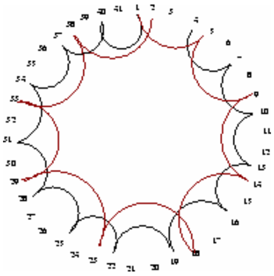
Logische Aufgaben und Spiele



Josephus-Problem

Der jüdische Historiker Josephus Flavius (37-95) berichtete davon, dass er mit 40 anderen Juden vor den Römern in einen Keller flüchtete. Um dem Feind nicht in die Hände zu geraten, beschlossen sie sich gegenseitig umzubringen; nur Josephus war dagegen. Deshalb schlug er vor, sich in einem Kreis aufzustellen und jeweils jeden Dritten auf der Stelle zu erschlagen. Da er sich "geschickt" in den Kreis stellte, blieb er als letzter übrig und überlebte. In Auswertung der Überlieferung bedeutet dies:
N Personen stehen in einem Kreis. Beginnend bei der ersten Person wird in Schritten von k abgezählt, wobei eine erreichte Person ausscheidet. Dies wird solange durchgeführt, bis nur noch eine Person übrigbleibt.
Kann die 1.Person die Schrittweite festlegen, so gelingt es ihr bei einer Vielzahl von Personenzahlen zu erreichen, dass sie selbst als Letzte übrigbleibt.
Für 60 Personen müsste sie z.B. eine Schrittweite von 34 festlegen; bei 59 Personen eine Schrittweite von 46 ... Allerdings gibt es bei z.B. 55 Personen keine solche Lösung.

Allerdings ist die von Josephus erfundene Geschichte über die Jahrhunderte inhaltlich verändert worden. Im Originaltext sind es mit ihm zusammen 40 Juden, die sich durch Losentscheid paarweise umbringen, bis er sich mit dem letzten "einigt". Die Abänderung der Gesamtzahl ist für die mathematische Behandlung "notwendig", da für 40 Personen keine optimale Abzählweite existiert.
Josephus wurde bekannt durch seine irrwitzigen Schilderungen von geschichtlichen Ereignissen, wie zum Beispiel dem Tod des Kaisers Titus. Historische Tatsachen ersetzte er gern durch sensationslüsterne, horrorartige, von ihm erfundene Erzählungen.

Die Aufgabe des Josephus ist in vielen Variationen überliefert. Spätere Geschichten handeln von Seefahrern, die im Sturm die Hälfte der Mannschaft über Bord werfen müssen. Die Frage ist dann, an welchen Positionen im Kreis die Plätze sicher sind.

Eine oft überlieferte historische Version handelt von 15 Christen und 15 "Ungläubigen" auf einem Schiff, jeder zehnte wird vom Kapitän ausgezählt, die nicht ausgezählte Hälfte der 30 Passagiere darf an Bord bleiben.
Die sicheren Positionen für die Christen (warum eigentlich die Christen?) ergeben sich, wenn wir C für Christen und X für Ungläubige setzen, die Folge der sicheren Positionen zu

XXXXCCCCCXXCXXXCXCCXXCCCXCCXXC

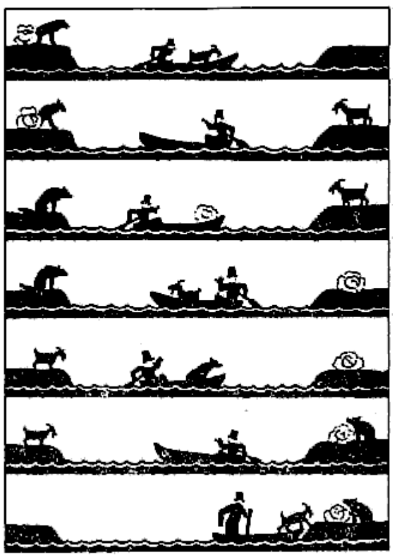
Im englischen Sprachraum ist das Rätsel als "Saint Peter's Game" überliefert. Hier werden 15 Whiskey-Trinker und 15 Abstinenzler betrachtet.
Wesentlich martialischer ist die mittelalterliche Variante "Ludus Sancti Petri". Hier geht es um 15 Christen und 15 Juden und entsprechend der reaktionären, katholischen Position sollen natürlich die Christen überleben. Eine jüdische Version von Ibrahim ben Meir Ezra favorisiert die Juden, eine arabische Version natürlich die Moslems.
In einer japanischen Variante will eine Stiefmutter ihre Stiefkinder los werden; auch nicht gerade harmlos. In Indien erzählt man von 15 ehrbaren Männern und 15 Dieben.

Derartige Rätsel waren früher beliebt. Man erdachte Merksprüche, um die sicheren Positionen dieses 'Ludus Josephus' leicht im Kopf behalten zu können. Setzt man A=1, E=2, I=3, O=4, U=5, so kann man die Anzahl der Teilgruppen mithilfe der Vokale in Worten verschlüsseln. Ein überlieferter deutscher Spruch ist

GOTT SCHUF DEN MANN IN AMALEK DER ISRAEL BEZWANG,

was die erste Gruppe 4 Zeichen, die zweite 5 Zeichen, die nächste 2 Zeichen usw. lang macht. Eine englischer Satz ist "From number's aid and art, never will fame depart."

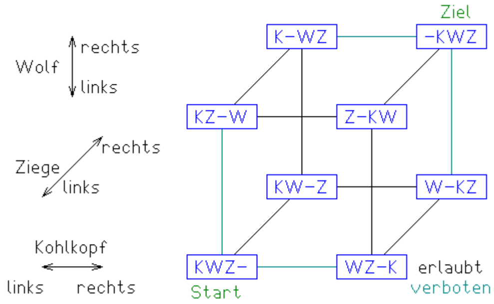
Ganz allgemein stellt man die Frage, in welcher Reihenfolge die Personen ausgeschieden werden. Werden die Personen durch die Zahlen 1, 2, 3, …, n dargestellt, so ist das Ergebnis eine Umsortierung dieser Liste. Mathematiker sprechen von der Josephus-Permutation L(n,k). Beim ursprünglichen Josephus-Beispiel wäre L(41,10) die Folge <10,20,30,40,9,21,…,16,31>



Ziege, Wolf und Kohlkopf

Alkuin, der Abt des Klosters St. Martin in Tours, war der Lehrer und Ratgeber Karls des Großen. Er hat ein Buch mit Rechen- und Denkaufgaben verfasst und erzählt darin diese Geschichte:
Am Ufer eines Flusses steht ein Mann mit einem Wolf, einer Ziege und einem Krautkopf. Er findet ein winziges Boot, worin außer ihm selbst

als Ruderer immer nur eines der drei mitgeführten Dinge Platz hat.
Der Mann steht nun also nicht nur am Ufer, sondern auch vor einem großen Problem: Den Wolf und die Ziege kann er nicht allein lassen, sonst zerreißt der eine die andere. Die Ziege und der Krautkopf dürfen aber auch nicht zusammen an einem Ufer bleiben, sonst frisst die Ziege das Gemüse.
Diese Aufgabe ist der Klassiker unter den Denkaufgaben!
Lösung: Zuerst bringt der Mann die Ziege ans andere Ufer und rudert allein wieder zurück. Dann nimmt der Mann den Kohlkopf mit ans andere Ufer und bringt die Ziege wieder zurück. Anschließend transportiert er den Wolf ans andere Ufer, rudert zurück und vollendet sein Werk, indem er zusammen mit der Ziege ans andere Ufer rudert.



Diese Aufgabe ist auch mittels Überlegungen der Graphentheorie lösbar.
Jede Ecke eines Würfels bedeutet einen Zustand, der angibt, auf welchen Seiten des Flusses (rechts/links vom Trennungsstrich in den Kästchen) der Kohlkopf (rechts/links), der Wolf (oben/unten) und die Ziege(hinten/vorne) sich befinden, die Kanten sind die Bootsfahrten, mit denen jeweils eins die Seite wechselt. Das Bild ist perspektivisch zu verstehen. Die grau gezeichneten Kanten sind die verbotenen Fahrten, bei denen es zu einer der zu vermeidenden Mahlzeiten kommen kann, die schwarzen Kanten zeigen genau die zwei Lösungen, die es zu diesem Rätsel gibt.

Die schweigenden Mönche

In einem sehr strengen Klosterorden, in dem alle Mönche schweigen und in keinster Weise miteinander kommunizieren, auch nicht nonverbal oder irgendwie anders, bricht eine schlimme Krankheit aus. Um die Gemeinschaft zu retten, bricht der Abt ausnahmsweise das Schweigen.
Er sagt: "Einige unserer Brüder sind krank, ich gehöre nicht dazu. Man erkennt die kranken Brüder an einem schwarzen Punkt auf der Stirn. Ich möchte, dass jeder der erkrankten Brüder an dem Tag, an dem er erkennt, dass er von der Krankheit befallen ist, sich um Mitternacht selbst tötet."
Leider kommt noch eine Schwierigkeit hinzu: Die Mönche ehren nur Gott und haben daher in ihrem Kloster keinen einzigen Spiegel, denn der könnte sie ja dazu verleiten, eitel zu werden.

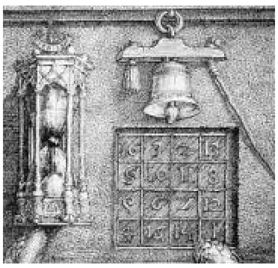
Lösung: Nehmen wir an, ich wäre ein Mönch. Sähe ich keinen einzigen Punkt, müsste ich mich selbst vernichten, weil "einige Brüder" wohl "mindestens einer" bedeuten soll. Sähe ich einen Punkt, so weiß ich, dass es noch einen mit einem Punkt geben muss, weil jener sich sonst umgebracht hätte. Also warte ich bis morgen und bringe mich gemeinsam mit dem anderen um, weil dieser genau wie ich schlussfolgert. Nach dem Induktionsprinzip folgt, dass, sehe ich n Punkte, ich mich am Tag n+1 umbringen muss, alle anderen auch. Am Tag n+1 sind alle Lebenden dann auch Gesunde.

Umfüllaufgabe

Aufgabe: Ein Winzer hat einen vollen Krug mit 8 Litern Wein und zwei leere Krüge, von denen einer 5, der andere 3 Liter fasst.
Ein Mann möchte exakt 4 Liter Wein kaufen. Der Bauer hat keine anderen Hilfsmittel als seine drei Krüge, um den Wein abzumessen. Wie oft muss er Wein von einem Krug in einen anderen gießen, um schließlich in den beiden größeren Krügen je 4 Liter zu haben?

Allgemeiner Algorithmus: Man fülle aus dem großen Krug in den kleinen, von dem kleinen Krug solange in den mittleren Krug bis dieser gefüllt ist.
Dann entleere man den mittleren Krug in den großen Krug und beginne von vorn, bis der Endzustand (Erfolg) oder bis der Anfangszustand (Mißerfolg) erreicht ist.
Quelle: Wolfgang Bartsch

Auf der rechten Seite werden die Umfüllungen berechnet und die Füllungen für den großen, mittleren und kleinen Krug angegeben. Dabei wird immer davon ausgegangen, dass der große Krug am Anfang voll gefüllt ist, die beiden anderen leer sind.
Die Kruggrößen und die Zielfüllungen sind durch Kommata getrennt einzugeben. Im Beispiel also
Kruggrößen 8,5,3



Zielfüllungen 4,4,0
Zu beachten ist, dass nicht stets eine Lösung existiert. Mit den Kruggrößen 8,5,3 und den Zielfüllungen 4,3,1 gibt es zum Beispiel keine Lösung.

Magische Quadrate

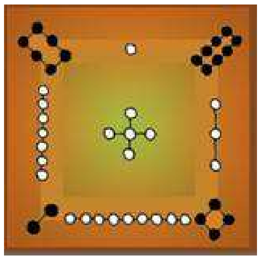
Unter einem magischen Quadrat der Ordnung n versteht man die Anordnung der Zahlen 1, 2, ..., n^2 in Form eines Quadrates, so dass die Summe der Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und der zwei Hauptdiagonalen den gleichen Wert; die Reihensumme; ergibt.

Das vielleicht berühmteste magische Quadrat befindet sich auf Albrecht Dürers "Melancholie" und enthält in der Mitte der untersten Zeile die Zahlen 15 und 14, welche das Jahr 1514 angeben, in welchem Dürer den Kupferstich erstellte.
Das älteste magische Quadrat "lo-shu" wurde 2200 v.Chr. (wahrscheinlicher 400 v.Chr.) in China bekannt. Anfang des 16.Jahrhunderts konstruierte Cornelius Agrippa magische Quadrate der Ordnung 3 bis 9.
Im Mittelalter wurden Sonne, Mond und die Planeten den magischen Quadraten zugeordnet. Ein 3x3-Quadrat nennt man Saturnquadrat, 4x4 Jupiterquadrat, 5x5 Marsquadrat, 6x6 Sonnenquadrat, 7x7 Venusquadrat, 8x8 Merkurquadrat und 9x9 Mondquadrat.
Für alle n>2 können magische Quadrate aufgestellt werden. Allerdings sind erst im 20.Jahrhundert Algorithmen entwickelt wurden, welche für jedes n wenigstens eine Lösung ermitteln.
Ein systematische Suche aller Lösungen scheitert schon ab n=5 an der riesigen Menge von zu testenden Möglichkeiten. Die vollständige Ermittlung aller magischen Quadrate für ein vorgegebenes n gehört zu den NP-Problemen.

Anzahl magischer Quadrate

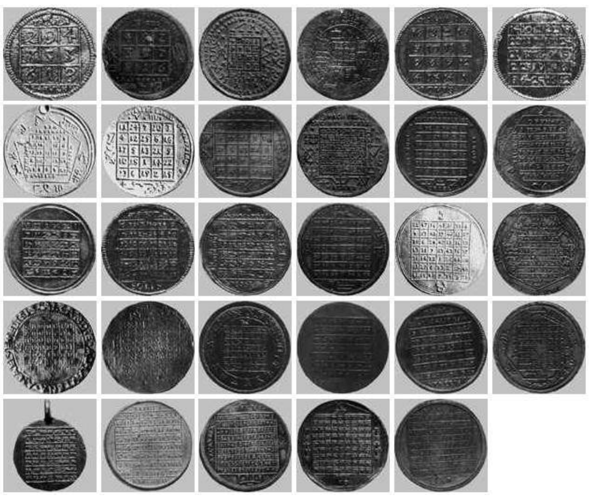
Durch Walter Trump wurde 2005 eine Liste mit den Anzahlen magischer Quadrate verschiedener Ordnung veröffentlicht. Dabei werden Quadrate, die durch Spiegelung bzw. Drehung auseinander hervorgehen nur einmal gezählt.
Ab der Ordnung 6 sind die Werte gegenwärtig noch Näherungswerte. Die genauen Zahlen sind noch nicht bekannt.

Ordnung	Anzahl	Ordnung	Anzahl
3	1	4	880
5	275 305 224	6	$1{,}775399 \cdot 10^{19}$
7	$3{,}79809 \cdot 10^{34}$	8	$5{,}2225 \cdot 10^{54}$
9	$7{,}8448 \cdot 10^{79}$	10	$2{,}4149 \cdot 10^{110}$
11	$2{,}3358 \cdot 10^{146}$	12	$1{,}1424 \cdot 10^{188}$
13	$4{,}0333 \cdot 10^{235}$	14	$1{,}5057 \cdot 10^{289}$
15	$8{,}052 \cdot 10^{348}$	16	$8{,}509 \cdot 10^{414}$
17	$2{,}314 \cdot 10^{487}$	18	$2{,}047 \cdot 10^{566}$
19	$8{,}110 \cdot 10^{651}$	20	$1{,}810 \cdot 10^{744}$
21	$2{,}6 \cdot 10^{843}$	22	$3{,}2 \cdot 10^{949}$
23	$3{,}9 \cdot 10^{1062}$	24	$5{,}9 \cdot 10^{1182}$
25	$1{,}3 \cdot 10^{1310}$	26	$4{,}9 \cdot 10^{1444}$
27	$3{,}8 \cdot 10^{1586}$	28	$7{,}2 \cdot 10^{1735}$
29	$3{,}8 \cdot 10^{1892}$	30	$6{,}5 \cdot 10^{2056}$



Lo-Shu-Quadrat

Das älteste nachgewiesene magische Quadrat ist das chinesische Lo-Shu-Quadrat aus dem 4.Jahrhundert v.Chr. Nach der chinesischen Legende hat Kaiser Yü der Große das Quadrat auf dem Rücken einer Schildkröte entdeckt, als sie aus dem Fluss Lo auftauchte. Daher auch der Name Lo-Shu-Quadrat. Dies soll, der Sage nach, im 23.Jahrhundert v.Chr. geschehen sein. Allerdings sind moderne chinesische Wissenschaftler der Meinung, dass das Lo-Shu erstmals um 400 v.Chr. erwähnt wird. Dieses älteste magische Quadrat hat als Quadrat der Ordnung 3 mehrere Besonderheiten. In den Ecken befinden sich nur gerade Zahlen. Einandergegenüberliegende Kästchen ergeben als Summe stets 10, d.h. das Doppelte des mittleren Kästchens.
Alle anderen magischen Quadrate der 3.Ordnung können durch Spiegelung bzw. Drehung aus dem Lo-Shu erzeugt werden. Diesem magischen Quadrat wurde in allen antiken Kulturen mystische Eigenschaften zugeschrieben. Die Juden nutzten das Quadrat um Gott Jahwe darzustellen, da die direkte Angabe von Name oder Bild verboten war. Die magische Zahl 15 des Quadrates beginnt im Hebräischen mit den gleichen ersten beiden Konsonanten wie Jahwe. Im Islam wurde das Lo-Shu als Wundermittel "genutzt". Der mittelalterliche islamische Theologe Al-Ghasali schreibt in "Der Erretter aus dem Irrtum":
"[Das Quadrat] wird auf zwei Stücke Tuch geschrieben, die niemals mit Wasser in Berührung kommen dürfen. Die Schwangere hält ihre Augen auf sie gerichtet und gibt sie unter ihre Füße, und unverzüglich wird das Kind herauskommen."
Derartige merkwürdige Vorstellungen, d.h. "Wissen, dass nicht nur durch vernünftiges Denken erlangt werden kann", waren im Mittelalter sehr beliebt und finden sich zum Beispiel auch in Dantes "Göttlicher Komödie".



Übrigens wurde das Symbol der Freimaurer auch aus dem Lo-Shu abgeleitet.

書洛

1	2	3
4	5	6
7	8	9

6	7	8
1	5	9
2	3	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Das Lo Shu ist das älteste bekannte magische Quadrat. Auf Grund seiner Einfachheit enthält es eine überraschende Vielfalt mathematischer Eigenschaften.
Einer der Ersten, die in Europa das magische Quadrat der Ordnung 3 betrachteten, war Adam Ries. In seinem sprichwörtlichen "Rechenbüchlin" (1578) gibt er auf Seite 71 diese Aufgabe und Lösung (siehe Abbildungen):

"Item/ einer gibt fürzusetzen zahlen/ die nach einander folgen/ wie hie/ daß uberall 15 werden. Wiltu solchs und dergleichen wissen/ so sprich allemal/ 15. gibt 5. in die mitte/ was gibt dann so viel du uberall haben wilt/ als hierinnen 15. kommen 5. die setz mitten/ und darnach fort/ also:
Und darnach verwechsel mit den 8. und 2. also/ so hastu allenthalben 15."
Adam Ries führt seine Aufgabe mit einem 3 x 3-Quadrat fort, dessen magische Summe auf 24 gebracht werden soll.

Yin und Yang

Aus Asien stammt das Prinzip des Yin und Yang. Dies kann am Lo Shu angewendet werden. In der Zahlenmystik werden mit den Zahlen Bedeutungen und magische Prinzipien verbunden, so unter anderem:

Yin - gerade Zahlen - weibliches Prinzip
Yang - ungerade Zahlen - männliches Prinzip

Beide Prinzipien stehen im Widerstreit und ergänzen sich; eines allein ist ohne das andere nicht überlebensfähig. Färbt man die Felder im Lo Shu entsprechend, so ergibt sich ein kreuzförmiges Schema. In den Ecken befinden sich die geraden Zahlen; die ungeraden bilden ein Kreuz.

書洛

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Eindeutigkeit des Lo Shu

Es gibt nur ein echtes Magisches Quadrat der Kantenlänge 3.
Durch Kraitchik wurde in "Mathematical Recreations" ein arithmetischer Beweis für die Eindeutigkeit des Lo Shu gegeben.
Ausgegangen wird von dem abgebildeten Quadratschema, das mit den Variablen a bis i belegt wird.
Wenn man die mittlere Zeile, die mittlere Spalte und die beiden Diagonalen addiert, erhält man die Bedingung: $3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 3e + 45 = 60$
Aus dem letzten Teil der Gleichung ergibt sich $e = 5$. Für harmonisch liegende Felder folgt aus der magischen Bedingung, dass $a + i = b + h = c + g = d + f = 10$
Nun wird untersucht, ob die 1 in einer Ecke liegen kann. Annahme: $a = 1$. Daraus folgt $i = 9$. Dies bedeutet aber auch, dass weder die 2, 3 oder 4 in derselben Zeile oder Spalte liegen können, wie die 1, da kein Wert mehr übrigbliebe, der groß genug ist, um die jeweilige Linie auf die magische Konstante 15 zu ergänzen.
Auf diese Art blieben nur zwei Positionen für die drei genannten Zahlen, was zu einem Widerspruch führt.
Deswegen muss die 1 auf einem Randfeld liegen. Man setze folglich $b = 1$ und damit zwangsweise $h = 9$.

Die 3 kann weder mit der 1 noch mit der 9 in einer Linie liegen, da entweder die Summe m nicht erreicht wird bzw. im Falle der 9 der zweite Summand ebenfalls 3 sein müsste.
Aus diesen Gründen kann die 3 in keinem der Eckfelder liegen. Man setzt folglich z.B. $d = 3$ und $f = 7$. Die restlichen Belegungen folgen zwangsweise aus der magischen Bedingung.
Die Freiheit beim Festlegen der Positionen für 1 und 3 führt zu 8 Varianten des Quadrates, die abgesehen von Drehung und Spiegelung identisch sind.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

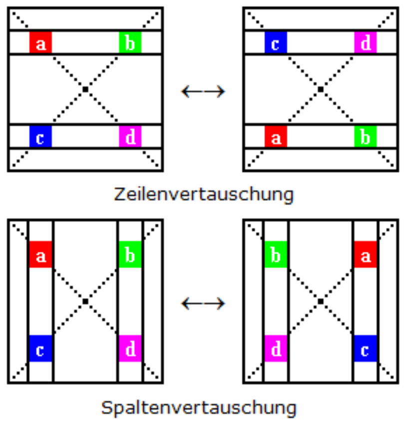
Geschichte der magischen Quadrate

Michael Stifel (1487-1567) war ein sehr bedeutender Rechenmeister. Stifel beschäftigte sich in seiner "Arithmetica integra" mit natürlichen, gebrochenen und irrationalen Zahlen und legte mit seinen Vorarbeiten das Fundament zu den Arbeiten Briggs und Napiers über die Logarithmen.
In seinem "Rechen Bichlein vom End Christ" gibt er ein magisches Quadrat der Kantenlänge 6 an, bei dem natürlich die Summe aller Zahlen gleich 666 ist.

In der religiösen Befangenheit des Mittelalters wurden den magischen Quadraten unterschiedlicher Kantenlängen Eigenschaften zugeschrieben. Außerdem wurden Amulette angefertigt, die zur Verstärkung ihrer Wirkung magische Quadrate enthielten. Um 1540 verfertigte Cornelius Agrippa von Nettesheim (Abbildung) magische Quadrate der Kantenlängen 3 bis 9 und ordnete ihnen die damals bekannten "Planeten" zu. In der Literatur spuken seither Abbildungen von magischen Talismanen herum. Die untere Abbildung zeigt das Lo-Shu-Quadrat und ein Saturnamulett der Kantenlänge 3.

Agrippa von Nettesheim behauptete einen Bezug zwischen Zahlensymbolik und dem Körper des Menschen. Die Ähnlichkeit des Diagrammes mit der klassischen quadratischen Darstellung eines Horoskopes ist beabsichtigt.

Die Jesuiten Athanasius Kircher (1601-1680) und Gaspar Schott (1608-1666) beschrieben ebenfalls magische Quadrate. Kircher war einer der ersten in Europa, der sich systematisch mit magischen Quadraten befasste.
In der "Technica Curiosa" zeigt Schott, basierend auf Aufzeichnungen Kirchers, mehrere magische Quadrate, darunter auch das Lo Shu. Bemerkenswert ist, dass Schott die Konstruktion magischer Quadrate gerader Kantenlänge beschreibt.



Vertauschung im magischen Quadrat

Da sich im magischen Quadrat alle Zeilen und alle Spalten jeweils zur magischen Summe addieren, und die Addition in den natürlichen Zahlen kommutativ ist, können Zeilen bzw. Spalten beliebig untereinander vertauscht werden, ohne dass sich die Summen ändern.
Allerdings werden hierbei auch Diagonalenelemente vertauscht, so dass das Quadrat in aller Regel nur noch semimagisch ist.
Werden hingegen Zeilen bzw Spalten symmetrisch bezüglich der jeweiligen Mittenachse vertauscht, bleibt das Quadrat magisch.
Eine zweite Vertauschungseigenschaft ist die der Quadratviertel. Abhängig davon, ob das Quadrat gerade oder ungerade ist, kann eines der beiden folgenden Schemata verwendet werden, um aus einem magischen Quadrat ein anderes magisches Quadrat zu erzeugen.
Quelle: http://www.hp-gramatke.de/magic_sq/index.htm

Magisches Quadrat 3.Ordnung

Ein magisches Quadrat 3.Ordnung ist ein magisches Quadrat mit drei Zeilen und Spalten.
Die Reihensumme ergibt sich mit $n = 3$ zu $S = n (n^2+1) / 2 = 15$
Die Summe aller Reihen des magischen Quadrates wird zu
$S = n^2 (n^2+1) / 2 = 45$
Ohne Berücksichtigung von symmetrischen Belegungen existieren genau 8 verschiedene magische Quadrate 3.Ordnung.
2 7 6 2 9 4 4 3 8 4 9 2 6 1 8 6 7 2 8 1 6
8 3 4 9 5 1 7 5 3 9 5 1 3 5 7 7 5 3 1 5 9
3 5 7 1 5 9 4 3 8 6 1 8 2 7 6 8 1 6 2 9 4
8 3 4 4 9 2 6 7 2
Berücksichtigt man die Symmetrie (Spiegelung an den Diagonalen, Tauschen von Zeilen oder Spalten usw...), so gibt es nur 1 magisches Quadrat der 3.Ordnung. Besonderheiten für $n = 3$ sind z.B. das zentrale Element wird stets von der Zahl 5 gebildet,
die Summe zweier Elemente, welche symmetrisch zum Mittelelement liegen ist stets 10
Verzichtet man auf die Forderung, dass auch die Diagonalensumme = 15 ist, d.h. die Forderung gilt nur noch für die Zeilen und Spalten, so existieren 72 (zueinander symmetrische) verschiedene Möglichkeiten.

Magisches Quadrat 4.Ordnung

Ein magisches Quadrat 4.Ordnung ist ein magisches Quadrat mit vier Zeilen und Spalten.
Die Reihensumme ergibt sich mit $n = 4$ zu $S = n (n^2+1) / 2 = 34$
Die Summe aller Reihen des magischen Quadrates wird zu $S = n^2 (n^2+1) / 2 = 136$
Ohne Berücksichtigung von symmetrischen Belegungen existieren genau 7040 verschiedene magische Quadrate 4.Ordnung, von denen rund 400 in der Tabelle enthalten sind.
Fordert man nur die Reihensumme von 34 für die Zeilen und Spalten, nicht aber für die Diagonalen, existieren genau 549144, zum größten Teil symmetrische Lösungen.

erste Belegungen für magische Quadrate der 4.Ordnung

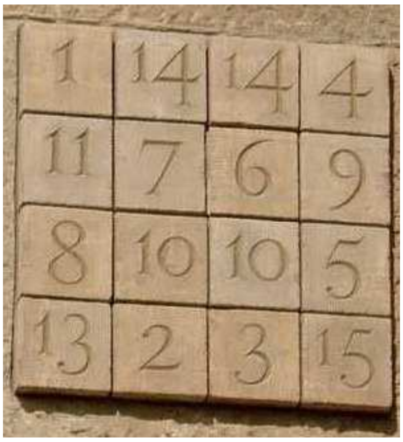
1 12 13 8 2 14 7 11 15 3 10 6 16 5 4 9
1 13 12 8 2 14 7 11 15 3 10 6 16 4 5 9
1 13 12 8 2 14 7 11 16 4 9 5 15 3 6 10
1 10 15 8 3 13 6 12 14 4 11 5 16 7 2 9
1 12 15 6 3 13 8 10 14 4 9 7 16 5 2 11
1 15 10 8 3 13 6 12 14 4 11 5 16 2 7 9
1 15 12 6 3 13 8 10 14 4 9 7 16 2 5 11
1 8 13 12 3 15 6 10 16 2 11 5 14 9 4 7
1 12 13 8 3 15 10 6 16 2 7 9 14 5 4 11
1 13 8 12 3 15 6 10 16 2 11 5 14 4 9 7

Dürers magisches Quadrat

Das wahrscheinlich berühmteste magische Quadrat befindet sich auf Albrecht Dürers "Melancholie" und enthält in der Mitte der untersten Zeile die Zahlen 15 und 14, welche das Jahr 1514 angeben, in welchem Dürer den Kupferstich erstellte.

In diesem symmetrischen magischen Quadrat findet man die magische Summe von 34 nicht nur in den Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen, sondern auch in einer Vielzahl weiterer symmetrische Strukturen:
Die Summe der Elemente der vier Quadranten ist jeweils die magische Zahl 34. Auch die Summe der vier Eckfelder und der vier Zentrumsfelder ist jeweils 34.
Auch die Summe der vier Felder, die jeweils von den vier Eckfeldern um 1 oder um 2 im Uhrzeigersinn weiterversetzten Felder ist jeweils 34 (8+14+9+3 und 12+15+5+2). Auch die Summe der in Form eines Drachenvierecks angeordneten Elemente (z. B. 2+10+8+14; 3+9+7+15) ist 34, usw.
siehe dazu »Dürer-Quadrat
Diese magische Summen bleiben auch erhalten, wenn man das Quadrat

1) in der Mitte waagerecht oder senkrecht spiegelt
2) an den Hauptdiaogonalen spiegelt oder
3) um jeweils 90° dreht

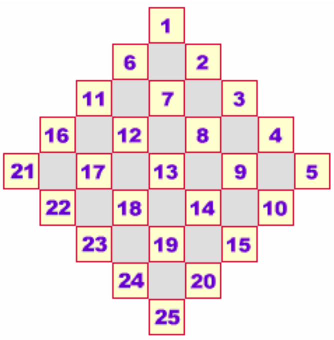


Subirachs magisches Quadrat

Temple Expiatori de la Sagrada Família; Sühnekirche der Heiligen Familie; ist der Name einer katholischen Basilika in Barcelona. Die im neukatalanischen Stil von Antoni Gaudí entworfene Kirche wurde 1882 begonnen, jedoch bis heute nicht vollendet.
Die Westfassade, Passionsfassade genannt, unterscheidet sich von den anderen Fassaden dahingehend, dass sie kaum Verzierungen enthält und mit klaren, geometrischen Linien und großen Figuren sehr übersichtlich aufgebaut ist.

An dieser Fassade wurde 1927 durch den berühmten Bildhauer Josep Maria Subirach ein magisches Quadrat angebracht. Die Zahlenbelegung ist in der Abbildung zu sehen.
Dabei handelt es sich um ein 180° gedrehtes Dürer-Viereck der "Melancholie". Zusätzlich hat der Künstler je Zeile und Spalte einen Zahl verkleinert, so dass die 14 und 10 zweimal auftreten.
Subirach beabsichtigte so auf eine magische Konstante 33 zu kommen, um damit auf das Lebensalter des mythologischen Jesus zu kommen. Die Summe 33 findet sich mehrfach in dem Quadrat:

Zusätzlich ergeben die doppelten Zahlen in der Summe 10+10+14+14 = 48. Die 48 ist wiederum die Zahlensumme des Wortes INRI in Katalanisch.
Darüber hinaus wurden viele, teilweise abstruse, Deutungen dieses Quadrates vorgenommen.



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Methode von Bachet

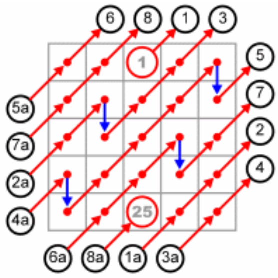
Magische Quadrate, deren Kantenlänge eine ungerade Zahl ist, lassen sich konstruktiv am einfachsten anfertigen. Am Beispiel des 5 x 5 -Quadrates werden auf den nächsten Seiten die bekannten Konstruktionsverfahren beschrieben.

Methode von Bachet

Diese Methode, auch indische Methode genannt, wird eingehend von Bischoff beschrieben. Manche Autoren geben dem Verfahren den Namen Treppenhausmethode oder Terrassenmethode.

Man geht von einem leeren 5 x 5 -Feld aus und setzt an jeder Seite eine dreieckige Anordnung von Feldern an.
Danach werden systematisch die Zahlenwerte von 1 bis n², im Beispiel 25, von oben beginnend, in diagonaler Abfolge in die freien Felder geschrieben. Auf diese Weise bleibt jedes zweite Feld ungenutzt.
Im nächsten Schritt werden die an den Seiten angesetzten Teile auf die jeweils gegenüberliegende Lücke verschoben.

Die ungeraden natürlichen magischen Quadrate, die nach dieser Methode konstruiert werden, haben die zusätzliche Eigenschaft, dass die Summe zweier harmonischer Felder, d.h. Felder die punktsymmetrisch zum Mittelfeld liegen, gleich n² + 1 ist.



17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Methode von de LaLoubère

De LaLoubère war ein französischer Gesandter, der 1687-1688 im Auftrage Ludwigs XIV. in Siam weilte. In seinem Buch "Du royaume de Siam" beschrieb er das hier wiedergegebene Verfahren. De LaLoubère führte den Begriff des "carrée magique" in die französche Sprache ein.

Die Methode geht von einem leeren Quadratschema aus und benutzt folgendes Regelwerk:
1) Das Quadratschema wird als allseitig zyklisch geschlossen betrachtet
2) Startfeld ist das Mittelfeld der obersten Zeile
3) Die Felder werden diagonal fortlaufend nach rechts oben numeriert
4) Wenn der Rand des Quadrates erreicht wird, wird zyklisch geschlossen fortgesetzt
5) Wenn ein bereits belegtes Feld oder das rechte obere Eckfeld erreicht werden, wird um 1 Feld senkrecht nach unten fortgesetzt

Methode von Frénicle

Eine Methode, gerade und ungerade magische Quadrate zu erzeugen, geht auf Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675) zurück.
Bei dieser Methode wird von der Kantenlänge des Zielquadrates ausgegangen.
So entsteht z.B. ein 7x7-Quadrat aus einem 5x5-Quadrat.
Begonnen wird mit einem magischen Quadrat; gerade oder ungerade; der Kantenlänge n-2. Darauf basierend wird ein Rahmenquadrat der Kantenlänge n konstruiert:

1) ein leeres Quadratschema der Länge n wird angelegt
2) anschließend werden die Werte aller Zellen des Ursprungsquadrates um 2n-2 erhöht und in das mittlere n-2-Quadret des leeren Schemas geschrieben. Es verbleibt ein freier Rand der Breite 1
3) die Zahlenwerte 1, 2, …, 2n-2 und n^2, n^2-1, …, n^2-2n-3 werden so in die leeren Randzellen eingetragen, dass die magische Bedingung erfüllt ist
4) für die nneren Zeilen, Spalten und die Diagonalen wird dies erreicht, indem die jeweils komplementären Werte wie z.B. n und n^2 in jeweils gegenüberliegenden Randzellen; waagerecht, senkrecht, diagonal; liegen
5) da die magische Bedingung erfüllt sein muss, werden die Wertepaare der Randzellen solange probeweise vertauscht, bis in den Randzeilen, Randspalten und den Diagonalen die magische Summe n (n^2+1) / 2 resultiert

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Ausgangsquadrat

46	1	2	3	42	41	40
45	23	36	19	32	15	5
44	16	24	37	20	28	6
7	29	17	25	33	21	43
12	22	30	13	26	34	38
11	35	18	31	14	27	39
10	49	48	47	8	9	4

resultierendes Quadrat

Nachteil des Verfahrens ist der nicht algorithmische Ansatz, der den Konstruktionserfolg von einer Versuch-und-Irrtum-Methode abhängig macht.
Ein vergleichbares Konstruktionsverfahren gibt Vagetius in "De quadrato magico imparii" (1695) an.

2	3	20	21	24
23	13	18	11	5
22	12	14	16	6
19	17	10	15	9
4	25	8	7	26

Stifelsches magisches Quadrat

Auf Michael Stifel (1487-1567) geht die Konstruktion spezieller magische Quadrate zurück.
So konstruierte er vor allem solche Quadrate, bei denen innere Quadrate ebenfalls magisch sind.
Das links abgebildete Stifelsche magische Quadrat ist von der Ordnung 5. Das innere Quadrat der Ordnung 3 ist erneut magisch.

Hendricks magisches Quadrat

Durch John R.Hendrick wurde ein magisches Quadrat konstruiert, in dem weitere magische Quadrate enthalten sind.
Das äußere magische Quadrat hat die Ordnung 9 mit einer magischen Konstanten 369. Da die Zahlen 1 bis 81 verwendet werden, liegt ein magisches Quadrat im eigentlichen Sinne vor.
In dieses Quadrat sind weitere magische Quadrate der Ordnung 7 (Konstante 287), der Ordnung 5 (Konstante 205) und der Ordnung 3 mit der Konstanten 123 integriert.
Das magische Quadrat der Ordnung 3 ist dabei um 45° gedreht.
Durch J.R.Hendricks wurde noch ein größeres magisches Quadrat mit eingelegten weiteren Quadraten gefunden ("Magic square course", Seite 290-294).

32	6	22	13	51	67	58	78	42
28	14	70	20	17	66	56	44	54
48	80	9	77	43	75	1	2	34
47	64	37	57	63	21	27	18	35
33	11	23	3	41	79	59	71	49
53	8	55	61	19	25	45	74	29
52	72	81	7	39	5	73	10	30
36	38	12	62	65	16	26	68	46
40	76	60	69	31	15	24	4	50

Magische Quadrate höherer Ordnung

Reihensumme S = n (n^2+1) / 2
Summe aller Reihen S = n^2 (n^2+1) / 2

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

1	48	19	77	30	94	86	35	62	53
87	12	58	29	71	40	95	46	3	64
96	81	23	68	39	72	50	57	14	5
60	97	82	34	8	49	73	61	25	16
74	70	91	83	45	18	59	2	36	27
69	75	10	92	84	56	28	13	47	31
38	9	76	20	93	85	67	24	51	42
15	26	37	41	52	63	4	78	89	100
22	33	44	55	66	7	11	90	98	79
43	54	65	6	17	21	32	99	80	88

von links oben nach rechts unten:
Ordnung 5,
Reihensumme = 65

Ordnung 7,
Reihensumme = 175
Ordnung 6,
Reihensumme = 111
Ordnung 6,
Reihensumme = 111

Ordnung 8
Reihensumme = 260
Ordnung 10; Reihensumme = 505

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Ordnung 5, Reihensumme = 65

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Ordnung 7, Reihensumme = 175

1	32	33	4	35	6
12	8	27	28	11	25
18	17	22	21	20	13
19	23	16	15	14	24
30	26	10	9	29	7
31	5	3	34	2	36

Ordnung 6, Reihensumme = 111

1	33	9	34	32	2
6	26	12	13	23	31
10	15	21	20	18	27
29	19	17	16	22	8
30	14	24	25	11	7
35	4	28	3	5	36

Ordnung 6, Reihensumme = 111

Eigenschaften magischer Quadrate

Reihensumme S = n (n^2+1) / 2
Summe aller Reihen S_Q = n^2 (n^2+1) / 2
Die Reihensummen der magischen Quadrate bilden eine arithmetische Folge 3.Ordnung

n 3 4 5 6 7 8 9 10 11
S 15 34 65 111 175 260 369 505 671
19 31 46 64 85 109 136 166
12 15 18 21 24 27 30
3 3 3 3 3 3

Die Summe aller Reihen der magischen Quadrate bilden eine arithmetische Folge 4.Ordnung

n 3 4 5 6 7 8 9 10 11
S_Q 45 136 325 666 1225 2080 3321 5050 7381
91 189 341 559 855 1241 1729 2331
98 152 218 296 386 488 602
54 66 78 90 102 114
12 12 12 12 12

Bisher ist noch kein Verfahren bekannt, mit dem die Anzahl nichtsymmetrischer magischer Quadrate einer beliebigen Ordnung n ermittelt werden kann. Nach Madachy gibt es für n = 5 genau 275305224 Möglichkeiten. 1998 ermittelten Pinn und Wieczerkowski für n = 6 den Näherungswert (1,7745 ± 0,0016) * 10^{19}.
Ein magisches Quadrat, welches nur Primzahlen enthält, stammt von Dudeney (1970):

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

Die Reihensumme eines magischen Grades der Ordnung n, welches die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge mit dem Angangsglied a und der Differenz d enthält ist nach Hunter und Madachy (1975): = n/2 [2a + d (n^2 -1)]
Magische Quadrate, bei denen die magische Zahl durch Multiplikation der Glieder einer Spalte bzw. Reihe gebildet wird, existieren und werden multiplikative magische Quadrate genannt.
Überraschenderweise existieren auch magische Quadrate die sowohl bei der Addition als auch bei der Multiplikation in den Reihen und Spalten konstante Werte liefern.

Konstruktion eines magischen Quadrates der Ordnung 4 mit einer frei wählbaren Zeilensumme Z

Am 5.Oktober 2002 wurde ein Kandidat aus Österreich mit einer mathematischen Wette zum Wettkönig bei „Wetten dass" gewählt. Er konstruierte in wenigen Minuten ein magisches Quadrat der Ordnung 4, welches eine vorher zufällig ausgewählte sechsstellige Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme besitzen sollte.
Da die Auswahl des Wettkönigs durch die Zuschauer erfolgt, werden wohl viele Millionen fasziniert auf diese „große" mathematische Leistung gesehen haben. Aber! Die vorgeführte Leistung entpuppt sich schnell als ein seit mehreren Jahrzehnten immer wieder gezeigtes Kunststückchen und beruht auf nichts anderem als einer einfachen Division durch 4!
Ausgangspunkt ist das Quadrat

8	11	14	1
13	2	7	12

3	16	9	6
10	5	4	15

1.Schritt: (Zeilensumme Z - 30) : 4 = A Rest B, d.h. relativ einfaches Kopfrechnen
2.Schritt: beginnend bei 1 wird A eingetragen, bei 2 A+1, bei 3 A+2 usw.
3.Schritt: ist der Rest B nicht 0, so werden die Felder mit den Ausgangszahlen 13, 14, 15 und 16 zusätzlich noch mit B addiert
Beispiel mit Zeilensumme Z = 574385
1.Schritt: (574385 - 30) : 4 = 143588 Rest 3
2.Schritt: es entsteht das Quadrat

143595	143598	143601	143588
143600	143589	143594	143599
143590	143603	143596	143593
143597	143592	143591	143602

3.Schritt: da B = 3 ist, werden die ursprünglichen Felder mit 13 bis 16 noch um 3 erhöht

143595	143598	143604	143588
143603	143589	143594	143599
143590	143606	143596	143593
143597	143592	143591	143605

Das magische Quadrat hat die gesuchte Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme. Die vier äußeren und inneren Felder ergeben in der Summe ebenfalls die 574385.
Sollen die Zahlen nicht „so gleich groß" aussehen, subtrahiert man z.B. in den Ausgangsfeldern 1, 2, 3 und 4 evtl. 20000 und addiert dies zu den Feldern 5, 6, 7 und 8 oder auch 9 bis 12 usw.

Pascal-Programm zum Magischen Quadrat

Berechnung eines Magischen Quadrates ungerader Ordnung

```
PROGRAM Magisches_Quadrat;
VAR quadrat : ARRAY[1..19,1..19] OF integer; {Feld zur Speicherung der Zahlen} i,j,n,m : integer;
BEGIN
  writeln('Magisches Quadrat');
  {Kantenlänge muss für diesen Algorithmus ungerade sein} write('Kantenlänge (ungerade): ');
readln(n);
  {Maximale und minimale Feldgrenze beachten}  IF (1<=n) AND (n<=19) AND odd(n)
  THEN  BEGIN
    {eigentlicher Algorithmus}    i:=1;    j:=(n+1) DIV 2;    quadrat[i,j]:=1;
    FOR m:=2 TO n*n DO     BEGIN      IF (m-1) MOD n = 0      THEN i:=i+1
      ELSE      BEGIN        IF i=1 THEN i:=n ELSE i:=i-1;        j:=j+1;        IF j>n THEN j:=1      END;
      quadrat[i,j]:=m     END;
    {Ausgabe der Feldbelegung}
    FOR i:=1 TO n DO     BEGIN     FOR j:=1 TO n DO write(quadrat[i,j]:4);     writeln    END;  END
  ELSE writeln('Kantenlänge falsch'); END.
```

0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

1	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0

0	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
0	0	0	1

0	1	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	0	0	0

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

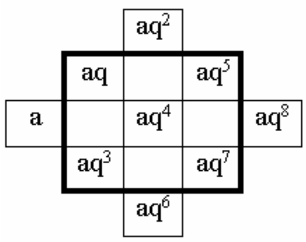
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

Für magische Quadrate gelten folgende Rechengesetze:

1) Durch feldweises Addieren bzw. Subtrahieren zweier magischer Quadrate erhält man wieder ein magisches Quadrat.
2) Durch feldweises Multiplizieren einer Zahl mit einem magischen Quadrat erhält man wieder ein magisches Quadrat.

Wenn man nun alle möglichen magischen Quadrate mit der Zeilen- und Spaltensumme 1 als „Baukasten" benutzt, ist es kein Problem, jedes beliebige Geburtsdatum als Linearkombination dieser acht Quadrate darzustellen.
Beispiel: Nummeriert man nun die Quadrate der Reihe nach von Q(1) bis Q(8) durch und bildet folgende Linearkombination 5xQ(1) + 1xQ(2) + 11xQ(3) + 3xQ(5) + 1xQ(6) + 9xQ(7) + 4xQ(8), dann erhält man ein magisches Quadrat, in dessen unterster Zeile das Datum 8.2.2004.



Magische Quadrate aus geometrischen Folgen

Magische Quadrate, bei denen nicht die Summe, sondern das Produkt der Zeilen, Spalten und Diagonalen konstant ist, können aus geometrischen Zahlenfolgen konstruiert werden.
Ist zum Beispiel eine geometrische Zahlenfolge a, a q, a q², ..., a q^8 gegeben, so zeigt das nebenstehende Schema, wie ein magisches Quadrat konstruiert werden kann. Die magische Konstante beträgt dann $S = (a\,q^4)^3$.

aq	aq^6	aq^5
aq^8	aq^4	a
aq^3	aq^2	aq^7

Für a = 1 und q = 2 erhält man:

2	64	32
256	16	1
8	4	128

Verwendet man zur analogen Konstruktion eine arithmetische Zahlenfolge als

Ausgangswert, so entsteht ein klassisches magisches Quadrat, bei dem wieder die Reihensummen konstant sind.

Größtes magisches Quadrat

International wird ein Wettbewerb durchgeführt das größte magische Quadrat zu konstruieren.
Die Regeln: Das magische Quadrat muss auf Papier geschrieben oder gedruckt werden. Es reicht nicht aus, es lediglich mit einem Computer zu berechnen. Das magische Quadrat kann aus mehreren Stücken Papier zusammengesetzt werden, jedoch müssen diese Papierstücken aneinandergelegt werden und so ein einheitliches Quadrat bilden. Die Form des ausgelegten Zahlenschemas muss ein Quadrat (nicht irgendein beliebiges Rechteck) sein. Der Nachweis, dass die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale dieselbe ist, muss ein Testlauf des verwendeten Computerprogramms erbringen. Dieser muss unter der Aufsicht eines Mathematikers/ Computerspezialisten erfolgen, der prüfen kann, dass das Programm korrekt ist.

Weltrekorde 1975 bis heute

105 X 105	Richard Suntag (Pomona, USA) 1975
501 X 501	Gerolf Lenz (Wuppertal, BRD) 1979
897 X 897	Frank Tast, Uli Schmidt (Pforzheim, BRD) 1987
1000 X 1000	Christian Schaller (München, BRD) 1988
1111 X 1111	Norbert Behnke (Krefeld, Deutschland) 1990, größtes handgeschriebenes magisches Quadrat
2001 X 2001	Sven Paulus, Ralph Bülling, Jörg Sutter (Pforzheim, BRD) 1989
2121 X 2121	Ralf Laue (Leipzig, Deutschland) 1991
3001 X 3001	Louis Caya (Sainte-Foy, Kanada) 1994

Ein Quadrat ist halbmagisch, pseudo-magisch oder teilmagisch (semi-magic), wenn nur die Zahlen in den Zeilen und Spalten die gleiche Summe haben. Das lateinische Quadrat, das nur aus drei Zahlen besteht und das in jeder Zeile und Spalte eine andere Zahl hat, ist halbmagisch.

Hexeneinmaleins

In "Faust, Tragödie 1.Teil" gibt Johann Wolfgang von Goethe sein berühmtes Hexeneinmaleins an. Dies ist eine Beschreibung für ein magisches Quadrat der Ordnung 3. Allerdings werden die Einträge 1 und 9 durch die 0 und 10 ersetzt.
Mephisto führt Faust in die Hexenküche, wo er das rätselhafte Hexeneinmaleins vernimmt und kommentiert:
Faust: "Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber."
Mephisto: "Das ist noch lange nicht vorüber, …"

Aus Eins mach Zehn
im magischen Quadrat 3x3 wird an die 1.Stelle statt 1 eine 10 eingesetzt
Und Zwei lass gehen
die 2 bleibt an der Stelle stehen.
Und Drei mach gleich
auch die 3 bleibt gleich, also an der genannten Stelle.
So bist du reich.
man ist reich an Wissen: die Summe jeder Zeile ist 15
Verlier die Vier!
die 4 fällt weg, d.h. sie wird 0
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach Sieben und Acht
an Stelle der 5 und 6 werden 7 und 8 eingesetzt.
So ist's vollbracht:
die verbleibenden freien Stellen werden zur Summe 15 ergänzt
Und Neun ist Eins,
das Hexeneinmaleins füllt 9 Felder – es ist also ein magisches Quadrat.
Und Zehn ist keins.
ein magisches Quadrat mit 10 Feldern gibt es nicht – es ist also keins.
Das ist das Hexen-Einmaleins.

<u>Das Hexeneinmaleins</u>

Du musst verstehn!
Aus Eins mach Zehn,
Und Zwei lass gehen,
Und Drei mach gleich,
So bist Du reich.
Verlier die Vier!
Aus Fuenf und Sechs,
So sagt die Hex,
Mach Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins,
Das ist das Hexen-Einmaleins.
(Johann Wolfgang von Goethe)

10	2	3
0	7	8
5	6	4

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Dudeney

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

Bergholt/Shuldham

17	113	47
89	59	29
71	5	101

M.Gardner

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

Allen W.Johnson

1480028201	1480028129	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

Primzahlquadrate

Aufgabe: Man soll ein Quadrat mit magischen Eigenschaften konstruieren, dessen Zellen ausschließlich Primzahlen enthalten.
Die 1 ist nach Definition keine Primzahl! Dessen ungeachtet sind um

1910 magische Quadrate angegeben worden, die neben der 1 nur Primzahlen enthalten (obere Abbildungen).
Im strengen Sinne ist die Aufgabe schon für ein 3x3-Quadrat nicht einfach zu lösen. Beispiele für ein 3x3-Quadrat und ein 4x4-Quadrat sind als mittlere Abbildungen zu sehen.

Die Aufgabenstellung, ein Primzahlquadrat zu konstruieren, lässt sich verstärken:
Konstruiere ein magisches Quadrat, dessen Zellen aufeinanderfolgende Primzahlen enthalten. 1986 setzte Martin Gardner für die Lösung eine Prämie von 100 Dollar aus. Es dauerte nur bis 1987, bis Nelson mit Computerhilfe das unten dargestellte Quadrat fand.
Bis heute ist noch nicht gezeigt, ob bzw. dass dieses Primzahlquadrat das kleinste ist, das aus aufeinander folgenden Primzahlen besteht.

9	1	3	3
1	5	8	3
7	5	2	9
3	9	1	1

1	3	9	3	3
1	3	4	5	7
7	6	4	0	3
7	4	8	9	7
7	1	3	9	9

29	1061	179	227
269	137	1019	71
1049	101	239	107
149	197	59	1091

31	1063	181	229
271	139	1021	73
1051	103	241	109
151	199	61	1093

In den oberen zwei magischen Quadraten sind Mirpzahlen so eingetragen, dass jede Zeile, Spalte und Diagonale vorwärts und rückwärts gelesen eine Primzahl darstellt.

Das untere Paar magischer Quadrate wurde von Leo Moser (Universität in Edmonton) konstruiert.
Es hat die Eigenschaft, dass in entsprechenden Feldern immer Primzahlzwillinge stehen. Zusätzlich ergibt die Summe der Zahlen in den 2×2-Teilquadraten die jeweils magische Summe 1496 bzw. 1504.

Den Weltrekord im Bau von magischen Quadraten aus Primzahlen hält ein US-amerikanischer Gefangener, der um 1960 seine Zeit damit verbrachte, sechs ineinandergeschachtelte magische Quadrate angefangen mit der Reihensumme 16311 (3×3) bis zu einem 13×13-Quadrat mit den Konstanten 70681 zu konstruieren. Jedes Mal steigt die Reihensumme um 10874.

281	409	311	419	283
359	379	349	347	269
313	307	389	293	401
397	331	337	271	367
353	277	317	373	383

37	83	97	41
53	61	71	73
89	67	59	43
79	47	31	101

Die oberen beiden magischen Quadrate bestehen aus aufeinander folgenden Primzahlen.
Ihre magischen Summen sind 1703 (5×5) bzw. 258 (4×4).

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Das untere magische Quadrat ist ein apokalyptisches magisches Quadrat. Es wurde von A.W. Johnson gefunden.
Alle Einträge sind Primzahlen. Die Summe jeder Reihe, Spalte, Diagonalen und jeder gebrochenen Diagonalen beträgt 666.

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

Magische Quadrate und Quadratzahlen

Für bestimmte Ordnungen n, n > 7, kann man magische Quadrate konstruieren, die nach dem Quadrieren jedes Eintrages wieder ein magisches Quadrat ergeben.
Rouse Ball gibt in seinen "Mathematical Recreations and Essays" das Beispiel eines Quadrates von M. Schots.
Dieses abgebildete Quadrat hat die magische Summe m = 260; die magische Summe der Quadrate ist 11180.

Magische Quadrate und Kubikzahlen

Die Frage ist, ob es möglich ist, ein magisches Quadrat aufzustellen, bei dem die magische Eigenschaft erhalten bleibt, wenn alle Einträge quadriert werden und wenn sie zur dritten Potenz erhoben werden. Dies ist möglich. Bisher sind zwei Beispiele bekannt, die die Ordnung 64 (Cazalas, 1934) und 32 (W. Benson) haben. Die Frage, ob dies auch für höhere Potenzen als 3 durchführbar ist, wurde bisher noch nicht bearbeitet.

A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

14	04	15	01
11	05	10	08
02	16	03	13
07	09	06	12

Panmagische Quadrate

... magische Quadrate, bei denen die Diagonalensumme nicht nur für die Hauptdiagonalen der magischen Zahlen entspricht, sondern für alle Diagonalen. Dabei laufen die zu betrachtenden Diagonalen z.B. wie in der Abbildung gezeigt (gleiche Buchstaben gehören zu Diagonalen von links oben nach rechts unten; gleiche Hintergrundfarben zu Diagonalen von rechts oben nach links unten). Das bekannte Dürer-Quadrat ist panmagisch.

Ein Quadrat ist pandiagonal, wenn es magisch ist und wenn nicht nur die Zahlen in den Hauptdiagonalen, sondern auch in den "gebrochenen" Diagonalen die gleiche Summe haben.
Das nebenstehende magische Quadrat ist pandiagonal und panmagisch.
Ein Quadrat ist assoziativ, wenn es magisch ist und wenn symmetrisch zur Mitte liegende Zahlenpaare die gleiche Summe haben, nämlich $26=5^2+1$, allgemein n^2+1. Das magische Quadrat Lo Shu ist assoziativ.
Selbstähnlich ist ein magisches Quadrat, wenn nach Ersetzung der Zahlen durch das Komplement; Subtraktion von n+1; ein magisches Quadrat entsteht, dass durch Drehung um 180° in das Ausgangsquadrat übergeht.

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Pandiagonales Quadrat

Ein spezielles pandiagonales, assoziatives und selbstähnliches magisches Quadrat 5.Ordnung ist das links abgebildete. Mehrere Möglichkeiten zur Konstruktion der magischen Zahl 65 sind gegeben:

1) 5 Zeilen, z.B. 1, 15, 24, 8, 17
2) 5 Spalten, z.B. 1, 23, 20, 12, 9
3) 10 Diagonalen, z.B. 1, 7, 13, 19, 25 inklusive von unterbrochenen Daigaonalen wie 15, 16, 22, 3, 9
4) 25 mal Ecken von 3 x 3 Quadraten und Mittelpunkt, z.B. 1, 24, 7, 20, 13
5) 25 mal Ecken von 5 x 5 Quadraten und Mittelpunkt, z.B. 1, 17, 13, 9, 25
6) 25 mal Ecken von 2 x 2 Rhomben und Mittelpunkt, z.B. 23, 15, 7, 4, 16 oder 11, 3, 25, 17, 9
7) 25 mal Ecken von 3 x 3 Rhomben und Mittelpunkt, z.B. 20, 24, 13, 2, 6
8) 25 mal Ecken von 4 x 4 Rhomben und Mittelpunkt, z.B. 1, 22, 8, 19, 15
9) 25 mal Ecken von 5 x 5 Rhomben und Mittelpunkt, z.B. 7, 20, 23, 1, 14
10) 58 Kombinationen von 2 symmetrischen Paaren mit Zentrum, z.B. 1, 15, 13, 11, 25
11) 900 Kombinationen von 8 nichtsymmetrischen Mustern, z.B. 1, 8, 17, 14, 25 oder 15, 17, 1, 23, 9

Insgesamt existieren in diesem magischen Quadrat 1128 verschiedene Möglichkeiten die magische Summe zu erzeugen.

11	10	24	17	3
22	18	1	15	9
5	14	7	23	16
8	21	20	4	12
19	2	13	6	25

1	15	9	22	18
7	23	16	5	14
20	4	12	8	21
13	6	25	19	2
24	17	3	11	10

Da bei einem pandiagonalen, magischen Quadradt die gebrochenen Diagonalen ebenfalls die magische Summe ergeben, können beliebig viele Zeilen am oberen Rand des Quadrates abgetrennt und unten wieder angefügt werden. Ebenso können beliebig viele Spalten am linken Rand des Quadrates abgetrennt und am rechten Rand wieder angefügt werden. In allen Fällen entsteht wieder ein pandiagonales magisches Quadrat. Durch eine Kombination der beiden Transformationen kann jede beliebige Zelle des magischen Quadrats in die linke obere Ecke verschoben werden, ohne dass die pandiagonale Eigenschaft verloren geht.
Verschieden nennt man pandiagonale magische Quadrate, die durch keine Abbildung ineinander überführt werden können.

Pandiagonale Quadrate existieren für die Ordnungen 3 x 3, 6 x 6, 10 x 10, ...; allgemein n x n, mit n = 4k+2, nicht.
Für 4 x 4 kennt man 48 pandiagonale Quadrate, von denen 3 verschieden sind. Weiterhin bekannt ist:
5 x 5: 3600 Quadrate, mit 144 verschiedenen
7 x 7: 678222720 Quadrate, mit 38102400 verschiedenen

Das erste pandiagonale Quadrate mit einer Ordnung, die ein Vielfaches von 3 ist, wurde erst A.H.Frost 1878 gefunden.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

Pandiagonale Quadrate der Ordnung 4

Insgesamt existieren 48 pandiagonale magische Quadrate, von denen aber nur drei wesentlich verschieden sind, da alle anderen durch Verschiebungen in diese drei Quadrate überführt werden können. (siehe Abbildung)
Die magische Summe 34 tritt in einem pandiagonalen Quadrat 4.Ordnung sehr häufig auf. Für das obere Quadrat gilt:

Die Summe der Zahlen in allen sechzehn 2x2-Teilquadraten ergibt 34, z.B. 1+8+14+11, 8+13+11+2 usw. Dabei können diese Teilquadrate auch zyklisch betrachtet werden, z.B. 12+7+1+14 oder 6+12+15+1.
Die Summe der Ecken aller 3x3-Teilquadrate ergibt immer 34, z.B. 1+13+4+16 oder 8+12+5+9.
Die diagonal gegenüberliegenden Ecken aller 3x3-Teilquadrate ergeben immer 34. Daher existiert kein symmetrisches pandiagonales Quadrat 4.Ordnung.
Jedes Paar von horizontal oder vertikal benachbarten Zahlen ergibt mit den Zahlen, die sich zwei Zeilen tiefer und 2 Spalten weiter rechts befinden, addiert immer 34, z.B. 1+8+16+9 oder 1+14+16+3.

Multiplikative Magische Quadrate

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

... magische Quadrate, die sowohl in klassischem Sinn (Zeilen-, Spalten- und Diagonalen-Summe sind gleich) ein magisches Quadrat darstellen, als auch in jeder Zeile, Spalte und Hauptdiagonale ein konstantes Produkt aufweisen.
Derartige Quadrate sind selten. Das gezeigte Beispiel hat als Summe die magische Konstante 840 und als Produkt die multiplikative magische Konstante 2058068231856000.
Gefunden wurde das Quadrat 1975 von Hunter und Madachy. Die zwei neunreihigen multiplikativen magischen Quadrate haben die additive Konstanten 848 und 1200 sowie die multiplikativen Konstanten 5804807833440000 und 1619541385529760000.

200	87	95	42	99	1	46	108	170
14	44	10	184	81	85	150	261	19
138	243	17	50	116	190	56	33	5
57	125	232	9	7	66	68	230	54
4	70	22	51	115	216	171	25	174
153	23	162	76	250	58	3	35	88
145	152	75	11	6	63	270	34	92
110	2	28	135	138	69	29	114	225
27	102	207	290	38	100	55	8	21

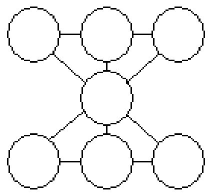
17	171	126	54	230	100	93	264	145
124	66	290	85	57	168	162	23	225
216	115	75	279	198	29	170	76	42
261	186	33	210	68	38	200	135	69
50	270	92	87	248	165	21	153	114
105	51	152	150	27	207	116	62	330
138	25	243	132	58	310	95	63	136
190	84	34	184	125	81	297	174	31
99	232	155	19	189	102	46	250	108

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

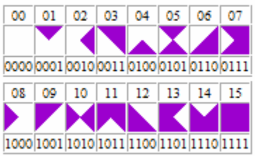
Bimagisches Quadrat

... magisches Quadrat, das sowohl klassisches magisches Quadrat ist, als auch ein magisches Quadrat bildet, wenn alle Zahlen quadriert werden.
Das abgebildete Quadrat hat die magische Summe 260 und nach dem Quadrieren der Einträge die Summe 11180.

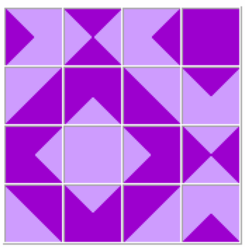
Zahlenrätsel nach Flachsel



Aufgabe: Die Zahlen 1 bis 7 sind so in die 7 Kreise einzutragen, dass die Summe je dreier Zahlen, die durch eine Strecke miteinander verbunden sind, jeweils 12 ergibt.
Lösung: In jeder der 5 Dreiersummen kommt jede Zahl 2mal vor, die Zahl im mittleren Kreis 3mal. Die Summe der Zahlen von 1 bis 7 ist 28, die doppelte Summe 56; da auf 60 (5 Dreiersummen zu 12) die Zahl 4 fehlt, muss diese 3mal in der Gesamtsumme vorkommen und steht damit in der Mitte.
Die anderen Zahlen bilden Paare 1-7, 2-6 und 3-5, von denen je drei oben bzw. unten stehen müssen 6-1-5 und 3-7-2. Da es 6 Möglichkeiten gibt die Zahlen 1, 5, 6 zu permutieren und diese entweder oben oder unten stehen, gibt es somit insgesamt 12 verschiedenen Lösungen des Rätsels.



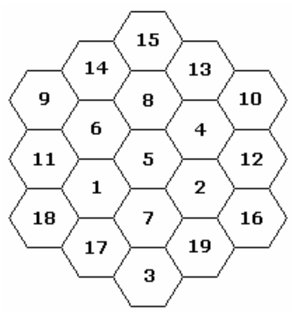
8	5	2	15
6	11	12	1
13	0	7	10
3	14	9	4



Magische Quadratmuster

Magische Quadrate können zur Konstruktion interessanter Muster genutzt werden.
Nutzt man magische Quadrate der Ordnung 4 und trägt die Zahlen von 0 bis 15 ein, so können diese binär mit maximal 4 Ziffern dargestellt werden. Für jede der möglichen Zahlen von 0 bis 15 wird ein eindeutiges Muster gewählt, zum Beispiel die oben dargestellten Muster.
Entsprechen der Belegung des magischen Quadrates werden die Zahlenmuster zu einem "magischen Muster" zusammengesetzt. Zum Beispiel ergibt sich für das in der Mitte abgebildete magische Quadrat das Muster im unteren Teil der Abbildung.
Überdeckt man nun mit diesem Muster die Ebene ergeben sich interessante Parkettierungen.

Magisches Hexagon



In diesem Hexagon wurden die Zahlen von 1 bis 19 derart angeordnet, dass in jeder schrägen 3- oder 4-elementigen Linie die Summe 38 entsteht.
Dieses magische Hexagon ist das einzige seiner Art und wurde 1957 von C.W.Adams gefunden.
In einem magischen Sechseck sind die Summen der schrägen Linien gleich. Diese Summe H heißt magische Zahl des Sechsecks.
Addiert man alle Zahlen eines magischen Sechsecks, so gilt S = z H, wenn z die Zeilen-Anzahl ist. Die Anzahl der Zeilen ist 1, 3, 5, 7, allgemein z = 2n-1.
Nach der Summenformel natürlicher Zahlen ergibt sich

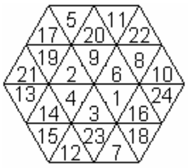
$$S = (3n^2-3n+1)[3(n+1)^2-3(n+1)+1]/2 = (9n4-18n^3+18n^2-9n+2)/2.$$

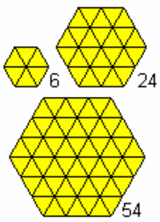
Damit gilt

$$H = S/z = S/(2n-1) = (9n4-18n^3+18n^2-9n+2)/[2(2n-1)] = (9n4-18n^3+18n^2-9n+2)/(4n-2).$$

Die magische Zahl H, die als Quotient gegeben ist, muss eine natürliche Zahl sein. Dieser Term ergibt allerdings nur für n= -2, 1, 0, 3 eine ganzen Zahl.
Damit ist das angegebene magische Sechseck das einzig mögliche.

Mardin Gardner erfuhr vom magischen Sechseck durch eine Zuschrift von Clifford W.Addams. Dieser hatte schon 1917 begonnen sich mit dem Sechseck zu beschäftigen und hatte erst 1957 die Lösung gefunden. Er notierte sie auf einem Zettel, verlegte ihn und fand ihn erst 1962 wieder.
Der Mathematiker Charles W.Trigg von der Universität von Los Angeles fand heraus, dass das magisches Sechseck einzigartig und in der Fachliteratur nicht bekannt war. Trigg veröffentlichte seinen Beweis 1964 in der Zeitschrift "Recreational Mathematics".
1988 fand man heraus, dass der Stadtbaurat Ernst von Haselberg aus Stralsund dieses Problem schon im Jahre 1887 kannte, löste und auch die Eindeutigkeit nachwies.





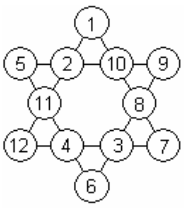
Magisches T-Hexagon

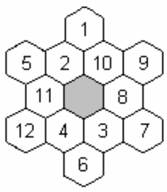
Außer dem magischen Hexagon gibt es ein weiteres magisches Sechseck, jedoch geformt aus Dreiecken. Es heißt T-Hexagon (triangle hexagon).
Das oben abgebildete Sechseck besteht aus 24 gleichseitigen Dreiecken. Man kann die natürlichen Zahlen 1 bis 24 so verteilen, dass es magisch wird. 12 Summen horizontal, schräg nach oben rechts und schräg nach oben links sind gleich, hier 75.
Das T-Hexagon steht in einer Reihe immer größer werdender Sechsecke. (mittlere Abbildungen) Das Sechseck n-ter Ordnung besteht aus 6n² Dreiecken.

Für die magische Zahl H gilt S = z H, wobei S die Summe aller Zahlen und z die Zeilenzahl sind. Mit

$$S = 1+2+3+ \dots +6n^2 = 6n^2 (6n^2+1)/2 = 18n4 + 3n^2 \text{ und } z = 2n \text{ ist}$$
$$H = S/z = (18n4+3n^2)/2n = [3n(6n^2+1)]/2$$

Der Term für H ist nur eine natürliche Zahl, wenn der Zähler gerade ist, d.h. n muss eine gerade Zahl sein.
Das erste Mal wird das T-Hexagon von Hans F.Bauch untersucht. Die Ergebnisse veröffentlichte er in den Mathematischen Semesterberichten 1991 (7).
Das T-Hexagon heißt dort Magisches Sechseck D(4); D für Dreieck, 4 für die Anzahl der Zeilen.
Die Bezeichnung T-Hexagon findet man auf der Web Site Hexagonia von John Baker.
Offenbar fanden John Baker und David King die T-Hexagone unabhängig von Hans F.Bauch noch einmal.
Auf John Bakers Seite steht:
"This arrangement was discovered on 13th September, 2003 and as far as we can ascertain is the first example of a magic T-hexagon."





Magischer Stern, Magischer Davidstern

Der magische Stern enthält die Zahlen 1 bis 12, wobei es sechs gleiche Summen gibt. Die magische Zahl ist 26, da die Summe aller Zahlen 78 ist und jede Zahl zweimal in die sechs Summen aufgeteilt wird.
Dieses Gebilde war schon im 19.Jahrhundert bekannt.
Trägt man die Zahlen 1 bis 12 ein, so gibt es für die Summen genau 33 Kombinationsmöglichkeiten:
12, 11, 2, 1, 12, 10, 3, 1, 12, 9, 4, 1, 12, 9, 3, 2, 12, 8, 5, 1, 12, 8, 4, 2, 12, 7, 6, 1, 12, 7, 5, 2, 12, 7, 4, 3, 12, 6, 5, 3, 11, 10, 4, 1, 11, 10, 3, 2, 11, 9, 5, 1, 11, 9, 4, 2, 11, 8, 6, 1, 11, 8, 5, 2, 11, 8, 4, 3, 11, 7, 6, 2, 11, 7, 5, 3, 11, 6, 5, 4, 10, 9, 6, 1, 10, 9, 5, 2, 10, 9, 4, 3, 10, 8, 7, 1, 10, 8, 6, 2, 10, 8, 5, 3, 10, 7, 6, 3, 10, 7, 5, 4, 9, 8, 7, 2, 9, 8, 6, 3, 9, 8, 5, 4, 9, 7, 6, 4, 8, 7, 6, 5,

Beginnt man bei der Konstruktion z.B. mit {1, 2, 11, 12} von oben nach links unten, so bleiben nach rechts unten nur noch {10, 9, 6, 1} und {10, 8, 7, 1}. Wählt man {10, 8, 7, 1}, so muss die 7 unten stehen, da es sonst keine Möglichkeit mehr für die Waagerechte ab der 12 gibt.
Diese Waagerechte muss {12, 3, 4, 7} oder {12, 4, 3, 7} sein. Das erste entfällt, da dann für die schräge Summe von unten nach links mit der 11 keine Möglichkeit mehr existiert.
Die restlichen Zahlen folgen automatisch. Insgesamt existieren 80 verschiedene Belegungen.

9
6 7 5
3 1 2 8 4

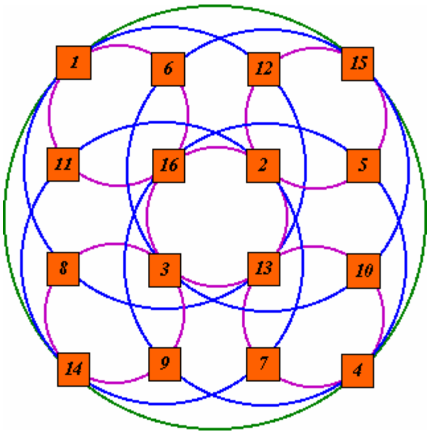
16
12 13 15
8 10 6 9 7
4 1 14 5 11 3 2

25
20 21 24
15 19 14 4 23
10 22 3 9 11 18 2
5 8 17 7 6 12 13 16 1

Magisches Dreieck

Magische Dreieck werden mitunter von Autoren diskutiert, haben aber nicht die Bedeutung der magischen Vierecke erreicht. Ursache ist, dass nicht hinreichend viele Zeilen, Spalten, … so konstruiert werden können, dass stets die gleiche Summe, die magische Zahl, entsteht.
Links sind magische Dreiecke der 3. bis 5.Ordnung abgebildet.

Während bei dem 3. und den 4.Ordnung die Summen der Schenkel der Höhenspalte und jeder Zeile, außer der ersten, gleich sind (18 bzw. 40), gelingt eine solche Konstruktion bei magischen Dreiecken ab 5.Ordnung nicht mehr.
Haben die Schenkel und die Höhe gleiche Summen, so erreicht man dies für die waagerechten Zeilen nicht mehr vollständig.



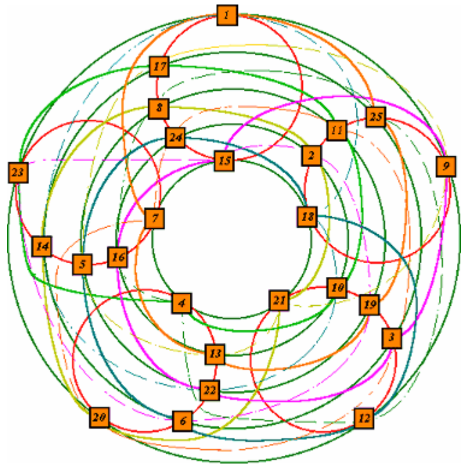
Magische Kreise

Nach einer Idee von W.S.Andrews in "Magic Squares and Cubes", Dover, 1960, können kreisförmige Diagramme zur Konstruktion magischer Quadrate 4.Ordnung aufgestellt werden.
Beginnend bei einer Zahl, zum Beispiel der 1, wählt man längs des größen Kreises, der vier mittleren Kreise oder der 5 kleinen Kreise die entsprechenden Zahlen. Stets ergibt sich die magische Summe 34.

Ausgangsquadrat

1	6	12	15
11	16	2	5
8	3	13	10
14	9	7	4
1	15	4	14 ; großer Kreis
1	12	13	8 ; ein mittlerer Kreis
1	6	16	11 ; ein kleiner Kreis

Pandiagonaler Torus



Magische Quadrate können auch auf den dreidimensionalen Raum erweitert werden.
Die Abbildung zeigt eine zweidimensionale Projektion eines Torus, auf dem pandiagonale magische Quadrate der 5.Ordnung eingetragen wurden.
Beginnt man zum Beispiel bei der 1 und den großen Kreisen, so ergibt sich der magische Quadrat

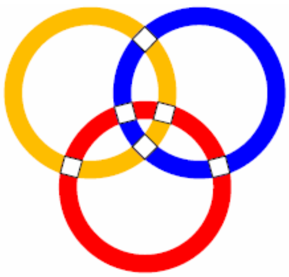
1	9	12	20	23
17	25	3	6	14
8	11	19	22	5
24	2	10	13	16
15	18	21	4	7

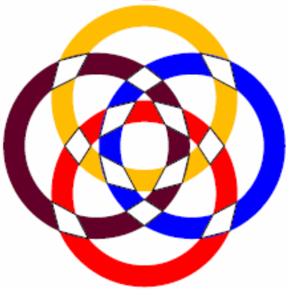
Beginnt man bei der 2 ergibt sich

2	11	25	9	18
10	19	3	12	21
13	22	6	20	4
16	5	14	23	7
24	8	17	1	15

Insgesamt können so 25 verschiedene pandiagonale magische Quadrate konstruiert werden. Weiter 25 magische Quadrate ergeben sich, wenn man den Spirallinien folgt, z.B.

1	25	19	13	7
14	8	2	21	20
22	16	15	9	3
10	4	23	17	11
18	12	6	5	24



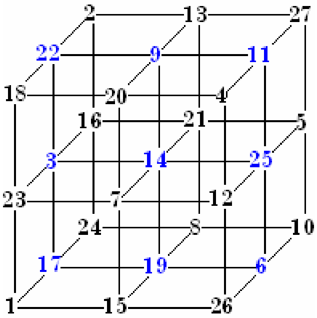


Eine zweite Art magischer Kreise wurde durch Hans Walser beschrieben.

1) Drei Kreise (obere Abbildung)
Aufgabe: Schreiben Sie die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so in die quadratischen Felder, dass auf allen drei Kreisen die Summe der vier Zahlen gleich ist.
Lösung:
Man kann mit irgendeiner Zahl in einem Kreuzungspunkt zweier Kreise beginnen. Im zweiten Kreuzungspunkt derselben beiden Kreise setzt man jene Zahl, welche die Zahl im ersten Schnittpunkt auf 7 ergänzt. Die Summe in jedem Kreis ist vierzehn.
Eine mögliche Lösung von links oben nach rechts unten ist: 5, 4, 6, 2, 1, 3.
Es gibt insgesamt $6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3! = 48$ Lösungen.

2) Vier Kreise (untere Abbildung)
Aufgabe: Schreiben Sie die Zahlen 1 bis 12 so in die weißen Felder, dass auf allen vier Kreisen die Summe der sechs Zahlen gleich ist.
Lösung:
Man kann mit irgendeiner Zahl in einem Kreuzungspunkt zweier Kreise beginnen. Im zweiten Kreuzungspunkt derselben beiden Kreise setzt man jene Zahl, welche die Zahl im ersten Schnittpunkt auf 13 ergänzt. Die Summe in jedem Kreis ist 39.
Eine mögliche Lösung von links oben nach rechts unten ist: 11, 12, 7, 4, 3, 5, 8, 1, 2, 6, 10, 9.
Es gibt insgesamt $12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^6 \cdot 6! = 46080$ Lösungen.

Konstruiert man analoge Aufgaben für sechs Kreise, so ist die Summe in jedem Kreis gleich 100. $2^{12} \cdot 12!$ = 1 961 990 553 600 verschiedene Lösungen existieren.

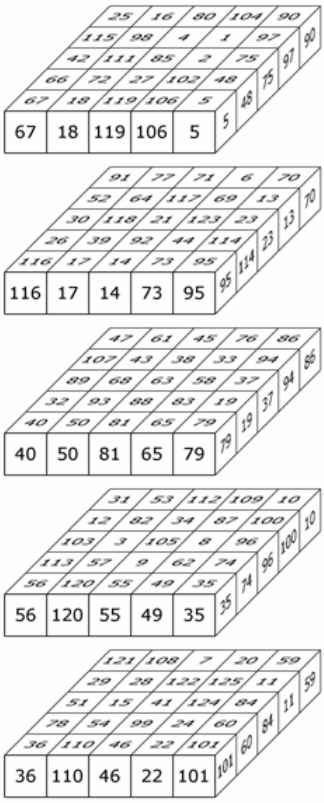


Magischer Würfel

Das Problem der magischen Quadrate kann auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.
Unter einem magischen Würfel der Ordnung 3 versteht man die Anordnung der Zahlen 1 bis 27 in 3 Etagen zu je 3 x 3 Zahlen.
Insgesamt betrachtet man 31 Summen

9 Zeilen parallel zur x-Achse
9 Spalten parallel zur y-Achse
9 Säulen parallel zur z-Achse
4 Triagonalen

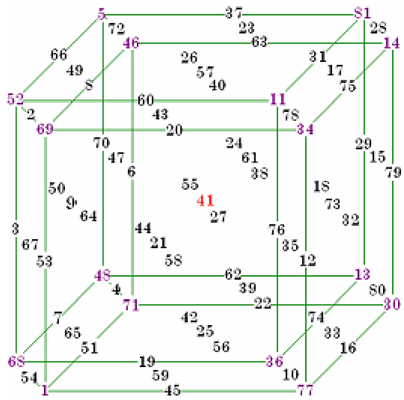
Alle Summen müssen die magische Summe 42 aufweisen.
Insgesamt gibt es 4 verschiedene magische Würfel 3.Ordnung. Alle anderen gehen aus diesen durch Drehung oder Spiegelung hervor, von denen es 48 Möglichkeiten gibt.
Es wird vermutet, dass Fermat als Erster einen magischen Würfel entdeckte, jedoch von 4.Ordnung und nach heutiger Definition nicht vollkommen magisch.
Den ersten magischen Würfel der Ordnung 3 im Sinne der obigen Definition konstruierte 1757 der japanische Mathematiker Kurushima.



Vollkommener magischer Würfel

Unter einem vollkommenen magischen Würfel der Ordnung m versteht man eine Anordnung m×m×m-Anordnung der Zahlen 1 to m³,
bei der die Summen der Zahlen längs aller Geraden der magischen Konstante $S = m \cdot (m^3+1)/2$
entsprechen.
Insgesamt gibt es $3m^2+6m+4$ dieser Geraden: m² Spalten, Reihen und Säulen, 4 Triagonalen und zusätzlich 6m Diagonalen. Für den einfachen magischen Würfel müssen die Diagonalensummen nicht gleich S sein.
John Hendricks bewies 1972, das für Ordnung 3 kein solcher Würfel existiert. Richard Schroeppel zeigte dies für die Ordnung 4.
2003 fand Walter Trump den ersten vollkommenen magischen Würfel der Ordnung 5, der links abgebildet ist.

Magischer Hyperwürfel, Magischer Tesserakt



Der einfachste magische Hyperwürfel ist von der Ordnung 3.
Insgesamt existieren 58 verschiedene magische Hyperwürfel 3.Ordnung. Alle anderen derartigen magischen Gebilde gehen aus 384 Transformationen (Rotation, Spiegelung) aus den magische Basishyperwürfeln hervor.

Die magische Summe des Hyperwürfels ist 123. Insgesamt muss diese Summe auf 116 Reihen zutreffen.

27 Reihen parallel zur x-Achse
27 Reihen parallel zur y-Achse
27 Reihen parallel zur z-Achse
7 Reihen parallel zur w-Achse
8 Quadragonale

John R.Hendricks veröffentlichte 1962 den ersten magischen Hyperwürfel.

1	2	3
8	9	4
7	6	5

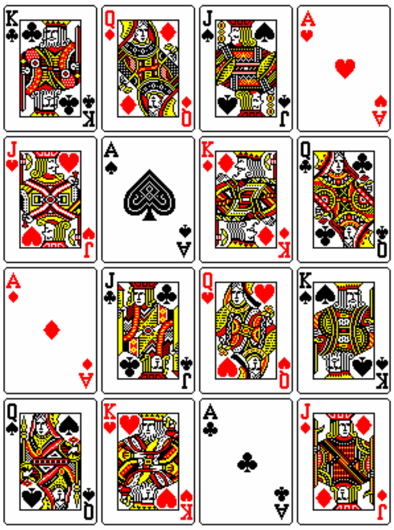
2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

Heteroquadrat

Ein Heteroquadrat (engl. heterosquare) der Ordnung n ist eine Anordnung der natürlichen Zahlen von 1 bis n² in einem Quadrat, so dass die Summen der Zahlen in den Zeilen, Spalten und Diagonalen unterschiedliche Werte haben.
Es existiert kein Heteroquadrat der Ordnung 2. Dagegen kann für alle $n \geq 3$ ein derartiges Quadrat konstruiert werden.
Ist die Ordnung n ungerade, so kann eine solches Quadrat erzeugt werden, in dem die Zahlen spiralförmig angeordnet werden. Ist n gerade, so werden die Zahlen 1 bis n² in natürlicher Reihenfolge eingetragen und anschließend die 1 und 2 getauscht. Es existieren genau 3120 verschiedene Heteroquadrate der Ordnung 3.
Durch Carlos Rivera wurden 1998 zwei Heteroquadrate der Ordnung 3 angegeben, bei denen nur Primzahlen eingetragen wurden und die Summen ebenfalls Primzahlen sind.

Antimagisches Quadrat
Ein antimagisches Quadrat ist eine spezielle Art von Heteroquadrat, bei dem die 2n+2 Spalten, Zeilen und Diagonalen als Summen aufeinanderfolgende Zahlen bilden.



Bachet-Quadrat
Ein Bachet-Quadrat ist ein Anordnung von 16 Spielkarten in 4 Spalten und 4 Zeilen, wobei in jeder Reihe und in den Diagonalen jede Figur (Bube, Dame, König, As) und jede Farbe (Karo, Herz, Pik, Kreuz) nur genau einmal auftreten darf.

Für die erste Reihe eines solchen Quadrates gibt es 576 = $(4!)^2$ Möglichkeiten; 4! = 24 Möglichkeiten für die Figurenfolge und ebenso 4! = 24 Varianten für die Farbfolge.
Für jede dieser ersten Reihen gibt es zwei verschiedene Bachet-Quadrate, entweder berücksichtigt man zuerst die Figurenfolge oder aber die Farbfolge. Insgesamt existieren 1152 verschiedene Bachet-Quadrate.

Da es insgesamt 16! = 20922789888000 verschiedene Anordnungen der Karten gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig ein Bachet-Quadrat zu erhalten, gleich 1:18162144000, praktisch also 0.
Dieses Puzzle wurde 1624 von Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638) erstmals veröffentlicht und 1694 in "Récréations mathématiques et physiques" von Jacques Ozanam (1640-1717) populär gemacht.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lateinische Quadrate
Zahlenquadrat der Ordnung n, wenn jede Zahl von 1 bis n in jeder Zeile und Spalte genau einmal vorkommt. Reduziert oder normiert heißt ein lateinisches Quadrat, wenn in der 1.Spalte und Zeile die Zahlen 1 bis n in natürlicher Reihenfolge auftreten. Diagonal heißt ein lateinisches Quadrat, wenn auch in den Hauptdiagonalen die Zahlen 1 bis n genau einmal vorkommen.

n	Anzahl reduzierte Quadrate	Anzahl lateinischer Quadrate
2	1	2
3	1	12
4	4	576
5	56	161280
6	9408	812851200
7	16942080	61479419904000
8	535281401856	108776032459082956800
9	377597570964258816	5524751496156892842531225600
10	7580721483160132811489280	9982437658213039871725064756920320000
11	5363937773277371298119673540771840	$7{,}76966836171770144 1 \cdot 10^{47}$
12	$1{,}62 \cdot 10^{44}$	$3{,}097 \cdot 10^{60}$
13	$2{,}51 \cdot 10^{56}$	$7{,}487 \cdot 10^{74}$
14	$2{,}33 \cdot 10^{70}$	$1{,}265 \cdot 10^{91}$
15	$1{,}5 \cdot 10^{86}$	$1{,}7 \cdot 10^{109}$

Für die Anzahl N(n) aller lateinischen Quadrate der Ordnung n ergibt sich aus der Anzahl L(n) der reduzierten Quadrate: N(n) = n! (n-1)! L(n)
Die lateinischen Quadrate der Ordnung 9 sind die mathematische Grundlage für das beliebte Ziffernspiel Sudoku.
Lateinische Quadrate finden sich in der arabischen Literatur über mehr als 700 Jahre. Leonhard Euler befasste sich intensiv mit solchen Quadraten; als Symbolmenge benutzte er das lateinische Alphabet. Der Name lateinisches Quadrat geht darauf zurück. Durch J.R.Nechvatal wurde 1979 eine Berechnungsvorschrift zur Anzahl der lateinischen Quadrate angegeben.

4 reduzierte lateinische Quadrate der Ordnung 4
1234 / 2143 / 3412 / 4321
1234 / 2143 / 3421 / 4312
1234 / 2341 / 3412 / 4123
1234 / 2413 / 3142 / 4321

56 reduzierte lateinische Quadrate der Ordnung 5
12345 / 21453 / 34512 / 45231 / 53124
12345 / 21453 / 34521 / 45132 / 53214
12345 / 21453 / 35124 / 43512 / 54231
12345 / 21453 / 35214 / 43521 / 54132
12345 / 21534 / 34152 / 45213 / 53421
12345 / 21534 / 34251 / 45123 / 53412
12345 / 21534 / 35412 / 43251 / 54123
12345 / 21534 / 35421 / 43152 / 54213
12345 / 23154 / 34512 / 45231 / 51423
12345 / 23154 / 34521 / 45213 / 51432
12345 / 23154 / 35412 / 41523 / 54231
12345 / 23154 / 35421 / 41532 / 54213
12345 / 23451 / 31524 / 45132 / 54213
12345 / 23451 / 31524 / 45213 / 54132

12345 / 23451 / 34512 / 45123 / 51234
12345 / 23451 / 35214 / 41523 / 54132
12345 / 23514 / 31452 / 45123 / 54231
12345 / 23514 / 34152 / 45231 / 51423
12345 / 23514 / 34251 / 45132 / 51423
12345 / 24153 / 31524 / 45231 / 53412
12345 / 24153 / 35214 / 43521 / 51432
12345 / 24153 / 35421 / 41532 / 53214
12345 / 24513 / 31254 / 45132 / 53421
12345 / 24513 / 35124 / 43251 / 51432
12345 / 24531 / 31254 / 45123 / 53412
12345 / 24531 / 31452 / 45213 / 53124
12345 / 24531 / 35214 / 43152 / 51423
12345 / 25134 / 31452 / 43521 / 54213
12345 / 25134 / 34251 / 43512 / 51423
12345 / 25134 / 34512 / 43251 / 51423
12345 / 25413 / 31254 / 43521 / 54132
12345 / 25413 / 31524 / 43251 / 54132
12345 / 25413 / 34251 / 41532 / 53124
12345 / 25431 / 31254 / 43512 / 54123
12345 / 25431 / 34152 / 41523 / 53214

12345 / 23451 / 35124 / 41532 / 54213
12345 / 23451 / 35214 / 41532 / 54123
12345 / 23514 / 31452 / 45231 / 54123
12345 / 23514 / 34251 / 45123 / 51432
12345 / 23514 / 35421 / 41253 / 54132
12345 / 24153 / 35214 / 41532 / 53421
12345 / 24153 / 35412 / 43521 / 51234
12345 / 24153 / 35421 / 43512 / 51234
12345 / 24513 / 31452 / 45231 / 53124
12345 / 24513 / 35421 / 43152 / 51234
12345 / 24531 / 31452 / 45123 / 53214
12345 / 24531 / 35124 / 41253 / 53412
12345 / 24531 / 35412 / 41253 / 53124
12345 / 25134 / 34251 / 41523 / 53412
12345 / 25134 / 34512 / 41253 / 53421
12345 / 25134 / 34521 / 41253 / 53412
12345 / 25413 / 31524 / 43152 / 54231
12345 / 25413 / 34152 / 43521 / 51234
12345 / 25413 / 34521 / 43152 / 51234
12345 / 25431 / 31524 / 43152 / 54213
12345 / 25431 / 34512 / 41253 / 53124

Höhere Ordnung

Ordnung 6 123456 / 214365 / 345612 / 436521 / 561234 / 652143
Ordnung 7 1234567 / 2143675 / 3412756 / 4567123 / 5376214 / 6725341 / 7651432
Ordnung 8 12345678 / 21436587 / 34127856 / 43218765 / 56781234 / 65872143 / 78563412 / 87654321

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

+

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

=

A1	B2	C3	D4
C2	D1	A4	B3
D3	C4	B1	A2
B4	A3	D2	C1

Eulersche Quadrate, Griechisch-Lateinische Quadrate

Kombiniert man zwei lateinische Quadrate, so entsteht ein neues Quadrat. Treten alle Paare von Kombinationen genau einmal auf, spricht man von einem Eulerschen Quadrat oder auch griechisch-lateinischen Quadrat.
Die beiden Ausgangsquadrate werden dann orthogonale lateinische Quadrate genannt. Lateinische und Eulersche Quadrate treten in verschiedensten Problemen der angewandten Mathematik, vor allem in der Kombinatorik, auf.

Problem der 36 Offiziere

Euler beschäftigte sich intensiv mit griechisch-lateinischen Quadraten. Er fand Verfahren zur Konstruktion solcher Quadrate mit ungerader Ordnung und mit Ordnung, die Vielfaches von 4 ist. Allerding konnte er keine griechisch-lateinisches Quadrat der Ordnung 6 ermitteln. Daraus konstruierte er folgendes Problem:
Ist es möglich, sechs Regimenter mit jeweils 6 Offizieren verschiedenen Rangs so anzuordnen, dass in keiner Spalte oder Zeile zwei oder mehr Offiziere desselben Regiments bzw. desselben Rangs auftreten?

Da Euler das Problem nicht lösen konnte, vermutete er, dass es keine griechisch-lateinischen Quadrate der Ordnung $4k + 2$, $k = 1, 2, \ldots$ gibt.
Das Problem der 36 Offiziere wurde einhundert Jahre später durch den französischen Mathematiker Gaston Tarry beantwortet. In dem er alle möglichen Kombinationen testete, konnte er zeigen, dass ein Euler-Quadrat der Ordnung 6 nicht existiert!
1960 bewiesen Bose, Shrikhande und Parker durch Computereinsatz, dass Euler-Quadrate für alle Ordnungen außer 2 und 6 existieren und widerlegten damit die Eulersche Vermutung.

Eulersche Quadrate, Griechisch-Lateinische Quadrate (2)

1960 ermittelten Bose, Shrikhande und Parker durch Computereinsatz ein dass Euler-Quadrate der Ordnung 10 und widerlegten damit die Eulersche Vermutung.

46	57	68	70	81	02	13	24	35	99
71	94	37	65	12	40	29	06	88	53
93	26	54	01	38	19	85	77	60	42
15	43	80	27	09	74	66	58	92	31
32	78	16	89	63	55	47	91	04	20
67	05	79	52	44	36	90	83	21	18
84	69	41	33	25	98	72	10	56	07
59	30	22	14	97	61	08	45	73	86
28	11	03	96	50	87	34	62	49	75
00	82	95	48	76	23	51	39	17	64

In diesem Eulerschen Quadrat treten alle Ziffernkombinationen von 00 bis 99 auf. Außerdem steht in jeder Spalte und jeder Zeile sowohl an erster als auch an zweiter Stelle jede der Ziffern 0 bis 9 genau einmal.

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

Eulersche Quadrate, Griechisch-Lateinische Quadrate (2)

Leonhard Euler gelang es zwar nicht, das von der russischen Zarin Katharina II. gestellte Problem der 36 Offiziere zu lösen, jedoch fand er für den Fall 5 x 5 eine Lösung.
Euler codierte die beiden Kriterien mit lateinischen und griechischen Buchstaben. (siehe Abbildung)
Zumindest für ungerade Zeilen- und Spaltenzahlen ergibt sich ein gewisses Muster. Die lateinischen Buchstaben sind zeilenweise immer in derselben zyklischen Anordnung:

A B C D E

Die Anordnung ist aber in jeder Zeile gegenüber der oberen Zeile um eine Einheit nach links verschoben. Die griechischen Buchstaben sind spaltenweise immer in derselben zyklischen Anordnung:

$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon$

Die Anordnung ist aber in jeder Spalte gegenüber der Vorgängerspalte um zwei Einheiten nach unten verschoben.

Zahlenraten, Zahlenkunststück

Bei dem einfachen "Zahlenraten" soll sich jemand eine Zahl ausdenken und anschließend einfache Rechenoperarionen ausführen. Aus dem Ergebnis kann der Aufgabensteller dann zur "Überraschung" aller die Anfangszahl angeben. Sind die Rechenaufgaben etwas anspruchsvoller und das Ergebnis zuerst verblüffend, spricht man auch von Zahlenkunststücken.

Beispiel 1: Denke Dir eine Zahl. Verdoppele sie, zähle 4 hinzu, halbiere die Summe, addiere 7, multipliziere das Ergebnis mit 8, ziehe 12 ab, dividiere durch 4, ziehe 11 davon ab und gib das Ergebnis an. Wenn x die gedachte Zahl ist, wird

$$(((2x+4)/2+7)\cdot 8-12)/4-11 = (((x+2)+7)\cdot 8-12)/4-11 = ((x+9)\cdot 8-12)/4-11 = 2x+4$$

d.h. der Ergebnis wird mit 4 subtrahiert und halbiert.

Beispiel 2: Denke Dir eine Zahl. Addiere 1, quadriere die Summe, subtrahiere vom Ergebnis das Quadrat der gedachten Zahl, addiere noch 1 und gib das Ergebnis an.

$$(x+1)^2-x^2-1 = (x^2+2x+1)-x^2-1 = 2x$$

Beispiel 3: Denke Dir eine Zahl. Verdoppele sie und addiere irgendeine gerade Zahl, halbiere das Ergebnis, multipliziere das Ergebnis mit 4, subtrahiere das Doppelte von der vorher addierten geraden Zahl und gib das Ergebnis an $((2x+2n)/2)\cdot 4-2\cdot 2n = (x+n)\cdot 4-2n = 4x+4n-4n = 4x$

Beispiel 4: Denke Dir eine Zahl. Bilde die Summe dieser und der beiden darauf folgenden Zahlen, dividiere durch 3 und gib das Ergebnis an. $(x+(x+1)+(x+2))/3 = (3x+3)/3 = x+1$

Beispiel 5: Gib deine Hausnummer in einen Taschenrechner ein. Verdopple sie. Addiere 42. Multipliziere mit 50. Ziehe dein Geburtsjahr vom Ergebnis ab. Subtrahiere 50. Zähle die Zahl der Geburtstage hinzu, die du dieses Jahr hattest, also 0 oder 1. Ziehe 36 ab.
Dann sind die letzten zwei Ziffern dein Alter, die übrigen Ziffern deine Hausnummer.
Lösung: x sei die Hausnummer, y das Alter, z die Geburtstage des Jahres. Dann wird berechnet:

$$50\,(2x + 42) - y + z - 36 = 100x + 2014 - y + z$$

Damit ist das Ergebnis 100 mal die Hausnummer plus das Alter im Jahr 2015(!). Für ein beliebiges Jahr j = 2015 + a, muss die abschließende Subtraktion mit 36 - a durchgeführt werden.

Beispiel 6:
Werfe mit 3 Würfeln. Multipliziere die Augenzahl des 1.Würfels mit 2 und addiere 5. Addiere die Zahl auf dem 2.Würfel.
Das Resultat multipliziere mit 10 und zähle die Augenzahl des 3.Würfels hinzu. Ich errate die geworfenen Augenzahlen.
Lösung: Sind a, b und c die Augenzahlen, so muss vom Ergebnis 250 subtrahiert werden. Die Ziffern des Ergebnisses sind die Augenzahlen. $10\,(10a + b +25) + c = 100a + 10b + c + 250$

Summenrätsel

Aus den einstelligen Zahlen 1 bis 9 soll durch Addition, Subtraktion oder Aneinanderfügen der Zahlen eine vorgegebene Summe erreicht werden.
Zum Beispiel findet man für die Zielsumme 100 die Möglichkeiten

$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100 \qquad 123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$

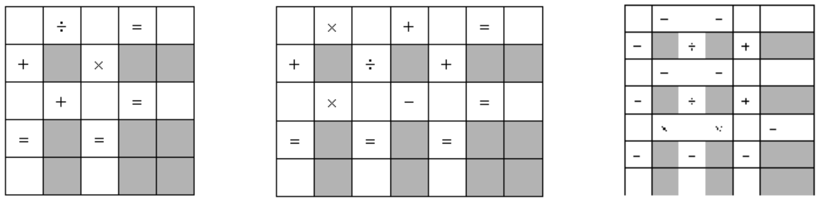
123 - 45 - 67 + 89 = 100
12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100
12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100
1 + 23 -4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100
1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100
123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100
12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100
1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100
1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100
-1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100

Nicht für jede Summe kann eine solche Zerlegung gefunden werden.

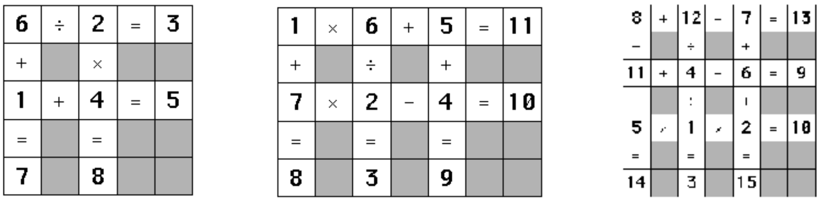
Zahlenpuzzle

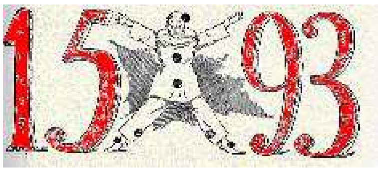
In die freien Felder die jeweiligen n-reihigen Quadrate sind die natürlichen Zahlen von 1, 2, ..., n einzutragen, wobei n gleich der Gesamtzahl an freien Feldern ist. Jede waagerechte und senkrechte Rechnung muss korrekt sein und jede Zahl muss genau einmal eingetragen werden. (Erich Friedman, 1998)

Aufgabe



Lösung





Pierrots Puzzle

Im Puzzle Nummer84 des Buches "Amusements in Mathematics" von H.E.Dudeney wird Pierrots Puzzle vorgestellt:
"The Pierrot in the illustration is standing in a posture that represents the sign of multiplication. He is indicating the peculiar fact that 15 multiplied by 93 produces exactly the same digits (1,395) differently arranged."
Aufgabe ist es, alle Möglichkeiten von vier Ziffern a, b, c, und d zu finden, so dass das Produkt der zweistelligen Zahlen ab und cd die gleichen Ziffern a, b, c und d besitzt. Folgende Lösungen sind möglich:

0,1,2,6: 21 · 60 = 1260
0,6,8,8: 80 · 86 = 6880
1,2,7,8: 27 · 81 = 2187
1,3,5,9: 15 · 93 = 1395
0,1,3,5: 30 · 51 = 1530
1,2,7,8: 21 · 87 = 1827
1,3,4,5: 35 · 41 = 1435

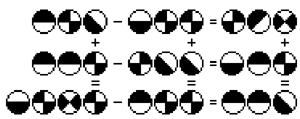
mit einstelligen Faktoren

0,1,2,6: 6 · 201 = 1206
0,1,3,5: 3 · 501 = 1503
0,6,8,8: 8 · 860 = 6880
1,3,5,9: 9 · 351 = 3159
0,1,2,6: 6 · 210 = 1260
0,1,3,5: 3 · 510 = 1530
1,2,5,5: 5 · 251 = 1255
3,4,7,8: 8 · 473 = 3784

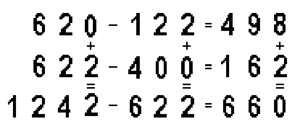
Darf das Produkt auch dreistellig sein, so findet man zusätzlich

0,1,2,6: 6 x 102 = 0612
0,1,3,5: 3 x 105 = 0315

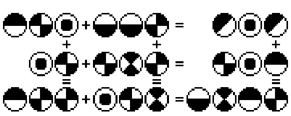
Symbolrätsel



Ein Symbolrätsel ist eine Anordnung von Symbolen. Für Symbole müssen einstellige Zahlen gesucht werden, so dass sechs ineinander verschachtelte Gleichungen erfüllt sind.



Im Unterschied zu den Variablen in der gewöhnlichen Algebra bedeuten gleiche Symbole auch gleiche Zahlen, verschiedene Symbole verschiedene Zahlen. Symbolrätsel sind in Deutschland bekannt und beliebt. Es gibt eine Reihe von Zeitschriften, die regelmäßig ein Rätsel dieser Art bringen.

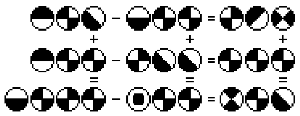


Das Rätsel enthält 6 Summen. Es werden 7 Symbole verwendet. Also werden 7 Ziffern gesucht.
Der erste Schritt ist die Einführung von Variablen. Das schafft Übersicht und Vertrautheit.
In den folgenden Darstellungen werden der Einfachheit halber die Rechenzeichen in der Vertikalrichtung nicht notiert.

abc+dde= fcf cb+bge= bca aee+cbg=dgae	abc+dde= fcf cb+b0e= bca aee+cb0=d0ae	abc+11e=fcf cb+b0e=bca aee+cb0=10ae	a2c+115=fcf c2+205=2ca a55+c20=10a5	723+115=f3f 32+205=237 755+320=1075
Wegen e+g=e in der letzten Zeile ist g=0	Die nächste Ziffer ist d=1. Werden zwei dreiziffrige Zahlen addiert, so ist die Summe eine vierziffrige Zahl mit 1 an der ersten Stelle.	Wegen e+e=10 ist e=5. Wegen 1+1=b ist b=2	Wegen c+2=5 ist c=3. Wegen 2+5=a ist a=7	Wegen 3+5=f ist f=8

Ergebnis: 723+115= 838
32+205 = 237
755+320=1075 Dieses Rätsel ist ein Glücksfall, da sich die Ziffern nacheinander eindeutig ergeben.

Lineares Lösungsdiagramm: g = 0 – d = 1 – e = 5 – b = 2 – c = 3 – a = 7 – f = 8



Beispiel 2

Das Rätsel enthält 3 Summen und 3 Differenzen. 9 Ziffern sind zu finden.

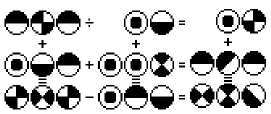
abc-dbb=efg abb-ecc=bbb dbeb-hbb=ibc	ab0-1bb=efg abb-e00=bbb 1beb-hbb=ib0	6b0-1bb=efg 6bb-e00=bbb 1beb-hbb=ib0	620-122=ef8 622-e00=222 12e2-h22=i20	620-122=498 622-400=222 1242-h22=i20
Wegen c+b=b ist die Ziffer c=0. Weiter ist in der letzten Zeile d=1	Für a kommen wegen a+a=10+b die Ziffern a=6, a=7, a=8 oder a=9 in Frage. a=6 wird weiter verfolgt	Es sei a=6.Wegen 6+6=10+b ist b=2. (b=3 ist wegen b+b=g nicht möglich.) Weiter ist wegen g+b=0 (10) die Variable g=8	Wegen 620-122=ef8 sind e=4 und f=9	Wegen 122+400=522 ist h=5. Wegen 498+222=720 ist i=7

Ergebnis: 620-122=498
622-400=222
1242-522=720

Die Erfahrung zeigt, dass Symbolrätsel nur eine Lösung haben. Deshalb muss man die Fälle a=7, a=8 oder a=9 nicht weiter verfolgen. Verfolgt man sie, so gelangt man schnell zu Widersprüchen.

Lösungsdiagramm:

```
              a=6 - b=2 - g=8 - e=4 - f=9 - h=5 - i=7
c=0 - d=1 <   a=7 - b=4 - e=8 - Stop
              a=8 - b=4 - Stop
              a=9 - b=8 - Stop
```



Beispiel 3

Das Rätsel enthält 1 Quotienten, 4 Summen und und 1 Differenz.
Es müssen 9 Ziffern bestimmt werden.

aba :.cd=.ce cda+ccf=aga ehe-cad=hfi	aba :.cd=.ce cda+cc0=aga ehe-cad=h0i	aba :..1d=..1e 1da+110=aga ehe-1ad.=h0i 2b2 :..1d=..1e 1d2+110=2g2 ehe-12d=.h0i	2b2 :..1d=..14 1d2+110=2g2 4h4-12d=h0i	252 :..18=..14 182+110=2g2 4h4-128.=h0i
Wegen d+f=d ist f=0	Wegen der ersten Zeile ist c=1 oder c=2 oder c=3. Ein Produkt aus zwei zweistelligen Zahlen ist nur dreistellig, wenn die erste Ziffer 1,2 oder 3 ist. c=1 wird weiter verfolgt	Wegen 1+1=a ist a=2 Wegen 2+2=e ist e=4	Die erste Zeile wird nur durch 252=18x14 erfüllt. .... Damit sind b=5 und d=8	Wegen 4+2=i ist i=6. Wegen 182+110=292 ist g=9. Dann ist h=3

Ergebnis: 252 : 18= 14
182+110=292
434-128 =306

Mathematischer Hintergrund

Beim Symbolrätsel handelt es sich um ein Gleichungssystem aus 6 Gleichungen mit mehr als 6 Variablen. Nur 6 Gleichungen mit 6 Variablen führen i.a. zu eindeutigen Lösungen. Wenn Symbolrätsel trotzdem praktisch nur eine Lösung haben, so liegt es daran, dass nur natürliche Zahlen als Lösung zugelassen sind und, das ist eine weitere Einschränkung, für verschiedene Symbole verschiedene Zahlen, für gleiche Symbole gleiche Zahlen eingesetzt werden müssen.

a	+	b	=	a+b
+		+		+
c	+	d	=	c+d
=		=		=
a+c	+	b+d	=	a+b+c+d

b*c	:	b	=	c
+		*		
d	*	e	=	d*e
=		=		=
b*c+d	+	b*e	=	b*c+d+ b*e+d*e

Symbolrätsel, Kryptogramm

Symbolrätse, d.h. Krpytogramme, nur aus Summen herzustellen, ist leicht. Dazu wählt man 4 Zahlen a, b, c und d, bildet die Summen und ordnet sie zu dem oben abgebildeten Schema an.
Da Kryptogramme gern mit Symbolen abgebildet werden, tauscht man die auftretenden Ziffern der Zahlen gegen verschiedene Bilder.
Sollen auch Produkte oder Quotienten vorkommen, wird es schwieriger, geeignete Anordnungen zu finden. Im Allgemeinen werden heute Computer eingesetzt.
Relativ einfach ist es, ein Rechenschema wie in der unteren Abbildung zu konstruieren. Hier werden vier Zahlen b, c, d und e zufällig gebildet und deren Summen, evtl. Differenzen und Produkte ermittelt.
Meist werden noch parallele Zeilen oder senkrechte Spalten vertauscht, wobei die Rechenoperationen zu berücksichtigen sind, die dann gegebenfalls ausgetauscht werden müssen.

6	−	4	÷	2	=	1
−		−		−		
5	−	3	−	1	=	1
=		=		=		
1		1		1		

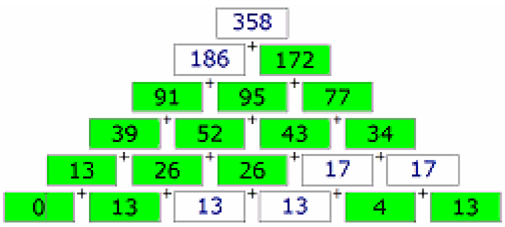
6	−	5	×	2	=	2
−		−		÷		
4	−	3	+	1	=	2
=		=		=		
2		2		2		

8	−	7	+	4	−	3	=	2
−		−		−		−		
6	−	5	+	2	−	1	=	2
=		=		=		=		
2		2		2		2		

Isogrid

Ein Isogrid ist eine spezielle Form des Symbolrätsels oder Kryptogramms. Dabei sind einstellige Zahlen gesucht, so dass ineinander verschachtelte Gleichungen erfüllt sind. Zusätzlich wird gefordert, dass alle Gleichungen das gleiche Ergebnis liefern.
Gesucht sind alle möglichen Ergebnisse bei verschieden großen Isogrids. Ein n × m-Isogrid besteht aus n Zeilen und m Spalten mit insgesamt n·m einstelligen Zahlen.
Für 2 × 3-Isogrids kennt man nur Lösungen mit einem Ergebnis 1, 2, 3 und 7; für 2 × 4-Isogrids Lösungen mit 1, 2, 3, 4 und 9.
Die bekannten Lösungen für 3 × 3 sind in der Animation zu sehen. Diese können Sie schrittweise weiterschalten.

Zahlenpyramide



Bei einer Zahlenpyramide sind Zellen mit Zahlen so aufgeschichtet, dass auf je zwei benachbarte Zellen einer Schicht eine dritte Zelle gesetzt wird, in die ein Rechenergebnis der beiden unteren Steine eingetragen wird.
Meist wird die Summe der zwei unteren Zahlen verwendet, seltener die Differenz.
Da verschiedene Zahlen in der Zahlenpyramide vorgegeben sein könnn, erfordert das Ausfüllen der Pyramide Additionsaufgaben (Rechnen "von unten nach oben") oder Subtraktions- bzw. Ergänzungsaufgaben (Rechnen "von oben nach unten").

Zahlenpyramiden werden bevorzugt im Grundschulbereich, aber auch in den unteren Klassen der Sekundarstufe I genutzt.
Der große Vorteil von Zahlenpyramiden liegt darin, dass Additions- und Subtraktionsaufgaben in gemischter Form vorkommen können. Die Kinder sind so gefordert, bei jedem Bestimmen einer freien Zelle genau zu überlegen, wie sie den gesuchten Wert mit Hilfe einer Addition oder Subtraktion berechnen können.

Geht man von einer Zahlenpyramide mit 6 Etagen aus, so müssen für eine eindeutige Lösbarkeit mindestens 6 Zellen vorgegeben sein. Soll keine der 21 Rechenaufgaben schon eingetragen sein, können höchstens 13 Zellen gefüllt sein. Insgesamt gibt es, ohne Berücksichtigung von Symmetrie, 335890 Ausgangsmöglichkeiten.
Werden die Zellen von oben nach unten und von links nach rechts nummeriert und belegte Zellen mit 1 gekennzeichnet, so kann eine Ausgangssituation als 21ziffrige Dualzahl interpretiert werden.
Die Tabelle enthält alle Belegungsmöglichkeiten für genau 6 Ausgangswerten.

Ziffernsymbolrätsel

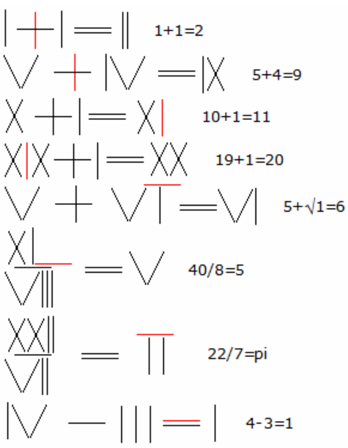
Symbolrätsel der besonderen Form sind "Gleichungen", die aus verschiedenen Wörtern gebildet werden, bei denen die einzelnen Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden können, um in Zahlen gültige Gleichungen zu erhalten.

Ein klassisches Beispiel ist die "biblische Gleichung":

J A C O B + E S A U = I S A A C

Jeder der Buchstaben A, B, C, I, J, O, S und U soll eine andere Ziffer darstellen. Gesucht sind alle möglichen Lösungen.
Zur Bestimmung aller möglichen Belegungen werden Ausschöpfungsverfahren (Brute-Force-Verfahren) genutzt, bei denen einfach alle möglichen Variablenbelegungen überprüft werden.
Für das Beispiel erhält man 26 verschiedene Lösungen:

A	B	C	E	I	J	O	S	U	Jacob	Esau	Isaac	A	B	C	E	I	J	O	S	U	Jacob	Esau	Isaac
2	4	1	8	6	5	9	0	7	52194	8027	60221	2	5	1	8	4	3	9	0	6	32195	8026	40221
2	6	1	8	4	3	9	0	5	32196	8025	40221	2	7	1	8	6	5	9	0	4	52197	8024	60221
3	4	2	7	6	5	9	0	8	53294	7038	60332	3	8	2	7	6	5	9	0	4	53298	7034	60332
4	5	3	6	2	1	9	0	8	14395	6048	20443	4	8	3	6	2	1	9	0	5	14398	6045	20443
6	4	2	7	1	0	9	3	8	06294	7368	13662	6	7	5	4	2	1	9	0	8	16597	4068	20665
6	7	5	4	3	2	9	0	8	26597	4068	30665	6	8	5	4	2	1	9	0	7	16598	4067	20665
6	8	5	4	3	2	9	0	7	26598	4067	30665	6	8	2	7	1	0	9	3	4	06298	7364	13662
7	6	4	5	1	0	9	2	8	07496	5278	12774	7	8	4	5	1	0	9	2	6	07498	5276	12774
9	1	7	3	5	4	0	2	6	49701	3296	52997	9	1	6	4	8	7	0	3	5	79601	4395	83996
9	1	4	6	8	7	0	5	3	79401	6593	85994	9	1	3	7	5	4	0	6	2	49301	7692	56993
9	2	3	7	5	4	0	6	1	49302	7691	56993	9	3	8	2	7	6	0	1	5	69803	2195	71998
9	3	4	6	8	7	0	5	1	79403	6591	85994	9	5	8	2	7	6	0	1	3	69805	2193	71998
9	5	6	4	8	7	0	3	1	79605	4391	83996	9	6	7	3	5	4	0	2	1	49706	3291	52997



Legespiele

Es hat Tradition aus Streichhölzern Gleichungen zu legen, die offensichtlich falsch sind. Legt man nur ein Streichholz um, wird die Gleichung richtig. Auf Grund ihrer äußeren Form eignen sich besonders römische Zahldarstellungen.
Beispiele:

I - I = II	1 - 2 = 2
VI - IV = IX	6 - 4 = 9
XI + I = X	11 + 1 = 10
XX + I = XIX	20 + 1 = 19
V + VII = VI	5 + 7 = 6
XI / VIII = VI	11 / 8 = 6
XXII / VIII = II	22 / 8 = 2
IV = III - I	4 = 3 - 1

Die Lösungen sind in der Abbildung zu sehen.

Am 18.Oktober 2007 wurde gegen 17 Uhr auf dem Sender DSF ein Telefonanrufspiel durchgeführt, bei dem folgende Aufgabe gestellt wurde:
Welcher Schläger muss umgelegt werden, damit die Gleichung korrekt ist?

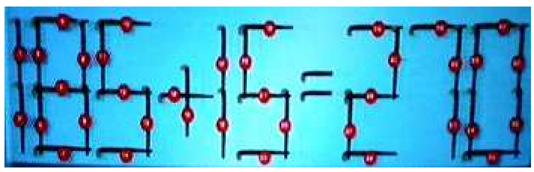
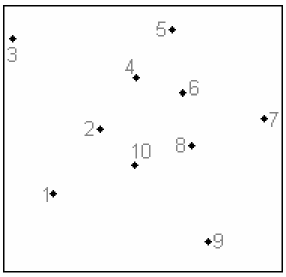
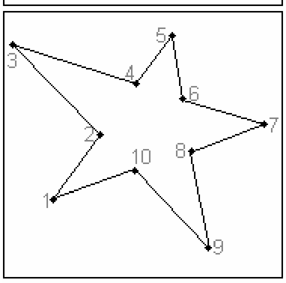


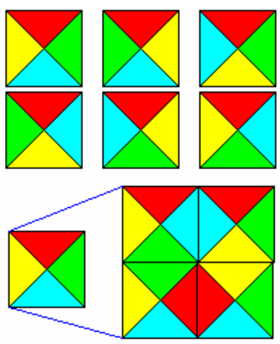
Abbildung: Aufgabenstellung
Da die Anrufer natürlich auf das Übelste abgezockt wurden; angeblich waren 7(!) Leitungen "offen", gab es keinen Anrufer, der in das Studio durchgestellt wurde. Somit gab es keine Lösung.
Die richtige Lösung ist, aus der "8" der 185 eine "9" zu machen und den Stab an die "1" der 15 so zu legen, dass 195 + 75 = 270 entsteht.





Malen nach Zahlen

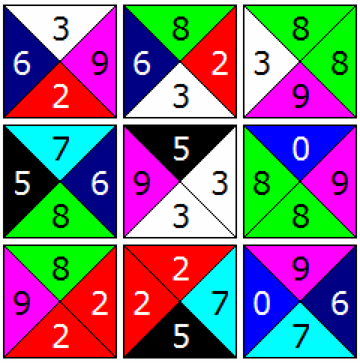
Für das Spiel "Malen nach Zahlen", nutzt man ein Blatt Papier, auf dem nummerierte Punkte ungleichmäßig verteilt sind.
Verbindet man sie nach der Folge der natürlichen Zahlen, ergibt sich ein Bild, das man vorher nicht gesehen hat.
Innerhalb der Mathematik tritt dieses Grundprinzip zum Beispiel bei Darstellungen in Koordinatensystemen und anderen Diagrammen auf.



Farbwürfel von MacMahon

Ein interessantes Logikspiel sind die Farbwürfel von MacMahon. Das sind Würfel, die auf den Seitenflächen sechs verschiedene Farben in allen Kombinationen haben. Geht man vom Würfel auf Quadrate zurück, muss man den Quadratseiten vier Farben geben. Diese Färbung erweitert man auf die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke, die den Seiten anliegen.

Damit gibt es sechs verschiedene Farbquadrate mit vier verschiedenen Farben. (obere Abbildung)
Das Würfelproblem von MacMahon lautet nun für Quadrate:
Man greife ein Quadrat heraus und baue aus vier der fünf übrigen Quadrate ein doppelt so großes Quadrat mit gleichen Farben außen. Innen sollen gleiche Farben aufeinander treffen. In der unteren Abbildung ist eine Lösung dargestellt.
Diese Farbquadrate werden auch Wang-Täfelchen genannt, da Hao Wang 1961 die Quadrate für Parkettierungsprobleme in vielen Variationen beschrieb:
Man soll die Steine in der Ebene so verlegen, dass immer gleiche Farben aneinander stoßen.

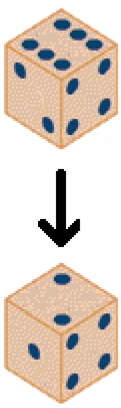


Tetravex

Tetravex ist eine Puzzlespiel, bei dem eine Menge von quadratischen Teilen zu einem großen Quadrat anzuordnen sind. Jede der vier Seiten eines Teiles ist mit einer Zahl beschriftet (altgriechisch τετρα = vier, lateinisch vexo = zerrütten). Nebeneinanderliegende Seiten müssen in der Lösungsanordung die gleiche Zahl haben.

Bei n Teilen gibt es n! mögliche Anordnungen, d.h. bei 9 Teilen 362880.
Es kann mehrere, oder auch keine Lösungen geben.
Eine einfache Strategie ist es, die Felder des Lösungsquadrates von einer Ecke bis zur gegenüberliegenden mit Teilen zu füllen. Kommen dabei zwei unterschiedliche Zahlen nebeneinander zum Liegen, wird das zuletzt gelegte Teil durch ein alternatives ersetzt. Gibt es keine Alternative mehr, wird die Belegung des zu vorletzt bearbeiteten Feldes ersetzt, und so weiter.
Eine Heuristik, um die Problemgröße eventuell einschränken zu können ist es, Rand- und Eckteile auszumachen. Hat beispielsweise ein Teil oben eine 7, aber kein anderes Teil unten eine 7, so muss dieses Teil am oberen Rand des Lösungsquadrates angeordnet werden.

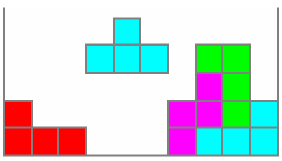
Gewöhnlich wird mit 9 Teilen gespielt. Häufig werden auch 4, 16 oder sogar 25 Teile verwendet.
Da für jedes Spiel neue Teile benötigt werden, ist Textravex meist als Computerspiel umgesetzt. Meist werden die Zahlen von 0 bis 9 verwendet, es können aber beliebige Paare verwendet werden, etwa auch Farben, Bilder oder Vokabeln.



Würfel-Nim

Zu diesem Logikspiel gehört ein Würfel dazu, mit dem aber nicht gewürfelt wird, sondern der von den beiden Spielern nur gedreht wird. Die Spielregeln:
Würfel-Nim ist ein Zwei-Personen-Spiel; die Spieler werden mit A und B bezeichnet.
Vor Beginn des Spiels wird ein Zahlenpaar (n,j) festgelegt. n ist eine nicht zu kleine natürliche Zahl, etwa n > 20. j wird gewürfelt, ist also eine natürliche Zahl zwischen 1 und 6.

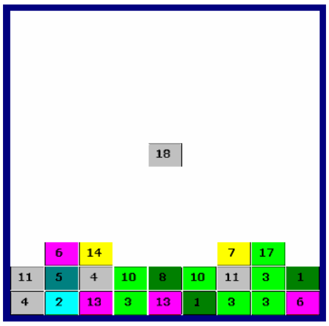
Bestimmung von (n,j) : A oder B wählt eine natürliche Zahl N. Durch Würfeln wird n = N - Augenzahl ermittelt. j wird ebenfalls durch Würfeln bestimmt. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:
Variante I: Der Würfel wird nur einmal geworfen. Die Augenzahl j dient gleichzeitig zur Ermittlung von n, also ist n = N - j.
Variante II: Der Würfel wird zweimal geworfen, um zuerst n = N - Augenzahl und dann j zu bestimmen.
A beginnt das Spiel. A und B sind abwechselnd am Zuge. Nach jedem Zug wird ein neuer "Score" m berechnet. Vor dem ersten Zug ist der Score m = n.
Der Spieler am Zuge dreht den Würfel über eine Kante seiner Wahl (4 Möglichkeiten) und bringt damit eine andere Augenzahl nach oben. Den neuen Score erhält man, indem man diese Augenzahl vom alten Score subtrahiert.
Es wird vorausgesetzt, dass für diese Drehungen ein regulärer Würfel verwendet wird, der auf gegenüberliegenden Seiten jeweils die Augensumme 7 aufweist.
Ende des Spiels: Verloren hat der Spieler, der durch seinen Zug als erster auf einen negativen Score kommt.
Quelle: http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem058.htm



Tetris

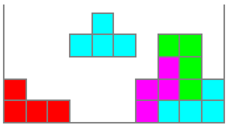
Spielregeln: Tetrominos fallen in einen Kasten. Man muss durch seitliches Verschieben und Drehen während das Falles die Steine so bewegen, dass unten eine waagerechte Schicht mit Quadraten ausgefüllt wird. Das ist im nebenstehenden Bild gelungen.
Der hellblaue Stein fällt im nächsten Moment in eine Lücke. Man erhält dann Punkte. Die Reihe aus 10 Quadraten verschwindet. Der nächste Zufallsstein folgt von oben. Gelingt es nicht eine waagerechte Reihe zu bilden, so bildet sich ein Haufen. Haben die Steine den oberen Rand erreicht, ist das Spiel beendet.

Das Ende ist unvermeidbar: Die Steine fallen mit zunehmender Punktezahl immer schneller, schließlich so schnell, dass man nur noch tatenlos zusehen kann.
Tetris hat eine interessante Entstehungsgeschichte. Es wurde 1984 vom sowjetischen Mathematiker Alexej Patschitnow erfunden, der damals im Computerzentrum der Moskauer Akademie der Wissenschaften tätig war. Es wurde schnell das Kultspiel Moskauer Studenten.
Minoru Arakawa, Präsident von Nintendo, sah das Spiel auf einer Computermesse und kaufte die Vermarktungsrechte - günstig. Als dann der Game-Boy auf den Markt kam, wurde er standardmäßig mit diesem Spiel ausgerüstet.
Der Name Tetris leitet sich von der griechischen Vorsilbe τετρακις = tetrakis (tetra-) für "vier" ab, da alle fallenden Steine aus vier Quadraten zusammengesetzt sind.



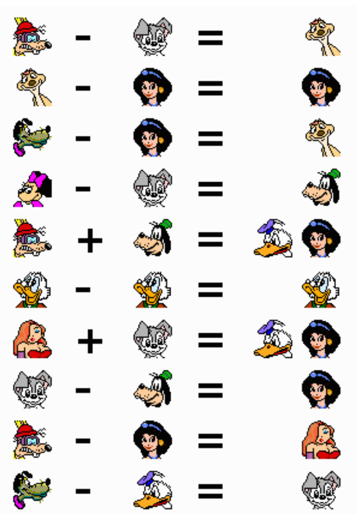
Zahlentetris

Tetris, eine Erfindung des sowjetischen Mathematikers Alexej Pajitnov, ist wohl von keinem Computersystem wegzudenken, ob Personalcomputer, Spielkonsole, selbst grafikfähigen Taschenrechner, ... Das Spiel, bei dem Figuren herunterfallen und durch den Spieler durch Drehung und Verschiebung zu vollständigen Flächen angeordnet werden müssen, ist der Spieleklassiker schlechthin.
Eine stark veränderte Variante ist Zahlentetris, die von dem Spieler neben Reaktionsvermögen auch sehr gute „Kopfrechenfähigkeiten" verlangt.
Dabei fallen Rechtecke von oben nach unten, die alle einen Zahlenwert tragen. Diese können während ihres Fluges nach links oder rechts verschoben werden. Ziel dieses Spiels ist es aber nicht, geschlossenen Zeilen zu erzielen, sondern drei übereinander liegende Zahlen zu erzeugen, bei denen die oberste die Summe der beiden darunter liegenden Zahlen ist. In diesem Fall werden alle drei Zahlen vom Spielfeld entfernt und deren Summe dem Spieler als Punkte gutgeschrieben.
Im Beispiel könnte die „18" zwei Spalten weiter links auf die „14" und die „4" abgelegt werden. Da 4 + 14 = 18 ist, würden die drei Steine entfernt und 36 Punkte gutgeschrieben.



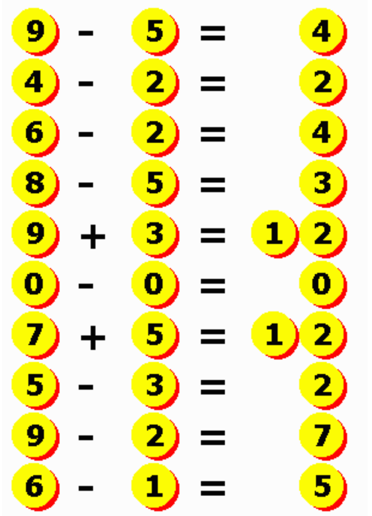
Tetris

Spielregeln: Tetrominos fallen in einen Kasten. Man muss durch seitliches Verschieben und Drehen während das Falles die Steine so bewegen, dass unten eine waagerechte Schicht mit Quadraten ausgefüllt wird. Das ist im nebenstehenden Bild gelungen. Der hellblaue Stein fällt im nächsten Moment in eine Lücke. Man erhält dann Punkte. Die Reihe aus 10 Quadraten verschwindet. Der nächste RND-Stein folgt von oben. Gelingt es nicht eine waagerechte Reihe zu bilden, so bildet sich ein Haufen. Haben die Steine den oberen Rand erreicht, ist das Spiel beendet. Das Ende ist unvermeidbar: Die Steine fallen mit zunehmender Punktezahl immer schneller, schließlich so schnell, dass man nur noch tatenlos zusehen kann.
Tetris hat eine interessante Entstehungsgeschichte. Es wurde 1984 vom Russen Alexij Patschitnow erfunden, der damals im Computerzentrum der Moskauer Akademie der Wissenschaften tätig war. Es wurde schnell das Kultspiel Moskauer Studenten.
Minoru Arakawa, Präsident von Nintendo, sah das Spiel auf einer Computermesse und kaufte die Vermarktungsrechte - günstig. Als dann der Game-Boy auf den Markt kam, wurde er standardmäßig mit diesem Spiel ausgerüstet.



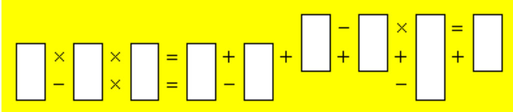
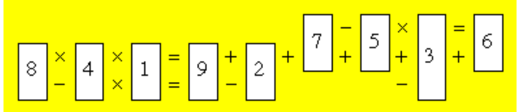
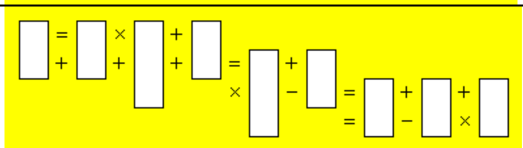
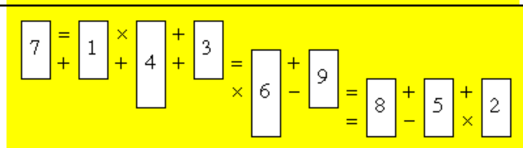
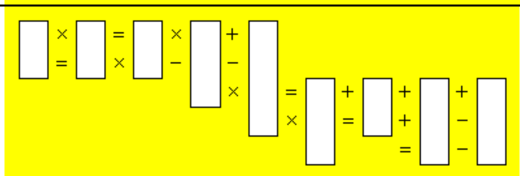
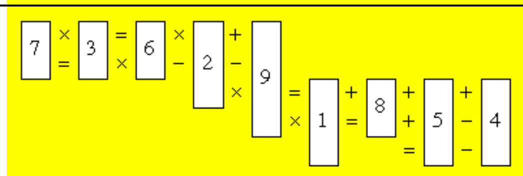
Rechenpuzzle

Puzzle mit der Aufgabe Symbole durch Ziffern so zu ersetzen, dass korrekte Gleichungen entstehen, gibt es sehr viele. In diesem Beispiel sind zehn einfache Grundrechenaufgaben vorgegeben. Jedes Symbol stellt eine Ziffer dar.
Durch logisches Überlegen sollen die Belegungen der einzelnen Ziffern gefunden werden. Dabei sind die Ziffern 0 und 1 meist schnell richtig zu ermitteln. Die anderen Ziffern erschließen sich durch Kombination der einzelnen Gleichungen und mit Hilfe des Ausschlussverfahrens.
Im Beispiel liefert die 6.Gleichung sofort, dass „Onkel Dagobert" die 0 darstellt. Die Zehnerstelle in der 5. und 7.Gleichung ergibt für „Donald Duck" die 1.



Gleichungspuzzle

Jedes Kästchen kann eine Ziffer von 1 bis 9 aufnehmen, so dass alle waagerechten Rechnungen aufgehen müssen.

Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		

4	2	32	2
2	512	4	64
2		8	16

Spiel 2048

Das Spiel 2048 gehört zu den faszinierenden Spielen mit einer sehr einfachen Spielidee. Gegeben ist ein 4x4-Spielfeld, von dem zu Beginn 2 Felder mit der Zahl 2 gefüllt sind.
Ziel ist es, ein Feld mit dem Wert 2048 zu erzeugen.
Gesteuert werden die Felder i.A. mit den Pfeiltasten einer Tastatur, d.h. die Kästchen können sich in die Richtungen links, rechts, hoch und runter bewegen. Es werden jeweils alle Felder auf evtl. vorhandene freie Zellen verschoben.
Werden 2 Kästchen mit der gleichen Zahl "aufeinander" geschoben, so vereinen sich diese Kästchen zu einem einzelnen Kästchen und der Wert des neu entstandenen Kästchens verdoppelt sich.
Nach jedem Spielzug wird ein noch leeres Feld, wenn möglich mit einer 2 oder in 10% der Fälle mit einer 4 gefüllt.
Dieses Spiel ist nicht einfach.
Eine grundlegende Strategie sollte sein, das jeweils größte Feld in einer Ecken zu platzieren und möglichst viele Felder zu vereinigen.
Für ein Spielfeld größer als 4x4 ist die Aufgabe einfach; für 3x3 praktisch unlösbar. Der interessante und anspruchsvolle Fall ist gerade das Spielfeld mit 16 Zellen.
https://www.youtube.com/watch?v=OO4tA5i7X9g&feature=youtu.be

Sudoku

japanisch: Zahlen-Einzel; kurz für Suji wa dokushin ni kagiru, wörtlich: Zahlen als Einzel beschränken

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

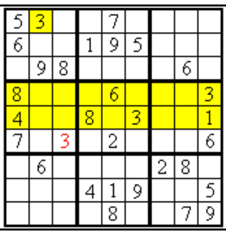
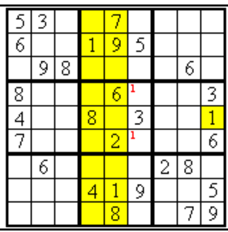
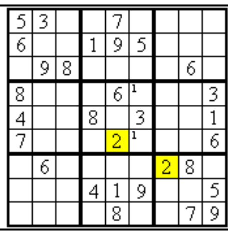
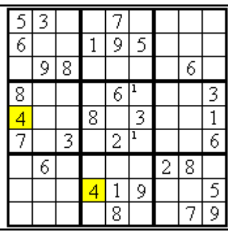
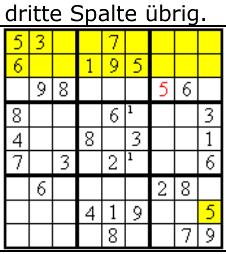
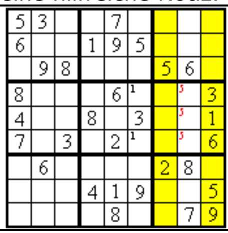
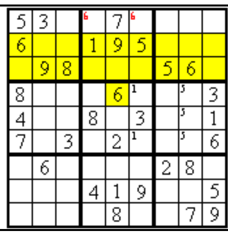
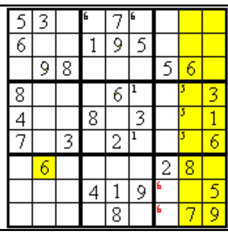
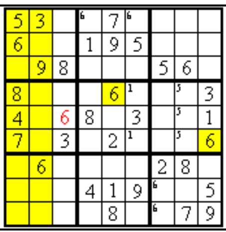
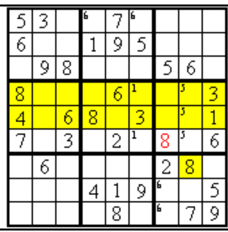
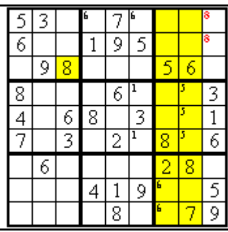
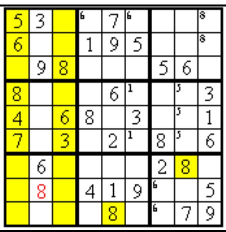
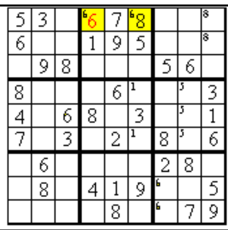
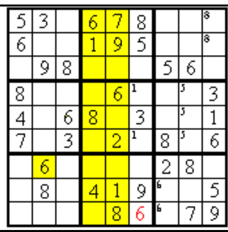
Sudoku ist ein Knobelspiel.
Gegeben ist ein Quadrat aus 9 x 9 = 81 Kästchen, in denen bestimmte Ziffern schon eingetragen sind. Hier sind es 30 Ziffern, sonst sind es um die 30. Die Symmetrie in der Verteilung der Ziffern ist eine schöne Beigabe und hat Tradition. Die Aufgabe besteht darin, die freien Kästchen so mit Ziffern zu besetzen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte, in jedem 3 x 3-Teilquadrat ("Kachel") die Ziffern 1 bis 9 vorkommen. Sie ist beim Sudoku eindeutig. Sudoku ist kein Zahlenspiel, eher ein Ziffernspiel. Die Zahlen werden als Zeichen verwendet.
Rechts ist die Lösung zu sehen. Sie ist beim "richtigen" Sudoku wie hier eindeutig. Sudoku ist kein Zahlenspiel, eher ein Ziffernspiel. Die Zahlen werden als Zeichen verwendet.
Statt der Ziffern könnte man auch die Buchstaben a b c d e f g h k nehmen.

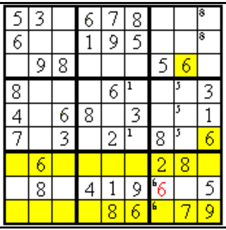
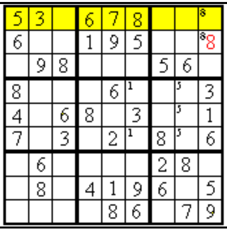
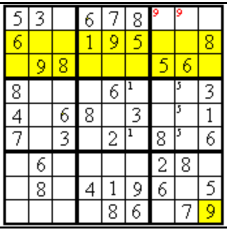
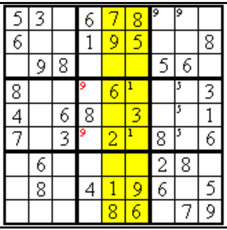
5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Während eines Besuchs in Japan stieß der Neuseeländer Wayne Gould in einer Zeitschrift auf Sudoku und verfiel diesem Rätsel. Daraufhin entwickelte er ein Computerprogramm, das Sudoku-Rätsel generiert, und veröffentlichte diese Rätsel im Internet. Ende 2004 schaffte er das schier Unmögliche und drang mit Sudoku bis zur Redaktion von "The Times" vor. Dort konnte er einen Feuilletonredakteur von Sudoku begeistern, mit dem bekannten weltweiten Erfolg.
Der früheste Ursprung des Sudoku kann in den Rätselspielen des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler gesehen werden, der solche unter dem Namen Carré latin (Lateinisches Quadrat) bereits im 18. Jahrhundert verfasste.
In Österreich führte der regelmäßige Abdruck in Tageszeitungen wie "Der Standard" zu einer raschen Verbreitung Ende 2005. In Deutschland erscheinen Sudokus erst seit 2006.

Lösen eines leichten Sudokus

Der hier dargestellte Weg ist ein Weg von vielen. In einem ersten Durchgang wird Drei-Kachel-Verfahren oder Scannen verwendet. Dabei wird nacheinander nach den Positionen der Ziffern Eins bis Neun gesucht. Normalerweise hält man die Reihenfolge Eins, Zwei, Drei,... ein. Ausnahmsweise wird hier die Ziffer Drei vorgezogen, um das Verfahren zu erläutern.

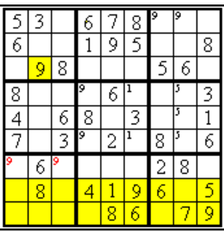
			
Die Suche nach der vierten Drei geht von drei nebeneinander liegenden Kacheln aus, in denen sich genau zwei Dreien befinden. In diesen Falle sind es die drei mittleren Kacheln mit zwei Dreien rechts. Eine weitere Drei muss in der sechsten Zeile und der Kachel links liegen. Nur zwei Kästchen sind unten frei. In der zweiten Spalte steht ganz oben eine Drei, also darf in dieser Spalte keine weitere Drei sein. Folglich bleibt für Drei nur die dritte Spalte übrig.	Die erste Ziffer, die normalerweise zuerst untersucht wird, ist Eins. Hier liegen die drei Kacheln, die irgendwo zwei Einsen enthalten, untereinander. In der mittleren Spalte liegen oben und unten zwei Kacheln mit einer Eins. Also muss die mittlere Kachel in der rechten Spalte eine Eins tragen. Da sind zwei Kästchen möglich. Man kann in diese beiden Kästchen zwei kleine Einsen als Kandidaten schreiben. Das ist eine hilfreiche Notiz.	Suche nach einer Zwei Die Zwei kommt zwar zweimal vor, nicht aber in Kacheln einer Reihe oder Spalte. Deshalb führt das Scannen zu keinem Ergebnis.	Suche nach einer Vier Auch für die Vier führt das Scannen nicht weiter.
			
Suche nach der Fünf Eine Fünf ergibt sich eindeutig.	Die gefundene Fünf hat Folgen: Mit Hilfe dieser Fünf wird die Lage einer weiteren Fünf auf drei Kästchen eingeengt.	Suche nach einer Sechs	
			
	Suche nach einer Sieben Vergeblich!	Suche nach einer Acht	
			
		Man findet 3 Achten. Die letzte Acht liegt in einem Kästchen mit einer kleinen Sechs. Da dieses Kästchen jetzt mit einer Acht besetzt ist, kommt in das andere Kästchen eine Sechs.	Das wiederum hat Konsequenzen.

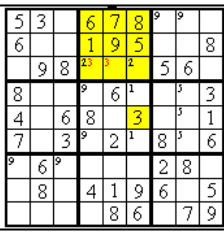
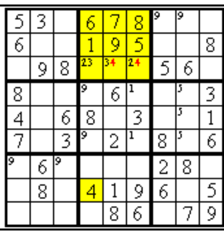





Es ergeben sich zwei weitere Sechsen. Damit sind alle Sechsen gefunden.

Da in der ersten Zeile in der mittleren Kachel eine Acht steht, muss in der zweiten Zeile ganz rechts eine Acht stehen. Damit sind alle Achten gefunden.

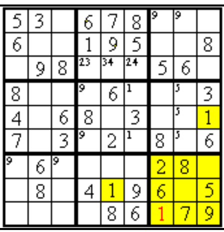
Suche nach einer Neun

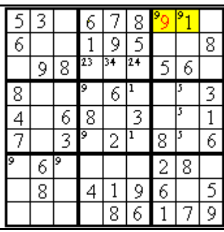
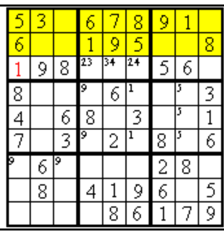


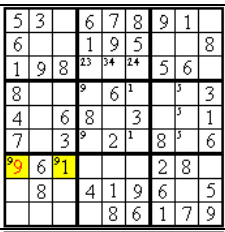
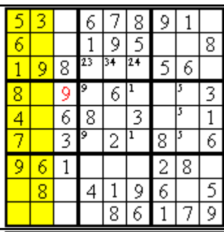
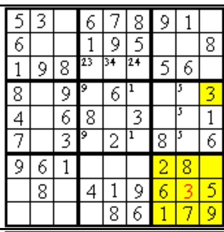
Mit dem Scannen sind also zehn Ziffern gefunden. 30 Ziffern waren gegeben, jetzt sind 40 Ziffern bekannt.

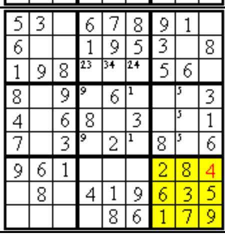
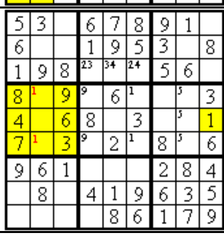
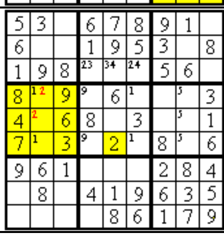
Im 2.Durchgang durchforstet man die einzelnen Kacheln, die schon möglichst viele Ziffern enthalten. Man geht die fehlenden Ziffern Zwei, Drei und Vier durch.



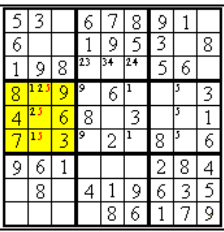



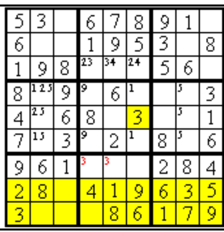
Die nächste Kachel liegt unten rechts. Da fehlen noch Eins, Drei und Vier.

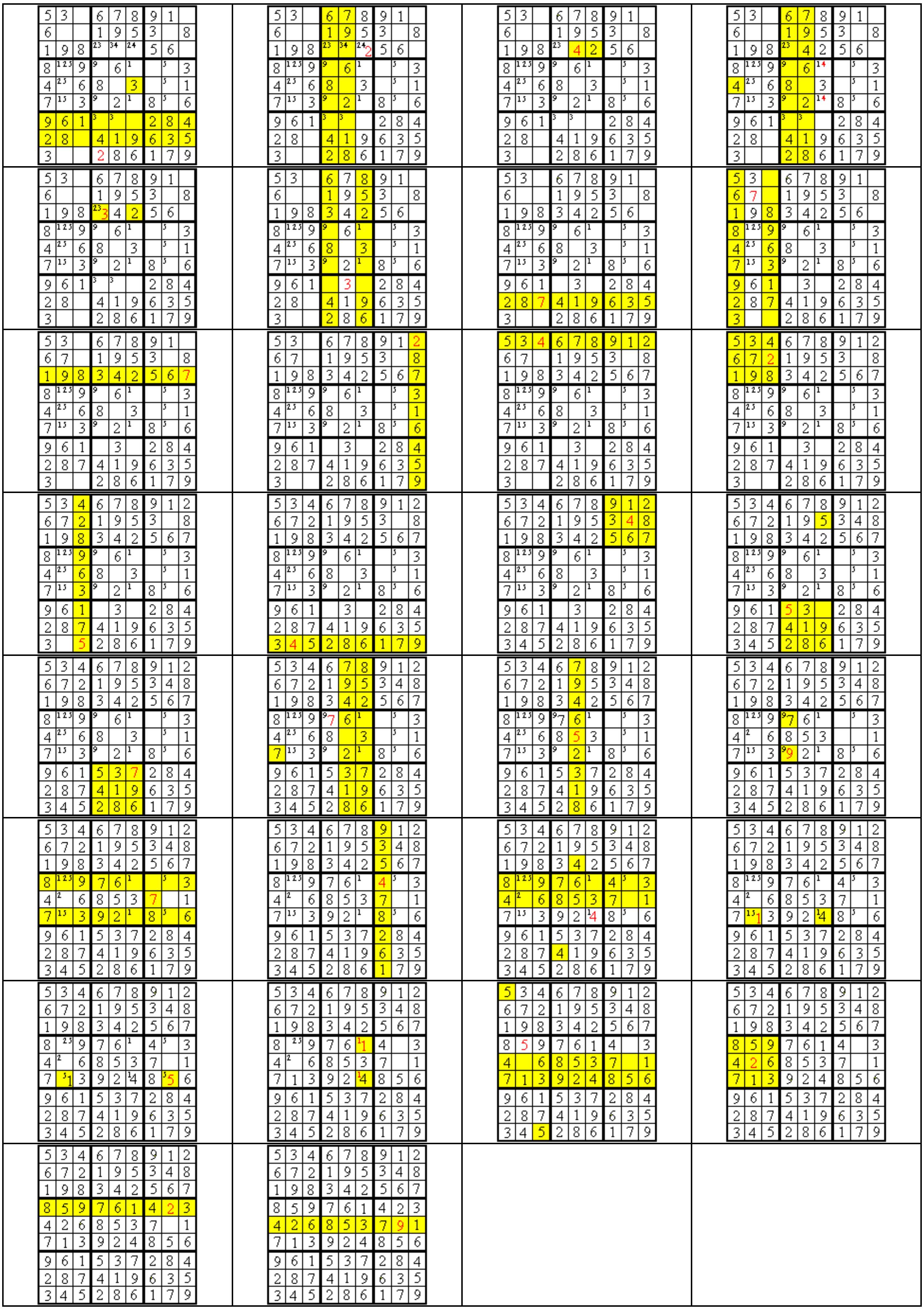




Nächste Kachel liegt links in der Mitte.



Nun werden Zeilen und Spalten einzeln untersucht



Sudoku-Mathematik

Die Zahl der möglichen 9 × 9-Sudokus beträgt nach Berechnung von Bertram Felgenhauer (2005)
6.670.903.752.021.072.936.960,
d.h. Sechs Trilliarden sechshundertsiebzig Trillionen neunhundertunddrei Billiarden siebenhundertzweiundfünfzig Billionen einundzwanzig Milliarden zweiundsiebzig Millionen

neunhundertsechsunddreißigtausendneunhundertsechzig. Diese Zahl ist gleich $9! \cdot 72^2 \cdot 2^7 \cdot 27704267971$; der letzte Faktor ist eine Primzahl.
Die Zahl wurde unabhängig davon durch Ed Russell bestätigt. Nach Ed Russell und Frazer Jarvis gibt es 5.472.730.538 Möglichkeiten bei Berücksichtigung von Symmetrien. Die Zahl gültiger 16 × 16-Sudokus ist unbekannt.

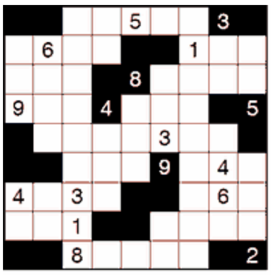
Die maximale Zahl von Vorgaben, die nicht zu einer eindeutigen Lösung führen, ist, unabhängig von der Variante, um vier geringer als die Gesamtzahl der Felder (z.B. 81 - 4 = 77 bei der Standardvariante). Wenn von zwei Zahlen jeweils zwei Vorgaben fehlen, die zugehörigen Felder auf den Ecken eines Rechtecks liegen, dessen Ecken paarweise im selben Block liegen und dessen Kanten in der selben Zeile bzw. Spalte liegen, gibt es zwei Möglichkeiten, diese Zahlen einzutragen.
Das andere Extrem – die Mindestzahl von Vorgaben, die zu einer eindeutigen Lösung führen – zu bestimmen ist ein ungelöstes Problem. Die Mindestzahl, die bisher für die Standardvariante ohne Symmetrieforderung gefunden wurde, ist 17. Dies haben japanische Rätselenthusiasten herausgefunden. Bei drehsymmetrischer Anordnung sind es 18.

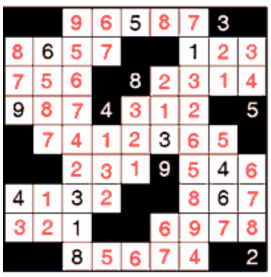
Weltmeisterschaft

Vom 10. bis 12. März 2006 wurden in Lucca (Italien) die ersten offiziellen Sudoku-Weltmeisterschaften durchgeführt. Initiator war der Mailänder Verlag Nonzero, Teilnehmer waren 85 Kandidaten aus 22 Nationen.
Weltmeisterin wurde die tschechische Wirtschaftswissenschaftlerin Jana Tylova, den zweiten und dritten Platz belegten mit dem Chemiestudenten Thomas Snyder und dem Softwareentwickler Wei-Hwa Huang zwei US-Amerikaner. Der deutsche Kopfrechnen-Weltmeister Gert Mittring wurde nur Drittletzter.

Sudoku-Algorithmus

1) Einfaches Einschränken - Man trage alle 9 Zahlen in jedes freie Feld ein und streicht all die, die in der Zeile, Spalte oder dem Teilbereich vorkommen.
2) Zahl setzen - Wenn in einem Feld nur eine einzelne Möglichkeit verbleibt, trägt man diese als sicher ein und beginnt von vorne.
3) Weiteres Einschränken - Kommen zwei Zahlen in einer Zeile (Spalte/Teilbereich) in zwei Feldern jeweils beide exclusiv vor kann man diese Zahlen aus allen anderen Feldern dieser Zeile (Spalte, Teilbereich) streichen.
Analog geht dies für 3 Zahlen in 3 Feldern und 4 Zahlen in 4 Feldern…
4) Einschränken Stufe Zwei - Kommen zwei Zahlen nur in zwei Feldern vor und in keinem anderen, so kann man alle anderen Zahlen aus den zwei Feldern streichen.
Wiederum funktioniert dies analog für drei, vier und fünf Zahlen.
5) Einschränken Stufe Drei - Kommt eine Zahl z in einer Spalte s (bzw. Zeile) eines Teilbereiches vor und ist aber für jede anderen Zeile des Teilbereiches ausgeschlossen, so kann man die Zahl aus allen Feldern der Zeile s außerhalb des Teilbereiches streichen.





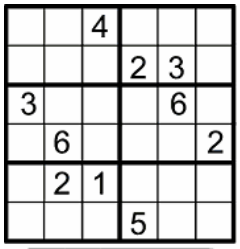
Str8ts

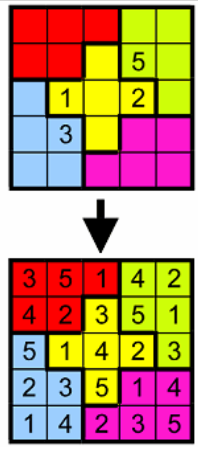
Str8ts ist ein sudokuähnliches Logikrätsel. Das Rätsel wurde 2008 von dem Kanadier Jeff Widderich erfunden. Ziel war es, ein Logik-Rätsel mit ähnlich einfachen Regeln wie Sudoku zu entwerfen.
Auch bei Str8ts wird ein 9x9-Gitter mit den Ziffern 1 bis 9 gefüllt, so dass jede Ziffer in jeder Spalte und in jeder Zeile nur einmal vorkommt.
Darüber hinaus gibt es auch schwarze Felder, wie in Kreuzworträtseln. Gefüllt werden die weißen Felder. Schwarze Felder können leer oder mit einer Ziffer gefüllt sein.
Der Name "Str8ts" wird von "straight" abgeleitet, d.h. von "Straße". "Str8ts" wird wie "straights" ausgesprochen.
Zusammenhängende weiße Felder in Zeilen oder Spalten bilden bei Str8ts eine Straße, sie müssen eine Folge zusammenhängender Ziffern enthalten. Dabei kann die Reihenfolge beliebig sein.

Ziel des Spiels ist es, die leeren weißen Felder auszufüllen. Solange das Str8ts nicht gelöst ist, können in einem Feld mehrere Möglichkeiten für verschiedene Ziffern bestehen. Werden diese Möglichkeiten notiert, nennt man diese Kandidaten.
Es gelten die Regeln:
1. Die weißen Felder müssen mit je einer Ziffer zwischen 1 und 9 gefüllt werden.
2. Keine Ziffer darf in einer Zeile oder Spalte mehrfach vorkommen, egal ob in einem weißen oder in einem schwarzen Feld.
3. Waagerecht oder senkrecht zusammenhängende weiße Felder dürfen nur Ziffern enthalten, die eine lückenlose Folge, eine Straße, bilden, gleichgültig in welcher Anordnung.

Da es auch leere schwarze Felder gibt, müssen nicht alle Ziffern von 1 bis 9 in jeder Zeile oder Spalte vorkommen. Die Ziffern 1 und 9 sind nicht benachbart, die Folge "9812" ist somit keine gültige Straße.

Fillomino
Seit 2004 steigt die Bekanntheit des japanischen Zahlenrätsels Sudoku stetig an. Eigentlich ist die Grundidee sehr alt. Schon der Schweizer Eulers hatte ein ähnliches mathematisches Rätsel erfunden.
Vielleicht werden in den nächsten Jahren Kreuzworträtsel durch Zahlenräsel ersetzt. In Japan gibt es diesen Trend schon länger. Von hier kommen die meisten mathematischen Rätsel, die in Europa aber noch wenig bekannt sind, z.B. Fillomino.
Die Grundzutaten von Fillomino und Sudoku sind gleich. Ein Gitter, vorgegebene Zahlen und es ist am Benutzer die Zahlen aufzufüllen.
Nur die Regeln sind bei Fillomino anders: Aneinandergrenzende Felder mit gleichen Zahlen bilden eine Fläche. Eine Fläche besteht aus genau sovielen Felder wie die Zahl auf den Feldern angibt. Zur besseren Übersichtlichkeit kann man gleiche Zahlen gleich einfärben, dann sieht man sehr schön die unterschiedlichen Flächen.



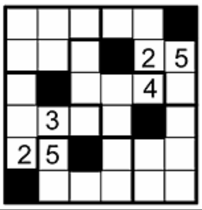


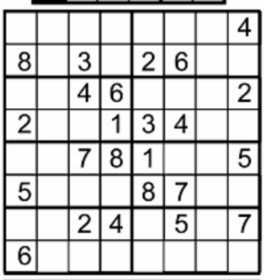
Sudokuvarianten
Mit der ständigen Zunahme der Beliebtheit von Sudokus entstanden zahlreiche Varianten, die alle einen gesonderten Namen erhielten. Einige dieses Varianten sind:

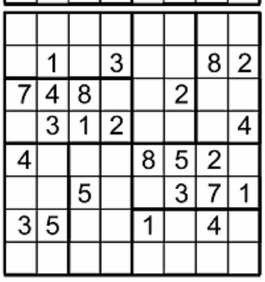
Rokudoku
(obere Abbildung) Hier werden die 3x3-Felder durch 2x3-Rechtecke ersetzt. Aufgabe ist es, das Diagramm mit den Zahlen von 1 bis 6 auszufüllen, wobei in jeder Zeile, jeder Spalte und in den markierten Blöcken jede Zahl genau einmal vorkommt.
Diese Varianten ist einfacher als Sudoko.
Bei irregulären Rokudokus werden die 36 Gesamtfelder in 6 farbig markierte Bereiche zerlegt.

Shidoku
Shidoku ist ein Sudoku mit 4 quadratischen Bereichen mit je 2x2 Feldern. Diese Variante ist sehr einfach und eigentlich nur für Erstklässler geeignet.

Logi-5
(untere Abbildung) Hier liegt ein 5x5-Feld vor. Die 25 Einzelfelder sind in 5 Bereiche unterschiedlicher Form aufgeteilt. Ziel ist es, das Diagramm mit den Zahlen von 1 bis 5 zu füllen, wobei in jeder Zeile, jeder Spalte und in jedem der markierten 5-Felder-Blöcke jede Zahl genau einmal vorkommt.

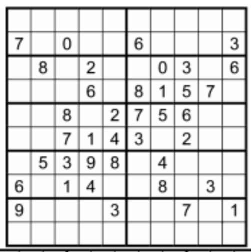






Magische Pentominos
(obere Abbildung) Hier ist das Diagramm mit den Zahlen von 1 bis 5 auszufüllen, wobei in jeder Zeile, jeder Spalte und in den markierten Blöcken jede Zahl genau einmal vorkommt.
Die einzelnen Bereiche haben die Form von Pentominos.

Mini-Sudoku
(mittlere Abbildung) Die Aufgabe besteht darin, das Diagramm mit den Zahlen von 1 bis 8 zu füllen, wobei sich sowohl in den Zeilen als auch in Spalten und den 4x2 Feldern keine Zahl wiederholen darf.
Der Unterschied zum Original-Sudoku besteht in den rechteckigen 4x2-Feldern.



Irreguläre Mini-Sudokus
(untere Abbildung) Hier sind die auszufüllenden Bereiche verändert. Ansonsten unterscheidet es sich kaum vom oben beschriebene Mini-Sudoku.

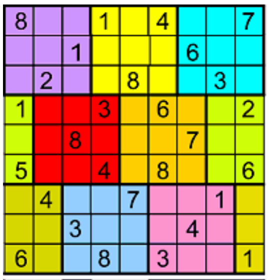
Da es keinen wichtigen Grund gibt, die Spielfeldgröße des Sudokus auf 9 Felder der Größe 3x3 zu beschränken, wurden auch Varianten mit größeren Feldern entwickelt, die im Allgemeinen auch schwerer zu lösen sind.

Maxi-Sudoku 5x2

(obere Darstellung) Das Diagramm wird mit den Zahlen von 0 bis 9 ausgefüllt, wobei sich sowohl in den Zeilen, als auch in den Spalten und den 5x2 Feldern keine Zahl wiederholen darf.

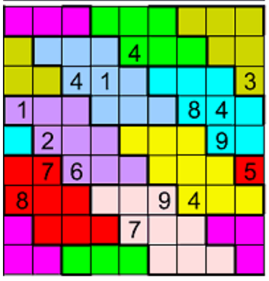
Maxi-Sudoku 5x3

(untere Abbildung) Hier muss das Diagramm mit den Buchstaben von A bis O gefüllt werden, wobei sich sowohl in den Zeilen, als auch in den Spalten und den 5x3 Feldern kein Buchstabel wiederholen darf. Bei dieser Größe nutzt man keine Zahlen mehr sondern Buchstaben. Damit wird die Lösung etwas einfacher.



Zylindersudoku (Quadrate)

Bei diesem Sudoku stellt man sich das Puzzle als Zylinder vor, bei dem der rechte und der linke Rand aneinandergeklebt sind.
Erneut wird das Diagramm mit den Zahlen von 1 bis 9 gefüllt, wobei in jeder Zeile, jeder Spalte und in den markierten Blöcken jede Zahl genau einmal vorkommt.



Toroidsudoku

Man kann sich dieses Puzzle als Toroid, d.h. Torus, vorstellen bei dem der rechte und der linke Rand sowie der obere und der untere Rand aneinandergeklebt sind.
Wieder wird das Diagramm mit den Zahlen von 1 bis 9 belegt, wobei in jeder Zeile, jeder Spalte und in den farblich markierten Blöcken jede Zahl genau einmal vorkommt.
Quelle: http://www.sachsentext.de/

Sudoku 2D

Sudoku 2D ist eine weitere Variante des japanischen Zahlenrätsels Sudoku.

In die Felder eines Diagramms der Größe n x n sind die Zahlen von 1 bis n einzutragen, wobei in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in jeder der beiden Diagonalen jede Zahl genau ein mal vorkommen muss.
In den Zeitschriften Feierabend-Rätsel und Logisch wird diese Rätselart Magiequadrat genannt.
Mathematisch gesehen, sind erneut lateinische Quadrate zu konstruieren, bei denen auch die Hauptdiagonalen jede mögliche Ziffer genau einmal enthalten. Damit existieren beim 2-D-Sudoku im Allgemeinen weniger Kombinationsmöglichkeiten als beim Standard-Sudoku. Durch Verringerung der vorgegebenen Zahlen kann ein Sudoku 2D Problem sehr anspruchsvoll werden.

	5			
		2		
			4	
3				5

4	5	3	1	2
5	1	2	3	4
2	3	5	4	1
3	4	1	2	5
1	2	4	5	3

Lateinische Summen

„Lateinische Summen" ist eine weitere Variante eines Zahlenrätsels.
In die Felder eines Diagramms der Größe n x n sind die Zahlen von 1 bis m einzutragen, wobei in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in jeder der beiden Diagonalen jede Zahl genau ein mal vorkommen muss. Dabei ist die höchste Zahl m gleich der Anzahl der leeren Felder einer Zeile bzw. Spalte.

Vorgegeben sind weiterhin verschiedene Zahlen. Diese sind die Summe der Zahlen in den 8 Nachbarfeldern, links, rechts, oben, unten und den vier diagonal angrenzenden Felder. Bei Randfeldern reduziert sich die Anzahl der Nachbarfelder entsprechend.
Für diese Summen werden andere benachbarte Summenzahlen nicht mitgerechnet.
Mathematisch gesehen, sind erneut lateinische Quadrate zu konstruieren, allerdings nicht der Ordnung n sondern der Ordnung m.
Im Allgemeinen existieren für kleine Feldgrößen nur wenige Kombinationsmöglichkeiten. Für größere Feldgrößen kann das Spiel anspruchsvoll werden.

		3	5	
	11		10	
7				8
		15		8
4	7			

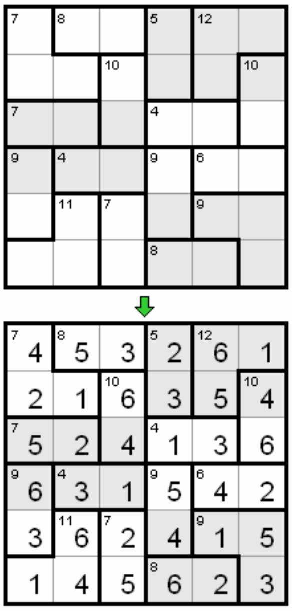
3	2	3	5	1
2	11	1	10	3
7	1	2	3	8
1	3	15	2	8
4	7	3	1	2

Kendoku

Kendoku (eigentlich Ken Ken = Weisheit) ist ein Zahlenrätsel aus Japan. Es besteht aus einem n x n Spielfeld in dem Kästchen durch dickere Umrandung zu ganz unterschiedlichen Blöcken zusammengefasst sind.
In das Spielfeld sind Zahlen von 1 bis n nach den Spielregeln einzutragen.

3+ 1	60x 4	3	40x 2	5
2	5	1	4	8+ 3
2 4	2	13+ 5	3	1
2- 3	2- 1	2- 2	5	4
5	3	4	2 1	2

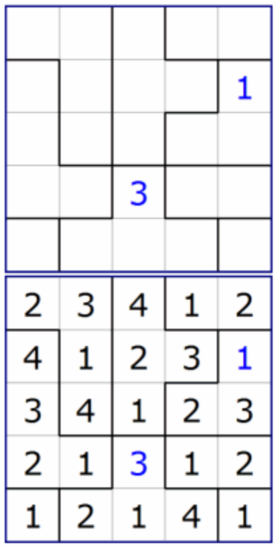
Kendoku folgt ähnlichen Regeln wie Sudoku. Je Zeile und Spalte darf jede Zahl nur einmal vorkommen. Anders als beim Sudoku sind jedoch keine Zahlen vorgegeben. Stattdessen stehen in jedem Kästchenblock Rechenergebnisse, die sich aus den eingetragenen Zahlen und der angegebenen Grundrechenart (Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division) ergeben.
Das Spiel wurde von dem japanischen Lehrer Tetsuya Miyamoto für seine Schüler entwickelt.
Der Name "Ken Ken" ist markenrechtlich geschützt. Daher wird das Spiel in diesem Programm Kendoku genannt. International werden auch "Minuplu", "Basic", "MathDoku", "CalcuDoku" oder "Yukendo" verwendet.



Kikagaku Nampure, Samunamupure

Kikagaku ist ein weiteres Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde wahrscheinlich Japan entwickelt. Allerdings ist seine Entstehung und Erstveröffentlichung nicht vollkommen geklärt.
In die Felder eines n x n-Spielfeldes sind die Zahlen von 1 bis n so einzutragen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in jedem weißen bzw. grauen Bereich jede Zahl genau ein mal vorkommen muss.
Die Summe der Zahlen in einem fett umrandeten Gebiet muss der vorgegebenen Zahl entsprechen, wobei in einer Summe keine Summand mehrfach vorkommen darf.

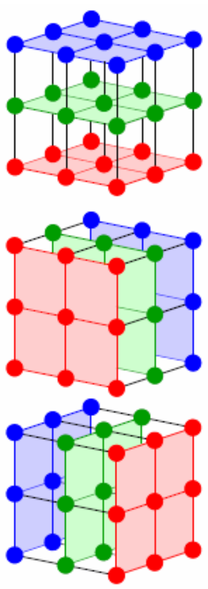
Andere Bezeichnungen für dieses Spiel sind Samunamupure, Killer Sudoku, Sum Number Place, Sum Sudoku, Sumdoku und Gebietssummen (Zeitschrift Logisch).
Im Internet wird sehr oft von Samunamupure gesprochen. Dies ist aber kein japanisches Wort, sondern eine "Japanisierung" des englischen Sum Number Place. Das Spiel ist dem Kendoku sehr verwandt.



Hakyuu

Hakyuu ist ein weiteres Sudoku-ähnliches Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde in Japan entwickelt und sehr populär.
Der Name Hakyuu Kouka bedeutet Welleneffekt und soll die Ausbreitung von Wellen auf der Oberfläche eines Sees darstellen. Das erste Hakyuu-Rätsel wurde 1998 in "Puzzle Communication Nikoli" veröffentlicht.

Gegeben ist ein n x n - Spielfeld. Dieses ist durch zusätzliche Linien in Gebiete eingeteilt. In jedes Feld ist eine Zahl einzutragen. Jedes Gebiet aus n Feldern muss alle Zahlen von 1 bis n genau einmal enthalten.
Wenn zwei gleiche Zahlen in einer Zeile bzw. Spalte stehen, müssen sich zwischen den beiden Zahlen mindestens so viele andere Zahlen befinden, wie die Zahl angibt.
Zum Beispiel müssen sich zwischen zwei Feldern mit der Zahl 3 mindestens drei andere Felder befinden.
Im Unterschied zu Sudoku können nun in einer Zeile oder einer Spalte Ziffern mehrfach auftreten, wie die Lösung des Beispiels zeigt.
Die Strategie zur Lösung unterscheidet sich auch deutlich von Rätseln wie Kendoku oder Sudoku.

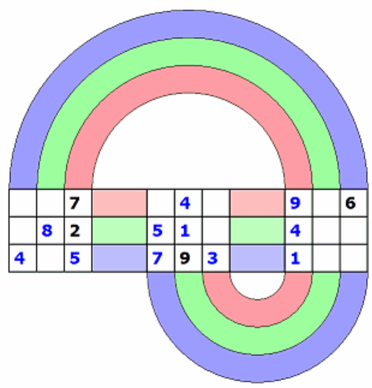


Sudokubus

Sudokubus ist ein Variante des allgemein bekannten japanischen Zahlenspiels Sudoku. Ein würfelförmiges Gerüst wird an den Knoten mit Kugeln versehen. Die Kugeln bilden eine 3x3x3-Anordnung.
Die Spielregeln sind einfach: Jede der 27 Kugeln ist mit den Zahlen 1 bis 9 zu versehen, so dass

1) in jeder der drei Etagen jede Zahl genau ein Mal erscheint,
2) in jeder der drei zur Frontalebene parallelen Ebenen jede Zahl genau ein Mal erscheint und
3) in jeder der drei zur Seitenwand parallelen Ebenen jede Zahl genau ein Mal erscheint.

Die Abbildung illustriert die drei Etagen, die drei zur Frontalebene parallelen Ebenen und die drei zur Seitenwand parallelen Ebenen.
Je nach vorgegebenen Anfangszahlen kann der Sudokubus durchaus sehr anspruchsvoll sein.

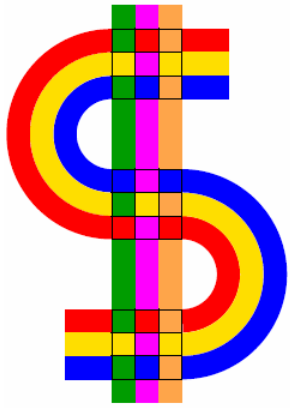


Schneckenrätsel

Das Schneckenrätsel gehört zu den Sudoku-ähnlichen Spielen, d.h. auch hier sind Felder mit Ziffern auszufüllen.
Gegeben sind 3 Bereiche mit jeweils 3 x 3 Quadraten. Diese sind waagerecht und zusätzlich über drei Spiralen miteinander verbunden.
In dieser 27 Felder sind zu Beginn eine gewisse Anzahl von Zahlen eingetragen.

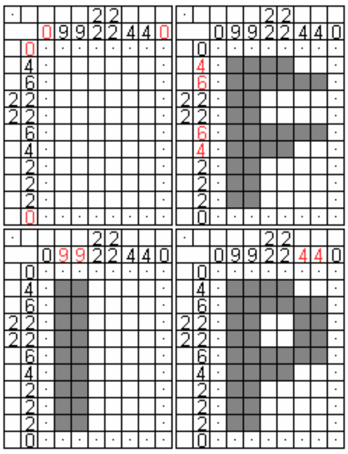
Spielregeln:
Schreiben Sie in jedes kleine quadratische Feld eine der Zahlen 1 bis 9, so dass in jedem der drei 3x3-Felder, in jeder der drei Zeilen und in jeder der drei Spiralen jede der Zahlen 1 bis 9 genau einmal erscheint.
Wie bei dem Original-Sudoku hängt auch hier der Schwierigkeitsgrad des Rätsels von der Anzahl der vorgegebenen Zahlen ab.
Die Idee zu diesem Schneckenrätsel stammt von Hans Walser und Peter Rothe.

Dollarrätsel



Ein weitere Variante eines Sudoku-ähnlichen Spiels, die dem Schneckenrätsel sehr ähnlich ist, ist das Dollarrätsel. Auch hier sind Felder mit Ziffern auszufüllen.
Gegeben sind 3 Bereiche mit jeweils 3 x 3 Quadraten. Diese sind waagerecht bzw. senkrecht und zusätzlich über Kreisbögen miteinander verbunden. Die Figur erinnert etwas an das Dollarzeichen; daher der Name.
In dieser 27 Felder sind zu Beginn eine gewisse Anzahl von Zahlen eingetragen.

Spielregeln: Schreiben Sie in jedes kleine quadratische Feld eine der Zahlen 1 bis 9, so dass in jedem der drei 3x3-Felder, in jeder der drei Zeilen und in jeder der drei Spiralen jede der Zahlen 1 bis 9 genau einmal erscheint.
Die Idee zu diesem Dollarrätsel stammt von Hans Walser und Peter Rothe.



Nonogramm, japanisches Rätsel

Nonogramme, auch japanische Rätsel genannt, sind Logikrätsel und wurden von der Designerin Non Ishida erfunden. Sie gewann 1986 den Window Art Wettbewerb, bei dem es darum ging, in Wolkenkratzern nur in bestimmten Zimmern Licht zu machen, damit von außen ein Bild auf dem Wolkenkratzer sichtbar wurde.
Gegeben ist ein 8x11-Feld aus Quadraten, mitunter auch andere Spielfeldgrößen.
An den Rändern stehen Zahlen, die angeben, wie viele zusammenhängende Felder in den jeweiligen Zeilen oder Spalten auszufüllen sind. Bei mehreren Zahlen sind die Blöcke durch mindestens ein Freifeld getrennt.
Dieses logisches Rätsel kann sehr anspruchsvoll sein.
In der Abbildung würde sich zum Beispiel ein P ergeben.

Zehnergitter

Zehnergitter ist ein Zahlenadditionsspiel. Es ist unbekannt, wer Zehnergitter erfunden hat bzw. wo diese Rätselart erstmals veröffentlicht wurde.
Gegeben ist ein 10 x 5 - Spielfeld. In die Felder des Diagramms sind die Zahlen von 0 bis 9 einzutragen. In jeder Zeile muss jede Zahl genau einmal vorkommen. Gleiche Zahlen dürfen nicht benachbart sein, weder horizontal noch vertikal noch diagonal.
Die Summe der Zahlen einer Spalte muss mit der vorgegebenen Summe in der zusätzlich angegebenen Zeile übereinstimmen.

7		5				8		6	
8	6			7			2	9	5
	7			2	5	9			
			7		1		3		8
	4	9	0	3	7		8		1
29	27	23	25	16	18	23	22	24	18

7	4	5	9	0	2	8	3	6	1
8	6	0	1	7	3	4	2	9	5
0	7	4	8	2	5	9	6	1	3
9	6	5	7	4	1	0	3	2	8
5	4	9	0	3	7	2	8	6	1
29	27	23	25	16	18	23	22	24	18

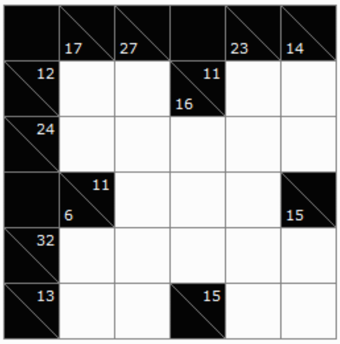
4	3	1	2	4
1	2	2	4	5
2	3	4	5	2
2	5	2	1	3
3	4	3	4	2

4	**3**	1	2	**4**
1	2	**2**	4	5
2	3	4	5	**2**
2	5	**2**	1	3
3	4	3	**4**	2

Hitori

Hitori ist ein weiteres Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde in Japan entwickelt und ist sehr populär. Das Spiel wurde erstmals im japanischen Rätselmagazin Puzzle Communication Nikoli (Nr. 20, März 1990) veröffentlicht.
Andere bekannte Bezeichnungen für "Hitori ni shite kure" (deutsch Lass mich allein; englisch Let Me Alone) sind "Zahlen streichen" und "Federstrich".
Gegeben ist ein n x n - Spielfeld. In jedes Feld ist eine Zahl eingetragen.
Die Aufgabe besteht darin, die Felder des Diagramms blau oder weiß einzufärben.
In einer Zeile oder Spalte des Diagramms darf dabei keine Zahl mehr als einmal auf einem weißen Feld stehen bleiben. Zwei blaue Felder dürfen nicht vertikal oder horizontal

benachbart sein. Alle weißen Felder müssen einen einzigen waagerecht bzw. senkrecht zusammenhängenden Bereich bilden.
Die Strategie zur Lösung unterscheidet sich deutlich von Rätseln wie Kendoku, Sudoku oder Hakyuu.



Kakuro

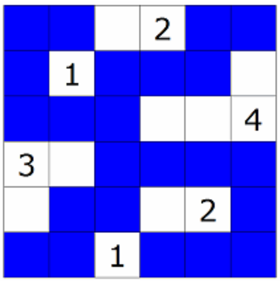
Kakuro (deutsch: Summe + Kreuz) ist ein japanisches Zahlenrätsel.
Im deutschen Sprachraum sind außer Kakuro auch die Namen Kreuzzahlenrätsel und Kreuzsumme in Gebrauch. Im japanischen Wort Kakuro steckt die Wortwurzel kuro (= schwarz). Das ist der Grund, weshalb die Summenfelder häufig als schwarze Flächen dargestellt werden.

Der Aufbau ähnelt dem eines Kreuzworträtsels, nur mit Ziffern statt Buchstaben und Summen statt Wortdefinitionen. Dabei gelten folgende Regeln:

1) es dürfen nur die Ziffern von 1 bis 9 vorkommen
2) in jeder Summe darf jede Ziffer nur einmal vorkommen
3) in jedes freie Feld darf nur eine Ziffer eingetragen werden

Normalerweise wird die Lösung durch die vorgegebenen Zahlen eindeutig festgelegt.

Die zu einer Zahl gehörenden freien Felder heißen Stellen dieser Zahl.
Die einfachste mathematische Überlegung, die man sich beim Lösen von Kakuro zunutze macht, ist folgende: Für eine gegebene Anzahl Stellen (Felder) sind bestimmte Summen eindeutig bestimmt.
Soll zum Beispiel die Zahl 7 durch drei Stellen gebildet werden ist ausschließlich die Zahlenkombination (1, 2, 4) möglich, jedoch in einer noch nicht bekannten Reihenfolge.
Folgende Zahlen besitzen nur eine einzige Zerlegung in zwei zulässige Summanden: 3 (1+2), 4 (1+3), 16 (7+9) und 17 (8+9).

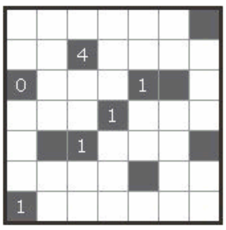


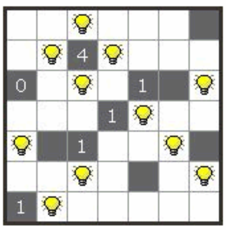
Nurikabe

Nurikabe ist ein japanisches Zahlenrätsel, das von Nikoli erfunden wurde. Es erschien zum ersten Mal in der Zeitschrift Puzzle Communication 33 (März 1991). Ein anderer Name für das Rätsel ist Inseln im Strom.
Nurikabe wird auf einem rechteckigen Gitter von beliebiger Größe gespielt, in diesem Programm von der Größe 6x6 bis 10x10.
Einige Quadrate enthalten Zahlen. Ziel des Spieles ist es, für jedes Quadrat die Farbe (hier blau oder weiß) zu bestimmen. Dabei gelten die Regeln:

· alle blauen Quadrate müssen über Kanten miteinander zusammenhängen.
· ein blaues Quadrat der Größe 2×2 darf nicht vorkommen.
· jede Zahl steht in einem weißen Bereich, der genauso viele weiße Quadrate enthält, wie die Zahl angibt.
· im Besonderen sind die Quadrate mit den Zahlen weiß.
· weiße Bereiche dürfen nicht über Kanten aneinander grenzen.
· jeder weiße Bereich enthält nur eine Zahl.

Aufgrund der Bezeichnung "Inseln im Strom" werden die weißen Felder oft auch als Inseln, die blauen, im Original schwarzen, Felder als Strom und blaue Felder der Größe 2×2 als Teich bezeichnet. Die Regeln lassen sich auch in dieser Bildsprache formulieren, so darf dann beispielsweise kein Teich in der korrekten Lösung vorkommen. Deshalb werden auch manchmal die Felder nicht schwarz sondern blau eingefärbt, wie in dieser Variante. Die Lösung wird eindeutig durch die vorgegebenen Zahlen festgelegt.





Akari, Bijutsukan

Der Name Akari bedeutet japanisch "Beleuchtung". Diese Rätselart wurde von der japanischen Zeitschrift "Nikoli" erstmals 2001 veröffentlicht.
"Nikoli" veröffentlichte auch als erste Zeitschrift Spiele wie Sudoku oder Kakuro und verhalf ihnen so zum weltweiten Durchbruch.
Ursprünglich wurde das Spiel Bijutsukan ("Das Museum der schönen Künste") genannt. Im englischen Sprachraum ist es unter dem Namen "Light Up" bekannt.

Spielregeln:
Akari wird auf einem Quadratgitter mit schwarzen und weissen Feldern gespielt.
Manche schwarze Quadrate sind mit Zahlen von 0 bis 4 markiert.
Auf den weißen Quadraten müssen Glühlampen platziert werden, so dass die folgenden Regeln eingehalten werden:
Die Zahlen auf den schwarzen Quadraten geben an, wie viele Glühlampen auf weißen Feldern sind, die über eine Kante, d.h. orthogoal, an dieses schwarze Feld grenzen. Darüber hinaus können auch andere weiße Felder Glühlampen enthalten.
Jedes weiße Feld wird von mindestens einer Glühlampe beleuchtet. Eine Glühlampe leuchtet waagerecht und senkrecht bis zu einem schwarzen Feld oder zum Rand des Spielfeldes.

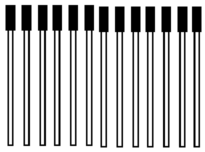
Glühlampen dürfen sich nicht gegenseitig beleuchten.

Arithmomachiaspiel, Nimm-Spiel

Das Arithmomachiaspiel wurde erstmals 1624 von Bachet de Méziriac eingeführt.
Zwei Spieler A und B wählen eine beliebige Zahl von 1 bis 10. Zu deren Summe addieren beide abwechselnd eine weitere frei wählbare Zahl von 1 bis 10.
Gewonnen hat der, welcher zuerst eine im voraus festgesetzte Zahl (i.A. die 100) erreicht.

Analyse: Spieler A gewinnt, wenn er durch Addition jeweils die "strategischen" Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 erreicht
Analyse (Variante: Zielzahl 144, Zahlen können von 1 bis 13 gewählt werden) "strategische" Zahlen: 4, 18, 32, 46, 60, 74, 88, 102, 116, 130

Dieses Spiel existiert in vielen Abwandlungen. Sehr verbreitet ist die umgekehrte Aufgabe:
Von einer vorgegebenen Anzahl Gegenstände nehmen beide Spieler abwechselnd 1, 2 oder 3 weg. Verloren hat derjenige, der den letzten Gegenstand nehmen muss.
Im französischen Sprachraum wird das Arithmomachiaspiel "Jeu de Marienbad" genannt. Die umgekehrte Variante wird in Deutschland "Nimm-Spiel" genannt.



13

Nim-Spiel

Das Nim-Spiel ist ein Spiel für zwei Personen.
Gegeben ist ein Haufen von 13 Streichhölzern. Abwechselnd nehmen zwei Personen 1, 2 oder 3 Streichhölzer. Derjenige, der den Haufen leerräumt, hat gewonnen.

Simulation des Nim-Spiels mit 13 Streichhölzer

Eine Analyse des Spiels läuft auf eine Zerlegung der Zahl 13 in die Summanden 1, 2 oder 3 hinaus.
Es ist für einen Computer eine leichte Aufgabe, diese zu ermitteln. Es wird angenommen, dass Rot beginnt. Weder Rot noch Schwarz haben eine Strategie. Folgende Spielverläufe sind möglich:

0001) 13 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 — 1 Spiel mit 13 Zügen, Rot gewinnt, Schwarz verliert.
0002) 13 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2 ... — 12 Spiele mit 12 Zügen, Rot verliert, Schwarz gewinnt
0013) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 ...
0014) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+3 ... — 66 Spiele mit 11 Zügen, Rot gewinnt, Schwarz verliert
0079) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+3...
0080) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1+1 ... — 210 Spiele mit 10 Zügen, Rot verliert, Schwarz gewinnt
0289) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1+1 ...
0290) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1 ... — 414 Spiele mit 9 Zügen, Rot gewinnt, Schwarz verliert
0703) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1 ...
0704) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1 ... — 504 Spiele mit 8 Zügen, Rot verliert, Schwarz gewinnt
1207) 13 = 2+1+1+1+1+1+1+1...
1208) 13 = 2+1+1+1+1+1+1 ... — 357 Spiele mit 7 Zügen, Rot gewinnt, Schwarz verliert
1564) 13 = 2+1+1+1+1+1+1 ...
1565) 13 = 2+1+1+1+1+1 ... — 126 Spiele mit 6 Zügen, Rot verliert, Schwarz gewinnt
1690) 13 = 2+1+1+1+1+1 ...
1691) 13 = 1+3+3+3+3 ... — 15 Spiele mit 5 Zügen, Rot gewinnt, Schwarz verliert
1705) 13 = 3+3+3+3+1 ...

Ergebnis: Es sind 1705 Spiele möglich. Rot gewinnt 1+66+414+357+15= 853 Spiele. Schwarz gewinnt 13+210+504+126 = 852 Spiele. Die Wahrscheinlichkeit ein Spiel zu gewinnen ist für Rot oder Schwarz fast gleich.

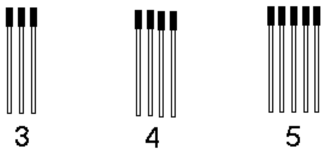
Nim-Spiel mit einer Strategie

Das Nim-Spiel ist nicht fair. Es gibt für den Spieler, der beginnt, eine Strategie, so dass er nie verlieren kann. Zu Beginn nimmt der spätere Gewinner Rot einen Streichholz. Dann richtet er sich nach seinem Gegner Schwarz. Nimmt dieser 1 Streichholz, so nimmt er 3, nimmt dieser 2 Streichhölzer, so nimmt er auch 2 und nimmt dieser 3 Streichhölzer, so nimmt er nur 1 Streichholz. Bei jeder Runde werden also zusammen 4 Streichhölzer genommen. Mit 4 Streichhölzern vor der letzten Runde kann man nicht verlieren.
Die Spielverläufe haben immer 7 Züge. Von den 1705 möglichen Spielen von oben bleiben noch 27 übrig.

01) 13 = 1+(1+3)+(1+3)+(1+3) — 02) 13 = 1+(1+3)+(1+3)+(2+2) ...
26) 13 = 1+(3+1)+(3+1)+(2+2) — 27) 13 = 1+(3+1)+(3+1)+(3+1)

Der Gegner kann die simple Strategie schnell durchschauen und die Strategie übernehmen. Deshalb sollte man die Regeln verschleiern und sie erst gegen Ende des Spiels anwenden.
Es gib viele Abänderungen der Regeln, die jeweils eine neue Strategie erfordern.
Die Anzahl 13 der Hölzer zu Beginn wird erhöht oder erniedrigt. Es dürfen nicht 1, 2 oder 3 Hölzer

genommen werden, sondern andere Kombinationen. Nicht derjenige, der das letzte Streichholz nimmt, hat gewonnen sondern verloren.



Das Nim-Spiel mit mehreren Haufen

Das klassische Nim-Spiel besteht aus drei Haufen mit 3, 4 und 5 Streichhölzern. Zwei Personen nehmen von einem Haufen abwechselnd beliebig viele Hölzer. Derjenige, der leerräumt, hat gewonnen. Auch für diese Version gibt es eine Strategie, die von Anfang an zu einem sicheren Sieg führt. Der Gewinner nimmt zu Beginn zwei Hölzer links weg und ist dann in einer Gewinnstellung.

Die Gewinnregel heißt: Man muss jeweils so viele Hölzer wegnehmen, dass die "Nim-Summen" gerade bleiben. Man erhält die Nimsummen, wenn man die Anzahl eines jeden Haufens in Vielfache von 4, 2 und 1 zerlegt wie bei der Umrechnung einer Zahl vom Zehnersystem in das Zweiersystem. Die farbig gekennzeichneten Vorzahlen werden addiert. Diese Summen sind die drei Nimsummen.

3	4	5
3=1*2+1	4=1*4	5=1*4+1

1+1=2
1
1+1=2

Ergebnis: Die Nimsummen sind 2,1 und 2. In der ersten Runde soll der spätere Gewinner A links 2 Hölzer wegnehmen.

1	4	5
1	4=1*4	5=1*4+1

1+1=2
0
1+1=2

Ergebnis: Die Nimsummen sind 2,0 und 2, also durchweg gerade. Spieler A ist in einer Gewinnstellung. Der weitere Spielverlauf könnte so sein.

1	4	0
1	4=1*4	0

1
0
1

Zweite Runde (B nimmt rechts 5). Ergebnis: Zwei Nimsummen sind ungerade.

1	1	0
1	1	0

0
0
2

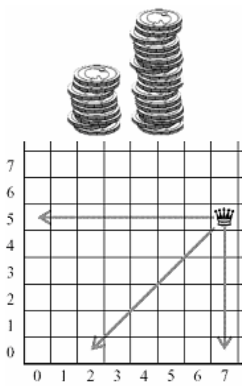
Dritte Runde (A nimmt von der Mitte 3). Ergebnis: Die Nimsummen sind 0,0 und 2, also gerade.

1	0	0
1	0	0

0
0
1

Vierte Runde (B nimmt von der Mitte 1). Fünfte Runde (A ist an der Reihe): Der Spieler A nimmt das letzte Streichholz und hat gewonnen.

Die Theorie des Nim-Spiels geht auf den Mathematik-Professor Charles Bouton von der Harvard-Universität zurück (1901) und gilt für eine beliebige Anzahl von Haufen und für eine beliebige Anzahl von Streichhölzern in einem Haufen.



Wythoff-Spiel

Durch den niederländischen Zahlentheoretiker Willem Abraham Wythoff wurde 1907 eine Variante des Nimm-Spiels veröffentlicht, die heute Wythoff-Spiel genannt wird. In der Wythoff-Variante spielen zwei Personen gegeneinander.

Auf einem Tisch befinden sich zwei Stapel von Münzen, die unterschiedlich hoch sein können. Abwechselnd nehmen die Spieler entweder von einem Stapel eine beliebige Anzahl Münzen oder von beiden Stapeln jeweils die gleiche Anzahl Münzen. Der Spieler, der die letzte Münze vom Tisch nimmt, gewinnt.

Das Wythoff-Spiel kann auch als Spiel auf einem Schachbrett interpretiert werden. Gegeben ist eine Dame, die sich waagerecht nach links, senkrecht nach unten und diagonal nach links unten bewegen kann. Abwechselnd ziehen beide Spieler den Spielstein beliebig weit. Wer das linke untere Feld erreicht, hat gewonnen.

Durch Wythoff wurde eine vollständige Lösung angegeben. Das Spiel ist nicht fair, da der anziehende Spieler bei korrekter Strategie stets gewinnt.

Ist $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ das goldene Verhältnis, so muss ein Spieler versuchen, Felder mit den Koordinaten

$$([\phi\, n], [\phi^2\, n]) \quad \text{oder} \quad ([\phi^2\, n], [\phi\, n])$$

für n = 0, 1, 2, … zu erreichen. Dabei wird unter [x] die größte ganze Zahl kleinergleich x verstanden.

Der beginnende Spieler kann bei jeder Ausgangssituation mindestens ein derartiges Feld erreichen und so gewinnen. Die ersten Siegfelder haben die Koordinaten (0 | 0), (1 | 2), (2 | 1), (3 | 5), (4 | 7), (5 | 3), (6 | 10), (7 | 4), (8 | 13), …

Turm von Hanoi
Legende nach 1883: Edouard Lucas in "Récréations mathématiques"

"In der Stadt Hanoi stehen in einem Brahma-Tempel drei Säulen. Auf einer dieser Säulen liegen 64 Scheiben, die von oben nach unten gesehen, streng monoton wachsenden Durchmesser haben.
Die Welt wird in Schutt und Asche fallen, wenn die Mönche die Scheiben der ersten Säule auf eine andere Säule gelegt haben.
Dabei darf nie mehr als 1 Scheibe gleichzeitig bewegt und niemals eine größere Scheibe auf eine kleinere gelegt werden …"

Anzahl der notwendigen Züge bei n Scheiben $2^n - 1$

Testergebnisse (Pentium 120 MHz, Pascal)

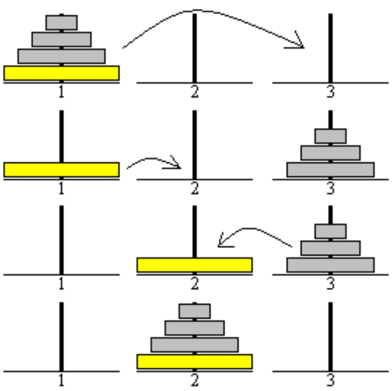
Scheibenzahl	Zeitbedarf	Scheibenzahl	Zeitbedarf
15	0,014 s	20	0,234 s
25	7,320 s	30	234,018 s

Anmerkung: Die Zeit beinhaltet die Bestimmung der optimalen Zugfolge aber keine grafische Darstellung.

Falls man den Turm von Stelle 1 nach Stelle 3 bewegen will, und keine direkten Züge von 1 nach 3 oder 3 nach 1 erlaubt sind, benötigt man 3^n-1 Züge.
Wenn man den Turm von Stelle 1 nach Stelle 3 bewegen will, aber nur Züge "im Uhrzeigersinn" erlaubt sind, d.h. von 1 nach 2, von 2 nach 3, und von 3 nach 1, ergibt sich für die nötigen Züge:

Zugzahl = Nächste ganze Zahl von $[(1 + \sqrt{3})^n \cdot (3 + 2\sqrt{3}) - 6\,] / 6$

Anmerkung: Da die Anzahl der notwendigen Bewegungen bei n Scheiben $2^n - 1$ beträgt, müssen die Mönche in Hanoi 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen und 551615 mal eine Scheibe transportieren. Benötigen Sie für jede Bewegung genau 1 Sekunde, schlafen nicht, essen nicht, usw., so sind alle Scheiben nach etwa 585 Milliarden Jahren umgelegt.



Beste Zugmöglichkeit für 3 Scheiben: Notation der sieben Züge: 1-2, 1-3, 2-3, 1-2, 3-1, 3-2 und 1-2. - Es genügt die Platzwechsel festzuhalten. Dieses ist auch der kürzeste Lösungsweg. Er besteht aus $7 = 2^3-1$ Zügen.

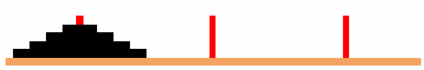
Turm aus n Scheiben: Soll man einen Turm mit vier Scheiben umsetzen, so führt man diesen Vorgang auf das Drei-Scheiben-Problem zurück. Man setzt in sieben Schritten den Dreierturm von 1 nach 3, legt die gelbe Scheibe in die Mitte und baut in wiederum sieben Schritten den Turm von 3 auf die gelbe Scheibe auf Platz 2 auf.
Man benötigt mindestens $2 * 7+1 = 15 = 2^4-1$ Schritte:
Verallgemeinerung: Sind n Scheiben vorgegeben, so braucht man mindestens 2^n-1 Schritte.

Turm von Hanoi mit vier Pfosten

Wie bei vielen Puzzles sind Abänderungen interessant und werfen neue Probleme auf. Bei drei Scheiben kann man in mindestens 7 Schritten den Turm auf einem freien Pfosten neu aufbauen. Steht ein vierter Pfosten zur Verfügung, so kommt man mit 5 Zügen aus. Die Züge sind 1-3, 1-4, 1-2, 4-2 und 3-2.
Tabelle für n Scheiben (n=2, 3, 4, 5,...):

Anzahl der Züge bei 3 Pfosten	03, 07, 15, 31, 63,...
Anzahl der Züge bei 4 Pfosten	03, 05, 09, 13, 17,...

Gibt man vier Pfosten statt 3 vor, so verringert sich die Mindestzahl der Züge.



Der Turm von Hanoi ist eine sehr beliebte Programmieraufgabe für Schüler und Studenten und ein effektives Beispiel für den Vorteil einer rekursiven Programmierung. Der nachfolgende Text (Randoffscher Algorithmus) ermittelt die optimale Zugfolge für 5 Scheiben:

Start mit bewege(5,1,2,3)

```
PROCEDURE bewege(anzahl,p1,p2,p3:integer);
BEGIN   IF anzahl=1 THEN writeln('Scheibe ',anzahl,' von ',p1,' nach ',p2)
ELSE BEGIN bewege(anzahl-1,p1,p3,p2); writeln('Scheibe ',anzahl,' von ',p1,' nach ',p2); bewege(anzahl-
1,p3,p2,p1); END; END;
```

C-Programm

```
 #include <stdio.h> #include <stdlib.h> #include
 <limits.h> #define FROM 1 #define TO 3 #define USING 2
void dohanoi(int N, int from, int to, int using)
{ if (N > 0) { dohanoi(N-1, from, using, to);
  printf ("move %d --> %d\n", from, to); dohanoi(N-1, using, to, from); } }
```

```
int main (int argc, char **argv)
{ long int N; if (argc != 2) { fprintf(stderr, "usage: %s N\n", argv[0]); exit(1); } N = strtol(argv[1],
(char **)NULL, 10);
if (N == LONG_MIN || N == LONG_MAX || N <= 0)
{ fprintf(stderr, "illegal value for number\n"); exit(2); }
dohanoi(N, FROM, TO, USING); exit(0); }
```

Turm von Hanoi-Algorithmus in verschiedenen Programmiersprachen

Ada

```
N: constant INTEGER := 3;
procedure hanoi(n, from, to, using: in integer);
begin if (n = 1) then put("move "); put(from);
        put(" --> "); put(to); new_line; else hanoi(n - 1, from, using, to);
        hanoi(1, from, to, using); hanoi(n - 1, using, to, from); end if;
end hanoi;
procedure main is begin hanoi(N, 1, 3, 2); end main;
```

Java

```
*/ class hanoi { public static void main (String args[]) { if (args.length != 1)
{ System.err.println("error: single integer needed"); System.exit(1); }
Integer N = new Integer(args[0]);
H_dohanoi(N.intValue(), 3, 1, 2); System.exit(0); }
        static void H_dohanoi(int n, int t, int f, int u)
        { if (n > 0) { H_dohanoi(n-1, u, f, t); H_moveit(f, t);
        H_dohanoi(n-1, t, u, f); } }
static void H_moveit(int from, int to) { System.out.print("move ");
System.out.print(from); System.out.print(" --> "); System.out.println(to); } }
```

Turm von Hanoi

Der Turm von Hanoi wurde 1883 von dem französischen Mathematiker Eduard Lucas erfunden. Auf der Originalverpackung steht:

"Das Spiel wurde in Tonkin von Professor N. Claus von Siam, Mandarin des Kollegiums der Li-Sou-Stian, erfunden"

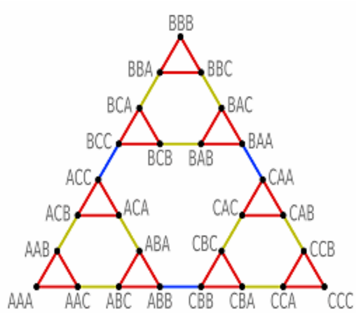
Durch Gaston Tissandier wurde erst später offengelegt, wer dieser "Mandarin" war: Claus ist ein Anagramm von Lucas und Li-Sou-Stian ein Anagramm von Saint Louis, das Gymnasium, an dem Lucas Professor war.

In der Originalbeschreibung werden die Türme als Diamant-Nadeln auf einer Messingplatte beschrieben, die Scheiben als reinem Gold. Lucas spricht auch vom Tempel in Benares. Außerdem nennt er das Puzzle auch "Turm von Brahma".

Daher wird das Spiel auch heute noch mitunter als "Turm von Brahma" bezeichnet.

siehe auch: http://www.puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03_hanoi.htm

1966 wurden die Türme von Hanoi in der britischen Sci-Fi-Serie "Doctor Who" erwähnt. In der Episode "The Celestial Toymaker" muss der Doktor das Trilogic-Game lösen. Darunter versteht man den Turm von Hanoi mit 10 Scheiben.



Turm von Hanoi und Sierpinski-Dreieck

Erstellt man für die möglichen Spielzüge einen Graphen mit einem Knoten je Stellung und einer Kante je Zug, ergibt sich der Spielbaum. Links ist der Spielbaum für drei Scheiben abgebildet, wobei die Kantenfarbe die Farbe der bewegten Scheibe zeigt. Startstellung ist AAA, die Zielstellung CCC.

Von jedem Knoten, bis auf die 3 AAA, BBB, CCC, bei denen alle Scheiben auf einer Stange sind, gibt es drei Zugmöglichkeiten: die kleine Scheibe kann auf zwei Stangen verschoben werden, die zweitkleinste auf eine.

Die optimale Lösung ist der direkte Weg von AAA nach CCC.

Deren ersten Zug von AAA nach AAC bewegt die kleine rote Scheibe von A nach C. Anschließend wird die gelbe Scheibe von A nach B bewegt, d.h. die Kante AAC zu ABC.

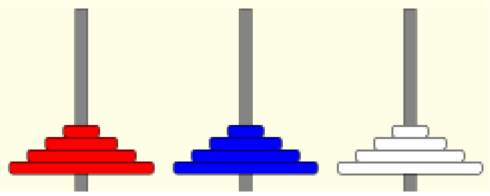
Die Anzahl der Kanten k(n) im Graph ist $k(n) = (3 \cdot 2 + (3^n - 3) \cdot 3) / 2 = 3/2\,(3^n - 1)$

Die Gesamtzahl aller möglichen Züge Z(n) ist $Z(n) = 2\,k(n) = 3\,(3^n - 1)$

Der Durchmesser des Graphen beträgt 2^n-1, d.h. die optimale Zuganzahl ist $O(n) = 2^n - 1$

Vergrößert man den Turm um jeweils eine Scheibe, so steigen Knotenzahl und Kantenzahl um den Faktor 3, der geometrische Durchmesser der Darstellung mit dem Faktor 2.
Dabei entsteht das fraktale Gebilde des Sierpinski-Dreiecks mit der Dimension

$H = \log 3 / \log 2 = 1{,}58496 \ldots$



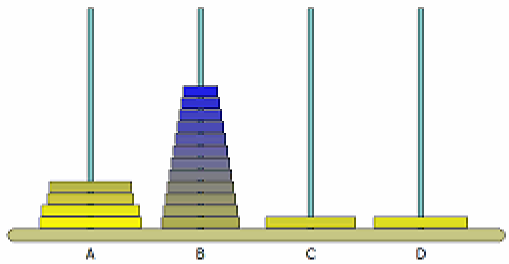
Mehrfarbiger Turm von Hanoi, Dreifarben-Turm von Hanoi

Eine interessante Variante des Spiels ist der mehrfarbige Turm von Hanoi.
In diesem Fall befinden sich auf allen 3 Stangen die gleichen Scheiben, jedoch unterschiedlich gefärbt. Ziel ist es, die roten Scheiben gegen die weißen auszutauschen.
Dabei dürfen wieder nur Scheiben auf größere oder gleich große gelegt werden.
Überraschend ist auch dieses Problem lösbar.
Für n = 3, 4, 5, … Scheiben auf jeder Stange benötigt man im optimalen Fall eine Zugzahl

80, 192, 424, 896, 1848, 3760, 7592, …

Bicolor-Turm von Hanoi

Bei dem Bicolor-Turm von Hanoi befinden sich auf zwei Stangen gleich viele Scheiben, die allerdings alternierend gefärbt sind. Ziel ist es hier, zwei Türme zu erzielen, die jeweils nur aus einer Farbe bestehen.
Dieses Problem wurde 1988 durch Vincent Lefèvre erstmals gestellt. Eine Lösung für die minimale Anzahl von Zügen bei je n Scheiben gab Nathan Bowler $L_n = 11 \cdot (2^{n-1} - 1) - 3(n-2)$



Vierstangen-Turm von Hanoi, Turm von Jena

Ein interessante Variante des Turms von Hanoi ist die analoge Problemstellung mit vier statt drei Stangen. Bekannt gemacht wurde das Problem in Deutschland 1993 durch die Zeitschrift "Wurzel". Deshalb wird auch vom "Turm von Jena" gesprochen.
Steht die vierte Stange zur Verfügung, so verringert dies die Anzahl der notwendigen Züge für höhere Scheibenzahlen erheblich.
Heute (2010) ist noch keine vollständige Lösung für die kürzeste notwendige Zugzahl gefunden. Für kleine Scheibenzahlen sind folgende kleinste Zugzahlen für n = 1, 2, 3, … Scheiben nachgewiesen:
1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, 41, 49, 65, 81, 97, 113, 129, 161, 193, 225, 257, 289, 321, 385, 449, 513, 577, 641, …

Zur Lösung wird der empirische Frame-Stewart-Algorithmus verwendet, dessen optimale Strategie bis 30 Scheiben bewiesen wurde.
Gegeben sind n Scheiben.
1) für eine Anzahl k, werden die obersten k Scheiben auf einen zweiten Stab transportiert unter Ausnutzung aller 4 Stäbe
2) die verbliebenen n-k Scheiben werden von der 1.Stange zur 4. bewegt ohne Berücksichtigung der belegten 2.Stange.
3) die k Scheiben der 2.Stange werden unter Nutzung aller 4 Stangen zur 4. verschoben.
Die Schwierigkeit besteht darin, dass das k so gewählt werden muss, dass die Schrittzahl möglichst gering ist. Dabei ist der Parameter k für alle n Scheiben im Allgemeinen ein anderer Wert als der Wert für k, der im ersten und dritten Schritt genau k Scheiben verschiebt.

In der ursprünglichen Variante der Türme von Hanoi stehen 64 Scheiben und 3 Stangen zur Verfügung. Da die Anzahl der notwendigen Bewegungen bei n Scheiben $2^n - 1$ beträgt, müssen die Mönche in Hanoi 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen und 551615 mal eine Scheibe transportieren.
Benötigen Sie für jede Bewegung genau 1 Sekunde, so sind alle Scheiben nach etwa 585 Milliarden Jahren umgelegt. Auf einem 2,6 GHz-Testrechner können 6 Millionen Umlegungen je Sekunde berechnet werden. Damit braucht der Computer für alle 64 Scheiben "nur" noch 100000 Jahre.
Überraschend ist nun, dass mit einer zusätzlichen vierten Stange die notwendige Zugzahl sich nicht nur um einen kleinen Faktor verringert, sondern relativ klein wird.
Für 64 Scheiben werden mit dem besten Verfahren nur noch 18433 Umlegungen benötigt. Mit einem Scheibentransport je Sekunde ist dies in rund 5 Stunden zu schaffen.

Mehrstangen-Turm von Hanoi

Die Erweiterung des Problems der Türme von Hanoi auf vier Stangen kann auch auf mehrere Stangen fortgesetzt werden. Die einzige, gegenwärtig bekannte Lösungsmethode ist der Frame-Stewart-Algorithmus.

Bisher wurden als minimale Zugzahlen gefunden:

5-Stangen-Turm

Für eine Scheibenzahl n = 1, 2, 3, …

Zugzahl = 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 39, 43, 47, 53, …

6-Stangen-Turm

Für eine Scheibenzahl n = 1, 2, 3, …

Zugzahl = 1, 3, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, …

Springerproblem

	A	B	C	D	E
8	1	24	29	36	3
7	30	37	2	25	28
6	15	26	23	4	35
5	38	31	16	27	22
4	17	14	21	34	5
3	8	39	32	11	20
2	13	18	9	6	33
1	40	7	12	19	10

Leonhard Euler 1759:
"Eines Tages kam ich in eine Gesellschaft in der Schach gespielt wurde. Jemand stellte die Frage, ob es möglich sei, mit dem Springer von einem gegebenen Feld aus das ganze Schachbrett so zu durchwandern, dass jedes Feld nur einmal besetzt werde..."
Da ein Pferd auf jedem Feld des Schachbretts, außer den Randfeldern, 8 Zugmöglichkeiten besitzt, ergeben sich etwa 10^{14} Zugmöglichkeiten. Eine derartige Vielfalt lässt sich in vertretbarer Zeit nur auf einem Computer untersuchen. Neben verschiedenen Backtracking-Verfahren überzeugt durch einen phantastischen Geschwindigkeitsgewinn gegenüber herkömmlichen Methoden eine heuristische Methode. Gegeben sei ein n x n - Schachbrett. Ein Springer, der nach den Schachregeln bewegt werden kann, wird auf das Feld mit den Anfangskoordinaten (x0,y0) gesetzt. Zu finden ist ein Weg des Springers, der genau einmal über jedes der n² Felder des Schachbrettes führt, sofern dies möglich ist.

Springerzüge für verschiedene n x n Felder

1	10	21	16	7
20	15	8	11	22
9	2	23	6	17
14	19	4	25	12
3	24	13	18	5

n = 5

1	10	29	22	7	12
30	21	8	11	28	23
9	2	27	34	13	6
20	31	18	15	24	35
3	16	33	26	5	14
32	19	4	17	36	25

n = 6

1	14	3	20	17	12	31
4	21	16	13	32	43	18
15	2	41	44	19	30	11
22	5	24	33	42	39	48
25	34	45	40	49	10	29
6	23	36	27	8	47	38
35	26	7	46	37	28	9

n = 7

1	22	3	18	25	30	13	16
4	19	24	29	14	17	34	31
23	2	21	26	35	32	15	12
20	5	56	49	28	41	36	33
57	50	27	42	61	54	11	40
6	43	60	55	48	39	64	37
51	58	45	8	53	62	47	10
44	7	52	59	46	9	38	63

n = 8

1	20	3	16	23	28	33	14	39
4	17	22	27	34	15	38	29	32
21	2	19	24	55	36	31	40	13
18	5	76	35	26	41	54	37	30
77	62	25	56	75	72	43	12	47
6	57	74	79	42	53	16	71	44
63	78	61	52	73	70	67	48	11
58	7	80	65	60	9	50	45	68
81	64	59	8	51	66	69	10	49

n = 9

1	32	3	22	29	10	35	20	39	12
4	23	30	49	34	21	44	11	36	19
31	2	33	28	47	62	79	38	43	40
24	5	50	63	78	45	60	89	18	37
51	64	27	46	61	90	77	80	59	88
6	25	66	85	70	81	94	87	92	17
65	52	69	26	95	86	91	76	99	58
10	7	84	67	82	71	100	93	16	75
53	68	9	12	55	96	73	14	57	98
8	11	54	83	72	13	56	97	74	15

n = 10

1	22	3	28	25	20	57	30	35	18	55
4	27	24	21	58	29	36	19	56	31	34
23	2	61	26	37	74	59	68	33	54	17
62	5	38	79	60	67	72	75	52	69	32
39	80	63	66	73	92	77	70	99	16	53
6	65	82	91	[illegible]	71	98	115	76	51	100
81	40	89	64	97	[illegible]	93	108	101	114	15
44	7	96	83	90	107	116	113	120	103	50
41	84	43	88	111	94	109	102	117	14	119
8	45	86	95	[illegible]	47	106	121	12	49	104
85	42	9	46	87	[illegible]	11	48	105	118	13

n = 11

1	24	3	30	27	60	[illegible]	32	78	36	19	34
4	29	26	59	22	31	72	33	20	30	76	37
25	2	23	28	[illegible]	64	[illegible]	100	77	74	85	18
56	5	70	65	58	105	78	121	62	101	[illegible]	[illegible]
69	66	57	106	79	124	[illegible]	104	99	120	17	102
6	55	68	125	110	107	122	109	132	103	96	[illegible]
67	82	111	80	73	140	[illegible]	108	115	40	131	16
51	7	126	135	128	117	138	[illegible]	112	97	92	11
83	112	81	116	37	134	41	118	93	132	15	90
[illegible]	50	[illegible]	127	[illegible]	49	91	[illegible]	46	91	[illegible]	[illegible]
113	84	51	10	15	144	87	12	47	44	89	14
52	5	114	85	50	11	[illegible]	55	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

n = 12

Lösung über Backtracking

Ein Schritt (Versuch) heißt: nächsten Zug festlegen oder feststellen, es geht nicht mehr weiter

Abbildung: Springerzug auf einem n x m - Spielfeld: n=5, m=8

Im Lückensuchalgorithmus benötigte das Programm 10013280 Schritte (rund 21 Minuten auf 750 MHz)

Geschlossener Springerzug

Fordert man von einem vollständigen Springerzug im Springerproblem zusätzlich, dass der Zug geschlossen ist, d.h. vom 64.Feld gelangt man wieder zum 1.Feld, so wird die Aufgabe extrem komplizierter. Eine schon von Euler angegebene Lösung ist in der Abbildung zu sehen.

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	37	62	43	56	35	60	41	50
7	44	55	36	61	42	49	34	59
6	63	38	53	46	57	40	51	48
5	54	45	64	39	52	47	58	33
4	1	26	15	20	7	32	13	22
3	16	19	8	25	14	21	6	31
2	27	2	17	10	29	4	23	12
1	18	9	28	3	24	11	30	5

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	50	11	24	63	14	37	26	35
7	23	62	51	12	25	34	15	38
6	10	49	64	21	40	13	36	27
5	61	22	9	52	33	28	39	16
4	48	7	60	1	20	41	54	29
3	59	4	45	8	53	32	17	42
2	6	47	2	57	44	19	30	55
1	3	58	5	46	31	56	43	18

Rösselsprungaufgabe

… diese Aufgabe fordert von einem vollständigen Springerzug zusätzlich, dass die Reihenfolge der Rösselsprünge ein magisches Quadrat bilden.

Für die 64 Felder (8 x 8) des Schachbrettes ergibt sich als Zeilen- und Spaltensumme des gesuchten magischen Quadrates n/2 (n² + 1) = 8/2 (8² + 1) = 260

Allerdings beträgt die Diagonalensumme nicht ebenfalls 260.

Die gezeigte Lösung ist nicht nur eine Lösung der Rösselsprungaufgabe

sondern bildet auch einen geschlossenen Springerzug.
Am 5.August 2003 bewiesen G.Stertenbrink und J.C.Meyrignac nach insgesamt 138 Tagen Computerrechnung (1 GHz), dass zwar Springerzüge existieren, die in Spalten- und Zeilensumme magisch sind (siehe oben), allerdings kein vollständiges magisches Quadrat eines geschlossenen Springerzugs existiert, d.h. die Diagonalensumme weicht stets ab.

5x5-Feld

Für die Suche nach einem Springerzug auf einem Brett mit 5 Zeilen und 5 Spalten gibt es einen mittelhochdeutschen Leitfaden.

grô	vil	ten	lo	a
al	den	zer	ge	mae
ders	von	Uns	re	be
hel	in	bae	ren	seit
ren	wun	von	ist	beit

Beginnt man in der Mitte mit dem Wort „Uns" und setzt den Spruch

„Uns ist in alten maeren wunders vil geseit und helden lobebaeren von grôzer arebeit"

zusammen, so erhält man den gesuchten Springerzug. Dieser Spruch sind die ersten zwei Zeilen der Nibelungenliedes, das um 1200 von einem unbekannten, bayerisch-österreichischen Dichter, wahrscheinlich in Passau, verfasst wurde. Übrigens ist die Buchstabenfolge „ei" in diesem mittelhochdeutschen Text nicht als Zwielaut zu sprechen, sondern als Einzelbuchstaben. Deshalb wird in verschiedenen Texten auch eï statt ei geschrieben.

37	24	45	4	39	22	47	62
44	5	38	23	46	61	40	21
25	36	43	60	3	20	63	48
6	59	26	35	64	41	2	19
27	30	57	42	1	34	49	12
58	7	54	29	52	13	18	15
31	28	9	56	33	16	11	50
8	55	32	53	10	51	14	17

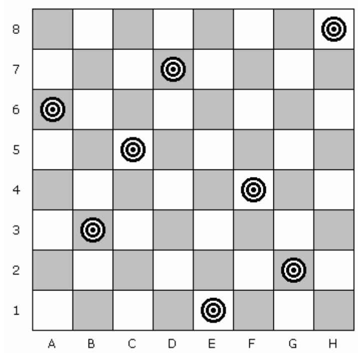
Primzahl-Damen-Problem

Im November 1998 veröffentlichte G.L.Honaker folgendes Problem:
Gegeben ist ein n x n Schachbrett, auf dem ein vollstädiger Springerzug angegeben wird. Die Felder, welche der Springer betritt, werden beginnend mit 1 der Reihenfolge nach nummeriert. Nun soll eine Dame so auf das Schachbrett gestellt werden, dass möglichst viele Felder mit Primzahlnummer von dieser Dame angegriffen werden können. Links ist ein 8 x 8 Brett mit einem Springerzug angegeben. Auf das blaue Feld ist die Dame zu stellen, die dann alle 18 Primzahlfelder (rot) angreifen kann.
Betrachtet man n x n Felder und ist Q(n) die maximale Zahl der angreifbaren Primzahlfelder, so wurden bisher folgende Lösungen gefunden:

n	Q(n)	Primzahlzahl	Entdecker
5	9	9	M.Keith, 1998
6	11	11	M.Keith, 1998
7	15	15	M.Keith, 1998
8	18	18	M.Keith, 1998
9	22	22	Jacques Tramu, 2004
10	25	25	Jacques Tramu, 2004
11	24	30	Jacques Tramu, 2004
12	25	34	Jacques Tramu, 2004

Unter einer vollständigen Lösung versteht man eine, bei der alle vorhandenen Primzahlen angegriffen werden können. Es gilt:

Satz von Tramu
Für n x n Bretter mit n > 10 existieren keine vollständigen Lösungen.



Acht-Damen-Problem

Bei dem Acht-Damen-Problem sind acht Damen so auf einem Schachbrett zu positionieren, dass diese sich nicht gegenseitig schlagen können
1845 wurd das Problem durch M.Bezzel erstmals in einer Schachzeitung veröffentlicht. Fünf Jahre später gab Dr.Nauk, ein blinder Schachspieler, alle 92 Lösungen an.

Lösungsanzahl bei n-Damen auf n x n-Brett

n	Anzahl	n	Anzahl	n	Anzahl	n	Anzahl
4	2	5	10	6	4	7	40
8	92	9	352	10	724	11	2680
12	14200	13	73712	14	365596	15	2279184
16	14772512	17	95815104	18	666090624	19	4968057848
20	39029188884	21	314666222712	22	2691008701644		
23	24233937684440			24	227514171973736		
25	2207893435808352						

Lösungsabschätzung $A(n) \approx n!\ 0{,}39^n$
empirische Komplexität $T(n) = O(n^*(1+n/30))^{0.3^*n}$
Gibt man für die Zeilen von oben nach unten nur die Spaltennummer (1,...,8) an, in der eine Dame positioniert werden kann, so sind die 92 Standardlösungen:

1: (1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)
2: (1, 6, 8, 3, 7, 4, 2, 5)
3: (1, 7, 4, 6, 8, 2, 5, 3)
4: (1, 7, 5, 8, 2, 4, 6, 3)
5: (2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5)
6: (2, 5, 7, 1, 3, 8, 6, 4)
7: (2, 5, 7, 4, 1, 8, 6, 3)
8: (2, 6, 1, 7, 4, 8, 3, 5)
9: (2, 6, 8, 3, 1, 4, 7, 5)
10: (2, 7, 3, 6, 8, 5, 1, 4)
11: (2, 7, 5, 8, 1, 4, 6, 3)
12: (2, 8, 6, 1, 3, 5, 7, 4)
13: (3, 1, 7, 5, 8, 2, 4, 6)
14: (3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6)
15: (3, 5, 2, 8, 6, 4, 7, 1)
16: (3, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 6)
17: (3, 5, 8, 4, 1, 7, 2, 6)
18: (3, 6, 2, 5, 8, 1, 7, 4)
19: (3, 6, 2, 7, 1, 4, 8, 5)
20: (3, 6, 2, 7, 5, 1, 8, 4)
21: (3, 6, 4, 1, 8, 5, 7, 2)
22: (3, 6, 4, 2, 8, 5, 7, 1)
23: (3, 6, 8, 1, 4, 7, 5, 2)
24: (3, 6, 8, 1, 5, 7, 2, 4)
25: (3, 6, 8, 2, 4, 1, 7, 5)
26: (3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6)
27: (3, 7, 2, 8, 6, 4, 1, 5)
28: (3, 8, 4, 7, 1, 6, 2, 5)
29: (4, 1, 5, 8, 2, 7, 3, 6)
30: (4, 1, 5, 8, 6, 3, 7, 2)
31: (4, 2, 5, 8, 6, 1, 3, 7)
32: (4, 2, 7, 3, 6, 8, 1, 5)
33: (4, 2, 7, 3, 6, 8, 5, 1)
34: (4, 2, 7, 5, 1, 8, 6, 3)
35: (4, 2, 8, 5, 7, 1, 3, 6)
36: (4, 2, 8, 6, 1, 3, 5, 7)
37: (4, 6, 1, 5, 2, 8, 3, 7)
38: (4, 6, 8, 2, 7, 1, 3, 5)
39: (4, 6, 8, 3, 1, 7, 5, 2)
40: (4, 7, 1, 8, 5, 2, 6, 3)
41: (4, 7, 3, 8, 2, 5, 1, 6)
42: (4, 7, 5, 2, 6, 1, 3, 8)
43: (4, 7, 5, 3, 1, 6, 8, 2)
44: (4, 8, 1, 3, 6, 2, 7, 5)
45: (4, 8, 1, 5, 7, 2, 6, 3)
46: (4, 8, 5, 3, 1, 7, 2, 6)
47: (5, 1, 4, 6, 8, 2, 7, 3)
48: (5, 1, 8, 4, 2, 7, 3, 6)
49: (5, 1, 8, 6, 3, 7, 2, 4)
50: (5, 2, 4, 6, 8, 3, 1, 7)
51: (5, 2, 4, 7, 3, 8, 6, 1)
52: (5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3)
53: (5, 2, 8, 1, 4, 7, 3, 6)
54: (5, 3, 1, 6, 8, 2, 4, 7)
55: (5, 3, 1, 7, 2, 8, 6, 4)
56: (5, 3, 8, 4, 7, 1, 6, 2)
57: (5, 7, 1, 3, 8, 6, 4, 2)
58: (5, 7, 1, 4, 2, 8, 6, 3)
59: (5, 7, 2, 4, 8, 1, 3, 6)
60: (5, 7, 2, 6, 3, 1, 4, 8)
61: (5, 7, 2, 6, 3, 1, 8, 4)
62: (5, 7, 4, 1, 3, 8, 6, 2)
63: (5, 8, 4, 1, 3, 6, 2, 7)
64: (5, 8, 4, 1, 7, 2, 6, 3)
65: (6, 1, 5, 2, 8, 3, 7, 4)
66: (6, 2, 7, 1, 3, 5, 8, 4)
67: (6, 2, 7, 1, 4, 8, 5, 3)
68: (6, 3, 1, 7, 5, 8, 2, 4)
69: (6, 3, 1, 8, 4, 2, 7, 5)
70: (6, 3, 1, 8, 5, 2, 4, 7)
71: (6, 3, 5, 7, 1, 4, 2, 8)
72: (6, 3, 5, 8, 1, 4, 2, 7)
73: (6, 3, 7, 2, 4, 8, 1, 5)
74: (6, 3, 7, 2, 8, 5, 1, 4)
75: (6, 3, 7, 4, 1, 8, 2, 5)
76: (6, 4, 1, 5, 8, 2, 7, 3)
77: (6, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 3)
78: (6, 4, 7, 1, 3, 5, 2, 8)
79: (6, 4, 7, 1, 8, 2, 5, 3)
80: (6, 8, 2, 4, 1, 7, 5, 3)
81: (7, 1, 3, 8, 6, 4, 2, 5)
82: (7, 2, 4, 1, 8, 5, 3, 6)
83: (7, 2, 6, 3, 1, 4, 8, 5)
84: (7, 3, 1, 6, 8, 5, 2, 4)
85: (7, 3, 8, 2, 5, 1, 6, 4)
86: (7, 4, 2, 5, 8, 1, 3, 6)
87: (7, 4, 2, 8, 6, 1, 3, 5)
88: (7, 5, 3, 1, 6, 8, 2, 4)
89: (8, 2, 4, 1, 7, 5, 3, 6)
90: (8, 2, 5, 3, 1, 7, 4, 6)
91: (8, 3, 1, 6, 2, 5, 7, 4)
92: (8, 4, 1, 3, 6, 2, 7, 5)

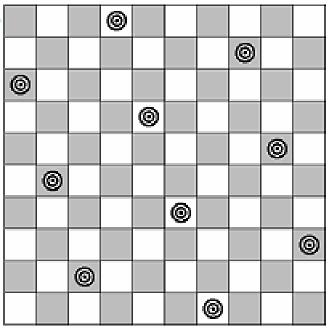
Pascal-Programm zum Acht-Damen-Problem

```
PROGRAM damen;
CONST frei=true; besetzt=false;    {Feldgröße maximal 100} max=100;
VAR   i,k,maxx  : INTEGER;   anzahl    : LONGINT;
      {Hilfsfelder zur Speicherung der Belegung in den Zeilen, Spalten und Diagonalen}
      zeile     : ARRAY[1..max] OF BOOLEAN;                 ndiag     : ARRAY[2..2*max] OF BOOLEAN;
      hdiag     : ARRAY[-(max-1)..(max-1)] OF BOOLEAN;     spalte    : ARRAY[1..max] OF INTEGER;
      spalteold : INTEGER;
{Ausgabe der Aufstellung der Damen}
PROCEDURE ausgabe;
VAR   i : INTEGER;
BEGIN FOR i:=1 TO maxx DO WRITE(spalte[i]:4); WRITELN; inc(anzahl); END;
{Rekursive (Backtracking) Prozedur zur Suche eines freien Feldes in der nächsten Zeile}
PROCEDURE next(i:INTEGER);
VAR j:INTEGER;
BEGIN
  FOR j:=1 TO maxx DO IF (zeile[j]=frei) and (ndiag[i+j]=frei) and (hdiag[i-j]=frei) THEN BEGIN
        spalte[i]:=j;
        zeile[j]:=besetzt;          ndiag[i+j]:=besetzt;          hdiag[i-j]:=besetzt;
        IF i<maxx THEN  {weitere Suche in der nächsten Zeile} next(i+1) ELSE ausgabe;
        zeile[j]:=frei;          ndiag[i+j]:=frei;          hdiag[i-j]:=frei;
END END;
BEGIN
  {Testlauf des Programms auf 8x8-Feld}   maxx:=8;   anzahl:=0;
  fillchar(zeile,sizeof(zeile),frei);   fillchar(ndiag,sizeof(ndiag),frei);   fillchar(hdiag,sizeof(hdiag),frei);
  {Beginn der Suche in der 1.Spalte und 1.Zeile}   next(1);
  {Ausgabe der Anzahl verschiendener Stellungen}   WRITELN(anzahl);
END.
```

Superdamen-Problem

Eine Dame besitzt im Schachspiel die Zugmöglichkeiten der anderen Figuren, mit Ausnahme des Springers.
Betrachtet man eine "Superdame", die auch zusätzlich wie ein Springer ziehen kann, so ergibt sich erneut die Frage, ob man n derartige Superdamen auf einem n x n-Spielfeld positionieren kann, ohne dass sie sich gegenseitig bedrohen.

Es zeigt sich, dass dies erst ab n = 10 möglich ist. Auf dem 10 x 10-Feld existieren 4 dreh- bzw. spiegelsymmetrische Lösungen. Die Abbildung zeigt eine der Lösungen.

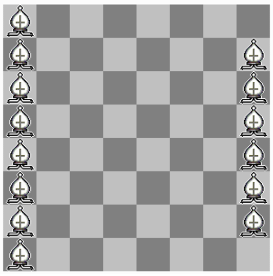


Lösungsanzahl bei n-Superdamen auf n x n-Brett

n	Anzahl	n	Anzahl
10	4	11	44
12	156	13	1876
14	5180	15	32516
16	202900		

Positionieren von Türmen

Auf einem n x n Schachbrett können k Türme ($k \leq n$) auf $({}^{n}{}_{k})^2$ k! Möglichkeiten positioniert werden, ohne dass sie sich schlagen können.



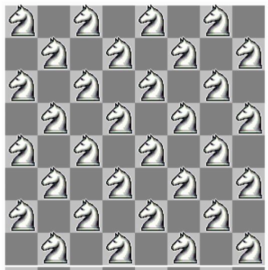
Läuferproblem

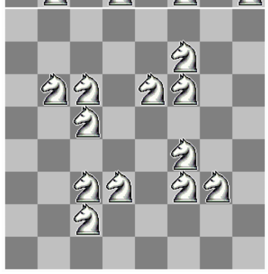
In Analogie zum Acht-Damen-Problem kann ebenso nach der maximalen Anzahl von Läufern auf einem Schachbrett gefragt werden, die sich nicht gegenseitig schlagen können. Nach Dudeney (1970) können auf einem n x n Feld maximal 2n-2 Läufer positioniert werden. Die Abbildung enthält eine Lösung für das 8 x 8 Feld.

Die Anordnungsmöglichkeiten (bis auf Symmetrie verschieden) von n Läufern auf einem n x n Feld sind

$2^{(n-4)/2}\ [2^{(n-2)/2} + 1]$, für gerades n

$2^{(n-3)/2}\ [2^{(n-3)/2} + 1]$, für ungerades n





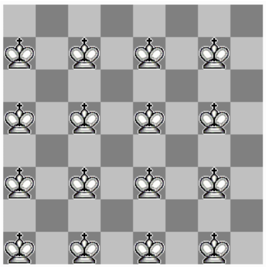
Springerproblem

In Analogie zum Acht-Damen-Problem kann ebenso nach der maximalen Anzahl von Springern auf einem Schachbrett gefragt werden, die sich nicht gegenseitig schlagen können. Nach Dudeney (1970) können auf einem 8 x 8 Feld maximal 32 Springer positioniert werden. Die Abbildung zeigt eine Lösung für das 8 x 8 Feld. Allgemein ergibt sich für die Maximalzahl von Springern:

$1/2\ n^2$, für gerades n

$1/2\ (n^2 + 1)$, für ungerades n

Fragt man nach der Minimalzahl von Springern, so dass jedes Feld bedroht ist, ergibt sich für n x n Felder mit n = 1,2,... ein Wert von 1, 4, 4, 4, 5, 8, 10, 12, ... Die untere Abbildung zeigt eine Lösung für das klassische Schachbrett. Die Anzahl verschiedener Lösungen ist hier 1, 1, 2, 3, 8, 22, 3, ...



Königsproblem

In Analogie zum Acht-Damen-Problem kann ebenso nach der maximalen Anzahl von Königen auf einem Schachbrett gefragt werden, die sich nicht gegenseitig schlagen können. Nach Madachy (1979) können auf einem 8 x 8 Feld maximal 16 Springer positioniert werden. Die Abbildung zeigt eine Lösung für das 8 x 8 Feld. Allgemein ergibt sich für die Maximalzahl von Königen:

$1/4\ n^2$, für gerades n

$1/4\ (n^2 + 1)$, für ungerades n

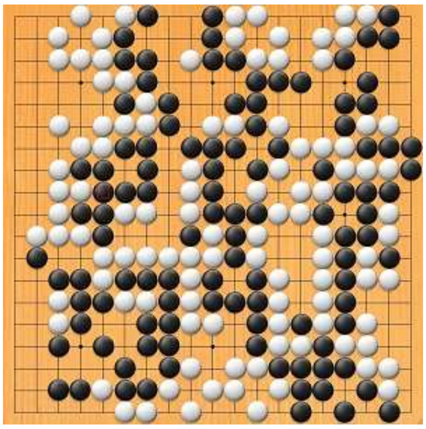
Fragt man nach der Minimalzahl von Königen, so dass jedes Feld bedroht ist, ergibt sich für das 8 x 8 Feld der Wert 9.

Damespiel, Checkers

Das Damespiel ist wahrscheinlich weit über 2500 Jahre alt. So entdeckte man in etruskischen Katakomben eine Wandmalerei mit der Abbildung eines (wahrscheinlich) Dame-ähnlichen Spiels. In dem berühmten Grabe Tutenchamuns (1300 v.Chr.) wurde ein Spielbrett entdeckt, auf dem „Senet" gespielt wurde, was dem Damespiel sehr ähnlich ist. Heutzutage ist das Damespiel nicht mehr so verbreitet und wird nur noch wenig gespielt. Dies ist schade, da es das logische Denkvermögen stark fördert. Während es beim Schach absolut klare Spielregeln gibt, ist dies beim Damespiel nur für internationale Turniere klar geregelt. Nationale und regionale Besonderheiten ergeben teilweise sehr unterschiedliche Damepartien.
In dem Buch „Zug um Zug" von Heinz Machatschek heißt es dazu:
„… Experten behaupten sogar, man könne die Nationalität von Damespielenden beim Zusehen bestimmen, ohne dass diese ein Wort zu wechseln brauchen …"

Spieler die nur vorwärts und nicht rückwärts ziehen sind von der Nationalität deutsch oder polnisch. Wird nur auf weißen Feldern gespielt und immer nur ein Feld gezogen, so sind die Spieler Engländer. Spieler, welche die Dame auf das Feld des geschlagenen Steins stellen (wie beim Schach) und nicht dahinter, kommen aus Nordamerika. Franzosen spielen ähnlich den deutschen Regeln aber auf den weißen und

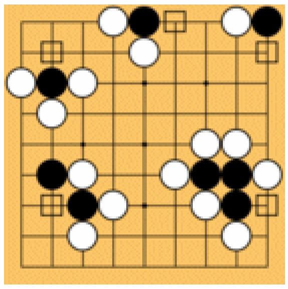
nicht den schwarzen Feldern. Italiener schlagen mit einem einfachen Stein niemals die Dame („Signora"). In der Türkei spielt man auf dem ganzen Brett und zieht horizontal und vertikal, usw.
Nach Schroeppel existieren beim 8 x 8 Damespiel (engl. Checkers) 10^{12} mögliche Positionen. Jon Schaeffer ermittelte $5*10^{20}$ mögliche Positionen, von denen 10^{18} Stellungen entsprechend den Regeln des Damespiels erreichbar sind.
Damit sind etwa 10^{9} verschiedene Positionen für ein erfolgreiches Spiel zu analysieren. In absehbarer Zukunft wird dies durch Computer realisierbar sein, so dass es möglich sein wird, mit dem ersten, "richtigen" Zug das Spiel stets zu gewinnen.



Go-Spiel

"Wenn es im Universum noch irgendwo intelligente Lebewesen gibt, dann kennen sie vielleicht Schach, höchstwahrscheinlich jedoch Go." Emanuel Lasker

Go ist ein strategisches Brettspiel für zwei Spieler. Auf einem 19 x 19 Go-Spielfeld existieren rund $4{,}63 \cdot 10^{170}$ verschiedene Positionen. Dieses klassische, chinesische Brettspiel gilt als das variantenreichste Spiel der Welt. Es entstand um 2000 v.u.Z. und wird 548 v.u.Z. erstmals in "Zuo Zhuan" schriftlich erwähnt.
Im Laufe der Jahrhunderte hat das Spiel in Japan und Korea eine besondere Form erhalten, die auch in Europa sehr beliebt ist.
Weltweit gibt es über 100 Millionen Go-Spieler, die zum größten Teil in Fernost leben.
Die Anzahl der möglichen Go-Spiele mit einer Zugzahl n = 1, 2, 3, … ist 1, 362, 130683, 47046242, …

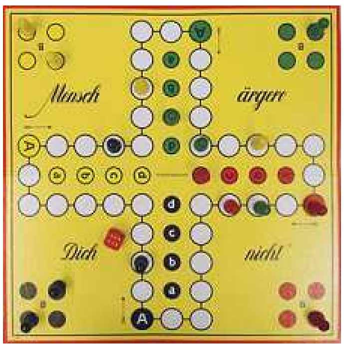


Go-Regeln

Man spielt mit linsenförmigen schwarzen und weißen Steinen, die auf das Spielfeld gesetzt werden. Ziel des Spiels ist es, mit den Steinen seiner Farbe möglichst große Gebiete zu umzingeln.
Das Spielfeld besteht aus 19 horizontalen und 19 vertikalen Linien, die ein Gitter von 361 Schnittpunkten bilden, auf die man die Steine setzt. Die Spieler verfügen über 181 schwarze und 180 weiße Steine.

Die Spieler ziehen abwechselnd, Schwarz beginnt. Der Spieler, der am Zug ist, kann entweder einen Stein auf einen beliebigen leeren Schnittpunkt setzen oder passen. Gesetzte Steine werden im weiteren Spiel nicht mehr bewegt.
Ein einzelner Stein wird geschlagen, also vom Brett genommen, wenn seine letzte Freiheit von einem gegnerischen Stein besetzt worden ist. Freiheiten sind die einem Stein horizontal und vertikal benachbarten, unbesetzten Schnittpunkte. Gleiches gilt für Ketten von Steinen. In der Abbildung sind alle die Stellen markiert, auf denen einer weißer Stein mindestens einen schwarzen schlagen würde.
Geschlagene Steine werden als Gefangene aufbewahrt. Jeder Gefangene zählt einen Punkt in der Endabrechnung.

Es ist nicht erlaubt, einen Stein so zu setzen, dass er bzw. die mit ihm verbundene Kette nach dem Zug keine Freiheit besitzt (Selbstmord). Zur vollständigen Ausführung eines Zuges gehört auch das Herausnehmen geschlagener Steine. Deshalb ist es kein Selbstmord, wenn mindestens ein gegnerischer Stein geschlagen wird, denn der gesetzte Stein erhält dadurch wieder eine Freiheit.
Das sofortige Zurückschlagen eines einzelnen Steines, der gerade einen einzelnen Stein geschlagen hat, ist verboten. Eine solche Situation nennt man Ko.
Das Spiel ist zu Ende, wenn beide Spieler nacheinander passen. Die Punktzahl eines Spielers ist die Summe der durch Steine der eigenen Farbe umschlossenen freien Schnittpunkte (Gebiet) und der gefangenen Steine (gegnerischer Farbe). Der Spieler mit der höheren Punktzahl gewinnt das Spiel.

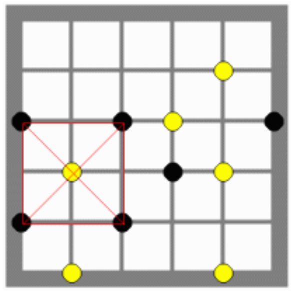


Mensch ärgere dich nicht

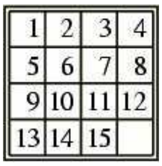
Bei diesem Spiel muss jeder Spieler seine vier Spielfiguren vom Start auf die Zielfelder ziehen. Dabei müssen die Figuren das kreuzförmige Spielbrett einmal umrunden. Über die Anzahl der zu ziehenden Felder pro Runde entscheidet ein Würfel. Trifft man beim Ziehen auf die Spielfigur eines anderen Mitspielers, so darf man diese zum Startfeld zurückschicken.

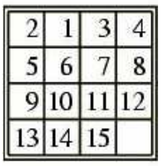
"Mensch ärgere dich nicht" wurde vom Münchner Josef Friedrich Schmidt erfunden und kam im Jahre 1914 auf den deutschen Markt. Erst nach dem Ersten Weltkrieg wurde es ein Erfolg.
Die Urform des Spiels ist das indische Spiel Pachisi, das schon im 16.Jahrhundert in Indien nachgewiesen ist. Englische Reisende brachten es im 19.Jahrhundert nach Europa.

Trotz seiner Einfachheit ist "Mensch ärgere dich nicht" kein reines Glücksspiel.
Während der Partie kann der Spieler aktiv bestimmen, welche Spielfigur er bewegt. Seine Entscheidung trifft er mit vollständiger Information. Der Einfluss des Zufalls ist mit dem Würfeln gegeben. Für das Modell eines idealen Würfels nimmt man an, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Eins, Zwei, … zu würfeln, je 1/6 ist und dass für mehrere Würfe die Unabhängigkeit der Ereignisse gilt.
Die Frage, wie lange eine Spielfigur durchschnittlich dafür braucht, eine bestimmte Wegstrecke zurückzulegen, ist in diesem Spiel sehr komplex, da die Spielfiguren sich gegenseitig schlagen und wieder zum Startfeld zurückgeschickt werden können.
Eine mathematische Analyse gelang bisher nicht.

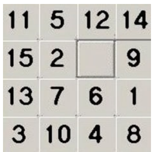


Mini-Go
Mini-Go ist ein einfaches Brettspiel.
Abwechselnd belegen die zwei Spieler einen Gitterpunkt mit einem Spielstein. Gewonnen hat derjenige, der als erster mit seinen Steinen ein Quadrat bildet. Dabei kann dieses Quadrat auch schräg angeordnet sein. In der Abbildung hat der Spieler mit den schwarzen Steinen gewonnen. Mit etwas Spielerfahrung kann der beginnende Spieler stets den Sieg erzwingen.





15er-Spiel
Dieses Puzzle wurde erstmals 1878 von Sam Loyd beschrieben, daher auch Loyd's 15 genannt.
Es besteht aus 15 Quadraten, welche die Ziffern 1 bis 15 enthalten, die in einem 4 x 4 Quadrat angeordnet sind. Das 16.Feld bleibt frei.
Aufgabe ist es, die 15, am Anfang unsortierten Quadrate numerisch zeilenweise von links nach rechts; durch Verschieben eines Quadrates auf die "leere Position"; zu ordnen. Je nach Ausgangssitutation ist dies in endlich vielen Schritten möglich oder prinzipiell unmöglich. Wird die Summe S der Anzahl von Quadraten i (i=1,2,...,15) gebildet, welche sich auf einer von links oben zeilenweise nach rechts unten gezählten Position i befinden, mit i < n, so kann das Puzzle genau dann korrekt geordnet werden, wenn S gerade ist, d.h. die zweite Anordnung kann nicht geordnet werden, da S = 1.
Es gibt 15 Steine, folglich gibt es 15! = 1 307 674 368 000 Permutationen. Nur die Hälfte der Permutationen ist gerade und wird als Position angenommen. Zählt man das leere Feld mit, gibt es 16! = 20 922 789 888 000 Möglichkeiten.
Betrachtet man ein 3 x 3 Puzzle mit den Zahlen 1 bis 8, so ist von diesem bekannt, dass dieses auf 10 verschiedene Arten in mindestens 30 Zügen geordnet werden kann. Für 32 Züge gibt es schon 112 Möglichkeiten, für 34 Züge 512.

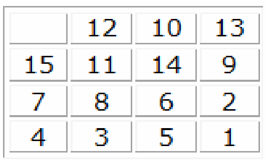


Die Berechnung von Lösungen mit möglichst wenigen Zügen ist ein schwieriges mathematisches Problem. Man kennt nur Abschätzungen. So weiß man heute, dass nach mindestens 80 Zügen das Puzzle gelöst werden kann. Damit werden Computerprogramme mit der großen Anzahl von Fällen fertig. Das links angegebene Muster kann in 59 Zügen geordnet werden: 9, 1, 6, 9, 1, 14, 12, 1, 2, 15, 11, 5, 1, 2, 15, 7, 9, 4, 10, 3, 13, 9, 3, 10, 8, 6, 14, 15, 4, 3, 7, 11, 5, 1, 2, 4, 3, 8, 6, 14, 15, 12, 4, 3, 8, 6, 14, 15, 12, 8, 6, 7, 11, 6, 7, 11, 10, 14, 15.
1870 wurde ein Preis von 1000 Dollar für den ausgesetzt, welcher das Puzzle für den Fall lösen konnte, dass ausschließlich die 14 und 15 vertauscht waren. Viele versuchten sich, aber es ist unmöglich.

Allerdings: Betrachtet man das Puzzle als gelöst, wenn die Zahlen in die Reihenfolge

01 02 03 __
04 05 06 07
08 09 10 11
12 13 14 15

angeordnet sind, so ist auch die Anordnung des italienischen Puzzles, bei dem 14 und 15 vertauscht sind, möglich. Unter Loyd's 8 bzw. Loyd's 24 versteht man analoge Puzzle mit 3x3 bzw. 5x5 Feldern.



15er-Spiel (3)
Es ist bekannt, dass jede lösbare Ausgangssitutation mit höchstens 80 Zügen gelöst werden kann. Die Frage ist, für welche Ausgangssituation, der möglichen 16!/2 = 10 461 394 940 000, tatsächlich 80 Züge notwendig sind.
Durch Ralph Udo Gasser wurden neun Konfigurationen in "Harnessing Computational Resources for Efficient Exhaustive Search" angegeben, 2 weitere durch Adrian Brüngger und Mitarbeiter. Im Juni 2009 fand Siegfried Beyer fünf weitere Ausgangssitutationen mit notwendigen 80 Zügen.
In der nachfolgenden Tabelle werden die 16 Konfigurationen von links oben nach rechts aufgezählt, das Leerfeld _ ist dabei immer das links oben stehende.

Puzzle	Ausgangsstellung		
1	_ 12 10 13 15 11 14 9 7 8 6 2 4 3 5 1	2	_ 12 14 13 15 11 9 10 8 3 6 2 4 7 5 1
3	_ 12 9 13 15 11 10 14 7 8 6 2 4 3 5 1	4	_ 12 9 13 15 11 10 14 3 7 5 6 4 8 2 1

5	_ 12 9 13 15 11 10 14 8 3 6 2 4 7 5 1	6	_ 12 9 13 15 11 10 14 3 7 6 2 4 8 5 1
7	_ 12 10 13 15 11 9 14 7 3 6 2 4 8 5 1	8	_ 15 9 13 11 12 10 14 3 7 6 2 4 8 5 1
9	_ 12 9 13 15 11 14 10 3 8 6 2 4 7 5 1	10	_ 12 9 13 15 11 10 14 7 8 5 6 4 3 2 1
11	_ 12 9 13 15 8 10 14 11 7 6 2 4 3 5 1	12	_ 12 14 13 15 11 9 10 3 7 6 2 4 8 5 1
13	_ 12 9 13 15 11 10 14 3 7 2 5 4 8 6 1	14	_ 12 10 13 15 11 14 9 3 7 6 2 4 8 5 1
15	_ 12 10 13 15 11 14 9 3 7 2 5 4 8 6 1	16	_ 11 9 13 12 15 10 14 3 7 6 2 4 8 5 1

	12	10	13
15	11	14	9
7	8	6	2
4	3	5	1

Das links abgegebene Puzzle benötigt die Maximalzahl von 80 Zügen zur Lösung. Zur Lösung müssen nacheinander folgende Felder bewegt werden:
15, 7, 4, 3, 5, 1, 2, 9, 13, 10, 12, 15, 7, 4, 3, 5, 1, 2, 9, 13, 10, 12, 15, 7, 4, 11, 8, 1, 2, 9, 13, 10, 14, 15, 7, 8, 11, 3, 1, 2, 9, 13, 10, 14, 15, 11, 2, 6, 11, 7, 8, 4, 3, 1, 5, 9, 13, 10, 14, 15, 12, 8, 4, 3, 1, 5, 9, 13, 10, 14, 15, 12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 14, 15

8	7	6
5	4	3
2	1	

→

1	2	3
4	5	6
7	8	

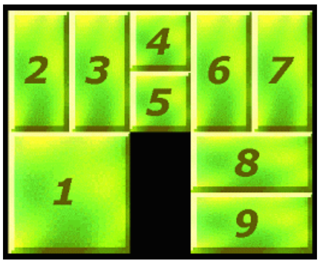
Achterspiel

Problem: Man soll mit möglichst wenigen Zügen die rückwärts laufenden Zahlen links in die natürliche Reihenfolge 1 bis 8 mit einer Leerstelle unten rechts bringen. Das Problem stammt von Henry Ernest Dudeney. Martin Gardner stellte den Lesern der amerikanischen Zeitschrift "Scientific American" diese Aufgabe. Ergebnis: Man benötigt nur 30 Züge und es gibt 10 Lösungen.

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	1	2	

Das entsprechende 16er-Spiel ist unlösbar. Vertauscht man aber 1 und 2, so wird das Puzzle lösbar. Man schafft es in 70 Zügen: 2, 5, 9, 13, 14, 10, 11, 7, 3, 1, 6, 11, 10, 15, 7 ,3, 1, 6, 5, 9, 13, 14, 15, 7, 3, 1, 6, 5, 9, 13, 14, 15, 12, 8, 4, 14, 15, 12, 8, 4, 12, 8, 7, 3, 1, 6, 5, 9, 13, 15, 14, 2, 15, 14, 2, 12, 8, 2, 11, 10, 2, 7, 3, 2, 6, 5, 9, 13, 14, 15.

Loyds Schiebepuzzle

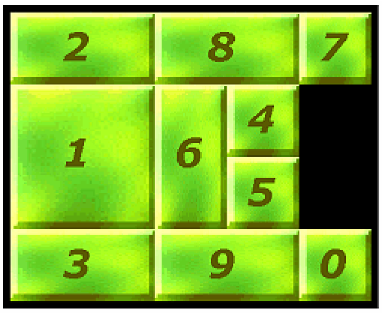


Eines der berühmtesten Werke über mathematische Spiele, „Cyclopedia of Puzzles“ von Sam Loyd, enthält neben dem „Spiel 15“ eine Vielzahl interessanter Schiebepuzzles. Eines der berühmtesten ist das nach ihm benannte Puzzle.
Allerdings wurde das Puzzle schon 1909 von L.W.Hardy beschrieben und patentiert. Dort wird es Dad's Puzzle genannt.
Über die Jahre hinweg wurden sehr viele Versionen entwickelt und unter sehr verschiedenen Namen veröffentlicht.

Gegeben ist ein 5 x 4 Spielfeld auf dem sich ein großes Quadrat (1), zwei kleine Quadrate (4) und (5), zwei liegende Rechtecke (8) und (9) und vier stehende Rechtecke (2), (3), (6) und (7) befinden. Ziel des Spieles ist es, durch Verschieben der Flächen das Quadrat (1) an die Position der Rechtecke (8) und (9) zu transportieren.
Durch Sam Loyd wurde dieses Puzzle als lösbar bezeichnet! Die optimale Lösung ist:
1, 2, 3, 5 zwischen 3 und 4, 1, 9, 8, 6, 7, 4, 5, 1, 9, 8, 6, 7, 4 zwischen 6 und 5, 7, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 8, 9, 5 zwischen 4 und 8, 9, 8, 5, 4, 9, 8, 4 zwischen 5 und 2, 3, 2, 4, 5, 3, 2, 5 zwischen 4 und 1, 2, 3, 9, 8, 1, 5, 4, 2, 3, 9, 8, 1, 5 zwischen 1 und 4, 7, 6, 1

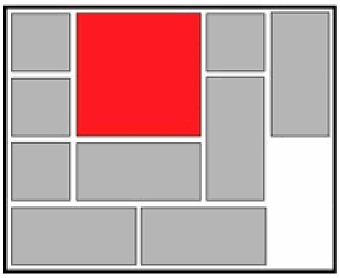
Flemings Puzzle

Flemings Puzzle, auch Red Donkey, ist ein anspruchsvolles Denkspiel und Schiebepuzzle.
1934 beschrieb John Harold Fleming in England das Spiel erstmals. Später wurde es unter sehr verschiedenen Namen immer wieder veröffentlicht.
Das Spiel besteht aus einem Spielbrett mit 4x5 Feldern, auf dem sich ein 2x2 Spielstein, vier 1x1-Steine und fünf 1x2 Steine wie in der Abbildung befinden.
Die Aufgabe besteht darin, den mit 1 markierten Stein auf die Position von 4, 5 und den leeren Feldern zu schieben.
Da auf dem Spielfeld nur zwei Felder nicht belegt sind, kann jeder Spielstein stets nur horizontal oder vertikal bewegt werden.



Die kürzeste Lösung benötigt 101 Züge, wenn man jede Bewegung eines Spielsteins als Zug zählt. Bedeutet d = down (runter), u = up (hoch), l = links und r = rechts, so ist eine mögliche Lösung:

d7, r8, r5, u6, u9, l0, d5, r9, d6, d6, l4, l7, u4, l7, u9, u0, r0, r6, d7, d7, d4, d4, l9, l8, u0, u5, u0, u5, r6, r7, d4, d9, l5, d0, l5, l0, u6, u6, r9, u4, l7, d9, r4, r4, d0, d5, d8, r2, r2, u1, l5, u7, l5, l7, l0, l4, l9, d6, d6, r8, r2, r1, u5, l7, u5, l0, u7, l0, d1, l2, l2, u8, u6, r9, r3, d0, d7, d5, l2, l8, u6, r4, r1, r7, d5, d2, l8, l8, u1, r7, r5, u0, l3, l9, d4, r7, r7, d1, r8, r8, u2, u5, u0, u3, l9, l9, d1, r5, r5, r0, r0, d2, l8, u5, l8, l5, l6, u7, u4, u7, u4, r1, d0, d0, d5, d5, l6, l7, u4, u1

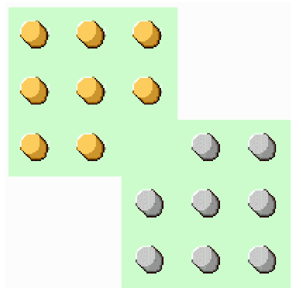


Super Century

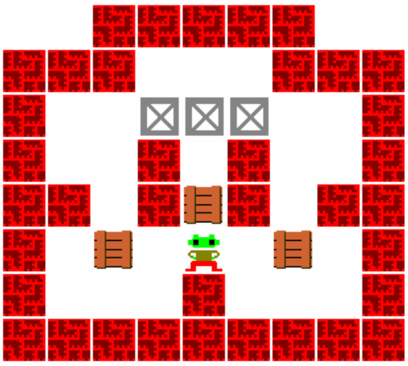
Auf der Seite
http://www.cs.brandeis.edu/~storer/JimPuzzles/ZPAGES/zzzRedDonkey.html
wird eine komplizierte Variante von Flemings Puzzle vorgestellt: "Super Century".
Diese ergibt sich durch Verschiebung der Ausgangssituation. Das Ziel ist das gleiche wie bei Flemings Puzzle.

Die kürzeste Lösung ist
r6, d0, r5, r8, d4, u9, d3, r7, d2, r3, d2, l1, l9, l8, u0, r7, r3, r2, u4, l5, d3, l7, d0, r8, r9, r1, u4, l2, u4, u2, l7, l7, u3, r3, r7, d2, r5, d2, d4, d4, l1, l9, l8, u0, r3, d8, d8, r9, r1, u4, u2, u4, u2, l7, l8, l3, l5, l6, d0, d0, r9, u3, r8, u3, u8, r7, r7, d2, r2, d4, d4, l1, l8, u8, u7, u6, r5, d4, l2, l6, l0, d9, d9, r3, d3, r8, r8, u7, l3, l3, u0, u9, r5, r5, d6, r2, r2, d1, l7, u0, r2, d3, l7, l0, l8, u9, u2, u5, r6, r6, d3, d0, l3, d0, l2, d8, r7, r7, u1, u3, l3, l0, l5, d9, l6, d9, r8, r7, r2, r1, u3, u4, u3, u4, l0, l5, d2, l8, u9, r6, d5, d1, r3, u4, l7, u0, u9, l5, r2, l6, d2, d8, r8, r1, d3, r4, u0, u5, l6, l6, d1, r3, d4, l7, l9, u8, u2, u8, u2, r1, d3, d3, r5, d0, l7, l9, l2, u2, u1

Puzzle 16



Das Ziel besteht darin, die goldenen und silbernen Steine mit einer möglichst geringen Anzahl Züge zu vertauschen.
Ein Zug ist folgendermassen definiert: Ein Stein kann um eine Position in die Leerstelle verschoben werden oder ein Stein kann über einen andern (beliebiger Farbe) in die Leerstelle springen. Ein Stein kann nur horizontal oder vertikal bewegt werden. Der britische Rätselexperte H.E. Dudeney (1857-1930) schaffte es in 46 Zügen und übertrumpfte damit sogar Amerikas berühmtesten Rätsel-Spezialisten Sam Loyd (1841-1911), der 47 Züge benötigte.



Sokoban

Sokoban ist ein aus den Anfängen der PC-Spiele bekanntes Spiel.
Dieses Computerspiel wurde 1982 von Hiroyuki Imabayashi erfunden und war während der achtziger Jahre sehr populär.
Ziel ist es, die Kisten; im Original Geldsäcke; mit der Spielfigur auf die Felder zu verschieben, die speziell markiert sind. Dabei kann eine Kiste nur bewegt werden, wenn das unmittelbar dahinter liegende Feld frei ist. Zwei oder mehr Kisten können nicht gleichzeitig verschoben werden.
Mathematisch interessant sind einige Fragen, zum Beispiel, für welche Ausgangssituation bei n Spielfeldern und m Kisten bzw. Geldsäcken die längste, optimale(!) Zugfolge L(n,m) entsteht.
Für eine Kiste m = 1, konnte Philippe Fondanaiche

$$L(20n+1) \geq 24n^2 + 37n - 4, \text{ d.h. } L(n)/n^2 \geq 3/50$$

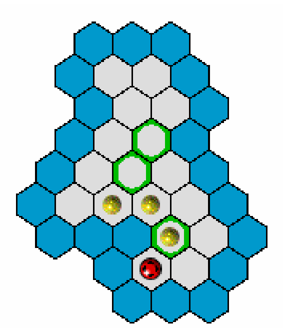
nachweisen. John Hoffman zeigte $L(2n+1) \leq (2n+1)\,(2n)!/(n!)^2$

Für m = 1 sind die bisher längsten, bekannten Sokoban-Spiele

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L(n)	1	2	3	5	9	11	15	18	21	25	28

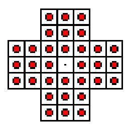
Für ein beliebiges m (Spiel muss lösbar sein!) sind die bisher längsten, bekannten Sokoban-Spiele

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L(n)	1	2	3	5	9	14	17	22	26	35	40	48



Hexoban

Hexoban ist eine Variante von Sokoban. 2002 erdachte David W.Skinner diese Variante.
Die Spielidee ist der von Sokoban ähnlich. Kisten oder Kugeln sind auf Zielflächen zu schieben, in dem die Spielfigur auf diese Kisten zubewegt wird. Problematisch wird Hexoban dadurch, dass die Kisten und Kugeln in sechs verschiedene Richtungen geschoben werden können. Dadurch wird Hexoban anspruchsvoller.
Eine Übertragung von Sokoban-Problemen auf Hexoban ist nicht ohne Weiteres möglich.
http://users.bentonrea.com/~sasquatch/sokoban/hex.html



Solitaire, Solitär

Solitaire ist ein Logik-Brettspiel.
Gegeben ist ein Spielbrett mit 33 kreuzförmig angeordneten Spielfeldern, auf einigen der Felder befinden sich Spielfiguren, im Normalfall 32. In der Grundstellung ist das Loch in der Mitte leer.

Ziel des Spieles ist es, durch waagerechtes und senkrechtes Überspringen von Figuren alle Figuren bis auf die letzte von Spielfeld zu entfernen und mit dem letzten Sprung im Zentrum des Spielfeldes anzukommen.
Übersprungen werden darf nur, wenn das unmittelbare Feld hinter der Figur frei ist. Übersprungene Spielfiguren werden vom Brett genommen.

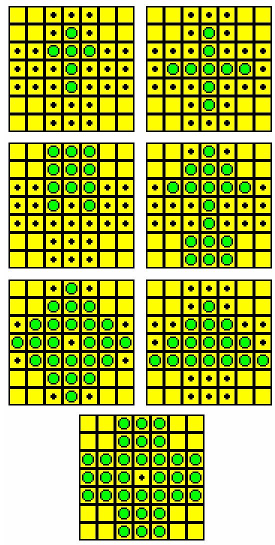
Abbildung: indisches Solitär von 1830
Das Spiel heißt Solitär (lat. solus = allein), da es ein Einpersonenspiel ist. Das Spiel Solitär wird auch Solitaire, Steckhalma, Solohalma, Springer, Jumper oder Einsiedlerspiel genannt. Der Name Solitär ist nicht eindeutig, denn Solitär kann auch ein Kartenspiel für einen Spieler sein.
Die Entstehung des Solitärspiels ist nicht bekannt. Es wird vermutet, dass es ein französischer Aristokrat erfand, der im 18.Jahrhundert in der Bastille in Paris in Einzelhaft saß. Seit dem 19.Jahrhundert wurde Solitär in immer neuen Variationen bekannt.

01 02 03
04 05 06
07 08 09 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30
31 32 33

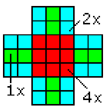
Lösungen der Grundstellung

Es ist nicht leicht, alle Stäbchen bis auf das mittlere zu entfernen.Im allgemeinen wird Solitär spontan gespielt, so dass man die einzelnen Züge später nicht wiederholen kann.
Will man eine Lösung angeben, so muss man eine Notation festlegen.Man kann z.B. die Löcher zeilenweise von 1 bis 33 nummerieren. "15-17" bedeutet einen Sprung von 15 nach 17; 16 wird entfernt.

Lösung 1: 15-17, 28-16, 21-23, 07-21, 16-28, 31-23, 24-22, 21-23, 26-24, 23-25, 32-24-26, 33-25, 26-24, 12-26, 27-25, 13-27, 24-26, 27-25, 10-12, 25-11, 12-10, 03-11, 10-12, 08-10, 01-09-11, 02-10, 17-05, 12-10, 05-17.
Man benötigt 31 Sprünge, denn 31 Stäbchen müssen entfernt werden. Ein Doppelsprung wie (32-24-26) oder (01-09-11) zählt nur einmal und heißt Zug. Also umfasst die obige Lösung 29 Züge. Da das Spielbrett symmetrisch bezüglich der Horizontalen, der Vertikalen und der beiden Diagonalen ist, gibt es zu dieser Lösung sieben weitere.

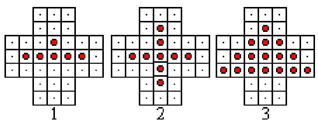


Lösung 2: Der "Weltrekord" ist eine Lösung mit nur 18 Zügen von E. Bergholt aus dem Jahre 1912.
15-17, 28-16, 21-23, 24-22, 26-24, 33-25, 18-30, 31-33-25, 09-23, 01-09, 06-18-30-28-16-04, 07-21-23-25, 13-11, 10-12, 27-13-11, 03-01-09, 08-10-12-26-24-10, 05-17.
Lösung 3: Die folgende Lösungsweg ist elegant. Man wendet viermal den L-Zug an und gelangt dann zur Hausfigur, die man mit einem Sechsfachsprung abbaut.
05-17, 08-10, 01-09, 03-01, 16-04, 01-09, 28-16, 21-23, 07-21, 24-22, 21-23, 26-24, 33-25, 31-33, 18-30, 33-25, 06-18, 13-11, 27-13, 10-12, 13-11, 24-26-12-10-08-22-24, 17-15, 29-17, 18-16, 15-17.



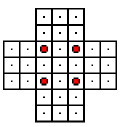
Steht eine Spielfigur im mittleren Bereich (rot), so sind Sprünge in alle vier Richtungen möglich. Von den blauen Feldern aus sind zwei Sprünge, von den grünen aus ist ein Sprung möglich. Da sind insgesamt 76 Sprünge.
Die Bewegungen auf dem Spielfeld sind kompliziert, da man nicht weiß, welche der 76 Sprünge vorkommen, und ob sich in Laufe des Spieles Sprünge an gleicher Stelle wiederholen.

Eine einfache Art Solitär zu spielen ist das Auflösen von Mustern. Am Ende muss irgendwo ein Spielstein übrigbleiben. Diese einfachen Puzzles sind als Vorübung des großen Solitärspiels gut geeignet.



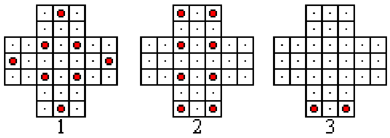
Lösungen: 1) Unterseeboot: 10-24, 15-17, 24-10, 19-17, 10-24.
2) Griechisches Kreuz: 10-02, 24-10, 19-17-05, 02-10, 15-17, 10-24, 29-17.
3) Pyramide 16: 18-06-04, 26-12, 09-11, 12-10, 24-26, 27-25, 23-09, 04-16, 10-24, 25-23, 16-28, 21-23, 28-16, 15-17.

Weitere Interessante Ausgangsituationen (von oben links nach rechts unten)
Kreuz, Plus, Feuerstelle, Pfeil, Diamant, Pyramide, Solitaire



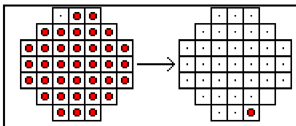
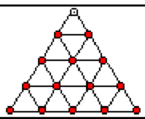
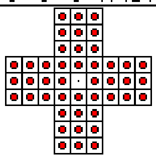
Eine Spielvariante ist das Erzeugen von Mustern am Ende. Man beginnt mit 33 Steinen in der Grundstellung, am Ende steht ein Muster. Eine schwierige Aufgabe ist es, ein vorgegebenes, meist symmetrisches Muster zu erreichen.
Lösung: 29-17, 26-24, 17-29, 32-24, 23-25, 31-23, 22-24, 25-23, 33-25, 08-22-24, 10-08, 07-09, 21-07, 02-10-08, 07-09, 12-10, 03-11, 24-26, 27-25, 19-17, 10-24, 13-27, 24-26, 27-25, 09-23, 01-09.

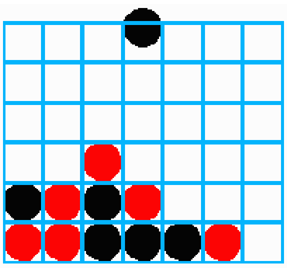
Interessant ist auch die Suche nach neuen, symmetrischen Mustern.
Lösungen:



1. Zwei Quadrate: 19-17, 16-18, 14-16, 05-17-15, 04-16-14, 29-17, 18-16, 06-18, 07-09, 13-11, 18-06, 16-04, 01-09, 03-11, 30-18, 28-16, 21-23, 27-25, 16-28, 18-30, 33-25, 31-23.
2. Allee: 19-17, 30-18, 17-19, 20-18, 27-25, 15-17, 04-16, 17-15, 07-09, 14-16, 06-04, 18-06, 03-11, 01-03, 28-30, 16-28, 25-23, 33-25, 31-33, 23-31, 21-23, 09-01, 11-09, 13-11.
3. Paar: 19-17, 30-18, 17-19, 06-18, 13-11, 27-13, 26-12, 18-06, 03-11, 01-03, 04-06, 16-04, 11-09, 13-11, 08-10, 11-09, 03-11, 22-08-10, 11-09, 04-16, 24-22, 21-23, 07-21, 32-24-22, 31-23, 16-28, 21-23-31.

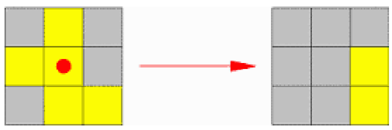
Das bis jetzt beschriebene Spielfeld mit 33 Löchern ist zumindestens in Deutschland das Standardspiel. Es heißt englisches Solitär. Es gibt Varianten:

	Französisches Solitär Ein Spiel mit 37 Feldern, das mehr Möglichkeiten bietet, das französische Solitär. Es gibt keine Mittelpunktslösung. Hier ist als Ersatz eine Zugfolge, bei der am Anfang ein freies Feld oben links und am Ende ein Stein unten rechts steht. Lösung: 03-01, 12-02, 08-06, 02-12, 19-06, 32-19, 30-32, 36-26, 05-07, 18-05, 20-18, 33-20, 01-11, 18-05, 04-06, 07-05, 20-07, 09-11, 16-18, 15-13, 22-20, 29-27, 18-31, 05,18, 35-25, 18-31, 20-33, 07,20, 37-27, 20-33, 34-32, 23-25-35, 26-36, 35-37
	Dreieckssolitär Das Dreieckssolitär hat die Lösung: 06-01, 04-06, 01-04, 07-02, 13-04, 02-07, 11-04, 14-05, 10-03, 03-08, 04-13, 12-14, 15-13
	Vergrößertes Solitär Mittelpunktslösung: 25-23, 9-24, 17-15, 35-17, 18-16, 36-18, 15-17, 18-16, 23-25, 33-35, 16-34, 35-33, 13-15, 4-13, 6-4, 1-7, 3-1, 13-4, 1-7, 7-9, 9-24, 11-13, 29-11, 10-12, 28-10, 13-11, 10-12, 31-29, 40-31, 42-40, 43-37, 45-43, 31-40, 43-37, 12-30, 29-31, 38-23, 23-21, 37-22, 21-23, 23-25, 39-24, 25-23



Vier gewinnt

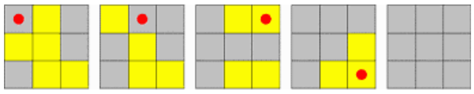
Vier gewinnt, Connect Four oder Captain's mistress ist ein Zweipersonen-Strategiespiel mit dem Ziel, als Erster vier der eigenen Spielsteine in eine Linie zu bringen. Das Spiel wurde 1974 von Milton Bradley veröffentlicht.
Das klassische Brettspiel wird auf einem senkrecht stehenden hohlen Spielbrett gespielt, in das die Spieler abwechselnd ihre Spielsteine fallen lassen. Das Spielbrett besteht aus sieben Spalten (senkrecht) und sechs Reihen (waagerecht). Jeder Spieler besitzt 21 gleichfarbige Spielsteine. Wenn ein Spieler einen Spielstein in eine Spalte fallen lässt, besetzt dieser den untersten freien Platz der Spalte. Gewinner ist der Spieler, der es als erster schafft, vier seiner Spielsteine waagerecht, senkrecht oder diagonal in eine Linie zu bringen. Das Spiel endet unentschieden, wenn das Spielbrett komplett gefüllt ist, ohne dass ein Spieler gewonnen hat.
Vier Gewinnt ist ein Spiel mit vollständiger Information. Victor Allis und James D. Allen lösten es nahezu zeitgleich und unabhängig voneinander im Jahr 1986.
Der erste Spieler kann das Spiel gegen beste Verteidigung gewinnen, wenn er in der mittleren Spalte beginnt. Beginnt er in der Spalte links oder rechts daneben, endet das Spiel bei beiderseits perfektem Spiel remis; wirft er seinen ersten Stein in eine der vier restlichen Spalten, verliert er gegen einen perfekten Gegner sogar.
Die Anzahl der möglichen Positionen nach n = 1, 2, ... Steinen ist 7, 56, 252, 1260, 4620, 18480, 59815, 206780, ...

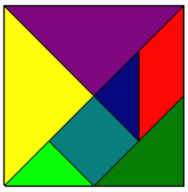


Licht aus!

Dieses Logikspiel gehört zu den Spielen, die äußerst einfache Regeln haben, den Spieler aber zur „Verzweifelung treiben“ können.
Ausgangspunkt ist ein n x n Spielfeld (Rollbalken), in dem einige Zellen eine leuchtende Glühlampe enthalten, in diesen ist „Licht an“. Ziel ist es, in allen Feldern das Licht auszumachen.
Dabei wird durch Wahl einer Zelle das Licht an- bzw. ausgeschaltet. Gleichzeitig wird das Licht aber auch in den Zellen links, rechts, oben und unten (nicht diagonal) getauscht.
Im Beispiel würde die Wahl des Feldes mit dem roten Punkt die rechts angebildete Situation ergeben.
So einfach wie das Spiel zuerst erscheint ist es nicht. Im Gegenteil. 1989 bewies der US-amerikanische Mathematiker Sutner, dass es für ein quadratisches Spielfeld immer(!) eine Lösung gibt. Mittlerweile gibt

es sogar eine streng mathematische Lösung, die mit Hilfe von Matrizen die optimale Zugfolge ermittelt. Als kleine Hilfestellung sei hier die Zugfolge für eine Situation auf dem 3 x 3 Spielfeld gezeigt:

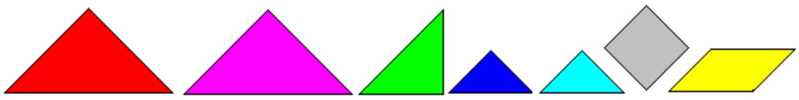




Tangram

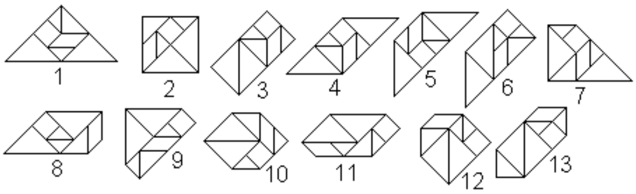
Tangram ist ein klassisches chinesisches Puzzle, welches aus 7 aus einem Quadrat herausgeschnitten Teilen besteht. Dies sind 5 Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm.
Ziel ist es, eine vorgegebene Figur mit diesen Teilen zusammenzulegen. Dabei dürfen die Teile gedreht und gespiegelt werden.

Alle sieben Tangram-Steine bestehen aus kleinen Halbquadraten, insgesamt 32 Halbquadrate oder 16 Quadrate. 16 Quadrate bilden ein großes 4x4-Quadrat. So ist das Grundproblem der "Tangram-Forschung" ein Quadrat aus allen sieben Steinen zu legen.

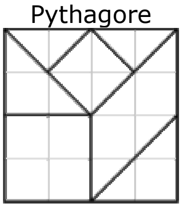


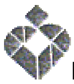
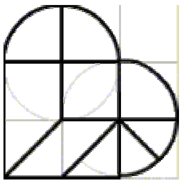
Historisch ist bei Archimedes das erste Tangram-ähnliche Spiel nachgewiesen. Dabei wurden Figuren aus 14 vorgegeben Teilen zusammengesetzt. Die chinesische Variante wurde in Europa durch Lewis Carolls Werk "Alice im Wunderland" bekannt.
Der US-amerikanische "King of Puzzles" Sam Loyd gab diesem Spiel neue Anstöße, als er 1903 in seinem "Das achte Buch Tan" 600 Lösungen veröffentlichte. Auf ihn geht auch die chinesische Herkunft mit mystischen Hintergründen zurück, was allerdings nicht wirklich nachzuweisen ist.

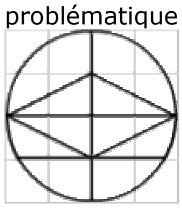
Konvexe Figuren: Eine Figur ist konvex, wenn sie nur nach außen gewölbt ist. Genauer: Greift man zwei beliebige Punkte innerhalb der Figur heraus, so liegt auch die Strecke zwischen den beiden Punkten innerhalb der Figur. Es gibt erstaunlicherweise nur 13 konvexe Figuren, die man mit Tangram-Steinen legen kann.Beweis durch Fu Traing Wang und Chuan-Chih Hsiung 1942.

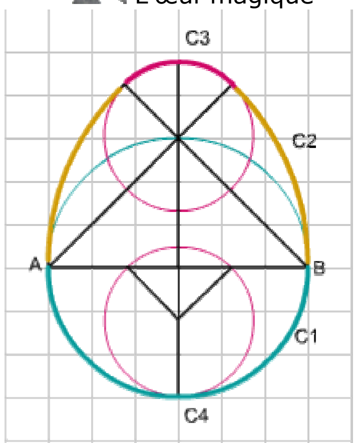


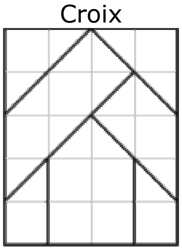
Neben dem klassischen Tangram wurden auch viele Puzzle mit anderen Teilen entwickelt. Die Übersicht zeigt einige Beispiele:

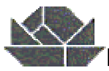
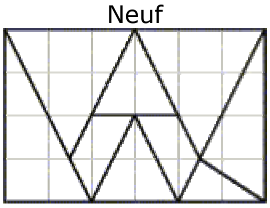

Le Pythagore

7 Teile


Le Cœur brisé

7 Teile


Le Cercle problématique

10 Teile


L'œuf magique


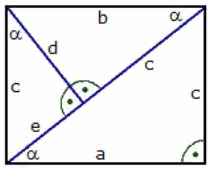

Le Brise-Croix

7 Teile

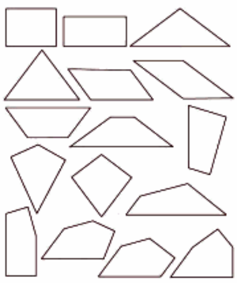

Le puzzle de Neuf

9 Teile

Drei-Dreiecke-Tangram, Brügnersche Dreiecke

Das Drei-Dreiecke-Tangram, auch Brügnersche Dreiecke, wurde von dem Mathematiker Georg Brügner entwickelt. Dabei handelt es sich um ein besonderes Tangram, das aus nur drei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken besteht, aus denen sich eine maximale Anzahl konvexer Figuren bilden lässt.

Im Gegensatz zu anderen Tangrams, deren Zweck eher spielerisch ist, basiert das Drei-Dreiecke-Tangram auf einem mathematischen Hintergrund.



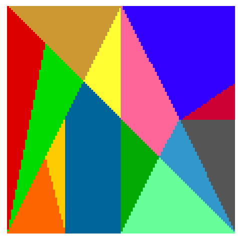


Wenn das Tangram wie im obersten Bild gebildet wird, entstehen drei rechtwinklige Dreiecke mit insgesamt fünf verschiedenen Seiten. Diese Dreiecke sind wegen der Gleichheit der Innenwinkel zueinander ähnlich.
Für den zugehörigen Winkel α ergibt sich 38,17°. Eine Besonderheit dieses Winkels ist die Beziehung $\cos^2 \alpha = \sin \alpha$ aus der $\tan \alpha = \cos \alpha$ folgt. Für die Seitenverhältnisse des Ausgangsrechteckes folgt dann

$$c/b = \tan \alpha = \cos \alpha = \sqrt{\sin \alpha} = 0{,}786\ldots$$

Nur bei diesem Seitenverhältnis im Ausgangsrechteck entsteht das Drei-Dreiecke-Tangram, da in diesem Fall die Anzahl konvexer Figuren maximal wird.
Dadurch, dass die Dreiecke insgesamt nur fünf verschiedene Seiten haben, ergeben sich viele Möglichkeiten, diese wieder zu Figuren zusammenzusetzen. Es lassen sich genau folgende 16 verschiedene konvexe Figuren bilden:

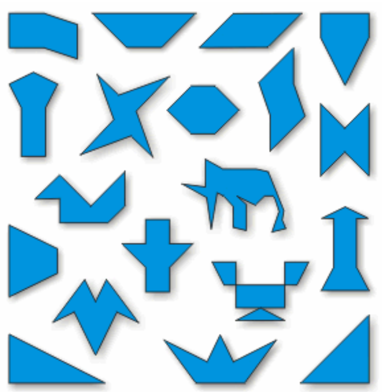
zwei Rechtecke, zwei gleichschenklige Dreiecke,
zwei Parallelogramme, drei Trapeze,
zwei Drachenvierecke, ein allgemeines Viereck,
vier Fünfecke.



Stomachion

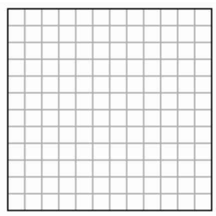
In zwei fragmentarisch erhaltenen Manuskripten von Archimedes finden sich Hinweise auf ein altes Spiel, welches die Griechen "Stomachion" (Στομαχιον) nannten.
Die Manuskripte wurden 1899 in einer arabischen Übersetzung bzw. in griechischer Sprache in Konstantinopel entdeckt.
Es ist nicht bekannt, ob das Spiel von Archimedes erfunden oder von ihm unter geometrischen Aspekten untersucht wurde. Der Begriff "Stomachion" bezieht sich auf das griechischen Wort für Magen (στομαχος), weshalb ist unklar.

Das Spiel besteht aus 14 flachen Elfenbeinstücken verschiedener polygonaler Form, die zusammengelegt ein Quadrat bilden.



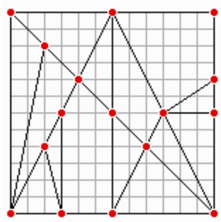
Das Ziel des Spiels ist es, die Stücke neu anzuordnen, um interessante Objekte (Menschen, Tiere, Gegenstände usw.) darzustellen. Damit ist es dem Tangram sehr ähnlich.
Erst 2003 wurde durch vier Mathematiker ermittelt, dass die 14 Teile auf 17152 verschiedene Arten zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können.
Abbildung: zusammensetzbare Figuren

Der in der Animation dargestellte Elefant entstammt einem Manuskript von Ausonius (römischer Dichter und Staatsmann, 4.Jahrhundert u.Z.).
Das griechische Manuskript ist leider unvollständig. In der arabischen Handschrift findet man die Beschreibung der Konstruktion des Stomachion und Festlegungen zur Größe der Teilstücke.

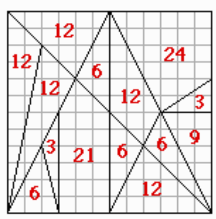


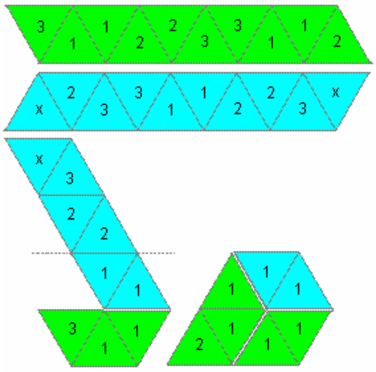
Stomachion-Konstruktion

In dem 1899 gefundenen arabischen Manuskript Archimedes' gibt dieser eine Beschreibung zur Konstruktion des Stomachions.
Ausgangspunkt ist ein 12 x 12 Einheiten großes Quadrat, in das ein Gitternetz eingezeichnet wird. Die Fläche des Quadrates ist 144, die Fläche eines kleinen Netzquadrates damit 1.
In dieses Gitter werden Strecken entsprechend der zweiten Abbildung eingezeichnet. Dabei sind alle Schnitt- und Eckpunkte der entstehenden Polygone Gitternetzpunkte.



Archimedes berechnet auch die Flächeninhalte der 14 Polygone und zeigt, dass jede Polygonfläche in einem ganzzahligen Verhältnis zur Gesamtfläche steht.
2 Polygone der Fläche 3 stehen im Verhältnis 1:48, 4 Teile der Fläche 6 im Verhältnis 1:24, 1 Polygon mit Fläche 9 im Verhältnis 1:16, 5 Teile (Fläche 12) bilden 1:12, 1 Teil (Fläche 21) 7:48 und das größte Teilpolygon mit der Fläche 24 im Verhältnis 1:6.
Die Flächeninhalte sind mit dem Satz von Pick leicht berechenbar.

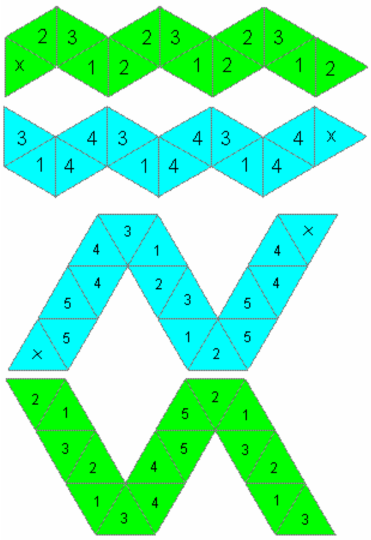




Flexagon

Ein Flexagon ist ein Sechseck, das man aus einem Streifen aus gleichseitigen Dreiecken faltet.
Bau eines Trihexaflexagons:
(1) Zeichne mit Hilfe von Zirkel und Lineal einen Streifen aus 10 gleichseitigen Dreiecken. Wähle als Seitenlänge eines Dreiecks z.B. 4 cm.
Nummeriere die Dreiecke wie angegeben.
(2) Zeichne mit Hilfe eines spitzen Gegenstandes die Seiten der Dreiecke nach, damit man das Papier an diesen Stellen später besser falten kann. Schneide den Streifen aus.
(3) Drehe den Streifen um. Nummeriere die Dreiecke wie angegeben. Setze die beiden Kreuze. Hinter 3 liegt x, hinter 1 liegt 2 usw.. Die beiden angekreuzten Dreiecke werden später aufeinandergeklebt und verschwinden.
Knicke das Papier mehrmals an den Linien zwischen den Dreiecken, damit das Flexagon, wenn es später zusammengebaut ist, "elastischer" ist.
(4) Falte das Papier so, dass ein Haken entsteht. Dann falte an der gestrichelten Linie nach hinten. Achte darauf, dass vorne nur 1 und hinten nur 2 steht. Lege dazu die Dreiecke 3 und 3 aufeinander.
(5) Es entsteht ein Sechseck. Dreieck 2 steht noch über. Es müsste auf der Rückseite ein Kreuz tragen. Klebe die beiden Dreiecke mit den Kreuzen aufeinander.

Arthur H.Stone erfand die Flexagons im Herbst 1939. Bekannt wurden sie nachdem Martin Gardner diese in der Mathematik-Ecke des Magazins Scientific American Ende der 50iger Jahre vorstellte.

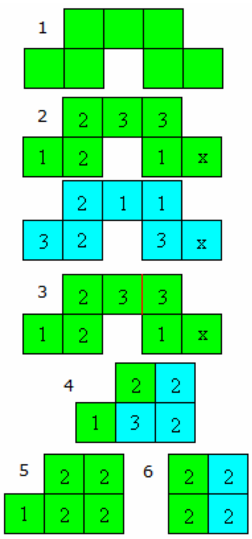


Tetrahexaflexagon

Das Tetrahexaflexagon (obere 2 Abbildungen) hat vier Oberflächen und ist etwas komplizierter als das Trihexaflexagon.
Zum Bau des Tetrahexaflexagons stellt man nebenstehenden Streifen aus gleichseitigen Dreiecken her. Man nummeriert die Dreiecke auf Vorder- und Rückseite wie angegeben.
Legt man die Dreiecke mit den Nummern 4 aufeinander, so erhält man den Streifen des Trihexaflexagons mit gleicher Nummerierung. Man faltet ihn entsprechend.
Man achtet wieder darauf, dass die Dreiecke Nr.3 aufeinandergelegt werden. Zum Schluss klebt man die beiden angekreuzten Dreiecke aufeinander.

Pentahexaflexagon

Neben den beiden beschriebenen Flexagons gibt es Erweiterungen auf 5, 6, … Oberflächen, die dann entsprechende Namen Pentahexaflexagon, Hexahexaflexagon u.s.w. tragen.
Legt man die Dreiecke mit den Nummern 5 aufeinander, so erhält man die Form des Tetrahexaflexagon von oben mit gleicher Nummerierung. Man verfährt entsprechend weiter.

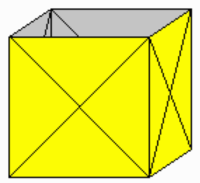


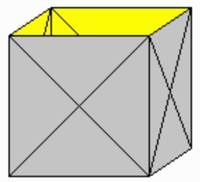
Tetraflexagon

Ein Tetraflexagon ist ein 2 x 2-Quadrat, das man aus einem Streifen Papier faltet. Das Besondere ist, dass man das Flexagon auf der Rückseite wie ein Buch öffnen kann. Dann erscheint ein weiteres 2 x 2-Quadrat, das vorher verborgen war.
Im einfachsten Fall hat das Flexagon drei Oberflächen. Das ist es ein Tri-Tetraflexagon, 3-4-Flexagon. Weiterhin gibt es das Tetra-, Penta-, Hexa-Tetraflexagon usw. mit 4, 5, 6, ….Oberflächen.

Konstruktion des Tri-Tetraflexagons

1) Zeichne die obenstehende Figur aus sieben Quadraten und schneide sie aus. Zur Verdeutlichung wird hier die Vorderseite grün, die Rückseite blau gefärbt.
2) Beschrifte die Vorder- und Rückseite der Quadrate mit 1, 2 und 3. Zwei Quadrate erhalten ein x. Sie werden später aufeinandergeklebt.
3) Falte den Streifen an der roten Linie, so dass die Quadrate mit den Dreien aufeinander liegen.
4) Schiebe das Quadrat mit der 3 unter das grüne Quadrat 2, so dass auf der Rückseite zwei Dreien aufeinanderliegen.
5) Klebe auf der Rückseite die x-Felder aufeinander. Die Vorderseite des Flexagons trägt eine 2, die Rückseite 1, verborgen ist 3.



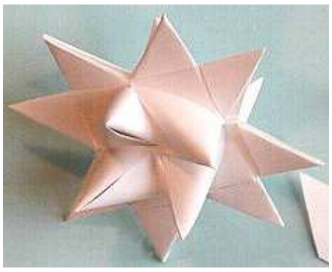


Flexatube

Ein Flexatube ist eine Puzzle aus Papier. Es besteht im einfachsten Fall aus vier Quadraten, die zu einem oben und unten offenen Würfel zusammengefügt sind. Die vier Kanten und die Flächendiagonalen sind Faltlinien.
Die Aufgabe besteht darin, das Flexatube allein durch Falten so umzuwandeln, dass das Innere nach außen und das Äußere nach innen gelangt.

Das Flexatube ist ein Klassiker unter den Faltpuzzles und zählt zu den Flexagons.
Sie wurden in der einfachen Form von Arthur H.Stone in den 1930er Jahren entdeckt.
Populär wurden sie durch die Veröffentlichungen von Martin Gardner.

Flexagons findet man in Gardners erstem Buch ("Mathematical Puzzles & Diversions"), Flexatubes im zweiten ("The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions"). Die beiden Bücher wurden zur Übersetzung ins Deutsche zu einem Buch ("Mathematische Rätsel und Probleme") zusammengefasst.
Es gibt zahlreiche Variationen und Weiterentwicklungen des Flexatubes.
siehe http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/PBOOKW/node14.html



Fröbelstern

Der Fröbelstern ist ein dreidimensionaler Stern, der aus vier Streifen aus Papier geflochten wird.

Anleitung: Zuerst schneidet man pro Stern immer 4 bunte Papierstreifen zu 1 cm Breite und 30 cm Länge. Diese knickt man in der Mitte und spitzt sie vorne an. Die geknickten Streifen werden in einander geflochten. Das geflochtene Gebilde wird zusammen gezogen.
Dann faltet man den ersten unteren Streifen senkrecht nach oben. Der eine Streifen wird waagerecht nach rechts gebogen. Den oberen Streifen schlägt man senkrecht nach unten.
Dann nimmt man den rechten Streifen und faltet ihn waagerecht nach links und schiebt ihn unter der Schlaufe durch.
Jetzt nimmt man den zweiten rechten Streifen und knickt ihn senkrecht nach hinten hoch, so dass ein kleines Dreieck entsteht.

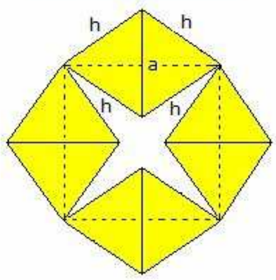
Den gerade nach hinten geknickten Streifen, biegt man jetzt waagerecht nach links. Den zuvor genommen Streifen faltet man nun nach vorne auf das kleine Dreieck. Den Streifen zieht man nun durch die Schlaufe. Diesen Vorgang wiederholt man mit allen oberen rechten Streifen.
Dieses Gebilde dreht man jetzt um. Und macht wieder Dreiecke mit den etwas längeren Streifen.
Als nächstes nimmt man den einen Streifen und dreht ihn zuerst nach vorne und dann schräg nach hinten rechts weg. Nun schiebt man den nach hinten gedrehten Streifen durch die rechte untere Ecke.

K1

K2

Kaleidozyklus

Im einfachsten Falle versteht man unter einem Kaleidozyklus einen Ring aus einer geraden Anzahl von Tetraedern.
Die Tetraeder sind an je zwei gegenüberliegenden Kanten verbunden. Diese Kanten sind windschief und verlaufen senkrecht zueinander.
Das Besondere ist, dass man diesen Ring ohne Ende in sich drehen kann und dass sich dabei jede Pyramide von allen Seiten zeigt.
Es gibt beliebig viele Kaleidozyklen. Die Tetraeder werden dann meist zu Dreieckspyramiden.
Die verschiedenen Arten werden mit K1 bis K14 bezeichnet.
siehe u.a.
http://www.flyping-games.com/ … Raumpuzzle und Umstülp-Phänomen-Spiele



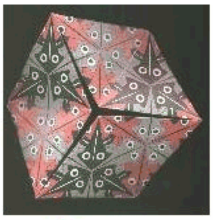
Ring aus acht Tetraedern, Kaleidozyklus K2

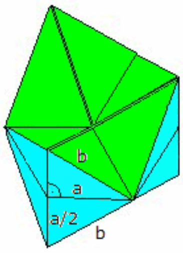
Im einfachsten Falle ist ein Kaleidozyklus ein Ring aus acht Tetraedern. In der unteren Abbildung wird ein Horizontalschnitt durch die Mitte des Ringes gelegt. a ist die Kante eines Tetraeders, h ist die Höhe eines Seitendreiecks. Es gilt $h = \sqrt{3}\, a/2$
Das gestrichelte Quadrat ist die Grundlage des Ringes.

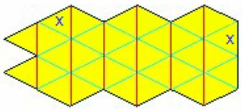
Bau des Ringes

Man kann den Ring ohne große Schwierigkeiten aus Papier falten.
(1) Man zeichnet mit Zirkel und Lineal das Netz aus gleichseitigen Dreiecken. Die Nummerierung und die Kennzeichnung der Klebestellen mit x dienen nur der Erklärung.

(2) Man schneidet die Figur aus. Damit man das Papier später gut falten kann, muss man alle Linien nachziehen und nach oben und unten vorknicken.
(3) Man formt zunächst die Tetraeder 1111 und 2222 gleichzeitig. Die Dreiecke xx oben und die Dreiecke 12 unten klebt man zusammen.
(4) In der gleichen Weise verfährt man mit den Paaren 3333/4444, 5555/6666 und 7777/8888 in dieser Reihenfolge.
(5) Zum Schluss schließt man den Ring, indem man die Dreiecke 88 links und xx rechts zusammenklebt.
Will man Ringe mit 10,12,14, … Tetraedern basteln, muss man weitere Streifen einschieben.





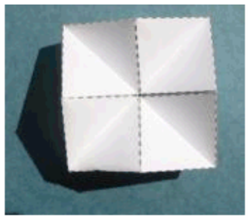


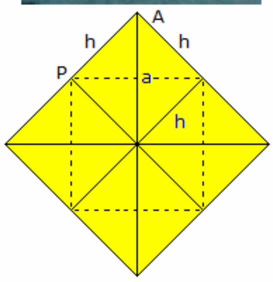
Ring aus sechs Pyramiden K3

Versucht man, sechs Tetraeder ringförmig anzuordnen, so ergibt sich kein drehbarer Ring. Man streckt die Tetraeder, damit ein Ring zustande kommt.
Aus den Tetraedern werden Dreieckspyramiden. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten b, a und a/2. Nach dem Satz des Pythagoras ist $b^2 = a^2 + (a/2)^2$ oder $b = a/2\ \sqrt{5}$.
Die Tetraeder bestehen dann nicht mehr aus gleichseitigen, sondern aus gleichschenkligen Dreiecken. Das Verhältnis des Schenkels zur Grundseite ist gleich $b : a = 1{,}12 : 1$.

In dem Buch "M.C.Escher Kaleidozyklen" von Doris Schattenschneider und Wallace Walker wird ein Ring aus gestreckten oder gestauchten Tetraedern "der Kaleidozyklus" genannt. Auf Grund der weltweiten Verbreitung des Buches hat sich dieser Name durchgesetzt.
Die Körper werden mit Motiven aus Bildern des holländischen Malers M.C.Escher geschmückt und werden dadurch sehr originell.
Die geschlossenen Kaleidozyklen sind faszinierend, da die Rotation durch die Mitte mit viel Bewegung verbunden ist. Die Mitte wird regelmäßig geöffnet und geschlossen.

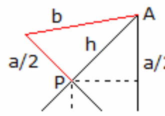
Ring aus acht Dreieckspyramiden K4

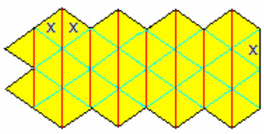


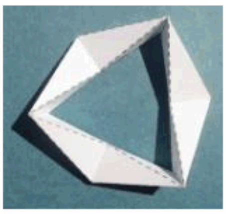


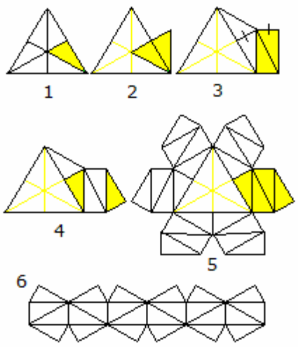
Wenn ein Ring aus acht miteinander verbundenen Tetraedern von oben kein Loch haben soll, müssen die Tetraeder so in der Form verändert werden, dass das Loch wie im Bild geschlossen wird.
Das führt zu einem Quadrat als Querschnittfläche. Man muss sich den Ring so vorstellen, dass in den Seitenmitten des Quadrates Kanten der Länge a senkrecht zur Zeichenebene liegen, so auch in Punkt P.

Klappt man in P die Kante a in die Zeichenebene, so ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck, in dem man die Kante b der Pyramide berechnen kann.
Es gilt $b^2 = (a/2)^2 + h^2$
Mit $h = \sqrt{2}\ a/2$ ergibt sich $b = a/2\ \sqrt{3}$
Aus dem gleichseitigen Dreieck des Tetraeders wird ein gleichschenkliges Dreieck. Das Verhältnis des Schenkels zur Grundseite ist gleich $b : a = 0{,}87 : 1$.





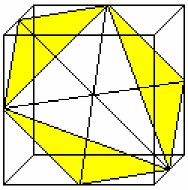


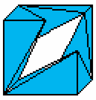


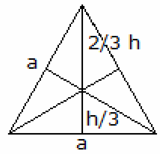
Umstülpbarer Würfel, K5

Dieser Kaleidozyklus ist bekannt geworden als "umstülpbarer Würfelgürtel nach Paul Schatz".
Konstruktion:
(1) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit ihren Mittellinien
(2) Spiegele ein Teildreieck an einer Seite.
(3) Errichte auf der Hypotenuse des gespiegelten Dreiecks ein Rechteck. Die markierten Strecken sind gleich.
(4) Setze an das Rechteck das Teildreieck an. Die kleinere Kathete liegt unten.
(5) Wiederhole diese Prozedur 5x. Aus den vier rechtwinkligen Dreiecken wird eine Pyramide gefaltet.
(6) Bilde eine Reihe und bringe an die Dreiecke Klebestreifen an, um die Pyramiden zu bauen und den Ring zu schließen.
Das Ergebnis ist ein Kaleidozyklus aus sechs Pyramiden mit einem dreieckigen Loch entstanden. Das Dreieck ist gleichseitig.
Die Pyramiden stehen entweder auf einem gleichseitigen Dreieck oder dem Rand eines regelmäßigen Sechsecks. Vier Stellungen sind während des Drehens nach innen bemerkenswert:
(1) Sechs Dreiecke der Pyramiden liegen in einer Ebene. Sie erzeugen vorne ein hohles Sechseck.
(2) Man dreht weiter. Hinten bildet sich das gleiche ebene Sechseck.

(3) Dann bilden sechs Dreiecke hinten ein ebenes Dreieck.
(4) Vorn entsteht danach ein ebenes Dreieck.







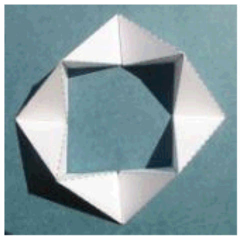
Umstülpbarer Würfel, K5

Der Würfelgürtel des umstülpbaren Würfels kann auf das Sechseck im Würfel zurückgeführt werden. Der Name Würfelgürtel ist wie folgt zu erklären:
Man kann den Ring so drehen, dass die rechten Winkel der Dreiecke Würfelecken bilden.
Man erkennt die sechs Pyramiden des Ringes, die allerdings den Würfel nur zu einem Drittel ausfüllen.
Eine Pyramide wird aus jeweils vier Teildreiecken des gleichseitigen Dreiecks gebildet.
Ein Dreieck hat die Seiten a/2, h/3 und 2h/3, wobei die Höhe h des Dreiecks gleich

$$h = 1/2\ \sqrt{3}\ a$$

ist. Der Würfel hat dann die Kantenlänge a/2 und damit das Volumen $V' = a^3/8$. Die Pyramiden haben zusammen das Volumen 6·(1/3)·Grundfläche·Höhe. Das heißt

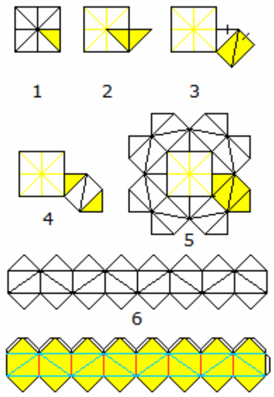
$$V = 6\cdot(1/3)\cdot(1/2)\cdot a/2 \cdot h/3 \cdot h/3 = a^3/24 = V'/3$$



Ring halbes Oktaeder, K6

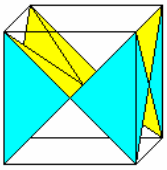
Den Würfelgürtel kann man zu einem Ring mit quadratischer Öffnung weiterentwickeln.

Herstellung: (1) Zeichne ein Quadrat mit den Diagonalen und den Mittellinien.
(2) Spiegele ein Teildreieck an einer Seite.
(3) Errichte auf der Hypotenuse des gespiegelten Dreiecks ein Rechteck. Die markierten Strecken sind gleich.
(4) Setze an das Recheck das Teildreieck an.
(5) Wiederhole diese Prozedur 7 mal. Falte aus je vier rechtwinkligen Dreiecken eine Pyramide.
(6) Bilde eine Reihe und bringe an die Dreiecke Klebestreifen an, um die Pyramiden zu bauen und den Ring zu schließen.
Dieser Ring heißt "halbes Oktaeder", da man die acht Pyramiden zu einem halben Oktaeder zusammenlegen kann.

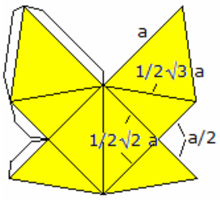


Doppelkrone, K15

Der Kaleidozyklus K6, der zu einem halben Oktaeder gefaltet werden kann, hat eine quadratische Öffnung. Dreht man ihn weiter, so kann man das Quadrat schließen und man erhält eine Krone. Diese Krone hat ein Quadrat als Grundfläche. Diese Krone kann an der Grundfläche gespiegelt werden. Das führt zu dem neuen Kaleidozyklus links, der "Doppelkrone".

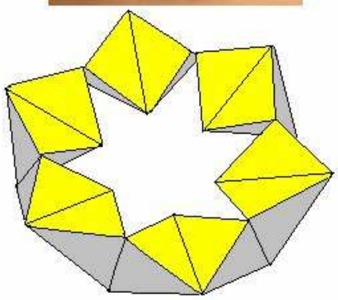


In dieser Lage erkennt man, dass es eine Beziehung zu einem umfassenden Würfel gibt. Je zwei Dreieckspyramiden bilden eine Kante des Würfels.
Als Vorlage für die Doppelkrone können vier "Schmetterlinge" genutzt werden. Aus jeder Figur ergibt sich eine Kante des korrespondierenden Würfels.
Der Kaleidozyklus Doppelkrone kann so gedreht werden, dass wieder eine Krone mit quadratischer Grundfläche ensteht. Die vier Zacken sind flacher.



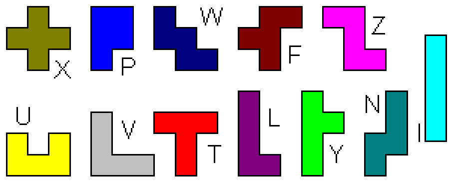
Shinsei Miracle

"The Shinsei Miracle" ist ein Puzzle in Würfelform, der von Naoki Yoshimoto entwickelt wurde.
In der Beschreibung des Würfels steht unter der Überschrift "Chains that make many wonderful shapes": Made in Hongkong for Thomas Salter Ltd., Woodside Road, Glenrothes, Fife ©1982.
Er besteht aus 24 Dreieckspyramiden. Bestimmte Kanten der Pyramiden sind miteinander verbunden. Der Würfel wird als edles Sammlerstück gehandelt und kostet fast 100 Dollar.



Der Würfel lässt sich leicht in zwei Hälften zerlegen. Beide Hälften greifen ineinander und bilden zusammen den Würfel. Die gelbe Farbe soll die goldene Folie, mit der der Würfel beklebt ist, darstellen. Grau bedeutet silbrig. Das Besondere ist, dass man die beiden Hälften für sich auseinander klappen kann und zwei Ringe in Sternform erhält.
Der Würfel besteht aus 24 Pyramiden. Begrenzungskanten der Pyramiden sind unter anderen alle Kanten und Flächendiagonalen des Würfels, die von außen zu sehen sind.
Für eine Würfelkante a erhält man für die Höhen der Pyramide a/2. Das

ergibt ein Volumen von (a²/4) (a/2)/3 = a³/24.

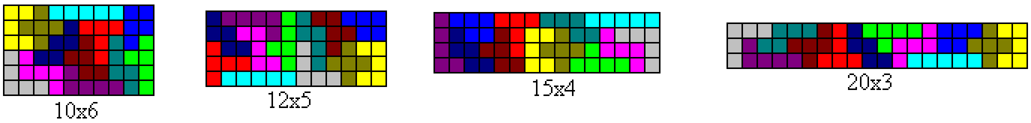


Pentomino

Das heutzutage unter dem Namen "Pentomino" bekannte Spiel wurde 1919 von H. E. Dudney als das Problem des "zerbrochenen Schachbretts" in "The Canterbury Puzzles" eingeführt. Der Begriff Pentomino stammt von Solomon Golomb (Harvard Math Club 1953) Die Aufgabe besteht stets darin, aus den links abgebildeten zwölf Spielsteinen gewisse vorgegebene Muster zusammenzusetzen.
Pentominos heißen die 12 Figuren, die man aus fünf Quadraten bilden kann. Die Quadrate muss man so zusammenstellen, dass sie mindestens eine Seite gemeinsam haben. Wegen ihrer mehr oder weniger großen Ähnlichkeit mit großen Buchstaben hat man sie nach ihnen benannt.

Rechtecke bilden

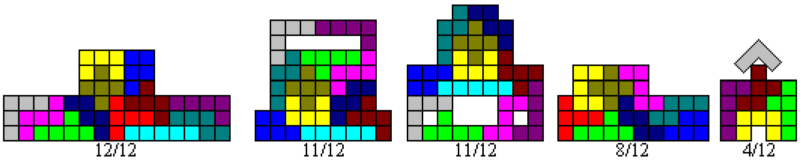
Das Grundproblem besteht darin, Rechtecke zu legen. Vier Rechtecke sind möglich:



Es gibt 2339 Lösungen für das Rechteck 6x10, 2 Lösungen für 3x20, 368 Lösungen für 4x15 und 1010 Lösungen für 5x12.

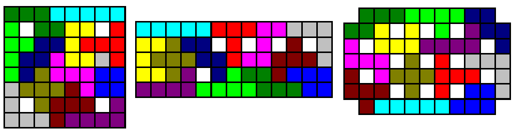
Neue Figuren bilden

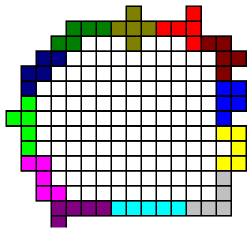
Außer Rechtecken kann man auch andere Figuren aus Pentominos bilden. Man legt kein Muster fest und baut einfach drauf los. Dann ist es relativ leicht, neue Figuren zu finden. Der Fantasie sind keine Grenzen gesetzt.



Figuren mit Löchern

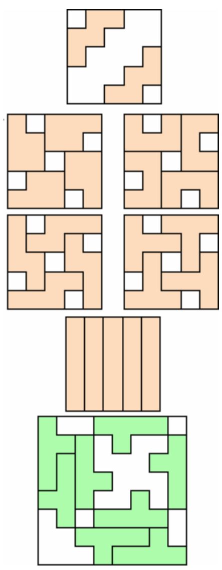
Ein Quadrat mit den Maßen eines Schachbretts 8x8 lässt sich legen, wenn man 4 Löcher zulässt (8x8-4=60). Daraus leiten sich neue Probleme ab: Rechtecke mit isolierten Löchern; Figuren mit möglichst vielen isolierten Löchern. Es geht bis zu 13 Löchern. Dafür gibt es nur 2 Lösungen. Die gezeigt Lösung stammt von Arthur L. Clarke aus Freshfield in England, Martin Gardner hatte sie im Januar 1973 im Sci. Amer. veröffentlicht, nachdem er im September nur eine Lösung mit nur 12 Löchern und ohne Symmetrie gezeigt hatte.



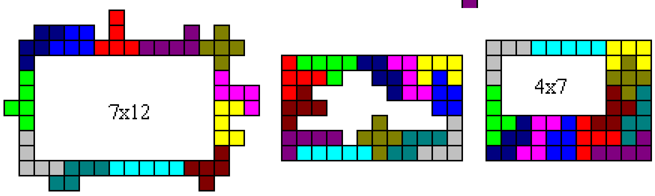


Ringe

Man kann aus Pentominos Ringe legen, Brücken bauen oder weitere ähnliche Figuren bilden, so dass möglichst viele Quadrate eingeschlossen werden.



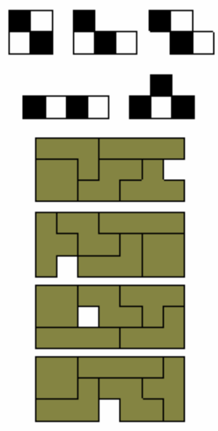
Man kann Pentominos auch so legen, dass das Innere oder der Rand ein Rechteck bilden.
Man kann auch beides erreichen.



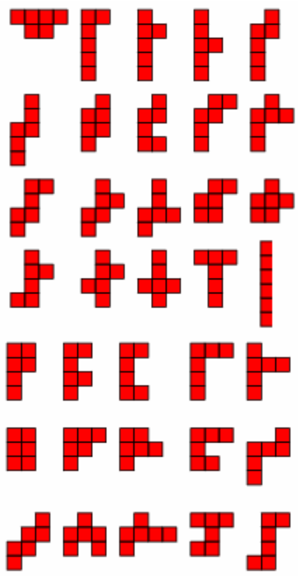
Pentomino-Überdeckung

Gegeben sind alle möglichen Pentominos, d.h. Figuren, die man aus fünf gleichen Quadraten zusammensetzen kann.
Gesucht sind Überdeckungen eines n x n - Quadrates mit m gleichen(!) Pentominos, so dass in jeder Zeile und in jeder Spalte m gleichviele, kleine Quadrate überdeckt sind.
Bisher kennt man für m = 2, 4, 5, 8, 12 und 24 Lösungen.
Links sind diese bis m = 8 zu sehen.

Für Tetrominos (4 Quadrate) kennt man Lösungen für m = 1 und 4. Für Hexominos (6 Quadrate) kennt man Lösungen für m = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 24 und 48. Für Heptominos (7 Quadrate) kennt man Lösungen für m = 2, 4, 7, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 28 und 36.



Tetromino
Es gibt fünf Tetrominos (obere Abbildung).
Leider bilden sie kein Rechteck, obwohl sie ein Gebiet von 20 Quadraten abdecken. Dies kann durch die Färbung der Stücke eingesehen werden. Die ersten vier Figuren haben zwei weiße und zwei schwarze Quadrate, aber das letzte muss von einer Farbe drei und von der anderen Farbe ein Quadrat haben. Da aber jedes Rechteck mit der Fläche 20 jedoch 10 weiße und 10 schwarze Quadrate hat, kann kein Rechteck mit dieser Färbung erzeugt werden.
Die Tetrominos können zu einigen interessanten Figuren zusammengestellt werden und die Abbildung unten zeigt, dass man 3x7-Rechtecke bilden kann mit einem fehlenden Quadrat. Wenn man diese Muster abwechselnd schwarz und weiß färbt, hat man von der einen Farbe 11 und der anderen 9 Quadrate.
Sucht man Überdeckungen eines n x n - Quadrates mit m gleichen(!) Tetrominos, so dass in jeder Zeile und in jeder Spalte m gleichviele, kleine Quadrate überdeckt sind, so kennt man Lösungen für m = 1 und 4.

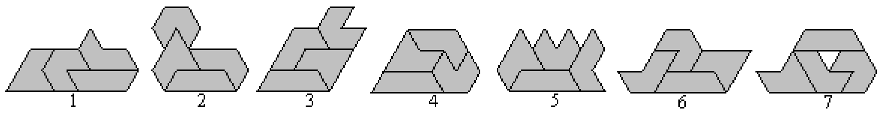


Hexomino
Hexominos heißen Figuren, die man aus sechs Quadraten bilden kann. Es existieren 35 verschiedene Figuren.
Obwohl alle 35 Hexominos 210 Quadrate umfassen, ist es nicht möglich, Rechtecke der Größe 21 x 10, 14 x 15 oder 6 x 35 zu legen.
Nach Andrew Clarke gibt es nur Rechtecke mit Löchern oder Rechtecke mit einzelnen hervorstehenden Quadraten.
Von den 36 Hexominos sind 15 symmetrisch. Sie sind punktsymmetrisch, achsensymmetrisch mit einer Achse oder mit zwei Achsen.
Elf Hexominos können als Netz eines Würfels verwendet werden.

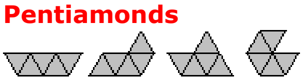
Heptominos
Polyminos aus 7 Quadraten werden Heptominos genannt. Es gibt 108 verschiedene Heptominos. Ein Baustein besitzt ein Loch.

Oktominos
Polyminos aus 8 Quadraten werden Oktominos genannt. Es gibt 369 verschiedene Oktominos.

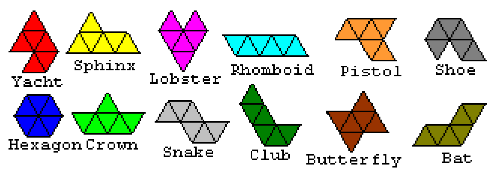
Polyiamonds
Polyiamonds entstehen, wenn man gleichseitige Dreiecke so aneinanderlegt, dass sie mindestens eine Seite gemeinsam haben.
Der Glasgower Mathematiker T.H.O'Beirne schlug im "New Scientist" 1961 den Namen Polyiamonds vor. Er benannte die Figuren nach dem Diamanten.



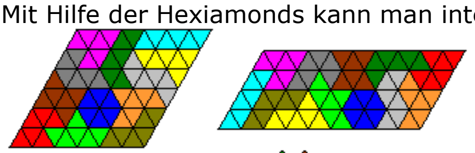
Pentiamonds



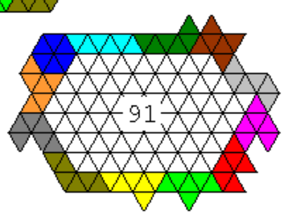
Es gibt vier Figuren aus fünf Dreiecken.
Trotz der geringen Anzahl der Pentiamonds kann man Figuren legen. Man kann erkennen:
1 Intercity, 2 Sphinx, 3 Schiefer Turm, 4 Trapez ohne rechte Ecke, 5 Reihenhäuser, 6 Motorboot, 7 Motorboot mit Guckloch.
Sogar achsensymmetrische Figuren sind möglich.



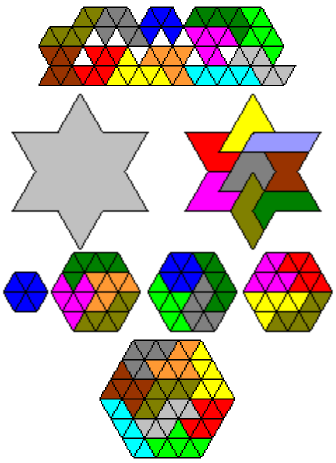
Hexiamonds
Es lohnt sich, sich mit den Figuren aus sechs Dreiecken, den Hexiamonds, zu beschäftigen. Die Anzahl ist größer als die der Pentiamonds und damit auch die Anzahl der Spielmöglichkeiten. Es gibt 12 Hexiamonds:
Die Namen der Steine stammen von O'Beirne.
Mit Hilfe der Hexiamonds kann man interessante Figuren bauen, zum Beispiel Parallelogramme.



Parallelogramme bauen
Die 12 Hexiamonds haben zusammen 12*6=72 Dreiecke. Es gilt 72 = 2*36 = 3*24 = 4*18 = 6*12 = 8*9. Möglich und dargestellt sind die Parallelogramme 6*12 und 9*8.



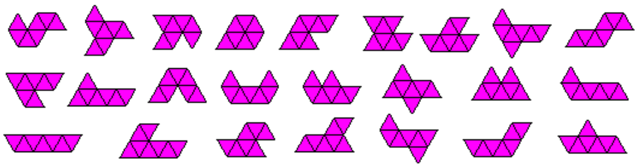
Ringe bilden
Man baut aus allen Hexiamonds einen Ring.
Man kann sich dann das Ziel setzen, möglichst viele (weiße) zusammenhängende Dreiecke einzuschließen.



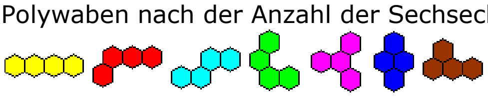
Einzeldreiecke einkreisen
Man kann alle 12 Steinen verwenden und möglichst viele Einzeldreiecke einschließen.
Kleine Figuren bauen
Man kann aus acht Hexiamonds mit 48 Dreiecken einen Stern bauen.

Verdoppeln
Man kann ein Hexiamond mit 4 Steinen vergrößert nachlegen, 8 bleiben jeweils übrig.
Verdreifachen
Man kann ein Hexiamond mit 9 Steinen vergrößert nachlegen, 3 bleiben jeweils übrig. Das klappt nur mit 9 Hexiamonds.

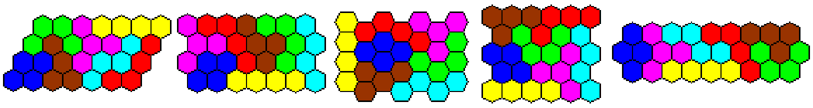
Heptiamonds
Es gibt 24 Heptiamonds. Weiter existieren 66 Oktiamonds und 160 Figuren aus 9 Dreiecken, 448 Figuren aus 10 Dreiecken und 1186 Figuren aus 11 Dreiecken.



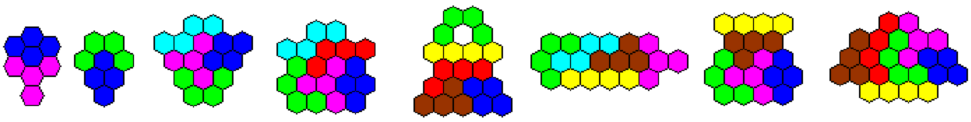
Polywaben
Polywaben sind Figuren, die man aus mindestens zwei Sechsecken bildet. Man ordnet und bezeichnet die Polywaben nach der Anzahl der Sechsecke.



Man kann aus zwei Sechsecken eine Figur und aus drei Sechsecken drei "Triwaben" bilden. Es gibt sieben Tetrawaben. Diese haben von links nach rechts folgende Namen: engl. bar, worm, wave, arch, propeller, bee, pistol; deutsch: Riegel, Wurm, Welle, Bogen, Propeller, Biene, Lokomotive.
Weiter gibt es 22 Pentawaben. Computer haben 82 Hexawaben, 333 Heptawaben, 1448 Oktawaben oder 8er-Waben, 6572 9er-Waben, 30490 10er-Waben, 143552 11er-Waben, 683101 12er-Waben, ... gefunden.
Der Name Polywabe stammt von der sechseckigen Honigwabe. Wie viele Spielereien dieser Art, so hat Martin Gardner in der Zeitschrift *Scientific American* auch Polywaben beschrieben und populär gemacht.

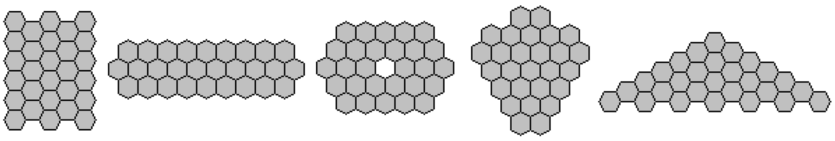


Parallelogramme: Sieben Tetrawaben haben zusammen 28 Sechsecke. Damit kann man 4 x 7 Parallelogramme legen.
28 ist eine Dreieckszahl. Somit lässt sich aus 28 Sechsecken ein Dreieck bilden, allerdings nicht aus Tetrawaben.
Figuren aus Tetrawaben:

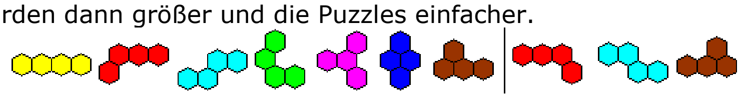


2/7 2/7 4/7 5/7 5/7 5/7 5/7 6/7

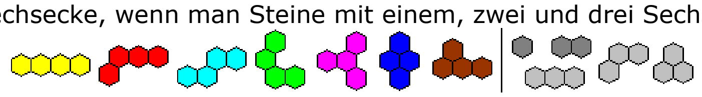
Die folgenden Figuren sind mit Tetrawaben lösbar:



Es ist sinnvoll nicht bei sieben Tetrawaben zu bleiben, sondern den Satz zu erweitern. Die Spielmöglichkeiten werden dann größer und die Puzzles einfacher.

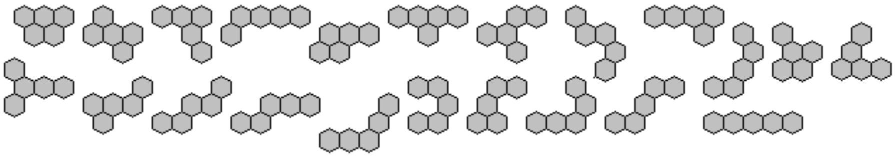


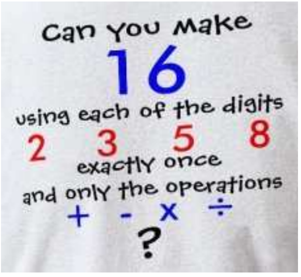
Man kann die asymmetrischen Tetrawaben spiegeln und erhält drei weitere Steine, so dass man 10 Steine mit 40 Sechsecken erhält. Sie heißen "one-sided polyhexes", "einseitige Polywaben". Man kommt auf 12 Steine und 40 Sechsecke, wenn man Steine mit einem, zwei und drei Sechsecken hinzufügt.



Pentawaben

Es gibt 22 Pentawaben:





Des chiffres et des lettres ... Spielshow des französischen Fernsehens
Idee: Aus einer Menge gegebener Zahlen ist durch schrittweise Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division einer Zielzahl zu ermitteln. Dabei darf und muss jede gegebene Zahl und jedes Zwischenergebnis genau einmal verwendet werden!

Beispiel: Aus den Zahlen 1 bis 6 ist die 278 zu konstruieren

4 * 5 = 20	3 + 20 = 23	23 * 6 = 138
1 + 138 = 139	139 * 2 = 278	

Als einzelne Gleichung ergibt sich ((3 + 4 * 5) * 6 + 1) * 2 = 278. Die kleinste natürliche Zahl z, die sich nicht durch die Ausgangszahlen 1, 2, 3, ..., n auf die genannte Weise konstruieren lässt, ist (nach Polster 2003/2006): n = 4, 5, 6, 7, 8 z = 29, 76, 284, 1413, 7187
Nutzt man als Zahlen die ersten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... usw., so wird n = 4, 5, 6, 7, 8 z = 26, 145, 524, 5196, 42151
Verzichtet man auf die Division als mögliche Operation, so sind die kleinsten natürlichen Zahlen, die sich nicht durch 1, 2, 3, ..., n und die Addtion, Subtraktion und Multiplikation konstruieren lassen: n = 4, 5, 6, 7, 8 z = 29, 76, 284, 1413, 7187; d.h. die gleichen Werte wie unter Zulassung der Division.

Tabelle zu "Des chiffres et des lettres"

Die nachfolgende Tabelle enthält Konstruktionen der natürlichen Zahlen 1,...,n aus den ersten Zahlen 1 bis 6.

1 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 - 3 | 2 * 4 | 9 - 8 |	2 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 4 + 3 | 14 / 7 |
3 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 5 + 4 | 12 - 9 |	4 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 + 3 | 9 - 8 | 1 * 4 |
5 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 4 | 5 + 3 | 13 - 8 |	6 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 + 4 | 18 / 3 |
7 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 4 + 3 | 14 - 7 |	8 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 5 * 4 | 20 - 12 |
9 : 1 + 2 | 3 + 3 | 6 + 5 | 11 + 4 | 15 - 6 |	10 : 1 + 2 | 3 + 6 | 3 + 4 | 9 - 7 | 2 * 5 |
11 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 12 + 4 | 16 - 5 |	12 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 5 - 4 | 12 * 1 |
13 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 + 3 | 17 - 4 |	14 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 4 - 3 | 14 * 1 |
15 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 + 4 | 18 - 3 |	16 : 1 + 2 | 3 + 6 | 3 * 4 | 9 + 12 | 21 - 5 |
17 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 * 4 | 36 / 3 | 12 + 5 |	18 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 + 3 | 9 * 8 | 72 / 4 |
19 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 * 5 | 45 / 3 | 15 + 4 |	20 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 * 3 | 9 + 15 | 24 - 4 |
21 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 + 4 | 18 + 3 |	22 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 - 4 | 5 * 5 | 25 - 3 |
23 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 + 3 | 8 * 4 | 32 - 9 |	24 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 4 | 13 - 5 | 8 * 3 |
25 : 1 + 2 | 3 + 3 | 6 * 4 | 24 + 6 | 30 - 5 |	26 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 4 * 3 | 14 + 12 |
27 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 + 4 | 9 * 9 | 81 / 3 |	28 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 12 - 5 | 7 * 4 |
29 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 - 3 | 6 * 4 | 24 + 5 |	30 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 - 4 | 10 * 3 |
31 : 1 + 2 | 3 * 3 | 9 - 4 | 5 * 5 | 25 + 6 |	32 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 5 * 4 | 12 + 20 |
33 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 * 5 | 4 * 3 | 45 - 12 |	34 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 4 | 13 * 3 | 39 - 5 |
35 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 / 3 | 3 + 4 | 7 * 5 |	36 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 + 3 | 8 - 4 | 9 * 4 |
37 : 1 + 2 | 3 + 3 | 6 * 6 | 36 + 5 | 41 - 4 |	38 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 * 3 | 42 - 4 |
39 : 1 + 2 | 4 + 5 | 9 - 3 | 6 * 6 | 36 + 3 |	40 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 12 - 4 | 8 * 5 |
41 : 1 + 2 | 3 + 6 | 5 + 3 | 8 * 4 | 9 + 32 |	42 : 1 + 2 | 3 + 3 | 6 + 5 | 11 - 4 | 7 * 6 |
43 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 3 | 12 * 4 | 48 - 5 |	44 : 1 + 2 | 3 + 6 | 9 + 5 | 14 - 3 | 11 * 4 |

Die zweite Tabelle enthält einige Lösungen zur Konstruktion natürlicher Zahlen aus den ersten fünf: 1, ..., 5

	Ergebnis		Ergebnis		Ergebnis
1+2+5-3-4	1	(1+2+3+4):5	2	4+5-1-2-3	3
(1+2+4+5):3	4	(1+2+5):4+3	5	(1+2+5)*3/4	6
1+2+3+5-4	7	(1+2+5)*(4-3)	8	1+2+4+5-3	9
(1+2+3-4)*5	10	(5-1-2)*4+3	11	(1+2+5-4)*3	12
(1+3)*4+2-5	13	1*2+3+4+5	14	1+2+3+4+5	15
(1+2+4)*3-5	16	1+3+5+2*4	17	(1+2)*3+4*5	18
(1+2+3)*4-5	19	(1+2+5)*3-4	20	((1+2)*4-5)*3	21
1+2+4+3*5	22	(1+3)*4+2+5	23	(1+2)*(4+5)-3	24
((1+2)*3-4)*5	25	(1+2+3)*5-4	26	(1+2)*5+3*4	27
(1+2+5)*3+4	28	(1+2+5)*4-3	29	(1+2)*(4+5)+3	30
3*4*5+1-2	59	(1+3*4)*5+2	67	Es gibt keine Lösung für 76	
(1+3)*4*5-2	78	(2+4)*3*5+1	91		

Konstruktion der ersten natürlichen Zahlen aus 2,3,5,7

1 : 2 + 7 | 3 + 5 | 9 - 8 |
2 : 3 + 5 | 8 - 7 | 2 · 1 |
3 : 2 + 3 | 5 + 5 | 10 - 7 |
4 : 2 + 5 | 7 / 7 | 1 + 3 |
5 : 2 · 3 | 7 - 6 | 5 · 1 |
6 : 3 + 5 | 2 · 7 | 14 - 8 |
7 : 2 + 3 | 5 + 7 | 12 - 5 |
8 : 2 + 3 | 5 / 5 | 1 + 7 |
9 : 3 + 5 | 2 · 8 | 16 - 7 |
10 : 2 + 3 | 7 - 5 | 5 · 2 |
11 : 2 + 5 | 7 + 7 | 14 - 3 |
12 : 2 + 7 | 9 - 5 | 4 · 3 |
13 : 3 + 5 | 8 - 2 | 7 + 6 |
14 : 2 + 5 | 7 · 3 | 21 - 7 |
15 : 2 + 7 | 9 · 5 | 45 / 3 |
16 : 2 · 7 | 14 + 5 | 19 - 3 |
17 : 2 + 3 | 5 + 7 | 12 + 5 |
18 : 2 + 3 | 5 · 5 | 25 - 7 |
19 : 5 · 7 | 3 + 35 | 38 / 2 |
20 : 3 + 7 | 2 · 5 | 10 + 10 |
21 : 5 + 7 | 2 · 12 | 24 - 3 |
22 : 2 + 7 | 9 · 3 | 27 - 5 |
23 : 3 + 5 | 2 · 8 | 16 + 7 |
24 : 2 + 7 | 3 · 5 | 9 + 15 |
25 : 3 + 7 | 2 • 10 | 20 + 5 | 26 -

Zahlen-Anordnungs-Puzzle

Ähnlich zu "Des chiffres et des lettres" sollen mit Hilfe der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzbildung gegebene Zahlen zu einem Ergebnis zusammengesetzt werden. Im Unterschied zum oben genannten Rätsel ist das Ergebnis nicht bekannt. Dafür sind drei Gruppen von Zahlen gegeben und jede Gruppe soll das gleiche Resultat ergeben. Zum Beispiel ergeben die Gruppen 1: 15, 19, 24 ; 2: 11, 30, 36 und 3: 20, 22, 36 mit den richtig gewählten Operationen das Ergebnis 6.
Lösung: 24 / (19 - 15) = 6 ; (30 + 36) / 11 = 6 ; 20 + 22 - 36 = 6

Aufgabe	Lösung	Aufgabe	Lösung	Aufgabe	Lösung
G1: 1, 6, 11	1 * 6 * 11 = 66	G1: 3, 15, 18	18 - (15 / 3) = 13	G1: 9, 24, 28	9 + 24 - 28 = 5
G2: 13, 20, 33	13 + 20 + 33 = 66	G2: 10, 13, 36	36 - 10 - 13 = 13	G2: 13, 24, 32	13 + 24 - 32 = 5
G3: 20, 33, 40	33 * 40 / 20 = 66	G3: 24, 27, 39	39 / (27 - 24) = 13	G3: 24, 25, 48	$25^{24/48}$ = 5
G1: 8, 15, 16	15 * (8 + 16) = 360	G1: 6, 18, 20	6 / (20 - 18) = 3	G1: 5, 18, 25	18 + (25 / 5) = 23
G2: 14, 23, 38	14 * 23 + 38 = 360	G2: 21, 27, 30	27 / (30 - 21) = 3	G2: 14, 15, 23	23 * (15 - 14) = 23
G3: 21, 24, 36	24 * (36 - 21) = 360	G3: 31, 45, 46	45 / (46 - 31) = 3	G3: 30, 42, 49	30 + 42 - 49 = 23

Treble-Puzzle

Unter der Bezeichnung Treble-Puzzle (Dreifach-Puzzle) in den englischsprachigen Ländern folgende Aufgabenstellung bekannt:
Gesucht sind alle fünfstelligen natürlichen Zahlen, die bei der Multiplikation mit 3 ein Ergebnis haben, das aus den gleichen Ziffern wie die Ausgangszahl besteht.
Dieses Puzzle kann dahingehend verallgemeinert werden, dass man nach n-stelligen Zahlen, n > 1, sucht, die bei Multiplikation mit m, 1 < m < 10, wieder die gleichen Ziffern liefern.

1-2-erzeugte Zahlen

Durch Clifford Pickover wurde ein Internet-Wettbewerb durchgeführt, bei dem natürliche Zahlen ausschließlich aus den Zahlen 1 und 2 und den Operationen Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, Potenzbildung und Klammersetzung gebildet werden sollen. Ziel ist es, mit möglichst wenig Zahlen auszukommen. Insbesondere wurde nach Zerlegungen von 20, 120 und 567 gesucht.
Als Ordnung ♌(n) einer Zahl n wird dabei die Anzahl der Zahlen bezeichnet. Beispiele sind:

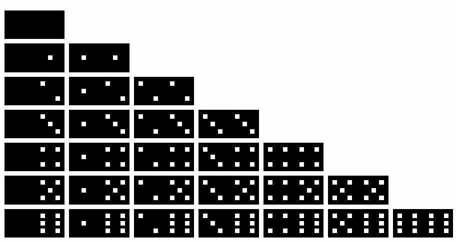
♌(20) = 5, da 20 = $2^{2+2} + 2 + 2$ ♌(20) = 5, da 20 = (1+2+2) (2+2)
♌(120) = 6, da 120 = $((2 + 1)^2 + 2)^2 - 1$
♌(567) = 9, da 567 = $2·2·(((2·(2·2+2))^2 - 2) - 1$
♌(567) = 8, da 20 = $(2^{2+2+2} – 1)·(2 + 1)^2$

Die in der zweiten Spalte genannten Beispiele sind die mit der geringsten Ordnung.
Lässt man auch mehrstellige Zahlen zu, so findet man meist Lösungen kleinerer Ordnung

♌(20) = 3, da 20 = 22 – 2 ♌(120) = 4, da 120 = 121 - 1
♌(567) = 6, da 567 = $21·(2 + 1)^{2+1}$

Durch Ken Shirriff wurden systematisch alle möglichen Lösungen durchsucht. Dabei ergaben sich sogenannte harte Zahlen. Dies sind die kleinsten Zahlen, die sich mit n Zahlen darstellen lassen. Lässt man keine mehrstelligen Zahlen zu, so sind die harten Zahlen

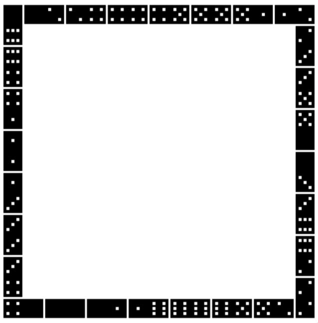
n	harte Zahl	n	harte Zahl	n	harte Zahl	n	harte Zahl
2	3	3	2	4	7	5	13
6	21	7	41	8	91	9	269
10	419	11	921	12	2983	13	8519
14	18859	15	53611	16	136631	17	436341

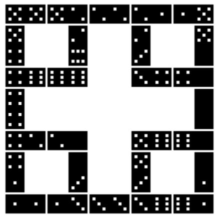


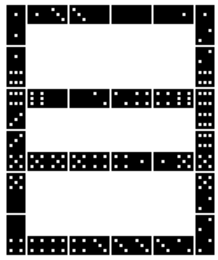
Domino

Bei diesem Denkspiel gibt es genau 28 Dominosteine. Auf jedem Stein sind zwei Zahlen von 0 bis 6 angegeben.
Aus dieser Anfangsmenge erhalten die beiden Spieler je 8 Steine. Der Stein mit den zwei „Sechsen“, die 6er-Pasch, befindet sich schon auf dem Spielfeld. Abwechselnd müssen die Spieler versuchen, einen Ihrer Steine an die auf dem Spielfeld entstehende Kette anzulegen. Dabei darf an die Enden der Kette nur ein Stein angelegt werden, der die gleiche Zahl trägt, wie an den Enden frei sind. Gewonnen ist das Spiel, wenn alle eigenen Dominosteine verbraucht sind.

Mitunter kann kein eigener Dominostein verwendet werden. In diesem Fall muss vom Stapel ein neuer Stein genommen werden. Ist der Stapel leer und kann kein Spieler mehr ziehen, endet das Spiel unentschieden.

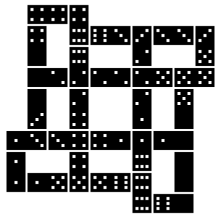






Interessant an dem Spiel ist, dass aus der Kenntnis der eigenen Steine und den schon abgelegten eine Spielstrategie entwickelt werden kann, so dass man mit größerer Wahrscheinlichkeit gewinnt. Etwas Glück gehört jedoch auch dazu, da die Dominosteine zufällig verteilt werden.
Eine beliebte Beschäftigung mit Dominosteinen ist das Legen von Figuren. Wie beim Dominospiel müssen Steine mit gleichen Augenzahlen aneinander stoßen. Man beschränkt sich meist auf symmetrische Muster.
1.Beispiel:
Aus 28 Dominosteinen lässt sich ohne Schwierigkeiten ein quadratischer Rahmen 15x15 bilden.

2. und 3. Beispiele: Achsen- und punktsymmetrische Figuren
Die Kreuzungen sollte man zuerst legen. Man benötigt für eine Kreuzung eine ungerade Anzahl von Steinen gleicher Augenzahl.
Folglich müssen Steine mit gleicher Augenzahl auch an einer anderen Kreuzung verwendet werden, da man auf insgesamt 8 Quadrate (gerade Anzahl) kommen muss.
4. Beispiel: Eine punktsymmetrische Figur
Das ist eine bekannte Figur, die man aus allen 28 Dominosteinen bilden kann. Man erhält neue Zusammenstellungen, wenn man die Figur spiegelt oder, das ist interessanter, die Zahlen permutiert. Man könnte zum Beispiel (0,1,2,3,4,5,6) durch (3,5,1,0,6,2,4) ersetzen.



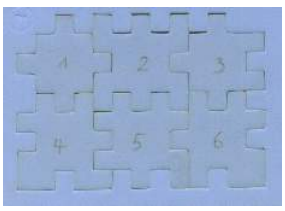
Sieben Quadrate

Man kann aus allen 28 Dominosteinen sieben quadratische Rahmen legen. Steine stoßen mit gleichen Augenzahlen aneinander.

Memory

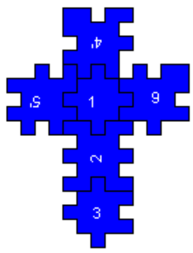
Ein Klassiker unter den Logikspielen ist das Memory-Spiel, das mit dem Domino verwandt ist.
Zu Beginn des Spiels liegt eine gewisse Anzahl Karten N verdeckt auf der Spielfläche. Die N Karten bestehen aus N/2 Paaren mit identischen Abbildungen. Der Spieler wählt nun zwei beliebige Karten aus. Sind die Abbildungen gleich, bleiben die Karten offen liegen, andernfalls werden die Karten wieder verdeckt und der Gegenspieler ist an der Reihe.
Das Ziel ist es nun, möglichst viele Paare zu finden.

Spielt man dieses Kartenspiel, so wird man feststellen, dass scheinbar oft Paare nebeneinander liegen.
Geht man im Spezialfall von N Karten aus, und legt diese in einem Rechteck aus, so ergibt sich für steigende Anzahl N eine genäherte Wahrscheinlichkeit von $e^{-2} = 0,135335…$
dass kein Paar nebeneinander liegt. Die Wahrscheinlichkeit für ein zusammenliegendes Paar wird daher
$1 - e^{-2} = 0,8646647…$
Für eine hinreichend große Zahl N nähert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter 2.
Man wird also durchschnittlich zwei Paare finden, die unmittelbar zusammen liegen.



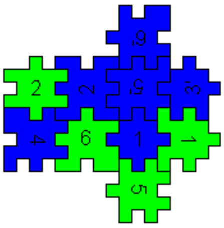
Happy Cube

Das Puzzle-Spiel Happy Cube besteht aus 6 Matten aus dickem, weichem Schaumstoff mit den Farben blau, grün, gelb, orange, rot und violett. Hier ist die blaue Matte dargestellt.
Jede Matte enthält, von einem Rahmen umgeben, sechs Stücke in der Form von 5x5-Quadraten. An den Rändern fehlen, unregelmäßig verteilt, kleine Quadrate. Es ist möglich, aus sechs Stücken einen 5x5x5-Würfel zusammenzusetzen.

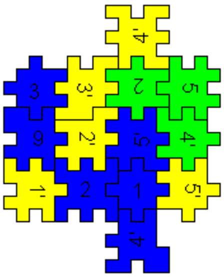


Je nach Farbe ist der Anspruch der Lösung unterschiedlich. Die blaue Matte stellt den geringsten Schwierigkeitsgrad dar, die violette den größten. Happy Cube wurde im Jahre 1986 von Dirk Laureyssens erfunden. In Deutschland hieß Happy Cube lange Cube-it und führt noch Namen wie the I.Q.ube, de Wirrel Warrel Kubus, CocoCrash.

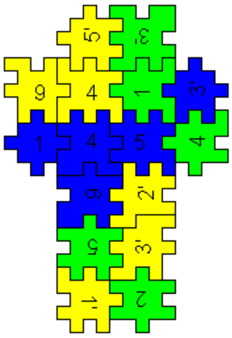
Man kann die Stücke auf der Vorderseite einer Matte von 1 bis 6 durchnummerieren. Die Vorderseite erkennt man an einem kleinen Kreis mit M in einer Ecke der Matte (blau: oben links). Die Rückseite von 1 nennt man 1', entsprechend führt man 2' bis 6' ein. Hat man eine Lösung gefunden, breitet man das Netz des Würfels aus und achtet darauf, dass das Stück Nr.1 aufrecht in der Mitte steht. Dann ist die Darstellung einer Lösung eindeutig. Auch die Matten in den übrigen Farben nummeriert man so, dass der kleine Kreis links oben oder links unten liegt. Mit den Zahlen 1 bis 6 und 1' bis 6' kann man die Lösung darstellen.
Mit Hilfe mehrerer Matten ist es möglich, Körper aus mehreren Würfeln zu bauen.



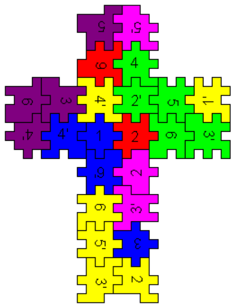
Quader 1x1x2
Mit Hilfe der blauen und der grünen Matte kann man einen Zweiwürfelkörper bauen.
Von den 12 Stücken verwendet man 10. 2 Stücke bleiben übrig



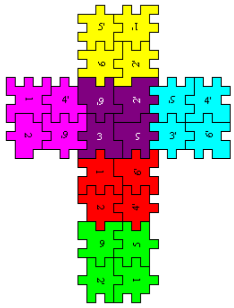
Quader 1x1x3
Mit Hilfe der blauen, grünen und gelben Matte kann man einen Dreiwürfelkörper bauen.
Von den 18 Stücken verwendet man 14. 4 Stücke bleiben übrig



Quader 2x1x2
Mit Hilfe der blauen, grünen und gelben Matte kann man einen Vierwürfelkörper bauen.
Von den 18 Stücken verwendet man 16. 2 Stücke bleiben übrig

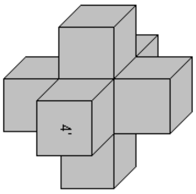


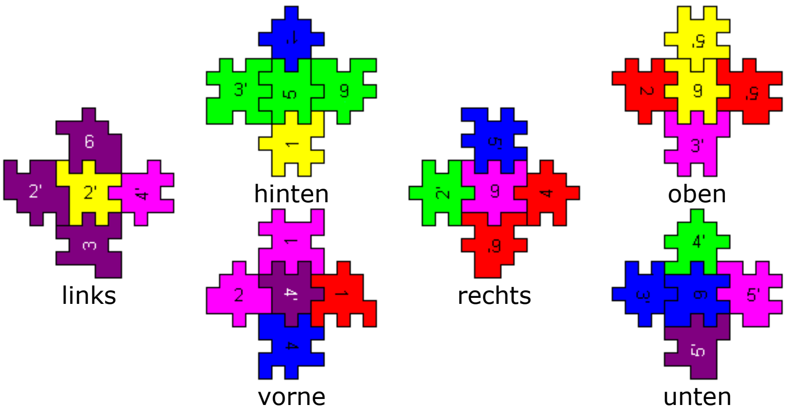
Maxi-Würfel 2x2x2
Aus den 6 Matten mit insgesamt 36 Stücken kann man mit Hilfe von 24 Stücken einen Maxiwürfel bauen.
12 bleiben übrig.



Maxi-Würfel 2x2x2
Es gibt sogar eine Lösung, bei der jede Seitenfläche einfarbig ist

3D-Kreuz

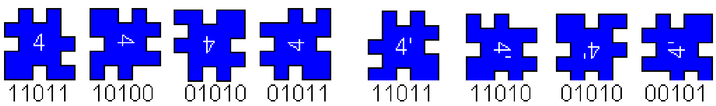




Will man den Körper links bauen, muss man zuerst einzeln vier oben offene Würfel aus je fünf Stücken zusammensetzen. Das mittlere Stück ist jeweils innen unten. Dann bildet man einen Kranz aus den offenen Würfeln. Schließlich bildet man aus den Stücken ganz rechts zwei offene Würfel, die man oben und unten ansetzt.
Man benötigt 30 von insgesamt 36 Stücken, 6 Stücke bleiben übrig.

Mathematik des Happy Cubes

Jedes Stück hat 4 Ränder. Dreht man ein Stück um, so kommen noch 4 Ränder dazu. Die Struktur eines Randes hält man am besten durch eine Folge von 0 und 1 fest, also durch eine fünfstellige Dualzahl. Ist ein kleines Quadrat vorhanden, setzt man eine 1, fehlt es, setzt man eine 0. Anhand des blauen Stücks Nummer 4 wird dieses Vorgehen veranschaulicht. Die Dualzahl bezieht sich jeweils auf die Kante über der Dualzahl.



Auf diese Weise kann man die Anzahl der 6x6x4x2 = 288 Kantenstrukturen für alle 6 Matten in einer Tabelle festhalten.

dezimal	dual	blau	grün	gelb	orange	rot	violett	Summe
0	00000	-	-	-	-	-	-	-
1	00001	-	-	-	-	-	-	-

2	00010	-	-	-	1	1	2	4
3	00011	-	-	1	1	1	3	6
4	**00100**	**16**	**14**	**8**	**10**	**10**	**6**	**64**
5	**00101**	**2**	**4**	**6**	**1**	**3**	**4**	**20**
6	00110	-	-	-	3	2	1	6
7	00111	-	-	1	-	-	3	4
8	01000	-	-	-	1	1	2	4
9	01001	-	-	-	1	-	-	1
10	**01010**	**10**	**10**	**12**	**6**	**8**	**6**	**52**
11	**01011**	**4**	**4**	**4**	**5**	**3**	**3**	**23**
12	01100	-	-	-	3	2	1	6
13	01101	-	-	-	-	1	1	2
14	01110	-	-	-	-	-	-	-
15	01111	-	-	-	-	-	-	-
16	10000	-	-	-	-	-	-	-
17	10001	-	-	-	-	-	-	-
18	10010	-	-	-	1	-	-	1
19	10011	-	-	-	-	1	-	1
20	**10100**	**2**	**4**	**6**	**1**	**3**	**4**	**20**
21	**10101**	**4**	**2**	**2**	**6**	**2**	-	**16**
22	10110	-	-	-	-	1	1	2
23	10111	-	-	-	-	-	-	-
24	11000	-	-	1	1	1	3	6
25	11001	-	-	-	-	1	-	1
26	**11010**	**4**	**4**	**4**	**5**	**3**	**3**	**23**
27	**11011**	**6**	**6**	**2**	**2**	**4**	**2**	**22**
28	11100	-	-	1	-	-	3	4
29	11101	-	-	-	-	-	-	-
30	11110	-	-	-	-	-	-	-
31	11111	-	-	-	-	-	-	-
Anzahl der Muster		8	8	12	16	18	17	

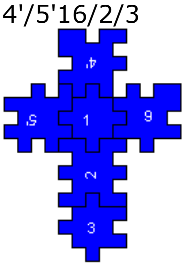
Man sieht: Von den 32 Möglichkeiten, einen Rand zu bilden, werden nur 22 genutzt (schwarze Zahlen). Alle Stücke mit x000x oder x111x werden gemieden (rote Zahlen). Die 4 Paare (00100,11011), (00101,11010), (01010,10101) und (01011,10100), die zusammen passen, kommen besonders häufig und bei (fast) allen Farben vor (240 von 288). Bei Blau und Grün werden nur diese Paare verwendet (fett gedruckt). Bei Blau und Grün kommen Strukturen wie x11xx, xx11x, x00xx oder xx00x nicht vor. Zwei Paare sind gleich, nämlich Rot4/Blau3 und Orange4/Violett4.
Durch die Symmetrie eines Randes oder die eines Stückes wird das Würfel-Suchen leichter.

	blau	grün	gelb	orange	rot	violett
Symmetrische Kanten:	36	32	24	24	24	14
Symmetrische Stücke mit zwei Achsen	2	1	0	0	0	0
Symmetrische Stücke mit einer Achse	1	2	0	2	1	0

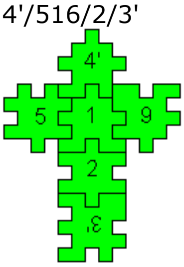
Würfel

Das Hauptproblem ist das Zusammenbauen eines einfarbigen Würfels. Durch reines Probieren kann man alle Lösungen finden.

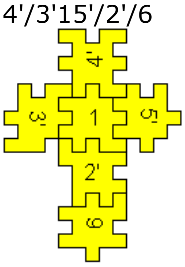
Eine von drei Lösungen 4'/5'16/2/3



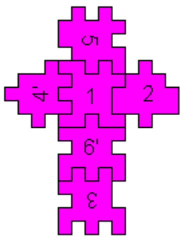
Eine von 5 Lösungen 4'/516/2/3'



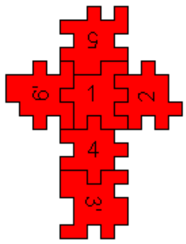
Eine von 5 Lösungen 4'/3'15'/2'/6



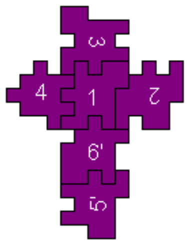
Einzige Lösung 5/4'12/6'/3



Einzige Lösung 5/6'12/4/3'

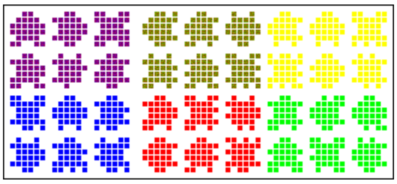


Einzige Lösung 3/412/6'/5'



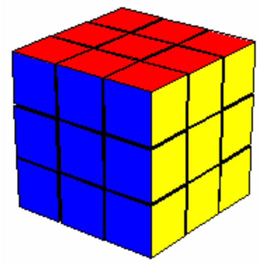
Der blaue und der grüne Würfel sind leicht zu bauen. Der blaue Würfel ist ein wenig schwerer zu finden, da bei jeder Lösung die Stücke 1, 2 und 3 in gleicher Anordnung gesetzt werden müssen. Alle Lösungen:
blau, 3 Lösungen 4'/5'16/2/3, 2/4'15/6'/3', 4'/612/5'/3
grün, 5 Lösungen 4'516/2/3', 6/213/4/5, 2/6'13/4/5, 3/415/6'/2, 3'514'/2/6'
gelb, 4 (5) Lösungen 4'/3'15'/2'/6, 6/3'15/2'4', (6/3'15'/2'4',) 6/4'12'/5'/3', 4'/612'/5/3'

orange, 1 Lösung 5/4'12/6'/3
rot, 1 Lösung 5/6'12/4/3'
violett, 1 Lösung 3/412/6'/5'



Snafooz

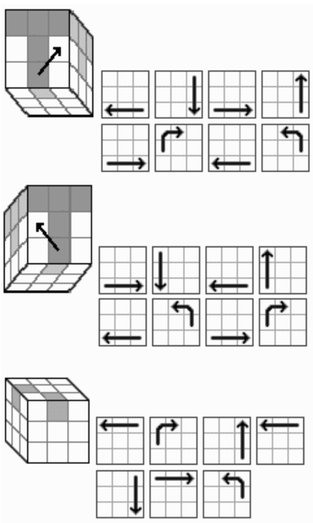
Snafooz ist eine amerikanische Kopie und steht in Konkurrenz zu Happy Cube.Snafooz ist in den USA verbreitet.Ein Satz besteht auch aus sechs Matten. Im Unterschied zu Happy Cube liegt einem Stück nicht ein 5x5-Quadrat, sondern ein 6x6-Quadrat zugrunde.



Rubik-Würfel

Das wahrscheinlich populärste mathematische Puzzle der Neuzeit ist der "Rubik-Würfel", der von dem ungarischen Mathematiker Ernö Rubik 1974 erfunden wurde. Nach der Patentierung 1975, kam der Würfel 1977 auf den ungarischen Markt.
1981 begann sein "Siegeszug" rund um die Welt, 1982 waren in Ungarn über 10 Millionen Würfel verkauft (Ungarn hat 10,3 Millionen Einwohner!); heutzutage schätzt man mehr als 100 Millionen weltweit.
Der Würfel besteht (scheinbar) aus 3 x 3 x 3 kleineren Würfeln, die so gefärbt sind, dass die sechs Seiten des Gesamtwürfels sechs verschiedene Farben ausweisen.
In Wirklichkeit besteht er aber nur aus 21 Teilen, nämlich aus 1 Achsensystem mit 6 festen Mittelstücken, 8 dreifarbigen Eckstücken und 12 zweifarbigen Kantenstücken.
Die Standardfarben sind weiß/gelb, orange/rot und grün/blau. Schon nach einigen unbedachten Drehungen von Ebenen ist der Würfel bunt. Das Grundproblem besteht darin, den bunten Würfel so zu ordnen, dass die Seitenflächen zum Schluss wieder einfarbig sind.

Die 9 Würfel, die eine Seite bilden, können um jeweils 45° gedreht werden. Insgesamt gibt es 43 Trillionen 252 Billiarden 3 Billionen 274 Milliarden 489 Millionen 856000 verschiedene Möglichkeiten die 27 kleinen Würfel anzuordnen. Nur eine einzige Position ergibt die Ausgangssituation. Mathematisch gesehen basiert dieses Puzzle auf der Gruppentheorie. Die Umordnungen können als Permutation aufgefasst werden. Die Permutationen aber bilden eine endliche Gruppe. So kann das Studium des Würfels auf die Untersuchung einer Gruppe verlagert werden. Sie ist kompliziert, zumal nicht alle Permutationen als Zug oder Zugfolge vorkommen. Theoretisch gibt es für einen 3x3x3-Würfel $54!/(9!*9!*9!*9!*9!*9!) = 1,1*10^{38}$ Kombinationen der 54 Quadrate. Der Zauberwürfel hat $8!*3^8*12!*2^12 = 519024039293878272000 = 5,19*10^{20}$ Kombinationen, wenn man ihn auseinander nimmt und neu zusammensetzt. Der zwölfte Teil, also 43252003274489856000 Kombinationen, kann durch Drehungen erreicht werden.
Wie kann man den Würfel möglichst schnell richten? Professionelle Würfeldreher benötigen insgesamt immer weniger als 90 Züge. Diese Würfeldreher kennen eine Menge Züge, um auf die jeweilige Situation schnell und passend zu reagieren. Sie gehen nicht stur schrittweise vor, sondern haben viele Würfel gleichzeitig im Auge. Bei der 1.Weltmeisterschaft mit dem Rubik-Würfel 1982 in Budapest benötigte der Sieger, der 16jährige US-Amerikaner Min Tai, nur 22,95 s zum korrekten Ordnen des Würfels.



Rubik-Würfel, Lösung

... Anleitung zur Lösung des Würfels

Die erste Ebene ...

... sollte sich auch ohne Anleitung ordnen lassen.

Die zweite Ebene

Die vier Kantenstücke der mittleren Ebene werden positioniert (Abbildung 1) oder (Abbildung 2)
Befindet sich ein Kantenstück verdreht an der richtigen Stelle, wird es vorläufig durch ein anderes Kantenstück ersetzt.

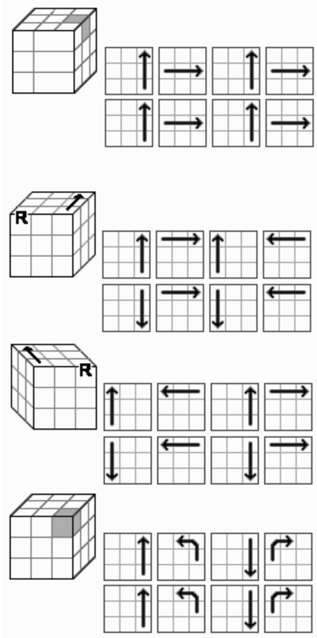
Plazieren der Kantenstücke in der dritten Ebene

Den Würfel drehen, bis die zu sortierende dritte Ebene oben liegt. Zwei Kantenstücke tauschen ihre Position mit Abbildung 3.

Kippen der Kantenstücke

Müssen Kantenstücke gekippt werden, wird der Würfel so gehalten, dass das zu kippende Kantenstück rechts liegt (Abbildung 4)
Jetzt kann der Würfel chaotisch aussehen. Das nächste zu kippende Kantenstück wird durch Drehung der obersten Ebene auf die rechte Seite gebracht, die Züge werden wiederholt usw... Liegen alle Kantenstücke richtig, sind Ebene 1 und Ebene 2 wieder korrekt.

Plazieren der Ecken



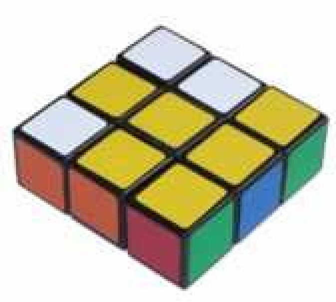
Entweder die richtige Ecke liegt links vorne, die Ecke rechts vorne muss nach rechts hinten (Abbildung 5). Oder die richtige Ecke liegt rechts vorne, die Ecke links vorne muss nach links hinten (Abbildung 6). Sollte keine Ecke richtig liegen, führt man die Züge der 1. oder 2. Möglichkeit aus. Dann liegt mindestens eine Ecke richtig.

Kippen der Ecken

Zum Kippen der Ecken hält man den Würfel so, dass ein zu kippendes Eckstück rechts vorne liegt. (Abbildung 7)
Eventuell müssen diese acht Züge einmal wiederholt werden. Zum Kippen der nächsten Ecken wird wieder nur die oberste Ebene gedreht.

Rubik-Würfel

Nach dem weltweiten Erfolgt des 3x3x3-Rubik-Würfels wurden auch Varianten mit anderen Würfelzahlen konstruiert.
Der 4×4×4 Würfel wurde am 20.12.1983 von Peter Sebesteny zum Patent angemeldet, US 4421311.
Alle vier Ebenen in allen drei Dimensionen können gedreht werden.
Es gibt 8 Eckstücke mit 3 Orientierungen, 24 Kantenstücke mit 2 Orientierungen und 24 Zentralstücke.
Insgesamt existieren $7! \cdot 24! \cdot 24! \cdot 3^6 / 4!^6$
= 7 401 196 841 564 901 869 874 093 974 498 574 336 000 000 000
d.h. $7{,}4 \cdot 10^{45}$ verschiedene Positionen.
1986 wurde sogar ein 5×5×5 Würfel konstruiert. Bei diesem existieren sogar $8! \cdot 24!^3 \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^8$
= 2 582 636 272 886 959 379 162 819 698 174 683 585 918 088 940 054 237 132 144 778 804 568 925 405 184 000 000 000 000 000
d.h. $2{,}58 \cdot 10^{90}$ verschiedene Möglichkeiten.
Für einen 2×2×2 Würfel gibt es $7! \cdot 3^6$ = 3674160 Positionen.

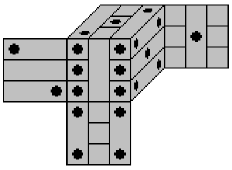


Floppycube

Der Floppycube ist ein Drehpuzzle, das dem Rubik-Würfel ähnelt. Seine Größe ist allerdings nur 3 x 3 x 1.
Wie Rubiks Würfel hat der Floppycube 6 Seiten, die im gelösten Zustand die gleiche Farbe haben. Ziel ist es daher einen verdrehten Floppycube wieder so zu drehen, dass jede Seite nur die gleiche Farbe zeigt. Es sind nur 180°–Drehungen der vorderen, der hinteren der rechten und der linken Seite möglich.
Der Floppycube gehört zu den einfachen Drehpuzzlen. Zur Lösung werden ein korrekter 2 x 2 x 1 Block erzeugt und dann die anderen 2 Seiten einfach so lange abwechselnd zu drehen, bis der Quader gelöst ist.
Der Floppycube besitzt theoretisch 1! · 24 · 4! · 14 = 384 Stellungen, von denen genau die Hälfte auf Grund der Mechanik erzielt werden können.
Für die minimale Anzahl von 0, 1, 2, 3, ... benötigten Zügen existieren genau
1, 4, 10, 24, 53, 64, 31, 3, 1
Stellungen.
Bei der Stellung, bei der minimal 8 Züge benötigt werden um den Floppycube wieder in den gelösten Zustand zu bringen, sind nur alle Kanten falsch ausgerichtet, die Ecken und der Mittelstein sind korrekt.

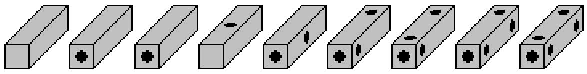
Walzenwürfel

Eine Variante des Würfels ist der Walzenwürfel. Er heißt auch Oktogon oder Teufelstonne.
Er entsteht aus einem Würfel, wenn man die vier vertikalen Kanten abschneidet. Auf diese Weise entstehen zehn Flächen, die unterschiedlich gefärbt sind. Er hat die Mechanik des Zauberwürfels und wird nach den gleichen Regeln gelöst.
Wer den Würfel beherrscht, wird beim Ordnen keine Schwierigkeiten haben. Man muss allerdings schon bei der ersten Ebene eine bestimmte Farbverteilung einstellen. Ob sie richtig ist, merkt man erst bei der letzten Ebene.
Der Walzenwürfel enthält 8 Stücke mit 3 Orientierungen, 12 mit 2 Orientierungen und insgesamt
$8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^8 / 4$ = 450 541 700 775 936 000 = $4{,}5 \cdot 10^{17}$
Positionen.



Würfel Puzzle

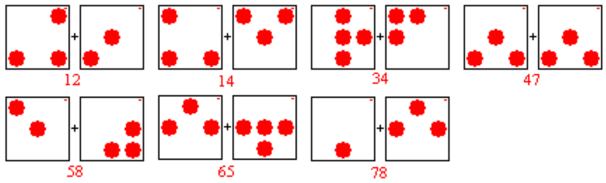
Ein hübsches Würfel-Puzzle entsteht, wenn man den Spielwürfel in neun Balken aufteilt. In einer mittleren Schicht legt man die Balken vertikal, außen jeweils horizontal. Dann ist das Puzzle interessanter.



Rubik's Dice

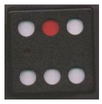
Rubik's Dice ist ein schwarzer Plastikwürfel 7cm x 7cm x 7cm, der statt Augen kreisförmige Öffnungen nach Art eines Würfels hat. Im Würfel befinden sich sieben weiße, quadratische Platten mit roten Kreisen, die innen an die Wände gelegt werden können. Die direkt an der Öffnung liegende Platte bleibt haften. Man kann sie von außen mit einem mitgelieferten Stempel wieder lösen. Die Platten schließen die Öffnungen rot oder weiß. Eine Lösung des Puzzles ist gefunden, wenn die Platten im Inneren so sortiert werden, dass der Würfel am Ende nur weiße Augen hat.

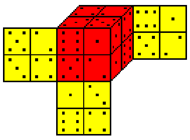
Dieses Puzzle kann man nicht durch Probieren lösen. Es gibt bei sieben Platten zu viele Möglichkeiten, die Öffnungen mit den Platten zu schließen. Auch ist das Bewegen der Platten mühsam.



Zur Lösung geht man so vor: Man kann durch die Löcher in den Würfel hineinsehen und die Muster beider Plattenseiten abzeichnen. Die Platten zeigen oben rechts zweistellige Zahlen, die als Namen dienen können. Es ergibt sich das obige Bild:

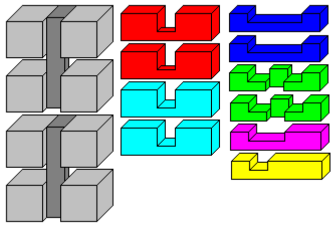
Nur Platte 78 (links) passt auf die Sechs, dann nur 65 (links) auf die Fünf, dann nur 34 links auf die Vier, dann nur 58 (rechts) auf die Drei, dann nur 12 (rechts) auf die Zwei und dann nur 14 (links) auf die Eins. Die Platte 47 ist überflüssig. Es gibt also genau eine Lösung.



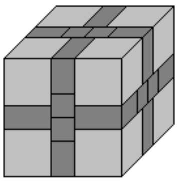


Würfel-Summenproblem

Gegeben sind 8 Spielwürfel. Man soll einen 2x2x2-Würfel bauen, so dass die Summe der Augenzahlen auf jeder Seitenfläche gleich ist. Insgesamt gibt es 20736 Lösungen für die Summe 14. Eine ist die links abgebildete.



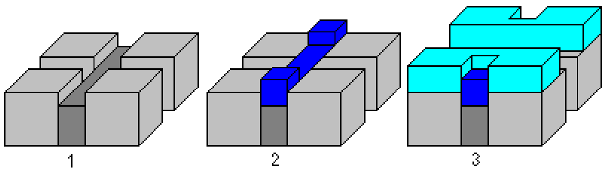
Klassischer zerlegbarer Würfel



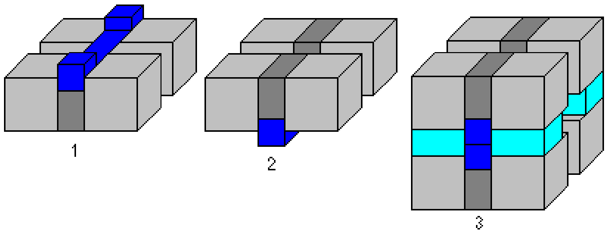
Der klassische zerlegbare Würfel ist ein Holzwürfel aus acht Einzelwürfeln und dazwischenliegenden Bändern aus dunklerem Holz. Er heißt auch "Zerlegbarer Würfel" oder "Klassischer 12-Stücke-Würfel". Er stammt aus dem 19.Jahrhundert.

Nimmt man den Würfel auseinander, so erhält man als erstes zwei Hälften. Sie bestehen aus vier Würfeln, die an einen Stab angeleimt sind. Dann ergeben sich 10 Stäbe oder Riegel, die kunstvoll ineinandergesteckt sind und die die Bänder bilden. Aufgabe des Puzzles ist es, aus den 12 Einzelstücken einen Würfel zusammenzubauen.

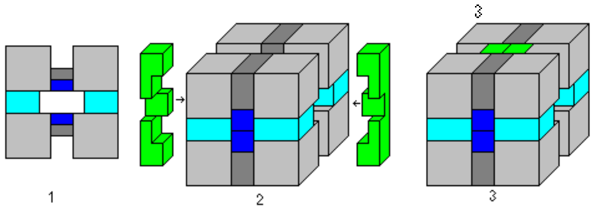
Die Lösung erfolgt in drei Schritten:
1.Schritt: Aufbau eines H-Stückes als erste Zwischenschicht.
Setze in die Rille einer Würfelhälfte (1) den dunkelblauen Riegel (2). Füge die hellblauen Riegel hinzu (3).



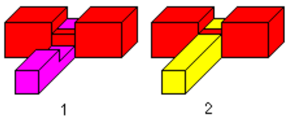
Setze in die zweite Würfelhälfte den anderen dunkelblauen Riegel (1). Drehe die Würfelhälfte um (2) und setze sie auf die erste Würfelhälfte (3). Die vier blauen Riegel bilden im Inneren des Würfels ein H.

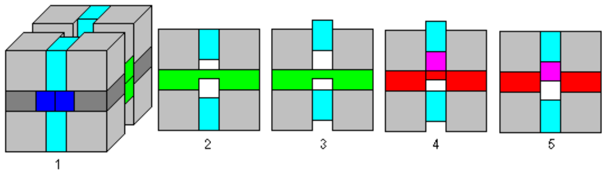


2.Schritt: Verklammerung der beiden Würfelhälften
Schaue seitlich in den Würfel hinein. Du erkennst in der Mitte zwei Verbindungsstücke dunkelgrau/dunkelblau (1). Führe die beiden grünen Riegel seitlich von rechts und links ein (2) und lege sie um die Verbindungsstücke (3).
Achte im folgenden Schritt darauf, dass sich die grünen Riegel nicht lösen, wenn der Würfel gedreht werden wird.

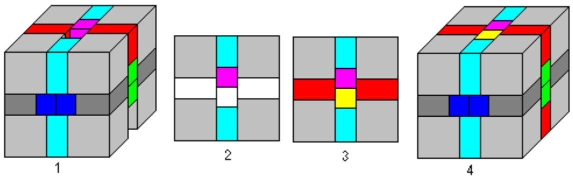


3.Schritt: Einsetzen zweier T-Stücke
Bilde aus den restlichen vier Riegeln zwei T-Stücke. Sie werden von oben und unten in den Würfel hineingesteckt werden.
Drehe den Würfel um eine Vierteldrehung, so dass die rechte Würfelfläche unten liegt (1). Schaue von oben in den Würfel. Du siehst zwei Löcher (2, weiß). Vergrößere das obere (hintere im Schrägbild) Loch für das T-Stück rot/pink. Drücke dazu mit dem Zeigefinger von unten (vorne) auf die dunkelblauen Stäbe in der Mitte und schiebe den oberen hellblauen Stab mit (3). Stecke dann das T-Stück von oben in den Würfel, das rote Querstück zuerst (4). Stelle dann die Würfelform wieder her (5).

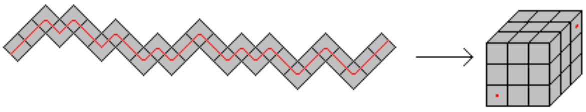




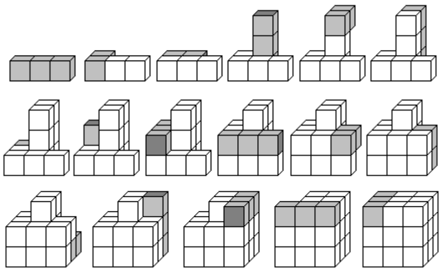
Der Würfel sieht dann in 3D-Sicht so aus (1). Stelle den Würfel auf den Kopf, vorne bleibt vorne, (2) und setze von oben das T-Stück rot/gelb ein (3). Der Würfel ist gelöst (4).

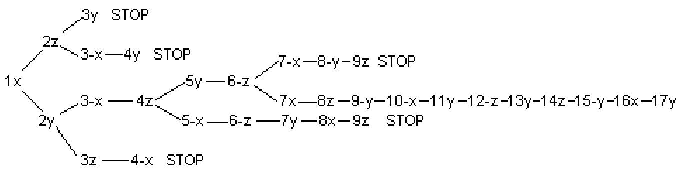


Schlangenwürfel

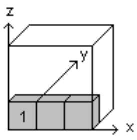


Der Schlangenwürfel besteht aus einer Kette von 27 Einzelwürfeln. Die Würfel werden durch ein in der Mitte verlaufendes Gummiband miteinander verbunden. Sie bilden 17 Zweier- oder Dreiergruppen in einer Anordnung, die die Zeichnung zeigt. Ziel des Puzzles ist es, die Würfelkette so zu legen, dass ein 3x3x3-Würfel entsteht. Nur durch systematisches Vorgehen lässt sich ein 3x3x3-Würfel herstellen.

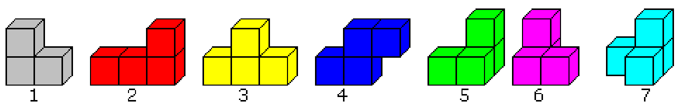




Die Würfelpaare bzw. -tripel werden mit 1 bis 17 durchnummeriert. Links ist die Dreiergruppe Nummer 1 dargestellt. Während des Ordnens sollte man immer die gleiche Orientierung des Würfels im Raum beibehalten. Diese Orientierung legt man am besten durch ein Koordinatensystem mit x-, y- und z-Achse fest. Das Anfangstripel links bleibt während des Ordnens immer in der Lage, die eingezeichnet

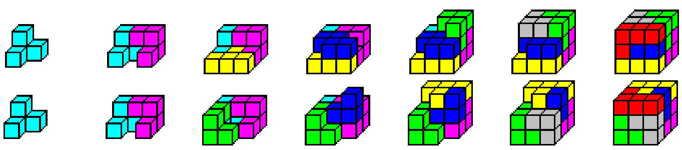


ist. Wie die folgenden 16 Gruppen liegen können, entnimmt man dem folgenden Diagramm. Es werden auch Sackgassen STOP dargestellt, um die Struktur dieses Puzzles sichtbar zu machen. Die Bezeichnungen der Züge werden an einem Beispiel erklärt: "10-x" bedeutet: Die 10.Gruppe wird in Richtung der negativen x-Achse ausgerichtet.
Nach dem Diagramm ist es nicht schwer, die Lösung zu finden. Ohne Diagramm liegt die Schwierigkeit darin, dass man Sackgassen nur mühsam zurückverfolgen kann, um dann bei der letzten Abzweigung weiter zu machen. Aus Symmetriegründen gibt es zwei weitere Lösungen, eine wird nachfolgend dargestellt:



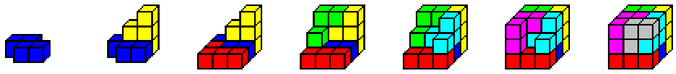
Somawürfel

Die abgebildeten Würfelkörper heißen Somawürfel. Sie enthalten 1x3 + 6x4 = 27 Einzelwürfel.
Das Grundproblem besteht darin, die sieben Somawürfel (auch Steine genannt) zu einem 3x3x3-Würfel zusammenzusetzen. Die Chancen dieses 3D-Puzzle zu lösen, sind relativ groß, denn es gibt immerhin 240 Möglichkeiten des Zusammenfügens, von Symmetrien abgesehen. Beim ersten Probieren braucht man bis zu 15 Minuten dieses Puzzle zu lösen. Man kommt leichter zum Erfolg, wenn man zuerst die drei dreidimensionalen Somakörper 5,6 und 7 verbaut. Drei mögliche Lösungen sind:



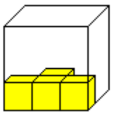
Lösung 1

Lösung 2 Man beginnt mit einem symmetrischen Körper aus den drei 3D-

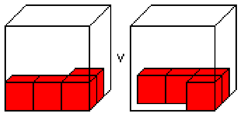


Steinen 5,6 und 7, dann folgt Stein 4
Lösung 3 zeigt einen der wenigen Fälle, bei dem Stein 7 keine Ecke bildet

Lage der Somawürfel 2 und 3
Diese beiden Steine enthalten eine 1x1x3-Stange. Daraus ergeben sich folgende Aussagen: Stein 3 bildet entweder 0 oder 2 Ecken. Stein 2 kann 0, 1 oder 2 Ecken bilden.
(1) Stein 3 bildet keine Ecke. Die übrigen 6 Steine liefern maximal 2+5 Ecken. Das ist nicht möglich, da dann nicht 8 Ecken zusammenkommen.
(2) Stein 3 bildet 2 Ecken. Die übrigen 6 Steine liefern die restlichen 6 Ecken. Das ist möglich. Dann muss aber Stein 2 immer mindestens eine Ecke übernehmen.

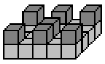


Stein 3 bildet zwei Ecken

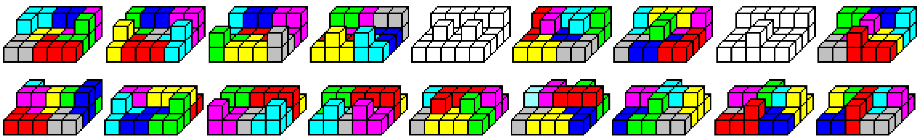


Stein 2 muss immer mindestens eine Ecke bilden, darf also nicht in der Mitte liegen

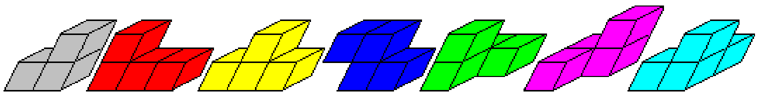
Dies können die ersten Schritte sein um nachzuweisen, dass es 240 Lösungen gibt.
Es gibt unzählige Körper aus Somawürfeln.



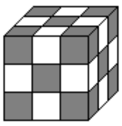
Alle Somawürfel bestehen aus 27 Einzelwürfeln. Gibt man eine Matte von 5x4=20 Würfeln vor, so gibt es 20!/13!/7! = 77520 Plätze für die restlichen 7 Würfel, also 77520 Würfelkörper.
Links wird ein Beispiel angegeben.
Fordert man eine Stange aus fünf Würfeln, so können zwei Würfel frei gewählt werden. Das führt zu 15!/13!/2! = 105 Würfelkörper. Verlangt man noch zusätzlich Symmetrie, so bleibt es bei einer überschaubaren Zahl von 18 Würfelkörper.
Zwei Würfelkörper sind unlösbar.



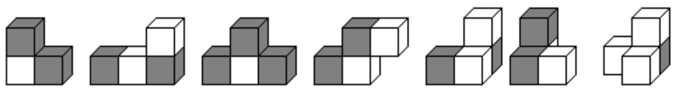
Varianten
Auch bei diesem Puzzle gibt es mehrere abweichende Varianten.
Es gibt eine Kuriosität: Statt eines Würfels als Grundbaustein verwendet man ein Parallelepiped oder



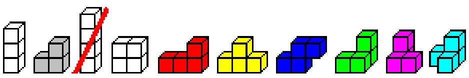
Spat, ein Körper, der nur von Parallelogrammen begrenzt wird. In diesem Falle ist das Parallelogramm eine Raute mit einem Innenwinkeln von 50°. Die Lösung des 3x3x3-Würfel-Problems kann auf diese Körper nicht einfach übertragen werden. Fügt man 3 oder 4 Spate zusammen, so gibt es zu jeder der sieben Formen zwei Möglichkeiten. Dadurch ist die Anzahl 240 Lösungen drastisch herabgesetzt.



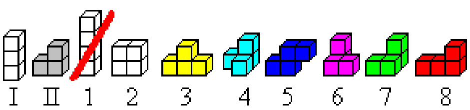
Schachbrett-Somawürfel
Man erzeugt dieses Soma-Puzzle, indem man einen Würfel baut und die Einzelwürfel abwechselnd schwarz und weiß färbt. Diese Färbung nehmen dann die sieben Somawürfel an.



Aufgabe ist es, aus den Somawürfeln wieder den 3x3x3-Würfel zusammenzusetzen.



Der Däne Piet Hein wählte 1936 sieben Würfelkörper so aus, dass er einen 3x3x3-Würfel zusammensetzen konnte. Von allen Würfelkörpern, die man aus 3 oder 4 Würfeln bilden kann, wählte er die aus, die keinen Quader bilden.
Er entnahm dem Buch "Schöne neue Welt" von Aldous Huxley den Namen Soma. Soma war eine Droge in einem fiktiven Staat des Jahres 2600. J.H.Conway und M.J.T.Guy fanden 1961 heraus, dass es 240 verschiedene Möglichkeiten gibt einen 3x3x3-Würfel zusammenzusetzen. Computer bestätigten später dieses Ergebnis. Berühmt wurde der Somawürfel aber erst durch Veröffentlichungen des Magazins *Scientific American* (1958).

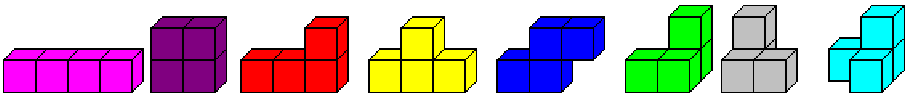


Rehmscher Spielsatz
Problem: Aus welchen Würfelkörpern mit 3 oder 4 Würfeln kann man einen 3x3x3-Würfel bauen?
Es gibt 2 Dreierwürfel und 8 Tetrawürfel. Es gibt14 Möglichkeiten für einen 3x3x3-Würfel, da 27=6*4+3 gilt.

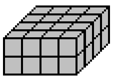
I..345678 (240)	I2..45678 (047)
I23..5678 (261)	I234..678 (221)
I2345..78 (337)	I23456..8 (337)
I234567.. (039)	II..345678 (138) Somawürfel

II2..45678 (000) II23..5678 (031)
II234..678 (099) II2345..78 (245)
II23456..8 (245) II234567.. (027)
Mit Ausnahme der Kombination II2..45678 (3 fehlt) bilden alle anderen einen Würfel. Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der Lösungen an.

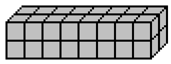
Tetrawürfel



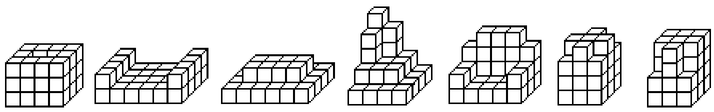
Die acht abgebildeten Würfelkörper aus vier Würfeln heißen Tetrawürfel. Sie sind alle Körper, die man mit vier Würfeln bilden kann. Fünf der Würfelkörper sind eben, drei sind räumlich. Die Tetrawürfel heißen I, O, L, T, N, Turm rechts, Turm links und Dreibein. Lässt man die 1x4-Stange und das 2x2-Quadrat weg und fügt den V-Körper aus drei Steinen hinzu, so erhält man die sieben Somawürfel.
Die Tetrawürfel haben zusammen 32 Würfel. Es gilt 32=2x4x4.



Folglich stellt sich das Problem, aus allen acht Tetrawürfeln einen Quader 2x4x4 zusammenzusetzen. Es gibt 1390 Möglichkeiten, wie eine Gruppe von Forschern am MIT mit Hilfe eines Computerprogramms ermittelte

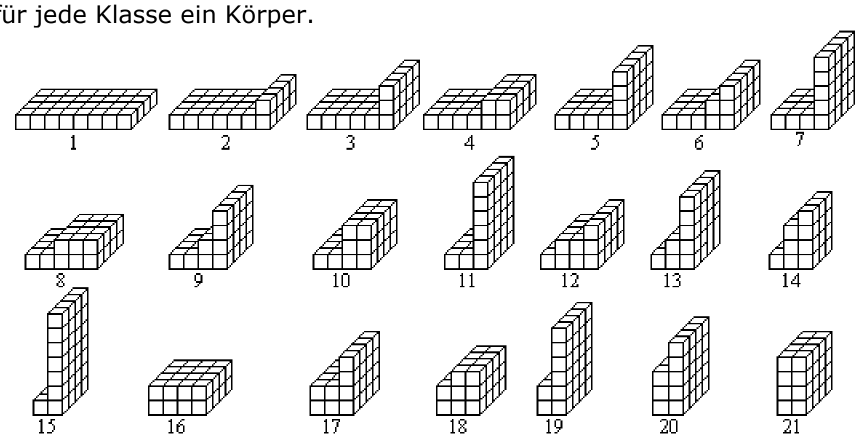


Eine andere Zerlegung von 32 ist 32 = 2x2x8. Der 2x2x8-Quader setzt sich aus einem 2x2x4-, einem 2x2x3- und einem 2x2x1-Quader zusammen.



Weitere lösbare Entwürfe: Brunnen, Bett, Penthouse, Turm, Sofa, Würfel und Kreuz, Figur mit Säule

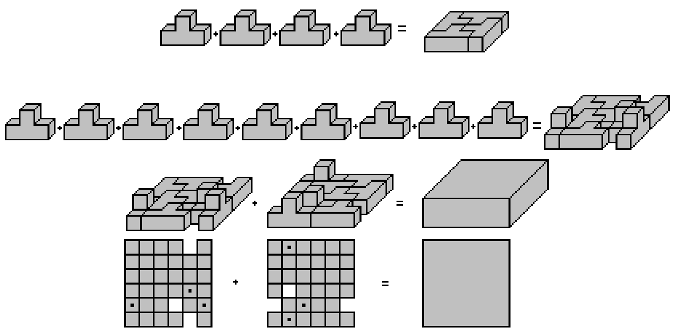
Es gibt 71 Körper aus vier gleichen Schichten, die man in 21 Klassen einteilen kann. In der folgenden Abbildung steht für jede Klasse ein Körper.



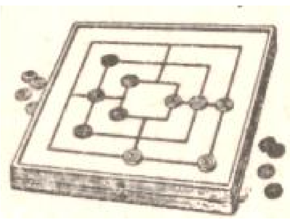
Für die Darstellung der Körper wird eine Notation mit Zahlen gewählt. Der Aufbau der Körper wird durch die Lage der Stangen und ihre Höhe festgehalten. So hat zum Beispiel der Körper 12 die Darstellung 1223.
Typ 1: 11111111 Typ 2: 1111112, 1211111, 1121111, 1112111
Typ 3: 111113, 11311, 13111
Typ 4: 111122, 111212, 112112, 121112, 211112, 111221, 112121, 121121, 112211
Typ 5: 11114, 14111, 11411 Typ 6: 11123, 11132, 11213, 11231, 11312, 11321, 12113, 12131, 13112, 21113
Typ 7: 1115, 1511 Typ 8: 11222, 12122, 12212, 12221, 21122, 21212
Typ 9: 1124, 1214, 1241, 1412, 2114 Typ10: 1133, 1313, 3113, 1331
Typ11: 116, 161 Typ12: 1223, 1232, 1322, 2123, 2132, 2231
Typ13: 125, 152, 215 Typ14: 134, 143, 314
Typ15: 17 Typ16: 2222
Typ17: 224, 242 Typ18: 233, 323
Typ19: 26 Typ20: 35
Typ21: 44
Sind die Zahlen grün, so ist es möglich den Körper aus Tetrawürfeln zu legen. Rot steht für unlösbar und Schwarz heißt, dass der Körper nicht gelöst, dass aber die Unlösbarkeit nicht bewiesen wurde.

Körper aus gleichen Tetrawürfeln

Es werden Tetrawürfel von nur einer Sorte vorgegeben. Aus ihnen können z.B. Würfel gebaut werden.

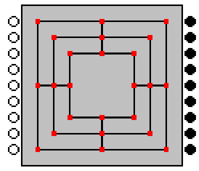


4x4x4-Würfel
Man kann aus vier Stücken eine quadratische Platte bauen. Vier Platten dieser Art bilden einen 4x4x4-Würfel
6x6x6-Würfel
9 T-Tetrawürfel bilden eine 6*6-Matte mit 3 Tälern und 3 Bergen. Die gleiche Matte wird noch einmal gebaut, um 90° gedreht und über die erste gestülpt. Es entsteht ein 2*6*6-Quader aus 18 Tetrawürfel. Drei Platten dieser Art bilden einen 6x6x6-Würfel.



Mühlespiel

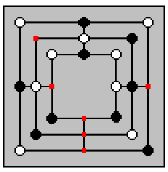
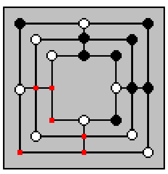
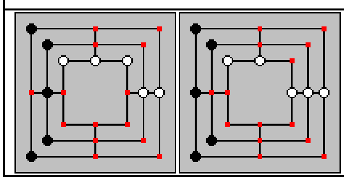
Das Mühlespiel ist ein altes Brettspiel für zwei Personen. Ziel des Spiels ist es, Mühlen zu schließen und dem Gegner einen nach den anderen Stein zu nehmen. Derjenige, der zum Schluss nur noch zwei Steine hat, hat verloren. Das Mühlespiel gehört in Deutschland neben dem Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel zu den bekanntesten Brettspielen. Das Spiel ist in der ganzen Welt verbreitet. In Englisch heißt es "Nine Men's Morris" (oder "Merrills"), in Französisch "Marelle" (oder "Mérellés"). Es ist eins der ältesten Spiele, die noch heute gespielt werden. Schon die alten Ägypter...

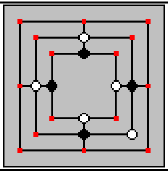
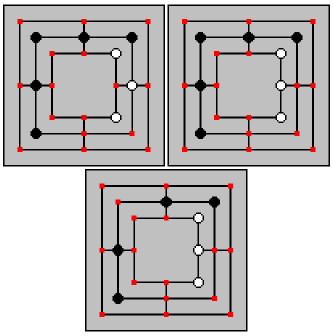


Das Mühlespiel gehört im Ansatz zu den Reihenspielen, bei denen man versuchen muss, als erster mehrere gleiche Zeichen bzw. Steine in eine Reihe zu setzen und so Vorteile zu erlangen. Bekannte Spiele dieser Art sind TicTacToe bzw. 3D TicTacToe (Qubic) und Vier gewinnt (englisch Connect four). Auf einem Go-Feld spielt man Go-Moku und Gobang.

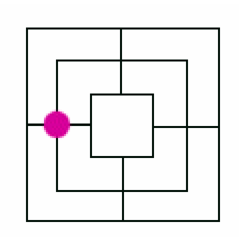
Spielverlauf und Standardregeln

Es spielen zwei Personen.
Das Standard-Spielbrett besteht aus drei konzentrisch liegenden Quadraten, die in den Seitenmitten verbunden sind. Die Eckpunkte und die Mittelpunkte bilden 12+12=24 Felder (rot), auf die die 18 Spielsteine gestellt werden. 12 Felder haben 2 Nachbarfelder, 8 haben 3 und 4 haben 4 Nachbarfelder. Drei Spielfelder bilden 16mal eine Strecke mit einem Mittelpunkt. Stehen auf diesen 3 Feldern Steine, so bilden sie eine "Mühle". Die beiden Spieler bekommen je neun weiße und neun schwarze Spielsteine. Zu Beginn des Spiels ist das Brett leer. Weiß fängt an. Wer Weiß wird, bestimmt ein Los. Im Spiel unterscheidet man drei Phasen.

	Anfangsphase: Steine setzen Die Spieler legen abwechselnd je einen Stein auf ein freies Feld. Man meint immer: Beide versuchen eine "Mühle" zu legen und gleichzeitig eine Mühle des anderen Spielers zu verhindern. Statt Mühlen zu bauen ist es wohl wirksamer, strategisch wichtige Felder zu belegen, um später die Steine des anderen Spielers zu blockieren. Eine Mühle besteht aus drei Steinen, die in einer Reihe liegen. Drei diagonal liegende Steine bilden keine Mühle. Gelingt einem Spieler eine Mühle, so darf er einen Stein des Gegners vom Brett und damit aus dem Spiel nehmen. Steine aus einer Mühle darf er nicht nehmen, sie sind geschützt. Sind alle Steine gesetzt, so könnte das Spiel wie links aussehen. Schwarz machte den letzten Zug. Man sieht: Weiß muss als nächstes unten eine Mühle von Schwarz verhindern.
	Mittelphase: Steine schieben Befinden sich alle Steine auf dem Spielbrett, werden sie abwechselnd längs einer Linie um ein Feld verschoben. Dafür stehen sechs freie Felder zur Verfügung. Wieder achtet jeder darauf, dass der andere keine Mühle bauen kann und dass er selbst nicht blockiert wird. Was man unter Blockieren versteht, zeigt das nebenstehendes Bild. Schwarz ist so in die Enge getrieben, dass kein Zug mehr möglich ist. Damit hat Schwarz verloren. Das Spiel ist somit schon zu Ende. Weiß hat gewonnen. Viele Spiele gehen so aus, bei versierten Spielern sogar die meisten, wie ich mir habe sagen lassen...
	Es gibt eine Spielstellung, die sprichwörtlich geworden ist. Das ist die sogenannte Zwickmühle. Ein Stein schließt abwechselnd zwei Mühlen fortwährend, und der Besitzer der Mühle darf jedesmal einen Stein des Gegners nehmen. Zwei Arten von Zwickmühlen sind möglich.

	Es gibt ein Spielstadium, bei dem sich keiner mehr einen Vorteil verschaffen kann. Schwarz ist am Zug. Ein Computer hat die nebenstehende Stellung analysiert und das Spiel mit "Unentschieden" erkannt. Das Spiel geht unentschieden aus. Kommt es zu keiner Blockade des anderen und gelingt es Mühlen zu bauen, so wird die Zahl der Steine immer kleiner. Schließlich hat zum Beispiel Schwarz noch drei Steine. Dann beginnt eine dritte Phase.
	Endphase: Mit einem von drei Steinen springen In der Endphase darf Schwarz mit drei Steinen jedes freie Feld besetzen. Deshalb ist es günstig, wenn Weiß möglichst zwei Mühlen offenhält, um von den drei Steinen einen wegzunehmen. Dann ist das Spiel zu Ende. Weiß hat gewonnen. Gelingt es nicht, den dritten Stein zu nehmen, so geht das Spiel unentschieden aus oder Schwarz kann noch gewinnen. Es gibt zwei konstruierte Spielsituationen, die durch die obigen Regeln nicht erfasst werden. Angenommen, Weiß schließt gerade eine Mühle. Dann müsste Schwarz einen Stein abgeben. Das widerspricht aber der Regel, dass Steine in einer Mühle geschützt sind. Dieser Fall ist so geregelt, dass Schwarz trotzdem einen Stein aus einer Mühle abgeben muss. Angenommen, Schwarz schließt in der ersten Phase mit einem Stein gleichzeitig zwei Mühlen. Eigentlich müsste dann Weiß zwei Steine abgeben. Dieser Fall ist so geregelt, dass Schwarz trotzdem nur einen Stein nehmen darf.

Das Mühlespiel ist gelöst. Seit etwa 20 Jahren haben sich Wissenschaftler der Informatik oft unabhängig voneinander der Schiebespiele angenommen und sie analysiert. Die riesigen Speicher heute ermöglichen umfangreiche Datenbanken von Spielstellungen mit Bewertungen. Das Mühlespiel löste der Schweizer Ralph Gasser. Er hat gefunden, dass das Mühlespiel nicht fair ist. Kennen beide Spieler eine Strategie und machen keine Fehler, so geht das Spiel unentschieden aus. Für das praktische Spielen ohne Computerhilfe ist diese Aussage ohne Wert, da die Strategien sehr kompliziert sind.

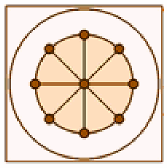


Mühlespiel

Es gibt zahlreiche Varianten des Mühlespiels. International verbindliche Regeln wurden vom Welt-Mühlespiel-Dachverbandes (Bern, Schweiz) festgelegt:

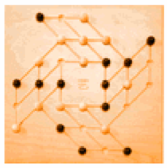
Beide Spieler setzen zuerst abwechslungsweise je neun Steine. Danach wird gezogen. Besitzt ein Spieler nur noch drei Steine, darf er springen.
Schließt ein Spieler beim Setzen mit einem Stein zwei Mühlen gleichzeitig, so ist er berechtigt, zwei Steine zu schlagen. Es ist in jeder Stellung verboten, auch wenn der Gegner nur noch drei Steine hat, einen Stein aus einer Mühle zu schlagen!
Verloren hat ein Spieler:
- wenn ihm der drittletzte Stein geschlagen wird
- wenn er keinen Zug mehr ausführen kann d.h. eingeschlossen ist

Bei den Regeln der World Merrills Association (York) kann auch ein Stein aus einer geschlossenen Mühle geschlagen werden, falls alle Steine des Gegners in Mühlen sind.



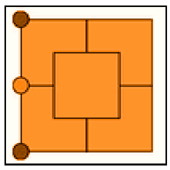
Lasker Regeln

Der Schach-Großmeister Emanuel Lasker hatte zwei Änderungen vorgeschlagen um das Mühlespiel interessanter zu machen. Nach Lasker ist es zum einen möglich während der Setzphase auch zu ziehen, und zum anderen wird mit je 10 Steinen gespielt. Weitere abweichende Regeln kennt man in Australien oder Polen.
Außer abweichenden Regeln gibt es internationale auch verschiedene Varianten des Spielbretts des Mühlespiels.



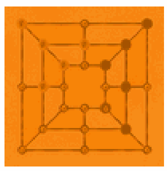
Radmühle oder Römische Mühle (Three Men's Morris)

Radmühle wird auf einem runden 9 Punkte Spielfeld gespielt, von dem es auch eine rechteckige Variante gibt.
Jeder Spieler hat 3 Steine. Wer zuerst eine Mühle bildet, hat gewonnen.



Sonnenmühle

Sonnenmühle wird auf einem 32 Punkte Spielfeld gespielt. Jeder Spieler hat 12 Steine zur Verfügung.

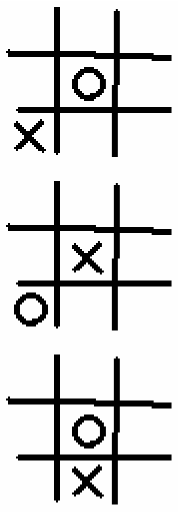


6-Steine Mühle (Six Men's Morris)

Diese Variante wird auf einem 16 Punkte Spielfeld gespielt. Jeder Spieler hat hier 6 Steine zur Verfügung. Möglich sind auch 5 Steine je Spieler.

12-Steine Mühle (Twelve Men's Morris)

Diese Variante wird auf dem 24 Punkte Spielfeld gespielt, wobei auch die Diagonalen spielbar sind. Jeder Spieler hat hier 12 Steine zur Verfügung.



TicTacToe

TicTacToe ist ein Spiel für zwei Personen. Gegeben ist ein 3x3-Spielfeld mit neun Feldern. Der Spieler, der beginnt, setzt in irgendein Feld ein Kreuz. Der zweite setzt einen Kreis. Abwechselnd zeichnen beide weitere Kreuze und Kreise. Derjenige, der als erster drei Kreuze bzw. drei Kreise nebeneinander, untereinander oder diagonal positioniert hat gewonnen. Das Spiel heißt auch Tick-Tack-Toe oder auf Englisch Noughts and Crosses.
Im antiken Ägypten kannte man schon 1300 v.u.Z. ein analoges Spiel.

Der erste Spieler bestimmt den Spielverlauf, der zweite kann nur reagieren. Ziehen beide Spieler korrekt, so ergibt sich stets ein Untentschieden.
Für den Spielverlauf ist der zweite Zug entscheidend. Setzt der 1.Spieler sein Kreuz in eine Ecke, so setzt der zweite Spieler seinen Kreis in die Mitte. Setzt der 1.Spieler sein Kreuz in die Mitte, so setzt der zweite Spieler seinen Kreis in eine Ecke. Setzt der 1.Spieler sein Kreuz in eine Seitenmitte, so setzt der zweite Spieler seinen Kreis in die Mitte. Im Allgemeinen geht dann das Spiel unentschieden aus. Das Spiel wird uninteressant, wenn beide Spieler die Strategien kennen.

Berücksichtigt man weder Symmetrie noch Strategie existieren $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362880$ mögliche Zugfolgen und 126 verschiedene Anordnungen der Kreuze und Kreise.
Von den 126 Mustern erscheinen nur 17 Muster (7,9%) bei einem Unentschieden. Zählt man diese symmetrischen Quadrate nur einmal, so reduziert sich die Zahl 126 auf 23 Muster.
Von den 362880 möglichen Zugfolgen werden jedoch nicht alle erreicht, da das Spiel schon mit einem Sieg entschieden sein kann bevor alle Felder gefüllt sind. Insgesamt verbleiben 125168 mögliche Spiele.

TicTacToe war eines der ersten Spiele, die auf Computern erschienen (Spiel OXO auf einem EDSAC-Computer, 1952). Eine entscheidende Rolle spielt TicTacToe auch im Film Wargames. Dort lernt ein Supercomputer, dass "Spiele" auch unentschieden ausgehen können, und stoppt so im letzten Moment einen thermonuklearen Krieg.
Eine interessante dreidimensionale Variante des TicTacToe findet man unter http://www.tak3tik.de/

TicTacToe-Analyse

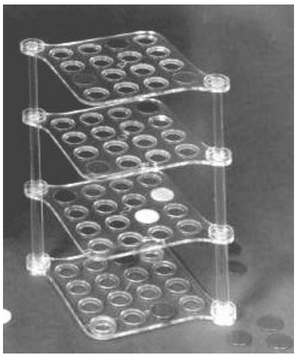
Da die Regeln des TicTacToe-Spiels einfach sind, ist es relativ einfach, die möglichen Spielverläufe zu analysieren. Führt man vier verschiedene Spielertypen:

1) Anfänger, der stets zufällig zieht
2) Lehrling, der stets einen Gewinnzug des Gegners blockiert
3) Lehrer, der alle ersten Verlustzüge kennt
4) Experte, die niemals fehlerhaft zieht

so können am Computer die Spielausgänge simuliert werden. Bei 1000 Testläufen ergibt diese folgende Gewinnerfolge:

Spieler 1 \ **Spieler 2**	Anfänger	Lehrling	Lehrer	Experte
Anfänger	1 gewinnt 57,1% 2 gewinnt 30,6% unentschieden 12,3%	1 gewinnt 6,40% 2 gewinnt 68,3% unentschieden 25,3%	1 gewinnt 2,60% 2 gewinnt 76,4% unentschieden 21,0%	1 gewinnt 0,00% 2 gewinnt 79,6 % unentschieden 20,4%
Lehrling	1 gewinnt 90,4% 2 gewinnt 1,60% unentschieden 8,00%	1 gewinnt 31,6% 2 gewinnt 17,1% unentschieden 51,3%	1 gewinnt 16,1% 2 gewinnt 10,3% unentschieden 73,6%	1 gewinnt 0,00% 2 gewinnt 16,1 % unentschieden 83,9%
Lehrer	1 gewinnt 90,8% 2 gewinnt 0,70% unentschieden 8,50%	1 gewinnt 35,3% 2 gewinnt 11,7% unentschieden 52,8%	1 gewinnt 13,3% 2 gewinnt 0,80% unentschieden 85,9%	1 gewinnt 0,00% 2 gewinnt 1,70 % unentschieden 98,3%
Experte	1 gewinnt 97,8% 2 gewinnt 0,00% unentschieden 2,20%	1 gewinnt 76,6% 2 gewinnt 0,00% unentschieden 23,4%	1 gewinnt 27,1% 2 gewinnt 0,00% unentschieden 72,9%	1 gewinnt 0,00% 2 gewinnt 0,00 % unentschieden 100%

siehe auch http://ostermiller.org/tictactoeexpert.html



Qubic

Qubic ist die räumliche 4 x 4 x 4-Form des klassischen TicTacToe-Spiels. In vier Zeilen, vier Spalten und auf 4 Ebenen müssen die Spieler abwechselnd Kreise und Kreuze eintragen.
Man gewinnt, wenn man 4 gleiche Symbole waagerecht, senkrecht, von oben nach unten oder auf Flächen- oder Raumdiagonalen angeordnet hat. Insgesamt existieren hier 76 verschiedene Gewinnlinien.
1980 zeigte Patashnik, dass der anfangende Spieler bei richtiger Strategie stets gewinnt.
Als Brettspiel wird das Spiel meist durch 16 Stäbe, die senkrecht in einem 4×4-Quadrat angeordnet sind, realisiert. Die Kugeln fallen bis zur Bodenplatte oder bis auf die darunterliegende Kugel. Streng genommen entspricht dies nicht den

Originalspielregeln.
Das Original-Qubic der Parker Brothers sowie einige andere Varianten bestanden im wesentlichen aus übereinanderliegenden Ebenen aus Glas oder durchsichtigem Kunststoff, die an einem Gerüst aus Stäben übereinander angeordnet waren. Dort konnten die Kugeln auch in der Höhe frei positioniert werden.

Schach

Es gibt wohl kein Spiel, welches mehr mit logischem Denken zu tun hat, als Schach.
Das Spiel entstand wahrscheinlich im 6.Jahrhundert v.Chr. in Indien. Über Persien und das Byzantinische Reich verbreitete es sich in ganz Asien. Zwischen 700 und 900 kam Schach nach Europa. Nach einigen Regeländerungen im 16.Jahrhundert wurde 1851 erstmals ein internationales Turnier ausgetragen. Heute gilt Schach als die „Krone des Brettspiels". Abarten des Schachs sind das japanische "Shogi" und das chinesische "Xiangqi".
Schach ist ein Brettspiel für zwei Personen. Jeder Spieler verfügt über 16 Figuren, der eine Weiß, der andere Schwarz. Jeder Satz von Figuren besteht aus einem König, einer Dame, zwei Läufern, zwei Springern, zwei Türmen und acht Bauern. Man spielt auf einem quadratischen Schachbrett, das in 64 abwechselnd helle und dunkle Felder unterteilt ist. Ziel des Spieles ist, den gegnerischen König „schachmatt" zu setzen.

Analyse von Schach
Nach Hardy (1999) gibt es $10^{10^\wedge 50}$ verschiedene, mögliche Spiele. 1996 analysierte Peterson für eine 40zügige Schachpartie 10^{120} verschiedene Stellungen der Figuren. Dagegen fand Shannon 1950 "nur" 10^{43} verschiedene Situationen.
Eine genaue Analyse der möglichen Spiele nach n = 1, 2, 3, ... Zügen ergab: 20, 400, 5362, 71852, 809896?, 9132484?, ... Positionen. Für die Anzahl der bis dahin verschiedenen Partien ist (inkl. der schon durch Matt beendeten Partien):
20, 400, 8902, 197281, 4865609, 119060324, 3195901860, 84998978956, 2439530234167, 69352859712417, 2097651003696806, …
Für die Fragen: Wie viele Figuren einer Art können maximal auf dem 8 x 8 Feld positioniert werden, ohne dass sie sich gegenseitig schlagen können? Wie viele Figuren einer Art müssen mindestens positioniert werden, damit jedes Feld bedroht ist? ergibt sich:

Figur	max	min	Figur	max	min	Figur	max	min	Figur	max	min
Läufer	14	8	König	16	9	Pferd	32	12	Dame	8	5
Turm	8	8									

Schachregeln
Die Figuren haben eine durch die Regeln festgelegte Gangart. Daraus ergeben sich unterschiedliche Werte und Stärken der Figuren im Spiel.

König
Der König darf diagonal oder gerade nur ein Feld bewegt werden (Ausnahme ist die Rochade).
Dame
Die größte Bewegungsfreiheit hat die Dame. Sie kann beliebig weit sowohl auf den Geraden als auch auf den Diagonalen bewegt werden.
Turm
Der Turm darf nur geradlinig, d.h. entlang der Reihen oder Linien, bewegt werden.
Läufer
Der Läufer zieht nur diagonal in beliebiger Entfernung, das heißt, er kann nur Felder einer Farbe erreichen.
Springer
Die Gangart des Springers ist ein Feld in gerader, dann ein Feld in diagonaler Richtung. Das Feld, auf dem er landet, hat somit eine andere Farbe als das Ausgangsfeld. Der Springer ist die einzige Figur, die andere Figuren überspringen darf.
Bauer
Der Bauer kann nur ein Feld vorwärts bewegt werden, von der Grundstellung aus auch zwei Felder. Schlagen darf er nur ein Feld in diagonaler Richtung. Damit ist der Bauer die einzige Figur, die anders schlägt, als sie geht. Erreicht ein Bauer die achte Reihe, so darf er in eine beliebige andere Figur verwandelt werden (in der Regel wird die Dame gewählt).

En passant
Eine Besonderheit stellt das "En passant"-Schlagen statt. Befindet sich z.B. ein schwarzer Bauer auf der 4.Zeile und zieht Weiß nun einen in einer Nachbarreihe stehenden Bauern aus der Grundstellung um zwei Felder nach vorn, so wird Schwarz am Schlagen dieser Bauern gehindert. In diesem Fall darf Schwarz sofort (nur im nächsten Zug!) den weißen Bauern en passant, d.h. "im Vorübergehen", schlagen, als wäre der weiße Bauer nur ein Feld gezogen. Diese Regel ist wahrscheinlich die komplizierteste des Schachspiels.

Schlagen einer Figur
Eine gegnerische Figur wird "geschlagen", indem eine eigene Figur, auf ein vom Gegner besetztes Feld gezogen wird.

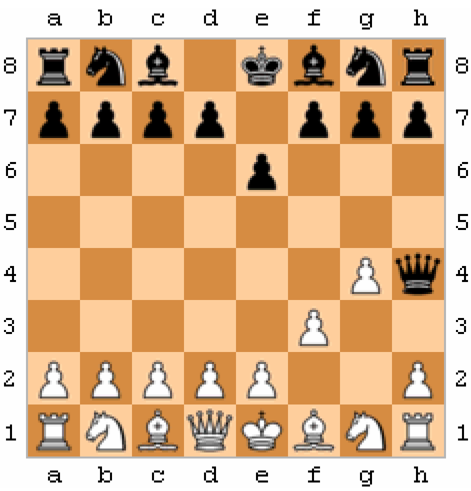
Schach
Bedroht man den König, sagt man als Warnung "Schach!", obwohl es die Regel nicht vorschreibt. Der Spieler des bedrohten Königs muss dann beim nächsten Zug

den König auf ein sicheres Feld ziehen oder
eine andere Figur als Schild dazwischenstellen oder
die bedrohende Figur schlagen.

Ist keine dieser Möglichkeiten gegeben, so gilt der König als schachmatt, und das Spiel ist verloren.

Rochade
Es gibt eine Ausnahmeregel, nach der der König mehr als ein Feld bewegt werden darf. Diesen speziellen Zug nennt man Rochade; er darf von jedem Spieler nur einmal ausgeführt werden. Hauptzweck dieses Manövers ist es, den König durch einen einzigen Zug aus der am meisten gefährdeten Brettmitte in eine Position zu bringen, die leichter zu verteidigen ist. Bei der Rochade zieht der König zwei Felder nach rechts oder nach links (schwarz), und der Turm derselben Seite wird auf das Nachbarfeld des Königs auf der anderen Seite gesetzt. Man unterscheidet zwischen kleiner und großer Rochade.
Für die Ausführung der Rochade gibt es folgende Regeln:

weder König noch Turm dürfen vorher bewegt worden sein
der König darf sich zur Zeit der Rochade nicht im Schach befinden
auf den Feldern zwischen König und Turm dürfen sich keine Figuren befinden
der König darf kein Feld passieren oder besetzen, das von einer gegnerischen Figur angegriffen wird



Mattstellungen
Als Narrenmatt (Abbildung) bezeichnet man im Schach die kürzest mögliche Zugfolge, die von der Ausgangsstellung zum Matt führt. Dies wird durch folgende Züge erreicht:

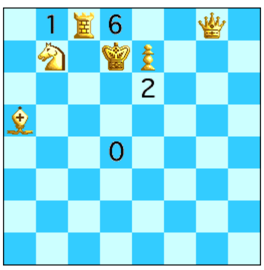
1.f2-f3 e7-e6
2.g2-g4 Dd8-h4 matt

Es gibt insgesamt acht verschiedene Zugfolgen, die zu diesem Matt führen: Weißer f-Bauer und schwarzer e-Bauer können jeweils ein oder zwei Felder ziehen, und f- und g-Bauer können die Zugreihenfolge tauschen.

Das Schäfermatt ist ein klassisches Mattmotiv in der Eröffnungsphase einer Schachpartie. Nach dem Narrenmatt gehört es zu den kürzesten Zugfolgen, durch die man durch ungeschicktes Spiel verlieren kann.
Variante, die im 4. Zug zum Matt führt:

1. e2-e4 e7-e5
2. Dd1-h5?! Sb8-c6
3. Lf1-c4 Sg8-f6??
4. Dh5xf7 matt

Der Damenzug, der ein Schäfermatt vorbereitet, ist objektiv schlecht. Erfahrene Schachspieler durchschauen die Absicht leicht und ziehen aus der Position der zu früh ins Spiel gebrachten Dame Vorteil.
Interessant ist, dass diese Mattstellung in verschiedenen Sprachen andere Namen hat: englisch "scholar's mate", französisch "coup du Berger", russisch "Schülermatt", spanisch "mate del pastor", ungarisch "susztermatt", italienisch "matto del barbiere", niederländisch "herdersmat" …



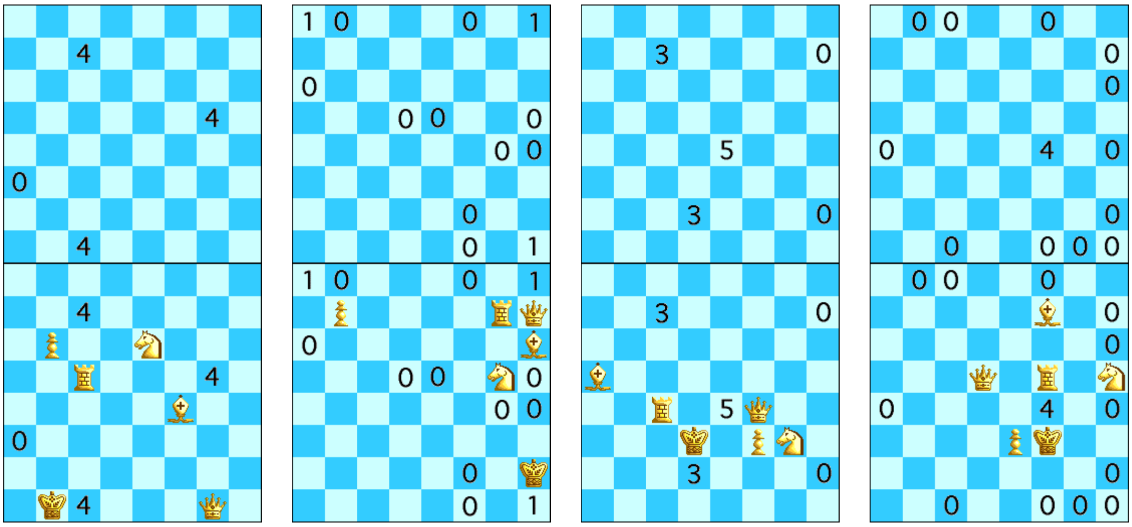
Schachpuzzle
Sechs Schachfiguren (König, Dame, Turm, Läufer, Springer und ein Bauer) befinden sich auf einem Schachbrett. Bekannt ist, wie oft bestimmte Felder von diesen Figuren angegriffen werden. Aus dieser Information ist die Position der sechs Figuren zu bestimmen. Dabei darf auf einem Feld nur eine Figur angeordnet

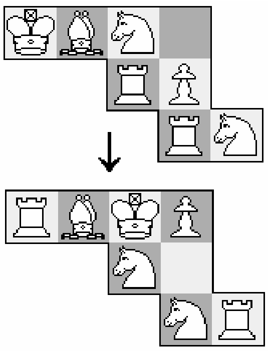
werden, auf den Zahlenfeldern nicht. Links ist ein Beispiel zu sehen.

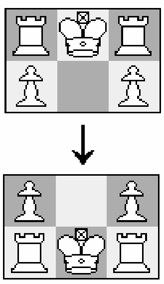
Schachpuzzle-Probleme

Aufgabe

Lösung

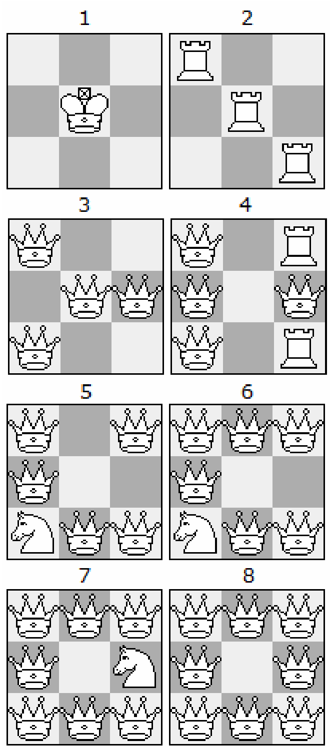






Schachpuzzle

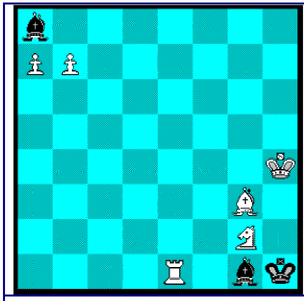
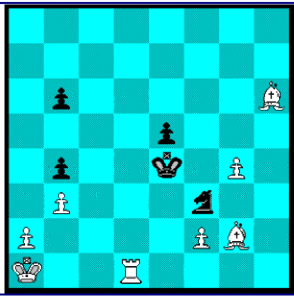
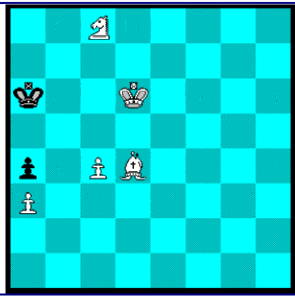
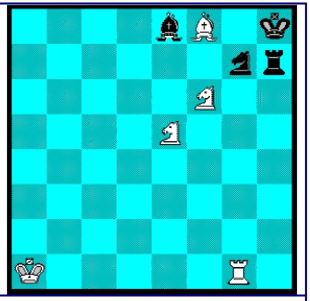
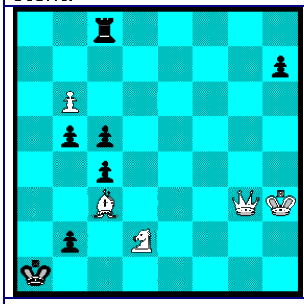
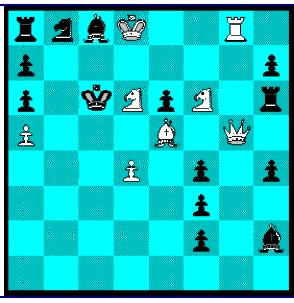
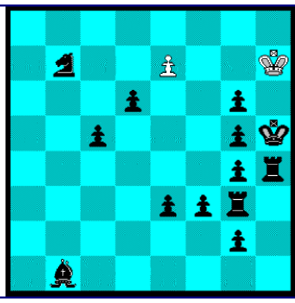
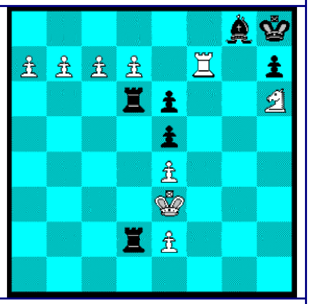
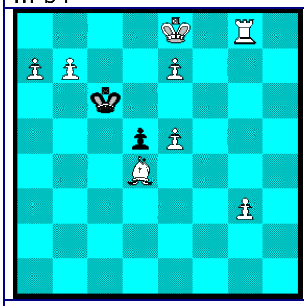
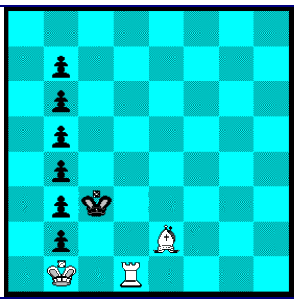
Eine weitere Art von Puzzlen am Schachbrett stellen die Umordnungsprobleme dar.
Dabei sind Ausgangssituation und Endsituation gegeben und die Schachfiguren sollen in möglichst wenig Schritten entsprechend ihrer Zugregeln umpositioniert werden. Auf der linken Seite sind zwei Beispiele angegeben.
Das obere Beispiel wurde von T.R.Dawson konstruiert und benötigt mindestens 39 Bewegungen.
Das untere Beispiel ist mit 12 Zügen eines der Schachpuzzle, welches auf einem 2×3 Brett eine größere Zugzahl besitzt. Durch Steven Taschuk wurde auf dem 2×3 Brett eine Stellung angegeben mit 18 Zügen.
Quelle: http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html



In der Schachliteratur ist das Problem der Plazierung einer Mindestzahl der Stücke, um jedes Quadrat des Schachbretts in Angriff zu nehmen, oft vertreten. (siehe Schachpuzzle)
Eine veränderte Aufgabe ist es, nach Stellungen zu fragen, bei denen jedes freie Feld des Schachbrettes genau k mal angegriffen wird.
Dabei ist die Anzahl der Schachfiguren möglichst klein zu halten.
In der Abbildung sind die bekannten Lösungen für eine 3×3 Brett zu sehen. Die Zahlen geben an, wie oft jedes Feld des Brettes angegriffen wird.
V(n,k) sei die Zahl der benötigten Schachstücken um jedes freie Quadrat eines n×n Schachbretts genau k mal anzugreifen. Joe DeVincentis zeigte:
$V(n,1) \le n$, $V(n,2) \le n$, $V(n,3) \le 2n-2$, $V(n,4) \le 2n$, $V(n,5) \le 3n-2$, $V(n,6) \le 4n-4$, $V(n,7) \le 4n-4$ und $V(n,8) \le 4n-4$
Die bekannten Lösungen für 4×4-, 5×5-, 6×6- und 7×7-Felder sind in den Animationen zu finden.

Problemschach

Ein Schachproblem besteht aus einer Ausgangssituation und der Aufgabe einen Zug (i.A. für Weiß) zu finden, der innerhalb einer vorgegebenen Anzahl von Zügen zu einem sicheren Matt für Schwarz führt. D.h., ist die Aufgabe ein „Matt in 3 Zügen" zu finden, so muss der erste weiße Zug sicher stellen, dass gleichgültig welche Maßnahmen Schwarz (entsprechend den Schach-Regeln!) ergreift, nach 3 Zügen das Matt folgt. Derartige Aufgaben zu „komponieren" erfordert strengste Logik und höchste Kreativität.

			
1. Sam Loyd – Holyoke, 1876 Weiß am Zug, Matt in 3 Zügen Lösung: 1. bxa8=P!!, Kxg2; 2. Pb6!!, …, 3. a8=D++ oder a8=L++ / Der Versuch 1. bxa8=D? oder 1. bxa8=L? ist falsch, da nun der schwarze König im Patt steht.	2. H. A. Loveday, 1845 Weiß am Zug, Matt in 3 Zügen Lösung: 1. Lc1!, b5; 2. Td2!, Kf4; 3. Td4++	3. Th. Herlin, "Le Palamede", 1845 Weiß am Zug, Matt in 4 Zügen Lösung: 1. Kc7, Ka5; 2. Lf6!, Ka6; 3. Ld8!, Ka5; 4. Kb7++	4. A. Anderssen, Leipzig, 1849 Weiß am Zug, Matt in 3 Zügen Lösung: 1. Kb1!, Lh5; 2. Tg6!, Th6; 3. Lxg7++ Wenn 2. ..., Lxg6+, 3. Sxg6++, und 2. ..., B..., 3. Sf7++
			
5. H. Turton, "The Illustrated London News", 1856 Weiß am Zug, Matt in 3 Zügen Lösung: 1. Lh8! b4; 2. Dg7! Ta8; 3. Dxb2++ ; Auf 1. Lh8! mit 2. Da3++, hilft 2. ... b4	6. F. Giegold, Baviera 1963 Weiß am Zug, Matt in 4 Zügen Lösung: 1. Dg2!! fxg2; 2. Tg3!! Lxg3; 3. Sg8! …; 4. Se7++	7. E. Giese, Neue Leipziger Zeitung, 1933, Weiß am Zug, Matt in 3 Zügen, Lösung: Das Problem gewann 1933 den 2.Preis. 1. Kg7 !! Tg3-h3; 2. e8=S!! g4-g3; 3. Sf6++	8. Unbekannter Autor Weiß am Zug, Matt in 5 Zügen Lösung: 1. d8=L! Txd8; 2. cxd8=L! Txd8; 3. b8=L! Txb8; 4. axb8=L! Lxf7; 5. Lxe5++
			
9. U. Schirdewan, 1941 Weiß am Zug, Matt in 3 Zügen Lösung: 1. b8=T! Kc7; a8=L! Kxb8; Kd7++ Die Umwandlung des b-Bauern in eine Dame führt zu einem Patt. Wandelt der a-Bauer sich in eine Dame, so 1 ... Kb5! zu keinem Matt in 3 Zügen	10. W. Weber (Die Schwalbe, 1931) Weiß am Zug, Matt in 7 Zügen Lösung: 1. Lg4 Kc4; 2. Kxb2 Kc5; 3. Kxb3 Kc6; 4. Kxb4 Kc7; 5. Kxb5 Kb8; 6. Kxb6 Ka8; 7. Td8++		

Schach960

Schach960 (engl. Chess960) ist eine von Schach-Großmeister Bobby Fischer entwickelte Schachvariante mit 960 unterschiedlichen Ausgangsstellungen.
Es ist eine Verallgemeinerung des Schachspiels durch eine fast beliebige Anordnung der bekannten Schachfiguren auf der Grundreihe jeder Partei.
Zum ersten Mal vorgestellt wurde diese Variante am 19.Juni 1996 in Buenos Aires. Die Regeln für Chess960 wurden 2009 vom Weltschachverband FIDE als Bestandteil der Schachregeln in ihr Regelwerk aufgenommen.

Regeln: Die weißen Bauern stehen auf ihren üblichen Positionen. Alle übrigen weißen Figuren stehen in der ersten Reihe.
Der weiße König steht zwischen den weißen Türmen. Ein weißer Läufer steht auf weiß, der andere auf schwarz.
Die schwarzen Figuren werden entsprechend den weißen spiegelsymmetrisch platziert.

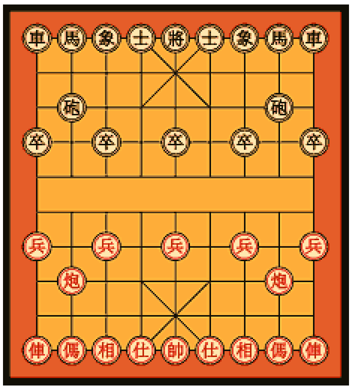
Verfahren zur Erzeugung der Anfangsstelleung

Ingo Althöfer schlug 1998 folgende Methode vor, um die Eröffnungsstellung mit einem Würfel zu erzeugen:
1) Der erste Wurf gibt das Feld für den schwarzfeldrigen Läufer von Weiß vor. Dabei werden die schwarzen Felder entsprechend der Augenzahl von links beginnend gezählt (a1, c1, e1, g1). Da die Würfe 5 und 6 keine Entsprechungen haben, werden sie wiederholt.
2) In derselben Weise wird anschließend der weiße Läufer positioniert. Hierbei entsprechen die Felder b1, d1, f1, h1 den Würfen 1, 2, 3, 4.
3) Der nächste Wurf gibt, wieder von links gezählt, die Position der Dame auf den verbliebenen freien Feldern an.
4) Die nächsten Würfe positionieren die Springer auf den verbliebenen freien Feldern. Für den ersten Springer muss bei einer 6 erneut geworfen werden, für den zweiten bei 5 und 6.
5) Zum Schluss wird ein weißer Turm auf das von links erste freie Feld gestellt, der König auf das zweite und ein Turm auf das verbliebene letzte Feld.
Mit dieser Methode lassen sich alle 960 verschiedenen Eröffnungspositionen erzeugen.

Zylinderschach

Zylinderschach ist eine Schachvariante des klassischen Schachs auf 8 x 8 Feldern, mit identischen Regeln, allerdings mit dem entscheidenden Unterschied, dass a-und h-Linie miteinander verbunden sind. Man stellt sich das Schachbrett zu einem Zylinder gerollt vor, so dass die linke und die rechte Seite zusammenstoßen. Ein Springer kann zum Beispiel von h2 nach b3 springen.

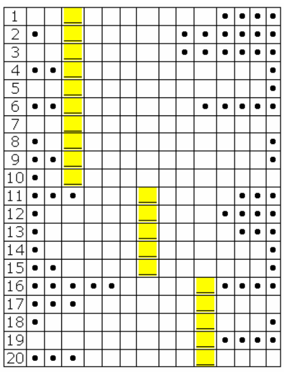
Im Vergleich zum normalen Schach sind die diagonal ziehenden Figuren Dame und Läufer aufgewertet. Sie können über die Ränder hinaus ziehen und eventuell mehrere gegnerische Punkte gleichzeitig angreifen, wie es im normalen Schach nicht möglich wäre. Der Turm verliert an Bedeutung, vor allem, da mangels Ecken auf dem Schachbrett König und Turm kein Matt mehr erzwingen können.
Für das Springerproblem gibt es in Zylinderschach eine viel größere Zahl von Lösungen, als auf dem normalen Schachbrett. Hingegen existiert für das Damenproblem keine einzige Lösung mehr.
Zylinderschach ist schon sehr alt und wurde bereits vom arabischen Historiker Ali Al-Masudi im 10.Jahrhundert beschrieben.



Chinesisches Schach, Xiangqi

Xiangqi, das chinesische Schach, ist eine seit dem 9.Jahrhundert in Asien verbreitete Form des Schachspiels.
Gespielt wird auf den Schnittpunkten eines Spielbrettes mit 10 waagrechten Reihen und 9 senkrechten Linien. Wie beim Go werden die Figuren auf die Kreuzungspunkte der Linien gesetzt.
Die Spielsteine sind runde Scheiben, die sich durch aufgedruckte chinesische Schriftzeichen unterscheiden.
Obwohl die Figuren beider Seiten sich in ihren Zügen nicht unterscheiden, werden unterschiedliche aber in der Aussprache gleiche, d.h. homophone Schriftzeichen für Rot und Schwarz verwendet. Rot beginnt das Spiel.

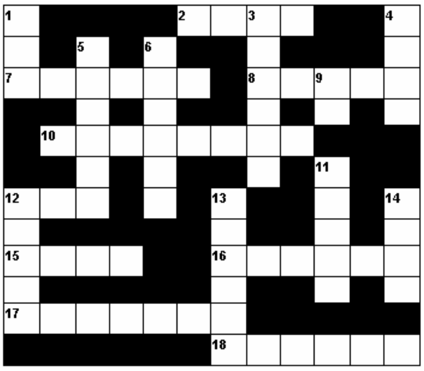
Die Spielsteine sind
Feldherr, Leibwächter, Elefanten, Pferde, Wagen, Kanonen, Soldaten
deren Bewegungsmöglichkeiten sich vom europäischen Schach unterscheiden, teilweise keine Entsprechung haben.



Mathe-Kreuzworträtsel

Aufgaben:
1. die Addition ist es, die Multiplikation ist es, das Skalarprodukt ist es, aber das Vektorprodukt nicht , 2. Latein: berühren, 3. einer der platonischen Körper, 4. Name von $A = \sqrt{s\cdot(s - a)\cdot(s - b)\cdot(s - c)}$, 5. Die 3 ist für die Zahlenfolge $(1+ 1/n)n$ eine ..., 6. die Funktion $y = x^3/2 - 3/2\, x + 1$ hat bei -1 ein ..., 7. spezielles Viereck, 8. an geschnittenen Parallelen gleichgroße Winkel, 9. Umkehroperation der Differenziation, 10. Winkel zwischen Vektoren berechnet man mit dem ..., 11. Name des berühmtesten Mathematikbuchs aller Zeiten, 12. französisch: fünfzig,

13. nichtparallele, sich schneidende Geraden im Raum sind ..., 14. ein Dreieck mit 60°-Innenwinkeln ist ..., 15. türkisch: Zahlentheorie,
16. Latein: Grenzwert, 17. Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, 18. englisch: Mittelwert,
19. bedeutender griechischer Mathematiker,
20. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos g$ ist eine Gleichung zum ...
Lösungssatz: "Mathematik macht Spass"



Mathe-Kreuzworträtsel 2

Waagerecht:
2. zweiter griechischer Buchstabe, 7. 7 und 21 sind ... von 84, 8. erster griechischer Buchstabe, 10. Körper mit 8 Flächen, 12. Kurzbezeichnung für die Multiplikation, 15. erst im Jahr 900 eingeführte Ziffer, 16. ? * ? = Produkt, 17. kürzeste Verbindung zweier Punkte, 18. halber Durchmesser
Senkrecht:
1. Senkrechte von einem Punkt zu einer Geraden, 3. Viereck mit zwei parallelen Seiten, 4. Maßeinheit des Winkels, 5. von zwei Schenkeln eingeschlossen, 6. Linie durch zwei Punkte, 9. Kreiszahl, 11. Winkel, der kleiner 90° ist, 12. Subtraktionszeichen, 13. das Dezimalsystem hat genau 10, 14. mathematischer Ausdruck

Logiktrainer

Der Logiktrainer ist eine sehr beliebte logische Denkaufgabe.
Ziel des Rätsels ist es aus vier Begriffskategorien von je fünf Begriffen diejenigen herauszufinden, die zusammen gehören. Dazu werden weitere Aussagen getroffen, in der Form, dass bestimmte Zuordnungen möglich bzw. nicht möglich sind.
In einem Schema können nun Beziehungen, die mit einem "Ja" zu beantwortet sind, mit einem "+" markiert werden, Beziehungen die nicht möglich sind mit einem "-" zu markieren.
Auf diese Weise ergeben sich im Diagramm neue (positive und negative) Informationen, die sich jeweils wiederum mit "+" oder "-" markieren lassen. Schritt für Schritt entsteht so die Lösung, und zwar absolut logisch zwingend.
Bei diesen Aufgaben ist niemals Probieren oder Raten notwendig. Ein Beispiel für einen logischen Schritt aus einem Plus wäre, dass in dem selben Kästchenblock (5x5-Felder) in der gleichen Zeile und der gleichen Spalte wie das Plus nur Minuszeichen stehen können.
Ansonsten hätte ein Begriff zwei eindeutige Zuordnungen aus einer anderen Begriffskategorie (z.B. hätte ein Vorname plötzlich zwei Nachnamen).

	Ort					Attraktion					Fotozahl				
	Altentenberg	Dunkel Moor	Hochdorf	St.Stein	Engtal	Schloss	Kunstmuseum	Burg	Bergwerk	Tierpark	8	12	14	20	24
England	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-
Deutschland	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-
Frankreich	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+
Österreich	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-
Italien	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-
8	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-					
12	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-					
14	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-					
20	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-					
24	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+					
Schloss	-	+	-	-	-										
Kunstmuseum	+	-	-	-	-										
Burg	-	-	-	-	+										
Bergwerk	-	-	-	+	-										
Tierpark	-	-	+	-	-										

Lösung

	Ort	Attraktion	Fotozahl
England	Dunkel Moor	Schloss	20
Deutschland	Altentenberg	Kunstmuseum	14
Frankreich	Hochdorf	Tierpark	24
Österreich	St.Stein	Bergwerk	8
Italien	Engtal	Burg	12

Beispiel 1: Familie Susuki sortiert nach einem anstrengenden Europaurlaub zu Hause die Fotos. In welchem Land haben Sie wo, welche Attraktion wie oft fotografiert? (© Polster)
Weder in Deutschland noch in Italien haben sie ein Bergwerk besichtigt.
Frankreich war am schönsten, was man auch an der Anzahl der Fotos sieht.
Das englische Schloss lag nicht bei St.Stein.
In Altentenberg besichtigen sie das Kunstmuseum, welches auch ausländische italienische und französische Kunst zeigte.
Erstaunlich war, wie sich in das Engtal die wunderschöne Burg einpasste. So etwas konnten Franzosen nicht bauen.
Die wenigsten Fotos gelangen im Bergwerk, das nicht in Hochdorf lag. Viele Fotos haben Sie vom Schloss, das ebenfalls nicht in Hochdorf liegt.
Auf jede Seite des Albums passen 4 Fotos. Hätten Sie in Deutschland mehr fotografiert, würde jede Albumseite vollständig gefüllt.

Beispiel 2: Haarfarbe und Mathematikzensur haben nichts miteinander zu tun. In einer Klasse sind 2 Mädchen und 3 Jungen, die Mathezensuren von 1 bis 5 haben. Wer hat welchen Nachnamen, Mathezensur und Haarfarbe? (© Polster)
Der rotblonde Schüler hat die Zensur 3. Die Person namens Seifert hat rotbraune Haare. Tom Börners Haare sind nicht blond. Herr Schwarz - er heißt nicht Patrick - erhielt in Mathematik eine 4.
Susanne und die Person mit der Mathenote 1 heißen weder Schmidt noch Börner.
Die Person mit der Zensur 2 ist weder blond noch rotbraun.
Susanne ist nicht versetzungsgefährdet, allerdings die Person mit den kupferroten Haaren.
Katja und Patrick sind in Mathematik besser als Tom.

	Nachname					Mathenote					Haarfarbe				
	Schwarz	Seifert	Lehmann	Schmidt	Börner	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	blond	rotblond	schwarz	kupferrot	rotbraun
Florian	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-
Susanne	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-
Katja	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+
Patrick	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-
Tom	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-
blond	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-					
rotblond	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-					
schwarz	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-					
kupferrot	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+					
rotbraun	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-					
Note 1	-	+	-	-	-										
Note 2	-	-	+	-	-										
Note 3	-	-	-	+	-										
Note 4	+	-	-	-	-										
Note 5	-	-	-	-	+										

Lösung

	Nachname	Mathenote	Haarfarbe
Florian	Schwarz	Note 4	blond
Susanne	Lehmann	Note 2	schwarz
Katja	Seifert	Note 1	rotbraun
Patrick	Schmidt	Note 3	rotblond
Tom	Börner	Note 5	kupferrot

Beispiel
3: In einer Mathematikleistungskontrolle sind fünf unbekannte Zahlen zu untersuchen. Welche Zahl hat welche Eigenschaften? (© Polster)
Zahl 1 ist eine negative ganze Zahl.
Die Logarithmenbasis ist weder die Zahl 3 noch ein echter Bruch.
Zahl 4 ist größer als Zahl 2 aber kleiner als Zahl 5.
Der echte Bruch ist das Reziproke des Dreifachen von Zahl 4.
Hinweis: Weitere Beziehungen sind aus den Eigenschaften der Zahlen zu finden. Zum Beispiel gibt es für komplexe Zahlen keine Ordnungsrelation.

	Eigenschaft 1					Eigenschaft 2					Eigenschaft 3				
	irrationale Zahl	natürliche Zahl	echter Bruch	negative ganze Zahl	komplexe Zahl	Lösung von $x^2+1=0$	Logarithmenbasis	gleich 1	größer als 0	Primzahl	Quadratzahl	Eulersche Zahl e	periodisch	kein Dezimalbruch	kleinste der Zahlen
Zahl 1															
Zahl 2															
Zahl 3															
Zahl 4															
Zahl 5															
Quadratzahl															
Eulersche Zahl e															
periodisch															
kein Dezimalbruch															
kleinste der Zahlen															
Lösung von $x^2+1=0$															
Logarithmenbasis															
gleich 1															
größer als 0															
Primzahl															

Lösung:

Zahl 1	negative ganze Zahl	Primzahl	kleinste der Zahlen
Zahl 2	echter Bruch	größer als 0	periodisch
Zahl 3	komplexe Zahl	Lösung von $x^2+1=0$	kein Dezimalbruch
Zahl 4	natürliche Zahl	gleich 1	Quadratzahl
Zahl 5	irrationale Zahl	Logarithmenbasis	Eulersche Zahl e