JOHANNES KEPLER

II. BUCH DER WELTHARMONIK

Kongruenz der harmonischen Figuren

Über die Kongruenz der regelmäßigen Figuren.

I. DEFINITION.

Die Kongruenz ist eine andere in der Ebene und im Raum. In der Ebene liegt Kongruenz vor, wenn die einzelnen Ecken mehrerer Figuren so in einem Punkt zusammenstoßen, daß keine Lücke übrigbleibt.

II. DEFINITION.

Die Kongruenz heißt vollkommen, wenn die zusammenstoßenden Ecken jeder Figur alle in derselben Art zusammenstoßen, so daß also die Anordnung der Ecken in jedem Punkt die gleiche ist und sich ins Unendliche fortsetzen läßt.

III. DEFINITION.

Die Kongruenz heißt vollkommenst, wenn auch die zusammenstoßenden Figuren in der Ebene von gleicher Art sind.

IV. DEFINITION.

Die Kongruenz heißt unvollkommen, wenn eine größere Figur ringsherum lauter Ecken hat, in denen andere Figuren je in gleicher Weise zusammenstoßen, eine Fortsetzung ins Unendliche aber unmöglich ist, oder wenn eine solche zwar möglich ist, aber nicht ohne daß ein Unterschied in der Anordnung zusammenstoßender Figuren auftritt. Unvollkommen minderen Grads ist die Kongruenz, wenn die größere Figur eine gleichmäßige Anordnung zusammenstoßender Figuren nicht in allen Ecken zuläßt.

V. DEFINITION.

Eine räumliche Kongruenz und eine räumliche Figur liegt vor, wenn die einzelnen Ecken mehrerer ebener Figuren eine räumliche Ecke bilden und beim Zusammenfügen von regulären und halbregulären Figuren zwischen den Figurenseiten, die zusammen im gegenüberliegenden Teil der räumlichen Figur auftreten, keine Lücke entsteht, die nicht durch eine Figur geschlossen werden könnte, die zu einer der verwendeten Arten gehört oder wenigstens regulär ist.

Man beachte, daß es noch eine andere Kongruenz gibt, bei der es sich nicht um das Zusammenfügen ebener Figuren zur Bildung einer räumlichen handelt, sondern um das Zusammenstoßen räumlicher Figuren, die den Raum um einen Punkt herum ausfüllen. Solcher körperlicher Figuren gibt es nur zwei, den Würfel und das Rhombendodekaeder. Denn 8 Würfelecken stoßen in einem Punkt zusammen und füllen den Raum ganz aus. Das Rhombendodekaeder aber besitzt zwei Arten von Ecken, 8 dreikantige stumpfe und 6 vierkantige spitze.

Der Raum wird ausgefüllt entweder durch 4 stumpfe oder 6 spitze Ecken. Ein ähnliches Gebilde bauen die Bienen auf mit aneinanderstoßenden Zellen. Hier liegen rückwärts um eine einzelne Zelle jeweils 3 andere mit abgekehrten Grundflächen, während sich an die Seiten 6 anschließen. Man könnte vorne noch 3 andere anbringen, um die Figur abzuschließen, wenn der Zugang zu der Zelle nicht offen sein müßte. Über diese Art von Kongruenz räumlicher Figuren ist in diesem Buch nicht die Rede.

VI. DEFINITION.

Vollkommenst ist die räumliche Kongruenz und räumliche Figur, wenn auch die die Kongruenz bildenden Seitenflächen lauter gleiche Figuren sind.

VII. DEFINITION.

Diese ist ganz regulär, wenn die Seitenflächen regulär sind und wenn ihre Ecken alle auf einer Kugelfläche liegen und untereinander gleichartig sind.

VIII. DEFINITION.

Oder sie ist halbregulär, wenn die Seitenflächen halbregulär sind (siehe I. Buch, 3. Def.) und sie räumliche Ecken besitzt, die sich durch die Zahl der Kanten unterscheiden und ungleichartig sind, wobei jedoch nicht mehr als zwei Arten von Ecken auftreten dürfen und diese auf höchstens zwei konzentrischen Kugelflächen angeordnet sein müssen; die Zahl der Ecken der einzelnen Art muß außerdem so groß sein wie die Zahl der Ecken einer regulären Figur.

Es steht nichts im Wege, diese räumliche Kongruenz vollkommenst zu heißen. Denn die Unvollkommenheit, die den Seitenflächen innewohnt, darf nicht der Raumgestaltung angerechnet werden, sie ist für diese unwesentlich. Es wird jedoch diese gleichfalls vollkommenst genannte Kongruenz als halbregulär bezeichnet.

IX. DEFINITION.

Vollkommen niedereren Grads ist die Kongruenz, wenn die Seitenflächen regulär sind und die Ecken alle auf ein und derselben Kugelfläche liegen und gleichartig sind, wenn jedoch die Seitenflächen verschiedenen Arten angehören, wobei die Zahl der Seitenflächen der einzelnen Art so groß sein muß wie die Zahl der Seitenflächen in einer der vollkommensten Figuren, d. h. diese Zahl darf nicht kleiner sein als 4, da dies die kleinste Zahl von Seitenflächen ist, durch die eine räumliche Figur begrenzt wird.

X. DEFINITION.

Unvollkommen ist die Kongruenz oder Figur, wenn unter Beibehaltung der übrigen Forderungen an eine Kongruenz eine größere Figur nicht öfter als ein- oder zweimal auftritt.

Im ersteren Fall wird die Figur einem Teil ähnlicher als dem Ganzen, im letzteren einer ebenen Figur ähnlicher als einer räumlichen, da jede räumliche Figur von mindestens 4 Flächenstücken begrenzt wird. Man vergleiche auf der gestochenen Tafel die Figuren *A*, *B*, wo die größere Figur ein Siebeneck ist. Diese beiden Klassen laufen mit der Zahl der Seiten der größeren Figur ins Unendliche aus, angefangen mit dem Dreieck, das in Klasse A eine der vollkommensten regulären Kongruenzen liefert, über das Viereck, mit dem wir in Klasse B wiederum eine der vollkommensten regulären Figuren erhalten. Alle † übrigen Figuren sind unvollkommen.

XI. DEFINITION.

Halbräumlich ist eine Kongruenz, die nicht alle Merkmale der V. Definition trägt, so wenn beim Zusammenfügen der ebenen Figuren die Kongruenz nicht völlig in sich selber zurückkehrt, sondern eine Lücke übrigbleibt; im übrigen wahre man die Vorschriften der Definitionen VI und VII.

XII. DEFINITION.

Ebene Figuren sind kongruent, wenn sie entweder eine räumliche Figur einschließen oder die Ebene lückenlos ausfüllen und selbst reguläre oder halbreguläre Figuren sind.

XIII. DEFINITION.

Inkongruent heißen ebene reguläre, einem Kreis einbeschriebene Figuren (sie sind ja einbeschreibbar), wenn sie, selber aus sich oder in Verbindung mit anderen Figuren ihrer oder einer anderen Klasse, nur eine unvollkommene, einer Kugelfläche einbeschreibbare räumliche Figur bilden, und wenn sie, selber für sich genommen oder in Verbindung mit den Sternen ihrer Klasse oder mit Figuren und Sternen einer anderen Klasse ringsherum, die Ebene nicht überdecken.

Man beachte, daß hiebei das Siebeneck und derartige Vielecke ausgeschlossen werden, trotzdem zwei parallele Siebenecke zusammen mit 7 Quadraten oder 14 regulären Dreiecken eine räumliche Figur vollkommen einschließen; denn es treten hiebei nur 2 Siebenecke auf, und die Figur wird scheibenförmig und einer ebenen ähnlich, keineswegs aber kugelförmig. Man vergleiche in der Tafel die Figuren *A* und *B*. Ebenso wird das Fünfzehneck ausgeschlossen, trotzdem es zusammen mit verwandten Figuren an einer Anzahl von Ecken den Raum in der Ebene ausfüllt; denn dies ist nicht der Fall ringsherum an allen Ecken.

XIV. SATZ.

Ebener Ecken müssen es jeweils wenigstens 3 sein, um in der Ebene eine Kongruenz zu bilden.

Denn um jeden Punkt herum ist die Summe der Winkel 4 Rechte. Nun ist aber in keiner Figur der Winkel gleich 2 Rechten; daher ist die Summe zweier noch so großer Vieleckswinkel kleiner als 4 Rechte. Also füllen zwei die Ebene nicht aus, nach Def. I.

XV. SATZ.

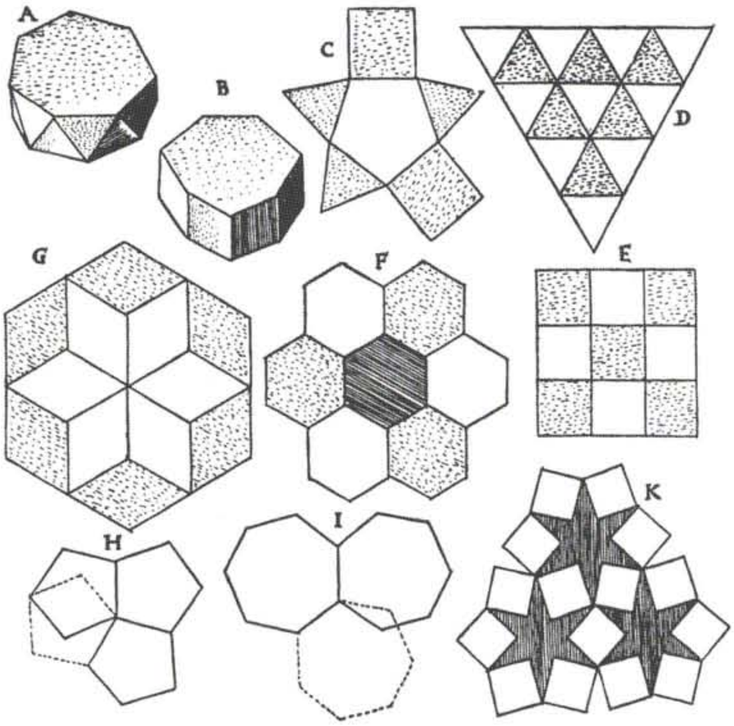
Ebener Ecken müssen es jeweils wenigstens drei sein, um sich zur Bildung einer räumlichen Ecke zusammenzufügen oder zu erheben.

Denn zwei solcher ebener Ecken würden nicht bloß mit den Seiten, sondern mit ihren ganzen Flächen zusammenfallen und also nichts Räumliches umschließen. Das ist aber gegen die Definition der räumlichen Ecke bei Euklid.

XVI. SATZ.

Die Summe der Winkel, die in der Ebene eine Kongruenz bilden, ist immer 4 Rechte, niemals größer; im Raum ist sie kleiner als 4 Rechte.

Denn in der Ebene liegen um einen Punkt herum nicht mehr als 4 Rechte. Wenn also die Summe gleich 4 Rechten ist, dann ist keine Lücke vorhanden, und es besteht nach Definition I eine Kongruenz in der Ebene. Wenn die Ecken die Ebene überdecken, erheben sie sich nicht zu einem räumlichen Gebilde. Und umgekehrt, wenn die Ecken, die zusammengefügt werden, in der Ebene eine Lücke übriglassen, d. h. wenn es weniger als 4 Rechte sind, muß sich die Ecke erheben und räumlich werden, indem man die beiden Seiten längs der Lücke zusammenbringt und diese damit schließt. In der Figur *H* der gestochenen Tafel sind 3 Fünfecke abgebildet, die in einer Ebene ausgebreitet sind und eine Lücke bilden.



XVII. SATZ.

Eine Figur mit ungerader Seitenzahl, an deren Seiten Figuren von zwei Arten angefügt werden, läßt nicht in allen Ecken gleiche Kongruenzen zu, weder in der Ebene noch im Raum.

Denn trifft es in einer einzelnen Ecke zu, daß beiderseits Figuren von gleicher Art stehen, so ist das in den anderen Ecken nicht der Fall. Man vergleiche dazu die Figur *C* der gestochenen Tafel.

XVIII. SATZ.

Der ebene Raum läßt sich aufs vollkommenste nur auf dreierlei Weise mit ein und derselben ebenen Figur ausfüllen: mit jeweils 6 Dreiecken, 4 Vierecken oder 3 Sechsecken.

Denn nach Buch I Satz XXXIII ist der Winkel des Dreiecks $^{2}/_{3}$ Rechte; also sind die 6 Winkel von je 6 Dreiecken zusammen $^{12}/_{3}$ oder 4 Ganze. Siehe Figur *D*.

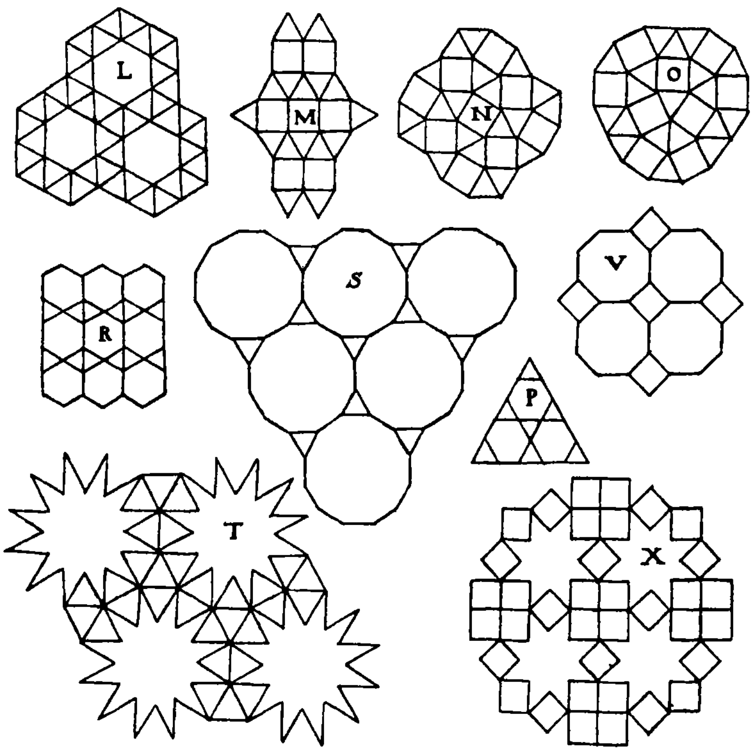
Ebenso ist der Vierreckswinkel 1 Rechter; die 4 Winkel von je 4 Vierecken bilden also zusammen 4 Rechte; siehe Figur *E*. Ferner ist der Sechseckswinkel $^{8}/_{6}$ Rechte; also bilden die 3 Winkel von je 3 solcher Figuren $^{24}/_{6}$ oder 4 Rechte; siehe Figur *F*. Der Fünfeckswinkel jedoch ist kleiner als der Sechseckswinkel; daher sind 3 kleiner als 4 Rechte, sie lassen also eine Lücke. Andererseits ist der Fünfeckswinkel größer als der Vierreckswinkel; daher sind 4 Fünfeckswinkel größer als 4 Rechte, sie haben also um einen Punkt herum in der Ebene keinen Platz, nach Satz XVI. Siehe dazu Figur *H*, wo das vierte Fünfeck punktiert gezeichnet ist. In gleicher Weise ist der Winkel im Siebeneck und in allen größeren Figuren größer als der im Sechseck; also sind 3 Siebeneckswinkel zusammen größer als 4 Rechte. Siehe Figur *J*, wo Teile von zwei Siebenecken denselben Raum in der Ebene bedecken.

Hier sind auch die Rhomben zu erwähnen, die je aus zwei regulären Dreiecken bestehen. Sie bilden eine vollkommenste Kongruenz wie die regulären Sechsecke, obwohl sie halbreguläre Figuren sind. Siehe diese Kongruenz in Figur *G* der gestochenen Tafel.

Hierher gehören ferner die sechseckigen Sterne, die man erhält, wenn man 6 Zacken aus dem zwölfeckigen wegnimmt; siehe Figur *K*. An die Stelle einer weggenommenen Zacke kommt je ein leerer Winkel gleich einem Rechten. Daher füllen 3 Vierecke und 3 solche Sternzacken den Raum aus. Denn das Sechseck kann zerlegt werden in einen solchen Stern und 6 halbe Vierecke.

XIX. SATZ.

Mit den Flächen zweier verschiedener Figuren läßt sich der ebene Raum auf sechserlei Art ausfüllen: zweimal mit 5 Ecken, einmal mit 4, dreimal mit 3.



Sechs Flächen können nicht zusammenstoßen, so daß der Winkel in einer von ihnen größer ist als der Dreieckswinkel. Denn im Dreieck, dem ersten der Vielecke, beträgt der Winkel $^2/_3$ Rechte; sechsmalgenommen macht das $^{12}/_3$ oder 4 Rechte. Wäre also einer von den 6 Winkeln größer, nämlich als Winkel in einer Figur von mehr Seiten, so kämen mehr als 4 Rechte heraus. Es würde also die Ebene nicht überdeckt, nach Satz XVI.

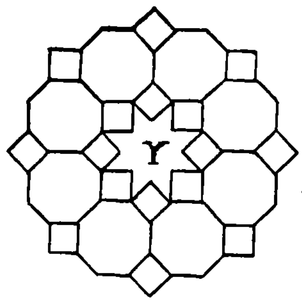
1. Fünf Flächen bilden eine Kongruenz, wenn man zu 4 Dreieckswinkeln einen Winkel nimmt, der gleich 2 Dreieckswinkeln ist. Dieser Art ist der Sechseckswinkel. Siehe Figur *L*.

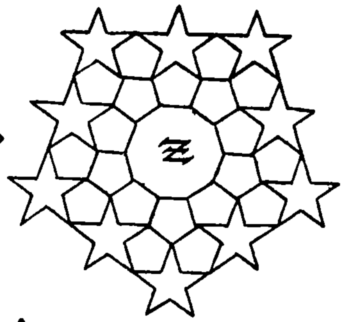
2. Oder wenn man zu 3 Dreieckswinkeln 2 Viereckswinkel hinzufügt. Diese 2 machen ja 3 Dreieckswinkel aus. Siehe die Figuren *M* und *N*, wo die † Fortsetzung gleichförmig ist, und schließlich Figur *O*, wo sie ungleichförmig ist. Nähme man jedoch 2 Dreiecke und 3 Vierecke, so würden mehr als 4 Rechte herauskommen; noch mehr, wenn man zu 2 Dreieckswinkeln noch größere Winkel hinzunähme.

3. Vier Ecken von zweierlei Art bilden eine Kongruenz, wenn man zu 2 Dreieckswinkeln 2 Sechseckswinkel hinzunimmt. Siehe Figuren *P* und *R*. Wenn man aber sonst auf irgendeine Weise 4 Ecken verbindet, so kommt immer mehr oder weniger als 4 Rechte heraus und der ebene Raum wird nicht überdeckt.

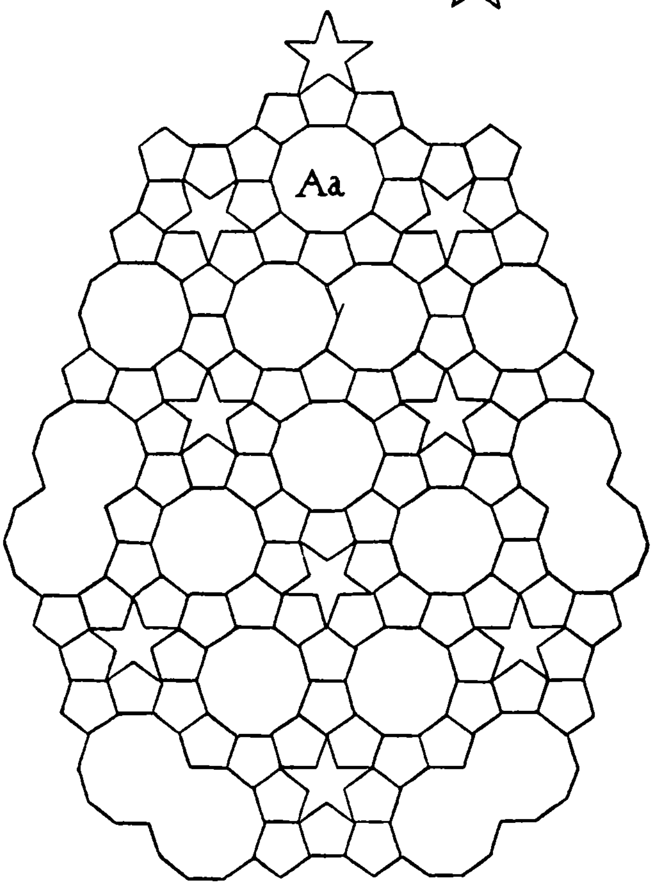
Nehmen wir nun 3 Ecken zusammen, wohl darauf bedacht, daß es nicht mehr als 2 Arten sind, so scheiden fürs erste aus 2 Dreiecke und 2 Vierecke, da sie zusammen nicht mehr als 2 Rechte bilden und für die dritte Ecke einen Betrag übriglassen würden, den keine erreichen kann.

4. Nimmt man aber unter den dreien einen einzigen Dreieckswinkel an, so bilden mit ihm 2 Zwölfeckswinkel eine Kongruenz, die sich fortsetzen läßt. Auch mischen sich keine anderen Kongruenzen darunter. Die Form dieser Flächenbedeckung siehe unter *S*. Hier ist auch zu erwähnen der zwölfzackige Stern, der so gebildet ist, daß der Winkel zwischen 2 Zacken gleich dem Dreieckswinkel ist. Daher ist das Zwölfeck teilbar in einen Stern und 12 Dreiecke. Es bilden daher 5 Dreieckswinkel und 2 Sternzacken eine Kongruenz. Die Form ist fortsetzbar; siehe Figur *T*.





5. Nimmt man unter dreien ein Viereck an, so bilden mit diesem 2 Achtecke eine Kongruenz; auch diese Form ist fortsetzbar. Siehe Figur *V*. Hier ist einzureihen der achtzackige Stern, der so gebildet ist, daß der Winkel zwischen 2 Zacken gleich dem Viereckswinkel ist. Daher ist das Achteck teilbar in den Stern und 8 Vierecksdreiecke, von denen 2 ein Viereck ausmachen. So füllen 3 Viereckswinkel und 2 Zacken zweier Sterne den Raum aus. Die Form ist gemischt in Figur *X* und ebenfalls, aber in anderer Weise gemischt, in Figur *Y*.



6. Läßt man nun beim Zusammenfügen dreier Ecken das Dreieck und Viereck beiseite und geht zum Fünfeck über, so ist zu sagen, daß von diesem 2 genommen werden können, da die Winkel zusammen 2 Rechte überschreiten. In den übrigbleibenden Raum paßt der Zehneckswinkel hinein. So wird das Zehneck durch 10 Fünfecke gekrönt. Allein diese Form läßt sich nicht rein fortsetzen. Siehe den Innenteil von Figur *Z*. Hier ist einzureihen der fünfzackige Stern, da 3 Fünfecke und eine Sternzacke eine Kongruenz bilden. Denn in den Winkel zwischen zwei Sternzacken paßt gerade eine Ecke des Fünfecks hinein und die Lücke, die 3 Fünfeckswinkel übriglassen, faßt gerade eine Sternzacke. Man vergleiche den äußeren Teil der

Figur *Z*. Jedoch gelingt auf diese Weise eine Fortsetzung ins Unendliche nicht. Das Reich dieser Sekte ist ungesellig; sie zieht eine kleine Anzahl der Ihrigen zusammen und verschanzt sich dann sofort. Eine andere Verbindung dieser beiden Formen zeigt die Figur *Aa*. Will man diese überallhin fortsetzen, so muß man gewisse Ungetüme heranziehen, nämlich die Verbindung zweier Zehnecke, von denen je zwei Seiten weggenommen sind. Bei der unendlichen Fortsetzung behält das Gefüge seine fünfeckige Gliederung. Auf dem ersten, innersten Fünfeckskranz sitzen fünf Zehnecke, ohne Ungetüm dazwischen. Auf dem zweiten weiteren Kranz sitzt auf jeder Fünfeckseite allemal zwischen zwei Zehnecken ein Paar gekoppelter Zehnecke. Auf dem dritten Kranz sitzen in den Ecken Paare gekoppelter Zehnecke, und zwischen zwei solchen Paaren liegt je ein einfaches Zehneck. Auf dem vierten Kranz sitzen in den Ecken wieder einfache Zehnecke, und zwischen je zwei dieser Zehnecke sitzen auf den Seiten je zwei Zehnecke in gleichen Abständen voneinander. Auf dem fünften Kranz sitzen in den Ecken Sterne mit ihren äußersten Zacken; auf den Seiten sitzen je zwei einfache Zehnecke und zwischen diesen zwei Zehneckskoppeln. So trägt fortlaufend jede Fünfecksform etwas Neues an sich. Die Struktur ist höchst mühsam und kunstreich, wie aus Figur *Aa* zu ersehen ist.

Hier ist ferner der zehnzackige Stern einzureihen, der zwischen zwei Zacken den Fünfeckswinkel faßt. Andererseits bilden auch je zwei solcher $^3/_{10}$-Zacken und zwei Fünfeckswinkel eine Kongruenz und füllen den Raum aus. Diese Form gebraucht ungleich große Fünfecke; wenn sie auch fortsetzbar ist, so nimmt sie
† dabei offene, unvollständige Zehnecksterne zu Hilfe. Siehe Figur *Bb*.

Ein einzelnes Fünfeck kann bei der Verbindung von 3 Flächen keine Verwendung finden. Denn sein Winkel beträgt $^6/_5$ Rechte, nach Buch I Satz 33. Es bliebe also für die 2 anderen Winkel $^{14}/_5$, für jeden einzelnen $^7/_5$ übrig. Ein solcher Winkel tritt in keiner Figur auf. Es können auch nicht 2 Sechsecke genommen werden. Denn der Rest ist wieder ein Sechseckswinkel; es entstünde eine Figur, wie sie bereits oben aufgeführt ist. Hier aber suchen wir Strukturen auf, die aus 2 Arten von Figuren, nicht aus einer einzigen gebildet werden. Wollte man Figuren mit mehr Seiten annehmen, deren Winkel größer ist als ein Sechseckswinkel, so bliebe, wenn man 2 Winkel von 4 Rechten abzieht, für den dritten weniger als ein Sechseckswinkel übrig. Zieht man aber nur einen Winkel von 4 Rechten ab, so bleibt für die zwei anderen weniger als 2 Sechseckswinkel übrig. Von den Figuren aber, die weniger und kleinere Winkel haben als das Sechseck, haben wir bereits vorhin vollständig untersucht, welche und wie viele möglich sind, wenn drei die Ebene überdecken.

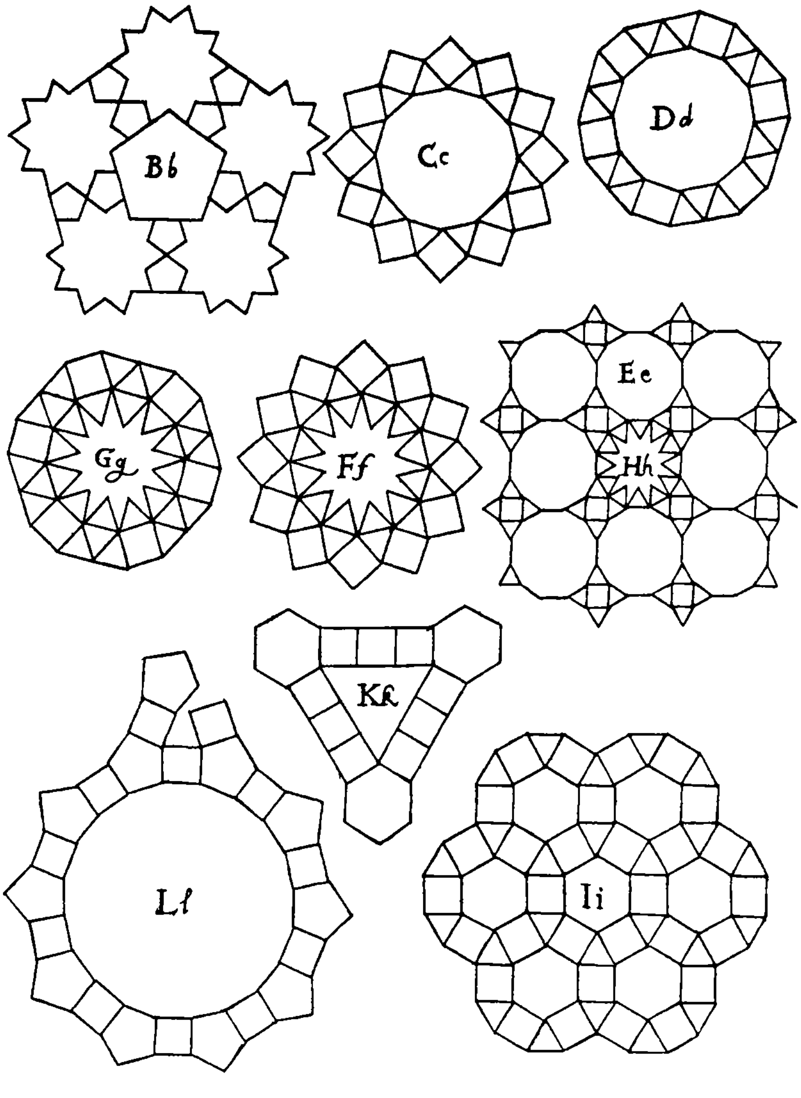
XX. SATZ.

Aus ebenen Ecken d r e i e r Arten wird der ebene Raum auf viererlei Weise ausgefüllt.

Hier sind 3 oder mehr Dreiecke unzulässig. Denn 3 Dreieckswinkel machen zusammen 2 Rechte aus. Der Rest ist also kleiner als die Summe der Winkel der nächst niederen Vielecke, des Vierecks und des Fünfecks. Deswegen darf man auch nicht zu 2 Dreieckswinkeln 2 Vierecks- oder noch größere Winkel hinzufügen, da sonst nicht genügend Raum für den Winkel einer dritten Figurenart bliebe.

1. Man nehme also 2 Dreiecke und ein Viereck und füge ein Zwölfeck hinzu. Die Form ist nicht fortsetzbar. Siehe die 3 Figuren *Cc*, *Dd*, *Ee*, die alle zu diesem

ersten Fall gehören. Hierher gehört auch der zwölfzackige Stern, wie oben. Denn 4 Dreiecke, 1 Viereck und eine Sternzacke erfüllen den Raum. Siehe die Figuren *Ff*, *Gg*, *Hh*. Wenn man zu 2 Dreiecken ein Fünfeck fügt, so ist der Rest inkongruent, nämlich $^{22}/_{15}$; es gibt keinen Vieleckswinkel gleich $^{11}/_{15}$ Rechten. Fügt man zu 2 Dreieckswinkeln einen Sechseckswinkel, so ist der Rest wieder ein Sechseckswinkel und die Form ist eine der früheren. Es gibt also keine weiteren Formen mit 2 Dreiecken. Nimmt man nun ein einziges Dreieck, so darf man nicht 3 Vierecke hinzufügen. Es käme zuviel heraus und es würde zuwenig Raum für den Winkel einer dritten Art übrigbleiben.



2. Man füge zu einem einzigen Dreieck zwei Vierecke. Die Ergänzung zu 4 Rechten ist gerade ein Sechseckswinkel. Die Form, die sich ergibt, ist doppelt, in Figur *Ii* fortsetzbar, in Figur *Kk* nicht fortsetzbar ohne Beimischung. Dies ist der zweite Fall.

Ein Dreieck und 2 Fünfecke lassen sich nicht zusammenfügen; denn es bleibt eine Lücke von $^{14}/_{15}$ Rechten, und ein solcher Winkel kommt in den regulären Figuren nicht vor. Auch ist die Verbindung von einem Dreieck mit einem Fünfeck unmöglich. Denn es bleiben hier $^{32}/_{15}$ Rechte übrig; keine reguläre Figur aber besitzt einen Winkel von $^{16}/_{15}$ Rechten. Ferner ist unmöglich die Verbindung mit einem Sechseck; denn hier ergeben sich 2 Rechte. Ein einzelner Winkel kann aber nicht so groß werden, und die Hälfte führt auf den Viereckswinkel, von dem bereits die Rede war. Weiter ist die Verbindung mit dem Siebeneck, dem Achteck und dem Neuneck ausgeschlossen. Es blieben für den Winkel der dritten Figurenart $^{40}/_{21}$, $^{11}/_{6}$ oder $^{16}/_{9}$ übrig; diese Winkel treten aber in keiner regulären Figur auf. Verbindet man nun ein Dreieck mit einem Zehneck, so bleibt eine Lücke von $^{26}/_{15}$ Rechten; dies ist der Fünfzehneckswinkel. Das ist zwar eine Kongruenz, aber eine, die im Anfang steckenbleibt. Denn das Fünf-

II. Buch. zehneck besitzt eine ungerade Seitenzahl. Daher mischen sich nach Satz XVII in den einzelnen Ecken dieser Figur Kongruenzen verschiedener Art. Das Zehneck hat zwar eine gerade Seitenzahl, und man könnte es daher abwechselnd mit einem Dreieck und einem Fünfzehneck einschließen. Allein hier zeigt es sich sogleich, daß zwei solche Fünfzehnecke übereinandergreifen und sich behindern. Weiter läßt sich das Dreieck nicht mit einem Elfeck verbinden. Es bleiben $^{56}/_{33}$ Rechte übrig, und ein solcher Winkel tritt in keiner regulären Figur auf. Schließlich bleibt bei der Verbindung von Dreieck und Zwölfeck eine Zwölfeckslücke übrig. Von dieser Form war bereits früher die Rede. Wollte man ein Dreieck mit einer noch größeren Figur verbinden, so käme eine kleinere Lücke heraus; die Fälle mit kleineren Figuren sind aber bereits behandelt worden. Damit ist das Dreieck erledigt, soweit es in einer Gruppe von 3 Arten auftreten kann.

Nimmt man von den Viereckswinkeln mehr als einen und zieht sie von 4 Rechten ab, so bleibt nicht genug Raum für die 2 Winkel zweier weiterer Arten, da diese zusammen mehr als 2 Rechte ausmachen.

3. Vereinigt man einen Viereckswinkel mit einem Fünfeckswinkel, so bleibt eine Lücke für einen Zwanzigeckswinkel. Es läßt sich also das Zwanzigeck in allen Ecken mit den beiden anderen Figuren vereinigen, und es entsteht eine echte Kongruenz. Allein diese Anordnung läßt sich nach außen hin nicht fortsetzen. Es liegt also eine unvollkommene Kongruenz vor. Siehe Figur *Ll*. Dies ist der dritte Fall.

4. Die Verbindung eines Viereckswinkels mit einem Sechseckswinkel läßt eine Lücke übrig für einen Zwölfeckswinkel. Siehe Figur *Mm* (S. 74). Das ist der vierte und letzte Fall.

Hier ist einzureihen der Zwölfecksstern, den 12 Dreiecke ausfüllen. Es stoßen hier so 4 Winkel zusammen, um den Raum auszufüllen, 2 Dreiecks-, 1 Vierecks-, 1 Sechseckswinkel und eine Sternzacke. Siehe Figur *Nn* (S. 74).

Fügt man zu einem Viereckswinkel einen Siebeneckswinkel, so bleibt eine Lücke von $^{11}/_{7}$ Rechten; dieser Winkel tritt in keiner regulären Figur auf. Fügt man einen Achteckswinkel hinzu, so bleibt eine Achteckslücke übrig; dieser Fall ist bereits oben behandelt. Damit ist man mit dem Viereck fertig.

Der Fünfeckswinkel läßt mit dem Sechseckswinkel eine Lücke von $^{22}/_{15}$ Rechten übrig, mit dem Siebeneckswinkel eine solche von $^{48}/_{35}$, mit dem Achteckswinkel eine solche von $^{13}/_{10}$ Rechten. Diese Winkel kommen in regulären Figuren nicht vor. Im letzteren Fall ist die Lücke bereits kleiner als der Achteckswinkel, der $^{15}/_{10}$ Rechte beträgt. Die Fälle mit den kleineren Figuren haben wir aber schon erledigt. Wir sind also mit dem Fünfeck fertig.

Der Sechseckswinkel füllt dreimal genommen den ebenen Raum aus. Er läßt daher eine Verbindung mit 2 größeren Winkeln nicht zu. Damit ist man mit der Mischung dreier Figuren fertig.

XXI. SATZ.

Ebene Figuren von vier oder mehr Arten können mit ihren Winkeln keine Kongruenz bilden.

Denn die 4 kleinsten Winkel sind die des Dreiecks, Vierecks, Fünfecks und Sechsecks. Die Summe vom ersten und letzten dieser Winkel beträgt 2 Rechte, der zweite ist ein Rechter und der dritte um $^{1}/_{5}$ größer als ein Rechter. Die Gesamtsumme ist daher größer als 4 Rechte; es ist also nach Satz XVI eine Kongruenz nicht möglich. Noch viel mehr übersteigt die Summe von größeren Winkeln 4 Rechte.

XXII. AXIOM.

Sind zwei Flächen nicht größer als eine dritte, so bilden sie mit dieser † keine räumliche Ecke.

XXIII. SATZ.

Zwei ebene Ecken einer Figur mit ungerader Seitenzahl können in Verbindung mit einer Ecke anderer Art keine reguläre räumliche Figur bilden.

Denn nach Satz XVII werden die räumlichen Ecken ungleichförmig, entgegen den Definitionen V bis X.

XXIV. SATZ.

Drei ebene Ecken dreier Figuren verschiedener Art, von denen eine von ungerader Seitenzahl ist, bilden zusammen keine vollkommene räumliche Figur.

Denn wiederum werden nach Satz XVII die räumlichen Ecken verschiedenförmig, was den Definitionen widerspricht.

XXV. SATZ.

Vollkommenste und reguläre Kongruenzen von ebenen Figuren zur Bildung einer räumlichen Figur gibt es fünf.

Das ist ein Scholion zum letzten Satz des letzten Buches von Euklid. Denn nach Satz XV unseres Buches machen wir den Anfang mit 3 ebenen Ecken und nach Satz XVI den Schluß mit 6 Dreieckswinkeln, 4 Viereckswinkeln und 3 Sechseckswinkeln, weil diese nach Satz XVIII ja gleich 4 Rechten sind.

Drei Dreiecke, die mit ihren Ecken zusammenstoßen, machen weniger als 4 Rechte, nämlich 2 Rechte aus. Fügt man nun die 3 Dreiecke zusammen, so wird die Öffnung ausgefüllt durch ein viertes Dreieck. So entsteht das Tetraeder oder die Pyramide.

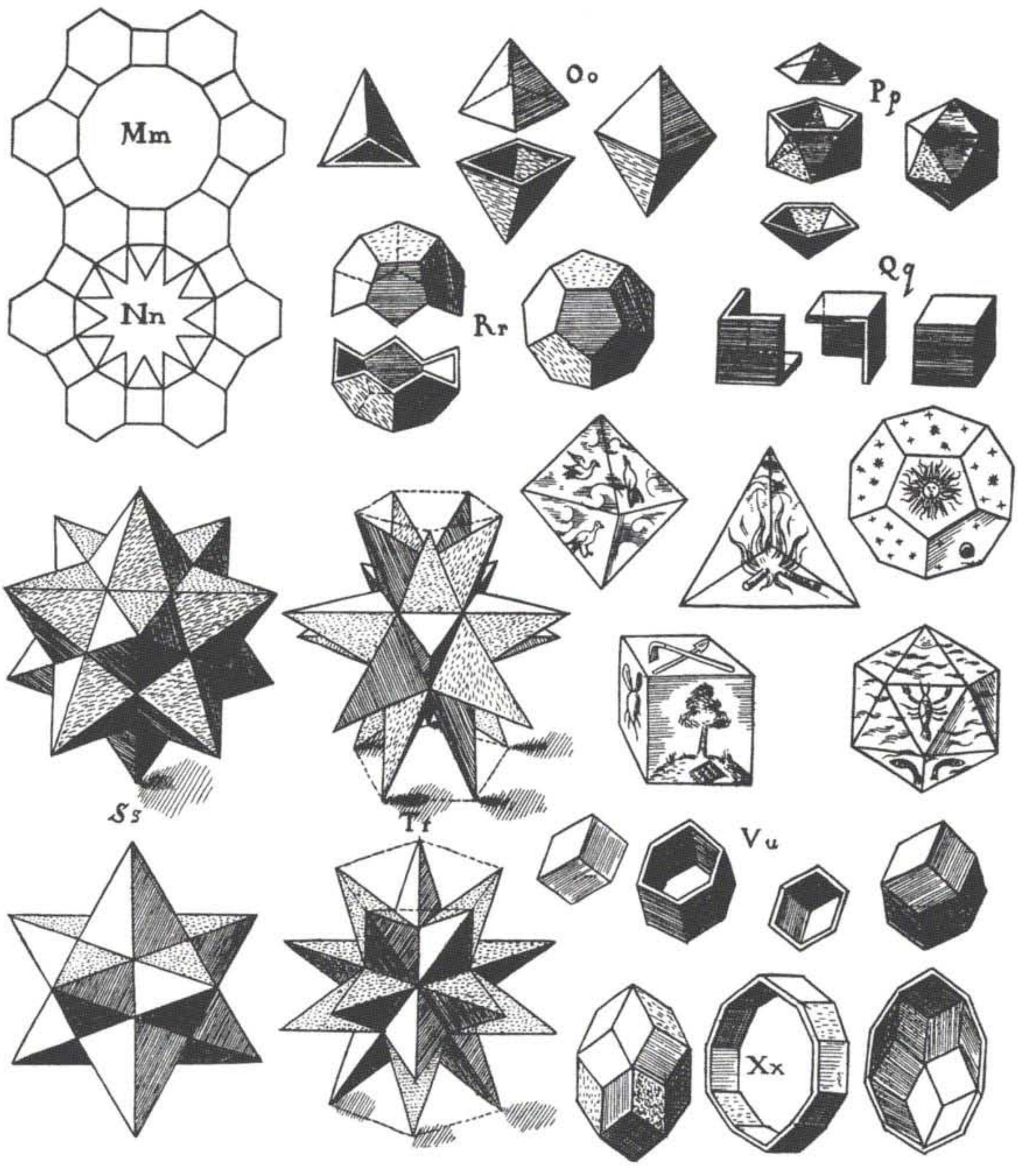
Vier Dreiecke, die mit ihren Ecken zusammenstoßen, machen $^8/_3$ Rechte aus. Das ist weniger als $^{12}/_3$ oder 4 Rechte. Fügt man die Seiten der Dreiecke zusammen, so entsteht eine Pyramide mit offener quadratischer Basis. Legt man von der anderen Seite her eine gleiche Pyramide mit derselben offenen Basis an, so schließt sich die Figur völlig. So entsteht das Oktaeder. (Fig. *Oo*).

Fünf Dreiecke, die mit ihren Ecken zusammenstoßen, machen $^{10}/_3$ Rechte aus, also weniger als $^{12}/_3$. Fügt man nun 10 Seiten in einer gemeinsamen Ecke zusammen, so entsteht eine Pyramide mit fünfseitiger Basis. Damit die Ecken an der Basis ebenfalls fünfflächig werden, müssen je in den beiden ebenen Ecken, die in einer Ecke der Basis zusammenlaufen, 3 weitere ebene Ecken anstoßen; zu jenen 10 kommen also 15 weitere hinzu; ebensoviele ebene Ecken erstrecken sich nach der anderen Seite. Diese 30 ebenen Ecken machen zusammen 10 Dreiecke aus, aus denen in der Mitte eine Zone entsteht, die unten die gleiche fünfseitige Öffnung besitzt wie oben. Legt man an diese eine weitere fünfseitige Pyramide an, so wird die Figur völlig geschlossen. So entsteht das Ikosaeder. (Fig. *Pp*).

Nun ist man mit reinen Dreiecken fertig.

Drei Viereckswinkel betragen zusammen 3 Rechte, also weniger als 4 Rechte. Sie sind daher geeignet, eine räumliche Ecke zu bilden. Fügt man die Vierecke zusammen, so entstehen 3 rechtwinklige Lücken, während andererseits 3 Ecken jener 3 Seitenflächen vorspringen. Fügt man nun 3 weitere Vierecke mit ihren Ecken zu einer räumlichen Ecke zusammen, so füllen gerade die vor-

II. Buch. springenden Ecken, die hier entstehen, die früheren Lücken aus, während umgekehrt in die neuen Lücken die früheren vorspringenden Ecken passen. So entsteht das Hexaeder oder der Würfel. (Fig. *Qq*).



Vier Viereckswinkel betragen zusammen 4 Rechte; sie können daher nach Satz XVI keine räumliche Ecke bilden. Man ist also mit reinen Vierecken fertig.

Drei Fünfeckswinkel betragen $^{18}/_{5}$ Rechte, also weniger als $^{20}/_{5}$ oder 4 Rechte. Sie sind daher geeignet eine räumliche Ecke zu bilden. Wenn man nun dementsprechend ein Fünfeck als Grundfläche mit 5 weiteren Fünfecken umgibt, so entsteht eine Figur, die oben 5 Fünfeckslücken und 5 vorspringende Fünfecksecken besitzt. Bildet man gegenüber eine zweite solche Figur, so passen gerade je die 5 vorspringenden Ecken der einen Figur in die 5 Lücken der anderen. So entsteht das Dodekaeder. (Fig. *Rr*).

Damit ist man fertig mit reinen Fünfecken und zugleich mit allen Figuren gleicher Art, die zusammengefügt werden sollen. Denn 3 Sechseckswinkel erheben sich nicht zu einem räumlichen Gebilde.

Das sind jene fünf Körper, die die Pythagoreer, Plato und Proklus, der Kommentator Euklids, die Weltfiguren zu nennen pflegten. In welcher Weise † diese Figuren auf die Weltkörper bezogen wurden, ist, wie ich in der Vorrede zum ersten Buch gesagt habe, ungewiß. Nach Aristoteles ist es allgemeine Überzeugung, jene Philosophen hätten sich entsprechend der Fünfzahl dieser Figuren nach fünf einfachen Weltkörpern umgeschaut, nämlich nach den vier Elementen Feuer, Luft, Wasser, Erde und der sogenannten Quintessenz oder Himmelsmaterie, indem sie die Eigenschaften der Figuren mit den Eigentümlichkeiten jener einfachen Körper in Zusammenhang brachten. So deutet in gewisser Weise der aufrechte Stand des Würfels auf seiner quadratischen Basis Festigkeit an, eine Eigenschaft, die auch der Erdmaterie zukommt. Diese strebt mit dem Gewicht der Schwere nach unterst, wie ja auch die ganze Erdkugel nach landläufiger Anschauung in der Weltmitte ruht.

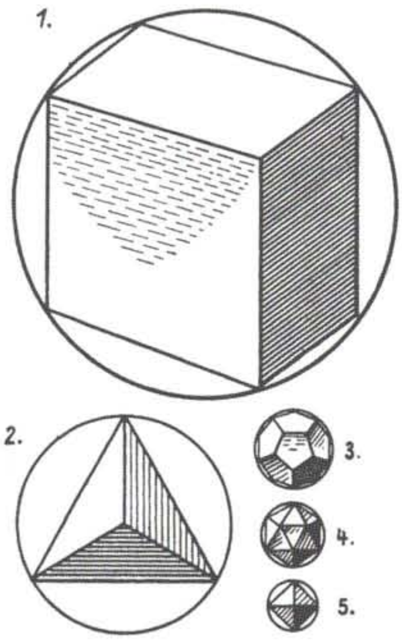
Ferner ist beim Oktaeder für das Auge die Lage die angemessene, wenn es an zwei gegenüberliegenden Ecken wie in einem Drehgestell aufgehängt wird. Genau in der Mitte zwischen diesen Ecken liegt ein verstecktes Quadrat, das den Körper der Figur in zwei gleiche Teile zerlegt wie ein Großkreis die an zwei Polen aufgehängte Kugel. Das ist gewissermaßen das Bild der Beweglichkeit, wie die Luft unter den Elementen das beweglichste ist, in Geschwindigkeit und Richtungsänderung.

Beim Tetraeder mag die geringe Zahl der Seitenflächen die Trockenheit des Feuers andeuten, da ja die Definition des Trockenen darin besteht, daß es sich in seinen eigenen Grenzen hält. Andererseits mag beim Ikosaeder die große Zahl der Seitenflächen die Feuchtigkeit des Wassers andeuten, da die Definition des Feuchten darin besteht, daß es von nichteigenen Grenzen umschlossen wird; es läßt ja ein geringer Bestand auf Eigenes, ein großer Bestand auf Erworbenes, Fremdes schließen. Weiter kann man auch sagen, das ebene Dreieck ist dem Tetraeder eigen, weil die ganze Tetraederfigur ein körperliches Dreieck ist. Andererseits aber ist beim Ikosaeder das Dreieck nicht etwas Eigenes, sondern etwas Entlehntes, da die Körperlichkeit des Ikosaeders dem Fünfeck ähnlich ist, nicht dem Dreieck. Hinwieder sieht es so aus, als ob in der Spitze des Tetraeders, die sich über einer einzigen Basis erhebt, die durchdringende und scheidende Kraft des Feuers angedeutet werde; in der stumpfen, fünfkantigen Ecke des Ikosaeders die ausfüllende Fähigkeit der Flüssigkeiten, d. i. die Bedeutung des Benetzens; in der Kleinheit und Magerkeit des Tetraeders die Natur des Feuers; in der kugelförmigen Masse des Ikosaeders die Natur des Wassers und gleichsam die Figur des Tropfens. Beim Tetraeder ist sehr viel Oberfläche vorhanden, aber sehr wenig Rauminhalt; beim Ikosaeder ist die körperliche Masse im Vergleich zur Oberfläche viel größer. In entsprechender Weise tritt beim Feuer die Form, beim Wasser die Materie besonders hervor.

Das Dodekaeder wird dem himmlischen Körper überlassen, wie es ja auch die gleiche Anzahl von Seitenflächen besitzt wie der himmlische Tierkreis Zeichen. Es läßt sich beweisen, daß es unter allen übrigen Figuren das größte Fassungsvermögen hat, wie auch der Himmel alles umfaßt.

Diese Analogie ist zwar plausibel, freilich nicht für Aristoteles, der die Erschaffung der Welt leugnete und daher den urbildlichen Sinn der quantitativen Figuren nicht anerkennen konnte, da ein solcher diesen Figuren nicht innewohnen kann, wenn kein Baumeister da ist, um etwas Körperliches zu schaffen. Die Analogie ist aber plausibel für mich und für alle Christen, die wir im Glauben daran festhalten, daß die Welt, die ehedem nicht war, von Gott geschaffen worden ist nach Gewicht, Maß und Zahl, d. h. nach Ideen gleich ewig wie Gott. Wenn jedoch auch die Analogie im allgemeinen plausibel ist, so ist sie doch in dieser speziellen Form keineswegs notwendig bedingt und läßt andere Auffassungen zu, nicht nur wegen der Unstimmigkeit gewisser Eigenschaften bei dieser Analogie, sondern auch deswegen, weil Dodekaeder und Ikosaeder zum Feuer besser passen, und weil schließlich über die Zahl der Elemente und die Ruhe der Erde viel mehr disputiert wird als über die Zahl dieser Figuren.

† Wenn nun die Pythagoreer hierauf bestanden, so tadle ich in diesem Teil den Ramus und Aristoteles nicht, weil sie diese durch Hin- und Hergerede verdrehte Analogie verwarfen. Allein ich habe vor 24 Jahren in ganz anderer Weise diese fünf Körper im Weltbau aufgespürt und in der Vorrede zum ersten Buch gesagt, mir scheine die Annahme vernünftig, daß dies auch die Lehre der Alten gewesen sei, nur nach Sektenart versteckt. Denn die Astronomie des Kopernikus oder des alten Pythagoreers Aristarch aus Samos läßt die bewegliche Welt so angeordnet sein, daß darin 6 Sphären oder Bahnen auftreten, die um die unbewegliche Sonne im Mittelpunkt herumführen und durch große, ungleiche Abstände voneinander getrennt sind, nämlich die äußerste Sphäre des Saturn, dann die des Jupiter, des Mars, der Erde mit dem Mond, der Venus, schließlich die innerste des Merkur. Nun ist es eine wesentliche Eigenschaft jener fünf Figuren, daß sie mit ihren Ecken in eine Kugelfläche einbeschrieben und mit den Mittelpunkten ihrer Seitenflächen um eine solche umbeschrieben werden können, so daß jeder Figur ein bestimmter Abstand zwischen ihren beiden Kugeln zukommt. Was konnte daher plausibler erscheinen, als daß der Schöpfer die fünf Abstände zwischen jenen sechs himmlischen Sphären den fünf Figuren entnommen hat, und zwar in der Reihenfolge, daß zwischen den Sphären von Saturn und Jupiter der Würfel zu denken ist, zwischen Jupiter und Mars das Tetraeder, zwischen Mars und Erde das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder und zwischen Venus und Merkur das Oktaeder!



Diese Aufteilung läßt sich zahlenmäßig erforschen; sie ist zwingend; sie sucht nicht ängstlich nach einer Zahl von Körpern, sondern belegt eine solche, wie sie da ist. Sie ist schließlich in einer Weise ausgebildet, daß sie seit 22 Jahren nicht nur keinen Gegner gefunden, sondern sogar Schüler des unüberlegten Lehrers und Euklidgeißlers Ramus verlockt hat und heute so viele verlockt, daß die Mathematiker seit langem nach einer zweiten Auflage rufen. Hierüber mehr zu sagen ist jedoch nicht Aufgabe dieses zweiten Buches. Der Leser wird unten im fünften Buch mehr finden, einiges auch im IV. Buch der Epitome Astronomiae, wo der wahre Ursprung jener fünf räumlichen Figuren metaphysisch erklärt wird. Denn ihre obige Bildung aus den Ecken ist nicht in Wahrheit ihr Ursprung; sie ergibt sich vielmehr, nachdem die Figuren bereits entstanden sind, als etwas, was aus der Natur folgt.

XXVI. SATZ.

Den vollkommensten regulären Kongruenzen lassen sich noch zwei andere Kongruenzen von zwölf ebenen Fünfecksstern en sowie zwei halbräumliche von Sternen des Achtecks und des Zehnecks hinzufügen.

Die Fünfeckssterne schließen nämlich allseitig räumliche, mit Spitzen versehene Figuren ein, von denen die eine 12 fünfkantige Ecken, die andere 20 dreikantige Ecken besitzt. Der erstere Stern steht auf drei Ecken, der letztere auf fünf. Der erstere sieht schöner aus, wenn er auf eine Ecke aufrecht gestellt wird, der letztere sitzt richtiger, wenn er auf fünf Ecken ruht. (Siehe die Figuren *Ss* und *Tt* auf der Tafel S. 74.) Bei ihnen erscheint zwar von außen gesehen keine reguläre Seitenfläche, sondern dafür ein gleichschenkliges Fünfecksdreieck. Es liegen jedoch immer fünf solche Dreiecke in einer Ebene; diese stehen rings um ein räumlich verstecktes Fünfeck, das gleichsam ihr Herz ist, und bilden mit diesem zusammen den genannten Fünfeckstern, eine Figur, die im Deutschen Drudenfuß heißt und für Theophrastus Paracelsus das Zeichen der Gesundheit ist. Die Idee des Körpers ist in gewisser Hinsicht die gleiche wie die seiner Seitenfläche. Bei dieser, d. h. beim Fünfecksstern, liegen jeweils Seiten von zwei Dreiecken auf einer Geraden, von der das innere Stück Grundlinie eines äußeren Dreiecks und zugleich Seite des inneren Fünfecks ist. Ebenso liegen bei dem Körper jeweils einzelne gleichschenklige Dreiecke von fünf räumlichen Ecken in einer Ebene, und der innere Kern, das Herz dieser fünf Dreiecke oder des Sterns, ein Fünfeck, wird Grundfläche, auf der bei dem einen Körper eine, bei dem anderen fünf räumliche Ecken stehen. Die Verwandtschaft dieser Figuren, der einen mit dem Dodekaeder, der anderen mit dem Ikosaeder, ist so groß, daß diese letzteren, zumal das Dodekaeder, gewissermaßen als Stümpfe oder Torso erscheinen, wenn man sie mit jenen stachligen Körpern vergleicht. †

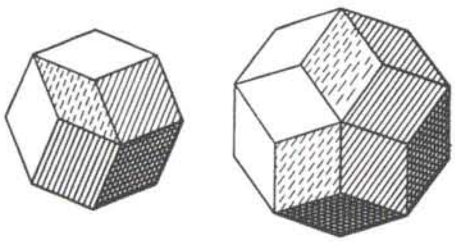
Die Achtecks- und Zehneckssterne, in denen nach Überspringen zweier Zacken immer Seiten einer ersten und vierten Zacke auf einer Geraden liegen, stoßen jeweils zu zwei und zwei mit solchen Seiten zusammen. Die ersteren bilden hiebei eine Art Würfel, die letzteren eine Art Dodekaeder, Figuren, die nicht so fast Ecken als Ohren haben, da notwendig beim Zusammenfügen zweier ebener Ecken eine Lücke entsteht, die nicht geschlossen werden kann. Daher ist die Kongruenz nach Def. XI nur halbräumlich.

Vollkommenst heißen jene räumlichen und diese halbräumlichen Kongruenzen, da auf sie selber hinsichtlich ihrer Räumlichkeit die VI. Definition dieses Buches, auf die Seitenflächen aber die Definition einer vollkommenen Figur zutrifft, die sich unter Nr. 2 im I. Buch findet; die Seitenflächen sind darnach sekundäre vollkommene Figuren. Es ist auch nicht sinnlos, wenn wir die halbräumlichen Figuren vollkommenst nennen, da wir mit diesen etwas versucht haben, auf das nicht die IX. oder X., sondern die VI. Definition zuträfe, wenn es vollendet werden könnte.

XXVII. SATZ.

Vollkommenste räumliche Kongruenzen werden auch gebildet von halbregulären Figuren, nämlich von ebenen Rhomben, und zwar in zwei Fällen.

† Aus 12 ebenen Rhomben mit bestimmtem Verhältnis ihrer Diagonalen entsteht ein räumlicher Rhombus, die Figur einer Bienenzelle, soweit die Sechszahl der Seiten und die dreikantige Form des räumlichen Bodens in Betracht kommen. Fügt man nämlich 6 Rhomben so zusammen, daß immer zwei stumpfe und zwei spitze Ecken zusammenstoßen, so entstehen oben und unten 3 stumpfwinklige Lücken, während 3 Paare von spitzen ebenen Ecken hinausstehen. Wenn man nun 3 Rhomben mit ihren stumpfen Ecken zusammenfügt, so paßt eine solche Figur auf beiden Seiten der ersteren Figur mit ihren 3 hinausstehenden Teilen in jene Lücken, während sie in ihre eigenen Lücken die hinausstehenden Teile der ersteren Figur aufnimmt.



† In gleicher Weise bilden 30 ebene Rhomben mit einem anderen Verhältnis der Diagonalen einen räumlichen Rhombus, das Triakontaeder. Man füge zweimal 5 Rhomben mit ihren spitzen Ecken zusammen; damit erhält man zwei räumliche Ecken, die man einander gegenüberstellt. Die Lücken, die an den stumpfen Ecken entstehen, werden ausgefüllt durch die stumpfen Ecken von je 5 weiteren Rhomben. Mitten zwischen diesen beiden schalenförmigen Figuren läuft ein Gürtel aus 10 Rhomben ringsherum, der die beiden Schalen miteinander verbindet.

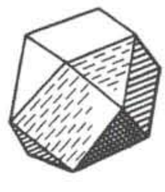
Daß es nicht mehr vollkommene rhombische Kongruenzen gibt, läßt sich so zeigen: Es sind immer zwei Winkel in einem ebenen Rhombus spitz, zwei stumpf; je ein spitzer und ein stumpfer geben zusammen 2 Rechte. Nun können nicht mehr als 3 stumpfe Ecken zusammenstoßen, damit nicht der Betrag von 4 Rechten überschritten wird. Fügt man also nur 3 spitze Ecken zusammen, so entsteht, wie beim Würfel, ein rhombisches Hexaeder mit nur 2 spitzen räumlichen Ecken, die den größten Abstand voneinander haben, während die übrigen räumlichen Ecken in der Mitte des Körpers nicht so weit voneinander entfernt sind. Es werden also die Vorschriften der Definition VIII nicht eingehalten, die nicht gestattet, daß nur 2 Ecken auf einer Kugel liegen. Außerdem wird von den 6 stumpfen Ecken eine jede von 2 stumpfen und einer spitzen ebenen Ecke geschlossen, eine Unregelmäßigkeit, die wiederum den Definitionen widerspricht. Es dürfen also nicht nur 3 spitze ebene Ecken zusammenlaufen. Aber auch 6 spitze ebene Ecken von ebensovielen Rhomben gehen nicht zusammen. Denn wenn jede $^2/_3$ Rechte besitzt, so sind die stumpfen doppelt so groß, nämlich $^4/_3$ Rechte. Es würden also 3 stumpfe wie 6 spitze Ecken 4 Rechte ergeben; weder jene noch diese könnten eine räumliche Ecke bilden, sie würden vielmehr die Ebene kontinuierlich überdecken wie in Figur *G*. Wenn man aber die spitzen Ecken kleiner annimmt, so werden die stumpfen Ecken noch größer werden und drei von ihnen überschreiten 4 Rechte. Also gibt es nur 2 vollkommenste rhombische Kongruenzen; eine, bei der 4, eine zweite, bei der 5 spitze rhombische Ecken in einer räumlichen Ecke zusammenlaufen. Dazu gesellt sich jedoch noch der Würfel, gleichsam der Anfang aller Rhomben, da seine Seitenfläche wie die Rhomben 4 gleiche Seiten besitzt.

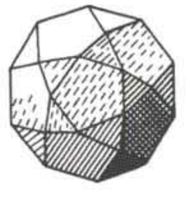
XXVIII. SATZ.

Vollkommene räumliche Kongruenzen niedereren Grads gibt es 13. Es entstehen hiebei die 13 archimedischen Körper. †

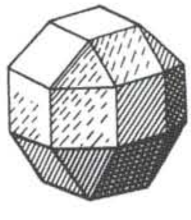
Da bei diesem Grad unterschiedliche Figuren vermengt werden, handelt es sich hiebei nach Satz XXI um Figuren entweder von zwei oder von drei Arten. Im ersteren Fall sind unter den Figuren Dreiecke oder nicht. Aus Dreiecken und Vierecken nun lassen sich 3 Körper bilden, auf die die Definition IX zutrifft. Denn durch diese Definition werden die 3 Formen verworfen, bei denen die räumliche Ecke eingeschlossen wird entweder von einer ebenen Vierecksecke und zwei solchen Dreiecksecken oder von einer ebenen Vierecksecke und drei Dreiecksecken oder von zwei Vierecksecken und einer Dreiecksecke. Denn im ersten Fall tritt nur ein Viereck auf, es entsteht die Hälfte eines Oktaeders (Fig. *Oo*), die räumlichen Ecken sind verschiedenartig. Im zweiten Fall treten nur 2 Vierecke auf, im dritten nur 2 Dreiecke. Das sind aber nach Satz X unvollkommene Kongruenzen. Es bleiben also übrig die Arten, bei denen ebene Figuren die körperliche Ecke in folgender Weise bilden. Erstens 4 Dreiecks- und 1 Vierecksecke; diese sind nämlich kleiner als 4 Rechte. Dabei treten auf 6 Vierecke und 32 (d. h. 20 und 12) Dreiecke. Es entsteht eine 38-flächige Figur, die ich einen abgestumpften Würfel (cubus simus) nenne. Siehe Fig. 12.

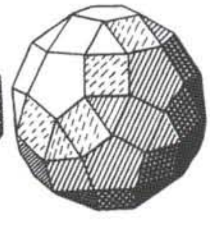
5 Dreiecks- und 1 Viereckswinkel übersteigen 4 Rechte, wo doch die Winkel nach Satz XVI bei der Bildung einer räumlichen Ecke kleiner als 4 Rechte sein müssen. Das Gleiche gilt für 4 Dreieckswinkel und 2 Viereckswinkel. 3 Dreieckswinkel und 2 Viereckswinkel machen 4 Rechte aus.

8. 

 9.

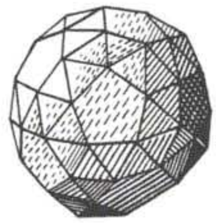
Zweitens, 2 Dreieckswinkel und 2 Viereckswinkel sind kleiner als 4 Rechte. Hier treten auf 8 Dreiecke und 6 Vierecke zur Bildung eines 14-Flachs, das ich Kuboktaeder nenne. Es ist abgebildet unter Nr. 8. 2 Dreiecks- und 3 Viereckswinkel übersteigen 4 Rechte.

10. 

 11.

Drittens, 1 Dreiecks- und 3 Viereckswinkel sind kleiner als 4 Rechte. Hier treten auf 8 Dreiecke und 18 (d. h. 12 und 6) Vierecke zur Bildung eines 26-Flachs, das ich einen beschnittenen Kuboktaeder-Rhombus nenne. Abgebildet ist dieser in Nr. 10.

12. 

 13.

In diesen 3 Fällen treten Vierecke neben Dreiecken auf. Wir wollen nun diesen letzteren Fünfecke zugesellen.

5 Dreieckswinkel haben neben 1 Fünfeckswinkel keinen Platz, da sie ja schon neben dem kleineren Viereckswinkel keinen Platz finden konnten. 4 Dreiecks- und 1 Fünfeckswinkel sind kleiner als 4 Rechte. Es treten hier 80 (d. i. 20 und 60) Dreiecke und 12 Fünfecke zur Bildung eines 92-Flachs auf, das ich abgestumpftes Dodekaeder (dodecaëdron simum) nenne. Es ist abgebildet in Nr. 13. In dieser Reihe abgestumpfter Körper könnte das Ikosaeder der dritte sein, da es gewissermaßen ein abgestumpftes Tetraeder ist.

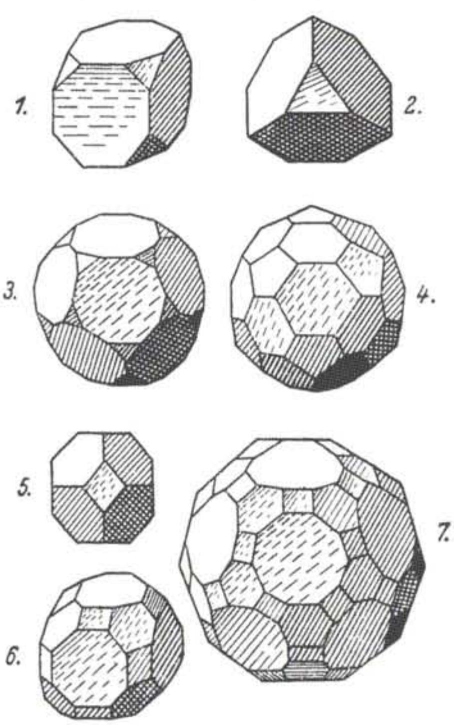
Wenn man 3 Dreieckswinkel einem Fünfeckswinkel zugesellt, so tritt wie oben der Fall ein, daß nur 2 Fünfecke in dem hiebei entstehenden Körper vorkommen. Wenn man 2 Dreieckswinkel mit 1 Fünfeckswinkel verbindet, so tritt im Körper nur 1 Fünfeck auf. Im ersteren Fall entsteht die Zone oder mittlere Säule, im zweiten Fall die Pyramide, wie sie als Teile des Ikosaeders (siehe Figur *Pp*) auftreten; im zweiten Fall sind auch die räumlichen Ecken nicht von gleicher Art, da ja eine einzelne Ecke wie beim Ikosaeder von 5 Dreiecksecken umgeben wird. Damit ist der Fall der Ecken mit einem einzigen Fünfeckswinkel erledigt. 3 Dreiecks- und 2 Fünfeckswinkel sind zusammen größer als 4 Rechte. Damit ist der Fall von Ecken mit 3 Dreieckswinkeln in Verbindung mit Fünfeckswinkeln erledigt. 2 Dreiecks- und 2 Fünfeckswinkel sind zusammen kleiner als 4 Rechte. Hier treten 20 Dreiecke und 12 Fünfecke zu einem 32-Flach zusammen, das ich Ikosidodekaeder nenne. Es ist abgebildet in Nr. 9. Den Fall zweier Dreiecke mit 1 Fünfeck haben wir bereits verworfen. Wir sind also mit den Fällen, in denen 2 Dreiecke auftreten, fertig.

1 Dreiecks- und 3 Fünfeckswinkel sind zusammen größer als 4 Rechte. Die Kongruenz aus 1 Dreiecks- und 2 Fünfecksecken ist aber nach Satz XXIII nicht regulär, da das Fünfeck eine Figur mit ungerader Seitenzahl ist. Damit sind die Verbindungen von Dreiecken und Fünfecken erledigt.

4 Dreiecks- und 1 Sechseckswinkel oder 2 Dreiecks- und 2 Sechseckswinkel füllen die Ebene aus. 3 Dreieckswinkel sind zusammen mit 2 Sechseckswinkeln größer als 4 Rechte, mit 1 Sechseckswinkel bilden sie einen Körper, der nur 2 Sechsecke besitzt. Die Fälle mit 3 Dreieckswinkeln sind also hinfällig. 2 Dreieckswinkel sind gleich 1 Sechseckswinkel; dieser Fall scheidet daher ebenfalls aus nach Satz XXII. Es bleibt allein die Verbindung von 1 Dreiecks- mit 2 Sechsecksecken übrig. Hier treten 4 Dreiecke und 4 Sechsecke auf zur Bildung eines 8-Flachs, das ich Tetraederstumpf nenne. Er ist abgebildet in Nr. 2.

4 Dreieckswinkel sind zusammen mit einem Siebenecks- oder noch größeren Winkeln größer als 4 Rechte. Man braucht also hinfort Fälle mit 4 Dreieckswinkeln nicht mehr zu erwähnen, ebensowenig wie die mit 3 solchen Winkeln, aus oft angeführten Gründen. 2 Dreieckswinkel mit 2 Winkeln von Figuren, die größer als das Sechseck sind, übersteigen 4 Rechte. Man braucht also hinfort die Fälle von 2 Dreieckswinkeln in Verbindung mit 2 Winkeln einer größeren Figur nicht mehr zu erwähnen, ebenso auch nicht die Fälle von 2 Dreieckswinkeln in Verbindung mit 1 Winkel einer größeren Figur, da dieser größer ist als jene beiden zusammen; ein solcher Fall wird durch das Axiom XXII ausgeschlossen. Es bleibt also nur übrig, den Fall zu prüfen, in dem 1 Dreieckswinkel mit 2 Winkeln einer Figur, die größer als das Sechseck ist, sich verbindet. Der Fall mit 2 Siebenecken scheidet aus nach Satz XXIII, wie alle Fälle mit 2 Vielecken von ungerader Seitenzahl. Der Fall mit 2 Achteckswinkeln liefert einen Körper, in dem 8 Dreiecke und 6 Achtecke zur Bildung eines 14-Flachs auftreten, das ich Würfelstumpf nenne. Dessen Figur ist abgebildet in Nr. 1. Mit 2 Zehneckswinkeln erhält man einen Körper, in dem 20 Dreiecke und 12 Zehnecke zur Bildung eines 32-Flachs auftreten, das ich Dodekaederstumpf nenne. Er ist abgebildet in Nr. 3. Mit 2 Zwölfecken wird die Ebene ausgefüllt; es entsteht keine räumliche Ecke, noch weniger ist das der Fall mit größeren Vielecken. Damit ist man mit den Dreiecken überhaupt fertig, soweit es sich um die Verbindung von Figuren zweier Arten handelt.

Da also unter den zwei Arten von Seitenflächen keine Dreiecke mehr auftreten, kommt als nächstkleinere Figur das Viereck in Betracht. Nun aber sind 3 Viereckswinkel zusammen mit einem Winkel einer größeren Figur größer als 4 Rechte. 2 Viereckswinkel mit einem Winkel einer größeren Figur werden nicht zugelassen nach Definition IX, da von den Figuren der größeren Art jeweils nur 2 in dem räumlichen Körper auftreten. 1 Viereckswinkel mit 2 Fünfeckswinkeln scheidet aus nach Satz XXIII. Dagegen geht 1 Viereckswinkel mit 2 Sechseckswinkeln zusammen. Es treten hiebei 6 Vierecke und 8 Sechsecke auf zur Bildung eines 14-Flachs, das ich Oktaederstumpf nenne. Er ist abgebildet in Nr. 5. Die Verbindung von 1 Viereckswinkel und 2 Siebeneckswinkeln oder 2 Winkeln von anderen Figuren mit ungerader Seitenzahl ist nach Satz XXIII ausgeschlossen. 1 Viereckswinkel und 2 Achteckswinkel erfüllen den Raum, 1 Viereckswinkel und 2 noch größere Winkel übersteigen 4 Rechte; sie erheben sich nicht zur Bildung einer räumlichen Ecke. Damit ist man mit dem Viereck fertig, insoweit es nur zwei Arten von Seitenflächen sein dürfen.



2 Fünfeckswinkel mit 1 Sechseckswinkel oder irgendeinem anderen einzelnen Winkel unternehmen etwas, was nach Satz XXIII zu verwerfen ist, was bereits oben auch von der Verbindung eines Dreiecks oder Vierecks mit 2 Fünfecken geltend gemacht wurde. Außerdem erfüllen 2 Fünfecks- mit 1 Zehneckswinkel die Ebene, sie erheben sich weder mit diesem noch mit einem größeren zu einer körperlichen Ecke.

1 Fünfeckswinkel zusammen mit 2 Sechseckswinkeln macht weniger als 4 Rechte aus. Es treten hier 12 Fünfecke und 20 Sechsecke zur Bildung eines 32-Flachs auf, das ich Ikosaederstumpf nenne. Seine Form ist abgebildet in Nr. 4. Mehr ist vom Fünfeck nicht zu erwarten. Denn 1 Fünfecks- und 2 Siebeneckswinkel übersteigen bereits 4 Rechte. 1 Sechseckswinkel erfüllt mit 2 anderen die Ebene, mit größeren übersteigt er 4 Rechte. Es ist daher Schluß mit den Körpern, die von zweierlei Seitenflächen gebildet werden.

Wenn man nun Seitenflächen von dreierlei Art zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen will, so sei zuerst bemerkt, daß 1 Vierecks- und 1 Fünfeckswinkel zusammen 2 Rechte übersteigen; noch mehr gilt das von größeren Winkeln; 3 Dreieckswinkel aber sind zusammen 2 Rechte. Man darf also nicht 3 Dreieckswinkel heranziehen, da sonst die Summe von 4 Rechten überschritten würde. 2 Dreieckswinkel mit 1 Vierecks- und 1 Fünfeckswinkel oder statt diesem 1 Sechsecks- oder irgendeinem größeren Winkel scheiden nach Satz XXIII aus, da in diesem Fall das Dreieck als eine Figur von ungerader Seitenzahl mit einem Viereck und einem Fünfeck oder statt diesem einem Sechseck usw. umgeben würde.

Ein einziger Dreieckswinkel nun mit 2 Vierecks- und 1 Fünfeckswinkel sind zusammen kleiner als 4 Rechte. Es fügen sich hier 20 Dreiecke mit 30 Vierecken und 12 Fünfecken zusammen zu einem 62-Flach, das ich Rhombenikosidodekaeder oder einen beschnittenen Ikosidodekaeder-Rhombus nenne. Er ist abgebildet in Nr. 11.

1 Dreiecks- und 2 Viereckswinkel sind zusammen mit einem Sechseckswinkel gleich 4 Rechten, mit einem größeren Winkel übersteigen sie diesen Betrag und erheben sich nicht zu einer räumlichen Ecke. Lassen wir also die 2 Viereckswinkel.

1 Dreiecks-, 1 Vierecks- und 2 Fünfeckswinkel übersteigen 4 Rechte; das gilt noch mehr, wenn man 2 noch größere Winkel hinzunimmt. Man ist daher am Ende mit der Verbindung von 4 Seitenflächen zur Bildung einer räumlichen Ecke und damit auch mit den Dreiecken bei der Verwendung von Figuren von dreierlei Art. Denn die Verbindung eines Dreiecks, eines Vierecks und eines Fünfecks oder irgendeines anderen Vielecks an dessen Stelle scheidet aus nach Satz XXIV, da das Dreieck eine Figur mit ungerader Seitenzahl ist.

Da es sich also fernerhin nur um 3 ebene Ecken handelt, so darf unter den Figuren nach demselben Satz XXIV keine mit ungerader Seitenzahl sein.

Ein Viereckswinkel macht mit den beiden nächstgrößeren Winkeln, einem Sechsecks- und einem Achteckswinkel, weniger als 4 Rechte aus. Es fügen sich hier 12 Vierecke, 8 Sechsecke und 6 Achtecke zur Bildung eines 26-Flachs zusammen, das ich Kuboktaederstumpf nenne, nicht etwa weil es durch Abstumpfung erzeugt werden könnte, sondern weil es dem abgestumpften Kuboktaeder ähnlich ist. Der Körper ist abgebildet in Nr. 6.

Ein Viereckswinkel macht mit einem Sechsecks- und einem Zehneckswinkel weniger als 4 Rechte aus. Es fügen sich hier 30 Vierecke, 20 Sechsecke und 12 Zehnecke zur Bildung eines 62-Flachs zusammen, das ich Ikosidodekaederstumpf nenne, aus einem ähnlichen Grund wie vorhin. Er ist abgebildet in Nr. 7.

Wenn statt des Zehnecks ein Zwölfeck in die Gesellschaft eintritt, so werden 4 Rechte voll, und es entsteht keine körperliche Ecke. Wenn an Stelle des Sechsecks ein Achteck tritt und die dritte Stelle ein Vieleck größer als das Achteck einnimmt, ergeben sich mehr als 4 Rechte; desgleichen, wenn man das Viereck wegläßt und drei verschiedene größere Figuren mit gerader Seitenzahl zusammengesellt. Es hält sich also die ganze Familie der archimedischen Körper im Bereich der Zahl 13, was zu beweisen war.

XXIX. SCHLUSSFOLGERUNG.

Kongruente Figuren sind es im ganzen zwölf, acht ursprüngliche oder primäre und vier erweiterte oder Sterne.

1. Dreieck	7. Zwölfeck
2. Viereck	8. Zwanzigeck
3. Fünfeck	9. Fünfeckstern
4. Sechseck	10. Achteckstern
5. Achteck	11. Zehneckstern
6. Zehneck	12. Zwölfeckstern.

Die Grade der Kongruenz sind verschieden. Zum ersten gehören Dreieck und Viereck, da sie Kongruenzen bilden sowohl im Raum wie in der Ebene, sowohl die einzelnen Arten für sich als auch in Verbindung miteinander oder in Verbindung mit anderen Vielecken.

Zum zweiten Grad gehören das Fünfeck und sein Stern. Denn diese beiden bilden je für sich Kongruenzen im Raum, wie sie auch einander Dienste in der Ebene leisten. Doch kommt das Fünfeck vor dem andern, da es auch mit verschiedenen anderen Vielecken in der Ebene wie im Raum Kongruenzen bildet.

Zum dritten Grad gehört das Sechseck, da die Figuren dieser Art für sich in der Ebene Kongruenzen bilden, mit anderen dagegen sowohl im Raum wie in der Ebene.

Den vierten Grad nehmen ein Achteck und Zehneck mit ihren Sternen. Denn im Raum bilden jene beiden mit einigen anderen Vielecken Kongruenzen, die Sterne aber mit Figuren einzelner Arten wenigstens bis zu einer gewissen Grenze. In der Ebene bilden alle vier Kongruenzen mit anderen, die Achtecksippe jedoch in mannigfaltigerer und vollkommenerer Weise.

Der fünfte Grad umfaßt das Zwölfeck mit seinem Stern. Während sie im Raum in keiner Weise beteiligt sind, bilden sie in der Ebene in mannigfaltiger Weise Kongruenzen mit anderen. An der Bildung von Kongruenzen im Raum hindert sie einzig ihre Größe. Was ihre Rolle in der Ebene anlangt, so ist diese Sippe dem vierten Grad vorzuziehen.

Der letzte Grad enthält das Zwanzigeck, da dieses nur in der Ebene und nur mit anderen, und zwar mit diesen auch noch in unvollkommener Weise Kongruenzen bildet.

Wenn wir nur auf die Ebene Rücksicht nehmen, so wird die Ordnung der Figuren folgende sein: 1. Sechseck. 2. Viereck. 3. Dreieck. 4. Zwölfeck. 5. Dessen Stern. 6. Achteck. 7. Dessen Stern. 8. Fünfeck. 9. Dessen Stern. 10. Zehneck. 11. Dessen Stern. 12. Zwanzigeck.

Alle anderen Figuren sind inkongruent. Der Kongruenz am nächsten kommt jedoch das Fünfzehneck, da es zwar den Anfang zu einer Kongruenz mit anderen in der Ebene macht, jedoch nach Satz XX nicht wie das Zwanzigeck ringsherum in gleichförmiger Weise eingeschlossen werden kann. Darauf folgt die Figur mit 16 Seiten und ähnliche, die schlechterdings keine Kongruenzen mit anderen regulären Figuren bilden, da sie die Größe ihrer Winkel daran hindert. Das Siebeneck und ähnliche Vielecke dagegen sind aus einem ganz anderen Grund inkongruente Figuren, weil weder die ganzen Winkel noch irgendwelche den Figuren eigene Teile der Winkel mit anderen regulären Vielecken Kongruenzen bilden können.

So hört also bei den drei für sich darstellbaren Klassen die Kongruenz auf mit dem Achteck, dem Zwölfeck und dem Zwanzigeck; bei der vierten Bastardklasse fängt sie nicht einmal an. Das wird im IV. Buch bei der Auswahl der Aspekte seine Anwendung finden.

XXX. SCHLUSSFOLGERUNG.

Aus dem Vorausgehenden erhellt der naturgegebene Unterschied zwischen der Darstellbarkeit und der Kongruenz der Figuren hinsichtlich der Ausdehnung.

1. Die Grade der eigentlichen Darstellbarkeit erstrecken sich über das Achteck, Zehneck, Zwölfeck hinaus auf alle Figuren mit immer doppelter Seitenzahl bis ins Unendliche; die Kongruenz dagegen schließt ab mit dem Achteck, Zwanzigeck und Zwölfeck. 2. Das Fünfeck mit seinem Stern ist hinsichtlich der Darstellbarkeit und Wißbarkeit von niedererem Rang als das Zwölfeck; hin-

 sichtlich der Kongruenz im Raum ist es von viel höherem Rang. 3. Das Achteck gehört in ersterer Hinsicht mit dem Fünfeck zusammen; in letzterer Hinsicht geht das Fünfeck voran. 4. In ersterer Hinsicht stand das Sechzehneck an einem besseren Platz als das Zwanzigeck. Und doch ist jene Figur inkongruent, während die letztere bis zu einer gewissen Grenze kongruent ist. 5. Beim Fünfzehneck jedoch besteht in beider Hinsicht eine gefällige Übereinstimmung und Analogie. Denn wie seine Darstellung keine eigentliche, sondern nur eine akzidentelle ist, so ist seine Kongruenz keine vollendete, sondern eine, die nur einen Anfang macht und nicht die ganze Figur umschließt. Das ist unten im III. Buch bei der Entstehung und Anwendung des Halbtons zu beachten.

Ende des II. Buches.