kommen an jeder freien Quadratseite der vorigen Stufe neue Quadrate hinzu, die jedoch nur noch ein 1/n der vorigen Kantenlänge besitzen.
Gesucht ist der Flächeninhalt der Quadratpflanze der k.Stufe, sowie dessen Grenzwert.

Auf das Quadrat der 1.Stufe werden 4 Quadrate der Seitenlänge a/n aufgesetzt, auf diese vier drei Quadrate der Länge a/n², darauf wieder neun Quadrate der Länge a/n³, usw. $\quad A = a^2 + 4\ (a^2/n^2 + 3\ a^2/n^4 + 9\ a^2/n^6 + \dots)$

Der Term in der Klammer ist eine geometrische Reihe mit dem ersten Glied a²/n² und dem Quotienten 3/n², d.h.

$$A = a^2 + 4a^2 / (n^2-3) - 4a^2\ 3^{k-1} / (n^{2k-2}\ (n^2-3))$$

Im Grenzwert für $k\to\infty$ und $n^2 > 3$ wird

$$A_\infty = a^2\ (n^2+1) / (n^2-3)$$

Für $n \le \sqrt{3}$ divergiert der Flächeninhalt der Quadratpflanze.
Für verschiedene ganzzahlige n ergeben sich die Grenzwerte

n	A_∞
2	5 a²
3	5/3 a²
4	17/13 a²
5	13/11 a²

Hat zum Beispiel das Ausgangsquadrat die Seitenlänge a = 27 cm und werden Quadrate mit 1/3 a aufgesetzt, so strebt die Quadratpflanze gegen einen Flächeninhalt von 1215 cm². Der Umfang des Gebildes strebt aber gegen unendlich!

Gesucht ist der Umfang der Quadratpflanze der k.Stufe, sowie dessen Grenzwerte.
zum Flächeninhalt siehe Quadratpflanze
Auf das Quadrat der 1.Stufe werden 4 Quadrate der Seitenlänge a/n aufgesetzt, wobei der Umfang um 2a/n zunimmt. Jedes der vier Quadrate wird mit 3 Quadraten erweitert, mit einer Zunahme des Umfangs von je 2a/n², usw.

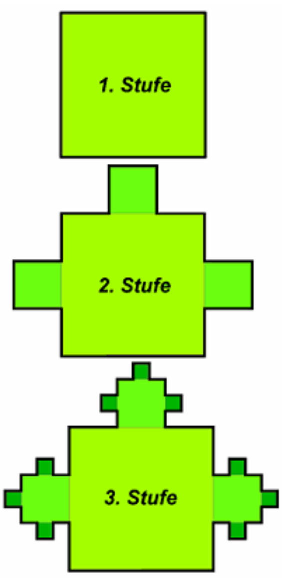
$$u = 4a + 4\ (2a/n + 3 \cdot 2a/n^2 + 9 \cdot 2a/n^3 + \dots)$$

Der Term in der Klammer ist eine geometrische Reihe mit dem ersten Glied 2a/n und dem Quotienten 3/n, d.h. $\quad u = a + 8a\ (1-(n/3)^{-k})/\ (n-3) - 8a\ 3^{k-1}/n^k$

Im Grenzwert für $k \to \infty$ und $n > 3$ wird $u_\infty = 4a\,(n-1) / (n-3)$
Für $n \leq 3$ divergiert der Umfang der Quadratpflanze.
Für verschiedene ganzzahlige n ergeben sich die Grenzwerte

n	u_∞
4	12 a
5	8 a
10	36/7 a
100	396/97 a

Hat zum Beispiel das Ausgangsquadrat die Seitenlänge a = 27 cm und werden Quadrate mit 1/3 a aufgesetzt, so strebt die Quadratpflanze gegen einen Flächeninhalt von 1215 cm², wobei der Umfang des Gebildes über alle Grenzen strebt.



Quadratmännchen
Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Aus diesem Quadrat entwickelt sich ein "Quadratmännchen" mit einem "Kopf" und zwei "Armen".
Bei jedem Schritt kommen an jeder freien Quadratseite der vorigen Stufe neue Quadrate hinzu, die jedoch nur noch ein 1/n der vorigen Kantenlänge besitzen.
Dabei wird die untere Seite des Ausgangsquadrats nicht verändert.
Gesucht ist der Flächeninhalt des Quadratmännchens der k.Stufe, sowie dessen Grenzwert.

Auf das Quadrat der 1.Stufe werden 3 Quadrate der Seitenlänge a/n aufgesetzt, auf diese drei je drei Quadrate der Länge a/n², darauf wieder neun Quadrate der Länge a/n³, usw.

$$A = a^2 + 3\,(a^2/n^2 + 3\,a^2/n^4 + 9\,a^2/n^6 + \dots)$$

Der Term in der Klammer ist eine geometrische Reihe mit dem ersten Glied a^2/n^2 und dem Quotienten $3/n^2$, d.h.

$$A = a^2 + 3a^2 / (n^2-3) - a^2\, 3^k / (n^{2k-2}\,(n^2-3))$$

Im Grenzwert für $k \to \infty$ und $n^2 > 3$ wird

$$A_\infty = a^2\, n^2 / (n^2-3)$$

Für $n \leq \sqrt{3}$ divergiert der Flächeninhalt des Quadratmännchens.
Für verschiedene ganzzahlige n ergeben sich die Grenzwerte

n	A_∞
2	4 a²
3	3/2 a²
4	16/13 a²
5	25/22 a²

Für den Grenzwert des Umfangs erhält man analog $u_\infty = a\,(n+3) / (n-3)$

Eulersche Reihe, Eulersche Summe
1644 wurde das Basel-Problem von Pietro Mengoli gestellt und 1735 von Leonhard Euler gelöst. 1859 verallgemeinerte Riemann die Aufgabe mit Hilfe der Zetafunktion zur berühmten, bis heute ungelösten Riemannschen Vermutung.
Das Basel-Problem besteht in der Bestimmung der korrekten Summe der unendlichen Reihe der reziproken Quadratzahlen

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/n^2 = 1/1^2 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2 + \dots$$

Die Summe der Reihe ist näherungsweise 1,64493406684872643630… Euler fand den exakten Wert zu $\pi^2/6$. Allerdings entdeckte schon 1675 James Gregory, ohne Beweis, diese Summe.

North-Paradoxon
In den 1970er Jahren entdeckte der Kanadier Roy D.North ein überraschendes Phänomen.
Addiert man 1 Million Glieder der Eulerschen Reihe erhält man als Summe

1,64493306684872653

Wie zu erwarten ist die 6.Stelle nicht korrekt. Verblüffend ist aber, dass die 7., 8., …, 12. Stelle korrekt sind. Im Mittel tritt ein Fehler an sechster, zwölfter, achtzehnter usw. Stelle auf. Der Beweis gelang den Brüdern Borwein.

Eulersche Reihe, Nachweis
1735 gelang Leonhard Euler der Nachweis von

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/n^2 = 1/1^2 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2 + \dots = \pi^2/6$$

Ausgangspunkt war die von Euler gefundene Potenzreihe

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! +- \dots$$

Hätte diese Reihe nur endlich viele Glieder, so konnte sie als Polynom mit den Nullstellen α_1, α_2, … in der Form $P(x) = (1 - x/\alpha_1)(1 - x/\alpha_2) \dots (1-x/\alpha_n)$
ausgedrückt werden.
Euler setzte beide Terme gleich und für x = 0, d.h. P(0) = 1:

$$1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \dots = (1 - x/\pi)(1 + x/\pi)\,(1 - x/(2\pi))(1 + x/(2\pi)) \dots$$

Multipliziert man die rechte Seite aus, sortiert die Potenzen und interessiert sich nur für Terme von x^2, so wird

$$(1 - x^2/\pi^2)(1 - x^2/(4\pi^2))(1 - x^2/(9\pi^2)) \ldots = 1 - (1/\pi^2 + 1/(4\pi^2) + 1/(9\pi^2) + \ldots)\, x^2 + \ldots$$

Da der Koeffizient vor x^2 stets gleich sein müssen, ergibt sich

$$-1/3! = (1/\pi^2 + 1/(4\pi^2) + 1/(9\pi^2) + \ldots)$$

Durch relativ einfaches Umstellen wird

$$1/1^2 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2 + \ldots = \pi^2/6$$

Anmerkung: Der 28jährige Euler verbrachte mit dieser Herleitung eine Glanzleistung.
Erst viele Jahre später konnte exakt nachgewiesen werden, dass dieses Vorgehen mathematisch korrekt ist.

Eulersche Reihe 2.Grades

Eng verbunden mit der Eulerschen Reihe

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/n^2 = 1/1^2 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2 + \ldots = \pi^2/6$$

sind Fragestellungen nach ähnlichen Reihen.
Geht man von Eulers Herleitung aus und nutzt statt der Entwicklung der Sinus-Reihe die Kosinus-Reihe, so ergibt sich

$$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! +- \ldots$$

$$p(x) = (1 - x/(\pi/2))\,(1 + x/(\pi/2))\,(1 - x/(3\pi/2))\,(1 + x/(3\pi/2)) \ldots$$

$$= 1 - x^2\,(1\,/((1/2)^2\,\pi^2) + 1\,/((3/2)^2\,\pi^2) + 1\,/((5/2)^2\,\pi^2) + \ldots)$$

Nach dem Koeffizientenvergleich mit der Taylor-Entwicklung wird dann für die Eulersche Reihe 2.Grades

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/(2n-1)^2 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \ldots = \pi^2/8$$

$$= 1{,}23370\ 05501\ 36169\ 82735\ 43113\ 74984\ 51889\ 19142 \ldots$$

Analog findet man auch

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/(2n)^2 = 1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \ldots = \pi^2/24$$

Eulersche Reihe 4.Grades, 6.Grades, 8.Grades

Führt man die Herleitung kontinuierlich für höhere Exponenten fort, so ergeben sich weitere interessante Reihen:

Eulersche Reihen 4.Grades

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/(2n-1)^4 = 1/1^4 + 1/3^4 + 1/5^4 + \ldots = \pi^4/96$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/n^4 = 1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + \ldots = \pi^4/90$$

Eulersche Reihen 6.Grades

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/(2n-1)^6 = 1/1^6 + 1/3^6 + 1/5^6 + \ldots = \pi^6/960$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/n^6 = 1/1^6 + 1/2^6 + 1/2^6 + \ldots = \pi^6/945$$

Eulersche Reihen 8.Grades

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/(2n-1)^8 = 1/1^8 + 1/3^8 + 1/5^8 + \ldots = 17/161280\ \pi^8$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\ 1/n^8 = 1/1^8 + 1/2^8 + 1/3^8 + \ldots = \pi^8/9450$$

Unendliche-1-Reihe

Unendliche Reihen haben in der Geschichte der Mathematik zu scheinbaren Widersprüchen geführt.
Berühmtestes Beispiel ist die unendliche Reihe $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 -+ \ldots$
Unter der Annahme, dass S gegen einen festen Wert konvergiert, kann man "zeigen":

1) $S = 0$

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

2) $S = 1$

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$$

3) $S = 1/2$

Durch formale Division ergibt sich $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$
Einsetzen von -1 führt zu $S = 1/2$
Gelöst wird der Widerspruch dadurch, dass eine Reihe nur dann einen Wert hat, d.h. konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. Andernfalls divergiert die Reihe.
Für S bedeutet dies, dass S keine reelle Zahl zugeordnet werden kann.

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 -+ \ldots$ ist divergent!

Die Vorstellung von Reihen als "Summen mit unendliche vielen Summanden" ist nicht korrekt.
Abel schrieb dazu: "Divergente Reihen sind ein Unglücksding, und es ist eine Schande, damit etwas zu beweisen." Später nannte er sie "eine Erfindung des Teufels".

Harmonische Reihe

$$\sum_{i=1}^{n} 1/i = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n$$ Die Reihe ist divergent !!!

Der Nachweis erfolgt über das bestimmte Integral $_1\int^{\infty} 1/x$. Dieses ist unbestimmt, d.h. gleich ∞.
Anderserseits hat das Integral $_1\int^{\infty} 1/x^{\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 1$ einen endlichen Wert.
Weiterhin konvergiert die Zahlenfolge $(a_n) = (\, (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) - \ln n)$

gegen den Grenzwert g = 0,577..., die Mascheronische Konstante. Dies bedeutet, dass die Partialsumme s_n der harmonischen Zahlenfolge für jedes n größer ist als ln n. Da ln n streng monoton wächst, muss die harmonische Reihe divergieren; allerdings sehr langsam. $s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/n$ überschreitet die 10 erst nach mehr als 12000 Gliedern. Die 100 wird erst nach mehr als $2{,}7 * 10^{43}$ Summanden überschritten. Selbst wenn ein Computer seit dem Urknall(!) ununterbrochen je Sekunde 1 Million Glieder addieren würde, wären erst rund $6 * 10^{23}$ Summanden addiert. Zum Überschreiten der 100 würde eine 50trillionenmal längere Zeit benötigt.

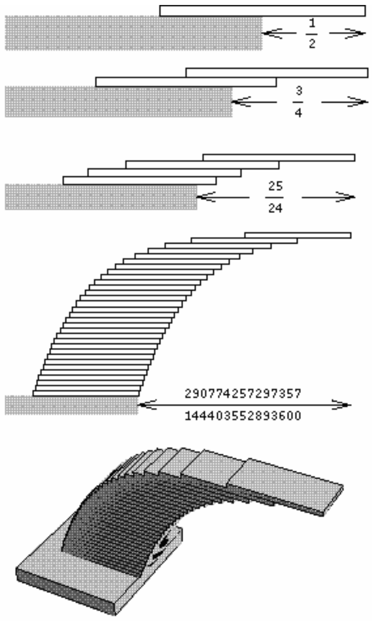
Eng verbunden mit der harmonischen Reihe sind weitere unendliche Reihen

1. die Summe aller reziproken Primzahlen divergiert!
2. die Summe aller reziproken Primzahlzwillinge konvergiert!

Der Nachweis des 2.Faktes gelang, ohne das bisher ganz sicher bekannt ist, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Mit Hilfe einer 192 bit-Arithmetik wurden folgende Anzahl von zu summierenden Gliedern der harmonischen Reihe berechnet, um jeweils die nächste natürliche Zahl zu überschreiten:

Glieder	Wert der Partialsumme
1	1.00000000000000000000000000000000000000000000000000
4	2.08333333333333333333333333333333333333333333333333
11	3.01987734487734487734487734487734487734487734487734488
31	4.02724519543652010275983818025340957073932092464971237
83	5.00206827268016605372832475075387026434545521556643859
227	6.00436670834556602337643621715740847465089377130551234
616	7.00127409713416038148706893302294507486404830967485254
1674	8.00048557199577906779030479651969744580034192788340839
4550	9.00020806293114033916417950126892862426879927540009599
12367	10.0000430082758076947067570749298172076868688724334421
33617	11.0000177086364265887755023232363131839666799054445186
91380	12.0000030516656333644936924192480570220307789105658094
248397	13.0000012294807840467350027783932958515862446169847994
675214	14.0000013620534050194855447406343717117448277166961905
1835421	15.0000003782677640387224173763410732903762749954047570
4989191	16.0000000954538256832125231239473139124172970061110250
13562027	17.0000000148499261439052166461862194181719575114865710
36865412	18.0000000037199310829937044814901955385733205860022677
100210581	19.00000000097332986154194856585841016724223233881583487
272400600	20.0000000013070013313529858277639697554473342988147320
740461601	21.00000000000908924747200142764252005452049864042069858

Die Summe aller Reziproken bis 1 Milliarde ergibt 21.3004815020375031584799423437000136327937394002630049.



Anwendung

Um wieviel kann ein Stapel Bücher über eine Tischkante ragen, ohne dass der Stapel nach unten fällt?

Ergebnis: Das n.te Buch darf maximal um die Hälfte der n.ten Partialsumme der harmonischen Zahlfolge herausragen.

$d_1 = 1/2 = 0.5$ (Abbildung 1)
$d_2 = 3/4 = 0.75$ (Abbildung 2)
$d_3 = 11/12 = 0.91667$
$d_4 = 25/24 = 1.014167$ (Abbildung 3)

Die n-fache Buchlänge als Überhang ergibt sich nach

n	Bücherzahl
1	4
2	31
3	227
4	1674
5	12367
6	91380

Da die harmonische Reihe divergiert, kann theoretisch jeder Wert als Überhang erreicht werden.

Schnecke auf dem Gummiband

Auf einem 1 km langen unendlich und gleichmäßig dehnbaren Gummiband befindet sich an einem Ende eine Schnecke. In jeder Sekunde kriecht diese 1 cm weit. Am Ende jeder Sekunde wird aber das Gummiband gleichmäßig um 1 km gedehnt.

Frage: Erreicht die Schnecke jemals das andere Ende des Gummibandes?

Nach dem "gesunden Menschenverstand" ist die Fragestellung eigentlich unsinnig. Es ist "offensichtlich", dass der Abstand "immer größer" wird.
Aber!
Am Anfang hat die Schnecke einen Abstand zum Ende von 10^5 cm. Der 1 cm, den sie in der ersten Sekunde zurücklegt, wird beim ersten Strecken des Bandes um 1 km, auf 2 cm vergrößert, da das Band gleichmäßig gedehnt wird. Beim zweiten Strecken werden diese 2 cm um den Faktor 3/2 gedehnt, usw...
Nach dem n.Strecken hat der erste Zentimeter die Länge $1 * 2/1 * 3/2 * 4/3 * ... * (n+1)/n = (n+1)/1$
Für den zweiten gekrochenen Zentimeter wird $1 * 3/2 * 4/3 * ... * (n+1)/n = (n+1)/2$ usw. usf.
Zum Zeitpunkt der n.Streckung befindet sich die Schnecke damit

$$(n+1)/1 + (n+1)/2 + (n+1)/3 + ... + (n+1)/n = (n+1) (1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n)$$

vom Anfang entfernt. Das Band ist dann $(n+1)\ 10^5$ cm lang.
Ihr Abstand zum Ende ist $(n+1) (10^5 - 1 - 1/2 - 1/3 - ... - 1/n)$
Da im 2.Faktor die divergente harmonische Reihe auftritt, existiert ein n, für das der Faktor negativ wird.
Und somit erreicht die Schnecke das Ende!
Allerdings beträgt die Wanderzeit der Schnecke rund $1,6 * 10^{43422}$ Jahre.

Blattlausaufgabe
Aufgabe: Eine Variante dieser Aufgabe ist folgende: Eine Blattlaus sitzt am Fuße eines 15 m hohen Mammutbaumes. Sie krabbelt 2 cm am Stamm nach oben. Danach wächst der Mammutbaum entlang seiner gesamten Länge gleichmäßig um 4 cm. Dieser Vorgang wiederholt sich jedes Jahr: Die Blattlaus krabbelt 2 cm weiter nach oben, der Baum wächst anschließend um 4 cm. Erreicht die Blattlaus auf diese Weise jemals die Spitze des Baumes? Wenn ja, wie viele Jahre braucht sie und wie hoch ist der Baum dann?
Lösung:
Die Blattlaus schafft im ersten Jahr eine Strecke von 2 cm, was 2cm/15m oder 1/750 der Baumhöhe entspricht. Diese relative Position behält die Blattlaus bei, während der Mammutbaum auf seiner ganzen Länge gleichmäßig um 4 cm wächst. Der Baum hat dann eine Höhe von 15.04 m und die Blattlaus krabbelt im Jahr darauf wieder 2 cm hoch, was diesmal 1/752 der Höhe entspricht. Ein weiteres Jahr später steigt sie um 1/754. Die relative Gesamthöhe h_r ist dann die Summe der einzelnen Beiträge:

$$h_r = 1/750 + 1/752 + 1/754 + ... = 1/2 * (1/375 + 1/376 + 1/377 + ...)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist bis auf endliche viele Anfangsglieder die harmonische Reihe. Die Blattlaus erreicht also die Spitze des Baumes. Wie man aus der Reihe sofort erkennt, steigt die Blattlaus höchstens um 1/750 pro Jahr.
Der Aufstieg dauert also mindestens 749 Jahre. Da es für die Berechnung der Summe endlich vieler Glieder der harmonischen Reihe keinen geschlossenen Ausdruck gibt, muss man die einzelnen Glieder der Summe tatsächlich ausrechnen und addieren. Diese numerische Rechnung ergibt, dass die Blattlaus tatsächlich 2392 Jahre braucht.
Dementsprechend ist der Mammutbaum dann 15,00 m + 2392 * 0,04 m = 110.68 m hoch.

Temperaturrekorde

Die "globale Erwärmung" ist mittlerweile ein Multimilliardengeschäft. Natürlich muss man begründen, warum eine zusätzliche Ökosteuer und Ähnliches wichtig sind. Gut eignet sich dazu "der wärmste xx.xx. seit yyyy".

Angenommen man beginnt die Aufzeichnung der mittleren Tagestemperatur in einem Jahr J. Dann ist der Erwartungswert, im Jahr J+1 eine neues Maximum zu erhalten, gleich 1/2, im Jahr J+2 gleich 1/3 ..., d.h. nach n Jahren

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/(n+1)$$

d.h. die harmonische Reihe H(n), ohne das 1.Glied.
Setzt man 100 Beobachtungsjahre an, wird

$$E(100) = 1/2 + ... + 1/101 = 4,1973...$$

Somit sind in diesem Zeitraum gut 4 Maxima für den gewählten Tag zu erwarten. Bei 365 Tagen des Jahres also 1532 Tage mit Rekordtemperatur und damit 15,3 durchschnittlich derartige Tage je Jahr.
In Deutschland werden seit 1761 tägliche Temperaturmessungen durchgeführt. Für das Jahr 2014 wird

$$E(254) = 1/2 + ... + 1/255 = 5,1204...$$

In diesen 254 Jahren traten statistisch 1869 Rekordtage auf. Das sind je Jahr 7,36 neue Temperaturrekorde!

Nun kommt die Eigenschaft des sehr langsamen Wachstums der harmonischen Reihe ins Spiel. Beschränkt man sich auf die letzten 45 Jahre, d.h. seit 1970, erhält man

E(45) = 1/2 + ... + 1/46 = 3,4167...
mit 27,71 statistisch zu erwartenden Rekordwerten.
Und damit kann man im Durchschnitt 28(!) mal im Jahr verkünden:
"Heute war der heißeste xx.xx. seit 1970!"
Klingt wirklich schlimm und der normale Medienkonsument lässt sich gern noch mehr Geld gegen die "globale Erwärmung" abnehmen.
Würde man sich auf "seit Aufzeichnungsbeginn" beziehen, könnte man nur rund 7 Mal die Schreckensnachricht verbreiten.

Zufall und harmonische Reihe

In einem Gedankenexperiment erzeuge man n-1 Zufallszahlen aus dem Intervall von 0 bis 1. Ordnet man diese Zufallszahlen nach ihrer Größe, so entstehen in dem Intervall von 0 bis 1 zwischen den Zufallszahlen n Teilintervalle. Wiederholt man diesen Vorgang viele Male mit jeweils neuen Zufallszahlen und bildet den Mittelwert der jeweiligen Intervalle zwischen 0 und der kleinsten Zufallszahl, zwischen der kleinsten und zweitkleinsten Zufallszahl, ... und zwischen der größten Zufallszahl und 1, so ist offensichtlich, dass alle Mittelwerte gleich groß sind und 1/n betragen. Ordnet man jedoch nach den Zufallszahlen auch die entstehenden Teilintervalle nach ihrer Größe und bildet am Ende den Mittelwert der jeweils kleinsten, zweitkleinsten, ... und größten Teilintervalle, dann lässt sich die mittlere Größe $g_{n,k}$ des k-ten Teilintervalls nicht mehr so einfach bestimmen.

Der einfachste Fall ist, dass jeweils nur eine Zufallszahl erzeugt wird. Diese liegt entweder gleichverteilt und gleichwahrscheinlich zwischen 0 und 0.5 oder zwischen 0.5 und 1. Der jeweilige Mittelwert ist 0.25 bzw. 0.75. In beiden Fällen ist das kleinste der beiden entstehenden Intervalle 0.25. Es ist also $g_{2,1}$ = 0.25 und $g_{2,2}$ = 0.75.
Schon bei zwei Zufallszahlen wird die Situation deutlich unübersichtlicher. Untersucht man diesen und weitere Fälle mit einem Zufallszahlengenerator, erhält man folgende Mittelwerte für die Intervalle:
Ein Intervall: $g_{1,1} = 1$
Zwei Intervalle: $g_{2,1} = 1/4$; $g_{2,2} = 3/4$
Drei Intervalle: $g_{3,1} = 1/9$; $g_{3,2} = 5/18$; $g_{3,3} = 11/18$
Vier Intervalle: $g_{4,1} = 1/16$; $g_{4,2} = 7/48$; $g_{4,3} = 13/48$; $g_{4,4} = 25/48$
Fünf Intervalle: $g_{5,1} = 1/25$; $g_{5,2} = 9/100$; $g_{5,3} = 47/300$; $g_{5,4} = 77/300$; $g_{5,5} = 137/300$
Sechs Intervalle: $g_{6,1} = 1/36$; $g_{6,2} = 11/180$; $g_{6,3} = 37/360$; $g_{6,4} = 57/360$; $g_{6,5} = 87/360$; $g_{6,6} = 147/360$
Diese Ergebnisse lassen sich beschreiben mit der Formel: $g_{n,k} = \Sigma_{i=n+1-k}^{n} (1/i) = 1/n * (\Sigma_{i=1}^{n} (1/i) - \Sigma_{i=1}^{n-k} (1/i))$
Die Größe der Intervalle kann man also als die durch n dividierte Differenz zweier harmonischer Reihen ausdrücken. Mit Hilfe dieser Formel kann man die folgenden Aussagen gewinnen, die für große n gelten:
1/√e = 60.653066% aller Intervalle sind kleiner als das mittlere Intervall der Länge 1/n.
Die größere Hälfte aller Intervalle hat zusammen 84.657359% = (1 + ln(2))/2 der Gesamtlänge 1. Die Intervalle, die größer als das mittlere Intervall (Länge: 1/n) sind, haben zusammen 2/e = 73.575888% der Gesamtlänge. 81.331769% der kleinsten Intervalle haben zusammen die Gesamtlänge 1/2.

Reziproke Primzahlreihe

Die Summe der reziproken Primzahlen
1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + …
divergiert. Die Divergenz geschieht aber noch wesentlich langsamer als bei der harmonischen Reihe.

Summe aller reziproken Primzahlen

Die Summe aller reziproken Primzahlen, aber auch die Summe aller reziproken Primzahlzwillinge divergieren! Dies geschieht aber noch wesentlich langsamer als bei der harmonischen Reihe.
Die Aufstellung enthält die Anzahl von zu summierenden Gliedern der zwei Reihen, um jeweils einen Zahlenwert zu überschreiten:

letztes Glied	Wert der Partialsumme der reziproken Primzahlen
5	1.0333333332557231187820434570312500000000000000000000
29	1.53343877179442180759143542877393493098242310323576192
277	2.00235015137268324092292365139226078388071145699510790
1013	2.20005837420617427660362597949144193389249255056690063
4789	2.40009083810426122830367381400501828112931829225553325
11789	2.50002069118469466155809308679136738066562918109383487
5195977	3.00000003084974060901076424247848158481583865088883567
26429281	3.10000001484739763531160873882685664456652848467165163
159490147	3.20000000222126306895386130796714619159764255805158651

Die Summe aller reziproken Primzahlen bis 1 Milliarde ergibt
3.29275571872136075428622662799774080744761629818277269.

letztes Glied	Wert der Partialsumme der reziproken Primzahlzwillinge
31	1.0222185754409856224581955970768802325252001018332373 8
61	1.1032072284622367199695261062606722261731488844802101 2
181	1.2080590946104907634104119904779152778587576696655348 7
643	1.3030858757350569566252851091932946247105991947890841 1
5851	1.4002659695844829764057303929518459689883591029200871 3
476028	1.5000002472019688084703702666745501049044313954321152 2

Die Summe aller reziproken Primzahlenzwillinge bis 1 Milliarde ergibt
1.57473595756092658611630354102710280603897667653.

Alternierende harmonische Reihe

Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + - \ldots = \ln 2 \approx 0{,}693147180559$$

konvergiert gegen Logarithmus von 2.
Sortiert man die Glieder aber wie folgt um und klammert

$$(1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) - 1/8 + (1/5 - 1/10) - 1/12 + - \ldots =$$

so sind noch alle Glieder vorhanden. Fasst man die Klammern zusammen, wird

$$= 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + - \ldots =$$

$$= 1/2\,(1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + - \ldots) = 1/2 \ln 2$$

Damit liegt scheinbar ein Widerspruch vor, da die Reihe nur gegen einen Wert konvergieren kann.
Der Fehler liegt in der Tatsache begründet, dass nur bei endlichen Reihen Glieder mit negativen und positiven Vorzeichen beliebig vertauscht werden können. Das Kommutativgesetz gilt bei unendlichen Reihen nur, wenn alle Glieder positives Vorzeichen haben.

Allgemein konnte Riemann 1854 zeigen, dass man die Summe der Reihe der Glieder

$$1, -1/2, +1/3, -1/4, +1/5, \ldots$$

gegen jede beliebige Zahl konvergieren lassen kann, je nachdem, wie man die Glieder umsortiert.

Kempner-Reihe

Unter den zehn Kempner-Reihen versteht man die Reihen, die dadurch entstehen, dass man aus der harmonischen Reihe $H(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$
alle Summanden entfernt, die eine bestimmte dezimale Ziffer in ihrem Nenner enthalten. Die Kempner-Reihen gehören zu den subharmonischen Reihen.
Lässt man etwa alle Summanden weg, die die Ziffer 1 in ihrer Dezimalschreibweise im Nenner enthalten, ergibt sich die Reihe $K_0(n) = 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/9 + 1/20 + 1/22 + \ldots$
Diese Reihen wurden erstmals von A.J. Kempner 1914 beschrieben. Das Interessante an diesen Reihen ist, dass alle zehn konvergieren, obwohl die harmonische Reihe selbst nicht konvergiert. Dies wurde von Kempner bewiesen.

Die Reihen konvergieren extrem langsam.
Für die ausgelassenen Ziffern 0, 1, 2, … ergeben sich als Näherungswerte für den Grenzwert 23,10344 ; 16,17696 ; 19,25735 ; 20,56987 ; 21,32746 ; 21,83460 ; 22,20559 ; 22,49347 ; 22,72636 und 22,92067.

F.Irwin verallgemeinerte das Resultat der Konvergenz der zehn Kempner-Reihen, indem er bewies, dass alle Reihen, die über die Kehrwerte aller natürlicher Zahlen, in denen die Ziffer x_0 genau n_0 mal, die Ziffer x_1 genau n_1, usw. auftreten, ebenfalls konvergieren.
Die Summe der Kehrwerte der natürlichen Zahlen, in denen genau eine 9 vorkommt, beträgt etwa 23,044287080747848319. Dieser Wert ist größer als Kempners K_9, obwohl diese mit größeren Summanden beginnt.
Ein besonderes Beispiel dafür ist die Summe der Kehrwerte der natürlichen Zahlen, in denen einhundert Nullen vorkommen, sie beginnt mit dem Summanden 1/10100 und ist dennoch größer als K_9.
Die Summe der Reziproken die kein "42" enthalten ist 228,44630 41592 30813 25415; und der Reziproken, die kein "314159" enthalten 2302582,33386 37826 07892 02376.

Bernoullische Zahlen B_k

$$1 + 1/2^{2k} + 1/3^{2k} + \ldots + 1/n^{2k} + \ldots = (\pi^{2k}\, 2^{2k-1})/(2k)! \cdot B_k$$

für k = 1, 2, … ergeben sich die Summen $\pi^2/6$, $\pi^4/90$, $\pi^6/945$, $\pi^8/9450$, $\pi^{10}/93555$, $691/638512875\ \pi^{12}$, $2/18243225\ \pi^{14}$, $3617/325641566250\ \pi^{16}$, …

$$1 - 1/2^{2k} + 1/3^{2k} - \ldots -+ 1/n^{2k} +- \ldots = [\pi^{2k}\,(2^{2k-1} - 1)]/(2k)! \cdot B_k$$

für k = 1, 2, … ergeben sich die Summen $\pi^2/12$, $7/720\ \pi^4$, $31/30240\ \pi^6$, $127/1209600\ \pi^8$, …

$$1 + 1/3^{2k} + 1/5^{2k} + \ldots + 1/(2n-1)^{2k} + \ldots = [\pi^{2k}\,(2^{2k-1} - 1)]/[2(2k)!] * B_k$$

Eulersche Zahlen E_k

$$1 - 1/3^{2k+1} + 1/5^{2k+1} + \ldots -+ 1/(2n-1)^{2k+1} +- \ldots = \pi^{2k+1}/[2^{2k+2}\,(2k)!] * E_k$$

Dirichlet-Reihe
$1 + 1/2^p + 1/3^p + 1/4^p + \ldots + 1/n^p + \ldots$ konvergiert für $p > 1$

Hypergeometrische Reihe
Während bei einer geometrischen Reihe $\Sigma_{k\geq 0}^{\infty} cx^k$ das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Terme cx^{k+1} und cx^k gleich x ist, wird bei einer hypergeometrischen Reihe $\Sigma_{k\geq 0}^{\infty} t(k)$
gefordert $t(0) = 1$ und $t(k+1)/t(k) = P(k)/Q(k)$ wobei P und Q Polynome über k sind.
U.a sind die Besselschen Funktionen und die Summen über Binomialkoeffizienten hypergeometrische Reihen.
Da hypergeometrische Reihen im Allgemeinen sehr schwierig zu berechnen sind, werden Tabellen bzw. Computerprogramme genutzt.

Gauß-Darstellung
$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \alpha\beta/\gamma\, x + \alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)/(2\gamma(\gamma+1))\, x^2 + \ldots$$
$$= 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)/(k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1))\, x^k$$

Spezielle hypergeometrische Reihen
$(1+x)^{\alpha} = F(-\alpha,1,1,-x)$
$\arcsin x = x\, F(1/2,1/2,3/2,x^2)$
$\ln(1+x) = x\, F(1,1,2,-x)$
$e^x = \lim_{\beta\to\infty} F(1,\beta,1,x/\beta)$
$P_n(x) = F(n+1,-n,1,(1-x)/2)$; Legendre-Polynome

Faulhaber-Formel
Nach Johann Faulhaber ist folgende Formel zur Berechnung der Summe S(n,p) benannt.
$$S(n,p) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = 1/(p+1)\, [({}^{p+1}{}_0)B_0\, n^{p+1} + ({}^{p+1}{}_1)B_1\, n^p + \ldots + ({}^{p+1}{}_p)B_p\, n]$$

mit $B_0 = 1$; $B_1 = 1/2$;
$B_m = 1/2 - 1/(m+1) - 1/2\, ({}^m{}_1)\, B_2 - 1/3\, ({}^m{}_2)\, B_3 - \ldots - 1/(m-1)\, ({}^m{}_{m-2})\, B_{m-1}$ für $m > 1$

Die Zahlen $B_0 = 1$; $B_1 = 1/2$; $B_2 = 1/2 - 1/3 = 1/6$; $B_3 = 1/2 - 1/4 - 1/4 = 0$; $B_4 = 1/2 - 1/5 - 1/3 = -1/30$; $B_5 = 0$; $B_6 = 1/42$; $B_7 = 0$; $B_8 = -1/30$; $B_9 = 0$; $B_{10} = 5/66$ … heißen Bernoulli-Zahlen.
Die Faulhaber-Formel ist eine Erweiterung der folgenden Summenformeln:
$S(n,1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n+1)/2$
$S(n,2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = -n\cdot(n + 1)\cdot(2n + 1)/2$
$S(n,3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = n^2\,(n+1)^2/4$
$S(n,4) = 1/5\, n^5 + 1/2\, n^4 + 1/3\, n^3 - 1/30\, n$

Basel-Problem
Das Basel-Problem ist eines der berühmtesten Probleme der Zahlentheorie. 1644 wurde es von Pietro Mengoli gestellt und 1735 von Leonhard Euler gelöst. 1859 verallgemeinerte Riemann das Basel-Problem mit Hilfe der Zetafunktion zur Riemannschen Vermutung.
Das Basel-Problem besteht in der Bestimmung der korrekten Summe der unendlichen Reihe der reziproken Quadratzahlen $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = 1/1^2 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$
Die Summe der Reihe ist näherungsweise 1,644934. Euler fand den exakten Wert zu $\pi^2/6$. 1741 gab er einen endgültigen Beweis. Dieser Beweis ist anspruchsvoll und nutzt mathematische Kenntnisse aus verschiedensten Bereichen. Für eine Beweisidee siehe
http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

Riemannsche Zetafunktion
Bei der Riemannschen Zetafunktion wird die obige Summe auf beliebige Exponenten und auf komplexe Argumente erweitert
$$\zeta(s) = \Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^s$$
Das Basel-Problem besteht damit in der Bestimmung des Funktionswertes $\zeta(2)$.
Die Riemannsche Zetafunktion ist eine der wichtigsten mathematischen Funktionen und unmittelbar mit der Verteilung der Primzahlen verbunden.

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^n = \zeta(n) \quad , n>1$$
für n=1 existiert kein endlicher Wert (harmonische Reihe !!)
Asymptotisches Verhalten für $k \to \infty$
$$\zeta(k) \approx \ln k + \gamma + 1/(2k) - 1/(12k^2) + 1/(120\, k^4) \;; \qquad \gamma = 0.5772156649 \text{ Eulersche Konstante}$$
Die Riemannsche Zetafunktion ist unmittelbar mit der Riemannschen Vermutung verbunden.
(Riemannsche Vermutung)
Nach Euler gilt: $1 + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + 1/5^n + \ldots = 2^n/(2^n - 1) * 3^n/(3^n - 1) * 5^n/(5^n - 1) * \ldots$
wobei auf der rechten Seite alle Primzahlen als Basen auftreten.

Für geradzahlige n = 2,4,6,8,... ergeben sich mit π darstellbare reelle Funktionswerte der Zeta-Funktion: $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450$, $\zeta(10) = \pi^{10}/93555$, $\zeta(12) = 691\ \pi^{12}/638512875$, $\zeta(14) = 2\ \pi^{14}/18243225$, $\zeta(16) = 3617\ \pi^{16}/325641566250$, ...

Funktionswerte der Zetafunktion

Für die Funktionswerte $\zeta(n)$ der Zetafunktion für gerade Argumente n gilt

$$\zeta(n) = (-1)^{n+1}\ (2\pi)^{2n}\ B(2n) / (2\ (2n)!)$$

wobei B(2n) die Bernoulli-Zahl ist.

$\zeta(2)$ $= \pi^2/6$ = 1,64493 40668 48226 43647 24151 66646 02518 92189 49901 20679 84377 35558 22937 00074 70403 20087 38336 28900 61975 87053 04004 31896 23371 90679 62872 46870 05007 78793 51029 46330 86627 68317 33309 36776 26050 95251 00687 21400 54796 81155 87948 90360 82327 77619 19840 75645 58769 63235 63670 971…

$\zeta(4)$ $= \pi^4/90$ = 1,08232 32337 11138 19151 60036 96541 16790 27747 50951 91872 69076 82976 21544 41206 16186 96884 65569 09635 94169 99172 32990 81390 80427 42414 5839…

$\zeta(6)$ $= \pi^6/945$ = 1,01734 30619 84449 13971 45179 29790 92052 79018 17490 03285 35618 42408 66400 43321 82901 95789 78827 73977 93853 51705 30279 19116 22545 58867 398…

$\zeta(8)$ $= \pi^8/9450$ = 1,00407 73561 97944 33937 86852 38508 65246 52589 60790 64985 00203 29110 20265 25829 52574 74881 43952 87230 37237 19711 24523 64847 02826 90026 35428…

$\zeta(10)$ $= \pi^{10}/93555$ = 1,00099 45751 27818 08533 71459 58900 31901 70060 19531 56447 75172 57788 99463 62914 65151 91295 43970 41968 61038 56527 54006 89206 32053 07677 36806…

$\zeta(12)$ $= 691\ \pi^{12}/638512875$ = 1,00024 60865 53308 04829 86379 98047 73967 09604 16088 45800 34045 33040 95213 32520 19681 94091 30490 42808 55190 06994 74542 98094 52663 14269 50121…

$\zeta(14)$ $= 2\ \pi^{14}/18243225$ = 1,00006 12481 35058 70482 92585 45105 13533 37474 81696 16915 45494 82755 20225 28629 41023 17742 08766 59782 97199 84675 12880 49061 72087 28508 05427…

$\zeta(16)$ $= 3617\ \pi^{16}/325641566250$ = 1,00001 52822 59408 65187 17325 71487 63672 20232 37388 99047 15311 53105 20358 87870 87027 95315 17862 85604 84632 24623 46271 21875 72789 56438 0958…

$\zeta(18)$ $= 43867\ \pi^{18}/38979295480125$ = 1,00000 38172 93264 99983 98564 61644 62193 97304 54697 21895 33311 43174 42998 76300 39542 65004 56380 01968 66898 96495 49309 21049 23169 61761 66188…

$\zeta(20)$ $= 174611\ \pi^{20}/1531329465290625$ = 1,00000 09539 62033 87279 61131 52038 68344 93459 43794 18741 05957 50056 48985 11375 13731 14390 02578 36097 97638 74789 54851 58808 68154 50989 41901…

$\zeta(22)$ $= 155366\ \pi^{22}/13447856940643125$ = 1,0000002384505027277329900036481867529949350418217…

$\zeta(24)$ $= 236364091\ \pi^{24}/201919571963756521875$ = 1,0000000596081890512594796124402079358012275039188…

$\zeta(26)$ $= 1315862\ \pi^{26}/11094481976030578125$ = 1,0000000149015548283650412346585066306986288647881…

$\zeta(28)$ $= 6785560294\ \pi^{28}/564653660170076273671875$ = 1,0000000037253340247884570548192040184024232328930…

$\zeta(30)$ $= 6892673020804\ \pi^{30}/5660878804669082674070015625$ = 1,0000000009313274324196681828717647350212198135679…

$\zeta(32)$ $= 7709321041217\ \pi^{32}/62490220571022341207266406250$ = 1,0000000002328311833676505492001455975940495024829…

$\zeta(34)$ $= 151628697551\ \pi^{34}/12130454581433748587292890625$ = 1,0000000000582077208790270088924368598910630541731…

$\zeta(36)$ $= 26315271553053477373\ \pi^{36}/20777977561866588586487628662044921875$ = 1,0000000000145519218910419842359296322453184209838…

$\zeta(38)$ $= 308420411983322\ \pi^{38}/2403467618492375776343276883984375$ = 1,0000000000036379795473786511902372363558732735126…

$\zeta(40)$ $= 261082718496449122051\ \pi^{40}/20080431172289638826798401128390556640625$ = 1,0000000000009094947840263889282533118386949087538…

$\zeta(-0,5)$ = -0,2078862249773545660173067253970493022262685312876725376101135571

$\zeta(3)$ = 1,2020569031595942853997381615114499907649862923404988817922715553418382057863

$\zeta(5)$ = 1,036927755143369926331365486457034168057080919501912811974192677

$\zeta(7)$ = 1,008349277381922826839797549849796759599863560565238706417283136

$\zeta(9)$ = 1,002008392826082214417852769232412060485605851394888756548596615

$\zeta(11)$ = 1,00049418860411946455870228252646993646860643575820861711914

$\zeta(0,1)$ = -0.603037519856241715248431938263438207914147824552128633666618

$\zeta(1/2)$ = -1,46035450880958681288949915251529801246722933101258…

$\zeta(1/3)$ = -0,97336024835078271546888686244789657077282963174305…
$\zeta(2/3)$ = -2,44758073623365823109099570422300521301545223575799…
$\zeta(3/2)$ = 2,61237534868548834334856756792407163057080065240006…
$1/\zeta(2)$ = 0,60792710185402662866327677925836583342615264803347 9…
$\zeta'(0)$ = -0,91893853320467274178032973640561763986139747363778…
$\zeta'(2)$ = -0,93754825431584375370257409456786497789786028861482…

Meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion

Gegeben ist die Darstellung der Riemann'schen Zetafunktion

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s = \zeta(s)$$

Diese definiert man allgemein für komplexes s = a+b*i mit Re(s) = a>1. Auf diesem Bereich A = {z | Re(z)>1} konvergiert die Reihe absolut, im Grenzfall s=1 bekommt man die harmonische Reihe, die bereits divergent ist. Da die Zetafunktion auch lokal gleichmäßig konvergiert, gilt nach dem Satz von Weierstrass, dass $\zeta(s)$ auf A auch holomorph, also komplex differenzierbar ist.

Meromorphe Fortsetzung

Gibt es eine Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf den Rest der komplexen Ebene, eine sogenannte meromorphe Fortsetzung?

Man benötigt allgemein eine sogenannte Schwarzfunktion f: R → R, d.h. f und alle Ableitungen von f gehen für $|x| \to \infty$ stärker gegen 0 als $1/|x|$. Das sind anschaulich einfach nur Funktionen, deren Integrale konvergieren. Diese benötigt man für die Fouriertransformation

$$f^*: R \to R : \to f^*(r) = {}_R\int f(x)\, e^{-2\pi irx}\, dx$$

und die dazugehörige Poisson'sche Summenformel: $\Sigma_{n\in Z} f(n) = \Sigma_{n\in Z} f^*(n)$

Wir betrachten nun $f(x) = e^{-\pi tx^2}$ für t > 0, und die Transformierte

$$f^*(r) = {}_R\int e^{-\pi tx^2} e^{-2\pi irx}\, dx = \ldots = 1/\sqrt{t}\, e^{-\pi r^2/t}$$

Weiter setzen wir $\Theta(s) = 1/2\ \Sigma_{n\in Z}\, e^{-\pi i\, sn^2}$ (wegen n² ist die Laurentreihe symmetrisch)

n=0 wird herausgezogen: $= 1/2 + \Sigma_{n=1}^{\infty} e^{\pi isn^2}$.

Es folgt: $\Theta(it) = 1/2\ \Sigma_{n\in Z}\, e^{-\pi itn^2} = \ldots = 1/\sqrt{t}\ \Theta(1/t)$

Diese Funktionen und Formeln benötigt man nur um die folgenden Umformungen übersichtlicher zu gestalten.

Außerdem benötigt man die Gammafunktion $\Gamma(s) = {}_0\int^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$, die durch die Funktionalgleichung $\Gamma(s) = (s-1)\,\Gamma(s-1)$ auf ganz C definiert ist.

Wir betrachten nun für Re(s) > 1/2:

$\pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta(s) = \pi^{-s}\ {}_0\int^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt\ \Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^{2s} = {}_0\int^{\infty} \Sigma_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^{-s}\, t^{s-1} e^{-t}\, dt =$

mit $t = v\pi n^2$, $dt = dv\ n^2\ \pi$

$= {}_0\int^{\infty} \Sigma_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^{-s} (v\pi n^2)^{s-1} e^{-v\pi n^2}\, \pi n^2\, dv = {}_0\int^{\infty} v^{s-1}\, \Sigma_{n=1}^{\infty} e^{-v\pi n^2}\, dv =$

einsetzen von $\Theta(iv) - 1/2$

$= {}_0\int^{\infty} v^{s-1} (\Theta(iv) - 1/2)\, dv =$

auspalten

$= {}_0\int^{1} v^{s-1}\,\Theta(iv)\, dv - 1/2\ {}_0\int^{1} v^{s-1}\, dv + {}_1\int^{\infty} v^{s-1}\,\Theta(iv\text{-}1/2)\, dv =$

mit $dt = -1/v^2\, dv$ wird

$= {}_1\int^{\infty} t^{-s+1}\,\Theta(i/t)\, 1/t^2\, dt - (1/(2s)\, t^2)_0^1 + {}_1\int^{\infty} t^{s-1} (\Theta(it) - 1/2)\, dt =$

$= {}_1\int^{\infty} t^{-s+1-2+1/2}\,\Theta(it)\, dt + {}_1\int^{\infty} t^{s-1} (\Theta(it) - 1/2)\, dt - 1/(2s) =$

$= {}_1\int^{\infty} (t^{s-1}\, t^{-s-1/2}) (\Theta(it) - 1/2)\, dt - 1/(1-2s) - 1/(2s) =$

Wegen der Symmetrie des letzten Ausdrucks folgt die Funktionalgleichung:

$\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma((1-s)/2)\,\zeta(1-s) =$

$= {}_1\int^{\infty} (t^{s/2-1}\, t^{(1-s)/2-1}) (\Theta(it) - 1/2)\, dt - 1/(1-s) - 1/(s)$

Man sieht, dass sich nun für s mit Re(s) > 1 auch $\zeta(1-s)$ berechnen lässt. Mit dieser Funktionalgleichung setzt man $\zeta(s)$ zu einer meromorphen Funktion auf C fort. Einziger Pol ist hierbei an der Stelle s = 1.

Quelle http://matheplanet.com

Berechnung der Riemannschen Zetafunktion

Funktionswerte der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Linie Re = 1/2 können mit Hilfe der Riemann-Siegel-Gleichung berechnet werden.

Gesucht ist der Funktionswert $\zeta(1/2 + i\, t)$ für verschiedene reelle t > 0.

Es sei $N = [\sqrt{(t/2\pi)}]$, der ganzzahlige Anteil von $\sqrt{(t/2\pi)}$, sowie $p = \sqrt{(t/2\pi)} - N$. Dann wird die Summe

$$Z(t) = 2\ \Sigma_{n=1}^{N}\, 1/\sqrt{n}\, \cos(\theta(t) - t \ln n) + R$$

berechnet.

Dabei ist die Theta-Funktion $\theta(t)$ $\qquad \theta(t) = \mathrm{Im}\,[\ln \Pi\,(it/2 - 3/4)] - t/2 \ln \pi$

bzw. als Näherung $\qquad \theta(t) = t/2 \ln (t/(2\pi)) - t/2 - \pi/8 + 1/(48t) + 7/(5760\, t^3) + \ldots$

Das Restglied R wird $\qquad R = (-1)^{N-1} (t/(2\pi))^{-1/4} [C_0 + C_1 (t/(2\pi))^{-1/2} + C_2 (t/(2\pi))^{-2/2} + C_3 (t/(2\pi))^{-3/2} + \ldots]$

Für die Parameter C_i gilt

$$C_0 = \Psi(p) = \cos(2\pi\,(p^2 - p - 1/16)) / \cos(2\pi\, p)$$

$C_1 = -1/(96\ \pi^2)\ \Psi^{(3)}(p)$
$C_2 = 1/(18432\ \pi^4)\ \Psi^{(6)}(p) + 1/(64\ \pi^2)\ \Psi^{(2)}(p)$
$C_3 = -1/(5308416\ \pi^6)\ \Psi^{(9)}(p) - 1/(3840\ \pi^4)\ \Psi^{(5)}(p) - 1/(64\ \pi^2)\ \Psi^{(1)}(p)$
wobei $\Psi^{(n)}$ die n-te Ableitung von Ψ ist.
Der Funktionswert $\zeta(1/2 + it)$ ergibt sich dann zu $\zeta(1/2 + it) = Z(t)\ e^{-i\,\theta(t)}$
Quelle: Ken Takusaga, http://web.mit.edu/kenta/www/six/parallel/2-Final-Report.html

Riemannsche Zetaprimzahlfunktion

$$S = \sum_{i=2}^{\infty} 1/i^n = \zeta_p(n) \quad , n>1, \text{ wobei alle i Primzahlen sind}$$

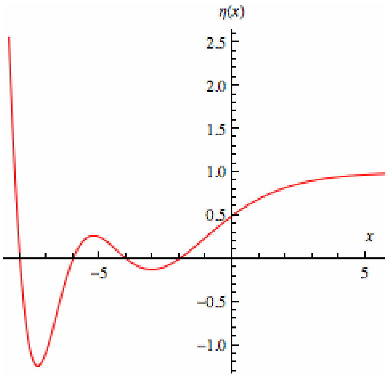
Um $\zeta_p(2)$ auf nur 20 Dezimalstellen genau zu berechnen, müssten alle Primzahlen bis 10^{20} berücksichtigt werden!

Es gilt: $\zeta_p(n) < (\zeta(n) - 1) * (1 - 1/2^n)$; $\zeta(n)$ ... Riemannsche Zetafunktion
$\log (\zeta(n)) = \Sigma\ \zeta_p(n\ i)/i$ für $i = 1,2,\dots,\infty$
$\zeta_p(n) = \Sigma\ \mu(i)/i \log (\zeta(in))$ für $i = 1,2,\dots,\infty$; $\mu(i)$ ... Möbius-Funktion

Folgerung: $\zeta_p(2) = \log \zeta(2) - 1/2 \log \zeta(4) - 1/3 \log \zeta(6) - 1/5 \log \zeta(10) - \dots$

Ergebnisse:
$\zeta_p(2) = 0.4522474200410654985065433648322479341732313432398924217364 18...$
$\zeta_p(3) = 0.174762639299443536423113314665706700975412121926149289888672...$
$\zeta_p(4) = 0.076993139764246844942619295933157870162041059714843190264938...$
$\zeta_p(5) = 0.035755017483924257132818242538855711131697276726651331690092...$
$\zeta_p(6) = 0.017070086850636512954133673266059399209585941874544244733163...$
$\zeta_p(7) = 0.008283832856133592535124138729448723089183328885307806244641...$
$\zeta_p(8) = 0.004061405366517830560523439142683080522977144512071741001032...$

1748 ermittelte Euler die Werite bis $\zeta_p(36)$ auf 15 Stellen, wobei 13 korrekt waren. 1881 berechnete Merrifield 15 korrekte Stellen. 1948 erweiterte Liénard bis $\zeta_p(167)$ mit 50 Stellen. Den gegenwärtigen Rekord hält P.Sebah mit mehr als 10000 Dezimalziffern für $\zeta_p(2)$.



Dirichlet-Eta-Funktion

Die Dirichlet-Eta-Funktion $\eta(s)$ ist definiert durch
$$\eta(s) = \Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k^s = (1 - 2^{1-s})\ \zeta(s)$$
$$= 1/1^s - 1/2^s + 1/3^s - 1/4^s +- \dots$$
wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist.
Ist $\lambda(s)$ die Dirichlet-Lambda-Funktion, so gilt
$$\zeta(s)/2^s = \lambda(s)/(2^s-1) = \eta(s)/(2^s-2)$$
$$\zeta(s) + \eta(s) = 2\ \lambda(s)$$
Im komplexen Zahlenbereich hat die Eta-Funktion die selben Nullstellen wie die Zeta-Funktion.
Ableitung der Dirichlet-Eta-Funktion
$$\eta'(x) = 2^{1-x} \ln 2\ \zeta(x) + (1-2^{1-x})\ \zeta'(x)$$
Spezielle Funktionswerte

$\eta(0) = 1/2$	$\eta(1) = \ln 2$
$\eta(2) = 1/12\ \pi^2$	$\eta(3) = 3/4\ \zeta(3)$
$\eta(4) = 7/720\ \pi^4$	$\eta(5) = 15/16\ \zeta(5)$
$\eta(6) = 31/30240\ \pi^6$	$\eta(8) = 127/1209600\ \pi^8$
$\eta(10) = 73/6842880\ \pi^{10}$	$\eta(12) = 1414477/1307674368000\ \pi^{12}$

Zetafunktionähnliche Reihen

Außer der Reihe zur Berechnung der Funktionswerte $\zeta(n)$ der Zetafunktion für gerade Argumente n = 2k
$$\zeta(n) = \Sigma_{i=1}^{\infty} 1/i^n = 1 + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + 1/5^n + \dots =$$
$$= (-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} B(2n) / (2\ (2n)!)$$
wobei B(2n) die Bernoulli-Zahl ist, wurden von Euler weitere ähnliche Reihen angegeben.

Potenzen mit ungerader Basis
$$1 + 1/3^{2k} + 1/5^{2k} + 1/7^{2k} + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^{2k} = \pi^{2k}\ 2^{2k-1} / (2\ (2k)!)\ |B(2k)|$$
Spezialfälle:
$$1 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots = \pi^2/8 \qquad 1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \dots = \pi^4/96$$
Potenzen mit ungerader Basis, alternierend
$$1 - 1/3^{2k} + 1/5^{2k} - 1/7^{2k} +- \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1)^{2k+1} = \pi^{2k+1} / (2^{2k-2}\ (2k)!)\ |E(2k)|$$
E(2k) … Eulersche Zahl
Spezialfall:
$$1 - 1/3^2 + 1/5^2 -+ \dots = \pi^3/32$$

Spezielle Reihen

alle unendliche Reihen werden für n = 1,2,3, ... , ∞ gebildet:
$$\Sigma\ 1/\binom{2n}{n} = 1/27\ (2\pi\sqrt{3} + 9) = 0.7363998587 \dots$$
$$\Sigma\ 1/\left(n*\binom{2n}{n} \right) = \pi/9\ \sqrt{3} = 0.6045997881 \dots$$
$$\Sigma\ 1/\left(n^2*\binom{2n}{n} \right) = 1/3\ \zeta(2) = \pi^2 / 8$$

Σ 1/(n^4*($^{2n}{}_n$)) = 17/36 $\zeta(4)$ = 17/3240 π^4
Σ $(-1)^{n-1}$ / ($^{2n}{}_n$) = 1/25 (5 + 4$\sqrt{5}$ arcsch(2))
Σ $(-1)^{n-1}$ / (n*($^{2n}{}_n$)) = 2/5 $\sqrt{5}$ arcsch(2)
Σ $(-1)^{n-1}$ / (n²*($^{2n}{}_n$)) = 2 $(\text{arcsch}(2))^2$
Σ $(-1)^{n-1}$ / (n^3*($^{2n}{}_n$)) = 2/5 $\zeta(3)$
Σ ($^n{}_1$) 2^{n+1} / 10^{n+1} = 1/16
Σ ($^n{}_1$) / 10^{n+1} = 1/81
Σ ln(1-1/(n+1)²) = -ln 2
1/x + Σ (1/(x-k) + 1/(x+k)) = cot πx
-Σ (1/(x-(k-1/2)) + 1/(x+(k-1/2))) = tan πx
1/x + Σ $(-1)^k$ 2x /(x²-k²) = π/sin πx

Unendlichkeitsreihe

Die Unendlichkeitsreihe ist eine unendliche Folge von ganzen Zahlen, die der dänische Komponist Per Nørgård als mathematische Grundlage für Kompositionen verwendete.
Ausgehend von einer ganzen Zahl a_1 fügt man eine zweite um eins erhöhte Zahl a_2 hinzu:

$a_2 = a_1 + 1$

Alle weiteren Glieder werden nach folgenden Gleichungen gebildet

$a_n - a_{n+1} = -a_{2n-1} + a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n+2}$

Daraus folgt sowohl die Vorschrift für die Berechnung der folgenden Zahlen mit ungeradem Index

$a_{2n+1} = a_n - a_{n+1} + a_{2n-1}$

als auch die Vorschrift für die Berechnung der folgenden Zahlen mit geradem Index

$a_{2n+2} = a_{2n} - a_n + a_{n+1}$,

Die durch $a_{2n} = a_{n+1}$ und $a_{2n+1} = -a_{n+1}$
rekursiv definierte Folge erfüllt ebenfalls die angegebenen Gleichungen und ist somit gleich der Unendlichkeitsreihe. Man erhält für $a_1 = 0$ die Folge
0, 1, -1, 2, 1, 0, -2, 3, -1, 2, 0, 1, 2, -1, -3, 4, 1, 0, -2, 3, 0, 1, -1, 2, -2, 3, 1, 0, 3, -2, -4, 5, -1, 2, 0, 1, 2, -1, -3, 4, 0, 1, -1, 2, 1, 0, -2, 3, 2, -1, -3, 4, -1, 2, 0, 1, -3, 4, 2, -1, 4, -3, -5, 6, 1, 0, -2, 3, 0, 1, -1, 2, -2, 3, 1, 0, 3, -2, -4, 5, 0, 1, -1, 2, 1, 0, …
Die Folge für beliebiges a_1 erhält man, indem man bei dieser Folge zu jedem Folgenglied a_1 hinzuaddiert.

Aus der rekursiven Beschreibung ergibt sich, dass die aus jedem zweiten Ton der Unendlichkeitsreihe gebildete Folge die um eins transponierte Ausgangsreihe ist. Beginnt man beim ersten Glied, überspringt aber jedes zweite, so hat man eine Umkehrung der Ausgangsreihe. Überspringt man zwei Töne, erhält man wiederum einen Ausschnitt aus der Ausgangsreihe und so weiter.
Innerhalb der neuen Reihen gelten die gleichen Gesetze - die Unendlichkeitsreihe ist voll von Selbstähnlichkeiten, d.h. es handelt sich um ein Fraktal. Betrachtet man die Reste 0 oder 1 der Folgenglieder bei der Division durch 2, erhält man die Thue-Morse-Folge.
Die Unendlichkeitsreihe (dänisch "uendelighedsrækken") findet in der Musik von Per Nørgård Verwendung, der sie 1959 als Basis seiner Musik entwickelte. In seinen Werken "Voyage into the Golden Screen" (1968) und "Symphonie No.2" (1970) bildet sie die Grundlage der gesamten Komposition.

Abelsches Kriterium

Abelsches Kriterium für Zahlenreihen:

Ist die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ b_n
konvergent und die Zahlen α_n bilden eine monoton beschränkte Folge, so ist die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ α_n b_n ebenfalls konvergent.

Abelsches Kriterium für Funktionsreihen:

Ist die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ $b_n(x)$
auf einer Menge X gleichförmig konvergent und bilden die Funktionen $a_n(x)$, n = 1, 2, …, für jedes x aus X monoton beschränkte Folgen, so ist die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ $a_n(x)$ $b_n(x)$
ebenfalls auf der Menge X gleichförmig konvergent.
Ein analoges Abel-Kriterium kann auch für Integrale der Form $_\alpha\int^{\infty}$ a(n,x) b(n,x) dn
formuliert werden.
Das Abel-Kriterium kann durch das Dedekindsche Kriterium für Reihenkonvergenz verschärft werden.

Euler-MacLaurinsche Summenformel

Für n = 1, 2, … und eine reelle Funktion f(n) gilt

$f(0) + f(1) + … + f(n) = {}_0\int^n f(x)\,dx + (f(0)+f(n))/2 + S_n$

mit $S_n = B_2/2!\, f' + B_4/4!\, f^{(3)} + … + B_{2p}/(2p)!\, f^{(2p-1)}\ |_1{}^n + R_p$; p = 2,3,…
Das Symbol $g|_0{}^n$ bedeutet dabei g(n) - g(0), die B_{2p} die Bernoullischen Zahlen.
und dem Restglied $R_p = 1/(2p + 1)!\ {}_0\int^n f^{(2p+1)}(x)\, C_{2p+1}(x)\, dx$

$C_n(x)$ ist das modifizierte Bernoulli-Polynom $C_n(x) = B_n(x - [x])$.
Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktion f: [0, n] $\rightarrow$ R hinreichend glatt ist, d.h., sie besitzt auf dem Intervall [0, n] stetige Ableitungen bis zur Ordnung 2p + 1.

Doppelreihen

Unter einer Doppelreihe versteht man die Summe $\Sigma_{i,j=0}^{\infty}\ a_{ij}$ reeller Zahlen a_{ij}. Wenn die Doppelreihe konvergent ist, nennt man deren Grenzwert die Summe der Doppelreihe.

Doppelreihensatz

Wenn $\Sigma_{i,j=0}^{\infty}\ a_{ij}$ eine absolut konvergente Doppelreihe ist, dann gilt

$$\Sigma_{i,j=0}^{\infty}\ a_{ij} = \Sigma_{i=0}^{\infty} (\Sigma_{j=0}^{\infty} a_{ij}) = \Sigma_{j=0}^{\infty} (\Sigma_{i=0}^{\infty} a_{ij}) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (\Sigma_{i+j=k}^{\infty}\ a_{ij})$$

wobei jede auftretende Reihe absolut konvergent ist.

Produktsatz für Reihen

Wenn $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, dann ist auch $\Sigma_{i,j=0}^{\infty}\ a_i b_j$ absolut konvergent und es gilt $\quad \Sigma_{i,j=0}^{\infty}\ a_i b_j = (\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n) * (\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n)$

Cauchy-Produkt zweier Reihen

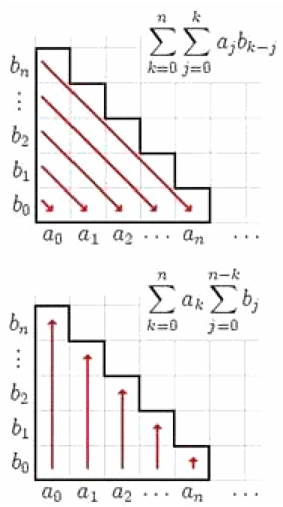
Das Cauchy-Produkt zweier Reihen $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n$ ist die Reihe $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \Sigma_{i+j=n}^{\infty}\ a_i b_j$$

Wenn die Reihen absolut konvergent sind, so ist es auch das Cauchy-Produkt und es gilt

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}\ c_i = (\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Nach dem Satz von Mertens ist es schon ausreichend zu fordern, dass mindestens eine der konvergenten Reihen (a_n) und (b_n) absolut konvergiert damit das Cauchyprodukt konvergiert; nicht notwendiger Weise absolut; und mit $(a_n)(b_n)$ übereinstimmt.
Konvergieren die Reihen (a_n) und (b_n) nur bedingt, so kann es sein, dass das Cauchyprodukt nicht konvergiert.



Satz von Mertens

Sind $A = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ und $B = \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, wobei mindestens eine der beiden absolut konvergiert, so konvergiert das Cauchy-Produkt

$$\Sigma_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \Sigma_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

gegen AB.

Nachweis: Ohne Einschränkung sei A die absolut konvergente Reihe. Zu zeigen ist, dass die Partialsumme $s_n = \Sigma_{k=0}^{n} c_k$ gegen AB konvergiert.
Es sei $A_n = \Sigma_{k=0}^{n} a_k$ und $B_n = \Sigma_{k=0}^{n} b_k$.
(1) AB lässt sich schreiben als $\quad (A - A_n) + \Sigma_{k=0}^{n} b_k$
(2) s_n lässt sich schreiben als $\quad \Sigma_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$
Die Differenzbildung von (1) und (2) ergibt

$$AB - s_n = (A - A_n) B + \Sigma_{k=0}^{n} a_k (B - B_{n-k})$$

Dabei geht $(A - A_n) B$ gegen Null und mit $N = [n/2]$ lässt sich letzte Reihe aufspalten zu $\quad \Sigma_{k=0}^{N} a_k (B - B_{n-k}) + \Sigma_{k=N+1}^{n} a_k (B - B_{n-k}) = P_n + Q_n$
Es gilt $\quad |P_n| \le \Sigma_{k=0}^{N} |a_k|\ |B - B_{n-k}| \le \max_{k\ge N} |B-B_k|\ \Sigma_{k=0}^{N} |a_k| \to 0$
da letzter Ausdruck ein Produkt von einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge ist. Da die Nullfolge $(B - B_k)$ beschränkt sein muss gibt es ein $C > 0$ mit $|B-B_k| < C$ für alle natürlichen k.
Daher ist nach dem Cauchy-Kriterium $\quad |Q_n| \le \Sigma_{k=N+1}^{n} |a_k|\ |B - B_{n-k}| \le C\ \Sigma_{k=N+1}^{n} |a_k| \to 0$
Also gilt $AB - s_n \to 0$ woraus $\quad s_n \to AB$
folgt. Quelle: http://www.mathepedia.de/Satz_von_Mertens.aspx

Unendliche Produkte

Ist (a_n) eine Zahlenfolge, so versteht man unter dem unendlichen Produkt

$$P = \prod_{i=1}^{\infty} a_i = a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

die Folge der Partialprodukte $p_n = a_1\, a_2 \ldots a_n$. Kurzschreibweise: $\Pi\ a_n$
Das unendliche Produkt soll genau dann konvergent heißen, wenn
a) von einer Stelle ab, z.B. für alle $n > n_0$, kein Faktor mehr verschwindet und
b) die hinter dieser Stelle beginnenden Produkte $p_n = a_{n0+1}\, a_{n0+2} \ldots a_n$ mit wachsendem n gegen einen endlichen von 0 verschiedenen Grenzwert streben.
Das Produkt $\Pi\ (1+a_n)$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\Pi\ (1+|a_n|)$ konvergent ist.

Sätze über unendliche Produkte

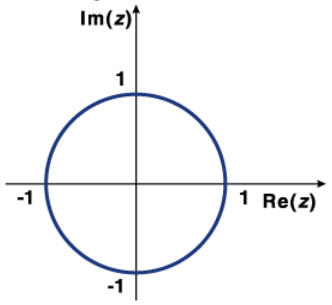
In einem konvergenten unendlichen Produkt strebt die Folge der Faktoren gegen 1.
Ein unendliches Produkt $\Pi\ (1+a_n)$ mit positiven Gliedern a_n ist dann und nur dann konvergent, wenn die Reihe $\Sigma\ a_n$ konvergiert.
Ein Produkt $\Pi\ (1+a_n)$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\Sigma\ a_n$ absolut konvergiert.
Das Produkt $\Pi\ (1+a_n)$ ist genau dann konvergent, wenn die hinter einem passenden Index m begonnene Reihe $\Sigma\ \ln(1 + a_n)$ konvergiert.

Beispiele für konvergente Produkte

$\pi x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^2/k^2) = \sin \pi x$; Euler 1734
$\prod_{k=1}^{\infty} (2k)^2 / (4k^2 - 1) = \pi/2$; Wallis 1655
$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^x / (1 + x/n) = \Gamma(x+1)$; Euler
$\prod_p (1 - 1/p^x)^{-1} = \zeta(x)$, Produkt über alle Primzahlen ; Euler
$\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = 1/2$
$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k}) = 1/(1-x)$
$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/(2k)^2) = 2/\pi$
$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/(2k+1)^2) = \pi/4$
$\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e} / (1 + 1/k) = e^C$, Eulersche Konstante C = 0,577215…

Reihen im Komplexen

Komplexe Reihe $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$, Summe aller Glieder der Folge $\{z_i\}$. Schreibweise: $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \Sigma z_i$, Summenbildung $i = 1,2,\dots,\infty$.
Partialsumme einer komplexen Reihe $s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \Sigma z_i$, Summenbildung $i = 1,2,\dots,n$.
Konvergenz einer Reihe: eine komplexe Reihe konvergiert gegen die Zahl s, falls die Folge der Partialsummen $\{s_i\}$ gegen s konvergiert.
Absolute Konvergenz einer Reihe: Eine komplexe Reihe $\Sigma_i z_i$ konvergiert absolut, falls die Reihe $\Sigma_i |z_i|$ konvergiert.
Komplexe Reihe mit variablen Gliedern; $a_1(z) + a_2(z) + \dots + a_n(z) + \dots$, die Glieder der Folge $\{a_i\}$ sind Funktionen einer komplexen Variablen. Schreibweise: $a_1(z) + a_2(z) + \dots + a_n(z) + \dots = \Sigma a_i(z)$, Summenbildung $i = 1,2,\dots,\infty$.
Gleichmäßige Konvergenz einer komplexen Reihe: $\Sigma_i a_i(z)$ auf einem Gebiet $M \subset C$, falls die Reihe Σc_i mit $c_i \geq |a_i(z)|$ für alle $z \in M$ konvergiert (Weierstraßsches Kriterium).
Kompakte Konvergenz einer komplexen Reihe: $\Sigma_i a_i(z)$ auf einem Gebiet $G \subset C$, falls die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge $M \subset G$ gleichmäßig konvergiert.
Komplexe Potenzreihe: $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$, $a_i \in C$.
Eine Potenzreihe konvergiert entweder absolut für alle $z \in C$ in der ganzen komplexen Ebene oder sie konvergiert absolut innerhalb eines bestimmten Konvergenzkreises und divergiert außerhalb des Konvergenzkreises.



Konvergenzkreis

... Kreis in der komplexen Ebene um den Ursprung mit dem Konvergenzradius R. Die Potenzreihe $1 + z + z^2 + \dots$ hat den Konvergenzradius R = 1. Eine Potenzreihe konvergiert kompakt auf ihrem Konvergenzkreis.
Die Potenzreihe der Exponentialfunktion konvergiert absolut und kompakt auf der ganzen komplexen Ebene.

Grenzwert einer Funktion

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 einen Grenzwert $g \in R \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen g strebt.
$\Leftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon,x_0)$, für das gilt: $|f(x) - g| \leq \varepsilon$ falls $|x - x_0| \leq \delta(\varepsilon,x_0)$

Schreibweise $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$

linksseitiger Grenzwert ... Konvergenz von links rechtsseitiger Grenzwert ... Konvergenz von rechts

Grenzwertsätze für Funktionen

Alle Grenzübergänge erfolgen $x \to x_0$

$\lim [c * u(x)] = c * \lim u(x)$
$\lim [u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x)$
$\lim [u(x) * v(x)] = \lim u(x) * \lim v(x)$
$\lim [u(x) / v(x)] = \lim u(x) / \lim v(x)$, falls $\lim v(x) \neq 0$
$\lim [\sqrt[n]{u(x)}] = \sqrt[n]{[\lim u(x)]}$
$\lim [u(x)^n] = [\lim u(x)]^n$
$\lim c^{u(x)} = c^{\lim u(x)}$; c...reell $\lim \log_c u(x) = \log_c \lim u(x)$

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x = a einen linksseitigen Grenzwert A^-, wenn sie sich bei zunehmenden, unbegrenzt der Zahl a nähernden x-Werten unbegrenzt dem Wert A^- nähert:
$A^- = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$
In Analogie dazu besitzt eine Funktion einen rechtsseitigen Grenzwert A^+, wenn sie sich bei abnehmenden, unbegrenzt der Zahl a nähernden x-Werten unbegrenzt dem Wert A^+ nähert: $A^+ = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$
Die Schreibweise $\lim_{x \to a} f(x) = A$ verlangt, dass der links- und rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen.

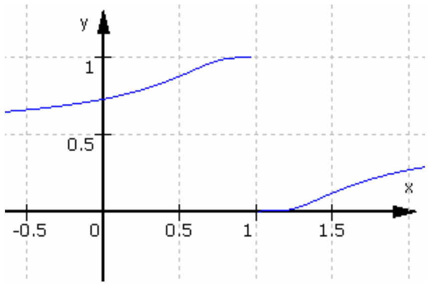
Beispiel

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2-0}{\cos x}=\ln 2$$

Die Funktion $y = 1/(1 + e^{1/(x-1)})$ geht für $x \to 1$ gegen verschiedene Grenzwerte von links und von rechts: $f(1-0) = 1$ und $f(1+0) = 0$.



Regel von l'Hospital

Ist f(a) = u = g(a) = v = 0 bzw. ∞ und existieren in einer Umgebung von a sowohl die Ableitungen von f(x) und g(x) als auch der Grenzwert $x \to a$ für f'(x)/g'(x), so gilt

$\lim_{x\to a} f(x) / g(x) = \lim_{x\to a} f'(x) / g'(x)$

Unbestimmte Ausdrücke der Form

"0 * ∞", "∞ - ∞", "0^0", "∞^0", "1^∞"

sind in die Form "0/0" bzw. "∞ / ∞" umzuwandeln.

Umwandlungen für Funktionen f und g

"0 * ∞"	f * g = f / (1/g)
"∞ - ∞"	f - g = [1/g - 1/f] / [1/f * 1/g]
"0^0", "∞^0", "1^∞"	$f^g = e^{g * \ln f}$ führt zur Form "0 * ∞"

Uneigentlicher Grenzwert … Grenzwert gegen die Werte +∞ bzw. - ∞

Nachweis der Regel von l'Hospital

Behauptung: Ist f(a) = u = g(a) = v = 0 bzw. ∞ und existieren in einer Umgebung von a sowohl die Ableitungen von f(x) und g(x) als auch der Grenzwert $x \to a$ für f'(x)/g'(x), so gilt

$\lim_{x\to a} f(x) / g(x) = \lim_{x\to a} f'(x) / g'(x)$

Nachweis: Da f(a) = g(a) = 0 sind, gilt

f(x) / g(x) = (f(x) - f(a)) / (g(x) - g(a))

Durch Erweitern des Bruches mit (x - a) wird

f(x) / g(x) = (f(x) - f(a)) (x - a)/ ((g(x) - g(a)) (x - a))

Umsortieren der Terme liefert

f(x) / g(x) = (f(x) - f(a)) /(x - a) : ((g(x) - g(a))/(x - a))

Wird nun der Grenzwert $x \to a$ gebildet, so wird

$\lim_{x\to a} f(x) / g(x) = \lim_{x\to a}$ ((f(x) - f(a)) /(x - a) : ((g(x) - g(a))/(x - a))) =

= $\lim_{x\to a}$ (f(x) - f(a)) /(x - a) : ($\lim_{x\to a}$ (g(x) - g(a))/(x - a)) =

Die Grenzwert der Differenzenquotienten sind gerade die Differenzialquotienten an der Stellen x = a, d.h.

$\lim_{x\to a} f(x) / g(x) = f'(a) / g'(a)$ wzzw.

Beispiele zur Regel von l'Hospital

Fall "0/0"

1) $\lim_{x\to 0} \sin x / x = \lim_{x\to 0} \cos x / 1 = \cos 0 = 1$
2) $\lim_{x\to 0} (1-\cos x)/x = \lim_{x\to 0} (1-\cos x)'/x' = \lim_{x\to 0} \sin x / 1 = 0$
3) $\lim_{x\to 1} (x^2 - 1 + \ln x)/(e^x - e) = \lim_{x\to 1} (2x + 1/x) / e^x = 3/e$
4) $\lim_{x\to 0} (2^x - 1) / \sin x = \lim_{x\to 0} (2^x \ln 2 - 0) / \cos x = \ln 2$

Fall "∞/∞"

5) $\lim_{x\to\infty} \ln x / x = \lim_{x\to\infty} 1/x / 1 = 0$
6) $\lim_{x\to\infty} e^x / x = \lim_{x\to\infty} e^x / 1 = \infty$
7) $\lim_{x\to\infty} e^x / x^2 = \lim_{x\to\infty} e^x / (2x) = \lim_{x\to\infty} e^x / 2 = \infty$

Fall "0· ∞"

8) $\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \ln x / 1/x = \lim_{x\to 0} 1/x / (-1/x^2) = \lim_{x\to 0} x = 0$

Fall "∞-∞"

9) $\lim_{x\to\infty} (e^x - x) = \lim_{x\to\infty} e^x (1 - x/e^x) = \lim_{x\to\infty} e^x \lim_{x\to\infty} (1 - x/e^x) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

Fall "∞^0"

10) $\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x / x} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln x/x} = e^0 = 1$

Grenzübergang $x \to 0$

lim sin x / x =1 lim tan x / x =1

lim arctan 1/x = π/2 (rechtsseitiger Grenzwert)

lim arctan 1/x = - π/2 (linksseitiger Grenzwert)

lim $(a^x - 1)/x$ = ln a (a>0) lim x ln x = 0 (rechtsseitiger Grenzwert)

$\lim x^x = 1$ (rechtsseitiger Grenzwert)

Maskelynsche Regel

$\lim \sin x / (x \sqrt[3]{\cos x}) = 1$

Grenzübergang $x \to 1$ $\lim \ln x / (x-1) = 1$

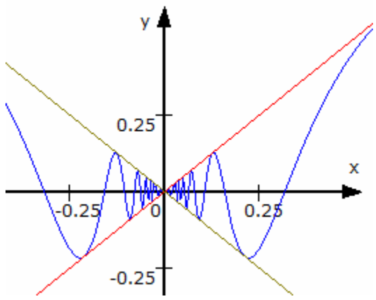
Grenzübergang $x \to a$ $\lim (x^n - a^n)/(x - a) = na^{n-1}$

Grenzübergang $x \to \infty$

$\lim x^n / a^n = 0$; für $a>1$ $\lim x^n / e^n = 0$

$\lim (1+1/x)^x = e$ $\lim (1+x)^{1/x} = 1$

$\lim \sin x / x = 0$



Grenzwert-Beispiel 1

Gegeben sei die Funktion $y = x \sin (1/x)$

Diese Funktion ist für $x_0 = 0$ nicht definiert. Aus dem Bild der Funktion vermutet man $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Findet man ein $\delta > 0$, so dass aus

$|x - 0| = |x| < \delta$

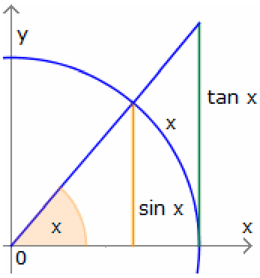
$(f(x) - 0| = | x \sin 1/x | < \varepsilon$

folgt, so ist der Grenzwert nachgewiesen.

Es ist $| x \sin 1/x | = |x| |\sin 1/x|$ und $|\sin x| < 1$

Damit gilt $| x \sin 1/x | \le |x|$

Damit kann man $\varepsilon = \delta$ setzen und erhält das Gewünschte.



Grenzwert-Beispiel 2

Gegeben sei die Funktion $y = \sin x / x$

Diese Funktion ist für $x_0 = 0$ nicht definiert. Gesucht ist der Grenzwert

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x / x$

Für das Intervall $0 \le x < \pi/2$ folgt aus der Abbildung die Ungleichung

$\sin x \le x \le \tan x$

Damit gilt $\sin x \le x \le \sin x / \cos x$

und für $x > 0$ $\cos x / \sin x \le 1/x \le 1 / \sin c$

Nach Multiplikation mit sin x ergibt sich die Ungleichung

$\cos x \le \sin x / x \le 1$

Bei einem Grenzübergang wir damit

$1 = \lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \sin x / x \le 1$

wodurch der gesuchte Grenzwert gleich 1 ist.

Streng genommen wurde nur der rechtsseitige Grenzwert ermittelt. Analog verfährt man für $x < 0$, d.h.

$\lim_{x\to 0} \sin x / x = 1$

Landau-Symbol

Das gegenseitige Verhalten zweier Funktionen bezüglich einer beliebigen Stelle x=a wird durch die Landau-Symbole O ("groß O"), bzw. o ("klein o") wie folgt beschrieben:

Es bedeutet für $x \to a$

$f(x) = O(g(x))$: $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A \ne 0$, A konstant und

$f(x) = o(g(x))$: $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$

wobei auch der Grenzübergang gegen unendlich zugelassen ist. Die Landau-Symbole haben nur Sinn bei gleichzeitiger Vorgabe der Bewegungsrichtung $x \to a$.

Beispiel $\sin x = O(x)$ für $x \to 0$, denn mit $f(x)=\sin x$ und $g(x)=x$ gilt:

$\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, d.h. sin x verhält sich in der Umgebung von x=0 wie die Funktion y=x.

Die Landau-Notation wird auch benutzt, um den Fehlerterm einer Approximation zu beschreiben.

Beispielsweise besagt $e^x = 1 + x + x^2/2 + O(x^3)$ für $x \to 0$,

dass der Absolutbetrag des Approximationsfehler kleiner als eine Konstante mal x^3 für x hinreichend nahe bei Null ist.

formale Defintion siehe

Asymptotische Gleichheit

Zwei Funktionen f(x) und g(x) heißen asymptotisch gleich für $x \to a$, wenn gilt: $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$

Landau-Symbol (2)

Nachfolgend seien f und g entweder Folgen reeller Zahlen, reellwertige Funktionen der reellen Zahlen oder reellwertige Funktionen beliebiger topologischer Räume.

x sei entweder natürlich (Folgen) oder reell, der Grenzwert a entweder ∞ (Folgen) oder reell. Die Landau-Symbole sind dann definiert durch:

Notation	Definition	mathematische Definition
$f(x) \in O(g(x))$	asymptotische obere Schranke	$0 \le \limsup_{x\to a} \lvert f(x)/g(x)\rvert < \infty$

$f(x) \in o(g(x))$	asymptotisch vernachlässigbar	$0 = \lim_{x\to a} \|f(x)/g(x)\|$
$f(x) \in \Omega(g(x))$	asymptotische untere Schranke, d.h. $g(x) \in O(f(x))$	$0 < \liminf_{x\to a} \|f(x)/g(x)\| \leq \infty$
$f(x) \in \omega(g(x))$	asymptotisch dominant, d.h. $g(x) \in o(f(x))$	$\lim_{x\to a} \|f(x)/g(x)\| = \infty$
$f(x) \in \Theta(g(x))$	asymptotisch scharfe Schranke, d.h. sowohl $f(x) \in O(g(x))$ als auch $g(x) \in O(f(x))$	$0 < \liminf_{x\to a} \|f(x)/g(x)\| \leq \ldots \leq \limsup_{x\to a} \|f(x)/g(x)\| < \infty$

Zu beachten ist, dass bei der Landau-Notation das Gleichheitszeichen keine transitive Gleichheit darstellt. In $f(x) = O(g(x))$ ist keine Seite der "Gleichung" durch die andere bestimmt.
Aus $f_1(x) = O(g(x))$ und $f_2(x) = O(g(x))$ folgt nicht, dass f_1 und f_2 gleich sind, genausowenig kann man aus $f(x) = O(g_1(x))$ und $f(x) = O(g_2(x))$ schließen, dass $O(g_1(x))$ und $O(g_2(x))$ dieselbe Klasse sind oder die eine in der anderen enthalten ist.

Beispielaufgabe zu Grenzwerten

1.Putnam-Olympiade 1938: Problem A5

(1) Find $\lim_{x\to\inf} x^2/e^x$.
(2) Find $\lim_{k\to 0} 1/k \int_0^k (1 + \sin 2x)^{1/x}\,dx$.

Lösung

(1) Let $f(x) = x^3e^{-x}$. Then $f'(x) = (3x^2 - x^3)\,e^{-x} < 0$ for $x > 3$. Hence $f(x) < f(3)$ for $x > 3$, so $x^2 e^{-x} < f(3)/x$ for $x > 3$. Hence $x^2 e^{-x}$ tends to zero.
(2) We use L'Hôpital's rule $\lim f(x)/g(x) = \lim f'(x)/g'(x)$. Applied to the expression given it gives $\lim (1 + \sin 2x)^{1/x}$. Write $(1 + \sin 2x)^{1/x} = \exp(1/x \ln(1 + \sin 2x))$. So apply the rule again to $1/x \ln(1 + \sin 2x)$ to get $2 \cos 2x/(1 + \sin 2x)$ which tends to 2. Hence $(1 + \sin 2x)^{1/x}$ tends to e^2 and so does the original expression.

Stetigkeit einer Funktion

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig $\Leftrightarrow$

1. $f(x)$ ist in x_0 definiert
2. der Grenzwert von $f(x)$ mit $x \to x_0$ existiert
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist ... stetig $\Leftrightarrow$ für alle x_0 aus DB stetig
stückweise stetig $\Leftrightarrow$ für alle x_0 aus DB stetig mit Ausnahme endlich vieler Stellen
stückweise glatt $\Leftrightarrow$ stückweise stetige Funktion mit endlich vielen Teilintervallen, in denen $f'(x)$ stetig, aber in den Intervallendpunkten nicht definiert ist, wo jedoch einseitige Grenzwerte existieren.
rechtsseitig stetig $\Leftrightarrow$ der Funktionswert $f(x_0)$ ist an der Stelle x_0 ein rechtsseitiger Grenzwert, aber $f(x)$ ist nicht stetig in x_0
linksseitig stetig $\Leftrightarrow$ der Funktionswert $f(x_0)$ ist an der Stelle x_0 ein linksseitiger Grenzwert, aber $f(x)$ ist nicht stetig in x_0

Stetigkeitssatz

Ist die Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 definiert, dann ist $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig, wenn zu jeder, insbesondere jeder beliebig kleinen, Zahl $\varepsilon > 0$
eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt $|\, f(x) - f(x_0) \,| < \varepsilon$ für alle x mit $|\, x - x_0 \,| < \delta$.
Sind $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig, so auch $f(x) + g(x)$ und $f(x) * g(x)$. Ist zusätzlich $g(x_0) \neq 0$ dann ist auch $f(x) / g(x)$ stetig.

Alle Polynomfunktionen sind stetig. Die rationalen Funktionen sind in den Punkten stetig, an denen der Nenner von Null verschieden ist. Alle durch Potenzreihen darstellbaren Funktionen sind im Konvergenzintervall stetig. Die trigonometrischen Funktionen und die Exponentialfunktion sind stetig.

Unstetigkeitsstellen

Bei reellen Funktionen können verschiedenste Arten von Stellen auftreten, an denen die Funktion unstetig ist oder andere Besonderheiten besitzt. Man unterscheidet:

Lücke, Loch
Eine Lücke liegt vor, wenn die Funktion an der Stelle x_0 nicht definiert ist, aber den Grenzwert $x \to x_0$ besitzt.

Hebbare Lücke
Eine hebbare Lücke hat eine Funktion, wenn sie an der Stelle x_0 nicht definiert ist, aber den Grenzwert $x \to x_0$ besitzt, d.h. links- und rechtsseitiger Grenzwert sind gleich.

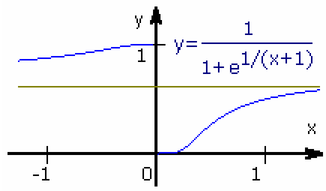
Sprung
Ein Sprung liegt vor, wenn die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist, jedoch die links- und rechtsseitigen Grenzwerte verschieden sind.

Endpunkt
Bricht die Funktion an der Stelle x_0 ab, liegt ein Endpunkt vor.

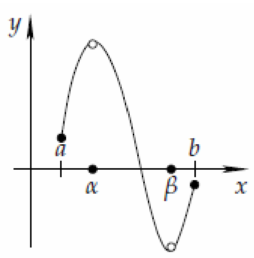
Polstelle
Für eine Polstelle ist die Funktion an der Stelle x_0 nicht definiert und die links- und rechtsseitigen Grenzwerte sind uneigentliche Grenzwerte.

Knickpunkt
Bei einem Knickpunkt an der Stelle x_0 erleidet die erste Ableitung der Funktion einen endlichen Sprung. An dieser Stelle ist die Funktion selbst stetig aber nicht differenzierbar.

Bei mathematischen Kurven unterscheidet man zusätzlich noch:
Asymptotenpunkt
Ein Asymptotenpunkt liegt vor, wenn die Kurve sich spiralförmig windet und dabei dem Asymptotenpunkt beliebig nahe kommt.



Endlicher Sprung
Springt eine Funktion f(x) beim Durchlaufen eines Punktes x = a von einem endlichen auf einen anderen endlichen Wert, so spricht man von einem endlichen Sprung.
Der Wert der Funktion f(x) für x = a braucht dabei nicht definiert zu sein, er kann auch mit dem Wert f(a-0) oder f(a+0) übereinstimmen oder aber auch verschieden sein.
Beispiel:
$f(x) = 1 / (1 + e^{1/x+1})$, endlicher Sprung von 1 auf 0 , f(x) ist in x = 0 nicht definiert



Extremwertsatz von Weierstraß; Satz von Weierstraß
Gilt für ein gegebenes Intervall [a,b] für ein x aus diesem Intervall
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$
so heißt x_1 Minimum von f auf [a,b] und x_2 Maximum von f auf [a,b]
In der Abbildung wäre $f(\alpha)$ das Minimum, $f(\beta)$ das Maximum im Intervall [a,b].

Stetigkeitssatz von Weierstraß
Jede auf [a,b] stetige Funktion hat dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

Satz von Bolzano
Ist eine Funktion f(x) im Intervall [a,b] stetig und haben f(a) und f(b) entgegengesetzte Vorzeichen, so gibt es mindestens ein ξ aus [a,b], für das $f(\xi) = 0$ gilt.

Satz von Fermat
Wenn eine Funktion y = f(x) in einem zusammenhängenden Intervall definiert ist und in irgendeinem inneren Punkt x = c dieses Intervalls ihren größten oder kleinsten Wert besitzt, d.h., wenn für alle x dieses Intervalls gilt: $f(c) > f(x)$ oder $f(c) < f(x)$
und wenn darüber hinaus ihre Ableitung im Punkt c existiert, dann kann diese dort nur gleich Null sein
$$f'(c) = 0$$
Die geometrische Bedeutung des Satzes von Fermat besteht darin, dass eine Funktion, die den Satz erfüllt, bei c eine der Funktionskurve parallel zur x-Achse verlaufende Tangenten besitzt.

Satz von Rolle
Ist eine stetige Funktion f(x) an den Rändern eines Intervalls [a,b] null (d.h. f(a)=0 und f(b)=0), so hat diese Funktion innnerhalb dieses Intervalls mindestens ein Extremum mit f'(x)=0.
Die geometrische Bedeutung des Satzes von Rolle besteht darin, dass eine Funktion y = f(x), die die x-Achse in zwei Punkten A und B schneidet, in diesem Intervall stetig ist und in jedem inneren Punkt eine Tangente besitzt, zwischen A und B wenigstens einen Punkt C besitzt, in dem die Kurventangente parallel zur x-Achse verläuft.
Bei Sprungstellen oder Knicken in (a,b) gilt der Satz von Rolle nicht, da die Differenzierbarkeitsvoraussetzung verletzt ist. Die Funktion muss in den Randpunkten a und b stetig sein. Die Funktion kann bei a und b noch weitere, absolute Extrema besitzen.

Zwischenwertsatz von Bolzano
Eine auf [a,b] stetige Funktion f(x) nimmt jede reelle Zahl r zwischen f(a) und f(b) als Funktionswert an.
Weiterhin gilt: Sind f(x) und g(x) in [a; b] stetig, so sind auch stetig

$c * f\ ;\ c \in R$	$f + c\ ;\ c \in R$	$f \pm g$
$f * g$	f / g , wenn $g \neq 0$ in [a; b] ,	$f^n\ ;\ n \in N$

Beweis des Zwischenwertsatzes
Wenn f: $[a,b] \to R$ auf [a,b] ist, dann nimmt f jeden Wert zwischen f(a) und f(b) an, d.h. für jedes d zwischen f(a) und f(b) existiert ein $c \in [a,b]$ mit f(c) = d.
Beweis
o.B.d.A. sei $\alpha < \beta$ (sonst vertauschen wir beide), weiterhin kann man annehmen f(a) < f(b) (sonst betrachten wir -f statt f). Sei also f(a) < d < f(b) und f stetig in [a,b].
Nun setzen wir $x_1 = a$, $y_1 = b$ und weiter
$$x_2 = (x_1 + y_1)/2\ ,\ y_2 = y_1, \text{ falls } f((x_1 + y_1)/2) < d$$

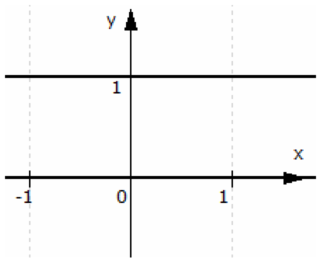
bzw. $x_2 = x_1$, $y_2 = (x_1 + y_1)/2$, falls $f((x_1 + y_1)/2) > d$.
Ist $f((x_1 + y_1)/2) = d$, so sind wir fertig. Sonst haben wir $f(x_2) < d < f(y_2)$ und
$y_2 - x_2 = 1/2\ (y_1 - x_1) = 1/2\ (b - a)$
Nun fahren wir so fort: Haben wir x_n, y_n schon so bestimmt, dass
$f(x_n) < d < f(y_n)$, $y_n - x_n = (1/2)^{n-1}\ (b - a)$,
so setzen wir $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = y_n$, falls $f((x_n + y_n)/2) < d$
bzw. $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, falls $f((x_n + y_n)/2) > d$.
und beenden das Verfahren, falls $f((x_n + y_n)/2) = d$.
Wenn dieser Fall nie eintritt, so bilden die Intervalle $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung. Für die davon erfasste Zahl $c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ folgt wegen $f(x_n) < d$ die Ungleichung $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le d$, und aus $f(y_n) > d$ folgt $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \ge d$. Also ist $f(c) = d$.

Gleichmäßige Stetigkeit
Definition: Ein reelle Funktion f(x) heißt gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich D, wenn gilt:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,z \in D\colon |x-z| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(z)| < \varepsilon$
In dieser Definition hängt der Parameter α nur von ε ab.
Die gleichmäßige Stetigkeit kann damit jedoch nicht mehr für einzelne Punkte definiert werden.
Aus der Definition folgt, dass eine auf D gleichmäßig stetige Funktion auch stetig D ist. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Es gilt aber:

Satz: Sei ein Definitionsbereich D kompakt, d.h. beschränkt und abgeschlossen, und f stetig auf D. Dann ist f auch gleichmäßig stetig auf D.
Insbesondere sind stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen gleichmäßig stetig.
Beispiel: $f(x) = x^2$ und $D = [0,1]$ $\quad |f(x)-f(z)| = |x^2-z^2| = |x+z|\ |x-z| \le 2\ |x-z|$
Für ε wählt man $\delta = \varepsilon/2$. Damit ist f(x) auf [0, 1] gleichmäßig stetig.
Gegenbeispiel: $f(x) = 1/x$ ist auf $D = (0, 1]$ nicht gleichmäßig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit
Die reelle Funktion f(x) heißt Lipschitz-stetig auf dem Definitionsbereich DB, wenn ein $L \ge 0$ existiert, so dass $\quad \forall x, z \in DB\colon |f(x) - f(z)| \ge L|x - z|$
Geometrisch bedeutet die Lipschitzstetigkeit, dass der Anstieg der Sekante an den Graphen an zwei beliebige Punkte aus DB immer kleiner gleich L ist.
Ist f(x) Lipschitz-stetig auf DB, so ist f(x) auch gleichmäßig stetig auf DB.

Eine gleichmäßig stetige Funktion muss nicht Lipschitz-stetig sein.
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und DB = [0, 1]. f ist stetig und der Definitionsbereich kompakt, also ist f(x) gleichmäßig stetig. f ist aber nicht Lipschitz-stetig.
Die Lipschitz-Konstante für $\sqrt{x}$ ist hier $1/(2\ \sqrt{\delta})$. Für x = 0 strebt der Wert gegen Unendlich, d.h. die Funktion ist hier nicht Lipschitz-stetig.
Beispiel 2: $f(x) = x^2$ ist auf DB = [0, 1] Lipschitz-stetig, denn
$|f(x) - f(z)| = |x^2 - z^2| = |(x + z)(x - z)| \le 2\ |x-z|$
da $x + z \le 2$ für alle x, z aus dem Definitionsbereich ist.
Lipschitz-Stetigkeit spielt immer dann eine Rolle, wenn eine Beschränkung von Änderungsraten untersucht wird. Dies ist vor allem bei numerischen Anwendungen und Differenzialgleichungen von Bedeutung.



Dirichlet-Funktion
Die Dirichlet-Funktion D(x) (nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet), oder Dirichletsche Sprungfunktion, wird definiert mit
D(x) = 1 , wenn x rational = 0, wenn x irrational.
Der Graph der Funktion besteht aus zwei parallelen Linien. Beide Linien enthalten unendlich viele Löcher ohne Ausdehnung, weshalb sie in der Darstellung nicht sichtbar sind.
Die Funktion stellt die in den reellen Zahlen dicht liegenden rationalen bzw. irrationalen Zahlen dar.

Die Dirichlet-Funktion ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches unstetig. Sie ist zwar Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar.
Für die Untersummen ergibt sich stets 0, für die Obersummen 1. Im Sinne von Riemann ist eine Funktion nur integrierbar, wenn Ober- und Untersummen gleich groß sind.

Differenzialrechnung

Englisch	differential calculus	Holländisch	differentiaalrekening	Französisch	calcul différentiel
Russisch	дифференциальное	Spanisch	cálculo diferencial	Italienisch	calcolo

	исчисление				differenziale
Dänisch	differentialregning	Griechisch	диафорикоШ логизмоШ	Esperanto	diferenciala kalkulo
Polnisch	rachunek różniczkowy	Schwedisch	differentialkalkyl	Slowenisch	diferencialni račun
Tschechisch	diferenciální počet	Finnisch	differentiaalilaskenta	Portugiesisch	cálculo diferencial

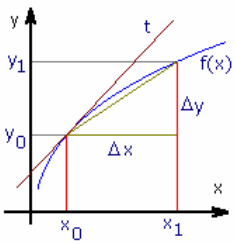
Infinitesimalrechnung


Die Infinitesimalrechnung ist ein wesentlicher Bestandteil der Analysis, eines Teilgebietes der Mathematik.
Sie ist zentrales Hilfsmittel in Natur- und Ingenieurwissenschaften.
Sie wurde unabhängig voneinander von Gottfried Wilhelm Leibniz (rechts) und Isaac Newton (links) entwickelt, die sich darüber später einen Prioritätsstreit lieferten, der jahrzehntelang das Verhältnis zwischen englischen und kontinentalen Mathematikern belastete.
Die Infinitesimalrechnung befasst sich mit mathematischen Funktionen, und untersucht das Verhalten dieser Funktionen auf kleinsten Intervallen. Zur Anschauung ist es hilfreich, sich die Funktionen durch ihren Funktionsgraph vorzustellen. Die Infinitesimalrechnung liefert eine Methode, durch Bildung geeigneter Grenzwerte die Funktion auf beliebig kleinen, d.h. infinitesimalen Abschnitten widerspruchsfrei zu beschreiben Diese Beschreibung des Funktionsverhaltens in infinitesimalen Abschnitten wird in der Differentialrechnung formal behandelt. Anschaulich ist es einsichtig, dass eine derartige Beschreibung der Funktionen im Kleinen es erlaubt, die von Funktionsgraphen eingeschlossenen Flächen zu berechnen. Diese Fragestellung behandelt die Integralrechnung. Bei mehrdimensionalen Funktionen wird aus der Betrachtung infinitesimaler Intervalle die Betrachtung infinitesimaler Oberflächen oder Volumina. Weitere aus der Infinitesimalrechnung abgeleitete Disziplinen sind Differentialgleichungen oder die Funktionentheorie.

1676 schrieb Newton in einem Brief an Leibniz:
"Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invernire et vice versa."
Eine moderne Übersetzung lautet
"Es ist nützlich, Funktionen zu differenzieren und Differentialgleichungen zu lösen."

Dem damaligen Zeitgeist entsprechend verschlüsselte Newton allerdings den lateinischen Satz in der Form des folgenden Anagramms (Buchstabenrätsel): 6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x
Dies bedeutet, dass der Buchstabe a kommt sechsfach vorkommt, das c zweimal usw…
Newtons "fluentes" und "fluxiones" entsprechen heute den Begriffen "Funktionen" und "Ableitungen".
Zur Entzifferung dieses Anagramms ist ebenfalls Genialität erforderlich, wie auch für die Entdeckung der Differential- und Integralrechnung.

Differenzenquotient



Voraussetzung: $f(x)$ sei an der Stelle x_0 definiert

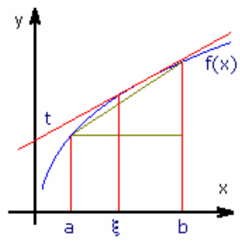
$$D(h) = [f(x_0+h) - f(x_0)] / h = \Delta y / \Delta x$$

Eine Funktion $f(x)$ ist in x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ der Differenzialquotient existiert

$$dy / dx = \lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] / h = f'(x_0)$$

$$dy / dx = \lim_{x\to x0} [f(x) - f(x_0)] / (x - x_0) = f'(x_0)$$

Eine Funktion heißt dann und nur dann an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten existieren und einander gleich sind. Ist eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
Differenzenquotient $\Leftrightarrow$ Anstieg der Sekante
Differenzialquotient $\Leftrightarrow$ Anstieg der Tangente
1.Ableitung $f'(x_0)$ $\Leftrightarrow$ Differenzialquotient in x_0
2.Ableitung $f''(x_0) = [f'(x_0)]' = d^2y / dx^2$
n.Ableitung $f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}(x_0)]' = d^ny / dx^n$
Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 an.



Historische Entwicklung: Isaac Newton (1643 - 1727) mit Hilfe der Momentangeschwindigkeit
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) mit Hilfe des Tangentenproblems
Die Differenzialrechnung befasst sich mit dem infinitesimalen Verhalten von Funktionen. Begriffe wie Ableitung, Differenzial und Differenzierbarkeit von

Funktionen werden erläutert, Differenziationsregeln und Sätze zu Differenziation vorgestellt sowie vielfältige Anwendungen (Kurvendiskussion, Extrema, Nullstellensuche) diskutiert.

Mittelwertsätze der Differenzialrechnung

f(x), g(x) auf [a,b] stetig und auf (a,b) differenzierbar , $g'(x) \neq 0$ für alle x , dann existiert wenigstens ein ξ ($a < \xi < b$) mit

$$[f(b) - f(a)]/(b - a) = f'(\xi) \text{ bzw. } f(x+h) = f(x) + h * f'(x + \tau h)$$

mit a=x, b-a=h und $\xi=x+\tau h$, $(0<\tau<1)$

$$[f(b) - f(a)] / [g(b) - g(a)] = f'(\xi) / g'(\xi)$$

Jede Sehnensteigung der Kurve ist Tangentensteigung in einem Zwischenpunkt.
Die Bezeichnung Mittelwertsatz ist irreführend, es müsste besser "Zwischenwertsatz" heißen, da ξ nur zwischen a und b liegt und nicht in der Mitte des Intervalles.

Linksseitige Ableitung $\lim_{x \to x0-0} [f(x) - f(x_0)] / (x - x_0)$

analog: rechtsseitige Ableitung

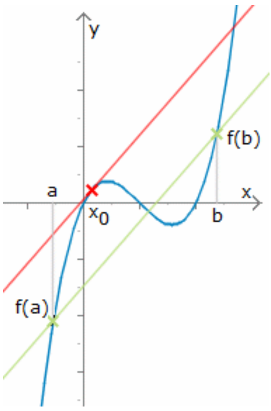
Höhere Ableitungen

$d^2y/dx^2 = y'' = f''(x) = d^2f(x)/dx^2$ ... 2.Ableitung
$d^3y/dx^3 = y''' = f'''(x) = d^3f(x)/dx^3$ ... 3.Ableitung
$dny/dx^n = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ... n.Ableitung

Differenzial einer Funktion y = f(x)

$dy = f'(x)\, dx$ $\quad d^2y = d(dy) = f''(x)\, dx^2$ ... 2.Differenzial

Schreibweise (sehr oft in der Physik genutzt) ... Ableitung nach t: $dx / dt = \dot{x}$



Mittelwertsatz

Es sei f(x) eine im abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion und im offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit:

$$f'(x_0) = (f(b)-f(a)) / (b-a) \qquad (*)$$

Ist h = b-a, so bedeutet das, dass es ein $0 < \theta < 1$ gibt mit

$$f'(x_0 + \theta h) = f(x+h) -f(x)$$

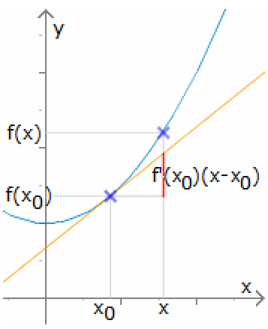
Geometrisch entspricht der Term der rechten Seite von (*) dem Anstieg der Sekante durch die Punkte (a, f(a)) und (b, f(b)). Der Satz sagt damit aus, dass es einen Punkt in [a, b] gibt, so dass der Anstieg der Tangente an die Kurve in diesem Punkt dem Anstieg der Sekante entspricht, d.h. die Tangente ist parallel zur Sekante.

Beweis: Es sei g(x) mit $\quad g(x) = f(x) - (x-a) (f(b)-f(a)) / (b-a)$
eine Hilfsfunktion, für die g(a) = f(a) gilt und

$$g(b) = f(b) - (b-a) (f(b)-f(a)) / (b-a) = (a)$$

Damit erfüllt g(x) die Voraussetzungen für den Satz von Rolle und es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $g'(x_0) = 0$.
Damit ist aber $\quad f'(x_0) - (f(b)-f(a)) / (b-a) = 0$
Folgerung: Ist I ein Intervall und f(x) eine auf differenzierbar I Funktion von I auf R, dann ist f(x) auf I konstant, d.h. f'(x) = 0 auf I.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz:
Es seien f(x) und g(x) in [a, b] stetige Funktionen und in (a, b) differenzierbar. g(x) habe in (a, b) keine Nullstellen. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit: $\quad f'(x_0) / g'(x_0) = (f(b)-f(a)) / (g(b)-g(a))$



Linearisierung einer Funktion

Die Bedeutung der Differenzialrechnung ergibt sich aus der Tatsache, dass sie eine Linearisierung darstellt und lineare Funktionen einfacher zu untersuchen sind.
Funktionen können durch ihre Ableitungen in Punkten durch Geraden angenähert werden. Es gilt:
Existiert für eine Funktion f(x) an der Stelle x_0 die Ableitung $f'(x_0)$, dann ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) (x-x_0) + R(x) (x-x_0)$$

wobei R(x) gegen 0 strebt, wenn x gegen x_0 geht.
Für kleine Werte von R(x) nahe 0 kann das Restglied vernachlässigt werden und der Term für f(x) wird zu einer Geradengleichung.

Beispiel: Die Funktion f(x) = sin x soll für $x_0 = 0$ angenähert werden.
Es ist f'(x) = cos x und somit $\quad f(x) \approx \sin 0 + \cos 0\, (x-0) = x$
Es gilt zum Beispiel sin 0,1 = 0,09983... ≈ 1, womit die Näherung für kleine x sehr gut ist.

Leibnizsche Notation

Es sei y = f(x). $f'(x_0)$ sei die 1.Ableitung an der Stelle x_0. Für $\quad \lim_{h \to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) / h = f'(x_0)$
führte Leibniz die Notation $\quad f'(x_0) = df/dx\, (x_0)$ oder $\quad f'(x_0) = dy(dy\, (x_0)$

ein.
Setzt man $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - p$ und $\Delta y = \Delta f$, dann gilt

$$df/dx\,(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y/\Delta x$$

Diese Bezeichnungsweise wurde von Leibniz außerordentlich glücklich gewählt, da sich wichtige Rechenregeln für Ableitungen und Integrale aus dieser Bezeichnung "von selbst" ergeben. Das ist eine Eigenschaft, die man von jedem guten mathematischen Kalkül erwartet.
Newtons Fluxionsrechnung und Notation, im Inhalt weitestgehend korrekt, konnte sich dagegen auf Grund ihrer komplizierten Form nicht durchsetzen.
Newtons Konzept hatte im Vergleich zu Leibniz jedoch einige begriffliche Ungenauigkeiten.

Beispiel: Differenzenquotient → Differenzialquotient

$$f(x) = \sqrt{x}; \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{a - a - h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{-h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = -\frac{1}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$\lim_{h\to 0} -\frac{1}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Differenziationsregeln für Funktionen f(x)=...

Konstante	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
Faktor	$f(x)=c*v(x)$	$f'(x)=c*v'(x)$
Summe	$f(x)=v(x)\pm u(x)$	$f'(x)=v'(x)\pm u'(x)$
Produktregel		
Produkt	$f(x)=v(x)*u(x)$	$f'(x)=v'(x)*u(x)+v(x)*u'(x)$
3erProdukt	$f(x)=u(x)*v(x)*w(x)$	$f'(x)=u'(x)*v(x)*w(x)+u(x)*v'(x)*w(x)+u(x)*v(x)*w'(x)$
Leibnizsche Produktformel		$f^{(n)}(u(x)\cdot v(x)) = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x)$
Quotientenregel		
Quotient	$f(x)=v(x)/u(x)$	$f'(x)=[v'(x)*u(x)-v(x)*u'(x)]/(u^2(x))$
Kettenregel	$f(x)=u[v(x)]$	$f'(x)=u'[v(x)] * v'(x)$

Im englischsprachigen Raum wird die Produktregel auch als Leibnizsche Regel bezeichnet.

Addition einer Konstanten

Sind die Funktionen f und g differenzierbar im Intervall [a,b] und gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle x dieses Intervalls, so gibt es eine Konstante C, für die gilt: $f = g + C$.

Herleitung der Kettenregel

Für $y = f(\phi(x))$ wird mit $y = f(z)$ und $z = \phi(x)$:

$$dy / dx = d\, f(\phi(x)) / dx = d\, f(z) / dx = d\, f(z) / dz * dz / dx = f'(z) * z'(x) = f'(\phi(x)) * \phi'(x)$$

Ableitungsfunktionen

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
x^n	$n * x^{n-1}$	arsinh x	$1/\sqrt{[1+x^2]}$	$1/x^n$	$- n/x^{n+1}$
arcosh x	$1/\sqrt{[x^2-1]}$	$\sqrt{x}$	$1/(2 * \sqrt{x})$	artanh x	$1/(1-x^2)$ für $\lvert x\rvert<1$
$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x} / (nx)$	arcoth x	$1/(1-x^2)$ für $\lvert x\rvert>1$	$\sqrt[n]{x^m}$	$m/n * \sqrt[n]{x^{m-n}}$
ln(f(x))	f'(x)/f(x)	x^x	$x^x * (\ln x + 1)$	csc x	- csc x cot x
sin x	cos x	sec x	sec x tan x	cos x	- sin x
arcsec x	$1/(x \sqrt{x^2-1})$	tan x	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$	arccsc x	$-1/(x \sqrt{x^2-1})$
cot x	$-1/\sin^2 x = -1 - \cot^2 x$	sech x	- sech x tanh x	e^x	e^x
csch x	- csch x coth x	a^x	$a^x * \ln a$	ln x	1/x
$\log_a x$	$1/(x * \ln a)$	arcsin x	$1 / \sqrt{1- x^2}$	arccos x	$- 1 / \sqrt{1- x^2}$
arctan x	$1 / (1+ x^2)$ für $\lvert x\rvert<1$	arccot x	$-1 / (1+ x^2)$ für $\lvert x\rvert<1$	sinh x	cosh x
cosh x	sinh x	tanh x	$1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$	coth x	$-1/\sinh^2 x = 1 - \coth^2 x$

Differenziationsregeln, Beispiele

1) $f(x) = 2x \cdot \sin x$	$f'(x) = 4x \sin x + 2x \cos x$
2) $g(t) = 2t^2 / \sin t$	$f'(x) = (4t \sin t - 2t^2 \cos t)/\sin^2 t$
3) $h(x) = (4 - 5x^2)^3$	$h'(x) = -30x\,(4 - 5x^2)^2$
4) $f(x) = 2t^2\, x \sin x$	$f'(x) = 2t^2 \sin x + 2t^2 x \cos x$
5) $g(t) = 2a^2t^2 /((a-1) \cos t)$	$g'(t) = 2a^2\,(2t \cos t + t^2 \sin t)/((a-1) \cos^2 t)$
6) $h(x) = (t^2 - t^3x^2)^3$	$h'(x) = - 6t^3x\,(t^2 - t^3x^2)^2$
7) $f(x) = \sqrt{2 - 4x}$	$f'(x) = -2/\sqrt{2 - 4x}$
8) $g(t) = G - ae^{-kt}$	$g'(t) = ak\, e^{-kt}$
9) $h(x) = (x-1)\, e-1/2\, x^2$	$h'(x) = (-x^2 + x + 1)\, e^{-1/2\, x^2}$
10) $f(x) = t\,(x^3 - 2x^2 +3)/x^2 = t(x - 2 + 3/x^2)$	$f'(x) = t(1 - 6/x^3)$

11) $f(x) = 5 / (2x - 1)^2 = 5(2x-1)^{-2}$ $f'(x) = -20 / (2x - 1)^3$

1) $f(x) = x / (x^2-1)$ $f'(x) = -x^2 / (x^2-1)^2$
2) $g(x) = (12x-x^2-6) / (x^2+3)$ $g'(x) = (-12x^2+6x+36) / (x^2+3)^2$
3) $h(x) = (x-3) \sqrt{x}$ $h'(x) = (3x-3) / (2 \sqrt{x})$
4) $f(x) = \cos x \sqrt{x}$ $f'(x) = \sqrt{x}/(2x) (\cos x - 2x \sin x)$
5) $g(x) = 3x \tan x$ $g'(x) = 3 (x \tan^2 x + \tan x + x)$
6) $h(x) = (4x+1) / x$ $h'(x) = -1/x^2$
7) $f(x) = x / (4x+1)$ $f'(x) = 1 / (4x+1)^2$
8) $g(x) = (x^3-1) / (2x^2)$ $g'(x) = (x^3+2) / (2x^3)$
9) $h(x) = x / \cos x$ $h'(x) = (\cos x + x \sin x) / \cos^2 x$
10) $f(x) = x^e e^x$ $f'(x) = e^x x^{e-1} (e + x)$
11) $f(x) = x \ln x$ $f'(x) = 1 + \ln x$
12) $f(x) = 1/x \sin x$ $f'(x) = (x \cos x - \sin x) / x^2$

Herleitung von Ableitungsregeln

Hinweis: alle Grenzübergänge erfolgen für $\Delta x \to 0$

Konstante Funktion

$y = c$
$y' = \lim \Delta y / \Delta x = \lim (f(x + \Delta x) - f(x)) /\Delta x = \lim (c - c) /\Delta x = \lim 0/\Delta x = \lim 0 = 0$

Ableitung von $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$

$y = x^n$

Hilfsbeziehung:

$a^2 - b^2 = (a - b) (a + b)$
$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$ ...
$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + ... + a b^{n-2} + b^{n-1}) \quad | :(a - b)$
$(a^n - b^n) /(a - b) = a^{n-1} + a^{n-2} b + ... + a b^{n-2} + b^{n-1}$ ... n Glieder
$a = x + \Delta x$; $b = x$
$y' = \lim (f(x + \Delta x) - f(x)) /\Delta x = \lim ((x + \Delta x)^n - x^n) /\Delta x =$
$= \lim (\Delta x ((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + ... + x^{n-1})) /\Delta x =$
$= \lim ((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + ... + x^{n-1}) = x^{n-1} + x^{n-2} x + x^{n-3} x^2 + ... + x^{n-1} =$
$= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + ... =$ ... n Glieder
$= n * x^{n-1}$

Regel gilt auch für nicht natürliche Exponenten

Herleitung von Ableitungsregeln

Hinweis: alle Grenzübergänge erfolgen für $\Delta x \to 0$

Ableitung von $y = a * x^n$, $a \in \mathbf{R}$ ... konstanter Faktor

$y' = \lim \Delta y / \Delta x = \lim [f(x + \Delta x) - f(x)] /\Delta x =$
$= \lim [a (x + \Delta x)^n - a * x^n] /\Delta x = \lim [a [(x + \Delta x)^n - x^n]] /\Delta x =$
$= a \lim [(x + \Delta x)^n - x^n] /\Delta x = a * n * x^{n-1}$
$y = a * f(x)$
$y' = a * f'(x)$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Ableitung einer Summe (Differenz):

$y = u(x) + v(x) = f(x)$

Behauptung: $y' = u'(x) + v'(x)$

Voraussetzung:

$\exists\, u'(x) = \lim [u(x + \Delta x) - u(x)] /\Delta x$
$\exists\, v'(x) = \lim [v(x + \Delta x) - v(x)] /\Delta x$

Beweis: $y' = \lim [f(x + \Delta x) - f(x)] /\Delta x = \lim [[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]] /\Delta x =$
$= \lim [[u(x + \Delta x) - u(x)] /\Delta x + [v(x + \Delta x) - v(x)] /\Delta x] =$
$= \lim [u(x + \Delta x) - u(x)] /\Delta x + \lim [v(x + \Delta x) - v(x)] /\Delta x = u'(x) + v'(x)$

Ableitung einer Summe (Differenz) = Summe (Differenz) der Ableitungen

Hinweis: alle Grenzübergänge erfolgen für $\Delta x \to 0$

Produktregel

$y = u(x) * v(x) = f(x)$
$y'= u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$

Voraussetzung

$\exists\, u'(x) = \lim [u(x + \Delta x) - u(x)] /\Delta x$
$\exists\, v'(x) = \lim [v(x + \Delta x) - v(x)] /\Delta x$

Beweis $y' = \lim [f(x + \Delta x) - f(x)] /\Delta x = \lim [u(x + \Delta x) * v(x + \Delta x) - u(x) * v(x)] /\Delta x =$
$= \lim [u(x + \Delta x) * v(x + \Delta x) - u(x) * v(x + \Delta x) + u(x) * v(x + \Delta x) - u(x) * v(x)] /\Delta x =$
$= \lim [v(x + \Delta x) [u(x + \Delta x) - u(x)] + u(x) [v(x + \Delta x) - v(x)]] /\Delta x =$
$= \lim [v(x + \Delta x) [u(x + \Delta x) - u(x)] /\Delta x] + \lim [u(x) [v(x + \Delta x) - v(x)] /\Delta x] = v(x) * u'(x) + u(x) * v'(x)$

Quotientenregel

$$y = u(x) / v(x) = f(x)$$
$$y' = [u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)] / [v(x)^2] = f'(x)$$

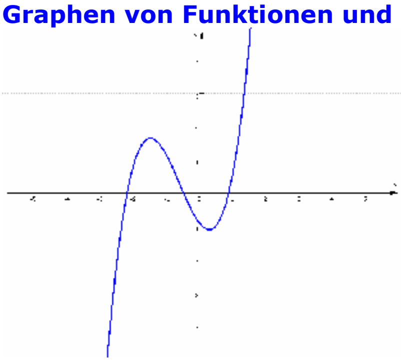
Voraussetzung

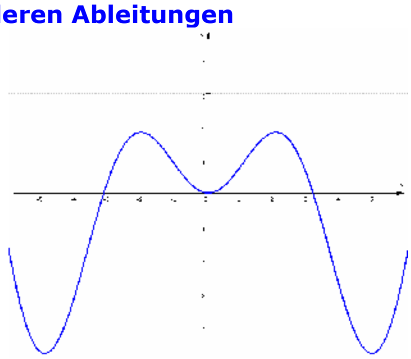
$$\exists\ u'(x) = \lim\ [u(x + \Delta x) - u(x)] / \Delta x$$
$$\exists\ v'(x) = \lim\ [v(x + \Delta x) - v(x)] / \Delta x$$

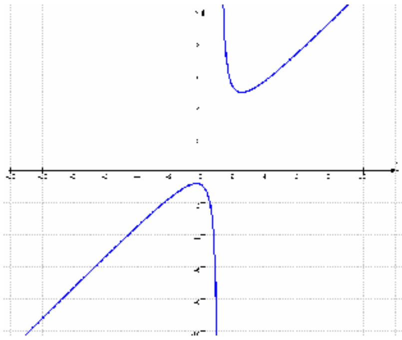
Beweis $u(x) / v(x) = f(x) \qquad | *v(x)$

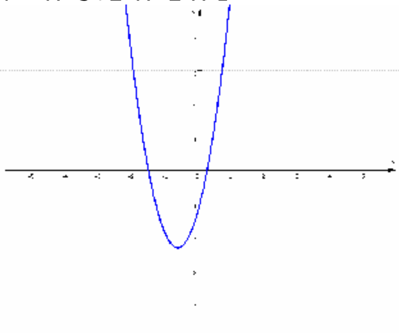
$$u(x) = f(x) * v(x) \qquad | \text{ 1.Ableitung}$$
$$u'(x) = f'(x) * v(x) + f(x) * v'(x)$$
$$f'(x) * v(x) = u'(x) - f(x) * v'(x) \qquad | :v(x)$$
$$f'(x) = [u'(x) - f(x) * v'(x)] / [v(x)]$$
$$f'(x) = [u'(x) - u(x)/v(x) * v'(x)] / [v(x)] = [\ [u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)] / [v(x)]\ ] / [v(x)] =$$
$$= [u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)] / [v^2(x)]$$

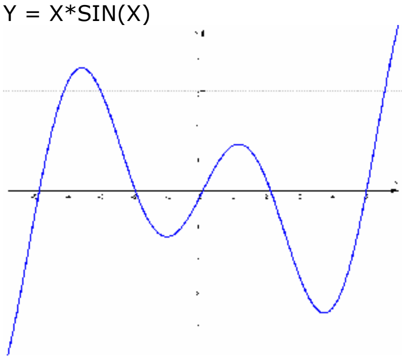
Graphen von Funktionen und deren Ableitungen

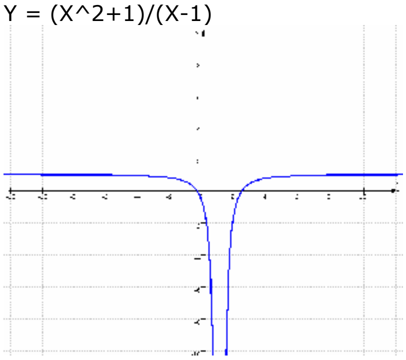

Y = X^3+2*X^2-X-1

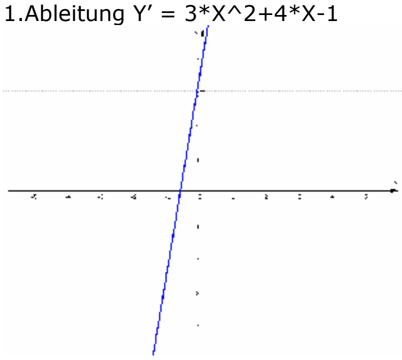

Y = X*SIN(X)

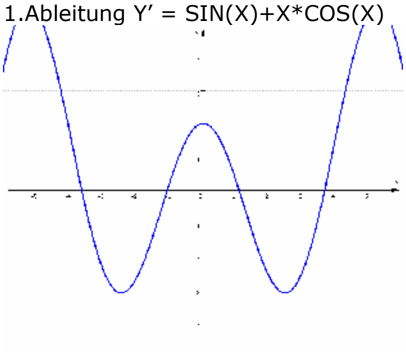

Y = (X^2+1)/(X-1)

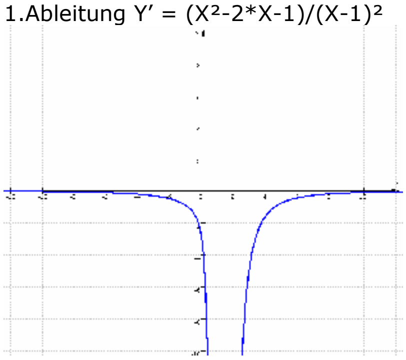

1.Ableitung Y' = 3*X^2+4*X-1


1.Ableitung Y' = SIN(X)+X*COS(X)


1.Ableitung Y' = (X²-2*X-1)/(X-1)²


2.Ableitung Y'' = 6*X+4


2.Ableitung Y'' = 2*COS(X)-X*SIN(X)


2.Ableitung Y'' = (-8*X²+4*X-4)/(X-1)^4

Ableitung inverser Funktionen

Wenn $y = \phi(x)$ die inverse Funktion zur ursprünglichen Funktion $f(x)$ ist, dann gilt:
Die beiden Darstellungen $y = f(x)$ und $x = \phi(y)$ sind äquivalent. Unter der Voraussetzung $\phi'(y) \neq 0$ besteht dann die folgende Beziehung zwischen den Ableitungen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion ϕ.

$$f'(x) = 1/\phi'(x) \quad \text{bzw.} \quad dy/dx = 1/(dx/dy)$$

Beispiel: Die Funktion $y = f(x) = \arcsin x$ ist für $-1 < x < 1$ der Funktion $x = \phi(y) = \sin y$ mit $-\pi/2 < y < \pi/2$ äquivalent. Damit wird $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{(1 - \sin^2 y)} = 1/\sqrt{(1 - x^2)}$

n.te Produktregel

Für n-mal differenzierbare Funktionen u(x) und v(x) gilt für die n.te Ableitung des Produktes:

$$(u(x)*v(x))^{(n)} = \binom{n}{0} u(x)^{(n)}v(x) + \binom{n}{1} u(x)^{(n-1)}v'(x) + \binom{n}{2} u(x)^{(n-2)}v''(x) + \ldots$$

$+ \binom{n}{n-1} u'(x)v(x)^{(n-1)} + \binom{n}{n} u(x)v(x)^{(n)}$

Logarithmische Differenziation

Im Falle von $y(x) > 0$ kann man zur Berechnung der Ableitung y' von der Funktion ln y(x) ausgehen, für deren Ableitung unter Berücksichtigung der Kettenregel gilt: $d(\ln y(x)) / dx = 1/y(x) * y'$

Daraus folgt unmittelbar $y' = y(x)\, d(\ln y) / dx$

Mit Hilfe der logarithmischen Differenziation lassen sich viele Differenziationsaufgaben wesentlich vereinfachen bzw. überhaupt erst durchführen. Letzteres trifft z.B. auf Funktionen der Form $y = u(x)^{v(x)}$ mit $u(x) > 0$ zu.

$y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v(x) \ln u(x) \Rightarrow y'/y = v'(x) \ln u(x) + v(x)\, u'(x)/u(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = u(x)^{v(x)} [\, v'(x) \ln u(x) + v(x)\, u'(x) / u(x)\,]$

Die logarithmische Differenziation wird häufig angewendet, wenn ein Produkt von Funktionen zu differenzieren ist.

Beispiel $y = \sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}$

$\ln y = 1/2\, (3 \ln x + 4 x + \ln \sin x)$

$y' / y = 1/2\, (3/x + 4 + \cos x/\sin x)$

$y' = 1/2 \sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}\, (3/x + 4 + \cos x/\sin x)$

Differenziation in Parameterform

gegeben: $x = x(t)$ und $y = y(t)$ $\quad dy / dx = (dy/dt) / (dx/dt) = \dot y / \dot x$

$d^2y / dx^2 = (\ddot y\, \dot x - \ddot x\, \dot y) / [\, \dot y\,]^3$

Differenziation in Polarkoordinaten

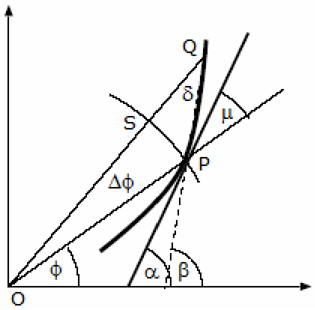
$y' = (dr/d\phi \sin \phi + r \cos \phi) / (dr/d\phi \cos \phi - r \sin \phi)$

Differenziation einer Vektorfunktion

Vektorfunktion $v=v(t)$ der Skalaren t

Komponentendarstellung $\quad v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

Ableitung $\quad dv/dt = dv_x/dt\, \vec{i} + dv_y/dt\, \vec{j} + v_z/dt\, \vec{k}$



Differenziation in Polarkoordinaten

Ist eine Kurve in Polarkoordinaten $r = r(\phi)$ gegeben, so kann man $r'(\phi)$ nach den üblichen Ableitungsregeln berechnen.

Aber $r'(\phi)$ ist nun nicht die Steigung der Tangente an das Schaubild. Denn nach der Grundformel muss man den Grenzwert des Differenzenquotienten bilden, also $dr/d\phi = \lim_{\Delta\phi\to 0} \Delta r/\Delta\phi = \lim_{\Delta\phi\to 0} (r(\phi + \Delta\phi) - r(\phi))/\Delta\phi$

Nun ist aber $r(\phi) = OP$, $r(\phi + \Delta\phi) = OQ$, $\Delta r = r(\phi + \Delta\phi) - r(\phi) = SQ$ und für kleine $\Delta\phi$ ist PQS ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei S und $SP = r\, \Delta\phi$. Für den Winkel $\delta = \angle PQS$ ergibt sich damit $\tan \delta = r\Delta\phi / \Delta r$

Steigung der Tangente: Diese ist die Grenzlage der Sekante PQ, die den Steigungswinkel β besitzt. Für diesen gilt $\beta = \delta + (\phi + \Delta\phi)$

Im Grenzfall $\Delta\phi \to 0$ wird $\delta \to \mu$ und $\beta \to \alpha$, und mit $\alpha = \mu + \phi$

$\tan \mu = r\, d\phi/dr = r(\phi)/r'(\phi)$

dabei ist μ der Winkel zwischen OP und der Tangente.

Implizites Differenzieren - Beispiel

Aufgabe: Gegeben ist die Kreisgleichung $F(x,y) = (x-4)^2 + (y+5)^2 - 25 = 0$

d.h., ein Kreis um den Mittelpunkt $(x_0,y_0) = (4,-5)$ mit Radius 5. Gesucht ist die Steigung im Punkte $(x,y) = (7,-1)$. Man differenziert jeden einzelnen Term der Gleichung nach x. Ist die Funktion F identisch Null ist, dann ist auch die Ableitung von F nach x Null: $2(x-4) + 2(y+5)\cdot y' - 0 = 0$

Auflösen nach y' ergibt $y' = - (x-4)/(y+5)$

und nach Einsetzen des Punktes ist die Steigung $y' = -3/4$.

Aufgabe 2: Gesucht ist die Ableitung der Funktion y(x), die implizit durch die Gleichung

$e^y - e^{2x} = x\cdot y$

definiert ist. Differenziation ergibt $e^y \cdot y' - e^{2x}\cdot 2 - (1\cdot y + x\cdot y') = 0$

Auflösen $y' = (2\, e^{2x} + y)/(e^y - x)$

Aufgabe 3: Gesucht ist die Ableitung der Funktion y(x):

$x \cdot \sin 2y = 1 - 3 y^2$

Differenziation liefert $1 \cdot \sin 2y + x \cos 2y \cdot 2y' - 0 + 3 \cdot 2y \cdot y' = 0.$

Auflösen $y' = -\sin 2y / (2x \cos 2y + 6y)$

Aufgabe: $y = e^{-x} * \sqrt{(1-x) /(1+x)}$

1.Methode

$y' = e^{-x} * (-1) * \sqrt{(1-x) /(1+x)} + e^{-x} * ½ ((1-x) /(1+x))^{-1/2} * (-(1+x)-(1-x)) /(1+x)^2 =$

$= -e^{-x} * \sqrt{(1-x) /(1+x)} + e^{-x} * 1/(2\sqrt{(1-x) /(1+x)}\,) * (-1-x-1+x) /(1+x)^2 =$

$= e^{-x} * (-\sqrt{(1-x) /(1+x)} -2 /(2\sqrt{(1-x) /(1+x)} * (1+x)^2)) =$

$= e^{-x} * (-\sqrt{(1-x) /(1+x)} - 1/(\sqrt{(1-x) /(1+x)} * (1+x)^2)) =$

$= e^{-x} * ((-(1-x) /(1+x) * (1+x)^2 - 1) /(\sqrt{(1-x) /(1+x)} * (1+x)^2)) =$
$= e^{-x} * (-(1-x^2) - 1) /(\sqrt{(1-x) /(1+x)} * (1+x)^2) =$
$= e^{-x} * (x^2-2) /(\sqrt{(1-x) /(1+x)} * (1+x)^2) =$
$= e^{-x} * (x^2-2) \sqrt{(1-x) /(1+x)} /((1-x) /(1+x) * (1+x)^2) =$
$= e^{-x} * (x^2-2) \sqrt{(1-x) /(1+x)} /(1-x^2)$

2.Methode

$y = e^{-x} * \sqrt{(1-x) /(1+x)}$ | ln
$\ln y = -x + ½ \ln (1-x) - ½ \ln (1+x)$ | '
$1/y * y' = -1 + ½ * 1/(1-x) * (-1) - ½ * 1/(1+x)$
$1/y * y' = -1 - 1/(2 (1-x)) - 1/(2 (1+x))$
$1/y * y' = (-2 (1-x)(1+x) - (1+x) - (1-x)) /(2 (1-x^2))$
$1/y * y' = (-2 + 2x^2 - 1 - x - 1 + x) /(2 (1-x^2))$
$1/y * y' = (-4 + 2x^2) /(2 (1-x^2)) = (2 (x^2-2)) /(2 (1-x^2)) = (x^2-2) /(1-x^2)$
$y' = (x^2-2) /(1-x^2) * e^{-x} * \sqrt{(1-x) /(1+x)} =$
$= e^{-x} * (x^2-2) \sqrt{(1-x) /(1+x)} /(1-x^2)$

Partielle Ableitung

Hängt die Funktion f = f(x, y, v, …) von x und weiteren Variablen y, v, … ab, dann erhält man die partielle Ableitung $\partial f/\partial x$, indem man nur x als Variable auffasst, alle anderen Variablen als Konstanten betrachtet und nach x differenziert.
Für Funktion f(x,y) = z ist

$\partial f(x,y) / \partial x = \partial f / \partial x = f_x$ ist die partielle Ableitung nach x
$\partial f(x,y) / \partial y = \partial f / \partial y = f_y$ ist die partielle Ableitung nach y
$f_{xx} = \partial^2 z/\partial x^2$ $\quad f_{yy} = \partial^2 z/\partial y^2$
$f_{xy} = \partial^2 z/(\partial x\, \partial y)$ $\quad f_{yx} = \partial^2 z/(\partial y\, \partial x)$

Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$
Totales Differenzial $dz = \partial z/\partial x\, dx + \partial z/\partial y\, dy$ $\quad df = f_x\, dx + f_y\, dy$
Kettenregel $\partial f/\partial w = f_x\, \partial x/\partial w + f_y\, \partial y/\partial w$
Beispiele

Differenziation der Umkehrfunktion

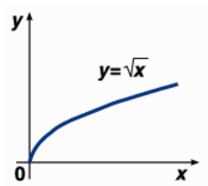
Ist x = g(y) Umkehrfunktion von y = f(x) $\Rightarrow f'(x) \cdot g'(y) = 1$

Differenziation impliziter Funktionen f(x,y) = 0

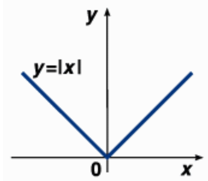
$dy/dx = y' = - (\partial f / \partial x) / (\partial f / \partial y) = - f_x / f_y$
$y'' = - (f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2) / f_y^3$

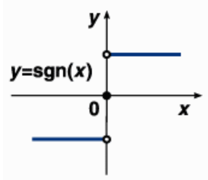
Partielle Ableitung, Beispiele

(1) $f(x, y) = x^2 \cdot y^3 + x + y^2$ $\quad \partial f/\partial x (x, y) = 2x \cdot y^3 + 1$
$\partial f/\partial y (x, y) = x^2 \cdot 3y^2 + 2y$
(2) $f(x, y) = \sin (x^2 - y)$ $\quad \partial f/\partial x (x, y) = \cos (x^2 - y) \cdot 2x$
$\partial f/\partial y (x, y) = -\cos (x^2 - y)$
(3) $f(x, y) = \ln (2x + 4/y)$ $\quad \partial f/\partial x (x, y) = 2 / (2x + 4/y)$
$\partial f/\partial y (x, y) = -4 y^{-2} / (2x + 4/y)$
(4) $U = R \cdot I$ $\quad \partial U/\partial R = I$
$\partial U/\partial I = R$
(5) $W = 1/q\, v_0^2 \sin (2\alpha)$ $\quad \partial W/\partial v_0 = 1/g\, 2 v_0 \sin (2\alpha)$
$\partial W/\partial \alpha = 1/g\, v_0^2 \cos (2\alpha)\, 2$
(6) $p = R \cdot T/V$ $\quad \partial p/\partial V = -R\, T/V^2$
$\partial p/\partial T = R / V$



Differenzierbare Funktionen





Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit einer Funktion ist ihre Stetigkeit an dieser Stelle. Differenzierbare Funktionen sind anschaulich "glatte" Kurven.
Eine Funktion ist in einem Punkt nicht differenzierbar, wenn sie dort unstetig ist.
Weist die Kurve einen Knick auf, dann existieren nur die linksseitige und rechtsseitige Ableitung, d.h. die Steigung der Tangente ändert sich an der Knickstelle sprunghaft.

Nicht differenzierbare Funktionen in x = 0 sind zum Beispiel die Wurzelfunktion (oben), die Betragsfunktion (Mitte) und die Signum-Funktion (unten).
Die Betragsfunktion $y = |x|$ ist im Punkt x = 0 nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitige Ableitung unterschiedlich sind; -1 bzw. +1. Sie ist jedoch an dieser Stelle stetig!
Die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ ist im Punkt x = 0 nicht differenzierbar, da die Steigung nicht endlich ist (die Tangente verläuft senkrecht zur x-Achse). Ist f(x) in jedem Punkt des Definitionsbereiches

differenzierbar, so heißt sie differenzierbar. Differenzierbare Funktionen sind ax^n, sin x, cos x, e^x und alle algebraischen Ausdrücke davon.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Intuitiv erkennt man eine stetige Funktion daran, dass ihr Graph keine Sprungstellen hat. Da der Graph einer differenzierbaren Funktion keine Knicke hat, ist zu erwarten, dass eine differenzierbare Funktion stetig ist.

Satz: Ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Der Beweis dieser Behauptung ist einfach: Sei f an der Stelle x differenzierbar, und sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen $x_n \in J$, die gegen x konvergiert, d.h. für die

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x) = 0$$

gilt. Dann existiert der Grenzwert

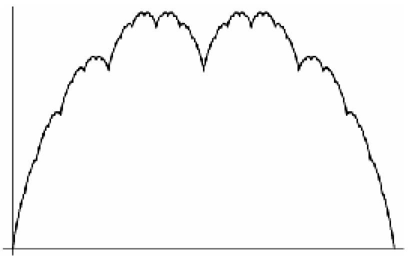
$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(x)/(x_n - x) = c$$

Multiplikation ergibt

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(x)) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Dies ist gerade die Stetigkeit von f an der Stelle x: Wann immer eine Folge gegen x konvergiert, so konvergiert die Folge der Funktionswerte gegen f(x). Damit ist der Satz bewiesen.
Weiterhin gilt: Existiert an einer Stelle die rechtsseitige (linksseitige) Ableitung einer Funktion, so ist diese dort rechtsstetig (linksstetig).

Die Ableitung einer Funktion, die selbst wieder eine Funktion ist, ist nicht unbedingt stetig.
Definition: Eine in einem offenen Intervall A differenzierbare reelle Funktion heißt an der Stelle $x \in A$ stetig differenzierbar, wenn ihre Ableitungsfunktion an der Stelle x stetig ist.
Außerdem gibt es Funktionen, die zwar stetig, aber an keiner Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar sind!



Nichtdifferenzierbare Funktion

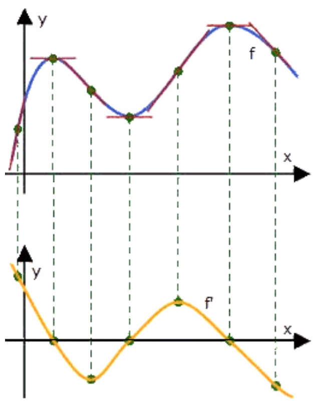
Besitzt der Graph einer Funktion an einer Stelle einen Knick, so ist sie dort nicht differenzierbar. Zum Beispiel ist die Betragsfunktion zwar stetig, aber am Knickpunkt nicht differenzierbar.
Erstaunlich ist, dass es auch Funktionen gibt, die stetig, aber in keinem einzigen Punkt differenzierbar sind.

Eine derartige Funktion (Abbildung) entsteht als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen Dreiecksfunktionen.
Bezeichnet man mit g die Funktion, die im Intervall [-1/2 , 1/2] mit der Betragsfunktion |x| übereinstimmt und mit Periode 1 für alle reellen Zahlen fortgesetzt wird, so besitzt ihr an allen ganzzahligen Vielfachen von 1/2 einen Knick, besteht aber sonst nur aus Geradenstücken.

Die Abbildung von g(2x)/2 ist ebenfalls eine Dreiecksfunktion, nur mit halb so großer Periode. Ganz allgemein sind die $g(2^n x)/2^n$ alle vom gleichen Typ, jedoch mit kleiner werdender Periode.
Die aus diesen Funktionen gebildete eine Reihe

$$f(x) = g(x) + g(2x)/2 + g(4x)/4 + g(8x)/8 + \ldots$$

stellt selbst eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion dar.
Im Grenzwert ergibt sich eine Funktion, die Blanc-mange Kurve genannt wurde, und erstmals 1903 von Takagi und 1930 von van der Waerden untersucht wurde. Diese seltsame Funktion besitzt fraktale Eigenschaften.
Auch die Reihe $f(x) = \sin(x) + 2^{-1/2} \sin(2x) + 2^{-1} \sin(2^2 x) + 2^{-3/2} \sin(2^3 x) + 2^{-2} \sin(2^4 x) + \ldots$ ergibt eine zwar stetige aber an keiner Stelle differenzierbare Funktion.



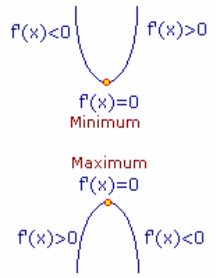
Funktionsdiskussion

Eine Funktionsdiskussion ist eine Untersuchung einer Funktion auf besondere Punkte (Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen), auf besondere Eigenschaften (Periodizität, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen) usw.

Vorgehensweise

1. Bestimmung des Definitionsbereiches
2. Bestimmung der Nullstellen (mit der x-Achse)
3. Bestimmung der Unstetigkeitsstellen bzw. der Grenzwerte der Funktion (falls möglich) an den Rändern des Definitionsbereiches
4. Bestimmung der Ableitung an den Rändern des Definitionsbereiches
5. Bestimmung des qualitativen Verlaufs des Graphen mit relativen Extremwerten (Nullstellenmenge von f'(x))
6. Bestimmung der Wendepunkte (Nullstellenmenge von f''(x))
7. Bestimmung von Monotonieintervallen (einheitlich in den Bereichen zwischen den Nullstellen von f'(x))

8. Bestimmung von Konvexitäts- und Konkavitätsbereichen



Extremstellen,Extremum
f(x) hat an der Stelle x_0 ein
lokales Maximum $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0\ \forall x\neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$
lokales Minimum $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0\ \forall x\neq x_0$: $f(x) > f(x_0)$
globales Maximum $\Leftrightarrow \forall x \in$ DB, $x\neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$
globales Minimum $\Leftrightarrow \forall x \in$ DB, $x\neq x_0$: $f(x) > f(x_0)$

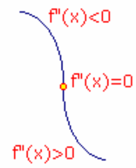
Globaler Extremwert
Eine Funktion hat einen globalen Extremwert, wenn es im gesamten Definitionsbereich keinen x-Wert gibt, für den es einen noch größeren oder noch kleineren Funktionswert gibt, als den Extremwert
Lokaler Extremwert
Eine Funktion hat einen lokalen Extremwert, wenn der Funktionswert nur in einer bestimmten Umgebung extrem ist

Hinreichendes Kriterium f(x) hat an der Stelle x_0
ein lokales Maximum $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$ oder f''(x) wechselt das Vorzeichen von + nach -
ein lokales Minimum $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$ oder f''(x) wechselt das Vorzeichen von - nach +
Hat die differenzierbare Funktion f(x) bei x_0 einen Extremwert, so ist notwendigerweise $f'(x_0) = 0$. Jeder Punkt einer Funktion mit $f'(x)=0$ heißt kritischer oder stationärer Punkt der Funktion y=f(x).

Gleichung der Tangente
Tangentengleichung an eine Funktion f(x) im Punkt $(x_0, f(x_0))$ $\qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Monotonieverhalten einer Funktion
f(x) streng monoton wachsend in [a;b] $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a;b]$
f(x) streng monoton fallend in [a;b] $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a;b]$

Krümmung , Konvexitätskriterium



Konvexitätskriterium: Ist die erste Ableitung f'(x) einer Funktion f(x) in einem Intervall [a,b] monoton steigend, d.h. die zweite Ableitung $f''(x) > 0$, so heißt die Funktion f(x) konvex auf [a,b].
Konkavität: Eine Funktion f(x) heißt konkav auf [a,b], wenn -f(x) dort konvex ist.
f(x) ist konvex $\Leftrightarrow$ f'(x) monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$
f(x) ist konkav $\Leftrightarrow$ f'(x) monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [a;b]$

Wendestelle … Wechsel der Krümmung
f(x) hat an der Stelle x_0 eine Wendestelle $\Leftrightarrow$ $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$
einen Sattelpunkt (Horizontalwendepunkt, Terassenpunkt) $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$

Ist $f'(x) = 0$, so verläuft die Wendetangente horizontal und man spricht in diesem Fall von einem Horizontalwendepunkt. Unter der Wendetangente versteht man eine Tangente, die die Funktion im Wendepunkt "durchschneidet".

Allgemeines Kriterium
Verschwinden die ersten (n-1) Ableitungen der Funktion f(x) an der Stelle $x = x_0$ und ist
n gerade $\Leftrightarrow$ x_0 ist Extremstelle $\qquad$ n ungerade $\Leftrightarrow$ x_0 ist Wendestelle
Krümmungsfunktion
Zuordnung der Krümmung der Funktion zu den Argumenten $\qquad y = f(x) = y''(x)/\sqrt{(1+(y')^2)^3}$

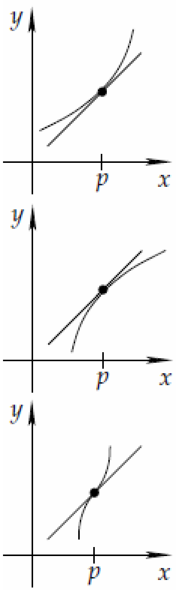
Konvexe Funktion
Eine Funktion f(x) nennt man an einem Punkt $P(x_0,y_0)$ konvex, wenn dort die Krümmung K positiv ist; im anderen Fall konkav bzw. nicht konvex.
An Wendepunkten ist die Krümmung gleich Null, d.h. an diesen Stellen geht die Funktion von konvex in konkav oder umgekehrt über.
Ist die Krümmung verschieden Null, kann stets ein Kreis, der Krümmungskreis, so gewählt werden, dass dieser sich an die Funktion in dem betrachteten Punkt optimal anschmiegt. Der Radius dieses Kreises ist das Reziproke der Krümmung ist.

Mittelpunktskoordinaten des Krümmungskreises
$x_m = x_0 - y' * [1+(y'')^2)] / y''$ $\qquad$ $y_m = y_0 + [1+(y'')^2)] / y''$

"Merkregel"
Schaut man von "oben" (positive y-Achse) auf den Graphen der Funktion in ein "Tal", so ist die Funktion
konvex … V von konvex

Erblickt man einen Berg, ist die Funktion konkav
oberer Bogen des kleinen a von konkav
Eine nach oben geöffnete Parabel ist konvex. Eine nach unten geöffnete Parabel ist konkav.

Achtung!
Merksätze wie "Konvex ist der Buckel von der Hex'", "Ist der Löffel konkav bleibt die Suppe brav, ist der Löffel konvex gibt's nen Klecks" oder auch "Hat das Mädchen Sex, wird der Bauch konvex; ist das Mädchen brav, bleibt der Bauch konkav" können nicht verwendet werden.
Die Definition der Konvexität unterscheidet sich in der Mathematik und der Physik grundlegend. Diese Merksätze gelten in der Physik, nicht in der Mathematik!

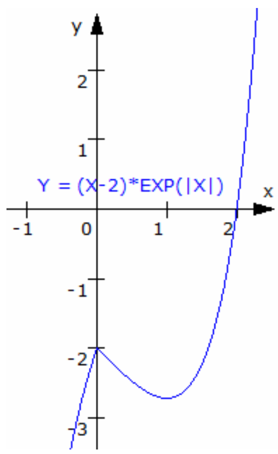


Krümmungsverhalten
Die Funktion $g(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)$
beschreibt die Differenz zwischen der Funktion f(x) und der Tangente im Punkt p.
a) Die Funktion f(x) ist genau dann lokal konvex im Punkt p, wenn die Funktion g(x) in p ein lokales Minimum besitzt. (obere Abbildung)
b) f(x) ist genau dann lokal konkav in p, wenn g(x) in p ein lokales Maximum besitzt. (mittlere Abbildung)
c) f(x) besitzt genau dann in p einen Wendepunkt, wenn g(x) in p einen horizontalen Wendepunkt hat. (untere Abbildung)

Bei a) bzw. b) liegt der Graph von f(x) im Punkt p lokal oberhalb bzw. lokal unterhalb der Tangente.

Hinreichende Bedingung für lokale Konvexität
Es sei f(x) in einer Umgebung des Punktes p k-fach differenzierbar. Dann ist f(x) im Punkt p lokal konvex, falls eine der beiden Bedingungen gilt:
1) $f''(p) > 0$ und $k = 2$
2) $f^{(k)}(p) > 0$ und für gerades $k \geq 4$.

Hinreichende Bedingung für lokale Konkavität
Es sei f(x) in einer Umgebung des Punktes p k-fach differenzierbar. Dann ist f(x) im Punkt p lokal konkav, falls eine der Bedingungen gilt:
1) $f''(p) < 0$ und $k = 2$
2) $f^{(k)}(p) < 0$ und für gerades $k \geq 4$.



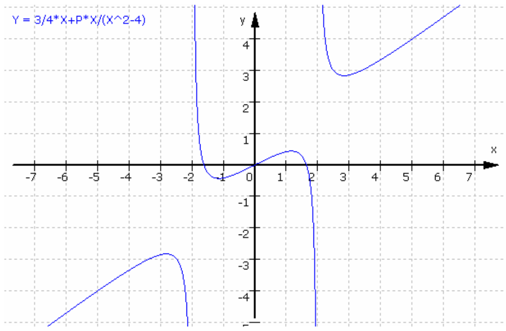
Wendepunkt (2)
Unter einem Wendepunkt versteht man einen Punkt eines Funktionsgraphen, an dem die Kurve das Vorzeichen ihrer Krümmung verändert. Bei dieser Definition ist keine Differenzierbarkeit der Funktion an dieser Stelle vorausgesetzt.
Deshalb sind die allgemein bekannten, hinreichenden und notwendigen Kriterien für die Existenz eines Wendepunktes nur auf differenzierbare Funktionen anwendbar. Für nicht differenzierbare Punkte eines Graphen muss die Funktion andersweitig untersucht werden.
Zum Beispiel ändert der Graph der Funktion
$$f(x) = y = (x-2)\, e^{|x|}$$
bei x = 0 sein Krümmungsverhalten mit einem Übergang von Rechts- in Linkskrümmung. Die erste Ableitung an der Stelle x = 0 existiert nicht. Dennoch hat die Funktion bei x = 0 einen Wendepunkt.

Extremstellen unentwickelter Funktionen
$f(x_E,y_E) = 0$ und $f_x(x_E,y_E) = 0$, $f_y(x_E,y_E) \neq 0$
Maximumbedingung $f_{xx} / f_y > 0$ Minimumbedingung $f_{xx} / f_y < 0$

Extremstellen (Parameterdarstellung)
Bedingung für Extremum von x=x(t) und y=y(t) $\dot{y} = 0 \quad \dot{x} \neq 0$
Maximumbedingung $\ddot{y} < 0$ Minimumbedingung $\ddot{y} > 0$

Extremstellen der Funktion z = f(x,y)
Maximal- und Minimalpunkt einer Fläche
Bedingung: $f_x = 0 \quad f_y = 0 \quad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$
Maximum für $f_{xx} < 0$ Minimum für $f_{xx} > 0$
Für $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ liegt ein Sattel- oder Jochpunkt vor
Für $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ unentscheidbar
Beispiel Funktionsuntersuchung
Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = ¾\, x + tx/(x^2-4)$, $t > 0$.
Abbildung der Funktion für t = 1

Ermitteln Sie für t=1 die lokalen Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion f_1.



Lösung: 1.Ableitung für t=1

$f'(x) = ¾ - (x^2+4)/(x^2-4)^2$

Extremstellen $x_{1;2} = \pm 2 \sqrt{2}$

2.Ableitung $f''(x) = 2x\,(x^2+12)/(x^2-4)^3$

Wendestelle $x = 0$

Berechnen Sie alle t, für die f_t mit der x-Achse im 1.Quadranten eine Fläche einschließen. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche A(t).

Lösung: Nullstellen der Funktion $x = 0$; $x = \pm 2/3 \sqrt{3} \sqrt{(3-t)}$

diese existieren nur für $0 < t < 3$

Fläche $A = ½ - t/6 + t/2 \ln(-(t+6)/9)$

Durch $g_t(x) = f_t(x) - ¾\, x$ ist eine weitere Kurvenschar gegeben. n_t ist für jedes t>0 die Gleichung der Normalen zu g_t im Punkt O(0;0). Zeigen Sie, dass die Normalen n_t die Kurven g_t in zwei weiteren Punkten schneidet. Ermitteln Sie den Wert von t, für den der Abstand dieser beiden Punkte minimal wird.

Lösung:

Anstieg der Normalen $m = 4/t$ Schnittstellen von $4/t\, x = tx / (x^2-4)$ sind $x = 0, \pm ½ \sqrt{(t^2+16)}$

Punkte $(\pm ½ \sqrt{(t^2+16)} ; \pm 2/t \sqrt{(t^2+16)})$ haben für t = 4 den kürzesten Abstand

Russische Testaufgabe Klasse 10

Для каждого числа б укажите все значения а (а зависит от б), при которых б является точкой указанного вида экстремума данной функции:

а) б ... точка минимума, $y = 6x^3 - 3(a+3)\, x^2 + 4(a+1)\, x +1$;

б) б ... точка максимума, $y = 6x^3 - 3(a-3)\, x^2 + 2(2-a)\, x -1$;

Lösung: a) für $b = 2/3$ wird $a \in (-\infty ; 1)$, für $b \in (2/3 ; \infty)$ wird $a = 3b-1$

b) für $b = -1/3$ wird $a \in (1 ; \infty)$, für $b \in (-\infty ; -1/3)$ wird $a = 3b+2$

Tangentenaufgabe

Aufgabe: Bestimmen Sie die Berührpunkte derjenigen Tangenten an den Graphen der Funktion f, die durch den Ursprung des Koordinatensystems gehen. f: $f(x) = -1/2\, x^3 + 3\, x^2 + 4$

Lösung:

Annahme: der Berührungspunkt sei an der Stelle x = u

$f(u) = -1/2\, u^3 + 3\, u^2 + 4$ ... $B(u \mid -u^3/2 + 3u^2 + 4)$

$f'(x) = -3/2\, x^2 + 6x$ ... $f'(u) = m = -3/2\, u^2 + 6u$

Daraus ergibt sich für die Tangentengleichung

$y - (-u^3/2 + 3u^2 + 4) = (-3/2\, u^2 + 6u)\, (x - u)$

und für den Punkt (0|0) dieser Tangente

$0 - (-u^3/2 + 3u^2 + 4) = (-3/2\, u^2 + 6u)\, (0 - u)$

$u^3/2 - 3u^2 - 4 = 3/2\, u^3 - 6u^2$ $\qquad 0 = u^3 - 3u^2 + 4$

Durch Ausprobieren ergibt sich als eine Lösung $\qquad x = -1$

Zerlegen der Gleichung mittels Polynomdivision liefert $\qquad u^3 - 3u^2 + 4 = (u + 1)\,(u - 2)^2$

mit der zweiten Lösung $\qquad x = 2$

Die Berührungspunkte sind damit $\qquad B_1(-1 \mid 7{,}5)$ und $B_2(2 \mid 12)$

Umgekehrte Kurvendiskussion, umgekehrte Funktionsdiskussion

Bei einer Kurvendiskussion ist eine Funktionsgleichung vorgegeben, deren Besonderheiten herauszufinden sind: Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Polstellen usw.

Mit diesem Wissen kann der Graph dieser Funktion gezeichnet werden.

Die umgekehrte Kurvendiskussion fragt: Wie muss eine Funktion aussehen, die gewisse vorgegebene Eigenschaften besitzt. Es wird eine Funktionsgleichung erzeugt, um sie gewissen Forderungen anzupassen.

Einfaches Beispiel: Finde eine lineare Funktion g(x), deren Graph durch die Punkte P1(2/4) und P2(5/-2) verläuft.

1) g soll eine lineare Funktion sein, d.h. von der Form g(x) = Ax+B.

Die zwei reellen Zahlen A und B (die Koeffizienten im Polynom) müssen ermittelt werden.

2) Wenn der Graph durch einen Punkt (x/y) verläuft, muss y genau der Funktionswert an der Stelle x sein, d.h. g(2) = 4 und g(5) = -2.

3) Einsetzen ergibt P1: g(2) = A·2+B = 4 und P2: g(5) = A·5+B = -2 , d.h. ein Gleichungssystem mit der Lösung A = -2 und B = 8.

4) Damit ist die Lösung gefunden. Die Funktion mit den geforderten Eigenschaften lautet g(x) = -2x + 8.

Funktionsuntersuchungsbeispiel (2)
Sächsisches Mathematik-Grundkursabitur 2006 - Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \ln(x)\cdot(\ln(x) - 2)$ $(x \in D_f)$.
a) Geben Sie von der Funktion f den größtmöglichen Definitionsbereich, Näherungswerte für die Koordinaten des lokalen Extrempunkts, die Art des lokalen Extrempunkts sowie den Wertebereich an. Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Nullstellen der Funktion f. Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitungsfunktion f" von f gilt: $f''(x) = 2/x^2 \cdot (2 - \ln(x))$ $(x \in D_{f''})$
Begründen Sie, dass die Funktion f höchstens eine Wendestelle besitzt.

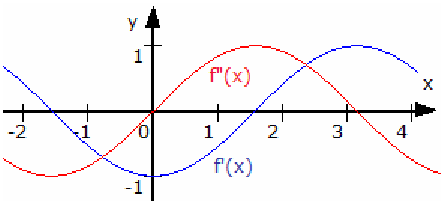
b) In jedem Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit der x-Achse existiert genau eine Tangente an den Graphen der Funktion f. Diese Tangenten und die x-Achse begrenzen ein Dreieck vollständig. Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Für jedes u $(u \in R;\ u > e)$ begrenzen der Graph der ersten Ableitungsfunktion f' von f, die Gerade x = u und die x-Achse eine Fläche vollständig. Ermitteln Sie den Wert u so, dass der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt.

d) Die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse und der lokale Extrempunkt des Graphen der Funktion f liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion g.
Für jedes v $(v \in R;\ e \le v \le e^2)$ schneidet die Gerade x = v den Graphen der Funktion f im Punkt P_v und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_v.
Ermitteln Sie einen Näherungswert von v, für den die Länge der Strecke P_vQ_v größtmöglich wird.

e) Für jedes a $(a \in R;\ a > 0)$ ist eine Funktion h_a gegeben durch $h_a(x) = f(x+a)$ $(x \in D_{ha})$
Beschreiben Sie, wie aus den Nullstellen der Funktion f die Nullstellen der Funktion h_a ermittelt werden können.

Lösungen: a) $D_f = \{x \mid x \in R \wedge x > 0\}$, P(2,72 ; -1), lokales Minimum, $W_f = \{y \mid y \in R \wedge y \ge 1\}$, $x_{N1} = 1$; $x_{N2} = e^2$ b) $A \approx 4{,}87$; c) $u = e^2$; d) $v \approx 5{,}20$



Funktionsuntersuchungsbeispiel (3)
Sächsisches Mathematik-Leistungskursabitur 2006 - Teil A: Analysis

Für jedes a $(a \in R;\ a \ne 0)$ ist eine Funktion f_a durch
$f_a(x) = (x^3 + ax)/(x^2 - a)$ $(x \in D_{fa})$
gegeben.
a) Betrachtet wird die Funktion $f_1(x) = (x^3 + x)/(x^2 - 1)$
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich dieser Funktion an.
Geben Sie das Symmetrieverhalten sowie Näherungswerte für die Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte und des Wendepunkts des Graphen dieser Funktion an.

b) Nebenstehende Abbildung zeigt für eine Funktion f_a die Graphen der Ableitungsfunktionen f'_a und f''_a im Intervall $-4 \le x \le 4$.
Treffen Sie begründete Aussagen zu folgenden Eigenschaften der Funktion f_a in diesem Intervall:
- Extremstellen,
- Art der lokalen Extrema,
- Monotonieverhalten,
- Wendestelle

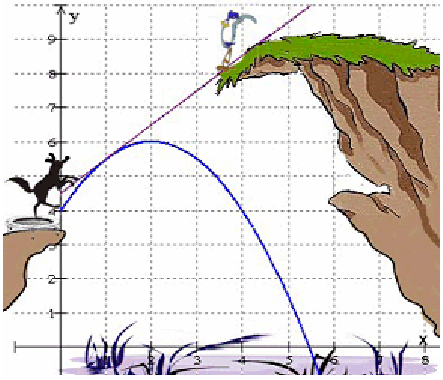
c) Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten alle Werte a, für die gilt: $f'_a(1) = 0$.
d) Geben Sie die Anzahl der senkrechten Asymptoten des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a an. Bestimmen Sie eine Gleichung der schrägen Asymptote des Graphen der Funktion f_a. Ermitteln Sie alle Werte a, für die die Funktion f_a genau drei Nullstellen besitzt.
Fortsetzung und Lösung

e) Gegeben ist die Funktion F_a durch
$F_a(x) = x^2/2 + a \ln(x^2 - a)$ $(x \in D_{Fa})$
Weisen Sie nach, dass die Funktion F_a eine Stammfunktion der Funktion f_a ist.
Für jedes a $(a \in R;\ a < 0)$ begrenzen der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse im 4. Quadranten eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche 6 ln(2) - 3 beträgt.

f) Es soll eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades ermittelt werden, welche die Extremstellen $x_{E1} = -2$ und $x_{E2} = 2$ besitzt.
Folgende Lösungsschritte werden vorgeschlagen:
(1) Ableitungsfunktion von g: $g'(x) = (x+2)(x-2) = x^2 - 4$
(2) Gleichung einer Stammfunktion von g': $g(x) = 1/3\, x^3 - 4x$ $(x \in R)$
Begründen Sie die Richtigkeit dieser Lösungsschritte.

Beschreiben Sie, wie mit diesem Lösungsverfahren die Gleichungen aller ganzrationalen Funktionen dritten Grades ermittelt werden können, welche die Extremstellen $x_{E1} = -2$ und $x_{E2} = 2$ besitzen.

Lösungen: a) $D_{f1} = \{x \mid x \in R \wedge |x| \neq 1\}$; $P_{E1}(-2{,}1; -3{,}3)$, $P_{E2}(2{,}1; 3{,}3)$; $P_W(0; 0)$
c) $a_1 = \sqrt{5} - 2$, $a_2 = -\sqrt{5} - 2$; d) Asymptote $y = x$; $\{a \mid a < 0\}$; e) $a = -6$



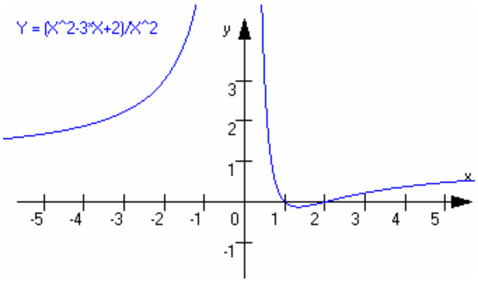
Road-Runner-Aufgabe

In der US-amerikanischen Trickfilmserie "Wile E.Coyote and the Road Runner" versucht der Coyote mit allen technischen Hilfsmitteln und mathematisch-physikalischen Verfahren den Road Runner zu fangen. Dass dabei nahezu alle Gesetze der Physik außer Kraft gesetzt werden, ist gerade das Interessante.
In einer Folge will er mit einem Trampolin den Road Runner erreichen. Allerdings ist das Trampolin zu schwach und er bewegt sich auf einer Wurfparabel mit der Gleichung

$$y = -1/2\ (x - 2)^2 + 6$$

Aufgaben:
a) Welche maximale Höhe erreicht der Coyote, wenn jede Einheit gleich 10 Fuß ist?
b) Wie tief ist der Coyote unter Wasser, wenn sein Fall erst bei x = 7 gestoppt wird?
c) Ersetzt der Coyote das Trampolin durch eine Rakete, so bewegt er sich längs einer Geraden, die die Wurfparabel berührt? Wie lautet die Gleichung der Tangenten?
d) Wie weit ist der Coyote (x = 0) von dem Road Runner (y = 8) entfernt, wenn beide auf der Tangente stehen?

Lösungen: a) $f'(x) = -x + 2$; Maximum (2; 6) ; Höhe 60 Fuß ; b) -65 Fuß
c) $t(x) = x + 4{,}5$
d) Coyoten-Ort (0 ; 4,5) ; Road-Runner-Ort (3,5 ; 8) ; Entfernung 49,5 Fuß



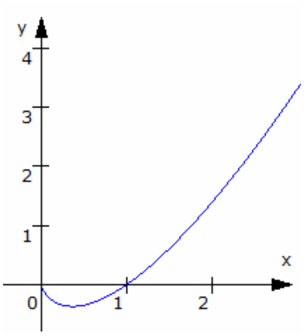
Funktionsuntersuchungsbeispiel (6)

Aufgabe: Diskutieren und skizzieren Sie die Funktion

$$y = (x^2-3x+2) / x^2.$$

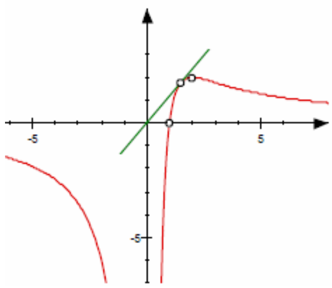
(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Krümmungsverhalten) ; Matur TSME 02, Aufgabe 4

Lösungen: $y = (x^2-3x+2) / x^2 = 1 - 3/x + 2/x^2$
$y' = 3/x^2 - 4/x^3$
$y'' = -6/x^3 + 12/x^4$
Definitionsbereich: $R \setminus \{0\}$
Nullstellen $x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$
Extrema $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4/3$ und $y = -1/8$
für $x < 4/3$ ist y' negativ, für $x > 4/3$ ist y' positiv $\Rightarrow$ relatives Minimum
Wendepunkt $12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow W(2;0)$
Bis zum Wendepunkt weist die Kurve eine Linkskrümmung auf: y" < 0, dann ergibt sich eine Rechtkrümmung.
Gerader Pol für x=0
waagerechte Asymptote $y = 1 - 3/x + 2/x \Rightarrow \to 1$ für $x \to \infty \Rightarrow y = 1$



Aufgabe: Diskutieren und skizzieren Sie die Funktion $y = x \ln x$.
(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte)

Lösungen: $f'(x) = \ln x + x \cdot 1/x = \ln x + 1$ $f''(x) = 1/x$
DB R^+
keine Symmetrie
Verhalten für $x \to \infty$ und für $x \to 0$
$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$ $x \to 0 \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow y' \to \infty$
Nullstelle $x = 1$ Extremstelle $x = 1/e$
Minimum $(1/e ; -1/e)$
Wendepunkte keine
Zum Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass zusätzliche Punkte nützlich wären, z.B. P(2 ; 2 ln 2).



Aufgabe: Gegeben ist die Kurvenschar $f_t(x) = 8(x-t) / x^2$
a) Wie groß muss man t wählen, damit die Kurve an der Stelle x=1 ein Extremum hat?
b) Berechnen Sie für die Funktion $f_1(x)$ Asymptoten, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte und skizzieren Sie den Graph.

c) Eine Tangente vom Ursprung an die Kurve zu $f_1(x)$ berührt diese im Punkt B(u | f(u)). Bestimmen Sie die Koordinaten von B und die Gleichung der Tangente.

Lösung: $f'_t(x) = 8\ (2t-x)/x^3$
für x = 1 ergibt sich mit $f'_t(x) = 0$ der Wert t = 1/2.
b) $f'_1(x) = 8\ (2-x)/x^3$ $f''_1(x) = 16\ (x-3) / x^4$
Nullstelle x = 1; Maximum (2 | 2); Wendepunkt (3 | 16/9)
Asymptoten: x = 0 ; y = 0
c) B (u | $8(u-1)/u^2$) u = 3/2 ; f'(u) = 32/27 ... Tangente y = 32/27 x

Funktionssynthese-Aufgaben
Bei allen Aufgaben ist eine Funktionsgleichung aus gegebenen Eigenschaften zu bestimmen

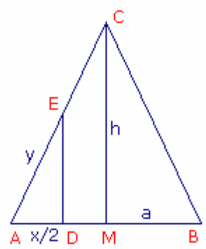
Aufgabe 1: Eine Funktion 3.Grades hat bei P(0/3) einen Hochpunkt und bei P(2/0) einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
Lösung: $y = 3/16\ x^3 - 9/8\ x^2 + 3$

Aufgabe 2: Eine Funktion 4.Ordnung hat einen Hochpunkt bei P(0/4,8) und im Wendepunkt (2/0) eine zu der Geraden y= -4x parallele Tangente. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
Lösung: $y = 0{,}1x^4 - 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 4{,}8$

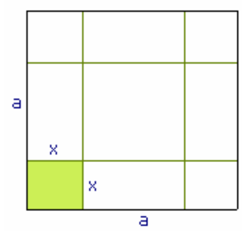
Aufgabe 3: Geben Sie die allgemeine Funktionsgleichung 4.Grades zu einem Graph an, der die x-Achse bei 5, 2, -1 und -3 schneidet. Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei 5.
Lösung: $y = 1/6x^4 - 1/2x^3 - 5/2x^2 + 19/6x + 5$

Aufgabe 4: Eine Funktion 3.Ordnung hat bei $P_w(0/1)$ ihren Wendepunkt und in $P_0(-2/3)$ eine Tangente parallel zur x-Achse. Bestimmen sie die Funktionsgleichung.
Lösung: $y = 1/8x^3 - 3/2x + 1$

Aufgabe 5: Eine Funktion 3.Grades schneidet die x-Achse bei -1 mit einer Steigung m = 5. Bei x = 0 hat sie ein Maximum. Im 2.Quadranten schließt die Funktion mit dem Koordinatensystem eine Fläche von 17/12 FE ein. Wie lautet die Funktionsgleichung.
Lösung: $y = x^3 - x^2 + 2$

Extremwertaufgabe - Beispiel 1


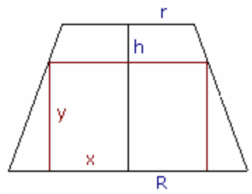
Aufgabe: Einem gleichschenkligen Dreieck soll jenes Rechteck eingeschrieben werden, dass den größten Flächeninhalt besitzt
Hauptbedingung: A = x * y ... Maximum
$\Delta AMC \approx \Delta ADE$ ... nach Strahlensatz
a/2 : h = AD : DE a/2 : h = (a/2 - x/2) : y
a/2 * y = h (a/2 - x/2) y = (2h (a/2 - x/2)) /a
Nebenbedingung: y = (h (a - x)) /a
A = x * (h (a - x)) /a f(x) = x * (h (a - x)) /a = h/a * x(a-x)
$f(x) = h/a\ (ax - x^2)$ f'(x) = h/a (a - 2x)
h/a (a - 2x) = 0 a - 2x = 0
x = a/2
Nebenbedingung: y = (h (a - a/2)) /a = (a h/2) /a = a h /(2a) = h/2 y = h/2
Definitionsbereich Db = [0;a] Wertebereich Wb = [0;h]
Hauptbedingung: A = x * y = a/2 * h/2 = a h/4
f"(x) = h/a (-2) f"(a/2) = -2h /a < 0 ⇒ Maximum
Antwort: Das Rechteck mit den Seiten a/2 ; h/2 hat den maximalen Flächeninhalt a h/4 .

Extremwertaufgabe - Beispiel 2


Aufgabe: Von einem quadratischen Blech (Seitenlänge = a) werden an den Ecken Quadrate ausgeschnitten, aus dem Rest wird eine Schachtel gebildet. Wie groß muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate sein, dass das Volumen der Schachtel maximal wird?
Hauptbedingung: $V = G * h = (a - 2x)^2 * x = f(x)$
Definitionsbereich Db = [0;a/2]
$f'(x) = 2(a - 2x)\ (-2)x + (a - 2x)^2 = -4x\ (a - 2x) + (a - 2x)^2$
$0 = -4x\ (a - 2x) + (a - 2x)^2$
$4x\ (a - 2x) = (a - 2x)^2$ | :(a - 2x)
a - 2x = 0 4x = a - 2x
a = 2x 6x = a ... x = a/2 → Randextremum
x = a/6 $V = (a - a/3)^2 * a/6 = (2a/3)^2 * a/6 = [4a^2]/9 * a/6 = 4a^3 /54 = 2a^3 /27$
f"(x) = -4(a - 2x) + (-4x) (-2) + 2(a - 2x) (-2) = -8a + 24x
f"(a/6) = -8a + 24a/6 = -8a + 4a = -4a < 0 ⇒ Max.

$f''(a/2) = -8a + 24a/2 = -8a + 12a = 4a > 0 \Rightarrow$ Min.
Antwort: Die Quadrate müssen die Seitenlänge a/6 haben, damit das Volumen maximal $2a^3/27$ wird.

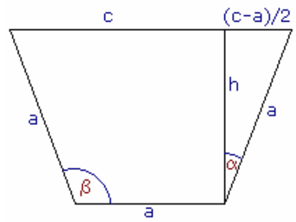
Extremwertaufgabe - Beispiel 3



Aufgabe: Einem Drehkegelstumpf (R, r, h) werden Drehzylinder eingeschrieben, deren Grundflächen konzentrisch in der Grundfläche des Drehzylinders liegen. Wie sind die Maße des Zylinders mit maximalem Volumen?

Hauptbedingung: $V = x^2\pi y$ ..... Maximum
$f(x) = x^2\pi\,(h(R-x))/(R-r) = \pi h/(R-r)\, x^2(R-x)$
Nebenbedingung: $(R-x) : y = (R-r) : h$
$y = (h(R-x))/(R-r)$
$g(x) = x^2(R-x) = Rx^2 - x^3$ $\quad$ $g'(x) = 2Rx - 3x^2$
Definitionsbereich $D_b = [0;R]$ $\quad$ Wertebereich $W_b = [0;h]$
$Rx - 3x^2 = 0$ $\quad$ $x(2R - 3x) = 0$
$x_1 = 0$, $2R = 3x$, $x_2 = 2/3\,R$ $\quad$ $g''(x) = 2R - 6x$
$g''(2/3\,R) = 2R - 4R = -2R < 0 \Rightarrow$ Maximum
$\Rightarrow r \le 2/3\,R \rightarrow x = 2/3\,R$ $\quad$ $r > 2/3\,R \rightarrow x = r$, $y = h$
$y = (h(R - 2/3\,R))/(R-r) = (h\,R/3)/(R-r) = R\,h/(3(R-r))$
$V = x^2\pi y = 4/9\,R^2\,\pi\,R\,h/(3(R-r)) = 4R^3 h\pi/(27(R-r))$
Antwort: Der Zylinder mit $x = 2/3\,R$, $y = R\,h/(3(R-r))$ hat maximales Volumen $4R^3 h\pi/(27(R-r))$.
Sonderfall: $r > 2/3\,R \Rightarrow x = r$; $y = h$

Extremwertaufgabe - Beispiel 4

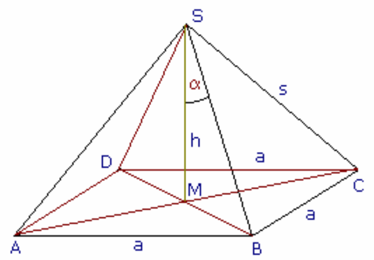


Aufgabe: Aus drei gleich breiten Brettern (Breite = a) soll eine Rinne von möglichst großem trapezförmigem Querschnitt gebildet werden. In welchem Neigungswinkel müssen die Seitenwände zur Horizontalen geneigt sein?

Hauptbedingung: $A = ((a+c)*h)/2$
1.Nebenbedingung: $\cos\alpha = h/a$ ... $h = a\cos a$
2.Nebenbedingung: $\sin\alpha = ((c-a)/2)/a$ ... $(c-a)/2 = a\sin\alpha$
$c-a = 2a\sin\alpha$ ... $c = a + 2a\sin\alpha$
$a = ((a+a+2a\sin\alpha)*a\cos\alpha)/2 =$
$= ((2a + 2a\sin\alpha)\,a\cos\alpha)/2 = (2a(1 + \sin\alpha)\,a\cos\alpha)/2 = a^2\cos\alpha\,(1 + \sin\alpha)$
Definitionsbereich $D_a = [0°;90°]$
$f(\alpha) = (1 + \sin\alpha)\cos\alpha$
$f'(\alpha) = \cos\alpha * \cos\alpha + (1 + \sin\alpha)(-\sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin\alpha\,(1 + \sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha = 0$
$1 - \sin^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha = 0$
$-2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0 \qquad | :(-2)$
$\sin^2\alpha + ½\sin\alpha - ½ = 0$
$(\sin\alpha)_{1,2} = -1/4 \pm \sqrt{(1/16 + 1/2)} = -1/4 \pm ¾$
$(\sin\alpha)_1 = ½ \Rightarrow \alpha_1 = 30°$
$(\sin\alpha)_2 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = 270° \notin D$
$f''(\alpha) = 2\cos\alpha\,(-\sin\alpha) - \cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$
$= -2\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = -4\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$
$f''(30°) = -4\sin 30°\cos 30° - \cos 30° = -2.60 < 0 \Rightarrow$ Max.
$\beta = 90° + \alpha = 120°$
$h = a\cos\alpha = a/2\,\sqrt{3}$
$c = a + 2a\sin\alpha = a + 2a/2 = 2a$
$A = ((a+c)*h)/2 = ((a + 2a)(a\sqrt{3})/2)/2 = (3a^2\sqrt{3})/4$
Antwort: Die Wände müssen mit 120° geneigt sein, dass die Querschnittsfläche maximal $(3a^2\sqrt{3})/4$ ist.

Extremwertaufgabe - Beispiel 5

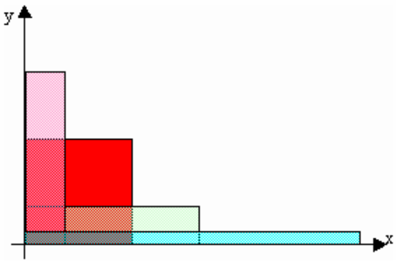
Aufgabe: Unter welchem Winkel muss die Seitenkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide erscheinen, damit das Volumen maximal wird?



Definitionsbereich $\alpha = [0;\ 90°]$
1.Nebenbedingung $\sin\alpha = a/2\,\sqrt{2}/s$
$a = (2s\sin\alpha)/\sqrt{2} = s\sqrt{2}\sin\alpha$
2.Nebenbedingung $\cos\alpha = h/s$
Hauptbedingung $V = G\,h/3 = a^2\,h/3$ ... Maximum
$V = (2s^2\sin^2\alpha\; s\cos\alpha)/3 = (2s^3\sin^2\alpha\cos\alpha)/3$
$f(\alpha) = \sin^2\alpha\cos\alpha$
$f'(\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\,(-\sin\alpha)$
$= h = s\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$
$0 = 2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$
$0 = 2\sin\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha$
$0 = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 3\sin^3\alpha$
$0 = \sin\alpha\,(2 - 3\sin^2\alpha)$ $\quad$ $\sin\alpha = 0$ ... $\sin^2\alpha = 2/3$

$\alpha_1 = 0°$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{(2/3)}$
$\alpha_2 = 180° \notin D$; $\alpha_3 = 54.74°$
$\alpha_4 = 125.26° \notin D$; $\alpha_5 = 305.26° \notin D$ $\alpha_6 = 234.74° \notin D$
$V = 2/3\, s^3 \sin^2\alpha \cos\alpha = 2/3\, s^3 \sin^2 54.74° \cos 54.74° = 0.26\, s^3$
$f''(\alpha) = 2 (\cos\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha\, 2 \cos\alpha\, (-\sin\alpha)) - 3 \sin^2\alpha \cos\alpha$
$= 2 \cos^3\alpha - 4 \sin^2\alpha \cos\alpha - 3 \sin^2\alpha \cos\alpha = 2 \cos^3\alpha - 7 \sin^2\alpha \cos\alpha$
$f''(54.74°) = - 2.31 < 0 \Rightarrow$ Maximum
Antwort: Die Seitenkante muss unter 54.74° zur Höhe geneigt sein, damit das Volumen maximal 0.26 s^3 beträgt.

Extremwertaufgabe - Beispiel 6



Aufgabe: Mit einer vorhandenen Rolle Zaun (darauf sind 50 m) soll ein möglichst großes Stück Land rechteckig eingezäunt werden. Zielgröße ist die eingezäunte Fläche. Die Fläche eines Rechtecks ist F=x*y, dabei stehen x und y für die Seitenlängen des Rechtecks. Die Nebenbedingung ist, dass nur 50m Zaun vorhanden sind. Um ein Rechteck mit Seitenlängen x und y einzuzäunen braucht man

$2x+2y = 50$ Meter Zaun (den Umfang des Rechtecks).

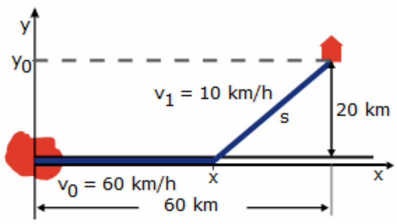
Mit x=5 und y=20 benötigt man genau 2*20 + 2*5 = 50m Zaun und die Fläche beträgt dann 5*20=100 m2.
Stelle die Funktion der Fläche in Abhängigkeit von x auf:

$F(x) = x * y = x * (50 - 2x) /2$

Über die Ableitung F'(x) findet man mögliche lokale Maxima der Funktion F(x).

$F'(x) = 25 - 2x = 0 \rightarrow x = 12,5$

Wenn x=12,5 ist, dann ist y=12,5. Das folgt aus der Nebenbedingung.
Die Fläche des Rechtecks ist F = 12,5*12,5 = 156,25 m²
Das kann nun (im allgemeinen) ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum sein. Durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle des lokalen Extremums erfährt man, ob es ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. Da $F''(x) = -2$ für alle x negativ ist, liegt an der Nullstelle der ersten Ableitung ein lokales Maximum vor. Im Beispiel ist der Definitionsbereich [0,25]. Denn negative x oder negative y sind nicht sinnvoll, weil x und y für Längen stehen.
Sowohl für x=0, als auch für x=25 ist der Wert von F(x) gleich 0, d.h. x=12,5 ist ein absolutes Maximum im Definitionsbereich.
Bei Verwendung von 50 m Zaun, ist die maximale einzäunbare Fläche gleich 156,25 m2



Extremwertaufgabe-Beispiel 7

Kürzeste Fahrzeit: Der kürzeste Abstand eines Gebäudes von einer schnurgeraden Straße, die von der nächsten Stadt an dem Gebäude vorbeiführt, beträgt 20 km. Die Entfernung des Schnittpunktes der Senkrechten von dem Gebäude zur Straße von der Stadt beträgt 60 km.
Ein Fahrzeug der schnellen Hilfe soll in möglichst kurzer Zeit von der Stadt zu dem Haus gelangen. An welcher Stelle der Straße muss es abbiegen? Die Geschwindigkeit auf der Straße ist $v_0 = 60$ km/h und im Gelände $v_1 = 10$ km/h.

Lösung:
Skizze: Man legt die x-Achse entlang der Straße. Die Zeit, die das Fahrzeug bis um Punkt x zurücklegt, ist $t_0 = x/v_0$. Für die restliche Strecke benötigt es die Zeit $t - t_0 = s/v_1$.
Die Strecke s kann mittels des Satzes von Pythagoras errechnet werden $s = \sqrt{((x_1 - x)^2 + y_0^2)}$
Setzt man t_0 ein und stellt nach t um, so ergibt sich

$t(x) = \sqrt{((x_1 - x)^2 + y_0^2)}/v_1 + x/v_0$

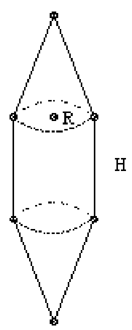
Die Variable ist x. Gesucht ist das Minimum der Funktion t(x). Diese Funktion ist im Bereich R definiert und stetig. Sie besitzt keine Nullstellen. Das Minimum erhält man durch Nullsetzen der ersten Ableitung

$dt/dx = -1/2 \sqrt{((x_1 - x)^2 + y_0^2)}-1/2 /v_1 \cdot 2 \cdot (x_1 - x) + 1/v_0 = 0$

Durch Umformung folgt $x = x_1 - y_0 v_1 / \sqrt{(v_0^2 - v_1^2)}$ und mit den Zahlenwerten $x = 56,65$ km

Extremwertaufgabe - Beispiel 8

1.Putnam-Olympiade 1938: Problem A2



A solid has a cylindrical middle with a conical cap at each end. The height of each cap equals the length of the middle. For a given surface area, what shape maximizes the volume?

Lösung
Let the radius be R and the height H. The area is $2\pi RH + 2\pi R\sqrt{(R^2+H^2)}$. The volume is $5/3\, \pi R^2H$.
The area is fixed, so for some fixed k, we have $R (H + \sqrt{(R^2+H^2)}) = k$. This gives $H = (k^2 - R^4)/(2kR)$. We must now choose R to maximise $f(R) = R^2H = R (k^2 - R^4)/2k$. Evidently the allowed range for R is from R = 0 up to $\sqrt{k}$ (corresponding to H = 0). But f(0) = 0 and

$f(\sqrt{k}) = 0$, so the maximum is at some interior point of the interval. Differentiating, we find it is at $R_{max} = (k^2/5)^{1/4}$. In terms of the area A, we have $A = 2\pi k$, so $R_{max} = (A/(\pi\, 2\sqrt{5}))^{1/2}$.

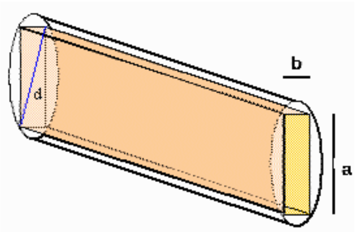
1.Putnam-Olympaide 1938: Problem A3

A particle moves in the Euclidean plane. At time t (taking all real values) its coordinates are $x = t^3 - t$ and $y = t^4 + t$. Show that its velocity has a maximum at t = 0, and that its path has an inflection at t = 0.

Lösung

The speed squared is $(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = 16t^6 + 9t^4 + 8t^3 - 6t^2 + 2$. Let this be f(t). We have $f'(t) = 12t(8t^4 + 3t^2 + 2t - 1)$. So $f'(t) = 0$ at t = 0. Also for t small (positive or negative), $8t^4 + 3t^2 + 2t - 1$ is close to -1 and hence negative, so $f'(t)$ is positive for t just less than 0 and negative for t just greater than 0. Hence f(t) has a maximum at t = 0. Hence the speed does also.

The gradient $dy/dx = (4t^3 + 1)/(3t^2 - 1)$. Let this be g(t). Then $g'(t) = 6t(2t^3 - 2t - 1)/(3t^2 - 1)^2$. Hence $g'(0) = 0$. Also g'(t) is positive for t just less than 0 and negative for t just greater than 0, so it is a point of inflection.



Extremwertaufgabe - Beispiel 9

Balken mit maximaler Tragfähigkeit: Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkendicke. In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?

Gegeben ist Baumstamm in Form eines Zylinders mit Durchmesser d. Der rechteckigen Balken hat die Dicke a und die Breite b, mit $a^2 + b^2 = d^2$

Zielfunktion: $a^2 * b$ = maximal.

Funktion t der Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Breite b: $t(b) = (d^2 - b^2) * b$

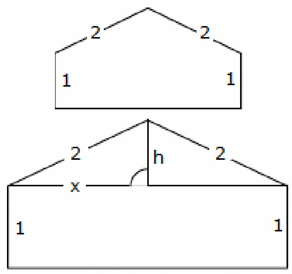
Die Ableitungen von t(b) lauten: $t'(b) = -3b^2 + d^2$ $\quad t''(b) = -6b$

Man setzt die Ableitung gleich 0: $t'(b) = -3b^2 + d^2 = 0 \iff b^2 = d^2 / 3$

Die zweite Ableitung ist für alle in Frage kommenden positiven Breiten negativ. Das zeigt, dass an der Nullstelle der ersten Ableitung tatsächlich ein lokales Maximum vorliegt. Aus der Nebenbedingung errechnen man den dazu gehörenden Wert für a:

$a^2 = d^2 - d^2 / 3 = 2/3\, d^2$. In der Aufgabe ist für d kein konkreter Wert gegeben. Es wird nach dem Verhältnis von a und b gefragt, also nach a/b. Aus $a^2/b^2 = (2/3\, d^2) / (1/3\, d^2) = 2$ folgt, dass $a/b = \sqrt{2}$.

Ergebnis: Das optimale Verhältnis ist unabhängig vom Durchmesser. 2. Die Formel $a/b= \sqrt{2}$ sagt, dass der Balken 1.41 mal so dick wie breit sein soll. Die Dicke ist damit größer als die Breite. Man muss sich den Balken mit der
schmalen Seite als Breite vorstellen.



Extremwertaufgabe-Beispiel 10

Aufgabe: Einem Rechteck wird ein gleichschenkliges Dreieck aufgesetzt. Wie breit muss das Rechteck sein, damit der Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird?

Lösung: Zur Vermeidung von Brüchen bezeichnen wir die halbe Grundlinie mit x. Dann ist $\quad h = \sqrt{4 - x^2}$

Die Fläche berechnet sich aus Rechteck und Dreieck

$$A = 2x \cdot 1 + 1/2 \cdot 2x \cdot h = 2x + x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

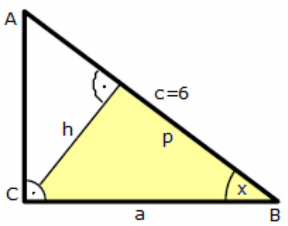
Die Ableitung; unter Verwendung von Produkt und Kettenregel; wird Null gesetzt $\quad A' = 2 + 1\cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot 1/(2 \sqrt{4 - x^2}) \cdot (-2x) = 2 + \sqrt{4 - x^2} - x^2/\sqrt{4 - x^2} = 0$

Diese Gleichung wird mit dem Nenner $\sqrt{4 - x^2}$ multipliziert

$$2 \sqrt{4 - x^2} + (4 - x^2) - x^2 = 0$$

$$0 = x^4 - 3x^2 = x^2 (x^2 - 3)$$

Die einzige brauchbare Lösung dieser Gleichung ist $x = \sqrt{3}$. Die Breite des Rechtecks ist $2\sqrt{3}$.



Extremwertaufgabe-Beispiel 11

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei die Hypotenuse c = 6 cm.

a) Zeigen Sie, dass der Inhalt der gelben Dreiecksfläche $A = 18 \sin x \cos^3 x$ ist!

b) Für welchen Wert von x ist der Inhalt von A maximal? (Gymnasium Rämibühl, 1988)

Lösung:

Im Dreieck ABC lässt sich aus x und c die Kathete a = BC berechnen:

$$\cos x = a/6 \Rightarrow a = 6 \cos x$$

Für das gelben Dreieck wird

$\sin x = h/a \Rightarrow h = 6 \cos x \sin x$ $\qquad \cos x = p/a \Rightarrow p = 6 \cos^2 x$

Damit gilt für die Fläche des gelben Dreiecks $\qquad A = 1/2\, p\, h = 18 \cos^3 x \sin x$

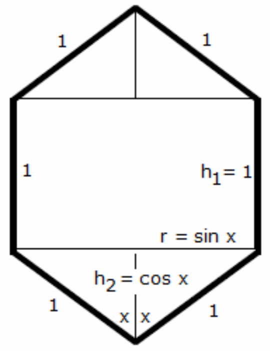
Die Fläche wird maximal, wenn die Ableitung von A Null wird

$$(A/18)' = 0 = -3 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

da $\cos x \neq 0$ wird

$$\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0 \text{ mit } \tan x = 1/\sqrt{3} \Rightarrow x = 30°$$

Alle anderen Lösungen sind hier nicht brauchbar.



Extremwertaufgabe-Beispiel 12

Aufgabe: Einem Kreiszylinder werden auf beiden Seiten gleiche Kreiskegel mit gleichem Grundkreis angesetzt. Der Achsenschnitt des ganzen Körpers ist ein gleichseitiges Sechseck mit der Seitenlänge 1. Der halbe Öffnungswinkel der Kegel sei x.
Berechnen Sie das Volumen des Körpers in Abhängigkeit von x. Für welchen Winkel x wird dieses Volumen maximal?

Lösung: $V = \pi r^2 h_1 + 2/3 \pi r^2 h_2 = \pi/3 \sin^2 x (3 + 2 \cos x)$
Der Winkel x liegt zwischen 0° und 90°. Für den Extremalwert muss die Funktion abgeleitet und gleich 0 gesetzt werden:

$$V' = \pi/3 (2 \sin x \cos x (3 + 2 \cos x) + \sin^2 x (-2 \sin x))$$
$$= \pi/3 \sin x (6 \cos x + 4 \cos^2 x - 2 \sin^2 x) = 0$$

Da sin x sicher nicht 0 ist, kann die Gleichung vereinfacht werden

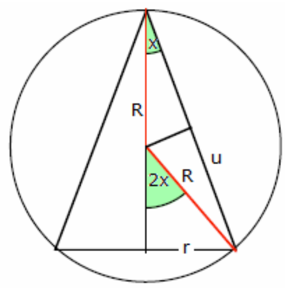
$$0 = 3 \cos x + 2 \cos^2 x - \sin^2 x = 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1$$

Diese quadratische Gleichung hat eine brauchbare Lösung

$$\cos x \approx 0{,}263 \Rightarrow x = 74{,}7°$$

Für diesen Winkel wird $r = 0{,}96$, $h_2 = 0{,}26$, $V_{max} = 1{,}09\, \pi$

Der Randwert mit x = 90° und Kegeln der Höhe 0 ist etwas kleiner: $V = \pi$



Extremwertaufgabe-Beispiel 13

Aufgabe: Einer Kugel mit dem Radius R wird ein Kegel einbeschrieben. Für welchen Öffnungswinkel ist seine Oberfläche maximal?

Lösung: Für die Lösung der Aufgabe ist es einfacher, den halben Winkel mit x zu bezeichnen. Damit lassen sich die halbe Seitenlinie u und der Radius r berechnen.

$$\cos x = u/R \quad \text{und} \quad \sin 2x = r/R$$

Für die Kegeloberfläche gilt: $A = 2\pi r(r + s)$

$$A = \pi r(r + s) = \pi R \sin 2x (R \sin 2x + 2R \cos 2x) = \pi R^2 \sin 2x \cdot(\sin 2x + 2 \cos x)$$
$$A' = \pi R^2 (2 \cos 2x\cdot(\sin 2x + 2 \cos x) + (2 \cos 2x - 2\sin x)\cdot\sin 2x) = 0$$

Nach Division durch πR^2 wird ausmultipliziert und vereinfacht

$$2 \sin 2x \cos 2x + 4 \cos 2x \cos x + 2 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin x = 0$$
$$4 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin x + 4 \cos 2x \cos x = 0$$

Anwendung der Doppelwinkelformeln ergibt

$$8 \sin x \cos x - 16 \sin^3 x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x + 4 \cos x - 8 \sin^2 x \cos x = 0$$

cos x = 0 gibt keine brauchbare Lösung ist

$$2 \sin x - 4 \sin^3 x - \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x = 0$$

Es wird eine kubische Gleichung für sin x und mit u = sin x

$$4 u^3 + 3 u^2 - 2u - 1 = 0$$

Man sieht, dass u = -1 eine Lösung ist und erhält mit Polynomdivision

$$4 u^3 + 3 u^2 - 2u - 1 = (u + 1) (4 u^2 - u + 1) = 0$$

Die zwei weiteren Lösungen sind

$$u_{1,2} = (1 \pm \sqrt{17}) / 8$$

von denen nur $u = (1 + \sqrt{17})/8$ als Lösung brauchbar ist. Damit wird $x \approx 39{,}8°$

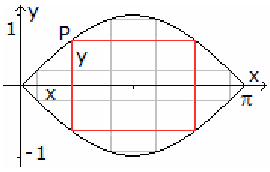
Extremwertaufgabe-Beispiel 14

Aufgabe:
Gegeben ist $f(x) = -x^2 + 4$. Der Funktionsgraph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Beschreibe dieser Fläche ein rechtwinkliges Dreieck so ein, dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt und die andere Ecke auf dem oberen Parabelbogen liegt. Bei Drehung um die x-Achse soll ein Kegel von möglichst großem Volumen entstehen.

Lösung:
Extremalbedingung $V(r,h) = \pi/3\, r^2 h$; Volumen eines Kegels
Nebenbedingung: $h = -x^2 + 4$, $r = x$
Durch das Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt sich die
Zielfunktion $V(x) = \pi/3 (x^2 (-x^2 + 4))$
Die Zielfunktion wird auf Extremstellen untersucht.

$$V'(x) = \pi/3 (-4x^3 + 8x) = 0 \qquad x = \pm\sqrt{2}$$

Setzt man in die zweite Ableitung $V''(x) = \pi/3\ (-12x^2 + 8)$
ein, so wird $V''(\pm\sqrt{2}) = -16/3\ \pi < 0$
Beide Werte liefen ein Maximum. Damit nimmt der gesuchte Kegel für $r = \sqrt{2}$ und $h = 2$ maximales Volumen an. Es beträgt: $V = 4{,}18$.



Extremwertaufgabe-Beispiel 15, Rechteck unter Sinusfunktion

Aufgabe:
Die Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\sin(x)$ bilden im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ eine linsenförmige Fläche.
In diese Linse soll ein Rechteck eingefügt werden, so dass die Eckpunkte auf den Sinuskurven liegen und der Flächeninhalt maximal wird.

Lösung: Ansatz $A = (\pi - 2x)\ 2y$
Mit $y = \sin(x)$ wird $A(x) = 2\pi \sin x - 4x \sin x$.
Die erste Ableitung wird $A'(x) = 2\pi \cos x - 4 \sin x - 4x \cos x$
Setzt man $A'(x) = 0$ ergibt sich die Gleichung $\pi \cos x - 2 \sin x - 2x \cos x = 0$.
Diese Gleichung ist transzendent, d.h. eine Lösung ist nur näherungsweise möglich. Zum Beispiel ermittelt man numerisch als Nullstelle der entsprechenden Funktion die Lösungen
$x_1 = 0{,}710463\ldots$ $x_2 = 2{,}431131\ldots$
Die Differenz beider Nullstellen ergibt eine Seitenlänge des Rechtecks mit
$a = 1{,}72$ und $b = 1{,}30$
Der Flächeninhalt beträgt näherungsweise $A = 2{,}24438$.

Extremwertaufgabe-Beispiel 16

Aufgabe (Schweizer Vorprüfung 1999):
Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.
a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Extremal- und Wendepunkte mit Steigung - überall exakte Werte).
b) Ein Rechteck hat seine Ecken auf der x-Achse und auf dem Graphen von f(x). Zeigen Sie, dass zwei dieser Ecken in den Wendepunkten des Graphen von f(x) liegen, wenn das Rechteck maximale Fläche hat.

Lösung: a) $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ $f''(x) = -2e^{-x^2}\ (1-2x^2)$
Nullstelle keine
Verhalten im Unendlichen … die x-Achse ist Asymptote
Maximum (0 ; 1)
Wendepunkte $W_{1,2}\ (\pm 1/\sqrt{2}\ ;\ 1/\sqrt{e})$ mit Anstieg $-(\pm\sqrt{(2/e)})$
b) Zielfunktion $A = 2x\ e^{-x^2}$ $A' = 2e^{-x^2}\ (1-2x^2) = 0$
mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$, d.h. gerade die ermittelten Wendepunkte.

Extremwertaufgabe-Beispiel 17

Aufgabe: Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell einer quadratischen Säule hergestellt werden. Wie lang sind die Kanten zu wählen, damit die Säule maximales Volumen hat?

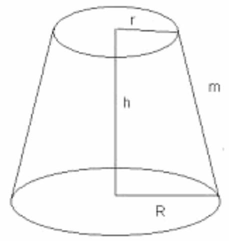
Lösung: Extremalbedingung $V_{max} = a^2 b$
Mit einer Nebenbedingung lässt sich die Funktion so umstellen, dass sie nur noch von einer Variablen abhängt.
Nebenbedingung $8a + 4b = 36 \ldots b = 9 - 2a$
Zielfunktion $V(a) = a^2\ (9-2a) = -2a^3 + 9a^2;\ a \in [0; 4{,}5]$
Suche nach Extremstellen
$V'(a) = -6a^2 + 18a$ $V'(a) = 0 = 6a(-a + 3)$
Es existieren zwei potentielle Lösungen. Der gesuchte Extremwert könnte bei a = 3 bzw. a = 0 sein.
Mittels zweiter Ableitung wird auf Extremeigenschaft getestet.
$V''(a) = -12a + 18$ $V''(3) = -18 < 0$, d.h Maximum liegt vor.
Untersuchung auf Randstellen
Die Zielfunktion ist im Intervall (0; 4,5) überall differenzierbar.
Für x = 0 wird V(0) = 0, d.h. es liegt kein Randextremum vor, analog für x = 4,5 … V(4,5) < 0.
Wird a = 3 in die Nebenbedingung eingesetzt, ergibt sich b = 3, d.h. der gesuchte Körper ist der Würfel.

Extremwertaufgabe-Beispiel 18

Aufgabe: Eine 400m lange Laufbahn besteht aus zwei parallelen Strecken l und zwei angesetzten Halbkreisbögen r. Wie groß müssen l und r gewählt werden, damit die Rechtecksfläche (ohne die beiden Halbkreisbögen) möglichst groß wird?

Lösung: Extremalbedingung $F_{max} = 2\ r\ l$
Mit einer Nebenbedingung lässt sich die Funktion so umstellen, dass sie nur noch von einer Variablen abhängt.

Nebenbedingung $2l + 2\pi r = 400$ ... $l = 200 - \pi r$
Zielfunktion $F(r) = 400\, r - 2r^2 \pi$; $r \in [0; 400/(2\pi)]$
Suche nach Extremstellen
$F'(r) = 400 - 4\pi r$ $F'(r) = 0 = 400 - 4\pi r$
Es existiert eine Lösung. Der gesuchte Extremwert könnte bei r = 31,85 m liegen. Mittels zweiter Ableitung wird auf Extremeigenschaft getestet.
$V''(a) = -4\pi$ $V''(31{,}85) = -4\pi < 0$, d.h Maximum liegt vor.
Die Untersuchung der Randstellen ergibt jeweils ein Rechteck der Fläche 0.
Wird r = 31,85 m in die Nebenbedingung eingesetzt, ergibt sich l = 100 m. Die gesuchte Rechteckfläche ist 6370 m².



Extremwertaufgabe-Beispiel 19

Aufgabe: Aus einem Kegelstumpf soll eine Verpackung konstruiert werden, die bei einem Volumen von 1 Liter möglichst wenig Verpackungsmaterial benötigt. Außerdem sei der Grundradius R gleich 2r, wobei r der Deckradius ist.

Lösung:
Volumen $1 = 7/3\, \pi\, h\, r^2$
Höhe h $h = 3/(7\, \pi\, r^2)$
Für die Oberfläche O wird dann $O = \pi r^2 + 4\pi\, r^2 + 3\pi\, r\, \sqrt{(r^2 + 9/(49\pi^2\, r^4))}$
1.Ableitung $O' = 10\pi\, r + 3/2\, \pi\, (4r^3 - 18/(49\pi^2\, r^3)) / \sqrt{(r^4 + 9/(49\pi^2\, r^2))}$
Die Nullstellen dieser Funktion sind nicht analytisch bestimmbar. Es muss aber eine Nullstelle größer 0 geben, da für 0 und Unendlich die Funktion O gegen unendlich strebt.
Für die Anwendung des Newton-Verfahrens wird zusätzlich die zweite, noch komplexere, Ableitung benötigt.
Das Näherungsverfahren ergibt als Lösung r = 0,3258

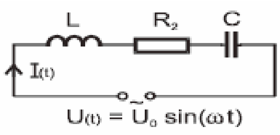
Extremwertaufgabe-Beispiel 20

Am 16.3.2014 fand auf der Halbinsel Krim eine Abstimmung statt, ob die Krim wieder Bestandteil der Russischen Föderation wird. Auf der Krim waren 1,53 Millionen Einwohner zur Stimmabgabe aufgerufen. 61,86 % der Einwohner sind Russen, 38,14 % Ukrainer, Krim-Tataren und weitere. Die Wahlbeteiligung betrug 83,10 %. Mit 96,77 % Ja-Stimmen stimmten die Wähler dem Beitritt zur Russischen Föderation zu.
Aufgabe: Wie hoch war die Zustimmung der Nichtrussen für den Anschluss an Russland mindestens? Wie hoch war die Wahlbeteiligung der Nichtrussen mindestens?

Lösung: Angenommen x Russen nahmen nicht an der Wahl teil. Dann gab es
$(1{,}53 \cdot 0{,}6186 - x)$ Millionen Stimmen von Russen
$1{,}53 \cdot 0{,}831 - (1{,}53 \cdot 0{,}6186 - x)$ Millionen Stimmen von Nichtrussen
Unter der Annahme, dass alle Russen mit Ja stimmten (andernfalls wird das Ergebnis noch höher), wird
$1{,}53 \cdot 0{,}831 \cdot 0{,}9677 - (1{,}53 \cdot 0{,}6186 - x)$ Millionen Ja-Stimmen von Nichtrussen
Damit wird für den Anteil der Ja-Stimmen der Nichtrussen
$p(x) = (1{,}53 \cdot 0{,}831 \cdot 0{,}9677 - (1{,}53 \cdot 0{,}6186 - x)) / (1{,}53 \cdot 0{,}831 - (1{,}53 \cdot 0{,}6186 - x))$
$p(x) = (1000000000\, x + 283904811) / (4000\, (250000\, x + 81243))$

Diese Funktion hat für den möglichen Bereich $0 \le x \le 1{,}5 \cdot 0{,}6186$ ein Minimum bei x = 0. Damit wird für $p(0) = 0{,}873628$.
D.h., mindestens 87,3 % aller abstimmenden Einwohner der Krim, die nicht der russischen Bevölkerung angehören, stimmten mit Ja für einen Beitritt zu Russland.
Für die Mindestwahlbeteiligung der nichtrussischen Bevölkerung wurde trotz Boykottaufruf
$(1{,}53 \cdot 0{,}831 - 1{,}53 \cdot 0{,}6186)/(1{,}53 \cdot 0{,}3814) = 1062/1907 = 55{,}6895$ %.

Fazit: Die Meldungen deutscher Medien über die Ablehnung der Abstimmung durch die nichtrussische Bevölkerung ist eine Lüge!
Mindestens 55 % der Ukrainer und Krim-Tataren gaben ihre Stimme ab und befürworteten den Anschluss an Russland mit mindestens 87 %. Da die russische Bevölkerung ohnehin mit Ja stimmte, hat somit die überwiegende Mehrheit der Einwohner für Russland votiert.

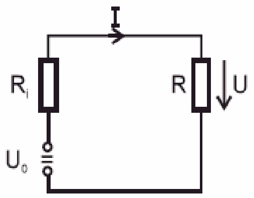


Extremwertaufgabe-Beispiel 21

In einem RCL-Wechselstromkreis fließt beim Anlegen einer Wechselspannung
$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$
ein Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$
mit frequenzabhängiger Amplitude
$I_0(\omega) = U_0 / \sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/(\omega C)^2)}$
Bei welcher Frequenz ω besitzt I_0 seinen größten Wert?

$I_0(\omega)$ ist maximal, wenn $\sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/(\omega C)^2)}$ minimal, bzw. wenn die Funktion f minimal wird:

$$f(\omega) = R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2$$
$$f'(\omega) = 2(\omega L - 1/(\omega C))(L + 1/(\omega^2 C)) = 0$$
$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$$
$$f''(\omega) = 2(L + 1/(\omega^2 C))^2 - 4/(\omega^3 C)(\omega L + 1/(\omega C))$$
$$f''(1 / \sqrt{LC}) = 8L^2 > 0$$
f nimmt in $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ sein Minimum an, und $I_0(\omega)$ hat den Maximalwert $I_0(\omega_0) = U_0/R$. Das relative Maximum ist auch absolutes Maximum. I_0 hat sein Maximum bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Der Scheinwiderstand ist dann gleich dem Ohmschen Widerstand R.



Extremwertaufgabe-Beispiel 22

An einer Gleichstromquelle U_0 mit dem Innenwiderstand R_i ist ein Außenwiderstand R (Lastwiderstand) angeschlossen. Wie groß muss der äußere Widerstand sein, damit die Nutzleistung maximal wird?
Lösung:
Leistung am Widerstand R: $P = U \cdot I = R \cdot I^2$
Maschensatz (Nebenbedingung): $U_0 = U_i + U = R_i I + RI = (R_i + R) I$
$$I = U_0 / (R_i + R)$$
Damit wird für die Nutzleistung als Funktion von R:
$$P(R) = R (U_0 / (R_i + R))^2 = U_0^2 R / (R_i + R)^2 \text{ ... Nutzleistung am Widerstand}$$
Für das Extremum gilt
$$P'(R) = U_0^2 (R_i - R)/(R_i + R)^3 = 0$$
und damit $R = R_i$
Für die zweite Ableitung von P(R) wird
$$P''(R) = U_0^2 (-(R_i+R)^3 -3(R_i-R)) / (R_i+R)^4 \qquad P''(R_i) = -1/8\, U_0^2/R_i^3 < 0$$
Für $R = R_i$ liegt ein relatives Extremum vor, das auch absolutes Maximum ist.
Die Nutzleistung wird maximal, wenn der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand gewählt wird. Die maximale Nutzleistung bei diesem äußeren Widerstand beträgt $P_{max} = 1/4\, U_0^2/R_i$

Die Rechnung bestätig die Spannungsteilerregel: Wenn der Innenwiderstand R_i gleich dem äußeren Widerstand R_a (=Lastwiderstand) gewählt wird, dann ist der Spannungsabfall bei R_i gleich dem Spannungsabfall bei R_a, nämlich $U_0/2$.

Extremwertaufgabe-Beispiel 23

Ein Körper mit nicht spiegelnder Oberfläche (schwarzer Körper) sendet bei der absoluten Temperatur T Strahlen aus. Für die spektrale Strahlungsdichte $E(\lambda)$ gilt nach dem Planckschen Strahlungsgesetz im Raumwinkel $1/\Omega_0$
$$E(\lambda) = c_1 /(\lambda^5 (e^{c_2/(T\lambda)} -1)) \quad 1/\Omega_0$$
mit $c_1 = 2hc^2 = 1{,}191 \cdot 10^{-16}$ Wm, $c_2 = h\, c/k = 1{,}439 \cdot 10^{-2}$ mK (c ist die Lichtgeschwindigkeit, k die Boltzmann-Konstante, h das Plancksche Wirkungsquantum).

Für das Maximum bestimmt man, bei welcher die Strahlungsdichte $E(\lambda)$ bei festem T ein Maximum besitzt. Durch logarithmische Differenziation des Strahlungsgesetzes folgt
$$\ln E(\lambda) = \ln c_1 - 5 \ln \lambda - \ln (e^{c_2/(T\lambda)} -1) - \ln \Omega_0$$
$$E'(\lambda)/E(\lambda) = -5/\lambda - e^{c_2/(T\lambda)}/(e^{c_2/(T\lambda)} -1)) (-c_2 /(T\lambda^2))$$
Setzt man $z = c^2/(T\lambda)$ gilt für das Extremum von $E(\lambda)$
$$E'(\lambda) = 0 \qquad z e^z / (e^z - 1) = 5$$
Dami gilt für z die nichtlineare Gleichung $1 - z/5 = e^{-z}$
Durch numerisches Lösen dieser Gleichung erhält man $z \approx 4{,}965$
also ist $\lambda_{max}\, T = c_2 / 4{,}965 = 2898$ µmK
Das Ergebnis ist das Wiensche Verschiebungsgesetz $\lambda_{max} \cdot T = \text{const}$
Für steigende Temperaturen verschiebt sich das Maximum der Strahlung zu kleineren Wellenlängen hin. Die Strahlung eines Körpers wird sichtbar, wenn die Temperatur etwa 600°C erreicht (Rotglut). Mit steigender Temperatur verschiebt sich die Glühfarbe von 850°C hellrot, 1000°C gelb, hin zu weiß bei 1300°C.

Wie hoch dürfen Stöckelschuhe (High-Heels) sein?

Wie hoch dürfen Stöckelschuhe höchstens sein, ohne dass die Stöckelschuhträgerin ins Straucheln gerät? Der britische Physiker Paul Stevenson von der University Of Surrey in Guildford (Südostengland) glaubt, die Antwort darauf gefunden zu haben:
$$h \le (v \cdot (j+9) \cdot p \cdot (12+3/8\, s)) / ((m+1) \cdot (A+1) \cdot (j+10) \cdot (20+p))$$
Einheiten werden in dieser Formel nicht berücksichtigt.
Dabei steht v für den Sex-Appeal-Wert des Schuhwerks auf einer Skala von 0 bis 1, j gibt die Anzahl der Jahre mit Stöckelschuh-Erfahrung an, p den Kaufpreis in britischen Pfund (ab 80 £ aufwärts), m die Anzahl der Monate, seit denen das Schuhmodell in Mode ist und s die Schuhgröße, gemessen in britischer Damengröße; üblicherweise zwischen 4 und 8. Besonders wichtig ist der Parameter A, der angibt, wie viele alkoholische Drinks die

Dame am Abend wohl zu sich nehmen wird. Schließlich ist h ist die maximale Absatzhöhe in Zentimetern, die die hochhackige Lady gerade noch beherrschen kann.

a) Untersuchen Sie, in welchem Bereich sich die zulässige Absatzhöhe für eine junge Frau von 25 Jahren mit 8 Jahren Stöckelschuh-Erfahrung und Schuhgröße 7 (Schuhgröße 41) in nüchternem Zustand bewegt, wenn die Schuhe 200 britische Pfund gekostet haben!
Lösung: $0 \text{ cm} \le h \le 12{,}6 \text{ cm}$

b) Eine Filmschauspielerin (34 Jahre; Schuhgröße 6½; 17 Jahre Stöckelschuh-Erfahrung) erscheint nüchtern auf einer Party mit 13 cm hohen todschicken Stöckelschuhen im neuesten Trend.
Wie viel Pfund hat sie mindestens für diese Schuhe ausgegeben? Welche Absatzhöhe dürften diese Schuhe höchstens haben, wenn die Schauspielerin am späten Abend nach fünf Drinks die Party noch auf sicheren Beinen verlassen möchte?
Lösung: Preis ≥ 288 £ ; Da die Schauspielerin mindestens 288 £ ausgegeben hat, könnte sie auf jeden Fall 2,17 cm hohe Absätze tragen, maximal 2,32 cm hohe Absätze.

c) Welche maximale Absatzhöhe ist nach dieser Formel möglich?
Lösung: bei Größe 8 (D: 42) 15,0 cm bzw. bei Größe 9 (D: 43) 15,375 cm oder gar Größe 10 (D: 44) 15,75 cm.

Funktionsidentische Aleitungen

Die Funktion $y = e^x$ ist identisch mit ihrer 1. Ableitung. Die Funktionen $y = e^{-x}$ und $y = -e^{-x}$ reproduzieren sich erst mit der 2. Ableitung und die Funktionen $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = -\sin(x)$ und $y = -\cos(x)$ erst mit der 4. Ableitung. Gibt es Funktionen, die erst wieder mit ihrer 3. Ableitung identisch sind? Die folgende Funktion hat die gewünsche Eigenschaft, gleich ihrer dritten Ableitung zu sein:

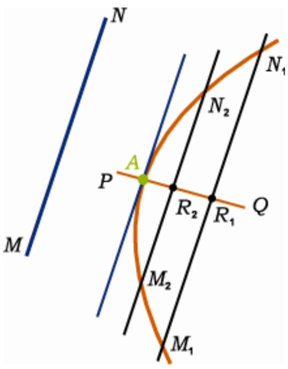
$$\mathbf{y = \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x) * e^{-\frac{1}{2}*x}}$$
$$y' = (-\tfrac{1}{2}*\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})*x) * e^{-\frac{1}{2}*x}$$
$$y'' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x) * e^{-\frac{1}{2}*x}$$
$$\mathbf{y''' = \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x) * e^{-\frac{1}{2}*x}}$$

Herleitung:
Ausgangsfunktion sei die komplexe Funktion $y = e^{(a + b*i)*x}$.
Die n-te Ableitung ist: $y^{(n)} = (a + b*i)^n * e^{(a + b*i)*x}$
Diese Ableitung ist gleich der Funktion selber, wenn $(a + b*i)^n$ gleich 1 ist. Dazu muss man die n-ten Wurzeln aus 1 bestimmen. Eine komplexe Lösung dieser Gleichung für n = 3, bei der die Funktion erst nach der dritten Ableitung wieder mit sich identisch ist, beträgt $(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i)$.
Die gleichen Überlegungen gelten für die Funktion $y = e^{(a - b*i)*x}$. Eine reelle Funktion mit den gleichen Eigenschaften bekommt man nach Addition der beiden komplexen Funktionen:

$$y = \tfrac{1}{2} * (e^{(a + b*i)*x} + e^{(a - b*i)*x})$$

oder, bezogen auf das Beispiel:

$$y = \tfrac{1}{2} * (e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i)*x} + e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i)*x})$$
$$= \tfrac{1}{2} * e^{-\frac{1}{2}*x} * (e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\, x} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\, x}) = \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x) * e^{-\frac{1}{2}*x}$$

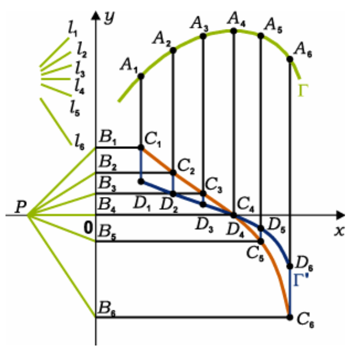


Grafische Differenziation - Berührungspunktkonstruktion

Wenn eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$ durch ihre Kurve K in kartesischen Koordinaten in einem Intervall $a < x < b$ dargestellt ist, kann die Kurve K' ihrer Ableitung näherungsweise konstruiert werden.
Die Konstruktion einer Tangente in einem gegebenen Kurvenpunkt nach Augenmaß kann recht ungenau ausfallen. Wenn aber die Richtung der Tangente MN (Abbildung) bekannt ist, kann der Berührungspunkt A genauer ermittelt werden.

Konstruktion des Berührungspunktes einer Tangente

Parallel zur gegebenen Tangentenrichtung MN werden zwei Sehnen M_1N_1 und M_2N_2 so eingezeichnet, dass die Kurve in nicht weit voneinander liegenden Punkten geschnitten wird.
Danach werden die Mittelpunkte der Sehnen ermittelt und durch diese eine Gerade PQ gezogen, die die Kurve im Punkt A schneidet, in dem die Tangente näherungsweise die vorgegebene Richtung MN hat.
Um die Genauigkeit zu überprüfen, kann eine dritte Sehne in geringem Abstand von den ersten beiden eingetragen werden, die von der Geraden PQ im Mittelpunkt geschnitten werden muss.
Dieses Verfahren kann nun zur eigentlichen grafischen Differenziation genutzt werden.

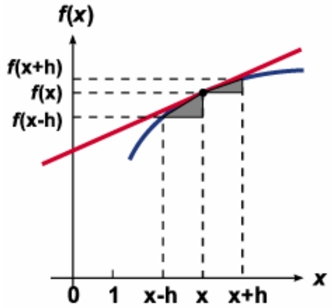


Konstruktion der Kurve einer abgeleiteten Funktion

1. Vorgabe einiger Richtungen $l_1, l_2, \ldots, l_n$, die den Tangentenrichtungen der Kurve $y = f(x)$ in dem betrachteten Intervall entsprechen sollen, und Ermittlung der dazugehörigen Berührungspunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wobei die

Tangenten selbst nicht konstruiert werden müssen.
2. Wahl eines Punktes P, eines Pols, auf der negativen x-Achse, wobei die Strecke PO = a um so größer sein soll, je flacher die Kurve ist.
3. Einzeichnen von Geraden, die parallel zu den Richtungen l_1, l_2, ..., l_n verlaufen, durch den Pol P hindurchgehen und die y-Achse in den Punkten B_1, B_2, ..., B_n schneiden.
4. Konstruktion horizontaler Geraden B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n von den Punkten B_1, B_2, ..., B_n aus bis zu den Schnittpunkten C_1, C_2, ..., C_n mit den aus den Punkten A_1, A_2, ..., A_n gefällten Loten.
5. Verbinden der Punkte C_1, C_2, ..., C_n mit Hilfe eines Kurvenlineals durch eine Kurve, die der Gleichung y = a f'(x) genügt.
Wenn die Strecke a so gewählt wird, dass sie der Längeneinheit auf der x-Achse entspricht, ist die gewonnene Kurve die der gesuchten Ableitung. Ist das nicht der Fall, dann sind die gefundenen Ordinaten C_1, C_2, ..., C_n der Ableitung mit dem Faktor 1/a zu multiplizieren. Die sich so ergebenden Punkte D_1, D_2, ..., D_n liegen auf der maßstabsgerechten Ableitungskurve.

Numerische Differenziation



Funktionen können numerisch abgeleitet werden, was dann sinnvoll ist, wenn die Lösung analytisch aufwendig oder gar nicht bestimmbar ist. Man nähert den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten an:

$$f'(x) = (f(x+h) - f(x))/h + F(x,h)$$

F(x,h) ist das Fehlerglied der Näherung, es ist von der Ordnung O(h), d.h., der Fehler ist linear in h, es hängt von der Schrittweite h und der betrachteten Stelle x ab.

Zweipunkte-Differenzenformel (Vorwärtsformel)

$$f'(x) = (f(x+h) - f(x))/h + O(h)$$

Zweipunkte-Differenzenformel (Rückwärtsformel)

$$f'(x) = (f(x) - f(x-h))/h + O(h)$$

Ist die Schrittweite h zu klein, verfälschen Rundungsfehler das Ergebnis.

3-Punkteformel (verbesserte Differenzenformel)

$$f'(x) = (f(x+h) - f(x-h))/(2h) + O(h^2)$$

Zweite Ableitung

$$f''(x) = (f(x+h) - 2 f(x) + f(x-h))/h^2 + O(h^2)$$

5-Punkteformel

$$f'(x) = (-f(x+2h) + 8 f(x+h) - 8 f(x-h) + f(x-2h))/(12h) + O(h^4)$$

Zweite Ableitung

$$f''(x) = (-f(x+2h) + 16 f(x+h) - 30 f(x) + 16 f(x-h) - f(x-2h))/(12h^2) + O(h^4)$$

Dritte Ableitung

$$f^{(3)}(x) \approx -(f(x-h) - 3f(x) + 3f(x+h) - f(x+2h)) / h^3$$

Vierte Ableitung

$$f^{(4)}(x) \approx (f(x-h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)) / h^4$$

Näherungsformeln zur numerischen Differenziation

5-Punkteformel

$$f'(x) = (f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)) / (12h)$$
$$f''(x) = (-30f(x) - f(x-2h) + 16f(x-h) + 16f(x+h) - f(x+2h)) / (12h^2)$$
$$f^{(3)}(x) = (-f(x-2h) + 2f(x-h) - 2f(x+h) + f(x+2h)) / (2h^3)$$
$$f^{(4)}(x) = (6f(x) + f(x-2h) - 4f(x-h) - 4f(x+h) + f(x+2h)) / (2h^4)$$

9-Punkteformel

$$f'(x) = (3f(x-4h) - 32f(x-3h) + 168f(x-2h) - 672f(x-h) + 672f(x+h) - 168f(x+2h) + 32f(x+3h) - 3f(x+4h)) / (840h)$$
$$f''(x) = (-14350f(x) - 9f(x-4h) + 128f(x-3h) - 1008f(x-2h) + 8064f(x-h) + 8064f(x+h) - 1008f(x+2h) + 128f(x+3h) - 9f(x+4h)) / (5040h^2)$$
$$f^{(3)}(x) = (-7f(x-4h) + 72f(x-3h) - 338f(x-2h) + 488f(x-h) - 488f(x+h) + 338f(x+2h) - 72f(x+3h) + 7f(x+4h)) / (240h^3)$$
$$f^{(4)}(x) = (2730f(x) + 7f(x-4h) - 96f(x-3h) + 676f(x-2h) - 1952f(x-h) - 1952f(x+h) + 676f(x+2h) - 96f(x+3h) + 7f(x+4h)) / (240h^4)$$
$$f^{(5)}(x) = (f(x-4h) - 9f(x-3h) + 26f(x-2h) - 29f(x-h) + 29f(x+h) - 26f(x+2h) + 9f(x+3h) - f(x+4h)) / (6h^5)$$
$$f^{(6)}(x) = (-150f(x) - f(x-4h) + 12f(x-3h) - 52f(x-2h) + 116f(x-h) + 116f(x+h) - 52f(x+2h) + 12f(x+3h) - f(x+4h)) / (4h^6)$$
$$f^{(7)}(x) = (-f(x-4h) + 6f(x-3h) - 14f(x-2h) + 14f(x-h) - 14f(x+h) + 14f(x+2h) - 6f(x+3h) + f(x+4h)) / (2h^7)$$
$$f^{(8)}(x) = (70f(x) + f(x-4h) - 8f(x-3h) + 28f(x-2h) - 56f(x-h) - 56f(x+h) + 28f(x+2h) - 8f(x+3h) + f(x+4h)) / h^8$$

Näherungsformeln zur numerischen Differenziation

Sind f_0, f_1, f_2 … Funktionswerte einer Funktion f(x) mit äquidistanten Argumenten, d.h. benachbarte x-Werte unterscheiden sich um einen festen Wert h, so gelten auch folgende Näherungsformeln:

2-Punkteformel

$f_0' = f_1' = (f_1-f_0)/h$

3-Punkteformel

$f_0' = (-f_2+4f_1-3f_0) / (2h)$ $f_1' = (f_2-f_0) / (2h)$ $f_2' = (3f_2-4f_1+f_0) / (2h)$

$f_0'' = f_1'' = f_2'' = (f_2-2f_1+f_0) / h^2$

4-Punkteformel

$f_0' = (2f_3-9f_2+18f_1-11f_0) / (6h)$ $f_1' = (-f_3+6f_2-3f_1-2f_0) / (6h)$

$f_2' = (2f_3+3f_2-6f_1+f_0) / (6h)$ $f_3' = (11f_3-18f_2+9f_1-2f_0) / (6h)$

$f_0'' = (-f_3+4f_2-5f_1+2f_0) / h^2$ $f_1'' = (f_2-2f_1+f_0) / h^2$

$f_2'' = (f_2-2f_2+f_1) / h^2$ $f_3'' = (2f_3-5f_2+4f_1-f_0) / h^2$

$f_0^{(3)} = f_1^{(3)} = f_2^{(3)} = f_3^{(3)} = (f_3-3f_2+3f_1-f_0) / h^3$

5-Punkteformel

$f_0' = (3f_4+16f_3-36f_2+48f_1-25f_0) / (12h)$ $f_1' = (f_4-6f_3+18f_2-10f_1-3f_0) / (12h)$

$f_2' = (-f_4+8f_3-8f_1+f_0) / (12h)$ $f_3' = (3f_4+10f_3-18f_2+6f_1-f_0) / (12h)$

$f_4' = (25f_4-48f_3+36f_2-16f_1+3f_0) / (12h)$

$f_0'' = (11f_4-56f_3+114f_2-104f_1+35f_0) / (12h^2)$ $f_1'' = (-f_4+4f_3+6f_2-20f_1+11f_0) / (12h^2)$

$f_2'' = (-f_4+16f_3-30f_2+16f_1-f_0) / (12h^2)$ $f_3'' = (11f_4-20f_3+6f_2+4f_1-f_0) / (12h^2)$

$f_4'' = (35f_4-104f_3+114f_2-56f_1+11f_0) / (12h^2)$

$f_0^{(3)} = (-3f_4+14f_3-24f_2+18f_1-5f_0) / (2h^3)$ $f_1^{(3)} = (-f_4+6f_3-12f_2+10f_1-3f_0) / (2h^3)$

$f_2^{(3)} = (f_4-2f_3+2f_1-f_0) / (2h^3)$ $f_3^{(3)} = (3f_4-10f_3+12f_2-6f_1+f_0) / (2h^3)$

$f_4^{(3)} = (5f_4-18f_3+24f_2-14f_1+3f_0) / (2h^3)$

$f_0^{(4)} = f_1^{(4)} = f_2^{(4)} = f_3^{(4)} = f_4^{(4)} = (f_4-4f_3+6f_2-4f_1+f_0) / h^4$

6-Punkteformel

$f_0' = (12f_5 -75f_4 +200f_3 -300f_2 +300f_1 -137f_0) / (60h)$

$f_1' = (-3f_5 +20f_4 -60f_3 +120f_2 -65f_1 -12f_0) / (60h)$

$f_2' = (2f_5 -15f_4 +60f_3 -20f_2 -30f_1 +3f_0) / (60h)$

$f_3' = (-3f_5 +30f_4 +20f_3 -60f_2 +15f_1 -2f_0) / (60h)$

$f_4' = (12f_5 +65f_4 -120f_3 +60f_2 -20f_1 +3f_0) / (60h)$

$f_5' = (137f_5 -300f_4 +300f_3 -200f_2 +75f_1 -12f_0) / (60h)$

$f_0'' = (-10f_5 +61f_4 -156f_3 +214f_2 -154f_1 +45f_0) / (12h^2)$

$f_1'' = (f_5 -6f_4 +14f_3 -4f_2 -15f_1 +10f_0) / (12h^2)$

$f_2'' = (-f_4 +16f_3 -30f_2 +16f_1 -f_0) / (12h^2)$

$f_3'' = (-f_5 +16f_4 -30f_3 +16f_2 -f_1) / (12h^2)$

$f_4'' = (10f_5 -15f_4 -4f_3 +14f_2 -6f_1 +f_0) / (12h^2)$

$f_5'' = (45f_5 -154f_4 +214f_3 -156f_2 +61f_1 -10f_0) / (12h^2)$

$f_0^{(3)} = (7f_5 -41f_4 +98f_3 -118f_2 +71f_1 -17f_0) / (4h^3)$

$f_1^{(3)} = (f_5 -7f_4 +22f_3 -34f_2 +25f_1 -7f_0) / (4h^3)$

$f_2^{(3)} = (-f_5 +7f_4 -14f_3 +10f_2 -f_1 -f_0) / (4h^3)$

$f_3^{(3)} = (f_5 +f_4 -10f_3 +14f_2 -7f_1 +f_0) / (4h^3)$

$f_4^{(3)} = (7f_5 -25f_4 +34f_3 -22f_2 +7f_1 -f_0) / (4h^3)$

$f_5^{(3)} = (17f_5 -71f_4 +118f_3 -98f_2 +41f_1 -7f_0) / (4h^3)$

$f_0^{(4)} = (-2f_5 +11f_4 -24f_3 +26f_2 -14f_1 +3f_0) / h^4$

$f_1^{(4)} = (-f_5 +6f_4 -14f_3 +16f_2 -9f_1 +2f_0) / h^4$

$f_2^{(4)} = (f_4 -4f_3 +6f_2 -4f_1 +f_0) / h^4$

$f_3^{(4)} = (f_5 -4f_4 +6f_3 -4f_2 +f_1) / h^4$

$f_4^{(4)} = (2f_5 -9f_4 +16f_3 -14f_2 +6f_1 -f_0) / h^4$

$f_5^{(4)} = (3f_5 -14f_4 +26f_3 -24f_2 +11f_1 -2f_0) / h^4$

$f_0^{(5)} = \ldots = f_5^{(5)} = (f_5 -5f_4 +10f_3 -10f_2 +5f_1 -f_0) / h^5$

7-Punkteformel

$f_0' = (-10f_6 +72f_5 -225f_4 +400f_3 -450f_2 +360f_1 -147f_0) / (60h)$

$f_1' = (2f_6 -15f_5 +50f_4 -100f_3 +150f_2 -77f_1 -10f_0) / (60h)$

$f_2' = (-f_6 +8f_5 -30f_4 +80f_3 -35f_2 -24f_1 +2f_0) / (60h)$

$f_3' = (f_6 -9f_5 +45f_4 -45f_2 +9f_1 -f_0) / (60h)$

$f_4' = (-2f_6 +24f_5 +35f_4 -80f_3 +30f_2 -8f_1 +f_0) / (60h)$

$f_5' = (10f_6 +77f_5 -150f_4 +100f_3 -50f_2 +15f_1 -2f_0) / (60h)$

$f_6' = (147f_6 -360f_5 +450f_4 -400f_3 +225f_2 -72f_1 +10f_0) / (60h)$

$f_0'' = (137f_6 -972f_5 +2970f_4 -5080f_3 +5265f_2 -3132f_1 +812f_0) / (180h^2)$

$f_1'' = (-13f_6 +93f_5 -285f_4 +470f_3 -255f_2 -147f_1 +137f_0) / (180h^2)$

$f_2'' = (2f_6 -12f_5 +15f_4 +200f_3 -420f_2 +228f_1 -13f_0) / (180h^2)$
$f_3'' = (2f_6 -27f_5 +270f_4 -490f_3 +270f_2 -27f_1 +2f_0) / (180h^2)$
$f_4'' = (-13f_6 +228f_5 -420f_4 +200f_3 +15f_2 -12f_1 +2f_0) / (180h^2)$
$f_5'' = (137f_6 -147f_5 -255f_4 +470f_3 -285f_2 +93f_1 -13f_0) / (180h^2)$
$f_6'' = (812f_6 -3132f_5 +5265f_4 -5080f_3 +2970f_2 -972f_1 +137f_0) / (180h^2)$

$f_0^{(3)} = (-15f_6 +104f_5 -307f_4 +496f_3 -461f_2 +232f_1 -49f_0) / (8h^3)$
$f_1^{(3)} = (-f_6 +8f_5 -29f_4 +64f_3 -83f_2 +56f_1 -15f_0) / (8h^3)$
$f_2^{(3)} = (f_6 -8f_5 +29f_4 -48f_3 +35f_2 -8f_1 -f_0) / (8h^3)$
$f_3^{(3)} = (-f_6 +8f_5 -13f_4 +13f_2 -8f_1 +f_0) / (8h^3)$
$f_4^{(3)} = (f_6 +8f_5 -35f_4 +48f_3 -29f_2 +8f_1 -f_0) / (8h^3)$
$f_5^{(3)} = (15f_6 -56f_5 +83f_4 -64f_3 +29f_2 -8f_1 +f_0) / (8h^3)$
$f_6^{(3)} = (49f_6 -232f_5 +461f_4 -496f_3 +307f_2 -104f_1 +15f_0) / (8h^3)$

$f_0^{(4)} = (17f_6 -114f_5 +321f_4 -484f_3 +411f_2 -186f_1 +35f_0) / (6h^4)$
$f_1^{(4)} = (5f_6 -36f_5 +111f_4 -184f_3 +171f_2 -84f_1 +17f_0) / (6h^4)$
$f_2^{(4)} = (-f_6 +6f_5 -9f_4 -4f_3 +21f_2 -18f_1 +5f_0) / (6h^4)$
$f_3^{(4)} = (-f_6 +12f_5 -39f_4 +56f_3 -39f_2 +12f_1 -f_0) / (6h^4)$
$f_4^{(4)} = (5f_6 -18f_5 +21f_4 -4f_3 -9f_2 +6f_1 -f_0) / (6h^4)$
$f_5^{(4)} = (17f_6 +84f_5 +171f_4 -184f_3 +111f_2 -36f_1 +5f_0) / (6h^4)$
$f_6^{(4)} = (35f_6 -186f_5 +411f_4 -484f_3 +321f_2 -114f_1 +17f_0) / (6h^4)$

$f_0^{(5)} = (-5f_6\ 32f_5 -85f_4 +120f_3 -95f_2 +40f_1 -7f_0) / (2h^5)$
$f_1^{(5)} = (-3f_6 +20f_5 -55f_4 +80f_3 -65f_2 +28f_1 -5f_0) / (2h^5)$
$f_2^{(5)} = (-f_6 +8f_5 -25f_4 +40f_3 -35f_2 +16f_1 -3f_0) / (2h^5)$
$f_3^{(5)} = (f_6 -4f_5 +5f_4 -5f_2 +4f_1 -f_0) / (2h^5)$
$f_4^{(5)} = (3f_6 -16f_5 +35f_4 -40f_3 +25f_2 -8f_1 +f_0) / (2h^5)$
$f_5^{(5)} = (5f_6 -28f_5 +65f_4 -80f_3 +55f_2 -20f_1 +3f_0) / (2h^5)$
$f_6^{(5)} = (7f_6 -40f_5 +95f_4 -120f_3 +85f_2 -32f_1 +5f_0) / (2h^5)$

8-Punkteformel

$f_0^{(1)} = (60f_7 -490f_6 +1764f_5 -3675f_4 +4900f_3 -4410f_2 +2940f_1 -1089f_0) / (420h)$
$f_1^{(1)} = (10f_7 +84f_6 -315f_5 +700f_4 -1050f_3 +1260f_2 -609f_1 -60f_0) / (420h)$
$f_2^{(1)} = (4f_7 -35f_6 +140f_5 -350f_4 +700f_3 -329f_2 -140f_1 +10f_0) / (420h)$
$f_3^{(1)} = (-3f_7 +28f_6 -126f_5 +420f_4 -105f_3 -252f_2 +42f_1 -4f_0) / (420h)$
$f_4^{(1)} = (4f_7 -42f_6 +252f_5 +105f_4 -420f_3 +126f_2 -28f_1 +3f_0) / (420h)$
$f_5^{(1)} = (-10f_7 +140f_6 +329f_5 -700f_4 +350f_3 -140f_2 +35f_1 -4f_0) / (420h)$
$f_6^{(1)} = (60f_7 +609f_6 -1260f_5 +1050f_4 -700f_3 +315f_2 -84f_1 +10f_0) / (420h)$
$f_7^{(1)} = (1089f_7 -2940f_6 +4410f_5 -4900f_4 +3675f_3 -1764f_2 +490f_1 -60f_0) / (420h)$

$f_0^{(2)} = (-126f_7 +1019f_6 -3618f_5 +7380f_4 -9490f_3 +7911f_2 -4014f_1 +938f_0) / (180h^2)$
$f_1^{(2)} = (11f_7 -90f_6 +324f_5 -670f_4 +855f_3 -486f_2 -70f_1 +126f_0) / (180h^2)$
$f_2^{(2)} = (-2f_7 +16f_6 -54f_5 +85f_4 +130f_3 -378f_2 +214f_1 -11f_0) / (180h^2)$
$f_3^{(2)} = (2f_6 -27f_5 +270f_4 -490f_3 +270f_2 -27f_1 +2f_0) / (180h^2)$
$f_4^{(2)} = (2f_7 -27f_6 +270f_5 -490f_4 +270f_3 -27f_2 +2f_1) / (180h^2)$
$f_5^{(2)} = (-11f_7 +214f_6 -378f_5 +130f_4 +85f_3 -54f_2 +16f_1 -2f_0) / (180h^2)$
$f_6^{(2)} = (126f_7 -70f_6 -486f_5 +855f_4 -670f_3 +324f_2 -90f_1 +11f_0) / (180h^2)$
$f_7^{(2)} = (938f_7 -4014f_6 +7911f_5 -9490f_4 +7380f_3 -3618f_2 +1019f_1 -126f_0) / (180h^2)$

$f_0^{(3)} = (232f_7 -1849f_6 +6432f_5 -12725f_4 +15560f_3 -11787f_2 +5104f_1 -967f_0) / (120h^3)$
$f_1^{(3)} = (7f_7 -64f_6 +267f_5 -680f_4 +1205f_3 -1392f_2 +889f_1 -232f_0) / (120h^3)$
$f_2^{(3)} = (-8f_7 +71f_6 +267f_5 -680f_4 +1205f_3 -1392f_2 +889f_1 -232f_0) / (120h^3)$
$f_3^{(3)} = (7f_7 -64f_6 +267f_5 -440f_4 +245f_3 +48f_2 -71f_1 +8f_0) / (120h^3)$
$f_4^{(3)} = (-8f_7 +71f_6 -48f_5 -245f_4 +440f_3 -267f_2 +64f_1 -7f_0) / (120h^3)$
$f_5^{(3)} = (7f_7 +176f_6 -693f_5 +1000f_4 -715f_3 +288f_2 -71f_1 +8f_0) / (120h^3)$
$f_6^{(3)} = (232f_7 -889f_6 +1392f_5 -1205f_4 +680f_3 -267f_2 +64f_1 -7f_0) / (120h^3)$
$f_7^{(3)} = (967f_7 -5104f_6 +11787f_5 -15560f_4 +12725f_3 -6432f_2 +1849f_1 -323f_0) / (120h^3)$

$f_0^{(4)} = (-21f_7 +164f_6 -555f_5 +1056f_4 -1219f_3 +852f_2 -333f_1 +56f_0) / (6h^4)$
$f_1^{(4)} = (-4f_7 +33f_6 -120f_5 +251f_4 -324f_3 +255f_2 -112f_1 +21f_0) / (6h^4)$
$f_2^{(4)} = (f_7 -8f_6 +27f_5 -44f_4 +31f_3 -11f_1 +4f_0) / (6h^4)$
$f_3^{(4)} = (-f_6 +12f_5 -39f_4 +56f_3 -39f_2 +12f_1 -f_0) / (6h^4)$
$f_4^{(4)} = (-f_7 +12f_6 -39f_5 +56f_4 -39f_3 +12f_2 -f_1) / (6h^4)$
$f_5^{(4)} = (4f_7 -11f_6 +31f_4 -44f_3 +27f_2 -8f_1 +f_0) / (6h^4)$
$f_6^{(4)} = (21f_7 -112f_6 +255f_5 -324f_4 +251f_3 -120f_2 +33f_1 -4f_0) / (6h^4)$
$f_7^{(4)} = (56f_7 -333f_6 +852f_5 -1219f_4 +1056f_3 -555f_2 +164f_1 -21f_0) / (6h^4)$

$f_0^{(5)} = (25f_7 -190f_6 +621f_5 -1130f_4 +1235f_3 -810f_2 +295f_1 -46f_0) / (6h^5)$
$f_1^{(5)} = (10f_7 -79f_6 +270f_5 -515f_4 +590f_3 -405f_2 +154f_1 -25f_0) / (6h^5)$
$f_2^{(5)} = (f_7 -79f_6 +270f_5 -515f_4 +5905f_3 -405f_2 +154f_1 -25f_0) / (6h^5)$
$f_3^{(5)} = (-2f_7 +17f_6 -54f_5 +85f_4 -70f_3 +27f_2 -2f_1 -f_0) / (6h^5)$
$f_4^{(5)} = (f_7 +2f_6 -27f_5 +70f_4 -85f_3 +54f_2 -17f_1 +2f_0) / (6h^5)$
$f_5^{(5)} = (10f_7 -55f_6 +126f_5 155f_4 +110f_3 -45f_2 +10f_1 -f_0) / (6h^5)$
$f_6^{(5)} = (25f_7 -154f_6 +405f_5 -590f_4 +515f_3 -270f_2 +79f_1 -10f_0) / (6h^5)$
$f_7^{(5)} = (46f_7 -295f_6 +810f_5 -1235f_4 +1130f_3 -621f_2 +190f_1 -25f_0) / (6h^5)$

9-Punkteformel

$f_0^{(1)} = (-105f_8 +960f_7 -3920f_6 +9408f_5 -14700f_4 +15680f_3 -11760f_2 +6720f_1 -2283f_0) / (840h)$
$f_1^{(1)} = (15f_8 -140f_7 +588f_6 -1470f_5 +2450f_4 -2940f_3 +2940f_2 -1338f_1 -105f_0) / (840h)$
$f_2^{(1)} = (-5f_8 +48f_7 -210f_6 +560f_5 -1050f_4 +1680f_3 -798f_2 -240f_1 +15f_0) / (840h)$
$f_3^{(1)} = (3f_8 -30f_7 +140f_6 -420f_5 +1050f_4 -378f_3 -420f_2 +60f_1 -5f_0) / (840h)$
$f_4^{(1)} = (-3f_8 +32f_7 -168f_6 +672f_5 -672f_3 +168f_2 -32f_1 +3f_0) / (840h)$
$f_5^{(1)} = (5f_8 -60f_7 +420f_6 +378f_5 -1050f_4 +420f_3 -140f_2 +30f_1 -3f_0) / (840h)$
$f_6^{(1)} = (-15f_8 +240f_7 +798f_6 -1680f_5 +1050f_4 -560f_3 +210f_2 -48f_1 +5f_0) / (840h)$
$f_7^{(1)} = (105f_8 +1338f_7 -2940f_6 +2940f_5 -2450f_4 +1470f_3 -588f_2 +140f_1 -15f_0) / (840h)$
$f_8^{(1)} = (2283f_8 -6720f_7 +11760f_6 -15680f_5 +14700f_4 -9408f_3 +3920f_2 -960f_1 +105f_0) / (840h)$

$f_0^{(2)} = (3267f_8 -29664f_7 +120008f_6 -284256f_5 +435330f_4 -448672f_3 +312984f_2 -138528f_1 +29531f_0) / (5040h^2)$
$f_1^{(2)} = (-261f_8 +2396f_7 -9828f_6 +23688f_5 -37030f_4 +38556f_3 -20916f_2 +128f_1 +3267f_0) / (5040h^2)$
$f_2^{(2)} = (47f_8 -432f_7 +1764f_6 -4144f_5 +5670f_4 +1008f_3 -9268f_2 +5616f_1 -261f_0) / (5040h^2)$
$f_3^{(2)} = (-9f_8 +72f_7 -196f_6 -252f_5 +6930f_4 -13216f_3 +7308f_2 -684f_1 +47f_0) / (5040h^2)$
$f_4^{(2)} = (-9f_8 +128f_7 -1008f_6 +8064f_5 -14350f_4 +8064f_3 -1008f_2 +128f_1 -9f_0) / (5040h^2)$
$f_5^{(2)} = (47f_8 -684f_7 +7308f_6 -13216f_5 +6930f_4 -252f_3 -196f_2 +72f_1 -9f_0) / (5040h^2)$
$f_6^{(2)} = (-261f_8 +5616f_7 -9268f_6 +1008f_5 +5670f_4 -4144f_3 +1764f_2 -432f_1 +47f_0) / (5040h^2)$
$f_7^{(2)} = (3267f_8 +128f_7 -20916f_6 +38556f_5 -37030f_4 +23688f_3 -9828f_2 +2396f_1 -261f_0) / (5040h^2)$
$f_8^{(2)} = (29531f_8 -138528f_7 +312984f_6 -448672f_5 +435330f_4 -284256f_3 +120008f_2 -29664f_1 +3267f_0) / (5040h^2)$

$f_0^{(3)} = (-469f_8 +4126f_7 +16830f_6 +39128f_5 -58280f_4 +57384f_3 -36706f_2 +13960f_1 -2403f_0) / (240h^3)$
$f_1^{(3)} = (-5f_8 +54f_7 -268f_6 +814f_5 -1710f_4 +2690f_3 -2924f_2 +1818f_1 -469f_0) / (240h^3)$
$f_2^{(3)} = (9f_8 -88f_7 +394f_6 -1080f_5 +2060f_4 -2504f_3 +1638f_2 -424f_1 -5f_0) / (240h^3)$
$f_3^{(3)} = (-7f_8 +70f_7 -324f_6 +926f_5 -1370f_4 +882f_3 -100f_2 -86f_1 +9f_0) / (240h^3)$
$f_4^{(3)} = (7f_8 -72f_7 +338f_6 -488f_5 +488f_3 -338f_2 +72f_1 -7f_0) / (240h^3)$
$f_5^{(3)} = (-9f_8 +86f_7 +100f_6 -882f_5 +1370f_4 -926f_3 +324f_2 -70f_1 +7f_0) / (240h^3)$
$f_6^{(3)} = (5f_8 +424f_7 -1638f_6 +2504f_5 -2060f_4 +1080f_3 -394f_2 +88f_1 -9f_0) / (240h^3)$
$f_7^{(3)} = (469f_8 -1818f_7 +2924f_6 -2690f_5 +1710f_4 -814f_3 +268f_2 -54f_1 +5f_0) / (240h^3)$
$f_8^{(3)} = (2403f_8 -13960f_7 +36706f_6 -57384f_5 +58280f_4 -39128f_3 +16830f_2 -4216f_1 +469f_0) / (240h^3)$

$f_0^{(4)} = (967f_8 -8576f_7 +33636f_6 -76352f_5 +109930f_4 -102912f_3 +61156f_2 -21056f_1 +3207f_0) / (240h^4)$
$f_1^{(4)} = (127f_8 -1176f_7 +4876f_6 -11912f_5 +18930f_4 -20072f_3 +13756f_2 -5496f_1 +967f_0) / (240h^4)$
$f_2^{(4)} = (-33f_8 +304f_7 -1244f_6 +2928f_5 -4070f_4 +3088f_3 -924f_2 -176f_1 +127f_0) / (240h^4)$
$f_3^{(4)} = (7f_8 -56f_7 +156f_6 +88f_5 -1070f_4 +1848f_3 -1364f_2 +424f_1 -33f_0) / (240h^4)$
$f_4^{(4)} = (7f_8 -96f_7 +676f_6 -1952f_5 +2730f_4 -1952f_3 +676f_2 -96f_1 +7f_0) / (240h^4)$
$f_5^{(4)} = (-33f_8 +424f_7 -1364f_6 +1848f_5 -1070f_4 +88f_3 +156f_2 -56f_1 +7f_0) / (240h^4)$
$f_6^{(4)} = (127f_8 -176f_7 -924f_6 +3088f_5 -4070f_4 +2928f_3 -1244f_2 +304f_1 -33f_0) / (240h^4)$
$f_7^{(4)} = (967f_8 -5496f_7 +13756f_6 -20072f_5 +18930f_4 -11912f_3 +4876f_2 -1176f_1 +127f_0) / (240h^4)$
$f_8^{(4)} = (3207f_8 -21056f_7 +61156f_6 -102912f_5 +109930f_4 -76352f_3 +33636f_2 -8576f_1 +967f_0) / (240h^4)$

$f_0^{(5)} = (-35f_8 +305f_7 -1170f_6 +2581f_5 -3580f_4 +3195f_3 -1790f_2 +575f_1 -81f_0) / (6h^5)$
$f_1^{(5)} = (-10f_8 +90f_7 -359f_6 +830f_5 -1215f_4 +1150f_3 -685f_2 +234f_1 -35f_0) / (6h^5)$
$f_2^{(5)} = (f_7 -10f_6 +45f_5 -110f_4 +155f_3 -126f_2 +55f_1 -10f_0) / (6h^5)$
$f_3^{(5)} = (f_8 -10f_7 +45f_6 -110f_5 +155f_4 -126f_3 +55f_2 -10f_1) / (6h^5)$
$f_4^{(5)} = (-f_8 +9f_7 -26f_6 +29f_5 -29f_3 +26f_2 -9f_1 +f_0) / (6h^5)$
$f_5^{(5)} = (10f_7 -55f_6 +126f_5 -155f_4 +110f_3 -45f_2 +10f_1 -f_0) / (6h^5)$
$f_6^{(5)} = (10f_8 -55f_7 +126f_6 -155f_5 +110f_4 -45f_3 +10f_2 -f_1) / (6h^5)$
$f_7^{(5)} = (35f_8 -234f_7 +685f_6 -1150f_5 +1215f_4 -830f_3 +359f_2 -90f_1 +10f_0) / (6h^5)$
$f_8^{(5)} = (81f_8 -575f_7 +1790f_6 -3195f_5 +3580f_4 -2581f_3 +1170f_2 -305f_1 +35f_0) / (6h^5)$

10-Punkteformel

$f_0^{(1)} = (280f_9 -2835f_8 +12960f_7 -35280f_6 +63504f_5 -79380f_4 +70560f_3 -45360f_2 +22680f_1 -7129f_0) / (2520h)$
$f_1^{(1)} = (-35f_9 +360f_8 -1680f_7 +4704f_6 -8820f_5 +11760f_4 -11760f_3 +10080f_2 -4329f_1 -280f_0) / (2520h)$
$f_2^{(1)} = (10f_9 -105f_8 +504f_7 -1470f_6 +2940f_5 -4410f_4 +5880f_3 -2754f_2 -630f_1 +35f_0) / (2520h)$

$f_3^{(1)} = (-5f_9 +54f_8 -270f_7 +840f_6 -1890f_5 +3780f_4 -1554f_3 -1080f_2 +135f_1 -10f_0) / (2520h)$
$f_4^{(1)} = (4f_9 -45f_8 +240f_7 -840f_6 +2520f_5 -504f_4 -1680f_3 +360f_2 -60f_1 +5f_0) / (2520h)$
$f_5^{(1)} = (-5f_9 +60f_8 -360f_7 +1680f_6 +504f_5 -2520f_4 +840f_3 -240f_2 +45f_1 -4f_0) / (2520h)$
$f_6^{(1)} = (10f_9 -135f_8 +1080f_7 +1554f_6 -3780f_5 +1890f_4 -840f_3 +270f_2 -54f_1 +5f_0) / (2520h)$
$f_7^{(1)} = (-35f_9 +630f_8 +2754f_7 -5880f_6 +4410f_5 -2940f_4 +1470f_3 -504f_2 +105f_1 -10f_0) / (2520h)$
$f_8^{(1)} = (280f_9 +4329f_8 -10080f_7 +11760f_6 -11760f_5 +8820f_4 -4704f_3 +1680f_2 -360f_1 +35f_0) / (2520h)$
$f_9^{(1)} = (7129f_9 -22680f_8 +45360f_7 -70560f_6 +79380f_5 -63504f_4 +35280f_3 -12960f_2 +2835f_1 -280f_0) / (2520h)$

$f_0^{(2)} = (-3044f_9 +30663f_8 -139248f_7 +375704f_6 -667800f_5 +818874f_4 -704368f_3 +422568f_2 -165924f_1 +32575f_0) / (5040h^2)$
$f_1^{(2)} = (223f_9 -2268f_8 +10424f_7 -28560f_6 +51786f_5 -65128f_4 +57288f_3 -28944f_2 +2135f_1 +3044f_0) / (5040h^2)$
$f_2^{(2)} = (-38f_9 +389f_8 -1800f_7 +4956f_6 -8932f_5 +10458f_4 -2184f_3 -7900f_2 +5274f_1 -223f_0) / (5040h^2)$
$f_3^{(2)} = (9f_9 -90f_8 +396f_7 -952f_6 +882f_5 +5796f_4 -12460f_3 +6984f_2 -603f_1 +38f_0) / (5040h^2)$
$f_4^{(2)} = (-9f_8 +128f_7 -1008f_6 +8064f_5 -14350f_4 +8064f_3 -1008f_2 +128f_1 -9f_0) / (5040h^2)$
$f_5^{(2)} = (-9f_9 +128f_8 -1008f_7 +8064f_6 -14350f_5 +8064f_4 -1008f_3 +128f_2 -9f_1) / (5040h^2)$
$f_6^{(2)} = (38f_9 -603f_8 +6984f_7 -12460f_6 +5796f_5 +882f_4 -952f_3 +396f_2 -90f_1 +9f_0) / (5040h^2)$
$f_7^{(2)} = (-223f_9 +5274f_8 -7900f_7 -2184f_6 +10458f_5 -8932f_4 +4956f_3 -1899f_2 +389f_1 -38f_0) / (5040h^2)$
$f_8^{(2)} = (3044f_9 +2135f_8 -28944f_7 +57288f_6 -65128f_5 +51786f_4 -28560f_3 +10424f_2 -2268f_1 +223f_0) / (5040h^2)$
$f_9^{(2)} = (32575f_9 -165924f_8 +422568f_7 -704368f_6 +818874f_5 -667800f_4 +375704f_3 -139248f_2 +30663f_1 -3044f_0) / (5040h^2)$

10-Punkteformel ; Quotient q = 15120h³

$f_0^{(3)} = (29531f_9 -295326f_8 +1328724f_7 -3540894f_6 +6185970f_5 -7392546f_4 +6095796f_3 -3375594f_2 +1145259f_1 -180920f_0) / q$
$f_1^{(3)} = (-16f_9 -171f_8 +2826f_7 -15540f_6 +49266f_5 -105714f_4 +168126f_3 -183636f_2 +114390f_1 -29531f_0) / q$
$f_2^{(3)} = (-331f_9 +3546f_8 -17460f_7 +52626f_6 -109746f_5 +171486f_4 -185556f_3 +115110f_2 -29691f_1 +16f_0)/ q$
$f_3^{(3)} = (236f_9 -2565f_8 +12906f_7 -40236f_6 +88074f_5 -116046f_4 +75390f_3 -14796f_2 -3294f_1 +331f_0) / q$
$f_4^{(3)} = (-205f_9 +2286f_8 -11916f_7 +38514f_6 -56574f_5 +25830f_4 +13524f_3 -13914f_2 +2691f_1 -236f_0) / q$
$f_5^{(3)} = (236f_9 -2691f_8 +13914f_7 -13524f_6 -25830f_5 +56574f_4 -38514f_3 +11916f_2 -2286f_1 +205f_0) / q$
$f_6^{(3)} = (-331f_9 +3294f_8 +14796f_7 -75390f_6 +116046f_5 -88074f_4 +40236f_3 -12906f_2 +2565f_1 -236f_0) / q$
$f_7^{(3)} = (-16f_9 +29691f_8 -115110f_7 +185556f_6 -171486f_5 +109746f_4 -52626f_3 +17460f_2 -3546f_1 +331f_0)/ q$
$f_8^{(3)} = (29531f_9 -114390f_8 +183636f_7 -168126f_6 +105714f_5 -49266f_4 +15540f_3 -2826f_2 +171f_1 +16f_0) / q$
$f_9^{(3)} = (180920f_9 -1145259f_8 +3375594f_7 -6095796f_6 +7392546f_5 -6185970f_4 +3540894f_3 -1328724f_2 +295326f_1 -29531f_0) / q$

$f_0^{(4)} = (-1068f_9 +10579f_8 -47024f_7 +123348f_6 -210920f_5 +244498f_4 -192624f_3 +99604f_2 -30668f_1 +4275f_0) / (240h^4)$
$f_1^{(4)} = (-101f_9 +1036f_8 -4812f_7 +13360f_6 -24638f_5 +31656f_4 -28556f_3 +17392f_2 -6405f_1 +1068f_0) / (240h^4)$
$f_2^{(4)} = (26f_9 -267f_8 +1240f_7 -3428f_6 +6204f_5 -7346f_4 +5272f_3 -1860f_2 +58f_1 +101f_0) / (240h^4)$
$f_3^{(4)} = (-7f_9 +70f_8 -308f_7 +744f_6 -794f_5 -188f_4 +1260f_3 -1112f_2 +361f_1 -26f_0) / (240h^4)$
$f_4^{(4)} = (7f_8 -96f_7 +676f_6 -1952f_5 +2730f_4 -1952f_3 +676f_2 -96f_1 +7f_0) / (240h^4)$
$f_5^{(4)} = (7f_9 -96f_8 +676f_7 -1952f_6 +2730f_5 -1952f_4 +676f_3 -96f_2 +7f_1) / (240h^4)$
$f_6^{(4)} = (-26f_9 +361f_8 -1112f_7 +1260f_6 -188f_5 -794f_4 +744f_3 -308f_2 +70f_1 -7f_0) / (240h^4)$
$f_7^{(4)} = (101f_9 +58f_8 -1860f_7 +5272f_6 -7346f_5 +6204f_4 -3428f_3 +1240f_2 -267f_1 +26f_0) / (240h^4)$
$f_8^{(4)} = (1068f_9 -6405f_8 +17392f_7 -28556f_6 +31656f_5 -24638f_4 +13360f_3 -4812f_2 +1036f_1 -101f_0) / (240h^4)$
$f_9^{(4)} = (4275f_9 -30668f_8 +99604f_7 -192624f_6 +244498f_5 -210920f_4 +123348f_3 -47024f_2 +10579f_1 -1068f_0) / (240h^4)$

11-Punkteformel ; Quotient q = 2520 h

$f_0^{(1)} = (-252f_{10} +2800f_9 -14175f_8 +43200f_7 -88200f_6 +127008f_5 -132300f_4 +100800f_3 -56700f_2 +25200f_1 -7381f_0) / q$
$f_1^{(1)} = (28f_{10} -315f_9 +1620f_8 -5040f_7 +10584f_6 -15876f_5 +17640f_4 -15120f_3 +11340f_2 -4609f_1 -252f_0) / q$
$f_2^{(1)} = (-7f_{10} +80f_9 -420f_8 +1344f_7 -2940f_6 +4704f_5 -5880f_4 +6720f_3 -3069f_2 -560f_1 +28f_0) / q$
$f_3^{(1)} = (3f_{10} -35f_9 +189f_8 -630f_7 +1470f_6 -2646f_5 +4410f_4 -1914f_3 -945f_2 +105f_1 -7f_0) / q$
$f_4^{(1)} = (-2f_{10} +24f_9 -135f_8 +480f_7 -1260f_6 +3024f_5 -924f_4 -1440f_3 +270f_2 -40f_1 +3f_0) / q$
$f_5^{(1)} = (2f_{10} -25f_9 +150f_8 -600f_7 +2100f_6 -2100f_4 +600f_3 -150f_2 +25f_1 -2f_0) / q$
$f_6^{(1)} = (-3f_{10} +40f_9 -270f_8 +1440f_7 +924f_6 -3024f_5 +1260f_4 -480f_3 +135f_2 -24f_1 +2f_0) / q$
$f_7^{(1)} = (7f_{10} -105f_9 +945f_8 +1914f_7 -4410f_6 +2646f_5 -1470f_4 +630f_3 -189f_2 +35f_1 -3f_0) / q$
$f_8^{(1)} = (-28f_{10} +560f_9 +3069f_8 -6720f_7 +5880f_6 -4704f_5 +2940f_4 -1344f_3 +420f_2 -80f_1 +7f_0) / q$
$f_9^{(1)} = (252f_{10} +4609f_9 -11340f_8 +15120f_7 -17640f_6 +15876f_5 -10584f_4 +5040f_3 -1620f_2 +315f_1 -28f_0) / q$
$f_{10}^{(1)} = (7381f_{10} -25200f_9 +56700f_8 -100800f_7 +132300f_6 -127008f_5 +88200f_4 -43200f_3 +14175f_2 -2800f_1 +252f_0) / q$

11-Punkteformel ; Quotient q = 25200 h²

$f_0^{(2)}$ = (22584672f_{10} -249955200f_9 +1259161200f_8 -3813004800f_7 +7718356801f_6 -10980313345f_5 +11228263201f_4 -8288755200f_3 +4363048800f_2 -1539964800f_1 +280578672f_0) / (39916800 h²)

$f_1^{(2)}$ = (-962f_{10} +10735f_9 -54630f_8 +167560f_7 -344820f_6 +501354f_5 -527660f_4 +401880f_3 -188010f_2 +20295f_1 +14258f_0) / q

$f_2^{(2)}$ = (153$_{10}$ -1720f_9 +8830f_8 -27360f_7 +56910f_6 -83216f_5 +84420f_4 -29280f_3 +32615f_2 +24840f_1 - 962f_0) / q

$f_3^{(2)}$ = (-37f_{10} +415f_9 -2115f_8 +6420f_7 -12530f_6 +13734f_5 +21210f_4 -57860f_3 +33255f_2-2645f_1+153f_0)/ q

$f_4^{(2)}$ = (8f_{10} -80f_9 +315f_8 -320f_7 -3360f_6 +38304f_5 -70070f_4 +39360f_3 -4680f_2 +560f_1 -37f_0) / q

$f_5^{(2)}$ = (8f_{10} -125f_9 +1000f_8 -6000f_7 +42000f_6 -73766f_5 +42000f_4 -6000f_4 +1000f_2 -125f_1 +8f_0) / q

$f_6^{(2)}$ = (-37f_{10} +560f_9 -4680f_8 +39360f_7 -70070f_6 +38304f_5 -3360f_4 -320f_3 +315f_2 -80f_1 +8f_0) / q

$f_7^{(2)}$ = (153f_{10} -2645f_9 +33255f_8 -57860f_7 +21210f_6 +13734f_5 -12530f_4 +6420f_3 -2115f_2 +415f_1 -37f_0) / q

$f_8^{(2)}$ = (-962f_{10} +24840f_9 -32615f_8 -29280f_7 +84420f_6 -83216f_5 +56910f_4 -27360f_3 +8830f_2 -1720f_1 +153f_0) / q

$f_9^{(2)}$ = (14258f_{10} +20295f_9 -188010f_8 +401880f_7 -527660f_6 +501354f_5 -344820f_4 +167560f_3 -54630f_2 +10735f_1 -962f_0) / q

$f_{10}^{(2)}$ = (280578672f_{10} -1539964800f_9 +4363048800f_8 -8288755200f_7 +11228263201f_6 -10980313345f_5 +7718356801f_4 -3813004800f_3 +1259161200f_2 -249955200f_1 +22584672f_0) / (39916800 h²)

Differenzialgleichungen

"Differentialgleichungen bilden die Grundlage des naturwissenschaftlichmathematischen Weltbildes."
Wladimir Igorewitsch Arnold

Differenzialgleichungen sind Gleichungen zwischen unabhängigen Variablen, gesuchten Funktionen dieser Variablen und den Ableitungen dieser Funktionen.

$y'(x) = f(x,y)$

Differenzialgleichungen sind in der Physik allgegenwärtig. Die Lösung einer Differenzialgleichung ist eine Funktion. Gesucht ist eine Funktion, die genügend oft differenzierbar ist und die Gleichung und eventuelle Nebenbedingungen erfüllt. Die höchste auftretende Ableitung bezeichnet man als die Ordnung der DGL.

Gewöhnliche Differenzialgleichung

Bei einer gewöhnlichen Differenzialgleichung hängen die gesuchten Funktionen nur von einer unabhängigen Variablen ab.
F sei eine Funktion der Form F: $R^{n+2} \to R$, $n \in N$. Dann heißt $F(x,y(x),\dots,y^{(n)}(x)) = 0$ gewöhnliche Differenzialgleichung.

Eine Differenzialgleichung, in der die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen der gesuchten Funktion enthält, wird partielle Differenzialgleichung genannt.

Richtungsfeld, Isokline

Wenn durch den Punkt M die Lösungskurve $y = f(x)$ der Differenzialgleichung $y' = f(x,y)$ geht, so kann die Richtung der Tangente in diesem Punkt unmittelbar ermittelt werden.
Damit definiert die Differenzialgleichung in jedem Punkt eine Richtung der Tangente an eine Lösungskurve. Die Gesamtheit dieser Richtungen bildet das Richtungsfeld. Verbindungslinien von Punkten gleicher Richtung der Tangente heißen Isoklinen.

d'Alemberts Gleichung

$y = x\,f(y') + g(y')$ wobei $y' = dy/dx$ und f und g gegebene Funktionen sind

Differenzialgleichung

explizit gegebene Differenzialgleichung

Eine Differenzailgleichung heißt explizit gegeben, wenn sie nach der Ableitung höchster Ordnung aufgelöst ist, d.h. sie lässt sich sofort auflösen.

implizit gegebene Differenzialgleichung

Falls eine Differenzialgleichung nicht explizit gegeben ist, so ist sie implizit gegeben.

skalare Differenzialgleichung

Eine skalare Differenzialgleichung ist eine Differenzialgleichung der Dimension 1, bei der f eine skalare Funktion ist: $y' = f(x, y)$ mit $f: D \subset R \times R \to R$ und $y = y(x)$, skalare Funktion

autonome Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung heißt autonom, falls sie nicht von x abhängt.
Beispiel: $y' = f(y)$ ist autonom, da die rechte Seite nicht explizit von der unabhängigen Variablen x abhängt.

nicht autonome Differenzialgleichung

$y' = f(x, y)$ ist nicht autonom, da die rechte Seite explizit von der unabhängigen Variablen x abhängt.

Lösung einer Differenzialgleichung

Die Lösungen von gewöhnlichen Differenzialgleichung mit einer Anfangsbedingung setzen sich in der Regel aus der Summe von mindestens zwei Einzellösungen zusammen.
Die Lösung einer allgemeinen Differenzialgleichung ist dann die Summe der homogenen Lösung und der inhomogenen oder partikulären Lösung.
Erhält man aus einer Differenzialgleichung eine Lösungsmenge, so ist jede Linearkombination von Einzellösungen wieder eine Lösung. Dies ist mit dem Faktorsatz und der Summenregel aus der Differenzialrechnung erklärbar.

Anfangswertproblem (AWP)

Als Anfangswertproblem bezeichnet man eine Differenzialgleichung zusammen mit ihren zugehörigen Anfangsbedingungen.

Satz von Picard-Lindelöf

Es sei ein Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y_0 = y_0(x_0)$ gegeben. Ferner sei ein Rechteck $R = \{ (x,y) \mid |x-x_0| \leq a , |y-y_0| \leq b \}$ gegeben, auf dem die Funktion $f(x,y)$ stetig und partiell nach y differenzierbar sei. Eine Zahl ε sei durch $\varepsilon = \min(a , b/\max(f(x,y)))$ bestimmt. Es gibt dann im Abstand ε von x_0 genau eine Lösung zum gegebenen Anfangswertproblem.

Differenzialgleichung 1.Ordnung

Differenzialgleichungen erster Ordnung besitzen die Form $y'(x) = A(x) + B(x)\, y(x)$.
Dabei sind $A(x)$ und $B(x)$ im Intervall $[a,b]$ stetig. Des Weiteren sollen ein x_0 aus dem gegebenen Intervall und ein (reelles) y_0 existieren, die die Anfangsbedingung $y_0 = y_0(x_0)$ bilden.

Homogene Differenzialgleichung

Ist $A(x) = 0$, also $y'(x) = B(x)\, y(x)$, so hat diese als homogen bezeichnete Differenzialgleichung genau eine Lösung der allgemeinen Form $y_1(x) = y_0\, e^{\left(\int_{x_0}^{x} B(t)\, dt\right)}$
Diese Lösungsfunktion ist immer positiv.

Inhomogene Differenzialgleichung

Differenzialgleichungen erster Ordnung in der allgemeinen Form und allgemeinen Anfangsbedingungen haben die partikuläre Lösung in der Form

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)/y^*(t)\, dt \cdot e^{\left(\int_{x_0}^{x} B(t)\, dt\right)}$$

mit $y^*(t) = y_1(t)/y_0$
Allgemeine Lösung lautet $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)/y^*(t)\, dt \right] \cdot e^{\left(\int_{x_0}^{x} B(t)\, dt\right)}$
mit $y^*(t) = y_1(t)/y_0$

Trennung der Variablen

Ein wichtiges Verfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen erster Ordnung ist das Verfahren der Trennung der Variablen. Dabei wird die Differenzialgleichung auf eine Form gebracht, bei der die Variablen x und y nur noch in voneinander getrennten Termen auftreten. Die entstehende Gleichung kann dann sofort integriert werden.

$$M(x)\, N(y)\, dx + P(x)\, Q(y)\, dy = 0 \Leftrightarrow M(x)/P(x)\, dx + Q(y)/N(y)\, dy = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int M(x)/P(x)\, dx + \int Q(y)/N(y)\, dy = C$$

Beispiel: $x\, dy + y\, dx = 0 \Leftrightarrow \int 1/y\, dy + \int 1/x\, dx = C = \ln c \Leftrightarrow x \cdot y = c$
Beispiel (1.Putnam-Olympiade 1938, Problem B2):
Find all solutions of the differential equation $zz'' - 2z'z' = 0$ which pass through the point $x = 1$, $z = 1$.
Answer: $z = 1/(A(x - 1) + 1)$. We have $z''/z' = 2 z'/z$. Integrating, $\ln z' = 2 \ln z + \text{const}$, so $z' = - A/z^2$.
Integrating again: $1/z = Ax + B$. But $z(1) = 1$, so $B = 1 - A$.

Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums

Ist die Zunahme oder Abnahme einer Größe $f(x)$ zum augenblicklichen Wert der Größe proportional, so gilt für diesen Prozess die Differenzialgleichung $f'(x) = k\, f(x)$
wobei k die Stärke der Abnahme oder Zunahme beschreibt. Mit dem Anfangswert $f(0)$ ergibt sich als Lösung $f(x) = f(0)\, e^{-kx}$

Die Herleitung ergibt sich durch einfache Separation der Variablen

$$df(x)/dx = k\, f(x) \qquad 1/f(x)\, df(x) = k\, dx$$

Integration beider Seiten und Zusammenfassung der zwei Integrationskonstanten zu einer ergibt

$$\ln |f(x)| = k\, x + c^*$$

Unter Beachtung des Betrages wird $f(x) = \pm e^{kx+c^*}$
Mit $e^{c^*} = c$ und $f(0) = c$ folgt $f(x) = \pm f(0)\, e^{kx}$

Beispiel: Liegen ein ohmscher Widerstand und eine Spule parallel an einer Gleichspannungsquelle, so sinkt der Strom beim Abschalten der Spannungsquelle nicht sofort, da nach dem Induktionsgesetz in der Spule eine Selbstindunktionsspannung $U(t) = -L\, I'(t)$
einsteht. Nach dem Ohmschen Gesetz ist auch $U(t) = R\, I(t)$. Die zugehörige Differenzialgleichung ist

$$I'(t) = -R/L\; I(t)$$

Die Lösung für den Verlauf des Selbstinduktionsstroms wird $I(t) = I_0\, e^{-R/L\, t}$

Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums

Ist die Zunahme oder Abnahme einer Größe f(x) bis zu einer Grenze G proportional zur noch vorhandenen Abweichung von dieser Größe, so gilt für diesen Prozess die Differenzialgleichung

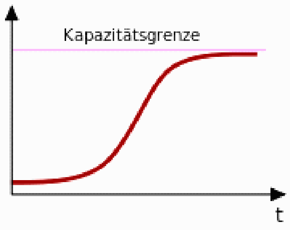
$$f'(x) = k\,(G - f(x))$$

wobei k die Stärke der Abnahme oder Zunahme beschreibt. Mit dem Anfangswert f(0) ergibt sich als Lösung $f(x) = G + (f(0) - G)\, e^{-kx}$

Herleitung:
Mit $f'(x) = (f(x) - G)'$ wird aus $f'(x) = k\,(G - f(x))$ $\quad (f(x) - G)' = k\,(G - f(x))$
Substitution $z(x) = f(x) - G$ ergibt die Diffenzialgleichung des exponentiellen Wachstums

$$z' = -k\, z$$

mit der Lösung $z = z(0)\, e^{-kx}$
Rücksubstitution führt zu $f(x) - G = (f(0) - G)\, e^{-kx}$ $\quad f(x) = G + (f(0) - G)\, e^{-kx}$



Differenzialgleichung des logistischen Wachstums

Ist die Zunahme oder Abnahme einer Größe f(x) bis zu einer Grenze G proportional zur noch vorhandenen Abweichung von dieser Größe und der Größe selbst, so gilt für diesen Prozess die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums $f'(x) = k\, f(x)\,(G - f(x))$
wobei k die Stärke der Abnahme oder Zunahme beschreibt. Mit dem Anfangswert f(0) ergibt sich als Lösung

$$f(x) = f(0)\, G \,/\, (f(0) + (G-f(0))\, e^{-Gkx})$$

Herleitung:
Separation der Variablen ergibt $k\, dx = dy \,/\, (y\,(G-y))$
Partialbruchzerlegung führt zu $k\, dx = 1/G\,(1/y + 1/(G-y))\, dy$
Multiplikation mit G und Integration beider Seiten

$$k\,G\,x + c = \ln y - \ln (G-y) = \ln (y/(G-y))$$
$$e^{kGx + c} = y/(G-y)$$
$$e^{-kGx - c} = (G-y)/y = G/y - 1$$
$$G/y = 1 + e^{-kGx - c}$$
$$y = G \,/\, (1 + e^{-kGx - c})$$

Mit x = 0 wird $e_{-c} = G/f(0) - 1$ und insgesamt

$$f(x) = G \,/\, (1 + (G/f(0)-1)\, e^{-Gkx}) \qquad f(x) = f(0)\, G \,/\, (f(0) + (G-f(0))\, e^{-Gkx})$$

Totale Differenzialgleichung

Ist die Gleichung $u(x, y) = C$ mit einer willkürlichen Konstanten C gegeben, dann entsteht durch Bildung des totalen Differenzials $du = \partial u/\partial x\, dx + \partial u/\partial y\, dy = 0$
Ist umgekehrt eine Gleichung $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$
so entstanden, dann muss sie zur ersten Gleichung äquivalent sein. Sie muss dann eine Lösung der Form $u(x, y) = C$ besitzen. Eine solche Differenzialgleichung wird total genannt.

Damit eine Gleichung der Form $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ total ist, muss also eine Funktion u(x,y) existieren, so dass $P(x, y) = \partial u/\partial x$ und $Q(x, y) = \partial u/\partial y$
und somit $\partial P/\partial y = \partial^2 u/(\partial x \partial y) = \partial Q/\partial x$
Daraus folgt der Satz: Die DGL $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ist genau dann total, wenn die Integrabilitätsbedingung $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ erfüllt ist.

Bernoullische Differenzialgleichungen

Form: Bernoullische Differenzialgleichungen haben die Form

$$y'(x) = A(x) * y(x) + B(x) * [y(x)]^a$$, a ... reell, verschieden 1 und y(x) >0

Lösungsansatz:
Ziel des Ansatzes ist die Rückführung der Differenzialgleichung auf eine Differenzialgleichung 1. Ordnung.
Es wird durch $[y(x)]^a$ dividiert und die Hilfsvariable $z(x) = [y(x)]^{-a}$ eingeführt.
Deren Ableitung $z'(x) = (1-a)\,[y(x)]^{-a} * y'(x)$ ergibt die lösbare Differenzialgleichung 1.Ordnung:

$$z'(x) = (1-a)\, A(x)\, z(x) + (1-a)\, B(x)$$

Nach Rücksubstituierung $y(x) = [z(x)]^{1/(1-a)}$ ergibt sich die gesuchte Lösung.
Diese Differentialgleichung wurde von Jakob Bernoulli (1654–1705) studiert.

Gaußsche Differenzialgleichung
Sie enthält mehrere frei verfügbare Parameter und kann deshalb speziellen Anwendungsbedingungen gut angepasst werden: $x(x-1)\, y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)\, y' + \alpha p\, \beta\, y = 0$
α, β und γ sind die Parameter

Riccatische Differentialgleichung
Die Riccatische Differentialgleichung lautet $x' = A(t)\, x + B(t)\, x^2 + C(t)$
Kennt man eine spezielle Lösung x^*, dann ergibt sich durch die Substitution
$$x = x^* + 1/y$$
die lineare Differentialgleichung $y' = (A + 2x\, B)\, y + B$

Beispiel: Die inhomogene logistische Gleichung $x' = x - x^2 + 2$
besitzt die spezielle Lösung $x = 2$. Die zugehörige Differentialgleichung lautet
$$y' = 3y + 1$$
und hat die allgemeine Lösung $y = 1/3\, (Ke^{3t} - 1)$. Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung
$$x = 2 + 3 / (Ce^{3t} - 1)\ ;\ t \text{ reelle Zahl} \qquad \text{mit der Konstanten } K.$$

Kennt man drei Lösungen x_1, x_2 und x_3 der Riccatischen Differentialgleichung, dann erhält man die allgemeine Lösung $x = x(t)$ aus der Bedingung, dass das Doppelverhältnis dieser vier Funktionen konstant ist: $(x(t) - x2(t)) / (x(t) - x1(t)) : (x3(t) - x2(t)) / (x3(t) - x1(t)) = \text{konst.}$
Diese von Riccati (1676 -1754) untersuchte Gleichung ist in der linearen Steuerungstheorie mit quadratischer Kostenfunktion besonders wichtig.

Besselsche Differenzialgleichung
Der deutsche Astronom und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel hat im Anschluss an Studien von Daniel Bernoulli und Euler eine spezielle Differenzialgleichung 2. Ordnung untersucht, die auch in vielen Problemen der Physik und Technik, insbesondere in Schwingungsaufgaben, auftritt, die Differenzialgleichung $x^2\, y'' + x\, y' + (x^2-n^2)\, y = 0$
n ist dabei eine konstante Zahl, verschieden -1, -2, -3, …. Zur Lösung werden sogenannte Bessel-Funktionen, Zylinderfunktionen, genutzt.

Der Potenzreihenansatz $y(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty}\, a_k\, x^{k+n}$
liefert eine Lösung der Besselschen Differenzialgleichung
$$y_n(x) = a_0 x^n + a_0\, \Sigma_{k=0}^{\infty}\, (-1)^k\, x^{2k+n} / (2^{2k}\, k!\, (n+1) \dots (n+k))$$
Diese Reihe ist für alle x konvergent. Setzt man $a_0 = 1 / (2^n\, \Gamma(n+1))$, so erhält man aus $y_n(x)$ die Besselsche Funktion
$$J_n(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty}\, (-1)^k\, 1/(k!\, \Gamma(n+k+1))\, (x/2)^{n+2k}$$
wobei $\Gamma(x)$ die Eulersche Gammafunktion ist.
Ist n keine ganze Zahl, so bilden $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differenzialgleichung und es ist in diesem Fall
$$y(x) = c_1\, J_n(x) + c_2\, J_{-n}(x)$$
die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

Abelsche Differenzialgleichung
Die gewöhnliche Differenzialgleichung $y' = f_0(x) + f_1(x)\, y + f_2(x)\, y^2 + f_3(x)\, y^3$
wird Abelsche Differenzialgleichung erster Ordnung, die Gleichung
$$(g_0(x) + g_1(x)\, y)\, y' = f_0(x) + f_1(x)\, y + f_2(x)\, y^2 + f_3(x)\, y^3$$
Abelsche Differenzialgleichung zweiter Ordnung genannt.
Abel führte diese Gleichungen während seiner Untersuchungen der Theorie elliptischer Funktionen ein.
Die Abelsche Differenzialgleichung erster Ordnung ist eine Verallgemeinerung der Riccati-Gleichung.

Wenn $f_1 \in C(a,b)$ f_2 und $f_3 \in C^1(a,b)$ sind und $f_3(x) \neq 0$ für jedes $x \in [a,b]$, dann kann die Abelsche Differenzialgleichung 1.Ordnung durch Variablensubstitution auf die Normalform $dz/dt = z^3 + \Phi(t)$ transformiert werden.
Im allgemeinen Fall kann die Gleichung 1.Ordnung nicht in geschlossener Form integriert werden.
Sind $g_0, g_1 \in C^1(a,b)$ und $g_1(x) \neq 0$, $g_0(x) + g_1(x)\, y \neq 0$, so kann die Abelsche Gleichung 2.Ordnung durch die Substitution $g_0(x) + g_1(x)\, y = 1/z$
auf die Form der Abelschen Gleichung 1.Ordnung gebracht werden.

Differenzialgleichungen n-ter Ordnung
Differenzialgleichungen n-ter Ordnung werden geschrieben in der Form
$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}):\ \ y_1 = y\ ;\ y_2 = y'\ ;\ \dots\ ;\ y_{n-1} = y(n-2)$$
$$y_n = y^{(n-1)} \rightarrow y^{(n)} = y'_n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$
Lösungsansatz
Es wird eine Substitution durchgeführt. Daraus folgen das neue System von Differenzialgleichungen und die neuen Anfangsbedingungen.

Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung einer Differenzialgleichung der Form $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ enthält n unabhängige willkürliche Konstanten.

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$$

Das Gleiche gilt für die allgemeine Lösung von Systemen von n Differenzialgleichungen. Das Lösungsprinzip beruht darauf auf der Erniedrigung der Ordnung durch Substitution der Variablen.

1. Die unabhängige Variable x ist nicht explizit in der Differenzialgleichung enthalten.
Substitution: $dy/dx = p \leftrightarrow d^2y/dx^2 = p\, dp/dy$. Damit wird die Ordnung von n auf (n-1) verringert.

2. Die abhängige Variable y ist nicht explizit in der Differenzialgleichung enthalten.
Substitution: $y^{(k)} = p$ für die k-te als niedrigste in der Differenzialgleichung vorkommende Ableitung von y. Die Ordnung der DGL wird damit um eins verringert.

3. Die Differenzialgleichung $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$ ist eine homogene Funktion in $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.
Substitution: $z = y'/y$, d.h. $y = \exp(\int z\, dx)$. Die Ordnung wird um eins erniedrigt.

4. Die Differenzialgleichung ist eine Funktion nur von x. Die allgemeine Lösung ist dann:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1} + \psi(x)$$

mit $\psi(x) = \iint\ldots\int f(x)\, (dx)^n = 1/(n-1)!\ {}_{x0}\!\int^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\, dt$ und $C_k = 1/(k-1)!\ y(x_0)^{k-1}$.

Numerisches Lösen von Differenzialgleichungen

Da oft die explizite Lösung einer Differenzialgleichung nicht möglich ist, ist man darauf angewiesen, numerische Näherungen zu berechnen. Klassische Verfahren sind dabei vor allem auf explizite Differenzialgleichungen erster Ordnung

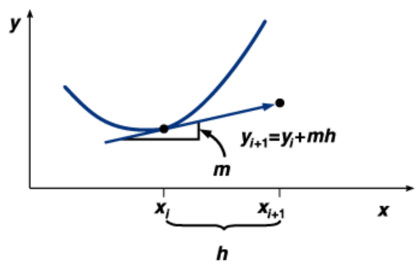
$$d/dx\ y(x) = y'(x) = f(x,y)$$

anwendbar. Die vier Verfahren Euler-Verfahren, Euler-Cauchy-Verfahren, Heun-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren
schätzen dabei die Ableitung durch den Differenzenquotienten ab. Es gilt näherungsweise:

$$y'(x) = [y(x_i + s) - y(x_i)] / s + O(s)$$

Dabei ist der Fehler O(s) der Abschätzung in erster Näherung eine infinitesimale Größe der Ordnung s, d.h. proportional zur Schrittweite s.
Bein Verfahren nach Heun und beim modifizierten Euler-Verfahren liegt der Fehler bei zweiter Ordnung $O(s^2)$, beim Runge-Kutta-Verfahren schließlich bei vierter Ordnung.

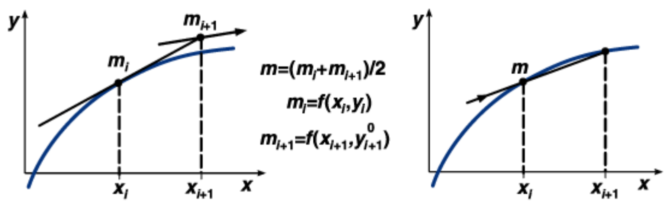
Euler-Cauchy-Verfahren



Gegeben sei eine Differenzialgleichung $y'= f(x,y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, die geometrisch die Vorgabe eines Anfangspunktes bedeutet. Gesucht wird die Lösung y(x) der Differenzialgleichung, die durch den Anfangspunkt hindurchgeht. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung werden vorausgesetzt. Zur numerischen Integration der Differenzialgleichung geht man beim Euler-Cauchy-Verfahren so vor:
Mit Hilfe der Differenzialgleichung lässt sich der Anfangsanstieg $y'(x_0) = y'_0 = f(x_0,y_0)$ der gesuchten Lösung im Anfangspunkt (x_0, y_0) berechnen. Es liegt nun nahe, mit dieser Anfangssteigung y'_0 vom Anfangspunkt aus ein kleines Stück geradlinig bis zu einer um eine kleine Spanne h entfernten Nachbarstelle $x_i = x_0 + h$ fortzuschreiten.
An dieser Stelle hat die Näherungsgerade den Ordinatenwert $y_1 = y_0 + y'_0h$. Für (x_1, y_1) berechnet man aus der Differenzialgleichung eine neue Steigung $y'_1 = f(x_1, y_1)$. Nun schreitet man mit dieser Steigung wieder geradlinig bis zur Nachbarstelle $x_2 = x_1 + h$ fort und berechnet dort den Funktionswert $y_2 = y_1 + y'_1h$ der Näherungsgeraden. Indem man so fortführt, erhält man näherungsweise einen Polygonzug für die gesuchte Lösungsfunktion.

```
program Euler(input,output);
{Numerische Integration der Gleichung y'(x)=-y(x) mittels des Euler-Verfahrens}
var   x0, y0: double; {Anfangswerte}    xf:    double; {Endwert}    h:     double; {Schrittweite}    x, y: 
double;
function fxy(x, y: double): double; begin  fxy := -y end; {fxy}
procedure init; begin
      writeln('Exemplarische Darstellung einer numerischen Integration anhand der Gleichung y`(x)=-
y(x)');
      writeln('Geben Sie bitte die Anfangwerte ein.'); readln(x0, y0);
      writeln('Geben Sie nun an, bis zu welchem x-Wert y(x) berechnet werden soll.'); readln(xf);
      writeln('Und in welcher Schrittweite sollen die x-Werte liegen?'); readln(h);
      x := x0; y := y0;
      writeln('x       y')
   end; {init}
```

```
procedure result; begin writeln( x:1:5, ' ', y:1:5) end; {result}
begin {Euler}
   init; while x < xf do begin y := y + h*fxy(x, y); x := x + h; result end; {while}
end. {Euler}
```



Verfahren von Heun

Prädiktor-Korrektor-Verfahren, mit dem Eulerschen Verfahren wird ein geschätzter Wert ermittelt (Prädiktorschritt). Im Korrekturschritt mittelt man die Steigungswerte des alten Ortes und die des Prädiktorschrittes.
Verfahren von Heun m, m_i, m_{i+1}: Steigung
Geometrische Interpretation: Der neue Funktionswert wird durch den Mittelwert der Tangenten im alten und vorläufigen neuen Funktionswert angenähert.
Prädiktor: $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, h$ Korrektor: $y_{i+1} = h/2\, (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$.
Iteration: Im Korrektorschritt steht auf beiden Seiten der Gleichung y_{i+1}. Man kann nun iterativ den neuen Wert von y_{i+1} für den alten Wert y_{i+1} auf der rechten Seite einsetzen, bis das Verfahren konvergiert. Nicht immer führt diese zusätzliche Iteration zu besseren Resultaten, insbesondere bei großen Schrittweiten h.

Runge-Kutta-Verfahren

Ein Verfahren mit größerer Genauigkeit als das Euler-Cauchy-Verfahren ist das Runge-Kutta-Verfahren. Hier wird die Annäherung aus mehreren Ansätzen schrittweise entwickelt. Es werden dabei auch Werte mit halber Schrittweite und Korrekturfaktoren berücksichtigt.

Verfahren 4.Ordnung

$x_{i+1} = x_i + h$
$k_1 = h \cdot f(x_i,y_i)$ $k_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$
$k_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$ $k_4 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_3/2)$
$y_{i+1} = y_i + 1/6\, (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Das Verfahren stellt, trotz der vielen Berechnungen, eine relativ schnelle Iterationsmethode großer Genauigkeit dar. Allerdings ist das Verfahren sehr empfindlich gegenüber der Variation der Schrittweite.

Verfahren 2.Ordnung

$k_1 = h \cdot f(x_i,y_i)$ $k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1)$ $y_{i+1} = y_i + 1/2\, (k_1 + k_2)$

Verfahren 3.Ordnung

$k_1 = h \cdot f(x_i,y_i)$ $k_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$
$k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$ $y_{i+1} = y_i + 1/6\, (k_1 + 2/3\, k_2 + 1/6\, k_3)$

Adams-Bashforth-Verfahren

Einen anderen Weg zu besseren Näherungen schlagen die sogenannten Mehrschrittverfahren ein. Hier wird nicht nur der Funktionswert $f(x_i, y_i)$ berücksichtigt, sondern es fließen zusätzlich noch vorher berechnete Funktionswerte in die Näherung ein. Ein Beispiel für die Mehrschrittverfahren ist das Adams-Bashforth-Verfahren. Je nachdem, wie viele der vorher berechneten Funktionswerte berücksichtigt werden, spricht man vom Adams-Bashforth-Verfahren 2., 3., … Ordnung.
Für alle Verfahren ist $x_{i+1} = x_i + h$. Außerdem sei $g(i) = f(x_i,y_i)$:

Adams-Bashforth-Verfahren

1.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h\, g(i)$; das klasssiche Euler-Verfahren
2.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/2\, (3\, g(i) - g(i-1))$
3.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/12\, (23\, g(i) - 16\, g(i-1) + 5\, g(i-2))$
4.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/24\, (55\, g(i) - 59\, g(i-1) + 37\, g(i-2) - 9\, g(i-3))$
5.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/720\, (1901\, g(i) - 2774\, g(i-1) + 2616\, g(i-2) - 1274\, g(i-3) + 251\, g(i-4))$

Adams-Moulton-Verfahren

Die Adams-Moulton-Verfahren sind implizite, modifzierte Verfahren mit einer etwas besseren Konvergenz
1.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h\, g(i+1)$
2.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/2\, (g(i+1) + g(i))$
3.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/12\, (5\, g(i+1) + 8\, g(i) - g(i-1))$
4.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/24\, (9\, g(i+1) + 19\, g(i) - 5\, g(i-1) + g(i-2))$
5.Ordnung $y_{i+1} = y_i + h/720\, (251\, g(i+1) + 646\, g(i) - 264\, g(i-1) + 106\, g(i-2) - 19\, g(i-3))$

Pascaltext zum Runge-Kutta-Verfahren

Programm zur Integration einer Gleichung $y'(x) = f(x,y)$ mittels des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung.

```
program RungeKutta;
var   x0, y0: double; {Anfangswerte}      xf:     double; {Endwert}
      h:      double; {Schrittweite}        x, y, x1, y1, x2, y2, x3, y3: double;       k1, k2, k3, k4: double;
function fxy(x, y: double): double; begin fxy := ... {Funktion eintragen} end; {fxy}
procedure init; begin //nachfolgend sind die Anfangswerte x0, y0, der Endwert xf und die Schrittweite h
einzugeben
        x := x0;          y := y0;
end; {init}
procedure result; begin writeln( x:1:5,' ', y:1:5) end; {result}
begin {Runge Kutta}
      init;        while x < xf do begin
        k1 := fxy(x, y);           x1 := x + h/2.0;         y1 := y + k1*h/2.0;
        k2 := fxy(x1, y1);   x2 := x1;  y2 := y + k2*h/2.0;
  k3 := fxy(x2, y2);     x3 := x + h;
  y3 := y + k3*h;        k4 := fxy(x3, y3);
  y  := y + (1.0/6.0)*(k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 + k4)*h; x  := x + h;
  result       end; {while}
end. {Runge Kutta}
```

Beispiele zu Differenzialgleichungen

1) Die Differenzialgleichung y' = y ist separierbar, denn sie kann in der Form

$y' = 1/(1/y) = f(x)/g(y)$, $f(x) = 1$, $g(y) = 1/y$

geschrieben werden. Die Integration von f(x) nach x und von g(y) nach y erfolgt durch

$\int 1/y\, dy = \int 1\, dx$ $\quad \ln|y| = x + C$ $\quad |y| = e^{x+C}$

Auflösen nach y ergibt $\quad y(x) = \pm e^x e^{C.}$

Mit einer neuen Konstanten C* = ±eC lautet die allgemeine Lösung $\quad y(x) = C^* e^x$

Die Lösungskurven sind Exponentialfunktionen.

2) Die Differenzialgleichung y' = y/x kann in der Form

$y'(x) = 1/x \,/\, 1/y$, $f(x) = 1/x$, $g(y) = 1/y$

geschrieben werden, ist also separierbar. Integration auf beiden Seiten ergibt

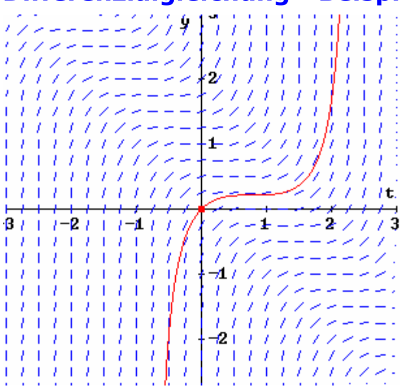
$\int 1/y\, dy = \int 1/x\, dx$ $\quad \ln|y| = \ln|x| + C$

Die Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten ergibt $\quad |y| = |x|\, e^C$

Durch Auflösen der Beträge erhält man die allgemeine Lösung $\quad y(x) = C x$

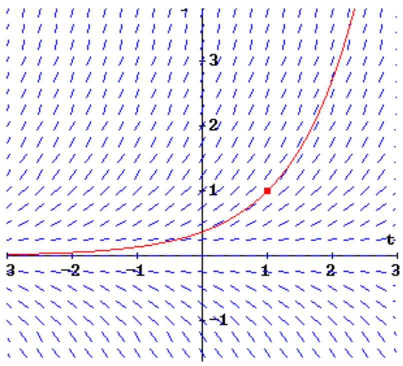
Die Lösungskurven bestehen aus allen Ursprungsgeraden mit Ausnahme der y-Achse.

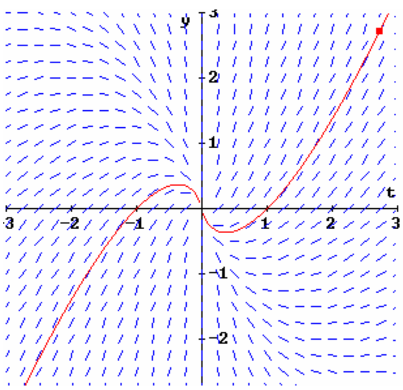
Differenzialgleichung - Beispiele



Gleichung: y' = y
allgemeine Lösung: $y = C * e^x$
für y(1) = 1 ergibt sich partikulare Lösung: $y = e^{x-1}$

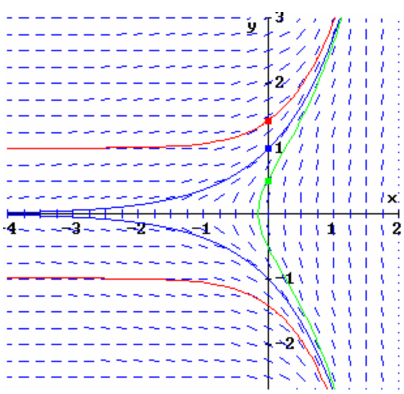
Gleichung: $y' * y - e^{2x} = 0$
allgemeine Lösung: $y^2 = e^{2x} + C$
für y(0) = √2 ergibt sich partikulare Lösung: $y = \pm\sqrt{e^{2x} + 1}$ ... rot
für y(0) = 0.5 ergibt sich partikulare Lösung: $y = \pm\sqrt{e^{2x} - 0.75}$ ... grün
für y(0) = 1 ergibt sich partikulare Lösung: $y = \pm e^x$ ... blau





Gleichung: $y' = (x + y - 1)^2$
allgemeine Lösung: y = tan(x - C) - x + 1
für y(0) = 0 ergibt sich partikulare Lösung: C = π/4

Gleichung: x*y' - x - y = 0
allgemeine Lösung:
y = x * ln | C x |
für y(e) = e ergibt sich partikulare Lösung:
y = x * ln |x|



Gewöhnliche Differentialgleichungen

Form von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung

Komponentenschreibweise $y'_1 = f_1(x, y_1(x), ..., y_n(x))$; $y'_2 = f_2(x, y_1(x), ..., y_n(x))$; ... ; $y'_n = f_n(x, y_1(x), ..., y_n(x))$

Vektorschreibweise $\underline{y}'(x) = \underline{f}(x,\underline{y})$

Anfangswertproblem $\underline{y}'(x) = \underline{f}(x,\underline{y})$, $\underline{y}(x_0) = \underline{y_0}$

Form von Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Differentialgleichungen n-ter Ordnung werden geschrieben in der Form $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$: $y_1 = y$; $y_2 = y'$; ... ; $y_{n-1} = y^{(n-2)}$; $y_n = y^{(n-1)} \rightarrow y^{(n)} = y'_n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

Lösungsansatz Es wird eine Substitution durchgeführt. Daraus folgen das neue System von Differentialgleichungen und die neuen Anfangsbedingungen.

Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ enthält n unabhängige willkürliche Konstanten.

$y = y(x,C_1,...,C_n)$

Das gleiche gilt für die allgemeine Lösung von Systemen von n Differentialgleichungen.
Das Lösungsprinzip beruht darauf, dass versucht wird, die Ordnung mittels Substitution der Variablen zu erniedrigen, um einfachere Differentialgleichungen zu erhalten. Das Auffinden passender Substitutionen wird erleichtert durch die Unterscheidung verschiedener Fälle:

1. Die unabhängige Variable x ist nicht explizit in der Differentialgleichung enthalten.
Substitution: $dy/dx = p \leftrightarrow d^2y/dx^2 = p\, dp/dy$. Damit wird die Ordnung von n auf (n-1) verringert.

2. Die abhängige Variable y ist nicht explizit in der Differentialgleichung enthalten.
Substitution: $y^{(k)} = p$ für die k-te als niedrigste in der Differentialgleichung vorkommende Ableitung von y. Die Ordnung der DGL wird damit um eins verringert.

3. Die Differentialgleichung $f(x,y,y',...,y^{(n-1)}) = 0$ ist eine homogene Funktion in y, y', y", ..., $y^{(n)}$.
Substitution: $z = y'/y$, d.h. $y = \exp(\int z\, dx)$. Die Ordnung wird um eins erniedrigt.

4. Die Differentialgleichung ist eine Funktion nur von x. Die allgemeine Lösung ist dann: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_nx^{n-1} + \psi(x)$
mit $\psi(x) = \iint...\int f(x)\,(dx)^n = 1/(n-1)!\ {}_{x0}\int^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\, dt$ und $C_k = 1/(k-1)!\ y(x_0)^{k-1}$.

Lineares Differentialgleichungs-System erster Ordnung

Form: $\underline{y}' = A(x)\, y + \underline{f}$ mit $\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$

Ist $\underline{f} = \underline{0}$, so heißt das System homogen, sonst inhomogen. Ist A eine konstante Matrix, so spricht man von einem System mit konstanten Koeffizienten. Sind die Elemente $a_{ik}(x)$ der Matrix und die Funktion f stetig in einem gegebenen Intervall, so hat das DGL-System genau eine Lösung in diesem Intervall.

Linearkombinationen von Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems

Sind $\underline{y}_1, ..., \underline{y}_k$ Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems, dann ist auch jede beliebige Linearkombination $\underline{y} = c_1 \underline{y_1} + ... + c_k \underline{y_k}$ mit $c_1,...,c_k \in R$ von Lösungen wieder eine neue Lösung.

Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit von Lösungen

Die Funktionen $\underline{y}_1, ..., \underline{y}_k$ nennt man auf einem Intervall linear unabhängig, falls für alle x aus diesem Intervall aus $c_1 \underline{y_1} + ... + c_k \underline{y_k} = 0$ auch $c_1 = ... = c_k = 0$ folgt. Andernfalls heißen $\underline{y}_1,...,\underline{y}_k$ linear abhängig.

Anzahl linear unabhängiger Lösungen

Ist die Matrix $A(x) \in R^n \times R^n$ stetig in einem Intervall für x, dann hat das System $\underline{y}' = A(x)\, \underline{y}$ genau n linear unabhängige Lösungen in diesem Intervall.

Fundamentalsystem

Ein System $\underline{y}_1,...,\underline{y}_n$ linear unabhängiger Lösungen von $\underline{y}' = A(x)\, \underline{y}$ heißt Fundamentalsystem. Als Fundamentalmatrix bezeichnet man die Matrix $Y(x) = (\underline{y_1}, ..., \underline{y_n})$. Die reell gewählte Fundamentalmatrix ermöglicht später die direkte Berechnung eines homogenen Lösungsanteils: $\underline{y_H}(x) = Y(x)\, \underline{c}$ mit $\underline{c} \in C^n$.

Eigenschaften der Fundamentalmatrix: $Y'(x) = A\, Y(x)$ $\underline{c} = Y(0)^{-1}\, \underline{x_0}$

Übertragungsmatrix oder normierte Matrix: Die stets reelle Übertragungsmatrix ist $Y^*(x) = Y(x)\, Y(0)^{-1}$

Homogener Lösungsanteil des DGL-Systems, berechnet mit der Übertragungsmatrix:

Eigenschaften der Übertragungsmatrix $Y^*(x)' = A\, Y^*(x)$ $Y^*(0) = E$

$Y^*(x_1 + x_2) = Y^*(x_1)\, Y^*(x_2)$ $Y^*(-x) = Y^*(x)^{-1}$

Wronski-Determinante eines homogenen linearen DGL-Systems

Haben die Lösungen $\underline{y}_1,...,\underline{y}_n$ die Dimension n, so wird $W(x) = \det(\underline{y_1}, \underline{y_2}, ..., \underline{y_n})$ Wronski-Determinante genannt. Ist die Wronski-Determinante $W(x) \neq 0$ für alle x, so bilden die Lösungen $\underline{y}_1,...,\underline{y}_n$ ein

Fundamentalsystem. Für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung wird die Wronski-Determinante etwas anders definiert.

Differenzialgleichung-Beispiel: Feder-Masse-Schwinger

Herleitung: F = -D s und F = m a = m d^2/dt^2 s ergibt -D s = m $\ddot{s}$
Somit muss $\ddot{s}$ = -D/m s eine Lösung $s(A,\omega,\psi,t) := A \sin(\omega t + \psi)$ besitzen.
Die Parameter A und y ergeben sich aus den Anfangswerten. Für ω gilt

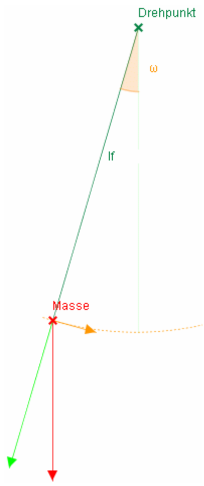
$-\omega^2 = -D/m$, d.h. $\omega = \sqrt{(D/m)}$ und $T = 2\pi \sqrt{(m/D)}$.

Sei t = 0. Dann ist s = s_0; die Maximalauslenkung; und v = v_0 = 0; d.h. keine Geschwindigkeit am unteren Umkehrpunkt.

$s(A,\omega,\psi,t) = s_0 \rightarrow A \sin(\psi) = s_0$ v = $\dot{s}$
$\dot{s}(A,\omega,\psi,t) = d/dt\ s(A,\omega,\psi,t) = A \cos(\omega t + \psi)\ \omega$
$\dot{s}(A,\omega,\psi,t) = 0 \rightarrow A \cos(\psi)\ \omega = 0 \rightarrow \cos \psi = 0 \rightarrow \psi = \pi/2$

Einsetzen ergibt $A \sin \psi = s_0 \rightarrow A = s_0$
und somit $s(s_0.\omega,\psi) = s_0 \sin(\omega t + \pi/2)$ mit $\omega = \sqrt{(D/m)}$

Fadenpendel-Gleichung



Herleitung: Größen ω Drehwinkel, l_f Fadenlänge, m_p Masse am Ende des Fadens, M Drehmoment, Θ Trägheitsmoment

$M = \Theta\ d^2/dt^2\ \omega(t)$

mit dem Satz von Steiner $\Theta = m_p\ {}_f^2$ und dem Moment durch die Rückstellkraft M = -F l_f wird für kleine Winkel ω

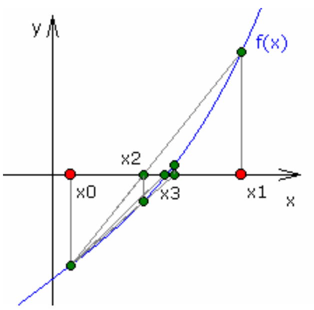
$F = m g \sin \omega \approx m g \omega \rightarrow M = -m_p g \omega l_f = m_p l_f^2 d^2/dt^2 \omega(t)$

Schwingungsdifferenzialgleichung: $d^2/dt^2\ \omega(t) = -g / l_f\ \omega$

Schwingungsgleichung für gedämpfte, harmonische Schwingung

$d^2y/dt^2 + 2\delta\ dy/dt + \omega_0\ y = 0$

Abklingkoeffizient (Dämpfungsfaktor) δ, Kreisfrequenz der ungedämpften, anfänglichen Schwingung
Lösung der Differenzialgleichung $y = y_{max}\ e^{-\delta * t} \sin(\omega * t + \phi_0)$



Näherungsverfahren zur Nullstellensuche einer Funktion

Bisektion (Intervallhalbierungsverfahren)

Beim Bisektions- bzw. Intervallhalbierungsverfahren wird der Funktionswert des arithmetischen Mittels x(m) der aktuellen Intervallgrenzen (zu Beginn x(0) und x(1)) berechnet. Die Intervallgrenze, deren Funktionswert dasselbe Vorzeichen wie der Funktionswert f(x(m)) besitzt, wird durch x(m) ersetzt, so dass mit jedem Iterationsschritt die Länge des Intervalls halbiert wird:

$x_m = (x_1 + x_2) / 2$

Konvergenzfaktor = 0.5 ; nach 3-4 Schritten je eine Dezimalstelle genauer
Notwendige Iterationsschritte für Fehler < ε bei Anfangsintervall [a , b]

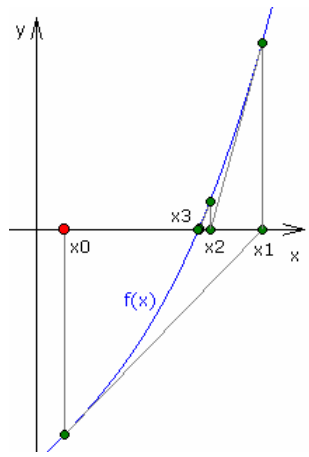
$n > (\ln (b - a) - \ln \varepsilon) / \ln 2$

Regula falsi (Regel des "Falschen") Sekantennäherungsverfahren

Das Näherungsverfahren Regula falsi (lat. "Regel des Falschen") oder auch Sekantenverfahren ermittelt einen Iterationswert durch Ermittlung des Schnittpunktes der Sekante der Intervallpunkte (x(0),f(x(0))) und (x(1),f(x(1))) mit der Abszissenachse.

mit zwei gleitenden Grenzen $x_2 = x_0 - (x_1 - x_0) / [f(x_1) - f(x_0)] * f(x_0)$
mit einer gleitenden Grenze (x_B fest; siehe Abbildung)

$x_1 = x_0 - (x_B - x_0) / [f(x_B) - f(x_0)] * f(x_0)$



Iterationsverfahren

Steffensen-Newton-Kombination (SNK) $x_1 = [f(x_0) - f'(x_0)*x_0]/[1 - f'(x_0)]$

Bilineare Interpolation $x_{i+1} = 2*x_0-f(x_0)/f(2*x_0*x_n) *(x_n-x_0)$

Einsatz: weder 1. noch 2.Ableitung dürfen in der Umgebung der Nullstelle ihr Vorzeichen wechseln

Newton-Verfahren oder Tangentennäherungsverfahren (1700)

Das Newton-Verfahren oder Tangentenverfahren (Tangentennäherungsverfahren) ersetzt die Sekante von Regula falsi durch die Tangente am Iterationspunkt x(0). Voraussetzung ist dabei, dass die Funktion f(x) in der Umgebung von x(0) wenigstens einmal differenzierbar ist. $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$

Konvergenzbedingung: $|f(x) * f''(x)/[f'(x)]^2| \le m < 1$, für alle x der Umgebung von x_0
Verfahren 2.Ordnung ⇔ wenn $f'(x_N) \neq 0$ dann

- quadratische Konvergenz (überlinear)
- mit jedem Schritt verdoppelt sich die Anzahl der gültigen Stellen

Anwendung

Heronsche Formel ... zur Quadratwurzelberechnung von a $x_1 = (x_0 + a/x_0)/2$
Verfahren besitzt quadratische Konvergenz

Allgemeines Heron-Verfahren

Berechnung der n.ten-Wurzel von a mit $x_1 = 1/n\,[(n-1)x_0 + a/x_0^{n-1}]$
Verfahren mit quadratischer Konvergenz

Newton-Verfahren, Beispiel

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $1 - z/5 = e^{-z}$
Gesucht ist eine positive Nullstelle der Funktion $f(z) = 1 - z/5 - e^{-z}$
Ableitung $f'(z) = -1/5 + e^{-z}$
Damit ergibt sich als Newtonfolge

$$x_{n+1} = x_n - (1 - 1/5x_n - e^{-x}n) / (-1/5 + e^{-x}n) = ((5 - x_n)\, e^{x}n - 5) / (5 - e^{x}n)$$

Mit dem Startwert $x_0 = 2$ erhält man das Ergebnis

n	x_n	$f(x_n)$
0	2	0,4646
1	9,1857	-0,8372
2	4,9973	-0,00622
3	4,9651	.0,3·10^{-5}

Nach 3 Iterationen erhält man für die Lösung der Gleichung z = 4,9651 mit einer Genauigkeit von 4 Dezimalstellen.

Newton-Verfahren, Quelltext

Programm zur Bestimmung der Nullstelle einer Funktion f durch das Newton Verfahren.

```
   var x0: double; {Anfangswert} eps:    double; {Genauigkeit} fehler: double;  x, y:   double;
   function f(x: double): double; begin f := cos(x) - x end; {oder andere Gleichung}
   function fstrich(x: double): double; begin fstrich := -sin(x) - 1 end; {Ableitung eintragen}
   procedure init; begin
      writeln('Geben Sie bitte den Anfangswert ein.');  readln(x0);
      writeln('Wie genau soll die Nullstelle bestimmt werden?'); readln(eps);
   end;
   procedure result; begin writeln('Die Nullstelle liegt bei ', x:1:7, '.') end; {result}
   begin {Newton}       init;  x := x0; repeat begin y := x - f(x)/fstrich(x);
        fehler := abs(y-x); x := y end; until fehler < eps; result
   end. {Newton}
```

Halley-Verfahren

Das Halley-Verfahren oder Verfahren der berührenden Hyperbeln ist, wie das Newton-Verfahren, eine Methode der numerischen Mathematik zur Bestimmung von Nullstellen reeller Funktionen f(x).
Im Gegensatz zum Newton-Verfahren hat es kubische Konvergenz, benötigt dazu aber zusätzlich zur ersten auch die zweite Ableitung. Es ist nach dem Astronomen Edmond Halley benannt. Ein vergleichbares Verfahren ist das Euler-Tschebyschow-Verfahren.

Ist f(x) eine reelle Funktion mit zwei stetigen Ableitungen f'(x) und f''(x) und a eine Nullstelle von f(x), dann wird der Funktionsverlauf von f(x) in der Nähe von a durch die Funktion

$$g(x) = f(x) / \sqrt{(f'(x))}$$

ersetzt. Dies hat auf die Nullstelle keinen Einfluss. Wird nun das Newton-Verfahren auf g(x) angewendet, ergibt sich $g'(x) = (2 f'(x)^2 - f(x) f''(x)) / (2 f'(x) \sqrt{(|f'(x)|)}$
und als Iterationsformel $x_{k+1} = x_k - (2 f(x_k) f'(x_k)) / (2 f'(x_k)^2 - f(x_k) f''(x_k))$

Zum Beispiel ergibt sich für die Bestimmung von $\sqrt{5}$ mit der Funktion $f(x) = x^2 - 5$ die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k (x_k^2 + 15) / (3x_k + 5)$$

Schon nach 4 Iterationsschritten erreicht man mehr als 60 gültige Stellen

k	x_k	$f(x_k)$
0	3,0	4,0
1	2,250	0,06250
2	2,2360681114551083591331269349845201238390092879256…	5,991 · 10^{-7}
3	2,2360679774997896964092938536158862270096714123708…	5,374 · 10^{-22}
4	2,2360679774997896964091736687312762354406183596115…	0

Im direkten Vergleich mit dem Newton-Verfahren zeigt das Halley-Verfahren die schnellere Konvergenz. Es benötigt jedoch mehr Rechenoperationen pro Schritt.
Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Halley%27s_method

Die als Halley-Verfahren genutzte Iterationsformel $x_{k+1} = x_k - (2\, f(x_k)\, f'(x_k)) / (2\, f'(x_k)^2 - f(x_k)\, f''(x_k))$ ergibt sehr schnelle Näherungsformeln zur Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln.
Setzt man $f(x) = x^2 - a$ wird für die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ $x_{k+1} = x_k\, (x_k^2 + 3a) / (3x_k^2 + a)$
und für die 3.Wurzel $\sqrt[3]{a}$ mit $f(x) = x^3 - a$ $x_{k+1} = x_k\, (x_k^2 + 2a) / (2x_k^3 + a)$
Diese Iterationsvorschrift ist deutlich schneller als das Heron-Verfahren.

Zum Beispiel wird für $\sqrt{2}$ mit dem Startwert $x_0 = 1$

$x_1 = 7 / 5 = 1{,}4$
$x_2 = 1393 / 985 = 1{,}414213197969543147208121827 41\ldots$
$x_3 = 10812186007 / 7645370045 = 1{,}4142135623730950487956400807 5\ldots$
$x_4 = 5055923762956339922096065927393 / 3575077977948634627394046618865$
$= 1{,}4142135623730950488016887242 0\ldots$

Der nächste Näherungsbruch x_5
516965476521645313412793919264355659075150020437514670946599534039092755401282583412315252007 /
365549794087790324236872594757301342090747558972309635122734890593277466791554558119351060405
weicht nur noch $3{,}97 \cdot 10^{-32}$ von dem exakten Wert von $\sqrt{2}$ ab.

Für $\sqrt[3]{2}$ ergibt sich als vierte Näherungslösung mit dem Startwert $x_0 = 1$

$x_4 = 16981929070467187043736574668288180831359246534 5 /$
$134785660354544802902690364367892668197456173472$

mit einem absoluten Fehler von $-1{,}13 \cdot 10^{-59}$.

Euler-Tschebyschow-Verfahren

Das Euler-Tschebyschow-Verfahren (nach Leonhard Euler und Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow) oder Verfahren der berührenden Parabeln ist ein dem Halley-Verfahren ähnlicher Algorithmus zum iterativen Lösen nichtlinearer Gleichungen.
Im Gegensatz zum Newton-Verfahren wird hier auch die 2.Ableitung der Funktion benötigt. Die Konvergenz ist kubisch, jedoch ist das Halley-Verfahren i.A. schneller.

Algorithmus

geg.: $f(x)$ und Startwert x_0

$f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f''(x_k)$ berechnen
$s_k = - f(x_k) / f'(x_k)$
$t_k = -0{,}5\, f''(x_k)\, s_k^2 / f'(x_k)$
$x_{k+1} = x_k + s_k + t_k$

Quelle: Hubert Schwetlick, Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften

Iterationsverfahren

Steffensen-Newton-Kombination (SNK)

$x_1 = (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0) / (1 - f'(x_0))$

Bilineare Interpolation

$x_{i+1} = 2 \cdot x_0 - f(x_0)/f(2 \cdot x_0 \cdot x_n) \cdot (x_n - x_0)$

Einsatz: weder 1. noch 2.Ableitung dürfen in der Umgebung der Nullstelle ihr Vorzeichen wechseln

Romberg-Schema

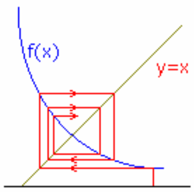
Das Romberg-Schema ergibt eine Verbesserung der linearen Konvergenz.

$x^*_{n+1} = (x_{n+1} - q \cdot x_n)/(1-q)$

Richardson-Extrapolation (1927)

$x^*_n = (x_n - q^r \cdot x_{n-1})/(1-q^r)$

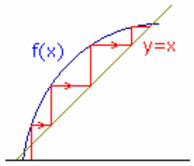
Illinois-Verfahren



Das Illinois-Verfahren ist eine modifizierte Variante von Regula falsi. Wird im Regula falsi-Verfahren eine Näherungsstelle x mit dem Funktionswert f(x) gefunden, so liegt bei ein beliebiges positives α auch α f(x) auf der gleichen Seite der Nullstelle. Setzt man nun

$$x_{n+1} = (\alpha\, f(x_n)\, x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n) / (\alpha\, f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

so kann sich eine bessere Konvergenz gegen die Lösung ergeben.
Im Illinois-Verfahren setzt man $\alpha = 1/2$.

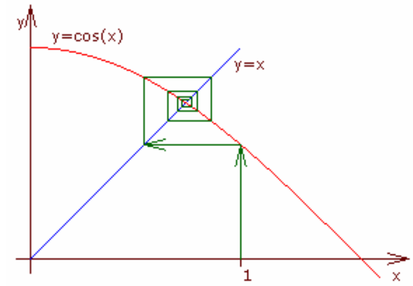


Allgemeines Iterationsverfahren

Allgemein wird zur Bestimmung der Nullstelle die Gleichung $f(x)=0$ auf die iterationsfähige Gleichung $x_{i+1} = F(x_i)$ gebracht. In der einfachsten Form geschieht dies mit $x_{i+1} = x_i - c\, f(x_i)$. Je nach Wahl des Parameters c konvergiert oder divergiert die wiederholte Anwendung dieser Gleichung gegen die gesuchte Nullstelle.

$f(x)=0 \Rightarrow$ Iterationsfähige Gleichung $x_{i+1} = F(x_i)$
Lineare Form $x_{i+1} = x_i - c*f(x_i)$
Parameter c entscheidet über Konvergenz
Abbildung: links ... Konvergenz, rechts ... Divergenz
Abbildung: oben … Konvergenz, unten … Divergenz
Unter den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes konvergiert das Verfahren der sukzessiven Approximation stets gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt.
Genügt x - f(x) keiner Lipschitz-Bedingung, so kann die Gleichung nicht mit dem allgemeinen Iterationsverfahren gelöst werden.

Allgemeines Iterationsverfahren-Beispiel



Lösung der Gleichung x - cos x = 0. Umstellen ergibt x = cos x und mit dem Startwert $x_0 = 1$:
1. cos 1,000 = 0,540
2. cos 0,540 = 0,858
3. cos 0,858 = 0,654
4. cos 0,654 = 0,793
…
17. cos 0,738 = 0,740
18. cos 0,740 = 0,739
19. cos 0,739 = 0,739 (Fixpunkt auf 3 Stellen genau)

Banachscher Fixpunktsatz (nach Stefan Banach)

Ist I ein abgeschlossenes Intervall und T eine Abbildung derart, dass für alle $x \in I$ gilt: $T(x) \in I$, und genügt T einer Lipschitz-Bedingung oder auch Kontraktionsbedingung

$$| T(x_2) - T(x_1) | \leq L \cdot | x_2 - x_1 |$$

mit L < 1 für alle $x_1, x_2 \in I$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x \in I$, x = T(x).
Unter den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes konvergiert das Verfahren der sukzessiven Approximation (allgemeines Iterationsverfahren) stets gegen den (eindeutig bestimmten) Fixpunkt von T.
Ist I abgeschlossen und beschränkt und T differenzierbar, so ist

$$L = \text{Maximum}\{ | T'(x) |, x \in I\}$$

δ^2-Aitken-Iteration (1926)

Der δ^2-Aitken-Prozess (Alexander C. Aitken) führt zu einer deutlichen Erhöhung der Konvergenz. Nach je zwei normalen Iterationsschritten wird unter Nutzung der drei zuletzt erzielten Iterationswerte ein Aitken-Schritt eingeführt:
jeder 3.Iterationsschritt erfolgt mit $x_{3i+3} = x_{3i} - (x_{3i+1} - x_{3i})^2 / (x_{3i+2} - 2x_{3i+1} + x_{3i})$

Steffensen-Iteration (1933)

Nach einem normalen Iterationsschritt weitere mit
$x_{i+1} = [(F(x_i))^2 - x_i * F(F(x_i))] / [2*F(x_i) - x_i - F(F(x_i))]$
wobei gilt: $x_{i+1} = F(x_i)$ und $x_{i+2} = F(x_{i+1}) = F(F(x_i))$

Beispiel: Für die Funktion $Y=X^3+2*X-1$ und einem Anfangsintervall x(0)=0 und x(1)=1 benötigt die Bisektion 16 Schritte, Regula falsi 9 Schritte und das Newton-Verfahren nur 4 Iterationen zur Ermittlung der Nullstelle bei 0.4534. Tabelle der Iterationszahlen für das Beispiel (die Iterationen werden für 5 und 6 Ziffern Genaugkeit angegeben):

Verfahren	5	6 Ziffern	Verfahren	5	6 Ziffern
Bisektion	16	20	Trisektion	15	19
Regula falsi	9	10	Regula falsi 2.Form	6	6
Regula falsi 3.Form	11	13	Newton-Verfahren	4	5
Newton-Verf. 2.Form	11	13	Monte-Carlo	27	23
Allg.Iteration C = 0.8	Abbruch	Abbruch	Allg. Iteration C = 0.6	21	25
Allg. Iteration C = 0.4	5	6	It. X = X - 0.3 * f(x)	9	10
δ^2-Aitken-Iteration	9	10	Steffensen-Iteration	6	7
Brent-Verfahren	4	4	Illinois-Verfahren	7	7
Müller-Steffensen-It.	4	4 "stärkstes" Verfahren			

Konvergenzordnung eines Näherungsverfahrens

Es seien ε_n und ε_{n+1} die Abweichungen von der gesuchten exakten Lösung x_l von f(x) = 0 im n-ten bzw. (n+1)-ten Schritt

$$x_n = x_l + \varepsilon_n \qquad x_{n+1} = x_l + \varepsilon_{n+1} \text{ mit } \varepsilon_{n+1} = A\, \varepsilon_n^p$$

Die Größe p wird dann als Ordnung der Konvergenz des Verfahrens bezeichnet.

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Newton-Verfahrens

$$| f(x) * f''(x) / [f'(x)]^2 | \leq q \; ; \; q < 1 \; , \; x \in U$$

für alle x in einer Umgebung U der Nullstelle, die alle Punkte x_n enthält.

In manchen Fällen konvergiert das Verfahren nicht oder nur sehr langsam. Dann ist der Startwert x_0 zu weit von der Nullstelle entfernt oder es handelt sich um eine mehrfache Nullstelle von f(x).
Ist die Nullstelle x_l von f(x) einfach, d.h. gilt $f(x_l) = 0$ und $f'(x_l) \neq 0$, dann ist das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent, $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2 f''(x_l) / [2 f'(x_l)]$
Im Fall mehrfach zu zählender Nullstellen ist das Newton-Verfahren nur noch lokal linear konvergent.

Brent-Verfahren

... Nullstellenberechnungsverfahren nach Brent (1973)
geg.: drei Punkte x_1, x_2, x_3 sowie die zugehörigen Funktionswerte
Lösung: $x_{neu} = x_2 + P/Q$
mit $P = S [R(R-T)(x_3-x_2) - (1-R)(x_2-x_1)]$ $Q = (T-1)(R-1)(S-1)$
$R = f(x_2) / f(x_3)$ $S = f(x_2) / f(x_1)$ $T = f(x_1) / f(x_3)$
Grundlage des Verfahrens ist die Interpolationsformel
$x = [y-f(x_1)][y-f(x_2)]x_3 / [f(x_3)-f(x_1)][f(x_3)-f(x_2)] + [y-f(x_2)][y-f(x_3)]x_1 / [f(x_1)-f(x_2)][f(x_1)-f(x_3)] +$
$+ [y-f(x_3)][y-f(x_1)]x_2 / [f(x_2)-f(x_3)][f(x_2)-f(x_1)]$
Zur Herleitung der Iterationssformel wird dabei y = 0 gesetzt.

Householder-Verfahren

... Verfahren zur iterativen Nullstellenbestimmung
$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n) * [1 - [f(x_n)]^2 f''(x_n) / \{ 2 [f'(x_n)]^2 \}]$
Die Weiterentwicklung des Newton-Verfahrens hat in der Nähe von Extremstellen schwache Konvergenz.

Iterative Quadratwurzelberechnung

Pascal-Programmtext zur iterativen Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl a

```
program Wurzel; var    x, a, eps: double;
begin   writeln('Berechnet die Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl.');   write('Argument: ');
readln(a);
        write('Absolute Genauigkeit: '); readln(eps); x := a;
        while abs(x * x - a) >= eps do begin x := (x + a/x) / 2 end;
        writeln('Die Wurzel aus ', a:7:3, ' ist: ', x:7:3) end.
```

Heronsches Kubikwurzelverfahren

Durch Heron von Alexandria wurde im 1.Jahrhundert ein einfaches Näherungsverfahren zur Betimmung einer Kubikwurzel angegeben.
Gesucht sei $n = \sqrt[3]{N}$. Zuerst wählt man a und b mit $a^3 < N < b^3$ und $b = a + 1$
Dann wird $n - a$; $q = b - n$; $p + q = 1$
und $a^3 = (n - p)^3 = n^3 - 3n^2p + 3np^2 - p^3$
$b^3 = (n + q)^3 = n^3 + 3n^2q + 3nq^2 + q^3$
Wenn $p < 1$ ist, wird $p^3 << 1$ und ebenso für $q < 1$ wird $q^3 << 1$. Damit berechnet man
$P = N - a^3 \approx 3\, np\, (n - p) \approx 3\, a \cdot n \cdot p$
$Q = b^3 - N \approx 3\, nq\, (n + q) \approx 3\, b \cdot n \cdot p$
und $p/q \approx b \cdot P / (a \cdot Q)$
$p / (p+q) = p \approx b \cdot p / (b \cdot P + a \cdot Q)$
Als Näherung für n erhält man somit $n = a + p \approx a + b \cdot P / (b \cdot P + a \cdot Q)$

Beispiel: Für N = 90 und a = 4, $a^3 = 64$, b = 5, $b^3 = 125$ ergeben sich
$P = 90 - 64 = 26$ und $Q = 125 - 90 = 35$
Als Näherung wird dann
$n \approx 4 + 5 \cdot 26 / (5 \cdot 26 + 4 \cdot 35) = 4 + 130/270 = 4{,}481481$ … mit 3 Stellen Genauigkeit

Vorwärtsdifferenz

Die Ableitung einer Funktion f(x) ist definiert als $df/dx = \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x))/h$
Der Term (f(x+h) - f(x))/h ist der Differenzenquotient und wird auch endliche Differenz genannt. Im einfachsten Fall mit h = 1 wird
$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$
und wird Vorwärtsdifferenz genannt. Für beliebige h > 0 schreibt man dann
$\Delta_h f(x) = (f(x+h) - f(x)) / h$
Für h = -1 ergibt sich die Rückwärtsdifferenz $\Delta_{-1} f(x) = f(x) - f(x-1)$.
Sind eine Funktion f(x) und ein reelles h > 0 gegeben und wird y = x/h mit g(y) = f(hy)/x gesetzt, so ist $\Delta g(y) = \Delta_h f(x)$.

Für den offensichtlich linearen Differenzenoperator Δ gilt:
$\Delta(f + g) = \Delta(f) + \Delta(g)$
$\Delta(cf) = c\, \Delta(f)$, für konstantes, reelles c
$\Delta(c) = 0$, für eine reellwertige konstante Funktion c
$\Delta a^x = (a-1)\, a^x$, für reelles a

Interpolation
Ist ein Funktionswert nicht unmittelbar berechenbar oder aus einer Tabelle zu entnehmen, jedoch Funktionswerte für nahe Argumente gegeben, so wendet man die Interpolation an.
Bei der linearen Interpolation nimmt man an, dass der Zuwachs der Funktionswerte dem Zuwachs der unabhängigen Variablen proportional ist.
Liegt der gegebene Wert der unabhängigen Variable x zwischen gegebenen Werten x_0 und x_1 und $x_1 = x_0 + h$, denen die Funktionswerte $y_0 = f(x_0)$ und $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$ entsprechen, so setzt man

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)/h\ \Delta$$

Der Fehler der linearen Interpolation übersteigt nicht die Größenordnung einer Einheit in der letzten Dezimale, sofern die beiden benachbarten Differenzen Δ_0 und Δ_1 sich nicht um mehr als vier Einheiten in der letzten Dezimale unterscheiden.

In diesem Fall nutzt man die quadratische Interpolation nach Bessel:

$$f(x) = f(x_0) + k\ \Delta_0 - k_1\ (\Delta_1 - \Delta_{-1})$$

Dabei ist $k = (x - x_0) / h$ und $k_1 = k/4\ (1 - k)$

Interpolation bei drei Werten
Es seien drei Tabellenwerte y_1, y_2 und y_3 der Funktion y gegeben, die zu den Werten x_1, x_2 und x_3 des Argumentes x gehören. Die Tabelle der Differenzen sei

x_1	y_1	
a		
x_2	y_2	c
b		
x_3	y_3	

worin $a = y_2 - y_1$ und $b = y_3 - y_2$ die ersten Differenzen genannt werden. Die zweite Differenz c ist gleich b - a, d.h. $c = y_1 + y_3 - 2y_2$.

Interpolation ist erlaubt, wenn die zweiten Differenzen einer Tabelle fast konstant, die dritten Differenzen also fast Null sind. Mit einem Interpolationsfaktor $-1 < n < 1$ wird dann

$$y = y_2 + n/2\ (a + b + nc)$$

Erreicht die tabulierte Funktion ein Extremum, kann dieses ermittelt werden. Es wird

$$y_m = y_2\ (a+b)^2 / (8c)$$

und für den Interpolationsfaktor n des zugehörigen Arguments x

$$n_m = -(a+b) / (2c)$$

in Einheiten des Tabellenintervalls, gemessen vom zentralen Wert x_2.
Für den Wert des Arguments x, für den die Funktion Null wird, ergibt sich als Interpolationsfaktor

$$n_0 = -2y_2 / (a + b + cn_0)$$

beginnend mit $n_0 = 0$. Durch wiederholte Iteration ergibt sich ein immer besserer Wert n_0.
Konvergiert der Wert schlecht, so erhält man einen bessere Näherung mit

$$n_0 = n_0 - (2y_2 + n_0(a+b+cn_0)) / (a+b+2cn_0)$$

Niven-Polynome
Diese speziellen Polynome der Form $P_n(x) = x^n\ (1-x)^n /n! = 1/n!\ \Sigma_{k=n}^{2n}\ c_k x^k$
wobei die c_k ganze Zahlen sind, können sehr gut zum Nachweis der Irrationalität verschiedener Zahlen genutzt werden, zum Beispiel für e oder π. Diese Polynome haben die Eigenschaften

$0 < P_n(x) < 1/n!$ für $0 < x < 1$ $\qquad P_n(0) = 0$
$P_n^{(m)}(0) = 0$ für $m < n$ und $m > 2n$ $\qquad P_n^{(m)}(0) = m!/n!\ c_m$ sonst
$P_n^{(m)}(1) = 0$ für $m < n$ und $m > 2n$ $\qquad P_n^{(m)}(1) = m!/n!\ c_m$ sonst
$P_n(x) = P_n(1-x)$

Die ersten Niven-Polynome sind $P_1(x) = x\cdot(1 - x)$ $\quad P_2(x) = x^2 \cdot(x^2 - 1)/2$ $\quad P_3x) = x^3\cdot(x^3 - 1)/6$

Irrationalität von e
Satz: Wenn a > 0 eine ganze Zahl ist, dann ist e^a irrational.
Beweis: Angenommen $e^a = p/q$, wobei p und q positive, ganze Zahlen sind. Dann wird folgende Funktion betrachtet:

$$I(x) = a^{2n}P_n(x)-a^{2n-1}P_n{}^{¢}(x)+\ldots-aP_n^{(2n-1)}(x)+P_n^{(2n)}(x)$$

mit P_n, I(0) und I(1) ganzzahlig. Dann wird $q(e^{ax}I(x))' = qe^{ax}(aI(x)+I'(x)) = qe^{ax}a^{2n+1}P_n(x)$
und $q[\ e^{ax}I(x)]_0^1 = q(e^aI(1)-I(0)) = pI(1)-qI(0) = qa^{2n+1}\ {}_0\!\int^1\ e^{ax}\ P_n(x)\ dx$
wobei das Integral eine nicht negative ganze Zahl ist. Andererseits ist aber

$$0 < qa^{2n+1}\ {}_0\!\int^1\ e^{ax}P_n(x)dx < qa^{2n}(e^a-1) / n! < 1$$

für große n. Dies bedeutet, dass das Integral nicht ganzzahlig sein kann. Widerspruch! e^a ist irrational und damit auch e. qed
Analog zeigt man: Wenn p/q ein von Null verschiedenen rationale Zahl ist, dann ist $e^{p/q}$ irrational. Damit ist auch $\sqrt{e}$ irrational.

Satz: Wenn p/q > 0 und p/q $\neq$ 1 ist eine positive rationale Zahl, denn ist ln(p/q) irrational

Beweis: Ausgehen von ln(p/q) = a/b wird $p/q = e^{a/b}$ und mit dem obigen Ergebnis das Gesuchte. Damit sind zum Beispiel ln(2) und ln(3) irrationale Zahlen.

Irrationalität von π

Satz: π^2 ist eine irrationale Zahl.

Beweis: Es sei $\pi^2 = p/q$, wobei p und q positive ganzen Zahlen sind. Es wird folgende Funktion betrachtet

$$J(x) = q^n(\pi^{2n}P_n(x)-\pi^{2n-2}P_n^{(2)}(x)+ \pi^{2n-4}P_n^{(4)}(x)-...(-1)^nP_n^{(2n)}(x))$$

mit P_n, J(0) und J(1) als natürliche Zahlen. Es ist aber

$$(J'(x)\sin\pi x - J(x)\,\pi\cos\pi x)' = (J^{(2)}(x)+ \pi^2J(x))\sin\pi x = q^n\pi^{2n+2}P_n(x)\sin px = p^2p^nP_n(x)\sin\pi x$$

und damit $1/\pi\, [\, J'(x)\sin\pi x-J(x)\,\pi\cos\pi x]_0^1 = J(0)+J(1) = \pi p^n\, {}_0\!\int^1 P_n(x)\sin\pi x dx$

d.h. das Integral ist eine von Null verschiedene ganze Zahl. Als Grenzen für das Integral ergibt sich aber

$$0 < \pi p^n\, {}_0\!\int^1 P_n(x)\sin\pi x dx < \pi p^n/n! < 1$$

für großes n. Der Widerspruch ergibt, dass π irrational ist. Als Folgerung ergibt sich: π ist eine irrationalen Zahl.