Integralrechnung

„... wir sind dahin gekommen, dass die meisten Leute differenziren und integriren, nicht weil sie verstehn was sie thun, sondern aus reinem Glauben, weil es bisher immer richtig herausgekommen ist“
Friedrich Engels

Stammfunktion

... lat. integrare = wiederherstellen
f(x) und F(x) seien in I definiert und F(x) differenzierbar ⇒
F(x) heißt Stammfunktion ⇔ $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

Unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ist die Menge aller Stammfunktionen F(x) von f(x)

Integrationsregeln

	f(x)	F(x)	
Konstante	a	$a*x + c$	
Faktor	$a*f(x)$	$a*F(x) + c$	
Summe	$v(x) \pm u(x)$	$\int v(x)\,dx \pm \int u(x)\,dx$	
	$f(ax+b)$	$\int f(x)\,dx = 1/a \int f(t)\,dt$ mit $t = ax+b$	
Substitution	$f[g(x)]*g'(x)$	$\int f(u)\,du$, mit $u=g(x)$	
	$f'(x) / f(x)$	$\ln \mid f(x) \mid + c$	Umkehrung der logarithmischen Differenziation
	$f(x) * f'(x)$	$f^2(x)/2$	
	$[f(x)]^n * f'(x)$	$[f(x)]^{n+1} / (n+1)$	

Beispiel: $\int \tanh x\,dx = \int \sinh x / \cosh x\,dx = \int (\cosh x)' / \cosh x\,dx = \ln \mid \cosh x \mid = \ln \cosh x$

Partielle Integration

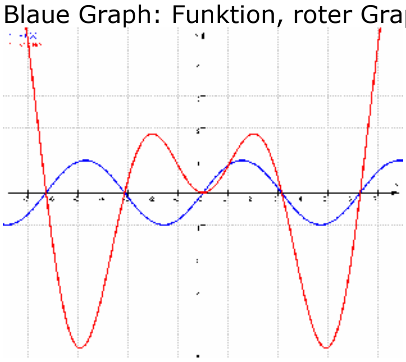
$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx$

Stammfunktion von Funktionen

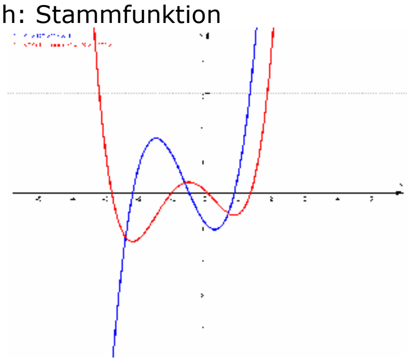
f(x)	F(x) + c	f(x)	F(x) + c
1	x	x^n	$1/(n+1)\, x^{n+1}$, $n \neq -1$
$1/x$	$\ln \mid x \mid$	$1/(ax+b)$	$\ln(ax+b)/a$
a^x	$a^x/\ln a$	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$2/3\, \sqrt{x^3}$	$1/\sqrt{x}$	$2\, \sqrt{x}$
$\sin x$	$- \cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$1/\cos^2 x$	$\tan x$	$1/\sin^2 x$	$-\cot x$
$\sin^2 x$	$1/2\,(x - \sin x \cos x)$	$\cos^2 x$	$1/2\,(x + \sin x \cos x)$
$\tan x$	$- \ln \mid \cos x \mid$	$\cot x$	$\ln \mid \sin x \mid$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln \cosh x$	$\coth x$	$\ln \mid \sinh x \mid$
$1/\cosh^2 x$	$\tanh x$	$1/\sinh^2 x$	$- \coth x$
$1/(x*\ln a)$	$1/\ln a * \ln x = \log_a x$	$(ax+b)^n$	$1/[a(n+1)]\,(ax+b)^{n+1}$, $n \neq -1$
$1/\sqrt{[x^2 \pm a^2]}$	$\ln \mid x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)} \mid$	$1/(a^2 + x^2)$	$1/a \arctan x/a$
$1/(a^2 - x^2)$	$1/a\, \operatorname{artanh} x/a = 1/(2a) \ln [(a+x) / (a-x)]$, $\mid x \mid < a$	$1/(x^2 - a^2)$	$-1/a\, \operatorname{arcoth} x/a = 1/(2a) \ln [(x-a)/(x+a)]$, $\mid x \mid > a$
$1/\sqrt{(a^2 - x^2)}$	$\arcsin x/a$	$1/\sqrt{(a^2 + x^2)}$	$\operatorname{arsinh} x/a = \ln [x + \sqrt{(a^2 + x^2)}]$
$1/\sqrt{(x^2 - a^2)}$	$\operatorname{arcosh} x/a = \ln [x + \sqrt{(x^2 - a^2)}]$		

Funktionen und deren Stammfunktionen

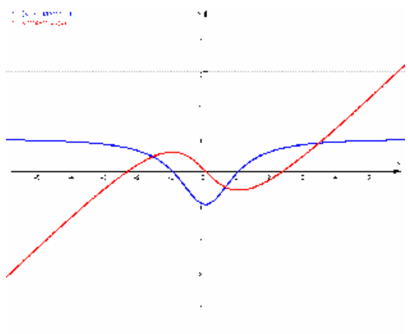
Blaue Graph: Funktion, roter Graph: Stammfunktion



$f(x) = x \sin x$; $F(x) = \sin(x) - x \cos(x)$



$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$
$F(x) = x^4/4 + 2/3\, x^3 - x^2/2 - x$



$f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$
$F(x) = x - 2 \arctan x$

Herleitung der Partiellen Integration

Aus der Produktregel für die Differenzialrechnung

$f(x) = u(x)\, v'(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$

wird unter Vernachlässigung der Integrationskonstanten C nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung $\int f'(x)\, dx = f(x) = u(x)\, v(x)$

durch Einsetzen $\int u'(x)\, v(x)\, dx + \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)$

und umgestellt $\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$

oder wahlweise $\int u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x)\, dx$

Die Regel wird partielle Integration genannt, da bei der Anwendung nur ein Teil des Integrals auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bestimmt wird.

Diese Regel ist nur dann anwendbar, wenn die Stammfunktion zu u'(x) bekannt oder leicht berechenbar ist.

Partielle Integration - Beispiele

Sind f und g in [a; b] differenzierbar und sind f´ und g´ stetig in [a; b], so gilt:

$$\int f * g'\, dx = f * g - \int f' * g\, dx$$

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel der Differentiation. Anwendung der Regel besonders bei Produkten von Funktionen als Integrand. Die Ableitung f'(x) sollte eine einfachere Funktion ergeben als f(x). Die Funktion g'(x) sollte einfach zu integrieren und das Ergebnis sollte nicht komplizierter sein. Gegebenfalls die partielle Integration mehrfach nacheinander anwenden.

Merkregel: 1) Integriere den ersten Faktor,
2) schreibe das entstehende Produkt hin,
3) leite dann den zweiten Faktor ab und
4) schreibe das entstehende Produkt mit einem Minuszeichen unter das Integral.

Häufig wird das Minuszeichen vor dem Integral vergessen, besonders bei mehrfacher Anwendung der partiellen Integration.

$\int x * e^x\, dx = x * \int e^x\, dx - \int 1 * (\int e^x\, dx)\, dx = x * e^x - \int e^x\, dx = x * e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$

$\int \ln x\, dx = \int \ln x * 1\, dx = \ln x * x - \int 1/x * x\, dx = x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + c$

$\int \ln^2 x\, dx = \int \ln x * \ln x\, dx = \ln x\, (x \ln x - x) - \int 1/x\, (x \ln x - x)\, dx = x \ln^2 x - x \ln x - \int (\ln x - 1)\, dx =$

$= x \ln^2 x - x \ln x - (x \ln x - x) + x + c = x \ln^2 x - x \ln x - x \ln x + x + x + c = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$

$\int x^2 \sin x\, dx = x^2 (- \cos x) - \int 2x\, (- \cos x)\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int -x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\, [x \sin x - \int 1 \sin x\, dx] =$

$= -x^2 \cos x + 2\, [x \sin x + \cos x] + c = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

$\int \sin^2 x\, dx$

1. Art: $\int \sin^2 x * 1\, dx = \sin^2 x * x - \int 2 \sin x \cos x * x\, dx = x \sin^2 x - \int x \sin 2x\, dx =$

$= x \sin^2 x - [x \int \sin 2x\, dx - \int 1\, (\int \sin 2x\, dx)\, dx] = x \sin^2 x - x\, ([- \cos 2x]/2) + \int (- [\cos 2x]/2)\, dx =$

$= x \sin^2 x + [x \cos 2x]/2 - ½ \int \cos 2x\, dx = x \sin^2 x + [x \cos 2x]/2 - [\sin 2x]/4 + c =$

$= [2x \sin^2 x]/2 + [x (\cos^2 x - \sin^2 x)]/2 - [\sin 2x]/4 + c = [x \cos^2 x]/2 + [x \sin^2 x]/2 - [\sin 2x]/4 + c =$

$= x/2\, (\cos^2 x + \sin^2 x) - [\sin 2x]/4 + c = x/2 - [\sin 2x]/4 + c$

Manchmal erhält man das Ausgangsintegral bei der partiellen Integration wieder. Dann löst man die Gleichung nach diesem Integral auf. → 2. Art:

$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x * \sin x\, dx = \sin x\, (- \cos x) - \int \cos x\, (- \cos x)\, dx = - \sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$

$\int \sin^2 x\, dx = - \sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx \quad | + \int \sin^2 x\, dx$

$2 \int \sin^2 x\, dx = - \sin x \cos x + x \quad | :2$

$\int \sin^2 x\, dx = x/2 - [2 * \sin x \cos x] / [2 * 2] + c = x/2 - [\sin 2x]/4 + c$

Spezialfälle der partiellen Integration

a) Integrand ist Produkt aus einem Polynom p(x) vom Grade n und einer der Funktionen e^x, sin x, cos x, sinh x, cosh x → mehrfache (n-fache) partielle Integration für f(x) = p(x).

Beispiel:

$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

b) Integrand ist Produkt aus zwei der Funktionen e^x, sin x, cos x, sinh x, cos h x → zweimalige Produktintegration führt auf Ausgangsintegral zurück, nach dem dann die Gleichung aufgelöst wird.

Gegebenenfalls folgende Beziehungen verwenden:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Beispiel: $\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx \rightarrow \int e^x \sin x\, dx = ½\, e^x (\sin x - \cos x) + C$

Hinweis: Bei einem Produkt aus e^x mit einer Hyperbelfunktion diese durch $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ bzw. $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ ersetzen und mit $z = e^x$ substituieren.

c) Integrand ist Produkt aus einer rationalen Funktion und einer logarithmischen, Arkus- oder Area-Funktion → man setze die rationale Funktion gleich g'(x)
Beispiel:
$\int 1/x^2 \operatorname{arsinh} x \, dx = -1/x \operatorname{arsinh} x + \int dx/(x \sqrt{1+x^2}) = - 1/x \operatorname{arsinh} x + \int dz/(z^2-1) = -1/x \operatorname{arsinh} x - \operatorname{arcoth} \sqrt{x^2+1} + C$

Substitutionen (Integration)

Häufig vorkommende Substitutionen

$t = ax+b$	$dx = 1/a \, dt$	$t = x/a$	$dx = a \, dt$
$t = a/x$	$dx = -a/t^2 \, dt$	$t = a^x$	$dx = dt/(t \ln a)$
$t = \sqrt{x}$	$dx = 2t \, dt$	$t = e^x$	$dx = 1/t \, dt$
$t = \ln x$	$dx = e^t \, dt$	$t = a+bx$	$dx = 1/b \, dt$
$t = a^2+x^2$	$dx = dt/[2 \sqrt{t - a^2}]$	$t = \sqrt{a+bx}$	$dx = 2t \, dt/b$
$t = a+bx^2$	$dx = dt/[2 \sqrt{bt - ab}]$	$t = \sqrt{a^2+x^2}$	$dx = t \, dt/\sqrt{t^2 - a^2}$
$t = \sqrt{a^2-x^2}$	$dx = -t \, dt/\sqrt{a^2 - t^2}$	$t = \sqrt{x^2-a^2}$	$dx = t \, dt/\sqrt{t^2 + a^2}$

Integration durch Substitution

$\int f(x) \, dx = \int f[\phi(t)] * \dot{\phi}(t) \, dt$ mit $x = \phi(t)$ und $dx = \dot{\phi}(t) \, dt$; $R(x)$ sei rationale Funktion

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$
Substitution $x = a \sin t$ $\quad dx = a \cos t \, dt \Rightarrow \int R(a \sin t, a \cos t) \, a \cos t \, dt$
$\sin t = x/a$ und $\cos t = \sqrt{a^2 - x^2}/a$
2. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$
Substitution $x = a \tanh t$ $\quad dx = a \, dt/\cosh^2 t \Rightarrow \int R(a \tanh t, a/\cosh t) \, a \, dt/\cosh^2 t$
$\sinh t = x/\sqrt{a^2-x^2}$ und $\cosh t = a/\sqrt{a^2-x^2}$
3. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \, dx$
Substitution $x = a \tan t$ $\quad dx = a \, dt/\cos^2 t \Rightarrow \int R(a \tan t, a/\cos^2 t) \, a/\cos^2 t \, dt$
$\sin t = x/\sqrt{a^2+x^2}$ und $\cos t = a/\sqrt{a^2+x^2}$
4. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \, dx$
Substitution $x = a \sinh t$ $\quad dx = a \cosh t \, dt \Rightarrow \int R(a \sinh t, a \cosh t) \, a \cosh t \, dt$
$\sinh t = x/a$ und $\cosh t = \sqrt{a^2+x^2}/a$
5. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$
Substitution $x = a/\cos t$ $\quad dx = a \sin t \, dt/\cos^2 t \Rightarrow \int R(a/\cos t, a \tan t) \, a \sin t/\cos^2 t \, dt$
$\sin t = \sqrt{x^2-a^2}/x$ und $\cos t = a/x$

6. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$
Substitution $x = a \cosh t$ $\quad dx = a \sinh t \, dt \Rightarrow \int R(a \cosh t, a \sinh t) \, a \sinh t \, dt$
$\sinh t = \sqrt{x^2-a^2}/a$ und $\cosh t = x/a$
7. $\int R(x, \sqrt{ax^2 +2bx + c}) \, dx$
Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung $ax^2 + 2bx + c = a(x + b/a)^2 - b^2/a + c$
entsteht einer der Fälle
a) $\int R(x, \sqrt{a^2 - (x+b)^2}) \, dx$ $\quad$ Substitution $x + b = a \sin t$
b) $\int R(x, \sqrt{a^2 + (x+b)^2}) \, dx$ $\quad$ Substitution $x + b = a \sinh t$
c) $\int R(x, \sqrt{(x+b)^2 -a^2}) \, dx$ $\quad$ Substitution $x + b = a \cosh t$
Beispiel:
$\int dx / \sqrt{a^2+x^2} = \int a \cosh t \, dt / \sqrt{a^2 + a^2 \sinh^2 t} = \int a \cosh t \, dt / (a \cosh t) = \int dt = t = \operatorname{arcsinh} (x/a)$

8. $\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) \, dx$
Substitution $\tan x/2 = t$ $\quad dx = 2/(1+t^2) \, dt$
$\Rightarrow \int R(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2), 2t/(1-t^2), (1-t^2)/(2t)) \, 2 \, dt/(1+t^2)$
alternative Substitution $t = e^{ix}$ $\quad dt = it \, dx$
Beispiele:
$\int 8 \cos^2 x \, dx = \int 2(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \, dx = 1/i \, (e^{2ix} - e^{-2ix}) +4x = 2 \sin 2x + 4x$
$\int \sin x \, dx / \cos^2 x = \int -d \cos x / \cos^2 x = -1 / \cos x$

8. $\int R(\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x) \, dx$
Substitution $\tanh x/2 = t$ $\quad dx = 2/(1-t^2) \, dt$
$\Rightarrow \int R(2t/(1-t^2), (1+t^2)/(1-t^2), 2t/(1+t^2), (1+t^2)/(2t)) \, 2 \, dt/(1-t^2)$
Beispiele:
$\int dx / (2 \cosh x) = \int dx / (e^x + e^{-x}) = \int dt / (t \, (t+1/t)) = \int dt / (t^2+1) = \arctan t = \arctan e^x$
$\int 8 \sinh^2 x \, dx = \int 2(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \, dx = e^{2x} - 4x - e^{-2x}$

9. $\int f(e^x) \, dx$
Substitution $e^x = t$ $\quad dx = dt/t$ $\quad \Rightarrow \int f(t) \, dt$
10. $\int f(x, \sqrt[k]{ax+b}) \, dx$
Substitution $ax+b = t$ $\quad dx = kt^{k-1}/a /t$ $\quad \Rightarrow \int f(t) \, dt$

Integration durch Substitution

$\int e^{3x}\,dx = \int e^t\, 1/3\, dt = 1/3 \int e^t\, dt = 1/3\, e^t + c = 1/3\, e^{3x+c}$

Substitution: $3x = t$ $\quad x = g(t)$ $\quad x = t/3 = 1/3\, t$ $\quad |\ '$ nach t

$\quad dx/dt = g'(t)$ $\ |\ {*}dt$ $\quad dx = g'(t) * dt$ $\quad g'(t) = 1/3$ $\quad dx = 1/3\, dt$

$\int (5x - 3)^7\, dx = \int 1/5\, t^7\, dt = 1/5 * t^8/8 + c = 1/40\, (5x - 3)^8 + c$

Substitution: $5x - 3 = t$ $\quad 5\, dx = dt$ $\quad dx = 1/5\, dt$

$\int x \cos(x^2)\, dx = \int 1/2 \cos t\, dt = ½ \sin t + c = ½ \sin x^2 + c$

Substitution: $x^2 = t$ $\quad 2x\, dx = dt$ $\quad x\, dx = ½\, dt$

$\int (\ln x)/x\, dx = \int t\, dt = t^2/2 + c = (\ln^2 x)/2 + c$ $\qquad$ Substitution: $\ln x = t$ $\quad 1/x\, dx = dt$

$\int (\ln^2 x)/x\, dx = \int t^2\, dt = t^3/3 + c = (\ln^3 x)/3 + c$ $\qquad$ Substitution: $\ln x = t$ $\quad 1/x\, dx = dt$

$\int x \cos(x^2+1)\, dx = 1/2 \int \cos t\, dt = 1/2 \sin t = 1/2 \sin(x^2+1) + C$

Substitution: $t = x^2+1$ $\quad dt/dx = 2x$ $\quad x\, dx = 1/2\, dt$

$\int \sqrt{(1 - x^2)}\, dx = \int \sqrt{(1 - \sin^2 t)} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt$

Substitution: $x = \sin t$ $\quad t = \arcsin x$ $\quad dx = \cos t\, dt$ $\quad \sqrt{(1 - \sin^2 t)} = |\cos t|$

mit Hilfe partieller Integration wird weiter

$\quad = \int \cos^2 t\, dt = 1/2\, (\sin t \cos t + t) = 1/2\, (x \cos \arcsin x + \arcsin x)$

$\quad = 1/2 \arcsin x + x/2 \sqrt{(1 - x^2)} + C$

$\int 1 / (x^2 + 2x + 2)\, dx = \int 1 / (1+t^2)\, dt = \arctan t = \arctan(x+1) + C$

Substitution: $x = t-1$ $\quad dt = dx$

Substitution von Euler

Substitutionen von Euler für das spezielle Integral $\quad \int f(\sqrt{(ax^2 + bx + c)})\, dx$

Fall $a > 0$ $\quad$ Substitution $\quad \sqrt{(ax^2 + bx + c)} = x \sqrt{a} + z$ $\quad x = (z^2 - c)/(b - 2z \sqrt{a})$

$\qquad$ Differenzial $\quad dx = 2\, (-z^2 \sqrt{a} + bz - c \sqrt{a})/(b - 2z\, a)^2\, dz$

Fall $c > 0$ $\quad$ Substitution $\quad \sqrt{(ax^2 + bx + c)} = x\, z + \sqrt{c}$ $\quad x = (2z \sqrt{c} - b)/(a - z^2)$

$\qquad$ Differenzial $\quad dx = 2\, (a \sqrt{c} - bz + z^2 \sqrt{c})/(a - z^2)^2\, dz$

reelle Wurzeln x_1 und x_2

$\qquad$ Substitution $\quad \sqrt{(ax^2 + bx + c)} = z\, (x - x_1)$ $\quad x = (z^2 x_1 - a\, x_2)/(z^2 - a)$

$\qquad$ Differenzial $\quad dx = 2\, az\, (x_2 - x_1)/(z^2 - a)^2\, dz$

Integrationsbeispiele

$\int \left(3 + 2\sqrt[4]{x}\right)^3 dx = \int \left(27 + 27 \cdot 2x^{\frac{1}{4}} + 9 \cdot 4x^{\frac{1}{2}} + 8x^{\frac{3}{4}}\right) dx =$ $= 27\int dx + 54\int x^{\frac{1}{4}} dx + 36\int x^{\frac{1}{2}} dx + 8\int x^{\frac{3}{4}} dx =$ $= 27x + \frac{216}{5} x^{\frac{5}{4}} + 24x^{\frac{3}{2}} + \frac{32}{7} x^{\frac{7}{4}}$	$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 5x^2}} dx = \left\| \begin{matrix} 3 - 5x^2 = t \\ -10x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{10} dt \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{10} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{10} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{10} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} =$ $= -\frac{1}{5}\sqrt{\left(3 - 5x^2\right)}$
$\int \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x + 1}} dx = \left\| \begin{matrix} x + 1 = t \\ dx = dt \\ x = t - 1 \end{matrix} \right\| = \int \frac{t - 2}{t^{\frac{1}{3}}} dt = \int t^{\frac{2}{3}} - 2t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}}$ $= \frac{3}{5}(x + 1)^{\frac{5}{3}} - 3(x + 1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x + 1)^5} - 3\sqrt[3]{(x}$	$\int \frac{1}{\text{ctg}^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$ $= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \text{tg}\, x - x + C$
$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}} = \left\| \begin{matrix} 2x^2 - 1 = t \\ 4x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{4} dt \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} =$ $= \frac{3}{8}\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{2}{3}}$	$\int \sqrt{3x + 1} dx = \left\| \begin{matrix} 3x + 1 = t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{matrix} \right\| = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x + 1)^{\frac{3}{2}}$

<table>
<tr>
<td>$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(1}$</td>
<td>$\int\sqrt{a+bx}\,dx = \left|\begin{matrix}a+bx=t\\ bdx=dt\\ dx=\frac{dt}{b}\end{matrix}\right| = \frac{1}{b}\int\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{b}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-6}}dx = \left|\begin{matrix}x^2-6=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{}$</td>
<td>$\int\frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}dx = \left|\begin{matrix}x^3+1=t\\ 3x^2dx=dt\\ x^2dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt[5]{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{5}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}t^{\frac{4}{5}} =$

$= \frac{5}{12}\sqrt[5]{(x^3+1)^4}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left|\begin{matrix}e^{\frac{1}{x}}=t\\ -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=dt\end{matrix}\right| = -t = -e^{\frac{1}{x}}$</td>
<td>$\int xe^{-x^2}dx = \int e^{-x^2}\cdot xdx = \left|\begin{matrix}-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\int e^t = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = \left|\begin{matrix}1+\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2t^{\frac{1}{2}} =$</td>
<td>$\int\frac{dx}{2\cos^2 3x} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 3x} = \left|\begin{matrix}\mathrm{tg}\,3x=t\\ \frac{3}{\cos^2 3x}dx=dt\\ \frac{1}{\cos^2 3x}dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}t = \frac{1}{6}t = \frac{1}{6}\mathrm{tg}\,3x$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\sin^5 x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix}\sin^6 x=t\\ 6\sin^5 x\cos x\,dx=dt\\ \sin^5 x\cos x\,dx=\frac{1}{6}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{6}t = \frac{1}{6}\sin^6 x$</td>
<td>$\int x\sin(2x^2+1)dx = \left|\begin{matrix}\cos(2x^2+1)=t\\ -4x\sin(2x^2+1)dx=dt\\ x\sin(2x^2+1)dx=-\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right| = -\frac{1}{4}t = -\frac{1}{4}\cos(2x^2+1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx = \left|\begin{matrix}\ln^3 x=t\\ 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=dt\\ \frac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}t = \frac{1}{3}\ln^3 x$</td>
<td>$\int\frac{\sin x}{a+b\cos x}dx = \left|\begin{matrix}a+b\cos x=t\\ -b\sin x\,dx=dt\\ \sin x\,dx=-\frac{dt}{b}\end{matrix}\right| = -\frac{1}{b}\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}dx = \left|\begin{matrix}\mathrm{tg}^2 x=t\\ 2\,\mathrm{tg}\,x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt\\ \frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x$</td>
<td>$\int\frac{x^3}{\cos^2 x^4}dx = \left|\begin{matrix}x^4=t\\ 4x^3dx=dt\\ x^3dx=\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\,t = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\,x^4$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx = \int\sin^2 x(\sin x\cos x)^2dx = \int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\int$
$= \frac{1}{8}\left(\int\sin^2 2xdx - \int\sin^2 2x\cos 2xdx\right) = \frac{1}{8}$
$I_1 = \int\sin^2 2x$
$I_2 = \int\sin^2 2x\cos 2xdx$
$\int\sin^2 2x = \frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos 4x = \frac{1}{2}x -$
$\int\cos 4x = \left|\begin{matrix}4x=t\\ 4dx=dt\\ dx=\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int\cos t = \frac{1}{4}\sin 4x + C$
$\int\sin^2 2x\cos 2xdx = \left|\begin{matrix}\sin 2x=t\\ 2\cos 2xdx=dt\\ \cos 2xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int t^2dt = \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{6}\sin$
$\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$
$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
$(\sin x\cos x)^2 = \frac{\sin^2 2x}{4}$</td>
<td>$\int\cos x\cdot e^{\sin x}dx = \left|\begin{matrix}e^{\sin x}=t\\ \cos x\cdot e^{\sin x}dx=dt\end{matrix}\right| = t = e^{\sin x}$
$\int x\ln(1+x^2)dx$
$u=\ln(1+x^2) \quad v'=x$
$u'=\frac{2x}{1+x^2} \quad v=\frac{x^2}{2}$
$\int x\ln(1+x^2)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int\frac{2x^3}{2+2x^2}$
$\int\frac{2x^3}{2+2x^2}dx = \int\frac{x^3}{1+x^2}dx = \int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int xdx - \int\frac{x}{1+x^2}dx = *$
$\int\frac{x}{1+x^2}dx = \left|\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}(1+x^2)$
$* = \frac{x^2}{2} - \int\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\int x\ln(1+x^2)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) +$
$+\frac{1}{2}x^2(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 =$
$= \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

$$\int xe^{x^2}(x^2+1)dx$$

$$u=(x^2+1) \qquad v'=xe^{x^2}$$

$$u'=2x \qquad v=\int xe^{x^2}=\frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int xe^{x^2}dx=\left|\begin{matrix} x^2=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right|=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int e^t=\frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int xe^{x^2}(x^2+1)dx=(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}-\int(\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot 2x)=$$

$$=(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}-\int xe^{x^2}=(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}-$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot x^2+\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}=\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot x^2+C$$

</td>
<td>

$$\int\frac{(\pi-\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\pi dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}=*$$

$$\int\frac{\pi dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\arcsin x$$

$$\int\frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix} \arcsin x=t \\ \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=dt \end{matrix}\right|=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$$

$$*=\int\frac{(\pi-\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\arcsin x-\frac{1}{2}(\arcsin)^2+C$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\int x^3e^xdx \qquad u=x^3 \quad v'=e^x$$

$$u'=3x^2 \quad v=e^x$$

$$\int x^3e^xdx=x^3e^x-\int 3x^2e^xdx$$

$$\int 3x^2e^xdx$$

$$u=3x^2 \quad v'=e^x$$

$$u'=6x \quad v=e^x$$

$$\int 3x^2e^xdx=3x^2e^x-\int 6xe^xdx=3x^2e^x-(6xe^x-6e^x)=$$

$$\int 6xe^xdx=6xe^x-6e^x \qquad =3x^2e^x-6xe^x+6e^x$$

- -

$$\int x^3e^xdx=x^3e^x-(3x^2e^x-6xe^x+6e^x)=$$

$$=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x=$$

$$=e^x(x^3-3x^2+6x-6)$$

</td>
<td>

$$\int\frac{\ln|\operatorname{arc\,ctg} x|}{1+x^2}dx=\int\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln|\operatorname{arc\,ctg} x|dx$$

$$u=\ln|\operatorname{arc\,ctg} x| \qquad v'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$u'=\frac{1}{\operatorname{arc\,ctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad v=\int\frac{1}{1+x^2}=\operatorname{arc\,ctg} x$$

$$\int\frac{\ln|\operatorname{arc\,ctg} x|}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,ctg} x\cdot\ln|\operatorname{arc\,ctg} x|-\int\operatorname{arc\,ctg} x\cdot\frac{1}{\operatorname{arc\,ctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,ctg} x\cdot\ln|\operatorname{arc\,ctg} x|-\int\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,ctg} x\cdot\ln|\operatorname{arc\,ctg} x|-\operatorname{arc\,ctg} x=$$

$$=\operatorname{arc\,ctg} x(\ln|\operatorname{arc\,ctg} x-1|)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\int\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)dx=\int\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\right.$$

$$=\int\frac{\cos^4 x-1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=-\int\frac{(\cos^2 x+1)(\cos^2 x}{(\cos^2 x-1)(\cos^2 x}$$

$$=-\int\frac{\cos^2 x+1}{\cos^2 x}dx=-\int dx-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=$$

$$=-x-\operatorname{tg} x+C$$

</td>
<td>

$$\int\frac{1-x}{x^4}dx=\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\frac{1}{x^4}dx-\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-4}dx-\int x^{-3}dx=$$

$$=\frac{x^{-3}}{-3}-\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}+C=$$

$$=\frac{-2x^2+3x^3}{3x^3\cdot 2x^2}+C=\frac{-2+3x}{6x^3}+C$$

</td>
</tr>
</table>

Integration durch Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung von f(x)/g(x)

1. g(x) = 0 hat nur einfache reelle Wurzeln x_i $f(x)/g(x) = A/(x-x_1) + B/(x-x_2) + C/(x-x_3) + \dots$ mit
 $A = f(x_1)/g'(x_1)$, $B = f(x_2)/g'(x_2)$, ...
2. ... reelle aber mehrfache auftretende Wurzeln x_1 α mal, x_2 β mal, x_3 γ mal ...
 $f(x)/g(x) = A_1/(x-x_1)^{\alpha} + A_2/(x-x_1)^{\alpha-1} + \dots + A_{\alpha}/(x-x_1) + B_1/(x-x_2)^{\beta} + \dots + B_{\alpha}/(x-x_2) + \dots$
3. ... neben reellen auch einfache konjugiert komplex auftretende Wurzeln
 x_1 und x_2 sind zueinander konjugiert komplex
 $\Rightarrow f(x)/g(x) = (Px + Q) / [(x-x_1)\ (x+x_{12})\ ] = (Px + Q) / (x^2 + px + q)$
 $\Rightarrow \int (Px+Q)/(x^2+px+q)\ dx = P/2 * \ln |x^2 +px +q|$
4. ... neben reellen auch mehrfache komplexe Wurzeln, z.B. bei einer dreifachen reellen und zweifach auftretenden konjugiert komplexen Wurzeln

$f(x)/g(x) = A_1/(x-x_1)^3 + A_2/(x-x_1)^2 + A_2/(x-x_1) + (P_1x + Q_1) / (x^2 + px + q)^2 + (P_2x + Q_2)/(x^2 + px + q)$

Spezialfälle

1. $\int dx / ((x+a)(x+b)(x+c)) = u \int dx/(x+a) + v \int dx/(x+b) + w \int dx/(x+c)$
2. $\int dx / ((a+bx^2)(c+dx^2)) = 1/(bc-ad)\ (\int b\ dx / (a+bx^2) - \int d\ dx / (c+dx^2))$
3. $\int dx / ((x^2+a)(x^2+b)(x^2+c)) = u \int dx/(x^2+a) + v \int dx/(x^2+b) + w \int dx/(x^2+c)$

mit $u = 1/((b-c)(c-a))$; $v = 1/((a-b)(c-b))$; $w = 1/((a-c)(b-c))$

Beispiel zur Integration mit Partialbruchzerlegung

Zu bestimmen ist eine Stammfunktion von $f(x) = x / (4 - x^4)$.

1. Reduktion des Exponenten durch Substitution

$\int x / (4 - x^4)\ dx =$

Substitution $u = x^2$ mit $du / dx = 2x$, d.h. $dx = du / 2x$

$= \int x / (4 - u^2) * du / 2x = 1/2 \int du / (4 - u^2) =$

2. Partialbruchzerlegung

Ansatz $1 / (4 - u^2) = 1 / [(2 - u)(2 + u)] = A / (2 - u) + B / (2 + u)$

Koeffizientenvergleich ergibt $A = 1/4$ und $B = 1/4$

3. Einsetzen in das Integral und Bestimmen der Stammfunktion

$= 1/2 \int du / (4 - u^2) = 1/2 \int 1/4 [\, 1/(2 - u) + 1/(2 + u)] du =$

$= 1/8 \int du / (2 - u) + 1/8 \int du / (2 + u) = - 1/8 \ln |2 - u| + 1/8 \ln |2 + u| =$

4. Rücksubstituieren und Termvereinfachung

$= - 1/8 \ln |2 - x^2| + 1/8 \ln |2 + x^2| = -1/8 \ln (|x^2 - 2| / |x^2 + 2|)$

Gesamtergebnis $\int x / (4 - x^4) dx = -1/8 \ln (|x^2 - 2| / |x^2 + 2|) + C$

Beispiel zur Integration mit Partialbruchzerlegung

Zu bestimmen ist eine Stammfunktion von $f(x) = 1 / (x^2 - 1)$.

1. Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren

$\int 1 / (x^2 - 1) dx = \int 1 / [(x - 1)(x +1)] dx$

2. Bruchzerlegung in Partialbrüche

$\int 1 / [(x - 1)(x +1)] dx = \int (1/(2x - 2) - 1/(2x +2)) dx$

3. Aufspalten in Teilintegrale

$\int (1/(2x - 2) - 1/(2x +2)) dx = 1/2 \int dx/(x - 1) - 1/2 \int dx/(x +1)$

4. Integration der Teilintegrale

$1/2 \int dx/(x - 1) - 1/2 \int dx/(x +1) = 1/2 \ln (x-1) - 1/2 \ln (x+1) =$

$= 1/2 (\ln (x - 1) - \ln (x + 1)) = 1/2 \ln ((x - 1)/(x + 1))$

Gesamtergebnis $\int 1 / (x^2 - 1) dx = 1/2 \ln ((x - 1)/(x + 1)) + C$

Integration durch Reihenentwicklung

Potenzreihenentwicklung des Integranden mit dem Konvergenzradius r

$f(x) = \Sigma a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

Anschließende Integration der einzelnen Glieder der Potenzreihe

$\int f(x) dx = \Sigma a_k x^{k+1}/(k+1) = a_0 x + a_1/2 x^2 + a_2/3 x^3 + a_3/4 x^4 + \ldots$

In der Regel ist dies sowohl für unbestimmte als auch für bestimmte Integrale möglich! Zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen innerhalb des Konvergenzradius r liegen müssen.

Beispiel: $\int \sin \sqrt{x}\, dx$

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots \quad \sin \sqrt{x} = \sqrt{x} - x^{3/2}/3! + x^{5/2}/5! - \ldots$

$\int \sin \sqrt{x}\, dx = 2x^{3/2}/3 - 2x^{5/2}/(5 * 3!) + 2x^{7/2}/(7 * 5!) - \ldots$

Integrallogarithmus $Li(x) = {}_0\int^x dt / \ln t = C + \ln |\ln |x|| + \ln x /(1*1!) + (\ln x)^2/(2*2!) + \ldots$

Vollständiges elliptisches Integral 1.Art

$F(k,\pi/2) = {}_0\int^{\pi/2} dt/\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 t)} = \pi/2 (1 + k^2/4 + 9/64 k^4 + 25/256 k^6 + 1225/16384 k^8 + \ldots)$

Vollständiges elliptisches Integral 2.Art

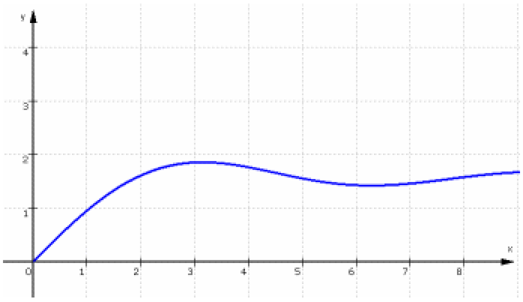
Das vollständige elliptische Integral 2.Art ermöglicht die Berechnung des Umfangs einer Ellipse mit der Exzentrizität k

$U = 4a\, E(k,\pi/2) = 4a\, {}_0\int^{\pi/2} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 t)}\, dt = 2\pi a (1 - k^2/4 - 3/64 k^4 - 5/256 k^6 - 175/16384 k^8 - \ldots)$

1.Näherung $= 2\pi a (1 - k^2/4)$

2.Näherung $= 2\pi a (1 - k^2/4 - 3/64 k^4)$

3.Näherung $= 2\pi a (1 - k^2/4 - 3/64 k^4 - 5/256 k^6)$



Integralsinus, Sinus cardinalis

$Si(x) = {}_0\int^x \sin t / t\, dt = x - x^3/(3\cdot 3!) + x^5/(5\cdot 5!) - + \ldots$

$Si(x+yi) = Si(z) = 1/(2i) (E_1(iz) - E_1(-iz)) + \pi/2$

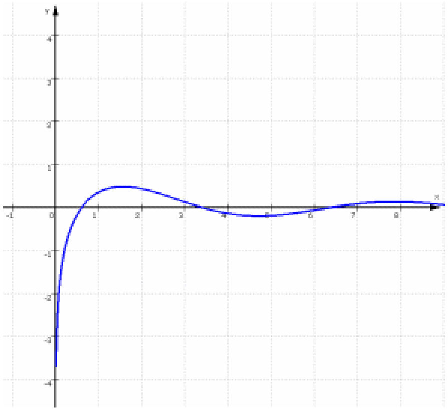
$Si(ix) = i/2 (Ei(x) + E_1(x))\ ;\ x > 0$

Funktionswerte

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0,1	0,0999	0,2	0,1996	0,3	0,2985
0,4	0,3965	0,5	0,4931	0,6	0,5881
0,7	0,6812	0,8	0,7721	0,9	0,8605
1,0	0,9461	1,1	1,0287	1,2	1,1080
1,3	1,1840	1,4	1,2562	1,5	1,3247
1,6	1,3892	1,7	1,4496	1,8	1,5058
1,9	1,5578	2,0	1,6054	2,1	1,6487
2,2	1,6876	2,3	1,7222	2,4	1,7525
2,5	1,7785	2,6	1,8004	2,7	1,8182
2,8	1,8321	2,9	1,8422	3,0	1,8487
3,1	1,8517	3,2	1,8514	3,3	1,8481

Näherungswert des Integralsinus $y \approx Si(x)$

Integralhyperbelsinus Shi(x) $Shi(x) = {}_0\int^x \sinh t / t\, dt = \Sigma_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}/((2n+1)(2n+1)!)$



Integralkosinus

$Ci(x) = {}_x\int^{\infty} \cos t / t\, dt = C + \ln|x| - x^2/(2\cdot 2!) + x^4/(4\cdot 4!) - + \ldots,$

$C = 0{,}5772 \ldots$ Eulersche Konstante

$Ci(x) \approx 0{,}5772 + \ln|x|$

$Ci(x) \approx 0{,}5772 + \ln|x| - x^2/(2\cdot 2!)$

$Ci(x) \approx 0{,}5772 + \ln|x| - x^2/(2\cdot 2!) + x^4/(4\cdot 4!)$

$Ci(x+yi) = Ci(z) = -1/2\, (E_1(iz) + E_1(-iz))$

$Ci(ix) = i/2\, (Ei(x) - E_1(x)) + i\,\pi/2$; $x > 0$

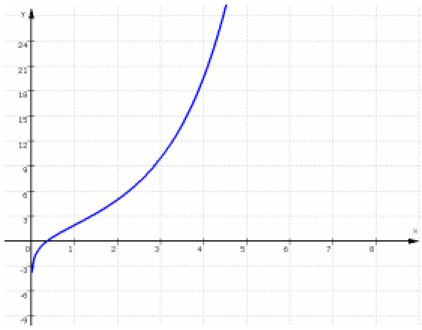
Näherungswert des Integralkosinus $y \approx Ci(x)$

Integralhyperbelkosinus Chi(x)

$Chi(x) = C + \ln x + {}_0\int^x (\cosh t - 1)/t\, dt$

$Chi(x) = C + \ln x + \Sigma_{n=1}^{\infty} z^{2n}/((2n)(2n)!)$

Exponentialintegral



$Ei(x) = {}_{-\infty}\int^x e^t / t\, dt = C + \ln|x| + x + x^2/(2\cdot 2!) + x^3/(3\cdot 3!) + \ldots$

$C = 0{,}5772 \ldots$ Eulersche Konstante

Ist $0 < x < \infty$, so spricht man vom Cauchyschen Hauptwert.

Das Exponentialintegral Ei(x) ist mit dem Integrallogarithmus Li(x) durch die Beziehung $Li(x) = {}_0\int^x dt / \ln t = Ei(\ln x)$ verbunden.

Näherungswert des Exponentialintegrals und des Integrallogarithmus

$y \approx Ei(x)$ $\quad y \approx Li(x) = Ei(\ln(x))$

Weitere Definitionen

$E_1(x) = {}_1\int^{\infty} e^{-t} / t\, dt$ $\quad E_n(x) = {}_1\int^{\infty} e^{-xt} / t^n\, dt$

$\alpha_n(x) = {}_1\int^{\infty} t^n e^{-xt}\, dt$ $\quad \beta_n(x) = {}_{-1}\int^1 t^n e^{-xt}\, dt$

$E_1(x) = -C - \ln x - \Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n/(n\, n!)$

$E_n(x) = (-x)^{n-1}/(n-1)!\, (-\ln x + \psi(n)) - \Sigma_{m=0, m\neq n-1}^{\infty} (-x)^m/((m-n+1)m!)$

$\psi(n) = -C + \Sigma_{m=1}^{n-1} 1/m$

$E_{n+1}(x) = 1/n\, (e^{-x} - x\, E_n(x))$

$dE_n(x)/dx = -E_{n-1}(x)$

Näherungsformeln

für $0 \leq x \leq 1$

$E_1(x) = -\ln x - 0{,}57721566 + 0{,}99999193\, x - 0{,}24991055\, x^2 + 0{,}05519968\, x^3 - 0{,}00976004\, x^4 + 0{,}00107857\, x^5 + R(x)$; $R(x) < 2 \cdot 10^{-7}$

für $1 \leq x$

$x\, e^x E_1(x) = (x^2 + 2{,}334733\, x + 0{,}250621) / (x^2 + 3{,}330657\, x + 1{,}681534) + R(x)$; $R(x) < 5 \cdot 10^{-5}$

für $10 \leq x$

$x\, e^x E_1(x) = (x^2 + 4{,}03640\, x + 1{,}15198) / (x^2 + 5{,}03637\, x + 4{,}19160) + R(x)$; $R(x) < 10^{-7}$

für $1 \leq x$

$x\, e^x E_1(x) = (x^4\; 8{,}5733287401\, x^3 + 18{,}0590169730\, x^2 + 8{,}6347608925\, x + 0{,}2677737343) / (x^4 + 9{,}5733223454\, x^3 + 25{,}6329561486\, x^2 + 21{,}0996530827\, x + 3{,}9584969228) + R(x)$; $R(x) < 2 \cdot 10^{-8}$

Bestimmte und unbestimmte Integrale

${}_0\int^{\infty} e^{-at}/(b+t)\, dt = e^{ab} E_1(ab)$

${}_0\int^{\infty} e^{-iat}/(b+t)\, dt = e^{iab} E_1(-iab)$; $a > 0, b > 0$

${}_0\int^{\infty} (t-ib)/(t^2+b^2)\, e^{iat}\, dt = e^{ab} E_1(ab)$; $a > 0, b > 0$

${}_0\int^{\infty} (t+ib)/(t^2+b^2)\, e^{iat}\, dt = e^{-ab} (-Ei(ab) + i\pi)$; $a > 0, b > 0$

${}_0\int^{\infty} (e^{-at} - e^{-bt})/t\, dt = \ln(b/a)$

${}_0\int^{\infty} E_1^2(t)\, dt = 2 \ln 2$

${}_0\int^{\infty} e^{-at} E_n(t)\, dt = (-1)^{n-1}/a^n\, (\ln(1+a) + \Sigma_{k=1}^{n-1} (-1)^k a^k/k)$; $a > -1$

${}_0\int^1 e^{at} \sin bt\, /t\, dt = \pi - \arctan(b/a) + E_1(-a + ib)$; $a > 0, b > 0$

${}_0\int^1 e^{-at} \sin bt\, /t\, dt = \arctan(b/a) + E_1(a + ib)$; $a > 0$, b reell

${}_0\int^1 e^{at} (1-\cos bt)\, /t\, dt = 1/2 \ln(1 + b^2/a^2) + Ei(a) + Re(E_1(-a + ib))$; $a > 0$, b reell

${}_0\int^1 e^{-at} (1-\cos bt)\, /t\, dt = 1/2 \ln(1 + b^2/a^2) - E_1(a) + Re(E_1(a + ib))$; $a > 0$, b reell

${}_0\int^x (1 - e^{-t})\, /t\, dt = E_1(x) + \ln x + \gamma$

${}_0\int^x (e^{-t} - 1)\, /t\, dt = Ei(x) - \ln x - \gamma$; $x > 0$

$\int e^{ix} / (a^2+x^2)\, dx = i/(2a)\, (e^{-a} E_1(-a-ix) - e^a E_1(a-ix))$

$\int x\, e^{ix} / (a^2+x^2)\, dx = -1/2\, (e^{-a} E_1(-a-ix) + e^a E_1(a-ix))$

$\int e^x / (a^2+x^2)\, dx = -1/a\, (e^{ia} E_1(-x+ia))$; $a > 0$

$\int x\, e^x / (a^2+x^2)\, dx = -Re(e^{ia} E_1(-x+ia))$; $a > 0$

Beziehungen zur unvollständigen Gamma-Funktion

$E_n(x) = x^{n-1}\,\Gamma(1-n,x)$

$\alpha_n(x) = x^{-n-1}\,\Gamma(n+1,x)$

$\beta_n(x) = x^{-n-1}\,(\Gamma(n+1,-x) - \Gamma(n+1,x))$

Rationale Funktionen

Bei allen Stammfunktionen wurde die Integrationskonstante C weggelassen

Bezeichnung X=ax+b

$\int X^n\,dx = 1/[a(n+1)]\,X^{n+1}$ für $n\neq -1$

$\int dx / X = 1/a * \ln|X|$

$\int x\,X^n\,dx = 1/[a^2(n+2)]\,X^{n+2} - b/[a^2(n+1)]\,X^{n+1}$ für $n\neq -1$ und $n\neq -2$

$\int x^m X^n\,dx = 1/a^{m+1} \int (X - b)^m X^n\,dx$

$\int x / X\,dx = x/a - b/a^2 * \ln|X|$

$\int x / X^2\,dx = b/(a^2X) + \ln|X| /a^2$

$\int x / X^3\,dx = 1/a^2\,(-1/X + b/(2X^2))$

$\int x / X^n\,dx = 1/a^2\,[\, b/[(n-1)X^{n-1}\,] - 1/[(n-2)X^{n-2}]\,]$

$\int x^2 / X\,dx = 1/a^3\,[X^2/2 - 2bX + b^2 * \ln|X|]$

$\int x^2 / X^2\,dx = 1/a^3\,[X - 2b\ln|X| - b^2/X]$

$\int x^2 / X^3\,dx = 1/a^3\,[\ln|X| + 2b/X - b^2/(2X^2)]$

$\int x^2 / X^n\,dx = 1/a^3\,[-1/[(n-3)X^{n-3}] + 2b/[(n-2)X^{n-2}] - b^2/[(n-1)X^{n-1}]\,]$

$\int x^3 / X\,dx = 1/a^4\,(X^3/3 - 3bX^2/2 + 3b^2X - b^3\ln|X|)$

$\int x^3 / X^2\,dx = 1/a^4\,(X^3/2 - 3bX + 3b^2X\ln|X| + b^3/X)$

$\int x^3 / X^3\,dx = 1/a^4\,(X - 3b\ln|X| -3b^2/X + b^3/(2X^2))$

$\int x^3 / X^4\,dx = 1/a^4\,(\ln X + 3b/X - 3b^2/(2X^2) + b^3/(3X^3))$

$\int x^3 / X^n\,dx = 1/a^4\,[-1/((n-4)X^{n-4}) + 3b/((n-3)X^{n-3}) - 3b^2/((n-2)X^{n-2}) + b^3/((n-1)X^{n-1})]$

$\int dx / (x\,X) = -1/b * \ln|X/x|$

$\int dx / (x\,X^2) = -1/b^2\,(\ln(X/x) - b/X) = 1/b^2\,(\ln(X/x) + ax/X)$

$\int dx / (x\,X^3) = -1/b^3\,(\ln(X/x) + 2ax/X - a^2x^2/(2X^2))$

$$\int dx / (x\,X^n) = -1/b^n\,[\ln(X/x) - \sum_{i=1}^{n-1} [\binom{n-1}{i}\,(-a)^i\,x^i /(i\,X^i)]]$$

$\int dx / (x^2\,X) = -1/(bx) + a/b^2\,\ln|X/x|$

$\int dx / (x^2\,X^2) = -a\,[1/(b^2X) + 1/(abxX) -2/b^3\,\ln|X/x|]$

$\int dx / (x^2\,X^3) = -a\,[1/(2b^2X^2) + 2/(b^3X) + 1/(ab^3X) - 3/b^4\,\ln|X/x|]$

$$\int dx / (x^2\,X^n) = -1/b^{n+1}\,[X/x - na\ln(X/x) - \sum_{i=1}^{n-1} [\binom{n}{i}\,(-a)^i\,x^{i-1} /[(i-1)X^{i-1}]]]$$

$\int dx / (x^3\,X) = -1/b^3\,[a^2\ln(X/x) - 2aX/x + X^2/(2x^2)]$

$\int dx / (x^3\,X^2) = -1/b^4\,[3a^2\ln(X/x) + a^3x/X + X^2/(2x^2) - 3aX/x]$

$\int dx / (x^3\,X^3) = -1/b^5\,[6a^2\ln(X/x) + 4a^3x/X - a^4x^2/(2X^2) + X^2/(2x^2) - 4aX/x]$

$$\int dx/(x^3\,X^n) = -1/b^{n+2}[-\sum_{i=3}^{n+1} \binom{n+1}{i}\,(-a)^i x^{i-2}/[(i-2)X^{i-2}] + a^2X^2/(2x^2) -(n+1)aX/x + n(n+1)a^2/2\,\ln(X/x)\,]$$

$$\int dx / (x^m\,X^n) = -1/b^{m+n-1} \sum_{i=0}^{m+n-2} \binom{m+n-2}{i}\,X^{m-i-1} * (-a)i / [(m-i-1)\,x^{m-i-1}]$$

Bezeichnung X=a+x und Y=b+x; a≠b

$\int x\,dx / (X\,Y^2) = b/[(a-b)\,Y] - a/(a-b)^2\,\ln(X/Y)$

$\int x^2\,dx / (X\,Y^2) = b^2/[(b-a)\,Y] + a^2/(b-a)^2\,\ln X + (b^2-2ab)/(b-a)^2\,\ln Y$

$\int x\,dx / (X^2\,Y^2) = 1/(a-b)^2\,(a/X + b/Y) + (a+b)/(a-b)^3\,\ln(X/Y)$

$\int x^2\,dx / (X^2\,Y^2) = -1/(a-b)^2\,(a^2/X + b^2/Y) + 2ab/(a-b)^3\,\ln(X/Y)$

$\int dx / [(a-x)^2\,Y^2] = -1/(a-b)^2\,(1/X + 1/Y) + 2/(a-b)^3\,\ln(X/Y)$

$\int dx / (x - a) = \ln|x - a|$

$\int dx / (x - a)^2 = -1/(x-a)$

$\int dx / (x - a)^n = 1/[(n-1)\,(x-a)^{n-1}]$

$\int x^{n-1} / (x^n + a)\,dx = \ln|x^n + a| /n$

Bezeichnung X=ax+b; Y=fx+g und Δ=bf-ag

$\int X / Y\,dx = ax/f + 1/f^2\,\ln Y$

$\int dx / (X\,Y) = 1/\Delta\,\ln(Y/X)$

$\int x\,dx / (X\,Y) = 1/\Delta\,[b/a\,\ln X - g/f\,\ln Y]$

$\int dx / (X^2\,Y) = 1/\Delta\,(1/X + f/\Delta\,\ln(Y/X))$

Bezeichnung X=ax²+bx+c und Δ=4ac-b²

$\int dx / X = 2/\sqrt{\Delta}\,\arctan[(2ax+b)/\sqrt{\Delta}]$ für $\Delta>0$ $\quad = -2/\sqrt{-\Delta}\,\mathrm{artanh}[(2ax+b)/\sqrt{-\Delta}]$ für $\Delta<0$

$\int dx / X^2 = (2ax+b)/(\Delta X) + 2a/\Delta \int dx / X$

$\int dx / X^3 = (2ax+b)/\Delta \, [\, 1/(2X^2) + 3a/(\Delta X) \,] + 6a^2/\Delta^2 \int dx / X$
$\int dx / X^n = (2ax+b)/[(n-1)\Delta\, X^{n-1}] + (2n-3)\, 2a/[(n-1)\, \Delta] \int dx / X^{n-1}$
$\int x\, dx / X = 1/(2a) \ln |X| - b/(2a) \int dx/X$
$\int x\, dx / X^2 = -(bx+2c)/(\Delta\, X) - b/\Delta \int dx/X$
$\int x\, dx / X^n = -(bx+2c)/[(n-1)\Delta\, X^{n-1}] - b(2n-3)/[(n-1)\, \Delta] \int dx/X^{n-1}$
$\int x^2\, dx / X = x/a - b/(2a^2) \ln |X| + (b^2-2ac)/(2a^2) \int dx/X$
$\int x^2\, dx / X^2 = [(b^2-2ac)\, x + bc]/(a\, \Delta\, X) + 2c/\Delta \int dx/X$
$\int x^2\, dx / X^n = -x/[(2n-3)\, aX^{n-1}] + c/[a(2n-3)] \int dx/X^n - [(n-2)\, b]/[(2n-3)\, a] \int x\, dx/X^n$
$\int x^m dx/X^n = -x/[c(2n-m-1)aX^{n-1}]+(m-1)c/[a(2n-m-1)] \int x^{m-2}dx/X^n -(n-m)b/[(2n-m-1)a] \int x^{m-1}dx/X^n$
$\int x^{2n-1}\, dx / X^n = 1/a \int x^{2n-3}\, dx/X^{n-1} - c/a \int x^{2n-3}\, dx / X^n - b/a \int x^{2n-2}\, dx/X^n$
$\int dx / (xX) = 1/(2c) \ln (x^2/X) - b/(2c) \int dx / X$
$\int dx / (xX^n) = 1/[2c(n-1)X^{n-1}] - b/(2c) \int dx / X^n + 1/c \int dx / (xX^{n-1})$
$\int dx / (x^2X) = b/(2c^2) \ln (X/x^2) - 1/(cx) + (b^2/(2c^2) - a/c) \int dx / X$
$\int dx / (x^mX^n) = -1/[(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}] - (2n+m-3)\, a/[(m-1)\, c] \int dx /(x^{m-2}X^n)-(n+m-2)\, b/[(m-1)\, c] \int dx/(x^{m-1} X^n)$; $m>1$
$\int dx / [(fx+g)X] = f/[2(cf^2 - gbf + g^2a)] * \ln [(fx+g)^2/X] + (2ga - bf)/[2(cf^2 - gbf + g^2a)] \int dx / X$

Bezeichnung $X=a^2+x^2$ und $Y=\arctan (x/a)$
$\int dx / X = 1/a\, Y$
$\int dx / (a^2 + b^2x^2) = \arctan (bx/a) /(ab)$
$\int dx / X^2 = x/(2a^2\, X) + Y/(2a^3)$
$\int dx / X^3 = x/(4a^2\, X^2) + 3x/(8a^4\, X) + 3/(8a^5)\, Y$
$\int dx / X^{n+1} = x/(2na^2\, X^n) + (2n-1)/(2na^2) \int dx / X^n$
$\int x\, dx / X = 1/2 \ln |X|$
$\int x / (a^2 + b^2x^2)\, dx = \ln (a^2+b^2x^2) /(2b^2)$
$\int x\, dx / X^2 = -1/(2X)$
$\int x\, dx / X^3 = -1/(4X^2)$
$\int x\, dx / X^{n+1} = -1/(2n\, X^n)$
$\int x^2\, dx / X = x - aY$
$\int x^2\, dx / X^2 = -x/(2X) + Y/(2a)$
$\int x^2\, dx / X^3 = -x/(4X^2) + x/(8a^2\, X) + Y/(8a^3)$
$\int x^2\, dx / X^{n+1} = -x/(2nX^n) + 1/(2n) \int dx / X^n$
$\int x^3\, dx / X = x^2/2 - a^2/2 \ln X$
$\int x^3\, dx / X^2 = a^2/(2X) - 1/2 \ln X$
$\int x^3\, dx / X^3 = -1/(2X) + a^2/(4X^2)$
$\int x^3\, dx / X^{n+1} = -1/[2(n-1)\, X^{n-1}] + a^2/(2n\, X^n)$
$\int dx / (xX) = 1/(2a^2) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (xX^2) = 1/(2a^2X) + 1/(2a^4) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (xX^3) = 1/(4a^2X^2) + 1/(2a^4X) + 1/(2a^6) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (x^2X) = -1/(a^2x) - Y/a^3$
$\int dx / (x^2X^2) = -1/(a^4x) - x/(2a^4\, X) - 3Y/(2a^5)$
$\int dx / (x^2X^3) = -1/(a^6x) - x/(4a^4\, X^2) - 7x/(8a^6\, X) - 15Y/(8a^7)$
$\int dx / (x^3X) = -1/(2a^2x^2) - 1/(2a^4) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (x^3X^2) = -1/(2a^4x^2) - 1/(2a^4\, X) - 1/a^6 \ln (x^2/X)$
$\int dx / (x^3X^3) = -1/(2a^6x^2) - 1/(a^6\, X) - 1/(4a^4\, X^2) - 3/(2a^8) \ln (x^2/X)$
$\int dx / [(b+cx)X] = 1/(a^2c^2+b^2)\, [c \ln(b+cx) - c/2 \ln X + bY/a]$

Bezeichnung $X=a^2-x^2$ und für $|x|<a$ $Y=\operatorname{artanh} (x/a)$ bzw. für $|x|>a$ $Y=\operatorname{arcoth} (x/a)$
$\int dx / X = 1/a\, Y$
$\int dx / (a^2 - b^2x^2) = \operatorname{artanh} (bx/a) /(ab)$
$\int dx / X^2 = x/(2a^2\, X) + Y/(2a^3)$
$\int dx / X^3 = x/(4a^2\, X^2) + 3x/(8a^4\, X) + 3/(8a^5)\, Y$
$\int dx / X^{n+1} = x/(2na^2\, X^n) + (2n-1)/(2na^2) \int dx / X^n$
$\int x\, dx / X = -1/2 \ln |X|$
$\int x\, dx / X^2 = 1/(2X)$
$\int x\, dx / X^3 = 1/(4X^2)$
$\int x\, dx / X^{n+1} = 1/(2n\, X^n)$
$\int x^2\, dx / X = -x + aY$
$\int x^2\, dx / X^2 = x/(2X) - Y/(2a)$
$\int x^2\, dx / X^3 = x/(4X^2) - x/(8a^2\, X) - Y/(8a^3)$
$\int x^2\, dx / X^{n+1} = x/(2nX^n) - 1/(2n) \int dx / X^n$
$\int x^3\, dx / X = -x^2/2 - a^2/2 \ln X$
$\int x^3\, dx / X^2 = a^2/(2X) - 1/2 \ln X$
$\int x^3\, dx / X^3 = -1/(2X) + a^2/(4X^2)$
$\int x^3\, dx / X^{n+1} = -1/[2(n-1)\, X^{n-1}] + a^2/(2n\, X^n)$
$\int dx / (xX) = 1/(2a^2) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (xX^2) = 1/(2a^2X) + 1/(2a^4) \ln (x^2/X)$

$\int dx / (xX^3) = 1/(4a^2X^2) + 1/(2a^4X) + 1/(2a^6) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (x^2X) = -1/(a^2x) + Y/a^3$
$\int dx / (x^2X^2) = -1/(a^4x) + x/(2a^4 X) + 3Y/(2a^5)$
$\int dx / (x^2X^3) = -1/(a^6x) + x/(4a^4 X^2) + 7x/(8a^6 X) + 15Y/(8a^7)$
$\int dx / (x^3X) = -1/(2a^2x^2) + 1/(2a^4) \ln (x^2/X)$
$\int dx / (x^3X^2) = -1/(2a^4x^2) + 1/(2a^4 X) + 1/a^6 \ln (x^2/X)$
$\int dx / (x^3X^3) = -1/(2a^6x^2) + 1/(a^6 X) + 1/(4a^4 X^2) + 3/(2a^8) \ln (x^2/X)$
$\int dx / [(b+cx)X] = 1/(a^2c^2-b^2) [c \ln(b+cx) - c/2 \ln X - bY/a]$

Bezeichnung $X=a^3+x^3$
$\int dx / X = 1/(6a^2) \ln [(a+x)^2/(a^2-ax+x^2)] + 1/(a^2\sqrt{3}) \arctan [(2x-a)/(a\sqrt{3})]$
$\int dx / X^2 = x/(3a^3X) + 2/(3a^3) \int dx / X$
$\int x\, dx / X = 1/(6a) \ln [(a^2-ax+x^2)/(a+x)^2] + 1/(a^2\sqrt{3}) \arctan [(2x-a)/(a\sqrt{3})]$
$\int x\, dx / X^2 = x^2/(3a^3X) + 1/(3a^3) \int x\, dx / X$
$\int x^2\, dx / X = 1/3 \ln |X|$
$\int x^2\, dx / X^2 = -1/(3X)$
$\int x^3\, dx / X = x - a^3 \int dx / X$
$\int x^3\, dx / X^2 = -x/(3X) + 1/3 \int dx / X$
$\int dx / (xX) = 1/(3a^3) \ln (x^3/X)$
$\int dx / (xX^2) = 1/(3a^3X) + 1/(3a^6) \ln (x^3/X)$
$\int dx / (x^2X) = -1/(a^3x) - 1/a^3 \int x\, dx / X$
$\int dx / (x^2X^2) = -1/(a^6x) - x^2/(3a^6X) - 4/(3a^6) \int x\, dx / X$
$\int dx / (x^3X) = -1/(2a^3x^2) - 1/a^3 \int dx / X$
$\int dx / (x^3X^2) = -1/(2a^6x^2) - x^2/(3a^6X) - 5/(3a^6) \int dx / X$

Bezeichnung $X=a^3-x^3$
$\int dx / X = -1/(6a^2) \ln [(a-x)^2/(a^2+ax+x^2)] + 1/(a^2\sqrt{3}) \arctan [(2x+a)/(a\sqrt{3})]$
$\int dx / X^2 = x/(3a^3X) + 2/(3a^3) \int dx / X$
$\int x\, dx / X = 1/(6a) \ln [(a^2+ax+x^2)/(a-x)^2] + 1/(a^2\sqrt{3}) \arctan [(2x+a)/(a\sqrt{3})]$
$\int x\, dx / X^2 = x^2/(3a^3X) + 1/(3a^3) \int x\, dx / X$
$\int x^2\, dx / X = -1/3 \ln |X|$
$\int x^2\, dx / X^2 = 1/(3X)$
$\int x^3\, dx / X = -x + a^3 \int dx / X$
$\int x^3\, dx / X^2 = x/(3X) - 1/3 \int dx / X$
$\int dx / (xX) = 1/(3a^3) \ln (x^3/X)$
$\int dx / (xX^2) = 1/(3a^3X) + 1/(3a^6) \ln (x^3/X)$
$\int dx / (x^2X) = -1/(a^3x) + 1/a^3 \int x\, dx / X$
$\int dx / (x^2X^2) = -1/(a^6x) + x^2/(3a^6X) + 4/(3a^6) \int x\, dx /X$
$\int dx / (x^3X) = -1/(2a^3x^2) + 1/a^3 \int dx / X$
$\int dx / (x^3X^2) = -1/(2a^6x^2) + x^2/(3a^6X) + 5/(3a^6) \int dx /X$

Bezeichnung $X=a^4+x^4$
$\int dx / X = 1/(4a^3\sqrt{2}) \ln [(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)/(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)] + 1/(2a^3\sqrt{2}) \arctan [(ax\sqrt{2})/(a^2-x^2)]$
$\int x\, dx / X = 1/(2a^2) \arctan (x^2/a^2)$
$\int x^2\, dx / X = -1/(4a\sqrt{2}) \ln [(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)/(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)] + 1/(2a\sqrt{2}) \arctan [(ax\sqrt{2})/(a^2-x^2)]$
$\int x^3\, dx / X = 1/4 \ln X$

Bezeichnung $X=a^4-x^4$
$\int dx / X = 1/(4a^3) \ln [(a+x)/(a-x)] + 1/(2a^3) \arctan (x/a)$
$\int x\, dx / X = 1/(4a^2) \ln [(a^2+x^2)/(a^2-x^2)]$
$\int x^2\, dx / X = 1/(4a) \ln [(a+x)/(a-x)] - 1/2a \arctan (x/a)$
$\int x^3\, dx / X = -1/4 \ln X$

Irrationale Funktionen - Wurzelfunktionen
Bezeichnung $X=a^2+b^2x$ und $Y=\arctan(b\sqrt{x} /a)$
$\int \sqrt{x}\, dx / X = 2\sqrt{x} /b^2 - 2a/b^3 Y$
$\int \sqrt{x^3}\, dx / X = 2/3 \sqrt{x^3} /b^2 - 2a^2 \sqrt{x}/b^4 + 2a^3/b^5 Y$
$\int \sqrt{x}\, dx / X^2 = -\sqrt{x} /(b^2X) + 1/(ab^3) Y$
$\int \sqrt{x^3}\, dx / X^2 = 2\sqrt{x^3} /(b^2X) - 3a^2 \sqrt{x}/(b^4X) - 3a/b^5 Y$
$\int dx / (X\sqrt{x}) = 2/(ab) Y$
$\int dx / (X\sqrt{x^3}) = -2/(a^2\sqrt{x}) - 2b/a^3 Y$
$\int dx / (X^2 \sqrt{x}) = \sqrt{x}/(a^2X) + Y/(a^3b)$
$\int dx / (X^2 \sqrt{x^3}) = -2/(a^2X\sqrt{x}) - 3b^2\sqrt{x}/(a^4X) - 3bY/a^5$

Bezeichnung $X=a^2-b^2x$ und $Y=\ln[(a+b\sqrt{x})/(a-b\sqrt{x})]/2$
$\int \sqrt{x}\, dx / X = -2\sqrt{x} /b^2 + 2a/b^3 Y$
$\int \sqrt{x^3}\, dx / X = -2/3 \sqrt{x^3} /b^2 - 2a^2 \sqrt{x}/b^4 + 2a^3/b^5 Y$

$\int \sqrt{x}\, dx / X^2 = \sqrt{x} /(b^2X) - 1/(ab^3)\, Y$
$\int \sqrt{x^3}\, dx / X^2 = -2\sqrt{x^3} /(b^2X) - 3a^2 \sqrt{x}/(b^4X) - 3a/b^5\, Y$
$\int dx / (X\sqrt{x}) = 2/(ab)\, Y$
$\int dx / (X\sqrt{x^3}) = -2/(a^2\sqrt{x}) + 2b/a^3\, Y$
$\int dx / (X^2 \sqrt{x}) = \sqrt{x}/(a^2X) + Y/(a^3b)$
$\int dx / (X^2 \sqrt{x^3}) = -2/(a^2X\sqrt{x}) + 3b^2\sqrt{x}/(a^4X) + 3bY/a^5$

Integrale mit $\sqrt{x}$

$\int \sqrt{x}/(a^4 + x^2)\, dx = -1/(2a\sqrt{2}) \ln [(x+a\sqrt{(2x)}+a^2)/(x-a\sqrt{2x}+a^2)] + 1/(a\sqrt{2}) \arctan [(a\sqrt{(2x)})/(a^2-x)]$
$\int dx/[\sqrt{x}\, (a^4 + x^2)] = 1/(2a^3\sqrt{2}) \ln [(x+a\sqrt{(2x)}+a^2)/(x-a\sqrt{2x}+a^2)] + 1/(a^3\sqrt{2}) \arctan [(a\sqrt{(2x)})/(a^2-x)]$
$\int \sqrt{x}/(a^4 - x^2)\, dx = 1/(2a) \ln [(a+\sqrt{x})/(a-\sqrt{x})] - 1/a \arctan (\sqrt{x}/a)$
$\int dx/[\sqrt{x}\, (a^4 - x^2)]\, dx = 1/(2a^3) \ln [(a+\sqrt{x})/(a-\sqrt{x})] + 1/a^3 \arctan (\sqrt{x}/a)$

Integrale mit $\sqrt{(ax+b)}$; Bezeichnung X=ax+b

$\int \sqrt{X}\, dx = 2/(3a) \sqrt{X^3}$
$\int x\sqrt{X}\, dx = [2(3ax-2b) \sqrt{X^3}]/(15\, a^2)$
$\int x^2\sqrt{X}\, dx = [2(15a^2x^2-12abx+8b^2) \sqrt{X^3}]/(105\, a^3)$
$\int dx/ \sqrt{X} = 2/a \sqrt{X}$
$\int x\, dx/ \sqrt{X} = [2\, (ax-2b)]/(3a^2) \sqrt{X}$
$\int x^2\, dx/ \sqrt{X} = [2\, (3a^2x^2-4abx+8b^2)]/(15a^3) \sqrt{X}$
$\int dx/ (x \sqrt{X}) = 1/\sqrt{b} \ln [(\sqrt{X} - \sqrt{b})/(\sqrt{X} + \sqrt{b})]$ für $b>0$; $= 2/\sqrt{(-b)} \arctan \sqrt{(-X/b)}$ für $b<0$
$\int \sqrt{X} / x\, dx = 2 \sqrt{X} + b \int dx/ (x \sqrt{X})$
$\int dx / (x^2 \sqrt{X}) = -\sqrt{X}/(bx) - a/(2b) \int dx/ (x \sqrt{X})$
$\int \sqrt{X} / x^2\, dx = -\sqrt{X}/x + a/2 \int dx/ (x \sqrt{X})$
$\int dx / (x^n \sqrt{X}) = -\sqrt{X}/[(n-1)\, bx^{n-1}] - [(2n-3)a]/[(2n-2)b] \int dx / (x^{n-1}\sqrt{X})$
$\int \sqrt{(X^3)}\, dx = 2/(5a) \sqrt{(X^5)}$
$\int x \sqrt{(X^3)}\, dx = 2/(35a^2)\, [2\sqrt{(X^7)} - 7b\sqrt{(X^5)}]$
$\int x^2 \sqrt{(X^3)}\, dx = 2/a^3\, [\sqrt{(X^9)} / 9 - 2b/7 \sqrt{(X^7)} + b^2/5 \sqrt{(X^5)}]$
$\int \sqrt{(X^3)} / x\, dx = 2/3 \sqrt{(X^3)} + 2b \sqrt{(X)} + b^2 \int dx /(x \sqrt{(X)})$
$\int x / \sqrt{(X^3)}\, dx = 2/a^2\, (\sqrt{(X)} + b/\sqrt{(X)})$
$\int x \sqrt{(x^2 + a^2)}\, dx = 1/3 \sqrt{(x^2 + a^2)^3}$
$\int \sqrt{(x^2 + a^2)}\, dx = 1/2\, [x \sqrt{(x^2 + a^2)} + a^2 \operatorname{arsinh} (x/a)] = 1/2\, [x \sqrt{(x^2 + a^2)} + a^2 \ln (x + \sqrt{(x^2 + a^2)})]$
$\int \sqrt{(x^2 + a^2)}/x\, dx = \sqrt{(x^2 + a^2)} - a \ln |\, [a+\sqrt{(x^2+a^2)}]/x\, |$
$\int dx / \sqrt{(a^2 + b^2x^2)} = \ln [bx + \sqrt{(a^2+b^2x^2)}] /b$
$\int x\, dx / \sqrt{(a^2 + x^2)} = \sqrt{(a^2+x^2)}$
$\int x^2\, dx / \sqrt{(a^2 + x^2)} = x/2 \sqrt{(a^2+x^2)} - a^2/2 \operatorname{arsinh} (x/a)$
$\int dx / [x \sqrt{(a^2 + x^2)}] = -1/a \operatorname{arsinh} (a/x)$
$\int dx / [x^2 \sqrt{(a^2 + x^2)}] = - \sqrt{(a^2+x^2)}/(a^2x)$
$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = 1/2\, [x \sqrt{(a^2 - x^2)} + a^2 \arcsin (x/a)]$
$\int x \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = -1/3 \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$ für $|x|<a$
$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}/x\, dx = \sqrt{(a^2 - x^2)} - a \ln |[a + \sqrt{(a^2-x^2)}]/x|$
$\int dx / \sqrt{(a^2 - b^2x^2)} = \arcsin (bx/a) /b$
$\int x^2\, dx / \sqrt{(a^2 - x^2)} = -x/2 \sqrt{(a^2-x^2)} + a^2/2 \arcsin (x/a)$
$\int \sqrt{(x^2 - a^2)}\, dx = 1/2\, [x \sqrt{(x^2 - a^2)} - a^2 \operatorname{arcosh} (x/a)] = 1/2\, [x \sqrt{(x^2 - a^2)} - a^2 \ln (x + \sqrt{(x^2 - a^2)})]$
$\int x \sqrt{(x^2 - a^2)}\, dx = 1/3 \sqrt{(x^2 - a^2)^3}$
$\int \sqrt{(x^2 - a^2)}/x\, dx = \sqrt{(x^2 - a^2)} - a \arccos (a/x)$
$\int dx/\sqrt{(x^2 - a^2)} = \operatorname{arcosh} (x/a)$
$\int x\, dx/\sqrt{(x^2 - a^2)} = \sqrt{(x^2 -a^2)}$
$\int x^2\, dx/\sqrt{(x^2 - a^2)} = x/2 \sqrt{(x^2 - a^2)} + a^2/2 \operatorname{arcosh} (x/a)$
$\int dx/\sqrt{(ax^2 +bx +c)} = 1/\sqrt{a} \ln |2 \sqrt{[a\, (ax^2+bx+c)]} + 2ax + b| =$
 für $a>0$; $4ac-b^2>0$ $\quad = 1/\sqrt{a} \operatorname{arsinh} [(2ax+b)/\sqrt{(4ac-b^2)}]$
 für $a>0$; $4ac-b^2=0$ $\quad = 1/\sqrt{a} \ln |2ax + b|$
 für $a<0$; $4ac-b^2<0$ $\quad = -1/\sqrt{(-a)} \arcsin [(2ax+b)/\sqrt{(b^2-4ac)}]$
$\int x\, dx/\sqrt{(ax^2 +bx +c)} = \sqrt{(ax^2+bx+c)}/a - b/(2a) \int dx/\sqrt{(ax^2 +bx +c)}$

Integrale mit $\sqrt{(ax+b)}$ und $\sqrt{(fx+g)}$; Bezeichnung $X = ax+b$, $Y = fx+g$, $\Delta = bf-ag$

$\int dx / \sqrt{(XY)} = 2 \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(X) / \sqrt{(-af)} \arctan \sqrt{(- fX / (aY))}$ für $af < 0$
 $= 2 \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(X) / \sqrt{(af)} \arctan \sqrt{(fX / (aY))}$ für $af > 0$
$\int x / \sqrt{(XY)}\, dx = \sqrt{(XY)} / (af) - (ag + bf)/(2af) \int dx / \sqrt{(XY)}$
$\int 1 / (\sqrt{(X)} \sqrt{(Y^3)})\, dx = -2 \sqrt{(X)} / (\Delta \sqrt{(Y)})$
$\int 1 / (\sqrt{(X)}\, Y)\, dx = 2/\sqrt{(-\Delta f)} \arctan (f \sqrt{(X)} / \sqrt{(-\Delta f)})$ für $\Delta f < 0$
 $= 1/\sqrt{(\Delta f)} \ln ((f \sqrt{(X)} - \sqrt{(\Delta f)}) / (f \sqrt{(X)} + \sqrt{(\Delta f)}))$ für $\Delta f > 0$
$\int \sqrt{(XY)}\, dx = (\Delta + 2aY)/(4af) \sqrt{(XY)} - \Delta^2/(8af) \int dx / \sqrt{(XY)}$
$\int \sqrt{(Y / X)}\, dx = \operatorname{sgn}(X)\, (1/a \sqrt{(XY)} - \Delta/(2a) \int dx / \sqrt{(XY)})$
$\int \sqrt{(X)} / Y\, dx = 2 \sqrt{(X)}/f + \Delta/f \int dx / (Y \sqrt{(X)})$
$\int Y^n / \sqrt{(X)}\, dx = 2/(a\, (2n+1))\, (Y^n \sqrt{(X)} - n\, \Delta \int Y^{n-1} / \sqrt{(X)}\, dx$
$\int Y^n \sqrt{(X)}\, dx = 1/(f\, (2n+3))\, (2\, Y^{n+1} \sqrt{(X)} + \Delta \int Y^n / \sqrt{(X)}\, dx$

Integrale mit $\sqrt{a^2-x^2}$; Bezeichnung $X = a^2-x^2$

$\int \sqrt{X}\, dx = 1/2\, [x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsin} (x/a)]$
$\int x \sqrt{X}\, dx = -1/3 \sqrt{X}^3$ für $|x|<a$
$\int x^2 \sqrt{X}\, dx = -1/4 \sqrt{X}^3 + a^2/8\, (x \sqrt{X} + a^2 \arcsin(x/a))$
$\int x^3 \sqrt{X}\, dx = 1/5 \sqrt{X}^5 + a^2/3 \sqrt{X}^3$
$\int \sqrt{X} / x\, dx = \sqrt{X} - a \ln |[a + \sqrt{X}]/x|$
$\int \sqrt{X} / x^2\, dx = -\sqrt{X}/x - \arcsin(x/a)$
$\int \sqrt{X} / x^3\, dx = -\sqrt{X}/(2x^2) + 1/(2a) \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int dx / \sqrt{X} = \arcsin (x/a)$
$\int dx / \sqrt{a^2 - b^2x^2} = \arcsin (bx/a) /b$
$\int x / \sqrt{X}\, dx = - \sqrt{X}$
$\int x^2\, dx / \sqrt{X} = -x/2 \sqrt{X} + a^2/2 \arcsin (x/a)$
$\int x^3\, dx / \sqrt{X} = \sqrt{X}^3/3 - a^2 \sqrt{X}$
$\int dx / (x \sqrt{X}) = -1/a \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int dx / (x^2 \sqrt{X}) = -1/(a^2 x) \sqrt{X}$
$\int dx / (x^3 \sqrt{X}) = -1/(2a^2 x^2) \sqrt{X} - 1/(2a^3) \ln ((a + \sqrt{X})/x)$

$\int \sqrt{X}^3\, dx = 1/4\, (x \sqrt{X}^3 + 3a^2x/2 \sqrt{X} + 4a^4/2 \arcsin(x/a))$
$\int x \sqrt{X}^3\, dx = -1/5 \sqrt{X}^5$
$\int x^2 \sqrt{X}^3\, dx = -x/6 \sqrt{X}^5 +a^2x/24 \sqrt{X}^3 + a^4x/16 \sqrt{X} + a^6/16 \arcsin(x/a)$
$\int x^3 \sqrt{X}^3\, dx = 1/6 \sqrt{X}^7 +a^2/5 \sqrt{X}^5$
$\int \sqrt{X}^3 / x\, dx = 1/3 \sqrt{X}^3 + a^2 \sqrt{X} - a^3 \ln((a + \sqrt{X})/x)$
$\int \sqrt{X}^3 / x^2\, dx = -1/x \sqrt{X}^3 - 3/2\, x \sqrt{X} - 3/2\, a^2 \arcsin(x/a)$
$\int \sqrt{X}^3 / x^3\, dx = -1/(2x^2) \sqrt{X}^3 - 3/2 \sqrt{X} + 3a/2 \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int 1 / \sqrt{X}^3\, dx = x / (a^2 \sqrt{X})$
$\int x / \sqrt{X}^3\, dx = 1 / \sqrt{X}$
$\int x^2 / \sqrt{X}^3\, dx = x / \sqrt{X} - \arcsin(x/a)$
$\int x^3 / \sqrt{X}^3\, dx = \sqrt{X} + a^2 / \sqrt{X}$
$\int 1 / (x \sqrt{X}^3)\, dx = 1 / (a^2 \sqrt{X}) + 1/a^3 \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int 1 / (x^2 \sqrt{X}^3)\, dx = 1/a^4\, (-1/x \sqrt{X} + x/\sqrt{X})$
$\int 1 / (x^3 \sqrt{X}^3)\, dx = -1/(2a^2 x^2 \sqrt{X}) + 3/(2a^4 \sqrt{X}) - 3/(2a^5) \ln ((a + \sqrt{X})/x)$

Integrale mit $\sqrt{x^2+a^2}$; Bezeichnung $X = x^2+a^2$

$\int \sqrt{X}\, dx = 1/2\, [x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsinh} (x/a)] = 1/2\, [x \sqrt{X} + a^2 \ln (x + \sqrt{X})]$
$\int x \sqrt{X}\, dx = 1/3 \sqrt{X}^3$
$\int x^2 \sqrt{X}\, dx = x/4 \sqrt{X}^3 - a^2/8\, (x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsinh}(x/a))$
$\int x^3 \sqrt{X}\, dx = 1/4 \sqrt{X}^5 - a^2/3 \sqrt{X}^3$
$\int \sqrt{X} / x\, dx = \sqrt{X} - a \ln |\, [a + \sqrt{X}]/x\, |$
$\int \sqrt{X} / x^2\, dx = -1/x \sqrt{X} + \operatorname{arsinh}(x/a)$
$\int \sqrt{X} / x^3\, dx = -1/(2x^2) \sqrt{X} - 1/(2a) \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int 1 / \sqrt{X}\, dx = \operatorname{arsinh}(x/a) = \ln (x + \sqrt{X})$
$\int dx / \sqrt{a^2 + b^2x^2} = \ln [bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}] /b$
$\int x\, dx / \sqrt{X} = \sqrt{X}$
$\int x^2\, dx / \sqrt{X} = x/2 \sqrt{X} - a^2/2 \operatorname{arsinh} (x/a)$
$\int x^3\, dx / \sqrt{X} = 1/2 \sqrt{X}^3 - a^2 \sqrt{X}$
$\int dx / (x \sqrt{X}) = -1/a \operatorname{arsinh} (a/x) = -1/a \ln ((a + \sqrt{X})/X)$
$\int dx / (x^2 \sqrt{X}) = - \sqrt{X}/(a^2x)$
$\int dx / (x^3 \sqrt{X}) = -1/(2a^2 x^2) \sqrt{X} - 1/(2a^3) \ln ((a + \sqrt{X})/X)$
$\int \sqrt{X}^3\, dx = 1/4\, (x \sqrt{X}^3 + 3/2\, a^2 x \sqrt{X} + 3/2\, a^4 \operatorname{arsinh} (x/a))$
$\qquad = 1/4\, (x \sqrt{X}^3 + 3/2\, a^2 x \sqrt{X} + 3/2\, a^4 \ln (x + \sqrt{X}))$
$\int x \sqrt{X}^3\, dx = 1/5 \sqrt{X}^5$
$\int x^2 \sqrt{X}^3\, dx = x/6 \sqrt{X}^5 - a^2x/24 \sqrt{X}^3 - a^4x/16 \sqrt{X} - a^6/16 \operatorname{arsinh} (x/a)$
$\qquad = x/6 \sqrt{X}^5 - a^2x/24 \sqrt{X}^3 - a^4x/16 \sqrt{X} - a^6/16 \ln (x + \sqrt{X})$
$\int x^3 \sqrt{X}^3\, dx = 1/7 \sqrt{X}^7 - a^2/5 \sqrt{X}^5$
$\int \sqrt{X}^3 / x\, dx = 1/3 \sqrt{X}^3 + a^2 \sqrt{X} - a^3 \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int \sqrt{X}^3 / x^2\, dx = -1/x \sqrt{X}^3 + 3/2\, x \sqrt{X} - 3/2\, a^2 \operatorname{arsinh} (x/a)$
$\qquad = -1/x \sqrt{X}^3 + 3/2\, x \sqrt{X} - 3/2\, a^2 \ln (x + \sqrt{X})$
$\int \sqrt{X}^3 / x^3\, dx = -1/(2x^2) \sqrt{X}^3 + 3/2 \sqrt{X} - 3/2\, a \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int 1 / \sqrt{X}^3\, dx = x / (a^2 \sqrt{X})$
$\int x / \sqrt{X}^3\, dx = -1 / \sqrt{X}$
$\int x^2 / \sqrt{X}^3\, dx = -x / \sqrt{X} + \operatorname{arsinh} (x/a) = -x / \sqrt{X} + \ln (x + \sqrt{X})$
$\int x^3 / \sqrt{X}^3\, dx = \sqrt{X} + a^2 / \sqrt{X}$
$\int 1 / (x \sqrt{X}^3)\, dx = 1 / (a^2 \sqrt{X}) - 1/a^3 \ln ((a + \sqrt{X})/x)$
$\int 1 / (x^2 \sqrt{X}^3)\, dx = -1/a^4\, (\sqrt{X} / x + x /\sqrt{X})$
$\int 1 / (x^3 \sqrt{X}^3)\, dx = -1 / (2a^2 x^2 \sqrt{X}) - 3 / (2a^4 \sqrt{X}) + 3/(2a^5) \ln ((a + \sqrt{X})/x)$

Integrale mit $\sqrt{x^2-a^2}$; Bezeichnung $X = x^2-a^2$

$\int \sqrt{X}\, dx = 1/2\, (x \sqrt{X} - a^2 \operatorname{arcosh}(x/a)) = 1/2\, (x \sqrt{X} - a^2 \ln(x + \sqrt{X}))$

$\int x \sqrt{X}\, dx = 1/3\, \sqrt{X}^3$

$\int x^2 \sqrt{X}\, dx = x/4\, \sqrt{X}^3 + a^2/8\, (x \sqrt{X} - a^2 \operatorname{arcosh}(x/a))$

$\int x^3 \sqrt{X}\, dx = 1/5\, \sqrt{X}^5 + a^2/3\, \sqrt{X}^3$

$\int \sqrt{X} / x\, dx = \sqrt{X} - a \arccos(a/x)$

$\int \sqrt{X} / x^2\, dx = -1/x\, \sqrt{X} + \arccos(a/x) = -1/x\, \sqrt{X} + \ln(x + \sqrt{X})$

$\int \sqrt{X} / x^3\, dx = -1/(2x^2)\, \sqrt{X} + 1/(2a) \arccos(a/x)$

$\int dx / \sqrt{X} = \operatorname{arcosh}(x/a) = \ln(x + \sqrt{X})$

$\int x / \sqrt{X}\, dx = \sqrt{X}$

$\int x^2 / \sqrt{X}\, dx = x/2\, \sqrt{X} + a^2/2\, \operatorname{arcosh}(x/a)$

$\int x^3 / \sqrt{X}\, dx = 1/3\, \sqrt{X}^3 + a^2 \sqrt{X}$

$\int 1 / (x \sqrt{X})\, dx = 1/a \arccos(a/x)$

$\int 1 / (x^2 \sqrt{X})\, dx = 1/(a^2 x)\, \sqrt{X}$

$\int 1 / (x^3 \sqrt{X})\, dx = 1/(2a^2 x^2)\, \sqrt{X} + 1/(2a^3) \arccos(a/x)$

$\int \sqrt{X}^3\, dx = 1/4\, (x \sqrt{X}^3 - 3/2\, a^2x \sqrt{X} + 3/2\, a^4 \operatorname{arcosh}(x/a))$

$\int x \sqrt{X}^3\, dx = 1/5\, \sqrt{X}^5$

$\int x^2 \sqrt{X}^3\, dx = x/6\, \sqrt{X}^5 + a^2x/24\, \sqrt{X}^3 - a^4x/16\, \sqrt{X} + a^6/16\, \operatorname{arcosh}(x/a)$

$\int x^3 \sqrt{X}^3\, dx = 1/7\, \sqrt{X}^7 + a^2/5\, \sqrt{X}^5$

$\int \sqrt{X}^3 / x\, dx = 1/3\, \sqrt{X}^3 - a^2 \sqrt{X} + a^3 \arccos(a/x)$

$\int \sqrt{X}^3 / x^2\, dx = -1/2\, \sqrt{X}^3 - 3/2\, x \sqrt{X} - 3/2\, a^2 \operatorname{arcosh}(x/a)$

$\int \sqrt{X}^3 / x^3\, dx = -1/(2x^2)\, \sqrt{X}^3 + 3/2\, \sqrt{X} - 3/2\, a \arccos(a/x)$

$\int 1 / \sqrt{X}^3\, dx = -x/(a^2 \sqrt{X})$

$\int x / \sqrt{X}^3\, dx = -1/\sqrt{X}$

$\int x^2 / \sqrt{X}^3\, dx = -x/\sqrt{X} + \operatorname{arcosh}(x/a) = -x/\sqrt{X} + \ln(x + \sqrt{X})$

$\int x^3 / \sqrt{X}^3\, dx = \sqrt{X} - a^2/\sqrt{X}$

$\int 1 / (x \sqrt{X}^3)\, dx = -1/(a^2 \sqrt{X}) - 1/a^2 \arccos(a/x)$

$\int 1 / (x^2 \sqrt{X}^3)\, dx = -1/a^4\, (\sqrt{X} / x + x / \sqrt{X})$

$\int 1 / (x^3 \sqrt{X}^3)\, dx = 1/(2a^2 x^2 \sqrt{X}) - 3/(2a^4 \sqrt{X}) - 3/(2a^5) \arccos(a/x)$

Integrale mit $\sqrt{ax^2+bx+c}$; Bezeichnung $X = ax^2+bx+c$, $\Delta = 4ac-b^2$, $k = 4a/\Delta$

$\int dx / \sqrt{X} = 1/\sqrt{a} \ln |2 \sqrt{aX} + 2ax + b| =$

für $a>0$; $4ac-b^2>0$ $\quad = 1/\sqrt{a} \operatorname{arsinh}[(2ax+b)/\sqrt{\Delta}]$

für $a>0$; $4ac-b^2=0$ $\quad = 1/\sqrt{a} \ln |2ax + b|$

für $a<0$; $4ac-b^2<0$ $\quad = -1/\sqrt{-a} \arcsin[(2ax+b)/\sqrt{-\Delta}]$

$\int dx / (X \sqrt{X}) = (4ax + 2b) / (\Delta \sqrt{X})$

$\int dx / (X^2 \sqrt{X}) = (4ax + 2b) / (3\Delta \sqrt{X})\, (1/X + 2k)$

$\int dx / X^{(2n+1)/2} = (4ax + 2b) / (2\, (n-1)\, \Delta X^{(2n-1)/2} + 2k\, (n-1) / (2n-1) \int dx / X^{(2n-1)/2}$

$\int \sqrt{X}\, dx = (2ax + b)/(4a)\, \sqrt{X} + 1/(2k) \int dx / \sqrt{X}$

$\int X \sqrt{X}\, dx = (2ax + b)/(8a)\, \sqrt{X}\, (X + 3/(2k)) + 3/(8k^2) \int dx / \sqrt{X}$

$\int X^2 \sqrt{X}\, dx = (2ax + b)/(12a)\, \sqrt{X}\, (X^2 + 5X/(4k) + 15/(8k^2)) + 5/(16k^3) \int dx / \sqrt{X}$

$\int X^{(2n+1)/2}\, dx = (2ax + b)/(4an + 4a)\, X^{(2n+1)/2} + (2n+1)/(2kn + 2k) \int X^{(2n-1)/2}\, dx$

$\int x / \sqrt{X}\, dx = \sqrt{X}/a - b/(2a) \int dx / \sqrt{X}$

$\int x / (X \sqrt{X})\, dx = -2\, (bx + 2c) / (\Delta \sqrt{X})$

$\int x / X^{(2n+1)/2}\, dx = -1 / ((2n-1)\, a\, X^{(2n-1)/2}) - b/(2a) \int 1 / X^{(2n+1)/2}\, dx$

$\int x^2 / \sqrt{X}\, dx = (x/(2a) - 3b/(4a^2))\, \sqrt{X} + (3b^2 - 4ac)/(8a^2) \int dx / \sqrt{X}$

$\int x^2 / (X \sqrt{X})\, dx = ((2b^2 - 4ac)\, x + 2bc)/(a\, \Delta \sqrt{X}) + 1/a \int dx / \sqrt{X}$

$\int x \sqrt{X}\, dx = X/(3a)\, \sqrt{X} - b/(8a^2)\, (2ax + b)\, \sqrt{X} - b/(4ak) \int dx / \sqrt{X}$

$\int x X \sqrt{X}\, dx = X^2/(5a)\, \sqrt{X} - b/(2a) \int X\, dx / \sqrt{X}$

$\int x X^{(2n+1)/2}\, dx = X^{(2n+3)/2} / ((2n+3)\, a) - b/(2a) \int X^{(2n+1)/2}\, dx$

$\int x^2 \sqrt{X}\, dx = (x - 5b/(6a))\, X \sqrt{X} /(4a) - (5b^2 - 4ac)/(16a^2) \int \sqrt{X}\, dx$

$\int 1/ (x \sqrt{X})\, dx = 1/\sqrt{c} \ln((-2 \sqrt{cX} + 2c + bx)/(2x))$ für $c > 0$

$= -1/\sqrt{c} \operatorname{arsinh}((bx + 2c)/(x + \sqrt{\Delta}))$ für $c > 0$, $\Delta > 0$

$= -1/\sqrt{c} \ln((bx + 2c)/x)$ für $c > 0$, $\Delta = 0$

$= 1/\sqrt{-c} \arcsin((bx + 2c)/(x \sqrt{-\Delta}))$ für $c > 0$, $\Delta < 0$

$\int 1/ (x^2 \sqrt{X})\, dx = -1/(cx)\, \sqrt{X} - b/(2c) \int 1 / (x \sqrt{X})\, dx$

$\int \sqrt{X} / x\, dx = \sqrt{X} + b/2 \int dx / \sqrt{X} + c \int dx / (x \sqrt{X})$

$\int \sqrt{X} / x^2\, dx = -\sqrt{X}/x + a \int dx / \sqrt{X} + b/2 \int dx / (x \sqrt{X})$

$\int dx / (x \sqrt{ax^2 + bx}) = -2/(bx)\, \sqrt{ax^2 + bx}$

$\int dx / \sqrt{2ax - x^2} = \arcsin((x-a)/a)$

$\int x\, dx / \sqrt{2ax - x^2} = - \sqrt{2ax - x^2} + a \arcsin((x-a)/a)$

$\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx = (x-a)/2 \sqrt{2ax - x^2} + a^2/2 \arcsin((x-a)/a)$
$\int dx / ((ax^2 + b) \sqrt{fx^2 + g}) = 1/(\sqrt{b} \sqrt{ag-bf}) \arctan (x \sqrt{ag-bf} / (\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g}))$, für $ag - bf > 0$
$= 1/(2\sqrt{b} \sqrt{bf-ag}) \ln ((\sqrt{b} \sqrt{fx^2+g} + x \sqrt{bf-ag}) / (\sqrt{b} \sqrt{fx^2+g} - x \sqrt{bf-ag}))$ für $ag - bf < 0$
$\int \sqrt[n]{ax + b}\, dx = (n (ax + b))/((n + 1) a) \sqrt[n]{ax + b}$
$\int 1 / \sqrt[n]{ax + b}\, dx = (n (ax + b))/((n - 1) a) 1/\sqrt[n]{ax + b}$
$\int 1 / (x \sqrt{x^n + a^2})\, dx = -2/(na) \ln ((a + \sqrt{x^n + a^2}) / \sqrt{x^n})$
$\int 1 / (x \sqrt{x^n - a^2})\, dx = 2/(na) \arccos (a / \sqrt{x^n})$
$\int \sqrt{x} / \sqrt{a^3 - x^3}\, dx = 2/3 \arcsin \sqrt{(x/a)^3}$

Trigonometrische Funktionen

Integrale, die die Sinusfunktion enthalten (für die darzustellenden Funktionen wird a = 1 gesetzt)
$\int \sin (ax)\, dx = -1/a \cos (ax)$
$\int \sin^2 x\, dx = 1/2 (x - \sin x \cdot \cos x) = (2x - \sin 2x)/4$
$\int \sin^2 ax\, dx = x/2 - 1/(4a) \sin 2ax$
$\int \sin^3 ax\, dx = -1/a \cos ax + 1/(3a) \cos^3 ax$
$\int \sin^4 ax\, dx = 3/8\, x - 1/(4a) \sin 2ax + 1/(32a) \sin 4ax$
$\int \sin^n ax\, dx = - (\sin^{n-1} ax \cos ax)/(na) + (n-1)/n \int \sin^{n-2} ax\, dx$
$\int x \sin ax\, dx = \sin ax / a^2 - (x \cos ax)/a$
$\int x^2 \sin ax\, dx = 2x/a^2 \sin ax - (x^2/a - 2/a^3) \cos ax$
$\int x^3 \sin ax\, dx = (3x^2/a^3 - 6/a^4) \sin ax - (x^3/a - 6x/a^3) \cos ax$
$\int x^n \sin ax\, dx = -x^{n-1}/a \cos ax + n/a \int x^{n-1} \cos ax\, dx$
$\int \sin ax / x\, dx = ax - (ax)^3/(3\cdot3!) + (ax)^5/(5\cdot5!) - (ax)^7/(7\cdot7!) +- \ldots = a\, Si(x)$
$\int \sin ax / x^2\, dx = - \sin ax / x + a \int \cos ax / x\, dx$
$\int \sin ax / x^n\, dx = -1/(n-1) \sin ax / x^{n-1} + a/(n-1) \int \cos ax / x^{n-1}\, dx$
$\int dx / \sin x = \ln |\tan x/2|$
$\int dx / \sin ax = \int \operatorname{cosec} ax\, dx = 1/a \ln |\tan ax/2| = 1/a \ln (\operatorname{cosec} ax - \cot ax)$
$\int dx / \sin^2 ax = -1/a \cot ax$
$\int dx / \sin^3 x = - \cos x/(2 \sin^2 x) + 1/2 \ln |\tan x/2|$
$\int dx / \sin^3 ax = - \cos ax / (2a \sin^2 ax) + 1/(2a) \ln \tan (ax/2)$
$\int dx / \sin^n ax = - 1/(a (n-1)) \cos ax / \sin^{n-1} ax + (n-2)/(n-1) \int dx / \sin^{n-2} ax$
$\int x\, dx / \sin ax = 1/a^2 (ax + (ax)^3/(3\cdot3!) + 7(ax)^5/(3\cdot5\cdot5!) + 31(ax)^7/(3\cdot7\cdot7!) + 127(ax)^9/(3\cdot5\cdot9!) + \ldots +$
$+ 2 (2^{2n-1} - 1)/(2n + 1)!\, B_n (ax)^{2n-1} + \ldots$
$\int x / \sin^2 ax\, dx = -x/a \cot ax + 1/a^2 \ln \sin ax$
$\int x / \sin^n ax\, dx = -x \cos ax/ ((n-1) a \sin^{n-1} ax) - 1/((n-1)(n-2) a^2 \sin^{n-2} ax) + (n-2)/(n-1) \int x / \sin^{n-2} ax\, dx$
$\int dx / (1 + \sin x) = - \tan (\pi/4 - x/2)$
$\int dx / (1 + \sin ax) = -1/a \tan (\pi/4 - ax/2)$
$\int dx / (1 - \sin x) = \tan (\pi/4 + x/2)$
$\int dx / (1 - \sin ax) = 1/a \tan (\pi/4 + ax/2)$

Integrale, die die Sinusfunktion enthalten

$\int x\, dx / (1 + \sin ax) = -x/a \tan (\pi/4 - ax/2) + 2/a^2 \ln \cos (\pi/4 - ax/2)$
$\int x\, dx / (1 - \sin ax) = x/a \cot (\pi/4 - ax/2) + 2/a^2 \ln \sin (\pi/4 - ax/2)$
$\int \sin ax / (1 + \sin ax)\, dx = x + 1/a \tan (\pi/4 - ax/2)$
$\int \sin ax / (1 - \sin ax)\, dx = -x + 1/a \tan (\pi/4 + ax/2)$
$\int 1 / (\sin ax (1 + \sin ax))\, dx = 1/a \tan (\pi/4 - ax/2) + 1/a \ln \tan (ax/2)$
$\int 1 / (\sin ax (1 - \sin ax))\, dx = 1/a \tan (\pi/4 + ax/2) + 1/a \ln \tan (ax/2)$

$\int dx / (1 + \sin ax)^2 = -1/(2a) \tan (\pi/4 - ax/2) - 1/(6a) \tan^3 (\pi/4 - ax/2)$
$\int dx / (1 - \sin ax)^2 = 1/(2a) \cot (\pi/4 - ax/2) + 1/(6a) \cot^3 (\pi/4 - ax/2)$
$\int \sin ax / (1 + \sin ax)^2\, dx = -1/(2a) \tan (\pi/4 - ax/2) + 1/(6a) \tan^3 (\pi/4 - ax/2)$
$\int \sin ax / (1 - \sin ax)^2\, dx = -1/(2a) \cot (\pi/4 - ax/2) + 1/(6a) \cot^3 (\pi/4 - ax/2)$
$\int 1 / (1 + \sin^2 ax)\, dx = 1/(2 \sqrt{2}) \arcsin ((3 \sin^2 ax - 1)/(\sin^2 ax + 1))$
$\int 1 / (1 - \sin^2 ax)\, dx = \int 1 / \cos^2 ax\, dx = 1/a \tan ax$

$\int \sin ax \sin bx\, dx = (\sin (x(a-b))/ (a-b) - \sin(x(a+b)) / (a+b)) / 2$
$\int 1 / (b + c \sin ax)\, dx = 2/(a \sqrt{b^2 - c^2}) \arctan ((b \tan (ax/2) + c) / \sqrt{b^2-c^2})$ für $b^2 > c^2$
$= 1/(a \sqrt{c^2 - b^2}) \ln ((b \tan (ax/2) + c - \sqrt{c^2-b^2})/(b \tan (ax/2) + c + \sqrt{c^2-b^2}))$ für $b^2 < c^2$
$\int \sin ax / (b + c \sin ax)\, dx = x/c - b/c \int 1/(b + c \sin ax)\, dx$
$\int 1 / (\sin ax (b + c \sin ax))\, dx = 1/(ab) \ln \tan (ax/2) - c/b \int dx / (b + c \sin ax)$
$\int 1 / (b + c \sin ax)^2\, dx = c \cos ax / (a(b^2 -c^2) (b + c \sin ax)) + b/(b^2-c^2) \int dx / (b + c \sin ax)$
$\int \sin ax / (b + c \sin ax)^2\, dx = b \cos ax / (a(c^2 -b^2) (b + c \sin ax)) + c/(c^2-b^2) \int dx / (b + c \sin ax)$
$\int 1 / (b^2 + c^2 \sin^2 ax)\, dx = 1/(ab \sqrt{b^2 + c^2}) \arctan (\sqrt{b^2 + c^2} \tan ax) / b)$
$\int 1 / (b^2 - c^2 \sin^2 ax)\, dx = 1/(ab \sqrt{b^2 - c^2}) \arctan (\sqrt{b^2 - c^2} \tan ax) / b)$
$\int dx / (a^2 \pm b^2 \sin^2 x) = 1/(a \sqrt{a^2\pm b^2}) \arctan (\sqrt{a^2\pm b^2} \tan x/a)$

Integrale, die die Kosinusfunktion enthalten

$\int \cos ax\, dx = 1/a \sin ax$

$\int \cos^2 x\, dx = 1/2\, (x + \sin x \cdot \cos x) = (2x + \sin 2x)/4$

$\int \cos^2 ax\, dx = 1/2\, x + 1/(4a) \sin ax$

$\int \cos^3 ax\, dx = 1/a \sin ax - 1/(3a) \sin^3 ax$

$\int \cos^4 ax\, dx = 3/8\, x + 1/(4a) \sin 2ax + 1/(32a) \sin 4ax$

$\int \cos^n ax\, dx = (\cos^{n-1} ax \sin ax) / (na) + (n-1)/n \int \cos^{n-2} ax\, dx$

$\int x \cos ax\, dx = 1/a^2 \cos ax + x/a \sin ax$

$\int x^2 \cos ax\, dx = 2x/a^2 \cos ax + (x^2/a - 2/a^3) \sin ax$

$\int x^3 \cos ax\, dx = (3x^2/a^2 - 6/a^4) \cos ax + (x^3/a - 6x/a^3) \sin ax$

$\int x^n \cos ax\, dx = x^n/a \sin ax - n/a \int x^{n-1} \sin ax\, dx$

$\int \cos ax / x\, dx = \ln ax - (ax)^2/(2 \cdot 2!) + (ax)^4/(4 \cdot 4!) - (ax)^6/(6 \cdot 6!) + \ldots = \mathrm{Ci}(ax)$

$\int \cos ax / x^2\, dx = -1/x \cos ax - a \int \sin ax / x\, dx$

$\int \cos ax / x^n\, dx = -\cos ax / ((n-1)\, x^{n-1}) - a/(n-1) \int \sin ax / x^{n-1}\, dx$

$\int dx / \cos x = \ln |\tan (\pi/4 + x/2)|$

$\int 1 / \cos ax\, dx = \int \sec ax\, dx = 1/a \ln \tan (ax/2 + \pi/4) = 1/a \ln (\sec ax + \tan ax)$

$\int 1 / \cos^2 ax\, dx = 1/a \tan ax$

$\int dx / \cos^3 x = \sin x/(2 \cos^2 x) + 1/2 \ln |\tan (\pi/4 + x/2)|$

$\int 1 / \cos^3 ax\, dx = \sin ax / (2a \cos^2 ax) + 1/(2a) \ln \tan (\pi/4 + ax/2)$

$\int 1 / \cos^n ax\, dx = 1/(a\,(n-1)) \sin ax / \cos^{n-1} ax + (n-2)/(n-1) \int 1 / \cos^{n-2} ax\, dx$

$\int x / \cos ax\, dx = 1/a^2 ((ax)^2/2 + (ax)^4/(4 \cdot 2!) + 5(ax)^6/(6 \cdot 4!) + 61(ax)^8/(8 \cdot 6!) + 1385(ax)^{10}/(10 \cdot 8!) + \ldots$
$+ E_n\, (ax)^{n+2} / ((2n+2)\, (2n)!) + \ldots$; E_n … Eulersche Zahl

$\int x / \cos^2 ax\, dx = x/a \tan ax + 1/a^2 \ln \cos ax$

$\int x / \cos^n ax\, dx = x \sin ax /((n-1)\, a \cos^{n-1} ax) - 1/((n-1)(n-2)\, a^2 \cos^{n-2} ax) + (n-2)/(n-1) \int x / \cos^{n-2} ax\, dx$

$\int dx / (1 + \cos x) = \tan x/2$

$\int dx / (1 + \cos ax) = 1/a \tan ax/2$

$\int dx / (1 - \cos x) = - \cot x/2$

$\int dx / (1 - \cos ax) = -1/a \cot ax/2$

$\int x / (1 + \cos ax)\, dx = x/a \tan ax/2 + 2/a^2 \ln \cos ax/2$

$\int x / (1 - \cos ax)\, dx = -x/a \cot ax/2 + 2/a^2 \ln \sin ax/2$

$\int \cos ax / (1 + \cos ax)\, dx = x - 1/a \tan ax/2$

$\int \cos ax / (1 - \cos ax)\, dx = -x - 1/a \cot ax/2$

$\int 1 / (\cos ax\, (1 + \cos ax))\, dx = 1/a \ln \tan (\pi/4 + ax/2) - 1/a \tan ax/2$

$\int 1 / (\cos ax\, (1 - \cos ax))\, dx = 1/a \ln \tan (\pi/4 + ax/2) - 1/a \cot ax/2$

$\int 1 / (1 + \cos ax)^2\, dx = 1/(2a) \tan ax/2 + 1/(6a) \tan^3 ax/2$

$\int 1 / (1 - \cos ax)^2\, dx = -1/(2a) \cot ax/2 - 1/(6a) \cot^3 ax/2$

$\int \cos ax / (1 + \cos ax)^2\, dx = 1/(2a) \tan ax/2 - 1/(6a) \tan^3 ax/2$

$\int \cos ax / (1 - \cos ax)^2\, dx = 1/(2a) \cot ax/2 - 1/(6a) \cot^3 ax/2$

$\int 1 / (1 + \cos^2 ax)\, dx = 1/(2 \sqrt{2}\, a) \arcsin ((1 - 3 \cos^2 ax) / (1 + \cos^2 ax))$

$\int 1 / (1 - \cos^2 ax)\, dx = -1/a \cot ax = \int 1 / \sin^2 ax\, dx$

$\int \cos ax \cos bx\, dx = \sin(a-b) / (2a-2b)\, x + \sin(a+b) / (2a+2b)\, x$

$\int 1 / (b + c \cos ax)\, dx = 2 / (a \sqrt{(b^2-c^2)}) \arctan ((b-c) \tan ax/2 / \sqrt{(b^2-c^2)})$ für $b^2 > c^2$
$= 1 / (a \sqrt{(c^2-b^2)}) \ln (((c-b) \tan ax/2 + \sqrt{(c^2-b^2)}) / ((c-b) \tan ax/2 - \sqrt{(c^2-b^2)}))$ für $b^2 < c^2$

$\int \cos ax / (b + c \cos ax)\, dx = x/c - b/c \int 1 / (b + c \cos ax)\, dx$

$\int 1 / (\cos ax\, (b + c \cos ax))\, dx = 1/(ab) \ln \tan (ax/2 + \pi/4) - c/b \int 1 / (b + c \cos ax)\, dx$

$\int 1 / (b + c \cos ax)^2\, dx = c \sin ax / (a\, (c^2-b^2)\, (b + c \cos ax)) - b/(c^2-b^2) \int 1 / (b + c \cos ax)\, dx$

$\int \cos ax / (b + c \cos ax)^2\, dx = b \sin ax / (a\, (b^2-c^2)\, (b + c \cos ax)) - c/(b^2-c^2) \int 1 / (b + c \cos ax)\, dx$

$\int dx / (a^2 \pm b^2 \cos^2 x) = 1/(a \sqrt{(a^2 \pm b^2)}(\arctan (a \tan x/\sqrt{(a^2 \pm b^2)})$

$\int dx / (b^2 + c^2 \cos^2 ax) = 1 /(ab \sqrt{(b^2+c^2)}) \arctan (b \tan ax / \sqrt{(b^2+c^2)})$ für $b > 0$

$\int dx / (b^2 - c^2 \cos^2 ax) = 1 /(ab \sqrt{(b^2-c^2)}) \arctan (b \tan ax / \sqrt{(b^2-c^2)})$ für $b^2 > c^2$, $b > 0$
$= 1 /(ab \sqrt{(c^2-b^2)}) \ln ((b \tan ax - \sqrt{(c^2-b^2)}) / (b \tan ax + \sqrt{(c^2-b^2)}))$ für $b^2 < c^2$, $b > 0$

Integrale, die die Sinus- und Kosinusfunktion enthalten

$\int \sin ax \cos ax\, dx = 1/(2a) \sin^2 ax = - (\cos (x(a+b))/(a+b) + \cos (x(a-b))/(a-b)) / 2$

$\int \sin^2 ax \cos^2 ax\, dx = x/8 - 1/(32a) \sin 4ax$

$\int \sin^n ax \cos ax\, dx = 1/(a\, (n+1)) \sin^{n+1} ax$

$\int \sin ax \cos^n ax\, dx = -1/(a\, (n+1)) \cos^{n+1} ax$

$\int \sin a^n x \cos^m ax\, dx = - \sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax /(a\, (n+m)) + (n-1)/(n+m) \int \sin a^{n-2} x \cos^m ax\, dx$
$= \sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax /(a\, (n+m)) + (m-1)/(n+m) \int \sin a^n x \cos^{m-2} ax\, dx$

$\int 1 / (\sin ax \cos ax)\, dx = 1/a \ln \tan ax$

$\int 1 / (\sin^2 ax \cos ax)\, dx = 1/a (\ln \tan (\pi/4 + ax/2) - 1 / \sin ax)$

$\int 1 / (\sin ax \cos^2 ax)\, dx = 1/a (\ln \tan ax/2 + 1 / \cos ax)$

$\int 1 / (\sin^3 ax \cos ax)\, dx = 1/a (\ln \tan ax - 1 / (2 \sin^2 ax))$

$\int 1 / (\sin ax \cos^3 ax)\, dx = 1/a (\ln \tan ax + 1 / (2 \cos^2 ax))$

$\int 1 / (\sin^2 ax \cos^2 ax)\, dx = -2/a \cot 2ax$

$\int 1 / (\sin^2 ax \cos^3 ax)\, dx = 1/a (\sin ax / (2 \cos^2 ax) - 1/\sin ax + 3/2 \ln \tan (\pi/4 + ax/2))$

$\int 1 / (\sin^3 ax \cos^2 ax)\, dx = 1/a\, (-\cos ax / (2 \sin^2 ax) + 1/\cos ax + 3/2 \ln \tan ax/2)$
$\int 1 / (\sin ax \cos^n ax)\, dx = 1/(a\, (n-1) \cos^{n-1} ax) + \int 1 / (\sin ax \cos^{n-2} ax)\, dx$
$\int 1 / (\sin^n ax \cos ax)\, dx = -1/(a\, (n-1) \sin^{n-1} ax) + \int 1 / (\sin^{n-2} ax \cos ax)\, dx$
$\int 1 / (\sin^n ax \cos^m ax)\, dx = -1/(a\, (n-1) \sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax) + (n+m-2)/(n-1) \int 1 / (\sin^{n-2} ax \cos^m ax)\, dx$
$= 1/(a\, (m-1) \sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax) + (n+m-2)/(m-1) \int 1 / (\sin^n ax \cos^{m-2} ax)\, dx$
$\int \sin ax / \cos^2 ax\, dx = 1/(a \cos ax) = 1/a \sec ax$
$\int \sin ax / \cos^3 ax\, dx = 1/(2a \cos^2 ax) = 1/(2a) \tan^2 ax$
$\int \sin ax / \cos^n ax\, dx = 1/(a\, (n-1) \cos^{n-1} ax)$
$\int \sin^2 ax / \cos ax\, dx = -1/a \sin ax + 1/a \ln \tan (\pi/4 + ax/2)$
$\int \sin^2 ax / \cos^3 ax\, dx = 1/a\, (\sin ax / (2 \cos^2 ax) - 1/2 \ln \tan (\pi/4 + ax/2))$
$\int \sin^2 ax / \cos^n ax\, dx = \sin ax / (a\, (n-1) \cos^{n-1} ax) - 1/(n-1) \int 1 / \cos^{n-2} ax\, dx$
$\int \sin^3 ax / \cos ax\, dx = -1/a\, (1/2 \sin^2 ax + \ln \cos ax)$
$\int \sin^3 ax / \cos^2 ax\, dx = 1/a\, (\cos ax + 1 / \cos ax)$
$\int \sin^3 ax / \cos^n ax\, dx = 1/a\, (1/((n-1) \cos a^{n-1}x) - 1/((n-3) \cos^{n-3} ax))$

$\int \sin^n ax / \cos ax\, dx = - \sin^{n-1} ax / (a\, (n-1)) + \int \sin^{n-2} ax / \cos ax\, dx$
$\int \sin^n ax / \cos^m ax\, dx = \sin^{n+1} ax / (a\, (m-1) \cos^{m-1} ax) - (n-m+2)/(m-1) \int \sin^n ax / \cos^{m-2} ax\, dx$ für $m \neq 1$
$= \sin^{n-1} ax / (a\, (n-m) \cos^{m-1} ax) - (n-1)/(n-m) \int \sin^{n-2} ax / \cos^m ax\, dx$ für $m \neq n$
$= \sin^{n+1} ax / (a\, (m-1) \cos^{m-1} ax) - (n-1)/(m-1) \int \sin^{n-1} ax / \cos^{m-2} ax\, dx$ für $m \neq 1$
$\int \cos ax / \sin^2 ax\, dx = -1/ (a \sin ax) = -1/a \operatorname{cosec} ax$
$\int \cos ax / \sin^3 ax\, dx = -1/ (2a \sin^2 ax) = -1/(2a) \cot^2 ax$
$\int \cos ax / \sin^n ax\, dx = -1/ (a\, (n-1) \sin^{n-1} ax)$
$\int \cos^2 ax / \sin ax\, dx = 1/a\, (\cos ax + \ln \tan ax/2)$
$\int \cos^2 ax / \sin^3 ax\, dx = -1/(2a)\, (\cos ax / \sin^2 ax + \ln \tan ax/2)$
$\int \cos^2 ax / \sin^n ax\, dx = -1/(n-1)\, (\cos ax / (a \sin^{n-1} ax) + \int 1 / \sin^{n-2} ax\, dx)$
$\int \cos^3 ax / \sin ax\, dx = 1/a\, (1/2 \cos^2 ax + \ln \sin ax)$
$\int \cos^3 ax / \sin^2 ax\, dx = -1/a\, (\sin ax + 1 / \sin ax)$
$\int \cos^3 ax / \sin^n ax\, dx = 1/a\, (1/((n-3) \sin^{n-3} ax) + 1/((n-1) \sin^{n-1} ax))$
$\int \cos^n ax / \sin ax\, dx = 1/(a\, (n-1)) \cos^{n-1} ax + \int \cos^{n-2} ax / \sin ax\, dx$
$\int \cos^n ax / \sin^m ax\, dx = -\cos^{n+1} ax / (a(m-1) \sin^{m-1} ax) - (n-m+2)/(m-1) \int \cos^n ax / \sin^{m-2} ax\, dx$
$= \cos^{n-1} ax / (a(n-m) \sin^{m-1} ax) - (n-1)/(n-m) \int \cos^{n-2} ax / \sin^m ax\, dx$
$= -\cos^{n-1} ax / (a(m-1) \sin^{m-1} ax) - (n-1)/(m-1) \int \cos^{n-2} ax / \sin^{m-2} ax\, dx$

$\int 1 / (\sin ax\, (1 + \cos ax))\, dx = 1/(2a\, (1 + \cos ax)) + 1/(2a) \ln \tan ax/2$
$\int 1 / (\sin ax\, (1 - \cos ax))\, dx = -1/(2a\, (1 - \cos ax)) + 1/(2a) \ln \tan ax/2$
$\int 1 / (\cos ax\, (1 + \sin ax))\, dx = -1/(2a\, (1 + \sin ax)) + 1/(2a) \ln \tan (\pi/4 + ax/2)$
$\int 1 / (\cos ax\, (1 - \sin ax))\, dx = 1/(2a\, (1 - \sin ax)) + 1/(2a) \ln \tan (\pi/4 + ax/2)$
$\int \sin ax / (\cos ax\, (1 + \cos ax))\, dx = 1/a \ln ((1 + \cos ax) / \cos ax)$
$\int \sin ax / (\cos ax\, (1 - \cos ax))\, dx = 1/a \ln ((1 - \cos ax) / \cos ax)$
$\int \cos ax / (\sin ax\, (1 + \sin ax))\, dx = -1/a \ln ((1 + \sin ax) / \sin ax)$
$\int \cos ax / (\sin ax\, (1 - \sin ax))\, dx = -1/a \ln ((1 - \sin ax) / \sin ax)$
$\int \sin ax / (\cos ax\, (1 + \sin ax))\, dx = 1/(2a\, (1 + \sin ax)) + 1/(2a) \ln \tan (\pi/4 + ax/2)$
$\int \sin ax / (\cos ax\, (1 - \sin ax))\, dx = 1/(2a\, (1 - \sin ax)) - 1/(2a) \ln \tan (\pi/4 + ax/2)$

$\int \cos ax / (\sin ax\, (1 + \cos ax))\, dx = -1/(2a\, (1 + \cos ax)) + 1/(2a) \ln \tan ax/2$
$\int \cos ax / (\sin ax\, (1 - \cos ax))\, dx = -1/(2a\, (1 - \cos ax)) - 1/(2a) \ln \tan ax/2$
$\int \sin ax / (\sin ax + \cos ax)\, dx = x/2 - 1/(2a) \ln (\sin ax + \cos ax)$
$\int \sin ax / (\sin ax - \cos ax)\, dx = x/2 + 1/(2a) \ln (\sin ax - \cos ax)$
$\int \cos ax / (\sin ax + \cos ax)\, dx = x/2 + 1/(2a) \ln (\sin ax + \cos ax)$
$\int \cos ax / (\sin ax - \cos ax)\, dx = -x/2 + 1/(2a) \ln (\sin ax - \cos ax)$
$\int 1 / (\sin ax + \cos ax)\, dx = 1/(a \sqrt{2}) \ln \tan (ax/2 + \pi/8)$
$\int 1 / (\sin ax - \cos ax)\, dx = 1/(a \sqrt{2}) \ln \tan (ax/2 - \pi/8)$
$\int 1 / (1 + \cos ax + \sin ax)\, dx = 1/a \ln (1 + \tan ax/2)$
$\int 1 / (1 + \cos ax - \sin ax)\, dx = -1/a \ln (1 - \tan ax/2)$
$\int 1 / (b \sin ax + c \cos ax)\, dx = 1/(a \sqrt{(b^2+c^2)}) \ln \tan ((ax+\theta)/2)$ mit $\sin \theta = c/\sqrt{(b^2+c^2)}$ und $\tan \theta = c/b$
$\int \sin ax / (b + c \cos ax)\, dx = -1/(ac) \ln (b + c \cos ax)$
$\int \cos ax / (b + c \sin ax)\, dx = 1/(ac) \ln (b + c \sin ax)$
$\int 1 / (b + c \cos ax + f \sin ax)\, dx = \int d (x\ \ \theta/a) / (b + \sqrt{(c^2+f^2)} \sin (ax\ \theta))$ mit $\sin \theta = c/\sqrt{(c^2+f^2)}$ und $\tan \theta = c/f$
$\int 1 / (b^2 \cos^2 ax + c^2 \sin^2 ax)\, dx = 1/(abc) \arctan (c/b \tan ax)$
$\int 1 / (b^2 \cos^2 ax - c^2 \sin^2 ax)\, dx = 1/(2abc) \ln ((c \tan ax + b)/(c \tan ax - b))$

Integrale, die die Tangensfunktion enthalten

$\int \tan ax\, dx = -1/a \ln \cos (ax)$
$\int \tan^2 ax\, dx = 1/a \tan ax - x$
$\int \tan^3 ax\, dx = 1/(2a) \tan^2 ax + 1/a \ln \cos (ax)$
$\int \tan^n ax\, dx = 1/(a\, (n-1)) \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax\, dx\ ;\ n \neq 1$

$\int x \tan ax\, dx = a/3\, x^3 + a^3/15\, x^5 + 2a^5/105\, x^7 + 17a^7/2835\, x^9 + \ldots + 2^{2n} (2^{2n}-1)\, B_n\, a^{2n-1}/(2n+1)!\, x^{2n+1} + \ldots$
$\int \tan ax / x\, dx = ax + a^3/9\, x^3 + 2a^5/75\, x^5 + 17a^7/2205\, x^7 + \ldots + 2^{2n} (2^{2n}-1)\, B_n\, a^{2n-1}/((2n-1)(2n)!)\, x^{2n-1} + \ldots$
$\int \tan^n ax / \cos^2 ax\, dx = 1/(a\,(n+1))\, \tan^{n+1} ax$
$\int 1 / (\tan^n ax + 1)\, dx = x/2 + 1/(2a) \ln (\sin ax + \cos ax)$
$\int 1 / (\tan^n ax - 1)\, dx = -x/2 + 1/(2a) \ln (\sin ax - \cos ax)$
$\int \tan ax / (\tan^n ax + 1)\, dx = x/2 - 1/(2a) \ln (\sin ax + \cos ax)$
$\int \tan ax / (\tan^n ax - 1)\, dx = x/2 + 1/(2a) \ln (\sin ax - \cos ax)$
$\int dx/(\tan x \pm 1) = \pm x/2 + 1/2 \ln |\sin x \pm \cos x|$

Integrale, die die Kotangensfunktion enthalten

$\int \cot ax\, dx = 1/a \ln \sin (ax)$
$\int \cot^2 ax\, dx = -1/a \cot ax - x$
$\int \cot^3 ax\, dx = -1/(2a) \cot^2 ax - 1/a \ln \sin ax$
$\int \cot^n ax\, dx = -1/(a\,(n-1)) \cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax\, dx$
$\int x \cot ax\, dx = x/a - a/9\, x^3 - a^3/225\, x^5 - \ldots - 2^{2n} B_n\, a^{2n-1} / (2n+1)!\, x^{2n+1} - \ldots$
$\int \cot ax / x\, dx = -1/a\, x - a/3\, x - a^3/135\, x^3 - 2/4725\, a^5\, x^5 - \ldots - 2^{2n} B_n\, a^{2n-1} / ((2n-1)\,(2n)!)\, x^{2n-1} - \ldots$
$\int \cot^n ax / \sin^2 ax\, dx = -1/(a\,(n+1)) \cot^{n+1} ax$
$\int dx / (1 + \cot ax) = \int \tan ax / (\tan ax + 1)\, dx$
$\int dx / (1 + \cot x) = x/2 - 1/2 \ln |\sin x + \cos x|$
$\int dx / (1 - \cot ax) = \int \tan ax / (\tan ax - 1)\, dx$
$\int dx / (1 - \cot x) = x/2 + 1/2 \ln |\sin x - \cos x|$

Hyperbolische Funktionen

$\int \sinh ax\, dx = 1/a \cosh ax$
$\int \cosh ax\, dx = 1/a \sinh ax$
$\int \sinh^2 x\, dx = (\sinh x \cdot \cosh x - x)/2 = (\sinh 2x - 2x)/4$
$\int \sinh^2 ax\, dx = 1/(2a) \sinh ax \cosh ax - x/2$
$\int \cosh^2 x\, dx = (\sinh x \cdot \cosh x + x)/2$
$\int \cosh^2 ax\, dx = 1/(2a) \sinh ax \cosh ax + x/2$
$\int \sinh^n ax\, dx = 1/(an) \sinh^{n-1} ax \cosh ax - (n-1)/n \int \sinh^{n-2} ax\, dx$; für $n > 0$
$= 1/(a\,(n+1)) \sinh^{n+1} ax \cosh ax - (n+2)/(n+1) \int \sinh^{n+2} ax\, dx$; für $n < 0$
$\int \cosh^n ax\, dx = 1/(an) \sinh ax \cosh^{n-1} ax + (n-1)/n \int \cosh^{n-2} ax\, dx$; für $n > 0$
$= -1/(a\,(n+1)) \sinh ax \cosh^{n+1} ax + (n+2)/(n+1) \int \cosh^{n+2} ax\, dx$; für $n < 0$
$\int dx / \sinh ax = 1/a \ln |\tanh ax/2|$
$\int dx / \sinh x = \ln |\tanh x/2|$
$\int dx / \cosh ax = 2/a \arctan e^{ax}$
$\int dx / \cosh x = 2 \arctan e^x$
$\int x \sinh ax\, dx = 1/a\, x \cosh ax - 1/a^2 \sinh ax$
$\int x \cosh ax\, dx = 1/a\, x \sinh ax - 1/a^2 \cosh ax$

$\int \tanh ax\, dx = 1/a \ln \cosh ax$
$\int \coth ax\, dx = 1/a \ln \sinh ax$
$\int \tanh^2 ax\, dx = x - 1/a \tanh ax$
$\int \tanh^2 x\, dx = x - \tanh x$
$\int \coth^2 ax\, dx = x - 1/a \coth ax$
$\int \coth^2 x\, dx = x - \coth x$

$\int \sinh ax \sinh bx\, dx = 1/(a^2-b^2)\, (a \sinh bx \cosh ax - b \cosh bx \sinh ax)$
$\int \cosh ax \cosh bx\, dx = 1/(a^2-b^2)\, (a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax)$
$\int \cosh ax \sinh bx\, dx = 1/(a^2-b^2)\, (a \sinh bx \sinh ax - b \cosh bx \cosh ax)$
$\int \sinh ax \sin ax\, dx = 1/(2a)\, (\cosh ax \sin ax - \sinh ax \cos ax)$
$\int \cosh ax \cos ax\, dx = 1/(2a)\, (\sinh ax \cos ax + \cosh ax \sin ax)$
$\int \sinh ax \cos ax\, dx = 1/(2a)\, (\cosh ax \cos ax + \sinh ax \sin ax)$
$\int \cosh ax \sin ax\, dx = 1/(2a)\, (\sinh ax \sin ax - \cosh ax \cos ax)$

Exponential-Funktionen

$\int e^{ax}\, dx = 1/a\, c^{ax}$
$\int x\, e^{ax}\, dx = e^{ax}/a^2\, (ax - 1)$
$\int x^2\, e^{ax}\, dx = e^{ax}\, (x^2/a - 2x/a^2 + 2/a^3)$
$\int x^n\, e^{ax}\, dx = 1/a\, x^n\, e^{ax} - n/a \int x^{n-1}\, e^{ax}\, dx$
$\int e^{ax} / x\, dx = \ln x + ax/(1\cdot 1!) + (ax)^2/(2\cdot 2!) + (ax)^3/(3\cdot 3!) + \ldots$ (Integralexponentialfunktion)
$\int e^{ax} / x^n\, dx = 1/(n-1)\, (-e^{ax} / x^{n-1} + a \int e^{ax} / x^{n-1}\, dx)$
$\int 1 / (1 + e^{ax})\, dx = 1/a \ln (e^{ax} / (1 + e^{ax}))$
$\int 1 / (b + c\, e^{ax})\, dx = x/b - 1/(ab) \ln (b + c\, e^{ax})$
$\int e^{ax} / (b + c\, e^{ax})\, dx = 1/(ac) \ln (b + c\, e^{ax})$
$\int 1 / (b\, e^{ax} + c\, e^{-ax})\, dx = 1/(a \sqrt{(bc)}) \arctan (e^{ax} \sqrt{(b/c)})$, für $bc > 0$
$= 1/(2a \sqrt{(-bc)}) \ln ((c + e^{ax} \sqrt{(-bc)})/(c - e^{ax} \sqrt{(-bc)}))$, für $bc < 0$

$\int x\, e^{ax} / (1 + ax)^2\, dx = e^{ax} / (a^2 (1 + ax))$

$\int e^{ax} \ln x\, dx = e^{ax} \ln x / a - 1/a \int e^{ax} / x\, dx$
$\int e^{ax} \sin bx\, dx = (a \sin bx - b \cos bx)\, e^{ax}/(a^2+b^2)$
$\int e^{ax} \cos bx\, dx = (a \cos bx + b \sin bx)\, e^{ax}/(a^2+b^2)$
$\int e^{ax} \sin^n x\, dx = e^{ax} \sin^{n-1} x / (a^2+n^2) (a \sin x - n \cos x) + n(n-1)/(a^2+n^2) \int e^{ax} \sin^{n-2} x\, dx$
$\int e^{ax} \cos^n x\, dx = e^{ax} \cos^{n-1} x / (a^2+n^2) (a \cos x + n \sin x) + n(n-1)/(a^2+n^2) \int e^{ax} \cos^{n-2} x\, dx$
$\int x\, e^{ax} \sin bx\, dx = x\, e^{ax} / (a^2+b^2) (a \sin bx - b \cos bx) - e^{ax} / (a^2+b^2) ((a^2-b^2) \sin bx - 2ab \cos bx)$
$\int x\, e^{ax} \cos bx\, dx = x\, e^{ax} / (a^2+b^2) (a \cos bx + b \sin bx) - e^{ax} / (a^2+b^2) ((a^2-b^2) \cos bx + 2ab \sin bx)$

Logarithmus-Funktionen
$\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x$
$\int \ln (bx+c)\, dx = (x + c/b) \cdot \ln (bx + c) - x$
$\int \ln^2 x\, dx = x \cdot \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$
$\int \ln^3 x\, dx = x \cdot \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x$
$\int (\ln x)^n\, dx = (-1^n)\, n!\, x\, \Sigma_{k=0}{}^n ([- \ln(x)]^k / k!) = x \ln^n x - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$
$\int 1 / \ln x\, dx = \ln \ln x + \ln x + \ln x^2 /(2\cdot 2!) + \ln x^3 /(3\cdot 3!) + \ldots$ (Integrallogarithmus)
$\int 1 / \ln^n x\, dx = x/((n-1) \ln^{n-1} x) + 1/(n-1) \int 1 / \ln^{n-1} x\, dx$
$\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1}/(n+1) \cdot (\ln x - 1/(n+1))$
$\int x^m \ln^n x\, dx = x^{m+1}/(m+1) \ln^n x - n/(m+1) \int x^m \ln^{n-1} x\, dx$
$\int \ln^n x / x\, dx = (\ln x)^{n+1} / (n+1)$
$\int \ln x / x^n\, dx = - (\ln x/[(n-1)x^{n-1}] + 1/((n-1)^2 x^{n-1}))$
$\int \ln^n x / x^m\, dx = - \ln^n x /((m-1)\, x^{m-1}) + n/(m-1) \int \ln^{n-1} x / x^m\, dx$
$\int x^m / \ln x\, dx = \int e^{-y} / y\, dy$ mit $y = -(m+1) \ln x$
$\int x^m / \ln^n x\, dx = x^{m-1} /((n-1) \ln^{n-1} x) + (m+1)/(n-1) \int x^m / \ln^{n-1} x\, dx$
$\int dx / (x \ln x) = \ln \ln x$
$\int dx / (x^m \ln x) = \ln \ln x - (n-1) \ln x + (n-1)^2 \ln^2 x /(2\cdot 2!) - (n-1)^3 \ln^3 x /(3\cdot 3!) +- \ldots$
$\int dx / (x (\ln x)^n) = - 1/ ((n-1) (\ln x)^{n-1})$
$\int dx / (x^p (\ln x)^n) = - 1/ (x^{p-1} (n-1) (\ln x)^{n-1}) - (p-1)/(n-1) \int dx / (x^p (\ln x)^{n-1})$

$\int \ln \sin x\, dx = x \ln x - x - x^3/18 - x^5/900 - \ldots - 2^{2n-1} B_n x^{2n-1} / (n (2n+1)!) + \ldots$
$\int \ln \cos x\, dx = - x^3/6 - x^5/57 - x^7/315 - \ldots - 2^{2n-1} (2^{2n-1} - 1) B_n x^{2n-1} / (n (2n+1)!) + \ldots$
$\int \ln \tan x\, dx = x \ln x - x + x^3/9 + 7x^5/450 + \ldots + 2^{2n} (2^{2n-1} - 1) B_n x^{2n-1} / (n (2n+1)!) + \ldots$
$\int \sin \ln x\, dx = x/2 (\sin \ln x - \cos \ln x)$
$\int \cos \ln x\, dx = x/2 (\sin \ln x + \cos \ln x)$
$\int e^{ax} \ln x\, dx = 1/a\, e^{ax} \ln x - \int e^{ax} / x\, dx$

Arkus-Funktionen
$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{(1 - x^2)}$
$\int \arcsin (x/a)\, dx = x \arcsin (x/a) + \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$\int x \arcsin (x/a)\, dx = (x^2/2 - a^2/4) \arcsin (x/a) + x/4 \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$\int x^2 \arcsin (x/a)\, dx = x^3/3 \arcsin (x/a) + 1/9 (x^2 + 2a^2) \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$\int \arcsin (x/a) / x\, dx = x/a + 1/(2\cdot 3\cdot 3)\, x^3/a^3 + (1\cdot 3)/(2\cdot 4\cdot 5\cdot 5)\, x^5/a^5 + (1\cdot 3\cdot 5)/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7)\, x^7/a^7 + \ldots$
$\int \arcsin (x/a) / x^2\, dx = -1/x \arcsin (x/a) - 1/a \ln ((a + \sqrt{(a^2 - x^2)})/x)$
$\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{(1 - x^2)}$
$\int \arccos (x/a)\, dx = x \arccos (x/a) - \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$\int x \arccos (x/a)\, dx = (x^2/2 - a^2/4) \arccos (x/a) - x/4 \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$\int x^2 \arccos (x/a)\, dx = x^373 \arccos (x/a) - 1/9 (x^2 + 2a^2) \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$\int \arccos (x/a) / x\, dx = \pi/2 \ln x - x/a - 1/(2\cdot 3\cdot 3)\, x^3/a^3 - (1\cdot 3)/(2\cdot 4\cdot 5\cdot 5)\, x^5/a^5 - (1\cdot 3\cdot 5)/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7)\, x^7/a^7 + \ldots$
$\int \arccos (x/a) / x^2\, dx = -1/x \arccos (x/a) + 1/a \ln ((a + \sqrt{(a^2 - x^2)})/x)$

$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - 1/2 \ln (1 + x^2)$
$\int \arctan (x/a)\, dx = x \arctan (x/a) - a/2 \ln (a^2 + x^2)$
$\int x \arctan (x/a)\, dx = 1/2 (x^2 + a^2) \arctan (x/a) - ax/2$
$\int x^2 \arctan (x/a)\, dx = x^3/3 \arctan (x/a) - ax^2/6 + a^3/6 \ln (a^2 + x^2)$
$\int x^n \arctan (x/a)\, dx = x^{n+1}/(n+1) \arctan (x/a) - a/(n+1) \int x^{n+1} / (a^2 + x^2)\, dx$
$\int \arctan (x/a) / x\, dx = x/a - x^3/(3^2a^3) + x^5/(5^2a^5) - x^7/(7^2a^7) +- \ldots$
$\int \arctan (x/a) / x^2\, dx = -1/x \arctan (x/a) - 1/(2a) \ln ((a^2 +x^2)/x^2)$
$\int \arctan (x/a) / x^n\, dx = 1/((n-1)\, x^{n-1}) \arctan (x/a) + a/(n-1) \int 1 / (x^{n-1} (a^2 + x^2))\, dx$
$\int \operatorname{arccot} x\, dx = x \operatorname{arccot} x + 1/2 \ln(1+x^2)$
$\int \operatorname{arccot} (x/a)\, dx = x \operatorname{arccot} (x/a) + a/2 \ln (a^2 + x^2)$
$\int x \operatorname{arccot} (x/a)\, dx = 1/2 (x^2 + a^2) \operatorname{arccot} (x/a) + ax/2$
$\int x^2 \operatorname{arccot} (x/a)\, dx = x^3/3 \operatorname{arccot} (x/a) + ax^2/6 - a^3/6 \ln (x^2 + a^2)$
$\int x^n \operatorname{arccot} (x/a)\, dx = x^{n+1}/(n+1) \operatorname{arccot} (x/a) + a/(n+1) \int x^{n+1} / (a^2 + x^2)\, dx$
$\int \operatorname{arccot} (x/a) / x\, dx = \pi/2 \ln x - x/a + x^3/(3^2x^3) + x^5/(5^2a^5) - x^7/(7^2a^7) +- \ldots$
$\int \operatorname{arccot} (x/a) / x^2\, dx = -1/x \operatorname{arccot} (x/a) + 1/(2a) \ln ((a^2 + x^2)/x^2)$
$\int \operatorname{arccot} (x/a) / x^n\, dx = -1/((n-1)\, x^{n-1}) \operatorname{arccot} (x/a) - a/(n-1) \int 1/ (x^{n-1} (a^2 + x^2))\, dx$

Area-Funktionen

$\int \operatorname{arsinh} x \, dx = x \cdot \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}$
$\int \operatorname{arsinh} (x/a) \, dx = x \cdot \operatorname{arsinh} (x/a) - \sqrt{x^2 + a^2}$
$\int \operatorname{arcosh} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$
$\int \operatorname{arcosh} (x/a) \, dx = x \cdot \operatorname{arcosh} (x/a) - \sqrt{x^2 - a^2}$
$\int \operatorname{artanh} x \, dx = x \cdot \operatorname{artanh} x + 1/2 \ln (1 - x^2)$
$\int \operatorname{artanh} (x/a) \, dx = x \cdot \operatorname{artanh} (x/a) + a/2 \ln (a^2 - x^2)$
$\int \operatorname{arcoth} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcoth} x + 1/2 \ln (x^2 - 1)$
$\int \operatorname{arcoth} (x/a) \, dx = x \cdot \operatorname{arcoth} (x/a) + a/2 \ln (x^2 - a^2)$

Bestimmtes Integral

$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$
$\int_a^a f(x) \, dx = 0$
$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

Definition des bestimmten Integrals

f(x) sei auf dem Intervall [a,b] beschränkt. $Z = \{a = x_0, {}_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ sei eine Zerlegung des Intervalls [a,b]. Es seien:

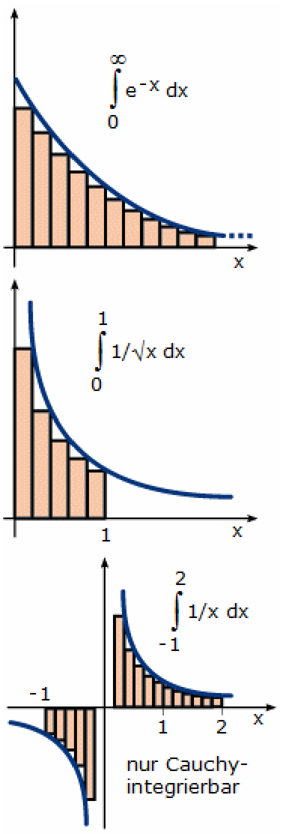
m_k = Minimum $\{ f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$
M_k = Maximum $\{ f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$
$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
$S_u (f,Z) = \Sigma\, m_k(x_k - x_{k-1})$; (Summenbildung k=1,…,n) … heißt Untersumme
$S_o (f,Z) = \Sigma\, M_k(x_k - x_{k-1})$; (Summenbildung k=1,…,n) … heißt Obersumme
$S (f,Z,\xi) = \Sigma\, f(\xi_k(x_k - x_{k-1})$; (Summenbildung k=1,…,n) … heißt Riemannsche Summe

Ein Integral dieser Definition wird Riemann-Integral genannt. Daneben existieren weitere Integralbegriffe, u.a. das Lebesgue-Integral.
Existiert ein Riemann-Integral so auch das entsprechende Lebesgue-Integral, umgekehrt nicht notwendiger Weise.

Eine Folge $\{Z_i\}$ von Zerlegungen heißt zulässig, falls für die Feinheiten δ_i = Maximum $\{| x_k - x_{k-1} |\}$ der Grenzwert der δ_i für $i \to \infty$ gleich Null ist.
f(x) heißt dann integrierbar über [a,b], falls für jede zulässige Zerlegungsfolge die Grenzwerte

$\lim_{i\to\infty} S_u(f,Z_i) = \lim_{i\to\infty} S_u(f,Z_i)$

Der gemeinsame Grenzwert ist dann das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) \, dx$. Existiert das bestimmte Integral, so konvergiert die Folge der Riemannschen Summen.
Die Summen werden auch Darbouxschen Summen genannt.



Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist f(x) in [a;b] stetig und F(x) irgendeine Stammfunktion, so wird

$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

2.Fassung

Ist f(x) in [a;b] stetig, so ist die Integralfunktion

$\int_a^x f(t) \, dt$ differenzierbar und $(\int_a^x f(t) \, dt)' = f(x)$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f(x) in [a;b] stetig, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) \cdot f(\xi)$

Erweiterter Mittelwertsatz

Sind f(x) und g(x) stetig und $g \geq 0$ im Intervall [a,b], so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) \, dx$

Uneigentliches Integral

$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x) \, dx$
$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b g(x) \, dx$

Der Cauchy-Hauptwert

$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{r\to 0} (\int_a^{u-r} f(x) \, dx + \int_{u+r}^b f(x) \, dx)$

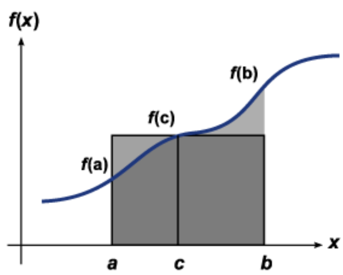
kann existieren, obwohl das uneigentliche Integral divergiert.
Abbildung: Uneigentliche Integrale

2.Erweiterter Mittelwertsatz

Ist f(x) monoton und beschränkt und ist g(x) im Intervall [a,b] integrierbar, so gilt

$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx$
$= f(a) \int_a^c g(x) \, dx + f(b) \int_c^b g(x) \, dx$

mit $c \in [a,b]$



Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ mit $f(x) \geq 0$ mit kann also durch **ein**

Rechteck der Seitenlänge b-a und der Höhe f(c) dargestellt werden, wobei das Problem ist, die richtige Stelle x = c zu finden.

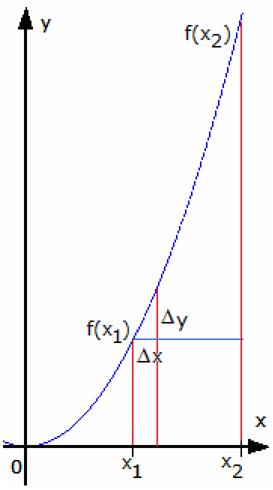
Linearer Mittelwert (Integralmittelwert) f(c) der Funktionswerte im Intervall [a,b]:

$$f(c) = 1/(b-a) \int_a^b f(x)\,dx$$

Für eine lineare Funktion ist c = (a+b)/2.

Quadratischer Mittelwert, definiert man als das Integral über das Quadrat der Funktion f(x):

$$M_{quad} = \sqrt{1/(b-a) \int_a^b f(x)^2\,dx}$$



Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (2)

Ist der Begriff der Stammfunktion bekannt, d.h. dass für eine Funktion f(x) und deren Stammfunktion F(x) $F'(x) = f(x)$ gilt, so lässt sich der Hauptsatz der Integralrechnung einfach herleiten.

Zur Berechnung der Differenz zweier Funktionswerte $f(x_2) - f(x_1)$ wird das Intervall $[x_1 ; x_2]$ in Teilintervalle der Breite Δx zerlegt.

Für die Strecke $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ wird dann zum Beispiel (Abbildung)

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = (\Delta y/\Delta x)_{x1} \cdot \Delta x$$

da der Anstieg (Differenzenquotient) $m = (\Delta y/\Delta x)_{x1}$ im Dreieck mit den Katheten Δx, Δy den Tangens des Anstiegswinkels darstellt.

Überdeckt man das Intervall $[x_1 ; x_2]$ mit n Teilintervallen der Breite Δx, so wird

$$f(x_2) - f(x_1) = \Sigma_{i=1}^{n} (\Delta y/\Delta x)_{x1+(i-1)\Delta x} \cdot \Delta x$$

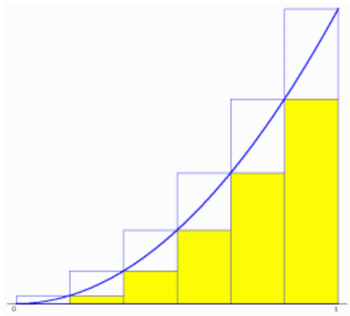
Strebt n nun gegen Unendlich, so geht Δx gegen 0, der Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x$ gegen den Differenzialquotient $dy/dx = f'(x)$ und die Summe gegen das bestimmte Integral $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x1}^{x2} f'(x)\,dx$

Setzt man für f(x) die Stammfunktion F(x) ein, wird

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x1}^{x2} F'(x)\,dx \qquad F(x_2) - F(x_1) = \int_{x1}^{x2} f(x)\,dx$$

Video siehe http://www.youtube.com/watch?v=4n6aB4aasyg

Obersumme, Beispiel



geg.: Funktion $y = x^2$; ges.: Fläche unter der Kurve im Intervall [0;1]

Lösung:

Einteilung des Intervalls [0,1] in 2^k Intervalle der gleichen Länge

Einschreiben von Rechtecken in jedes Teilintervall. Diese Rechtecke haben die Breite $1/2^k$ und die Höhe des jeweils größten Funktionswertes im Teilintervall. Die Summe der Flächeninhalte nähern sich mit wachsendem k der Fläche unter der Funktion an.

k=1 , 2 Teile $A_1 = 1/2 * ((1/2)^2 + 1^2) = 5/8$

k=2 , 4 Teile $A_2 = 1/4 * ((1/4)^2 + (1/2)^2 + (3/4)^2 + 1^2) = 15/32$

k=3 , 8 Teile $A_3 = 1/8 * ((1/8)^2 + ... + 1^2) = 51/128$

Allgemein

k , 2^k Teile $A_k = 1/2^k * ((1/k)^2 + (2/k)^2 + ... + (k/k)^2)$

$A_k = 1/2^k * ((1/2^k)^2 + (2/2^k)^2 + ... + (2^k/2^k)^2)$

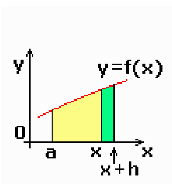
und mit $n = 2^k$ $A_k = 1/n * ((1/n)^2 + (2/n)^2 + ... + (n/n)^2)$

$A_k = 1/n * 1/n^2 * (1^2 + 2^2 + ... + n^2) = 1/n^3 * (n(n+1)(2n+1) / 6)$

$A_k = (n + 1) (2n + 1)/ (6 n^2)$

Für $k \to \infty$ geht auch n gegen ∞ und lim $A_k = 1/3$. Die Fläche unter der Normalparabel im Intervall [0;1] hat gerade den Inhalt 1/3. Für die Untersumme, d.h. die Rechtecke mit dem jeweils kleinsten Flächeninhalt im Intervall (in der Darstellung gelb), ergibt sich:

$A_{k,unten} = (n - 1) (2n - 1)/ (6 n^2)$ mit dem gleichen Grenzwert.



Beziehung Flächeninhaltsfunktion - Randfunktion

Ist f(x) eine Funktion auf dem Intervall [a ; b] und f(x) >0 für alle x des Intervalls, so nennt man die Funktion A(x), die den Flächeninhalt unter der Funktion f(x) im Intervall [a; x] beschreibt, die Flächeninhaltsfunktion der Randfunktion f(x) über dem Intervall [a ; b].

Sind m der kleinste Funktionswert f(x) und M der größte Funktionswert im Intervall [x ; x+h], dann gilt für die Fläche A(x + h) - A(x) unter f(x) von einer Abszisse x bis x+h:

$$m\,h \le A(x + h) - A(x) \le M\,h \qquad m \le [A(x + h) - A(x)] / h \le M$$

Für $h \to 0$ streben m als auch M gegen f(x). Der mittlere Differenzenquotient [A(x + h) - A(x)] / h wird dann zum Differenzialquotienten A'(x), d.h.

$$f(x) \le A'(x) \le f(x) \qquad \text{und somit} \qquad A'(x) = f(x)$$

Die erste Ableitung der Flächeninhaltsfunktion A(x) entspricht somit der Funktion f(x). A(x) ist damit eine Stammfunktion von f(x).

Spezielle bestimmte Integrale

$_0\int^{\infty} e^{-ax} x^n\, dx = \Gamma(n+1)/a^{n+1}$; $a > 0, n > -1$
$_0\int^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = n!$; n natürlich
$_0\int^{\infty} e^{-ax^2} x^n\, dx = \Gamma((n+1)/2) / (2\, a^{(n+1)/2})$; $a > 0, n > -1$
$_0\int^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = 1/(2a)\, \sqrt{\pi}\, {}_0\int^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 1/2\, \sqrt{\pi}$
$_0\int^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\, dx = 1/(4a^3)\, \sqrt{\pi}$; $a > 0$

$_0\int^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = 1/(2a)\, e^{-b^2/(4a^2)}$; $a > 0$
$_0\int^{\infty} x/(e^x - 1)\, dx = \pi^2/6$
$_0\int^{\infty} x/(e^x + 1)\, dx = \pi^2/12$
$_0\int^{\infty} e^{-ax} \sin x / x\, dx = \operatorname{arccot} a$; $a > 0$
$_0\int^{\infty} e^{-x} \ln x\, dx = -C = -0{,}5772\ldots$

$_0\int^{\infty} e^{-x^2} \ln x\, dx = -1/4\, \sqrt{\pi}\, (C + 2 \ln 2)$
$_0\int^{\infty} e^{-x^2} \ln^2 x\, dx = 1/8\, \sqrt{\pi}\, ((C + 2 \ln 2)^2 + \pi^2/2)^2$
$_0\int^{\infty} \sin(ax)/x\, dx = \pi/2$; für $a > 0$
$_0\int^{\infty} \sin(ax)/x\, dx = -\pi/2$; für $a < 0$
$_0\int^{\infty} \sin^p x / p\, dx = 2^{p-2}\, \Gamma(p/2)^2/\Gamma(p)$, wenn p rationale Zahl mit ungeradem Zähler und Nenner ist

$_0\int^{\infty} \sin bx / x^s\, dx = \pi\, b^{s-1} / (2\, \Gamma(s) \sin (s\pi/2))$, $0 < s < 2$
$_0\int^{\infty} \cos(ax)/x\, dx = \infty$
$_0\int^{\infty} \cos bx / x^s\, dx = \pi\, b^{s-1} / (2\, \Gamma(s) \cos (s\pi/2))$, $0 < s < 1$
$_0\int^{\infty} \tan(ax)/x\, dx = \pi/2$; für $a > 0$
$_0\int^{\infty} \tan(ax)/x\, dx = -\pi/2$; für $a < 0$

$_0\int^{\infty} (\cos ax - \cos bx)/x\, dx = \ln (b/a)$
$_0\int^{\pi} \sin(ax)\, dx = [1 - \cos(a\pi)]/a$
$_0\int^{\pi} \cos(ax)\, dx = \sin(a\pi)/a$
$_0\int^{\infty} (\sin x \cos ax)/x\, dx = \pi/2$ für $|a| < 1$; $= \pi/4$ für $|a| = 1$; $= 0$ für $|a| > 1$
$_0\int^{\infty} \sin(x)/\sqrt{x}\, dx = \sqrt{(\pi/2)}$

$_0\int^{\infty} \cos(x)/\sqrt{x}\, dx = \sqrt{(\pi/2)}$
$_0\int^{\infty} x \sin bx / (a^2 + x^2)\, dx = \pm\pi/2\, e^{-|ab|}$, das Vorzeichen stimmt mit dem von b überein
$_0\int^{\infty} \cos ax / (1 + x^2)\, dx = \pi/2\, e^{-|a|}$
$_0\int^{\infty} \sin^2 ax / x^2\, dx = \pi/2\, |a|$
$_{-\infty}\int^{\infty} \sin(x^2)\, dx = \sqrt{(\pi/2)}$

$_{-\infty}\int^{\infty} \cos(x^2)\, dx = \sqrt{(\pi/2)}$
$_0\int^{\pi/2} dx/(1 + \cos x) = 1$
$_0\int^{\pi/4} \tan x\, dx = 1/2 \ln 2$
$_0\int^{\pi/2} \sin x / \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 x)}\, dx = 1/(2k) \ln ((1+k)/(1-k))$
$_0\int^{\pi/2} \cos x / \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 x)}\, dx = 1/k \arcsin k$

$_0\int^{\pi} \cos ax / (1 - 2b \operatorname{cox} x + b^2)\, dx = \pi\, b^a / (1 - b^2)$

Integralle logarithmischer Funktionen

$_0\int^{1} \ln \ln x\, dx = -C = -0{,}5772\ldots$
$_0\int^{1} \ln x / (x - 1)\, dx = \pi^2/6$
$_0\int^{1} \ln x /(x+1)\, dx = -\pi^2/12$
$_0\int^{1} \ln x /(x^2-1)\, dx = \pi^2/8$
$_0\int^{1} \ln (x+1) /(x^2+1)\, dx = \ln 2 \cdot \pi^2/8$
$_0\int^{1} (x^{a-1} - x^{-a}) / ((1 + x) \ln x)\, dx = \ln \tan a\pi/2$
$_0\int^{1} (1 - x^{\alpha})\, (1 - x^{\beta}) / ((1 - x) \ln x)\, dx =$
$= \ln (\Gamma(\alpha + 1)\, \Gamma(\beta + 1) / \Gamma(\alpha + \beta + 1))$; $\alpha > -1, \beta > -1$, $\alpha+\beta > -1$

Spezielle bestimmte Integrale

$_0\int^{1} \ln (1/x)^a\, dx = \Gamma(a+1)$
$_0\int^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = -\pi/2 \ln 2$
$_0\int^{\pi/2} \ln \cos x\, dx = -\pi/2 \ln 2$
$_0\int^{\pi} x \ln \sin x\, dx = -\pi^2/2 \ln 2$
$_0\int^{\pi/2} \sin x \ln \sin x\, dx = \ln 2 - 1$

$_0\int^{\infty} \sin x / x \ln x\, dx = -\pi/2\, C$
$_0\int^{\infty} \sin x / x \ln^2 x\, dx = \pi/2\, C^2 + \pi^3/24$
$_0\int^{\pi} \ln (a + b \cos x)\, dx = \pi \ln((a + \sqrt{(a^2-b^2)}/2)$
$_0\int^{\pi} \ln (a - b \cos x)\, dx = \pi \ln((a + \sqrt{(a^2-b^2)}/2)$
$_0\int^{\pi} \ln (a^2 -2ab \cos x +b^2)\, dx = 2\pi \ln a$; $a \geq b > 0$

$_0\int^{\pi} \ln (a^2 - 2ab \cos x + b^2)\, dx = 2\pi \ln b$; $b \geq a > 0$
$_0\int^{\pi/2} \ln \tan x\, dx = 0$
$_0\int^{\pi/4} \ln (1 + \tan x)\, dx = \pi/8 \ln 2$

Integrale algebraischer Funktionen

$_0\int^{1} dx/\sqrt{(1 - x^2)} = \pi/2$
$_0\int^{\infty} dx/[(1+x) \sqrt{x}\,] = \pi$
$_a\int^{b} dx/\sqrt{[(x-a) (b-x)]} = \pi$
$_0\int^{a} dx/\sqrt{[a^2 - x^2]} = \pi/2$
$_0\int^{\infty} dx/(a^2 + x^2) = \pi/(2a)$
$_a\int^{b} dx/(x^2 - a^2) = - \infty$
$_0\int^{1} x/\sqrt{(1-x^2)}\, dx = 1$
$_0\int^{a} x^2/\sqrt{(ax - x^2)}\, dx = 3\pi/8\, a^2$
$_0\int^{\infty} dx/[(1-x) \sqrt{x}\,] = 0$
$_0\int^{2b} \sqrt{[2bx - x^2]}\, dx = -\pi/2\, b^2$
$_{-1}\int^{+1} a^x\, dx = (a^2-1)/(a \ln a)$; $a>0$

Borwein-Integrale

Borwein-Integrale sind bestimmte Integrale, welche Produkte der Sinc-Funktion $y = \sin(ax)/(ax)$ enthalten. Diese Integrale sind bekannt dafür, dass sie scheinbare Muster beinhalten, die sich dann aber als falsch herausstellen.
Zum Beispiel wird
$_0\int^{\infty} \sin(x)/x\, dx = \pi/2$
$_0\int^{\infty} \sin(x)/x \sin(x/3)/(x/3)\, dx = \pi/2$
$_0\int^{\infty} \sin(x)/x \sin(x/3)/(x/3) \sin(x/5)/(x/5)\, dx = \pi/2$ ...
$_0\int^{\infty} \sin(x)/x \sin(x/3)/(x/3) \ldots \sin(x/13)/(x/13)\, dx = \pi/2$ ...
Aber!!!
$_0\int^{\infty} \sin(x)/x \sin(x/3)/(x/3) \ldots \sin(x/13)/(x/13) \sin(x/15)/(x/15)\, dx =$
$= 467807924713440738696537864469 / 935615849440640907310052175000\, \pi \approx \pi/2 - 2{,}31 \cdot 10^{-11}$
Eine längere Folge tritt auf bei
$_0\int^{\infty} 2 \cos(x) \sin(x)/x \sin(x/3)/(x/3) \ldots \sin(x/111)/(x/111)\, dx = \pi/2$ ...
Aber $_0\int^{\infty} 2 \cos(x) \sin(x)/x \sin(x/3)/(x/3) \ldots \sin(x/113)/(x/113)\, dx < \pi/2$

Integration - Beispiel

$_{\pi/4}\int^{\pi/2} \cot x\, dx$
$\int \cot x\, dx = \int \cos x /\sin x\, dx$
$\sin x = t$; $\cos x\, dx = dt$
$\int \cos x /\sin x\, dx = \int 1/t\, dt = \ln |t| + c = \ln |\sin x| + c$
$_{\pi/4}\int^{\pi/2} \cot x\, dx = \ln |\sin \pi/2| - \ln |\sin \pi/4| = \ln 1 - \ln \sqrt{(2)}/2 = - \ln \sqrt{(2)}/2 = 0.35$

$\int \cos x * x^2\, dx$
$\int \cos x * x^2\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\, dx =$
$= x^2 \sin x - 2 (x (- \cos x) - \int(-\cos x)\, dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c =$
$= \sin x (x^2 - 2) + 2x \cos x + c$

$_0 \int^{\pi/4} (4 + 2 \tan^2 x)\, dx$
$\int (4 + 2 \tan^2 x)\, dx = \int 2 (2 + \tan^2 x)\, dx = 2 \int (1 + (1 + \tan^2 x))\, dx =$
$= 2 \int 1\, dx + 2 \int (1 + \tan^2 x)\, dx = 2x + 2 \tan x + c$
$_0 \int^{\pi/4} (4 + 2 \tan^2 x)\, dx = \pi/2 + 2 \tan \pi/4 - 2 \tan 0 = \pi/2 + 2 = 3.57$

$\int x^3/(16-x^2)\, dx$
$\int x^3/(16-x^2)\, dx = \int (-x + 16x /(-x^2+16))\, dx$
$x^3 : (-x^2 + 16) = -x + 16x / (-x^2 + 16)$
$16x /(16-x^2) = A/(4-x) + B/(4+x) \quad | *N$
$16x = A (4+x) + B (4-x) = 4A + Ax + 4B - Bx = x (A-B) + (4A+4B)$
$16 = A - B \quad | *4$
$0 = 4A + 4B \quad \Rightarrow A = 8 \quad \Rightarrow B = -8$
$\int (-x + 16x /(-x^2+16))\, dx = \int (-x + 8/(4-x) - 8/(4+x))\, dx$
$= - x^2/2 + 8 \int 1/(4-x)\, dx - 8 \int 1/(4+x)\, dx =$
$= - x^2/2 - 8 \ln |4-x| - 8 \ln |4+x| +c = - x^2/2 - \ln |(4-x)8(4+x)8| + c = - x^2/2 - \ln |(16-x^2)8| + c$

Integration - Beispiel (2)

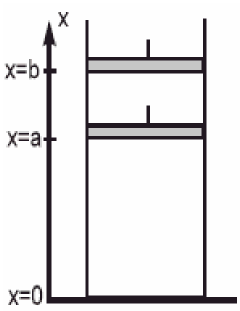
Aufgabe aus der Zeitschrift "Der Mathematikunterricht" (Heft 1; 1993; Seite 4):
$I = 1184/\pi\ {_0\int^{\infty}} dx / (1+x^2)^3$
Substitution $x = \tan z$ ergibt $dx/dz = 1/\cos^2 z$ und für das unbestimmte Integral
$\int dx / (1+x^2)^3 = \int dz / (\cos^2 z (1 + \tan^2 z)^3) = \int dz / (\cos^2 z (1 + \sin^2 z/\cos^2 z)^3) =$
$\int dz / (\cos^2 z (1/ \cos^4 z)) = \int \cos^4 z\, dz$
Mit dem Additionstheorem für $\cos^4 z$
$\cos^4 z = 1/4 \cos^2 (2z) + 1/2 \cos (2z) + 1/4$
wird $\int dx / (1+x^2)^3 = \int \cos^4 z\, dz = 1/32 \sin (4z) + 1/4 \sin (2z) + 3/8\, z$

und nach Rücksubstituieren mit

$$\int dx / (1+x^2)^3 = \int \cos^4 z \, dz = x/(4 (x^2+1)^2) + 3x/(8 (x^2+1)) + 3/8 \arctan x$$

Für das bestimmte Integral ergibt sich somit

$$I = 1184/\pi \ {}_0\int^{\infty} dx / (1+x^2)^3 = 1184/\pi \lim_{a\to\infty} [{}_0\int^{a} dx / (1+x^2)^3] =$$
$$= 1184/\pi \lim_{a\to\infty} [x / (4 (x^2+1)^2) + 3x / (8 (x^2+1)) + 3/8 \arctan x]^a_0 =$$
$$= 1184/\pi \lim_{a\to\infty} [a / (4 (a^2+1)^2) + 3a / (8 (a^2+1)) + 3/8 \arctan a - 0] =$$
$$= 1184/\pi \cdot 3/8 \cdot \pi/2 = 222$$



Bestimmtes Integral-Beispiel, Ausdehnungsarbeit von Gasen

In einem Zylinder der Grundfläche F befinde sich ein durch einen beweglichen Kolben komprimiertes Gas. Wenn der Kolben den Abstand x vom Zylinderboden hat, sei der Gasdruck im Zylinder p(x).
Bei Verschiebung des Kolbens von x = a nach x = b wird vom Gas Arbeit geleistet, die gegeben ist durch $W = {}_a\int^b F\, p(x)\, dx$
Für den Sonderfall der isothermen Ausdehnung eines idealen Gases mit der Zustandsgleichung

$$p(x) \cdot V(x) = p(a) \cdot V(a) = \text{const} \text{ ; Boyle-Mariottesches Gesetz}$$

ergibt sich dann mit dem Volumen $V(x) = F \cdot x$

$$p(x) = p(a) \cdot V(a) / V(x) = p(a) \cdot V(a) / (Fx)$$
$$W = F \ {}_a\int^b p(a)\, V(a) / (Fx)\, dx = p(a)\, V(a) \ {}_a\int^b 1/x \, dx$$

Mit der Stammfunktion von $f(x) = 1/x$ ergibt sich

$$A = p(a) \cdot V(a) \cdot [\ln x]^b_a = p(a) \cdot V(a) \cdot [\ln(b) - \ln(a)] = p(a) \cdot V(a) \cdot \ln(b/a)$$

Integrierbarkeit

Definition :

Es sei $A \subset R$ und $f : A \to R$ irgendeine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $g : A \to R$ heißt eine Stammfunktion zu f, falls $g' = f$.
Besitzt f eine Stammfunktion, so nennt man f integrierbar. Mit dem Symbol $\Im(A)$ bezeichnet man die Menge aller integrierbaren Funktionen auf A.

Hinweis: Eigentlich müsste f "stammfunktionen-integrierbar" heißen. Denn neben dem hier eingeführten gibt es weitere Integrationsbegriffe, wie etwa riemann-integrierbar und lebesgue-integrierbar.
Diese Begriffe sind nicht äquivalent!
Die meisten wichtigen Funktionen sind jedoch in jeder Weise integrierbar und die Integrale stimmen in diesen Fällen überein.

Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion. Jede monotone Funktion ist integrierbar. Jede (auch nur stückweise) stetige Funktion ist integrierbar.
Ist f(x) integrierbar, so braucht f(x) keine Stammfunktion zu haben! Hat f(x) eine Stammfunktion, so braucht f(x) nicht integrierbar zu sein.

Cauchy-Schwarz-Integralungleichung

$$[{}_a\int^b f(x)g(x)\, dx]^2 \le [{}_a\int^b f^2(x)\, dx] [{}_a\int^b g^2(x)\, dx]$$

Integralungleichungen

Die Ungleichungen gelten, falls die Integrale auf der rechten Seite existieren, d.h. endlich sind. Für die reellen Koeffizienten p, q > 1 gelt weiterhin $1/p + 1/q = 1$.

Dreiecksungleichung $\quad | {}_G\int f(x)\, dx | \le {}_G\int |f(x)|\, dx$

Höldersche Ungleichung $\quad | {}_G\int f(x)\, g(x)\, dx | \le ({}_G\int |f(x)|^p\, dx)^{1/p} ({}_G\int |g(x)|^q\, dx)^{1/q}$
Für p = q = 2 ergibt sich die Schwarzsche Integralungleichung

Minkowskische Ungleichung $\quad ({}_G\int |f(x)+g(x)|^r\, dx)^{1/r} \le ({}_G\int |f(x)|^r\, dx)^{1/r} + ({}_G\int |g(x)|^r\, dx)^{1/r}$

Jensensche Ungleichung $\quad ({}_G\int |f(x)|^p\, dx)^p \le ({}_G\int |f(x)|^r\, dx)^r$; für $0 < p < r$

Jensensche Konvexitätsungleichung

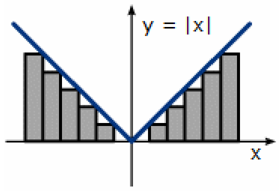
Für eine reelle, konvexe Funktion F(x), eine nichtnegative, integrierbare Funktion p(x) mit ${}_G\int p(x)\, dx > 0$ wird $\quad F({}_G\int p(x)q(x)\, dx / ({}_G\int p(x)\, dx)) \le {}_G\int p(x)\, F(q(x))\, dx / ({}_G\int p(x)\, dx)$

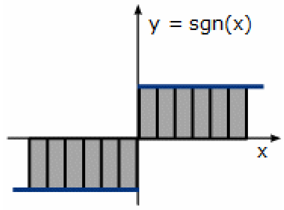
Integrierbare Funktionen

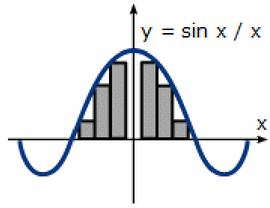
Integrierbare Funktionen müssen nicht unbedingt stetig sein! Beschränkte Funktionen mit endlich vielen Sprüngen sind integrierbar.
Die Signum-Funktion y = sgn(x) ist überall integrierbar. Die Betragsfunktion y = |x| ist überall integrierbar.

Unbeschränkte Funktionen, wie z.B. Funktionen mit Polstellen, sind am Pol nicht integrierbar. Bei solchen Funktionen darf die Integration nicht über eine Polstelle laufen.

Regeln für bestimmte Integrale







Bestimmte Integrale: Berechnung durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion und Subtraktion des Wertes der Stammfunktion an der unteren Grenze von dem Wert an der oberen Grenze:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Vorzeichenumkehr des Integrales beim Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Gleichheit von oberer und unterer Grenze: das Integral ist Null

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Bestimmte Integrale lassen sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, beispielsweise in zwei

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Änderung der Benennung der Integrationsvariablen ändert nicht den Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$

Der Wert eines bestimmten Integrals ist allein durch die Grenzen und die Funktion f(x) bestimmt.

Integralrechnung, Beispiele

Berechne die Integrale der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall:

Funktion	Intervall	Lösung	Funktion	Intervall	Lösung
$f(x) = 2x$	[1, 3]	8	$f(x) = x/2 + 1$	[-2, 2]	4
$f(x) = 5 - x$	[1, 4]	7,5	$f(x) = x^2$	[1, 3]	8,67
$f(x) = x^2/4 + 2$	[0, 4]	13,33	$f(x) = 4 - x^2/3$	[-3, 3]	18
$f(x) = 4x - x^2$	[0, 4]	10,67	$f(x) = x^3 + 1$	[-1, 1]	2
$f(x) = x^3/4-x+1$	[-2, 2]	4	$f(x) = x^3/4 - 3x^2/2 + 7x/2$	[0, 3]	7,31
$f(x) = x^4/4 - 2x^2 + 4$	[-2, 2]	8,53	$f(x) = 4 - 1/x^2$	[0,5; 2]	4,5
$f(x) = x + 1/x$	[1, 2]	2,19	$f(x) = \sqrt{x}$	[0, 9]	18

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse:

$f(x) = 4 - x^2$	10,67	$f(x) = x^2 - x - 2$	4,5
$f(x) = 4x^2 - x^3$	21,33	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	6,75
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$	8	$f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$	21,08
$f(x) = x^3/3 - 3x$	13,5	$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	8

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 6$	20,83	$f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x$	4,5
$f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - x^2$	2,67	$f(x) = x^2$, $g(x) = 5 - x^2/4$	13,33
$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$	0,083	$f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$	0,267
$f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 4x + 1$	8	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $g(x) = 3x - x^2$	3,08

Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2/4 + 2$, der Tangente im Punkt $P(4/y_P)$ und den Koordinatenachsen begrenzt wird? Lösung 4,33

Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3/16 - 3x^2/8 + 4$, der Wendetangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird? Lösung 13,25

Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 1$, der Normalen im Punkt $P(1/y_P)$ und der x-Achse begrenzt wird? Lösung 8

Integralrechnung, Beispiele (2)

1. Gesucht ist die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = 0{,}25\,x^2 + 2$ und der x-Achse in den Grenzen a = -1 und b = 5.
Lösung: 22,5 FE

2. Gesucht ist die Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion $g(x) = x^2 - 2x$ in den Grenzen a = 0 und b = 3.
Lösung: 2,66 FE

3. Gegeben sind die beiden Funktionen $g(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ und $f(x) = -3x + 28$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte und die eingeschlossene Fläche.
Lösung: 40,5 FE

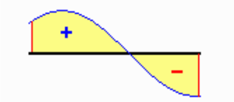
4. Gegeben ist die Parabel $g(x) = -x^2 + 4$. Dieser wird durch die Gerade $f(x) = 3$ die Spitze abgeschnitten. Wieviel % der Parabelfläche über der X-Achse sind das?
Lösung: 12,5%

5. Die Fläche, die von der x-Achse und den Graph der Parabel $y = -0{,}5\,x^2 + 3x$ eingeschlossen wird, soll durch eine Gerade, die durch den Ursprung geht, halbiert werden. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Parabel mit der Geraden.
Lösung: P(4,76 | 2,95)

6. Die Fläche, die von der Normalparabel $y = x^2$ und einer waagerechten Geraden eingeschlossen wird, soll 36 FE betragen. Berechnen Sie den Abstand der Geraden von der x-Achse.
Lösung: $y_A = 9$

7. Berechnen Sie die Fläche, die von den beiden Funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2$ und $g(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ eingeschlossen wird.
Lösung: A = 16 FE

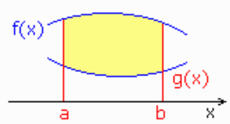
8.Von der Parabel $y = x^2 + 1$ und den drei Geraden $y = 2x + 3$, $x=0$ und $x = x_1$ wird im 1.Quadranten eine Fläche A = 16/3 FE eingeschlossen. Wie groß ist x_1?
Lösung: $x_1 = 2$



Flächeninhaltsberechnung

Gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt $A = \int_a^b f(x)\,dx$
Gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt $A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$
Besitzt f(x) in (a,b) n Nullstellen:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx \right|$$



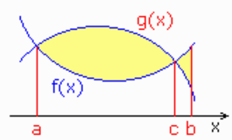
Flächenstück zwischen 2 Funktionen f(x) und g(x)

f(x) und g(x) schneiden sich nicht in [a,b]

$$A = \left| \int_a^b [\, f(x)-g[x] \,]\,dx \right|$$

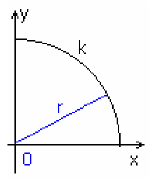
f(x) und g(x) schneiden sich bei c in [a,b]

$$A = \left| \int_a^c [\, f(x)-g[x] \,]\,dx \right| + \left| \int_c^b [\, f(x)-g[x] \,]\,dx \right|$$



Hinweis: Die Fläche zwischen einer Kurve und der *y*-Achse entspricht der Integration der Umkehrfunktion.

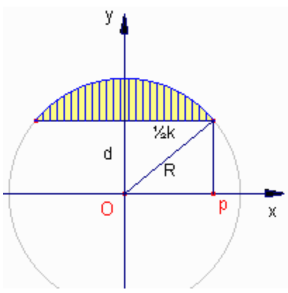
Fläche eines Kreises mit Hilfe der Integralrechnung



Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$
$x = r \sin t$; $dx = r \cos t\,dt$
$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$
$A = 4 \int_0^r y\,dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = r \Rightarrow t = \pi/2$
$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-r^2 \sin^2 t} * r \cos t\,dt = 4 \int_0^{\pi/2} r \sqrt{1-\sin^2 t} * r \cos t\,dt =$
$= 4 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2 t\,dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 4r^2 * \frac{1}{4} (2t + \sin 2t) \quad \Big|_0^{\pi/2}$
$= r^2 ((\pi + \sin \pi) - (0 + \sin 0)) = r^2 \pi$

Fläche einer Ellipse mit Integralrechnung

Ellipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
$x = a \sin t$; $dx = a \cos t\,dt$
$y = \pm\sqrt{(a^2b^2 - b^2x^2)/a^2} = \sqrt{b^2/a^2\,(a^2 - x^2)}$
$A = 4 \int_0^a \sqrt{b^2/a^2\,(a^2-x^2)}\,dx = 4\, b/a \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$ $\qquad x = 0 \Rightarrow t = 0$
$= 4\, b/a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t} * a \cos t\,dt =$ $\qquad x = a \Rightarrow t = \pi/2$
$= 4\, b/a \int_0^{\pi/2} a \sqrt{1-\sin^2 t} * a \cos t\,dt = 4\, b/a \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\,dt =$
$= 4\, ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 4\, ab\, \frac{1}{4} (2t + \sin 2t) = ab\, (2t + \sin 2t) \quad \Big|_0^{\pi/2}$
$= ab\, ((\pi + \sin \pi) - (0 + \sin 0)) = a\, b\, \pi$



Kreissegmentfläche

Gesucht ist die Fläche A des hervorgehobenen Kreissegments.
Lösung: Es sei p = ½k. Dann wird den Flächeninhalt

$$1/2\, A = \int_0^p (\sqrt{R^2 - x^2} - d)\,dx = \int_0^p \sqrt{R^2 - x^2}\,dx - d * p$$

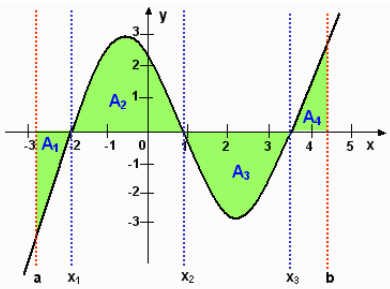
Nebenrechnung:
Mit der Substitution $x = R \cos(u)$ und $dx = -R \sin(u) * du$ wird

$I = \int_0^p \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = - \int_{\pi/2}^{\arccos(p/R)} R^2 \sin u\,du =$
$= R^2 \int_{\pi/2}^{\arccos(p/R)} (1/2 - 1/2 \cos 2u)\,du =$
$= 1/2\, R^2\, (u)_{\pi/2}^{\arccos(p/R)} - 1/4\, R^2\, (\sin 2u)_{\pi/2}^{\arccos(p/R)} =$

$= 1/4\, R^2 \pi - R^2/2 \arccos(p/R) - R^2/4 \sin \pi + 1/4\, R^2 \sin 2(\arccos(p/R)) =$

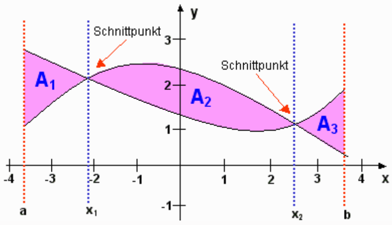
und wegen $\cos(\arccos(p/R)) = p/R$ und $\sin(\arccos(p/R)) = d/R$
$I = 1/2\, R^2 \arcsin(p/R) + 1/2\, p\, d$
Für den Flächeninhalt wird somit $\qquad A = 2\, I - 2\, d * p$
$A = R^2 \arcsin(k / (2R)) - 1/2\, d\, k$

Grundaufgaben

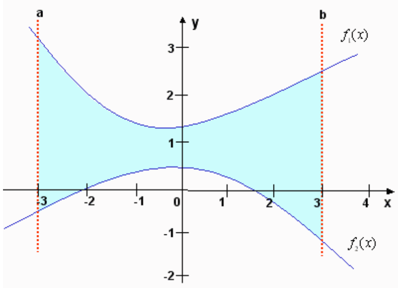


Funktion f(x) besitzt Nullstellen
Innerhalb des Intervalls werden die Teilflächen integriert und zur Gesamtfläche summiert

$$A = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{b} f(x)dx$$

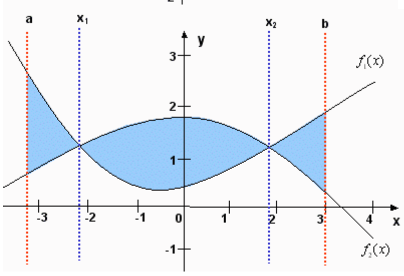


Fläche zwischen 2 Funktionen mit Schnittpunkten
Ähnlich wie bei Nullstellen, muss man auch die Fläche integrieren, die von zwei Graphen eingeschlossen wird, die sich schneiden. Auch hier darf nicht über die Schnittpunkte hinweg integriert werden. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_b} f(x)dx$



Bei Funktionen, deren Graphen sich nicht schneiden, wird die Fläche zwischen den Graphen wie folgt berechnet: $\mathrm{A} = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$

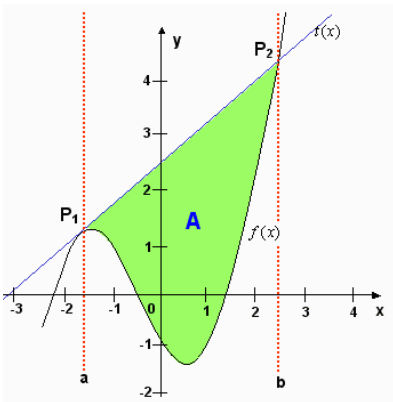
Vor dem Integrieren wird die „untere" Funktion von der „oberen" Funktion subtrahiert. Das Ergebnis, die Differenz, wird als eine Funktion innerhalb des Intervalls integriert.



Bei Funktionen, deren Graphen sich schneiden, wird die Fläche zwischen den Graphen wie folgt berechnet:

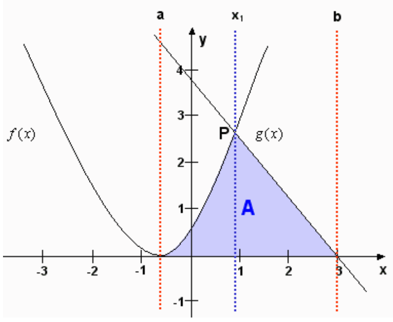
$$\mathrm{A} = \int_a^{x_1} |f_1(x) - f_2(x)| + \int_{x_1}^{x_2} |f_1(x) - f_2(x)| + \int_{x_2}^{b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

Für jede Teilfläche wird die „untere" von der „oberen" Funktion subtrahiert und die Differenz-Funktion integriert. Alle Teil-Integrale werden summiert. Alle Flächen haben absolute Beträge als Maßzahlen. Es darf nicht über die Schnittpunkte hinweg integriert werden.



Die Tangente t(x) berührt den Graphen der Funktion f(x) im Punkt P_1 und schneidet ihn im Punkt P_2.
Über die 1. Ableitung der Funktion ermittelt man die Gleichung für die Tangente. Durch Gleichsetzen beider Funktionen ermittelt man den Schnittpunkt P_2. Damit sind die Intervallgrenzen gegeben. Die Fläche berechnet man mit:

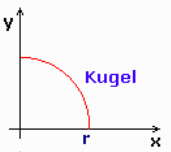
$$\mathrm{A} = \int_a^b (t(x) - f(x))dx$$

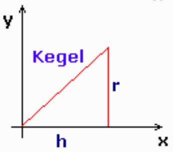


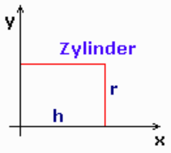
Der Graph der Funktion und eine Gerade schneiden sich in einem Punkt und schließen mit der x-Achse eine Fläche ein. Es müssen die Nullstellen beider Funktionen und ihr Schnittpunkt ermittelt werden. Das Gesamtintervall besteht aus zwei Teilintervallen, die sich im Schnittpunkt „berühren":

$$\mathrm{A} = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{b} g(x)dx$$

Volumen von Kugel, Kegel und Zylinder mit Hilfe der Integralrechnung







Kugel: $V = 4/3\, r^3\, \pi$

$k: x^2 + y^2 = r^2 \qquad y^2 = r^2 - x^2$

$V = \pi * 2 \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi\, (r^2x - x^3/3) \quad \Big|_0^r$

$= 2\pi\, (r^3 - r^3/3) - 2\pi\, (0 - 0) = 2\pi\, (2r^3)/3 = 4/3\, r^3\, \pi$

Kegel: $k = r/h \qquad f: y = r/h\, x$

$V = \pi \int_0^h r^2/h^2\, x^2\, dx = \pi * r^2/h^2 * x^3/3 \quad \Big|_0^h$

$= \pi\, r^2/h^2 * h^3/3 - \pi\, r^2/h^2 * 0/3 = (r^2\, \pi\, h)/3$

Zylinder: $f: y = r \qquad V = \pi \int_0^h r^2\, dx = \pi\, r^2\, x \quad \Big|_0^h$

$= \pi\, r^2\, h - \pi\, r^2\, 0 = r^2\, \pi\, h$

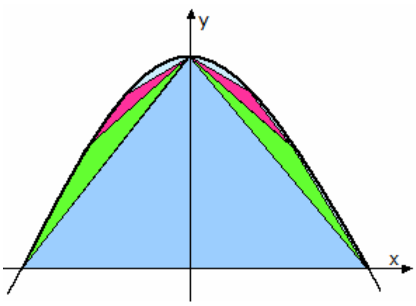
Flächenberechnung

Beispiel: $A(u|v)$ mit $u>0$ sei ein Punkt des Schaubildes K von $f(x) = e^{-x}$. Die Parallele durch A zur x-Achse schneide die y-Achse in B. Die Tangente in A an das Schaubild K schneide die y-Achse in C. Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt des Dreiecks extremal?

Lösung: Tangente in $A(u|e^{-u})$; - e): $y = -e^{-u}\, x + ue^{-u} + e^{-u}$ → $C(0|ue^{-u} + e^{-u})$. Flächeninhalt des Dreiecks ABC: $A(u) = 1/2\, u$
$(2-u)e^{-u}$. Um das Extremum zu bestimmen setzten wir $A'(u) = 0$:

$A'(u) = 1/2u\, (2 - u)e^{-u} = 0$

bei $u = 0$ mit Vorzeichenwechsel von A' vom "+" nach "-". → Relatives Maximum $A(2) = 2e^{-2}$. Da die Randwerte $\lim_{u \to 0} A(0) = 0$ und $\lim_{u \to \infty} A(u) = 0$ handelt es sich um ein absolutes Maximum.



Anfänge der Integralrechnung

Das Problem der Flächenberechnung ist sehr alt und wurde bereits von Archimedes untersucht. Er ermittelte zum Beispiel, wie groß der Flächeninhalt unter einer Parabel ist. Die ist erstaunlich, da es zu seiner Zeit keine praktische Verwendung für diese Rechnungen gab.
Die grundlegende Idee für diese Flächenberechnung ist folgende: Man versucht, eine „Kurvenfläche" mit solchen Flächen auszufüllen, die man leicht berechnen kann. Das sind vor allem Rechteck- und Dreieickflächen. Dann summiert man diese Teilflächen und erhält die Gesamtfläche. Archimedes füllte die Parabelfläche mit gleichschenkligen Dreiecken aus. Die noch freigebliebene Fläche wird immer kleiner und wird mit einem immer kleineren Dreieck ausgefüllt.
Theoretisch kann man mit allerkleinsten Dreiecken die Parabelfläche ganz ausfüllen. Mittels dieser Methode können sehr genaue Ergebnisse erzielt werden. Da die Fläche ausgeschöpft wird, nennt man diese Methode auch „Ausschöpfungs-Methode", Fachbegriff: Exhaustions-Methode.
Die Ausschöpfungs-Methode ist keine Integralrechnung im eigentlichen Sinn, da die Integralrechnung auf einer anderen Methode beruht.

Elliptische Integrale

Elliptische Integrale sind Integrale, deren Integrand eine Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Wurzeln enthält.
Elliptische Integrale sind nicht analytisch exakt auflösbar und müssen durch Näherungsrechnungen bestimmt werden. U.a. bei der Berechnung der Bogenlänge einer elliptischen Kurve treten elliptische Integrale auf.

Elliptisches Integral 1.Art $\qquad F(k,\phi) = \int_0^\phi d\phi \,/\, \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}$

Elliptisches Integral 2.Art $\qquad E(k,\phi) = \int_0^\phi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}\, d\phi$

$B(k,\phi) = \int_0^\phi \cos^2 \phi\, \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}\, d\phi$

$B(k,\phi) = 1/k^2\, (E(k,\phi) - (1-k^2)\, F(k,\phi))$

Elliptisches Integral 3.Art $\qquad \Pi(h,k,\phi) = \int_0^\phi d\phi \,/\, (1 + h \sin^2 \phi)\, \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}$

Die angegebene Darstellung der Integrale wird Legendresche Normalform genannt. Die Bezeichnungen $F(k,\phi)$, $E(k,\phi)$ und $\Pi(h,k,\phi)$ gehen ebenfalls auf Legendre zurück. Mitunter werden auch nur die unbestimmten Integrale als die elliptischen Integrale bezeichnet.
Sind die oberen Integrationsgrenzen $\phi = \pi/2$, so spricht man vom vollständigen elliptischen Integral 1., 2. und 3.Art.

Vollständige elliptische Integrale

Elliptische Integrale sind Integrale, deren Integrand eine Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Wurzeln enthält. Diese sind über

$F(k,\phi) = \int_0^\phi d\phi \,/\, \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}$

$E(k,\phi) = \int_0^\phi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}\, d\phi$

$B(k,\phi) = \int_0^\phi \cos^2 \phi\, \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}\, d\phi$

definiert.

Durch Jacobi werden diese Integrale zur Konstruktion der nach ihm benannten Jacobischen elliptischen Funktionen verwendet. Setzt man für die obere Integrationsgrenze $\phi = \pi/2$ so ergeben sich die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2.Art mit

$K(k) = F(k, \pi/2)$ $E(k) = E(k, \pi/2)$ $B(k) = B(k, \pi/2)$

Näherungsweise Berechnung der Jacobischen elliptischen Integrale

```
real procedure K(A) ; value A ; real A ;
begin   real at, a2, b, kt ; integer n;
        b := abs(sin(A));
        if b>=0.9539 then begin
        a1 := (1+b)/2; b := sqrt (b);
        a2 := (a1 + b)/2 ; k1 := cos(A);
        b := sqrt(a1 * b); K := ln(128 * (a2+b) * a2 * a1 ** 2 / k1 ** 4)/(a2 +b)/2
        end
else begin      b := abs(cos(A)); a1:=1;
        for n := 1,2,3 do begin
        a2 := (a1+b)/2; b := sqrt(a1 * b); a1 := a2 end;
        K := 3.14159265359/(a1 + b)
end end K

real procedure E(A) ; value A ; real A ;
begin   real a1, a2, b, s, kl ; integer n;
        b := abs (sin (A));
        k1 := abs(cos(A));
        if b>= .9539 then begin
        a1 := (1 + b)/2 ; s := k1 * k1/2+a1 * a1 - b; b := sqrt (b);
        a2 := (a1+b)/2; A := a1 * b; s := s/2 + a2 * a2 - A;
        b := sqrt(A); E := (a2+b)/2+(s/(a2+b)) * ln(128 * (a2+b) * a2 * a1 * a1/(k1 ** 4)) end
else begin      b := k1; a1 := 1; s := 1+b*b;
        for n := 1,2,3 do begin
        a2 := (a1 +b)/2; A := a1 * b; a1 := a2;
        s := s/2 - a1 * a1 + A; b := sqrt (A) end;
        E := 12.5663706144 * s / (a1 +b)
end end E
```

Fresnelsche Integrale

Die Fresnelschen Integrale sind analytisch nicht exakt auflösbare Integrale. Sie treten u.a. bei der Klothoide auf.

Fresnelsches Integral 1.Art $C(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \cos^2 t\, dt$
Fresnelsches Integral 2.Art $S(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \sin^2 t\, dt$

Durch die Transformation $x = \sqrt{(2/\pi)}\, z$ ergeben sich die mit den Fresnelschen Integralen verbundenen Funktionen

$C_1(x) = \sqrt{(2/\pi)}\ {}_0\int^x \cos^2 t\, dt$ $S_1(x) = \sqrt{(2/\pi)}\ {}_0\int^x \sin^2 t\, dt$
$C_2(x) = 1/(\sqrt{2}\ \pi)\ {}_0\int^x \cos t\, dt/\sqrt{t}$ $S_2(x) = 1/(\sqrt{2}\ \pi)\ {}_0\int^x \sin t\, dt/\sqrt{t}$

die mitunter in der Literatur auch Fresnelsche Integrale genannt werden.
Auf der rechten Seite werden $C_2(x)$ und $S_2(x)$ für einzugebene Argumente $x > 0$ näherungsweise berechnet. Fresnelsche Integrale und die damit verbundene Klothoide können zur Berechnung Häufigkeitsverteilungen bei Interferenzen genutzt werden.

Komplexe Nullstellen der Fresnelschen Integrale
1) $C(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \cos^2 t\, dt$
Nullstellen: 0 ; 1,7437 + 0,3057 i ; 2,6515 + 0,2529 i ; 3,3208 + 0,2239 i ; 3,8759 + 0,2047 i ; 4,3611 + 0,1909 i ; …
gerundete Werte $\sqrt{(4n-1)} - \ln(\pi \sqrt{(4n-1)}) / (\pi^2 \sqrt{((4n-1)^3)}) + \ln(\pi \sqrt{(4n-1)}) / (\pi \sqrt{(4n-1)})\ i$

2) $S(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \sin^2 t\, dt$
Nullstellen: 0 ; 2,0093 + 0,2886 i ; 2,8335 + 0,2443 i ; 3,4675 + 0,2185 i ; 4,0026 + 0,2008 i ; 4,4742 + 0,1877 i ; …
gerundete Werte $2 \sqrt{n} - \ln(2\pi \sqrt{n}) / (8\pi^2 \sqrt{(n^3)}) + \ln(2\pi \sqrt{n}) / (2\pi \sqrt{n})\ i$

Maxima und Minima der Fresnelschen Integrale
1) $C(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \cos^2 t\, dt$
Maxima: $M_n = C(\sqrt{(4n+1)})$ = 0,779893 ; 0,640807 ; 0,605721 ; 0,588128 ; 0,577121 ; 0,569413 ; …
Minima: $m_n = C(\sqrt{(4n+3)})$ = 0,321056 ; 0,380389 ; 0,404260 ; 0,417922 ; 0,427036 ; 0,433666 ; …

2) $S(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \sin^2 t\, dt$

Maxima: $M_n = S(\sqrt{(4n+2)}) = 0{,}713972 ; 0{,}628940 ; 0{,}600361 ; 0{,}584942 ; 0{,}574957 ; 0{,}567822 ; \ldots$
Minima: $m_n = S(\sqrt{(4n+4)}) = 0{,}343415 ; 0{,}387969 ; 0{,}408301 ; 0{,}420516 ; 0{,}428877 ; 0{,}435059 ; \ldots$

Integralgleichung

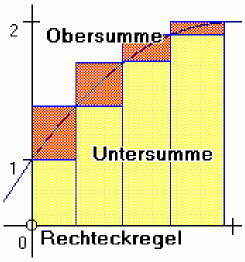
Bei einer Integralgleichung handelt es sich um eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion f(x), wobei in der Gleichung ein Integral auftritt, dessen Integrand von f(x) abhängt.
Johann Bernoulli (1667-1748) behandelt in seiner "Ersten Integralrechnung" folgende Aufgabe:
Es ist die Funktion y = f(x) der Kurve OB zu bestimmen, die so beschaffen ist, dass die Fläche OAB stets ein Drittel des umschriebenen Rechtecks OABC ist.

Lösung: Es ergibt sich die Integralgleichung $\int_0^x f(x)\,dx = 1/3\, x\, f(x)$
Diese Volterrasche Integralgleichung wird durch Differentiation gelöst:
$f(x) = 1/3\,(x\,f'(x) + f(x))$ $\quad df(x)/f(x) = 2\,dx/x$
Die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung ergibt eine Schar von Parabeln
$f(x) = Cx^2$; mit $0 \le x \le \infty$

Beispiel 2: $\int_0^x e^{-x} f(y)\,dy = e^{-x} + x - 1$
Differenziation nach x ergibt $\quad -\int_0^x e^{-x} f(y)\,dy + e^{-x} f(x) = -e^{-x} + 1$
und mit Hilfe der Ausgangsgleichung $\quad -e^{-x} - x + 1 + e_x f(x) = -e^{-x} + 1$
und $f(x) = x\,e^x$
Die Methode der Differenziation kann stets angewandt werden, wenn der Kern einer Volterraschen Integralgleichung erster Art ein Polynom ist.

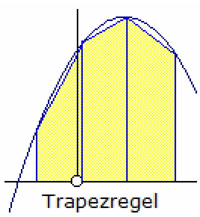
Numerische Integration oder Quadratur

Integrale, die analytisch nur schwer oder gar nicht zu lösen sind, können numerisch durch eine Aufspaltung des Integrals in eine endliche Summe berechnet werden. Unter numerischer Integration versteht man die angenäherte zahlenmäßige Berechnung eines bestimmten Integrals mit numerischen Methoden.
Der Grundgedanke der numerischen Integration besteht darin, die Funktion y = f(x) näherungsweise durch ein Interpolationspolynom P(x) darzustellen und das Integral über das Interpolationspolynom als Näherung für das gesuchte Integral anzusehen. Das Intervall [a,b] wird in n Teilintervalle der Länge d=(b-a)/n zerlegt. Teilpunkte: $x_0=a$, $x_1=a+d$, ..., $x_n=a+nd=b$



Rechteckformel

Die Fläche unter einer Funktion lässt sich näherungsweise berechnen, indem man das Gesamtintervall [a,b] in n gleich große Teilintervalle [a(i),b(i)] teilt, und in diese Rechtecke einbeschreibt, deren Seiten zum einen von der Teilintervallbreite $\Delta x = b(i) - a(i)$ zum anderen vom Funktionswertminimum bzw. Funktionswertmaximum des Teilintervalls gebildet werden. Zweckmäßig ist dabei eine konstante Teilintervallbreite Δx, was allerdings nicht unbedingt notwendig ist. Die Summe aller "kleinen" Rechtecke, d.h. die Untersumme, ist kleiner als der gesuchte Flächeninhalt, die Obersumme ist größer.
Ist die Funktion im Riemannschen Sinne integrierbar, streben Untersumme U(n) und Obersumme O(n) für eine wachsende Zahl von Teilintervallen gegen die gesuchte Fläche unter der Funktion.
Fläche A wird durch Rechtecke angenähert $\quad A = |\int_a^b f(x)\,dx| \approx d\,(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$
Für konstante Funktionen ist die Rechteckregel exakt.



Trapezformel, Trapezregel, Sekantenformel

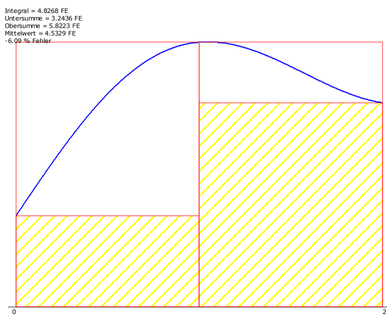
Fläche A wird durch Trapeze angenähert (d = (b-a)/n)
$$A = |\int_a^b f(x)\,dx| \approx d/2\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_{1n})$$
zwei Stützstellen
$$A = |\int_a^b f(x)\,dx| \approx (b-a)/2\,(y_a + y_b)$$
Die Trapezformel entspricht dem Mittelwert der Ober- und Untersumme der Rechteckformel. Für Polynome ersten Grades ist die Trapezformel exakt. Der Näherungsfehler ist von der Größe $nd^3/12\, f''(\xi)$.
Als Poncelet-Formel wird der Mittelwert der Trapez- und Tangentenformel bezeichnet.
Kennt man außer den Stützstellen x_0 bis x_n auch x_{-1} und x_{n+1}, so gilt die modifizierte Trapezregel mit dem Fehlerglied $11n/720\, d^5 f^{(4)}(\xi)$:
$$A = |\int_a^b f(x)\,dx| \approx d\,(y_0/2 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_{1n}/2) + d/24\,(-y_{-1} + y_1 + y_n - y_{m+1})$$

Mittelpunktsregel

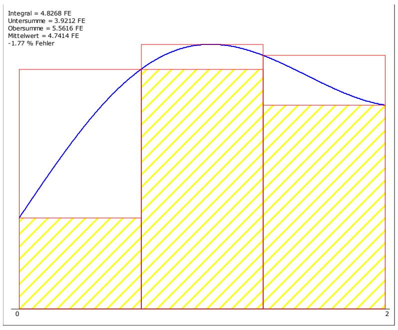
Während bei der Rechteckregel, je nach Wahl, der Funktionswert der linken bzw. rechten Intervallgrenze zur Ermittlung der Höhe des eingeschriebenen Rechtecks genutzt wird, liefert bei der Mittelpunktsregel das arithmetische Mittel der Intervallgrenzen (der Mittelwert) die Stützstelle. Bei einer Vielzahl von Funktionen wird dadurch ein besserer Näherungswert erreicht. Die Güte der Konvergenz wird nicht verbessert.

Tangentenformel

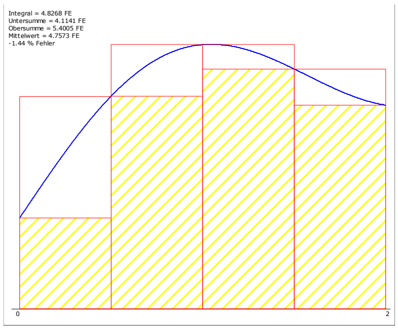
$$A = |\int_a^b f(x)\,dx| \approx 2\,(b-a)/n\ \ (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}),\ n \text{ gerade}$$



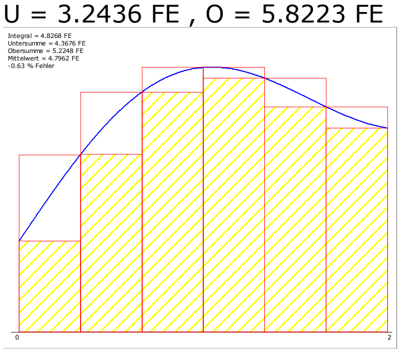
2 Intervalle
U = 3.2436 FE , O = 5.8223 FE



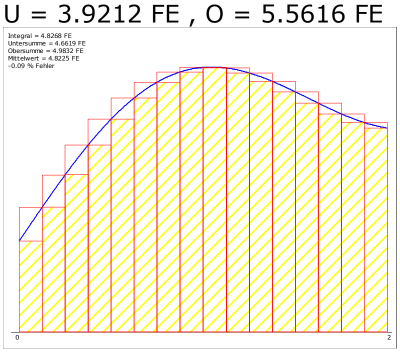
3 Intervalle
U = 3.9212 FE , O = 5.5616 FE



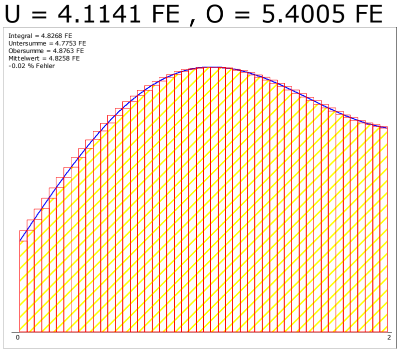
4 Intervalle
U = 4.1141 FE , O = 5.4005 FE



6 Intervalle
U = 4.3676 FE , O = 5.2248 FE

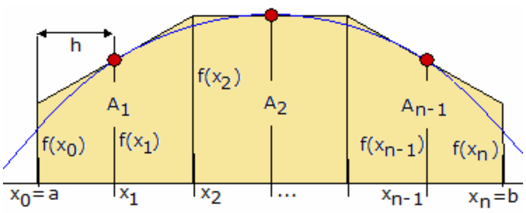


16 Intervalle
U = 4.6619 FE , O = 4.9832 FE



50 Intervalle
U = 4.7753 FE , O = 4.8763 FE

Beispiel: Ober- O und Untersumme U für y = x+sin(2x)+1 im Intervall [0,2], das Integral beträgt 4.828 FE.



Mittentangentenregel

Diese Regel wird für die Herleitung der Simpsonregel verwendet. Ähnlich wie beim Trapezverfahrens soll hier eine krummlinig begrenzte Fläche im Intervall [a,b] näherungsweise durch Addition von gleich breiten Trapezflächen parallel zur y-Achse berechnet werden. Jedoch soll hier eine Trapezseite jeweils an jeder zweiten Stützstelle Tangente des Funktionsgraphen sein.

Zunächst wird das Intervall [a,b] in n Teile der gleichen Breite h unterteilt, wobei n eine gerade natürliche Zahl ist. Anschließend zeichnet man an jeder Stützstelle mit ungeradem Index (x_1; x_3; …; …; x_{n-1}) eine Tangente an den Graphen. Die Enden der Tangente liegen jeweils an der Stützstelle vor und nach dieser Stützstelle. Hierdurch erhält man Trapeze, die ein wenig über den Funktionsgraphen hinausgehen. Die Fläche dieser Trapeze wird mit A = a 2h berechnet. Die Breite dieser Flächen beträgt 2h. Die Funktionswerte werden jeweils an der Stützstelle berechnet, bei dem der Index ungerade ist. Addition ergibt den Näherungswert M_n:

$$M_n = 2h\,[f(a+h) + f(a+3h) + \ldots + f(a+(n-1)h))$$

Stellt T_n die entsprechende Fläche mittels Trapezverfahren dar, so ergibt der Ansatz

$$S_n = (2\,T_n + M_n) / 3$$

$$S_n = h/3\,(f(a) + 4\,f(a+h) + 2\,f(a+2h) + 4\,f(a+3h) +$$
$$+ \ldots + 2\,f(a+(n-2)h) + 4\,f(a+(n-1)k) + f(b))$$

die Simpson-Regel.

Simpsonsche Regel

Die Fläche wird durch Teilflächen unter Parabelbögen (Polynome zweiten Grades) angenähert. Das Intervall muß in eine gerade Anzahl n von Segmenten unterteilt sein. Für Polynome bis einschließlich dritten Grades ist die Formel exakt.

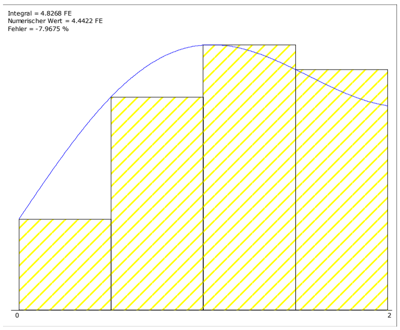
$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \approx d/3\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_{1n}) \qquad d = (b-a)/n$$

Keplersche Fassregel

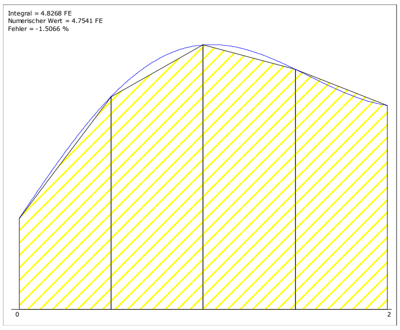
Johannes Kepler sorgte, wie damals üblich, für sich und seine Familie jährlich durch das Einlagern von einigen Fässern Wein. Es wunderte ihn aber bald die Volumenvermessungstechnik der Fassmacher bzw. der Weinlieferanten. Es wurde mit einer Rute durch das an der dicksten Fassstelle gelegene Spundloch zum Rand hin gemessen. Da Kepler klar wurde, dass so extrem unterschiedliche Fässer gleiches Volumen hätten, näherte er die Fassbegrenzung durch eine Parabel an und entwickelte so die nach ihm benannte Fassregel. Simpsonregel für 2 Teilintervalle; $x_m = (a+b)/2$

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \approx (b-a)/6 * [\,f(a) + 4f(x_m) + f(b)\,]$$

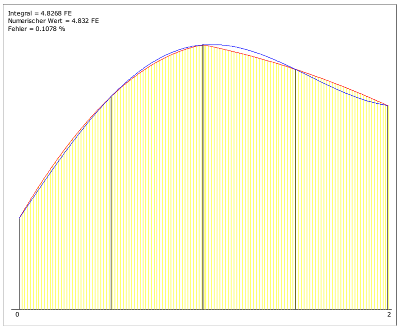
Beispiel: Vergleich von Rechteck-, Trapez- und Simpsonregel für $y = x+\sin(2x)+1$ im Intervall [0,2] für jeweils 4 Intervalle, das Integral beträgt 4.828 FE.



Rechteckregel = 4.4422 FE



Trapezregel = 4.7541 FE



Simpsonregel = 4.832 FE

Newtonsche 3/8-Regel $A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \approx 3/8\,(b-a)\,(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$, 3 Stützstellen

Diese Formel wird in der Literatur auch Simpson-3/8-Regel genannt.

Romberg-Verfahren

Die Idee der Romberg-Integration ist, zusätzlich zu einer feineren Unterteilung der Intervalle in der Trapezregel den Integrations-Fehler abzuschätzen und in die Integralberechnung mit einzubeziehen (Extrapolation). Dadurch erhöht sich die Ordnung des Fehlergliedes, und man braucht meist wesentlich weniger Iterationsschritte, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

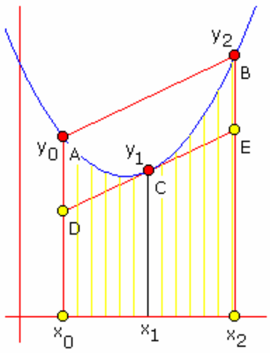
Sind T_n Werte der Trapezregel für n Teilintervalle und T_{2n} der Wert für 2n Teilintervalle, so ergibt sich eine bessere Näherung mit Konvergenzfaktor q = 1/16 $S_{2n} = (4^* T_{2n} - T_n)/3$,

Konvergenzfaktor q = 1/64 $R_{2n} = (16^* S_{2n} - S_n)/15$,

Steklov-Verfahren

Erweiterung des Rombergverfahrens mit $T_{mk} = (4^m * T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}) / (4^m-1)$

Herleitung der Keplerschen Fassregel



Bekannt sind von einer Parabel drei Stützpunkte $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, wobei x_1 genau der Mittelwert von x_0 und x_2 ist.

Ohne die Parabel selbst zu bestimmen, ist der Flächeninhalt unter der Parabel im Intervall $[x_0, x_2]$ zu bestimmen.

Die Fläche des von den äußeren Parabelpunkten und der Tangente im Intervallmittelpunkt gebildete Parallelogramm wird von der Parabel gedrittelt.

Daraus ergibt sich für die Fläche unter der Parabel

$$A = A_{\text{kleines Trapez}} + 1/3\, A_{\text{Parallelogramm}}$$

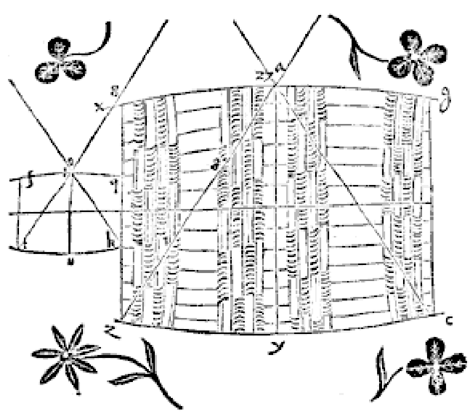
Die Parallelogrammfläche ist die Differenz der Flächen des großen und des kleinen Trapezes, d.h.

$$A_{\text{Parallelogramm}} = (y_0 + y_2)/2\,(x_2 - x_0) - y_1\,(x_2 - x_0)$$

und somit $A = y_1\,(x_2 - x_0) + 1/3\,[(y_0 + y_2)/2\,(x_2 - x_0) - y_1\,(x_2 - x_0)]$

$$\mathbf{A = (x_2 - x_0)/6 * (y_0 + 4\, y_1 + y_2)}$$

Die Simpson-Regel ergibt sich durch wiederholte Anwendung der Keplerschen Fassregel auf benachbarte Intervalle.



Keplersche Fassregel

Johannes Kepler berichtete 1614, wie er auf seine Betrachtungen zu der nach ihm benannten Fassregel verfiel:

"Als ich im November des letzten Jahres meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, als an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorgenden Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trank zu besorgen.

Als einige Fässer eingekellert waren, kam am vierten Tag der Verkäufer mit einer Messrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung, ihrem Inhalt nach bestimmte.

Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am

Spundloch die Zahl der Eimer im Fass.
Ich wunderte mich, dass die Querlinie durch die Fasshälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Faß mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen."

Im Ergebnis gelang es Kepler, ohne Kenntnisse der noch nicht entwickelten Integralrechnung ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Fläche unter einer Parabel zu finden. Der Name "Fassregel" ist streng genommen nicht korrekt, da hier kein Volumen, sondern ein Flächeninhalt ermittelt wird.

Newton-Cotes-Formeln

$$A = \left| {}_a\int^b f(x)\,dx \right| \approx nh/P_n \sum_{i=0}^{n} f(a+ih)\, p_{in} + R_n$$

mit $P_n = p_{0n} + p_{1n} + \ldots + p_{1nn}$, $h=(b-a)/n$, p_{in} ... Gewichte

n	**P_n**	**$p_0 \ldots p_n$**
1	2	1, 1
2	6	1, 4, 1
3	8	1, 3, 3, 1
4	90	7, 32, 12, 32, 7
5	288	19, 75, 50, 50, 75, 19
6	840	41, 216, 27, 272, 27, 216, 41
7	17280	751, 3577, 1323, 2989, 2989, 1323, 3577, 751

Spezielle Bezeichnungen: n = 1 ... Rechteckregel ; n = 2 ... Simpson-Regel ; n = 3 ... Newtonsche 3/8 - Regel ; n = 4 ... Bode-Regel

Monte-Carlo-Verfahren

Sind die x_i gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall [0;1], so gilt $\Rightarrow (1/n) * \Sigma f(x_i) \approx {}_0\int^1 f(x)\,dx$
rekursive Formel: $I_k = [\, I_{k-1}\,(k-1) + f(x_k)\,] / k$

Bode-Regel, Boole-Regel

Die Bode-Regel ist die Newton-Cotes-Formel für n = 4:

$${}_{x1}\int^{x5} f(x)\,dx = 2/45\, h\,(7 f_1 + 32 f_2 + 12 f_3 + 32 f_4 + 7 f_5) - 8/945\, h^7 f^{(6)}(\xi)$$

wobei die x_1 bis x_5 jeweils den Abstand h voneinander besitzen
Der Name Bode-Regel ist nicht korrekt. Die Regel ist in Wirklichkeit von Boole (1960). Durch einen Abschreibfehler wurde aus "Boole" 1972 "Bode". Dieser Fehler setzte sich allerdings in der Fachliteratur durch.

Hardy-Regel

$${}_{x1}\int^{x7} f(x)\,dx = 1/100\, h\,(28 f_1 + 162 f_2 + 220 f_4 + 162 f_6 + 28 f_7)$$

wobei die x_1 bis x_7 jeweils den Abstand h voneinander besitzen

Bessel-Quadratur

$I \approx (b-a)/n * (-1/24 * f(a-\Delta x) + f(a)/2 + 25/24\, f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \ldots + f(b-2\Delta x) + 25/24\, f(b-\Delta x) + 1/2 * f(b) - 1/24 * f(b+\Delta x))$

Hermite-Quadratur

$I = h/2\,(f(a)-f(b)) + h\, \Sigma f(a+jh) + h^2/12\,(f'(a)-f'(b))$
mit h = (b-a)/n und Summierung von j=1 bis n-1

Tschebyschow-Formel

Quadraturformeln der Struktur $${}_{-1}\int^1 f(x)\,dx = 2/n \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Die Stützstellen x_i ergeben sich aus den Wurzeln folgender Gleichungen:

n	**$G_n(x)$ =**
1	x
2	$1/3\,(3x^2 - 1)$
3	$1/2\,(2x^3 - x)$
4	$1/45\,(45x^4 - 30x^2 + 1)$
5	$1/72\,(72x^5 - 60x^3 + 7x)$
6	$1/105\,(105x^6 - 105x^4 + 21x^2 - 1)$
7	$1/6480\,(6480x^7 - 7560x^5 + 2142x^3 - 149x)$
8	$1/42525\,(42525x^8 - 56700x^6 + 20790x^4 - 2220x^2 - 43)$
9	$1/22400\,(22400x^9 - 33600x^7 + 15120x^5 - 2280x^3 + 53x)$

Da nur für $n \le 7$ und n=9 alle Wurzeln reell sind, sind nur diese Tschebyschow-Formeln für diese n verfügbar. Die Fehlerterme sind

für ungerades n $E_n = c_n f^{(n+1)}(x)/(n+1)!$ mit $c_n = {}_{-1}\int^1 x G_n(x)\,dx$
für gerades n $E_n = c_n f^{(n+2)}(x)/(n+2)!$ mit $c_n = {}_{-1}\int^1 x^2 G_n(x)\,dx$

n	**Fehlerglied c_n**	**Abszissen x_i**	**exakter Wert**
2	8/45	± 0.57735	± 1/3√3
3	1/15	0	
	± 0.707107	± 1(2√2	
4	32/945	± 0.187592	± √((√5 - 2)/(3√5))
	± 0.794654	± √((√5 + 2)/(3√5))	
5	13/756 0		
	± 0.374541	± 1/2 √((-√11 + 5)/3))	
	± 0.832497	± 1/2 √((√11 + 5)/3))	
6	16/1575		± 0.266635
	± 0.422519		
	± 0.866247		
7	0		
	± 0.323912		
	± 0.529657		
	± 0.883862		
9	0		
	± 0.167906		
	± 0.528762		
	± 0.601019		
	± 0.911589		

d.h. z.B. für n = 3 $I = 2/3 * h * [f(-h/2*\sqrt{2}) + f(0) + f(h/2*\sqrt{2})] + R_2$

Tschebyschow-Radau-Quadratur

Quadraturformeln der Struktur $_{-1}\int^1 x\, f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\,[f(x_i) - f(-x_i)]$

Für die Quadraturformeln n.Grades ergeben sich die x_i und w_i zu:

n	**x_i**	**w_i**	**x_i**	**w_i**
1	0.7745967	0.4303315		
2	0.5002990	0.2393715	0.8922365	0.2393715
3	0.4429861	0.1599145	0.7121545	0.1599145
	0.9293066	0.1599145		
4	0.3549416	0.1223363	0.6433097	0.1223363
	0.7783202	0.1223363	0.9481574	0.1223363

Offene Newton-Cotes-Formeln

Newton-Cotes-Formeln ohne Intervallgrenzen

$A = |\,_a\int^b f(x)\,dx\,| \approx nh/P_n \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\,p_{in} + R_n$ mit $h=(b-a)/n$, p_{in} ... Gewichte

n	**P_n**	**$p_0 \ldots p_n$**	**n**	**P_n**	**$p_0 \ldots p_n$**
2	1	1	3	2	1, 1
4	3	2, -1, 2	5	24	11, 1, 1, 11
6	20	11, -14, 26, -14, 11			

Gauß-Legendre-Formeln

Die Grundidee ist das Ausnutzen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Das bestimmte Integral entspricht der Intervallänge (b-a) multipliziert mit dem Funktionswert f(c) an einer optimal zu wählenden Zwischenstelle c.

$$I = |\,_{-1}\int^1 f(x)\,dx\,| \approx \sum_{i=1}^{n} C_i\, f(x_i) + R_n$$

Sowohl die Gewichte C_i als auch die Stützstellen x_i sind variabel. Die x_i sind die Nullstellen der Legendre-Polynome. Die Formeln integrieren Polynome bis 2n-1.ten Grades mit R=0.
Die Liste enthält für verschiedene n und die zugehörigen Parameter i die Stützstelle und deren Gewicht. Gauß-Quadraturen sind schon für wenige Stützstellen sehr genau. Gauß-Quadraturen erfordern die Berechnung von Funktionswerten an genau vorgegebenen Stützstellen, daher für tabellierte Daten meist nicht geeignet.

Stützstellen x(i) und Gewichte C(i) der Gauß-Legendre-Formeln

n	i	x[in]	C[in]	i	x[in]	C[in]			
1	1	0	2						
2	1	0.57735027	1	2	-0.57735027	1			
3	1	0.77459667	0.55555556	2	0	0.88888889	3	-0.77459667	0.55555556
4	1	0.86113631	0.34785484	2	0.33998104	0.65214515	3	-0.33998104	0.65214515

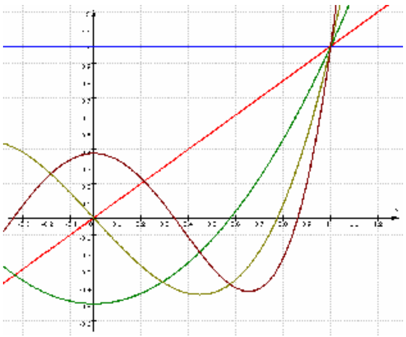
	4	-0.86113631	0.34785484						
5	1	0.9061798	0.2369269	2	0.5384693	0.4786287	3	0	0.5688889
	4	-0.5384693	0.4786287	5	-0.9061798	0.2369269			
6	1	0.9324700	0.1713245	2	0.6612094	0.3607616	3	0.2386192	0.4679139
	4	-0.2386192	0.4679139	5	-0.6612094	0.3607616	6	-0.9324700	0.1713245
7	1	0.9491079	0.1294850	2	0.7415312	0.2797054	3	0.4058452	0.3818301
	4	0	0.4179592	5	-0.4058452	0.3818301	6	-0.7415312	0.2797054
	7	-0.9491079	0.1294850						
8	1	0.9602899	0.1012285	2	0.7966665	0.2223810	3	0.5255324	0.3137066
	4	0.1834346	0.3626838	5	-0.1834346	0.3626838	6	-0.525532410	0.313706646
	7	-0.796666477	0.222381034	8	-0.960289856	0.101228536			
9	1	0.968160240	0.081274388	2	0.836031107	0.180648161	3	0.613371433	0.260610696
	4	0.324253423	0.312347077	5	0	0.330239355	6	-0.324253423	0.312347077
	7	-0.613371433	0.260610696	8	-0.836031107	0.180648161	9	-0.968160240	0.081274388
10	1	0.973906529	0.066671344	2	0.865063367	0.149451349	3	0.679409568	0.219086363
	4	0.433395394	0.269266719	5	0.148874339	0.295524225	6	-0.148874339	0.295524225
	7	-0.433395394	0.269266719	8	-0.679409568	0.219086363	9	-0.865063367	0.149451349
	10	-0.973906529	0.066671344						

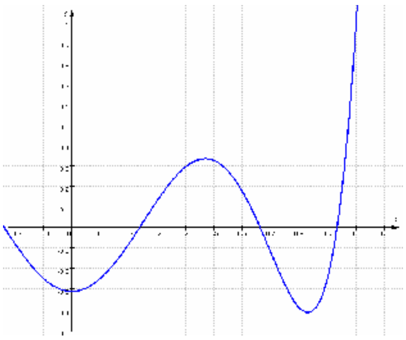
Beispiel: Für nur n = 2 Stützstellen soll die Normalverteilung numerisch integriert werden:
$1/\sqrt{(2\pi)}\ {}_0\int^2 e^{-x^2/2}\,dx = 1/\sqrt{(2\pi)}\ {}_{-1}\int^1 e^{-(1+x^2)/2}\,dx \approx 1/\sqrt{(2\pi)}\ (e\text{-}(1-1/\sqrt{3})^2/2 + e\text{-}(1+1/\sqrt{3})^2/2) \approx 0.4798$
mit einer Abweichung vom wahren Wert (0,4772) von nur 0,5%!

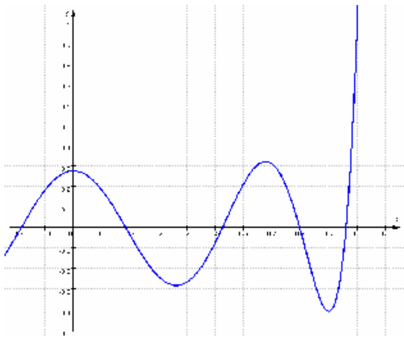
Die Spezialform der Gauß-Laguerre-Integration wird für uneigentliche Integrale mit exponentiell abfallenden Integranden (z.B. für Boltzmann-Verteilungen) genutzt.

Legendre-Polynome

Lösungen der Legendreschen Differenzialgleichung
$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + n(n+1)\, y = 0$; $y = P_n(x)$


0. bis 4.Legendre-Polynom


6.Legendre-Polynom

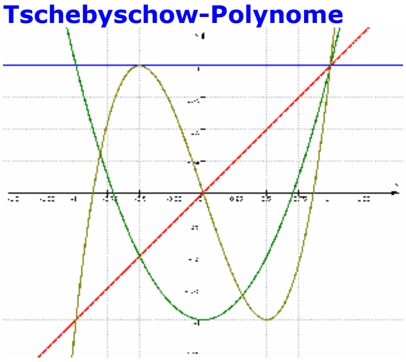

8.Legendre-Polynom

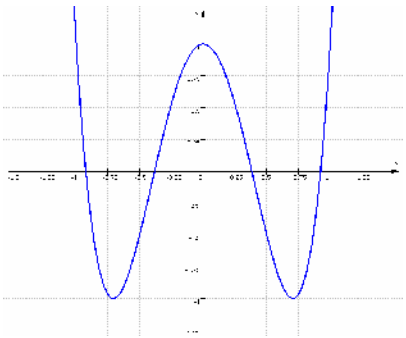
$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = 1/2 * (3x^2 - 1)$
$P_3(x) = 1/2 * (5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = 1/8 * (35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x) = 1/8 * (63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_6(x) = 1/16 * (231x^6 - 315x^4 +105x^2 - 5)$
$P_7(x) = 1/16 * (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
$P_8(x) = 1/128 * (6435x^8 - 12012\, x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$

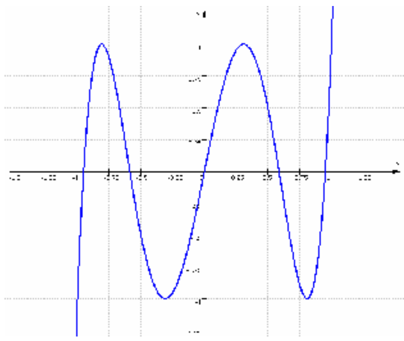
Alle Funktionen gehen durch den Punkt (1;1). Während für x>1 die Funktionswerte immer steiler verlaufen, bildet sich unterhalb x=1 Schwingungsverhalten aus.
Die Legendre-Polynome werden auch Kugelfunktionen genannt.
Die Legendre-Polynome genügen der Rekursionsgleichung:

$P_0(x) = 1$; $P_1 = x$ $\qquad$ $(k+1)\, P_{k+1}(x) = (2k+1)\, x\, P_k(x) - k\, P_{k-1}(x)$

Tschebyschow-Polynome


0. bis 3.Tschebyschow-Polynom


4.Tschebyschow-Polynom


5.Tschebyschow-Polynom

Tschebyschow-Polynome: Polynome, die über die trigonometrischen Additionstheoreme hergeleitet werden können. Man setzt $x = \cos\phi$, $|x| \le 1$ und postuliert die Polynome $T_k(x) = \cos(k\phi)$
Diese Polynome sind Lösungen der Tschebyschowschen Differenzialgleichung für $|x| \le 1$:

$$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + n^2 y = 0 \;;\; y = T_n(x)$$

Man erhält die Polynome

$T_0(x) = 1$ $\qquad$ $T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$ $\qquad$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ $\qquad$ $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

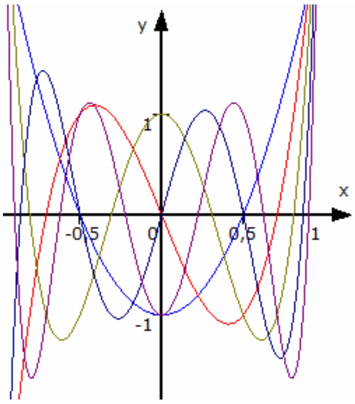
Die Tschebyschow-Polynome genügen der Rekursionsgleichung:

$T_0(x) = 1 \;;\; T_1(x) = x$ $\qquad$ $T_{k+1}(x) = 2x\, T_k(x) - T_{k-1}(x)$

Tschebyschow-Polynome 1.Art sind Orthogonalpolynome mit der Gewichtsfunktion $1/\sqrt{1-x^2}$, d.h. der Term

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x)\, dx/\sqrt{1-x^2}$$

ist gleich 0 für verschiedene n und m, gleich $\pi/2$ für $m = n \neq 0$ und gleich π für $m = n = 0$.



Tschebyschow-Polynome 2.Art

Tschebyschow-Polynome 2.Art: Polynome, die über die trigonometrischen Additionstheoreme hergeleitet werden können. Man setzt $x = \cos\phi$, $|x| \le 1$ und postuliert die Polynome $U_k(x) = \sin((k+1)\phi) / \sin\phi$
Diese Polynome sind Lösungen der Tschebyschowschen Differenzialgleichung für $|x| \le 1$

$$(1-x^2)\, y'' - 3x\, y' + n(n+2)\, y = 0 \;;\; y = U_n(x)$$

Man erhält die Polynome

$U_0(x) = 1$
$U_1(x) = 2x$
$U_2(x) = 4x^2 - 1$
$U_3(x) = 8x^3 - 4x$
$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$
$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$
$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$

Die Tschebyschow-Polynome 2.Art genügen der Rekursionsgleichung:

$U_0(x) = 1 \;;\; U_1(x) = 2x$ $\qquad$ $U_{k+1}(x) = 2x\, U_k(x) - U_{k-1}(x)$

Außerdem gilt in Beziehung zu den Polynomen 1.Art T(x)

$T_n(x) = U_n(x) - x\, U_{n-1}(x)$ $\qquad$ $d/dx\, T_n(x) = n\, U_{n-1}(x)$

Vergleich der Quadraturverfahren

Die Berechnung der Fläche unter der Funktion Y=SIN(X) im Intervall [0;PI]; exakter Wert =2; ergibt mit den einzelnen Verfahren

Stützstellen	10	100	5000	%-Fehler
Rechteck (unten)	1.572284	1.967433	1.999372	3.14 * 10^(-4)
Rechteck (oben)	2.297683	2.031251	2.000628	3.14 * 10^(-4)
Mittelpunktsregel	1.959103	1.999589	2	
Trapez	1.983524	1.999836	2	
Tangententrapez	2.030278	2.000329	2	
Simpson	2.00011	2	2	
3/8-Regel	2.000382[9]	2	2	
4.Newton-Cotes	1.999983[8]	2	2	
5.Newton-Cotes	1.999991	2	2	
6.Newton-Cotes	2 [18]	2	2	
7.Newton-Cotes	2 [14]	2	2	
3.offene Newton-Cotes	1.981133	1.999835	2	
4.offene Newton-Cotes	2.066005	2.000658	2	
Romberg	2.00011	2		
Steklov	1.998751	1.999999	2	
Bessell	1.999704	1.999999	2	
Monte-Carlo	2.087464	1.987746	2.011721	0.586
Gauß-Legendre 1	2.008248	2.000082	2	
Gauß-Legendre 2	1.999995	2	2	
Gauß-Legendre 3	2	2	2	
Gauß-Legendre 4	2	2	2	
Gauß-Legendre 5	2	2	2	
Tschebyschow	1.999998	2	2	
Tschebyschow n=4	2	2	2	
Tschebyschow n=5	2	2	2	

[ ] Werte in Klammern geben die genutzten Stützstellen an.

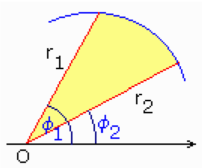
Differenzialgeometrie

In der Differenzialgeometrie werden die Begriffe und Methoden der Analysis -insbesondere der Differenzialrechnung und der Theorie der Differenzialgleichungen - auf die Untersuchung geometrischer Gebilde angewendet. Die zugrunde liegenden geometrischen Räume oder Mannigfaltigkeiten müssen daher, ähnlich wie in der analytischen Geometrie, auf Koordinatenbezogen sein.
In diese Räume sind andere geometrische Gebilde eingebettet, z.B. allgemeine Kurven oder gekrümmte Flächen, die durch genügend oft differenzierte Gleichungen oder Funktionen charakterisiert werden. Zum Verständnis der höheren Teile der Differenzialgeometrie muss man die Tensorrechnung gründlich beherrschen; ferner sind Kenntnisse aus der Topologie und aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich.

Bogenelement einer Kurve

$y=f(x)$ $ds = \sqrt{(1+y'^2)}\, dx$ $\qquad$ $x=\phi(t);\ y=\psi(t)$ $ds = \sqrt{[\dot{y}^2 + \dot{x}^2]}\, dt$

$r=f(\phi)$ $ds = \sqrt{[r^2 +(dr/d\phi)^2]}\, d\phi$



Leibnizsche Sektorenformel

$A = 1/2 \int_{\phi 1}^{\phi 2} r^2\, d\phi$, für $r = f(\phi)$

Fläche zwischen den Kurven $r = r_1(\phi)$ und $r = r_2(\phi)$ in den Grenzen ϕ_1 und ϕ_1

$A = \int_{\phi 1}^{\phi 2} \int_{r2(\phi 1)}^{r2(\phi 2)} r\, dr\, d\phi$

Sektorenformel: zwischen $x=x(t)$ und $y=y(t)$: $A = 1/2 \int_{t1}^{t2} (x\, \dot{y} - \dot{x}\, y)\, dt$

Bogenlänge (Rektifikation)

Länge des Kurvenstückes zwischen P_1 und P_2

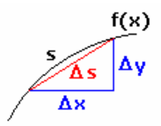
$y = f(x) \Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx$

$x = x(t)$ und $y = y(t) \Rightarrow s = \int_{t1}^{t2} \sqrt{[\dot{y}^2 + \dot{x}^2]}\, dt$

$r = r(\phi) \Rightarrow s = \int_{\phi 1}^{\phi 2} \sqrt{[r^2 + (dr/d\phi)^2]}\, d\phi$

Achtung

Während für den Kreis die Bogenlänge über $\int_0^\phi \sqrt{(1-\sin^2 \phi)}\, d\phi$ exakt analytisch auflösbar ist, gilt dies für die allgemeine Ellipse nicht mehr !
Das dort entstehende Integral $\int_0^\phi \sqrt{(1-\varepsilon * \sin^2 \phi)}\, d\phi$
ist nicht mehr analytisch geschlossen aufzulösen, da dieses Integral zu den sogenannten elliptischen Integralen gehört, welche nur noch durch Integration der zugehörigen unendlichen Reihe näherungsweise zu ermitteln sind
Elliptische Integrale sind Integrale, deren Integrand eine Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Wurzeln enthält.



Bogendifferenzial

Die Bogenlänge eines Kurvenstücks lässt sich als bestimmtes Integral des Bogenelements auffassen. Das Differenzial ds wird auch Bogendifferenzial genannt:

$ds = \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx$

Herleitung: Für das rechtwinklige Dreieck unterhalb des Bogenstücks s gilt

$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

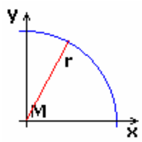
Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ führt zu $\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$

$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ $\qquad ds = \sqrt{(dx^2 (1 + dy^2/dx^2))}$

$ds = \sqrt{(1 + dy^2/dx^2)}\, dx$ $\qquad ds = \sqrt{(1 + f'(x)^2)}\, dx$

Integration der Gleichung ergibt die Bogenlänge s $\qquad s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(1 + f'(x)^2)}\, dx$

Kreisumfang als Bogenlänge



$x^2 + y^2 = r^2 \qquad 2x + 2y\, y' = 0$

$y' = - 2x /(2y) = - x/y \quad | ^2 \qquad y'^2 = x^2/y^2$

$1 + y'^2 = 1 + x^2/y^2 = (y^2+x^2)/y^2 = r^2/y^2$

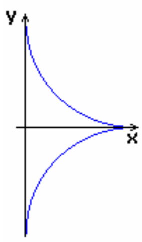
$U = 4 \int_0^r \sqrt{(r^2/y^2)}\, dx = 4r \int_0^r 1/y\, dx = 4r \int_0^r 1/\sqrt{(r^2-x^2)}\, dx$

$= \ (x=r \sin t,\ dx=r \cos t\, dt)$

$= 4r \int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{(r^2-r^2 \sin^2 t)}\, r \cos t\, dt = 4r \int_0^{\pi/2} 1/(r \sqrt{(1-\sin^2 t)})\, r \cos t\, dt =$

$= 4r \int_0^{\pi/2} \cos t /\sqrt{(\cos^2 t)}\, dt = 4r \int_0^{\pi/2} \cos t / \cos t\, dt = 4r \int_0^{\pi/2} 1\, dt =$

$= 4r\, t\, |_0^{\pi/2} = 4r\, \pi/2 - 4r * 0 = 2\, r\, \pi$



Bogenlänge der Astroide

gesucht: Bogenlänge von $x^{(2/3)} + y^{(2/3)} = a^{(2/3)}$

Nullstellen: $x^{(2/3)} = a^{(2/3)}$; $y = 0$ ... $x = \pm a$ ... N_1 (-a/0) , N_2 (a/0)

Schnittpunkte mit der y-Achse: $y^{(2/3)} = a^{(2/3)}$; $x = 0$ ... $y = \pm a$ ... S_1 (0/a) , S_2 (0/-a)

Schnittpunkte mit der y=x: $(2x)^{(2/3)} = a^{(2/3)}$ ... $8x^2 = a^2$ ... $x^2 = a^2/8$

$x = \pm a/(2 \sqrt{2}) = \pm (a \sqrt{2})/4$ ... F_1 ((a √2)/4 ; (a √2)/4) , F_2 (- (a √2)/4 ; - (a √2)/4)

Schnittpunkte mit der 2. Mediane: P_1 ((a √2)/4 ; - (a √2)/4) , P_2 (- (a √2)/4 ; (a √2)/4)

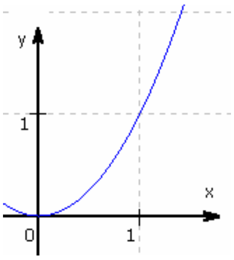
f': $2/3\, x^{(-1/3)} + 2/3\, y^{(-1/3)}\, y' = 0$

$y' = - (2/3\, x^{(-1/3)}) /(2/3\, y^{(-1/3)}) = - (1/\sqrt[3]{x}) /(1/\sqrt[3]{y}) = - \sqrt[3]{y} / \sqrt[3]{x} \qquad | ^2$

$y'^2 = \sqrt[3]{y^2} / \sqrt[3]{x^2} = (a^{(2/3)} - x^{(2/3)}) / \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}) / \sqrt[3]{x^2}$

$1 + y'^2 = \sqrt[3]{x^2} / \sqrt[3]{x^2} + (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}) / \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{a^2} / \sqrt[3]{x^2}$

$$b = 4 \int_0^a \sqrt{\sqrt[3]{a^2} / \sqrt[3]{x^2}}\, dx = 4 \int_0^a \sqrt[3]{a} / \sqrt[3]{x}\, dx = 4 \sqrt[3]{a} \int_0^a x^{(-1/3)}\, dx =$$
$$= 4 \sqrt[3]{a}\, (x^{(2/3)}) /(2/3) = 6 \sqrt[3]{a} * \sqrt[3]{x^2} \quad \Big|_0^a$$
$$= 6 \sqrt[3]{a}\, (\sqrt[3]{a^2} - 0) = 6a$$



Bogenlänge der Normalparabel

Die Bestimmung der Bogenlänge der Normalparabel $y = x^2$ im Intervall [0 ; 1] ist nicht trivial! Dazu ist das Integral $b = \int_0^1 \sqrt{1 + 4 x^2}\, dx$ zu lösen.

Unbestimmtes Integral

$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$ | Substitution $2x = r$; $dx = 1/2\, dr$
$= 1/2 \int \sqrt{1 + r^2}\, dr =$ | Substitution $r = \sinh z$; $dr/dz = \cosh z$
$= 1/2 \int [\sqrt{1 + \sinh^2 z} * \cosh z]\, dz =$ | $1 + \sinh^2 z = \cosh^2 z$
$= 1/2 \int \cosh^2 z\, dz$

Mit partieller Integration wird ($u = \cosh z$; $v = \cosh z$)

$\int \cosh^2 z\, dz = \sinh z \cosh z - \int \sinh^2 z\, dz = \sinh z \cosh z - \int (\cosh^2 z - 1)\, dz$

und somit $\int \cosh^2 z\, dz = 1/2\, (\sinh z \cosh z + z)$

Rücksubstitution ergibt $\int \sqrt{1 + 4 x^2}\, dx = 1/4\, (\sinh (\text{arsinh } r) \cosh (\text{arsinh } r) + \text{arsinh } r) = 1/4\, (2x \sqrt{1 + 4x^2} + \text{arsinh } 2x)$

Wird die Areafunktion arsinh x durch den Logarithmus ersetzt, bleibt

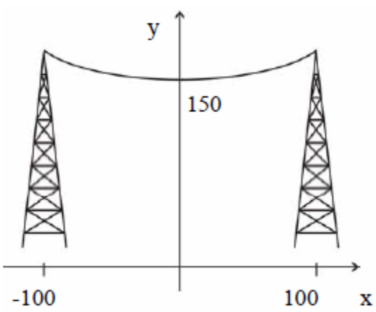
$$= 1/4\, (2x \sqrt{1 + 4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2})) + c$$

Für das bestimmte Integral wird $b = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 3/4\, (\ln(1/2 + \sqrt{5} /2) + \sqrt{5}/2 = 1.47894...$

Für die Bogenlänge im Intervall [0 ; a] gilt allgemein

$$b = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 1/4\, (2a \sqrt{1 + 4a^2}) + \ln(2a + \sqrt{1 + 4a^2}))$$

Bemerkenswert ist, dass schon Archimedes (ohne Kenntnisse in Integralrechnung!) in der Lage war, die Normalparabel zu rektifizieren.



Bogenlänge-Beispielaufgabe

Aufgabe: Ein elektrisches Kabel hängt zwischen zwei, in einem Abstand von 200 Metern entfernten, Türmen, wie in der Abbildung dargestellt. Das Kabel hat die Form einer Kettenlinie

$$y = 75\, (e^{x/150)} + e^{-x/150})$$

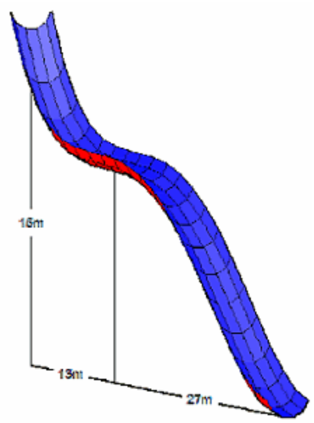
Berechne die Bogenlänge des Kabels zwischen den beiden Türmen.

Lösung:
Mit $y' = 1/2\, (e^{x/150)} - e^{-x/150})$
wird $y'^2 = 1/4\, (e^{x/75)} -2 +e^{-x/75})$
und $1 + y'^2 = 1/2\, (e^{x/150)} +e^{-x/150})^2$

Für die Bogenlänge wird somit

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 1/2 \int_{-100}^{100} (e^{x/150)} +e^{-x/150})\, dx = [75\, (e^{x/150)} -e^{-x/150})]_{-100}^{100} =$$
$$= 150\, (e^{2/3} - e^{-2/3}) = 215{,}147...$$

Die Bogenlänge des Kabels beträgt rund 215 m.



Bogenlänge-Beispielaufgabe (2)

Aufgabe: Eine Wasserrutsche wird durch die Polynomfunktion

$$f(x) = 0{,}00005267\, x4 - 0{,}004635\, x^3 + 0{,}127x^2 - 1{,}424\, x + 15$$

$x \in [0;40]$, beschrieben. Wie lang ist die durch f(x) definierte Rutsche?
Lösung: Bogenlänge der Funktion = 44,3 m

Aufgabe 2: Ein Schwimmreifen hat die Form eines Torus (Kreisringfläche) mit dem Meridiankreisradius r = 5 cm und dem Mittenkreisradius R = 25 cm.
a) Wie viel Luft passt in den Schwimmreifen, wenn er voll aufgeblasen wird?
b) Wie lange dauert das Aufblasen, wenn pro Atemzug etwa 0,5 Liter Luft ausgeatmet werden und man in Ruhe etwa 15 Atemzüge pro Minute macht?
Lösung:
a) $V = 2\pi^2\, R\, r^2 = 12{,}34\ dm^3$
b) 24,68 Atemzüge in 1,7 min

Masse einer Kurve

Es sei $\rho = \rho(s)$ die Massendichte einer Kurve je pro Bogenlänge. Die Masse $m(\sigma)$ eines Teilstücks der Länge σ ist dann gleich $m(\sigma) = \int_0^\sigma \rho(s)\, dx$

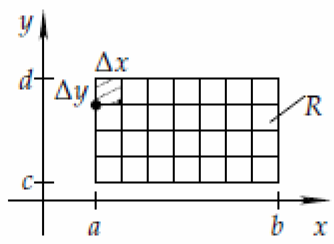
Wird im Term der Kurvenparameter t verwendet, dann ergibt sich für die Masse des Kurvenstücks zwischen den zu $t = 0$ und $t = \tau$ $\quad m(s(\tau)) = \int_0^\tau \rho(s(t))\, ds/dt\, dt$

und mit Hilfe der Gleichung der Bogenlänge $\quad m(s(\tau)) = \int_0^\tau \rho(s(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

Zur Begründung zerlegt man die Kurve in kleine Teilstücke der Masse Δm und der Bogenlänge Δs. Dann gilt näherungsweise $\Delta m = \rho\, \Delta s$. Die Gesamtmasse m der Kurve ist damit angenähert

$$m = \Sigma\, \Delta m = \Sigma\, \Delta m/\Delta s\, \Delta s = \Sigma\, \rho\, \Delta s = \Sigma\, \rho\, \Delta s/\Delta t\, \Delta t$$

Werden die Teilstücke immer kürzer, ergibt sich im Grenzübergang die obige Gleichung.



Masse eines Rechtecks

Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und $-\infty < c < d < \infty$. Das Rechteck R = $\{(x, y): a \leq x = \leq, c \leq y \leq d\}$ habe eine Masse der Flächendichte ρ. Zur Berechnung der Masse von R sei

$$\Delta x = (b-a)/n \; ; \; \Delta y = (d-c)/n$$

und $x_j = a + j\Delta x$; $y_k = c + k\Delta y$
mit j,k = 0, …, n.
Das Rechteck R wird in Reilrechtecke mit dem rechten oberen Eckpunkt (x_j, y_k) und den Seitenlängen Δx, Δy zerlegt. Für die Masse eines Teilrechtecks gilt dann angenähert $\Delta m = \rho(x_j, y_k)\, \Delta x\, \Delta y$
Die Masse von R wird dann definiert durch die Grenzwertbeziehung

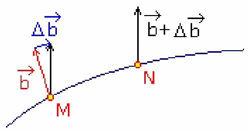
$$_R\int \rho(x,y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{j,k=1}^{n}\, \rho(x_j, y_k)\, \Delta x\, \Delta y$$

Iterierte Integration, Satz von Fubini

Durch die Anwendung des Satzes von Fubini

$$_R\int \rho(x,y)\, dx\, dy = {}_c\int^d \left({}_a\int^b \rho(x,y)\, dx\right) dy = {}_a\int^b \left({}_c\int^d \rho(x,y)\, dy\right) dx$$

kann die Berechnung des Integrals über R auf die iterierte Berechnung eindimensionaler Integrale durchgeführt werden.
Rechteck-Beispiel: $_R\int dx\, dy = {}_c\int^d ({}_a\int^b dx)\, dy = {}_c\int^d (b-a)\, dy = (b-a)(c-d)$
d.h. der Flächeninhalt von R bei einer Massendichte $\rho = 1$.

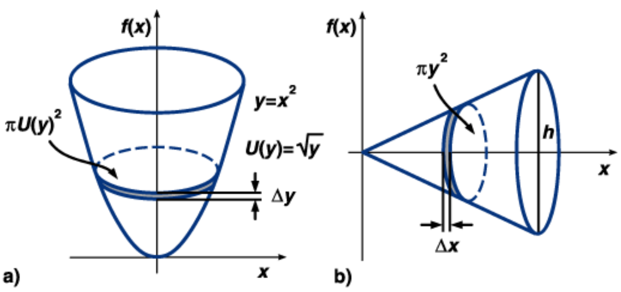


Windung einer Kurve

Windung einer Kurve im Punkt M wird eine Zahl genannt, die die Abweichung der Kurve in der unmittelbaren Nähe dieses Punktes von einer ebenen Kurve angibt.
Die exakte Definition lautet:

$$T = \lim \mid \Delta \vec{b} / MN \mid = \mid d\vec{b} / ds \mid$$

Windungsradius $\tau = 1 / T$
Der Windungsradius ist der Kehrwert der Windung.
Bei Definition der Kurve in der Parameterform als Funktion von t mit $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$
ergibt sich $T = \rho^2 \, [\, d\vec{r} / dt * d^2\vec{r} / dt^2 * d^3\vec{r} / dt^3] \, / \, | \, (d\vec{r} / dt)^2 \,]^3$
wobei ρ der Krümmungsradius ist. Die Windung kann positiv oder negativ sein. Im Falle T > 0 sieht ein Beobachter, der auf der Hauptnormalen parallel zur Binormalen steht, die Windung der Kurve im Rechtsdrehsinn, im Falle T < 0 im Linksdrehsinn.



Volumen von Rotationskörpern (Kubatur)

Ein Rotationskörper (Drehkörper) entsteht durch die Rotation einer Funktion y = f(x) bzw. einer Umkehrfunktion um eine Achse.

Bei Rotation eines Flächenstückes unter f(x) im Intervall [a;b]

y = f(x)

Rotation um x-Achse $V = \pi\, _a\int^b f^2(x)\, dx$
Rotation um y-Achse $V = |\, \pi\, _a\int^b x^2 * f'(x)\, dx\, |$

x = x(t) und y= y(t)

Rotation um x-Achse $V = \pi\, _{t1}\int^{t2} y^2\, \dot{x}\, dt$
Rotation um y-Achse $V = \pi\, _{t1}\int^{t2} x^2\, \dot{y}\, dt$

r = r(ϕ)

Rotation um x-Achse $V = \pi\, _{\phi1}\int^{\phi2} r^2 \sin^2 \phi\, (dr/d\phi \cos \phi - r \sin \phi)\, d\phi$
Rotation um y-Achse $V = \pi\, _{\phi1}\int^{\phi2} r^2 \cos^2 \phi\, (dr/d\phi \sin \phi + r \cos \phi)\, d\phi$

Zur Bestimmung des Volumens eines Rotationskörpers, der durch Rotation einer Funktion f(x) um die x-Achse im Intervall [a,b] entsteht, teilt man das Intervall [a; b] in n gleichlange Teilintervalle und betrachtet die einbeschriebenen und umbeschriebenen Treppenfiguren aus Rechtecken. Diese ergeben bei der Rotation Zylinder.
Es sei V das Volumen des einbeschriebenen Treppenkörpers aus Zylindern (analog für das Volumen des umbeschriebenen Treppenkörpers aus Zylindern).

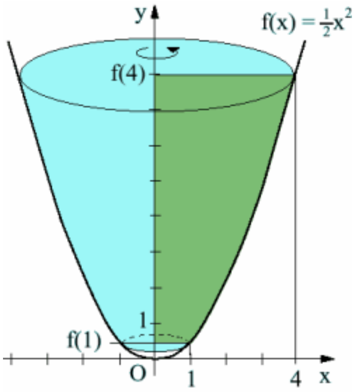
Die Teilpunkte seien $x_0 = a, x_1, …, x_{n-1} = b$. Die Breite der Teilintervalle sei Δx.
Die Minima in den Teilintervallen seien $m_1, m_2, …, m_n$. Diese Werte sind auch die Radien der Zylinder. Δx ist die Höhe der einzelnen Zylinder.
Volumina der Zylinder: $\pi\, m_i^2\, \Delta x$
Für den unteren Treppenkörper der Zylinder wird

$$V = \pi\, m_1^2\, \Delta x + \pi\, m_2^2\, \Delta x + … + \pi\, m_n^2\, \Delta x$$

Strebt n gegen Unendlich, so nähern sich die m_i den Funktionswerten $f(x_i)$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} (\pi\, m_1^2\, \Delta x + \pi\, m_2^2\, \Delta x + … + \pi\, m_n^2\, \Delta x) = \text{Summe über alle i von } (\pi\, \Delta x\, f(x_i)^2)$$

Das gleiche Ergebnis folgt für die umbeschriebenen Teilzylinder, d.h. $V = {}_a\int^b \pi\, f^2(x)\, dx$



Rotationskörper um y-Achse

Ist eine Funktion f stetig und umkehrbar mit der Umkehrfunktion f*, so entsteht bei der Rotation der Fläche zwischen dem Graphen zu f, der y-Achse und den Geraden mit den Gleichungen y = c und y = d ein Rotationskörper mit dem Volumen

$$V = \left| \pi \int_c^d (f^*(y))^2 \, dy \right|$$

Beispiel: Das Volumen des Rotationsparaboloids mit der Funktion

$$f(x) = 1/2\, x^2$$

um die y-Achse ist zu berechnen.
Da die Funktion f(x) eine im Intervall [1;4] stetige und umkehrbare Funktion ist, lässt sich die Umkehrfunktion f* bestimmen:

$$f^*(y) = x = \sqrt{2y}$$

Die veränderten Integrationsgrenzen ergeben sich aus c = f(1) = 0,5 und d = f(4) =8. Für das Volumen gilt dann

$$V = \left| \pi \int_{0,5}^{8} (\sqrt{2y})^2 \, dy \right| = \left| \pi \int_{0,5}^{8} 2y \, dy \right| = 63,75\, \pi = 200,28\ldots$$

Die Gleichung $\pi \int_c^d (f^*(y))^2 \, dy$
wird mit der Substitution $x = f^*(y)$, $dy/dx = f'(x)$ und $f(a) = c$ bzw. $f(b) = d$ zu $\pi \int_a^b x^2 f'(x)\, dx$

Mantelfläche M von Rotationskörpern (Komplanation)

y = f(x)

Rotation um x-Achse $\quad M = 2\pi \int_a^b [f(x) * \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,]\, dx$
Rotation um y-Achse $\quad M = 2\pi \int_{f(a)}^{f(b)} [x * \sqrt{1 + (dx/dy)^2}\,]\, dy$

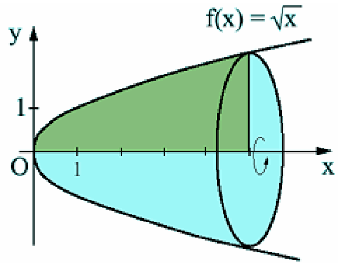
x = x(t) und y= y(t)

Rotation um x-Achse $\quad M = 2\pi \int_{t1}^{t2} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$
Rotation um y-Achse $\quad M = 2\pi \int_{t1}^{t2} x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

r = r(ϕ)

Rotation um x-Achse $\quad M = 2\pi \int_{\phi 1}^{\phi 2} r \sin\phi \sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2}\, d\phi$
Rotation um y-Achse $\quad M = 2\pi \int_{\phi 1}^{\phi 2} r \cos\phi \sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2}\, d\phi$

Arbeitsintegral $\quad W = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds$ Kraft F, Weg von s_1 bis s_2



Mantelfläche eines Rotationsparaboloids

Aufgabe: Die Mantelfläche des Rotationsparaboloids, das durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion um die x-Achse im Intervall [0 ; 5] entsteht, ist zu berechnen.
Lösung:
Durch Einsetzen in die Formel für den Mantelflächeninhalt

$$M = 2\pi \int_a^b [f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,]\, dx$$

ergibt sich mit $y = \sqrt{x}$
und $y' = 1/(2\sqrt{x})$

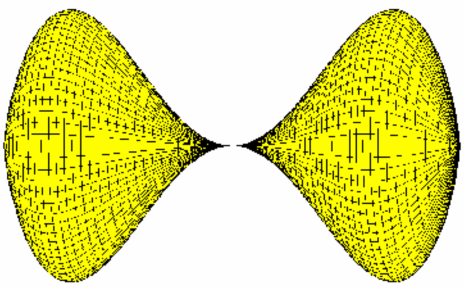
$$M = 2\pi \int_0^5 (\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 1/(4x)})\, dx$$

$$M = 2\pi \int_0^5 \sqrt{x + 1/4}\, dx = 2\pi\, [2/3\, (x + 1/4)^{3/2}]_0^5 = 4/3\, \pi\, (5,25^{3/2} - 0,25^{3/2}) = 49,86\ldots \text{ FE}$$

Die Mantelfläche des Rotationsparaboloids ist rund 49,86 Flächeneinheiten groß.
Allgemein für das Intervall [0 ; b]: $\quad M = 4/3\, \pi\, ((b+0,25)^{3/2} - 0,25^{3/2})$

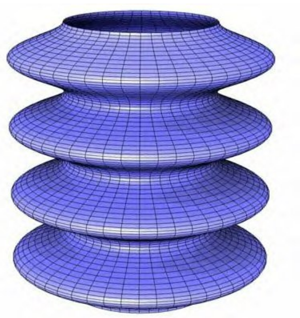
Sekundarstufe II-Aufgabe: Der Graf der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 1/16\, x^4 - x^2$ und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Beschreiben Sie die Form des Körpers. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.
Nun rotiert die Fläche um die y-Achse. Welches Aussehen weißt dieser Rotationskörper auf? Bestimmen Sie dessen Volumen.
Rotation um die x-Achse:
Der Körper hat die Form einer Hantel.

$$V = 2\pi \left|\int_0^4 (1/16\, x^4 - x^2)^2\, dx\right| = 2\pi \left|\int_0^4 (1/256\, x^8 - 1/8\, x^6 + x^4)\, dx\right| = 163,403\ldots \text{ VE}$$



Rotation um y-Achse:
Der Körper ähnelt einer Kuchenform.

$$V = \pi \left|\int_0^4 (x^2 (1/4 x^3 - 2x))\, dx\right| = \pi \left|\int_0^4 (1/4\, x^5 - 2x^3)\, dx\right| = 128/3 = 42,666\, \pi = 134,041 \text{ VE}$$

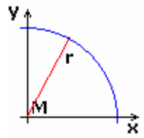


Isolator-Körper

Rotationskörper mit der erzeugenden Funktion f(x) = y = a + b sin(c x 2π)
Parameterdarstellung x = u

$y = (a + b \sin(c\,u\,2\pi)) \sin v$
$z = (a + b \sin(c\,u\,2\pi)) \cos v$
Die Konstanten a, b und c bestimmen das Aussehen der Figur. Zur Darstellung der Fläche können die beiden Parameter u und v zum Beispiel folgende Werte (Definitionsbereich) annehmen: $u \in [1.5, 9.5]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Oberfläche einer Kugel



... entsteht durch Rotation eines Kreisbogens k um die x-Achse

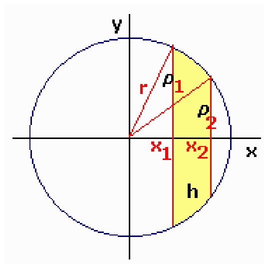
$$k: x^2 + y^2 = r^2 \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$y' = \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)^{(-1/2)} \cdot (-2x) = -x / \sqrt{r^2-x^2}$$
$$y'^2 = x^2 / [r^2-x^2]$$
$$A = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2/[r^2-x^2]}\, dx = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{[r^2-x^2+x^2]/[r^2-x^2]}\, dx =$$
$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{r^2/[r^2-x^2]}\, dx = 4\pi \int_0^r \sqrt{[(r^2-x^2) \cdot r^2]/[r^2-x^2]}\, dx =$$
$$= 4\pi \int_0^r r\, dx = 4\pi rx \,\Big|_0^r$$
$$= 4\pi (r^2-0) = 4 \pi r^2$$

Oberfläche des Drehellipsoids

... das durch Drehung der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 2$ um die x-Achse entsteht $\Rightarrow a = \sqrt{2};\ b = 1$

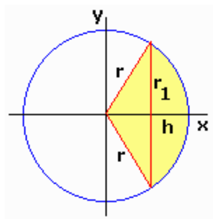
$$f': 2x + 2 \cdot 2y\, y' = 0 \quad y' = -[2x]/[4y] = -x/[2y] \quad |\ ^2$$
$$y'^2 = x^2/[4y^2] = x^2/[4 \cdot [2-x^2]/2] = x^2/[2(2-x^2)] = x^2/[4-2x^2] \quad |\ +1$$
$$1 + y'^2 = [4-2x^2]/[4-2x^2] + x^2/[4-2x^2] = [4-x^2]/[4-2x^2]$$
$$y = \pm\sqrt{[2-x^2]/2}$$
$$A = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{[2-x^2]/2} \cdot \sqrt{[4-x^2]/[4-2x^2]}\, dx = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{[(2-x^2)(4-x^2)]/[2(4-2x^2)]}\, dx =$$
$$= 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{[(2-x^2)(4-x^2)]/[4(2-x^2)]}\, dx = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{[4-x^2]/4}\, dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx =$$
$$= \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\; 2\cos t\, dt = \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\sqrt{1 - \sin^2 t}\; 2\cos t\, dt =$$
$$= \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4\cos^2 t\, dt = 4\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 t\, dt =$$
$$= 4\pi \cdot \tfrac{1}{4}(2t + \sin 2t)\,\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \pi(2t + \sin 2t)\,\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$
$$= \pi[(\pi/2 + \sin \pi/2) - (-\pi/2 + \sin(-\pi/2))] =$$
$$= \pi[\pi/2 + 1 + \pi/2 - (-1)] = \pi(\pi+2) = \pi^2 + 2\pi = 16.15 \quad \text{FE}$$

Volumen einer Kugelschicht (Kugelzone)

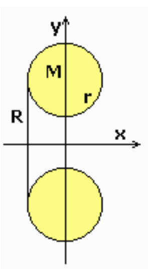


$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2\, dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2)\, dx = \pi(r^2 x - x^3/3)\,\Big|_{x_1}^{x_2}$$
$$= \pi[(r^2 x_2 - x_2^3/3) - (r^2 x_1 - x_1^3/3)] = \quad x_2 - x_1 = h$$
$$= \pi[r^2(x_2 - x_1) - 1/3\,(x_2^3 - x_1^3)] =$$
$$= \pi[r^2 h - 1/3\,(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)] = \quad r^2 = x_1^2 + \rho_1^2$$
$$= \pi[r^2 h - 1/3\, h(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)] = \quad \rho_1^2 = r^2 - x_1^2$$
$$= \pi\, h/6\, [6r^2 - 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)] = \quad \rho_2^2 = r^2 - x_2^2$$
$$= \pi\, h/6\, [2r^2 + 2r^2 + 2r^2 - 2x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2^2] =$$
$$= \pi\, h/6\, [2(r^2 - x_1^2) + 2(r^2 - x_2^2) + 2(r^2 - x_1 x_2)] =$$
$$= \pi\, h/6\, [2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + 2(r^2 - x_1 x_2)] =$$
$$2r^2 = (x_1^2 + \rho_1^2) + (x_2^2 + \rho_2^2)$$
$$= \pi\, h/6\, [2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + (x_1^2 + \rho_1^2) + (x_2^2 + \rho_2^2) - 2x_1 x_2] =$$
$$= \pi\, h/6\, [3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + (x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2)] = \pi\, h/6\, [3(\rho_1^2 + \rho_2^2) + (x_1 - x_2)^2] =$$
$$= \pi\, h/6\, [3(\rho_1^2 + \rho_2^2) + h^2]$$

Volumen eines Kugelsektors



$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 = r^2 - (r^2 - 2rh + h^2) = 2rh - h^2$$
$$V_1 = [r_1^2\, \pi\, (r-h)]/3 = [(2rh - h^2)\, \pi\, (r-h)]/3$$
$$V_2 = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2-x^2)\, dx = \pi(r^2 x - x^3/3)\,\Big|_{r-h}^{r} =$$
$$= \pi[(r^3 - r^3/3) - (r^2(r-h) - (r-h)^3/3)] = \pi[r^3 - r^3/3 - (r^3 - r^2 h - (r-h)^3/3)] =$$
$$= \pi[-r^3/3 + r^2 h + (r-h)^3/3] = \pi[-r^3/3 + r^2 h + [r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3]/3] =$$
$$= \pi(rh^2 - h^3/3)$$
$$V = V_1 + V_2 = [(2rh - h^2)\,\pi\,(r-h)]/3 + \pi(rh^2 - h^3/3) =$$
$$= \pi/3\,(2r^2 h - rh^2 - 2rh^2 + h^3) + \pi/3\,(3rh^2 - h^3) =$$
$$= \pi/3\,(2r^2 h - 3rh^2 + h^3 + 3rh^2 - h^3) = \pi/3 \cdot 2r^2 h = (2 r^2 \pi h)/3$$



Volumen eines Torus

Ohne Guldinsche Regel

$$M\,(0/R) \qquad k: x^2 + (y-R)^2 = r^2$$
$$(y-R)^2 = r^2 - x^2 \qquad |\ \sqrt{}$$
$$y = R \pm \sqrt{r^2-x^2}$$

oberer Teil von k $\quad y = R + \sqrt{r^2-x^2} = f_1$
unterer Teil von k $\quad y = R - \sqrt{r^2-x^2} = f_2$

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^r (f_1^2 - f_2^2)\, dx = 2\pi \int_0^r [(R + \sqrt{r^2-x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2-x^2})^2]\, dx =$$
$$= 2\pi \int_0^r [R^2 + 2R\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2)]\, dx =$$
$$= 2\pi \int_0^r [4R\sqrt{r^2-x^2}]\, dx = 8R\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, dx = \qquad |\ x = r \sin t$$
$$= 8R\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r\cos t\, dt = \qquad |\ dx = r\cos t\, dt$$

$= 8R\pi\ {}_0\int^{\pi/2} r^2 \cos^2 t\ dt =$ | $x = 0 \Rightarrow t = 0$
$= 8\pi\ r^2\ R\ {}_0\int^{\pi/2} \cos^2 t\ dt =$ | $x = r \Rightarrow t = \pi/2$
$= 8\pi\ r^2\ R\ (t/2 + (\sin 2t)/4)\ |_0^{\pi/2} = 8\pi\ r^2\ R\ [(\pi/4 + (\sin \pi)/4) - (0 + (\sin 0)/4)] =$
$= 8\pi\ r^2\ R\ (\pi/4 + 0 - 0 - 0) = 2\ \pi^2\ r^2\ R$
Mit Guldinscher Regel $V = A * 2\pi * \eta = A_o * 2\pi * R = r^2\ \pi * 2\pi * R = 2\ \pi^2\ r^2\ R$

Rotationskörper-Beispielaufgaben

Der Abschnitt des Graphen von f(x) zwischen den Punkten $(x_1/f(x_1))$ und $(x_2/f(x_2))$ rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Drehkörpers!

Funktion	Intervall	Lösung	Funktion	Intervall	Lösung
$f(x) = 3x$	x1 = 0, x2 = 2	$24\ \pi$	$f(x) = x/2 + 3$	x1 = 0, x2 = 4	$65{,}33\ \pi$
$f(x) = x^2/3$	x1 = 0, x2 = 3	$5{,}4\ \pi$	$f(x) = x^2 + 1$	x1 = 0, x2 = 2	$13{,}73\ \pi$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	x1 = 1, x2 = 8	$18{,}6\ \pi$	$f(x) = 1/x$	x1 = 1, x2 = 5	$0{,}8\ \pi$

Wie obere Aufgabe, wobei die Kurvenstücke um die y-Achse rotieren.

$f(x) = 3x$	x1 = 0, x2 = 2	$8\ \pi$	$f(x) = x/2 + 3$	x1 = 0, x2 = 4	$10{,}67\ \pi$
$f(x) = x^2/3$	x1 = 0, x2 = 3	$13{,}5\ \pi$	$f(x) = x^2 + 1$	x1 = 0, x2 = 2	$8\ \pi$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	x1 = 1, x2 = 8	$18{,}14\ \pi$	$f(x) = 1/x$	x1 = 1, x2 = 5	$4\ \pi$

Gegeben sind die Kurve $y^2 = 8x$ und die Gerade $y = 2x$. Berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn das Flächenstück zwischen der Kurve und der Geraden um die x-Achse rotiert!
Lösung $5{,}33\ \pi$
Das Flächenstück zwischen den Parabeln $y^2 = 4x$ und $x^2 = 4y$ rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?
Lösung $19{,}2\ \pi$
Die Form einer Vase entsteht, wenn der Graph der Funktion f: $y = x^2/20 + 5$ zwischen den Grenzen x1 = -8 und x2 = 10 um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen der Vase.
Lösung $768{,}4\ \pi$
Der Innenraum eines Trinkglases hat die Form eines Paraboloids (r = 3 cm, h = 12 cm). Wieviel Flüssigkeit fasst das Glas?
Lösung $54\ \pi$ = 170 ml
In welcher Höhe muss die Markierung für 1/8 l angebracht werden?
Lösung 10,3 cm
Die Form einer Linse entsteht, wenn das Flächenstück zwischen zwei Parabeln um die y-Achse rotiert. Die eine Parabel hat ihren Scheitel im Koordinatenursprung, die andere im Punkt S(0/3), und sie schneiden einander im Punkt P(8/2). Ermittle die Gleichungen der Parabeln (Ansatz: $y = ax^2 + b$) und das Volumen der Linse.
Lösung f1: $y = x^2/32$; f2: $y = -x^2/64 + 3$; $V = 96\pi$
Ein Fass ist 8 dm lang, sein Durchmesser beträgt in der Mitte 8 dm und am Rand 6 dm. Die Fassdauben haben die Form einer Parabel. Wie groß ist das Volumen des Fasses?
Lösung f: $y = -x^2/16 + 4$; $V = 108{,}27\ \pi$ = 340 l
Wie oben, wobei der Scheitel der einen Parabel im Koordinatenursprung, der der anderen im Punkt S(0/-1,5) liegt und sie einander in P(5/1) schneiden.
Lösung f1: $y = x^2/25$; f2: $y = x^2/10 - 1{,}5$; $V = 18{,}75\ \pi$

Statisches Moment

Festlegung: Dichte $\rho = 1$
... einer kontinuierlich verteilten Masse $M = {}_V\int \rho\ l\ dV$
... der Fläche unter der Kurve y=f(x) zwischen a und b bzgl. der y-Achse $M_y = {}_a\int^b xy\ dx$
... der Fläche unter der Kurve y=f(x) zwischen a und b bzgl. der x-Achse $M_x = 1/2\ {}_a\int^b y^2\ dx$
... eines ebenen homogenen Kurvenstücks der Kurve y=f(x) zwischen a und b bzgl. der y-Achse
$M_y = {}_a\int^b x\ \sqrt{(1 + y'^2)}\ dx$
... eines ebenen homogenen Kurvenstücks der Kurve y=f(x) zwischen a und b bzgl. der x-Achse
$M_y = {}_a\int^b y\ \sqrt{(1 + y'^2)}\ dx$
... eines Rotationskörpers um die x-Achse der Kurve y=f(x) zwischen a und b bzgl. der senkrecht zur x-Achse stehenden Ebene durch den Ursprung
$M = \pi\ {}_a\int^b x\ y^2\ dx$
... eines homogenen ebenen Flächenstückes, das oben von der Kurve y=f(x), unten von der Kurve y=g(x) und den Geraden x=a und x=b begrenzt wird bzgl. der x-Achse
$M_x = 1/2\ {}_a\int^b [f(x)^2 - g(x)^2]\ dx$
... bzgl. der y-Achse $M_y = {}_a\int^b x * [f(x) - g(x)]\ dx$

Schwerpunktskoordinaten

... eines ebenen homogenen Kurvenstücks
$x_s = M_y/s = {}_a\int^b x\ \sqrt{(1 + y'^2)}\ dx\ /\ {}_a\int^b \sqrt{(1 + y'^2)}\ dx$
$y_s = M_x/s = {}_a\int^b y\ \sqrt{(1 + y'^2)}\ dx\ /\ {}_a\int^b \sqrt{(1 + y'^2)}\ dx$
... einer Fläche unter y=f(x)
$x_s = M_y/F = {}_a\int^b xy\ dx\ /\ {}_a\int^b y\ dx$ $y_s = M_x/F = {}_a\int^b y^2\ dx\ /\ [2\ {}_a\int^b y\ dx]$

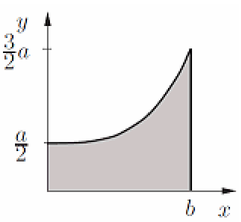
... einer Fläche zwischen y=f(x) und y=g(x)

$$x_s = {}_a\int^b x[f(x)-g(x)]\,dx \,/\, {}_a\int^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

$$y_s = {}_a\int^b [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx \,/\, [2\ {}_a\int^b [f(x) - g(x)]\,dx]$$

... eines Rotationskörpers um die x-Achse

$$x_s = M/V = {}_a\int^b xy^2\,dx \,/\, {}_a\int^b y^2\,dx \qquad y_s = z_s = 0$$



Beispiel zu Schwerpunktskoordinaten

Aufgabe: Die dargestellte Fläche wird nach oben durch eine quadratische Parabel mit dem Scheitel bei x = 0 begrenzt. Man ermittle die Schwerpunktskoordinaten.

Gleichung der Parabel $y = p\,x^2 + q$

Aus den Endpunkten x0 = 0, y0 = a/2 und x1 = b, y1 = 3a/2 folgt q = a/2 und p = a/b² $\qquad y = a\,(x/b)^2 + a/2$

Mit dem Flächenelement dA = y dx wird

$$x_S = \int x\,dA \,/ \int dA = \int xy\,dx \,/ \int y\,dx = {}_0\int^b x\,[a\,(x/b)^2 + a/2]\,dx \,/\, {}_0b\,[a\,(x/b)^2 + a/2]\,dx = 3/5\ b$$

Berücksichtigt man, dass beim Flächenelement dA = y dx in y-Richtung der Schwerpunkt bei y/2 liegt, wird $\quad y_S = \int y/2\ y\,dx \,/\, (5/6\ ab) = 47/100\ a$

Tangentengleichungen

Tangente ... Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt, d.h. Tangente und Kurve haben den gleichen Anstieg ; Tangente im Punkt $P_0(x_0;y_0)$

$y = f(x) \Rightarrow \qquad y - y_0 = y'(x_0)\ (\ x - x_0\ )$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow \qquad (x - x_0)\ \partial f(x_0,y_0)/\partial x + (y - y_0)\ \partial f(x_0,y_0)/\partial y = 0$

$x = x(t),\ y = y(t) \Rightarrow \qquad (x - x_0)\ \dot{y} - (y - y_0)\ \dot{x} = 0$

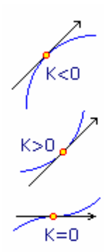
Normalengleichungen

Normale im Punkt $P_0(x_0;y_0)$

$y = f(x) \Rightarrow \qquad y - y_0 = -1/y'(x_0)\ (\ x - x_0\ )$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow \qquad (x - x_0)\ \partial f(x_0,y_0)/\partial y + (y - y_0)\ \partial f(x_0,y_0)/\partial x = 0$

$x = x(t),\ y = y(t) \Rightarrow \qquad (x - x_0)\ \dot{x} + (y - y_0)\ \dot{y} = 0$



Krümmung einer Kurve

Krümmung am Punkt (x_0,y_0) $\qquad k = y''(x_0) \,/\, (1 + y'^2)^{3/2}$

Radius des Krümmungskreises $\qquad r = 1/k$

Koordinaten des Krümmungskreises $\qquad x_m = x_0 - y' * (1 + y'^2)/y'' \qquad y_m = y_0 + (1 + y'^2)/y''$

Vektorielle Tangentengleichung

Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt, d.h. Tangente und Kurve haben den gleichen Anstieg.

Gegeben sei ein mathematische Kurve mit $\quad x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ t \in [t_0, t_1]\ \ \vec{r}(t) = \vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Tangentengleichung

Dann gilt für die Tangente g_T im Punkt $P_*(x_* \mid y_*)$ für $t_* \in [t_0, t_1]$

$$g_T:\ \vec{r}(t) = \vec{OP_*} + \lambda\ 1/\sqrt{(\dot{x}(t_*))^2 + (\dot{y}(t_*))^2}\ \begin{pmatrix} \dot{x}(t_*) \\ \dot{y}(t_*) \end{pmatrix}\ ;\ \lambda \in R$$

Ist die Tangente parallel zur y-Achse wird als Sonderfall: $\begin{pmatrix} \dot{x}(t_*) \\ \dot{y}(t_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}(t_*) \end{pmatrix}$

Normalengleichung $\qquad g_N:\ \vec{r}(t) = \vec{OP_*} + \lambda\ 1/\sqrt{(\dot{x}(t_*))^2 + (\dot{y}(t_*))^2}\ \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_*) \\ \dot{x}(t_*) \end{pmatrix}\ ;\ \lambda \in R$

Krümmung k_* in $P_*(x_* \mid y_*)$ $\quad k_* = 1/((\dot{x}(t_*))^2 + (\dot{y}(t_*))^2)^{3/2}\ \begin{vmatrix} \dot{x}(t_*) & \dot{y}(t_*) \\ \ddot{x}(t_*) & \ddot{y}(t_*) \end{vmatrix}$

Radius des Krümmungskreises R_*: $R_* = 1/|k_*|$

Koordinaten des Krümmungskreismittelpunktes $P_{M*}\ (x_{M*} \mid y_{M*})$ für $k_* > 0$ in $P_*(x_* \mid y_*)$:

$$\vec{OP_{M*}} = \vec{OP_*} + R_*/\sqrt{(\dot{x}(t_*))^2 + (\dot{y}(t_*))^2}\ \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_*) \\ \dot{x}(t_*) \end{pmatrix}$$

für $k_* < 0$ in $P_*(x_* \mid y_*)$: $\quad \vec{OP_{M*}} = \vec{OP_*} - R_*/\sqrt{(\dot{x}(t_*))^2 + (\dot{y}(t_*))^2}\ \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_*) \\ \dot{x}(t_*) \end{pmatrix}$

Tangentenberechnung, Beispiel

Aufgabe

Vom Punkt P(3|0) sollen die Tangenten an das Schaubild der Funktion f mit f(x) = x/2 + 2 gelegt werden.

Lösung

Sei B(u|f(u)) ein Berührpunkt. Die Gleichung der Tangente in B ist dann y = f'(u)(x - u) + f(u) und hier

$f(x) = x/2 + 2 \rightarrow f'(x) = -\ 2/x^2$ Tangente in B: $\ y = -2/u^2\ (x - u) + 2/u + 2 \quad (*)$

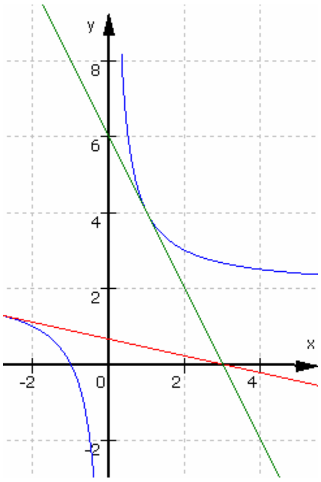
Die Tangente soll durch P(3|0) gehen. Die "Punktprobe" in (*) mit x = 3 und y = 0 ergibt

$$-2/u^2\ (3 - u) + 2/u + 2 = 0$$

Mit u² multipliziert ergibt sich $-2(3 - u) + 2u + 2u^2 = 0$ und die quadratische Gleichung $u^2 + 2u - 3 = 0$.

Mit den Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = 3$ ergeben sich die Berührungspunkte $B_1(1|3)$ und $B_2(-3|4/3)$.

Damit kann man also von P(3|0) zwei Tangenten an das Schaubild von f legen:



Ihre Gleichungen sind
$y = -2x + 6$ mit Berührungspunkt $B_1(1|3)$
und $y = -2/9\ x + 4/3$ mit Berührungspunkt $B_2(-3|4/3)$

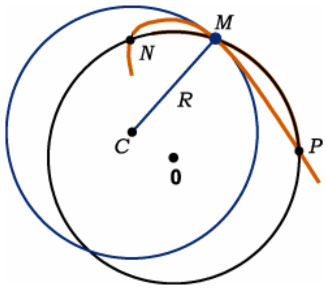
Tangenten, Aufgaben

Aufgabe 1: Bestimme alle Punkte (x0|y0) an denen eine Tangente mit der Steigung a = 2 an den Graphen der Funktionen angelegt werden kann. Gib die Gleichungen aller möglichen Tangenten an.
a) $f(x) = x^2 +2x +4$ c) $f(x) = 1/4\ x^4 -1/3\ x^3 -x^2 +2x +1$ e) $f(x) = -1/(2x) +1$
b) $f(x) = 1/3\ x^3 -x^2 -x +4/3$ d) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = 1/x^2 -1$

Aufgabe 2: Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten t durch den Punkt P am Graph der Funktion f:
a) $f(x) = x^2$ durch P(1|-3) d) $f(x) = x^3 - 4x$ durch P(-1|4)
b) $f(x) = x^2 +4x +1$ durch P(-3|-6) e) $f(x) = x^3 +6x^2 - 4x - 3$ durch P(0|-3) c) $f(x) = x^2 +6x +11$ durch P(1|2)

Aufgabe 3:
a) Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten t durch den Punkt P(u|0) am Graphen der Funktion $f(x) = x^2$.
b) Für welche t hat $f_t(x) = -2x^3 + tx^3$ an der Stelle x = 1/3 eine waagrechte Tangente?
c) Für welche t hat $f(x) = 1/3\ x^3 -tx^2 + 2x$ keine waagrechte Tangente?

Lösungen:
1a) $t(x) = 2x+4$ durch P(0|4) ; b) $t_1(x) = 2x+3$ durch P(-1|1) und $t_2(x) = 2x-23/3$ durch P(3|-5/3)
c) $t_1(x) = 2x+7/12$ durch P(-1|-17/12) und $t_2 2(x) = 2x+1$ durch P(0|1) und $t_3(x) = 2x-5/3$ durch P3(2|7/3)
d) $t(x) = 2x+1/8$ durch P(1/16|1/4) ; e) $t(x) = 2x+3$ durch P(-1/2|2) und $t(x) = 2x-1$ durch P(1/2|0)
f) $t(x) = 2x+2$ durch P(-1|0)
2a) $t1(x) = -2x-1$ mit B(-1|1) und $t2(x) = 6x-9$ mit B(3|9) ; b) $t1(x) = 2x$ mit B(-1|-2) und $t2(x) = -6x-24$ mit B(-5|6) ; c) $t1(x) = 16x-14$ mit B(5|66) und $t2(x) = 2$ mit B(-3|2) ; d) $t1(x) = -4x$ mit B(0|0) und $t2(x) = 11/4\ x+27/4$ mit B(-3/2|21/8) ; e) $t1(x) = -4x-3$ mit B(0|-3) und $t2(x) = -13-3$ mit B(-3|36) ;
3a) $t1(x) = 0$ mit B(0|0) und $t_{u2}(x) = 4ux - 4u^2$ mit $B(2u|4u^2)$
b) Ableitung $f_t'(x) = -6x^2+2tx = 0$, t = 1
c) $0 = f_t'(x) = x^2-2tx+2$, keine Lösung im Intervall $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

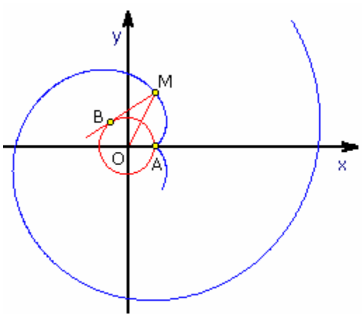


Krümmungskreis und Krümmungskreismittelpunkt

Der Krümmungskreis im Punkt M wird die Grenzlage eines Kreises genannt, der durch M und zwei benachbarte Punkte N und P der Kurve geht, wenn N gegen M und P gegen M streben.
Er verläuft durch den betreffenden Kurvenpunkt und hat dort dieselbe 1. und 2. Ableitung wie die Kurve. Demgemäß schmiegt er sich der Kurve im Berührungspunkt besonders gut an. Er wird Schmiegkreis oder Krümmungskreis genannt. Sein Radius heißt Krümmungskreisradius. Es zeigt sich, dass er der Kehrwert des Absolutbetrages der Kurvenkrümmung ist.

Krümmungskreismittelpunkt

Der Mittelpunkt C des Krümmungskreises ist der Krümmungsmittelpunkt des Punktes M. Er liegt auf der konkaven Seite der Kurve und auf der zugehörigen Kurvennormalen.

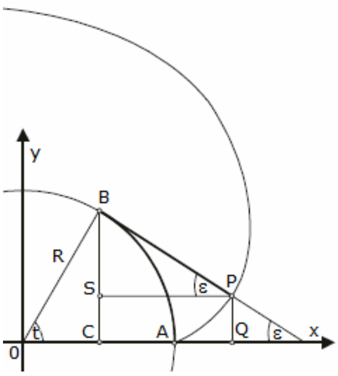


Kreisevolvente

Evolvente des Kreises heißt eine Kurve, die vom Endpunkt eines fest gespannten Fadens beschrieben wird, wenn dieser von einem Kreis abgewickelt wird, so dass der Kreisbogen AB gleich der Strecke AM ist.
Parametergleichung $x = a (\cos t + t \sin t)$
$y = a (\sin t - t \cos t)$
a ... Radius des gegebenen Kreises, t ... Wälzwinkel
Die Kurve besitzt zwei Zweige symmetrisch zur x-Achse. Der Rückkehrpunkt A liegt bei (a;0), die Schnittpunkte mit der x-Achse bei $x = a/ \cos t_0$, wobei t_0 die Wurzeln der Gleichung $\tan t = t$ sind.
Die Länge des Bogens AM beträgt $l = a/2\ t^2$. Der Krümmungsradius ist $r = a t = \sqrt{2a l}$. Der Krümmungsmittelpunkt B liegt auf dem Kreis.

Kreisevolventengleichung

Wird ein um einen festen Kreis herumgelegter Faden straff abgewickelt, so beschreibt der Endpunkt dieses Fadens eine Kreisevolvente.



Aus dem Bild folgt $\varepsilon = \pi/2 - t$
Weiterhin gilt, da der Faden straff abgewickelt werden und die Abwicklung in A (t=0) beginnen soll

$BP = BA = R\,t$; mit BA = Kreisbogen

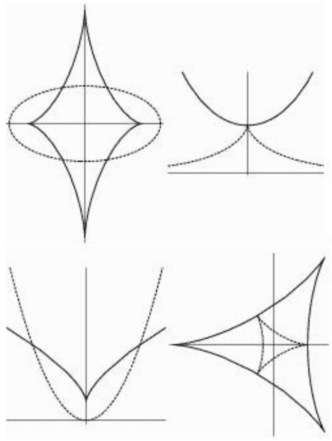
Damit gilt für die Koordinaten von P die Darstellung

$$x = 0Q = 0C + CQ = 0C + SP = R \cdot \cos t + R\,t \cdot \cos \varepsilon$$
$$y = QP = CS = CB - SB = R \cdot \sin t - R\,t \cdot \sin \varepsilon$$

daraus ergibt sich mit $\sin(\pi/2 - t) = \cos t$ und $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$ die Parameterdarstellung der Kreisevolvente

$$x = R \cdot (\cos t + t \cdot \sin t)$$
$$y = R \cdot (\sin t - t \cdot \cos t)$$

Für die Ableitung erhält man $y' = \tan t$



Evolute

... Kurve aller Krümmungsmittelpunkte der Krümmungskreise einer Funktion. Die Tangenten der Evolute sind die Normalen der gegebenen Kurve

Evoluten wurden erstmals von Diophant im Werk Conica (Buch V) untersucht.

Abbildung: Kurve ... gestrichelt, Evolute ... durchgezogen / von links oben nach rechts unten: Kurve: Ellipse, Traktrix, Parabel, Deltoid, Evolute: Lamé-Kurve, Catenary, Neilsche Parabel, Deltoid

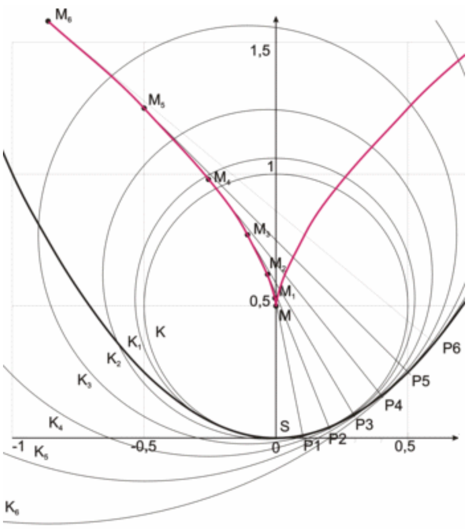
Ist die Kurve in der Form x = f(t) , y = g(t) gegeben, so gilt:

$$x = f - (f'^2 + g'^2)\, f' / (f'\, g'' - f''\, g')$$
$$y = g + (f'^2 + g'^2)\, g' / (f'\, g'' - f''\, g')$$

Liegt die Kurve in der Form y = f(x) vor, dann erhält man die Evolute E in der Parametergestalt:

$$x = t - f'(t)(1 + f'(t)^2) / f''(t) \qquad y = f(t) + (1 + f'(t)^2) / f''(t)$$

Evolute der Normalparabel



In der Abbildung ist die Evolute der Normalparabel zu sehen. Sie kann wie folgt konstruiert werden:

K, K_1, K_2, … sind die Krümmungskreise zu der Normalparabel in den Punkten S, P_1, P_2 …

Ihre Mittelpunkte M, M_1, M_2, … bilden die Evolute zu der Normalparabel.

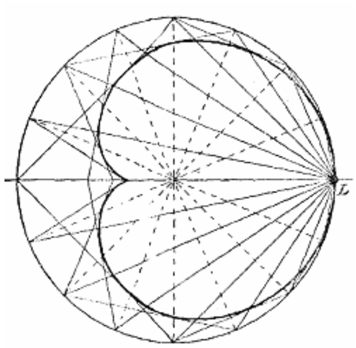
Der rechte Ast der Evolute entsteht, wenn die Parabelpunkte P nach links wandern.

Evolute - Tabelle

... für spezielle Kurven ergeben sich als Evoluten ...

Kurve	Evolute
Astroide	zweimal so große Astroide
Kardioide	Kardioide, die 1/3 so groß ist
Cayley's Sextic	Nephroide
Kreis	Punkt (0 ; 0)
Zykloide	identische Zykloide
Deltoid	dreimal so großes Deltoid
Ellipse	Ellipsen Evolute = Lamé-Kurve
Epizykloide	größere Epizykloide
Hypozykloide	ähnliche Hypozykloide
Limaçon	Kreis Katakaustic für eine Punktquelle
Logarithmische Spirale	identische logarithmische Spirale
Nephroide	1/2 so große Nephroide
Parabel	Neilsche Parabel
Traktrix	Catenary

Katakaustik



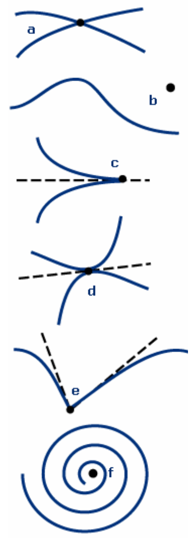
Eine Katakaustik oder katakaustische Fläche entsteht durch Reflexion der Strahlen an einem krummflächigen Spiegel oder einer Folge solcher Spiegel, die Katakaustik durch den ebenen Achsenschnitt der Fläche.

Von besonderem Interesse ist die durch Spiegelung der Lichtstrahlen an einem Kreis entstehende Katakaustik. Liegt der leuchtende Punkt L im Unendlichen, so ist die Katakaustik eine Epizykloide, die durch das Rollen eines Kreises vom Radius r/4 auf einem Kreise vom Radius r/2, wenn r der Radius des spiegelnden Kreises ist, entsteht.

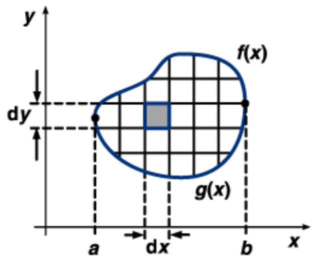
Die beiden Spitzen liegen auf der Achse zu beiden Seiten des Mittelpunkts

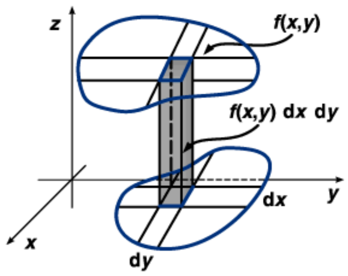
im Abstande r/2 von ihm.
Liegt L in der Entfernung a von dem Mittelpunkte außerhalb des Kreises, so liegen die Spitzen zu beiden Seiten des Mittelpunkts auf der Achse in den Abständen a r/(2a - r) und a r/(2a + r) vom Mittelpunkt. Die Kurve berührt den Kreis in denselben Punkten, in denen er von den von L ausgehenden Tangenten berührt wird.
Liegt L auf dem Kreis (Abbildung), so geht die Kurve in eine Kardioide über, die durch das Rollen eines Kreises vom Radius r/3 einem festen Kreise von demselben Radius entsteht. Die Kurve berührt jetzt den Kreis in L und die eine noch vorhandene Spitze liegt auf der Achse im Abstande r/3 vom Mittelpunkt.
Liegt L innerhalb des Kreises und ist a > r/2, so zerfällt die Kurve in zwei getrennte Äste, die zwei sich in der Achse schneidende und mit ihr gleiche Winkel bildende Asymptoten besitzen. Außer den beiden in der Achse liegenden Spitzen treten noch zwei außerhalb der Achse symmetrisch gegen sie liegende Spitzen auf.
Quelle: Lueger, Otto: Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften, Bd. 9 Stuttgart, Leipzig 1914., S. 404-406.

Singuläre Punkte



a) Doppelpunkte, in denen sich die Kurve selbst schneidet
b) die außerhalb der Kurve liegen
c) in denen sich der Durchlaufsinn der Kurve ändert (gleiche Tangenten)
d) Berührungspunkte, in denen sich die Kurve selbst berührt
e) Knickpunkte, in denen die Kurve sprunghaft die Richtung ändert (unterschiedliche Tangenten)
f) Asymptotische Punkte, um die sich die Kurve unendlich herumwindet
Ermittlung von singulären Punkten der Art a bis d: Untersuchung der Kurve in der Form F(x,y) = 0. Notwendige Bedingungsgleichung: $F = 0$ und $F_x = 0$ und $F_y = 0$
und mindestens eine der drei Ableitungen zweiter Ordnung verschwindet nicht. Die Eigenschaft des mehrfachen Punktes hängt dann ab vom Vorzeichen von $\Delta = F_{xx} F_{yy} - F_{xy} F_{yx}$
$\Delta > 0$: isolierter Punkt
$\Delta = 0$: Rückkehrpunkt oder Berührungspunkt
$\Delta < 0$: Doppelpunkt





Definition von Mehrfachintegralen

Doppelintegral: Grenzübergang einer Doppelsumme über Flächenbereiche über eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen f(x,y); Integral in zwei Dimensionen; analog zum einfachen Integral definiert:

$$\iint f(x,y)\, dy\, dx = \lim_{n,m\to\infty} \Sigma_{i=1,\dots,n} \Sigma_{j=1,\dots,m} f(x_i,y_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_i$$

Flächendifferential: dA = dx dy
Ein Doppelintegral setzt sich aus äußerem und innerem Integral zusammen. Es wird durch zwei aufeinanderfolgende gewöhnliche Integrationen berechnet. In Polarkoordinaten lautet das Flächendifferential $dA = r\, dr\, d\phi$: $\int_{\phi=\phi1}^{\phi2} \int_{r=0}^{r(\phi)} f(r, \phi)\, dr\, d\phi$

Dreifachintegral: Berechnet man durch drei aufeinanderfolgende gewöhnliche Integrationen. Je nach Form des zu integrierenden Volumens wählt man entsprechend angepasste Koordinaten bzw. passende Volumenelemente.

kartesisch	$\iiint dx\, dy\, dz$
Zylinderkoordinaten	$\iiint r\, dr\, d\phi\, dz$
Kugelkoordinaten	$\iiint r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta$
Beispiel Volumen einer Kugel	$\int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta = R^3/3\ 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi/3\ R^3$

Substitutionsregel für Mehrfachintegrale

Berechnung eines Integrals in beliebigen Koordinaten u, v und w, die durch x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w) definiert sind. Zerlegung des Integrationsgebietes in Volumenelemente durch die Koordinatenflächen u = konst, v = konst und w = konst.:

$$dV = |D|\, du\, dv\, dw$$

mit der Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante):

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Substitution des Integrals möglich für $D \neq 0$:

$$\iiint f(x,y,z)\, dV = \iiint f(u,v,w)\, |D|\, dw\, dv\, du$$

Berechnungen mit Mehrfachintegralen

Fläche zwischen zwei Kurven f(x) und g(x) in kartesischen Koordinaten

$$A = \int_{x=a}^{b} \int_{g(x)}^{f(x)} dy\, dx = \int_{x=a}^{b} (f(x)-g(x))\, dx$$

Fläche zwischen zwei Kurven in Polarkoordinaten $r = r(\phi)$ — $A = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=g(\phi)}^{f(\phi)} r\, dr\, d\phi$

Schwerpunkt (x_s, y_s) einer Fläche — $x_s = 1/A \iint x\, dy\, dx$ — $y_s = 1/A \iint y\, dy\, dx$ — $A = \iint dx\, dy$

Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s) eines Körper — $x_s = 1/V \iiint x\, dy\, dx\, dz$ — $y_s = 1/V \iiint y\, dx\, dy\, dz$ — $z_s = 1/V \iiint z\, dx\, dy\, dz$ — $V = \iiint dx\, dy\, dz$

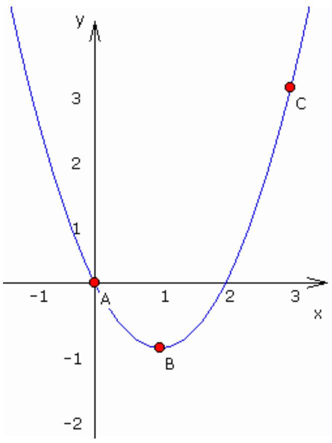
Trägheitsmoment eines Körper — $I_z = \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$

Mehrdimensionale Integrale

Den Integrationsregeln für eindimensionale Integrale entsprechen analoge Regeln für mehrdimensionale Integrale.

Name der Regel	Formel
Substitutionsregel	$\int_{x(H)} f(x)\, dx = \int_H f(x(t))\, \lvert\det x'(t)\rvert\, dt$
partielle Integration	$\int_G (\partial_j u)\, v\, dx = \int_{\partial G} u v n_j\, dF - \int_G u\, \partial_j v\, dx$
Satz von Gauß	$\int_G \partial_j u\, dx = \int_{\partial G} u n_j\, dF$
Satz von Gauß-Stokes	$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$
Satz von Fubini	$\int_{R^2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\right) dy$ (iterierte Integration)

Der Satz von Gauß ergibt sich aus der Formel der partiellen Integration, indem man dort $v = 1$ setzt.
Der Satz von Gauß-Stokes verallgemeinert den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten (z.B. Kurven, Flächen, Gebiete).
Die Formeln der partiellen Integration und der Satz von Gauß sind Spezialfälle des Satzes von Gauß-Stokes, der zu den wichtigsten Sätzen der Mathematik gehört.



Lagrange-Interpolation

Sind die $(x_i ; y_i)$ Stützstellen eines Polynoms $P_n(x)$ n-1.ten Grades, so gilt
Ansatz: $P_n(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + \ldots + L_n(x)\, y_n$

Lagrange-Polynome

$L_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n) / [\, (x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)\,]$

Lagrange-Polynom, Beispiel

Funktion durch die Punkte A(0;0), B(1,-1) und C(3,3) soll durch ein Polynom zweiten Grades angepasst werden. Die Koeffizienten sind:
$L_0 = (x - 1)(x - 3)/3 = 1/3\, (x^2 - 4x + 3)$
$L_1 = x\, (x - 3)/(-2) = -1/2\, (x^2 - 3x)$
$L_2 = x\, (x - 1)/6 = 1/6\, (x^2 - x)$
Die Funktion lautet
$f(x) = 0 * L_0(x) - 1 * L_1(x) + 3 * L_2(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

Lagrange-Interpolationsformeln

Es seien die äquidistanten Stützstellen x_0, x_1, … und die zugehörigen Funktionswerte $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, … gegeben. Weiterhin sind $h = x_{i+1} - x_i$, p eine reelle Zahl und R das Restglied. Dann gilt:

Lagrange-Interpolation durch 2 Punkte, lineare Interpolation

$$f(x_0 + ph) = (1-p)\, f_0 + p\, f_1 + R$$

Lagrange-Interpolation durch 3 Punkte

$$f(x_0 + ph) = p(p-1)/2\, f_{-1} + (1-p^2)\, f_0 + p(p+1)/2\, f_1 + R$$

Lagrange-Interpolation durch 4 Punkte

$$f(x_0 + ph) = -p(p-1)(p-2)/6\, f_{-1} + (p^2-1)(p-2)/2\, f_0 - p(p+1)(p-2)/2\, f_1 + p(p^2-1)/6\, f_2 + R$$

Lagrange-Interpolation durch 5 Punkte

$$f(x_0 + ph) = (p^2-1)p(p-2)/24\, f_{-2} - (p-1)p(p^2-4)/6\, f_{-1} + (p^2-1)(p^2-4)/4\, f_0 - (p+1)p(p^2-4)/6\, f_1 + (p^2-1)p(p+2)/24\, f_2 + R$$

Lagrange-Interpolation durch 6 Punkte

$$f(x_0 + ph) = -p(p^2-1)(p-2)(p-3)/120\, f_{-2} + p(p-1)(p^2-4)(p-3)/24\, f_{-1} - (p^2-1)(p^2-4)(p-3)/12\, f_0 + p(p+1)(p^2-4)(p-3)/12\, f_1 - p(p^2-1)(p+2)(p+3)/24\, f_2 + p(p^2-1)(p^2-4)/120\, f_3 + R$$

Newton-Interpolation

Ansatz $I_n(x) = A_0 + A_1\, (x-x_0) + A_2\, (x-x_0)(x-x_1) + \ldots + A_n\, (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$

$A_0 = y_0$
$A_1 = (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)$
$A_2 = [(y_1 - y_0) - A_1\, (x_2 - x_0)] / [(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)]$ usw…

Gegeben seien die Argumente $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit den Werten $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Man schreibe die Werte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ von links nach rechts in einer Reihe und darunter die zugehörigen $y_0, y_1, \ldots, y_n$.
Man berechne die Differenzen benachbarter y-Werte und dividiere sie durch die Differenzen der x-Werte.
Die neuen Werte werden zwischen die voneinander abgezogenen Werte eine Zeile tiefer geschrieben:

$y_{0,1} = (y_0-y_1)/(x_0-x_1), \ldots, y_{n-1,n} = (y_{n-1}-y_n)/(x_{n-1}-x_n)$

Als nächstes werden die Differenzen der neuen Werte gebildet und durch die Differenz der Randwerte dividiert. Bei $y_{0,1}$ und $y_{1,2}$ sind die Randwerte x_0 und y_2.
Mit den neuen Werten bildet man erneut die Differenzen, bis nur noch eine Differenz übrigbliebt.

$y_{0,1,\ldots,n} = (y_{0,1,\ldots,n-1} - y_{1,2,\ldots,n}) / (x_0 - x_n)$
Die Werte mit einer Null als ersten Index, d.h. jeweils das am weitesten links stehende Glied einer Zeile, sind die gesuchten Parameter A_0 bis A_n.
Beispielaufgabe: Durch die Punkte A(1, 30), B(2, 27), C(3, 25), D(4, 24) und E(5, 21) soll ein Polynom 4.Grades gezeichnet werden.
Newton-Schema:

1	2	3	4	5
20	27	25	24	21
-3	-2	-1	-3	
1/2	1/2	-1		
0	-1/2			
-1/8				

Das Polynom hat damit die Form

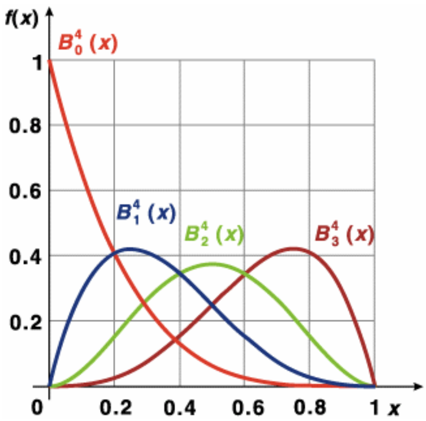
$$30 - 3\,(x-1) + 1/2\,(x-1)(x-2) - 1/8\,(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt $y = 1/8\,x^4 + 5/4\,x^3 - 31/8\,x^2 + 7/4\,x + 31$

Gregory-Newton-Verfahren

Das Gregory-Newton-Verfahren nutzt ein vereinfachtes Differenzenschema bei äquidistanten Stützstellen, d.h. Stützstellen die gleich weit voneinander entfernt sind.
Zur Berechnung müssen nur noch die Differenzen der y-Werte gebildet werden, die Division durch die x-Differenzen entfällt.
Die gefundenen $y_{0,1,\ldots,i}$-Werte müssen am Ende zur Ermittlung der gesuchten Parameter A_0 bis A_n noch durch den Abstand $i!\ h^i$ zwischen aufeinanderfolgenden x-Werten geteilt werden.

$A_0 = y_0$
$A_1 = y_{0,1} / (1!\ h)$
$A_2 = y_{0,1,2} / (2!\ h^2)$ ...
$A_n = y_{0,1,\ldots,n} / (n!\ h^n)$



Bernstein-Polynome

... Polynome vom Grad n
$B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$; k=0,1,2,...,n
Sie werden nur im Bereich $0 \le x \le 1$ verwendet und haben dort die Eigenschaften
1. eine k-fache Nullstelle bei x = 0
2. eine (n-k)-fache Nullstelle bei x = 1
3. genau ein Maximum bei x = k/n
4. alle Polynome eines Grades bilden eine Zerlegung der Eins
5. die Polynome sind linear unabhängig und bilden eine Basis für Polynome vom Höchstgrad n, d.h., alle Polynome n-ten Grades können als Linearkombination von Bernstein-Polynomen beschrieben werden.

Für n=1,2,... wird $B_k^1(x) = x^k (1-x)^{1-k} \sin(\pi k) / (\pi k (1-k))$
$B_k^2(x) = 2 x^k (1-x)^{2-k} \sin(\pi k) / (\pi k (k-1) (k-2))$
$B_k^3(x) = 6 x^k (1-x)^{3-k} \sin(\pi k) / (\pi k (1-k) (k-2) (k-3))$
$B_k^4(x) = 24 x^k (1-x)^{4-k} \sin(\pi k) / (\pi k (k-1) (k-2) (k-3) (k-4))$
Die Polynome wurden von dem russisch-sowjetischen Mathematiker Sergej N.Bernstein 1911 eingeführt. Paul de Faget de Casteljau und Pierre Bézier konstruierten die gleichen Polynome, die heute verbreitet Bézier-Polynome genannt werden.

Bézier-Polynome

Bézier-Polynom ... Darstellung einer Funktion mit Bernstein-Polynomen: $f(x) = \Sigma\, b_k B_k^n(x)$, Summe von k = 0 bis n

Bézier-Punkte	Koordinaten b_k einer Darstellung in Bézier-Polynomen
Bézier-Polygon	Polygon mit den Eckpunkten $P(x = k/n,\ y = b_k)$ für k=0,...,n.

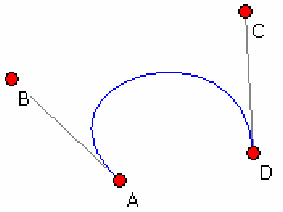
Interpolation mit dem Bézier-Polygon

Man hat n+1 äquidistante Stützstellen $(x_0, y_0), \ldots, (x_0 + n\,\Delta a, y_n)$,setze sie als Punkte $(x=k/n\ ,\ y=y_k)$ des Bézier-Polygons und erhält als Fitpolynom das Bézier-Polynom $f(z) = \Sigma\, y_k B_k^n(z)$ (Summe von k = 0 bis n) mit $z = (x-x_0) / (n\delta x)$.
Die Approximation einer Kurve in vielen Punkten erfolgt stückweise in Segmenten von jeweils n (in der Praxis n = 4 üblich) Punkten, die durch Kurven n-1-ten Grades angepasst werden. An den Rändern müssen zusätzliche Bedingungen wie ein- oder mehrfache Differenzierbarkeit erfüllt werden. Dies führt zu zusätzlichen Bedingungen bei den Bezier-Punkten, die man durch Einsetzen von Hilfspunkten erfüllt.

Bézier-Kurve

Die kubische Bézier-Kurve ist grundsätzlich das wichtigste grafische Element, weil fast alle Formen und Zeichenumrisse aus Bézier-Segmenten zusammengesetzt werden können.

Die Gestalt einer kubischen Bézier-Kurve wird durch den Start- und Endpunkt (Punkt 0 bzw. 3) und durch die Bézier-Kontrollpunkte (BCP) außerhalb der Kurve (Punkte 1 und 2) bestimmt. Dabei ist eine Bézier-Kurve eine kubische Kurve, die jedoch eine Überschneidung zulässt.



Die im Beispiel gezeichneten Geraden von Punkt 0 nach Punkt 1 sowie von Punkt 2 nach Punkt 3 bilden Tangenten durch Anfangs- bzw. Endpunkt der Bézier-Kurve. Das Polygon, welches durch die vier Punkte gebildet wird, schließt immer die Bezier-Kurve vollständig ein. Pierre Bézier beschreibt die nach ihm benannte Kurve mit folgender kubischen Formel:

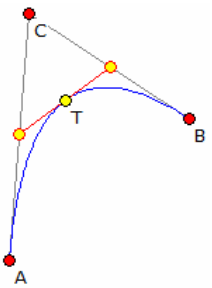
$$x(u) = x_0\,(1-u)^3 + x_1\,3u\,(1-u)^2 + x_2\,3u^2\,(1-u) + x_3\,u^3$$
$$y(u) = y_0\,(1-u)^3 + y_1\,3u\,(1-u)^2 + y_2\,3u^2\,(1-u) + y_3\,u^3$$

Dabei sind (x_0,y_0): Startpunkt; (x_1,y_1), (x_2,y_2): zwei Bézier-Kontrollpunkte (BCP's) außerhalb der Kurve; und (x_3,y_3): Endpunkt der Kurve. Der Wert $0 \leq u \leq 1$ ist der Parameter der Darstellung und wird entlang der Kurve ständig etwas erhöht.

Bézier-Kurve, Algorithmus

Zeichnen einer Bezierkurve 3.Grades mit dem Algorithmus von de Casteljau

```
private void bezier(
        double px0, double py0,         // anhand des Stuetzpunktes p0
        double px1, double py1,         // anhand des Stuetzpunktes p1
        double px2, double py2,         // anhand des Stuetzpunktes p2
        double px3, double py3,         // anhand des Stuetzpunktes p3
        int depth)       // aktuelle Rekursionstiefe
{
double qx01,qy01,qx12,qy12,qx23,qy23,qx012,qy012,qx123,qy123,qx0123,qy0123; // Hilfspunkte
if (depth > iter)        // Iterationstiefe erreicht
        set_line( new Point( (int)px0, (int)py0), new Point( (int)px3, (int)py3));
        else {
        depth++;
           qx01 = (px0+px1)/2;        qy01 = (py0+py1)/2;
           qx12 = (px1+px2)/2;        qy12 = (py1+py2)/2;
           qx23 = (px2+px3)/2;        qy23 = (py2+py3)/2;
           qx012 = (qx01+qx12)/2;   qy012 = (qy01+qy12)/2;
           qx123 = (qx12+qx23)/2;   qy123 = (qy12+qy23)/2;
           qx0123 = (qx012+qx123)/2;        qy0123 = (qy012+qy123)/2;
           bezier (px0,py0,qx01,qy01,qx012,qy012,qx0123,qy0123,depth);
           bezier (qx0123,qy0123,qx123,qy123,qx23,qy23,px3,py3,depth); }}
```



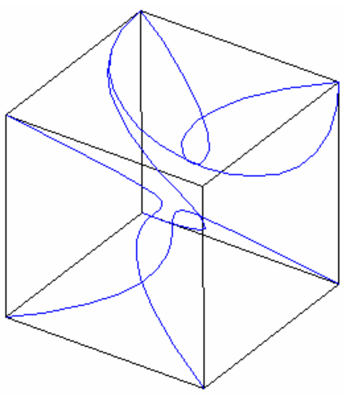
Quadratische Bézier-Kurve

Eine quadratische Bézierkurve besitzt nur einen Kontrollpunkt, in der Abbildung C. CA und CB sind dann Tangenten.
Die Kurve ist dann der Weg, der für $P_0 = A$, $P_1 = B$, $P_2 = C$ durch die Funktion

$$C(t) = (1-t)^2\,P_0 + 2t\,(1-t)\,P_1 + t^2\,P_2$$

mit t von 0 bis 1 verfolgt wird.

Nach dem Casteljau-Algorithmus ergibt sich die Kurve wie folgt:
Ein Hilfspunkt D ergibt sich mit dem Teilverhältnis t als Teilpunkt der Strecke AC, ein Hilfspunkt E als Teilpunkt der Strecke CB.
Der Punkt T auf der quadratische Bézier-Kurve ist dann der entsprechende Teilungspunkt zum Verhältnis t auf DE.
Wichtet man den Einfluss der Punkte auf die Kurve und erweitert den Parameterraum von t auf die reellen Zahlen, so ergeben sich rationale quadratische Bézier-Kurven.
Es gilt, dass jeder Kegelschnitt durch eine erweiterte rationale quadratische Bézier-Kurve parametrisiert werden kann.

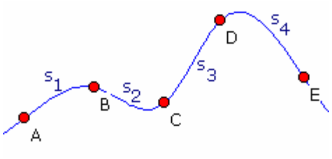


Räumliche Bézier-Kurve

Bézier-Kurven müssen nicht auf die Ebene beschränkt bleiben. Es ist ebenso möglich, diese Kurven auch im dreidimensionalen Raum zu betrachten.
In der Abbildung sind einige räumliche Bézier-Kurven gezeichnet, deren Endpunkte und Kontrollpunkte Eckpunkte eines Würfels sind.
Sind A (x_0,y_0,z_0) der Startpunkt, B (x_3,y_3,z_3) der Endpunkt und C (x_1,y_1,z_1), D (x_2,y_2,z_2) die Kontrollpunkte, so ergibt sich die Raumkurve für einen Parameter $0 \leq t \leq 1$ zu

$$P = A\,(1-t)^3 + C\,3t\,(1-t)^2 + D\,3t^2\,(1-t) + B\,t^3$$

Zeichnet man die Bézier-Kurven für alle möglichen Kombinationen von Anfangs-, End- und Kontrollpunkten in einen Würfel ein, so ergibt sich ein interessantes Gebilde.



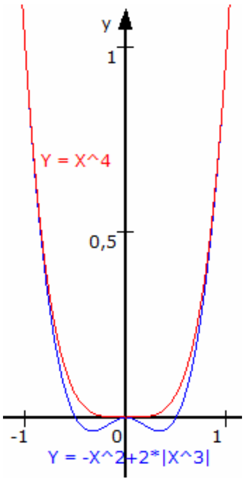
Spline-Interpolation

Spline ... segmentierte Kurve, wobei jedes Segment jeweils durch ein Polynom vom Grad n, das n-1 mal stetig differenzierbar, angepasst wird.
Subspline ... segmentierte Kurve mit Polynomen vom Grad n, die weniger oft, aber mindestens einmal differenzierbar ist. Meist werden kubische Splines verwendet.

Gegeben sind die Stützpunkte P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4 (n = 4). Gesucht ist eine Funktion f(x), auf denen alle diese Punkte liegen. f(x) wird durch kubische Parabeln s_i (x) mit i = 1, 2, ... , n - sogenannte Splines - stückweise angenähert.

Forderungen

die Splines verlaufen durch die Stützpunkte $s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$; Anfang eines Splines (i = 1 ... 4)
$s_i(x_i) = y_i$; Ende eines Splines (i = 1 ... 4)
die Splines werden ohne "Knick" miteinander verbunden
$s_{i-1}'(x_i) = s_i'(x_i)$; gleiche Anstiege (i = 2 ... 4) $s_{i-1}''(x_i) = s_i''(x_i)$; (i = 2 ... 4)
die Anstiege an den "Enden" sollen extrem sein $s_1''(x_0) = s_n''(x_n) = 0$



Spline - Beispiel

Annäherung der Funktion $y = x^4$ durch ein kubisches Spline mit den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Es gilt $f_0 = 1$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1$ sowie $f'_0 = -4$, $f'_2 = 4$.
Aus $f'_{1-1} + 4\,f'_1 + f'_{1+1} = -4 + 4\,f'_1 + 4 = 3\,(f_2 - f_0) = 0$ folgt $f'_1 = 0$.
Einsetzen führt im Intervall $x_0 < x < x_1$ zu $a_0 = 1$, $a_1 = -4$, $a_2 = 5$, $a_3 = 2$.

$$s(x) = 1 - 4(x+1) + 5(x+1)^2 - 2(x+1)^3 = -x^2 - 2x^3$$

Im Intervall $x_1 < x < x_2$ führt Einsetzen zu $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$.

$$s(x) = -x^2 + 2x^3$$

Die Funktion $y = x^4$ wird damit approximiert durch

$$s(x) = -x^2 + 2\,|x|^3$$

In der Abbildung ist das Ergebnis dargestellt.

Kubische Splines

Ein kubischer Spline ist eine glatte Kurve, die durch gegebene Punkte im Koordinatensystem geht und eine minimale Gesamtkrümmung aufweist. Jedes Teilstück ist dabei durch eine kubische Parabel $a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ mit geeigneten Koeffizienten a_i, b_i, c_i und d_i definiert.
"Glatte Kurve" bedeutet dabei im mathematischen Sinne, dass die Kurve zweimal stetig differenzierbar sein soll. Alle gegebenen Punkte stellen als Stützstellen der Kurve auch Nahtstellen zwischen den Teilkurven dar, in denen jeweils beide Funktionswerte, beide erste und auch zweite Ableitungen der zusammentreffenden Teilkurven übereinstimmen. Diese Naht- oder Stützstellen werden auch Knoten genannt.

Herleitung:

Es seien n+1 Punkte $(x_0|y_0)$, $(x_1|y_1)$ ... $(x_n|y_n)$ gegeben, wobei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ gelte.
Zur Gewinnung der Koeffizienten definiert man geeigneterweise die n Teilstücke des Splines mit

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i,$$

wobei 0 = i < n ist und $S_i(x)$ das Kurvenstück zwischen den Punkten $(x_i|y_i)$ und $(x_{i+1}|y_{i+1})$ darstellt.
Da die Teilstücke in den gegebenen Punkten nahtlos ineinander übergehen, gilt $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = y_i$ für $1 < i \leq n$.
Aus $S_i(x_i) = y_i$ folgt sofort $d_i = y_i$, denn in $S_i(x_i) = a_i(x_i-x_i)^3 + b_i(x_i-x_i)^2 + c_i(x_i-x_i) + d_i = y_i$ werden alle (x_i-x_i) Null.
Außerdem gilt wegen $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$

$$a_{i-1}(x_i-x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i-x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + d_{i-1} = a_i(x_i-x_i)^3 + b_i(x_i-x_i)^2 + c_i(x_i-x_i) + d_i$$
$$a_{i-1}(x_i-x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i-x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + d_{i-1} = d_i \qquad \text{(I)}$$

In allen gegebenen Punkten haben die anstoßenden Teilkurven gleiche Tangenten, es gilt also $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$, wobei die Ableitung $S'_i(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i$ ist. Hieraus gewinnt man

$$S'_{i-1}(xi) = S'_i(x_i)$$
$$3a_{i-1}(x_i-x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_i(x_i-x_i)^2 + 2b_i(x_i-x_i) + c_i$$
$$3a_{i-1}(x_i-x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i \qquad \text{(II)}$$

Schließlich haben die anstoßenden Teilkurven in allen gegebenen Punkten auch gleiche Krümmungen, es gilt also $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$, wobei die 2.Ableitung $S''_i(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i$ ist. Hieraus gewinnt man $S''i-1(x_i) = S''_i(x_i)$,
d.h. $6a_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + 2b_{i-1} = 2b_i$
Aus dieser Gleichung folgt

$$a_{i-1} = (b_i - b_{i-1})/(3(x_i-x_{i-1})) \qquad \text{(III)}$$
$$(b_i-b_{i-1})(x_i-x_{i-1}) + 2b_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i \qquad \text{(III) in (II) eingesetzt}$$
$$(b_i+b_{i-1})(x_i-x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i \qquad \text{(IV)}$$
$$(b_i-b_{i-1})(x_i-x_{i-1})^2/3 + b_{i-1}(x_i-x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + d_{i-1} = d_i \qquad \text{(III) in (I) eingesetzt}$$
$$(b_i-b_{i-1})(x_i-x_{i-1})/3 + b_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + c_{i-1} = (d_i-d_{i-1})/(x_i-x_{i-1})$$
$$c_{i-1} = (d_i-d_{i-1})/(x_i-x_{i-1}) - (b_i-b_{i-1})(x_i-x_{i-1})/3 - b_{i-1}(x_i-x_{i-1}) \qquad \text{(V)}$$

$$c_i = (d_{i+1}-d_i)/(x_{i+1}-x_i) - (b_{i+1}-b_i)(x_{i+1}-x_i)/3 - b_i(x_{i+1}-x_i) \qquad (V')$$

(V) und (V') in (IV) eingesetzt:

$$(b_i+b_{i-1})(x_i-x_{i-1})+(d_i-d_{i-1})/(x_i-x_{i-1})-(b_i-b_{i-1})(x_i-x_{i-1})/3-b_{i-1}(x_i-x_{i-1})$$
$$= (d_{i+1}-d_i)/(x_{i+1}-x_i)-(b_{i+1}-b_i)(x_{i+1}-x_i)/3+b_i(x_{i+1}-x_i)$$
$$3(b_i+b_{i-1})(x_i-x_{i-1})+3(d_i-d_{i-1})/(x_i-x_{i-1})-(b_i-b_{i-1})(x_i-x_{i-1})-3b_{i-1}(x_i-x_{i-1})$$
$$= 3(d_{i+1}-d_i)/(x_{i+1}-x_i)-(b_{i+1}-b_i)(x_{i+1}-x_i)+3b_i(x_{i+1}-x_i)$$
$$(x_i-x_{i-1})b_{i-1}+2(x_{i+1}-x_{i-1})b_i+(x_{i+1}-x_i)b_{i+1} = 3((d_{i+1}-d_i)/(x_{i+1}-x_i)-(d_i-d_{i-1})/(x_i-x_{i-1})) \qquad (VI)$$

Wegen $d_i = y_i$ ist die rechte Seite von (VI) für $i>0$ und $i<n$ bekannt. Weil auch alle entsprechenden x bekannt sind, lassen sich die b_i für $0<i<n$ mit einem linearen Gleichungssystem aus allen Gleichungen (VI) gewinnen. b_0 und b_n sind die halben Krümmungen im ersten und im letzten Punkt, die frei vorgegeben werden können und hier mit 0 angenommen werden.
Die Koeffizientenmatrix der linken Seite des Gleichungssystems stellt sich für $b_0=b_n=0$ wie folgt dar:

	b_1	b_2	b_3	...	b_{n-3}	b_{n-2}	b_{n-1}		
i=1	$2(x_2-x_0)$		x_2-x_1	0	...	0	0	0	
i=2	x_2-x_1	$2(x_3-x_1)$		x_3-x_2	...	0	0	0	...
i=n-2	0	0	0	0	$x_{n-2}-x_{n-3}$		$2(x_{n-1}-x_{n-3})$		$x_{n-2}-x_{n-3}$
i=n-1	0	0	0	0	0	$x_{n-1}-x_{n-2}$		$2(x_n-x_{n-2})$	

Die rechte Seite ergibt sich aus (VI) für die angegebenen Indizes. Die Lösungen rückwärts in (V) und (III) eingesetzt, ergeben sich die Koeffizienten c_i und a_i.

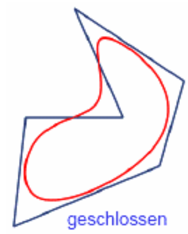
Splines in der Architektur

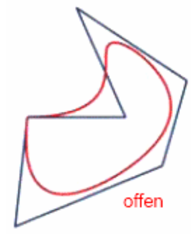
Splines werden auch in der Architektur genutzt. Dies erfolgt zwar noch nicht sehr häufig, dafür aber spektakulär.

Links ist ein Fußweg in der Parklandschaft South Bank Grand Arbour, Brisbane Queensland Australien, abgebildet.
Der kilometerlange Weg, der Brisbane River Side von Grey Street trennt, ist dabei von ingesamt 443 Stahlplastiken begrenzt, deren einzelne Abschnitte die Form kubischer Splines aufweisen. Nachts werden die Strukturen gelb angestrahlt, so dass ein zusätzlicher Effekt entsteht.

Der Park wurde 1997 von dem Melbourner Unternehmen Denton Corker Marshall geplant und 1999 fertiggestellt. Der Park hat eine schlangenförmige Struktur, einzelne abgetrennte Bereiche haben Kreisform. South Bank Grand Arbour wurde mittlerweile zu einer Touristenattraktion in Brisbane.

B-Spline-Kurve

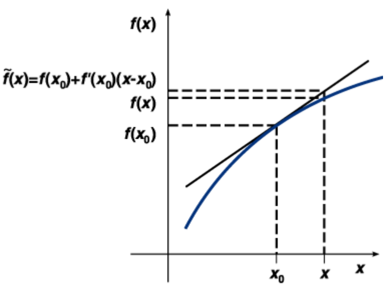




B-Spline-Kurven wurden von J. Ferguson 1964 bei Boeing eingeführt. In CAD-Systemen taucht auch der Name NURBS (= Non-Uniform Rational B-Splines) auf.

Eine B-Spline-Kurve vom Grad n besteht aus Bezier-Kurven vom Grad n, welche mit optimaler Glattheit zusammengesetzt sind:
B-Spline-Kurven können offen oder geschlossen sein. Bei einer geschlossenen B-Spline-Kurve wird ein geschlossenes Kontrollpolygon zur Gänze geglättet.
Im offenen Modus hat ein geschlossenes Polygon einen Anfangspunkt und einen damit identischen Endpunkt; dort wird nicht geglättet.
Bei offenen B-Spline Kurven werden die Endpunkte mit Tangenten durch das Kontrollpolygon angegeben. Die Kurve liegt dann in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons.

B-Spline-Kurven und damit auch die Bézier-Kurven sind Spezialfälle von NURBS. NURBS haben einen zusätzlichen Designparameter, sogenannte Gewichte. Standardmäßig sind alle Gewichte gleich 1. In diesem Fall stimmt die NURBS-Kurve mit der gewöhnlichen B-Spline-Kurve überein.
Das Erhöhen des Gewichtes eines Kontrollpunktes bewirkt, dass die Kurve zu diesem Kontrollpunkt hingezogen wird. Multipliziert man die Gewichte aller Punkte mit demselben Faktor, so erhält man die ursprüngliche Kurve.



Taylor-Entwicklung

Ausgangspunkt: Der Funktionswert f(x), kann durch einen Punkt auf der Tangente $f'(x)$ in x_0 angenähert werden. Dies ergibt sich aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung. Die Näherung ist exakt für Polynome 1.Grades (Geraden) und bei anderen Funktionen um so besser, je näher *x* an x_0 liegt, d.h., je kleiner $|x - x_0|$ ist.
Ist die Funktion mehrfach differenzierbar, so führt dies zur Taylor-

Entwicklung:
Entwicklung von f(x) an der Stelle x_0 zu einer Potenzreihe, f(x) muss in der Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar sein

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)/1! * (x-x_0) + f''(x_0)/2! * (x-x_0)^2 + ...$$

Restglied nach Lagrange $R_n(x) = (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) / (n+1)!$

Je kleiner das Restglied R_n ist, desto besser ist die Näherung der Funktion f(x) durch das Taylor-Polynom. Die Taylor-Formel erlaubt die Berechnung von Funktionswerten mit beliebiger Genauigkeit. Anzahl der Glieder und damit der Grad des Polynoms, der für die geforderte Genauigkeit benötigt wird, hängt wesentlich vom Abstand $|x - x_0|$ des Punktes x_0 vom Punkt x ab. Je größer $|x - x_0|$, desto mehr Glieder müssen verwendet werden. Das Restglied kann im allgemeinen nicht exakt angegeben werden, da die Stelle x* nicht bekannt ist. Es reicht jedoch häufig aus, wenn der Fehler nach oben abgeschätzt werden kann.

MacLaurinsche Reihe Sonderfall der Taylorreihe: x=0

$$f(x) = f(0) + f'(0)*x/1! + f''(0)*x^2/2! + ...$$

Restglied $R_n(x) = x^{n+1} f^{(n+1)}(\delta x) / (n+1)!$

Beispiel: Erste Taylornäherungen der Sinusfunktion
$T_n(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + - ... x^n/n!$ (n ungerade)

Taylor-Entwicklung (2), Satz von Taylor

Grundlage der Taylor-Entwicklung ist der Satz von Taylor:
Es sei $I = [x_0, x]$ für $x > x_0$ (bzw. $I = [x, x_0]$ für $x < x_0$) und f(x) n-fach stetig differenzierbar auf I und n+1-mal differenzierbar in $I\setminus\{x, x_0\}$ und p eine natürliche Zahl.
Dann gibt es für alle x aus I ein Θ mit $0 < \Theta < 1$, so dass mit dem Restglied von Schlömilch

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))/(n!p)\ (1-\Theta)^{n+1-p}\ (x-x_0)^{n+1}$$

die Taylorsche Formel

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)/k!\ (x-x_0) + R_n(x)$$

gilt.

Nachweis:Man setze $F(t) = f(x) - \Sigma_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)/k!\ (x-t)^k$

$G(t) = (x-t)^p$

Dann ist $F(x) = G(x) = 0$ und $F(x_0) - F(x) = R_n(x)$, $G(x_0) - G(x) = (x-x_0)^p$.

$$F'(t) = -\Sigma_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(t)/k!\ (x-t)^k + \Sigma_{k=1}^{n} f^{(k+1)}(t)/k!\ (x-t)^{k-1} = - f^{(n+1)}(t)/n!\ (x-t)^n$$

$$G'(t) = p\ (x-t)^{p-1}$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert ein $0 < \Theta < 1$ mit

$$(F(x_0) - F(x))/(G(x_0) - G(x)) = F'(x_0+\Theta(x-x_0)) / G'(x_0+\Theta(x-x_0))$$

$$R_n(x) / (x-x_0)^p = f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))\ (x-(x_0+\Theta(x-x_0))^n / (n!p\ (x-(x_0+\Theta(x-x_0)))^{p-1}$$

und $R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))/(n!p)\ (1-\Theta)^{n+1-p}\ (x-x_0)^{n+1}$

Restglied von Lagrange
Für p = n+1 erhält man das Restglied von Lagrange $R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))/(n+1)!\ (x-x_0)^{n+1}$
Restglied von Cauchy
Für p = 1 erhält man das Restglied von Cauchy $R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))/n!\ (1-\Theta)^n\ (x-x_0)^{n+1}$

Potenzreihen / Funktionenreihen

Unter einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt z_0 versteht man eine unendliche Reihe der Form

$$f(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n\ (z - z_0)^n$$

wobei alle a_n und z_0 feste komplexe Zahlen sind, während die komplexe bzw. reelle Zahl z variiert.

Taylor-Reihen sind Sonderfälle der allgemeinen Potenzreihen.
Konvergiert eine Potenzreihe für die x-Werte eines Intervalls, kann durch die Grenzwerte eine Funktion f(x) im Intervall definiert werden: Jedem x des Intervalls wird als Funktionswert f(x) der Grenzwert der unendlichen Reihe zugeordnet.
Allgemeine Form: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$
nirgends konvergent … Konvergenz nur für x = 0
beständig konvergent … Konvergenz für alle x
Potenzreihe p(x) konvergiert immer an der Entwicklungsstelle $x = x_0$, der triviale Fall $p(x_0) = a_0$.
Der Konvergenzradius r um die Entwicklungsstelle kann angegeben werden, wenn die Reihe auch für Werte ungleich x_0 konvergiert.
Der Konvergenzradius r der Potenzreihe ist die kleinste obere Schranke (Supremum) der Zahlen $|x - x_0|$, für die $\Sigma a_n (x-x_0)^n$ (Summe n = 0, …,∞) konvergiert. Dabei gilt: $0 \le r \le \infty$.
Die Reihe divergiert für alle x-Werte mit $|x - x_0| > r$. Der Konvergenzbereich ist das symmetrische Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ um die Entwicklungsstelle x_0.

Linearkombinationen von Potenzreihen

Linearkombinationen von Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich gliedweise ausgeführt werden, wenn die Konvergenzbereiche der Potenzreihen überlappen:

$$c\ \Sigma\ a_n\ (x - x_0)^n + d\ \Sigma\ b_n\ (x - x_0)^n = \Sigma\ (c\ a_n + d\ b_n)\ (x - x_0)^n$$

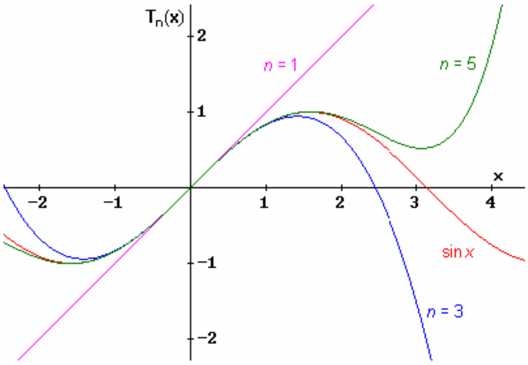
Summandenweise Integration oder Differenziation einer Funktionen-Reihe $\Sigma f_n(x)$ ist nur möglich, wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert. Einfache punktweise Konvergenz für jedes x reicht nicht aus!

Potenzreihen mit gleichmäßiger Konvergenz können - unabhängig vom einzelnen x - zu jeder vorgegebenen Genauigkeit ε nach einer Anzahl von N Summanden abgebrochen werden. Der Fehler ist dann kleiner gleich ε. Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen bedeutet eine Potenzreihe konvergiert auf jedem abgeschlossenen und beschränkten Teilintervall $[x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ des Konvergenzbereiches gleichmäßig, wenn r_1 kleiner als der Konvergenzradius r ist: $0 < r_1 < r$. Eine Potenzreihe besitzt absolute Konvergenz, wenn innerhalb des Konvergenzbereiches die Potenzreihe absolut konvergiert.

Taylor-Entwicklung (3)

Beispiel: Erste Taylornäherungen der Sinusfunktion
$T_n(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + - \dots x^n/n!$
(n ungerade)

$T_1(x) = x$
$T_3(x) = x - x^3/3!$
$T_5(x) = x - x^3/3! + x^5/5!$
$T_7(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$
$T_7(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9!$



Satz von Abel

Für jede Potenzreihe, die weder beständig noch nirgends konvergent ist, gibt es einen Wert r >0, so dass die Reihe für | x | < r konvergiert und für | x | > r divergiert.

Konvergenz der Taylor-Reihe

Die Taylor-Reihe konvergiert für $x = x_0$ trivialerweise gegen $f(x_0)$. Ansonsten braucht sie nicht konvergent zu sein. Auch bei Konvergenz muss der Grenzwert nicht gleich dem Funktionswert f(x) sein.
Konvergenz der Taylor-Reihe gegen den entsprechenden Wert f(x), wenn für das Restglied gilt: $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Man sagt in diesem Fall, dass f(x) durch seine Taylor-Reihe dargestellt wird.

Operationen mit Potenzreihen

Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzprozess: Jede Potenzreihe darf im Innern ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert werden:

$$f'(x) = d/dx\,[a_0 + \Sigma a_n (x - x_0)^n] = \Sigma a_n\, d/dx\,(x - x_0)^n = \Sigma (n+1)\, a_{n+1} (x - x_0)^n]$$

Die entstehende Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Potenzreihe.
Gliedweise Integration: Konvergiert die Potenzreihe $f(x) = \Sigma a_n (x - x_0)^n$ mit einem Konvergenzradius r, so konvergiert auch die Reihe $g(x) = C + \Sigma a_n/(n+1)\,(x - x_0)^{n+1}$ und zwar mit dem gleichen Konvergenzradius r.
Addition, Subtraktion, Multiplikation von zwei oder mehr Potenzreihen im gemeinsamen Konvergenzbereich ist gliedweise möglich. Konvergenz der Summe, der Differenz, des Produktes mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich.
Stetigkeit: Eine Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzbereiches stetig.

Identitätssatz: Sind die Grenzwerte zweier Potenzreihen gleich für $|x - x_0| < r$,

$$\Sigma a_n (x - x_0)^n = \Sigma b_n (x - x_0)^n$$

wobei r das Minimum der beiden Konvergenzradien ist, dann sind auch alle Ableitungen gleich,

$$\Sigma n\, a_n (x - x_0)^{n-1} = \Sigma n\, b_n (x - x_0)^{n-1}$$
$$\Sigma n(n-1)\, a_n (x - x_0)^{n-2} = \Sigma n(n-1)\, b_n (x - x_0)^{n-2} \text{ usw.}$$

Damit folgt die Gleichheit der Koeffizienten a_n und b_n, wenn $x = x_0$ gesetzt wird,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots$$

Umkehrung von Potenreihen

Die Umkehrung der Potenzreihe $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$
ergibt die Potenzreihe $x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$
mit den Bestimmungsgleichungen $a_1 b_1 = 1$ $\quad a_1^3 b_2 = -a_2$

$$a_1^5 b_3 = 2a_2^2 - a_1a_3 \qquad a_1^7 b_4 = 5a_1a_2a_3 - 5a_2^3 - a_1^2 a_4$$
$$a_1^9 b_5 = 6a_1^2{}_a2a_4 + 3a_1^2a_3^2 - a_1^3a_5 + 14a_2^4 - 21a_1a_2^2a_3$$
$$a_1^{11}b_6 = 7a_1^3a_2a_5 + 84a_1a_2^3a_3 + 7a_1^3a_3a_4 - 28a_1^2a_2a_3^2 - a_1^4a_6 - 28a_1^2a_2^2a_4 - 42a_2^5 \quad \text{usw.}$$

Partialbruchentwicklungen

$\cot x = 1/x + 2x\,[1/(x^2 - \pi^2) + 1/(x^2 - 4\pi^2) + 1/(x^2 - 9\pi^2) + \dots]$
$\csc x = 1/x - 2x\,[1/(x^2 - \pi^2) + 1/(x^2 - 4\pi^2) + 1/(x^2 - 9\pi^2) + \dots]$
$\sec x = 4\pi\,[1/(\pi^2 - 4x^2) - 3/(9\pi^2 - 4x^2) + 5/(25\pi^2 - 4x^2) -+ \dots]$
$\tan x = 8x\,[1/(\pi^2 - 4x^2) + 1/(9\pi^2 - 4x^2) + 1/(25\pi^2 - 4x^2) + \dots]$

Exponentialreihen

$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots$
$e^{-x} = 1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + - \dots$
$e^{ix} = 1 + ix/1! - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! + -- \dots$
$= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! +- \dots + i(x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \dots) = \cos x + i \sin x$
$e^{-ix} = 1 - ix/1! - x^2/2! + ix^3/3! + x^4/4! -- ++ \dots = \cos x - i \sin x$
$a^x = 1 + \ln(a)*x/1! + \ln^2(a)*x^2/2! + \ln^3(a)*x^3/3! + \dots$
$x/(e^x - 1) = 1 - x/2 + B_1/2!\, x^2 - B_2/4!\, x^4 + B_3/6!\, x^6 - + \dots$

Logarithmische Reihen

$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + - \dots$
$\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - \dots$
$\ln[(1+x)/(1-x)] = 2(x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + \dots)$
$\ln[(x+1)/(x-1)] = 2(1/x + 1/3x^3 + 1/5x^5 + 1/7x^7 + \dots)$
$\ln u = \ln v + 2[(u-v)/(u+v) + 1/3((u-v)/(u+v))^3 + 1/5((u-v)/(u+v))^5 + \dots]$; für $x>0$
$\ln x = 2[(u-1)/(u+1) + 1/3((u-1)/(u+1))^3 + 1/5((u-1)/(u+1))^5 + \dots]$; für $0>x\leq 2$
$\ln x = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 +- \dots$; für $x>1/2$
$\ln x = (x-1)/x + (x-1)^2/(2x^2) + (x-1)^3/(3x^3) + \dots$; für $0 < |x| < \pi$
$\ln|\sin x| = \ln|x| - x^2/6 - x^4/180 - x^6/2835 - 2^{2n-1} B_n/[n(2n)!] * x^{2n} - \dots$; für $|x| < \pi/2$
$\ln\cos x = -x^2/2 - x^4/12 - x^6/45 - x^8/2520 - 2^{2n-1}(2^{2n}-1) B_n/[n(2n)!] * x^{2n} - \dots$; für $0 < |x| < \pi/2$
$\ln|\tan x| = \ln|x| + x^2/3 + 7/90\, x^4 + 62/2835\, x^6 + 2^{2n}(2^{2n-1} - 1) B_n/[n(2n)!] * x^{2n} + \dots$

Exponentialreihe (2)

Behauptung: Für die spezielle Exponentialreihe gilt $e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots$

Nachweis:

Die Eulersche Zahl e entspricht dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. Die Folgenglieder werden mit der binomischen Formel entwickelt

$$(1+1/n)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1/n)^k = \Sigma_{k=0}^{n} n!/(k!(n-k)!)\, 1/n^k = \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!\, (\Pi_{j=0}^{k-1} (n-j)/n)$$

Mit m>n ergibt sich die Abschätzung

$$(1+1/m)^m \geq \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!\, (\Pi_{j=0}^{k-1} (m-j)/m)$$

Für $m \to \infty$ strebt $(m-j)/m$ gegen 1, d.h. $e = \lim_{m\to\infty}(1+1/m)^m \geq \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!$

Andererseits wird aus $(1+1/n)^n = \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!\, (\Pi_{j=0}^{k-1} (n-j)/n)$
durch Ersetzen von $(n-j)/n$ mit 1 ein größeres Produkt auf der rechten Seite, d.h.

$(1+1/n)^n \leq \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!$ $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \leq \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben $\Sigma_{k=0}^{n} 1/k! \leq e \leq \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!$

und somit $e = \Sigma_{k=0}^{n} 1/k!$

Die Reihe konvergiert schnell. Schon für n = 10 ergibt sich als Näherungswert 2,718281801146384... mit 7 gültigen Dezimalstellen. n = 20 ergibt schon e = 2,718281828459045235... 18 gültige Ziffern.

Trigonometrische Reihen

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + - \dots = x(1 - x^2/(2*3))(1 - x^2/(4*5))(1 - x^2/(6*7)) \dots$
$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + - \dots = 1 - x^2/(1*2)(1 - x^2/(3*4))(1 - x^2/(5*6)) \dots$
$\sin^2 x = x^2 - 1/3\, x^4 + 2/45\, x^6 - + \dots$
$\cos^2 x = 1 - x^2 + 1/3\, x^4 - 2/45\, x^6 + - \dots$
$\sin(x+a) = \sin a + x\cos a - x^2 \sin a/2! - x^3 \cos a/3! + x^4 \sin a/4! + \dots$
$\cos(x+a) = \cos a - x\sin a - x^2\cos a/2! + x^3\sin a/3! + x^4\cos a/4! +- \dots$
$\tan x = x + 1/3\, x^3 + 2/15\, x^5 + 17/315\, x^7 + 62/2835\, x^9 + \dots + 2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n/(2n)! * x^{2n-1} + \dots$
$\cot x = 1/x - 1/3\, x - 1/45\, x^3 - 2/945\, x^5 - 1/4725\, x^7 - \dots - 2^{2n} B_n/(2n)! * x^{2n-1} + \dots$
$x\cot x = 1 - 1/3\, x^2 - 1/45\, x^4 - 2/945\, x^6 - \dots$
$\sec x = 1 + x^2/2 + 5/24\, x^4 + 61/720\, x^6 + 277/8064\, x^8 + \dots + E_n/(2n)!\, x^{2n} + \dots$
$\operatorname{cosec} x = 1/x + x/6 + 7/360\, x^3 + 31/15120\, x^5 + 127/604800\, x^7 + \dots + 2(2^{n-1} - 1) B_n/(2n)!\, x^{2n-1} + \dots$
$\arcsin x = x + 1/2\, x^3/3 + (1*3)/(2*4)\, x^5/5 + (1*3*5)/(2*4*6)\, x^7/7 + \dots$
$\arccos x = \pi/2 - [x + x^3/(2*3) + (1*3)/(2*4*5)\, x^5 + (1*3*5)/(2*4*6*7)\, x^7 + \dots$
$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + - \dots$
$\operatorname{arccot} x = \pi/2 - [x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 +- \dots]$

Hyperbelfunktionen

$\sinh x = (e^x + e^{-x})/2 = x/1! + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \dots$
$\cosh x = (e^x - e^{-x})/2 = 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \dots + x^{2n}/(2n)! + \dots$
$\tanh x = x - x^3/3 + 2/15\, x^5 - 17/315\, x^7 + 62/2835\, x^9 - + \dots + (-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n/(2n)! * x^{2n-1} + \dots$
$\coth x = 1/x + x/3 - x^3/45 + 2/945\, x^5 - 1/4725\, x^7 + \dots + (-1)^{n+1} 2^{2n} B_n/(2n)! * x^{2n-1} + \dots$
$x\coth x = 1 + 1/3\, x^2 - 1/45\, x^4 + 2/945\, x^6 - + \dots$
$\operatorname{sech} x = 1 - 1/2!\, x^2 + 5/4!\, x^4 - 61/6!\, x^6 + 1385/8!\, x^8 + \dots + (-1)^n/(2n)!\, E_n\, x^{2n} + \dots$
$\operatorname{csch} x = 1/x - x/6 + 7x^3/360 - 31x^5/15120 + \dots + 2(-1)^n(2^{2n-1} - 1)/(2n)!\, B_n\, x^{2n-1} + \dots$

Areafunktionen

$\operatorname{arsinh} x = x - 1/2\ x^3/3 + (1*3)/(2*4)\ x^5/5 - (1*3*5)/(2*4*6)\ x^7/7 + - \ldots$

$\operatorname{arcosh} x = \ln(2x) - 1/[(2*2)\ x^2] - (1*3)/[(2*4*4)\ x^4 - (1*3*5)/[(2*4*6*6)\ x^6] - \ldots$

$\operatorname{artanh} x = x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + \ldots$

$\operatorname{arcoth} x = 1/x + 1/(3x^3) + 1/(5x^5) + 1/(7x^7) + \ldots$

Trigonometrische Reihen (2)

$\sin x = 1 - 1/2 \cos^2 x - 1/(2\cdot4) \cos^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \cos^6 x - \ldots$

$\sin x = \tan x - 1/2 \tan^3 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \tan^5 x - 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \tan^7 x + \ldots$

$\sin x = 1 - 1/2 \cot^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \cot^4 x - 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \cot^6 x + \ldots$

$\sin x = 1 - 1/2\ 1/\sec^2 x - 1/(2\cdot4)\ 1/\sec^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6)\ 1/\sec^6 x - \ldots$

$\cos x = 1 - 1/2 \sin^2 x - 1/(2\cdot4) \sin^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \sin^6 x - \ldots$

$\cos x = 1 - 1/2 \tan^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \tan^4 x - 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \tan^6 x + \ldots$

$\cos x = \cot x - 1/2 \cot^3 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \cot^5 x - 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \cot^7 x + \ldots$

$\cos x = 1 - 1/2\ 1/\csc^2 x - 1/(2\cdot4)\ 1/\csc^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6)\ 1/\csc^6 x - \ldots$

$\tan x = 1 + 1/2 \sin^3 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \sin^5 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \sin^7 x + \ldots$

$\tan x = 1/\cos x\ (1 - 1/2 \cos^2 x - 1/(2\cdot4) \cos^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \cos^6 x - \ldots)$

$\tan x = \sec x\ (1 - 1/2\ 1/\sec^2 x - 1/(2\cdot4)\ 1/\sec^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6)\ 1/\sec^6 x - \ldots)$

$\tan x = 1/\csc x\ (1 + 1/2\ 1/\csc^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4)\ 1/\csc^4 x + \ldots)$

$\cot x = 1/\sin x\ (1 - 1/2 \sin^2 x - 1/(2\cdot4) \sin^4 x - 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \sin^6 x + \ldots)$

$\cot x = \cos x + 1/2 \cos^3 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \cos^5 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \cos^7 x + \ldots$

$\cot x = 1/\sec x\ (1 + 1/2\ 1/\sec^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4)\ 1/\sec^4 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6)\ 1/\sec^6 x + \ldots)$

$\cot x = \csc x\ (1 - 1/2\ 1/\csc^2 x - 1/(2\cdot4)\ 1/\csc^4 x - \ldots)$

$\sec x = 1 + 1/2 \sin^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \sin^4 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \sin^6 x + \ldots$

$\sec x = 1 + 1/2 \tan^2 x - 1/(2\cdot4) \tan^4 x + 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \tan^6 x - \ldots$

$\sec x = 1/\cot x\ (1 + 1/2 \cot^2 x - 1/(2\cdot4) \cot^4 x + 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \cot^6 x - \ldots)$

$\sec x = 1 + 1/2\ 1/\csc^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4)\ 1/\csc^4 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6)\ 1/\csc^6 x + \ldots$

$\csc x = 1 + 1/2 \cos^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4) \cos^4 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6) \cos^6 x + \ldots$

$\csc x = 1/\tan x\ (1 + 1/2 \tan^2 x - 1/(2\cdot4) \tan^4 x + 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \tan^6 x - \ldots)$

$\csc x = 1 + 1/2 \cot^2 x - 1/(2\cdot4) \cot^4 x + 1\cdot3/(2\cdot4\cdot6) \cot^6 x - \ldots$

$\csc x = 1 + 1/2\ 1/\sec^2 x + 1\cdot3/(2\cdot4)\ 1/\sec^4 x + 1\cdot3\cdot5/(2\cdot4\cdot6)\ 1/\sec^6 x + \ldots$

$e^{\sin x} = 1 + x + 1/2!\ x^2 - 3/4!\ x^4 - 8/5!\ x^5 + 3/6!\ x^6 + \ldots$

$e^{\cos x} = e\ (1 - 1/2!\ x^2 + 4/4!\ x^4 - 31/6!\ x^6 + \ldots)$

Mit dem Modul M = 0,434294481903252 = 1/ln 10 der natürlichen Logarithmen wird

$\lg \sin x = \lg x - M\ (x^2 / (2\cdot3) + x^4 / (2^2\cdot3^2\cdot5) + x^6 / (3^2\cdot5\cdot7\cdot9) + x^8 / (3^3\cdot5^2\cdot7\cdot8) + x^{10} / (3^2\cdot5^2\cdot7\cdot9\cdot11) + 691x^{12} / (3^2\cdot5^3\cdot6\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13) + 2x^{14} / (3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13) + 3617x^{16} / (3^2\cdot5^3\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13\cdot15\cdot16\cdot17) + \ldots)$

$\lg \cos x = \lg x - M\ (x^2 / 2 + x^4 / (3\cdot4) + x^6 / (5\cdot9) + 17x^8 / (5\cdot7\cdot8\cdot9) + 31x^{10} / (5^2\cdot7\cdot9^2) + 691x^{12} / (5^2\cdot6\cdot7\cdot9^2\cdot11) + 10922x^{14} / (3\cdot5^2\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13) + 929569x^{16} / (3\cdot5^2\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13\cdot15\cdot16) + \ldots)$

$\lg \tan x = \lg x + M\ (x^2 / {}^3 + 7x^4 / (9\cdot10) + 62x^6 / (5\cdot7\cdot9^2) + 127x^8 / (3\cdot4\cdot5^2\cdot7\cdot9) + 146x^{10} / (3\cdot5^2\cdot9^2\cdot11) + 1414477x^{12} / (3^3\cdot5^3\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13) + 32764x^{14} / (3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot9^2\cdot11\cdot13) + 16931177x^{16} / (2\cdot3^2\cdot5^3\cdot7\cdot9^2\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17) + \ldots)$

$\lg \sin (m/n\ \pi/2) = \lg m + \lg (2n-m) + \lg (2n+m) - 3 \lg n + \lg \pi - \lg \gamma - m^2/n^2\ (\alpha - 1/2^2) - m^4/(2n^4)\ (\beta - 1/2^4) - m^6/(3n^6)\ (\gamma - 1/2^6) - \ldots$

mit $\alpha = 1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + 1/8^2 + \ldots$

$\beta = 1/2^4 + 1/4^4 + 1/6^4 + 1/8^4 + \ldots$

$\gamma = 1/2^6 + 1/4^6 + 1/6^6 + 1/8^6 + \ldots$

$\delta = 1/2^8 + 1/4^8 + 1/6^8 + 1/8^8 + \ldots$ usw.

$\lg \cos (m/n\ \pi/2) = \lg (n-m) + \lg (n+m) - 2 \lg n - m^2/n^2\ (\mathrm{A} - 1) - m^4/(2n^4)\ (\mathrm{B} - 1) - m^6/(3n^6)\ (\mathrm{X} - 1) - \ldots$

mit $\mathrm{A} = 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + \ldots$

$\mathrm{B} = 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + 1/9^4 + \ldots$

$\mathrm{X} = 1/3^6 + 1/5^6 + 1/7^6 + 1/9^6 + \ldots$

$\Delta = 1/3^8 + 1/5^8 + 1/7^8 + 1/9^8 + \ldots$ usw.

Binomische Reihe

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

n ganzzahlig	$(1\pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 \pm \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n$
μ nicht-ganzzahlig, reell, $\lvert x\rvert \le 1$	$(1\pm x)^\mu = 1 \pm \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 \pm \ldots + (-1)^n \binom{\mu}{n} x^n + \ldots$

Die binomische Reihe wurde von Newton angegeben. Für ganzzahliges μ bricht die unendliche Reihe ab und geht in die binomische Formel über.

1774 bewies Euler: Die binomische Reihe konvergiert für alle reellen Exponenten μ und alle komplexen Zahlen x mit $|x| < 1$.

Potenzreihen

Für alle weiteren Potenzreihen gilt $|x|\le 1$ bzw. $|x|<1$:

$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots$

$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$1/(1+x)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \dots$

$1/(1-x)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

$1/(1+x)^3 = 1 - 1/(1*2) * (2*3x - 3*4\, x^2 + 4*5\, x^3 - 5*6\, x^4 +- \dots)$

$1/(1-x)^3 = 1 + 1/(1*2) * (2*3x + 3*4\, x^2 + 4*5\, x^3 + 5*6\, x^4 + \dots)$

$1/(1+x)^4 = 1 - 1/(1*2*3) * (2*3*4x - 3*4*5\, x^2 + 4*5*6\, x^3 - 5*6*7\, x^4 +- \dots)$

$1/(1-x)^4 = 1 + 1/(1*2*3) * (2*3*4x + 3*4*5\, x^2 + 4*5*6\, x^3 + 5*6*7\, x^4 + \dots)$

$1/(1+x)^5 = 1 - 1/(1*2*3*4) * (2*3*4*5x - 3*4*5*6x^2 + 4*5*6*7\, x^3 - 5*6*7*8\, x^4 +- \dots)$

$1/(1-x)^5 = 1 + 1/(1*2*3*4) * (2*3*4*5x + 3*4*5*6x^2 + 4*5*6*7\, x^3 + 5*6*7*8\, x^4 + \dots)$

$\sqrt{(1\pm x)} = 1 \pm x/2 - 1/(2*4)\, x^2 \pm (1*3)/(2*4*6)\, x^3 - (1*3*5)/(2*4*6*8)\, x^4 \pm \dots$

$\sqrt[3]{(1\pm x)} = 1 \pm x/3 - (1*2)/(3*6)\, x^2 \pm (1*2*5)/(3*6*9)\, x^3 - (1*2*5*8)/(3*6*9*12)\, x^4 \pm \dots$

$\sqrt[4]{(1\pm x)} = 1 \pm x/4 - (1*3)/(4*8)\, x^2 \pm (1*3*7)/(4*8*12)\, x^3 - (1*3*7*11)/(4*8*12*16)\, x^4 \pm \dots$

$1/\sqrt{(1+x)} = 1 - x/2 + (1*3)/(2*4)\, x^2 - (1*3*5)/(2*4*6)\, x^3 + - \dots$

$1/\sqrt{(1-x)} = 1 + x/2 + (1*3)/(2*4)\, x^2 + (1*3*5)/(2*4*6)\, x^3 + \dots$

$1/\sqrt[3]{(1+x)} = 1 - x/3 + (1*4)/(3*6)\, x^2 - (1*4*7)/(3*6*9)\, x^3 + - \dots$

$1/\sqrt[3]{(1-x)} = 1 + x/3 + (1*4)/(3*6)\, x^2 + (1*4*7)/(3*6*9)\, x^3 + \dots$

$1/\sqrt[4]{(1+x)} = 1 - x/4 + (1*5)/(4*8)\, x^2 - (1*5*9)/(4*8*12)\, x^3 + - \dots$

$1/\sqrt[4]{(1-x)} = 1 + x/4 + (1*5)/(4*8)\, x^2 + (1*5*9)/(4*8*12)\, x^3 + \dots$

$(1+x)^{3/2} = 1 + 3x/2 + (3*1)/(2*4)\, x^2 - (3*1*1)/(2*4*6)\, x^3 + (3*1*1*3)/(2*4*6*8)\, x^4 - \dots$

$(1-x)^{3/2} = 1 - 3x/2 + (3*1)/(2*4)\, x^2 + (3*1*1)/(2*4*6)\, x^3 + (3*1*1*3)/(2*4*6*8)\, x^4 + \dots$

$(1+x)^{5/2} = 1 + 5x/2 + (5*3)/(2*4)\, x^2 + (5*3*1)/(2*4*6)\, x^3 - (5*3*1*1)/(2*4*6*8)\, x^4 - \dots$

$(1-x)^{5/2} = 1 - 5x/2 + (5*3)/(2*4)\, x^2 - (5*3*1)/(2*4*6)\, x^3 - (5*3*1*1)/(2*4*6*8)\, x^4 + \dots$

$1/(1+x)^{3/2} = 1 - 3x/2 + (3*5)/(2*4)\, x^2 - (3*5*7)/(2*4*6)\, x^3 + (3*5*7*9)/(2*4*6*8)\, x^4 -+ \dots$

$1/(1-x)^{3/2} = 1 + 3x/2 + (3*5)/(2*4)\, x^2 + (3*5*7)/(2*4*6)\, x^3 + (3*5*7*9)/(2*4*6*8)\, x^4 + \dots$

$1/(1+x)^{5/2} = 1 - 5x/2 + (5*7)/(2*4)\, x^2 - (5*7*9)/(2*4*6)\, x^3 + (5*7*9*11)/(2*4*6*8)\, x^4 -+ \dots$

$1/(1-x)^{5/2} = 1 + 5x/2 + (5*7)/(2*4)\, x^2 + (5*7*9)/(2*4*6)\, x^3 + (5*7*9*11)/(2*4*6*8)\, x^4 + \dots$

Näherungsformeln für kleine x

Fehler < 0.001 bei 1.Näherung für (… x) ; Fehler < 0.001 bei 2.Näherung für (… x)

	1.Näherung	2.Näherung (nächstes Glied)
$(1\pm x)^n$	$1\pm nx$ (…<<1)	$+n(n-1)x^2/2$
$\sqrt{(1\pm x)}$	$1\pm x/2$ (…0.089)	$- x^2/8$ (…0.25)
$\sqrt[q]{(1+x)^p}$	$1+px/q$	$+p(p-q)x^2/(2q^2)$
$(1+x)/(1-x)$	$1+2x$ (…0.022)	$+2x^2$ (…0.077)
$((1+x)/(1-x))^2$	$1+4x$ (…0.011)	$+8x^2$ (…0.043)
e^x	$1+x$ (…0.044)	$+x^2/2$ (…0.17)
a^x	$1+x \ln a$	$+\ln^2 a * x^2/2$
$\ln(1+x)$	x (…0.044)	$- x^2/2$ (…0.14)
sin x	x (…0.18/10.4°)	$- x^3/6$ (…0.63/36°)
cos x	1 (…0.044/2.6°)	$- x^2/2$ (…0.394/22.6°)
tan x	x (…0.14/8.2°)	$+ x^3/3$ (…0.38/21.6°)
arcsin x	x (…0.18)	$+ x^3/6$ (…0.42)
arccos x	$\pi/2 - x$ (…0.18)	$- x^3/6$ (…0.42)
arctan x	x (…0.14)	$- x^3/3$ (…0.35)
arccot x	$\pi/2 - x$ (…0.14)	$+ x^3/3$ (…0.35)
sinh x	x (…0.18)	$+ x^3/6$ (…0.65)
cosh x	1 (…0.044)	$+ x^2/2$ (…0.39)
tanh x	x (…0.14)	$- x^3/3$ (…0.38)
arsinh x	x (…0.18)	$- x^3/6$ (…0.43)
artanh x	x (…0.14)	$+ x^3/3$ (…0.37)

Näherungsformeln

Für die transzendenten Funktionen existieren Näherungsformeln, mit denen diese schnell berechnet und gut angenähert werden können:

Sinus $\sin a \approx a/3\, (10/(a^2/20 + 1) - 7)$

a im Bogenmaß, im Intervall $0 \le a \le \pi/2$ tritt der größte Fehler am rechten Rand auf (absoluter Fehler 0.00042, relativer Fehler 0.42 %)

$\sin a \approx a\, ((21/(a^2/42 + 1) - 11)\, a^2/(-60) + 1)$

a im Bogenmaß, im Intervall $0 \le a \le \pi/2$ tritt der größte Fehler bei $\pi/2$ auf (relativer Fehler 0.01 %, d.h. 4 exakte Ziffern), bis 25° werden zehn Stellen richtig wiedergegeben

Kosinus $\cos a \approx 1 - a^2/4\ (5/(a^2/30 + 1) - 3)$

a im Bogenmaß, bei 90° noch drei Stellen korrekt

$\cos a \approx 1 + a^2\ ((28/(a^2/56 + 1) - 13)\ a^2/360 - 0.5)$

a im Bogenmaß, bei 90° noch fünf Stellen korrekt

Tangens $\tan a \approx a/6\ (5/(-2/5\ a^2 + 1) + 1)$

a im Bogenmaß, bei $\pi/3$ noch zwei Stellen korrekt

$\tan a \approx a\ ((84/(-17/42\ a^2 + 1) + 1)\ a^2/255 + 1$

a im Bogenmaß, bei $5\ \pi/12$ noch zwei Stellen korrekt

Grenzwerte trigonometrischer Reihen

$\Sigma_{k=1}^{\infty} \cos(kx) / k = - \ln(2 \sin x/2)$, $0 < x < 2\pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin(kx) / k = (\pi - x)/2$, $0 < x < 2\pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \cos(kx) / k^2 = (3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)/12$, $0 < x < 2\pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin(kx) / k^2 = - {}_0\int^x \ln(2 \sin z/2)\ dz$, $0 < x < 2\pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \cos(kx) / k^3 = {}_0\int^x {}_0\int^z \ln(2 \sin t/2)\ dt + \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/k^3$, $0 < x < 2\pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} 1/k^3 = \pi^3/25{,}79436... = 1{,}20206...$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin(kx) / k^3 = (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)/12$, $0 < x < 2\pi$

$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos(kx) / k = \ln(2 \cos x/2)$, $-\pi < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(kx) / k = x/2$, $-\pi < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos(kx) / k^2 = (\pi^2 - 3x^2)/12$, $-\pi < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(kx) / k^2 = {}_0\int^x \ln(2 \cos z/2)\ dz$, $-\pi < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(kx) / k^3 = (\pi^2 x - x^3)/12$, $-\pi < x < \pi$

$\Sigma_{k=1}^{\infty} \cos((2k+1)x) / (2k+1) = -1/2 \ln(\tan x/2)$, $0 < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin((2k+1)x) / (2k+1) = \pi/4$, $0 < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \cos((2k+1)x) / (2k+1)^2 = (\pi^2 - 2\pi x)/8$, $0 < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin((2k+1)x) / (2k+1)^2 = -1/2\ {}_0\int^x \ln(\tan z/2)\ dz$, $0 < x < \pi$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin((2k+1)x) / (2k+1)^3 = (\pi^2 x - \pi x^2)/8$, $0 < x < \pi$

$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)x) / (2k+1) = \pi/4$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin((2k+1)x) / (2k+1) = -1/2 \ln(\tan(\pi/4 - x/2))$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)x) / (2k+1)^2 = -1/2\ {}_0\int^{\pi/2-x} \ln(\tan z/2)\ dz$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin((2k+1)x) / (2k+1)^2 = \pi/4\ x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)x) / (2k+1)^3 = (\pi^3 - 4\pi x^2)/32$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

Integraltransformationen

Eine wichtige Strategie der Mathematik besteht darin, komplizierte Operationen durch einfachere Operationen zu ersetzen. U.a. reduzieren Integraltransformationen Differentiationen auf Multiplikationen.
Die wichtigste Integraltransformation ist Fouriertransformation (nach Fourier, 1768-1830).
Die von Regelungstechnikern ständig benutzte Laplacetransformation ist ein wichtiger Spezialfall der Fouriertransformation.

Beispiellösungsstrategie für Differentialgleichungen:

Aus einer Differentialgleichung (D) entsteht durch Integraltransformation eine lineare Gleichung (A), die sich in der Regel einfach lösen lässt.
Rücktransformation der Lösung von (A) ergibt die Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung (D).
Differenzengleichungen löst man man der Z-Transformation.
Die Fouriertransformation ist das wichtigste Mittel der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen.

Spektralanalyse:

Die physikalische Grundidee der Fouriertransformation besteht darin, dass man elektromagnetische Wellen in einzelne Frequenzbestandteile zerlegt und deren Intensität untersucht. Auf diese Weise erhalten die Astronomen und Astrophysiker immer neue Erkenntnisse über den Aufbau der Sterne, der Galaxien und des gesamten Kosmos.
Erdbebenwarten benutzen die Fouriertransformation, um die sehr unregelmäßig ankommenden Signale in periodische Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen zu zerlegen. Mit Hilfe der Frequenzen und Amplituden der dominierenden Schwingungen kann man dann den Ort des Erdbebens und seine Stärke bestimmen.
Eine besondere Integraltransformation ist das Heaviside-Kalkül.

Heaviside-Kalkül

Der Heaviyside-Kalkül ist eine spezielle Integraltransformation zur Lösung von Differentialgleichungen der Form $y - dy/dt = f(t)$

Der englische Ingenieur Heaviside entwickelte Ende des 19.Jahrhunderts eine formale Lösungsmethode:
Aus $(1 - d/dt)\, y = f(t)$ wird $y = f / (1 - d/dt)$

Die geometrische Reihe

$$1 / (1-q) = 1 + q + q^2 + \ldots \text{ mit } q = d/dt$$

liefert $y = (1 + d/dt + d^2/dt^2 + \ldots)\, f$

Damit ergibt sich die Lösungformel $y = f(t) + f'(t) + f''(t) + \ldots$

Für ein Polynom f(t) stellt diese Formel eine Lösung der Ausgangsgleichung dar.

Beispiel: Für $f(t) = t$ erhält man $y = t + 1$. Tatsächlich wird $y - y' = t + 1 - 1 = t$.
Die Idee Heavisides war, dass man mit Differentialoperatoren in der gleichen Weise wie mit algebraischen Größen umgehen kann. In der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren ist dies heute eine mathematische Theorie.

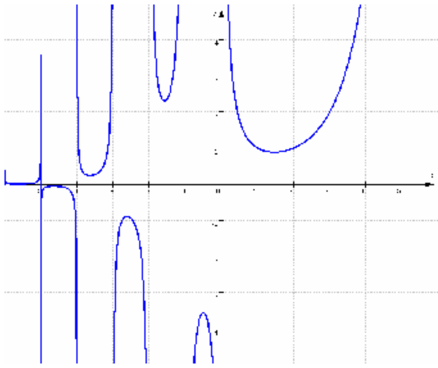
Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion ist ein Eulersches Integral zweiter Gattung.

$$\Gamma(x) = {}_0\int^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt, \text{ für } x>0$$

$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} (n!\, n^{x-1}) / [x\,(x+1) \ldots (x+n-1)]$

für x = 0,-1,-2,... existieren Polstellen 1.Ordnung



Eigenschaften

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ $\quad\Gamma(x) = (x-1)!$

$\Gamma(1) = 1$ $\quad\Gamma(2) = 1$

$\Gamma(\nu+n+1) = (\nu+n)(\nu+n-1)\ldots(\nu+1)\nu * \Gamma(\nu)$

$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \pi / (\sin \pi x)$

$\Gamma(x)\,\Gamma(x + 1/2) = \sqrt{\pi} / (2^{2x-1})\,\Gamma(2x)$

Konkrete Werte

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ $\quad\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ $\quad\Gamma(3/2) = 1/2\,\sqrt{\pi}$

Die Gamma-Funktion hat ein Minimum bei

x = 1.4616321449683623412626595423257213284681962040064463512959 88

y = 0.8856031944108887002788159005825887332079515336699034488712 00

Die Eulersche Konstante C kann definiert werden als $-{}_0\int^{\infty} e^{-t} \ln t\, dt = 0.577215665 = C$

Für natürliche Zahlen n gilt $\Gamma(n+1) = n!$

Die Gamma-Funktion kann als Verallgemeinerung der Fakultät angesehen werden.

x	Γ(x)	x	Γ(x)	x	Γ(x)	x	Γ(x)	x	Γ(x)
1.00	1.00000	1.01	0.99433	1.02	0.98884	1.03	0.98355	1.04	0.97844
1.05	0.97350	1.06	0.96874	1.07	0.99615	1.08	0.95973	1.09	0.95546
1.10	0.95135	1.11	0.94740	1.12	0.94359	1.13	0.93993	1.14	0.93642
1.15	0.93304	1.16	0.92980	1.17	0.92670	1.18	0.92373	1.19	0.92089
1.20	0.91817	1.21	0.91558	1.22	0.91311	1.23	0.91075	1.24	0.90852
1.25	0.90640	1.26	0.90440	1.27	0.90250	1.28	0.90072	1.29	0.89904
1.30	0.89747	1.31	0.89600	1.32	0.89464	1.33	0.89338	1.34	0.89222
1.35	0.89115	1.36	0.89018	1.37	0.88931	1.38	0.88854	1.39	0.88785
1.40	0.88726	1.41	0.88676	1.42	0.88636	1.43	0.88604	1.44	0.88581
1.45	0.88566	1.46	0.88560	1.47	0.88563	1.48	0.88575	1.49	0.88595
1.50	0.88623	1.51	0.88659	1.52	0.88704	1.53	0.88757	1.54	0.88818
1.55	0.88887	1.56	0.88964	1.57	0.89049	1.58	0.89142	1.59	0.89243
1.60	0.89352	1.61	0.89468	1.62	0.89592	1.63	0.89724	1.64	0.89864
1.65	0.90012	1.66	0.90167	1.67	0.90330	1.68	0.90500	1.69	0.90678
1.70	0.90864	1.71	0.91057	1.72	0.91258	1.73	0.91467	1.74	0.91683
1.75	0.91906	1.76	0.92137	1.77	0.92376	1.78	0.92623	1.79	0.92877
1.80	0.93138	1.81	0.93408	1.82	0.93685	1.83	0.93969	1.84	0.94261
1.85	0.94561	1.86	0.94869	1.87	0.95184	1.88	0.95507	1.89	0.95838
1.90	0.96177	1.91	0.96523	1.92	0.96877	1.93	0.97240	1.94	0.97610
1.95	0.97988	1.96	0.98374	1.97	0.98768	1.98	0.99171	1.99	0.99581
2.00	1.00000								

$\Gamma(n + 1/4) = 1\cdot5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n-3) / 4^n\, \Gamma(1/4)$ $\quad\Gamma(1/4) = 3{,}6256099082\ldots$

$\Gamma(n + 1/3) = 1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot\ldots\cdot(3n-2) / 3^n\, \Gamma(1/3)$ $\quad\Gamma(1/3) = 2{,}6789385347\ldots$

$\Gamma(n + 1/2) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1) / 2^n\, \Gamma(1/2)$ $\quad\Gamma(1/2) = 1{,}7724538509\ldots$

$\Gamma(n + 2/3) = 2\cdot5\cdot8\cdot11\cdot\ldots\cdot(3n-1) / 3^n\, \Gamma(2/3)$ $\quad\Gamma(2/3) = 1{,}3541179394\ldots$

$\Gamma(n + 3/4) = 3\cdot7\cdot11\cdot15\cdot\ldots\cdot(4n-1) / 4^n\, \Gamma(3/4)$ $\quad\Gamma(3/4) = 1{,}2254167024\ldots$

Rekursionsformeln, Mehrfachbeziehungen

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \quad z! = z\,(z-1)!$$

$\Gamma(n+z) = (n-1+z)(n-2+z) \dots (1+z)\,\Gamma(1+z) = (n-1+z)!$
$\Gamma(2z) = 1/\sqrt{(2\pi)}\; 2^{2z-1/2}\; \Gamma(z)\, \Gamma(z+1/2)$
$\Gamma(3z) = 1/(2\pi)\; 3^{3z-1/2}\; \Gamma(z)\, \Gamma(z+1/8)\, \Gamma(z+2/3)$
$\Gamma(nz) = (2\pi)^{1/2\,(1-n)}\; n^{nz-1/2}\; \Pi_{k=0}{}^{n-1}\; \Gamma(z+k/n)$; Gaußsche Multiplikationsformel

Komplexe Gamma-Funktion

$\arg \Gamma(z+1) = \arg \Gamma(z) + \arctan y/x$
$\Gamma(1 + iy) = iy\, \Gamma(iy)$
$\Gamma(iy)\, \Gamma(-iy) = \pi / (y \sinh \pi y)$
$\Gamma(1/2 + iy)\, \Gamma(1/2 - iy) = \pi / \cosh \pi y$
$\Gamma(1 + iy)\, \Gamma(1 - iy) = \pi y / \sinh \pi y$

Extrempunkte der Gamma-Funktion

(1,462 ; 0,886) ; (-0,504; -3,545) ; (-1,573; 2,302) ; (-2,611; -0,888) ; (-3,635; 0,245) ; (-4,653; -0,053); (-5,667; 0,009) ; (-6,678; -0,001)

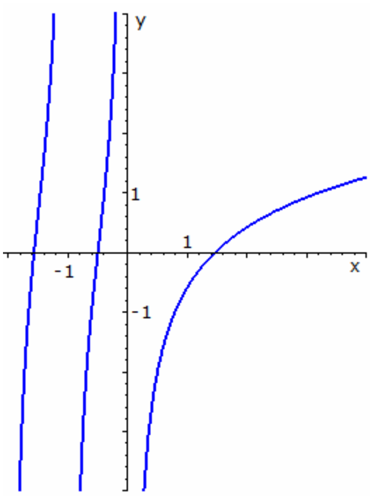
Näherungsformeln

für $0 \le x \le 1$
$\Gamma(x+1) = x° = 1 - 0{,}5748646\, x + 0{,}9512363\, x^2 - 0{,}6998588\, x^3 + 0{,}4245549\, x^4 - 0{,}1010678\, x^5 + R(x)$; $R(x) < 5 \cdot 10^{-5}$
für $0 \le x \le 1$
$\Gamma(x+1) = x° = 1 - 0{,}577191652\, x + 0{,}988205891\, x^2 - 0{,}897056937\, x^3 + 0{,}918206857\, x^4 - 0{,}756704078\, x^5 + 0{,}482199394\, x^6 - 0{,}1932527818\, x^7 + 0{,}035868343\, x^8 + R(x)$; $R(x) < 3 \cdot 10^{-7}$

Stirling-Formel
$\Gamma(z) \approx e^{-z}\, z^{z-1/2} \sqrt{(2\pi)}\, (1 + 1/(12\, z) + 1/(288\, z^2) - 139/(51840\, z^3) - 571/(2488320\, z^4) + \dots)$
Asymptotische Formeln
$\Gamma(az+b) \approx e^{-az} \sqrt{(2\pi)}\, (az)^{az+b-1/2}$
$\ln \Gamma(z) \approx (z - 1/2) \ln z - z + 1/2 \ln (2\pi) + \Sigma_{m=1}{}^{\infty}\, B_{2m} / (2m\,(2m-1)\, z^{2m-1})$
$\ln \Gamma(z) \approx (z - 1/2) \ln z - z + 1/2 \ln (2\pi) + 1/(12\, z) - 1/(360\, z^3) + 1/(1260\, z^5) - 1/(1860\, z^7) + \dots$
Kettenbruchentwicklung
$\ln \Gamma(z) + z - (z - 1/2) \ln z - z + 1/2 \ln (2\pi)$ = [0, 12, 30, 53/210, 195/371, 22999/22737, 29944523/19733142, 109535241009/48264275462, …]

Spezielle Betafunktion

Als Betafunktion B(z,w) wird der Ausdruck $B(z,w) = \Gamma(z)\, \Gamma(w) / \Gamma(z+w)$ definiert.



Digamma-Funktion

Die Digamma-Funktion, auch psi-Funktion, ist als Funktion definiert durch $\psi(x) = d/dx \ln(\Gamma(x)) = \Gamma'(x) / \Gamma(x)$
Sie ist damit die logarithmische Ableitung der Gammafunktion. Die Digamma-Funktion ist die erste der Polygamma-Funktionen.

Die Digamma-Funktion ist in der höheren Mathematik durch eine Vielzahl besonderer Eigenschaften vertreten. Es ist $\psi(n) = H_{n-1} + \gamma$
wobei H_n das n-te Element der harmonischen Reihe und γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.
Ist n ganzzahlig, so wird
$\psi(n + 1/2) = -\gamma - 2 \ln 2 + \Sigma_{k=1}{}^{n}\, 2/(2k-1)$
Weiterhin ist $\psi(x) = {}_0\int^{\infty} (e^{-t} / t - e^{-xt} / (1 - e^{-t}))\, dt$
und $\psi(s+1) = -\gamma + {}_0\int^{1} (1 - x^s)/(1 - x)\, dx$
Die binomische Reihe $\psi(s+1)$ wird
$\psi(s+1) = -\gamma - \Sigma_{k=1}{}^{\infty} (-1)^k/k \binom{s}{k}$
Rekursionsformel $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$

Besondere Werte

$\psi(1) = -\gamma$	$\psi(1/2) = -2 \ln 2 - \gamma = -1{,}963510026021423\dots$
$\psi(1/3) = -\pi/(2 \sqrt{3}) - 3/2 \ln 3 - \gamma$	$\psi(1/4) = -\pi/2 - 3 \ln 2 - \gamma$
$\psi(1/6) = -\pi/2 \sqrt{3} - 2 \ln 2\ 3/2 \ln 3 - \gamma$	

Trigamma-Funktion

Die Trigamma-Funktion ist die zweite Polygammafunktion; die erste Polygammafunktion ist die Digammafunktion ψ.
Die Trigammafunktion ist eine spezielle Funktion und wird üblicherweise mit ψ_1 bezeichnet und als zweite Ableitung der Funktion $\ln(\Gamma(x))$ definiert, wobei $\Gamma(x)$ die Gammafunktion bezeichnet.
$\psi_1(z) = d^2/dz^2 \ln \Gamma(z)$
Daraus folgt der Zusammenhang mit der Digammafunktion $\psi(z)$, dass die Trigammafunktion die Ableitung der Digammafunktion ist.

$\psi_1(z) = d/dz\ \psi(z)$

Besondere Werte

Mit G als Catalansche Konstante, $\zeta(x)$ der Riemannschen Zetafunktion und Cl_2 der Clausen-Funktion wird:

$\psi_1(1/4) = \pi^2 + 8G$ $\quad$ $\psi_1(1/3) = 2/3\ \pi^2 + 3\sqrt{3}\ Cl_2(2/3\pi)$

$\psi_1(1/2) = 1/2\ \pi^2$ $\quad$ $\psi_1(2/3) = 2/3\ \pi^2 - 3\sqrt{3}\ Cl_2(2/3\pi)$

$\psi_1(3/4) = \pi^2 - 8G$ $\quad$ $\psi_1(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$

$\psi_1(5/4) = \pi^2 + 8G - 16$ $\quad$ $\psi_1(3/2) = 1/2\ \pi^2 - 4$

$\psi_1(2) = 1/6\ \pi^2 - 1$

Näherungsformel für z > 30 $\quad$ $\psi_1(z) \sim 1/z + 1/(2 z^2) + 1/(6 z^3) - 1/(30 z^5) + 1/(42 z^7) - 1/(30 z^9) + \ldots$

für z < 30 $\quad$ $\psi_1(z+1) = \psi_1(z) - 1/z^2$

Polygamma-Funktion

Es ist $\quad \psi_n(x) = d^{n+1}/dx^{n+1} \ln \Gamma(x) = (-1)^{n+1}\ {}_0\!\int^\infty t^n e^{xt} / (1 - e^{-t})\ dt$

mit der Digammafunktion $\psi(x)$. Derartige Ableitungen werden auch als logarithmische Ableitungen von $\Gamma(x)$ bezeichnet.

Die Werte der Polygammafunktionen für rationale Argumente lassen sich meist ausdrücken unter Verwendung von Konstanten und Funktionen wie π, $\sqrt{(x)}$, $\Gamma(x)$, $\zeta(x)$, …

Digamma-Funktion: $\quad \psi(x) = d/dx \ln(\Gamma(x)) = \Gamma'(x) / \Gamma(x)$

Trigamma-Funktion: $\quad \psi_1(z) = d^2/dz^2 \ln \Gamma(z)$

$\psi_n(1) = (-1)^{n+1}\ n!\ \zeta(n+1)$ $\quad$ $\psi_n(1/2) = (-1)^{n+1}\ n!\ (2^{n+1}-1)\ \zeta(n+1)$

$\psi_n(z+1) = \psi_n(z) + (-1)^n\ n!\ z^{-n-1}$ $\quad$ $\psi_n(z) = (-1)^{n+1}\ n!\ \Sigma_{k=0}^\infty\ (z+k)^{-n-1}$; $z \neq 0, -1, -2, \ldots$

$\psi_1(z) \approx 1/z + 1/(2 z^2) + 1/(6 z^3) - 1/(30 z^5) + 1/(42 z^7) - 1/(30 z^9) + \ldots$

$\psi_2(z) \approx -1/z^2 - 1/z^3 - 1/(2 z^4) + 1/(6 z^6) - 1/(6 z^8) + 3/(10 z^{10}) - 5/(6 z^{12}) + \ldots$

Unvollständige Gamma-Funktion

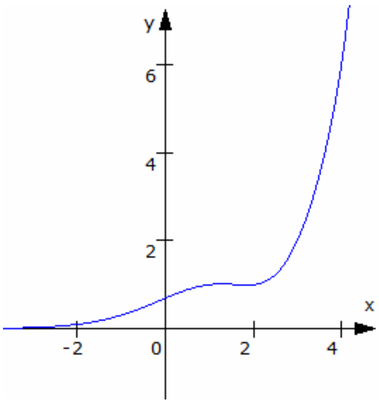
$P(a, x) = 1/\Gamma(a)\ {}_0\!\int^x e^{-t} t^{a-1}\ dt$ $\quad$ $\gamma(a, x) = P(a, x)\ \Gamma(a) = {}_0\!\int^x e^{-t} t^{a-1}\ dt$

$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = {}_0\!\int^\infty e^{-t} t^{a-1}\ dt$

$P(n, x) = 1 - (1 + x + x^2/2! + \ldots + x^{n-1}/(n-1)!)\ e^{-x}$

$P(a+1, x) = P(a, x) - x^a e^{-x} / \Gamma(a+1)$ $\quad$ $\gamma(a+1, x) = a\ \gamma(a, x) - x^a e^{-x}$

$\gamma^*(a-1, x) = x\ \gamma^*(a, x) + e^{-x} / \Gamma(a)$ $\quad$ $\gamma^*(a-1, x) = 1/\Gamma(a)\ \Sigma_{n=0}^\infty\ (-z)^n / ((a+n)\ n!)$



Hadamard-Gamma-Funktion

Die Eulersche Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ zur Erweiterung des Fakultätsbegriffs auf reelle Zahlen ist nicht die einzige derartige Möglichkeit.

1894 wurde durch Jacques Hadamard die nach ihm benannte Hadamardsche Gamma-Funktion H(x) angegeben. Diese interpoliert ebenso den Fakultätsbegriff mit $\quad H(x+1) = x!$

Der besondere Vorteil ist, dass H(x) keine Polstellen enthält, im Gegensatz zur Eulerschen Gamma-Funktion.

Die Hadamard-Gamma-Funktion H(x) ist definiert durch

$$H(x) = 1/\Gamma(1-x)\ d/dx \ln (\Gamma(1/2-x/2) / \Gamma(1-x/2))$$

Hadamard's Gamma function is defined as

Mit Hilfe der Digamma-Funktion

$$\psi(x) = d/dx \ln(\Gamma(x)) = \Gamma'(x) / \Gamma(x)$$

wird $\quad H(x) = (\psi(1-x/2) - \psi(1/2-x/2)) / (2\ \Gamma(1-x))$

Eine zweite Definitionsmöglichkeit ergibt sich über

$$Q(x) = 1 + \cos(\pi x)/(2\pi)\ (\psi(1/4+x/2) - \psi(3/4+x/2))$$

und $\quad H(x) = \Gamma(x)\ Q(x-1/2)$

Unvollständige Beta-Funktion

$B_x(a, b) = {}_0\!\int^x t^{a-1} (1-t)^{b-1}\ dt$ $\quad$ $I_x(a, b) = B_x(a, b) / B(a, b)$

$I_x(a, b) = x\ I_x(a-1, b) + (1-x)\ I_x(a, b-1)$

Dirichletsche Betafunktion

Die Dirichletsche Beta-Funktion $\beta(s)$ ist eine Funktion, die mit der Riemannschen Zeta-Funktion verwandt ist. Es ist $\quad \beta(s) = \Sigma_{n=0}^\infty\ (-1)^n/(2n+1)^s = 1 - 1/3^s + 1/5^s - 1/7^s +- \ldots$

Ist s eine komplexe Zahl, so muss deren Realteil größer als Null sein.

Spezielle Werte:

$\beta(0) = 1/2$ $\quad$ $\beta(1) = \arctan 1 = \pi/4$

$\beta(2) = G$; Catalansche Konstante $\quad$ $\beta(3) = \pi^3/32$

$\beta(5) = 5\ \pi^5/1536$ $\quad$ $\beta(7) = 61\ \pi^7/184320$

Gaußsche Fehlerfunktion $\quad \phi(x) = e^{-x^2/2} = 1 - x^2/(1!*2) + x^4/(2!*2^2) - x^6/(3!*2^3) + - \ldots$

Gaußsches Fehlerintegral $g(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2/1! + x^4/2! - x^6/3! + - \ldots$

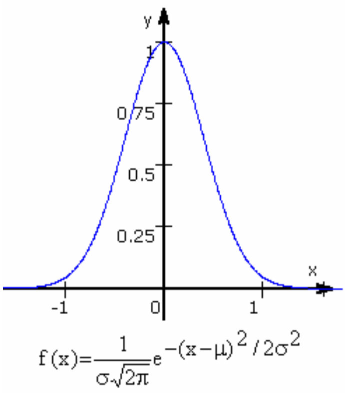
$G(x) = 2/\sqrt{\pi} \; {}_{-\infty}\int^{x} e^{-t^2}\,dt = 2/\sqrt{\pi}\,[\,x - x^3/(1!*3) + x^5/(2!*5) - x^7/(3!*7) + - \ldots]$

$G(\infty) = 1 \qquad G(-x) = -G(x) \qquad G'(x) = 2/\sqrt{\pi}\, g(x)$

$\Phi(x) = 1/\sqrt{(2\pi)} \; {}_{-\infty}\int^{x} e^{-t^2/2}\,dt = 1/2 + 1/\sqrt{(2\pi)}\,[\,x - x^3/(1!*2*3) + x^5/(2!*2^2*5) - x^7/(3!*2^3*7) + - \ldots]$

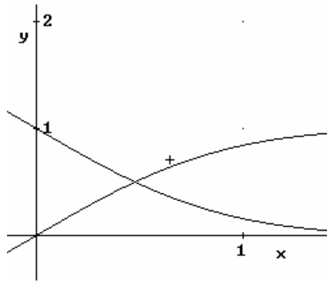
Eigenschaften $\Phi(0) = 1/2 \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \Phi(-\infty) = 0 \qquad \Phi(\infty) = 1$

Gaußsche Funktion



... Funktion, welche zur Gaußschen Normalverteilung gehört

Fehler-Funktion



Fehlerfunktion (Fehlerintegral) erf(x) ist definiert als Lösung des Integrals für a < 0:

$${}_0\int^{x} e^{at+b}/\sqrt{t}\,dt =$$
$$= \sqrt{(-\pi/a)}\; e^b\, \mathrm{erf}(\sqrt{(-ax)}) \;;\; a < 0$$

und mittels Integral der Gauß-Funktion

$${}_0\int^{x} e^{-t^2}\,dt = 1/2\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x)$$

Konjugierte Fehlerfunktion - Komplement der Fehlerfunktion: $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$

Im Bild sind die Fehlerfunktion und ihr Komplement dargestellt.

Die Fehlerfunktion ist wie die Verteilungsfunktion der Normalverteilung nicht durch eine geschlossene Funktion darstellbar und muss numerisch bestimmt werden.

Für kleine reelle Werte erfolgt die Berechnung mit der Reihenentwicklung

$$\mathrm{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi}\,(x - x^3/3 + x^5/10 - x^7/42 +- \ldots + (-1)^n\, x^{2n+1} / ((2n+1)\, n!) +- \ldots$$

Fehlerfunktion-Näherung

Näherungsformeln

für $0 \le x < \infty$

$$\mathrm{erf}(x) = 1 - (0{,}3480242\,t - 9{,}0958798\,t^2 + 0{,}7478556\,t^3)\,e^{-x^2} + R(x) \;;\; R(x) < 2{,}5 \cdot 10^{-5}$$

mit $t = 1/(1 + 0{,}47407\,x)$

für $0 \le x < \infty$

$$\mathrm{erf}(x) = 1 - (0{,}254829592\,t - 0{,}284496736\,t^2 + 1{,}421413741\,t^3 - 1{,}453152027\,t^4 + 1{,}061405429\,t^5)\,e^{-x^2} + R(x) \;;\; R(x) < 1{,}5 \cdot 10^{-7}$$

mit $t = 1/(1 + 0{,}3275911\,x)$

für $0 \le x < \infty$

$$\mathrm{erf}(x) = 1 - 1 / (1 + 0{,}278393\,x + 0{,}230389\,x^2 + 0{,}000972\,x^3 + 0{,}078108\,x^4)^4 + R(x) \;;\; R(x) < 5 \cdot 10^{-4}$$

für $0 \le x < \infty$

$$\mathrm{erf}(x) = 1 - 1 / (1 + 0{,}0705230784\,x + 0{,}0422820123\,x^2 + 0{,}0092705272\,x^3 + 0{,}0001520143\,x^4 + 0{,}0002765672\,x^5 + 0{,}0000430638\,x^6)^{16} + R(x) \;;\; R(x) < 3 \cdot 10^{-7}$$

Komplexe Nullstellen der Fehlerfunktion erf(z)

1,45061616 + 1,88094300 i ; 2,24465928 + 2,61657514 i ; 2,83974105 + 3,17562810 i ; 3,33546074 + 3,64617438 i ; 3,76900557 + 4,06069723 i ; 4,15899840 + 4,43557144 i ; 4,51631940 + 4,78044764 i ; 4,84797031 + 5,10158804 i ; 5,15876791 + 5,40333264 i ; 5,45219220 + 5,68883744 i

Bernoulli-Polynome

Von Bernoulli 1713 bei der Untersuchung von Potenzsummen eingeführte ganzrationale Funktionen:

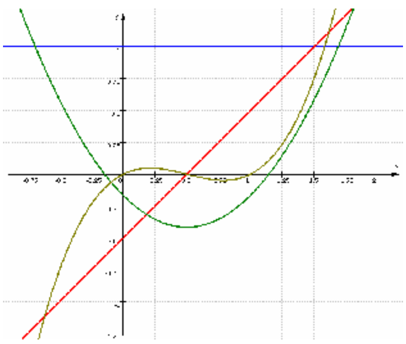
$B_0(x) = 1 \qquad B_1(x) = x - 1/2$

$B_2(x) = x^2 - x + 1/6 \qquad B_3(x) = x^3 - 3/2\,x^2 + 1/2\,x$

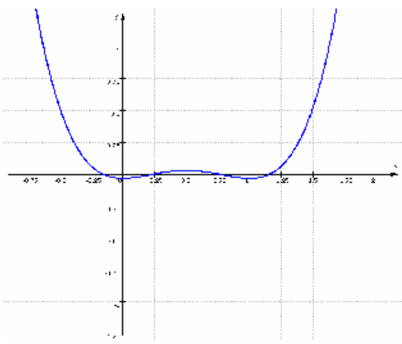
$B_4(x) = x^4 - 2\,x^3 + x^2 - 1/30 \qquad B_5(x) = x^5 - 5/2\,x^4 + 5/3\,x^3 - 1/6\,x$

$B_6(x) = x^6 - 3\,x^5 + 5/2\,x^4 - 1/2\,x^2 + 1/42 \qquad B_7(x) = x^7 - 7/2\,x^6 + 7/2\,x^5 - 7/6\,x^3 + 1/6\,x$

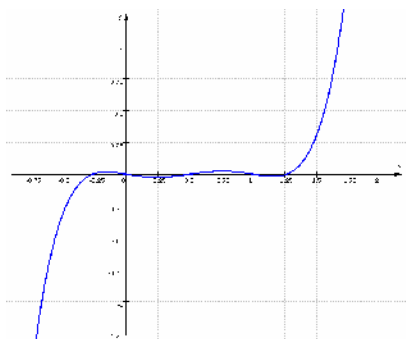
$B_8(x) = x^8 - 4\,x^7 + 14/3\,x^6 - 7/3\,x^4 + 2/3\,x^2 - 1/30$



0. bis 3. Bernoulli-Polynom



4.Bernoulli-Polynom

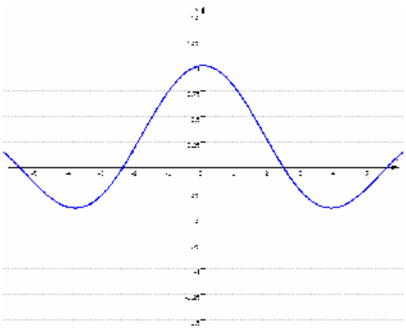


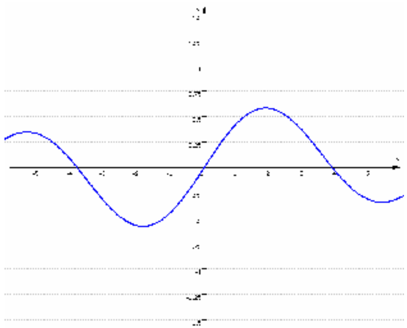
5. Bernoulli-Polynom

Besselsche Funktionen

1.Art ... (Summe vom m=0 bis ∞)
Die Funktionen (nach Friedrich Wilhelm Bessel) sind Grundlage für die Lösung der Besselschen Differenzialgleichung: $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$
$J_n(x) = \Sigma\ (-1)^n\ (x/2)^{2m+n} / [m!(m+n)!] = \Sigma\ (-1)^n\ (x/2)^{2m+n} / [\Gamma(m+1)\ \Gamma(m+n+1)]$

Bessel


J(0)-Funktion


J(1)-Funktion

Zylinderfunktionen

Die Besselsche Differenzialgleichung $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$
besitzt für ganzzahlige n die Bessel-Funktionen $J_n(x)$ als Lösungen.
siehe
Für ganzzahlige n ist neben der Bessel-Funktion erster Gattung J_n die Bessel-Funktion zweiter Gattung Y_n, auch Weber-Funktion oder Neumann-Funktion genannt, die zweite, linear unabhängige Lösung.

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n} (J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)) / \sin (p\pi)$$

Die Bessel-Funktion 2. Gattung hat im Ursprung eine logarithmische Singularität.

Tritt eine Bessel-Funktion nur mit rein imaginären Zahlen auf, so spricht man von modifizierten Bessel-Funktionen. $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$
ist die modifizierte Bessel-Funktion n-ter Ordnung. Sie löst die Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0$$

Eine zweite Lösung für diese Differenzialgleichung ist

$$K_n(x) = \lim_{p\to n} \pi/2\ (I_p(x) - I_{-p}(x)) / \sin (px)$$

die auch MacDonald-Funktion genannt wird.

Zylinderfunktion-Näherungsformeln

für $-3 \le x \le 3$
$J_0(x) = 1 - 2{,}2499997\ (x/3)^2 - 1{,}2656208\ (x/3)^4 - 0{,}3163866\ (x/3)^6 + 0{,}0444479\ (x/3)^8 - 0{,}0039444\ (x/3)^{10} + 0{,}0002100\ (x/3)^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 5 \cdot 10^{-8}$
für $0 < x \le 1$
$Y_0(x) = (2/\pi) \ln (x/2)\ J_0(x) + 0{,}36746691 + 0{,}60559366\ (x/3)^2 - 0{,}74350384\ (x/3)^4 + 0{,}25300117\ (x/3)^6 - 0{,}04261214\ (x/3)^8 + 0{,}00427916\ (x/3)^{10} - 0{,}00024846\ (x/3)^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 1{,}4 \cdot 10^{-8}$
für $3 \le x$
$J_0(x) = 1/\sqrt{x}\ f_0 \cos \theta_0\ ;\ Y_0(x) = 1/\sqrt{a}\ f_0 \sin \theta_0$
$f_0 = 0{,}79788456 - 0{,}00000077\ (3/x) - 0{,}00552740\ (3/x)^2 - 0{,}00009512\ (3/x)^3 + 0{,}00137237\ (3/x)^4 - 0{,}00072805\ (3/x)^5 + 0{,}00014476\ (3/x)^6 + R(x)\ ;\ R(x) < 1{,}6 \cdot 10^{-8}$
$\theta_0 = x - 0{,}78539816 - 0{,}04166397\ (3/x) - 0{,}00003954\ (3/x)^2 + 0{,}00262573\ (3/x)^3 - 0{,}00054125\ (3/x)^4 - 0{,}00029333\ (3/x)^5 + 0{,}00013558\ (3/x)^6 + R(x)\ ;\ R(x) < 7 \cdot 10^{-8}$

für $-3 \le x \le 3$
$1/x\ J_1(x) = 1/2 - 0{,}56249985\ (x/3)^2 + 0{,}21093573\ (x/3)^4 - 0{,}03954289\ (x/3)^6 + 0{,}00443319\ (x/3)^8 - 0{,}00031761\ (x/3)^{10} + 0{,}00001109\ (x/3)^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 1{,}3 \cdot 10^{-8}$
für $0 < x$
$x\ Y_1(x) = (2/\pi)\ x \ln (x/2)\ J_1(x) - 0{,}6366198 + 0{,}2212091\ (x/3)^2 + 2{,}1682709\ (x/3)^4 - 1{,}3164827\ (x/3)^6 + 0{,}3123951\ (x/3)^8 - 0{,}0400976\ (x/3)^{10} + 0{,}0027873\ (x/3)^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 1{,}1 \cdot 10^{-7}$

für $-3{,}75 \le x \le 3{,}75\ ;\ t = x/3{,}75$
$I_0(x) = 1 + 3{,}5156229\ t^2 + 3{,}0899424\ t^4 + 1{,}2067492\ t^6 + 0{,}2659732\ t^8 + 0{,}0360768\ t^{10} + 0{,}0045813\ t^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 1{,}6 \cdot 10^{-7}$
für $3{,}75 \le x\ ;\ t = x/3{,}75$
$\sqrt{x}\ e^{-x}\ I_0(x) = 0{,}39894228 + 0{,}01328592/t + 0{,}00225319/t^2 - 0{,}00157565/t^3 + 0{,}00916281/t^4 - 0{,}02057706/t^5 + 0{,}02635537/t^6 - 0{,}01647633/t^7 + 0{,}00392377/t^8 + R(x)\ ;\ R(x) < 1{,}9 \cdot 10^{-7}$
für $-3{,}75 \le x \le 3{,}75\ ;\ t = x/3{,}75$
$1/x\ I_1(x) = 0{,}5 + 0{,}87890594\ t^2 + 0{,}51498869\ t^4 + 0{,}15084934\ t^6 + 0{,}02658733\ t^8 + 0{,}00301532\ t^{10} + 0{,}00032411\ t^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 8 \cdot 10^{-9}$
für $3{,}75 \le x\ ;\ t = x/3{,}75$

$\sqrt{x}\, e^{-x} I_1(x) = 0{,}39894228 - 0{,}03988024/t - 0{,}00362018/t^2 + 0{,}00163801/t^3 - 0{,}01031555/t^4 + 0{,}02282967/t^5 - 0{,}2895312/t^6 + 0{,}01787654/t^7 - 0{,}00420059/t^8 + R(x)$; $R(x) < 2{,}2 \cdot 10^{-7}$

für $0 < x \leq 2$

$K_0(x) = -\ln (x/2)\, I_0(x) - 0{,}57721566 + 0{,}42278420\, (x/2)^2 + 0{,}23069756\, (x/2)^4 + 0{,}03488590\, (x/2)^6 + 0{,}00262609\, (x/2)^8 + 0{,}00010750\, (x/2)^{10} + 0{,}00000740\, (x/2)^{12} + R(x)$; $R(x) < 1 \cdot 10^{-8}$

für $2 \leq x$

$\sqrt{x}\, x^x K_0(x) = 1{,}25331414 - 0{,}07832358\, (2/x) + 0{,}02189568\, (2/x)^2 - 0{,}01062446\, (2/x)^3 + 0{,}00587872\, (2/x)^4 - 0{,}00251540\, (2/x)^5 + 0{,}00053208\, (2/x)^6 + R(x)$; $R(x) < 1{,}9 \cdot 10^{-7}$

für $0 < x \leq 2$

$x K_1(x) = x \ln (x/2)\, I_1(x) + 1 - 0{,}15443144\, (x/2)^2 - 0{,}67278579\, (x/2)^4 - 0{,}18156897\, (x/2)^6 - 0{,}01919402\, (x/2)^8 - 0{,}00110404\, (x/2)^{10} - 0{,}00004686\, (x/2)^{12} + R(x)$; $R(x) < 8 \cdot 10^{-9}$

für $2 \leq x$

$\sqrt{x}\, x^x K_1(x) = 1{,}25331414 + 0{,}23498619\, (2/x) - 0{,}03655620\, (2/x)^2 + 0{,}01504268\, (2/x)^3 - 0{,}00780353\, (2/x)^4 + 0{,}00325614\, (2/x)^5 - 0{,}00068245\, (2/x)^6 + R(x)$; $R(x) < 2{,}2 \cdot 10^{-7}$

Sphärische Bessel-Funktionen

Die Differenzialgleichung

$z^2 w'' + 2z w' + (z^2 - n(n+1)) w = 0$, mit n natürlich

hat als partielle Lösungen die sphärischen Bessel-Funktionen.

$j_n(z) = \sqrt{\pi/2 /z}\, J_{n+1/2}(z)$ sphärische Bessel-Funktion 1.Art

$y_n(z) = \sqrt{\pi/2 /z}\, Y_{n+1/2}(z)$ sphärische Bessel-Funktion 2.Art

$h^{(1)}{}_n(z) = j_n(z) + i\, y_n(z)$ sphärische Bessel-Funktion 3.Art

$h^{(2)}{}_n(z) = j_n(z) - i\, y_n(z)$

Die Paare $j_n(z)$, $y_n(z)$ und $h^{(1)}{}_n(z)$, $h^{(2)}{}_n(z)$ sind linear unabhängige Lösungen für jedes n.

$j_n(z) = z^n/(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1))\ (1 - 1/2z^2/(1!\ (2n+3)) + (1/2z^2)^2/(2!\ (2n+3)(2n+5)) -+ \ldots$

$y_n(z) = -(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))/z^{n+1}\ (1 - 1/2z^2/(1!\ (1-2n)) + (1/2z^2)^2/(2!\ (1-2n)(3-2n)) -+ \ldots$

Spezielle Funktionen

$j_0(z) = \sin z / z$

$j_1(z) = \sin z / z^2 - \cos z / z$

$j_2(z) = (3/z^3 - 1/z) \sin z - 3/z^2 \cos z$

$j_n(z) = (-1)^n (d/dz)^n \sin z / z$; Rayleigh-Formel

$y_0(z) = -j_{-1}(z) = -\cos z / z$

$y_1(z) = j_{-2}(z) = -\cos z / z^2 - \sin z / z$

$y_2(z) = -j_{-3}(z) = (-3/z^3 + 1/z) \cos z - 3/z^2 \sin z$

$y_n(z) = -(-1)^n (d/dz)^n \cos z / z$; Rayleigh-Formel

Rekursionsformel

$j_n(z) = f_n(z) \sin z + (-1)^{n+1} f_{-n-1}(z) \cos z$

$f_0(z) = 1/z$

$f_1(z) = 1/z^2$

$f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z) = (2n+1)\, 1/z\, f_n(z)$

Modifizierte sphärische Bessel-Funktionen

Die Differenzialgleichung $z^2 w'' + 2z w' - (z^2 + n(n+1)) w = 0$, mit n natürlich

hat als partielle Lösungen die modifizierten sphärischen Bessel-Funktionen.

modifizierte sphärische Bessel-Funktion 1.Art

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{n+1/2}(z) = e^{-\pi i/2} j_n(z\, e^{\pi i/2})$

modifizierte sphärische Bessel-Funktion 2.Art

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{-n-1/2}(z) = e^{3(n+1)\pi i/2} y_n(z\, e^{\pi i/2})$

modifizierte sphärische Bessel-Funktion 2.Art

$\sqrt{\pi/2 /z}\, K_{-n+1/2}(z) = \pi/2\, (-1)^{n+1} \sqrt{\pi/2 /z}\, (I_{n+1/2}(z) - I_{-n-1/2}(z))$

Spezielle Funktionen

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{1/2}(z) = \sinh z / z$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{3/2}(z) = -\sinh z / z^2 + \cosh z / z$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{5/2}(z) = (3/z^3 + 1/z) \sinh z - 3/z^2 \cosh z$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{-1/2}(z) = \cosh z / z$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{-3/2}(z) = \sinh z / z - \cosh z / z^2$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{-5/2}(z) = (3/z^3 + 1/z) \cosh z - 3/z^2 \sinh z$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, K_{1/2}(z) = (\pi/2 /z)\, e^{-z}$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, K_{3/2}(z) = (\pi/2 /z)\, e^{-z} (1 + 1/z)$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, K_{5/2}(z) = (\pi/2 /z)\, e^{-z} (1 + 3/z + 3/z^2)$

Rayleigh-Formeln

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{n+1/2}(z) = z^n (1/z\ d/dz)^n \sinh z / z$

$\sqrt{\pi/2 /z}\, I_{-n-1/2}(z) = z^n (1/z\ d/dz)^n \cosh z / z$

Eulersche Betafunktion

Die Eulersche Betafunktion, auch Eulersches Integral 1.Art, ist eine mathematische Funktion zweier komplexer Zahlen, die mit B bezeichnet wird. Sie ist definiert mit $B(x,y) = {}_0\int^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt$

wobei x und y einen positiven Realteil haben müssen.
Bei festem x bzw. y ist B eine holomorphe Funktion von y bzw. x, und es gilt die Symmetrierelation

$B(x,y) = B(y,x)$

Weiterhin ist $B(x,y) = \Gamma(x)\,\Gamma(y) / \Gamma(x+y)$

wobei Γ die Eulersche Gammafunktion ist. Für negative ganzzahlige x oder y hat die Funktion Polstellen.

Jacobische elliptische Funktion

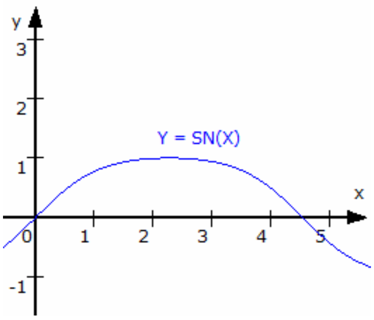
Carl Gustav Jakob Jacobi führte 1830 die nach ihm benannten Funktionen ein. Es existieren zwölf Jacobische elliptische Funktionen, von denen sich neun aus drei grundlegenden Funktionen bilden lassen.

Gegeben sei ein Parameter k, der elliptische Modul, für den $0 < k < 1$ gilt. Die drei Jacobischen elliptischen Funktionen sind dann

der Sinus amplitudinis sn(z; k)
der Cosinus amplitudinis cn(z; k)
das Delta amplitudinis dn(z; k)

Sie sind elliptische Funktionen und besitzen zwei Perioden.
Für die Grenzwerte k = 0 und k = 1 ergeben die Jacobi-Funktionen trigonometrische Funktionen bzw. Hyperbelfunktionen

sn(z; 0) = sin zsn(z; 1) = tanh z
cn(z; 0) = cos z sn(z; 1) = sech z
dn(z; 0) = 1 sn(z; 1) = sech z



Sinus amplitudinis

Der Sinus amplitudinis sn(z; k) ist eine der grundlegenden elliptischen Funktionen von Jacobi. Diese Funktion ist auch für komplexe Zahlen definiert. F(z) = sn(z)

Eigenschaften:

Perioden 4 K ; 2i K'
Nullstelle 2m K + 2ni K'
Polstelle 2m K + (2n+1) i K'

Die Parameter K und K' sind mit dem Modul k über elliptische Integrale verbunden: $K = K(k) = {}_0\int^{\pi/2} d\phi / \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)}$

$K' = K'(k) = {}_0\int^{\pi/2} d\phi / \sqrt{(1 + k^2 \cos^2 \phi)}$

Damit hat sn(z) Nullstellen bei z = 0 und z = 2K und Polstellen bei z = iK' und z = 2K + iK'.
Für k = 1/2 geht sn(z; 1/2) in den lemniskatischen Sinus über, für k = 0 ergibt sich der klassischen Sinus sin(z) und für k = 1 der Tangens hyperbolicus tanh(z).
Die Funktion kann auch als Umkehrfunktion des unvollständigen elliptischen Integrals 1.Ordnung

$z = z(\phi) = {}_0\int^{\phi} d\theta / \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}$

definiert werden. Dann gilt $sn(z; k) = \sin \phi$

Jacobische elliptische Funktion (2)

Für die drei Jacobischen elliptischen Funktionen Sinus amplitudinis sn(z; k), Cosinus amplitudinis cn(z; k) und Delta amplitudinis dn(z; k) gelten folgende Beziehungen
(x, y, u, v … (z;k))

$cn^2 + sn^2 = 1$

$dn^2 + k^2 sn^2 = 1$

$cn(x + y) = (cn(x)\, cn(y) - sn(x)\, sn(y)\, dn(x)\, dn(y)) / (1 - k^2 sn^2(x)\, sn^2(y))$

$sn(x + y) = (sn(x)\, cn(y)\, dn(y) + sn(y)\, cn(x)\, dn(x)) / (1 - k^2 sn^2(x)\, sn^2(y))$

$dn(x + y) = (dn(x)\, dn(y) - k^2 sn(x)\, sn(y)\, cn(x)\, cn(y)) / (1 - k^2 sn^2(x)\, sn^2(y))$

$sn\ 2u = 2\, sn\ u\ cn\ u\ dn\ u / (1 - k\, sn^4\ u) = 2\, sn\ u\ cn\ u\ dn\ u / (cn^2\ u + sn^2\ u\ dn^2\ u)$

$cn\ 2u = (cn^2\ u - sn^2\ u\ dn^2\ u) / (1 - k\, sn^4\ u) = (cn^2\ u - sn^2\ u\ dn^2\ u) / (cn^2\ u + sn^2\ u\ dn^2\ u)$

$dn\ 2u = (dn^2\ u - k\, sn^2\ u\ cn^2\ u) / (1 - k\, sn^4\ u) = (dn^2\ u + cn^2\ u\ (dn^2\ u - 1)) / (dn^2\ u - cn^2\ u\ (dn^2\ u - 1))$

Aus den drei Grundfunktionen sn(z), cn(z) und dn(z) werden weitere elliptische Funktionen definiert:

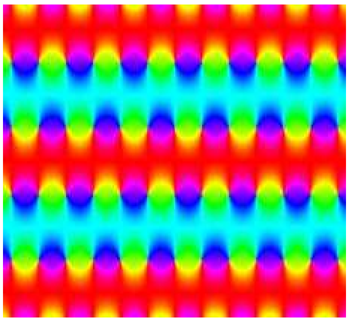
ns(z; k) = 1 / sn(z; k)
nc(z; k) = 1 / cn(z; k)
nd(z; k) = 1 / dn(z; k)
sc(z; k) = sn(z; k) / cn(z; k) sd(z; k) = sn(z; k) / dn(z; k)
dc(z; k) = dn(z; k) / cn(z; k) 1ds(z; k) = dn(z; k) / sn(z; k)
cs(z; k) = cn(z; k) / sn(z; k) cd(z; k) = cn(z; k) / dn(z; k)

Ableitungen (u = z;k)

(sn u)' = cn u dn u (cn u)' = -sn u dn u
(dn u)' = -k sn u cn u (cd u)' = -k* sd u nd u
(sd u)' = cd u nd u (nd u)' = k sd u cd u
(dc u)' = k* sc u nc u (nc u)' = sc u dc u
(sc u)' = dc u nc u (ns u)' = -ds u cs u
(dc u)' = -cs u nc u (cs u)') -ns u ds u

Berechnungsalgorithmus für Sinus amplitudinis sn(x)

```
real procedure sn(u, A) ;
value A, u; real A, u;
         comment procedure for the Jacobian Elliptic Function (formula (1,8)),
         A = arcsin (k), 0 <= A <= ~]2, 0 <= u <= K (k) ;
begin    real array a [0: 3], b [0: 3] ; real at, t; integer i;
         a[0] := 1 ; b [0] := abs (sin (A));
         if b[0] >= .9539 then begin for i : = 1, 2 do begin
         at := (a [i - 1] + b [i -1])/2;
         b[i] :=sqrt(a[i-1] * b [i-1]) ; a [i] :=a1 end;
         al := exp((a[2] +b[2]) * u) ; t := (a1 -1)/(2 * sqrt(at)) ;
         for i := 2, 1, 0 do t := 2 * a[i] * t/(a[i]+b[i]-(a[i]-b[i]) * t * t);
         sn := t/sqrt (t + t * t)
         end
else begin        b[0] := abs(cos(A));
         for i := 1, 2, 3 do begin
         a1 : = (a[i-1] + b[i-1])/2; b[i] := sqrt(a[i-1] * b[i-1]); a[i] := a1 end;
         a1 := (a[3] + b[3]) * u/2; t := sin(a1);
         for i:= 3,2,1,0 do t := 2 * a[i] * t/(a[i]+b[i]+(a[i]-b[i]) * t *t); sn := t
         end
end sn
```



Komplexe elliptische Funktionen nach Jacobi

Die drei Jacobischen elliptischen Funktionen

der Sinus amplitudinis sn(z; k)
der Cosinus amplitudinis cn(z; k)
das Delta amplitudinis dn(z; k)

können auf den Bereich der komplexen Zahlen erweitert werden.
Ist k der Parameter und $k' = \sqrt{1-k^2}$, so wird mit

$$\Delta = 1 - dn^2(u,k)\, sn^2(v,k')$$

$$sn(u+iv) = (sn(u,k)\, dn(v,k') + i\, cn(u,k)\, dn(u,k)\, sn(v,k')\, cn(v,k')) / \Delta$$
$$cn(u+iv) = (cn(u,k)\, cn(v,k') - i\, sn(u,k)\, dn(u,k)\, sn(v,k')\, dn(v,k')) / \Delta$$
$$dn(u+iv) = (dn(u,k)\, cn(v,k')\, dn(v,k') - i\, k^2\, sn(u,k)\, cn(u,k)\, sn(v,k')) / \Delta$$

Die Abbildung zeigt den Phasenplot des komplexen Delta amplitudinis dn(z).

Airy-Funktion

Die Airy-Funktionen Ai(x) und Bi(x) bezeichnen spezielle Funktionen. Diese sind Lösungen der linearen Differentialgleichung (Airy-Gleichung) $y'' - xy = 0$

Die Airy-Gleichung gibt eine Lösung der Schrödinger-Gleichung für einen Spezialfall an. Die Funktionen sind nach dem britischen Astronomen George Biddell Airy benannt, der diese Funktion in seinen Arbeiten in der Optik verwendete.

Für reelle Werte x gilt $Ai(x) = 1/\pi \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt)\, dt$

Die zweite, linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung ist die Airy-Funktion zweiter Art Bi(x)

$$Bi(x) = 1/\pi \int_0^\infty (\exp(-t^3/3 + xt) + \sin(t^3/3 + xt))\, dt$$

Für x = 0 ergeben sich als spezielle Werte

$Ai(0) = 1 / (\sqrt[3]{9}\, \Gamma(2/3))$ $\quad$ $Bi(0) = 1 / (\sqrt[6]{3}\, \Gamma(2/3))$

Die Airy-Funktionen haben nur auf der negativen Achse Nullstellen

für Ai(x) … $x \approx -(3/2\, \pi\, (n - 1/4))^{2/3}$ $\quad$ für Bi(x) … $x \approx -(3/2\, \pi\, (n - 3/4))^{2/3}$

Die ersten Nullstellen sind

Ai(x): -2,33811 ; -4,08795 ; -5,52056 ; -6,7867144 ; - 7,94413 ; - 9.02265 …
Bi(x): -1,17371 ; -3,27109 ; -4,83074 ; -6,16985 ; - 7,37676 ; -8,49195 ; -9,53819 …

Riccati-Bessel-Funktionen

Riccati-Bessel-Funktionen sind Lösungen der Differenzialgleichung

$$z^2 w'' + (z^2 - n(n+1))\, w = 0$$

und somit spezielle sphärische Besselfunktionen. Die Riccati-Bessel-Funktionen sind damit

$z\, j_n(z) = z \sqrt{\pi/2 /z}\, J_{n+1/2}(z)$ $\quad$ $z\, y_n(z) = z \sqrt{\pi/2 /z}\, Y_{n+1/2}(z)$
$z\, h^{(1)}{}_n(z) = z\, (j_n(z) + i\, y_n(z))$ $\quad$ $z\, h^{(2)}{}_n(z) = z\, (j_n(z) - i\, y_n(z))$

Spezielle Funktionen

$z\, j_0(z) = \sin z$ $\quad$ $z\, j_1(z) = 1/z \sin z - \cos z$
$z\, j_2(z) = (3/z^2 - 1) \sin z - 3/z \cos z$ $\quad$ $z\, y_0(z) = -\cos z$
$z\, y_1(z) = -\sin z - 1/z \cos z$ $\quad$ $z\, y_2(z) = -3/z \sin z - (3/z^2 - 1) \cos z$

Hypergeometrische Funktion

Hypergeometrische Funktionen sind eine Gruppe sehr verallgemeinerter Funktionen. Eine hypergeometrische Funktion wird durch

$${}_mF_n({}^{a}1_{b1}\ {}^{a}2_{b2} \dots {}^{a}m_{bn}\ {}^{|z}) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (a_1^{k*} \cdot a_2^{k*} \cdot \dots \cdot a_m^{k*})/(b_1^{k*} \cdot b_2^{k*} \cdot \dots \cdot b_n^{k*}) \cdot z^k/k!$$

definiert, wobei die a_i, b_i, z komplexe Zahlen, m, n und k natürliche Zahlen sind. Unter dem Symbol x^{k*} ($x \in C$, $k \in N$) wird das Pochhammer-Symbol verstanden:

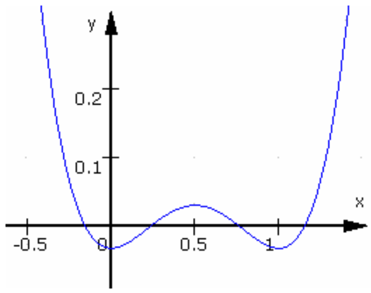
$$x^{k*} = \Gamma(x+k)/\Gamma(x) = x\,(x+1)\,(x+2) \cdot \dots \cdot (x+k-1)$$

Für das Pochhammer-Symbol gilt zum Beispiel

$$1^{k*} = k! \;\; ; \;\; x^{k+1*} = x\,(x+1)^{k*} \;\; ; \;\; x^{k+1*} = (x+k)\,x^{k*}$$

Hypergeometrische Funktionen können durch entsprechende Wahl der Parameter sehr viele Funktionen darstellen.

Exponentialfunktion	$e^z = {}_0F_0(\|z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} z^k/k!$
Sinusfunktion	$\sin z = z\ {}_0F_1({}_{3/2}{}^{-1/4\|z^2})$
Kosinusfunktion	$\cos z = {}_0F_1({}_{1/2}{}^{-1/4\|z^2})$
geometrische Reihe	${}_1F_0({}^{1\ \|z}) = \Sigma_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$



Nørlund-Polynome

Die Nørlund-Polynome wurden 1960 von Carlitz als Verallgemeinerung der Bernoulli-Polynome eingeführt.

Abbildung: Nørlund-Polynom $B_4^{(1)}(x)$

$B_0^{(1)}(x) = 1$

$B_1^{(1)}(x) = x - 1/2$

$B_1^{(2)}(x) = x - 1$

$B_2^{(1)}(x) = x^2 - x + 1/6$

$B_2^{(2)}(x) = x^2 - 2x + 5/6$

$B_3^{(1)}(x) = x^3 - 3/2\, x^2 + 1/2\, x$

$B_3^{(3)}(x) = x^3 - 9/2\, x^2 + 6\, x - 9/4$

$B_5^{(1)}(x) = x^5 - 5/2\, x^4 + 5/3\, x^3 - 1/6\, x$

$B_7^{(1)}(x) = x^7 - 7/2\, x^6 + 7/2\, x^5 - 7/6\, x^3 + 1/6\, x$

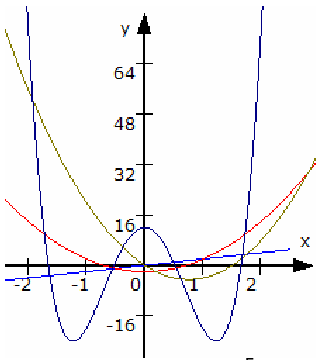
$B_8^{(1)}(x) = x^8 - 4\, x^7 + 14/3\, x^6 - 7/3\, x^4 + 2/3\, x^2 - 1/30$

$B_2^{(3)}(x) = (1 - x)(2 - x)$

$B_3^{(2)}(x) = x^3 - 3\, x^2 + 5/2\, x - 1/2$

$B_4^{(1)}(x) = x^4 - 2\, x^3 + x^2 - 1/30$

$B_6^{(1)}(x) = x^6 - 3\, x^5 + 5/2\, x^4 - 1/2\, x^2 + 1/42$



Hermitesches Polynom

Die Hermiteschen Polynome (nach Charles Hermite) sind Polynome mit den Darstellungen: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} d^n/dx^n e^{-x^2}$

Sie sind Lösungen der Differenzialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \;;\; n = 0, 1, 2, \dots$$

Nach einem Ergebnis von Faà di Bruno ergeben sich als explizite Darstellungen

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = (2x)^3 - 6(2x) = 8x^3 - 12x$

$H_4(x) = (2x)^4 - 12(2x)^2 + 12 = 16x^4 - 48x^2 + 12$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

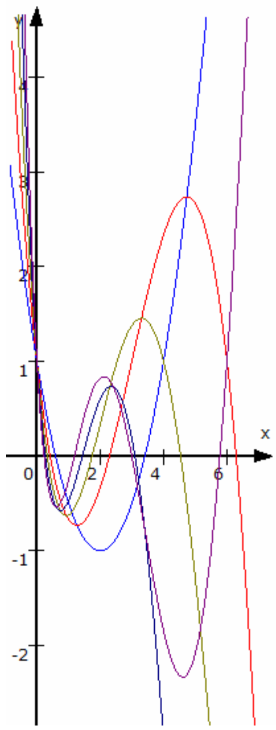
$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$

Hermitesche Polynome lassen sich die Rekursionsformeln berechnen:

$H_{n+1}(x) = 2\, x\, H_n(x) - 2\, n\, H_{n-1}(x)$ $\qquad$ $H'_n(x) = 2\, n\, H_{n-1}(x)$



Laguerre-Polynome

Laguerre-Polynome sind Lösungen der Differenzialgleichung

$$xy'' + (1-x)\, y' + ny = 0 \;;\; n = 0, 1, 2, \dots$$

Sie sind darstellbar durch

$$L_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k/k!\, \binom{n}{k}\, x^k$$

Die ersten Laguerre-Polynome sind

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = 1 - x$

$L_2(x) = (x^2 - 4x + 2)\,/2$

$L_3(x) = -(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)\,/6$

$L_4(x) = (x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)\,/24$

$L_5(x) = -(x^5 - 24x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120)\,/120$

$L_6(x) = (x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)\,/720$

$L_7(x) = -(x^7 - 49x^6 + 882x^5 - 7350x^4 + 29400x^3 - 52920x^2 + 35280x - 5040)\,/5040$

Harmonische Analyse

... Bestimmung der Fourier-Koeffizienten zur Näherung einer Funktion f(x) durch eine Summe von trigonometrischen Funktionen

$a_i * \sin(i*x)$ und $b_i * \cos(i*x)$, i = 0,1,2,...,n,...

Dirichletsche Bedingung
Lässt sich das Intervall $0 < x < 2\pi$ in endlich viele Teilintervalle zerlegen und ist f(x) in jedem dieser Teilintervalle stetig und monoton, so ist f(x) in eine Fourierreihe entwickelbar und die Fourierkoeffizienten können nach den Euler-Fourierschen Formeln eindeutig bestimmt werden.

Harmonische Synthese
Die harmonische Synthese ist die Umkehrung der harmonischen Analyse. Die einzelnen reinen Schwingungen werden addiert und es ergibt sich eine Resultierende.

Fourier-Transformation
Fourier-Reihen sind Reihenentwicklungen periodischer Funktionen nach trigonometrischen Funktionen. Ihre Verallgemeinerung, Fourier-Integrale, gestatten auch die Darstellung nichtperiodischer Funktionen durch trigonometrische Funktionen.

Fourier-Reihe
Es sei f(x) eine integrierbare und periodische Funktion, der Periodenlänge 2π. Als Fourier-Koeffizienten der Funktion f(x) werden dann die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ bezeichnet, für die gilt

$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$, n = 1, 2, …

$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$, n = 1, 2, …

Fourier-Reihe heißt dann die unendliche Reihe $a_0/2 + \Sigma_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Satz von Dirichlet
Ist f(x) eine stetige Funktion oder besitzt nur endlich viele Unstetigkeitspunkte im Intervall $[-\pi, \pi]$ und ist monoton bzw. besitzt nur endlich viele Extrempunkte in $[-\pi, \pi]$, so konvergiert die Fourier-Reihe von f(x) für jedes beliebige x aus dem Intervall $[-\pi, \pi]$ und ihre Summe ist gleich

1) f(x) für alle stetigen Punkten x im Intervall $(-\pi, \pi)$
2) $1/2\, (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$ für alle Unstetigkeitsstellen x_0
3) $1/2\, (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$ für x = -p und $x = \pi$

Fourier-Entwicklung periodische Funktionen
Anmerkung: alle Summen von n=1 bis ∞

Periode 2π … f(x+2kπ) = f(x)

$f(x) = a_0/2 + \Sigma (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$

$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ $\qquad a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$

$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx$

Periode 2p … f(x+2kp) = f(x)

$f(x) = a_0/2 + \Sigma (a_n\cos(n\pi x/p) + b_n\sin(n\pi x/p))$

$a_0 = 1/p \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$ $\qquad a_n = 1/p \int_{-p}^{p} f(x) \cos(n\pi x/p)\,dx$

$b_n = 1/p \int_{-p}^{p} f(x) \sin(n\pi x/p)\,dx$

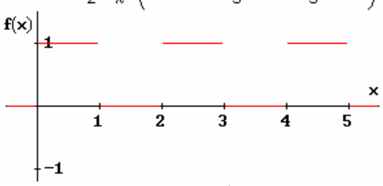
Sonderfall … f(x) gerade Funktion

Periode 2π … f(x+2kπ) = f(x)

$f(x) = a_0/2 + \Sigma a_n\cos(nx)$ $\qquad a_0 = 2/\pi \int_0^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = 2/\pi \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$

$$F_{n\to\infty}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]\to\infty} \frac{\sin[(2j-1)\cdot \pi x]}{2j-1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \ldots\right)$$



Periode 2p … f(x+2kp) = f(x)

$f(x) = a_0/2 + \Sigma a_n\cos(n\pi x/p)$

$a_0 = 2/p \int_0^{p} f(x)\,dx$

$a_n = 2/p \int_0^{p} f(x) \cos(n\pi x/p)\,dx$

Anmerkung: alle Summen von n=1 bis ∞

Sonderfall … f(x) ungerade Funktion

Periode 2π … f(x+2kπ) = f(x) $\qquad f(x) = \Sigma b_n\sin(nx)$ $\qquad b_n = 2/\pi \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx$

Periode 2p … f(x+2kp) = f(x) $\qquad f(x) = \Sigma b_n\sin(n\pi x/p)$

$b_n = 2/p \int_0^{p} f(x) \sin(n\pi x/p)\,dx$

Näherungsverfahren
x_i, y_i, i=0,1,...,2m-1 und m=12, 24, 36, ... seien im gleichen Abstand im Intervall [0; 2PI] verteilte Punkte des Graphen der Funktion f(x):

$a_0 = 1/(2m)\, \Sigma y_i$ $\qquad a_m = 1/(2m)\, \Sigma y_i \cos(i\pi)$

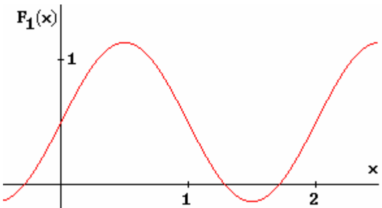
$a_j = 1/m\, \Sigma y_i \cos(j*i*\pi/m)$ $\qquad b_j = 1/m\, \Sigma y_i \sin(j*i*\pi/m)$,

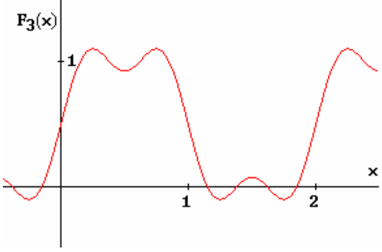
alle Summen über i=0...2m-1. j=1,...,m-1

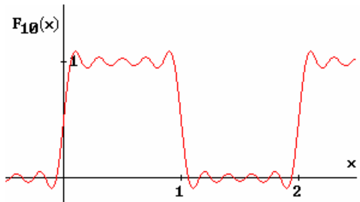
Beispiel zu Fourier-Reihen
Die Funktion f(x) = -1 für $\pi < x < 0$ und = 1 für $0 < x < \pi$ ist in eine Fourier-Reihe zu entwickeln. Die Funktion ist ungerade, wodurch die Fourier-Koeffizienten $a_i = 0$ sind. Für die b_n wird

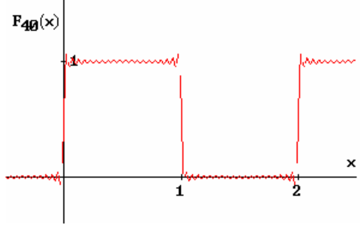
$b_n = 2/\pi \, {}_0\int^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 2/\pi \, {}_0\int^{\pi} \sin nx \, dx = -2/(\pi n) \cos nx \,|_0^{\pi} =$
$= -2/(\pi n) (\cos \pi n - \cos 0) = -2/(\pi n) ((-1)^n - 1) = 2/(\pi n) (1 - (-1)^n) =$
und somit $= 0$ für $n = 2k$ und $= 4/(\pi (2k-1))$ für $n = 2k-1$
Für die Fourier-Reihe von f(x) wird dann
$f(x) = 4/\pi \, \Sigma_{k=1}^{\infty} (\sin(2k-1) x)/(2k - 1) = 4/\pi (\sin x /1 + \sin 3x /3 + \sin 5x / 5 + \ldots)$
Setzt man hier $x = \pi/2$ ergibt sich
$1 = 4/\pi (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots)$
und daraus die Leibniz-Reihe für die Berechnung der Kreiszahl π
$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 +- \ldots$

weitere Fourier-Reihen:
1) $f(x) = x = 2 \, \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/n (-1)^{n+1} \sin nx = 2 (\sin x - \sin 2x /2 + \sin 3x / 3 - \sin 4x /4 + \ldots)$
2) $f(x) = 1 - 2x = 1 + 4 \, \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/n (-1)^n \sin nx$
3) $f(x) = 2$ für $-\pi < x < 0$ und $= -4$ für $0 < x < \pi$
Reihe $= -1 - 12/\pi \, \Sigma_{k=1}^{\infty} (\sin(2k-1) x)/(2k-1)$
4) $f(x) = x^2 = \pi^2/3 + 4 \, \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/n^2 (-1)^n \cos nx$
5) $f(x) = |x| = \pi/2 - 4/\pi \, \Sigma_{k=1}^{\infty} (\cos(2k-1) x)/(2k-1)^2$
6) $f(x) = \sin ax = 2/\pi \sin \pi a (\sin x /(1-a^2) - 2 \sin 2x /(2^2-a^2) + 3 \sin 3x /(3^2-a^2) + \ldots)$; a nicht ganzzahlig









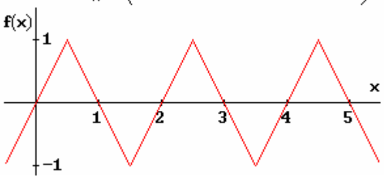
Rechteck-Schwingung
Entwicklung der Fourier-Reihe für die Rechteck-Schwingung
$f(x) = 0$ für $2k-1 < x < 2k$ und
$= 1$ für $2k < x < 2k-1$ mit $k = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$
Fourier-Approximation
oben: n=1
$F1(x) = 1/2 + 2/\pi \sin(\pi x)$

unten: n=3
$F3(x) = 1/2 + 2/\pi (\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)/3)$

links: n=10
$F10(x) = 1/2 + 2/\pi (\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)/3) + \ldots + \sin(9\pi x)/9)$

unten: n=40
$F40(x) = 1/2 + 2/\pi (\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)/3) + \ldots + \sin(39px)/39)$

$$F_{n\to\infty}(x) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]\to\infty} \frac{(-1)^{j-1} \cdot \sin[(2j-1)\cdot \pi x]}{(2j-1)^2}$$
$$= \frac{8}{\pi^2} \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{\sin(3\pi x)}{9} + \frac{\sin(5\pi x)}{25} \mp \ldots\right)$$



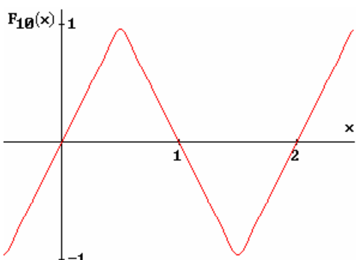
Dreiecks-Schwingung
Entwicklung der Fourier-Reihe für die Dreiecks-Schwingung
$f(x) = 2(x-2k)$ für $2k-0,5 < x < 2k+0,5$ und
$= 2(2k-x+1)$ für $2k+0,5 < x < 2k+1,5$ mit $k = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$

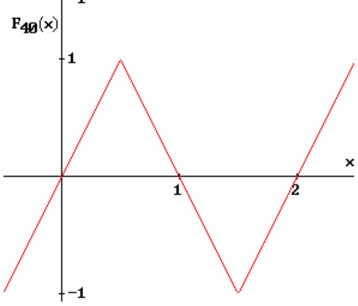
Fourier-Approximation
links oben: n=1
$F1(x) = 8/\pi^2 \sin(\pi x)$

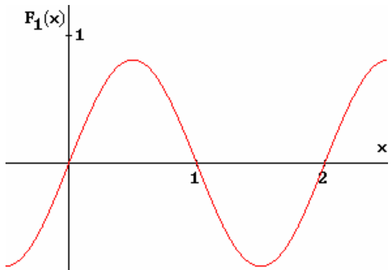
links unten: n=3
$F3(x) = 8/\pi^2 (\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)/9)$

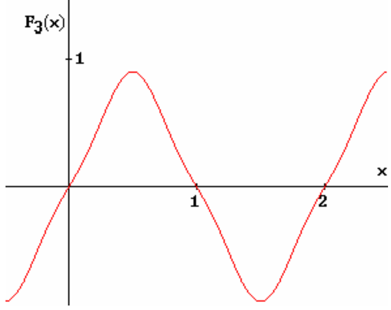
Fourier-Approximation (nächste Seite)
rechts oben: n=10
$F10(x) = 8/\pi^2 (\sin(\pi x) -+ \ldots + \sin(9\pi x)/81)$

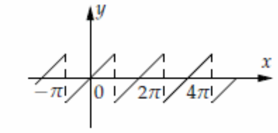
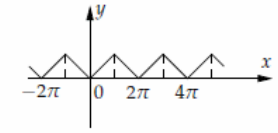
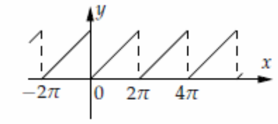
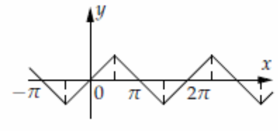
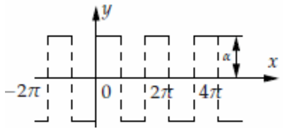
rechts unten: n=40
$F40(x) = 8/\pi^2 (\sin(\pi x) -+ \ldots - \sin(39\pi x)/39^2)$









Fourierreihen

1.Abbildung von oben

$y = x$ für $-\pi < x < \pi$

$y = 2(\sin x - 1/2 \sin 2x + 1/3 \sin 3x - \ldots)$

Für die Argumente $k\pi$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ liefert die Reihe nach dem Dirichletschen Satz den Wert 0.

2.Abbildung

$y = |x|$ für $-\pi < x < \pi$

$y = \pi/2 - 4/\pi(\cos x + 1/9 \cos 3x + 1/25 \cos 5x + 1/49 \cos 7x + \ldots)$

3.Abbildung

$y = x$ für $0 < x < 2\pi$

$y = \pi - 2(\sin x + 1/2 \sin 2x + 1/3 \sin 3x + \ldots)$

4.Abbildung

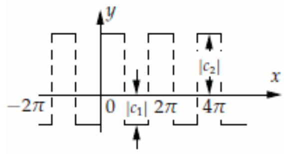
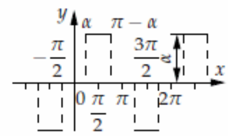
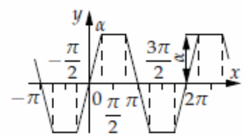
$y = x$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$; $\pi-x$ für $\pi/2 < x < \pi$; $-(\pi+x)$ für $-\pi < x < -\pi/2$

$y = 4/\pi(\sin x - 1/9 \sin 3x + 1/25 \sin 5x - 1/49 \sin 7x + \ldots)$

5.Abbildung

$y = a$ für $-\pi < x < 0$; a für $0 < x < \pi$

$y = 4/\pi(\sin x + 1/3 \sin 3x + 1/5 \sin 5x + 1/7 \sin 7x + \ldots)$

rechts 1.Abbildung von oben

$y = c_1$ für $-\pi < x < 0$; c_2 für $0 < x < \pi$

$y = (c_1+c_2)/2 - 2 (c_1-c_2)/\pi (\sin x + 1/3 \sin 3x + 1/5 \sin 5x + \ldots)$

2.Abbildung

$y = 0$ für $-\pi < x < -\pi+\alpha$; für $-\alpha < x < \alpha$; für $\pi-\alpha < x < \pi$

$= a$ für $\alpha < x < \pi-\alpha$

$= -a$ für $-\pi+\alpha < x < -\alpha$

$y = 4a/\pi (\cos \alpha \sin x + 1/3 \cos 3\alpha \sin 3x + 1/5 \cos 5\alpha \sin 5x + \ldots)$

3.Abbildung

$y = ax/\alpha$ für $-\alpha < x < \alpha$

$= a$ für $\alpha < x < \pi-\alpha$

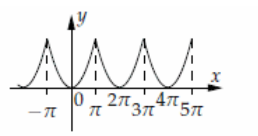
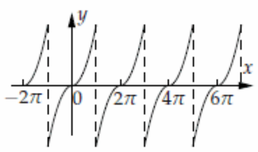
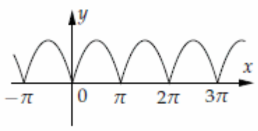
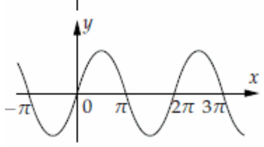
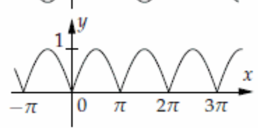
$= -a$ für $-\pi+\alpha < x < -\alpha$

$= a(\pi-x)/a$ für $\pi-\alpha < x < \pi$

$= -a(\pi-x)/a$ für $-\pi < x < -\pi+\alpha$

$y = 4a/(\pi\alpha) (\sin \alpha \sin x + 1/9 \sin 3\alpha \sin 3x + 1/25 \sin 5\alpha \sin 5x + \ldots)$

für $\alpha = \pi/3$ wird $\quad y = 6a/\pi^2 \sqrt{3} (\sin x - 1/25 \sin 5x + 1/49 \sin 7x - 1/121 \sin 11x +- \ldots)$

1.Abbildung von oben

$y = x^2$ für $-\pi < x < \pi$

$y = \pi^2/3 - 4(\cos x - 1/4 \cos 2x + 1/9 \cos 3x -+ \ldots)$

2.Abbildung

$y = -x^2$ für $-\pi < x < 0$; x^2 für $0 < x < \pi$

$y = 2\pi(\sin x - 1/2 \sin 2x + 1/3 \sin 3x - \ldots) - 8/\pi(\sin x + 1/27 \sin 3x + 1/125 \sin 5x + \ldots)$

3.Abbildung

$y = x (\pi-x)$ für $0 < x < \pi$

$y = \pi^2/6 - (\cos 2x + 1/4 \cos 4x + 1/9 \cos 6x + \ldots)$

4.Abbildung

$y = x (\pi-x)$ für $0 < x < \pi$

$y = 8/\pi (\sin x + 1/27 \sin 3x + 1/125 \sin 5x + \ldots)$

5.Abbildung

$y = |\sin x|$ für $-\pi < x < \pi$

$y = 2/\pi - 4/\pi (1/3 \cos 2x + 1/15 \cos 4x + 1/35 \cos 6x + \ldots)$

Fourierreihen

Fourier-Reihen spielen bei der Beschreibung vieler technischer Probleme eine große Rolle: in der technischen Mechanik, Elektrotechnik, Signaltheorie, Nachrichten- und Regelungstechnik.

Ein Beispiel aus der technischen Mechanik sind schwingende Systeme. Die trigonometrischen Funktionen treten dort als Eigenfunktionen (Eigenschwingungen) auf, allgemeine periodische Lösungen erhält man wegen der Linearität der Bewegungsgleichungen als Linearkombination dieser Eigenfunktionen. Letztere stellen aber im mathematischen Sinn gerade die Fourier-Reihe dar.

Fourierreihe	dargestellte Funktion	Gültigkeit
$\sin x + 1/2 \sin(2x) + 1/3 \sin(3x) + \ldots$	$(\pi-x)/2$	$0 < x < 2\pi$
$\cos x + 1/2 \cos(2x) + 1/3 \cos(3x) + \ldots$	$-\ln(2 \sin(x/2))$	$0 < x < 2\pi$
$\cos x + 1/2^2 \cos(2x) + 1/3^2 \cos(3x) + \ldots$	$(3x^2-6\pi x+2\pi^2)/12$	$0 < x < 2\pi$
$\sin x + 1/2^2 \sin(2x) + 1/3^2 \sin(3x) + \ldots$	$(x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x)/12$	$0 < x < 2\pi$
$\cos x - 1/2 \cos(2x) + 1/3 \cos(3x) -+ \ldots$	$\ln(2 \cos(x/2))$	$-\pi < x < \pi$
$\sin x - 1/2 \sin(2x) + 1/3 \sin(3x) -+ \ldots$	$x/2$	$-\pi < x < \pi$
$\cos x - 1/2^2 \cos(2x) + 1/3^2 \cos(3x) -+ \ldots$	$(\pi^2-3x^2)/12$	$-\pi < x < \pi$
$\sin x - 1/2^2 \sin(2x) + 1/3^2 \sin(3x) -+ \ldots$	$(\pi^2 x-x^3)/12$	$-\pi < x < \pi$
$\sin x + 1/3 \sin(3x) + 1/5 \sin(5x) + \ldots$	$-\pi/4$	$-\pi < x < 0$
$\sin x + 1/3 \sin(3x) + 1/5 \sin(5x) + \ldots$	$\pi/4$	$0 < x < \pi$
$\cos x + 1/3 \cos(3x) + 1/5 \cos(5x) + \ldots$	$-1/2 \ln(\tan(\lvert x\rvert/2))$	$-\pi < x < \pi$, $x \neq 0$
$\cos x + 1/3^2 \cos(3x) + 1/5^2 \cos(5x) + \ldots$	$(\pi^2-2\pi\lvert x\rvert)/8$	$-\pi < x < \pi$
$\sin x + 1/3^3 \sin(3x) + 1/5^3 \sin(5x) + \ldots$	$(\pi x(\pi-\lvert x\rvert))/8$	$-\pi < x < \pi$
$\cos x - 1/3 \cos(3x) + 1/5 \cos(5x) -+ \ldots$	$\pi/4$ bzw. $-\pi/4$	$-\pi < x < \pi$
$\sin x - 1/3 \sin(3x) + 1/5 \sin(5x) -+ \ldots$	$-1/2 \ln(\tan(\pi/4-x/2))$	$-\pi/2 < x < \pi/2$
$\sin x - 1/3^2 \sin(3x) + 1/5^2 \sin(5x) -+ \ldots$	$\pi x/2$	$-\pi/2 < x < \pi/2$
$\cos x - 1/3^3 \cos(3x) + 1/5^3 \cos(5x) -+ \ldots$	$(\pi^3-4\pi x^2)/32$	$-\pi/2 < x < \pi/2$

Die Tabelle enthält zu ausgewählten Funktionen die Fourier-Reihen bis zum 5.Näherungsglied.

Funktion	**Fourier-Reihe im Intervall $-\pi < x < \pi$**
x	$2 \sin x - \sin 2x + 2/3 \sin 3x - 1/2 \sin 4x + 2/5 \sin 5x + \ldots$
x^2	$\pi^2/3 - 4 \cos x + \cos 2x - 4/9 \cos 3x + 1/4 \cos 4x - 4/25 \cos 5x + \ldots$
$x^2 + x$	$\pi^2/3 + 2 \sin x - 4 \cos x - \sin 2x + \cos 2x + 2/3 \sin 3x - 4/9 \cos 3x - 1/2 \sin 4x + 1/4 \cos 4x + 2/5 \sin 5x - 4/25 \cos 5x + \ldots$
x^3	$2(\pi^2 - 6) \sin x + (3-2\pi^2)/2 \sin 2x + 2/9 (3\pi^2-2) \sin 3x + (3-8\pi^2)/16 \sin 4x + 2/125 (25\pi^2-6) \sin 5x + \ldots$
$\lvert x\rvert$	$\pi/2 - 4/\pi \cos x - 4/(9\pi) \cos 3x - 4/(25\pi) \cos 5x + \ldots$
$\sin^2 x$	$1/2 - 1/2 \cos 2x$
$\cos^2 x$	$1/2 + 1/2 \cos 2x$
$\sin^3 x$	$3/4 \sin x - 1/4 \sin 3x$
$\cos^3 x$	$1/4 \cos 3x + 3/4 \cos x$

Funktion	**Fourier-Reihe im Intervall $0 < x < \pi$**
x	$\pi/2 - \sin 2x - 1/2 \sin 4x - 1/3 \sin 6x - 1/4 \sin 8x - 1/5 \sin 10x$
x^2	$\pi^2/3 - \pi \sin 2x + \cos 2x - \pi/2 \sin 4x + 1/4 \cos 4x - \pi/3 \sin 6x + 1/9 \cos 6x - \pi/4 \sin 8x + 1/16 \cos 8x - \pi/5 \sin 10x + 1/25 \cos 10x + \ldots$
$\lvert x\rvert$	$\pi/2 - \sin 2x - 1/2 \sin 4x - 1/3 \sin 6x - 1/4 \sin 8x - 1/5 \sin 10x - \ldots$

Schnelle Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist ein grundlegendes Verfahren der Signalverarbeitung. Durch die Fourier-Transformation können Signale von der Darstellung (Zeitpunkt, Abtastwert) in die Darstellung (Frequenzanteil, Amplitude, Phase) überführt werden.
Viele Operationen, z.B. Filter, lassen sich im Frequenzraum leichter durchführen. Anschließend wird das Signal mit der inversen Fourier-Transformation wieder zurücktransformiert.
Außerdem hat die Fourier-Transformation numerische Anwendungen. Zum Beispiel lässt sich die Polynommultiplikation schneller durchführen, wenn die Polynome in Stützstellendarstellung statt in Koeffizientendarstellung vorliegen.

Das Verfahren der schnellen Fourier-Transformation (engl. Fast Fourier Transform - FFT) hat eine Zeitkomplexität von $O(n \log(n))$. Dadurch ist die Polynommultiplikation sogar einschließlich der Transformation in die Stützstellendarstellung und die Rücktransformation schneller als die direkte Multiplikation in Koeffizientendarstellung.

Grundlagen der diskreten Fourier-Transformation

Es sei n eine natürliche Zahl und w die primitive n-te Einheitswurzel im Körper der komplexen Zahlen.
Eine nxn-Matrix F mit $F_{i,j} = w^{i \cdot j}$
für alle $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ heißt dann Fouriermatrix.
Die lineare Abbildung $f: C^n \to C^n$ mit $f(a) = a \cdot F$
für alle Zeilenvektoren $a \in C^n$ heißt diskrete Fourier-Transformation; DFT.
Quelle: http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/fft/fft.htm

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation (2)

Beispiel zur diskreten Fourier-Transformation:
Es sei n = 4. Dann ist i primitive n-te Einheitswurzel. Die zugehörige Fouriermatrix ist links abgebildet.
Zum Beispiel ist die -1 in der letzten Zeile der Matrix das Element

$$F_{3,2} = w^{3\cdot 2} = w^6 = (-1)^3 = -1$$

Die Elemente der Matrix werden von 0 bis n-1 indiziert.
Die Fourier-Transformation des Vektors a = [1 1 1 0] ergibt

$$y = a\cdot F = [3\ i\ 1\ -i]$$

Damit ist die Fouriermatrix F die Vandermonde-Matrix des Vektors $w^0, \ldots, w^{n-1}$. Die Matrix-Vektor-Multiplikation $y = a\cdot F$ lässt sich somit als Polynomauswertung an den Stellen $w^0, \ldots, w^{n-1}$ auffassen, wobei der Vektor a die Koeffizienten des Polynoms enthält.
Das Ergebnis $y_0, \ldots, y_{n-1}$ ist die Stützstellendarstellung des Polynoms.

Die inverse Fouriermatrix F^{-1} existiert und ist gleich $F^{-1}_{i,j} = 1/n \cdot w^{-i\cdot j}$
für alle $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Die inverse Fouriermatrix enthält die zu den Elementen der Fouriermatrix inversen Elemente, dividiert durch n.
Die lineare Abbildung $f^{-1}: C^n \to C^n$ mit $f^{-1}(a) = a\cdot F^{-1}$, für alle $a \in C^n$ heißt inverse Fourier-Transformation.

Die inverse Fourier-Transformation des obigen Beispiels ergibt für den Vektor y = [3 i 1 -i]

$$a = y\cdot F^{-1} = [1\ 1\ 1\ 0]$$

In dieser Form ist die Fourier-Transformation eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Komplexität $O(n^2)$. Durch Ausnutzung der Symmetrie der n-ten Einheitswurzeln lässt sich die Berechnung auf O(n log(n)) beschleunigen. Dieses Verfahren heißt schnelle Fourier-Transformation.

Die Idee des Verfahrens der schnellen Fourier-Transformation ist, die einzelnen Berechnungen der Matrix-Vektor-Multiplikation $y = a\cdot F$ in einer speziellen Reihenfolge auszuführen, so dass jeweils auf schon berechnete Zwischenergebnisse zurückgegriffen werden kann.
Dabei wird ausgenutzt, dass $w^{n/2} = -1$ ist und dass das Quadrat w^2 der primitiven n-ten Einheitswurzel w primitive n/2-te Einheitswurzel ist. Das Verfahren setzt voraus, dass n eine Zweierpotenz ist.
Zuerst werden die Komponenten von y mit geradem Index berechnet, indem der Vektor a mit den entsprechenden Spalten der Fouriermatrix multipliziert wird. Es gilt für alle $k \in 0, \ldots, n/2-1$:

$$y_k' = y_{2k} = \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\, a_i\, w^{i\cdot 2k}.$$

Die Summe wird in zwei Hälften gespalten

$$y_k' = \Sigma_{i=0,\ldots,n/2-1}\, a_i\, w^{i\cdot 2k} + \Sigma_{i=0,\ldots,n/2-1}\, a_{i+n/2}\, w^{(i+n/2)\cdot 2k}$$

Da gilt

$$w^{(i+n/2)\cdot 2k} = w^{i\cdot 2k+nk} = w^{i\cdot 2k}\, w^{nk} = w^{i\cdot 2k}$$

und $w^{nk} = 1$ ist, wird $y_k' = \Sigma_{i=0,\ldots,n/2-1}\, (a_i + a_{i+n/2})\, w^{i\cdot 2k}$
Mit m = n/2 sowie $v = w^2$, v primitive m-te Einheitswurzel, gilt

$$y_k' = \Sigma_{i=0,\ldots,m-1}\, (a_i + a_{i+m})\, v^{i\cdot k}$$

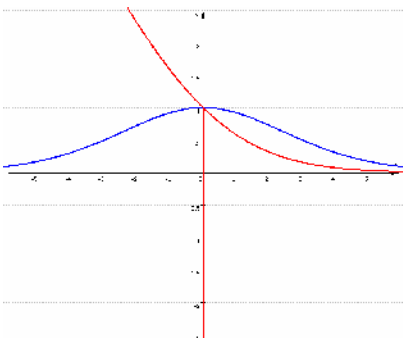
d.h. y_k' ist die k-te Komponente der Fourier-Transformation des Vektors $(a_i + a_{i+m})_{i=0,\ldots,m-1}$ der Länge m. Ähnlich werden die Komponenten von y mit ungeradem Index berechnet. Es gilt für alle $k \in \{0, \ldots, n/2-1\}$ $y_k'' = y_{2k+1} = \Sigma_{i=0,\ldots,n-1}\, a_i\, w^{i\cdot(2k+1)}$
Wiederum wird die Summe in zwei Hälften aufgespalten. Nach analogen Transformationen wird hier mit m = n/2 sowie $v = w^2$: $y_k'' = \Sigma_{i=0,\ldots,m-1}\, w^i \cdot (a_i - a_{i+m})\, v^{i\cdot k}$
d.h. yk'' ist k-te Komponente der Fourier-Transformation des Vektors

$$w_i \cdot (a_i - a_{i+m})_{i=0,\ldots,m-1}.$$

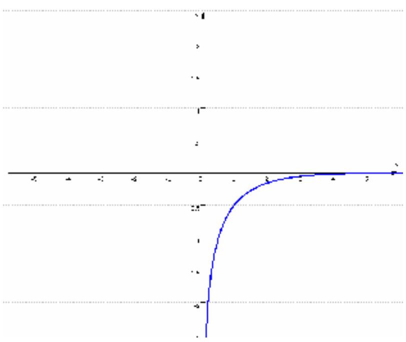
Durch rekursive Anwendung dieses Verfahrens auf Vektoren jeweils halber Länge wird im Ergebnis die Fourier-Transformation berechnet.

Einstein-Funktionen

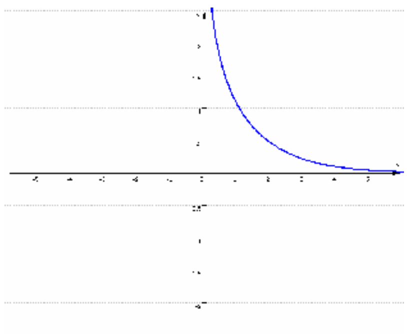
1.Funktion $E_1(x) = x^2\, e^x / (e^x - 1)^2$ 2.Funktion $E_2(x) = x / (e^x - 1)$
3.Funktion $E_3(x) = \ln(1 - e^{-x})$ 4.Funktion $E_4(x) = x / (e^x - 1) - \ln(1 - e^{-x})$



1. und 2.Einstein-Funktion



3.Einstein-Funktion



4.Einstein-Funktion

Niven-Polynome
Diese speziellen Polynome der Form

$$P_n(x) = x^n (1-x)^n /n! = 1/n! \, \Sigma_{k=n}^{2n} c_k x^k$$

wobei die c_k ganze Zahlen sind, können sehr gut zum Nachweis der Irrationalität verschiedener Zahlen genutzt werden, zum Beispiel für e oder p. Diese Polynome haben die Eigenschaften

$0 < P_n(x) < 1/n!$ für $0 < x < 1$ $P_n(0) = 0$

$P_n^{(m)}(0) = 0$ für $m < n$ und $m > 2n$ $P_n^{(m)}(0) = m!/n! \, c_m$ sonst

$P_n^{(m)}(1) = 0$ für $m < n$ und $m > 2n$ $P_n^{(m)}(1) = m!/n! \, c_m$ sonst

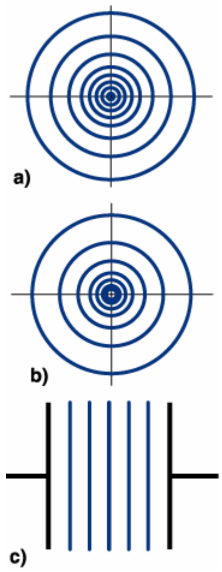
$P_n(x) = P_n(1-x)$

Die ersten Niven-Polynome sind

$P_1(x) = x\cdot(1 - x)$ $P_2(x) = x^2 \cdot(x^2 - 1)/2$

$P_3(x) = x^3\cdot(x^3 - 1)/6$

Vektoranalysis
Die Vektoranalysis untersucht mit Mitteln der Analysis Vektor- und Skalarfunktionen (Felder) eines oder mehrerer Argumente. Wichtige Begriffe und Sätze zur Differenziation und Integration solcher Funktionen werden erläutert.



Felder
Skalares Feld: Jedem Punkt P(x,y,z) des Raumes bzw. einer Fläche wird eine skalare Größe (Zahl) $U(x,y,z) = U(\vec{r})$ zugeordnet.
Beispiel: Temperatur, Dichte, elektrisches Potenzial, Luftdruck, Höhe über Normal-Null (Meeresspiegel)

Äquipotenzialfläche
Äquipotenzialfläche oder Niveaufläche ist eine Fläche, auf der U(x,y,z) einen konstanten Wert c hat.
Niveaulinie oder Höhenlinie, $U(x,y) = c$ im zweidimensionalen Fall.
Beispiel: Das Potenzial einer elektrischen Punktladung hat konzentrische Kugelschalen als Äquipotenzialflächen. Das Potenzial eines geladenen Drahtes hat konzentrische Zylindermäntel als Äquipotenzialflächen. Das Potenzial zwischen den Platten eines Kondensators hat parallele Ebenen als Äquipotenzialflächen.
Abbildung: Schnitt durch die Äquipotenzialflächen bei z=0: a) Punktladung, b) geladener Draht, c) Plattenkondensator

Vektorfeld
Jedem Punkt P(x,y,z) des Raumes wird ein Vektor $\vec{A}(x,y,z) = \vec{A}(\vec{r})$ zugeordnet.

Feldlinie
Kurve aller Punkte P(x,y,z), deren Vektor $\vec{A}(x,y,z)$ Tangentialvektor zur Kurve ist. Damit bestimmt jeder Punkt durch seinen Vektor die Richtung, in der die Feldlinie zum nächsten Punkt läuft. Bis auf Punkte mit $\vec{A} = \vec{0}$ gehört jeder Punkt zu genau einer Feldlinie. Feldlinien schneiden sich nicht.
Stationäre Felder $\vec{A}(x,y,z)$, U(x,y,z) hängen nur vom Raumpunkt ab, veränderliche Felder $\vec{A}(x,y,z,t)$, U(x,y,z,t) hängen zusätzlich von weiteren Größen ab, z.B. der Zeit t.

Ebenes Feld
Das Feld hängt nur von zwei Koordinaten (z.B. $\vec{A}(x,y)$) oder sogar von einer Koordinate ab (z.B. U(z)). Gelingt eine solche Darstellung, so vereinfacht das die Rechnung sehr, da Ableitungen nach der fehlenden Koordinate zu Null werden.
Das Schwerefeld in der Nähe der Erdoberfläche ist eben. Das Potentialfeld zwischen den Platten eines Kondensators ist eben.

Kugelsymmetrisches Feld
Das Feld hängt nur vom Abstand $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$
des Punktes P(x,y,z) zum Ursprung ab. Es empfiehlt sich die Wahl von Kugelkoordinaten r, ϑ, ϕ.
Das elektrische Feld einer Punktladung ist kugelsymmetrisch. Das Schwerkraftfeld, das von einem punkt- oder kugelförmigen Körper (Sonne, Erde) ausgeht, ist kugelsymmetrisch.

Zylindersymmetrisches Feld
Das Feld hängt nur vom Abstand r des Punktes P(x,y,z) von der z-Achse ab. Es empfiehlt sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z. Das Magnetfeld um einen geradlinigen langen Leiter ist zylindersymmetrisch. Das Strömungfeld in einer geraden Röhre ist zylindersymmetrisch.

Normierter Raum, Banachraum
Ein Vektorraum V über den reellen Zahlen R, oder den komplexen Zahlen C, heißt ein normierter Vektorraum oder kürzer normierter Raum, wenn es eine Abbildung $|| \; ||: V \rightarrow R$ gibt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt

$||a|| > 0$ für alle $a \neq 0$

$||\lambda a|| = |\lambda|\ ||a||$ für alle $\lambda \in R$ und $a \in V$ (Homogenität)
$||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$ für alle $a, b \in V$
Diese Abbildung wird Norm genannt. Man benutzt die Doppelstriche || || um die Norm vom Absolutbetrag der reellen Zahlen zu unterscheiden. Die 3.Eigenschaft ist die Dreiecksungleichung in vektorieller Form.

Eigenschaften normierter Vektorräume
Sei V ein normierter Vektorraum mit der Norm || || und $a \in V$. Dann gilt:
$||0|| = 0 \qquad ||-a|| = ||a||$
Durch den Ansatz $d(x, y) = ||x - y||$ wird auf V eine Metrik erklärt. Damit ist V insbesondere ein metrischer Raum. Begriffe, wie konvergente Folge, Cauchyfolge, offene Mengen und abgeschlossene Mengen usw. gelten auch für normierte Räume.

Banachraum
Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum, benannt nach dem Mathematiker Stefan Banach.
Beispiele: (R, | |) ist der normierte Raum der reellen Zahlen mit der Betragsfunktion. R^n mit der p-Norm $(R^n, ||\ ||_p)$
$||x|| = (\Sigma_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$
wobei $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Diese Norm geht für $p \to \infty$ in die die Maximumnorm
$||x|| = \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|$
über. Weitere Spezialfälle der p-Norm sind
$||x|| = \Sigma_{i=1}^n |\xi_i|$; Summennorm $\qquad ||x|| = \sqrt{(\Sigma_{i=1}^n |\xi_i|)^2}$; euklidische Norm.
Der Beweis der Normeigenschaften ist relativ einfach; die Dreiecksungleichung entspricht der Minkowskischen Ungleichung. Der R^n mit einer beliebigen Norm ist vollständig, also ein Banachraum.

Normierter Raum
Stetige Funktionen
Sei C([a, b]) die Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall [a, b]. Mit
$||f|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$
definieren wir eine Norm. Dieser Raum ist ein Banachraum.

Polynome
Der Funktionenraum der Polynome $\qquad P = \{p:[a,b] \to R: p \text{ ist Polynom}\} \subset C([a,b])$
mit der Norm $\qquad ||p||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|$
ist nicht vollständig.
Nachweis: $e^x = \Sigma_{k=0}^\infty x^k/k!$ ist gleichmäßig konvergent auf [a, b]. Daraus folgt, die Folge $(p_n)_n$ mit
$p_n(x) = \Sigma_{k=0}^n x^k/k! \in P$
ist eine Cauchyfolge bezüglich $||\ ||_\infty$. Angenommen § $p \in P$ mit
$||p_n - p|| \to 0 \Rightarrow |p(x) - e^x| \leq ||p(x) - p_n(x)||_\infty + ||p_n(x) - e^x||_\infty \to 0$
Damit ist $p(x) = e^x$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme steht, da die Exponentialfunktion kein Polynom ist.

Raum C([0, 1])
Der Raum C([0, 1]) ist mit der Norm $\qquad ||f||_1 = {}_0\int^1 |f(t)|\, dt$ $\quad$ nicht vollständig.

Differenzialoperatoren
Operator, eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Punkt des Definitionsbereiches der Urbildmenge genau einen Punkt der Bildmenge zuordnet. Bild- und Urbildmenge brauchen nicht identisch zu sein, z.B. kann ein Operator ein skalares Feld auf ein Vektorfeld abbilden oder umgekehrt.
Differentialoperator d/dt ordnet jeder Funktion f(t) ihre Ableitung df/dt zu
Partieller Ableitungsoperator $\partial/\partial y$ leitet eine Funktion f(x,y,z,...) mehrerer Veränderlicher nach einer Variablen y ab. Die anderen Variablen werden als Konstanten behandelt.
Gemischte partielle Ableitung: Nacheinanderausführung von partiellen Ableitungen nach verschiedenen Komponenten
Ist die abzuleitende Funktion f(x,y,z) zweifach stetig partiell differenzierbar, so kann die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden.

Nabla-Operator (Hamilton-Operator), formal ein Vektor, dessen entsprechende Komponenten die partiellen Ableitungsoperatoren bilden: $\qquad \nabla = \partial/\partial x\ \vec{i} + \partial/\partial y\ \vec{j} + \partial/\partial z\ \vec{k}$
Laplace-Operator, das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst; Summe über alle partiellen zweiten Ableitungen

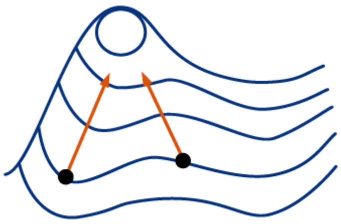
$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Der Laplace-Operator ist ein Skalar und kein Vektor.
Biharmonischer Operator

$$\nabla^4 U = \vec{\nabla}^2(\vec{\nabla}^2 U) = \Delta(\Delta U) = \Delta^2 U$$

zweifache Ausführung des Laplace-Operators

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$



Gradient eines Skalarfeldes $\phi(x,y,z)$

... eines skalaren Feldes U ordnet jedem Punkt des Feldes $U(\vec{r})$ einen Vektor zu, der in Richtung des stärksten Anstiegs von U zeigt und den Betrag der Ableitung des Feldes in diese Richtung besitzt

$$\text{grad}\ \phi = \partial\phi/\partial x\ \vec{i} + \partial\phi/\partial y\ \vec{j} + \partial\phi/\partial z\ \vec{k} = \nabla\phi$$

Vektorfeld $\vec{v}$ heißt Potenzialfeld, wenn skalare Funktion $\phi(x,y,z)$ existiert mit $\vec{v} = \text{grad}\ \phi$

Eigenschaften

$| \text{grad}\ \phi | = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}$

${}_A\int_0{}^B \vec{v}\, d\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ ... Potenzialvektor

$\text{grad}\ (c\phi) = c\ \text{grad}\ \phi$ $\qquad$ $\text{grad}\ (\phi_1 \pm \phi_2) = \text{grad}\ (\phi_1) \pm \text{grad}\ (\phi_2)$

$\text{grad}\ (\phi_1\phi_2) = \phi_2\ \text{grad}\ (\phi_1) + \phi_1\ \text{grad}\ (\phi_2)$ $\qquad$ $\text{grad}\ c = \vec{0}$

Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen.
Konservativ heißt ein Vektorfeld $\vec{A}$, wenn das Linienintegral $\int_C \vec{A} d\vec{r}$ nur von den Endpunkten der Linie und nicht vom Integrationsweg abhängt. Jedes konservative Feld $\vec{A}$ besitzt ein Potential U mit $\vec{A} = -\text{grad}\ U$ und jedes Gradientenfeld ist konservativ. $\text{grad}\ U\ d\vec{r}$ ist ein totales Differential von U.

Richtungsableitung

... die Ableitung eines skalaren Feldes im Punkt $\vec{r}$ in Richtung des auf eins normierten Richtungsvektors $\vec{n}$

$$\partial U / \partial\vec{n} = \lim_{\Delta t \to 0} (U(\vec{r} + \Delta t\ \vec{n}) - U(\vec{r}))/\Delta t$$

In Kartesischen Koordinaten $\vec{r} = x\ \vec{e_x} + y\ \vec{e_y} + z\ \vec{e_z}$ lässt sich die Richtungsableitung als Skalarprodukt des Richtungsvektors mit dem Gradienten des Feldes beschreiben $\qquad \partial U / \partial\vec{n} = \vec{n} \bullet \text{grad}\ U = n_x\ \partial U / \partial x + n_y\ \partial U / \partial y + n_z\ \partial U / \partial z$

Vektorgradient, Richtungsableitung eines Vektorfeldes

Die Richtungsableitung eines Vektorfeldes in Richtung des auf eins normierten Richtungsvektors $\vec{n}$ ist

$$(\vec{n}\ \text{grad})\ \vec{A} = \partial\vec{A}/\partial\vec{n} = \lim_{\Delta t \to 0} (\vec{A}(\vec{r} + \Delta t\ \vec{n}) - \vec{A}(\vec{r}))/\Delta t$$

Verallgemeinert auf nicht normierte Vektoren $\vec{a} = a\ \vec{n}$, kann man $t = -1$ als Multiplikation der Richtungsableitung mit dem Betrag a von $\vec{a}$ darstellen $\qquad (\vec{a}\ \text{grad})\ \vec{A} = a(\vec{n}\ \text{grad})\ \vec{A}$

In kartesischen Koordinaten lässt sich schreiben $\qquad (\vec{a}\ \text{grad})\ \vec{A} = (\vec{a}\ \text{grad}\ A_x)\ \vec{e_x} + (\vec{a}\ \text{grad}\ A_y)\ \vec{e_y} + (\vec{a}\ \text{grad}\ A_z)\ \vec{e_z}$

Der Vektorgradient, der Operator $\text{grad}\ \vec{A}$, der jedem Vektor $\vec{a}$ den Vektor $(\vec{a}\ \text{grad})\ \vec{A}$ zuordnet. Diese Zuordnung lässt sich in kartesischen Koordinaten als Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix beschreiben. Der Vektorgradient kann auch als Matrix (Tensor) dargestellt werden

$$(\vec{a}\,\text{grad})\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \qquad \text{grad}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Er hat Bedeutung vor allem in der Elastizitätslehre im Maschinenbau (Spannungstensor, Dehnungstensor).

d'Alembert-Operator $\qquad {}^2 = \nabla^2 - 1/c^2\ \partial^2/\partial t^2$; c ... Lichtgeschwindigkeit

Nabla-Operator, Rechenregeln

Nabla-Operator $\nabla = \partial/\partial x\ \vec{i} + \partial/\partial y\ \vec{j} + \partial/\partial z\ \vec{k}$

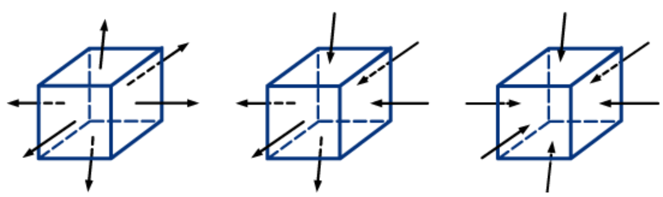
Für skalare Felder φ, ψ und für Vektorfelder $\vec{f}$, $\vec{g}$ gilt:

$\nabla \cdot (\phi + \psi) = \nabla \cdot \phi + \nabla \cdot \psi$ $\qquad$ $\nabla \cdot (\vec{f} + \vec{g}) = \nabla \cdot \vec{f} + \nabla \cdot \vec{g}$

$\nabla \times (\vec{f} + \vec{g}) = \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \vec{g}$ $\qquad$ $\nabla \cdot (\phi\psi) = \psi\ \nabla \cdot \phi + \phi\ \nabla \cdot \psi$

$\nabla \cdot (\phi \cdot \vec{f}) = \vec{f} \cdot \nabla \cdot \phi + \phi \cdot \nabla \cdot \vec{f} = \vec{f} \cdot \text{grad}\ \phi + \phi \cdot \text{div}\ \vec{f}$

$\nabla \cdot (\phi \cdot \vec{f}) = -\vec{f} \times \nabla \cdot \phi + \phi \cdot \nabla \times \vec{f}$



Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z)$

Die Divergenz oder Quelle eines Feldes $\vec{A}$ im Punkt (x,y,z) ist die Bilanz des durch die Oberfläche F eines infinitesimal kleinen Volumens V um den Punkt (x,y,z) gehenden Vektorflusses $\vec{A}$, d.h. die Differenz zwischen Zufluß und Abfluß

$$\text{div}\ \vec{v} = \nabla\ \vec{v} = u_x + v_y + w_z$$

div $\vec{A} = 0$ $\qquad$ zufließender Anteil gleich abfließender Anteil, Vektorfeld $\vec{v}$ mit div $\vec{v} = 0$ heißt quellenfrei

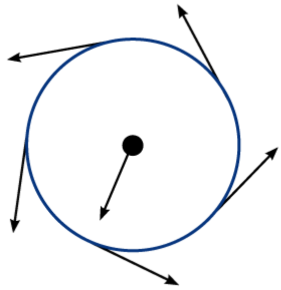
div $\vec{A} > 0$ $\qquad$ abfließender Anteil überwiegt, Quelle

div $\vec{A} < 0$ $\qquad$ zufließender Anteil überwiegt, Senke

Das Quellfeld div $\vec{A}$ kann als Skalarprodukt des ∇-Differentialoperators mit einem Vektorfeld $\vec{A}$ aufgefasst werden und ist daher ein skalares Feld. Für die Ergiebigkeit eines Volumens V ist $\int_V \text{div } \vec{A}\, dV$.
Rechenregeln: $\vec{A}$, $\vec{B}$ sind Vektorfelder, U ist ein skalares Feld, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, c eine Konstante:

$\text{div } \vec{a} = 0$	$\text{div } (\vec{a}U) = \vec{a} \text{ grad } U$	$\text{div } (\vec{A} + \vec{B}) = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}$
$\text{div } (\vec{A} + \vec{a}) = \text{div } \vec{A}$	$\text{div } (U \vec{A}) = U \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \text{ grad } U$	dic $(c\vec{A}) = c \text{ div } \vec{A}$
$\text{div } (\vec{A} \times \vec{a}) = \vec{a} \text{ rot } \vec{A}$	$\text{div } (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B}$	

Rotation eines Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z)$



Rotation eines Vektorfeldes definiert „Wirbel", d.h. geschlossene Feldlinien eines Vektorfeldes. Definiert ist sie über das Linienintegral entlang der Umrandung C einer infinitesimalen Fläche F.

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$

Vektorfeld $\vec{v}$ mit rot $\vec{v} = 0$ heißt wirbelfrei

Beziehungen

rot grad $\phi = 0$ ... Gradientenfeld ist wirbelfrei
div rot $\vec{v} = 0$ ... Rotorfeld ist quellenfrei
div grad $\phi = \Delta \phi$

Satz von Gauß im Raum

Sei G ein geeignetes Gebiet des R^3 (sternförmig). Die Randfläche sei durch $\vec{x}(u,v)$ so parametrisiert, dass $\vec{x}_u \times \vec{x}_v$ nach "außen" zeigt. Es sei $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt $\int \vec{v}\, d\vec{o} = \iiint_G \text{div } \vec{v}(\vec{x})\, d(x,y,z)$

Die Quellenstärke von $\vec{A}$ ist am Ursprung (0,0,0) divergent und an allen anderen Punkten 0. Die zugehörigen skalaren Funktionen U mit ($\nabla U = \vec{A}$) sind Greensche Funktionen zur Poisson-Gleichung.

Satz von Gauß in der Ebene

Sei G ein geeignetes Gebiet des R^2 (sternförmig). Sei weiter die Randkurve ∂G so parametrisiert, dass G "links" von ∂G liegt. Es sei $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt $\int \vec{v}\, d\vec{x} = - \iint_G \text{div } \vec{v}(\vec{x})\, d(x,y)$

Fluss von $\vec{v}$ durch ∂G

als Fluss von $\vec{v}$ durch ∂G wird das Integral $\iint_G (\vec{v}\, \vec{n})\, do$ bezeichnet
Die Zirkulation in Vektorfeldern für alle geschlossenen *C* ist definiert als $Z = \int_C \vec{f}\, d\vec{x}$. Ist $Z = 0$ bzw. grad $\varphi = \vec{f}$, dann heißt das Vektorfeld $\vec{v}$ zirkulationsfrei.

Stokescher Integralsatz

$$\int_C \vec{V}\, d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{V}\, \vec{n}\, d\sigma$$

S ist Flächenstück mit der Randkurve C, d.h. das Integral $\iint_S \text{rot } \vec{V}\, \vec{n}\, d\sigma$ hängt nicht von der Form des Flächenstücks S sondern nur von der Randkurve C ab. Auf der belgischen Briefmarke zum Internationalen Mathematischen Jahr 2000 ist der Integralsatz von Stokes (in anderer Schreibweise) gewürdigt.
Zweite Formulierung: Das Integral über die Wirbel rot $\vec{A}$ in einer Fläche F ist gleich der Zirkulation des Vektorfeldes um den Flächenrand C. Die Rotation ist nur am Rand wirksam. Die Rotationen im Inneren heben sich auf.
Der Stokessche Integralsatz gilt in allen Dimensionen, allerdings ist die Formulierung über sogenannte Pfaffsche Formen unhandlich.

Quellen- und wirbelfreies Feld

Quellen- und wirbelfreie Felder lassen sich als Gradientenfelder (wirbelfrei) eines Potentialfeldes U darstellen. Das Potentialfeld muss die Laplace-Gleichung erfüllen: $\Delta U = \text{div grad } U = 0$
Für die Randbedingung gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Dirichletsches Problem: Der Wert von U auf der Oberfläche des betrachteten Volumens ist festgelegt.
2. Neumannsches Problem: Die Richtungsableitung des Feldes senkrecht zur Oberfläche ist festgelegt.

Die Lösung der Laplace-Gleichung zu den Randbedingungen kann oft nur numerisch erfolgen. Das Feld $\vec{B}$ erhält man durch
$\vec{B} = -\text{grad } U$.

Wirbelfreie Felder

Wirbel-, aber nicht quellenfreies Feld: Man untersucht ein Potentialfeld P, für das die Poisson-Gleichung gelöst wird

$$- \Delta P = -\text{div grad } P = \rho$$

Die Funktion U = a/r, die (mit a = 1) mit der Dichte ρ gefaltet wird (Gaußsches Theorem) ist wegen der Lösungseigenschaft der Differentialgleichung $- \Delta P = \rho$ eine Greensche Funktion zur Poisson-Gleichung.
Die Lösung zu den Randbedingungen erhält man durch die Überlagerung mit einem entsprechenden wirbel- und quellenfreien Feld U. Das Feld $\vec{B}$ erhält man durch $\vec{B} = -\text{grad}(P+U)$.

Quellenfreie Felder

Quellen-, aber nicht wirbelfreies Feld: Man kann aus der Quellenfreiheit div $B^{\rightarrow} = 0$ schließen, daß das Vektorfeld $B^{\rightarrow}$ sich als Rotation eines Vektorfeldes $A^{\rightarrow}$ schreiben lässt div $B^{\rightarrow}$ = div rot $A^{\rightarrow} = 0$
Für $A^{\rightarrow}$ wird gefordert, dass div $A^{\rightarrow} = 0$ ist (reines Wirbelfeld). Es gilt dann rot $B^{\rightarrow}$ = rot rot $A^{\rightarrow} = -\Delta A^{\rightarrow}$) $j^{\rightarrow}$, was wieder zu einer Poisson-Gleichung für die Vektorkomponenten von $A^{\rightarrow}$ führt. Eine Lösung hierzu ist

Allgemeiner Fall

Feld mit Quellen und Wirbeln: Das Problem eines wirbel-, aber nicht quellenfreien Feldes ergibt als Lösung ein Potentialfeld P. Dann löst man das Problem eines quellen-, aber nicht wirbelfreien Feldes und erhält das Vektorfeld $A^{\rightarrow}$. Die Lösung zu den Randbedingungen wird durch die Überlagerung mit einem entsprechenden wirbel- und quellenfreien Feld U bestimmt. Das Feld $B^{\rightarrow}$ ist dann: $B^{\rightarrow}$ = rot $A^{\rightarrow}$ - grad (U + P).

Greensche Formeln

Die Greenschen Formeln beruhen auf dem Prinzip der partiellen Integration. U, V sind skalare Funktionen, K ist das Integrationsvolumen und F die Oberfläche des Volumens.
Erste Greensche Formel: Es wird gemäß der Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ mit } u = U \text{ und } v = \operatorname{grad} V$$

partiell integriert und der Gaußsche Integralsatz angewandt

$$\int_K [U\,\Delta V + (\operatorname{grad} U)\cdot(\operatorname{grad} V)]\,\mathrm{d}K = \oint_F [U \operatorname{grad} V]\cdot\vec{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}F,$$

wobei $n^{\rightarrow}$ der auf der Außenfläche stehende Normalenvektor ist.
Zweite Greensche Formel: Zweimalige Verwendung der ersten Greenschen Formel mit vertauschten Argumenten.

$$\int_K [U\,\Delta V - V\,\Delta U]\,\mathrm{d}K = \oint_F [U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U]\cdot\vec{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}F.$$

Die Bedeutung der Greenschen Formeln liegt in ihrem Nutzen bei der analytischen Lösung von Potentialgleichungen unter speziellen Randbedingungen.

Vollständiges Differenzial

Wenn u eine differenzierbare Funktion ist, wird die nachfolgende Summe das vollständige Differenzial der Funktion genannt $du = \partial u/\partial x_1\, dx_1 + \partial u/\partial x_2\, dx_2 + \ldots + \partial u/\partial x_n\, dx_n$
Mit Hilfe der Vektoren grad $u = (\partial u/\partial x_1 , \partial u/\partial x_2 , \ldots , \partial u/\partial x_n)^T$ $dr = (dx_1 , dx_2 , \ldots , dx_n)$
lässt sich das totale Differenzial als Skalarprodukt $du = \text{grad } u \bullet dr$
darstellen. In der zweiten Gleichung handelt es sich um den Gradienten für den Fall von n unabhängigen Variablen.

Anwendung in der Fehlerrechnung

Im Rahmen der Fehlerrechnung, z.B. bei der Betrachtung der Fehlerfortpflanzung, wird das totale Differenzial du zur Schätzung des Fehlers Δu verwendet. Aus der Taylorschen Formel folgt

$$| \Delta u | = |du + R_1| \leq |du| + |R_1| \approx |du|$$

d.h., der absolute Fehler $|\Delta u|$ kann in erster Näherung durch $|du|$ ersetzt werden. Damit ist du eine lineare Approximation für Δu.

Maxwellsche Gleichungen

Die vier Maxwellschen Gleichungen beschreiben die Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern durch Ladungen und Ströme, sowie die Wechselwirkung zwischen diesen beiden Feldern. Sie sind die Grundlage der Elektrodynamik und wurden in den Jahren 1861 bis 1864 von James Clerk Maxwell entwickelt.
Die differenziellen und integralen Formen sind zum einen durch den Gaußschen Integralsatz zum anderen durch den Satz von Stokes miteinander verbunden:

1. Physikalisches Gaußsches Gesetz: Das D-Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung (Ladungsdichte ρ) ist Quelle des elektrischen Feldes. Der elektrische Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\text{div } D = \nabla \bullet D = \rho \;;\; \int_{\partial V} D \bullet dA = Q(V)$$

2. Das B-Feld ist quellenfrei. Es gibt keine magnetischen Monopole. Der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche eines Volumens ist gleich der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\text{div } B = \nabla \bullet B = 0 \;;\; \int_{\partial V} B \bullet dA = 0$$

3. Induktionsgesetz: Jede Änderung des B-Feldes führt zu einem elektrischen Gegenfeld. Die Wirbel des elektrischen Feldes sind von der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion abhängig.
Die elektrische Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

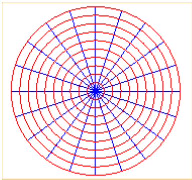
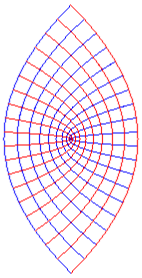
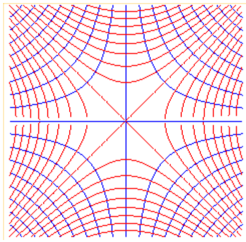
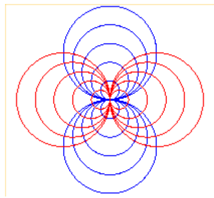
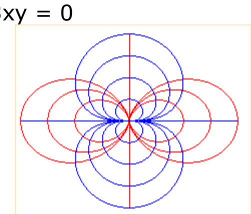
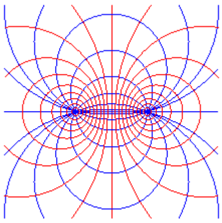
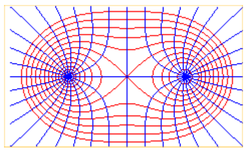
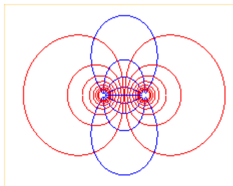
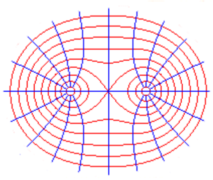
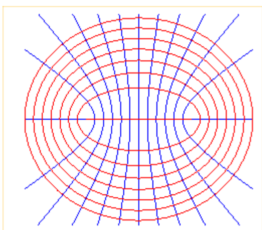
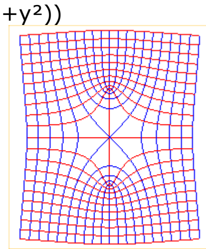
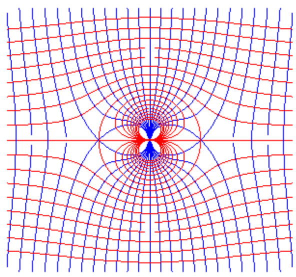
$$\text{rot } E + \partial B/\partial t = \nabla \times E + \partial B/\partial t = 0 \;;\; \int_{\partial V} E \bullet ds + d/dt \left(\int_A B \bullet dA\right) = 0$$

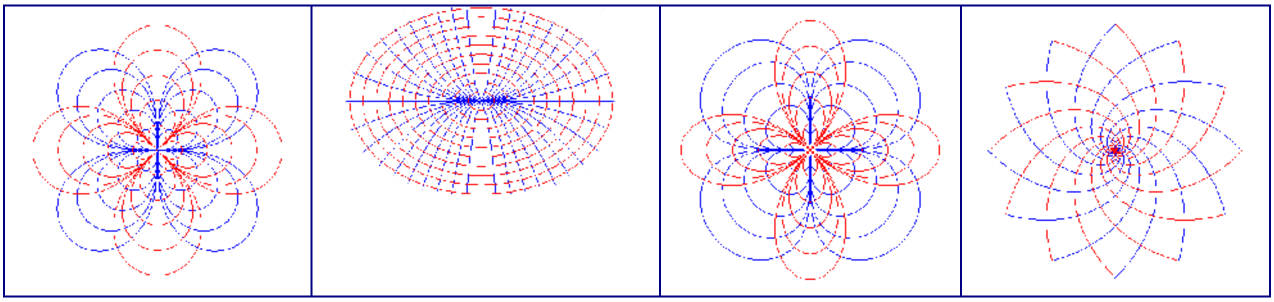
4. Verallgemeinertes Durchflutungsgesetz: Die Wirbel des Magnetfeldes hängen von der elektrischen Leitungsstromdichte j_l und von der elektrischen Flussdichte D ab.
Die magnetische Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der Summe aus dem elektrischen Strom und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Fläche.

$$\text{rot } H = \nabla \times H = j_l\ \partial D/\partial t\ ;\ \int_{\partial A} H \bullet ds = \int_A j_l + d/dt \left(\int_A D \bullet dA\right)$$

Feldlinien, orthogonale Linien

... Kurven, die eine Kurvenschar eines Feldes senkrecht schneiden. Die Tabelle enthält typische Feldformen und ihre zugehörigen Feldlinien.

kreisförmiges Feld kartesisch: $x^2 + y^2 =$ konst differentiell: $yy' + x = 0$ Feldlinien kartesisch: $y = kx$ differentiell: $xy' - y = 0$ 	parabolisches Feld kartesisch: $y^2 = 4a^2 (a-x)$ differentiell: $yy'^2 + 2xy' - y = 0$ Feldlinien kartesisch: $y^2 = 4a^2$ differentiell: $yy'^2 - 2xy' - y = 0$ 	hyperbolisches Feld kartesisch: $x^2 - y^2 =$ konst differentiell: $yy' - x = 0$ Feldlinien kartesisch: $xy =$ konst differentiell: $xy' + y = 0$ 	doppelt kreisförmiges Feld kartesisch: $x^2 + y^2 = ax$ differentiell: $2xyy' = y^2 - x^2$ Feldlinien kartesisch: $(x^2 + y^2) = ay$ differentiell: $(y^2 - x^2)\ y' + 3xy = 0$ 
Doppel-Eiförmiges Feld kartesisch: $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$ differentiell: $3xyy' = 2y^2-x^2$ Feldlinien kartesisch: $(x^2+y^2)^3 = a^4y^2$ differentiell: $(2y^2-x^2)y' + 3xy = 0$ 	kreisförmiges Feld kartesisch: $(x-1)^2+y^2 = k\ (y^2+(x+1)^2)$ Feldlinien kartesisch: ? 	Cassini-Feld polar: $\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta = k$ Feldlinien polar: $\rho^2 = \cos(2\alpha) / \cos(2\theta + 2\alpha)$ 	Cayley Äquipotenzialfeld geometrische Definition 1/MA – 1/MB = konstant Feldlinien geometrisch: $(\vec{MA}/MA - \vec{MB}/MB) \bullet \vec{AB} = k$ 
Ovales Cayley-Feld geometrische Definition 1/MA + 1/MB = konstant Feldlinien geometrisch: $(\vec{MA}/MA + \vec{MB}/MB) \bullet \vec{AB} = k$ 	Elliptisches Feld geometrische Definition MA + MB = konstant Feldlinien geometrisch: MA – MB = konstant 	Quartic-Feld kartesisch: $y^2 = a^2(1+ 1/(a^2+x^2))$ Feldlinien kartesisch: $x^2 = a^2(1- 1/(a^2+y^2))$ 	Hyperbolisch-kubisches Feld kartesisch: $(y-k)(x^2+y^2)\ y$ Feldlinien kartesisch: $(x-k)(x^2+y^2) + x = 0$ 
Leminskate des Bernoulli Feld: $\rho^2 = \alpha \cos 2\theta$ Feldlinien: $\rho^2 = \alpha \sin 2\theta$	Parabel Feld: $y = a\ x^2$ Feldlinien: $2x^2 + y^2 = a$	Schleifen Feld: $\rho = \alpha \cos 2\theta$ Feldlinien: $\rho^4 = \alpha \sin 2\theta$	Logarithmische Spirale Feld: $\rho = \alpha \exp(\theta)$ Feldlinien: $\rho = \alpha$ epx$(-\theta)$



Richtungsgrenzwert

Sei $E \subseteq R^n$ und f: $(E \subseteq R^n) \to R^1$. Sei ferner $x_0 \in R^n$ ein Häufungspunkt. Man sagt, dass f in x_0 einen Grenzwert g hat, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $0 < ||x-x_0|| < \delta$ gilt. Man schreibt dann $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ oder $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to x_0} f(x_1,\dots,x_n) = g$. Sei f: $(E \subseteq R^n) \to R^n$, $x_0 \in$ HPE, $U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\} \subseteq E$. Sei des weiteren $l \in R^n \setminus \{0\}$ ein Vektor. Falls der Grenzwert $\lim_{t\to 0+0} f(x_0 + tl)$ existiert, so heißt er Grenzwert von f in Richtung l, bzw. Richtungsgrenzwert.

Iterierter Grenzwert

Sei E ein Rechteck. $E = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) * (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ und f: $(E \subseteq R^2) \to R^1$. Wenn für jedes y mit $0<|y-y_0|<\beta$ ein $\varphi(y) := \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ existiert und wenn $g := \lim_{y\to y_0} \varphi(y)$ existiert, so schreibt man $g = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ und nennt dies einen iterierten Grenzwert.

Beispiel für $f(x,y) = x^2+2xy+5$: $\lim_{y\to1}\lim_{x\to2}(x^2+2xy+5) = \lim_{y\to1}(9+4y) = 13; \lim_{x\to2}\lim_{y\to1}(x^2+2xy+5) = \lim_{x\to2}(x^2+2x+5) = 13$. In diesem Beispiel sind die iterierten GW sogar vertauschbar, was nicht immer gilt. Der übliche Grenzwert ist auch 13.

Stetigkeit für Vektorfelder

Ein Vektorfeld f: $(E \subseteq R^n) \to R^m$ heißt stetig in $x_0 \in E$, wenn x_0 Häufungspunkt ist und $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Das Feld heißt stetig auf E, wenn es in jedem Punkt von E stetig ist. Ein Vektorfeld ist genau dann stetig in einem Punkt oder einer Menge, wenn jede Komponente stetig ist. Beziehungen zwischen Grenzwerte:

Wenn f in einem Punkt x_0 einen Grenzwert g hat und II. Gilt, dann besitzt f in x_0 Grenzwert in jede Richtung l und all diese Grenzwerte sind gleich g. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht! Wenn der übliche Grenzwert und ein iterierter Grenzwert existieren, dann sind beide gleich.

Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes

Die Abbildung f: $(G \subseteq R^n) \to R^m$ heißt in einem Punkt $a \in G$ differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A \in l(R^n, R^m)$ gibt, so dass $f(a+h) = f(a) + Ah + \alpha(h)$ mit $||\alpha(h)|| / ||h|| \to 0$ für $h \to 0$ gibt. Anders geschrieben: f ist in a differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f(a+h) = f(a) + Ah + o(||h||)$ $(h \to 0)$ oder $f(x) = f(a) + a(x-a) + o(||x-a||)$ $(x \to a)$.

Wenn $f(a+h) = f(a) + Ah + o(||h||)$ $(h \to 0)$ mit einer linearen Abbildung gilt, dann ist A eindeutig bestimmt.

Wenn eine lineare Abbildung $A \in l(R^n, R^m)$ existiert, für die $f(a+h) = f(a) + Ah + o(||h||)$ $(h \to 0)$ gilt, dann wird diese lineare Abbildung die Ableitung von f in a genannt und mit f'(a) oder df(a) oder Df(a) bezeichnet.

Ableitung eines Skalarprodukts $d(\vec{A}\,\vec{B})/dt = d\vec{A}/dt\,\vec{B} + \vec{A}\,d\vec{B}/dt$

das entstandene Feld ist ein Skalarfeld

Ableitung eines Kreuzprodukts $d(\vec{A} \times \vec{B})/dt = d\vec{A}/dt \times \vec{B} + \vec{A} \times d\vec{B}/dt$

das entstandene Feld ist ein Vektorfeld

Beispiel: Ableitung des Drehimpulses $\vec{L}$ nach der Zeit:

$d\vec{L}/dt = d/dt\,(\vec{r} \times \vec{p}) = d\vec{r}/dt \times \vec{p} + \vec{r} \times d\vec{p}/dt$

Wegen $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \vec{p}/m$ sind im ersten Kreuzprodukt die Vektoren parallel, wodurch das erste Produkt verschwindet, d.h.

$d/dt\,\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$.

In Zentralkraftfeldern gilt $\vec{F}(r) = F(r)\,\vec{r}/r$, wodurch auch der zweite Term verschwindet. Das Verschwinden der Ableitung bedeutet hier die Erhaltung des Drehimpulses.

Ableitung eines Spatprodukts $d[\vec{A}\,(\vec{B} \times \vec{C})]/dt = d\vec{A}/dt\,(\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{A}\,(d\vec{B}/dt \times \vec{C}) + \vec{A}\,(\vec{B} \times d\vec{C}/dt)$

Das entstandene Feld ist ein Skalarfeld.

Jacobi-Matrix
Die Jacobimatrix ist die Matrixdarstellung der Ableitung in der Standardbasis von R^n und R^m. Wenn man alle Komponenten einer Funktion mehrerer veränderlichen partiell ableitet kann, ergibt das endgültige Ergebnis eine Matrixdarstellung und diese Darstellung wird Jacobimatrix bezeichnet. Somit kann man die Ableitung mit der Jacobimatrix identifizieren.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \equiv df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n \text{ , } h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n \text{ ist ein Vektor.}$$

Das bedeutet, dass die Jacobimatrix mit einer Zeile mit einem Vektor $\vec{h}$ durchmultipliziert wurde.

Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel für Felder
Produktregel: $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$ oder $(J(fg))(a) = G(a)(Jf)(a) + f(a)(Jg)(a)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ oder $\left(J\left(\frac{f}{g}\right)(a)\right) = \frac{1}{g(a)^2}\left[g(a)(Jf)(a) - f(a)(Jg)(a)\right]$

Kettenregel: Es sei $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ definiert

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ oder $(J(g \circ f))(a) = (Jg)(f(a))(Jf)(a)$

Integration eines Vektors
Vektoren werden komponentenweise integriert $\int \vec{A}(t)\, dt = \int A_x(t)\, dt\, \vec{e_x} + \int A_y(t)\, dt\, \vec{e_y} + \int A_z(t)\, dt\, \vec{e_z}$

Physikalische Anwendung
Geschwindigkeit und Beschleunigung
Bewegt sich ein Teilchen längs einer Kurve s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t, so versteht man unter der Geschwindigkeit

$ds/dt = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}$

Die Beschleunigung ist defniert als die 1.Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit

$a = dv/dt = d^2s/dt^2 = (dx/dt\, d^2x/dt^2 + dy/dt\, d^2y/dt^2 + dz/dt\, d^2z/dt^2) / \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}$

$= dx/ds\, d^2x/dt^2 + dy/ds\, d^2y/dt^2 + dz/ds\, d^2z/dt^2$

Teilgebiete der Differenzialgeometrie
Elementare Differenzialgeometrie
Elementare Differenzialgeometrie beschäftigt sich mit Kurven und zweidimensionalen gekrümmten Flächen im dreidimensionalen reellen Raum. Durch Arbeiten von Gauß wurde es möglich, die Krümmung auch quantitativ zu erfassen.
Das Problem der Minimalflächen führte ebenso zur Entwicklung der elementaren Differenzialgeometrie. Die in der Natur vorkommenden Seifenhäute lassen sich als Minimalflächen beschreiben. Die mathematische Darstellung dieser Flächen lässt sich dabei mit den Methoden aus der Variationsrechnung entwickeln.
Die geometrischen Eigenschaften dieser Flächen wie Krümmung oder Abstände zwischen beliebigen Punkten auf einer Minimalfläche werden mit den Methoden der Differenzialgeometrie berechnet.

Moderne Differenzialgeometrie
Die abstrakte Differenzialgeometrie entsteht aus der Beschreibung geometrischer Objekte ohne Rückgriff auf einen umgebenden Raum.
Wichtigster Begriff ist die differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein geometrisches Objekt, ein topologischer Raum, der lokal aussieht wie der n-dimensionale reelle Raum.
Für den Begriff der Differenzierbarkeit werden differenzierbare Abbildungen und differenzierbare Funktionen auf der Mannigfaltigkeit eingeführt.
Differenziale erhalten die Bedeutung von Derivationen, das sind Operatoren, die jedem Vektor eines Tangentialbündels die Ableitung der Funktion zuordnen.

Riemannsche Geometrie
Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es keine vordefinierte Längenmessung. Ist sie zusätzlich gegeben, spricht man von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diese Mannigfaltigkeiten sind Gegenstand der Riemannschen Geometrie, die auch die Begriffe der Krümmung, der kovarianten Ableitung und der Parallelverschiebung auf diesen Mengen untersucht.
»Kurven auf einer Kugel

Differenzialtopologie
Die Differenzialtopologie benutzt Mittel der Differenzialgeometrie und der Topologie zum Studium topologischer Eigenschaften der betrachteten Mannigfaltigkeiten.

Mannigfaltigkeit

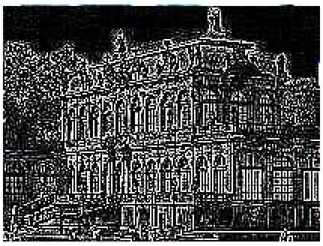
Unter einer Mannigfaltigkeit versteht man eine Punktmenge, deren Punkte auf n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen als die Koordinaten der Punkte umkehrbar eindeutig abgebildet sind.
Die Koordinaten können, wie die Parameter einer Kurve oder Fläche, umkehrbaren, genügend oft differenzierbaren Koordinatentransformationen unterworfen werden.
Nur jene Beziehungen zwischen den Koordinaten einer Mannigfaltigkeit haben geometrische Bedeutung, die von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen.

Algebraische Mannigfaltigkeit

Eine algebraische Mannigfaltigkeit ist eine Punktmenge eines projektiven Raumes, die durch ein System algebraischer Gleichungen definiert wird, denen die Koordinaten ihrer Punkte genügen.
Die algebraische Mannigfaltigkeit ist der grundlegende Begriff der modernen algebraischen Geometrie, der den eindimensionalen Begriff der Kurve und den zweidimensionalen Begriff der Fläche auf beliebige Dimensionen verallgemeinert.
Die algebraische Mannigfaltigkeit kann auch durch eine Parameterdarstellung charakterisiert werden, die Anzahl der zur Beschreibung notwendigen Parameter ist gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit.

Bildbearbeitung

Schwerpunkt der Bearbeitung von Bildern ist es, Fehler zu beheben, die beim Fotografieren oder anderen Bilderfassungen entstehen können, zum Beispiel Über- und Unterbelichtung, Unschärfe, Kontrastschwäche, Bildrauschen, Rote-Augen-Effekt, stürzende Linien usw. Durch diese Fehler wirken Bilder oft zu dunkel, zu hell, zu unscharf oder auf andere Art mangelhaft. Mit Hilfe von Filtern werden die vorhandenen Bilder verändert.
Insbesondere die Funktionsanalysis liefert dazu effiziente Verfahren.



Laplace-Filter

Der Laplace-Filter bzw. diskrete Laplace-Operator ist ein Filter zur Kantenerkennung, der den Laplace-Operator annähert.

$$\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$$

Unter einer Kante versteht man eine Kurve, entlang derer der Gradient des Bildes immer in Normalenrichtung zeigt. Eine Kante kann sich nur einstellen, wenn folgende Gleichung erfüllt ist

$$0 = \nabla(\nabla f) = \Delta f$$

Damit sucht man Nulldurchgänge eines Laplace-gefilterten Bildes. Der Laplace-Filter liefert dabei eine Obermenge der möglichen Kanten. Genutzt wird dabei ein Faltungsmaske der Form

$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

Diese Maske wird auf die einzelnen Bildpunkte angewendet. Im Ergebnis erhält man ein Bild, bei dem die Kanten deutlich hervortreten.